جور دیگر باید دید

تمرین‌های متفاوت ریاضی

قسمت سوم

کتاب دهم، فصل پنجم: تابع

فهرست بخش‌ها: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن / دامنه و برد تابع‌ها / انواع تابع

مفهوم‌های اصلی: نمودار پیکانی / مجموعه زوج‌های مرتب و تابع / نمودار / مجموعه زوج‌های مرتب و نمودار تابع / دامنهٔ مجموعهٔ زوج‌های مرتب / برد مجموعه زوج‌های مرتب / دامنهٔ نمودار تابع / برد نمودار تابع / تابع‌های ساختنی / تابع‌های فرمولی/ دامنهٔ گسسته و دامنهٔ پیوسته / گسست دامنه / تابع‌های چندجمله‌ای / تابع‌های قطعه ـ قطعهٔ خطی/ تابع‌های چندضابطه‌ای

مهارت‌های اصلی: رسم تابع‌ها به کمک انتقال / درک تغییرات نمودار پس از تغییر متغیرهای خطی / تشخیص و محاسبهٔ دامنهٔ حداکثری یک فرمول

محتوای نگرشی: می‌توان تابع را به صورت مجموعه‌ای از نقاط در صفحه مختصات تصور کرد یا مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب یا یک فرمول یا یک نمودار پیکانی یا حتی اگر نمودار تابع، شکلی **معروف** باشد، مانند تابع‌های درجهٔ دوم که نمودارشان سهمی است، می‌توان همان شکل سهمی را یک بازنمایی تابع گرفت. تابع‌هایی که عدد می‌گیرند و عدد می‌دهند، یا تابع‌هایی که از یک مجموعه از اشیا به عددها می‌روند، یا تابع‌هایی که مجموعه‌ای از اشیا را به اشیای دیگری نسبت می‌دهند، فرق ماهوی دارند. تابع‌های «عدد مقدار» را می‌توان خانواده‌ای از عددها تصور کرد. تابع‌های روی دامنه‌ای از ساختارهای ریاضی، می‌توانند نقش **ناوردا** را بازی کنند. تابع‌هایی که عدد می‌گیرند و عدد می‌دهند قابل ترکیب هستند و ساختار ریاضی پیچیده‌تری را به دست می‌دهند.

محتوای شناختی: اینکه عدد می‌تواند روی محور حرکت کند، مفهوم متغیر را درون خود دارد که توسط آریابهاتا در قرن چهارم مطرح شد. اینکه محور عددها می‌تواند به‌عنوان مدلی برای زمان به کار برود، توسط خیام مطرح شد. اینکه نقطه‌های روی محور عددها همه می‌توانند عدد باشند، به کشف عددهای منفی انجامید و توسط **رافائل بومبلی** در نیمهٔ دوم قرن شانزدهم انجام شد. چرا خیام نکتهٔ بومبلی را کشف نکرد؟ چرا آریابهاتا نکتهٔ خیام را کشف نکرد؟ برای اینکه ساختارشناختی آنان هنوز برای درک این مفهوم‌های ریاضی آماده نبود. درک مفهوم‌های ریاضی پیش‌نیازهای شناختی دارد و شناخت را می‌توان برای به دست آوردن این پیش‌نیازهای شناختی تربیت کرد.

نکات آموزشی: باید مفهوم تابع را نه فقط با دامنه و برد از جنس عددی، بلکه با دامنه و برد ساختارهای ریاضی به دانش‌آموزان نشان داد. مثلاً نقطه‌های همرسی میانه‌ها،

ارتفاع‌ها، عمودمنصف‌ها و نیمسازها هریک تابعی از فضای مثلث‌های در صفحه به نقطه‌های صفحه هستند. یعنی مثلث می‌گیرند و نقطه می‌دهند و همه به حرکت پیوستهٔ مثلث احترام می‌گذارند. دایرهٔ محیطی و دایره‌های محاطی هریک تابعی از فضای مثلث‌ها در صفحه به دایره‌های صفحه هستند. مثلث می‌گیرند و دایره می‌دهند. چون مثلث، سه دایرهٔ محاطی خارجی دارد، به روش خوش تعریفی نمی‌توان یکی از آنان را به مثلث نسبت داد؛ مگر اینکه یک رأس مثلث را نشانه‌دار کنیم تا بفهمیم چگونه یکی از دایره‌های محاطی خارجی را انتخاب کنیم.

نکات نگرشی: تابع، نگاشتی از یک عالم به عالم دیگری است یا نگاشتی از یک عالم به خود آن عالم است. این عالم‌ها می‌توانند مجموعه‌ای از عددها باشند، یا مجموعه‌ای از شکل‌ها باشند، یا یک فضا باشند که مجموعه‌ای از نقاط است، و یا یک ساختار عددی باشند که مجموعه‌ای از عددهاست. اگر تابع از یک عالم به خودش برود، قابلیت پیدا می‌کند که با خودش ترکیب شود. بعد می‌شود مثلاً سرنوشت یک عدد یا شکل یا نقطه را تحت اثر تابع و توان‌های آن مطالعه کرد و مانند آن.

اگر تابع از یک ساختار عددی به یک ساختار عددی برود، این موضوع مطرح می‌شود که: آیا تابع به ساختار عددی احترام می‌گذارد یا خیر؟ مثلاً آیا به عمل جمع احترام می‌گذارد؟ یا به عمل ضرب احترام می‌گذارد؟ اگر تابع از یک ساختار هندسی به یک ساختار هندسی برود، این موضوع مطرح می‌شود که: آیا تابع به ساختار هندسی احترام می‌گذارد یا خیر؟ مثلاً آیا پیوسته است؟ یا آیا فاصله را حفظ می‌کند؟ و مانند آن. تابع‌های حافظ ساختار صحیح در ریاضیات بسیار مهم هستند.

محتوای شناختی: اینکه عدد می‌تواند روی محور حرکت کند، در ساختار عصب‌شناختی ذهن ما، به کمک استعاره‌ها، به این موضوع تعمیم پیدا می‌کند که ساختارها می‌توانند حرکت کنند. ساختارها می‌توانند جبری یا هندسی باشند. دانش‌آموزان با حرکت ساختارهای هندسی در دبیرستان آشنا می‌شوند. اما درک حرکت ساختارهای جبری نیز برای آن‌ها مشکل نیست. مثلاً نشاندن عددهای صحیح، در محور عددهای وابسته به انتخاب تصویر، عدد صفر و عدد یک است. همین انتخاب تمام محور را عددمند می‌کند.

اما روش‌های عددمندکردن محور عددها بی‌شمارند. با انتخاب مبدأ یک پارامتر و با انتخاب عدد یک پارامتری دیگر را داریم. یعنی مختصات‌گذاری محور عددها دو پارامتر دارد. پس هم بیگانه نیست و هم می‌توان این ساختار را به‌طور پیوسته حرکت داد. یا اگر فقط ساختار جمعی عددهای صحیح مدنظر باشد نه ساختار ضربی آن، با حرکت‌دادن یک روی محور عددهای حقیقی، چندین نشاندن عددهای صحیح در عددهای حقیقی به دست می‌آید که همان دگردیسی و حرکت یک ساختار جبری درون یک ساختار جبری دیگر است.

مصداق‌های دیگر حرکت ساختارهای جبری از ریاضیات دبیرستانی پیشرفته‌تر است. هرچند فهم حرکت گسسته فهم مجرد است و برای دانش‌آموزان در دسترس شناخت نیست، اما برای معلمان و آموزشگران قابل تسخیر است، و آن اینکه: ساختاری وابسته به یک عدد طبیعی یا یک عدد اول است که شما بتوانید آن عدد را با عددی دلخواه جایگزین کنید، یا آن عدد اول را با عدد اولی دلخواه جایگزین کنید. مثلاً عددهای به پیمانهٔ عددی طبیعی n دلخواه، یک گروه است که با یک پارامتر گسستهٔ n پارامتریزه می‌شود. و یا عددهای به پیمانهٔ عدد اول p، یک میدان است که باید پارامتر گسسته p که در مجموعهٔ عددهای اول تغییر می‌کند، پارامتریزه می‌شود و مانند آن.

نکات آموزشی مسئلهٔ ۱. به جای نسبت دادن یک شیء هندسی به یک شیء هندسی دیگر، می‌توان به یک فضا، یک فضای دیگر را نسبت داد. مثلاً به خط $\mathbb{R}$ حاصل‌ضرب $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ را که می‌شود یک صفحه نسبت داد، به صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ حاصل‌ضرب $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ را نسبت داد که می‌شود فضای چهاربعدی، به بازهٔ بستهٔ I یک مربع را نسبت داد که می‌شود $I\times I$ و به هر فضای X می‌توان $X\times X$ را نسبت داد. این هم یک تابع خواهد بود. مثلاً به دایرهٔ C یک چنبرهٔ $C\times C$ را نسبت می‌دهد و به مربع S یک مکعب چهاربعدی $S\times S$ را نسبت می‌دهد و مانند آن.

نکات آموزشی مسئلهٔ ۲. بررسی کنید در هریک از این روش‌های نسبت‌دادن، اگر شیء مبدأ را به‌طور پیوسته حرکت دهیم، آیا شیء نسبت داده شده به آن هم به صورت پیوسته حرکت می‌کند؟ بعد این شرط وابستگی پیوسته را حذف کنید و خواهید دید می‌توان در هریک از موارد به‌سادگی تابعی با شرایط خواسته شده نسبت داد. در مورد فرق فضا و زیرفضا

با یک شیء هندسی که داخل یک فضای هندسی نشسته یا یک شـــیء هندسی که زیر شیء از یک شیء بزرگ‌تر است با دانش‌آموزان صحبت کنید.

بعد در مورد حرکت شـــیء در فضا و حرکت زیرفضا در فضا و حرکت یک زیرشـــیء داخل یک شیء بزرگ‌تر مثال‌هایی بزنید. مثلاً خط که در صفحه حرکت می‌کند و یا صفحه که در فضا حرکت می‌کند، مثالی از حرکت زیرفضا در داخل یک فضاست. یا یک دایرهٔ عظیمه که روی یک کره حرکت می‌کند و در همـــان حال حرکت دایرهٔ عظیمه باقی می‌ماند، مثالی از حرکت زیرشیء در یک شیء بزرگ‌تر است. حرکت یک دایره در صفحه که می‌تواند شعاع آن ثابت باشد و مرکزش حرکت کنـــد یا اینکه هر دو تغییر کنند، مثالی از حرکت شـــیء در فضاست. مهم است هر دو حالت مطرح شوند و با هم مقایسه شوند تا درک دانش‌آموز از مفهوم حرکت تعمیق شود. حتی اینکه دایره می‌تواند به‌طور پیوسته شعاعش بزرگ شود و در یـــک زمان متناهی به یک خط میل کند، باید پیش چشـــم دانش‌آموز قرار داده شود.

کتاب دهم / فصل ششم: شمارش بدون شمردن

فهرست بخش‌ها: شمارش/ جایگشت / ترکیب

مفهوم‌های اصلی: اصل جمع / اصل ضرب / جایگشـــت / ترکیب / فاکتوریل

مهارت‌های اصلی: شمارش به کمک اصل جمع / شمارش به کمک اصل ضرب / شمارش جایگشت‌ها / درک فرمول‌های شمارش توسط ترکیب‌ها

محتوای نگرشی: شمارش متناهی در قسمتی از ریاضیات کـــه «ترکیبیات» نام دارد رده‌بندی می‌شـــود. از طرف دیگر این ریاضیات، گسســـته اســـت و در برابر ریاضیات پیوسته قرار دارد؛ مانند هندســـه و نمودارهای تابع‌های چندجمله‌ای که پیوسته هســـتند. همچنین، این ریاضیات، متناهی است و در برابـــر ریاضیات نامتناهی قرار دارد. مثلاً چندجمله‌ای‌ها روی عددهای صحیح به ریاضیات نامتناهی مربوط می‌شوند. امـــا اگر آن‌ها را روی عددهای صحیـــح به پیمانهٔ p عدد اول کاهش دهیم، به ریاضیات متناهی مربوط می‌شوند. همان‌طور که شـــمارش در ریاضیات متناهی معنی دارد، شـــمارش در ریاضیات نامتناهی و ریاضیات پیوسته هم معنی پیدا می‌کند.

محتوای شناختی: یکی از ســـبک‌های شناختی، سبک شناختی پیوســـته در برابر سبک‌شناختی گسسته است. این سبک‌های شناختی در انسان‌شناسی صاحبان آنان هم بسیار تأثیرگذارند، اما در کار ریاضی و ریاضی‌دانان هم خودشان را نشان می‌دهند. شاخه‌های ریاضی مربوط به جبر و ترکیبیات به ریاضیات گسســـته مربوط می‌شـــوند و شاخه‌های ریاضی مربوط به هندســـه و آنالیز به ریاضیات پیوســـته مربوط‌اند. سبک‌های شـــناختی دیگری هم وجود دارند. یک رده‌بندی دیگر ســـبک‌های شـــناختی، سبک‌شـــناختی تصویری در برابر سبک‌شناختی کلامی اســـت. شاخه‌های جبر و آنالیز و زیرشـــاخه‌های مربوط به آن‌ها به تفکر کلامی و شـــاخه‌های هندســـه و ترکیبیات و زیرشاخه‌های مربوط به آن‌ها به تفکر تصویری تعلق می‌گیرند.

نکات آموزشی: اصل جمع و اصل ضرب، مشابه پیوسته دارند و مهم است که دو رودخانهٔ ریاضیات پیوسته و ریاضیات گسستهٔ موازی با هم، به دانش‌آموزان معرفی شوند. مثلاً اینکه

محاسبهٔ مساحت مستطیل صورت پیوسته و گسسته دارد و صورت گسسته آن چیزی در همان مایه‌های اصل ضرب است، باید برای دانش‌آموزان به تفصیل توصیف شود. اینکه تابع فاکتوریل برای nهای بزرگ نسبت به n چگونه رشد می‌کند که در فرمول استرلینگ بیان شده است، تصور خوبی به دانش‌آموز می‌دهد که !n چقدر سریع رشد می‌کند.

مفهوم جایگشت‌ها هم مشابه پیوسته دارد. از بازه‌ای به طول l می‌توان زیرمجموعه‌های ناپیوستهٔ بسیاری به طول k که $k \le l$ است انتخاب کرد. می‌توانید این زیرمجموعه‌ها را اجتماع متناهی بازهٔ بسته بگیرید و به‌عنوان یک فضای هندسی مطالعه کنید و شباهت آن را با جایگشت‌های k عضو از l عضو بررسی کنید. البته در مثال بالا که حالت پیوسته مورد نظر است، l و k لزوماً عددهای طبیعی نیستند. ولی می‌توان آن‌ها را عددهای طبیعی هم گرفت و بازه‌های بسته را هم محدود به دو عدد طبیعی گرفت که به تابع‌های افراز شبیه خواهند شد.

نکات نگرشی: مفهوم شمارش و مفهوم حجم مفهوم‌های متناظر در ریاضیات گسسته و ریاضیات پیوسته هستند. به‌طور متناظر، شکل‌ها هم می‌توانند پیوسته یا گسسته باشند. مثلاً مجموعهٔ چند نقطه در صفحه هم یک شکل است. بنابراین یک شکل هندسی لزومی ندارد هم‌بند یا به هم پیوسته باشد. مثلاً اجتماع از هم جدای دو مثلث هم یک شکل است. عددهای مثلثی، مربعی، مخمسی و مسدسی صورت عددی شکل‌های پیوسته هستند. این دنباله‌های عددی امروز به فراموشی سپرده شده‌اند. عددهای مثلثی تا قرن نوزدهم نیز مهم بودند. عددهای مربع کامل امروز نیز در نظریهٔ عددها اهمیت دارند.

نکات شناختی: سبک‌شناختی کلامی در برابر سبک‌شناختی تصویری به ما می‌آموزد که جبر و هندسه دو شاهراه موازی در ریاضیات هستند و هر حقیقتی در یکی تجلی کند، در دیگری نیز متجلی خواهد شد. سبک شناختی گسسته در برابر سبک شناختی پیوسته به ما می‌گوید هر حقیقتی در ریاضیات پیوسته، مشابه گسسته هم دارد. توجه کنید که این مشابه گسسته، لزوماً به معنی متناهی‌بودن آن نیست.

موجودات گسسته می‌توانند نامتناهی هم باشند. مثلاً مجموعهٔ عددهای صحیح مشابه گسسته مجموعهٔ عددهای حقیقی است که خود موجودی پیوسته است. یا شبکهٔ عددها با مختصات صحیح در صفحه، مشابه گسسته صفحهٔ دوبعدی است و یا شکل‌های پیوسته، مشابه گسسته دارند. مثلاً مستطیل و مکعب مستطیل و متوازی‌السطوح مشابه گسسته دارند و مانند آن.

این توازی شاهراه پیوسته و شاهراه گسسته تا ریاضیات عالی ادامه دارد. برای مثال، قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، صورت پیوسته و صورت گسسته دارد. صورت پیوسته انتگرال، مساحت و صورت گسستهٔ آن، مجموع است. صورت پیوسته مشتق شیب خط مماس و صورت گسستهٔ آن تابع تفاضلی است. قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال صورت گسسته‌اش همان جمع تلسکوپی است.

بنابراین دانش‌آموز باید آماده باشد برای هر محتوای پیوسته مشابه آن را جست‌وجو کند و این نتیجهٔ سبک‌های شناختی انسانی است. یعنی باید دانست که پیوسته و گسستگی نتیجه بر خورد ذهن ما با دنیاست و حقیقت بیرونی به آن صورتی که بر همه چیز حاکم باشد ندارد. یعنی نمی‌توان گفت همهٔ دنیا پیوسته است و هیچ چیز گسسته‌ای وجود ندارد یا همهٔ دنیا گسسته است و هیچ چیز پیوسته‌ای ندارد. حتی این‌طور است که یافته‌های فیزیک و شیمی در قرن بیستم ذهن را به سمت گسسته‌بودن طبیعت می‌کشاند.

نکات آموزشی مسئله ۱: در مورد فرمول اویلر $F-E+V=۲$ که در همهٔ کاشی‌کاری‌های کره برقرار است، صحبت کنید. در اینجا F نمایندهٔ تعداد وجوه و E نمایندهٔ تعداد یال‌ها و V نمایندهٔ تعداد رأس‌هاست. دربارهٔ اینکه چنین حکمی را چگونه می‌شود اثبات کرد، صحبت کنید و دربارهٔ اینکه برای هر کاشی‌کاری یا مثلث‌بندی غیرمتقارن کره هم چنین فرمولی برقرار است، نکاتی را مطرح کنید. در مورد حجم‌های افلاطونی که «دوگان» هم هستند نیز مطالبی را عنوان کنید.

نکات آموزشی مسئلهٔ ۲: فرمول $F-E+V=۲$ را در تمام مثال‌ها چک کنید و صحت آن‌ها را با محاسبه نشان دهید. در مورد اینکه هر کاشی‌کاری یک کاشی‌کاری دوگان دارد، مثال‌هایی را مطرح کنید و در جدول شکل‌ها نشان دهید دوگان بعضی از کاشی‌کاری‌ها در همین جدول موجود است و دوگان بعضی دیگر در چارچوب کاشی‌کاری با شکل‌های متقارن قرار نمی‌گیرد. یعنی کاشی‌های آن متقارن نمی‌شوند.

نکات آموزشی مسئله‌های ۳ و ۵: مفهوم قطرهای داخلی را برای یک چندوجهی دلخواه مطالعه کنید و در مثال‌هایی بشمارید.

نکات آموزشی مسئلهٔ ۴: در مورد تقارن‌های همهٔ احجام افلاطونی به سؤال‌های مشابه پاسخ دهید و بعد نشان دهید بسیاری از شکل‌های مسئلهٔ ۲ تقارن‌هایی متناظر با احجام‌های افلاطونی دارند. بعد سعی کنید به هریک از این شکل‌ها یک حجم افلاطونی نسبت دهید که رأس‌های آن روی همان کره باشند و تقارن‌های شکل، تقارن‌های آن حجم افلاطونی را بدهد، و برعکس، هر تقارن آن حجم افلاطونی، تقارنی از کاشی‌کاری را به دست بدهد.