وسیله‌ای ساده برای
تدریس مثلثات

مرتضی بیات، زهرا خاتمی و **هوشنگ اوصانلو**
خانه‌ی ریاضیات زنجان

چکیده

ضرورت وجود وسیله‌ی ساده‌ای برای تدریس درس مثلثات، ما را بر آن داشت که با استفاده از قضیه‌ی هندسی معروف مسئله‌ی جفت دوایر طوسی، وسیله‌ی متحرکی طراحی کنیم که به‌راحتی توسط معلمان و دانش‌آموزان ریاضی قابل ساخت و تولید بوده و در ضمن، اکثر مطالب مربوط به درس مثلثات به کمک آن، به‌صورت شهودی قابل بیان باشد. تجربه‌ی تدریسی مؤلفان نشان داده است که ساخت این وسیله توسط دانش‌آموزان، موجب درک عمیق‌تر آن‌ها از درس هندسه و مثلثات خواهد شد. مؤلفان به این باور رسیده‌اند که یادگیری مفهومی یک موضوع ریاضی از طریق دست‌ورزی و مشاهده‌ی عینی، این امکان را برای دانش‌آموزان فراهم می‌آورد که مفاهیم این درس‌ها در ذهن آن‌ها نهادینه شود.

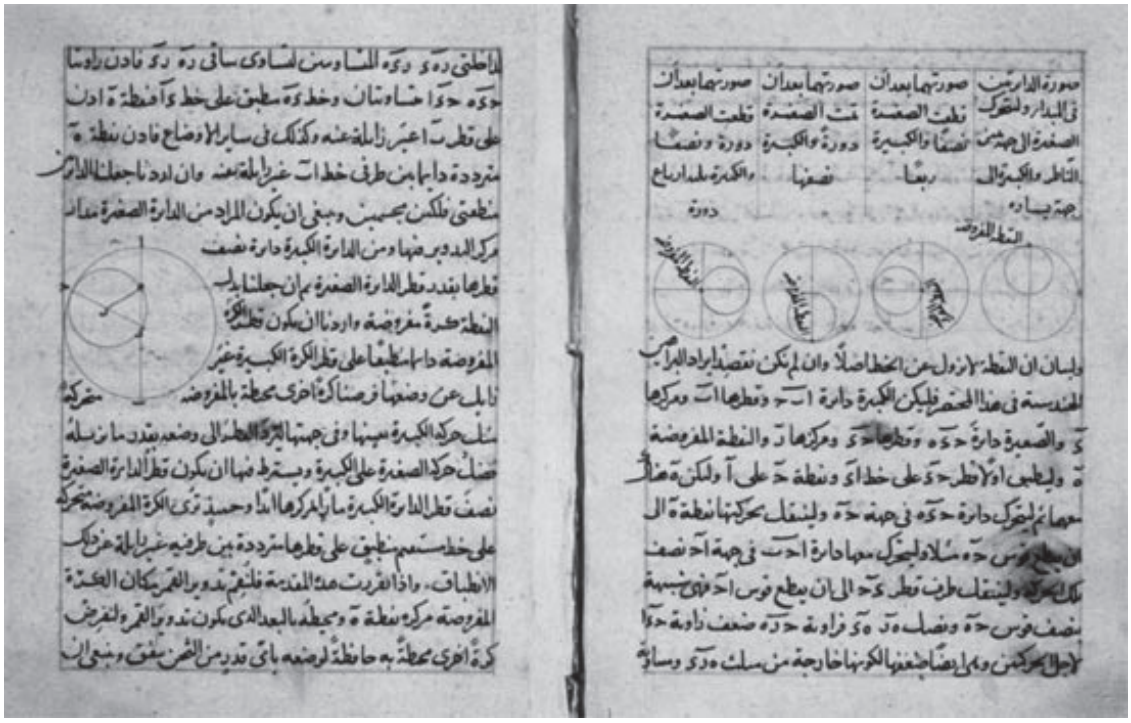
کلیدواژه‌ها: مثلثات، جفت دوایر طوسی، یادگیری مفهومی، ابزار کمک آموزشی.

مقدمه

در این مقاله، برای نشان دادن چگونگی ساخت وسیله‌ای ساده برای تدریس مثلثات، ابتدا به معرفی قضیه‌ی هندسی معروف به مسئله‌ی جفت دوایر که توسط خواجه نصیرالدین طوسی ارائه شده می‌پردازیم. سپس کاربرد این قضیه را برای ساخت دایره‌ی مثلثاتی متحرک توضیح می‌دهیم و بالاخره، روش استفاده از این وسیله را بیان می‌کنیم.

جفت دوایر خواجه نصیرالدین طوسی

اولین بار، خواجه نصیرالدین طوسی در نجوم برای مدل حرکت دو سیاره، طرح هندسی را ابداع کرد که امروزه این مسئله، به جفت دوایر طوسی معروف است. اما در منابع خارجی، به مسئله‌ی چرخ کاردان شهرت دارد. این مسئله، حرکت دورانی را به حرکت راست خط (مستقیم‌الخط) و برعکس تبدیل می‌کند.



قضیه. اگر دایره‌ای به شعاع r روی محیط داخلی دایره‌ای به شعاع $R=2r$ بدون لغزش بچرخد، هر نقطه از دایره‌ی کوچک، قطری از دایره‌ی بزرگ را به‌طور نوسانی می‌پیماید (برای دیدن اثبات این قضیه، به منبع [۱] مراجعه کنید.)

کاربرد مسئله‌ی جفت دوایر طوسی برای ساخت دایره‌ی مثلثاتی متحرک

در این بخش، روش ساخت وسیله‌ای را برای تدریس مفاهیم مثلثات ارائه می‌دهیم. ما به تجربه، در کلاس درس دریافتیم که استفاده از این وسیله، موجب آموزش کارآمدتر و تعمیق مفاهیم مربوط به درس مثلثات می‌شود و بدین‌سبب، چگونگی ساخت این وسیله را به همکاران‌مان ارائه می‌دهیم.

نام وسیله: دایره‌ی مثلثاتی متحرک؛

مخاطبان: دانش‌آموزان دوره‌ی دبیرستان و پیش‌دانشگاهی، دانشجویان فنی، دانشجو- معلمان و دبیران؛

هدف: ساخت وسیله‌ای متحرک و پویا برای آموزش نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس و تعدادی از روابط مثلثاتی.

مواد و وسایل لازم:

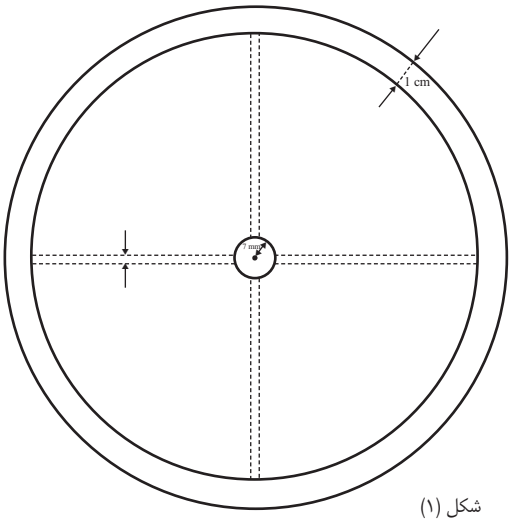
- مقوای ماکت‌سازی به ضخامت ۳ میلی‌متر برای کشیدن دایره‌های با شعاع‌های ۱۱ و ۱۲ سانتی‌متر؛
- طلق شفاف (بی‌رنگ) دایره‌ای شکل به شعاع ۱۲ سانتی‌متر؛
- شبرنگ قرمز رنگ به شکل دایره به شعاع ۵/۵ سانتی‌متر؛
- کش نازک؛
- طلق شفاف به ابعاد ۱ سانتی‌متر در ۳ سانتی‌متر و به ضخامت ۱/۵ میلی‌متر (برای تهیه این طلق می‌توانید از قاب دیسکت یا سی‌دی استفاده کنید)؛
- پرچ ماده (۱ عدد) (از این پرچ‌ها در کفاشی یا خیاطی برای پوشاندن دور سوراخ روی چرم- سوراخ بند کفش- استفاده می‌شود)؛
- واشر کوچک (۱ عدد).

روش ساخت:

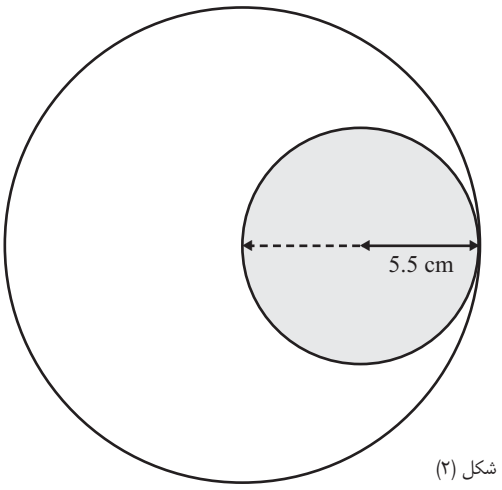
ابتدا دایره‌ای مقوایی به شعاع ۱۲ سانتی‌متر را در نظر می‌گیریم. سپس دو دایره به شعاع‌های ۷ میلی‌متر و ۱۱ سانتی‌متر به مرکز دایره‌ی ۱۲ سانتی‌متری رسم می‌کنیم. مطابق شکل (۱)، شیارهایی به ضخامت ۳ میلی‌متر به‌صورت علامت جمع (با استفاده از تیغ موکت‌بر) در امتداد خط‌چین می‌بریم (باید مواظب باشیم که دایره‌ی به شعاع ۷ میلی‌متر بریده نشود).

برای استحکام بیش‌تر این شکل به‌دست آمده، طلق شفاف

(بی‌رنگ) به شعاع ۱۲ سانتی‌متر را با استفاده از چسب مایع به دقت پشت این دایره می‌چسبانیم. برای نشان دادن اندازه‌ی زاویه، نوار بین دایره‌های به شعاع ۱۱ و ۱۲ سانتی‌متر را با استفاده از نقاله، به ۳۶ قسمت تقسیم می‌کنیم که هر قسمت نشانگر ۱۰ درجه است (شکل ۳).



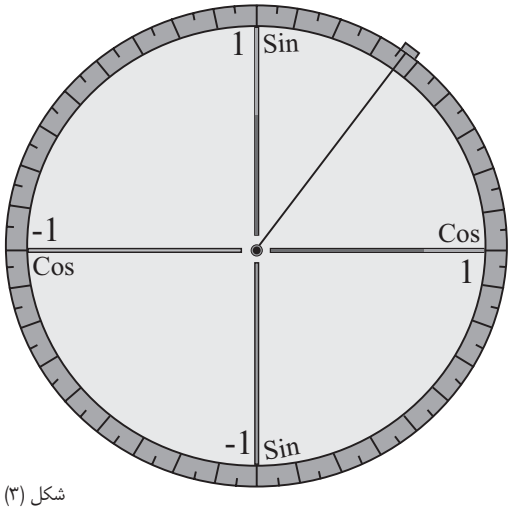
شکل (۱)



شکل (۲)

اینک نوبت به دایره‌ای به شعاع ۱۱ سانتی‌متر می‌رسد. مطابق شکل (۲)، دایره‌ی شبرنگی به شعاع ۵/۵ سانتی‌متر را روی دایره‌ی دیگری که قبلاً به شعاع ۱۱ سانتی‌متر داشتیم می‌چسبانیم.

بعد شکل (۲) را زیر شکل (۱) قرار داده و با استفاده از واشر کوچک و پرچ ماده، آن‌ها را به هم محکم می‌کنیم. این دو باید طوری روی هم پرچ شوند که دایره‌ی زیری به صورت روان، حول محل پرچ، دور خود بچرخد. هنگام چرخیدن متوجه می‌شوید که دایره‌ی قرمزی زیری، محورهای افقی (محور کسینوس‌ها) و محور عمودی (محور سینوس‌ها) را قطع می‌کند. حال برای مشخص شدن زاویه‌ی این نسبت ها، طلق ۱ در ۳ را با اندکی حرارت به شکل U خم می‌کنیم به‌طوری که یک ساق آن یک سانتی‌متر و ساق دیگر آن ۱/۵ سانتی‌متر باشد. سپس قسمت بلندتر را با استفاده از چسب مایع به پشت دایره با شعاع ۱۱ سانتی‌متر می‌چسبانیم طوری که محیط دو دایره داخل شکل U قرار گیرند و به‌صورت آزاد روی هم حرکت کنند. اینک یک سر کش نازک را از داخل پرچ ماده عبور داده و در آن‌جا با گرهی ثابت کنید. سپس سر دیگر را روی ساق کوتاه طلق U شکل که در قسمت جلوی وسیله قرار گرفته با استفاده از چسب مایع محکم کنید. حال با چرخاندن دایره‌ی پشتی که طلق به آن متصل است، کش نیز حرکت کرده و زاویه‌ی مربوطه را با محور افقی مشخص می‌کند (شکل ۳).



شکل (۳)

روش استفاده از وسیله در کلاس درس

در جلسه‌ی اول، با این وسیله، ابتدا می‌توان دایره‌ی مثلثاتی به شعاع ۱، محورهای سینوس و کسینوس و هم‌چنین، زاویه‌های ساعتگرد و پادساعتگرد را با هر اندازه، به دانش‌آموزان معرفی نمود.

در ضمن، می‌توان چهار ربع دایره‌ی مثلثاتی و علامت نسبت‌های سینوس و کسینوس را در هر ربع مشخص کرد و تغییرات مقدار سینوس و کسینوس را به‌صورت هم‌زمان بین ۱ و ۱-، به‌صورت شهودی و ملموس نشان داد.

حال زاویه را برابر صفر در نظر می‌گیریم (در این حالت، کش بر محور کسینوس منطبق است)، مشاهده می‌کنیم که کل شیار محور کسینوس، قرمز رنگ و کل شیار محور سینوس، سفید رنگ است یعنی $\cos(۰) = ۱$ و $\sin(۰) = ۰$.

با چرخاندن دایره‌ی زیرین، زاویه افزایش می‌یابد و از طول نوار قرمز در شیار کسینوس کم شده و رفته‌رفته به طول نوار قرمز متحرک در شیار سینوس اضافه می‌شود، یعنی سینوس زاویه بیش‌تر و کسینوس زاویه کم‌تر می‌شود (در ربع اول). در حالت زاویه‌ی ۴۵ درجه، با رسم عمودهایی بر محورهای سینوس و کسینوس، مشاهده می‌کنیم که مقدار سینوس و کسینوس برابر هستند (شکل ۴). البته می‌توان مقادیر سینوس و کسینوس را برای زاویه‌های خاص دیگری نیز نشان داد. اما بهتر است این کار به جلسات بعدی موکول شود تا نخست، استفاده از وسیله‌ی کمک آموزشی تا حد امکان، برای دانش‌آموزان ساده و قابل فهم شود. در حالت زاویه‌ی ۹۰ درجه، می‌بینیم که $\sin(۹۰) = ۱$ و $\cos(۹۰) = ۰$ است. هم‌چنین، مقادیر سینوس و کسینوس ۱۸۰ و ۲۷۰ و ۳۶۰ درجه نیز قابل مشاهده است.

یکی دیگر از کاربردهای این وسیله، در آموزش روابط بین نسبت‌های مثلثاتی است. تجربه‌ی استفاده از این وسیله در تدریس‌های خودمان نشان داده است که به کمک آن، در دانش‌آموزان درک شهودی قابل توجهی از این مفاهیم مثلثاتی مانند زیر، ایجاد می‌شود.

$$\sin(۳۰) = -\sin(-۳۰), \cos(۳۰) = \cos(-۳۰)$$

یعنی مقدار سینوس ۳۰ درجه و سینوس ۳۰- درجه برابر ولی قرینه‌ی هم‌اند. هم‌چنین کسینوس ۳۰ درجه و کسینوس ۳۰- درجه هم از نظر مقدار و هم از نظر علامت یکسان هستند.

در ضمن، علامت تانژانت و کتانژانت را نیز می‌توان با توجه به تعریف آن‌ها و به کمک علامت های سینوس و کسینوس، به‌دست آورد.

در ادامه، چند مثال دیگر را برای زاویه‌های بین ۰ و ۹۰ درجه مشاهده می‌کنیم:

رابطه‌ی ۱

$$\sin(x) = -\sin(-x) \text{ یا } \sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\cos(x) = \cos(-x)$$

رابطه‌ی ۲

$$\sin(۱۸۰ - x) = \sin(x)$$

رابطه‌ی ۳

$$\cos(۱۸۰ - x) = -\cos(x)$$

$$\sin(۱۸۰ + x) = -\sin(x)$$

رابطه‌ی ۴

$$\cos(۱۸۰ + x) = -\cos(x)$$

رابطه‌ی ۵

$$\sin(۹۰ - x) = \cos(x)$$

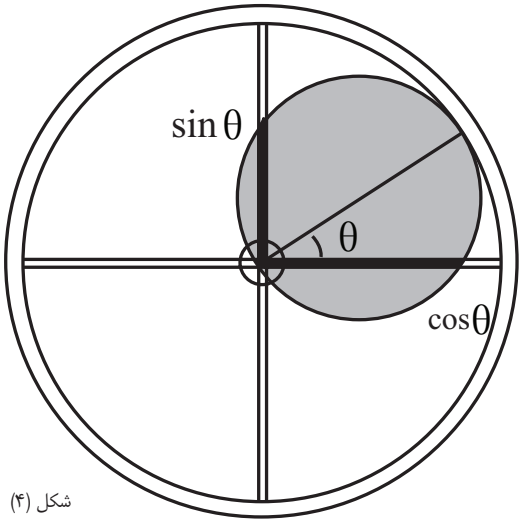
رابطه‌ی ۶

$$\cos(۹۰ - x) = \sin(x)$$

رابطه‌ی ۷

$$\sin(۹۰ + x) = \cos(x)$$

$$\cos(۹۰ + x) = -\sin(x)$$



شکل (۴)

طبیعی است که در صورت تمایل، معلمان و دانش‌آموزان می‌توانند با این وسیله روابط مثلثاتی دیگر را مورد بررسی قرار دهند.

منابع

[۱] شرف‌الدین، احمد، (۱۳۷۷). **هندسه دلپذیر**، انتشارات مدرسه.

[۲] تیموری، قاسم، (۱۳۷۹). **ساخت دست‌سازه‌های ریاضی با طلق و مقوا (متحرک‌سازی خطوط نمودارها)**، انتشارات مؤسسه‌ی منادی تربیت.