ریاضی و مسئله
دوره ۲۹| شماره ۴

جور دیگر باید دید

تمرین‌های متفاوت ریاضی

پاسخ‌ها

خسرو داودی، آرش رستگار

هفتمی‌ها، فصل پنجم: شمارنده‌ها و اعداد اول

پاسخ مسئلهٔ ۱:

الف) اعداد مربع کامل بین ۱ تا ۱۰۰:

۱-۴-۹-۱۶-۲۵-۳۶-۴۹-۶۴-۸۱-۱۰۰

$۳=۴-۱=۲^{۲}-۱=(۲-۱)(۲+۱)=(۱)(۳)$

$۸=۹-۱=۳^{۲}-۱=(۳-۱)(۳+۱)=(۲)(۴)$

$۵=۹-۴=۳^{۲}-۲^{۲}=(۳-۲)(۳+۲)=(۱)(۵)$

$۱۵=۱۶-۱=۴^{۲}-۱=(۴-۱)(۴+۱)=(۳)(۵)$

$۱۲=۱۶-۴=۴^{۲}-۲^{۲}=(۴-۲)(۴+۲)=(۲)(۶)$

$۷=۱۶-۹=۴^{۲}-۳^{۲}=(۴-۳)(۴+۳)=(۱)(۷)$

$۲۴=۲۵-۱=۵^{۲}-۱=(۵-۱)(۵+۱)=(۴)(۶)$

$۲۱=۲۵-۴=۵^{۲}-۲^{۲}=(۵-۲)(۵+۲)=(۳)(۷)$

$۱۶=۲۵-۹=۵^{۲}-۳^{۲}=(۵-۳)(۵+۳)=(۲)(۸)$

$۹=۲۵-۱۶=۵^{۲}-۴^{۲}=(۵-۴)(۵+۴)=(۱)(۹)$

$۳۵=۳۶-۱=۶^{۲}-۱=(۶-۱)(۶+۱)=(۵)(۷)$

$۳۲=۳۶-۴=۶^{۲}-۲^{۲}=(۶-۲)(۶+۲)=(۴)(۸)$

$۲۷=۳۶-۹=۶^{۲}-۳^{۲}=(۶-۳)(۶+۳)=(۳)(۹)$

$۲۰=۳۶-۱۶=۶^{۲}-۴^{۲}=(۶-۴)(۶+۴)=(۲)(۱۰)$

$۱۱=۳۶-۲۵=۶^{۲}-۵^{۲}=(۶-۵)(۶+۵)=(۱)(۱۱)$

$۴۸=۴۹-۱=۷^{۲}-۱=(۷-۱)(۷+۱)=(۶)(۸)$

$۴۵=۴۹-۴=۷^{۲}-۲^{۲}=(۷-۲)(۷+۲)=(۵)(۹)$

$۴۰=۴۹-۹=۷^{۲}-۳^{۲}=(۷-۳)(۷+۳)=(۴)(۱۰)$

$۳۳=۴۹-۱۶=۷^{۲}-۴^{۲}=(۷-۴)(۷+۴)=(۳)(۱۱)$

$۲۴=۴۹-۲۵=۷^{۲}-۵^{۲}=(۷-۵)(۷+۵)=(۲)(۱۲)$

$۱۳=۴۹-۳۶=۷^{۲}-۶^{۲}=(۷-۶)(۷+۶)=(۱)(۱۳)$

$۶۳=۶۴-۱=۸^{۲}-۱=(۸-۱)(۸+۱)=(۷)(۹)$

$۶۰=۶۴-۴=۸^{۲}-۲^{۲}=(۸-۲)(۸+۲)=(۶)(۱۰)$

$۵۵=۶۴-۹=۸^{۲}-۳^{۲}=(۸-۳)(۸+۳)=(۵)(۱۱)$

$۴۸=۶۴-۱۶=۸^{۲}-۴^{۲}=(۸-۴)(۸+۴)=(۴)(۱۲)$

$۳۹=۶۴-۲۵=۸^{۲}-۵^{۲}=(۸-۵)(۸+۵)=(۳)(۱۳)$

$۲۸=۶۴-۳۶=۸^{۲}-۶^{۲}=(۸-۶)(۸+۶)=(۲)(۱۴)$

$۱۵=۶۴-۴۹=۸^{۲}-۷^{۲}=(۸-۷)(۸+۷)=(۱)(۱۵)$

$۸۰=۸۱-۱=۹^{۲}-۱=(۹-۱)(۹+۱)=(۸)(۱۰)$

$۷۷=۸۱-۴=۹^{۲}-۲^{۲}=(۹-۲)(۹+۲)=(۷)(۱۱)$

$۷۲=۸۱-۹=۹^{۲}-۳^{۲}=(۹-۳)(۹+۳)=(۶)(۱۲)$

$۶۵=۸۱-۱۶=۹^{۲}-۴^{۲}=(۹-۴)(۹+۴)=(۵)(۱۳)$

$۵۶=۸۱-۲۵=۹^{۲}-۵^{۲}=(۹-۵)(۹+۵)=(۴)(۱۴)$

$۴۵=۸۱-۳۶=۹^{۲}-۶^{۲}=(۹-۶)(۹+۶)=(۳)(۱۵)$

$۳۲=۸۱-۴۹=۹^{۲}-۷^{۲}=(۹-۷)(۹+۷)=(۲)(۱۶)$

$۱۷=۸۱-۶۴=۹^{۲}-۸^{۲}=(۹-۸)(۹+۸)=(۱)(۱۷)$

$۹۹=۱۰۰-۱=۱۰^{۲}-۱=(۱۰-۱)(۱۰+۱)=(۹)(۱۱)$

$۹۶=۱۰۰-۴=۱۰^{۲}-۲^{۲}=(۱۰-۲)(۱۰+۲)=(۸)(۱۲)$

$۹۱=۱۰۰-۹=۱۰^{۲}-۳^{۲}=(۱۰-۳)(۱۰+۳)=(۷)(۱۳)$

$۸۴=۱۰۰-۱۶=۱۰^{۲}-۴^{۲}=(۱۰-۴)(۱۰+۴)=(۶)(۱۴)$

$۷۵=۱۰۰-۲۵=۱۰^{۲}-۵^{۲}=(۱۰-۵)(۱۰+۵)=(۵)(۱۵)$

$۶۴=۱۰۰-۳۶=۱۰^{۲}-۶^{۲}=(۱۰-۶)(۱۰+۶)=(۴)(۱۶)$

$۵۱=۱۰۰-۴۹=۱۰^{۲}-۷^{۲}=(۱۰-۷)(۱۰+۷)=(۳)(۱۷)$

$۳۶=۱۰۰-۶۴=۱۰^{۲}-۸^{۲}=(۱۰-۸)(۱۰+۸)=(۲)(۱۸)$

$۱۹=۱۰۰-۸۱=۱۰^{۲}-۹^{۲}=(۱۰-۹)(۱۰+۹)=(۱)(۱۹)$

ب) اعداد مکعب کامل بین ۱ تا ۱۰۰:

۱-۸ -۲۷-۶۴

$۶۳=۶۴-۱=۴^{۳}-۱=(۴-۱)(۴^{۲}+۴+۱)=(۳)(۲۱)$

$۵۶=۶۴-۸=۴^{۳}-۲^{۳}=(۴-۲)(۴^{۲}+۸+۲^{۲})=(۲)(۲۸)$

$۳۷=۶۴-۲۷=۴^{۳}-۳^{۳}=(۴-۳)(۴^{۲}+۱۲+۳^{۲})=(۱)(۳۷)$

$۲۶=۲۷-۱=۳^{۳}-۱=(۳-۱)(۳^{۲}+۳+۱)=(۲)(۱۳)$

$۱۹=۲۷-۸=۳^{۳}-۲^{۳}=(۳-۲)(۳^{۲}+۶+۲^{۲})=(۱)(۱۹)$

$۷=۸-۱=۲^{۳}-۱=(۲-۱)(۲^{۲}+۲+۱)=(۱)(۷)$

ج)

$۶۵=۶۴+۱=۴^{۳}+۱=(۴+۱)(۴^{۲}-۴+۱)=(۵)(۱۳)$

$۷۲=۶۴+۸=۴^{۳}+۲^{۳}=(۴+۲)(۴^{۲}-۸+۲^{۲})=(۶)(۱۲)$

$۹۱=۶۴+۲۷=۴^{۳}+۳^{۳}=(۴+۳)(۴^{۲}-۱۲+۳^{۳})=(۷)(۱۳)$

$۲۸=۲۷+۱=۳^{۳}+۱=(۳+۱)(۳^{۲}-۳+۱)=(۴)(۷)$

$۳۵=۲۷+۸=۳^{۳}+۲^{۳}=(۳+۲)(۳^{۲}-۶+۲^{۲})=(۵)(۷)$

$۹=۸+۱=۲^{۳}+۱=(۲+۱)(۲^{۲}-۲+۱)=(۳)(۳)$

د) و هـ) روشن هستند.

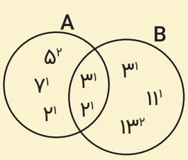
پاسخ مسئلهٔ ۲:

الف) ک.م.م و ب.م.م دو عدد به شکل $p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k}$ و $q_1^{\beta_1}\ldots q_s^{\beta_s}$ را تعریف کنید و بعد حالت خاص توان‌های α_iها و β_jها برابر با یک را در نظر بگیرید.

ب) مشابه مثال زیر عمل کنید.

$a=۲^{۲}\times۳^{۱}\times۵^{۲}\times۷^{۱}$

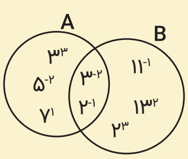
$b=۲^{۱}\times۳^{۲}\times۱۱^{۱}\times۱۳^{۲}$



ج) مشابه مثال زیر عمل کنید.

$a=۲^{-۲}\times۳^{۱}\times۵^{-۲}\times۷^{۱}$

$b=۲^{۱}\times۳^{-۲}\times۱۱^{-۱}\times۱۳^{۲}$



یعنی در هر عدد اول مشترک بین a و b توان کمینه را در اشتراک قرار دهید و بعد با توان‌هایی مثبت در خارج از اشتراک

آن را جبران کنید.
پس اگر $a=p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}$ و $b=q_1^{\beta_1}\dots q_k^{\beta_k}$ دو عدد گویا باشند که α_i و β_i اعدادی صحیح هستند، تعریف می‌کنیم:

$$(a,b)=p_1^{\min\{\alpha_1,\beta_1\}}\dots p_k^{\min\{\alpha_k,\beta_k\}}$$
$$[a,b]=p_1^{\max\{\alpha_1,\beta_1\}}\dots p_k^{\max\{\alpha_k,\beta_k\}}$$

توجه کنید که هنوز تساوی زیر برقرار است:

$$ab=(a,b)[a,b]$$

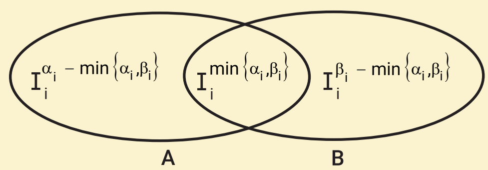
پاسخ مسئلۀ ۳.
اگر $I_1,\dots,I_k$ بازه‌های با طول‌های دوبه‌دو نامساوی باشند تعریف می‌کنیم:

$$I_1^{\alpha_1}\dots I_k^{\alpha_k}=\underbrace{I_1\times\dots\times I_1}_{\alpha_1\ \text{بار}}\times\dots\times\underbrace{I_k\times\dots\times I_k}_{\alpha_k\ \text{بار}}$$

در این صورت هر حاصل‌ضرب از بازه‌ها به شکل بالا تجزیه می‌شود.
اگـــر $A=I_1^{\alpha_1}\dots I_k^{\alpha_k}$ و $B=I_1^{\beta_1}\dots I_k^{\beta_k}$ که در آن $\alpha_i\ge 0$ و $\beta_i\ge 0$ آنگاه تعریف می‌کنیم.

$$(A,B)=I_1^{\min\{\alpha_1,\beta_1\}}\dots I_k^{\min\{\alpha_k,\beta_k\}}$$
$$[A,B]=I_1^{\max\{\alpha_1,\beta_1\}}\dots I_k^{\max\{\alpha_k,\beta_k\}}$$

توجه کنید که باز هم $A\times B=(A,B)\times[A,B]$
ب) اگر بازه به طول a_i را I_i بنامیم که در آن a_iها متفاوتند، نمودار ون به شکل زیر خواهد بود. در اینجا $0\le\alpha_i$ و $0\le\beta_i$



توجه کنید که داریم: $A=I_1^{\alpha_1}\dots I_k^{\alpha_k}$ و $B=I_1^{\beta_1}\dots I_k^{\beta_k}$ توان I_i در $A\cup B$ برابـــر $\alpha_i+\beta_i-\min\{\alpha_i,\beta_i\}=\max\{\alpha_i,\beta_i\}$ خواهد بود که همان است که می‌خواستیم.
ج) اگـــر $A,B\subseteq\mathbb{R}$ اعضـــای $x\in A\cap B$ اگر تکـــرار x در A برابـــر a_x و تکـــرار آن در B برابر b_x باشـــد، تکرار آن در $A\cap B$ را $\min\{a_x,b_x\}$ بگیرید و تکـــرار در $A\cup B$ برابر $\max\{a_x,b_x\}$ خواهد بود.

پاسخ مسئلۀ ۴:
قرار دهید $(a^{m_1}b^{n_1}c^{k_1},a^{m_2}b^{n_2}c^{k_2})=a^{\min\{m_1,m_2\}}b^{\min\{n_1,n_2\}}c^{\min\{k_1,k_2\}}$ و در [,] به‌جای min قرار دهید max. در این‌صورت رابطۀ $\min\{a,b\}+\max\{a,b\}=a+b$ از رابطۀ $[x,y](x,y)=xy$ نتیجه می‌شود.

پاسخ مسئلۀ ۵:
همان روشی که در قسمت (ج) مسئلۀ ۳ پیش گرفتیم برای هر دو مجموعۀ A و B کار می‌کند.

$$AB=\left\{x\in A\cup B \mid \text{تکرر } x \text{ در } AB \text{ برابر باشد با } a_x+b_x\right\}$$

در اجتماع مجموعه‌هـــای با اعضای با تکرر ۱ تکررها جمع نمی‌شوند بلکه ماکزیمم گرفته می‌شـــود. روابط دمورگان می‌گویند:

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

بنابراین هر دو عمل نســـبت به هم توزیع‌پذیرند. و لذا با جمع و ضرب فرق اساسی دارند. چون رابطۀ توزیع‌پذیری زیر در مورد اعداد درست نیست.

$$a+bc\ne(a+b)(a+c)$$

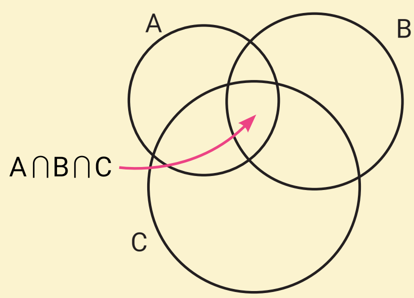
پاسخ مسئلۀ ۶.
اگـــر داشـــته باشـــیم $a=p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}$، $b=p_1^{\beta_1}\dots p_k^{\beta_k}$ و $c=p_1^{\gamma_1}\dots p_k^{\gamma_k}$ که در آن α_i، β_i و γ_i بزرگ‌تر یا مساوی صفر هستند، تعریف کنید

$$(a,b,c)=p_1^{\min\{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1\}}\dots p_k^{\max\{\alpha_k,\beta_k,\gamma_k\}}$$
$$\left[a,b,c\right]=p_1^{\max\{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1\}}\dots p_k^{\max\{\alpha_k,\beta_k,\gamma_k\}}$$

در این‌صورت $[a,b,c]=[[a,b],c]$ زیرا:

$$\max\{\alpha_i,\beta_i,\gamma_i\}=\max\{\max\{\alpha_i,\beta_i\},\gamma_i\}$$

برای اتحاد مربوطه از نمودار ون استفاده کنید.



$$\#A+\#B+\#C-\#A\cap B-\#B\cap C-\#A\cap C+\#A\cap B\cap C=\#A\cup B\cup C$$

برای اثبات تساوی بررســـی کنید هر ناحیه چند بار در دو طرف تساوی شمرده شده‌است. متناظر با تساوی بالا رابطه زیر برقرار باشد:

$$abc(a,b,c)=[a,b,c](b,c)(a,b)(a,c)$$

حال درســـتی این تساوی را ثابت کنید. ابتدا آن را به یک عبارت دربارۀ ماکزیمم‌ها و مینیمم‌ها تبدیل کنید:

$$\alpha_i+\beta_i+\gamma_i+\min\{\alpha_i,\beta_i,\gamma_i\}=\max\{\alpha_i,\beta_i,\gamma_i\}+\min\{\alpha_i,\beta_i\}+\min\{\alpha_i,\gamma_i\}+\min\{\beta_i,\gamma_i\}$$

حال این تساوی مربوط به ماکزیمم و مینیمم را چگونه ثابت می‌کنید؟ ابتدا درستی آن را با عددگذاری بررسی کنید.

هشتمی‌ها، فصل چهارم، جبر و معادله

پاسخ مسئلهٔ ۱.

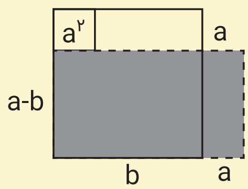
فرض کنید $a=\alpha_1[P_1]+\alpha_2[P_2]+\dots+\alpha_k[P_k]$ و $b=\beta_1[P_1]+\beta_2[P_2]+\dots+\beta_k[P_k]$ که در آن $\alpha_i \geq 0$ و $\beta_i \geq 0$ در این صورت تعریف کنید

$$ab=(\alpha_1+\beta_1)[P_1]+(\alpha_2+\beta_2)[P_2]+\dots+(\alpha_k+\beta_k)[P_k]$$

در مورد عددهای گویا همین تعریف برقرار است تنها α_i و β_i عددهای صحیح دلخواه هستند.

پاسخ مسئلهٔ ۲.

برای شکل‌های مربوطه در وبگاه جئوجبرا (geogebra) جست‌وجو کنید.



پاسخ مسئلهٔ ۳.

الف) اگر $P(x,y)=x^2-y^2$ آنگاه $P(y,y)=y^2-y^2=0$

اگر $Q(x,y)=x^3-y^3$ آنگاه $Q(y,y)=y^3-y^3=0$

اگر $P(x,y)=(x-y)H(x,y)$ آنگاه $P(y,y)=(x-y)H(y,y)=0$

اگر $P(x,y)$ را یک چندجمله‌ای برحسب x فرض کنیم می‌توانیم آن را با الگوریتم تقسیم چندجمله‌ای‌ها بر $(x-y)$ تقسیم کنیم و باقی‌مانده یک چندجمله‌ای برحسب y خواهد بود.

$$P(x,y)=(x-y)H(x,y)+K(y)$$

اگر $P(y,y)=0$ به این معنی است که $K(y)=0$ یعنی: $(x-y)|P(x,y)$

ب) اثبات مشابه قسمت الف است. در حالت خاص اگر $P(x,y)=x^3+y^3$ آنگاه $P(-y,y)=(-y)^3+y^3=0$

ج)

$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\dots+xy^{n-2}+y^{n-1})$$
$$x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+\dots-xy^{n-2}+y^{n-1})$$

عبارت دوم فقط برای n فرد برقرار است. مثلاً به سادگی می‌توان دید

$$x^2+y^2 \neq (x+y)(x+y)$$

پاسخ مسئلهٔ ۴.

الف) در اینجا k عددی صحیح و مثبت است. اگر $k=0$ قرار دهید $I^k=1$ در این‌صورت تعریف می‌کنیم

$$(\alpha_1 I^{k_1}+\dots+\alpha_r I^{k_r})(\beta_1 I^{l_1}+\dots+\beta_s I^{l_s})=$$
$$\alpha_1\beta_1 I^{k_1+l_1}+\dots+\alpha_i\beta_j I^{k_i+l_j}+\dots+\alpha_r\beta_s I^{k_r+l_s}$$

جمع و ضرب مانند اعداد صحیح رفتار می‌کند، شرکت‌پذیری جمع و ضرب و توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع و قرینهٔ جمعی و عضو خنثای جمع و ضرب همه وجود دارند یا برقرارند.

ب) اگر توان‌های $k_i \geq 0$ مثبت یا صفر باشند $\alpha_1 I^{k_1}+\dots+\alpha_r I^{k_r}$ معادل $\alpha_1 x^{k_1}+\dots+\alpha_k x^{k_i}$ خواهد بود که همان مفهوم چندجمله‌ای است.

ج) این دو ساختار متناظرند و فرقی ندارند. هر عبارت در یکی به عبارتی در دیگری ترجمه می‌شود. اما مفهوم ریشهٔ چندجمله‌ای در صورت‌بندی هندسی وجود ندارد.

پاسخ مسئلهٔ ۵.

چون ترتیب حروف در یک کلمه مهم است و حروف جابه‌جا نمی‌شوند، تعریف ک.م.م و ب.م.م ممکن نیست. اما اگر تعریف مهم نباشد یعنی: دال^{1}×الف^{1}×میم^{2}=مدام آنگاه ک.م.م و ب.م.م به سادگی تعریف می‌شوند.

نهمی‌ها، فصل چهارم، توان و ریشه

پاسخ مسئلهٔ ۱.

الف) در اینترنت جست‌وجو کنید.

ب) از ماشین‌حساب برای توان‌های کوچک ۱۰ استفاده کنید. برای توان‌های بزرگ‌تر از ضرب کردن نامساوی‌های کوچک‌تر کمک بگیرید.

ج) از قسمت ب به سادگی این قسمت نیز قابل محاسبه است.

پاسخ مسئلهٔ ۲.

وجوه مکعب I^kبُعدی به شکل قسمتی از $\partial I \times I^{k-1}$ هستند. پس (k-1)بُعدی هستند.

$$\partial I^k = \partial I \times I^{k-1} \cup I \times \partial I \times I^{k-2} \cup \ldots \cup I^{k-1} \times \partial I$$

پس $2k$ وجه (k-1)بُعدی داریم. مثلاً مربع دو وجه یک‌بُعدی و مکعب سه وجه دوبُعدی دارد.

تعداد رأس‌ها 2^k است. مثلاً مربع ۴ رأس و مکعب ۸ رأس دارد. از هر رأس k یال می‌گذرد و هر یال دوبار شمرده می‌شود. پس تعداد یال‌ها $\frac{k.2^k}{2} = k.2^{k-1}$ است. برای مثال در مربع $4=2\times 2^{2-1}$ یال و در مکعب $12=3\times 2^{3-1}$ یال داریم.

پاسخ مسئلهٔ ۳.

الف)

$$x = a\sqrt{b + a\sqrt{b + \ldots}}$$
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 = b + x$$
$$x^2 = ba^2 + a^2x$$
$$x^2 - a^2x - ba^2 = 0$$
$$\Delta = \frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4ba^2}}{2}$$

ب)

$$x = a\sqrt[3]{b + a\sqrt[3]{b + \ldots}}$$
$$\left(\frac{x}{a}\right)^3 = b + x$$
$$x^3 = ba^3 + a^3x$$
$$x^3 - a^3x - ba^3 = 0$$

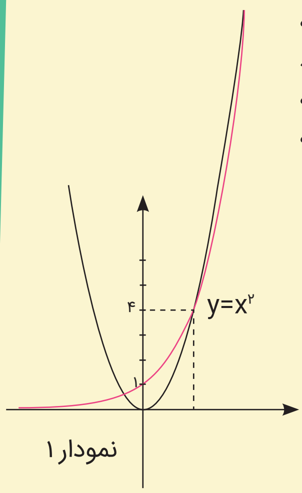
ج)

$$x = a\sqrt[n]{b + a\sqrt[n]{b + \ldots}}$$
$$\left(\frac{x}{a}\right)^n = b + x$$
$$x^n = ba^n + a^nx$$
$$x^n - a^nx - ba^n = 0$$

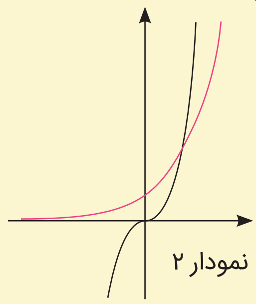
برای n فرد همیشه یک ریشه داریم. برای n زوج باید شرایطی بقرار باشد.

پاسخ مسئلهٔ ۴.

معادلهٔ $2^x=x^2$ به جز ۲ و ۴ یک جواب منفی هم دارد. در حالت $2^x=x^n$ اگر n زوج باشد مشابه نمودار ۱ است. اما اگر n فرد باشد تنها دو ریشهٔ مثبت داریم. به حالت $2^x=x^3$ در نمودار ۲ توجه کنید.



نمودار ۱


نمودار ۲

پاسخ مسئلهٔ ۵.

نکته این است که عددهای نزدیک صفر هر چه به توان می‌رسند کوچک‌تر و کوچک‌تر می‌شوند و اعداد نزدیک به یک، اما کوچک‌تر از آن هرچه به توان می‌رسند به یک نزدیک‌تر و نزدیک‌تر می‌شوند. عددهای بزرگ‌تر از یک با به توان رسیدن عددهای بسیار بزرگ تولید می‌کنند.

پاسخ مسئلهٔ ۶.

2^x با تغییر متغیر $x=2y$ به 4^y تبدیل می‌شود.

2^y با تغییر متغیر $y=2z$ به 8^z تبدیل می‌شود.

2^z با تغییر متغیر $z=2k$ به 16^k تبدیل می‌شود.

پس نمودارهای 2^x، 4^x، 8^x و 16^x با تجانس موازی محور xها به هم می‌روند. در مورد نمودارهای a^x، a^{2x}، a^{3x} و a^{4x} همین برقرار است.

پاسخ مسئلهٔ ۷.

نمی‌توان انتخاب کرد. هر کدام را i بگیرید دیگری می‌شود i-. این دو ریشه با هم فرقی نمی‌کنند.

انتخاب ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^2=1$ چنین مشکلی ندارد چون عددهای حقیقی مرتب هستند.

پاسخ مسئلهٔ ۸.

اگر $z\neq 1$ می‌دانیم $z^p=1$ پس $\left(z^i\right)^p=\left(z^p\right)^i=1^i=1$ انتظار داشتن p ریشهٔ متمایز برای معادلهٔ $z^p=1$ داریم. اگر این ریشه‌ها تکراری باشند برای $i\neq j$، $z^i=z^j$. پس $z^{i-j}=1$ اما $1\leq i-j<p$ پس اگر قرار دهیم $i-j=k$ درایم $z^k=1$ برای یک $1\leq k<p$ حال p را بر k تقسیم می‌کنم و باقی‌مانده $r<k$ به‌دست می‌آید که مثبت است. چون p عددی اول است. پس با محاسبه می‌توان دید $z^r=1$ و همین‌طور الی آخر تا وقتی بتوانیم نشان دهیم $z=1$. پس ریشه‌ها متمایزند. در حالت $p=2$ داریم $z^2=1$ و ریشه‌ها ۱ و ۱- هستند و تناقضی نیست.