حل مسائل مسابقه‌ای ۱۲۸

سیدمحمدرضاهاشمی‌موسوی

۱. روش حل مثلثاتی برای معادلهٔ درجهٔ ۳ (با استفاده از تبدیل و اتحادهای مثلثاتی)

مقدمه

می‌دانیم از اتحاد زیر:

$$\cos ۳\alpha = ۴\cos^۳\alpha - ۳\cos\alpha$$

می‌توان با معلوم بودن $\cos ۳\alpha = a$ و با فرض $|a| \le ۱$ مقدار ۳α و در نتیجه α و از آنجا $\cos\alpha = x$ را حساب کرد. مقدارهای x جواب‌های معادلهٔ $x^۳ - \frac{۳}{۴}x - \frac{۱}{۴}a = ۰$ و یا معادلهٔ زیر است:

$$\cos ۳\alpha = a \ , \ x = \cos\alpha : \cos^۳\alpha - \frac{۳}{۴}\cos\alpha - \frac{۱}{۴}\cos ۳\alpha = ۰ \quad (۱)$$

اگر a بین ۱- و ۱+ باشد دو مقدار برای (۳α) معین می‌شود و در نتیجه برای α شش مقدار به دست خواهد آمد و $\cos\alpha$ دارای سه مقدار متمایز خواهد بود:

$$\cos\alpha \ , \ \cos(\alpha + \frac{۲\pi}{۳}) \ , \ \cos(\alpha + \frac{۴\pi}{۳})$$

پس از این مقدمه، برای حل معادلهٔ درجهٔ سوم (۲):

$$X^۳ + pX + q = ۰ \quad (۲)$$

به روش مثلثاتی کافی است معادلهٔ فوق را با یک تبدیل ساده به معادلهٔ (۱) تحویل دهیم. در واقع اگر بتوان عددی مثل λ و زاویه‌ای مانند α را چنان تعیین کرد که ریشه‌های معادلهٔ فوق مقادیر سه‌گانهٔ $x = \lambda\cos\alpha$ باشند، ریشه‌های معادلهٔ مورد نظر به دست خواهند آمد. به این منظور ابتدا تبدیل $X = \lambda\cos\alpha$ را انجام می‌دهیم:

$$\lambda^۳\cos^۳\alpha + p\lambda\cos\alpha + q = ۰ \ ; \ \cos^۳\alpha + \frac{p}{\lambda^۲}\cos\alpha + \frac{q}{\lambda^۳} = ۰ \quad (۳)$$

برای اینکه معادلهٔ (۳) هم‌ارز معادلهٔ مورد نظر باشد، باید داشته باشیم:

$$\frac{p}{\lambda^۲} = \frac{-۳}{۴} \ , \ \frac{q}{\lambda^۳} = -\frac{\cos ۳\alpha}{۴}$$

شرط اول در صورتی برقرار است که: $p < ۰$ و در این صورت: $|\lambda| = \sqrt{\frac{-۴p}{۳}}$. در نتیجه با شرط $|\cos ۳\alpha| \le ۱$ یا $\frac{۲۷q^۲}{-۴p^۳} \le ۱$ و یا $۴p^۳ + ۲۷q^۲ \le ۰$ (چون $p < ۰$)، سه ریشهٔ مثلثاتی معادلهٔ مورد نظر به دست می‌آیند:

$$X_۱ = \lambda\cos\alpha \ , \ X_۲ = \lambda\cos(\alpha + \frac{۲\pi}{۳}) \ , \ X_۳ = \lambda\cos(\alpha + \frac{۴\pi}{۳})$$

※ **توجه:** هر معادلهٔ درجهٔ سوم کامل با $x = X - \frac{b}{۳\alpha}$ به معادلهٔ درجهٔ سوم ناقص (۲) تبدیل می‌شود.

کاربرد: چون ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم عمومی در حالت $\Delta \le$، به صورت مثلثاتی بیان می‌شوند، بنابراین برای حل معادلهٔ درجهٔ سوم عمومی در حالت $\Delta < ۰$ (دارای سه ریشه حقیقی متمایز) فقط باید روش مثلثاتی را به کار برد.

۲. حاصل عبارت رادیکالی A را حساب کنید:

حل:

$$A = \sqrt[۳]{\sqrt{۳ + \sqrt{۴ - ۲\sqrt{۳}}} - \frac{\sqrt{۶}}{۲} - \frac{۱}{\sqrt{۲}}}$$

$$A = \sqrt[۳]{\sqrt{۳ + \sqrt{\frac{۴+۲}{۲}} - \sqrt{\frac{۴-۲}{۲}}} - \frac{\sqrt{۶}}{۲} - \frac{۱}{\sqrt{۲}}}$$

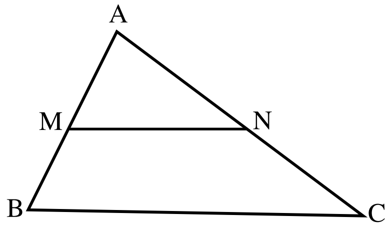
$$= \sqrt[۳]{\sqrt{۲ + \sqrt{۳}} - \frac{\sqrt{۶}}{۳} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}}$$

$$= \sqrt[۳]{\sqrt{\frac{۲+۱}{۲}} + \sqrt{\frac{۲-۱}{۲}} - \frac{\sqrt{۶}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}}$$

$$= \sqrt[۳]{\frac{\sqrt{۶}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{\sqrt{۶}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \sqrt[۳]{۰} = ۰$$

توجه: بافرض $a^2 - b = c^3$ و $c \geq 0$: $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$

۳. به روش برداری نشان دهید هرگاه خطی وسط دو ضلع یک مثلث را به هم وصل کند، موازی با ضلع سوم و برابر با نصف آن است:



$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MN} \qquad (1)$$

حل: ابتدا دو طرف برابری (۱) را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم:

$$2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{MN}$$

در اینجـــا طبق فرض، M و N وســـط ضلع‌های AB و AC هستند؛ پس:

$$2\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BA} \quad \text{و} \quad 2\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$$

بنابراین، از رابطهٔ (۱) داریم:

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{MN} \qquad (2)$$

از طرف دیگر در مثلث ABC:

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \qquad (3)$$

از مقایســـهٔ رابطه‌های (۲) و (۳) به رابطهٔ مطلوب خواهیم رسید:

$$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN} \quad ; \quad \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

در اینجـــا با توجه به تعریف ضرب یک عدد حقیقی در یک بردار، نتیجه می‌شود که $\overrightarrow{MN}$ موازی $\overrightarrow{BC}$ و طول آن نصف $\overrightarrow{BC}$ است.

۴. مثلث متســـاوی‌الاضلاع به ضلع a مفروض اســـت. اگر نقطه‌های وســـط ضلع‌های این مثلـــث را به هم وصل کنیم، مثلث متساوی‌الاضلاع جدید به ضلع $\frac{a}{2}$ حاصل می‌شود. اگر همین کار را تکرار کنیم، مثلث جدیدتری به ضلع $\frac{a}{4}$ به دست خواهد آمد. اگر این عمل را بی‌نهایت بار تکرار کنیم، بی‌نهایت مثلث متســـاوی‌الاضلاع حاصل می‌شود. مجموع محیط‌ها و مجموع مساحت‌های همهٔ این مثلث‌ها را بیابید.

حل: می‌دانیم مثلث متســـاوی‌الاضلاع به ضلع a، محیطی برابر $3a$ و مثلث بـــه ضلع $\frac{a}{2}$ محیطی برابر $\frac{3a}{2}$ و مثلث به ضلع $\frac{a}{4}$، محیطی برابر $\frac{3a}{4}$ و به همین ترتیب مثلث به ضلع $\frac{a}{2^{n-1}}$، محیطی برابر $\frac{3a}{2^{n-1}}$ دارد. بنابراین، مجموع محیط‌های همهٔ مثلث‌ها (P) از مجموع دنبالهٔ هندسی زیر حاصل می‌شود:

$$P = 3a + \frac{3a}{2} + \frac{3a}{4} + \ldots + \frac{3a}{2^{n-1}} + \ldots =$$

$$3a(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots) = 3a(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}) = 6a$$

برای تعیین مجموع مساحت‌های همهٔ مثلث‌ها (S)، با توجه به طول ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع $(\frac{a\sqrt{3}}{2})$ و ضلع مثلث (a) اولیه و ضلع مثلث جدید $(\frac{a}{2})$ (مشابه محاسبهٔ محیط‌ها) به دنبالهٔ هندسی زیر خواهیم رسید:

$$S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\ ,\ S_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}\ ,\ S_3 = \frac{a^2\sqrt{3}}{64}\ ,\ \ldots$$

پس مجموع مساحت‌های همهٔ مثلث‌های تولیدشده چنین است:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{16} + \frac{a^2\sqrt{3}}{64} + \ldots =$$

$$\frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$$

مجموع همهٔ محیط‌ها و مساحت‌های تولیدشده تا بی‌نهایت نیز چنین است:

$$P = 6a \quad \text{و} \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$$

*** فعالیت دانش‌آموز:**

در مربعی به ضلع a مربع دیگری را محاط کرده‌ایم و در این مربع، مربع سوم را و این عمل را بی‌نهایت بار تکرار کرده‌ایم. حد مجموع این مربع‌ها را به دست آورید.

(پاسخ نهایی: $S = \frac{n^2a^2}{2(n-1)} \quad ; \quad q = \frac{1+(n-1)^2}{n^2} < 1$)

حل مسئله‌های جایزه‌دار ۱۲۸

۱. ثابت کنید به ازای هر n طبیعی نابرابری زیر برقرار است:

$$n(۱-\frac{۱}{\sqrt[n]{n+۱}})<\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{k}\le n(\sqrt[n]{n+۱}-۱)\quad (*)$$

الف) با استفاده از نابرابری ثابت شده (*) مقدار سری هارمونیک $\sum_{k=۱}^{۱۰^۶}\frac{۱}{k}$ را با ۳ رقم اعشار درست تخمین بزنید و نشان دهید:

$$\sum_{k=۱}^{۱۰^۶}\frac{۱}{k}\approx ۱۳/۸۱۵$$

ب) با استفاده از حد در بی‌نهایت (وقتی $n\to\infty$) ثابت کنید سری هارمونیک یک سری واگراست.

حل:

۱. برای اثبات نابرابری (*) کافی است به یک نابرابری که به نابرابری میانگین حسابی ـ هندسی شهرت دارد اشاره کنیم:

$$\frac{x_۱+x_۲+...+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_۱.x_۲....x_n}\qquad (**)$$

در واقع می‌توانیم هر فهرست nتایی از عددهای نامنفی حقیقی را برای نابرابری (**) اختیار کنیم. حالت برابری وقتی رخ می‌دهد که اگر و تنها اگر داشته باشیم:

$x_۱=x_۲=...=x_n$

ابتدا یک بار در رابطهٔ (**)، دنبالهٔ عددهای زیر را قرار می‌دهیم:

$$x_۱=۱+۱\ ,\ x_۲=۱+\frac{۱}{۲}\ ,\ ...\ ,\ x_n=۱+\frac{۱}{n}:$$

$$\frac{(۱+۱)+(۱+\frac{۱}{۲})+...+(۱+\frac{۱}{n})}{n}\ge\sqrt[n]{(۱+۱)(۱+\frac{۱}{۲})...(۱+\frac{۱}{n})}\ ;$$

$$\frac{n+\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{k}}{n}\ge\sqrt[n]{n+۱}\quad ;\quad ۱+\frac{\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{k}}{n}\ge\sqrt[n]{n+۱}\ ;$$

$$\frac{\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{k}}{n}\ge\sqrt[n]{n+۱}-۱\ ;\ \sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{k}\le n(\sqrt[n]{n+۱}-۱)$$

به همین ترتیب، بار دیگر در رابطهٔ (**) دنبالهٔ عددهای زیر را قرار می‌دهیم:

$$x_۱=۱-\frac{۱}{۲}\ ,\ x_۲=۱-\frac{۱}{۳}\ ,\ ...\ ,\ x_n=۱-\frac{۱}{n}\ (\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{k+۱}<\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{k})$$

$$\frac{(۱-\frac{۱}{۲})+(۱-\frac{۱}{۳})+...+(۱-\frac{۱}{n})}{n}\ge\sqrt[n]{(۱-\frac{۱}{۲})(۱-\frac{۱}{۳})...(۱-\frac{۱}{n})}\ ;$$

$$\frac{n-\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{k+۱}}{n}\ge\frac{۱}{\sqrt[n]{n+۱}}\ ;\ \sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{k}>n(۱-\frac{۱}{\sqrt[n]{n+۱}})$$

نابرابری (*) ثابت شده است.

الف)

حل: اگر در نابرابری ثابت‌شدهٔ (*) مقدار $n=۱۰^۶$ را اختیار کنیم:

$$۱۰^۶(۱-\frac{۱}{\sqrt[۱۰^۶]{۱۰^۶+۱}}<\sum_{k=۱}^{۱۰^۶}\frac{۱}{k}\le ۱۰^۶(\sqrt[۱۰^۶]{۱۰^۶+۱}-۱)$$

پس از محاسبه‌های لازم به نابرابری عددی زیر خواهیم رسید:

$$۱۳/۸۱۵۴<\sum_{k=۱}^{۱۰^۶}\frac{۱}{k}\le ۱۳/۸۱۵۶$$

بنابراین، $\sum_{k=۱}^{۱۰^۶}\frac{۱}{k}$ را می‌توان برابر با میانگین این دو مقدار در نظر گرفت و تخمین زد:

$$\sum_{k=۱}^{۱۰^۶}\frac{۱}{k}\approx\frac{۱۳/۸۱۵۶+۱۳/۸۱۵۴}{۲}=۱۳/\underline{۸۱۵}۵$$

که با سه رقم اعشار درست است.

ب)

حل: با استفاده از حد در بی‌نهایت $(n\to\infty)$:

$$L=\lim_{n\to\infty}n(۱-\frac{۱}{\sqrt[n]{n+۱}})\ \underset{}{\overset{(\text{حالت مبهم } \infty^0)}{=\!=\!=}}\ \lim_{n\to\infty}n(\frac{\sqrt[n]{n+۱}-۱}{\sqrt[n]{n+۱}})$$

$$=\lim_{n\to\infty}n(\frac{(\sqrt[n]{n+۱}-۱)((\sqrt[n]{n+۱})^{n-۱}+(\sqrt[n]{n+۱})^{n-۲}+...+۱)}{\sqrt[n]{n+۱}((\sqrt[n]{n+۱})^{n-۱}+(\sqrt[n]{n+۱})^{n-۲}+...+۱)})$$

$$\sim\lim_{n\to\infty}n(\frac{n}{\sqrt[n]{n+۱}\times\sqrt[n]{(n+۱)^{n-۱}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^۲}{n+۱}\sim\lim_{n\to\infty}n=\infty$$

به همین ترتیب:

$$U=\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{n+۱}-۱)\ \overset{(\text{حالت مبهم } \infty^0)}{=\!=\!=}$$

$$=\lim_{n\to\infty}n(\frac{(\sqrt[n]{n+۱}-۱)((\sqrt[n]{n+۱})^{n-۱}+(\sqrt[n]{n+۱})^{n-۲}+...+۱)}{(\sqrt[n]{n+۱})^{n-۱}+(\sqrt[n]{n+۱})^{n-۲}+...+۱})$$

$$\sim\lim_{n\to\infty}n(\frac{n}{\sqrt[n]{n^{n-۱}}})\sim\lim_{n\to\infty}\frac{n^۲}{n}=\lim_{n\to\infty}n=\infty$$

با توجه به مقدارهای حدی L و U که برابر ∞ هستند، داریم:

$$\left(\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{k}\right)\to\infty \qquad n\to\infty$$

بنابراین، سری هارمونیک $\left(\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{k}\right)$ یک سری واگراست.

مقدمه برای تربیع دایره (با خط‌کش و پرگار)

ابتدا لازم است کمی دربارهٔ امتناع تربیع دایره بحث کنیم و سپس به روش تقریبی آن بپردازیم.

«عنوان مسئلهٔ تربیع دایره از این قرار است: با استفاده از خط‌کش و پرگار مربعی رسم کنید که مساحتش برابر مساحت دایرهٔ مفروض باشد.»

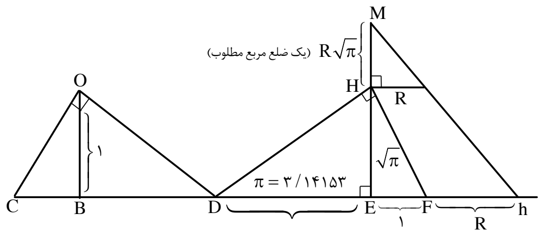
امتناع تربیع دایره: فرض کنیم دایره‌ای به شعاع واحد مفروض باشد. می‌خواهیم امتناع رسم مربعی را که مساحتش برابر مساحت این دایره، یعنی π، باشد ثابت کنیم. اگر رسم این مربع (به وسیلهٔ خط‌کش و پرگار) مقدور باشد، باید x طول ضلع آن عددی رسم‌پذیر باشد (عددی جذری است)؛ در صورتی که $x=\sqrt{\pi}$ عددی جذری نیست. اثبات این موضوع به متعالی‌بودن عدد π برمی‌گردد که در سال ۱۸۸۲ به وسیلهٔ **لیند مان**[1] به اثبات رسید. همان‌طور که می‌دانیم عددی را متعالی گویند که ریشهٔ معادله‌ای به صورت:

$$ax^{n}+bx^{n-۱}+\ldots+\alpha x+\beta=۰$$

با ضریب‌های گویا نباشد.

۲. تربیع دایره به‌وسیلهٔ خط‌کش و پرگار (تقریبی):

ابتدا دایره‌ای به شعاع واحد را به پاره‌خط مستقیم (2DE) تبدیل می‌کنیم (**). سپس نصف پاره‌خط حاصله (DE) را به اندازهٔ واحد امتداد می‌دهیم. پس از آن نیم‌دایره‌ای به قطر $\pi+۱$ رسم می‌کنیم. از مثلث قائم‌الزاویه محاطی (DHE) نیم‌دایره فوق پاره‌خط $\sqrt{\pi}$ مشخص می‌شود. سپس قطر نیم‌دایره اخیر (DF) را به اندازه شعاع دایره مفروض امتداد می‌دهیم و از انتهای این امتداد، خطی به موازات ضلع قائم (FH) مثلث قائم‌الزاویه اخیر رسم می‌کنیم تا امتداد ارتفاع عمود بر وتر (EH) مثلث فوق‌الذکر را مثلاً در نقطه‌ای مانند M قطع کند. در اینجا اگر H را رأس مثلث قائم‌الزاویه بگیریم و شعاع دایرهٔ مفروض را با R نمایش دهیم (مانند شکل) خواهیم داشت:



$$\frac{MH}{\sqrt{\pi}}=\frac{R}{۱}\ ,\quad MH=R\sqrt{\pi}\qquad (\pi=۳/۱۴۱۵)$$

همان‌طور که دیده می‌شود، MH طول ضلع مربع مطلوب است. به عبارت دیگر مساحت مربعی به اضلاع تقریباً (با تقریب قابل اغماض) برابر با مساحت دایره‌ای به شعاع مفروض (R) است.

روش عملی: در عمل کافی است مثلث قائم‌الزاویه‌ای بنا کنیم که یک زاویهٔ آن '۶۰°۳۴ (زاویهٔ دیگرش '۲۹°۲۶) و یک ضلع قائم آن برابر شعاع دایرهٔ مفروض باشد. در این صورت ضلع قائم دیگر مثلث برابر ضلع مربع معادل دایرهٔ مفروض است.

پی‌نوشت

1. Lindemann