مقوله‌های حل مسئله ریاضی چیست؟

(بازنگری بر فرایند حل مسئله)

مهسا خدایاری، دبیر ریاضی منطقه نوبران استان مرکزی و
دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی دانشگاه شهید بهشتی

چکیده

امروزه، بهره‌گیری از فرایند حل مسئله، یکی از ایده‌های مهم در یاددهی ـ یادگیری ریاضی محسوب می‌شود، تا جایی که برخی آن را قلب آموزش ریاضی می‌دانند، زیرا از نشانه‌های یادگیری مؤثر دانش‌آموزان آن است که بتوانند آموخته‌های خویش را در موقعیت حل مسئله، به‌کار گیرند. در راستای تحقق این هدف، مقاله حاضر به بررسی حل مسئله با تأکید بر چهار مقوله معرفی شده توسط شونفیلد در این فرایند می‌پردازد و در پایان، با ذکر مثالی، دیدگاه وی را پیرامون حل مسئله، مورد بحث قرار می‌دهد.

کلیدواژه‌ها: مسئله، حل مسئله، منابع، رهیافت‌ها، کنترل، نظام باورها.

مقدمه

یکی از اهداف اصلی آموزش ریاضی، ارتقای توانایی اندیشیدن فرد است و یکی از طرق دستیابی به این هدف، به‌کارگیری حل مسئله ریاضی در کلاس درس است. زیرا مهارت حل مسئله، نه‌تنها به فرد کمک می‌کند تا مشکل خود را از میان بردارد، بلکه او را توانمند می‌سازد تا همیشه به یافتن راه‌حل‌های متعدد و متنوع فکر کند، از انعطاف‌پذیری فکری برخوردار گردد، قدرت توقف و تأمل بیابد، از اعمال تکانشی پیشگیری کند، توانایی پیش‌بینی پیامدها و

نتایـج احتمالی اعمال خود را بیابد و به سـازگاری و انطباق اجتماعی بیشـتری برسـد (به نقل از میری و همکاران، ۱۳۹۰، ص۲۵).

ولـی براسـاس مشـاهدات نگارنـده و همکاران وی، بیشـتر دانش‌آموزان در رویارویی با یک مسئله، نمی‌دانند از کجا باید شـروع کنند و چگونه اطلاعات و داده‌های مسـئله را جهت رسـیدن به پاسخ، به‌کار گیرند. شـونفیلد (۱۹۸۵) نیـز در تحقیقات خود، به این نتیجه رسـید که یک مسئله حل‌کن به این دلیل در حل مسئله با شکست مواجه می‌شود که نمی‌داند چگونه از ذخایر دانشی خود استفاده کند و بهره‌گیری از کدام اسـتراتژی حل مسـئله در حل یک مسـئله خاص، ثمربخش اسـت. بنابراین، برای تقویت مهارت حل مسـئله ریاضی دانش‌آموزان، باید مقوله‌های حل مسئله را شناسـایی کنیم. بدین منظور، ابتدا باید به سؤالاتی نظیر اینکه مسئله چیست؟ اطلاعات ریاضی در دسترس مسئله حل‌کن، چه هستند، چگونه انتخاب می‌شوند و چگونه مورد استفاده قرار می‌گیرند؟ پاسخ دهیم.

مسئله چیست؟ مسئله حل‌کن کیست؟

زمانی که صحبت از مسئله و حل مسئله، به میان می‌آید، ناخودآگاه، نام جورج پولیا[1]، ریاضی‌دان مشهور مجارسـتانی، در ذهن تداعی می‌شـود. پولیا، شـاید نخسـتین کسی باشد که در سـال ۱۹۴۵، با نوشتن کتاب «چگونه مسـئله حل کنیم» نخسـتین گام را در آموزش اسـتراتژی‌های حل مسئله برداشته است (روشنگر و زاده‌دباغ، ۱۳۸۸، ص ۲۴۸). مسئله از دید پولیا (۱۹۶۲)، عبارت است از «ضرورت جست‌وجوی آگاهانه وسـیله‌ای مناسـب برای رسـیدن به هدفی مشـخص که در بدو امر، غیرقابل دسـترس می‌نماید و حل مسـئله به معنای پیدا کردن این وسیله است» (روزدار، ۱۳۸۵، ص ۲۸).

شـونفیلد[2] (۱۹۹۲)، نیز مسئله را فعالیتی تعریف می‌کنـد که در آن دانش‌آموز علاقه‌مند درگیر اسـت و تلاش دارد که راه‌حلی برای آن پیدا کند و وسـیله ریاضی در دسترس و از قبل آماده‌ای که با آن به هدف برسـد، ندارد (ریحانی و همکاران، ۱۳۸۹، ص ۱۱۷). شونفیلد، همچنین معتقد است مسئله بودن، خصیصه

مسئله از دید پولیا (۱۹۶۲)، عبارت است از «ضرورت جست‌وجوی آگاهانه وسیله‌ای مناسب برای رسیدن به هدفی مشخص که در بدو امر، غیرقابل دسترس می‌نماید و حل مسئله به معنای پیدا کردن این وسیله است»

ذاتی یک تکلیف ریاضی نیسـت؛ بلکه رابطه‌ای خاص بین شـخص و تکلیف اسـت که آن تکلیف را به یک مسـئله برای وی تبدیل می‌کند (شـونفیلد، ۱۹۸۵، ص۷۴). در نتیجه، مسئله دارای ماهیت نسبی است؛ یعنی آنچه برای یک دانش‌آموز، مسئله است، ممکن است برای دانش‌آموز دیگری، صرفاً یک تمرین باشد.

مقوله‌های حل مسئله ریاضی چیست؟

پیرامون حل مسـئله ریاضی، مقالات بسیاری به رشـته تحریر درآمده‌اند و آن را از جنبه‌های گوناگون مورد بحث و بررسـی قرار داده‌اند. در اینجا ما تمرکز خود را بر مقوله‌های حل مسـئله ریاضـی از دیدگاه شـونفیلد، معطوف می‌کنیم. شـونفیلد (۱۹۸۵)، در تحقیقات خود، به این نتیجه رسـید که برای توصیف عملکرد مسـئله حل‌کن، باید به چهـار مقوله دانش، توجه نمود که عبارت‌اند از: منابع، رهیافت‌ها، کنترل، نظام باورها.

۱. منابع[3]:

شـونفیلد (۱۹۸۵)، منابع را تحـت عنوان «دانش ریاضی که فرد در رابطه با مسـئله داده شده، داراست» معرفـی می‌کند و آن را زیربنای عملکرد حل مسـئله، در نظر می‌گیرد. وی معتقد اسـت منابع، شامل حقایق و تعاریـف، دانـش شـهودی و غیررسـمی، رویه‌های الگوریتمـی و غیرالگوریتمی و دانش موضوعی راجع به قواعد استدلال در حوزه آموزش ریاضی است (شونفیلد، ۱۹۸۵، ص ۱۵). بنابراین می‌توان گفت منابع، هر گونه اطلاعات ریاضی که مسئله حل‌کن‌ها درک می‌کنند یا درک نمی‌کنند و ممکن است به مسئله مرتبط شوند، هستند (به نقل از روزدار، ۱۳۸۵، ص ۲۸).

منابع، شامل حقایق و تعاریف، دانش شهودی و غیررسمی، رویه‌های الگوریتمی و غیرالگوریتمی و دانش موضوعی راجع به قواعد استدلال در حوزه آموزش ریاضی است

در مـورد منابـع، باید توجه نمود کـه میزان این ذخایر دانشـی و به تبع آن، میزان مسـئله بودن یک مسئله و همچنین، انتخاب استراتژی برای حل مسئله، برای افراد مختلف، متفاوت اسـت، زیرا همان‌طور که اشاره شد، مسئله دارای ماهیت نسبی است.

۲. رهیافت‌ها[۴]:

شـونفیلد (۱۹۸۵)، معتقـد اسـت رهیافت‌هـا، راهبردهـا و فنونی جهت ایجـاد روش‌هایی به‌منظور حل مسائل ناآشنا و غیراستاندارد و قواعدی مشخص برای حل ثمربخش مسئله هسـتند و به نقل ازپولیا، از آن‌ها تحـت عنوان «ابزارهای کشـف» نام می‌برد. واژه دیگری که در ارتباط با رهیافت‌ها، به‌کار می‌رود، اسـتراتژی اسـت. جهانی‌پور (۱۳۷۵)، اسـتراتژی را با عبارت «اسـتراتژی، عبـارت از فراهم آوردن ابزارها و امکانات لازم برای حل یک مسـئله اسـت» تعریف می‌کنـد (ص۵۸). بنابرایـن می‌تـوان نتیجه گرفت، استراتژی‌های رهیافتی، قوانینی برای حل موفقیت‌آمیز مسئله هستند. به بیانی دیگر، استراتژی‌های رهیافتی، پیشـنهادهای کلی هستند که به فرد کمک می‌کنند تا مسـئله را بهتر بفهمد و راهی بـرای حل آن بیابد. شـونفیلد (۱۹۸۵)، به نقل از پولیا، روش حل مسئله را تدبیری می‌داند که دوبار به‌کار رفته است. به‌عبارت دیگـر، اگـر روشـی دو بار موفق شـود، فـرد هنگام رویارویی با مسـائل مشابه، آن را به‌کار می‌برد. در این روش، حل مسـئله به یک اسـتراتژی تبدیل می‌شود (ص۷۰). پس، روش‌های موفق در حل مسـائل، خود به‌صورت استراتژی، در ذهن نقش می‌بندند و سپس، در حل مسائل مشابه، به‌کار می‌روند.

اسـتراتژی‌های رهیافتی برای حل مسئله، متنوع هسـتند که به‌عنوان نمونه، می‌توان به رهیافت رسم شـکل، بهره گرفتن از مسـائل مرتبط، صورت‌بندی مجدد و برگشـت به عقب، تبدیل مسـئله به مسائل سـاده‌تر، ساختن زیر هدف برای حل مسئله و... اشاره نمود.

۳. کنترل[۵]:

شـونفیلد (۱۹۸۵)، کنترل در فرایند حل مسئله را با عبارت «تصمیمـات عمومی، راجع به گزینش و به‌کارگیری منابع و رهیافت‌ها» تعریف می‌کند و معتقد است کنترل، شامل تحلیل، طراحی(طرح نقشه)، اجرا و بازنگری و ارزیابی راه‌حل اسـت که همگی با هم در تعامل هستند و از آن‌ها به‌عنوان الگوی کلی استراتژی حل مسئله، نام می‌برد:

- تحلیـل ← فهمیـدن عبـارات، سـاده کـردن و فرمول‌بندی مسئله
- طراحی ← استدلال کردن، تجزیه سلسله مراتبی مسئله
- اجرا ← اجرای راه‌حل به‌صورت گام‌به‌گام همراه با بازبینی محدود
- بازبینـی ← آزمون‌های خـاص، آزمون‌های کلی (ص۱۱۰).

از بین موارد مطرح شـده، **طراحی**، اصل و اساس کنترل اسـت و آن را قلب استراتژی می‌دانند، زیرا با کنترل کلی بر روند حل مسـئله، مسـئله حل‌کن را مطمئن می‌سـازد که بهتریـن راه را در پیش گرفته است و گام اکتشاف در حل مسئله نیز، در این مرحله، اتفاق می‌افتد و بخش عمده آن، متوجه فراشـناخت است که مبتنی و متکی بر شناخت می‌باشد (شونفیلد، ۱۹۸۵، ص۱۱۰).

با توجه به آنکه مقالات بسیاری پیرامون فراشناخت به رشته تحریر درآمده‌اند، در مورد فراشناخت به این بسنده می‌کنیم که نکته مهم در حل مسئله آن است که درباره چگونگی و زمان اسـتفاده از آنچه می‌دانیم، تصمیم‌گیـری کنیم. توانایی اسـتفاده نکردن از یک اسـتراتژی حل مسـئله پس از آزمایش آن و انتخاب یک استراتژی مناسـب‌تر دیگر، ارزشیابی موقعیت و تجزیه و تحلیل فرایند انجام شده جهت شروع بعدی، لازمه حل مسئله هستند که همگی از نوع فراشناخت می‌باشند (گویا، ۱۳۷۷، ص ۱۴).

هم‌چنیـــن، شـــونفیلد (۱۹۸۵)، ضمن مشـــاهده مســـئله حل‌کن‌های تازه‌کار، گزارش کرده اســـت که چنیـــن دانش‌آموزانی، اغلـــب دارای دانـــش واقعی و راهبردی مناســـب برای حل مسئله هستند. اما آن‌ها بـــه این دلیـــل از عهده حـــل مســـئله برنمی‌آیند که تصمیم‌های اجرایی ضعیفی اتخاذ می‌کنند، مسیرهای نامناســـبی را پیگیـــری می‌نماینـــد و نمی‌توانند روی مسیرهای مناســـب، ســـرمایه‌گذاری کنند. از این‌رو، اهمیّـــت توانایی‌هـــای کنترلی و فراشـــناختی در حل مسئله به‌خوبی مشهود است (آذرنگ، ۱۳۸۵، ص۴۴).

۴. نظام‌های باوری[۶]:

از نظر شونفیلد (۱۹۸۵)، نظام‌های باوری عبارت اســـت از «جهان‌بینی ریاضی شخص نسبت به خود، محیـــط، موضوع و ریاضی» (ص ۱۵) و اظهار می‌دارد: «بســـیاری از دانش‌آمـــوزان معتقدند که اندیشـــه‌ها و روندهـــای ریاضی که به‌وســـیله متخصصـــان از بالا منتقل می‌شـــوند، را باید به‌خاطر بسپارند، در نتیجه، انتظار دارند فرمول‌هـــای آماده‌ای برای موقعیت‌هایی که مطالعه کرده‌اند، در اختیار داشـــته باشند و ممکن است در صورتی که فرمول‌ها را فراموش کرده باشند، به‌سادگی تسلیم شوند یا ممکن است نتوانند از عهده تحلیل موقعیت‌هایی که قادر به فهمیدن آن‌ها بوده‌اند و سعی کرده‌اند آن‌ها را تحلیل کنند، برآیند. به‌گونه‌ای مشابه، بســـیاری از دانش‌آموزانی که تنها تجربه آن‌ها در مورد حل مسئله، به‌کار کردن، تمرین و مشق‌های عملی مربوط بوده است، توقع دارند که اگر می‌توانند مســـئله‌ای را حل کنند، تنها در چند دقیقه، این کار را انجـــام دهند. چنین دانش‌آموزانی ممکن اســـت به ســـادگی، کار را بر روی مســـائل طولانی که قابل حل بوده‌انـــد، متوقف کنند و زمان کمتـــری را به این امر، اختصاص دهند» (رضائی، ۱۳۸۵، ص ۴۵).

بنابراین، تمام تصمیمات مسئله حل‌کن، از باورهای او نشئت می‌گیرد. از آنجا که باورهای افراد، در اثر عوامل گوناگونی از جمله تدریس، محیط اطراف، شهود و نوع تفکر ریاضی، به تدریج و به مرور زمان شکل گرفته‌اند، تغییر آن‌ها ساده نیست (آذرنگ، ۱۳۸۵، ص۴۱).

برای دســـتیابی به درک عمیق‌تر پیرامون دیدگاه شونفیلد، به بررسی مثالی می‌پردازیم.

کنترل، شامل تحلیل، طراحی(طرح نقشه)، اجرا و بازنگری و ارزیابی راه‌حل است که همگی با هم در تعامل هستند و از آن‌ها به‌عنوان الگوی کلی استراتژی حل مسئله، نام می‌برد

مثال: اعداد صحیح مثبت k را در دسته‌های زیر، در نظر بگیرید:
(۱)، (۳ و ۲)، (۶ و ۵ و ۴)، (۱۰ و ۹ و ۸ و ۷)، (۱۵ و ۱۴ و ۱۳ و ۱۲ و ۱۱) و...

به‌طـــوری که در دســـته kاُم، k عدد صحیح قرار دارد. مجمـــوع اعداد صحیح دســـته kاُم را به‌دســـت آورید؟ (شونفیلد، ۱۹۸۵، ص۸۲)

برای حل این مسئله، ابتدا باید عدد اول دسته k اُم و ســـپس، آخرین عدد این دسته را محاسبه کنیم. در شروع کار، دسته‌ها را به‌ترتیب مشخص می‌کنیم:
(۱): دسته اول
(۳ و ۲): دسته دوم
(۶ و ۵ و ۴): دسته سوم
(۱۰ و ۹ و ۸ و ۷): دسته چهارم
(۱۵و ۱۴و۱۳و۱۲و۱۱): دسته پنجم
(۲۱ و۲۰ و ۱۹و ۱۸و ۱۷و ۱۶): دسته ششم

از دسته‌های فوق، اطلاعات زیر به‌دست می‌آیند:

۱. تعداد اعداد هر دســـته، با شـــماره دسته، برابر است. پس، در دسته kاُم، k عدد وجود دارد.

۲. طول هر دسته، یک واحد از شماره دسته، کمتر اســـت. به‌عبارت دیگر، طول دســـته kاُم، برابر است با $(k-1)$.

۳. مجمـــوع اولین عدد یک دســـته با شـــماره آن دســـته، برابر است با اولین عدد دســـته بعد. به‌عنوان مثال، در دسته ششم داریم: ۱۶= ۵+۱۱.

۴. آخرین عدد هر دســـته، برابر اســـت با مجموع اولین عدد دســـته با طول آن دســـته. مثلاً در دســـته چهارم داریم: ۱۰=۳+۷.

۵. در بعضـــی از دســـته‌ها، اولین عدد دســـته، از مجموع اولین اعداد دســـته‌های قبل، به‌دست می‌آید. برای نمونه، می‌توان به مجموع ۱۱=۷+۴ یا ۷=۴+۲+۱ اشاره کرد.

نظام‌های باوری عبارت است از «جهان‌بینی ریاضی شخص نسبت به خود، محیط، موضوع و ریاضی

۶. اولین عدد هر دسته، برابر است با مجموع شماره‌های دسته‌های قبل همراه با عدد یک. به‌عنوان مثال، در دسته ششم داریم: ۱۶=۱+(۵+۴+۳+۲+۱).

داده‌های فوق، همگی جزء منابع مسئله حل‌کن، به‌شمار می‌آیند که ممکن است همه یا بعضی از آن‌ها، با توجه به رهیافت مورد استفاده، در فرایند حل مسئله به‌کار روند. با بررسی مورد پنجم، متوجه می‌شویم که این دانش، به ما در فرایند حل مسئله، کمکی نمی‌کند، زیرا نظم خاصی در تمام دسته‌ها با ویژگی مذکور، مشاهده نمی‌شود. بنابراین آن را از منابع خود، کنار می‌گذاریم [کنترل در حل مسئله]. از حدس شماره ۶، استفاده می‌کنیم تا ببینیم آیا این قاعده کلی است یا خیر؟ (رهیافت حدس و آزمایش)

۱=۱

۱+۱=۲

(۱+۲)+۱=۴

(۱+۲+۳)+۱=۷

(۱+۲+۳+۴) +۱=۱۱

و با توجه به روابط فوق، اگر اولین عدد دسته kاُم را با a_k نشان دهیم، داریم:

$$[۱+۲+۳+...+(k-۱)]+۱=\frac{(k-۱)k}{۲}+۱=a_k$$

بنابراین، به یک رابطه که در تمام دسته‌ها برقرار است، رسیدیم. حال، با استفاده از منابع شماره ۲ و ۴، می‌توانیم آخرین عدد دسته kاُم را به‌دست آوریم. در نتیجه، با نمایش آخرین عدد دسته kاُم با نماد l_k، خواهیم داشت:

$$(k-۱)+a_k=(k-۱)+\frac{(k-۱)k}{۲}=l_k$$

با داشتن اعداد اول و آخر دسته $k_{ام}$، می‌توانیم مجموع اعداد دسته kاُم را محاسبه کنیم. بدین منظور، باید تفاضل مجموع اعداد از یک تا l_k-۱ را از مجموع اعداد از یک تا l_k به‌دست آوریم. به عنوان نمونه، مجموع اعداد دسته دهم را می‌یابیم:

$$a_{۱۰}=\frac{۱۰(۱۰-۱)}{۲}+۱=۴۶$$

$$\Rightarrow l_{۱۰}=(۱۰-۱)+۴۶=۵۵$$

$$(۴۶+۴۷+...+۵۵)=(۱+۲+...+۵۵)-(۱+۲+...+۴۵)$$

$$=\frac{۵۵(۵۵+۱)}{۲}-\frac{۴۵(۴۵+۱)}{۲}$$

$$=۱۵۴۰-۱۰۳۵=۵۰۵$$

رابطه به‌دست آمده برای محاسبه اولین عدد دسته kاُم، را می‌توان به کمک دانش در دسترس شماره ۳ با استفاده از استراتژی رهیافتی الگویابی نیز، به‌دست آورد که آن را به اختصار بیان می‌کنیم.

با نگاهی مجدد به دسته‌ها، می‌خواهیم ببینیم که آیا بین اولین عدد یک دسته با شماره آن دسته و اولین عدد دسته قبل، رابطه‌ای وجود دارد؟ دسته ششم را بررسی می‌کنیم:

$$۱۶=۱۱+(۶-۱)=[۷+(۶-۲)]+(۶-۱)$$

$$=[۴+(۶-۳)]+(۶-۲)+(۶-۱)$$

$$=[۲+(۶-۴)]+(۶-۳)+(۶-۲)+(۶-۱)$$

$$=[۱+(۶-۵)]+(۶-۴)+(۶-۳)+(۶-۲)+(۶-۱)$$

$$=۱+۵\times۶-[۱+۲+۳+۴+۵]$$

$$=۱+\frac{۵(۵+۱)}{۲}$$

با بررسی روند فوق، مشخص می‌شود که رابطه برای تمام دسته‌ها برقرار است و در نهایت، فرمول محاسبه a_k، به‌دست می‌آید. آیا شما می‌توانید با استفاده از استراتژی رهیافتی دنباله بازگشتی، به فرمول محاسبه a_k، برسید؟ شروع کنید!!

بحث و نتیجه‌گیری

با توجه به مطالب مطرح شده، می‌توان گفت در تدریس حل مسئله، نخست باید بدانیم که مسئله حل‌کن، با چه ابزاری شروع می‌کند. این ابزار، فضای اولیه تجسس فرد را تشکیل می‌دهند. دوم، باید بدانیم او از چه روش‌ها و فنونی برای یافتن راه‌حل

و جواب، کمک می‌گیرد. سوم، از روند و چگونگی کنترل منابع و فنون در یافتن جواب مسئله توسط فرد، آگاهی یابیم و سرانجام، سیاهه‌ای از آنچه را که فرد می‌داند، باور دارد، یا گمان می‌کند که درست است، داشته باشیم. زیرا ضروری است بدانیم که فرد چگونه اطلاعات را سازمان‌دهی و ذخیره کرده است و آن اطلاعات، چگونه برای وی، قابل حصول است (روزدار، ۱۳۸۵، ص ۲۹).

در بحث کنترل، گفتیم فرد باید از خود بپرسد بهترین استراتژی جهت به‌کار بردن در مسئله، کدام است؟ بنابراین، می‌توان گفت یکی از سخت‌ترین بخش‌های حل مسئله، پرسیدن سؤال‌های مناسب است و بهترین راه آموختن این کار نیز، تمرین در انجام آن است (جهانی‌پور، ۱۳۷۵، ص۵۷) تا مسئله حل‌کن بتواند در صورت نیاز، رهیافت به‌کار گرفته شده را متوقف کند و یا تغییری در آن ایجاد نماید تا به پاسخ مسئله دست یابد.

همچنین، اشاره شد که اغلب دانش‌آموزان، باور دارند که تمام مسئله‌ها دارای جواب هستند و باور دارند که برای هر مسئله، تنها یک جواب درست و یک راه‌حل صحیح وجود دارد؛ و معتقدند که از دانش‌آموزان عادی نمی‌توان انتظار داشت که ریاضی را درک کنند، بلکه آن‌ها صرفاً رویه‌های ریاضی را به روش مکانیکی به‌خاطر می‌سپارند و آن را به‌کار می‌بندند. این باورها عمدتاً به تجاربی مربوط هستند که دانش‌آموزان از کلاس‌های ریاضی خود و از طرز تلقی و باورهای معلمانشان کسب کنند (مکینتاش و جرت، مترجمان: گیلک و گویا، ۱۳۸۵، ص ۱۱).

بنابراین، در آموزش معلمان نیز، توجه به ویژگی‌ها و مقوله‌های حل مسئله، به‌ویژه باورهای آنان، امری ضروری است تا بتوانند دانش‌آموزانی خلاق، متفکر، تحلیل‌گر، نقّاد و توانا پرورش دهند. در این صورت، جامعه حتماً قادر خواهد بود که در فاصله‌ای کوتاه، انواع عقب‌ماندگی‌ها در زمینه‌های مختلف را رفع نماید؛ زیرا تنها جامعه‌هایی می‌توانند پیشرفت کنند و به توسعه پایدار برسند که انسان‌هایی توسعه‌یافته و پیشرفته تربیت کرده باشند.

پی‌نوشت

1. George Polya
2. Alan H. Schoenfeld
3. Resources
4. Heuristics
5. Control
6. Belief Systems

منابع

1. Alan H. Schoenfeld (1985). Mathematical Problem Solving. Academic Press, INC.

۲. آذرنگ، یوسف (۱۳۸۵): **گذری بر حل مسئله و آموزش آن**. مجله رشد آموزش ریاضی، شماره ۸۶، دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۳. جهانی‌پور، روح‌الله (۱۳۷۵): **انتخاب استراتژی در فرایند حل مسئله**. مجله رشد آموزش ریاضی، شماره ۴۶، دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۴. رضائی، مانی (۱۳۸۵): **تحلیل محتوای حل مسئله در کتاب‌های درسی ریاضی**. مجله رشد آموزش ریاضی، شماره ۸۶، دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۵. روزدار، علی (۱۳۸۵): **آنچه لازم است درباره حل مسئله بدانیم**. مجله رشد آموزش ریاضی، شماره ۸۶، دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۶. روشنگر، حسن؛ زاده‌دباغ، حسین (۱۳۸۸): **آموزش استراتژی‌های حل مسئله به دانش‌آموزان ابتدایی و راهنمایی با کمک مدل حل مسئله پولیا**. مجموعه مقالات دهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران، سازمان آموزش‌وپرورش استان یزد، وزارت آموزش‌وپرورش.

۷. ریحانی، ابراهیم؛ احمدی، غلامعلی؛ کرمی زرندی، زهرا (۱۳۸۹): **بررسی تطبیقی آموزش فرایند حل مسئله در برنامه درسی آموزش ریاضی دوره متوسطه کشورهای آمریکا، استرالیا، ژاپن، سنگاپور و ایران**. فصل‌نامه تعلیم‌وتربیت، شماره ۱۰۵.

۸. گویا، زهرا (۱۳۷۷): **نقش فراشناخت در یادگیری حل مسئله ریاضی**. مجله رشد آموزش ریاضی، شماره ۵۳، دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۹. مکینتاش، رابرت؛ جرت، دنیس (۲۰۰۰): **آموزش حل مسئله ریاضی: تحقق یک چشم‌انداز، مروری بر ادبیات تحقیق**. مترجمان: زهرا گیلک و زهرا گویا (۱۳۸۵). مجله رشد آموزش ریاضی، شماره ۸۶، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۱۰. میری، زهره؛ احقر، قدسی؛ احمدی، امینه (۱۳۹۰): **تأثیر مهارت‌های حل مسئله بر یادگیری خود نظم‌جویی دانش‌آموزان**. مجله مشاور مدرسه، دوره هفتم، شماره ۲۷.