مسئله حل کردن در برنامۀ ریاضی (۱)

از انتشارات انجمن ریاضی آمریکا
by: Alan Schoen Feld
ترجمۀ: میرزا جلیلی

پیشنهاداتی برای مسئله حل کردن

روش صحیحی جهت حل مســـئله وجود ندارد خیلی باید با شهامت بود تا راه یا راه‌هایی برای بررسی مسائل پیشنهاد نمود. تعداد راه‌های خوب و مؤثر برای یاد دادن تفکر ریاضی برابر با تعداد معلمین خوب است. علاوه بر این روش‌هایی که در یک کلاس به کار گرفته می‌شود نیز یک مســـئلۀ شخصی اســـت. آنچه برای یک معلم کارایی دارد شـــاید برای یک معلم دیگر قابل استفاده نباشـــد و یا برای استفاده از آن باید مورد بازنگری قرار داده شـــود. پیشـــنهادات زیر با توجه به این واقعیت‌ها تنظیم می‌شـــوند. این پیشـــنهادات کارایی خوبی در کلاس‌های مختلف داشته است. خواهش این است که این پیشنهادات را مثل پیشنهادهای یک همکار نزدیک مورد بررســـی قرار دهید. سعی کنید آن‌هایی را که به نظرتان درســـت و مناسب می‌آید آزمایش کرده سپس آن‌هـــا را طوری طراحی نمایید که به راحتی بتوانید با آن‌ها کار کنید.

الف. پیشینه و منطق اساسی

اختلاف زیادی بین راهی که ما در ریاضی به‌کار می‌بریم و راهی که دانش‌آموزان آن را می‌بینند وجود دارد- کار با ریاضی یک کار اساسی است و آن پیشروی در مراحل عمل، کشف و رسیدن به درک طبیعت خاص هدف‌ها و دستگاه‌های ریاضی است. ما ابتدا به یک مطلب ریاضی برمی‌خوریم، همان‌طور که در آن غور می‌کنیم این تصور در ما رشد پیدا می‌کند و این گمان تقویت می‌شود که در آن چیز درستی باید وجود داشته باشد. با مثال‌هایی آن را آزمانیش می‌کنیم و به جست‌وجوی مثال نقض می‌پردازیم. سعی داریم که درک کنیم که چرا آن چیز باید درست باشد. این کوشش‌ها ممکن است موفق یا ناموفق باشد. در شروع ممکن است بارها اشتباه کنیم و راه‌هـــای عوضی پیش برویـــم، کم‌حوصله و مأیوس بشـــویم و یا بازنگری‌های پیگیر و موفقی داشته باشیم تا اینکه به نتیجه برسیم. بعضی از تجربه‌ها بسیار مهیج و راضی‌کننده است چه ما در قلمرو مجهولات تجسس می کنیم و خود را در حل مسائل قوی می‌سازیم.

متأسفانه دانش‌آموزان کمتر آگاهی دارند که کار با ریاضی باید چنین باشد. تعجب‌انگیز آنکه، اغلب، دانش‌آموزان فدای حرفه‌ای بودن ما معلمین می‌شوند، مطالبی که باید به آن‌ها داده شـــود زیاد است و ما نتایج مطالعات و کشـــفیات ریاضی خود را به‌صورت مرتب شده‌ای به آن‌ها ارائه می‌دهیم، در نتیجه، آن‌ها زودتر مهارت پیدا می‌کنند اما پیدا کردن این مهارت نتایج نامیمونی نیز در برخواهد داشـــت. چه دانش‌آموزان فکر می‌کنند که همۀ ریاضیات شـــناخته شده است و باید آن‌ها را مثل گرامـــر زبان آن‌قدر تکرار کرد تا یاد گرفته شـــود. و در این یادگیری، برای آن‌ها هیچ نوع هیجان، لذت کشف و خلاقیت وجود ندارد بلکه تنها یک رضایت کوچک و ساده از انجام کار در برخواهد داشت. ما در کار با ریاضی چنان آسان برخورد می‌کنیم که وقتی مسئله‌ای برای دانش‌آموز مشـــکل است احساس ضعف می‌کند. آن‌ها هیچ نوع آگاهی ندارند که خود ما نیز برای درک مطالب نو در ریاضی باید تقلّا و کوشش فراوان کنیم.

دیگر آنکه آن‌ها هیچ‌گونه اطلاعی ندارند که برای درک یک مطلب ریاضی باید با طرح سؤال و جواب مناسب آن را خوب حلاجی کرد و این کار را تا آنجا ادامه داد که مطلب روشن و مفهوم شود. درک ریاضی با دوباره تولید و تکرارکردن مطالبی که قبلاً فراگرفته شده است، حاصل نمی‌شود.

در اینجا من یک نکته به نظرم می‌رسد و آن اینکه ما می‌توانیم و وظیفه داریم که دانش‌آموزان را با روش یادگیری ریاضی آن‌طور که باید باشد آشنا سازیم. من اعتقاد دارم که معلمین می‌توانند چنین کاری را با موفقیت انجام دهند.

به‌طور منطقی، در اوایل آموزش ریاضی باید روش مسئله حل‌کردن را به دانش‌آموزان یاد داد. جای تأسف است که دانش‌آموزان به‌طور طبیعی فکر نمی‌کنند که در حل بعضی مسائل باید شکل کشیده شود تا مسئله روشن شود و یا کشیدن شکل ممکن است به حل مسئله کمک نماید و باز نمی‌دانند که باید درستی احکام را با حالات خاص آزمایش کنند و ناراحت‌کننده‌تر آنکه به ندرت تشخیص می‌دهند که آن‌ها نیز قادرند فکر کنند و یا اینکه می‌توانند توانایی حل مسئله را با تجربه حاصل از شکست و موفقیت‌های قبلی، در خود تقویت نمایند. اگرچه ممکن است احمقانه به‌نظر برسد ولی شاید ارزش مطرح کردن داشته باشد که اصولاً ما از دانش‌آموزان خود می‌خواهیم از ریاضیات چه چیزی کسب نمایند؟

تقریباً آخرین برخورد، بیشتر دانش‌آموزان با ریاضی در محاسبات مشتق و انتگرال است. من حقیقتاً ارزش زیادی در کوشش برای محاسبهٔ سطح حادث از دوران یک منحنی نمی‌بینم این نیست که این مطلب ذاتاً ارزش نداشته باشد تصادفاً هم ریاضی است و هم زیبا. اما به‌طور کلی دانش‌آموزان هیچ‌کدام از این‌ها را نمی‌بینند. در داد و ستد کنجکاوانهٔ ریاضی، کار محاسبهٔ یک سطح می‌تواند یک کشف باشد و به‌عنوان یک کاربرد ماهرانه انتگرال ریمان (محاسبهٔ سطح زیرمنحنی) مورد تحسین قرار گیرد و این نکته‌ای است که اغلب دانش‌آموزان متوجه آن نیستند و این محاسبات را یک کار شاق، دنبالهٔ انتگرال‌گیری می‌دانند.

به‌نظر می‌رسد که خدمت واقعی که ما می‌توانیم به دانش‌آموزان خود ارائه دهیم، هم به آن‌هایی که رشتهٔ ریاضی هستند و هم به غیر ریاضی‌ها، این است که آن‌ها را مجهز به مهارت تفکر و اندیشه کنیم تا بتوانند بعد از امتحانات و مدرسه آن را به‌کار ببرند. مطمئناً ریاضی می‌تواند یک وسیلهٔ بسیار قوی برای این‌کار باشد غیر از این راه بهتری برای آموزش اینکه «درک» یعنی چه وجود ندارد. تفکر ریاضی هم دقیق و هم منطقی است: تکنیک‌هایی که ما در حل مسائل به کار می‌بریم به‌طور وسیعی در این زمینه قابل استفاده هستند اما دانش‌آموزان در این مایه‌ها نیستند که چنین برداشتی از «درک» به دست آورند و یا از آن روش‌ها استفاده ببرند مگر آنکه به آن‌ها تصریح شود، بعید به‌نظر می‌رسد که آن‌ها بعد از یادگیری آن‌تکنیک‌ها تفکر ریاضی خود را بالا ببرند مگر آنکه ما در یادگیری آن‌ها نقش کاتالیزور داشته باشیم کمک به یافتن راه‌حل کنیم نه حل نماییم. من معتقدم که معلمین می‌توانند چنین نقشی داشته باشند. آنچه از این بحث نتیجه می‌شود نکاتی است که من در حل مسائل توجه می‌کنم و به‌کار می‌برم و دلایلی است که چرا چنین می‌کنیم.

ایده‌هایی در مسئله حل کردن مسائل قلب ریاضیات هستند.

هالموس

معلم در نقش راهنما

داستانی راجع به یکی از اساتید معروف ریاضی، که ارائهٔ برهان او چنان سریع بود که اغلب دانش‌آموزان را در ابهام رها می‌کرد، نقل می‌کنند. روزی در آغاز کلاس دانش‌آموزی دست بلند کرد و از استاد خواست که یکی از مسائل تکلیف شب را حل کند. استاد صورت مسئله را خواند و چند دقیقه‌ای فکر کرد و گفت بله جواب $\frac{\pi}{۴}$ است و روی تخته‌سیاه نوشت $\frac{\pi}{۴}$ دانش‌آموز که زیرک بود در صدد کسب اطلاعات بیشتر برآمده و گفت: ببخشید استاد راه دیگری وجود ندارد؟ معلم پاسخ داد این یک سؤال جالب است، او برای یک لحظه در فکر عمیقی فرو رفت سپس گفت؛ این یک مسئلهٔ ساده و سرراست است، البته محاسبات آن قدری ناجور است و به تخته برگشت و یک $\frac{\pi}{۴}$ خیلی تمیز دیگر کنار $\frac{\pi}{۴}$ قبلی نوشت و سپس از کلاس خواست اگر سؤال دیگری دارند مطرح کنند؟ بخشی از مشکلات آموزش مهارت‌های تفکر ریاضی این است که خود ما به مطالب تسلط کامل داریم (مخصوصاً وقتی ریاضیات مقدماتی را می‌آموزیم) طوری که احتیاج به فکر کردن نداریم فقط به‌طور اتوماتیک عمل می‌کنیم. ما راه صحیح برخورد با بیشتر مسائلی که در کلاس مطرح می‌شود می‌دانیم اما دانش‌آموزان نمی‌دانند

و نشـــان دادن راه درســـت به تنهایی کمک نمی‌کند که آن‌ها تمام برخوردهای نادرســـت خود را با مسئله آزمایش نکنند. از این‌جهت ما باید بعضی از تفکرهای ریاضی خود را از پشت پرده‌بیرون بیندازیم طوری که دانش‌آموزان بتوانند آن‌ها را دنبال کنند. برای این کار سه راه که با هم در ارتباط مستقیم هستند وجود دارد.

۱. رفتن ؟؟؟؟ جریان عمل بر مبنای قدم‌به‌قدم (حتی وقتی ما جواب را می‌دانیم).

مسئلهٔ زیر را به‌عنوان مثال مورد بررسی قرار دهید:

فرض کنید $p(x)$ و $Q(x)$ دو چند جمله‌ای با ضرایب با ترتیب معکوس باشند.

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_n$$
$$Q(x) = a_n x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{x-1} x^2 + a_{n-1} x + a_n$$

در حالی که $a_n \neq 0 \neq a_0$. چه رابطه‌ای بین ریشه‌های این دو معادله وجـــود دارد؟ جواب خود را اثبات کنید. البته این مسئله یک راه‌حل جالب دارد که در صفحات بعد خواهد آمد. اما من فکـــر می‌کنم کاری به ترتیب زیر حتی اگر ساختگی به‌نظر آید، در درازمدت می‌تواند مفید باشد. شـــما وقتی با یک چنین مسئله‌ای مواجه می‌شـــوید چه‌کار می‌کنید؟ می‌دانیم یک روش کلی برای به دســـت آوردن ریشـــه‌های یک چند جمله‌ای وجود ندارد همچنین روشـــی برای مقایسهٔ ریشه‌های آن‌ها نیز موجود نیست بهترین کاری که در این شرایط می‌توان انجام داد جســـت‌وجو برای یافتن چند مثال ساده اســـت. امیدوارم که من به جای بررسی مستقیم دو معادله بتوانم تصوری شـــهودی از آن‌ها ایجاد کنم. شاید هم بایستی یک زوج سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم را در نظر بگیرم و آن‌ها را حل کنم ببینم چه اتفاقی می‌افتد؟

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

$$Q(x) = x^2 + bx + a$$

که ریشه‌ها به ترتیب عبارت‌اند از:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}, \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ظاهراً چیزی قابل بررسی در جواب‌ها مشاهده نمی‌شود که بتوان مسئله را جلو برد و یا تعمیم داد، اگرچه صورت دو کسر یکی است. من در اینجا یکی دو دقیقه مکث می‌کنم و بعد چیز دیگری را مورد آزمایش و بررسی قرار می‌دهم خوب، اجازه بدهید من دو جمله‌ای خطی را مورد مطالعه قرار بدهم.

$$p(x) = ax + b$$

$$Q(x) = bx + a$$

که ریشه‌ها به ترتیب $\frac{-b}{a}$ و $-\frac{a}{b}$ بوده و عکس یکدیگرند ولی این هم زیاد جالب نیست. من هنوز واقعاً برداشت دقیقی ندارم که در مورد ریشه‌ها چه اتفاقی می‌افتد لذا کار را با انجام یکی دو مثال ساده‌تر ادامه داده به دنبال یک الگو خواهم گشت. یک کار جالب، ممکن است چندجمله‌ای‌هایی را امتحان کنم که قابل تجزیه باشند، بدین‌طریق آسان‌تر می‌توان ریشه‌ها را پیگیری کرد بسیار خوب، چیز ساده‌ای مثل $(x+2)(x+3)$ چطور است؟

$$P(x) = x^2 + 5x + 6$$

که ریشه‌های آن ۲- و ۳- است.

$$Q(x) = 6x^2 + 5x + 1 = (2x+1)(3x+1)$$

که ریشه‌های آن $-\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{3}$ است. این‌ها نیز معکوس هم هستند و این نسبتاً جالب است راجع به معادلات زیر چطور؟

$$P(x) = (3x+5)(2x-7) = 6x^2 - 11x - 35$$

که ریشه‌های آن $\frac{-5}{3}$ و $\frac{7}{2}$ است.

$$Q(x) = -35x^2 - 11x + 6 = -(35x^2 + 11x - 6)$$
$$= -(7x-2)(5x+2)$$

که ریشه‌های آن $\frac{-3}{5}$ و $\frac{2}{7}$ است.

اینجا نیز ریشه‌ها عکس یکدیگرند. این دیگر نمی‌تواند تصادفی باشد. باز هم بهتر است ادامه دهیم و در عوامل تجزیه دقت کنیم آیا ترتیب ضرایب آن‌ها نیز معکوس یکدیگرند؟ راجع به معادلات زیر چطور؟

$$P(x) = (ax+b)(cx+d) = acx^2 + (bc+ad)x + bd$$

$$Q(x) = bdx^2 + (ad+bc)x + ac = (bx+a)(dx+c)$$

بله، آن هم درســـت اســـت. من فکـــر می‌کنم که این قابل‌تعمیم اســـت. در اینجا برای ادامهٔ کار دو راه وجود دارد به‌طور کلی فرض کنیم ریشـــه‌های چندجمله‌ای

p(x) معکوس ریشه‌های Q(x) هستند (اگر هنوز هم مطمئن نیستیم باید با کثیرالجمله‌ای درجهٔ ۳ که قابل تجزیه باشد کار را ادامه دهیم). در این مرحله سعی من این است که بحث بالا را تعمیم بدهم. اما همچنین ساده و سر راست نمی‌باشد. اولاً هر چندجمله‌ای قابل تجزیه نیست، ثانیاً پیگیری کردن ضرایب نیز کار آسانی نیست. شاید اکنون ارزش مکث کردن و مجدداً حدس را از ابتدا آزمایش کردن داشته باشد. فرض کنیم $p(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای با ضرایب با ترتیب معکوس باشند ثابت کنید ریشه‌های $p(x)$ و $Q(x)$ عکس یکدیگرند، خوب اجازه بدهید دقت کنیم که مسئله چه می‌خواهد اینکه عددی مثل r ریشه $p(x)$ است به چه معنا می‌باشد؟ $p(r)=0$ به چه معناست؟ آیا اینکه عکس r باید ریشهٔ $Q(x)$ باشد به معنای $Q(\frac{1}{r})=0$ است؟ عجب؟
برگردیم به معادلهٔ درجهٔ ۲ و ببینیم در مورد آن چه اتفاقی می‌افتد.

فرض کنیم:

$$p(x) = ax^2 + bx + c = 0$$
$$Q(x) = cx^2 + bx + a = 0$$
$$p(r) = ar^2 + br + c = 0$$

اگر r یک ریشهٔ $p(x)$ باشد:

حال ببینیم $Q(\frac{1}{r})$ برابر چیست؟

$$Q(\frac{1}{r}) = c(\frac{1}{r})^2 + b(\frac{1}{r}) + a = 0$$

$$= \frac{c + br + ar^2}{r^2} = \frac{p(r)}{r^2} = 0$$

لذا آن شدنی است
حالا این بحث قابل تعمیم خواهد بود و من می‌توانم یک قضیه و برهان را بیان کنم.

قضیه: اگر $p(x)$ و $Q(x)$ دو چند جمله‌ای با ضرایب با ترتیب معکوس باشند ریشه‌های $Q(x)$ عکس ریشه‌های $p(x)$ خواهد بود.

برهان: فرض کنیم r یک ریشهٔ $p(x)$ باشد به قسمی که $p(r)=0$ با توجه به اینکه $r \neq 0$ و $a \neq 0$ علاوه بر این:

$$Q(\frac{1}{r}) = a_n (\frac{1}{r})^n + a_1 (\frac{1}{r})^{n-1} + \ldots + a_{n-2} (\frac{1}{r}) + a_n$$
$$= (\frac{1}{r_n})(a_n + a_1 r + a_2 r^2 + \ldots + a_{n-1} r^{n-2} +$$
$$a_{n-1} r^{n-1} + a_n r^n) = (\frac{1}{r^n})(p(r)) = 0$$

بنابراین $\frac{1}{r}$ یک ریشهٔ $Q(x)$ است. بر عکس اگر s یک ریشهٔ $Q(x)$ باشد متوجه می‌شویم که $p(\frac{1}{s}) = 0$، بسیار خوب، حال موقع کالبدشکافی است این مسئله، مثل هر بحث کلاسیک ریاضی، به‌طور روشنی نتایج فکری مراحل حل را (فرایند) ارائه می‌دهد. اما الهام راه‌حل از کجا آمد؟ اگر به مسیری که بحث در آن تکامل پیدا کرد برگردیم دو راه نفوذی اساسی را مشاهده خواهیم کرد اولین آن‌ها به درک مسئله و برداشتی که از آن به دست آورده می‌شود ارتباط پیدا می‌کند، صورت مسئله، در بیان کلی، کمک بسیار اندکی به یافتن راه‌حل می‌کند. آنچه ما انجام دادیم این بود که به منظور یافتن یک الگو حالات خاص را مورد آزمایش قرار دادیم، خاصه اینکه کوشش اولیه در حالات خاص در مورد معادله درجهٔ دوم بینش زیادی به‌دست نداد و ما مجبور شدیم به حالات خاص‌تری متوسل شویم لذا کار ما عبارت بود: جست‌وجو برای یافتن یک‌سری مثال‌های سر راست که محاسبهٔ ریشه‌های آن‌ها ساده باشد. بدین منظور که شاید به‌طور تصادفی الگویی ظاهر گردد که قابل تعمیم باشد.

در اینجا ما در جست‌وجوی یافتن ریشه‌های چندجمله‌ای بودیم و برای این منظور آن‌هایی را که به سادگی قابل تجزیه بودند انتخاب کردیم. البته موقعیت‌های مختلف ما را به انتخاب‌های مختلف هدایت خواهد کرد. اما این استراتژی به ما اجازهٔ حدس زدن می‌دهد.

دومین راه نفوذی، بعد از حدس زدن پدیدار گشت. اگرچه ما تقریباً می‌دانستیم که چرا باید مطلب درست باشد. اما بحث قدری ناجور به نظر می‌آمد. لذا مکث کردیم تا برای یک لحظه دوباره مطلب را بررسی کنیم. آنچه ما در آن توقف انجام دادیم مهم است و غالباً از نظرها دور می‌ماند.

ما به عقب و به مفروضات مسئله برگشته آن‌ها را پیگیری کرده و برای یافتن یک ارتباط ملموس بین آن‌ها و نتایجی که می‌خواستیم تلاش کردیم.

سؤالاتی از قبیل r ریشهٔ $p(x)$ است یعنی چه؟معکوس

r چه خواهد شـــد؟ مفهوم $(\frac{1}{r})$ ریشـــهٔ $Q(x)$ اســـت چیســـت؟ هر کدام به تنهایی خیلی جزئی و بی‌ارزش به‌نظر می‌آید امـــا این‌ها توجه ما را درســـت به‌همان چیزهایی که ما را به یافتن راه‌حل کشانید، جلب کرد اکنون ممکن است به‌نظر آید که مطالب یکی دو صفحه آخر، شـــبیه «چوب‌زدن به مرده» باشد. ریاضی‌دان‌ها مقدمتاً علاقه‌مند به نتیجه هســـتند که در دو ســـطر حاصل می‌شود ولی فکر مراحل حل (فرایند) که به‌وجود آورندهٔ آن برهان اســـت برای آن‌ها طبیعت دوم مسئله است تجربهٔ من این است که این فکر فرایند حل کاملاً برای دانش‌آموزان بیگانه اســـت این فرایند دو چیز را روشن می‌سازد. یکی اینکه مرموزبودن ریاضی را از بین می‌برد و آن را بیشتر عادی و قابل دسترس می‌سازد. به عبارت دیگر، وقتی دانش‌آموزان ببینند که ایدهٔ راه‌حل مسئله از کجا می‌آید دیگر حل یک مسئله برای آنان، مثل بیرون آوردن خرگوش از زیر کلاه نخواهد بود.

دوم اینکه اســـتراتژی که در بحث بالا مورد دقت قرار گرفت قابل تعمیم می‌باشد و در جاهای دیگر نیز ممکن است مفید واقع شود. یادگیری اینکه چگونه آن‌ها به کار گرفته شـــوند به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا در حل مسئله توانا شوند.

هدف مقدماتی من از طرح بحث بالا این است که «ارائهٔ درس» هنوز یک طرفه است. معلم باز توضیح می‌دهد که دانش‌آموز چگونه باید با مســـئله برخورد کند. اگر مســـئله حل‌کردن یک تجربهٔ یادگیری شخصی است پـــس دانش‌آموز نیز باید در آن درگیر گردد و آن به راه دومی منتهی می‌شود که نقش و خدمت معلم به‌عنوان راهنماست.

۲. حل مسئله با کمک دانش‌آموزان با بهره‌گیری از ایده‌های آن‌ها

در اینجا مراد این است که کلاس، مسائل را با همکاری هم حـــل کنند و معلـــم تنها نقـــش هماهنگ‌کننده نظرات و ایده‌ها را داشـــته باشـــد. بدین معنا که بدون «خودمحوربودن» سؤالات مهمی را مطرح سازد و بحث را در مســـیر صحیح خود نگه دارد. معلم نباید راه‌حل مسائل را ارائه دهد، بلکه در عوض باید به دانش‌آموزان کمـــک کند تا آن‌ها به بهترین وجـــه از اطلاعات خود استفاده نموده و در مسائل نفوذ کنند.

معلم ممکن است مســـائلی را به‌عنوان تکلیف شب به دانش‌آموزان بدهـــد و در کلاس یکی را به‌طور مفصل مورد حل و بحث قرار دهد.

در شروع کار، همان‌طور که برای یافتن راه‌حل مسئله تلاش و جست‌وجو می‌کنیم معمولاً سؤالات زیر مطرح می‌گردد.

آیا کســـی راه‌حلی پیشنهاد می‌کند؟ پیشنهادات دیگر چطور؟ چه چیز موجب شد که شما چنین فکر کنید؟ چه چیز باعث می‌شـــود که شما فکر کنید که این یک عمل منطقی اســـت که باید انجام شود؟ بسیار خوب اکنون ما پیشنهاداتی داریم که چیزهای درستی نیز در آن‌ها وجود دارد. با کدام‌یک باید شروع کنیم؟ چه چیز باعث می‌شود که شـــما فکر کنید که این یک راه‌حل بهتری است؟ آیا جواب معقول به‌نظر می‌رسد؟ آیا من باید آن را امتحان کنم؟ ؟؟؟؟؟

پنج دقیقه است که این بحث‌ها را ادامه می‌دهیم و هنوز به جایی نرســـیده‌ایم آیا شما واقعاً مطمئن هستید که منظور مسئله را خوب درک کرده‌ایم (صورت مسئله را خوب فهمیده‌ایم؟) چه چیزی را باید مورد بررسی قرار دهیم آیا چیزی از بحث‌های اکتشـــافی ما جالب بوده است؟ و غیره

این گوشـــه‌ای از گفت‌وگوهای باکلاس را به ما نشـــان می‌دهد. امید اســـت که با پشـــتکار معلمان این‌گونه پرســـش‌ها در نهایت، طبیعت ثانوی دانش‌آموزان شود و به طرح‌کردن آن‌ها عادت کنند. اگر پرسش‌ها خوب ارائه و هدایت شـــود معلم در وسط سال در مرحله‌ای از پرســـش‌ها می‌تواند از دانش‌آموزان خود سؤال کند «خوب حالا من قصد دارم چه سؤالی را مطرح کنم؟» و معمولاً در پایان سال آن‌ها باید بتوانند به‌خوبی به معلم پاســـخ دهند و یا در مرحله‌ای از خودشان سؤال کنند «حالا من باید چه سؤالی را برای معلم مطرح بکنم؟»

۳. کار معلم در جا- حل مسائل نو

یاد دادن اینکه چگونه مســـئله حل کنیم کار بســـیار مشکلی اســـت، زیرا قانون معینی در این زمینه وجود ندارد. درســـت وقتی که دانش‌آموزان فکر می‌کنند که دیگر همه‌چیز را یاد گرفته‌اند طرح یک مسئلهٔ جدید آن‌ها را به دردســـر می‌اندازد. برای اینکه دانش‌آموزان نفسی تازه کنند و مرا نیز در وضع مشابهی ببینند (که من هم ممکن است به دردســـر بیفتم) به آن‌ها اجازه می‌دهم به من مســـئله‌ای برای حل بدهند درســـت همان‌طـــور که من مســـئله برای حل‌کـــردن به آن‌ها می‌دهم. آیا کسی مسئله‌ای برای من دارد؟

اگر آن‌ها مســـئله‌ای نو برای من داشـــتند من آن را با

صدای بلند روی تخته‌سیاه حل می‌کنم و بدین ترتیب آن‌ها را تشویق می‌کنم که ملاحظه کنند که من چگونه استراتژی حل را، بدون شـــکل تکراری و تمرینی آن، که طبیعت مرموز حل مســـئله را از بین می‌برد، به‌کار می‌برم.

ب. معلم در نقش مربی ورزش

شـــنیده‌ام که بعضی از همکارانم، بـــرای دانش‌آموزان خود، ریاضیات را به مثابه یک «ورزش درگیر» توصیف کرده‌اند منظور آن‌ها این اســـت که فرد باید در تجربهٔ یادگیری ریاضی درگیر شود. کسی از کنار گود نمی‌تواند فریاد بارک‌الله را بلند کند. یک تشابه دیگر در این زمینه وجود دارد، معلم که نقش انتقال‌دهنده علم را دارد در ضمن نقش شبیه مربی ورزش را هم ایفا می‌کند. البته از بسیاری جهات، مهارت‌های قهرمانی خیلی پیشرفته‌تر از مهارت‌های هوشی و فکری است. تصور ویژگی‌های یک «مربی هوشی» ارزش کشف‌کردن را دارد.

آموزش یک فن ســـاده به یک ورزشکار را، مثلاً پرتاب یک توپ در بســـکتبال و یا زدن سر و در تنیس را در نظر بگیرید. آن مربی که می‌گوید «تماشـــا کن که من چطور عمل می‌کنم و ســـپس بـــرو همین‌طور تمرین بکن» به‌عنوان یک مربی خوب قلمداد نمی‌شود مسلماً چنیـــن مربی برای مدت مدیدی شـــغل خود را حفظ نخواهـــد کرد. اما یک مربی خـــوب مراحل عمل را که توضیح می‌دهد به نمایش می‌گذارد و سپس این مراحل را به مرحله‌های جزئی و نکات بســـیار کوچک تقسیم می‌کند و ورزشـــکار معمولاً از میـــان همهٔ این مراحل جزئی می‌گذرد- تا اینجـــا روش مثل روش یک معلم ریاضی اســـت- همچنین ورزشکار برای زمانی به حال خود واگذاشـــته می‌شود که خود تمرین کند اما بعد از مدتی، مربی برمی‌گردد و جزئیات حرکات او را تصحیح می‌کند مثلاً می‌گوید «شانه‌های شما خیلی پایین است، شـــما در موقع پرتاب به اندازهٔ کافی بلند نمی‌شوید» و غیره.

معمول نیست که مربی و ورزشکار با کمک نوار ویدئو حرکات آهستهٔ ورزشکار را ببینند و بررسی کنند تنها کار موردنظر این است: مراحل جزئی را از هم جدا کنید و با تمرین آن‌ها را پیشرفت دهید.

این قســـمت از آمـــوزش مربی به آنچه کـــه می‌تواند «مهارت‌های اساسی» یا «فرایند استاندارد» نامیده شود مربوط می‌شود. اما معمولاً مربی‌های ورزش خیلی فراتر از این قدم می‌گذارند. در حقیقت بیشـــتر توجه آن‌ها صرف این می‌شود که ورزشکار چگونه در موقع عمل و نمایش تصمیمات هوشمندانه بگیرد معمولاً، بیشترین گله و شـــکایت که از طرف مربی بعد از اشـــتباه یک ورزشکار شنیده می‌شـــود این است که «آن یک بازی بسیار سطح پایین و انجام آن مزخرف بود».

معادل هوشی آن را در حل مسائل معمولی مورد بررسی قرار دهیـــد. در یک امتحان از تکنیک‌های انتگرال، ۴۴ نفـــر از ۱۷۸ نفر دانش‌آموز در محاســـبهٔ $\int \frac{xdx}{x^2-9}$ از تجزیهٔ کســـرها استفاده کرده‌اند و ۱۷ نفر تغییر متغیر $x = 3\sin\theta$ داده‌اند «اســـتفاده از هر یک از این راه‌ها بی‌معنی و وقت‌گیر است» با کمی دقت می‌توان فهمید که مسئله با تغییر متغیر ساده و مقدماتی $\mu = x^2 - 9$ حل می‌شود.

یک توصیهٔ استاندارد: عملاً دامنهٔ عملیات خود را کوتاه کنید و هیچ راه‌حل مشکل و پرکاری را ادامه ندهید مگر آنکه مطمئن شـــوید که راه‌حل ساده‌تری برای مسئله وجود ندارد.

این از نوع توصیه‌هایی اســـت که یک مربی ورزش نیز ممکن است انجام دهد.

به‌نظر می‌رسد که توجه به این مطلب خیلی باارزش‌تر از این باشد که به دانش‌آموز راه‌حل مسئله داده شود.

ج: بیـــش از یک راه برای پوســـت کندن گربه ریاضی وجود دارد.

از آنجا که بیشتر مسائلی را که در کلاس حل می‌کنیم تمرین اســـت ما معمولاً بـــه یک راه‌حل، که شـــبیه تکنیک‌های آموزش داده شده است، بسنده می‌کنیم و وقتی آن مسئله حل شد به سراغ مسئلهٔ دیگر می‌رویم و کار حل تمرین همین‌جا تمام می‌شود.

امـــا بعد از حل تمرینات دانش‌آموزان فکر می‌کنند که آن‌ها راه‌حل صحیح مسئله را یاد گرفته‌اند و برای حل هر مسئله تنها یک راه صحیح وجود دارد و این برداشت درست نیست. مثلاً، به راه‌حل‌های زیادی که برای اثبات قضیه فیثاغورث وجود دارد توجه کنید، هر کدام از ما چقدر خوشحال خواهیم شد اگر موفق شویم راه جدید بر این راه‌ها بیفزاییم.

قسمتی از لذت ریاضی شامل کشف چیزهای نو است و قسمتی نیز کشف ارتباط بین حقایقی است که اکنون وجود دارد و همچنین یافتن راه‌های جدید برای قضایا و مسائلی است که اکنون راه‌حلی دارند. وجود مقالات فراوان در مجلات ریاضی تحت‌عنوان «یک برهان جدید

برای فلان قضیه» این مطلب را به اندازهٔ کافی روشـــن می‌ســـازد. دیگر آنکه اطلاع جزئی از یک چیز ممکن است گمراه‌کننده باشند.

درک یک حقیقت ریاضی یا دستگاه ریاضی به معنای درک تمام پیوندهای ممکن و موجود است.

درک من از مجموع گوس $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

تمامی غنای آن است، زیرا من به آن‌چنین می‌اندیشم.

۱. به‌عنـــوان نتیجه $\frac{n}{2}$ زوج‌هایی کـــه مجموع هر کدام $n+1$ است.

$$1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)+n$$

۲. از نظر تصویری، نصف مســـاحت شکل ارائه شده در زیر یعنی نصف $n(n+1)$ می‌باشد.

جای شکل

که از نظر محاســـبات حسابی می‌توان آن را به صورت زیر ارائه داد:

$$s = 1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)+n$$

$$s = n+(n-1)+(n-2)+\ldots 3+2+1$$

$$2s = \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)+(n+1)}_{\text{به تعداد } n \text{ مرتبه}}$$

۳. به عنوان یک گزاره که درســـتی آن با روش استقراء قابل بیان است.

۴. به‌عنوان یک حالت خاص از یک معادله دیفرانسیل و غیره [یا محاسبات تعداد اقطار یک n ضلعی محدب $\frac{n(n-3)}{2}$ را می‌توان از طریق هندسی، آنالیز ترکیبی $\left(\frac{n}{2}\right)-n$ و استقراء مورد بحث قرار داد].

اگر من تنها یکی از این راه‌ها را یاد گرفته باشم ممکن اســـت به نوعی مغبون باشم. اما این مغبون بودن تنها قســـمتی از داستان اســـت. هر یک از این راه‌هایی که راجع به مسئلهٔ فکری شود یک بینش خاصی از تفکر را مجسم می‌ســـازد که به‌صورت‌های مختلف می‌تواند تعمیم پیدا کند.

وقتی من با یک مسئلهٔ جدید روبه‌رو می شوم هر یک از این راه‌ها ممکن است کلیدی برای راه حل آن مسئله باشد.

همچنین اطلاع از اینکه مســـائل می‌توانند با راه‌های مختلف حل شوند در روشی که دانش‌آموزان با مسائل برخورد می‌کنند تأثیر خواهد گذاشت. دانش‌آموزی که فکر می‌کند که تنها یک «راه درست» برای حل مسئله وجود دارد ممکن است روی مسئلهٔ خاصی مدتی فکر کند و اگر توفیقی حاصل نکرد آن را رها کند و منتظر بمانـــد تا در کلاس تکنیک حل به او ارائه شـــود و این الگویی است که بیشـــتر دانش‌آموزان ما در مدرسه به کار می‌گیرند. شاگردی که فکر می‌کند جا برای کشف ریاضی وجود دارد و از آن استفاده می‌کند. احتمال زیاد دارد که با مســـئلهٔ بیشتر درگیر شود، پیوندهایی برای خودش پیدا کند و شاید به یک راه‌حل غیرمنتظرانه‌ای دستیابی پیدا نماید.

مسائل نمونه و بحث‌های کلاسی

نوع مســـائلی که مـــا در کلاس مـــورد بحث قرار می‌دهیـــم و تجاربی که از آن‌هـــا می‌آموزیم در طول ســـال تغییر می‌کند مقایسه تشابه یادگیری یک بازی ورزشی با یک مسئله فکری مراحل پیشرفت یادگیری را نشان می‌دهد. در اوایل سال که دانش‌آموزان مهارت کمتری در تکنیک‌های حل مسئله دارند در آن دسته از تکنیک‌های اساسی، که بعداً در طول دوره به‌کار گرفته می‌شوند آموزش می‌بینند و تمرین می‌کنند (جست‌وجو برای استدلال‌های استقرایی، بررسی و آزمایش حالات خاص، اســـتفاده از مسائل ســـاده‌تر در رابطه با مسئله اصلی، تخصیص و تعمیم) درست به همان طریقی که مثلاً یک مبتـــدی در تنیس آموزش می‌بیند و تمرین می‌کند که چگونه سرو بزند و یا چگونه با جلو و پشت دست آبشار بزند. زمانی که مهارت‌های اساسی خوب فرا گرفته شد می‌توان از آن‌ها در شرایط مختلفی که پیش می‌آید به‌طور گسترده و متنوعی استفاده کرد. مسائلی که مـــا کار می‌کنیم به‌تدریج مشـــکل‌تر و وقت‌گیرتر می‌شود. در حقیقت دانش‌آموزان دیگر تنها اصول حل مســـئله را نمی‌بینند بلکه یک آمـــوزش خوب ریاضی محض به آن‌ها داده می‌شـــود مطلبی که اکنون رو در روی دانش‌آموزان قـــرار می‌گیرد انتخاب تکنیک‌های مناسب برای برخورد با مسائل و استفاده مفید و مؤثر از آن‌ها می‌باشد. بحث‌های کلاسی نیز به‌تدریج، همان‌طور که پیش می‌رویم، تغییر می‌کنند و تأکید بیشتر روی طرح‌ریـــزی راه‌حل‌ها و ارزشـــیابی آن‌ها قرار می‌گیرد. بعضی از مسائل نمونه کلاس در زیر مطرح شده است.

مسائلی که نکته آموزند

اغلب برای آنکه من اطمینان حاصل کنم که نکته خاصی به‌طور بارزی حتماً به دانش‌آموزان انتقال پیدا خواهد کرد از یک سری مسائل معین که در اختیار دارم استفاده می‌کنم.

این مسائل به نظر و تجربه من به‌طور یقین عکس‌العمل‌های مناسب و خاصی را در دانش‌آموزان ایجاد می‌نماید و استفاده درست و منطقی از آن‌ها می‌تواند کاملاً مفید و مؤثر واقع شود.

مثلاً این مسئله‌ها حائز اهمیت است که در شروع سال تحصیلی که هنوز وضع کلاس نامرتب و غیرطبیعی است و باید جهت داده شود به دانش‌آموزان فهماند و آن‌ها را متقاعد کرد که شما واقعاً چیزی را برای یاددادن به آن‌ها دارید. در طول سال‌های تحصیلی بچه‌ها، شاید شما اولین معلم باشید که توجه خاص به مراحل راه‌حل مسئله دارید. دانش‌آموزان تا این مرحله از تحصیل خود، بدون آنکه نگرانی‌های خاصی داشته باشند کار خود را خوب انجام داده‌اند و اغلب سؤال می‌کنند که چرا حالا ناگهان ما باید این‌طور در حل مسائل غور و کنکاش کنیم. مخصوصاً وقتی مسائل مقدماتی مطرح است آن‌ها در وضع خاصی قرار می‌گیرند که اغلب احساس ناراحتی می‌کنند.

برای جلوگیری از بروز این احساس، دسته مسائل من برای چند روز اول کلاس معمولاً شامل بعضی مسائل به‌صورت زیر است:

۱. مجموع دنبالهٔ زیر را تعیین کنید:

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}$$

برای چه مقادیری از a دستگاه معادلات زیر:

$$\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ (x-a)^2+y^2=1 \end{cases}$$

دارای ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵ جواب است؟

۳. مطلوبست محاسبه:

$$\sqrt{\underbrace{(111\dots1)}_{\text{۱۰۰ تا یک}}\underbrace{(1000\dots05)}_{\text{۹۹ تا صفر}}}$$

۴. اگر مقادیر a، b، c، d بین ۰ و ۱ باشد ثابت کنید:

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)\geq 1-a-b-c-d$$

۵. چه تعداد زیرمجموعه زوج عضوی (۲ عضوی، ۴ عضوی، ...) در مجموعه‌ای که دارای ۸۷ عضو است وجود دارد؟ برای مجموعه n عضوی چه حدس می‌زنید؟

۶. چه اعدادی به شکل $\underbrace{aaaa...aaa}_{n\text{ مرتبه}}$ مربع کامل هستند

۷. یک عدد سه‌رقمی را در نظر بگیرید. مثلاً ۱۲۳ یک عدد شش‌رقمی با نوشتن دو مرتبه تکرار این عدد بنویسید، ۱۲۳۱۲۳ آیا این عدد بر ۷ بخش‌پذیر است؟ بر ۱۱ چطور؟ مانده این عدد بر ۱۳ چیست؟ آیا می‌توان قانونی در این زمینه بیان کرد؟

۸. در حالت کلی فرمولی برای چندجمله‌ای درجه $n+1$ پیدا کنید که از نقاط زیر بگذرد (n نقطه)

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)$

۹. مثلثی را با در دست‌داشتن زاویه A، ضلع a و ارتفاع وارد بر ضلع a رسم کنید.

۱۰. مثلثی را با در دست‌داشتن دو ضلع a و b و طول میانه وارد بر ضلع سوم رسم کنید.

۱۱. مثلث زیر را در نظر بگیرید. ثابت کنید مربعی قابل محاط‌شدن در این مثلث وجود دارد یعنی نشان دهید که مربعی وجود دارد که چهار رأس آن روی اضلاع مثلث است (دو رأس روی یک ضلع).

جای تصویر

تجربهٔ من این است که دانش‌آموزان معمولاً بیست دقیقه روی هر یک از این مسائل، بدون اخذ نتیجه، وقت صرف می‌کنند. اگر آن‌ها موفق به پیداکردن راه‌حل هم بشوند. این راه‌حل اغلب اشتباه یا آبکی است مثلاً ما تشخیص می‌دهیم که مسئله ۱ همان دنبالهٔ معروف ادغام است که در آن جملات مجاور وقتی که هر کدام به‌صورت زیر بیان شود.

$$\frac{1}{i(i+1)}=\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}$$

حذف خواهند شد. دانش‌آموزانی که با این دنباله برخورد نکرده باشند. احتمال ضعیف دارد که قادر به حل مسئله باشند. اغلب دانش‌آموزان اقرار کرده‌اند که به نظر می‌آید که حل آن مثل خرگوش از زیر کلاه بیرون‌آوردن است و آن‌ها هرگز خود قادر به حل آن نبوده‌اند.

در مسئلهٔ ۲ دانش‌آموزان فوری به راه‌حل جبری

رو می‌آورند. پی‌گیـــری راه‌حل‌های مختلف برای یک مسئله نیز برای آن‌ها خیلی مشکل است و اگر از میان دانش‌آموزان کســـانی هم این کار را انجام بدهند عدهٔ آن‌ها بسیار محدود خواهد بود.

همچنین مسائل ۳ و ۴ ممکن است با راه‌حل‌های مختلف حل گردد.

وقتی مسئله ۴ در یک مجله ماهانه به چاپ رسید من تعداد زیادی راه‌حل‌های مختلف دریافت کردم در مـــورد دانش‌آموزان به‌طور کلی می‌توان گفت که آن‌ها پرانتزها را ضرب و همهٔ جملات را به‌طرف چپ منتقل می‌کننـــد و با تحمل زحمات زیـــاد ثابت می‌کنند که عبارت دست چپ مثبت است.

در مورد مسئله ۵ دانش‌آموزان فوری به فرمول‌های پیچیده ترکیبات متوســـل می‌شوند. در مورد مسئله ۶ اگر دانش‌آموزان به حالات خاص بپردازند مســـلماً به نتیجه خواهند رسید. زمانی که این مسائل مطرح است من به کلاس اجازه می‌دهم مدتی روی آن‌ها کار کنند و سپس به آن‌ها چند قانونی کلی برای مسئله حل‌کردن می‌دهم که مسلماً شما با آن‌ها آشنا هستید. پیشنهادات برای مسائل فوق به‌قرار زیر است:

۱. اگر در مســـئله «پارامتر صحیح» n وجود دارد مسئله را برای حالات خاص $n=۱,۲,۳,۴,۵$ حل کنید. ممکن اســـت ضمن آزمایش حالات خاص به یک الگو دست پیدا کنید. اگر الگو ظاهر شد صحت آن را با روش استقراء ثابت کنید.

۲. هر جا ممکن است شکل رسم کنید.

۳. اگر مسئله به‌صورت داده شده مشکل است موقتاً یکی از شـــرایط مسئله را کنار بگذارید و در جستجوی مسئله‌ای قدری ســـاده‌تر باشید. وقتی مطمئن شدید که مســـئله ســـاده‌تری که طبیعت آن با مسئله اصلی یکی اســـت پیدا کردید قاعدتاً برای این مسئله جدید باید راه‌حل‌های بیشـــتری وجود داشته باشد. به همه راه‌حل‌های این مســـئله ساده‌شـــده توجه کنید شاید راه‌حلی برای مســـئله اصلی در بین آن‌ها وجود داشته باشد.

۴. اگر در مسئله متغیرهای متعددی وجود دارد که نقش همه آن‌ها یکی است به‌دنبال مسئله متشابه با یک یا دو متغیر باشید. ممکن است بدین‌طریق موفق شوید راه‌حلی پیدا کنید.

با این اشارات، دانش‌آموزان معمولاً قادر خواهند بود ظرف چند دقیقه مســـائل ۱، ۲، ۳، ۵، ۷ را حل کنند ولی بقیه مسائل ممکن است وقت بیشتری بگیرند ولی در مجموع، طرح و بحث همهٔ آن‌ها برای کلاس مفید خواهد بود.

پیشـــنهادات برای حل مســـائل کاملاً طبیعی و منطقی به‌نظر می‌آیند.

در حقیقت، برای مسئله حل‌کردن، نکات و مطالبی وجود دارد که دانش‌آموزان باید بدانند ولی نمی‌دانند و تذکر آن‌ها ضروری است.

با این سیاست و استراتژی وقتی دانش‌آموز از کلاس بیرون می‌آید احساس می‌کند که بعضی از مهارت‌های مسئله حل کردن را در کلاس یاد گرفته است و از این جهت خوش‌حال به‌نظر می‌رسد.

به ترتیب که دانش‌آموزان در حل مســـئله مهارت پیدا می‌کنند مسائل مناسب دیگری مطرح می‌شوند که نتایج خاصی از آن‌ها را همراه خود به خانه خواهند برد. مثلاً دانش‌آموزان به‌زودی ارزش پیشنهاد مطرح‌شده در بند ۱ بالا را تشخیص خواهند داد. در این موقع از سال مسئله زیر مفید خواهد بود:

در یک مســـابقه حذفی شـــطرنج بازیکنان به‌طور تصادفی زوج، زوج انتخاب می‌شوند و هر زوج یک بازی را انجام می‌دهد و بازنده از مســـابقه حذف می‌شـــود و برنـــده ادامه می‌دهد. مثلاً اگر ما با ۳۲ بازیکن شـــروع کنیـــم پس از بـــازی اول ۱۶ نفر بـــرای دور دوم باقی می‌مانند. اگر تعداد بازیکنان فرد باشـــند یک نفر بازی نمی‌کند اما مرتب بـــه دورهای بعدی راه پیدا می‌کند. اگر عدهٔ بازیکنان ۱۵ نفر باشند یک نفر بدون بازی جلو مـــی‌رود و پس از بازی اول ۷ نفر برنده و آمادهٔ دور بعد خواهند شد.

در حالت کلی اگر n بازیکن شرکت داشته باشند:

اگر n زوج باشـــد آن‌گاه $\frac{n}{۲}$ بازی انجام خواهد شد و $\frac{n}{۲}$ بازیکـــن به دور بعدی راه پیدا می‌کنند اگر n فرد باشـــد $\frac{n-۱}{۲}+۱$ یا $\frac{n+۱}{۲}$ بازیکن ادامـــه خواهند داد $\frac{n-۱}{۲}$ بازی انجام شده است.

سؤال: اگر n بازیکن در مسابقه شرکت کنند، قبل از اینکه برنده تعیین شود، چند بازی باید انجام گردد؟

برای حل این مسئله عدهٔ زیادی از دانش‌آموزان به

آمـــوزش و اطلاعات خود مراجعه خواهند کرد و فوری به تکنیک «پارامتر صحیح» متوسل خواهند شد. وقتی آن‌ها برای حالات خاص $n=۲,۳,۴,۵,۶$ آزمایش کردند الگوی مسئله کاملاً روشن خواهد شد.

اگر n نفر بازی را شروع کنند و اگر در هر بازی یک نفر حذف شـــود آن‌گاه $n-۱$ بازنده خواهد برد لذا $n-۱$ بازی انجام شده است.

نتیجه

ـ قبل از آنکه شـــروع به حل مسئله کنید مطمئن شوید که مسئله را خوب فهمیده‌اید.

ـ راه‌حل‌های پیچیده و پرعمل را ادامه ندهید مگر آنکه مطمئن شوید که راه ساده‌تری وجود ندارد.

ـ یک هدف اصلی در حل مســـائل روشن‌ساختن نقش ارائه برهان‌های مختلف (راه‌حل‌های مختلف) در ریاضیات است لذا برای رسیدن به جواب به راه‌حل‌های مختلف توجه کنید.

مسئله زیر نامأنوس‌ترین ولی از قوی‌ترین‌هاست.

مسئله: مجموع سری هندسی زیر را پیدا کنید.

$$S=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\dots+\frac{۱}{۲^n}+\dots$$

اگر دانش‌آموزان قبول کنند که این مجموع دارای حد است آن‌گاه راه‌حل زیر بهترین خواهد بود.

طرفین تساوی فوق را در ۲ ضرب می‌کنیم می‌شود:

$$۲S=۱+\underbrace{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\dots+\frac{۱}{۲^n}+\dots}_{S}$$

همان‌طور که انتظار داشتیم:

$$۲S=۱+S\Rightarrow \boxed{S=۱}$$

وقتی دانش‌آموزان این شـــکل راه‌حل را می‌بینند معمولاً احســـاس می‌کنند که بحث ε و δ با آن ظرافت و دقت که به آن‌ها تحمیل می‌شـــود غیرضروری است چرا باید آن‌همه کش‌وقوس رفت در حالی که ما چنین استدلال ساده و قابل‌قبولی برای مسئله داریم.

من بحث مسئله زیر را نیز مفید می‌دانم.

مسئله: مطلوبست تعیین مجموع سری زیر:

$$T=۱+۲+۴+۸+\dots+۲^۲+\dots$$

از بحثی نظیر آنچه در بالا گذشت حاصل می‌شود:

$$۲T=۲+۴+۸+۱۶+\dots+۲^n+\dots$$
$$=۱+(۲+۴+۸+۱۶+\dots+۲^n+\dots)-۱$$
$$=\underbrace{(۱+۲+۴+۸+۱۶+\dots+۲^n+\dots)}_{T}-۱$$
$$=T-۱$$
$$\boxed{T=-۱?}$$

(لغزش‌هـــای ریاضی ماکســـوئل[۱] یکـــی از منابع قوی برای اســـتدلال‌های نظیر استدلال بالاست. برای دوره‌های پیشرفته گل‌بام و اولمست[۲] مثال‌های نقض در آنالیز مفید می‌باشد).

نکته آموزشی

آماده‌ساختن دانش‌آموزان برای مسئله حل‌کردن که حالات خاص را مورد آزمایش قرار دهند و یا مسائل ســـاده‌تر در ارتباط با مســـئله اصلی را بررسی کنند یا استراتژی مختلف مســـئله حل‌کردن را به‌کار بگیرند باید با همان دقت و تمرین انجام شـــود که ما آن‌ها را برای به‌کاربردن مثلاً فرمول معادله درجه دوم یا قانون جزءبه‌جزء در انتگرال‌گیری آماده می‌سازیم.

به‌طور کلی، من بحث منطقی زیر را برای آموزش هر تکنیکی مفید می‌دانم:

۱. آمـــوزش هر تکنیک را با طرح مســـائل خاص، جالب و دلچسبی شروع نمایید.

۲. در هفته‌های بعد، تعداد زیادی تمرین روی آن تکنیک حل کنید (مثلاً $\frac{۱}{۳}$ مسائل کلاس).

۳. در طول سال، به‌طور متعادلی، مسائلی که با آن تکنیک حل می‌شوند به کلاس بدهید.

بحث کلاس روی یک مسئله مشکل

در این قسمت کوشش من این است که گوشه‌ای از بحث‌های کلاس که روی مسئله زیر انجام گرفته است ارائه دهم.

مسئله: دو پاره‌خط به طول‌های a و r مفروضند. زاویه α نیز داده شـــده اســـت مثلثی بسازید که دارای خواص زیر باشد.

۱. یک ضلع آن به طول a باشد.

۲. شعاع دایره محاطی داخلی مثلث r باشد.

۳. اندازه زاویه مقابل به ضلع a برابر α باشد.

جای شکل

برای سهولت در مراجعات بعدی، مثلث مطلوب را به T، نمایش می‌دهیم در شکل، اجزایی که سیاه‌تر ترسیم شده‌اند مفروضات مسئله را نشان می‌دهند که می‌خواهیم با استفاده از آن‌ها مثلث T را بسازیم. کلاس با اساس به‌کارگیری خط‌کش و پرگار در رسم‌های هندسی آشناست. علاوه‌بر این، بچه‌ها رسم کمان درخور زاویه α متناظر با خط a را نیز می‌دانند. روش استاندارد برای حل این‌گونه مسائل این است که سعی شود مستقیماً مثلث مطلوب ساخته شود راه‌حل را می‌توان با یکی از فرض‌های داده‌شده مسئله شروع کرد و آن‌گاه سعی نمود با تعیین تلاقی دو مکان هندسی ساخته‌شده نقطه‌ای تعیین کرد که به‌طور یگانه‌ای مثلث T را مشخص سازد. کلاس همچنین با روش دیگری نیز آشناست «ساختن مثلث متشابه با مثلث T و سپس رسیدن به T با کم و زیادکردن نسبت (مقیاس) تشابه» شاید منطقی باشد که به دنبال چنین راه‌حلی نیز رفت.

در زیر بحث‌های کلاس را که، مدت ۴۰ دقیقه وقت ما را اشغال نمود و به‌وسیلهٔ دو نفر از دانش‌آموزان یادداشت و تنظیم شده است می‌بینید[۳].

طرح تصمیم‌گیری

به‌نظر شما شروع کار باید با کدام یک از مفروضات زیر باشد؟

الف ـ دایره محاطی با شعاع r

ب. ضلع a از مثلث

ج. زاویه α به رأس A

آیا انتخاب الف خارج از بحث است؟ ببینیم اگر با دایره محاطی شروع کنیم وضع ضلع a چطور می‌شود؟

ضلع a چگونه با رأس A ارتباط پیدا می‌کند؟ به‌نظر می‌رسد که این یکی ارزش پی‌گیری کردن را ندارد. اما انتخاب «ب» منطقی به‌نظر می‌رسد اگر با ضلع a شروع کنیم ما می‌توانیم (I) مکان هندسی رأس A را رسم کنیم. (II) مکان مرکز دایره محاطی یعنی، P را تعیین نماییم. اما این دو مکان چگونه با هم ارتباط پیدا می‌کنند روشن نیست؟ ممکن است این مطلب ارزش پی‌گیری‌کردن را داشته باشد. اما اجازه بدهید نگاهی هم به انتخاب «ج» بیندازیم. اگر با زاویه α شروع کنیم به نظر می‌آید که ما می‌توانیم دایره را محاط نماییم. آیا می‌توان از آنجا راه‌حلی به‌دست آورد؟ جواب هم ممکن است و هم ممکن نیست اما به‌نظر می‌رسد که ارزش دنبال‌کردن داشته باشد با زاویه α شروع می‌کنیم نقطه P به‌آسانی به‌دست می‌آید.

اما در آخر دچار تردید می‌شویم که آیا کدام یک از خط‌های نقطه‌چین ضلع a است؟ (شکل).

جای شکل

ما طول ضلع a را و اینکه بر دایره باید مماس باشد می‌دانیم. دو نوع اطلاع راجع به ضلع a داریم اما ظاهراً راهی برای ارتباط آن‌ها به‌نظر نمی‌آید اگرچه قدری باز نگهدارنده است اما هنوز هم ممکن است ما بتوانیم از تشابه اشکال رسم‌شده چیزی به‌دست آوریم و این ارزش یک امتحان‌کردن مختصر را دارد. ما یک مماس دلخواه را در پایین دایره می‌کشیم و امید داریم که بعداً با کم و زیادکردن نسبت تشابه به a برسیم (شکل‌های زیر).

جای شکل‌ها

در شکل بالا، اگر دو مثلث متشابه باشند داریم $\frac{a}{r}=\frac{x}{R}$ و این به نظر نمی‌آید که به‌جایی برسد و متوقف می‌شویم.

طرح تصمیم‌گیری ۵ دقیقه از وقت کلاس را می‌گیرد. در این موقع من نقش راهنما را بازی می‌کنم و سؤالاتی از این قبیل مطرح می‌کنم: خوب، چه انتخاب‌هایی ما داریم؟ آیا انتخاب‌های دیگر نیز وجود دارد؟ کدام از این‌ها امیدوارکننده‌تر به‌نظر می‌رسند؟ بنابراین انتخاب ما، بین ب و ج خواهد بود. شما با کدام یک از این دو شروع خواهید کرد؟ دانش‌آموزان کلاس راجع به‌کارآیی هر یک از این دو راه بحث می‌کنند و تصمیم می‌گیرند. فرض ج را آزمایش کردیم به نتیجه نرسید.

تصمیم مدیرانه

آیا ما باید این خط فکری را بیشتر دنبال کنیم و یا اینکه برگردیم و راه دیگری را جستجو کنیم. بدین‌ترتیب به‌نظر می‌رسد که ما به بن‌بست رسیده باشیم. لذا تصمیم گرفتیم دوباره به انتخاب «ب» برگردیم.

۱. می‌دانیم که ما می‌توانیم مکان هندسی نقاطی را که مقابل ضلع a هستند و زاویهٔ ثابتی را می‌سازند (کمان درخور زاویه α متناظر با پاره‌خط a) رسم کنیم.

۲. می‌دانیم که برای نقطه P، یعنی مرکز دایره

محاطی نیز یک مکان داریم.

ما نیاز بـــه اطلاع دیگری راجع به مثلث داریم. اگر بتوانیم مکان دیگری را برای رأس A پیدا کنیم آن‌گاه کارساختن مثلث تمام شده است. تعیین مکان دیگری بـــرای نقطهٔ P، مرکز دایره محاطی، به ما امکان رســـم دایره محاطی را می‌دهد. همچنین به ما امکان خواهد داد از دو ســـر پاره‌خط a دو مماس بر دایره رسم کنیم (شکل زیر).

جای شکل

در زیر انتخاب‌های ممکن دسته‌بندی شده است

۱. تعیین مکان رأس A وقتی ضلع a ثابت و دایره محاطی داخلی مثلث با شعاع ثابت که بر ضلع a مماس است تغییر کند.

۲. تعییـــن مکان مرکز دایره محاطی داخلی مثلث وقتی که ضلع a ثابـــت و اندازهٔ زاویه A نیز برابر مقدار ثابت α باشد و رأس A تغییر کند (کمان درخور زاویه α نظیر وتر a) کدام یک را باید ادامه داد؟

پیشنهاد: ما در وضع غیرثابتی هستیم و اساسی برای یک قضـــاوت خوب نداریم شـــاید حالا وقت آن رســـیده باشد که چند تا شکل تقریبی رسم کنیم چه مشاهده بعضی کارهای عملی و ترسیمی ممکن است ما را هدایت کند که یک انتخاب را بر دیگری ترجیح دهیم و حتی ممکن است فرضیه و ایدهٔ جدیدی نیز به دست دهد. ما انتخاب‌های ۱ و ۲ را به ترتیب در شکل‌های ۱ و ۲ آزمایش می‌کنیم.

انتخاب ۱

تعیین مکان رأس A با در دست داشتن ضلع ثابت a و دایره محاطی متغیر با شعاع ثابت r به نظر نمی‌آید که این شکل راه‌گشا باشد.

شکل ۱

انتخاب ۲

تعیین مرکز دایره محاطی P، با در دست داشتن a و رأس متغیر A متقابل به زاویه α نظیر a

شکل ۲

مکان متقارن است و از دو سر پاره‌خط a می‌گذرد و احتمال دارد قوســـی از یک دایره باشد. این انتخاب ممکن اســـت ما را به جایی برســـاند. شـــکل تقریبی رسم‌شده نشان می‌دهد که مکان p، با در دست داشتن متغیر A، ممکن است دایره‌ای باشد، که ضلع a وتر آن است (اگر ما از حدس خود مطمئن نیستیم می‌توانیم شکل‌های دقیق‌تری رسم کنیم. اجازه بدهید این کشف عملی را دست کم نگیریم).

لم ۱ (زیرمسئله): ثابت کنید مکان هندسی نقطه P (مرکـــز دایره محاطی) وقتی ضلع a و رأس متغیر A داده شده دایره‌ای است که a یک وتر آن می‌باشد.

سؤال: چگونه این مطالب را ثابت کنیم؟ ما راجع به دایره و وتر و خواص آن چیزهایی در این زمینه می‌دانیم.

بیان لم بالا به شکل دیگر: ثابت کنید که با در دســـت داشـــتن a و α، نقطه P یک زاویه ثابت متقابل (متناظر) ضلع a می‌سازد (کمان درخور شکل زیر).

تصویر

لم ۲ (زیرمســـــئله): فرمولی که δ را بر حسب α نشان دهد به دست آورید. در مثلث PBC داریم:

$$\delta+\frac{\gamma}{۲}+\frac{\beta}{۲}=۱۸۰^\circ$$

$$۲\delta+\gamma+\beta=۳۶۰^\circ \qquad (۱)$$

تصویر

در مثل ABC نیز داریم:

$$\alpha+\beta+\gamma=۱۸۰^\circ \qquad (۲)$$

با توجه به (۱) و (۲) می‌شود:

$$\boxed{\delta=۹۰^\circ+\frac{\alpha}{۲}}$$

یعنی δ فقط بستگی به α دارد، و این مسئله را حل می‌کند. مرکز دایره محاطی از محل تلاقی دایره و یک خط، به شرح زیر به‌دست می‌آید.

۱. رسم کمان درخور زاویه $\delta=۹۰^\circ+\frac{\alpha}{۲}$ متناظر

با پاره‌خط a
۲. رسم خط موازی a و به فاصله r از آن

جمع‌بندی مختصر بحث فوق

همانطور که در بالا گفته شـــد، حل این مســـئله ۴۰ دقیقه وقت کلاس را گرفت تا به نتیجه رســـید. در صورتی که می‌شـــد ظرف ده دقیقه با کمتر راه‌حل را ارائه داد ـ آیا این‌همه وقت صرف یک مســـئله‌کردن؛ با شروع‌های نادرست آغازکردن، به عقب برگشت‌کردن، راه‌های کور تجربه‌کردن استراتژی مهم تصمیم‌گرفتن، دنبال لم‌ها رفتن و غیره حقیقتاً ارزش پی‌گیری کردن دارد و قابل دفاع است؟ جواب من مثبت است، اگرچه مطمئناً قصد این را ندارم که توصیه کنم هر مسئله‌ای را از این راه، حل کنید.

مواقعی است که ما فقط نیاز داریم اطلاعات را ارائه دهیـــم مثلاً آن زمان که دانش‌آمـــوزان می‌خواهند در راه‌حل‌های معمولی مهارت پیدا کنند.

ما باید دانش‌آموزان را هدایت کنیم که اندیشیدن و کشف‌کردن را بیاموزند. در حقیقت مهم‌ترین وظیفه ما به‌عنـــوان یک معلـــم و یک راهنما این اســـت که دانش‌آموزان خود را طـــوری تربیت کنیم که خودکار و خوداندیش باشـــند. من فکـــر می‌کنم که این طریق مسئله حل کردن در کلاس یک کاتالیزور برای این‌گونه آموزش است.

در محاسبهٔ زاویهٔ δ بر حسب α، کلاس یک کشف کاملاً غیرمنتظره‌ای انجام داد «مکان هندســـی مرکز دایـــره محاطی با مفروضات داده‌شـــده (ضلع ثابت a و رأس متغیر A با زاویه α متقابل a) دایره‌ای اســـت که a وتر آن است» کار این کشف به علت نیاز و همچنین انجام چند ترسیم تسریع شـــد مهم اینکه آن در حل مسائل دیگر نیز مفید خواهد بود. خلاصه اینکه آن روز دانش‌آموزان در کلاس کار ریاضی کردند تجربه‌ای که آن‌ها در آن کشـــف کوچک داشتند شبیه تجربه خود ماســـت وقتی که با ریاضیات عالـــی کار می‌کنیم. این روش مسئله حل‌کردن به ما اجازه می‌دهد که ریاضی را به‌عنوان یک درس زنده و حیاتی، که در آن کشف هم ممکن است و هم لذت‌بخش، معرفی نماییم.

اما راجع به شروع‌های نادرست، عقب‌گردها، راه‌های کور و غیره چطور؟ در حقیقت کار ریاضی کردن شامل همهٔ این مراحل می‌شود. کار ریاضی یعنی فائق آمدن بر همهٔ این مشـــکلات دانســـتن آن که چه موقع باید کنکاش کرد. تصمیم‌گیری روی انتخاب‌هایی که جلوی روی ماست، چه راهی را باید دنبال نمود، کدام‌ها نتیجه می‌دهند و کدام‌ها باید رها شوند، و غیره. دانش‌آموزانی که این مطالب را می‌داننـــد به احتمال خیلی قوی در حل مسائل مبارزه‌جوتر و باشهامت‌تر خواهند بود. آن‌ها وقتی کار ریاضی می‌کنند، مســـئله حل می‌کنند و یا راه‌حل‌ها را شخصاً تجربه می‌کنند از این راه کلی مطلب یاد می‌گیرند.

مسئله حل‌کردن مشـــکل ریاضی‌دان‌هاست، **آن لذت و هیجان** ریاضی اســـت. ما وظیفه داریم و حتی بدهکاریم به آن‌هایی که در آینده می‌خواهند ریاضی‌دان شوند و یا آن‌هایی که کار ریاضی را انجام می‌دهند و یا ریاضی را به کار می‌برند و یا کسانی که نسبت به ریاضی علاقه دارند **تجربه مسئله‌حل‌کردن را یاد بدهیم.**

ما معتقدیم که آموزش روش مسئله حل‌کردن به دانش‌آموزان هیجان و زیبایی ریاضی را نشـــان خواهد داد. به همان درجه که در آینده می‌خواهند ریاضی‌دان شوند یا آن‌هایی که ما دانش‌آموزان خود را تربیت کنیم که مستقلاً فکر کنند و از اطلاعات خود خوب استفاده نمایند. ما به‌عنوان یـــک معلم در کار خود توفیق پیدا کرده‌ایم.

نمونه مسائل کار در کلاس

۱. فرض کنید p عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد. ثابت کنید که باقی‌مانده P^2 بر عدد ۱۲ برابر ۱ است.

۲. فرض کنید P یـــک چندضلعی با ۱۰۰۱ ضلع باشد آیا:

الف. هرگز

ب. بعضی اوقات ولی نه همیشه

ج. همیشه می‌توان خط راستی رسم کرد که همهٔ اضلاع P را قطع کند؟

۳. آیا فقط با به‌کار گرفتن اســـکناس‌های ۷ و ۱۷ تومانی می‌توان:

الف. یک دفترچه ۵ تومانی خرید و باقی پول را نیز درست تحویل گرفت؟

ب. یک مجلهٔ ۱۱ تومانی؟ و یک باغ ۹۸۷۶۹۸۷۶ تومانی؟

۴. آیا فقط با به کار گرفتن اســـکناس‌های ۶ و ۱۵ تومانی می‌توان:

الف. یک کتابچه ۵ تومانـــی خرید؟ یک مداد ۱۲

تومانی خرید؟ یک باغ ۱۲۳۴۵۶۷۸۹ تومانی خرید؟ (و باقی‌مانده را درست دریافت کنید).

۵. اگر a، b، c و d اعداد مفروض مثبت باشند ثابت کنید

$$\frac{(a^۲+۱)(b^۲+۱)(c^۲+۱)(d^۲+۱)}{abcd} \geq ۱۶$$

۶. با در دست داشـــتن قطعه خطی به طول l، آیا می‌توان پاره‌خطی به طول:

$$l\left(\frac{\sqrt{۱۳}-۳}{۴}\right)$$

رسم کرد؟

۷. مجموع زیر را پیدا کنید:

$$\frac{۱}{۲!}+\frac{۲}{۳!}+\frac{۳}{۴!}+.....+\frac{n}{(n+۱)!}$$

۸. این‌هم برای کســـانی که «حســـاب حروفی» را دوست دارند، مجموع‌های زیر را حساب کنید (هر حرف متمایز نمایش یک رقم متمایز است).

$$\begin{array}{r} \text{Forty} \\ +\ \text{Ten} \\ +\ \text{Ten} \\ \hline \text{Sixty} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{Send} \\ +\text{More} \\ \hline \text{Money} \end{array}$$

پی‌نوشت‌ها

1. Maxwell,s Fallacies in Mathematics.
2. Gelbaum and Olmest

۳. مطالـــب در کلاس خیلی ســـریع پیش می‌رود و یادداشـــت برداشـــتن اغلب موجب عدم توجه دقیق دانش‌آموزان به مطالب درسی می‌شود. ما معمولاً در کلاس بدین ترتیب عمل می‌کنیم که در هر جلسه به نوبت دو نفر از دانش‌آموزان یادداشت بر می‌دارند و بعد با اســـتفاد از آن‌ها بحث کلاس تنظیم و تدوین و به‌وسیله خودم یا دستیارم تصحیح می‌شود و سپس بین دانش‌آموزان توزیع می‌گردد (از ضبط و نوار هم اســـتفاده می‌شود) بقیه دانش‌آموزان در آن روز از نوت‌برداری رســـمی معاف هستند ولی ممکن است نـــکات مهم، جالب و آموزنده درس را برای خود یادداشـــت کنند که به همین یادداشـــت‌ها نیز به‌عنوان کار در کلاس توجه و نمره داده می‌شود.

شرح تصاویر

A

B

C

a

P

α

کدام‌یک از خط‌های نقطه‌چین ضلع a است؟

r

این شـــکلی اســـت که ما می‌خواهیم به شعاع r و

BC=a

A'

B'

C'

R

x=?

این شـــکل را می‌توان با رسم یک دایره محاطی به شعاع دلخواه R به‌دست آورد.

(با داشـــتن ضلع a و دایره محاطی در جا ساختن مثلث کامل می‌شود)

آیا می‌توان ثابت کرد که زاویه δ فقط بســـتگی به α دارد؟

δ

$\frac{\alpha}{۲}$

$\frac{\beta}{۲}$

$\frac{\gamma}{۲}$