مصطفی دیداری
کارشناس ارشد ریاضی

بسط دو جمله‌ای و ویژگی‌های آن

چکیده

در این مقاله در پی آن هستیم که بسط دو جمله‌ای غیاث‌الدین جمشید کاشانی و مثلث خیام ـ پاسکال را معرفی و ویژگی‌های آن‌ها را بیان کنیم.

کلیدواژه‌ها: بسط دو جمله‌ای، مثلث خیام ـ پاسکال، غیاث‌الدین جمشید کاشانی

به اتحادهای زیر توجه کنید:

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

....

هر عبارت به صورت $(a+b)^n$ را که در آن n یک عدد صحیح نامنفی است، «دو جمله‌ای جمشید کاشانی» و بسط آن را به صورت چند جمله‌ای از a و b، «بسط غیاث‌الدین جمشید کاشانی» می‌نامیم.

این چند جمله‌ای $n+1$ جمله دارد و هر جملهٔ آن به صورت مضربی است از: a^kb^{n-k} (یا $a^{n-k}b^k$). معمولاً جمله‌ها برحسب توان‌های نزولی a مرتب می‌شوند. مجموع توان‌های a و b در هر جمله نیز برابر با n است.

ضرایب بسط دوجمله‌ای را می‌توان در مثلثی به شکل‌های زیر مرتب کرد. به این مثلث، «مثلث خیام ـ پاسکال» گفته می‌شود.

(الف)

سطر صفرم	$(a+b)^0$	۱						
سطر یکم	$(a+b)^1$	۱	۱					
سطر دوم	$(a+b)^2$	۱	۲	۱				
سطر سوم	$(a+b)^3$	۱	۳	۳	۱			
سطر چهارم	$(a+b)^4$	۱	۴	۶	۴	۱		
سطر پنجم	$(a+b)^5$	۱	۵	۱۰	۱۰	۵	۱	
سطر ششم	$(a+b)^6$	۱	۶	۱۵	۲۰	۱۵	۶	۱
	....							

(ب)

۱

۱ ۱

۱ ۲ ۱

۱ ۳ ۳ ۱

۱ ۴ ۶ ۴ ۱

۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱

۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱

دو ستون کناری مثلث همواره عدد یک و هر درایه از جمع دو درایهٔ سطر قبل به صورتی که در شکل‌ها نشان داده شده است، به‌دست می‌آید.

مثال ۱. حاصل بسط‌های زیر را با استفاده از مثلث خیام‌ـ پاسکال به‌دست آورید.

الف) $(2a+b)^5$ ب) $(x+\frac{1}{x})^4$

ج) $(x^2+1)^6$ د) $(x-1)^5$

جواب: با توجه به سطرهای پنجم، چهارم و ششم مثلث داریم:

$$\text{الف)}\ (2a+b)^5=(2a)^5+5(2a)^4(b)+10(2a)^3b^2+10(2a)^2b^3+5(2a)b^4+b^5=32a^5+80a^4b+80a^3b^2+40a^2b^3+10ab^4+b^5$$

$$\text{ب)}\ (x+\frac{1}{x})^4=x^4+4x^3(\frac{1}{x})+6x^2(\frac{1}{x})^2+4x(\frac{1}{x})^3+(\frac{1}{x})^4=x^4+4x^2+6+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^4}$$

$$\text{ج)}\ (x^2+1)^6=(x^2)^6+6(x^2)^5+15(x^2)^4+20(x^2)^3+15(x^2)^2+6(x^2)+1=x^{12}+6x^{10}+15x^8+20x^6+15x^4+6x^2+1$$

$$\text{د)}\ (x-1)^5=(x+(-1))^5=x^5+5x^4(-1)+10x^3(-1)^2+10x^2(-1)^3+5x(-1)^4+(-1)^5=x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1$$

در تمامی مثال‌ها به تعداد جملات و رابطهٔ آن با توان، در قسمت ب به جملهٔ فاقد x و چگونگی به‌دست آمدن آن، در مثال ج به توان x و در مثال آخر به علامت جمله‌ها دقت کنید

مثال ۲. تعداد جمله‌های حاصل عبارت $(x+1)^{12}+(x-2)^{18}$ را (پس از ساده‌کردن) به‌دست آورید.

همان‌گونه که قبلاً بیان کردیم، $(a+b)^n$ دارای $n+1$ جمله است. بنابراین بسط اول دارای ۱۳ جمله و بسط دوم دارای ۱۹ جمله خواهد بود. با یک قضاوت سریع ممکن است گفته شود حاصل دارای ۳۲ جمله خواهد بود. اما تمامی جمله‌های بسط $(x+1)^{12}$ دارای جمله‌های متشابه در بسط $(x-12)^{18}$ هستند. بنابراین با آن‌ها ساده خواهند شد. یعنی بسط فوق دقیقاً دارای ۱۹ جمله خواهد بود.

بررسی ویژگی‌های مثلث خیام ـ پاسکال

۱. عددهای هر سطر نسبت به جملهٔ وسط (اگر n زوج باشد) یا دو جملهٔ وسط (اگر n فرد باشد) تقارن دارند.

۲. مجموع اعداد در سطر nام برابر است با 2^n. در واقع مجموع ضریب‌های بسط $(a+b)^n$ برابر است با 2^n. دلیل این مطلب آن است که برای به‌دست آوردن مجموع ضریب‌های هر چند جمله‌ای کافی است به جای متغیرها عدد یک را قرار دهیم. با همین استدلال می‌توان گفت اگر اعداد هر سطر را به‌طور متناوب کم و زیاد کنیم، حاصل برابر با صفر خواهد بود؛ چون: $(1-1)^n=0$.

مثال ۳. مجموع ضریب‌های عددی هر بسط را به‌دست آورید.

الف) $(2a+3b)^4$ ب) $(2x-y+3z)^4$

جواب:

$$\text{الف)}\ (2a+3b)^4 \xrightarrow[b=1]{a=1} \text{مجموع ضرایب}=5^4$$

$$\text{ب)}\ (2x-y+3z)^4 \xrightarrow{x=y=z=1} \text{مجموع ضرایب}=4^4$$

مثال ۴. مجموع ضریب‌های جمله‌های فاقد y را در بسط $(3x-y-z)^8$ به‌دست آورید.

جواب: کافی است به جای x و z عدد یک و به جای y عدد صفر را قرار دهیم: $(3-0-1)^8=2^8=256$

۳. اگر در هر سطر جمله‌ها را یک در میان با یکدیگر جمع کنیم، حاصل یکسان خواهد بود. برای نمونه در سطر ششم داریم:

$$1+15+15+1=6+20+6$$

به عبارت دیگر، در بسط $(a+b)^n$، مجموع ضرایب جمله‌هایی که توان a در آن‌ها فرد است با مجموع ضرایب جمله‌هایی که توان a در آن‌ها زوج است، برابر خواهد بود.

۴. اگر آرایهٔ مثلثی را به صورت شکل الف در نظر بگیریم، مجموع اعداد هر ستون برابر است با عددی که در سطر و ستون بعدی قرار دارد؛ برای نمونه: $1+3+6=10$ یا $1+2+3+4+5=15$.

۵. همان‌گونه که در ابتدای کتاب حسابان ملاحظه کردید، مجموع n جملهٔ نخست دنبالهٔ هندسی از رابطهٔ $S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}$ به‌دست می‌آید که a، جملهٔ اول و q قدرنسبت است. بنابراین: $1+2+2^2+\dots+2^{n-1}=2^n-1$.

با توجه به مطلب اخیر، مجموع اعداد هر سطر یک واحد از مجموع اعداد سطرهای قبلی بیشتر خواهد بود.

۶. عدد به‌دست آمده از کنار هم قراردادن اعداد سطر nام برابر است با 11^n؛ برای نمونه:

$11^0=1$	۱
$11^1=11$	۱ ۱
$11^2=121$	۱ ۲ ۱
$11^3=1331$	۱ ۳ ۳ ۱
$11^4=14641$	۱ ۴ ۶ ۴ ۱
$11^5=161051$	۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱
....	....

برای توجیه عدد به‌دست آمده در سطر پنجم به شکل زیر دقت کنید:

۱	۵	۱۰	۱۰	۵	۱
۱	۶	۱	۰	۵	۱

۷. در کتاب هندسهٔ ۲ با مثلث‌های سرپینسکی آشنا شدید. اعداد زوج در مثلث را رنگ‌آمیزی و با این مثلث‌ها مقایسه کنید.

بسط دو جمله‌ای و ترکیب‌ها

در کتاب ریاضی سال دوم دبیرستان مشاهده کردید که تعداد انتخاب‌های k شیء از n شیء متمایز از رابطهٔ $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ به‌دست می‌آید. در حالت خاص داشتیم: $\binom{n}{0}=1$، $\binom{n}{1}=1$، $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$.

با اینکه با استفاده از مثلث خیام ـ پاسکال می‌توان ضرایب بسط دوجمله‌ای را به‌دست آورد، اما این روش دارای یک ایراد اساسی است. برای به‌دست آوردن هر سطر باید سطر قبلی (و در نتیجه تمامی سطرهای قبلی) را به‌طور کامل به‌دست آورده باشیم. در نتیجه این روش به‌دست آوردن ضریب‌ها، برای nهای بزرگ به محاسباتی پرحوصله نیاز دارد.

به اتحادهای زیر توجه کنید:

$$(a+b)^1=\binom{1}{0}a+\binom{1}{1}b$$

$$(a+b)^2=\binom{2}{0}a^2+\binom{2}{1}ab+\binom{2}{2}b^2$$

$$(a+b)^3=\binom{3}{0}a^3+\binom{3}{1}a^2b+\binom{3}{2}ab^2+\binom{3}{3}b^3$$

$$(a+b)^4=\binom{4}{0}a^4+\binom{4}{1}a^3b+\binom{4}{2}a^2b^2+\binom{4}{3}ab^3+\binom{4}{4}b^4$$

....

می‌توان ثابت کرد که در هر بسط ضریب جملهٔ $a^{n-k}b^k$ برابر است با: $\binom{n}{k}$. بنابراین:

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\dots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$$

مثال ۵. ضریب جملهٔ هفتم را در بسط $(2x+y)^9$ به‌دست آورید.

جواب: دقت کنید ضریب جملهٔ $(k+1)$ام (جملهٔ دارای $a^{n-k}b^k$) برابر است با: $\binom{n}{k}$. بنابراین جملهٔ هفتم برابر است با: $\binom{9}{6}(2x)^{9-6}(y)^6$. در نتیجه ضریب جملهٔ هفتم برابر است با: $\binom{9}{6}\cdot 8$.

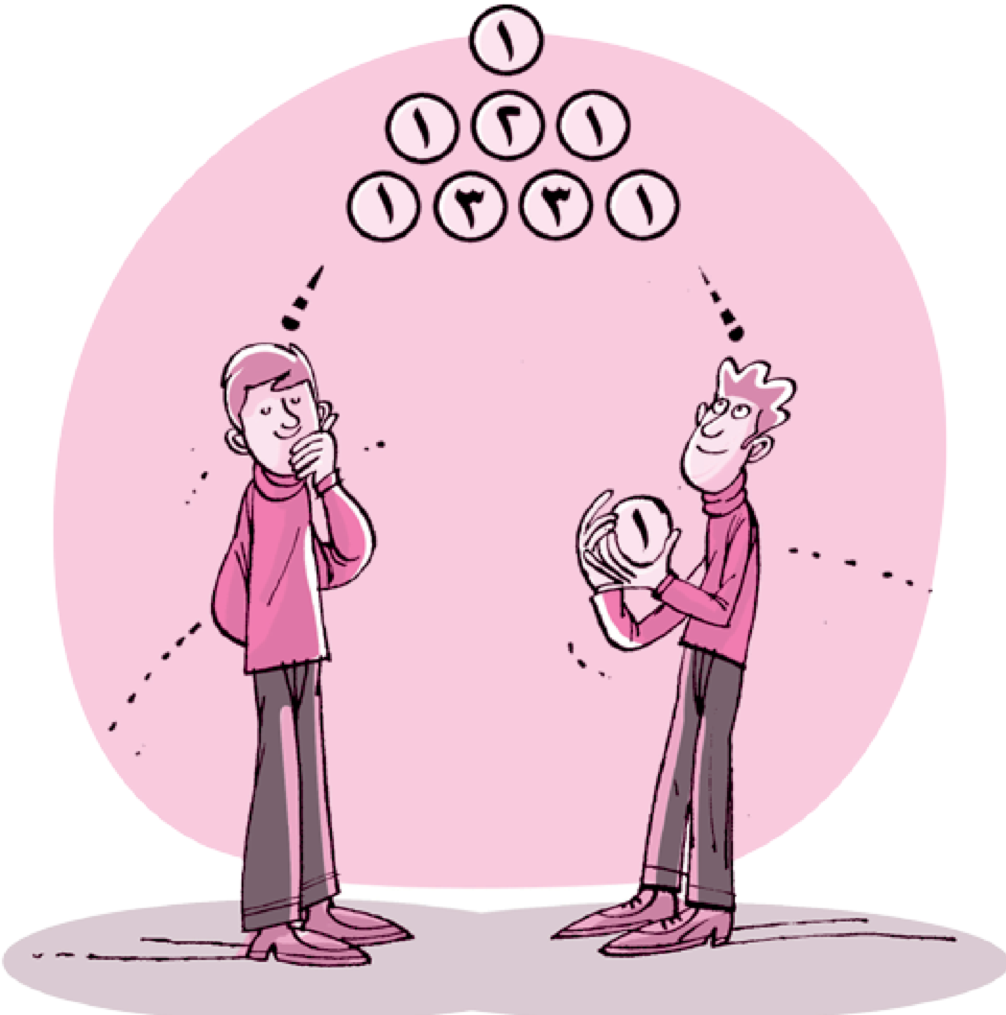
مثال ۶. ضریب جملهٔ ششم را در بسط $(3x-y)^{12}$ به‌دست آورید.

جواب: جملهٔ ششم به صورت $\binom{12}{5}(3x)^7(-y)^5$ است. بنابراین ضریب آن عدد $-3^7\binom{12}{5}$ خواهد بود.

مثال ۷. ضریب x^3 را در بسط $x(1-x)^5+x^2(2x+1)^8$ به‌دست آورید.

جواب: در جملهٔ شامل $(1-x)^5$ ضریب x^2 و در جملهٔ دارای $(2x+1)^8$ ضریب x را به‌دست می‌آوریم. این ضرایب به ترتیب $\binom{5}{2}$ و $2\binom{8}{1}$ هستند. بنابراین ضریب x^3 برابر است با:

$$2\binom{8}{1}+\binom{5}{2}=16+10=26.$$



مثال ۸. ضریب جملهٔ هفتم، با ضریب کدام جملهٔ دیگر در بسط $(x+y)^{۳۸}$ برابر است؟

جواب: به‌سادگی می‌توان نشان داد که اگر ضریب جمله‌های p و q در بسط $(a+b)^n$ برابر باشند، داریم: $p+q=n+۲$. بنابراین: $۷+q=۴۰$ و لذا: $q=۳۳$. بنابراین ضریب جملهٔ هفتم با ضریب جملهٔ سی‌وسوم برابر است.

مثال ۹. ضریب جملهٔ وسط را در بسط $(a-۳b)^{۲۰}$ به‌دست آورید.

جواب: در بسط $(a+b)^n$ اگر n زوج باشد، تعداد جملات فرد و $(\frac{n}{۲}+۱)$امین جمله، جملهٔ وسط خواهد بود.
بنابراین جملهٔ یازدهم، جملهٔ وسط خواهد بود. جملهٔ یازدهم برابر است با: $\binom{۲۰}{۱۰}a^{۱۰}(-۳b)^{۱۰}$ و بنابراین ضریب آن $\binom{۲۰}{۱۰}\times ۳^{۱۰}$ خواهد بود.

مثال ۱۰. بزرگ‌ترین ضریب عددی را در بسط $(a+b)^{۱۵}$ به‌دست آورید.

جواب: با توجه به تقارن مثلث خیام ـ پاسکال و یک استدلال بازگشتی برای نامساوی $\binom{n}{k}\le\binom{n}{k+۱}$ که $k\le[\frac{n}{۲}]$، می‌توان گفت ضریب جملهٔ وسط (یا دو جملهٔ وسط) از سایر جملات بزرگ‌تر خواهد بود. بنابراین کافی است ضریب جملهٔ هشتم یا نهم را به‌دست آورید. لذا جواب $\binom{۱۵}{۸}$ خواهد بود.

* **سؤال:** بزرگ‌ترین جملهٔ بسط $(۱+\sqrt{۲})^{۵۰}$ چیست؟
(مخصوص دانش‌آموزان علاقه‌مند)

مثال ۱۱. جملهٔ فاقد x را در بسط $(x+\frac{۱}{x})^{۱۲}$ به‌دست آورید.

جواب: با توجه به فرمول بسط دو جمله‌ای، تمامی جمله‌ها به شکل $\binom{۱۲}{k}x^{۱۲-k}(\frac{۱}{x})^k$ هستند. بنابراین باید $۱۲-k=k$ و لذا $k=۶$ باشد. در نتیجه پاسخ $\binom{۱۲}{۶}$ خواهد بود.

در حالت کلی، اگر n زوج باشد ضریب جمله فاقد x در بسط $(x+\frac{۱}{x})^n$ برابر است با: $\binom{n}{\frac{n}{۲}}$.

(اگر n فرد باشد چه‌طور؟)

مثال ۱۲. تعداد جمله‌های گویا در بسط دو جمله‌ای $(۱+\sqrt[۳]{۲})^{۲۰}$ را به‌دست آورید.

جواب: جمله‌های بسط فوق به صورت $\binom{۲۰}{k}(\sqrt[۳]{۲})^k$ هستند که در آن‌ها $۰\le k\le ۲۰$ و صحیح است.

بنابراین باید $(\sqrt[۳]{۲})^k=۲^{\frac{k}{۳}}$ گویا و لذا $\frac{k}{۳}$ عددی صحیح باشد. در نتیجه k باید متعلق به مجموعهٔ مضارب عدد ۳ باشد و داشته باشیم: $k=۳,۶,۹,۱۲,۱۵,۱۸$. یعنی بسط دارای شش جملهٔ گویا (جمله‌های چهارم، هفتم و...) خواهد بود.

مثال ۱۳. چند جملهٔ گویا در بسط $(\sqrt{۲}+\sqrt[۳]{۵})^{۱۰۰}$ وجود دارد؟

جواب: همانند مسئلهٔ قبلی، جمله‌ها به صورت $\binom{۱۰۰}{k}(\sqrt{۲})^{۱۰۰-k}(\sqrt[۳]{۵})^k$ هستند. بنابراین $\frac{۱۰۰-k}{۲}$ و $\frac{k}{۳}$ باید صحیح باشند. در نتیجه k باید متعلق به مجموعهٔ مضرب‌های عدد ۶ از مجموعهٔ $\{۰,۱,۲,...,۱۰۰\}$ باشد. لذا به تعداد $\left\lfloor\frac{۱۰۰}{۶}\right\rfloor=۱۶$ عدد گویا وجود دارد.

بار دیگر ویژگی‌های مثلث خیام ـ پاسکال را مرور کنید.

ویژگی اول رابطهٔ $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ خواهد بود. ویژگی دوم چیزی نیست جز رابطهٔ معروف $۲^n=\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+...+\binom{n}{n}$ و $۰=\binom{n}{۰}-\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}-...+(-۱)^n\binom{n}{n}$. همچنین، با توجه به ویژگی سوم داریم:

$$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۲}+\binom{n}{۴}+...=\binom{n}{۱}+\binom{n}{۳}+\binom{n}{۵}+...$$

شما نیز می‌توانید با بررسی مثلث خیام ـ پاسکال اتحادهای ترکیبیاتی دیگری کشف کنید!

سؤال: به‌دست آوردن ضرایب با استفاده از فرمول ترکیب نیز برای مقادیر تا حدی بزرگ، وقت‌گیر است. آیا روشی وجود دارد که بتوان ضرایب را آسان‌تر محاسبه کرد؟

حل: خوش‌بختانه پاسخ این سؤال مثبت است:

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-۱}b+\frac{n(n-۱)}{۲}a^{n-۲}b^۲+\frac{n(n-۱)}{۲}.\frac{n-۲}{۳}a^{n-۳}b^۳+...$$

بنابراین برای به‌دست آوردن $(a+b)^n$ می‌توان از این قاعده نیز استفاده کرد: «روشن است که جملهٔ اول بسط همواره به صورت a^n خواهد بود. از اینجا به بعد برای به‌دست آوردن ضریب هر جمله، ضریب جملهٔ قبلی را در توان a ضرب و حاصل را بر تعداد جمله‌هایی که تا قبل از آن نوشته شده‌اند، تقسیم‌می‌کنیم.»

بررسی چند مثال خاص

مثال ۱۱. برای هر عدد طبیعی n نشان دهید $۵^n-۴n-۱$ بر ۱۶ بخش‌پذیر است.

جواب: راه اثبات این مسئله استفاده از استقرا است، اما راه‌حل دوم در اینجا مدنظر ماست:

$$(۴+۱)^n=۴^n+\binom{n}{۱}۴^{n-۱}+\binom{n}{۲}۴^{n-۲}+...+۴\binom{n}{n-۱}+۱$$

$$\Rightarrow ۵^n-۴n-۱=۴^n+\binom{n}{۱}۴^{n-۱}+...+۱۶\binom{n}{n-۲}=۱۶k$$

مثال ۱۲ (تمرین کتاب درسی). اگر $(۲+\sqrt{۳})^n=۳۶۲+b\sqrt{۳}$ باشد، b را به‌دست آورید.

جواب: با اندکی تأمل داریم: $(۲-\sqrt{۳})^n=۳۶۲-b\sqrt{۳}$ (چرا؟). بنابراین با ضرب دو رابطه خواهیم داشت:

$$۱^n=۳۶۲^۲-۳b^۲\to b^۲=\frac{۳۶۲^۲-۱}{۳}\Rightarrow b=\sqrt{\frac{۳۶۲^۲-۱}{۳}}$$

مثال ۱۳. مجموع ضرایب جمله‌های فرد را در بسط $(۲a+۱)^{۱۳}$ به‌دست آورید.

جواب: باید عملی انجام دهیم تا جمله‌های زوج از بین بروند. بنابراین بسط $(۲a+۱)^{۱۳}$ را با $(۲a-۱)^{۱۳}$ جمع می‌کنیم. حال کافی است $a=۱$ قرار دهیم و حاصل را بر ۲ تقسیم کنیم (چرا؟):

$$(۲a+۱)^{۱۳}+(۲a-۱)^{۱۳}\xrightarrow{a=۱}\frac{۳^{۱۳}+۱}{۲}=$$ مجموع ضرایب جمله‌های فرد