# کاربرد ترکیبات در فیزیک

**محمدمقدسی***
گروه فیزیک،
دانشکده علوم، دانشگاه
فردوسی مشهد

**چکیده**

***در این نوشتار کوتاه برآنیم تا ضمن توضیح مختصری دربارهٔ اصول حاکم بر شمارش، مثال‌های ساده‌ای ارائه دهیم که کاربرد آن اصول را در فیزیک نشان می‌دهند. این مثال‌ها بارها و بارها در شاخه‌های مختلف فیزیک، همچون مکانیک آماری، نظریهٔ میدان‌های کوانتومی، نسبیت عام و غیره ظاهر می‌شوند و چون مخاطب این نوشتار دانش‌آموزان دبیرستانی هستند، سعی کرده‌ایم آن‌ها را گام‌به‌گام حل کنیم.***

**کلیدواژه‌ها:** ترکیبات، ماتریس، مکانیک آماری، نمودارهای فاینمن، کاربرد ریاضی در فیزیک

## ۱. مقدمه

یکی از مهم‌ترین چیزهایی که در زندگی بشر نقش داشته، شمارش بوده است. در سال‌های اول کودکی ما، شمردن کار سختی به نظر نمی‌رسید و حداکثر مجبور بودیم تعداد سیب‌های موجود در بشقاب را بشماریم! ولی کم‌کم با مسائل عجیب و غریبی مواجه شدیم. از ما پرسیدند: «اگر برای رفتن از شهر A به شهر B دو راه وجود داشته باشد، و برای رفتن از شهر B به شهر C سه راه وجود داشته باشد، آن‌گاه به چند طریق می‌توانیم از شهر A به شهر C برویم؟»

البته این مسئله چندان هم سخت نیست و حتی شاید بگویید: «هر بچه‌ای می‌داند که جوابش ۶ طریق است!» در واقع شما بدون آنکه از ریاضیات پیچیده‌ای استفاده کنید و فقط با استفاده از یک منطق ساده، جواب را در ذهنتان حلاجی می‌کنید. اما به‌هر حال یک چیزی دارد عوض می‌شود: نحوهٔ شمارش. گاهی ما نمی‌توانیم مستقیماً بشماریم. طبیعت همیشه به ما اجازه نمی‌دهد تا اجزایش را در بشقاب بگذاریم و یکی‌یکی آن‌ها را بشماریم! بنابراین مجبوریم به ترفندهایی متوسل شویم که شمارش را برای ما آسان، یا حتی ممکن کنند. این ترفندها را با عنوان کلی «ترکیبیات» می‌شناسند که با روی کار آمدن علوم رایانه و الکترونیک دیجیتال، اهمیت خاصی پیدا کردند.

این نوشتار می‌خواهد شما را با موقعیت‌هایی آشنا کند که معمولاً فیزیک‌دان‌ها با آن‌ها مواجه می‌شوند و طی آن مجبورند چیزی را بشمارند. پس از ذکر چند قانون بنیادی، مثال‌هایی مطرح و سعی کرده‌ایم تا حد امکان توضیحات مفصلی ارائه دهیم. به یاد داشته باشید که روش‌های ما یکتا نیستند و شما می‌توانید روش خودتان را داشته باشید. در ترکیبیات مهم‌ترین کار فکر کردن دربارهٔ نحوهٔ شمارش است، وگرنه قوانین حاکم بر آن‌ها بسیار ساده است. ضمناً فرض شده است که شما با یک سلسله مفاهیم اولیه، همچون «مجموعه» یا «ماتریس»، آشنا هستید.

## ۲. قانون‌های بنیادی

● **قانون ۱.۲ (قانون ضرب):** اگر بتوانیم کار الف را به m روش، و کار ب را به n روش انجام دهیم، آن‌گاه هر دو کار را می‌توانیم به $m\times n$ روش انجام دهیم.

• **قانون ۲. ۲ (قانون جمع):** اگر بتوانیم کار الف را به m روش، و کار ب را به n روش انجام دهیم، آن‌گاه n+m روش هست که می‌توانیم یکی از این دو کار را انجام دهیم.

برای توضیح بیشتر به این مثال دقت کنید. می‌خواهیم از میان ۵ کتاب فارسی، ۷ کتاب انگلیسی و ۱۰ کتاب چینی، دو کتاب را طوری انتخاب کنیم که زبانشان یکی نباشد. ببینیم چه‌طور فکر می‌کنیم:

قرار است ما دو کتاب با زبان‌های متفاوت انتخاب کنیم. پس یا «فارسی و انگلیسی» انتخاب می‌شود؛ یا «فارسی و چینی»؛ یا «انگلیسی و چینی». بیایید مورد اول را در نظر بگیریم؛ یعنی «فارسی و انگلیسی». کتاب فارسی ۵ تا چیز می‌تواند باشد و کتاب انگلیسی ۷ تا چیز. اما قانون ضرب می‌گوید که اگر بخواهیم یک کتاب فارسی و یک کتاب انگلیسی برداریم، به ۵×۷ روش می‌توانیم این کار را انجام دهیم. با همین استدلال «فارسی و چینی» را به ۵×۱۰ روش، و «انگلیسی و چینی» را به ۷×۱۰ روش می‌توانیم انتخاب کنیم. حال دوباره به این جمله دقت کنید: یا «فارسی و انگلیسی» انتخاب می‌شود؛ یا «فارسی و چینی»؛ یا «انگلیسی و چینی». اما این همان چیزی است که قانون جمع فرض می‌کند. پس چیزهایی را که یافتیم با هم جمع می‌زنیم:

$$۵\times۷+۵\times۱۰+۷\times۱۰ = ۱۵۵$$

• **قانون ۲. ۳ (انتخاب (ترکیب)):** معنای انتخاب در خود کلمه نهفته است. وقتی چیزی را انتخاب می‌کنیم، اولاً اهمیتی ندارد که با چه ترتیبی انتخاب کنیم، و ثانیاً تکرار صورت نمی‌گیرد.

مثلاً در بالا ما می‌خواستیم دو زبان از سه زبان را انتخاب کنیم. آیا می‌توانستیم دو زبان یکسان انتخاب کنیم؟ آیا مهم بود که اول یک کتاب فارسی برداریم و بعد یک کتاب چینی؟ مسلماً پاسخ هر دو منفی است و دیدید که به سه طریق توانستیم این دو زبان را انتخاب کنیم. ریاضی‌دان‌ها برای این کار اصطلاح و فرمول خاصی دارند. آن‌ها می‌گویند: «می‌خواهیم ترکیب ۲ شیء را از ۳ شیء حساب کنیم» و می‌نویسند:

$$C(۳,۲) \equiv \binom{۳}{۲} \equiv \frac{۳!}{(۲!)\times(۳-۲)!}$$

و در حالت کلی:

$$c(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

• **قانون ۲. ۴ (چیدن (جایگشت)):** مفهوم این واژه نیز در خود آن مستتر است. وقتی کتاب‌هایتان را در قفسه می‌چینید، مسلماً ترتیب آن‌ها برایتان مهم است.

نمی‌توانید کتابی را تکرار کنید. پس اگر بخواهیم از بین سه کتاب، دو تای آن‌ها را در قفسه بچینیم، ابتدا باید آن دو کتاب را انتخاب کنیم و سپس آن‌ها را بچینیم.

ما به سه طریق می‌توانیم دو کتاب را انتخاب کنیم، و به دو طریق می‌توانیم دو کتاب را در قفسه بچینیم (یعنی مثلاً اول کتاب انگلیسی بعد فارسی، یا اینکه اول کتاب فارسی بعد انگلیسی). پس طبق اصل ضرب به ۶ طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم. به زبان ریاضی: «جایگشت ۲ شیء از ۳ شیء می‌شود ۶». جایگشت را با این رابطه مشخص می‌کنند:

$$P(۳,۲) \equiv \frac{۳!}{(۳-۲)!}$$

و در حالت کلی:

$$p(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

واضح است که اگر انتخابی در کار نباشد و بخواهیم همهٔ کتاب‌ها را در قفسه بچینیم، در رابطهٔ فوق ۲ به ۳ تبدیل می‌شود و می‌گوییم: «کل جایگشت‌های ۳ شیء برابر است با !۳».

و در حالت کلی تمام جایگشت‌های n شیء برابر است با !n

• **قانون ۲. ۵ (قید):** گاهی قیدهایی بر شمارش اعمال می‌شوند. اگرچه واضح است که قیدها چگونه بر شمارش تأثیر می‌گذارند، ولی بد نیست حرف‌هایمان را در قالب نظریهٔ مجموعه‌ها نیز بیان کنیم. ما از اصول اولیهٔ منطق و اساسی‌ترین اصل شمارش -تناظر یک به یک بین مجموعهٔ مورد نظر و مجموعهٔ اعداد طبیعی- کمک می‌گیریم. فرض کنید می‌خواهیم تعداد اعضای مجموعه‌ای (به‌نام W) را بشماریم که قیدی بر آن اعمال شده است. این قید مجموعه ما را به دو زیرمجموعه

افراز می‌کند: زیرمجموعه‌ای که اعضای آن در قید صدق می‌کنند (مجموعهٔ T)، و زیرمجموعه‌ای که اعضای آن در قید صدق نمی‌کنند (مجموعهٔ F). اکنون کاملاً مشخص است که با اعمال قید باید تعداد اعضای F را از تعداد اعضای W کم کرد.

## ۳. مثال‌ها

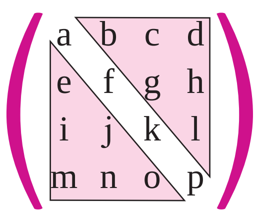
پیش از ارائهٔ مثال‌ها دو نکته را یادآوری می‌کنیم:

- منظور از «مؤلفهٔ مستقل»، مؤلفه‌ای است که برحسب مؤلفهٔ دیگری به‌دست نمی‌آید و ضمناً صفر هم نیست[1]. ما تعداد آن‌ها را با N نمایش می‌دهیم.
- در این نوشتار مهم نیست که تعریف دقیق «تانسورها» چیست. برای ما فقط این نکته حائز اهمیت است که آن‌ها هم مؤلفه‌هایی دارند که تعدادشان به تعداد اندیس‌ها و تعداد ابعاد فضا بستگی دارد. مثلاً یک تانسور مرتبهٔ ۳ که آن را با $F_{ijk}$ نشان می‌دهیم، در فضای ۱۰بعدی ۱۰۰۰=۱۰×۱۰×۱۰ مؤلفه دارد. می‌توانید آن‌ها را شبیه ماتریس‌های غول‌پیکر بپندارید!

- **مثال ۳. ۱ (ماتریس متقارن):** ماتریس S را با این شرایط در نظر بگیرید:

$$S_{ij} = S_{ji}, \qquad i, j = ۱, \cdots, ۴ \qquad (۳.\ ۱)$$

این ماتریس چند مؤلفهٔ مستقل دارد؟




**شکل ۱** ماتریس چهاربعدی

**روش اول:** شکل ماتریس را با تمام مؤلفه‌هایش مجسم کنید (شکل ۱). این ماتریس ۴×۴ مؤلفه دارد. اما شرط تقارن باعث می‌شود تا اعضای مثلث پایینی برحسب اعضای مثلث بالایی نوشته شوند. پس اعضای یکی از این دو مثلث مستقل نیستند (فرضاً می‌گوییم مثلث پایینی). اکنون اگر قطر اصلی ماتریس را کنار بگذاریم، اعضای مثلث بالایی نصف کل اعضای باقی‌مانده هستند؛ یعنی این مثلث، $\frac{(۴\times۴)-۴}{۲}$ عضو دارد. از طرف دیگر، مؤلفه‌های قطر اصلی هم مستقل هستند (قیدی روی آن‌ها نداریم). پس کل مؤلفه‌های مستقل عبارت‌اند از:

$$N = \frac{(۴\times۴)-۴}{۲} + ۴ = \frac{۴\times(۴+۱)}{۲} = ۱۰ \qquad (۳.\ ۲)$$

**روش دوم:** قیدی که روی ماتریس گذاشته‌ایم، به ما می‌گوید که اگر قرار باشد دو تا عدد (i و j) کنار هم بنشینند، ترتیب آن‌ها اهمیتی ندارد، اما این امکان وجود دارد که هر دو یکسان باشند. پس یا ما دو عدد را از بین ۴ عدد انتخاب می‌کنیم، یا هر دو عدد یکسان هستند. بنابراین طبق قانون جمع:

$$N = \binom{۴}{۲} + ۴ = ۱۰ \qquad (۳.۳)$$

اگر بخواهیم در حالت کلی بیان کنیم، کافی است در استدلال بالا ۴ را به n تبدیل کنیم. پس در حالت کلی تعداد مؤلفه‌های مستقل یک ماتریس متقارن n×n، $\binom{n}{۲}+n$ و یا $\frac{n(n+۱)}{۲}$ است.

- **مثال ۳. ۲ (ماتریس پادمتقارن):** ماتریس A را با این شرایط در نظر بگیرید:

$$A_{ij} = -A_{ji}, \qquad i, j = ۱, \cdots, n. \qquad (۳.۴)$$

این ماتریس چند مؤلفهٔ مستقل دارد؟

**روش اول:** تنها تفاوت این مثال با مثال قبلی این است که این بار عناصر روی قطر اصلی صفر هستند و نیازی به اضافه کردن آن‌ها نیست (چون به ازای این عناصر داریم: $A_{ii} = -A_{ii}$ که نتیجه می‌گیریم $A_{ii}=۰$). بنابراین:

$$N = \frac{(n\times n)-n}{۲} = \frac{n(n-۱)}{۲} \qquad (۳.\ ۵)$$

**روش دوم:** تنها تفاوت این مثال با مثال قبلی این است که امکان ندارد هر دو عدد یکسان باشند (بدون ترتیب، بدون تکرار)؛ یعنی باید فقط دو عدد را از n عدد انتخاب کنیم:

$$N = \binom{n}{۲} = \frac{n(n-۱)}{۲} \qquad (۳.\ ۶)$$

- **مثال ۳. ۳ (تانسور کاملاً پادمتقارن):** یک تانسور مرتبهٔ r کاملاً پادمتقارن را در فضای n بعدی در نظر بگیرید (تانسورهای شدت میدان مغناطیسی از این نوع‌اند). بدین معنا که جای هر دو اندیس آن را عوض کنیم، یک علامت منفی ظاهر می‌شود. این تانسور چند مؤلفهٔ مستقل دارد؟

با تعمیم رابطهٔ (۳. ۴) به یک تانسور r اندیسی، می‌فهمیم که اولاً هیچ دو اندیسی نمی‌توانند

یکسان باشند. ثانیاً ترتیب این r عدد مهم نیست. پس کافی است r عدد از میان n عدد انتخاب کنیم. به‌عبارت دیگر:

$$N=\binom{n}{r} \qquad (۷.۳)$$

به‌عنوان تمرین سعی کنید، تعداد مؤلفه‌های مستقل یک تانسور مرتبهٔ r کاملاً متقارن را در فضای n بعدی به‌دست آورید. شما باید به عبارت $C(n+r-۱, r)$ برسید.

● **مثال ۳. ۴ (تانسور ریمن):** در مطالعهٔ کیهان به تانسوری برخورد می‌کنیم که خمیدگی فضا- زمان را نشان می‌دهد. این تانسور از مرتبهٔ ۴ است و در فضای n بعدی با خواص زیر مشخص می‌شود:

(۸.۳)

$$\text{a) } R_{ijkl} = -R_{ijlk},$$
$$\text{b) } R_{ijkl} = -R_{jikl},$$
$$\text{c) } R_{ijkl} = R_{klij},$$
$$\text{d) } R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj} = ۰.$$

تعداد مؤلفه‌های مستقل این تانسور را بیابید.

پادمتقارن بودن نسبت به دو اندیس اول باعث می‌شود تا تنها s مؤلفهٔ مستقل ایجاد کنند که داریم: $s=\frac{n(n-۱)}{۲}$؛ به‌همین ترتیب در مورد دو اندیس دوم. اکنون با توجه به خاصیت (c) می‌توانیم بگوییم موجودی با دو اندیس داریم که هر کدام از آن‌ها s حالت دارد و نسبت به تعویض آن‌ها هم متقارن است. بنابراین تا اینجا $\frac{s(s+۱)}{۲}$ مؤلفهٔ مستقل داریم. حال می‌خواهیم ببینیم خاصیت (d) چند معادلهٔ قیدی به ما می‌دهد. آن را با توجه به خواص (a) تا (c) کمی تغییر شکل می‌دهیم و بدین صورت می‌نویسیم:

$$R_{iikl} - R_{ijlk} + R_{iljk} - R_{ikil} + R_{iklj} - R_{ilkj} = ۰ \qquad (۹.۳)$$

حال اگر در این رابطه جای هر کدام از سه اندیس آخر را با یکدیگر عوض کنیم (مثلاً j با k، یا k با l) یک منفی ظاهر می‌شود. بنابراین هیچ‌کدام از سه اندیس آخر نمی‌توانند با هم برابر باشند، چون در این صورت سمت راست تساوی فوق خود به خود صفر می‌شود. اما اندیس اول چه‌طور؟ فرض کنیم i با یکی از سه اندیس دیگر برابر باشد، در این صورت:

$$R_{iikl} + R_{ilik} + R_{ikli} = R_{ikil} + R_{ikli}. \qquad (۱۰.۳)$$

اما این عبارت نیز خود به خود صفر است و به قید جدیدی نمی‌رسیم[۲]. پس هر چهار اندیس باید با هم متفاوت باشند که نتیجه می‌گیریم باید ۴ عدد را از میان n عدد انتخاب کنیم. یعنی رابطهٔ (d) معادل با $C(n, ۴)$ قید است. اکنون اطلاعاتمان را خلاصه می‌کنیم:

$$N=\frac{۱}{۲}\left[\frac{n(n-۱)}{۲}\right]\left[\frac{n(n-۱)}{۲}+۱\right]-\frac{n!}{(۴!)(n-۴)!}$$

$$=\frac{n^{۲}(n^{۲}-۱)}{۱۲} \qquad (۱۱.۳)$$

● **مثال ۳. ۵ (انرژی نوسانگر هماهنگ):** دستگاهی متشکل از N نوسانگر هماهنگ کوانتومی یکسان (مانند اتم‌های بلور) در نظر بگیرید. انرژی این دستگاه با رابطهٔ زیر داده می‌شود:

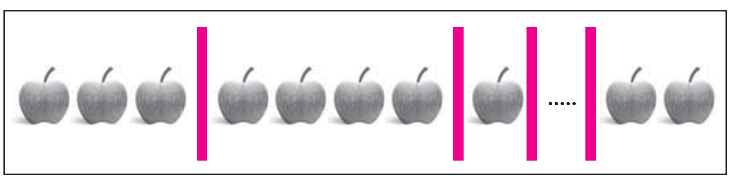
$$E=(M+\frac{N}{۲})\hbar w \qquad (۱۲.۳)$$

که در آن:

$$M= n_{۱}+ n_{۲}+ ...+ n_{N} \quad n_{i}=۰,۱,۲,.... \qquad (۱۳.۳)$$

بنا به دلایلی مهم است که بدانیم به چند حالت تساوی فوق برقرار می‌شود، یعنی چند دسته $(n_{۱}, ..., n_{N})$ وجود دارد که در این تساوی صدق می‌کند.

بیایید به خاطرات کودکی برگردیم و مسئله را با همان سیب‌های قدیمی حل کنیم! فرض کنید N جعبه داریم که در هر کدام تعدادی سیب گذاشته‌ایم. تعداد کل سیب‌ها M است. حال جعبه‌ها را در یک ردیف بچینید و سیب‌های داخل آن‌ها را نیز در یک ردیف بگذارید. چیزی شبیه شکل ۲ حاصل می‌شود. می‌بینید که در اولین جعبه از سمت چپ ۳ سیب هست، در دومی ۴ سیب، و همین‌طور الی آخر.



**شکل ۲** جایگشت‌های سیب‌ها و دیواره‌های جعبه‌ها

حال اینکه ما بگوییم $n_i$ها مقادیر متفاوتی دارند، معادل این است که بگوییم تعداد سیب‌های داخل جعبه‌ها تغییر می‌کند. یعنی مثلاً جای سیب سوم و دیوار اول (از سمت چپ) عوض می‌شود. یک فرض اساسی مسئله این است که نوسانگرها (سیب‌ها) با هم تفاوتی ندارند و همگی یکسان هستند. بنابراین ترتیب

سیب‌ها معنایی ندارد. دیواره‌های جعبه‌ها هم که ساختهٔ ذهن ما بودند، پس ترتیب آن‌ها هم اهمیتی ندارد. ضمناً دقت کنید که در این شـکل تعداد دیوارها (N-۱) است.

حالا حرف‌هایمان را به زبان ریاضی بیان می‌کنیم.

کل جایگشـت‌های ایـن اشـیا برابـر اسـت بـا (M+N-۱)!. اما نه جایگشت‌های سیب‌ها اهمیتی دارد و نه جایگشت‌های دیواره‌ها. پس باید با آن‌ها طبق قانون ضـرب رفتار کنیم و با تقسـیم کردن، اثـر آن‌ها را در شمارش از بین ببریم؛ یعنی:

$$N=\frac{(M+N-1)!}{M!(N-1)!}=\binom{M+N-1}{M}=\binom{M+N-1}{N-1} \qquad (۱۴.۳)$$

• **مثال ۳. ۶ (نمودارهای فاینمن):** فیزیک‌دانان برای توصیف اثر دو ذرهٔ باردار بر یکدیگر، نظریه‌ای دارند که در بخشی از آن با چنین عبارتی مواجه می‌شوند:

$$\phi(x)\phi(y)\underbrace{\phi(z)\ldots}_{\text{تا } m}\underbrace{\phi(w)\ldots}_{\text{تا } n}\underbrace{\phi(t)\ldots}_{\text{تا } k}. \qquad (۱۵.۳)$$

$\phi$ ها توابعی هسـتند که در اینجا شکل دقیق آن‌ها برای ما اهمیتی ندارد. به‌علاوه فرض می‌کنیم که تعداد کل آن‌ها عددی زوج باشد. قاعدهٔ بازی ساده است. ابتدا $\phi$ ها را دو به دو به‌هم وصل کنید. سپس برای هر اتصال اسـمی انتخاب کنید. مثلاً اگـر $\phi(z)$ را به $\phi(t)$ وصل کرده‌ایـد، به‌جای آن موجـودی به‌نـام $D(zt)$ بگذارید. واضح است که $D(zt) = D(tz)$، یعنی ترتیب مهم نیست. وقتی تمام توابع به‌هم وصل شدند، می‌گوییم یک نمودار فاینمن ساخته‌ایم. حال سـؤال این است که هر نمودار فاینمن به چند طریق می‌تواند ساخته شود.

بیایید ترکیب خاصی را در نظر بگیریم؛ برای مثال:

$$\phi(x)\ \phi(y)\ \phi(z)\ \phi(z)\ \phi(z)\ \phi(w)\ \phi(w)\ \phi(w). \qquad (۱۶.۳)$$

قبـل از اینکـه ببینیم هـر نمودار بـه چند طریق می‌تواند ساخته شـود، اجازه دهید حساب کنیم که در مجموع چند نمودار خواهیم داشـت. در مرحلهٔ نخست بایـد یکی از توابع را بردارید و بـه یک تابع دیگر وصل کنید. این کار را می‌توانید به ۷ طریق انجام دهید. وقتی اتصـال اول انجام شـد، ۶ تابع می‌ماند کـه باید دومین اتصـال را برقـرار کنید. ایـن بار به ۵ حالـت می‌توانید این کار را انجام دهیـد. اگر به‌همین ترتیب این روند را ادامه دهید، نتیجه می‌گیریـد تعداد کل نمودارها ۱۰۵ است.

در حالت کلی اگر $2m$ تابع داشته باشیم، تعداد کل نمودارها از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$(2m-1)!!\equiv(2m-1)\times(2m-3)\times\ldots\times3\times1. \qquad (۱۷.۳)$$

حال ببینیم چند نوع نمودار می‌توانیم داشته باشیم. یک نوع از آن‌ها به این صورت است:

$$D(xy)D(zz)\ D(zw)\ D(ww), \qquad (۱۸.۳)$$

در ایـن ترکیـب اتصـال x بـه y بـه ۱ طریـق ممکـن اسـت. وقتـی x را بـه y وصل کردیـم، ۳ تا z داریـم کـه دو تـا از آن‌هـا باید به‌هم وصل شـوند. بـرای ایـن کار بایـد آن دو را انتخـاب کنیـم که به $C(3,2)$ طریق امکان‌پذیر است. اکنون یک z داریم که به ۳ طریق می‌تواند به یکی از w ها وصل شـود. نهایتاً دو w باقـی می‌مانند که تنها به یـک طریق می‌توانند به‌هم وصل شـوند. بنابراین تعـداد نمودارهایی که به این شـکل هسـتند، با توجه به اصل ضرب به‌دسـت می‌آید:

(۱۹.۳)

$$\underbrace{D(xy)}_{1}\ \underbrace{D(zz)}_{3}\ \underbrace{D(zw)}_{3}\ \underbrace{D(ww)}_{1}\Rightarrow$$

تعداد نمودارها =۱×۳×۳×۱=۹.

هفت نوع نمودار دیگر می‌توانیم داشـته باشیم که به‌عنوان تمرین سـعی کنید هر نوع را بیابید. سـرانجام می‌توانید تعـداد کل نمودارها را به انواع آن‌ها تقسـیم کنید و بنویسید:

$$105=4\times18+3\times9+1\times6 \qquad .(۲۰.۳)$$

## ۴. حالت‌های پیچیده‌تر

علاوه بر آنچه گفته شـد، مسـائل پیچیده‌تری در فیزیک هستند که برای حل آن‌ها لازم است از روش‌های ترکیبیات استفاده کنیم.

گاهی برای شمردن تعداد حالت‌ها از توابعی کمک می‌گیرند که به توابع **مولد** مشـهورند. اگرچه شمردن عملی گسسـته اسـت، ولی چون در این مـوارد تعداد حالت‌هـا بسـیار زیاد اسـت، می‌توان آن‌هـا را تقریباً پیوسته در نظر گرفت و از روابط حسابان کمک گرفت. چنین مسائلی در نظریهٔ ریسمان مشاهده می‌شوند.

علاوه بر این، شمردن تعداد حالت‌های ممکن برای گازهای فرمیونی یا بوزونی نیز اهمیت ویژه‌ای دارد که به توابع توزیع فرمی- دیراک و بوز- اینشتین منجرمی‌شود.

به‌هـر حـال آنچه مـا گفتیـم تنهـا نمونه‌هایی از مسـائلی بودند که کاربرد اسـتدلال‌های سـادهٔ ریاضی در آن‌ها مشـهود اسـت و دیگر جایی برای این پرسش باقی نمی‌گذارد که «ایـن درس‌های ریاضی به چه درد می‌خورند»!

**پی‌نوشت**

۱. برخـی آن را مؤلفهٔ مسـتقل غیرصفر می‌نامند.

۲. چرا لازم نیسـت برابری i را با سایر اندیس‌ها بررسی کنیم؟

* M.moghadassi@chmail.ir

**منابع**

1. C.L.Liu, Introduction to combinatorial mathematics, McGraw Hill, 1968.
2. S.M.Carrol, "Lecture notes on general relativity." gr-qc/9712019.