مفهوم و ماهیت یک تعریف ریاضی

سهیلا غلام‌آزاد، پژوهشکده برنامه درسی و نوآوری‌های آموزشی
زهرا محتشم، کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر دبیرستان‌های بوشهر
ابراهیم ریحانی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

چکیده

تعریف‌ها از واحدهای اساسی گفتمان ریاضی هستند و در رویکرد رسمی به ریاضیات، جایگاه ویژه‌ای دارند. مفهوم و ماهیت تعریف در ریاضی هم‌چون ویژگی‌های یک تعریف مناسب، در جامعه ریاضی موضوعی بحث‌برانگیز محسوب می‌شود. بررسی پیشینه مرتبط با تحقیقات آموزش ریاضی در این حوزه نشان می‌دهد که در چند دهه اخیر، مسئله تعریف‌ها گرچه در ریاضی و آموزش ریاضی مورد توجه بوده است، اما در ایران کمتر به‌عنوان یک حوزه پژوهشی مورد توجه واقع شده است. با توجه به اهمیت موضوع در این مقاله، مفهوم تعریف ریاضی و جنبه‌های مختلف آن بررسی شده است و از بین موضوعات وابسته به تعریف‌ها، مفهوم تعریف، سیر تاریخی تعریف در ریاضی، معیارهای یک تعریف مناسب، مثال‌ها و غیرمثال‌های یک تعریف ریاضی و رده‌بندی‌های مختلف تعریف‌های ریاضی از دیدگاه ریاضی‌دانان و آموزشگران ریاضی، موضوعاتی هستند که در این مقاله بررسی شده‌اند.

کلیدواژه‌ها: ماهیت تعریف ریاضی، سیر تاریخی تعریف ریاضی، معیارهای یک تعریف مناسب ریاضی، مثال‌ها و غیرمثال‌های یک تعریف ریاضی، رده‌بندی‌های مختلف تعریف‌های ریاضی.

مقدمه

اهمیت و نقش تعریف‌ها در شکل‌گیری نظریه‌ها یک مسئله اساسی است. از طریق تعریف‌ها، اشیا نظریه معرفی می‌شوند، خواص مشخص‌کننده آن‌ها بیان می‌شود و در یک زنجیره از روابطِ به‌هم مربوط و منطقی به‌هم وابسته می‌شوند و لذا، تعریف‌ها را نخستین دروازه ورود به نظریه‌ها دانسته‌اند (ماریوتی و فِزبین، ۱۹۹۷). بنابراین، مفهوم تعریف در مطالعه ریاضی، به‌عنوان یک دانش نظری نیز از جایگاه مهمی برخوردار است. تعریف‌های ریاضی همراه با اصول، قضایا، اثبات‌ها، نتایج فرعی، لم‌ها و گزاره‌ها، ساختار نظری ریاضی را تشکیل می‌دهند.

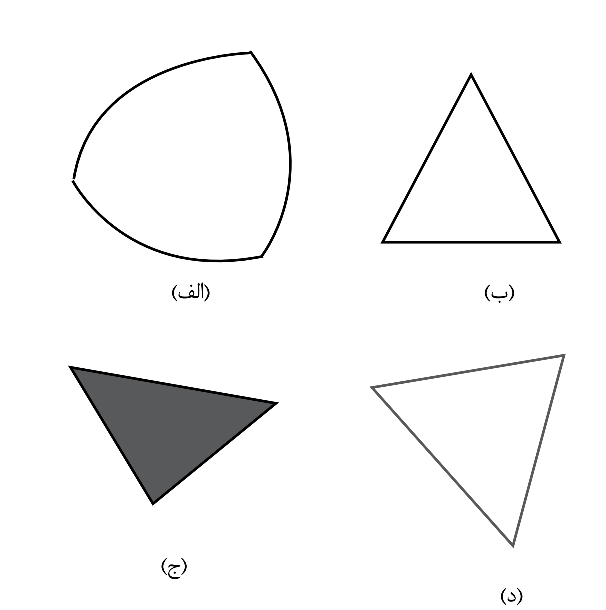
در این ساختار ریاضی، ابتدا واژه‌های اولیه (واژه‌های تعریف نشده) و جملات اولیه (اصول موضوع) داده شده‌اند، سپس هر واژه غیراولیه به‌وسیله واژه‌های اولیه و هر عبارت جدید می‌تواند از عبارت‌های اولیه و از طریق قوانین استنتاج[1] تعریف شود (وینر، ۱۹۷۶). ریاضی‌دانان و آموزشگران ریاضی تأکید می‌کنند که تعریف‌های ریاضی از تعریف‌های روزمره متمایزند و اغلب با عبارت‌هایی غیرمبهم، مختصر یا لازم وکافی، همراه هستند که باعث می‌شود در گفتمان‌های ریاضی سطح بالا، ارزش زیادی داشته باشند (مورگان[2]، ۲۰۱۰). تحقیقاتی که در این زمینه انجام شده است، لزوم توجه بیشتر به تعریف‌ها، به‌ویژه در آموزش ریاضی را تأیید کرده است (زاسکیس و لیکین، ۲۰۰۸ و ۲۰۱۰؛ شِر و زاسلاوسکی، ۲۰۰۱؛ زاسلاوسکی و شِر، ۲۰۰۵). با توجه به اهمیت این زمینه و نیاز آگاهی از آن، در این مقاله سعی شده است، ضمن بررسی کلی تعریف‌ها، به‌طور خاص به تعریف ریاضی از جنبه‌های مختلف پرداخته شود و ویژگی‌های آن مورد بررسی قرار گیرد.

ماهیت تعریف

تعریف عبارتی است که معنای یک اصطلاح (کلمه یا عبارت یا دسته‌ای از نمادها) یا نوع یک چیز را شرح می‌دهد. تعریف واژه به ما می‌گوید که یک چیز باید دارای چه ویژگی‌هایی (مشخصه‌هایی، کیفیاتی، خواصی) باشد تا آن واژه، بر آن اطلاق شود (هاسپرس، ۱۹۹۶).

بیشتر علوم با یک سلسله تعریف‌ها آغاز می‌شوند که اصطلاحاً، «مبادی تصور» یا «اصول موضوعه» نامیده می‌شوند. به این ترتیب، دانشمندان سعی دارند پیش از ورود به مسائل هر علم، تصور روشن و مشخصی از موضوعات مورد بحث ارائه نمایند تا مبانی آن علم، دقیقاً معلوم شوند. اهمیت تعریف در انواع مجادلات به اندازه‌ای است که با روشن شدن مفاهیم کلیدی مبهم، مورد مجادله عموماً برطرف می‌شود یا حداقل، نقطه اختلاف نظرها روشن می‌شود (هاسپرس، ۱۹۹۶).

تعریفِ واژه‌ها، پایه‌ای تشکیل می‌دهند که خواص واژه‌ها به‌طور منطقی، از آن حاصل می‌شوند. بدون تعریف‌های غیرمبهم و دقیق، هر نتیجه ریاضی مورد سؤال قرار می‌گیرد. برای مثال، بدون تعریف دقیقی از مثلث، گزاره‌ای نظیر «مجموع اندازه زاویه‌های هر مثلث ۱۸۰ درجه است»، هم‌چنین هر اثباتی از این عبارت، اعتبار کمی خواهد داشت.



شکل ۱: مؤلفه‌های مفهوم یک تعریف ریاضی (شِر و زاسلاوسکی، ۲۰۰۵)

اشیای ترسیم شده را در شکل ۱ در نظر بگیرید. بدون یک تعریف دقیق از «مثلث»، حتی نمی‌توان گفت کدامیک مثلث‌اند. معمولاً در منابع مدرسه‌ای، تنها شکل ۱- (ب) برای نمایش مثلث در نظر گرفته می‌شود. اگرچه روش‌های ریاضی در هندسه وجود دارند که طبق آن‌ها، هر یک از شکل‌های ۱- (الف) و ۱- (ب) ممکن است یک مثلث باشد[3]، اما مطابق هیچ رویکردی هر دو نمی‌توانند مثلث باشند (یوسیسکین[4] و همکاران، ۲۰۰۸).

انواع تعریف

تعریف کردن عموماً به دو صورت انجام می‌شود که یکی «تعریف قراردادی[5]» و دیگری «تعریف گزارشی[6]» (هاسپرس[7]، ۱۹۹۶) است. تعریف قراردادی هم در دو صورت اتفاق می‌افتد؛ اول هنگامی که فرد معتقد است واژه‌هایی که از پیش وجود دارند، به اندازه کافی دقیق نیستند و او معنای دقیق‌تری برای آن‌ها وضع می‌کند و بعدی، هنگامی که فرد برای انتقال معنای مورد نظر خود، واژه مناسبی نمی‌یابد. به‌عنوان مثال، عبارت «اجازه بدهید از این پس از واژه A به این معنا استفاده کنیم ...»، یک تعریف قراردادی محسوب می‌شود.

البته، اکثر تعریف‌ها از دسته «تعریف گزارشی»اند. این نوع تعریف گزارش می‌دهد، که واژه‌ای در بین افراد یک گروه زبانی، به چه معنایی به‌کار می‌رود. به عبارت

دیگر، گزارش از یک معنای موجود، «تعریف گزارشی» نامیده می‌شود. مثلاً، «در بین فارسی‌زبانان واژه پدر به معنای فردی است که از او فرزندی به دنیا می‌آید»، یک تعریف گزارشی است (هاسپرس، ۱۹۹۶).

علاوه بر این‌ها، رابینسون[۸] تعریف‌ها را به دو صورت لغوی[۹] و قراردادی در نظر می‌گیرد. او می‌نویسد: «تعریف لغوی، نوعی تعریف کلمه ـ شیء است که به معنای کاربرد کلمه در یک موقعیت خاص است» (۱۹۵۴؛ نقل شده در ادواردز[۱۰] و وارد[۱۱]، ۲۰۰۴). لاندو[۱۲] نیز همین رده‌بندی را در نظر می‌گیرد اما به جای تعریف‌های لغوی، که «بر پایه مثال‌هایی از کاربرد واقعی هستند و از یک سری از شواهد اقتباس شده‌اند»، کلمهٔ تعریف‌های اقتباس شده[۱۳] را به‌کار برده است (۲۰۰۱؛ نقل شده در ادواردز و وارد، ۲۰۰۴).

تعریف‌های قراردادی، در واقع عمل اختصاص یک شیٔ به یک اسم (یا یک اسم به یک شیٔ) است و مزیت عمده آن، بهبود مفاهیم یا ایجاد مفاهیم جدید است. از نظر لاندو، چنین تعریف‌هایی وابسته به زمینه است و به‌منظور «سهولت و دقت ارتباط بین کسانی که در آن زمینه خاص فعالیت می‌کنند»، ارائه می‌شوند (۲۰۰۱؛ نقل شده در ادواردز و وارد، ۲۰۰۴). به‌علاوه، زمانی که یک کلمه به‌وسیله قراردادی تعریف می‌شود، از معانی ضمنی دیگر آزاد می‌شود، یعنی مستقل از معانی دیگری که ممکن است به‌واسطه کاربرد در زمینه‌های دیگر کسب کرده باشد، در نظر گرفته می‌شود. به‌عنوان مثال، عبارت «در فراز کردن» در زبان فارسی هم به معنی «باز کردن» و هم به معنی «بستن» در می‌باشد که بسته به کاربرد آن در شرایط متفاوت، یکی از این دو معنی استفاده می‌شود.

تعریف‌های ریاضی به‌عنوان تعریف‌های قراردادی در نظر گرفته می‌شوند، در حالیکه تعریف‌های روزمره، اقتباسی (گزارشی) هستند. نمونه‌هایی از تعریف‌های ریاضی در زیر آمده‌اند:

- **تعریف منفی**[۱۴]: یک مجموعه همبند است، اگر نتواند به دو زیرمجموعه از هم جدایِ بازِ غیرتهی تجزیه شود (بوراسی[۱۵]، ۱۹۹۱؛ نقل شده در پیم[۱۶]، ۱۹۹۳).
- **تعریف کلامی**[۱۷]: هم‌چنان که مقدار x افزایش می‌یابد، مقدار $y = f(x)$ نیز افزایش پیدا می‌کند (تعریف تابع صعودی).
- **تعریف نمادین**[۱۸]: f یک تابع صعودی است، اگر برای هر $x_1, x_2 \in D$ ؛ $x_1 > x_2$، آن‌گاه $f(x_1) > f(x_2)$
- **تعریف اثباتی**[۱۹]: یک مستطیل، متوازی‌الاضلاعی است که طول قطرهای آن مساوی است.

سیر تاریخی تعریف

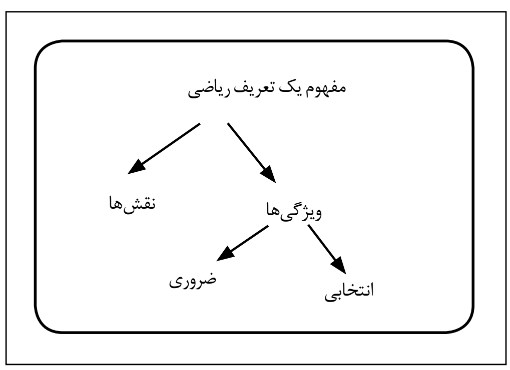
در حدود دو هزار سال است که قالب ارائه ریاضی رسمی به‌صورت «تعریف، قضیه، اثبات» شناخته می‌شود. کتاب اصول[۲۰] اقلیدس در حدود ۳۰۰ سال قبل از میلاد، این قالب ارائه مطالب را معرفی کرد که با تغییری مختصر در سبک، هنوز هم در متون رسمیِ ریاضی دیده می‌شود. اقلیدس همراه با ارائه این قالب برای ریاضیات رسمی، نخستین‌بار تعریف‌ها را نیز به شکل مدون، در کتاب اصول خود آورده است. گرچه اقلیدس توضیح خاصی درباره ساختار یا محتوای تعریف‌های ارائه شده در این کتاب نداده است، اما به نظر می‌رسد این تعریف‌ها با نظریه ارسطویی تعریف سازگار باشد. قبل از اقلیدس، ارسطو تأکید می‌کرد که تعریف یک مفهوم، باید آن را براساس مفاهیم دیگری که قبلاً شناخته شده‌اند، توصیف کند (کرانتس[۲۱]، ۲۰۰۷). در نظریه ارسطویی تعریف (به نظر می‌رسد اولین نظریه‌ای باشد که به‌طور صریح به تعریف‌ها پرداخته است)، هر مفهوم به‌عنوان زیردسته‌ای از یک مفهوم کلی‌تر تعریف شده است. این مفهوم کلی‌تر، جنس[۲۲] نامیده می‌شود و هر زیردسته از آن، به‌وسیله ویژگی‌های خاصی مشخص شده است که نوع[۲۳] نامیده می‌شود. ارسطو تأکید داشت که زیر رده (مخصوص) هر مفهوم کلی جدا باشد، یعنی آن‌ها نمی‌توانند صفات مشترک داشته باشند و هیچ زیردسته‌ای نمی‌تواند شامل دیگری باشد. بنابراین، برای ارسطو یک مربع یک مستطیل نبود، در حالیکه از نقطه نظر مدرن، چنین نیست. بدین سبب، از دیدگاه ارسطو هر چیزی که فرد می‌خواهد درباره مستطیل‌های غیر مربع ثابت کند، باید آن را دوباره برای مربع‌ها هم انجام دهد؛ چیزی که اصلاً خوشایند نیست. در حالی‌که در استانداردهای مدرن، مربع‌ها، حالت خاصی از مستطیل‌ها هستند. بنابراین، قضیه‌هایی که درباره مستطیل‌هاست، برای مربع‌ها نیز به‌کار می‌رود (بانت[۲۴]، جونز[۲۵] و بدینت[۲۶]، ۱۹۸۸؛ نقل شده در جیمسون[۲۷]، ۱۹۹۹). سبک تعریف ارسطو به‌وسیله جنس و نوع، تعیین اشیای خاصی است که کلمه معنی می‌دهد. در واقع، رده بزرگ‌تری که کلمه درون آن قرار دارد در نظر گرفته می‌شود و سعی می‌شود چیزی که آن شی را از بقیه اشیای آن رده متمایز می‌کند، پیدا شود. می‌توان

گفت برای ارسطو، یک تعریف یک گفتمان براساس قوانین خاص (درباره زبان، قوانین نحوی و معنایی) بود (اوورير[۲۸]، ۲۰۰۲). برای مثال، در تعریف «یک مستطیل یک چهارضلعی است که هر چهار زاویه آن قائمه هستند»، به‌عنوان یک تعریف مناسب از این دیدگاه، کلمه‌ای که زیر آن خط کشیده شده است، جنس (مفهوم کلی) است. در مورد مستطیل، جنس (مفهوم کلی) رده‌بندی چهارضلعی‌هاست و نوع (خاصیت ویژه) اینکه همه زاویه‌ها قائمه باشند. از سوی دیگر، در تعریف «یک مستطیل یک چهارضلعی با زاویه‌های قائمه است» که تعریف نامناسبی از این دیدگاه محسوب می‌شود، ابهام وجود دارد که به‌عنوان مثال، می‌توان به این‌ها اشاره نمود: «این چهارضلعی چند زاویه قائمه دارد؟» «آیا همه زاویه‌ها قائمه‌اند»؟ «تعداد زیادی چهارضلعی با زاویه‌های قائمه وجود دارند که مستطیل نیستند».

برای تشریح اهمیت مفهوم کلی (جنس)، کافی است توجه کنیم که یکی از بزرگ‌ترین مشکلات تجربه دانش‌آموزان با مفاهیم جدید این است که آن‌ها، درک دقیقی از مفهوم کلی وابسته به مفهوم ندارند. تعریف غیرقابل‌قبول بالا (تعریف دوم) روی هم‌رفته، این موضوع را با صرف‌نظر کردن از مفهوم کلی دور زده است. جیمسون (۱۹۹۹) به‌عنوان مثال، بیان می‌کند که نمی‌توان گفت این نقاط موازی هستند، تابع $f(x)=3x+1$ موازی است، یا ۳۵ یک عدد موازی است.

نقش‌ها و ویژگی‌های تعریف

تعریف‌ها اساساً در ریاضی و آموزش ریاضی، همیشه مورد توجه بوده‌اند. به‌طور کلی، می‌توان گفت که مفهوم تعریف ریاضی، شامل نقش‌ها و ویژگی‌ها می‌شود (شکل ۱). رده‌بندی اشیای ریاضی، مفید بودن تعریف برای اثبات و حل مسئله و ابزاری برای درک معنی مفاهیم ریاضی، از جمله نقش‌های اصلی است، که به تعریف‌ها نسبت داده می‌شود.



ویژگی‌های تعریف ریاضی ممکن است ضروری یا انتخابی باشند. سلسله مراتبی بودن، وجود، هم‌ارزی و مبتنی بر اصل موضوع بودن، ویژگی‌های ضروری تعریف و اختصار، زیبایی و تناقض‌نمایی، ویژگی‌های اختیاری تعریف هستند (شِر و زاسلاوسکی، ۲۰۰۵).

ضرورت‌ها و زیبایی یک تعریف

یک تعریف، شبیه الماس وجه‌های زیادی دارد که بعضی از جنبه‌های رسمی آن را بیان می‌کنیم. تعدادی از معیارهایی که ما از یک تعریف انتظار داریم، ضروری هستند. آن‌ها بخش‌های اساسی یک نظام قیاسی بوده و از نظر منطقی ضروری هستند. این معیارها یا ویژگی‌ها، شامل موارد زیر است (فن‌دورمولن[۲۹] و زاسلاوسکی، ۲۰۰۳):

* معیار سلسله مراتبی[۳۰]
* معیار وجود[۳۱]
* معیار هم‌ارزی[۳۲]
* معیار مبتنی بر اصل‌موضوع بودن[۳۳]

معیارهای دیگر از نقطه‌نظر منطقی ضروری نیستند، اما بخشی از یک فرهنگ کلی هستند. به‌عنوان مثال، معیاری که طبق آن، تنها خواص ضروری برای تشکیل مفهوم در تعریف آن ذکر می‌شود، اختصار[۳۴] (بهینگی) نامیده می‌شود. معیار دیگر زمانی ظاهر می‌شود که مؤلف کتابی می‌خواهد بین دو تعریف، یکی را انتخاب کند که اگرچه هم‌ارزند، اما یکی بهتر به نظر می‌رسد؛ مثلاً به کلمات یا نمادهای کمتری نیاز دارد یا مفاهیمِ اساسی کلی‌تری از تعریف جدید حاصل شده است که این معیار، ظرافت یا زیبایی[۳۵] نامیده می‌شود. علاوه بر این، معیار دیگری که گاهی اوقات ضرورت دارد و گاهی اوقات یک زیبایی است، تناقض‌نمایی[۳۶] نامیده می‌شود (فن‌دورمولن و زاسلاوسکی، ۲۰۰۳).

معیار سلسله مراتبی

ارسطو برای تعریف یک مفهوم، معیارهایی ارائه کرده است که یکی از آن‌ها، توصیف ساختار یک مفهوم است. مطابق این معیار، هر مفهوم جدید باید به‌عنوان یک حالت خاص از یک مفهوم کلی‌تر توصیف شود و یک یا چند ویژگی برای توصیف این حالت خاص به کاربرده شود. برای مثال، در «یک زاویه قائمه، زاویه‌ای است که پایه‌های آن بر هم عمودند»، مفهوم

کلی زاویه و ویژگی خاص عمود بودن پایه‌ها را نشان می‌دهد. این روش تعریف برای یک مفهوم جدید، پیامدهای منطقی مهمی دارد؛ مثلاً شخص ممکن است تنها مفهوم کلی و ویژگی‌های یک تعریف را به کار برد که اگر از قبل معلوم شده باشند، این ممکن است یک شرط ابتدایی به‌نظر برسد. اما در عمل، گاهی اوقات زمانی که می‌خواهیم به‌طور شهودی یک مفهوم معین را توضیح دهیم، مشکلاتی وجود دارد. برای مثال، تعریف تابع متناوب به‌صورت «یک تابع متناوب تابعی است برای پدیده‌های معینی که تکرار می‌شوند»، از نظر ارسطوییان یک تعریف خوب نیست، به‌دلیل اینکه «یک پدیده معین، خوب تعریف نشده است». هم‌چنین، تکراری بودن[۳۷] معرف مفهوم تناوب نیست، البته تا وقتی با مثال‌هایی همراه است که دانش‌آموزان به آسانی می‌توانند مفهوم را درک کنند، از نظر آموزشی قابل قبول است (فن‌دورمولن و زاسلاوسکی، ۲۰۰۳).

معیار وجود

تعریف بیان می‌کند که یک مفهوم چیست، اما معمولاً نمی‌گوید آیا یک نمونه از چنین مفهومی درون دستگاه موردنظر وجود دارد یا خیر. به این دلیل، ارسطو به‌عنوان معیار دوم نیاز داشت که ثابت کند حداقل یک نمونه از مفهوم تعریف شده جدید وجود دارد. معیار وجود می‌تواند دلیلی باشد برای اینکه چرا اقلیدس واژه «ترسیم[۳۸]» را به‌کار می‌برد. برای مثال، قضیه اول در کتاب‌های اقلیدس، نحوه ترسیم یک مثلث متساوی‌الساقین بود و با وجودی که این مفهوم را قبلاً تعریف کرده بود، می‌توان چنین استنباط کرد که در واقع، ارسطو می‌خواست با این کار، وجودش را ثابت کند.

پیامد این معیار، هم از نظر منطقی و هم از نقطه‌نظر پداگوژیکی، یعنی بعد از اینکه مفهوم خوب تعریف شد، شخص باید بتواند یک مثال ارائه دهد. اگر معلم بعد از ارائه تعریف به‌طور رسمی، یک مثال شهودی از مفهوم ارائه کند، توانسته است زمینه را برای پذیرش و درک مطلوب تعریف مفهوم فراهم کند (فن‌دورمولن و زاسلاوسکی، ۲۰۰۳). برای نمونه، معلم بعد از تعریف یک تابع پیوسته، می‌تواند نمودار یک تابع پیوسته ساده مانند $y=x$ را رسم کند و پیوستگی تابع را نموداری بدون بریدگی تعبیر کند.

معیار هم‌ارزی

معیار سوم (به‌طور واضح از سوی ارسطو عرضه نشده بود) یعنی زمانی که شخص بیش از یک صورت‌بندی (جمله‌بندی) برای یک مفهوم ارائه می‌دهد، باید ثابت کند آن‌ها هم‌ارزند. برای هر مفهوم ریاضی، گزاره‌های متنوعی وجود دارد که شرایط لازم، یعنی خواص مفهوم یا شرایط کافی یعنی مشخصات یک مفهوم را تشکیل می‌دهد. تعدادی از گزاره‌ها، شرایط لازم و کافی را برآورده می‌کنند و بنابراین، مفهوم را تعریف می‌کنند. هم‌چنین، با بررسی اتصال‌های منطقی بین گزاره‌های وابسته به یک مفهوم، یک رده هم‌ارزی از گزاره‌های تعریفی ممکن است ایجاد شود و هر گزاره‌ای که به این کلاس متعلق باشد ممکن است به دلخواه به‌عنوان تعریف انتخاب شود. در این حالت، عبارت‌های دیگر، به قضایایی تبدیل می‌شوند که شرایط لازم و کافی را برای مفهوم شکل می‌دهند. (وینیکی ـ لندمان[۳۹] و لیکین[۴۰]، ۲۰۰۰). برای مثال، صورت‌بندی‌های زیر را در نظر بگیرید:

- یک متوازی‌الاضلاع، یک چهارضلعی است که اضلاع مقابل آن موازیند.
- یک متوازی‌الاضلاع، یک چهارضلعی است که اضلاع مقابلش مساویند.
- یک متوازی‌الاضلاع، یک چهارضلعی است که هر جفت از اضلاع مقابل آن، مساوی و موازیند.
- یک متوازی‌الاضلاع، یک چهارضلعی است که نسبت به یک نقطه، متقارن است.

شخص می‌تواند هریک از این صورت‌بندی‌ها را به‌عنوان تعریف یک متوازی‌الاضلاع انتخاب کند. در این صورت، هر یک از صورت‌بندی‌های دیگر، قضیه‌ای است که باید ثابت شود (فن‌دورمولن و زاسلاوسکی، ۲۰۰۳). اینکه کدام تعریف در بین یک تعداد از تعریف‌ها هم‌ارز انتخاب شود، براساس سلیقه یا سهولت صورت می‌گیرد. هم‌چنین، می‌تواند به زمینه وابسته باشد. به هر حال، تصور این‌که در ریاضی هم آزادی انتخاب وجود دارد، احتمالاً برای تعداد زیادی از دانش‌آموزان غیرمنتظره خواهد بود. آزادی انتخاب، اغلب به‌عنوان دلخواه بودن تعریف‌ها دیده شده است. برای مثال، فرد می‌تواند ذوزنقه را به‌عنوان یک چهارضلعی تعریف کند که حداقل، یک جفت از اضلاع مقابل آن موازی‌اند. از طرف دیگر، او می‌تواند ذوزنقه را یک چهارضلعی تعریف کند که دقیقاً

یک جفت ضلع مقابل موازی دارد. با انتخاب تعریف اول، یک متوازی‌الاضلاع نیز یک ذوزنقه است؛ در حالیکه طبق تعریف دوم، متوازی‌الاضلاع نمی‌تواند ذوزنقه باشد (وینر، ۱۹۹۴). درنتیجه، این آزادی بدون قید و شرط نیست و به‌منظورِ داشتن آزادی برای انتخاب تعریف یک مفهوم، شخص باید مطمئن باشد که همه گزینه‌ها هم‌ارزند. علاوه بر این، شخص بسته به شرایط مختلف، برای انتخاب بین دو تعریف که حتی هم‌ارز هم نیستند، آزاد است[۴۱]. در عین حال، پیامدهای هر انتخاب باید به دقت بررسی شود (فن‌دورمولن و زاسلاوسکی، ۲۰۰۳). یک مفهوم می‌تواند تعریف‌هایی داشته باشد که کاملاً متفاوت به نظر برسند و ممکن است اثبات اینکه آن‌ها یک مفهوم را توصیف می‌کنند، مشکل باشد. به عنوان مثال، اثبات هم‌ارزی تعریف‌های هم‌ارز یک دایره در هندسه اقلیدسی، هندسه تحلیلی و جبر، پیچیده به‌نظر می‌رسد (لیکین و زاسکیس، ۲۰۱۰).

معیار مبتنی بر اصل موضوع بودن

این معیار نشان می‌دهد که یک تعریف مناسب انجام شده و بخشی از یک دستگاه قیاسی/ استنتاجی است. به این معنی که همه مفاهیم به‌کار رفته در تعریف، به نوبت دوباره درون همان دستگاه قیاسی تعریف شده باشند (مانند مثال متوازی‌الاضلاع در بخش معیار هم‌ارزی). یک تعریف صریح، بیان می‌کند که یک مفهوم چیست، نظیر این‌که «یک تابع متناوب... است». هم‌چنین، چون تعریف با کاربرد یک مفهوم کلی‌تر انجام می‌شود ـ مانند چهارضلعی‌ها (برای یک متوازی‌الاضلاع) و تابع (برای یک تابع متناوب) ـ این مفاهیم کلی‌تر هم باید براساس مفاهیم کلی‌تری تعریف شوند، در حالی‌که ادامه این روند، تا بی‌نهایت ممکن نیست و در یک نقطه معین، فرد به مفاهیمی می‌رسد که نمی‌توانند با مفاهیم کلی‌تری تعریف شوند. به عبارت دیگر، تعدادی از مفاهیم نمی‌توانند منطبق بر معیار ارسطوییان تعریف شوند. ارسطو این را می‌دانست و اصول را نوشت، گاهی هم به‌طور ضمنی، تعریف چنین مفاهیمی را بدیهی فرض کرد که در هندسه، مفاهیمی مانند نقطه، خط و صفحه، از این دسته‌اند. این مفاهیم به‌طور ضمنی، برحسب اصول و به‌وسیله روابط این اصول با یکدیگر، تعریف شده‌اند، مانند این‌که «یک و فقط یک خط از دو نقطه می‌گذرد» و «روی هر خط حداقل دو نقطه وجود دارد». از این گذشته، اصولی هستند که وجود خود را ثابت می‌کنند، مانند این‌که «حداقل سه نقطه وجود دارد که روی یک خط قرار ندارند» (فن‌دورمولن و زاسلاوسکی، ۲۰۰۳).

اهمیت و نقش تعریف‌ها در شکل‌گیری نظریه‌ها یک مسئله اساسی است. از طریق تعریف‌ها، اشیا نظریه به معرفی می‌شوند، خواص مشخص‌کننده آن‌ها بیان می‌شود و در یک زنجیره از روابطِ به‌هم مربوط و منطقی به‌هم وابسته می‌شوند و لذا، تعریف‌ها را نخستین دروازه ورود به نظریه‌ها دانسته‌اند (ماریوتی و فِزبین، ۱۹۹۷). بنابراین، مفهوم تعریف در مطالعه ریاضی، به‌عنوان یک دانش نظری نیز از جایگاه مهمی برخوردار است

معیار اختصار[۴۲]

این معیار، یادآوری می‌کند که خواصی از مفهوم که برای وجود آن لازمند، باید در تعریف آورده شود. مطابق این معیار، توصیف زیر، تعریف خوبی در هندسه اقلیدسی به حساب نمی‌آید:

- مستطیل یک چهارضلعی با چهار زاویه قائمه است.

در هندسه اقلیدسی، می‌توانیم ثابت کنیم که مجموع چهار زاویه از چهارضلعی، ۳۶۰ درجه است. بنابراین، کافی است برای تعریف مستطیل بگوییم:

- مستطیل یک چهارضلعی با سه زاویه قائمه است.

تعریف اول به‌عنوان «توصیف چهار ـ زاویه‌ای» و تعریف دوم «توصیف سه ـ زاویه‌ای» در نظر گرفته می‌شود (زیرا در هندسه اقلیدسی، اگر یک چهار ضلعی، سه زاویه قائمه داشته باشد، می‌توان ثابت کرد که زاویه چهارم نیز قائمه است). در نگاه اول به‌نظر می‌رسد معیار اختصار، بیش از آن‌که مربوط به ماهیت منطقی تعریف باشد، وابسته به ماهیت فلسفی یا زیبایی‌شناسی[۴۳] آن است. در واقع، توصیف یک مستطیل به‌عنوان یک چهارضلعی با چهار زاویه قائمه، به یک تناقض منجر نمی‌شود و ممکن است از دیدگاه پداگوژیکی، مزایایی داشته باشد. البته، اغلب اوقات که یک مفهوم تعریف می‌شود، ممکن نیست که دانش کافی برای تعیین کوتاه‌ترین شکل آن تعریف هم وجود داشته باشد. بنابراین، گاهی اصرار برای برقراری این معیار، می‌تواند مانع توسعه بعضی از مفاهیم یا قضایا شود. اما در هر صورت، دلایل خوبی برای پذیرش این معیار وجود دارد. طبق معیار وجود، بناکردن

مفهوم جدیدی که وجود دارد، ضروری است. پس لازم است شخص تعریف‌های جدید را بررسی کند. یعنی با پذیرش معیار اختصار، شخص باید توصیف کوتاه‌تری را به‌عنوان تعریف در نظر بگیرد و در عین حال، توصیف غیرمختصر را رد کند. در نتیجه، از یک نقطه‌نظر رسمی، یک توصیف غیرمختصر که شامل ویژگی‌هایی بیشترِ و غیرضروری است، به‌عنوان یک تعریف در نظر گرفته نمی‌شود. در واقع شامل یک تعریف و حداقل یک قضیه است. اگر بخواهیم تعریف تنها اطلاعات ضروری درباره مفهوم مورد نظر را دربر داشته باشد، باید معیار اختصار را بپذیریم. از سوی دیگر، صرف‌نظر کردن از این معیار، ممکن است مزایای پداگوژیکی زیادی داشته باشد. مثلاً، برای کسب یک تصویر ذهنی قوی و کامل از مفهوم جدید، شروع با توصیفی که معیار اختصار را برآورده نمی‌کند، می‌تواند سودمند باشد. برای مثال، انتظار می‌رود که‌دانش‌آموزان، مفهوم مستطیل را زمانی که به‌جای توصیف سه ـ زاویه‌ای، با توصیف چهار ـ زاویه‌ای به‌کار می‌برند، آن را بهتر درک کنند (فن‌دورمولن و زاسلاوسکی، ۲۰۰۳). علاوه بر این، هرشکوویتز (۱۹۹۰)، وینر (۱۹۹۱)، وینیکی ـ لندمان و لیکین(۲۰۰۰) نیز ادعا کردند که اختصار، یک ویژگی ضروری برای تعریف است. این در حالی است که دی‌ویلییرز (۱۹۹۸)، پیم (۱۹۹۳) و فن‌دورمولن و زاسلاوسکی، ۲۰۰۳)، بر نقش زمینه در مقابل معیار اختصار تأکید کردند و تا اندازه‌ای، بعضی از تعریف‌های طولانی را پذیرفتند. موضوع اختصار در کل، به بحث‌ها و مذاکراتی درباره ضرورت منجر می‌شود، این بحث‌ها با این توافق تمام می‌شود که گرچه ممکن است حالت‌هایی وجود داشته باشد که تعریف مختصر اولویت داشته باشد، ولی اختصار یک ویژگی ضروری تعریف ریاضی نیست. تنش بین انسجام و مفید بودن، در بحث درباره نیاز تعریف برای مختصر بودن تجلی می‌یابد. برای مثال، در بیشتر موارد تعریف‌های مختصر برای اثبات مفیدتر هستند، گرچه اغلب، اختصار قربانی افزایش انسجام یک تعریف می‌شود (زاسلاوسکی و شِر، ۲۰۰۵).

معیار زیبایی

گاهی اوقات، نویسنده متن کتابی می‌خواهد از بین دو تعریف که هم‌ارزند، یکی را انتخاب کند. اما یکی خوب‌تر به‌نظر می‌رسد، به کلمات یا نمادهای کمتری نیاز دارد یا مفاهیم اساسی کلی‌تری در آن به‌کار رفته است که از مفهومی که به تازگی تعریف شده حاصل شده است. به مثال فن‌دورمولن و زاسلاوسکی (۲۰۰۳) در این باره توجه کنید:

تعریف ۱: فاصله بین دو جسم (چیز)، طول کوتاه‌ترین پاره‌خطی است که هر یک از نقاط انتهایی آن، روی یکی از دو شئ (جسم) قرار گرفته است.

تعریف ۲: فرض کنید دو جسم در دستگاه مختصات دکارتی با $F(x,y,z)=0$ و $G(x,y,z)=0$ داده شده است. کوتاه‌ترین فاصله بین دو جسم وقتی که $F(x_f,y_f,z_f)=0$ و $G(x_G,y_G,z_G)=0$ از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\sqrt{(x_F-x_G)^2+(y_F-y_G)^2+(z_F-z_G)^2}$$

احتمالاً، بسیاری از نویسندگان، تعریف ۱ را به‌عنوان تعریف زیباتر انتخاب می‌کنند، زیرا نه‌تنها از نظر متنی کوتاه‌تر است، بلکه کلی است، به‌طوری که به دستگاه مختصات دو بعدی و حتی به تعریف اقلیدسی طول نیز محدود نشده است و مفهوم فاصله را کاملاً رسانده است. نکته دیگر درباره تعریف ۱، این است که دقیقاً می‌گوید که فاصله بین دو شئ چگونه محاسبه می‌شود. بنابراین، می‌توانیم این تعریف را برای دستگاه مختصات دکارتی سه بعدی نیز به‌کار ببریم (زاسلاوسکی و شِر، ۲۰۰۵).

هم‌چنین، به‌عنوان مثالی دیگر، به گفته وینر (۱۹۹۱)، برای بسیاری از ریاضی‌دان‌ها، تعریف قدرمطلق به‌صورت $|x|=\sqrt{x^2}$، زیباتر از تعریف دیگر آن به‌صورت زیر است:

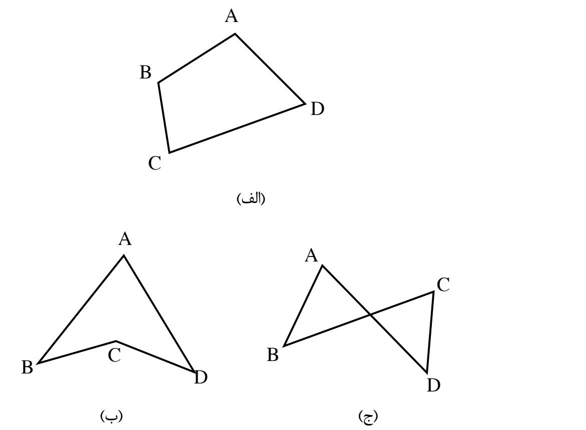
$$|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

معیار زیبایی، عینی‌تر از همه معیارهایی است که مورد بحث قرار گرفتند و به‌شدت به ارزش‌های شخصی وابسته است. زیبایی موضوعی نیست که فقط در انتخاب تعریف‌ها مطرح شود، بلکه می‌توان درباره یک اثبات یا قضیه زیبا صحبت کرد.

معیار تناقض‌نمایی

نتیجه یک تعریف، گاهی اوقات نمونه‌هایی است که با تصور شهودی ما از مفهوم سازگار نیست. چنین نمونه‌هایی تناقض‌نما نامیده می‌شود.

سه مثال زیر، ماهیت و نقش این معیار را تشریح می‌کند (فن‌دورمولن و زاسلاوسکی، ۲۰۰۳):



شکل: ۲-۳: چهارضلعی‌های محدب (فن‌دورمولن و زاسلاوسکی، ۲۰۰۳)

مثالی از هندسه:

یک چهارضلعی محدب، مجموعه نقاطی است که از چهارنقطه A,B,C,D که هیچ سه نقطه‌ای هم‌خط نیستند و چهارپاره خط AB,BC,DC,AD تشکیل شده است.

این تعریف، سه نوع از چهارضلعی‌ها را مشخص می‌کند. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، احساس می‌شود که (ج) به این گروه متعلق نیست. حال ممکن است شخص آن را به‌عنوان تناقض‌نما با تصور شهودی مفهوم تعریف شده موجود بپذیرد یا می‌تواند تعریف را طوری گسترش دهد که این نوع از چهارضلعی‌ها را شامل شود که یک موضوع سلیقه‌ای محسوب می‌شود (فن‌دورمولن و زاسلاوسکی، ۲۰۰۳).

مثالی از جبر:

معادله درجه دوم، معادله‌ای به شکل $ax^2+bx+c=0$ با شرط $a\neq 0$ است.

این یک تعریف معمولی از معادله درجه دوم در ریاضیات مدرسه‌ای است که در آن، حالتی که $a=0$ است، به‌عنوان یک مثال نقض غیرقابل قبول در نظر گرفته شده است. در واقع، بعضی از قضایا از جمله قضیه‌ای که طبق آن برای حالتی که $b^2-4ac>0$ برای یک معادله‌درجه ۲، دو جواب مختلف دارد، ممکن است برای $a=0$ درست نباشد. این در حالی است که برای معادلات خطی به شکل $ax+b=0$، تناقض‌نمای حالت $a=0$ (حداقل در چند برنامه درسی)، با در نظرگرفتن این‌که $0x+b=0$ یک معادله خطی است که اگر $b\neq 0$ باشد، جواب ندارد و اگر $b=0$ باشد، تعداد نامتناهی جواب دارد، قابل قبول است. به نظر می‌رسد چون چنین معادله خطی با این قضایا مشکلی ندارد، به‌عنوان یک تناقض‌نما مطرح نمی‌شود.

مثالی از هندسه تحلیلی:

یک مقطع مخروطی، یک منحنی با معادله $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ با شرط $A^2+B^2+C^2\neq 0$ است.

این شرط برای اطمینان از این‌که حداقل یکی از ضرایب A,B,C غیرصفر است و بنابراین، معادله واقعاً از درجه ۲ باشد، قید می‌شود. در غیر این صورت، خطی با معادله $x=0$ می‌توانست یک مقطع مخروطی نامیده شود. حتی گزاره نادرست $1=0$ می‌تواند یک مقطع مخروطی نامیده شود. با قید این شرط روی ضرایب، از این نوع تناقض‌نماها دوری می‌شود. به هرحال مطابق با این شرط، منحنی‌های شبیه $x^2+y^2=0$ (دایره‌ای با شعاع صفر)، $xy=0$ (دو خط متقاطع)، $x^2-1=0$ (دو خط موازی) و حتی $x^2+y^2+1=0$ مقطع مخروطی محسوب می‌شوند. هر چند می‌توان این نمونه‌ها را به‌عنوان تناقض‌نماها در نظر گرفت، اما این کار باعث توسعه نظریه سازگار مقاطع مخروطی به مجموعه‌ای بزرگ‌تر نمی‌شود، برعکس ممکن است باعث شکل‌گیری تعداد زیادی قضیه پیچیده‌تر برای مقاطع مخروطی شود.

بیشتر علوم با یک سلسله تعریف‌ها آغاز می‌شوند که اصطلاحاً «مبادی تصور» یا «اصول موضوعه» نامیده می‌شوند. به این ترتیب، دانشمندان سعی دارند پیش از ورود به مسائل هر علم، تصور روشن و مشخصی از موضوعات مورد بحث ارائه نمایند تا مبانی آن علم، دقیقاً معلوم شوند. اهمیت تعریف در انواع مجادلات به اندازه‌ای است که با روشن شدن مفاهیم کلیدی مبهم، مورد مجادله عموماً برطرف می‌شود یا حداقل نقطه اختلاف نظرها روشن می‌شود

مثال‌ها و غیرمثال‌های یک تعریف ریاضی

اگر ساختار منطقی تعریف یک مفهوم را مجموعه‌ای از شرایط لازم و کافی برای مفهوم بدانیم، می‌توان گفت، غیرمثال‌های[۴۴] یک تعریف ریاضی، یکی از شرایط لازم یا کافی را ندارند و بیشتر، مثال‌های خاص مفهوم را نشان می‌دهند (زاسکیس و لیکین، ۲۰۰۸). بر این اساس، یک مثال از تعریف مربع می‌تواند چنین باشد (زاسکیس و لیکین، ۲۰۰۸):

- مستطیلی که همه اضلاع آن مساوی‌اند.

یک غیرمثال هم از تعریف مربع، می‌تواند به یکی از صورت‌های زیر باشد (زاسکیس و لیکین، ۲۰۰۸):

● شکلی که دارای چهار ضلع با طول مساوی است (شرایط لازم را دارد ولی دارای شرایط کافی نیست.)

● یک مربع چهار رأس دارد که در (x,y)، $(x+1,y)$، $(x,y+1)$ و $(x+1,y+1)$ قرار دارند (شرایط کافی را دارد، ولی شرایط لازم را ندارد).

● دو خط عمودی موازی که بر دو خط افقی موازی عمود می‌شوند (شرایط لازم و کافی را ندارد).

● هم‌چنین، یک غیرمثال از تعریف ریاضی می‌تواند گزاره‌ای باشد که با تعریف پذیرفته شده معمول، هم‌ارز نباشد (زاسلاوسکی و شِر، ۲۰۰۵). مثلاً، یک تعریف معمول برای تابع صعودی چنین است (زاسلاوسکی و شِر، ۲۰۰۵):

● تابع f با دامنه D صعودی است، اگر برای هر $x_1, x_2 \in D$، $x_1>x_2$، آن‌گاه $f(x_1)>f(x_2)$

● نسبت به این تعریف، می‌تواند یک غیرمثال از تابع صعودی به‌صورت زیر باشد (زاسلاوسکی وشِر، ۲۰۰۵):

● تابع f با دامنه D صعودی است، اگر برای هر $x\in D$، $f(x)'>0$.

در حدود دو هزار سال است که قالب ارائه ریاضی رسمی به‌صورت «تعریف، قضیه، اثبات» شناخته می‌شود. کتاب اصول[20] اقلیدس در حدود ۳۰۰ سال قبل از میلاد، این قالب ارائه مطالب را معرفی کرد که با تغییری مختصر در سبک، هنوز هم در متون رسمیِ ریاضی دیده می‌شود. اقلیدس همراه با ارائه این قالب برای ریاضیات رسمی، نخستین‌بار تعریف‌ها را نیز به شکل مدون، در کتاب اصول خود آورده است

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، جنبه‌های مختلف یک تعریف ریاضی توصیف و تشریح شد. تعریف یک مفهوم، یکی از عناصر اصلی است که مستقل از روش ارائه مفهوم، در درک مطلوب آن مفهوم، نقش به‌سزایی دارد و در واقع، می‌توان گفت که تعریف است که به مفهوم هویت می‌بخشد و چیستی آن را مشخص می‌کند.

از طرفی، با توجه به مطالبی که گفته شد، می‌توان ادعا کرد که مفاهیم ریاضی و تعریف‌ها، قطعی نیستند و در واقع، به زمینه‌ای که در آن تفسیر می‌شوند (به‌کار می‌روند)، بستگی دارند. هم‌چنین، از بین ویژگی‌های یک تعریف ریاضی، ویژگی امکان انتخاب، مجموعه قضایا و اثبات‌ها را تحت تأثیر قرار می‌دهد. انتخاب تعریف در آموزش ریاضی، علاوه بر ملاحظات ریاضی، به ملاحظات پداگوژیکی نیز وابسته است. از مهم‌ترین ویژگی‌های پداگوژیکی می‌توان به رویکرد برنامه درسی و دنباله یادگیری که مشخص می‌کند چه مفاهیمی را لازم است که یادگیرنده قبلاً یادگرفته باشد (مثلاً دنباله یادگیری در رویکرد برنامه درسی معادله- محور[45] با دنباله یادگیری در رویکرد برنامه درسی با محوریت تابع[46] متفاوت است)، اشاره کرد. علاوه بر این‌ها، هنوز بسیاری از معلمان و دانش‌آموزان نمی‌دانند که برای یک مفهوم ریاضی، می‌توان تعریفی انتخاب کرد و کسانی هم که می‌دانند، ممکن است ندانند که چگونه و با چه معیاری باید درباره تعریف بهتر، تصمیم‌گیری کرد. نهایتاً، به ندرت امکان انتخاب تعریف برای مفاهیم مختلف ریاضی مورد بحث قرار می‌گیرد و در نتیجه، تعداد زیادی از دانش‌آموزان نقش تعریف‌ها را در ریاضی نادیده می‌گیرند یا آن را درک نمی‌کنند (یوسیسکین و همکاران، ۲۰۰۸).

بنابراین، به‌نظر می‌رسد اهداف هر برنامه درسی ریاضی که شامل برنامه‌هایی جهت ایجاد فرصت‌های مناسب برای درک تعریف‌های مفاهیم ریاضی و نقش آن‌ها در یادگیری ریاضی نباشد، به‌طور کامل محقق نخواهد شد.

پی‌نوشت

۱. وسیله‌ای که عبارت‌های جدید از عبارت‌های اولیه ثابت می‌شوند، یک بخش از نظریه قیاسی/ استنتاجی است که به عنوان قوانین استنتاج دانسته می‌شود.

2. Morgan

۳. شکل ۲- (الف) ممکن است یک مثلث را روی سطح کره در هندسه کروی نمایش دهد. شکل ۲- (ج) یک ناحیه مثلثی نامیده می‌شود و اغلب هنگام صحبت از «مساحت مثلث»، درباره آن فکر می‌کنیم. شکل ۲- (د) می‌تواند مثلثی را در هندسه متناهی نمایش دهد.

4. Usiskin
5. Stipulative
6. Reported
7. Hospers
8. Robinson
9. Lexical
10. Edwards
11. Ward
12. Lando
13. Extracted

۱۴. منظور از Negative Definition تعریفی است که بر اساس یک یا چند ویژگی است که آن مفهوم، آن ویژگی‌ها را ندارد.

15. Borasi
16. Pimm

17. Verbal
18. Symbolic Definition
۱۹. ProveDefinition: ایــن گزاره درســت و دقیق اســت، ولی بیشتر می‌تواند به عنوان قضیه‌ای به‌کار رود که باید اثبات شود، تا اینکه یک تعریف باشــد. در ریاضی، این نوع ادعاها بیشتر راجع به ویژگی‌ها هستند تا تعریف‌ها (جیمسون ، ۱۹۹۹).
20. Elements (EUCLID’S ELEMENTS OF GEOMETRY)
21. Krantz
22. Genus proximum
23. Differentia Specific
24. Bunt
25. Jones
26. Bedient
27. Jamison
28. Ouvrier
29. Van Dormolen
30. Creterion of Hierarchy
31. Criterion of Existense
32. Criterion of Equivalence
33. Criterion of Axiomatization
34. Economical
35. Elegance
36. Degeneration
37. Recurring
38. Construction
39. Winicki- Landman
40 Leikin
۴۱. تابــع $f:D \to R$ روی D صعــودی اســت اگــر بــرای هــر $x_۱, x_۲ \in D$ به‌طوری که : $x_۱>x_۲$، $f(x_۱)>f(x_۲)$
تابــع $f:D \to R$ روی D صعودی اســت هرگاه: بــرای هر $x \in D$، $f(x)'>۰$
42. Creterion of Minimality
43. Aesthetic
44. Non Examples
45. Equation-based
46. Function-based

منابع

۱. هاســپرس، جان (۱۹۹۶). درآمدی برتحلیل فلســفی. ترجمه موسی اکرمی (۱۳۷۹). تهران. انتشارات طرح نو.
2. DeVilliers, M. (1998). To teach definitions in geometry or to teach to define? In A. Olivier, & K. Newstead (Eds.), Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (vol. 2, pp. 248–255). Stellenbosch: RSA.
3. DeVilliers, M. (1994).The Role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. For the Learning of Mathematics. 14(1), 11–18.
4. Edwards, B., & Ward, M. B. (2004). Surprises from mathematics education rsearch: Student (mis)use of mathematical definitions. The American Mathematical Monthly.111(5), 411–424
5. Heinze, A. (2002). Because a square not a rectangle: Students□ knowledge of simple geometrical concepts when starting to learn proof: Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.
6. Jamison, R, E(1999). Learning the language of mathematics.The Fourth Writing Across the Curriculum conference. Cornell.
7. Leikin, R., & Zaskis, R (2010). On the content -dependence of prospective teachers knowledge: Acase of exemplifying definition. International Journal of Mathematical Education in science and Technology. 41:4, 451–466.
8. Leikin, R., & Winicky-Landman, G. (2001). Defining as a vehicle for professional development of secondary school mathematics teachers. Mathematics Teacher Education and Development.3, 62–73.
9. Morgan, C. (2010).Word, definitions and concepts in discourses of mathematics, teaching andlearning. Language and Education, 19: 2, 102–116.
10. Mariotti, M. A., & Fischbein, E. (1997). Defining in Classroom Activities. Educational Studies in Mathematics, 34(3), 219–248.
11. Ouvrier-Buffet, C. (2002). An activity for constructing a definition. In A.D Cockburn & E. Nardi (Eds.),Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol. 4, 25–32. University of East Anglia, UK.
12. Pimm, D.(1993). Just a matter of definition.Educational Studies in Mathematics, 25, 261–277.
13. Shir,K. &Zaslavsky,O. (2001). What constitute a (good) definition? The case of asquare:Proceedings of the 25thConference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education
14. Usiskin, Z.; Griffin, J.; Witonsky, D.;& Willmore, E. (2008). The classification of quadrilaterals: A study in definition. Charlotte, NC: Information Age Publishing.
15. Van Dormolen, J., & Zaslavsky, O. (2003). The many facets of a definition: The case of periodicity. Journal of Mathematical Behavior.22(1), 91–106.
16. Vinner,S. (1976). The naive concept of definition in mathematics. Educational Studies in Mathematics. 7, 413–429.
17. Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D,O. Tall (Ed.),Advanced Mathematical Thinking.(pp. 65–81). Dordrecht: Kluwer.
18. Zaslavsky, O.;& Shir, K. (2005). Students’ conceptions of a mathematical definition. Journal for Research in Mathematics Education.36(4), 317–346
19. Zazkis,R., & Leikin,R. (2008). Exemplifying definitions: A case of a square. Educational Studies in Mathematics, 69(2), 131–148.