

# جور دیگر باید دید

## تمرین‌های متفاوت ریاضی

### ادامه تمرین‌ها خسرو داودی، آرش رستگار

#### هفتمی‌ها، فصل پنجم: شمارنده‌ها و اعداد اول

**مسئله ۷.** همان‌طور که معادله  $x^2 = 1$  دارای دو ریشه  $\pm 1$  است، فرض کنید معادله  $x^2 = -1$  دارای دو ریشه  $i$  و  $-i$  است. می‌خواهیم یکی از این ریشه‌ها را انتخاب کنیم و  $i$  بنامیم تا دیگری  $-i$  باشد. چگونه می‌توان یکی از این ریشه‌ها را انتخاب کرد؟ چرا برای انتخاب ریشه مثبت معادله  $x^2 = 1$  چنین مشکلی نیست؟

**مسئله ۸.** فرض کنید  $z \neq 1$  در معادله  $z^p = 1$  صدق کند که در آن  $p$  عددی فرد و اول است. در مورد  $z$  چیزی نمی‌دانیم. حتی نمی‌دانیم عددی حقیقی است یا خیر. نشان دهید  $1, z, z^2, \dots, z^{p-1}$  همه ریشه‌های  $z^p = 1$  هستند و لذا معادله  $p$  ریشه خواهد داشت. اگر این ریشه‌ها بخواهند تکراری باشند به چه تناقضی منجر خواهد شد؟ چرا در حالت  $p=2$  این نظم دیده نمی‌شود؟ یا دیده می‌شود؟

**مسئله ۴.** تک جمله‌ای‌هایی به شکل  $a^m b^n c^k$  را در نظر بگیرید که در آن‌ها  $a, b, c, m, n, k$  عددهای طبیعی هستند. برای این متغیرهای متمایز تک جمله‌ای‌های  $k$ .م.م و  $b$ .م.م را تعریف کنید و صحت قوانین  $k$ .م.م و  $b$ .م.م را مانند توزیع‌پذیری بررسی کنید. مثلاً آیا شبیه این رابطه برقرار است؟  $[a,b](a,b) = ab$

**مسئله ۵.** برای مجموعه‌های دارای تکرار، شبیه رابطه  $[a,b](a,b) = ab$  را بسازید. به جای  $ab$  چه مفهومی برحسب مجموعه‌ها جایگزین می‌شود؟ این مفهوم جایگزین با اجتماع مجموعه‌ها چه فرقی دارد؟ آیا اجتماع مجموعه‌ها می‌تواند مانند عمل ضرب یا عمل جمع عمل کند؟ شباهت‌ها و تفاوت‌ها چیست؟

**مسئله ۶.** یک اتحاد برای  $k$ .م.م و  $b$ .م.م درست کنید که در آن  $(a,b,c)$  و  $[a,b,c]$  استفاده شده باشد. پیش از آن  $(a,b,c)$  و  $[a,b,c]$  را چگونه تعریف می‌کنید؟ آیا برای تعریف شما رابطه‌های زیر برقرار هستند؟ آیا برای دو عدد حقیقی دلخواه  $x$  و  $y$  می‌توان  $b$ .م.م و  $k$ .م.م تعریف کرد؟ شرطی روی  $x$  و  $y$  بگذارید که بتوان چنین کرد.

$$[a,b,c] = [[a,b],c]$$

$$(a,b,c) = ((a,b),c)$$