

جوردیگر باید دید

تمرین‌های
متفاوت

خسرو داودی
آرش رستگار

آموزش معلمان

تشخیص شکل‌های مساوی

محتوای نگرشی:

انتقال و تقارن محوری و تقارن مرکزی و دوران در بسیاری از ساخته‌های دست انسان، از جمله ابزارها و آثار هنری به کار می‌رود و با ظاهر می‌شود. مثلاً در کاشی‌کاری‌های مسجدها این تبدیلات قابل مشاهده است. این‌طور با کمک ریاضیات می‌توان زیبایی آفرید. شکل‌های متقارن زیبا و چشم‌نوازند. تبدیلات در هندسه هم کاربرد دارند. با ترکیب تبدیلات می‌توان شکلی را به جای دیگر منتقل کرد و شکل تبدیل یافته با شکل اولیه مساوی است. مثلاً دو مثلث مساوی را می‌توان با انتقال دوران و اگر لازم باشد تقارن محوری به یکدیگر برد.

محتوای شناختی:

تساوی شکل‌ها را می‌توان به اطلاعات طول‌ها و زاویه‌ها خلاصه کرد. پس با اطلاعات طول‌ها و زاویه‌ها می‌توان شکل‌های ساده ریاضی را تعریف کرد. ریاضیات برای خلاصه کردن شناخت و مشخص کردن یک کل با یک سری جزئیات کاربرد دارد. ساختارهای ریاضی را از جزء به کل می‌سازند. به کمک ریاضی می‌توان مهارت‌های شناختی توصیف کردن را تقویت کرد. توصیف دقیق اشیاء ریاضی باعث می‌شود مخاطب شما دقیقاً همان چیزی که شما در ذهن خود دارید بتواند در ذهن او بسازد. برای همین به علوم ریاضی علوم دقیقه می‌گویند. به نظر شما آیا فلسفه هم از علوم دقیقه است؟

نکات آموزشی:

توجه داشته باشید که تبدیلات هندسی که با آن‌ها در اینجا سروکار دارید صلب هستند و حافظ فاصله می‌باشند. تبدیلات هندسی غیرصلب هم داریم مانند تجانس که در دستور کار دانش‌آموز نیست. اما بد نیست تبدیلات غیرصلب را هم دانش‌آموز ببیند تا مفهوم صلب را بفهمد. بد نیست از جئوجبرا استفاده کنید تا ضریب تجانس را دانش‌آموز با دست تغییر دهد. خوب است دانش‌آموز به این فکر کند که چرا اگر تبدیل، فاصله هر دو نقطه را حفظ کند، هر شکلی را به مساوی خودش خواهد برد. تبدیلات، تمام صفحه را حرکت می‌دهند. بنابراین موجوداتی نامتناهی هستند. از خط و نیم‌خط به‌عنوان موجوداتی نامتناهی که دانش‌آموزان قبلاً می‌شناسند صحبت کنید. مثلاً خطی را به آن‌ها نشان دهید، مثل خط گوشه سقف، و از دانش‌آموزان بخواهید در تخیل خود آن را تا بی‌نهایت ادامه دهند. حال برسید که زمین که بدور خود می‌چرخد، این خط بی‌نهایت چطور حرکت می‌کند.

هفتمی‌ها

کتاب ریاضی هفتم - فصل چهارم، هندسه و استدلال

فهرست بخش‌ها:

روابط بین پاره‌خط‌ها
روابط بین زاویه‌ها
تبدیلات هندسی (انتقال، تقارن، دوران)
شکل‌های مساوی (هم‌نهشت)

مفهوم‌های اصلی:

پاره‌خط
نیم‌خط
خط
طول پاره‌خط
نامساوی مثلث
اندازه زاویه
زاویه‌های مکمل و متمم
چندضلعی محدب و مقعر
انتقال
تقارن محوری و مرکزی
دوران
محور اعداد برای اندازه‌گیری طول‌ها در برابر محور گردشده
منحنی روی دایره مثلثاتی برای اندازه‌گیری زاویه‌ها

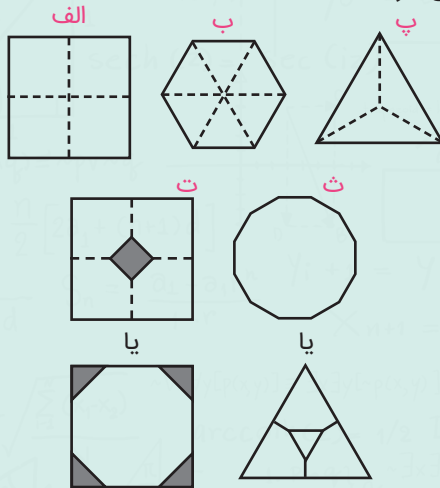
مهارت‌های اصلی:

اندازه‌گیری طول
اندازه‌گیری فاصله
اندازه‌گیری زاویه
مطالعه طول‌ها و زاویه‌های شکل‌های ساده
ساختن شکل‌ها با شرایط داده‌شده در مورد طول‌ها زاویه‌ها

کند احساسات خود را دقیق توصیف کند، طوری که همان احساسات را دیگران هم درون ذهن خود بفهمند. بعد در مورد این صحبت کنید که چرا احساسات را نمی‌توان مانند موجودات ریاضی دقیق توصیف کرد و این چه چیزی راجع به ریاضیات به ما می‌گوید؟ و چه چیزی راجع به شناخت انسانی به ما می‌گوید؟ اگر شناخت انسانی دقیق نیست پس چرا می‌تواند ریاضیات را بسازد که دقیق است؟ اگر می‌تواند ریاضیات را بسازد که دقیق است، پس چرا هر چه می‌سازد دقیق نیست؟

نکات آموزشی مسئله ۱:

با وصل کردن مرکز کاشی‌ها به کاشی‌های هم‌شکل همسایه یک کاشی‌کاری جدید به دست دهید که همان شکل را بدهد. مثلاً کاشی‌های زیر کاشی‌کاری‌های مربوط را می‌سازند.



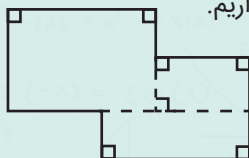
پاسخ‌های سایر شکل‌ها را به معلمان عزیز واگذار می‌کنیم.

نکات آموزشی مسئله ۲:

چنین اشکالی را با هم بیوستن کاشی‌ها در کاشی‌کاری‌های مثلثی، مربعی یا شش‌ضلعی خودتان بسازید. ابتدا بررسی کنید که هر یک از این مثال‌ها چگونه از کاشی‌کاری‌های مربعی یا مثلثی به دست آمده‌اند.

نکات آموزشی مسئله ۳:

کمترین تعداد مستطیل‌ها در افزایش‌های شکل‌ها با زاویه‌های قائمه یا خارج قائمه را پیدا کنید. مثلاً در شکل زیر حداقل سه مستطیل لازم داریم.



بعد بپرسید زمین که به دور خورشید می‌چرخد این خط بی‌نهایت چطور حرکت می‌کند؟ بعد بپرسید خورشید که به دور مرکز کهکشان راه شیری می‌چرخد، چه بلایی سر این خط می‌آید؟ بعد بپرسید کهکشان راه شیری که به دور کهکشان مرکز دوران خود می‌چرخد این خط چطور و چطور می‌شود؟ از فرصت کار با اشیاء نامتناهی برای رشد تخیل دانش‌آموزان بهره‌تام را ببرید.

نکات نگرشی:

در مورد ارتباط تقارن و زیبایی با دانش‌آموزان بحث کنید. به تقارن در صورت انسان و در بدن اشاره کنید و درباره آن و ارتباط آن با زیبایی و معنی باطنی آن که چرا ما دو گوش داریم یا دو چشم داریم یا دو دست داریم یا دو پا داریم با دانش‌آموزان صحبت کنید. آن‌ها را به مسجد ببرید، کاشی‌کاری‌های مسجد را به آن‌ها نشان دهید و درباره تقارن‌های آن‌ها و زیبایی نتیجه‌شده از تقارن‌ها با آن‌ها صحبت کنید. اگر مسجدی با کاشی‌کاری‌های غنی در دسترس ندارید از یک کتاب درباره کاشی‌کاری‌های مسجدها استفاده کنید. اگر چنین کتابی در دسترس ندارید در اینترنت کاشی‌کاری‌های مسجد الحمراء در اندلس در کشور اسپانیا را با دانش‌آموزان نظاره کنید و درباره آن صحبت کنید.

نکات شناختی:

یک شیء ریاضی را با چه اطلاعاتی می‌توان کاملاً مشخص کرد. مثلاً یک مربع را با چه اطلاعاتی می‌توان توصیف کرد؟ و با آن اطلاعات چگونه می‌توان مربع را ساخت. چند جواب مختلف ایشان برای سؤال را با هم مقایسه کنید. بعد به شکل‌های دیگر مانند مستطیل، لوزی، متوازی‌الاضلاع و دوزنقه بپردازید. بعد به اشیاء جبری بپردازید. مثلاً اینکه یک چندجمله‌ای با متناهی عدد کاملاً مشخص می‌شود ولی بعد به‌عنوان یک تابع به ما می‌گوید که با نامتناهی عدد حقیقی چکار کنیم تا تصویر آن‌ها به‌دست بیاید. اینکه شکلی با اطلاعات متناهی داده شود را به بحث بگذارید. مثلاً آیا عدد π با اطلاعات متناهی ساخته می‌شود؟ پس چرا بسط آن تکرار نمی‌شود یا تمام نمی‌شود؟ چرا π عددی گنگ است. همین افکار را در مورد $\sqrt{2}$ چطور جواب می‌دهید؟ حال پاسخ‌هایتان در مورد π را با پاسخ‌هایتان در مورد $\sqrt{2}$ مقایسه کنید. چرا این پاسخ‌ها شبیه هم نیستند؟ حال در مورد توصیف دقیق اشیاء در یک اتاق تمرین کنید. حال شیئی نه چندان ساده را انتخاب کنید و سعی کنید آن را دقیق توصیف کنید. حال موضوعی از احساسات انتخاب کنید، مثلاً یک شعر حافظ را با دانش‌آموزان بخوانید و هر کسی سعی

هشتمی‌ها

محتوای نگرشی:

در ریاضیات با ساختارهای ساده و ترکیب آن‌ها ساختارهای پیچیده می‌سازیم. از این روند ساختارسازی حرکت از جزء به کل است. گاهی این ساختارهای پیچیده متناهی هستند مانند شکل‌های هندسی ساده یا ساختارهای ترکیباتی متناهی و گاهی این ساختارهای پیچیده نامتناهی هستند. ولی قوانین به کار برده شده برای ساختن آن‌ها متناهی است. مثلاً $\sqrt{2}$ یک عدد گنگ است. در زبان ریاضی تعریفی متناهی دارد و با این تعریف متناهی با هر دقتی می‌توان آن را محاسبه کرد. اما خود عدد $\sqrt{2}$ یک موجود نامتناهی است و بسط اعشاری آن از قوانین تبعیت نمی‌کند و متناوب نیست. دایره هم یک شیء ریاضی متناهی است و پیچیدگی آن از چندضلعی‌های منتظم با اضلاع بسیار زیاد خیلی کمتر است. اما باز هم در خود عدد π را دارد که شیء نامتناهی است. اما عدد π به زبان متناهی دایره قابل بیان است.

محتوای شناختی:

عدد و شکل دو مفهوم متناظرند. شاهراه جبر و شاهراه هندسه، دو شاهراه موازی در ریاضیات هستند. این دو شاهراه وجود دارند، چون انسان‌ها سبک‌های شناختی کلامی و تصویری دارند. انسان‌های کلامی ساختار عددی می‌سازند و انسان‌های تصویری ساختار هندسی می‌سازند. اما حقیقتی که در این دو شاهراه تجلی می‌کند نه جبری است و نه هندسی. با این وصف، هر تجلی در عالم عدد، یک تجلی در عالم هندسه دارد که متناظر با آن است. جمع دو عدد مشابه اجتماع اشکالی ساده است و حاصل ضرب دو عدد مشابه مستطیل است که حاصل ضرب دو پاره‌خط متناهی است. هر کار با عدد می‌توان کرد، با شکل هم می‌توان کرد. همه ریاضیات جبری با همه ریاضیات هندسی مشابه و متناظر است و بین آن‌ها رابطه آنالوژی برقرار است.

نکات آموزشی:

می‌توانیم یک شیء ریاضی به دانش‌آموز بدهیم و بخواهیم ساختار آن را بیرون بکشیم. مثلاً یک عدد طبیعی بدهیم و بخواهیم مضارب و مقسوم‌علیه‌ها را فهرست کند. یا مجموع مقسوم‌علیه‌های آن‌ها را حساب کند. یا تعداد اعداد طبیعی کوچکتر از آن که نسبت به آن عدد اول هستند را حساب کند. یا اینکه همه این عددها را لیست کند. بعد همین کار را برای یک شیء هندسی انجام

کتاب ریاضی هشتم - فصل سوم، چندضلعی‌ها

فهرست بخش‌ها:

چندضلعی‌ها و تقارن
توازی و تعامد
چهارضلعی‌ها
زاویه‌های داخلی
زاویه‌های خارجی

مفهوم‌های اصلی:

چندضلعی
توازی
تعامد
چهارضلعی
زاویه‌های داخلی
زاویه‌های خارجی
تقارن
تنوع کاشی‌کاری با شکل‌های منتظم
تقارن کاشی‌کاری
توازی و تعامد ضلع‌ها در کاشی‌کاری‌ها

مهارت‌های اصلی:

پیدا کردن محورهای تقارن
تقسیم چندضلعی با زاویه‌های قائمه به مستطیل‌ها
تقسیم چندضلعی با زاویه‌های قائمه به مستطیل‌ها به چند
روش
تقسیم چندضلعی با زاویه‌های قائمه به مستطیل‌ها با کمترین
تعداد مستطیل‌ها

اعداد دارد را مورد بررسی قرار دهید. چه خصوصیتی از اصول موضوعه حساب، تعبیر هندسی پیدا می‌کند؟ مثلاً خاصیت توزیع‌پذیری ضرب در جمع چه تعبیری دارد؟ آیا این یک استعاره از دنیای اعداد به دنیای اشکال است یا اصلاً حقیقت پشت صحنه‌ای هست که در هر دو تجلی کرده‌است. چرا سبک شناختی ما نمی‌گذارد به هر دو زبان کلامی و تصویری بفهمیم، و چرا برای درک درست حقیقت باید از سبک شناختی خود فنا شویم و بیرون بیاییم؟ آیا می‌توان از دو طرف آنالوژی بین اعداد و اشکال ادراکاتی نسبت به طرف دیگر قرض گرفت؟ حال که به ساختار شناختی خودتان فکر کردید، به ساختار شناختی دانش‌آموزان هم فکر کنید. به این فکر کنید که با هر دو ساختار شناختی باید بتوان به زبان خودش حرف زد.

نکات آموزشی مسئله ۱:

با رنگ‌آمیزی شکل‌های مسئله ۴ همین سؤال را در آن چارچوب حل کنید. یعنی رنگ‌آمیزی‌هایی به دست دهید که اگر کل کاشی‌کاری n نوع رأس دارد، پس از رنگ‌آمیزی هم n نوع رأس داشته باشد. در مثال‌های داده شده $n=2,3,4,6,7$ نمایش داده شده‌اند.

نکات آموزشی مسئله ۲:

آیا می‌توانید مشابه این مسئله را برای حجم‌های افلاطونی حل کنید و ببینید کدام‌یک از راه‌حل‌ها به یک کاشی‌کاری سه بعدی فضا از حجم‌های افلاطونی منجر می‌شوند.

نکات آموزشی مسئله ۳:

اینکه فقط با یک نوع کاشی چنان تمام صفحه را فرش کنید که الگو متناوب نباشد از سخت‌ترین مسئله‌های حل‌نشده بوده‌است که به تازگی پاسخ داده شده‌است. برای پاسخ به اینترنت رجوع کنید. حل این مسئله که با یک آجر چنان فضا را فرش کنید که متناوب نباشد، آسان‌تر است. برای پاسخ به کتاب «کارگاه هندسه» نوشته آرش رستگار مراجعه کنید.

نکات آموزشی مسئله ۴: خودتان کاشی‌کاری‌هایی با این خواص بسازید.

دهید. مثلاً با مستطیل شروع کنید. قطرهای آن را رسم کنید. دایره‌های به قطر هر یک از این قطرهای مستطیل رسم کنید و بگویید چه مشاهده می‌کنید. حال همین کار را برای سایر شکل‌های ساده هندسی مانند لوزی و متوازی‌الاضلاع و دوزنقه انجام دهید. بعد به سراغ مثلث قائم‌الزاویه بروید و روی ضلع‌های آن مربع بنا کنید و ساختارهای پنهان آن را بیرون بکشید و قضیه فیثاغورس را ثابت کنید. بعد به چندضلعی‌ها توجه کنید. از یک چندضلعی که زاویه‌های آن قائمه و یا خارج قائمه هستند شروع کنید و آن را به چندین روش به مستطیل‌ها افراز کنید. بعد به شش‌ضلعی منتظم توجه کنید و ساختارهای آن را بیرون بکشید. مثلاً همه قطرهای آن را رسم کنید و الگویی بیابید یا آن‌ها را به شش مثلث متساوی‌الاضلاع تقسیم کنید. بعد هشت‌ضلعی و دوازده‌ضلعی را مطالعه کنید و در مورد بیرون آوردن و بیرون کشیدن ساختار یک شیء ریاضی با دانش‌آموزان بحث کنید.

نکات نگرشی:

گاهی از یک ساختار متناهی، بی‌نهایت ساختار دیگر می‌توان بیرون کشید. مثلاً در یک دایره، بی‌نهایت چندضلعی منتظم محاط می‌شود و در آن پنهان شده است. یا در عدد π که به زبان متناهی تعریف می‌شود، یک دنباله نامتناهی از عددها در بسط اعشاری پنهان شده که قابل پیش‌بینی نیست و سریع‌ترین رایانه‌ها هم نمی‌توانند همه آن‌ها را پیدا کنند. بعد راجع به این صحبت کنید که ریاضیات به چه معنی متناهی است و به چه معنی نامتناهی است. بعد راجع به زبان صحبت کنید که زبان بشری به چه معنی متناهی است و به چه معنی نامتناهی است. بعد درباره مفهوم استعاره صحبت کنید که چقدر جا باز می‌کند که زبان، معانی متنوعی داشته باشد. بعد راجع به کاربرد استعاره در ریاضیات صحبت کنید که چقدر می‌تواند باعث توسعه ریاضیات شود. مثلاً اینکه در محور اعداد یک نقطه روی خط می‌تواند نماینده یک عدد باشد، استعاره‌ای است که توسط خیام درست شده است و پیش از آن نبوده است. درباره این صحبت کنید که این استعاره چقدر بر پیشرفت و توسعه ریاضی تأثیر داشته است.

نکات شناختی:

اینکه اجتماع دو شکل چه شباهتی به جمع کردن اعداد دارد و ضرب دکارتی دو شکل چه شباهتی به ضرب کردن

تنوع استدلال حرکت شکل در عین درست بودن حکم

محتوای نگرشی:

استدلال ریاضی روشی است که از کتاب اصول اقلیدس به جا مانده است. واضع این روش ارسطو است. ارسطو بود که فلسفه علم را بر اساس مفهوم‌های اولیه و فرضیات و اصول اولیه بنا کرد. اثبات قضیه‌های ریاضی، حرکت مرحله به مرحله و قدم به قدم از اصول اولیه به سمت احکام کلی‌تر است. پس، ارسطو از فرضیات شروع می‌کند و به سمت نظریه‌پردازی حرکت می‌کند. اگرچه قبل از ارسطو، نظریه‌پردازی به این مفهوم سابقه نداشت، اما استدلال ریاضی قبل از آن نزد فیثاغورسیان سابقه داشت. استدلال در شکل‌های هندسی را تالس خلق کرد و استدلال در اعداد را فیثاغورس پایه گذاشت.

محتوای شناختی:

استدلال که یک مهارت کلامی است، در برابر شهود که یک مهارت تصویری است قرار می‌گیرد. مثلاً در هندسه وقتی خط اضافه می‌کشیم، برای آن استدلالی نداریم که بگوییم حتماً باید این خط اضافه را بکشیم. این شهود است که به ما می‌گوید این خط اضافه ممکن است کارآمد باشد. خط اضافه ساختارهای جدید را آشکار می‌کند که قبلاً وجود نداشتند یا از دید ما پنهان بودند. بعد که این ساختارها آشکار شدند، نوبت ماست که حدس بزنیم مثلاً کدام مثلث‌ها باید برابر باشند و بعد برویم به دنبال اینکه آن حدس‌ها را اثبات کنیم. بنابراین اگرچه اثبات ریاضی یک مهارت کلامی و منطقی است، اما از همکاری استدلال و شهود این ممکن می‌شود. پس اثبات نتیجه همکاری استدلال و شهود است. دلیل اهمیت استدلال و اثبات در ریاضی این است که استاندارد دقت اقلیدس تنها چیزی است که فعلاً می‌توانیم به آن تکیه کنیم و یقین ریاضی را بر آن بنا کنیم.

نکات آموزشی:

یک شکل با اجزاء آن را در نظر بگیرید که اجزاء زیادی داشته باشد. مثلاً یک مثلث را همراه دایره‌ی نه نقطه و همه ضامم آن. حال اگر مثلث‌هایی را در نظر بگیریم که با مثلث اولیه متشابه باشند. همه ضامم آن‌ها طول‌هایی متناسب دارند. حال ساختارهای هندسی را کنار بکشید و پاره‌خطی را به چندین قسمت تقسیم

نهمی‌ها

کتاب ریاضی نهم - فصل سوم، استدلال و اثبات در هندسه

فهرست بخش‌ها:

استدلال
آشنایی با اثبات در هندسه
هم‌نهستی مثلث‌ها
حل مسئله در هندسه

مفهوم‌های اصلی:

مثلث
ارتفاع
عمودمنصف
لوزی
مفهوم تشابه در ارتباط با مفهوم نسبت
نسبت مساحت‌های شکل‌های متشابه
حجم‌های متشابه
نسبت حجم‌های احجام متشابه

مهارت‌های اصلی:

حرکت از فرضیات به سمت قضایا
فرمول‌بندی فرضیات
باز فرمول‌بندی فرضیات
فرمول‌بندی حکم
باز فرمول‌بندی حکم
تشخیص احکام معادل با اثبات
تشخیص احکام معادل با شهود

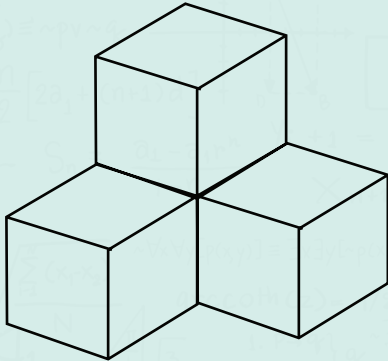
همکاری چقدر در فرایند فهمیدن ما مهم است. حال در فهمیدن چیزی سعی کنید نقش عقل را حذف کنید و ببینید شهود چقدر می‌تواند بفهمد. بعد سعی کنید نقش شهود را حذف کنید و ببینید عقل چقدر می‌تواند بفهمد. حال به ریاضیات برگردید و استدلال بدون شهود را با شهود بدون استدلال مقایسه کنید. بعد از این همه برای دانش‌آموزان نتیجه اخلاقی بگیرید.

نکات آموزشی مسئله ۱:

بیضی کروی را مجموعه نقاطی روی کره بگیرید که مجموع فاصله کروی آن‌ها روی سطح کره از دو نقطه داده شده ثابت باشند. ببینید چه قضیه‌ای شبیه هندسه اقلیدسی برای این نوع بیضی می‌توانید ثابت کنید.

نکات آموزشی مسئله ۲:

برای ساختن مثال‌های بیشتر، از کاشی‌کاری‌های مکعبی استفاده کنید. برای مثال بررسی کنید آیا شکل زیر مثال برای مسئله هست یا خیر.



نکات آموزشی مسئله ۳:

آیا با کمک همین استدلال می‌توانید نشان دهید هر مثلثی یک مثلث متساوی‌الاضلاع است؟

نکات آموزشی مسئله ۴ و ۵ و ۶:

شبیه همین کار را برای شکل‌های سه‌بعدی ساده، مانند مکعب، مکعب‌مستطیل، متوازی‌السطوح انجام دهید.

نکات آموزشی مسئله ۷:

آیا می‌توانید برای هندسه اقلیدسی سه بعدی مدلی درست شبیه همین مدل دوبعدی به دست بدهید.

نکات آموزشی مسئله ۸:

آیا می‌توان با یک متوازی‌الاضلاع دلخواه یک متوازی‌السطوح ساخت؟ با یک لوزی دلخواه چطور؟

نکات آموزشی مسئله ۹:

در اینترنت به دنبال مشابه کاشی‌کاری‌هایی که معرفی شدند در صفحه هذلولوی بگردید.

کنید و این را در نظر بگیرید که اگر این شکل چند برابر شود نسبت همه این قسمت‌ها به همدیگر حفظ خواهد شد. حال به مفهوم نسبت چند طول بپردازید و هم نسبت چند عدد مانند: $a_1 : a_2 : \dots : a_n$ بعد سعی کنید برای نسبت‌ها یک حساب به‌وجود بیاورید. مثلاً قرار دهید. $b_1 = \frac{a_1}{a_1 + \dots + a_n}$ حال داریم $\sum b_i = 1$ و $b_1 : b_2 : \dots : b_n$ برابر همان نسبت $a_1 : a_2 : \dots : a_n$ برای این‌ها که نسبت‌ها هستند حساب به‌وجود بیاورید. مثلاً جمع را تعریف کنید.

$$a_1 : \dots : a_n + b_1 : \dots : b_m$$

$$= a_1 : \dots : a_n : b_1 : \dots : b_m$$

که خوش تعریف است به شرط آنکه ترتیب a_i ‌ها مهم نباشد. ضرب را تعریف کنید:

$$a_1 : \dots : a_n \times b_1 : \dots : b_m = a_1 b_1 : a_2 b_2 : \dots : a_n b_m$$

که چون ترتیب مهم نیست خوش تعریف است. حال ببینید چه ساختارهایی در این حساب جدید نهفته است.

نکات نگرشی:

اینکه در روش استدلال، قضیه‌ها را مانند آجر روی هم می‌چینیم و دیواری می‌سازیم که به آن یک نظریه می‌گوییم را در نظر بگیرید. حال با شبیه همان استدلال‌ها قضیه‌هایی مشابه را برای مثلث‌های روی سطح کره می‌سازیم و می‌شود تئوری دیگری و بعد می‌پرسیم این دیوار چه ربطی به دیوار اولی دارد.

در یکی از این دو نظریه از هر نقطه خارج خط یک و تنها یک خط موازی با آن خط قابل رسم است. در هندسه کروی از نقطه خارج یک دایره عظیمه هیچ دایره عظیمه‌ای نمی‌توان گذراند که دایره عظیمه اول را قطع کند. چون هر دو دایره عظیمه در دو نقطه روبروی قطری مشترکند. پس چرا در مثلث‌های کروی، مانند مثلث‌های مسطحه، میانه‌ها، نیم‌سازها، عمودمنصف‌ها، ارتفاع‌ها تعریف می‌شوند و قضیه‌های هم‌مرسی برای هر دو طرف درست است.

نکات شناختی:

در یک استدلال طولانی هندسه که آن را به دقت روی تخته می‌نویسید با دانش‌آموزان تلاش کنید که بگویید در مراحل ساختن اثبات، کجاها از استدلال استفاده کرده‌اید و کجاها مشهود به کمک شما آمده‌است. در مورد همکاری استدلال و شهود در ریاضیات با دانش‌آموزان بحث کنید. بعد به همکاری عقل و شهود در زندگی روزمره بپردازید و به آن‌ها نشان دهید این