جور دیگر باید دید

تمرین‌های متفاوت ریاضی

آموزش معلمان

خسرو داودی، آرش رستگار

کتاب ریاضی هفتم- فصل پنجم، شمارنده‌ها و اعداد اول

فهرست بخش‌ها:

عدد اول
شمارندهٔ اول
بزرگ‌ترین شمارندهٔ مشترک
کوچک‌ترین شمارندهٔ مشترک

مفاهیم اصلی:

عدد اول
شمارنده
تجزیه به عوامل اول
ک.م.م
ب.م.م
فهرست اعداد اول زیر صد برای آشنایی

مهارت‌های اصلی:

محاسبهٔ تعداد و فهرست کردن شمارنده‌ها
پیدا کردن عوامل و تجزیهٔ عدد
پیدا کردن فهرست شمارنده‌های مشترک دو عدد
پیدا کردن فهرست مضرب‌های مشترک دو عدد
محاسبهٔ ک.م.م
محاسبهٔ ب.م.م
تجزیه به کمک روش تجزیهٔ عبارت‌های جبری
(تنوع الگوریتم‌های محاسبه مورد تأکید است)

$$43\times47=(9\times5+2)(9\times5-2)=9^2\times5^2-2^2=2025-4=2021$$

محتوای نگرشی:

تجزیهٔ اعداد طبیعی به حاصل‌ضرب عوامل اول همان تجزیهٔ شکل‌ها به اجزا و همان تجزیهٔ ساختار به زیرساختارهای بنیادی است. در اینجا استعاره حساب اعداد و ساختمان است یا حساب ساختار است اهمیت پیدا می‌کند. مثلاً یک مربع از چهار ضلع مساوی و چهار زاویهٔ قائمه تشکیل شده است و چهار رأس هم دارد این یک تجزیه است. اما این‌طور نیست که اجزاء نام‌برده با هم اشتراکاتی نداشته باشند. در این نگاه اجزاء زیرمجموعه نیستند. یا یک مکعب از شش وجه تشکیل شده که هر یک زیرساختارهای مربوط به خود را دارند. شمارنده‌ها زیرساختارهای یک عدد هستند.

محتوای شناختی:

دو ساختار هم می‌توانند بزرگ‌ترین زیرساختار مشترک و یا کوچک‌ترین ساختار شامل هر دو ساختار داشته باشند. اما باید فضای ساختارهای مورد نظر را چنان محدود کرد که مفاهیم بالا بتوانند معنی‌دار باشند. در بعضی از ساختارها هم این مفاهیم معنی ندارد. مثلاً دو وجه همسایهٔ یک مکعب در یک یال مشترکند و این می‌شود بزرگ‌ترین ساختار مشترک و تمام مکعب می‌شود کوچک‌ترین مکعب شامل هر دو که مفهومی معنی‌دار است. برای مثال دو یال مکعب که رأس مشترکی دارند کوچک‌ترین مکعب n بعدی شامل آن‌ها یک مربع است. اما اگر متنافر باشند کوچک‌ترین مکعب nبعدی شامل هر دو کل مکعب می‌شود. هر دو حقیقت یا دو موضوع شناختی یا دو شاخهٔ علمی می‌توانند مشترکاتی داشته باشند و یا شاخهٔ علمی بزرگتری کوچک‌ترین شاخه شامل هر دو باشد. همیشه بحث به مجموعه‌ها و زیرمجموعه‌ها محول نمی‌شود. مثلاً یک کنج از سه زاویه تشکیل شده ولی نه کنج یک مجموعه است و نه زاویه‌ها مجموعه هستند.

نکات آموزشی:

ب.م.م و ک.م.م بسیار شبیه اشتراک و اجتماع مجموعه‌ها رفتار می‌کنند. یک عدد طبیعی را می‌توان مجموعه‌ای از اعداد اول تصور کرد که هر کدام تکرار دارند. پس اشتراک با تکرار و اجتماع با تکرار این اعداد اول همان ب.م.م و ک.م.م خواهند بود. از این رو قوانین اجتماع و اشتراک مانند توزیع‌پذیری در ب.م.م و ک.م.م هم برقرارند. اگرچه دانش‌آموزان اجتماع و اشتراک مجموعه‌ها را نمی‌شناسند می‌توان از نمودار ون و استعارهٔ ظرف کمک گرفت. به‌علاوه شمارندهٔ یک عدد یک زیرمجموعه‌ای از عوامل اول آن با تکرار احتمالاً کمتر است و این توصیف دقیقاً شمارنده‌ها را تعیین می‌کند و یک تشبیه نیست. بیش از یک آنالوژی است و از لحاظ ساختار ریاضی انطباق دارد.

محتوای نگرشی:

تجزیه به عوامل اول یکی از سنگ بناهای مطالعهٔ ساختارهای ریاضی است. البته همهٔ ساختارهای ریاضی چنین تجزیهٔ یکتایی به ساختارهای ساده‌تر را نمی‌پذیرند. یک مثال معروف تجزیهٔ چندجمله‌ای به عوامل تجزیه‌ناپذیر است. تاریخ ریاضی نشان داده است که چندجمله‌ای‌ها بسیار شبیه اعداد صحیح رفتار می‌کنند. حتی رشد چندجمله‌ای‌های تحویل‌ناپذیر شبیه رشد اعداد اول رفتار می‌کند. این مشابهت منجر به آنالوژی بین میدان‌های اعداد و میدان‌های توابع شده است که از مهم‌ترین

آنالوژی‌ها در نظریهٔ اعداد و در ریاضیات است. در بسیاری از ساختارهای جبری و ساختارهای هندسی نیز تجزیه به عوامل اول وجود دارد. مثلاً مستطیل حاصل‌ضرب دو بازهٔ بسته در محور اعداد حقیقی است. تجزیه فضاهای هندسی به حاصل‌ضرب دکارتی هم یک نوع تجزیه است. تحویل مطالعهٔ گروه‌های حل‌پذیر به گروه‌های آبلی هم چنین تجزیه‌ای است. تجزیهٔ یک نمایش گروه به زیرنمایش‌های تحویل‌ناپذیر نیز چنین است.

محتوای شناختی:

وقتی یک مفهوم تجزیه به عوامل اول با تکرار داریم ب.م.م و ک.م.م معنی پیدا می‌کند. مثلاً ب.م.م و ک.م.م نمایش‌های گروه‌ها در حالتی که تجزیه به زیرنمایش‌های تحویل‌ناپذیر داشته باشند قابل تعریف است. مثالی بدیهی می‌زنم. هر فضای برداری متناهی‌البعد جمع مستقیمی از فضاهای برداری یک بعدی است. در اینجا ب.م.م می‌شود فضای برداری بزرگ‌تر و ک.م.م می‌شود فضای برداری کوچک‌تر چون یک فضای برداری اول بیش نداریم.

یک مثال دیگر زیرمکعب‌های kبعدی یک مکعب nبعدی هستند. هر دو چنین اشیایی در یک کوچک‌ترین می‌نشیند و اشتراکشان نیز یک مکعب از بعد کمتر یا مساوی بعد هر دوی آن‌هاست. دلیل مصداق پیدا کردن ک.م.م و ب.م.م این است که مکعب یک حاصل‌ضرب است. در واقع مکعب توانی از یک بازهٔ بستهٔ I است و لذا تجزیه می‌شود به اشیاء ساده‌تری که در اینجا یک شیء بیش نیست که همان بازهٔ بستهٔ I است. چنین نگاهی به ساختارها در ساختار شناختی انسان جایگاهی عمیق دارد. حقایق هم به مؤلفه‌هایی تحویل‌ناپذیر تجزیه می‌شوند. ابعاد شناخت یک محتوا نیز مؤلفه‌های متمایز دارند که کل آن شناخت از مؤلفه‌هایش قابل حصول است. با این وصف بخش‌پذیری اعداد طبیعی عمیق‌تر از مقایسهٔ ساختار و زیرساختار است. بلکه به تجزیهٔ ساختارها باز می‌گردد و مثلاً ساختارهای خارج‌قسمت در آن معنی پیدا می‌کند. مثلاً اگر $a|b$ آنگاه $\frac{b}{a}$ می‌شود ساختار خارج‌قسمت و $a(\frac{b}{a})=b$ می‌شود تجزیه به زیرساختارهای ساده‌تر. تجزیه به زیرساختارهای ساده‌تر در همهٔ ساختارهای ریاضی ممکن نیست. حتی مطالعهٔ یک ساختار با کمک مطالعهٔ همهٔ زیرساختارهای ساده نیز همیشه پاسخگو نیست. حتی ساختارهایی وجود دارند که زیرساختار ساده ندارند و خودشان پیچیده‌اند. نمونهٔ آن را در رده‌بندی گروه‌های ساده متناهی می‌توان دید که زیرساختاری که ساختار خارج‌قسمت بپذیرد ندارند اما بسیار هم پیچیده هستند. پیش از این تذکر دادیم که ساختارهای ریاضی از جایی به بعد در تاریخ ریاضیات، لزوماً یک مجموعه نیستند که ساختاری بر آن سوار شده باشد. بنابراین آنالوژی با نمودار ون تنها تا جایی می‌تواند یک استعارهٔ راهگشا باشد.

نکات آموزشی مسئلهٔ ۱: تجزیهٔ اعداد طبیعی یک شاه‌راه برای ورود به مسئلهٔ تجزیهٔ عبارت‌های جبری است. چون با این روش دانش‌آموز انگیزه پیدا می‌کند که چرا تجزیهٔ عبارت‌های جبری مهم است. به‌علاوه تجزیهٔ عبارت‌های جبری صورت هندسی دارد ولی تجزیهٔ اعداد طبیعی صورت هندسی عمیقی ندارد. بنابراین وصل کردن تجزیهٔ اعداد اول به تجزیهٔ عبارت‌های جبری به مسئلهٔ تجزیهٔ اعداد عمق هندسی می‌دهد.

نکات آموزشی مسئلهٔ ۲. وصل کردن تجزیهٔ اعداد به عامل‌های اول و ارتباط دادن با ساختارها به استعارهٔ «اعداد ساختمان هستند» مربوط می‌شود و شباهت پیدا کردن بین اعداد و مجموعه‌ها باعث می‌شود دانش‌آموز درک عمیق‌تری از اعداد پیدا کند. چون این کار او را از پارادایم ساختارهای عددی بیرون می‌برد.

نکات آموزشی مسئلهٔ ۳. شماره‌ها به‌طور مستقیم با عمل ضرب اعداد مربوط هستند و ضرب دکارتی بازه‌ها مشابه پیوسته و هندسی ضرب اعداد است. اینکه ب.م.م و ک.م.م به این پارادایم توسعه می‌یابد شگفت‌انگیز است. بعد از اینکه این آنالوژی را دانش‌آموز دید به هر تجزیه یکتایی به عوامل اول علاقه‌مند می‌شود.

نکات آموزشی مسئلهٔ ۴. اتحادهای ب.م.م و ک.م.م شروعی و ورودی مناسب به مسئلهٔ اتحادهای جبری هستند. دانش‌آموز فرمولی می‌بیند که می‌تواند هر طور بخواهد در آن عددگذاری کند و همواره برقرار می‌ماند و این همان خاصیتی است که یک اتحاد جبری باید داشته باشد.

نکات آموزشی مسئلهٔ ۵. جست‌وجو بدون اتحادها در حوزه‌های آنالوگ مهارت توسعهٔ آنچه می‌دانند توسط حوزه‌های دیگر معرفت است که یکی از توانایی‌های مهم شناختی است.

نکات آموزشی مسئلهٔ ۶. توسعهٔ مفهومی یک تئوری که توسط استعاره‌ها ساخته شده‌است به حوزه‌های گسترده‌تر، یکی از روش‌های مهم توسعهٔ ریاضیات است.

کتاب ریاضی هشتم- فصل چهارم، جبر و معادله

فهرست بخش‌ها:

ساده کردن عبارت‌های جبری

پیدا کردن مقدار یک عبارت جبری

تجزیهٔ عبارت‌های جبری

معادله

مفاهیم اصلی:

متغیر

عبارت جبری

عبارت‌های هم‌شکل

مهارت‌های اصلی:

محاسبات عبارت‌های جبری مانند جمع و تفریق، ضرب و تقسیم

تشکیل معادله و حل معادله

ترجمهٔ مسائل کلامی به معادلهٔ جبری

تجزیهٔ عبارت‌های جبری

ساده‌کردن کسرهای جبری

توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع

محتوای نگرشی:

یک روش برای حل مسائل و مشکلات، ترجمهٔ آن‌ها به زبان ریاضیات است. می‌توان بسیاری از مسائل را به زبان جبر برای معادله ترجمه کرد و بعد آن را حل کرد. ترجمه از یک فرمول‌بندی یک تئوری به فرمول‌بندی دیگر یا از یک پارادایم به پارادایم دیگر یکی از تکنیک‌های مهم در حل مسائل ریاضی است. برای همین تئوری‌پردازی راه را برای حل مسائل باز می‌کند. کسی که دربارهٔ ترجمه بین فرمول‌بندی‌ها یا بین پارادایم‌ها تجربه دارد با مفهوم آنالوژی در ریاضیات آشنا می‌شود که درک عمیقی از محتوای ریاضی را طلب می‌کند.

محتوای شناختی:

می‌توان گاهی شناخت را به زبان نمادین یا زبان فرمال ترجمه کرد. اما همهٔ شناخت را نمی‌شود ترجمه کرد. ارسطو گمان می‌کرد با فرمول‌بندی منطق همهٔ مهارت‌های شناختی بشر را احصاء کرده است و پیروان او در فرمول‌بندی ریاضی منطق مانند **لایبنیتز**، **کانت**، **فرگه** و دیگران چنین تصوری داشته که همهٔ فکر بشر را به زبان ریاضی ترجمه کرده‌اند. امروز در نتیجهٔ یافته‌های عصب‌شناسانه می‌دانیم که بسیاری از مهارت‌های شناختی ما در شاخهٔ منطق در علم کلام و نه در شاخهٔ منطق ریاضی نمی‌گنجد. برای مطالعهٔ بیشتر دربارهٔ یافته‌های عصب‌شناسانه و تأثیر آن بر فهم زبان به کتب **لاکف** شاگر **چامسکی** مراجعه کنید.

نکات آموزشی:

تجزیهٔ عبارت‌های جبری را باید موازی با تجزیهٔ اعداد به عوامل کوچک‌تر پیش برد.

برای مثال $(9\times5+2)(9\times5-2)=9^2\times5^2-2^2=2025-4=2021$ را باید در کنار اتحاد $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ قرار داد.

مفهوم عدد اول را باید با مفهوم چندجمله‌ای یک متغیرهٔ تحویل‌ناپذیر مقایسه کرد. حتی اگر دانش‌آموز قرار نباشد مهارت تجزیهٔ چندجمله‌ای‌های چند متغیره را به‌دست آورد، لازم است چندین مثال تجزیهٔ چندجمله‌ای‌های کوتاه چندمتغیره که عوامل بزرگ و بلندتری دارند را دیده باشد. مثال‌های سادهٔ آن

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1})$

می‌باشد. مثال زیر نیز که از صورت کلی تجزیهٔ a^n-b^n پیروی نمی‌کند، بسیار درس‌آموز است.

$$a^4-b^4=(a^2-b^2)(a^2+b^2)$$
$$=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$$

نکات نگرشی:

چرا ما برای تئوری‌ها چندین فرمول‌بندی ارائه می‌دهیم؟ چرا لایبنیتز برای حسابان فرمول‌بندی گسسته و نیوتن فرمول‌بندی پیوسته ارائه کرد؟ چرا بسط تیلور گسسته اولین بار توسط نیوتن که فرمول‌بندی پیوسته را ارائه کرده‌بود کشف شد و بسط تیلور پیوسته اولین بار توسط لایبنیتز که فرمول‌بندی گسسته را ارائه کرده‌بود پیدا شد؟

این نشان می‌دهد که حرکت بین فرمول‌بندی‌های مختلف یک تئوری در درک آن محتوای ریاضی اهمیت پیدا می‌کند. به همین سیاق، حرکت بین پارادایم‌های مختلف یک حقیقت متجلی و استفاده از آنالوژی و شباهت ساختاری بین این پارادایم‌ها به درک عمیق‌تری از ریاضیات منجر می‌شود.

نکات شناختی:

آیا همهٔ شـناخت را می‌توان به زبـان فرمال و کلامی ترجمه کرد؟ به زبان فلسـفی ارسطو باید پرسید آیا فرم یا صورت را همیشـه می‌توان در ساختار یا کلمه یا اسم متجلی کرد؟ می‌خواهم پاسخ بدهم که به‌طور نظری بلی و عملی خیر.

همان‌طور که زمین جزوی از آسمان است و درون آسمان زندگی می‌کند و از جنس آسـمان است و علی‌الاصول هر جـا که بخواهد از آسـمان می‌تواند حاضر شـود و منع منطقی ندارد و اگر منعی دارد منع فیزیکی اسـت، عالم اسم هم جزوی از عالم رسم است و درون عالم رسم زندگی می‌کند و از جنس صور و رسـوم است و علی‌الاصول هر چـه از فرم‌ها و صورت‌ها هسـت قابلیت تجلی به زبان سـاختار را دارد. اما نکته این اسـت که آسـمان بسیار بسیار بزرگ‌تر از زمین است. عالم صورت و رسوم در برابر عالم ساختارها و اسـم‌ها به همان اندازه بزرگ‌تر است. نمی‌توان انتظار داشـت همهٔ صورت‌ها رنگ ساختار به خودش بگیرد. حافظ هم به همین مناسـبت به ارسطو طعنه می‌زند و می‌گوید: ارغنون‌ساز فلک رهزن اهل هنر است. ارغنون یا ارگانون کتاب قطور ارسطوست که مبنای منطقی را پایه‌ریزی کرده اسـت. یا اگر هیلبرت می‌گوید ریاضیات فرمالیسم است به معنی صورت و فرم ارسطویی است. یعنی ریاضیات از ساختار بالاتر است ولی هیلبرت و ارسطو بد فهمیده شده‌اند و تصور می‌شود که هیلبرت گفته اسـت ریاضیات فرمال به معنای نمادین و ظاهری و عالم پایینی اسـت. گویی هیلبرت ریاضی را بازی‌های ظاهری بیـن فرمول‌ها می‌دیده اسـت، که اصلاً چنین نیست. این نکات مهم اسـت، چون باید حد و مرزهای تفکر جبری را که تفکری نمادین و کلامی است بشناسیم و این لازم اسـت چون این‌طور برتری آن را می‌فهمیم و از ارزش‌هایش بهتر اسـتفاده می‌کنیم. تفکر جبری به ما اجازه می‌دهد فضاهای بـرداری بعد دلخواه را به همان خوبـی ابعاد پایین که از آن‌ها شـهود داریم درک کنیم. هندسـه و شهود در خلاقیت به ما کمک می‌کنند و جبر و تفکر نمادین در تعمیم به ما کمک می‌کنند.

نکات آموزشی مسـئلهٔ ۱: اینکه ضرب هم چیزی شبیه همان جمع است در این بازفرمول‌بندی مشاهده می‌شود. چنین نگاهی به عملگرهای دوتایی در ساختارهای عددی موجب تعمیق در فهم آن‌ها می‌شود.

نکات آموزشـی مسئلهٔ ۲: اینکه جبر و هندسه دو شاه‌راه موازی در ریاضیات هسـتند در این مسـئله مورد تأکید اسـت. همان‌طور که حقایق جبری در دنیای هندسه هم تجلی می‌کنند، هرچه در هندسـه هست هم باید به زبان جبر قابل ترجمه باشـند. هندسه تحلیلی دکارت همین را می‌گوید. اما دانش‌آموز باید یـاد بگیرد ترجمه از جبر به هندسه و از هندسه به جبر روش یگانه‌ای ندارد. مثلاً به جز روش دکارت روش‌های دیگری برای ارتباط دادن هندسه به جبر وجود دارد. مثلاً روش استفاده از روابط طولی در حل مسائل هندسه رویکردی دیگر در ترجمه از هندسه به جبر می‌باشد که از ایدهٔ دکارت قدیمی‌تر هم هست.

نکات آموزشی مسئلهٔ ۳: آشـنایی با چندجمله‌ای‌های چندمتغیره اگر چه در دسـتور کار کلاس هشـتم نیست ولی با دیدن مثال‌های تجزیه برای این چندجمله‌ای درک دانش‌آموز از تجزیه غنی‌تر می‌شود. اگر فقط دانش‌آموز تجزیهٔ چندجمله‌ای‌های یک متغیره را دیده باشـد، درک درستی از مفهوم تجزیهٔ عبارت‌های جبری پیدا نمی‌کند.

نکات آموزشی مسئلهٔ ۴: اعداد مثلثی، مربعی، مخمسی و مسدسـی به ما می‌گویند که اعداد شـکل‌ها هستند. این تمرین به ما می‌گوید که شکل‌ها هم می‌توانند اعداد باشند.

نکات آموزشـی مسـئلهٔ ۵: هوش کلامی از مهم‌ترین ابزارهـا بـرای اندازه‌گیـری ضریب هوشـی اسـت. دانش‌آموزان باهوش و تیز در این مسئله توانایی خود را نشان می‌دهند. به علاوه توانایی‌های ریاضی دانش‌آموز در اینجا در کنار توانایی‌های شـاخه‌های غیرریاضی قرار می‌گیرد و ارزشیابی می‌شود.

کتاب ریاضی نهم- فصل چهارم، توان و ریشه

فهرست بخش‌ها:

توان صحیح
نماد علمی
ریشه‌گیری
جمع و تفریق رادیکال‌ها

مفاهیم اصلی:

نماد توان
توان مثبت
توان منفی
توان صفر
خصوصیات ضرب و تقسیم توان‌ها
نماد علمی
نماد رادیکال‌ها
درکی از بزرگی توان‌ها در اندازه‌گیری طول، زمان، جرم، حجم و مساحت مثل 2^{1}،...، 2^{10}، ...، 2^{100} یعنی چقدر
10^{1}، ...، 10^{5}، ...، 10^{15}، ...، 10^{20} یعنی چقدر

مهارت‌های اصلی:

ضرب و تقسیم عبارت‌های توانی
ساده کردن عبارت‌های توانی
کار با اعداد بزرگ
نماد اعداد بزرگ با کمک نماد علمی
جمع و تفریق اعداد با نماد علمی
حساب رادیکال‌ها
ساده کردن رادیکال‌ها
گویا کردن مخرج کسرها
تشبیه محاسبات عبارت‌های جبری به محاسبات عبارت‌های رادیکالی و آن به محاسبات عبارت‌های عددی

محتوای نگرشی:

ریاضیات به ما کمک می‌کند اعداد بزرگ را با کمک اعداد کوچک‌تر مطالعه کنیم. این مانند این است که ساختارهای پیچیده با ساختارهای ساده‌تر مطالعه شوند. یعنی مطالعهٔ ساختارهای پیچیده را به مطالعهٔ اجزایی از آن‌ها که ساختارهای ساده‌تر هستند تحویل کنیم. گاهی هم فهم یک ساختار پیچیده به فهم ساختار ساده‌ای تحویل می‌شود که لزوماً زیر ساختار آن نیست. مثلاً ساختارهای خارج‌قسمت که با رابطهٔ هم‌ارزی تعریف می‌شوند چنین هستند. پس یک کارکرد ریاضیات ساده‌کردن پیچیدگی‌ها برای بشر می‌باشد.

محتوای شناختی:

شناخت هر چیزی را می‌توان خلاصه کرد. شناخت هر موضوعی یا هر حقیقتی دارای خلاصه، عصاره و شیره است. مثلاً همان‌طور که درخت یا حیوان یا انسان دی‌ان‌اِی (DNA) دارد، حقیقت هم دی‌اِن‌اِی دارد. و همان طور که زیرساختارهایی داریم که نقش دی‌ان‌ای را بازی می‌کنند، ساختارهای خارج‌قسمتی هم می‌توانند چنین نقشی را بازی کنند. گاهی ساختار مشابه نه زیرساختار ساختار اصلی است و نه خارج‌قسمت آن است. بسیاری از اوقات بین ساختار اصلی و ساختار مشابه ساده فقط رابطهٔ آنالوژی برقرار است. آنالوژی را می‌توان به شباهت ساختاری ترجمه کرد. خلاصه کردن حقیقت در یک حقیقت ساده‌تر یا ارائه کردن یک مدل اسباب‌بازی برای یک تئوری یک مهارت شناختی مهم به‌شمار می‌رود.

نکات آموزشی:

تعریف توان از تعریف توان‌های طبیعی شروع می‌شود که بر استعارهٔ گردایه پایه‌گذاری می‌شود. تعمیم توان به توان‌های گویا بر استعارهٔ ساختمان تکیه می‌زند. تعریف توان به توان‌های حقیقی با کمک حدگیری تعریف می‌شود که بر استعارهٔ حرکت نقطه روی خط تکیه دارد و با این کار می‌توان توان حقیقی را به‌عنوان یک تابع روی خط حقیقی مورد بررسی قرار داد. مهم است که نمودار تابع توانی برای مقادیر صحیح و سپس گویا و سپس حقیقی مقایسه شوند تا دانش‌آموز ببیند که چگونه یک تابع گسسته که از ایده‌ای جبری و گسسته و نمادین می‌آید به یک تابع پیوسته روی خط حقیقی توسعه می‌یابد. مقایسهٔ رشد و زوال توانی با رشد و زوال چندجمله‌ای تنها به‌صورت تصویری مورد تأکید است.

نکات نگرشی:

اینکه ساختارهای پیچیده را بر حسب ساختارهای ساده بیان کنیم و از منابع شناختی آن بهره‌مند شویم یکی از کارکردهای مهم ریاضیات است. گاهی ساختن یک ساختار پیچیده بر اساس یک ساختار بسیار ساده‌تر ممکن نیست، اما می‌توان از ساختار پیچیده یک مدل اسباب‌بازی ساخت که در مطالعهٔ آن ساختار کمک کار باشد. در مشابهت ساختار پیچیده با یک مدل ساده‌کننده از مفهوم آنالوژی و یا گاهی از مفهوم استعاره کمک گفته می‌شود که نقش مهمی در توسعهٔ ریاضیات دارند. آنالوژی از استعاره دقیق‌تر و محکم‌تر است.

نکات شناختی:

هر حقیقت، زیرحقیقتی ساده و تعیین‌کنندهٔ کل آن را دارد که آن را دی‌ان‌ای می‌نامیم. همان‌طور که بین تئوری‌ها می‌شود رابطهٔ آنالوژی برقرار کرد. بین خلاصه و شیره و عصارهٔ حقایق هم رابطهٔ آنالوژی برقرار است.

یک حقیقت می‌تواند در چندین آینه تجلی کند و در هر آینه تجلیات حقیقت تا حد و حدودی خاص قابل بازشناسی است. هر آینه‌ای برای نمایش حقیقت تمام‌نما نیست. آینه‌های مختلفی که حقیقت در آن تجلی می‌کند پارادایم گفته می‌شوند. البته ممکن است که یک تئوری متجلی در یک آینه دارای چندین فرمول‌بندی مختلف باشند. همهٔ این فرمول‌بندی‌ها نیز تجلیاتی از حقیقت در همان آینه هستند. بین فرمول‌بندی‌های مختلف یک تئوری در یک پارادایم رابطهٔ آنالوژی برقرار است. بین تجلی‌های مختلف حقیقت در پارادایم‌های مختلف نیز رابطهٔ آنالوژی برقرار است. می‌توان از جست‌وجوی آنالوژی بین تئوری‌ها در پارادایم‌های مختلف شروع کرد و بعد به دنبال حقیقت پشت صحنه متجلی در پارادایم‌ها گشت. برای مثال بین نظریهٔ اعداد اول در ساختمان عددی اعداد صحیح و نظریهٔ چندجمله‌ای‌های تحویل‌ناپذیر در ساختمان عددی چندجمله‌ای‌های با ضرایب صحیح یا گویا یا حقیقی یا مختلط یک رابطهٔ آنالوژی برقرار است. اگر ضرایب چندجمله‌ای‌ها را میدان متناهی بگیریم این آنالوژی عمیق‌تر خواهد شد. برای مثال، میدان اعداد گویا با میدان توابع گویا با ضرایب در میدان متناهی عمیقاً به هم شبیه هستند. هنوز کسی نتوانسته است این دو پارادایم را به هم متصل کند و شباهت به نظریهٔ میدان‌های اعداد و میدان‌های توابع رازآمیز است. همان‌طور که ساختارها قابل خلاصه‌شدن در یک ساختار خارج‌قست هستند، تئوری‌ها هم قابل خلاصه‌شدن در یک تئوری خارج‌قسمت می‌باشند. همان‌طور که ساختارها زیرساختارهای ساده دارند که تمام پیچیدگی‌ها را در خود دارند و مانند دی‌ان‌ای رفتار می‌کنند، تئوی‌ها هم زیرتئوری‌های ساده دارند که تمام پیچیدگی‌های تئوری را در خود خلاصه می‌کنند. برای مثال، ممکن است حالات خاص یک تئوری اگرچه ساده‌تر هستند اما همهٔ پیچیدگی‌های تئوری را نشان بدهند.

نکات آموزشی مسئلهٔ ۱: مقایسهٔ توان‌های ۱۰ و توان‌های ۲ به درک عمیق‌تری از بزرگی این توان‌ها و چگونگی رشد آن‌ها به دانش‌آموز خواهد داد. به‌عنوان کار کردن و آشنا شدن با اعداد بسیار بزرگ و اعداد بسیار کوچک تماس نزدیک‌تری بین شناخت دانش‌آموز با طبیعت برقرار می‌کند. دانش مربوط به آسمان‌ها و دانش مربوط به ذرات کوچک زنده یا بی‌جان مرتبهٔ عمیق‌تری از تماس با طبیعت را طلب می‌کند.

نکات آموزشی مسئلهٔ ۲: رشد و محاسبهٔ تعداد یال‌ها و وجه‌های مکعب‌های بعدبالا باعث تقویت تفکر شهودی دانش‌آموزان خواهد شد. اینکه تخیل خود را به کار بیندازند و از روش‌های جبری برای دقیق‌تر کردن دانش شهودی خود کمک بگیرند.

نکات آموزشی مسئلهٔ ۳: رادیکال‌های پی‌درپی می‌توانند بسیار پیچیده باشند به‌عبارت رادیکالی زیر توجه کنید.

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4+\dots}}}}$$

برای مثال، اگر $x=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{2+\dots}}}}$ آنگاه

$$x=\sqrt{1+\sqrt{2+x}}$$

$$x^2=1+\sqrt{2+x}$$

$$x^2-1=\sqrt{2+x}$$

$$x^4-2x^2+1=(x^2-1)^2=2+x$$

$$x^4-2x^2-x-1=0$$

پاسخ ریشه یک معادلهٔ درجه چهارم خواهد بود.

نکات آموزشی مسئلهٔ ۴: رشد چندجمله‌ای و رشد توانی در این مسئله مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. به جواب‌های منفی و اینکه برای n فرد غایب هستند توجه داده شود.

نکات آموزشی مسئلهٔ ۵: پشت صحنهٔ این مسئله مقایسهٔ $\lim_{n\to\infty} x^n$ برای $x>1$ و $0<x<1$ است.

نکات آموزشی مسئلهٔ ۷: این مسئله مقدمه‌ای برای آشنایی با اعداد مختلط است و اینکه مزدوج مختلط چرا یک تقارن ساختار عددی اعداد مختلط محسوب می‌شود.

نکات آموزشی مسئلهٔ ۸: این مسئله مقدمه‌ای برای آشنایی با اعداد مختلط است. اما در اینجا به مفهوم هندسی یک ریشه پرداخته نمی‌شود و فقط عواقب جبری فرض وجود ریشه مورد بررسی قرار می‌گیرد. لزومی به معرفی اعداد مختلط در این سطح نیست.