تورنمنت ریاضی بین‌المللی شهرها

Internation do Mathemekics Tourneuneut of Touns

یونس کریمی فردین‌پور (دانشگاه آزاد اسلامی واحد اهر)

تبریز و اصفهان نیز در کنار بیش از صد شهر از سراسر جهان، در ۱۱ تورنمنت ریاضی بین‌المللی شهرها حضور دارند. این مسابقه‌ی ریاضی در نیم کره‌ی شمالی هر سال دو بار در فصل‌های پاییز و بهار و در نیم‌کره‌ی جنوبی هم زمان برگزار می‌شود.

برای تمام دانش‌آموزان دبیرستانی تا هفده سالگی امکان شرکت در مسابقه «حل مسئله ریاضی» وجود دارد. برای هر دو گروه **مبتدی** و **پیشرفته**، دو نوع ورقه در سطح متوسط و عالی با حدود یک هفته فاصله‌ی زمانی، ارایه می‌شود. مصالح عالی مشکل‌تر است. اما امتیاز بیش‌تری دارد. هر دانش‌آموزی در هر شهری می‌تواند در هر چهار آزمون حضور داشته باشد. امتیاز دانش‌آموز با احتساب سه تا از بهترین پاسخ‌ها در هر ورقه به‌دست می‌آید و امتیاز سالانه از بهترین نمره‌ی کسب شده از بین چهار ورقه در همان سال حاصل می‌شود.

دانش‌آموزان سال‌های یازدهم و دهم (دو سال آخر دبیرستان) ورقه‌ی «پیشرفته» را دریافت می‌کنند که در آن دانش‌اموزان سال دهم ضریب $\frac{۵}{۴}$ خواهند داشت. دانش‌آموزان سال نهم و پایین‌تر ورقه «مبتدی» را دریافت می‌کنند که در آن دانش‌آموزان سال هشتم ضریب $\frac{۴}{۳}$، دانش‌آموزان سال هفتم ضریب $\frac{۳}{۲}$ و دانش‌آموزان سال ششم و پایین‌تر ضریب ۲ خواهند داشت.

امتیاز هر شهر براساس میانگین N دانش‌آموزی است که در این مسابقه‌ها شرکت کرده‌اند، به شرطی که جمعیت شهر N صد هزار نفر باشد. اگر جمعیت شهر کمتر از ۵۰۰۰۰۰ نفر باشد حداقل $N = ۵$ در

نظر گرفته شده و ضریب جبرانی مناسب به تعداد خواهند داد.

مدیریت این تورنمنت با کمیته‌ی مرکزی در مسکو است که زیرمجموعه‌ی کمیته‌ای از آکادمی علوم روسیه است. دانش‌آموزانی که امتیاز لازم را کسب کنند. دیپلم آکادمی علوم روسیه را دریافت خواهند کرد.

امیدوار است که خانه‌های ریاضی با همکاری انجمن‌های علمی آموزشی معلمان ریاضی و متخصصان آموزش ریاضی در ایران، این تورنمنت را در بین تمام شهرهای کشور برگزار کنند.

در ادامه، نمونه‌ای از سؤالات امتحانی پیشرفته در سطح متوسط که در پاییز ۲۰۰۴ برگزار شده است، به همراه پاسخ تشریحی آن‌ها ارایه می‌شود. سؤالات جدیدتر تا از قرنطینه خارج نشوند، امکان چاپ و در اختیار عموم قرار گرفتن را ندارند.

سؤال‌های امتحان پیشرفته در سال ۲۰۰۴

۱- آیا می‌توان اعداد ۱ تا ۲۰۰۴ را چنان مرتب کرد که مجموع هر ده عدد کنار هم بر ده بخش‌پذیر باشد؟

۲- کیسه‌ای شامل ۱۱۱ توپ با رنگ‌های سبز، قرمز، سفید و آبی است. اگر ۱۰۰ توپ به تصادف از کیسه برداشته شود. حتماً هر چهار رنگ و بین آن‌ها خواهد بود. حداقل توپ‌هایی که لازم است از کیسه به تصادف برداشته شود تا به‌طور قطعی، سه توپ با رنگ‌های متفاوت بین آن‌ها باشد، چقدر است؟

۳- جفت شهرهای متفاوتی از روسیه، با سرویس اتوبوس‌های مستقیم بدون ایستگاه‌های بین راهی به هم مرتبط شده‌اند. الکس برای هر جاده یک بلیط تهیه کرده است که اجازه می‌دهد در هر مسیر، یک بار مسافرت کند (اما نه مسیر برگشت در همان جاده) او از مسکو شروع می‌کند، تمام بلیط‌هایش را استفاده می‌کند (بدون این‌که بلیط جدیدی تهیه کند) و در کالینینگراد متوقف می‌شود. بوریس برای هر جاده n بلیط تهیه می‌کند و از مسکو شروع می‌کند. بعد از مصرف تعدادی از بلیط‌ها در جایی متوقف می‌شود که بدون تهیه بلیط جدید امکان حرکت وجود ندارد. ثابت کنید او در مسکو یا کالینینگراد متوقف شده است.

۴- خطی و دایره‌ی غیرمتقاطعی مفروض است. خط‌کش و پرگار را به کار گیرید و مربعی را که دو رأس مجاورش روی خط و در

رأس دیگرش روی دایره است تولید کنید (با فرض این‌که چنین مربعی وجود دارد.)

۵- به چند روش می‌توان ۲۰۰۴ را به‌صورت مجموعی از یک یا چند عدد طبیعی مثبت نانزولی بیان کرد که تفاضل بین اولین و آخرین حداکثر ۱ باشد؟

(مسئله‌ها به ترتیب دارای امتیاز ۳، ۴، ۴، ۵ و ۵ است.)

پاسخ:

۱- ما می‌توانیم هر عدد را با رقم یکانش جایگزین کنیم که این عمل تأثیری در کلیت مسئله ندارد. از هر کدام از رقم‌های ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ و ۰ دویست تا و از هر کدام از رقم‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ به تعداد دویست و یک تا داریم. فرض کنید مرتب‌سازی مورد نظر مقدور باشد. آن‌گاه باید یازدهمین عدد با اولین عدد در ارتباط باشد و دوازدهمین عدد یا دومین عدد و همین‌طور تا آخر که دنباله‌ای با دوره تناوب ده را شکل می‌دهد. می‌بینید که: $۴۵ = ۹ + ... + ۲ + ۱ + ۰$ بر ده بخش‌پذیر نیست. پس تعدادی از رقم‌ها در این دوره تناوب ده‌تایی باید تکرار شوند. این رقم‌ها حداقل باید چهار صد بار تکرار شوند، در حالی‌که هیچ کدام بیش از دویست و یک بار امکان تکرار ندارد پس مسئله ممکن نیست.

۲- ممکن است در کیسه ۷۵ توپ سبز، ۱۲ توپ قرمز، ۱۲ توپ سفید و ۱۲ توپ آبی داشته باشیم. جمع توپ‌ها از هر سه رنگ حداکثر ۹۹ است. اگر ۱۰۰ برداشت به تصادف داشته باشیم، از هر چهار رنگ توپ خواهیم داشت. پس شرایط مسئله برقرار است. ابتدا نشان می‌دهیم ۸۷ برداشت کافی نیست چرا که ممکن است ۷۵ سبز و ۱۲ سفید برداشته باشیم. حال نشان می‌دهیم ۸۸ برداشت کافی است. با مراعات نظیر می‌توان فرض کرد که تعداد توپ‌های سبز و قرمز و سفید و آبی ناصعودی است. ما حداقل باید ۱۲ توپ آبی داشته باشیم وگرنه؛ حد برداشت رنگ آبی حاصل نمی‌شود. پس حداقل ۲۴ توپ سفید و آبی داریم. یعنی جمع توپ‌ها از هر دو رنگ حداکثر $۸۷ = ۲۴ - ۱۱۱$ است. نتیجه بلافاصله حاصل می‌شود.

۳- شهر دیگری غیر از مسکو و کالینیگراد را در نظر بگیرید. فرض کنید الکس از آن k مرتبه بگذرد. پس او k بلیط به هنگام ورود و k بلیط به هنگام خروج استفاده کرده است. پس تعداد بلیط‌هایش با این شهر بین آن‌ها، $۲k$ بوده است. تعداد بلیط‌های بوریس با این شهر بین آن‌ها $۲kn$ بوده است. این تعداد بلیط اجازه می‌دهد بوریس kn بار ورود و خروج داشته باشد که بعد از آن نمی‌تواند برگردد و آن‌جا متوقف می‌شود.

۴- فرض کنید خط افقی ودایره‌ی بالای آن باشد. قطر عمودی دایره را رسم کنید و امتداد دهید تا خط را در O قطع کند. از O دو خط با شیب $۲\pm$ رسم کنید. فرض کنید آن‌ها به ترتیب بر دایره در Q و R مماس هستند. عمودهایی از Q و R بر خط وارد کنید که به ترتیب آن‌را در P و S قطع کند. در این صورت $PQRS$ مربع موردنظر است. اگر هر یک از خطوط دایره را در دو نقطه قطع کند. جفت نقاط دورتر و یا نزدیک‌تر را به‌عنوان Q و R انتخاب کرده و مانند قبل تکرار کنید. اگر دو خط هیچ نقطه از دایره را قطع نکردند، مربع موجود نخواهد بود. اما این حالت مورد نظر نیست.

(فاصله خط از مرکز دایره حداکثر به اندازه قطر دایره است.)

۵- فرض کنید $۱ \leq k \leq ۲۰۰۴$. الگوریتم تقسیم را برای تعیین زوج منحصر به فرد (q , r) به‌کار گیرید تا $۲۰۰۴ = kq + ۷$، $۰ \leq r \leq k - ۱$. آن‌گاه r تا $q + ۱$ و $k - r$ تا q به ۲۰۰۴ اضافه خواهد شد. پس به ازای هر K جواب منحصر به فردی وجود دارد. پس کلاً ۲۰۰۴ حالت وجود دارد.