ابراهیم ریحانی*
فهیمه کلاهدوز**

ماهیت فرهنگی و اجتماعی اثبات در آموزش ریاضی

چکیده

محیط اجتماعی و فرهنگی جامعه می‌تواند بر روند آموزش و یادگیری افراد آن مؤثر واقع شود. آموزش ریاضیات نیز از این قاعده مستثنا نیست. به‌طور کلی، ارائهٔ مفاهیم ریاضی و روش آموزش و یادگیری آن‌ها در دوره‌های گوناگون تحصیلی بـه عوامـل متفاوتی از جمله عوامل فرهنگی و اجتماعی غالب بر جامعهٔ موردنظـر (برای مثال، جامعهٔ معلمان یا جامعهٔ دانش‌آموزان) بستگی دارد. در آموزش ریاضیات، فرایندهای استدلال و اثبات از جایگاه ویژه‌ای برخوردار هستند. انجام این فرایندها در کلاس درس نیز به عوامل متعددی از جمله درک و فهم معلمان و دانش‌آموزان از اثبات، دورهٔ تحصیلی، سن دانش‌آموزان، توانایی‌های ریاضی آنان و عوامل دیگر وابسته است. توجه داشته باشید که این عوامل خود می‌توانند بر ماهیت استدلال و اثبات در آموزش ریاضی و شکل ارائهٔ آن‌ها در فرایند آموزش تأثیرگذار باشند. هدف این مطالعه، بررسی نظرات و دیدگاه‌های محققان و آموزشگران ریاضی در ارتباط با ماهیت فرهنگی و اجتماعی اثبات در ریاضیات بوده است.

کلیدواژه‌ها: ماهیت فرهنگی اثبات، ماهیت اجتماعی اثبات، اثبات در آموزش ریاضی

مقدمه

بسیاری از نظریه‌پردازان از نقطه‌نظر آموزشـی و معرفت‌شناسـی درصـدد پاسخ‌گویی به این پرسـش بوده‌اند که: «ماهیت اثبات ریاضی چیست؟» به‌طور کلی در شـاخه‌های متفاوت ریاضی و با توجه به جوامع موردنظر می‌توان تعاریفی با شرایط و ملاک‌های متفاوت برای اثبات ارائه کرد.

هـارل و سـاودر[1] (۲۰۰۷) بیـان می‌کنند که در پاسـخ به این سؤال باید چنـد عامل مهم را در نظـر گرفت. اول اینکه سـاخت دانش جدید در خلأ رخ نمی‌دهد، بلکه از طریـق دانش موجود

شـکل می‌گیرد. آنچه که یک شـخص در حال حاضر می‌داند، اسـاس آنچه را که در آینده خواهد دانسـت، تشـکیل می‌دهد. دوم اینکه شخص باید درستی مفهوم اثبات را آن‌گونه که در طول تاریخ ریاضیات فهمیده شده و با آن کار شده است، در نظر بگیرد. سوم اینکه به دلیل وابسـته بودن مفهوم اثبات به شرایط و ملاک‌های جامعهٔ موردنظر، شخص باید ماهیت اجتماعی اثبات را بشناسـد (در واقـع آنچه که به عنوان یک اسـتدلال متقاعد کننده توسط او ارائه می‌شود، باید توسط دیگران نیز پذیرفته شود).

لـدی[۳] (۲۰۰۱) یکی از سـاده‌ترین و پرکاربردتریـن تعاریف اثبـات را ارائه می‌دهـد. او بیـان مـی‌دارد کـه اثبات یـک اسـتدلال معقـول و منطقـی از حقایـق «قابـل قبـول»[۳] اسـت [Varghese, 2007]. با وجود این، چنین تعریفی موضوع را پیچیده‌تر می‌کند. برای مثـال، حقایقی که برای یک ریاضی‌دان قابل قبول است، ممکن است برای یک فیزیک‌دان قابل قبول نباشد [پیشین]. به‌طور کلی اثبات در زمینه‌های گوناگون برای افراد مختلف، معانی متفاوتی دارد. داروساز ممکن است با استفاده از آزمایش روی چند نفر، خواص داروی موردنظر را برای درمان یک بیماری به اثبات برساند. بـرای آمـاردان، اثبـات می‌تواند با یک احتمال معین اتفاق بیفتد. برای دانشمند تجربی، اثبات چیزی است که بتوان آن را آزمود. اما ریاضی‌دان با این شـواهد و مدارک قانع نمی‌شود [تال، ۱۳۸۵].

ریاضی‌دانـان معتقدند کـه اثبات ریاضـی دارای شـرایط و ملاک‌هـای دقیق‌تری اسـت. آن‌ها بر این باورند که اسـتدلال از طریق مشـاهده نمی‌تواند ثابت کند، زیرا چشـم‌ها می‌توانند ما را منحرف کننـد. اندازه‌گیـری نمی‌تواند ثابت کند، زیرا اطمینان و اعتبار حاصل از نتیجه‌گیری به دقت ابزار اندازه‌گیری بسـتگی دارد و آزمایش نیز به‌طور قطع ثابـت نمی‌کند، زیـرا نتایـج حاصل از آزمایش می‌تواند احتمالی باشد و پایدار نیست [جانسون[۴]، ۲۰۰۷، نقل شده در Varghese, 2007].

البتـه در برخـی مـوارد، بیـن ریاضی‌دانـان نیز نظـرات و دیدگاه‌های متفاوتی در مورد نقـش و اهداف اثبات و آنچه که یک اثبات را می‌سـازد، وجود دارد [Healy & Hoyles, 2000]. هارل و ساودر (۲۰۰۷) معتقدند که معنای اثبات و نقش آن و هر آنچه که اثبات را می‌سازد و همچنیـن ملاک‌های تأیید و پذیرش اثبات از شـخصی به شـخص دیگر و از جامعه‌ای به جامعهٔ دیگر متفاوت است. **ایگل‌ویتس و استویل** (۱۳۷۰) معتقدند، برخلاف استدلال‌هایی که در بحث‌های روزمره مورد استفاده قرار می‌گیرند، هر مرحلـه از اثبات ریاضی بایـد از لحاظ منطقی درست باشد و همین ملاک است که اثبات‌های ریاضی را مشکل می‌کند؛ زیرا هر شـخصی به سـادگی نمی‌تواند مجموعه‌ای از گزاره‌های معقول را بسازد. هارل (۲۰۰۸) نیز بیان می‌دارد که اثبات ریاضی استدلالی ویژه و خاص است که شخص آن را برای متقاعد کردن خودش یا دیگران در مورد درستی و صحت یک گزاره ارائه می‌دهد. به‌طور کلی می‌توان گفت که «اثبـات» یک فعالیت ریاضی است که بررسـی ماهیت آن، به عوامل زیادی از جمله عوامل شناختی، ریاضی، تاریخـی، معرفت‌شـناختی و اجتماعی بستگی دارد.

ماهیت فرهنگـی و اجتماعی اثبات در آموزش ریاضی

در اغلب موارد، پذیرش یک استدلال منطقی به عنوان یک اثبات هر چند هم که معتبر باشـد، به تجربـه و دقت فرد اثبات کننده و مخاطب او بستگی دارد. در واقـع پذیـرش یک اثبـات و تعیین اعتبار آن، فرایندی اجتماعی (گروهی) و وابسته به ملاک‌های مورد پذیرش و قابل قبول افراد جامعهٔ موردنظر است [Harel & Sowder, 2007; Mueller, 2007].

رامـان[۵] (۲۰۰۳) نیز معتقد اسـت که فرایند اثبات، شـامل «استدلال‌های شخصی»[۶] و «اسـتدلال‌های عمومی»[۷] اسـت. از نظـر او اسـتدلال شـخصی، اسـتدلالی اسـت که موجـب درک و فهم فرد می‌شـود و اسـتدلال عمومی، استدلالی اسـت که با دقت کافی برای یک جامعهٔ خـاص در زمینهٔ ریاضیات، ارائـه می‌شـود [Dee Vanspronsen, 2008]. بسـیاری از محققـان اثبات را به عنوان فراینـدی با ماهیت اجتماعی معرفی می‌کنند [Weber, 2003; Harel & Sowder, 2007; Brodie, 2010; Heinze, 2010].

مانیـن (۱۹۷۷) معتقد اسـت که یـک اثبات فقط پس از پذیرفته‌شـدن در اجتماع به عنوان یـک اثبات، اثبات به‌شمار می‌رود [Clements & Ellerton, 1996].

بالاچف (۱۹۸۷) اثبات را توضیحی تعریـف می‌کند که توسـط یک جامعهٔ معین و در یک زمان مشـخص پذیرفته می‌شود [Weber, 2003].

در جامعهٔ آموزشـی نیز هنجارها و قوانین اجتماعـی و فرهنگی در کلاس درس بر عملکرد ریاضـی دانش‌آموزان اثر می‌گذارد. این هنجارها شـامل موارد و الگوهایی هسـتند که توسـط معلم و دانش‌آمـوزان به عنوان یک توضیح و یا توجیه قابل قبول مطرح می‌شوند.

کـب و **یـاکل** (۱۹۹۶) اصطـلاح «ریاضیـات اجتماعی»[۸] را بـرای بیان تأثیر محیط و شـرایط آموزش از قبیل کتاب‌هـای درسـی، عقایـد و عملکرد معلمـان، و بازخـورد آن‌هـا از رویکرد دانش‌آموزان، مورد استفاده قرار می‌دهند و معتقدنـد که عوامل اجتماعی در کنار عوامل شـناختی نقـش بزرگـی را در یادگیری اثبات توسط دانش‌آموزان ایفا می‌کنند [پیشین].

هارل و ساودر (۲۰۰۷) معتقدند، فرایند اثبات فعالیتی اجتماعی (جمعی) است که می‌تواند در همهٔ برنامه‌های درسی ریاضیات، از دورهٔ پیش‌دبستانی به تمام دوره‌های تحصیلی نفوذ کند. آن‌ها بیان می‌دارند که اثبات هر گزارهٔ ریاضی، علاوه بر اینکه فرد اثبات‌کننده را در مورد صحت و درستی گزاره و فرایند اثبات متقاعد می‌کند، باید از نظر دقت و اعتبار مورد پذیرش و تأیید جامعهٔ موردنظر نیز باشد. لذا اغلب دانش‌آموزان در تعیین اینکه چه موقع یک اثبات کامل و تمام شده است، مشکل دارند. بسیاری از محققان در زمینهٔ آموزش ریاضی دلایل مهمی را برای تجدیدنظر در ضرورت دقت زیاد در یک اثبات بیان کرده‌اند. تأکید آن‌ها بر این است که برای ارائهٔ اثبات باید به مخاطبین و جامعهٔ مورد نظر توجه داشت [Stylianides & Stylianides, 2008]. برای مثال، اگر یک دانش‌آموز کلاس دوم ابتدایی بخواهد برای هم‌کلاسی‌هایش ثابت کند که حاصل جمع دو عدد، بزرگ‌تر یا مساوی با عدد بزرگ‌تر است، به احتمال زیاد باید گروهی از دانش‌آموزان را متقاعد کند که هنوز با کسرها و اعداد منفی آشنا نیستند.

لدی[9] (۲۰۰۱) معتقد است، آنچه که به عنوان اثبات برای دانش‌آموزان کلاس پنجم مطرح و مورد قبول واقع شده، ممکن است به عنوان یک اثبات ریاضی برای دانش‌آموزان دبیرستانی مناسب نباشد [Varghese, 2007].

بیشاب (۱۹۹۸) با ذکر مثالی بیان می‌کند اگرچه بیان این مطلب که جمع زوایای یک مثلث ۱۸۰ درجه است، به منطقهٔ جغرافیایی بستگی ندارد، ولی باز هم یک موضوع فرهنگی ـ اجتماعی است. او همچنین می‌پرسد: «چرا ۱۸۰ درجه و نه ۲۰۰ درجه؟» در واقع او معتقد است که اثبات بستگی به استفاده و پذیرش آن از سوی جامعهٔ موردنظر دارد [Clements & Ellerton, 1996].

ویلدر[10] (۱۹۸۱) معتقد است، همواره باید به این نکته توجه شود که آنچه اثبات را می‌سازد، از فرهنگی به فرهنگ دیگر و همچنین از سنی به سن دیگر متفاوت است. او و برخی از محققان بر این باورند که ریاضیات صرفاً مجموعه‌ای از حقایق مطلق نیست، بلکه حقایق می‌توانند براساس زمینه، مفهوم و کاربرد موردنظر تغییر کنند [Bayazit, 2009].

دت‌لفسن[11] (۲۰۰۵) بر این باور است که فرایند اثبات صرفاً جنبهٔ منطقی ندارد و موضوعی فرهنگی و اجتماعی به‌شمار می‌رود. در واقع او معتقد است که فرایند اثبات در یک بافت اجتماعی و فرهنگی تکامل می‌یابد و مخاطبان خاص خود را دارد. علاوه بر این، پذیرش اعتبار یک اثبات توسط ریاضی‌دانان، این مطلب را می‌رساند که تأیید و تصدیق اثبات، فرایندی اجتماعی است و معیارهای مورد پذیرش اثبات در یک جامعهٔ ریاضی با گذشت زمان و دانشی که آن‌ها به‌دست می‌آورند، تغییر می‌کند [پیشین].

ویلدر معتقد است، هنگامی که یک اثبات ریاضی مورد بررسی قرار می‌گیرد، می‌توان فرضیه‌ها و عقاید پنهانی منطبق با فرهنگ ریاضی عصر خود را در آن اثبات پیدا کرد. بهترین مثال‌های شناخته شده در این مورد، مثال‌های خوب و ایده‌آل از اثبات‌های دقیق در هندسه هستند که قبلاً تنها بر اصول **اقلیدس** منطبق بودند، در حالی که هم‌اکنون با توجه به مباحثی همچون هندسهٔ نااقلیدسی، هندسهٔ نتاری و غیره، این نتیجه حاصل می‌شود که ممکن است برخی از اثبات‌های هندسی با استفاده از اصول هندسهٔ اقلیدسی نامعتبر باشند.

عامل زبان نیز به عنوان یکی از عوامل فرهنگی جامعه در نظر گرفته می‌شود و تأثیر آن روی یادگیری مورد تأیید قرار گرفته است. برای مثال، ساختارهای زبانی که در زبان عامیانه از آن‌ها استفاده می‌شود، می‌توانند از ساختار زبانی که در زمینه‌های رسمی به‌خصوص در ریاضیات مورد استفاده قرار می‌گیرند، متفاوت باشند. برخی از تحقیقات نشان می‌دهند که معنای عامیانهٔ مفاهیم ریاضی (مثلاً حد و پیوستگی)، می‌تواند بر درک و فهم دانش‌آموزان و یادگیری این مفاهیم در آموزش رسمی اثر بگذارد.

در زمینهٔ اثبات نیز این سؤال مطرح است که: «آیا فهم دانش‌آموزان از اثبات، **متقاعد شدن**[12] است یا **اعتبار**[13] **اثبات**؟» برخی تحقیقات نشان می‌دهند که دانش‌آموزان بیشتر به «اثبات‌های متقاعدکننده» تمایل دارند تا «اثبات‌های معتبر» [Healy & Hoyles, 2000; Chin & Lin, 2009].

در تحقیق هیلی و هویلز (۲۰۰۰) معلوم شد که اغلب دانش‌آموزان اثبات‌های تجربی و روایت‌گونه را نزدیک به رویکرد خود می‌دانند، در صورتی که اثبات‌های رسمی (صوری) را برای دریافت نمرهٔ خوب از معلمشان انتخاب می‌کنند.

اینگلیس و رماس[14] (۲۰۱۱) معتقدند که گاهی دانش‌آموز نمی‌تواند بین «متقاعد شدن» و «اعتبار اثبات» تمایز قائل شود. همچنین، آنچه برای یک دانش‌آموز اثبات به‌شمار می‌آید، بستگی به محیط، جامعه و شخص اثبات‌کننده دارد. آن‌ها در مطالعهٔ خود به این نتیجه رسیدند که فهم دانش‌آموزان از کلمهٔ «اثبات»[15] نسبت به واژهٔ «ثابت‌کردن»[16] رسمی‌تر است. برخی از یادگیرندگان در مواجهه با واژهٔ «ثابت‌کردن» در سؤال مورد نظر، ارزیابی یک اثبات را براساس «متقاعد شدن» در مورد درستی اثبات انجام می‌دهند؛ در صورتی که اغلب آن‌ها در مواجهه با واژهٔ «اثبات»، براساس «اعتبار» اثبات ارئه شده، آن را مورد ارزیابی قرار می‌دهند. به‌طور کلی اینگلیس و رماس به این نتیجه می‌رسند

که رویکـرد برخـی از یادگیرندگان در مواجهه با واژه‌های متفاوت اثبات (اسـم و فعل)، متفاوت است. آن‌ها معتقدند که تأثیر مفاهیم روزانه بر مفاهیم رسـمی مورد استفاده توسط دانش‌آموزان باید در سه مرحله بررسی شود که عبارت‌اند از:

۱. معنای کلمه یا مفهوم موردنظر در زبان عامیانه و نحوهٔ اسـتفاده از آن مشخص شود؛

۲. بررسـی شـود که ایـن مفاهیم در درس ریاضـی چگونه توسـط دانش‌آموزان فهمیده می‌شوند؛

۳. بایـد رابطهٔ بین معانـی مفاهیم موردنظـر در دو مورد بالا بررسـی شود.

آن‌ها براساس یافته‌های تحقیق خود تأکیـد می‌کنند که باید به دانش‌آموزان کمک کنیم تا مفاهیم رسمی و زبان فنی ریاضیات را در بحث‌های کلاسی‌شـان، درست مورد استفاده قرار دهند و بتوانند بین این مفاهیم و مفاهیم مورد استفاده در زبان عامیانه تمایز قائل شـوند. علاوه بر این، آموزشـگرانی کـه روی ماهیت اجتماعـی و فرهنگـی اثبـات تأکیـد می‌کنند، معتقدند کـه معلمان باید در کلاس درس محیطـی فراهم آورند که دانش‌آمـوزان با یکدیگـر در مورد آنچه که یک توجیـه ریاضی مـورد قبول را می‌سازد، بحث و گفت‌وگو داشته باشند [Weber, 2005].

نتیجه‌گیری

به‌طور کلی اثبات ریاضی فرایندی اسـت که بررسـی ماهیت آن، به عوامل متفاوتی از جمله عوامل شناختی، ریاضی، فرهنگی و اجتماعی بستگی دارد. در جامعهٔ آموزشـی نیز هنجارها و قوانین اجتماعـی و فرهنگی در کلاس درس بر عملکرد ریاضی دانش‌آموزان در فرایند اثبات اثر می‌گذارند. این هنجارها می‌توانند شامل موارد و الگوهایی باشند که توسط معلم و دانش‌آموزان به عنوان یک توضیح و یا توجیه قابل قبول مطرح می‌شوند. در آموزش ریاضیات مدرسه‌ای، معلم باید بداند که فرایند اثبات در جریان ساخته‌شـدن با ارائهٔ آن به صورت یک محصول تمام شـده که متکی بر دقت اسـت، تفاوت دارد. همچنیـن، معلمان به منظور انتخاب روش تدریس مناسب به‌ویژه در ارتباط با فرایند اثبات، باید همواره به رشد شناختی دانش‌آموزان، سبک‌های یادگیری آن‌ها و عوامل تأثیرگذار بر یادگیری و باور دانش‌آموزان توجه داشـته باشند و براسـاس آن، بین توانایی آن‌ها و ارائهٔ مفاهیم موردنظر، هماهنگی و تناسب برقرار کنند. علاوه بر این، معلم می‌تواند در کلاس درس، شرایطی را فراهم سازد که دانش‌آموزان بتوانند در یک فضای پویا نظرات خود را بیان و استدلال‌های یکدیگر را نقد و بررسی کنند؛ به گونه‌ای که با محدودیت برخی از استدلال‌ها آشنا شوند و به دنبال روش‌های منطقی برای تأیید و اثبات ادعای خود باشند. در نهایت نیز این بحث و بررسی، و نقد و توجیه باید با هدایت معلم به سمت اثبات‌های معتبر سوق یابد.

پی‌نوشت

* استادیار گروه ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی
** کارشناس ارشد آموزش ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی و دبیر ریاضی شهرستان دهاقان

1. Harel & Sowder
2. Leddy
3. acceptable
4. Johnson
5. Raman
6. private arguments
7. public argument
8. socio mathematical
9. Leddy
10. Wilder
11. Detlefsen
12. conviction
13. validity
14. Inglis & Ramos
15. proof
16. prove

منابع

۱. ایگل ویتس، بوریس و استویل، جودیث (۱۳۷۰). *مقدمه‌ای بر استدلال ریاضی*. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. انتشارات مدرسه (نشر اثر اصلی ۱۹۷۳). تهران.

۲. تال، دیوید (۱۳۸۵). «ماهیت اثبات ریاضی». ترجمهٔ عرفان صفر. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. شمارهٔ ۸۳.

3. Bayazit, N. (2009). Prospective mathematics teachers? use of mathematical definitions in doing proof. Unpuplished doctoral dissertation, Florida state university. Retrieved from ProQuest Digital Dissertations.

4. Brodie, Karin (2010). *Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms*, New York: springer, Retrieved May 10, 2011 from http://www.springer.com.

5. Chin, E.T. & Lin, F-L. (2009). A Comparative Study on Junior High School Students' Proof Conceptions in Algebra between Taiwan and the UK, *Journal of Mathematics Education*, Vol. 2, No. 2, pp.52-67.

6. Clements, M. A. & Ellerton, N. F. (1996). *Mathematics education research: Past, present and future.* Unesco.

7. Dee Vanspronesn, Hillary (2008). Proof processes of novice mathematics proof writers, Unpuplished doctoral dissertation, university of Montana, USA. Retrieved from ProQuest Digital Dissertations.

8. Detlefsen, Michael (2005). *Proof and knowledge mathematics.* London and New York: Routledge.

9. Harel, Guershon (2008). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part I: focus on proving. *ZDM Mathematics Education.* 40, 487-500.

10. Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester (Ed.), Second Handbook of Research on *Mathematics Teaching and Learning.* Charlotte, NC: Information Age Publishing.

11. Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. Journal for Research in *Mathematics Education,* 31(4), 396-428.

12. Heinze, Aiso (2010). Mathematicians' Individual Criteria for Accepting Theorems and Proofs: An Empirical Approach. In Hanna, Gila, Niels Jahnke, Hans & Pulte, Helmut (Ed.), *Explantion and Proof in Mathematics* (chap. 8, pp. 101-111). New York: Springer Science.

13. Inglis, Matthew & Pablo Mejia-Ramos (2011). Semantic contamination and mathematical proof: Can a non-proof prove?. *Journal of Mathematical Behavior,* 30, 19-29.

14. Mueller, Mary (2007). A study of the development of reasoning in sixth grade students, Unpuplished doctoral dissertation, the state university of new Jersey, United States. Retrieved from ProQuest Digital Dissertations.

15. Stylianides, Gabriel J. & Stylianides, Andreas J. (2008). Proof in School Mathematics: Insights from Psychological Research into Students' Ability for Deductive Reasoning, *Mathematical Thinking and Learning,* 10, 103-133.

16. Varghese, Thomas, (2007). *Students teachers conception of mathematical proof.* Unpuplished doctoral dissertation, University of Alberta, Canada.

17. Weber, K. (2003). Students' difficulties with proof. MAA Online: Research Sampler, Cited from http://www.maa.org./t_and_l/sampler/rs_8.html,in 27.7.2010.

18. Weber, K. (2005). Problem-solving, proving, and learning: The relationship between problem-solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. *Journal of Mathematical Behavior*, 24, 351-360.