جور دیگر باید دید

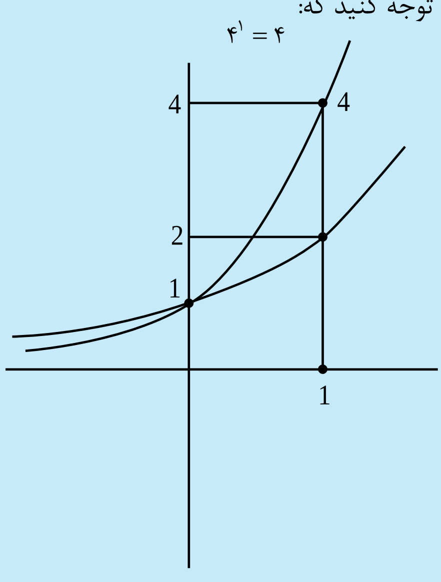
تمرین‌های متفاوت ریاضی

قسمت سوم

پاسخ مسئله‌های کتاب یازدهم
فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی

پاسخ مسئلهٔ ۱

الف) توجه کنید که: $۲^۱ = ۲$ و $۴^۱ = ۴$



ب) $۲^{۲x} = ۴^x$. پس کافی اســـت در $y = ۲^x$ قرار دهیم: $x = ۲X$ و Y y تا $y = ۴X$ به دست آید.

ج) $a^x = e^{x\ln a}$. پس با تغییر متغیر خطی می‌توان از یک تابع‌نمایی به همه رسید.

د) اگر: $y = ka^x + 1$ ، آنگاه:

$$y - 1 = a^{x+\log_a k} = e^{\ln a(x+\log_a k)}$$

کافی است قرار دهیم: $y - 1 = Y$ و $X = \ln a(x + \log_a k)$ تا تابع ما به $Y = e^X$ تبدیل شـــود. پس چون ترکیب هر دو تغییر متغیر خطی به شکل بالا باز هم تغییر متغیر خطی به شکل بالاست، پاسخ سؤال مثبت است.

پاسخ مسئلهٔ ۲

الف) اگر: $y = \log_۲^x$ ، پـــس: $۲^y = x$ و اگر: $y = \log_۴ x$، پـــس: $۴^y = x$. اگر هم در اولی قرار دهیم: $y = ۲Y$ و $x=X$ به دومی تبدیل می‌شود.

ب) بله تغییر متغیر لازم در قســـمت (الف) محاسبه شده است.

ج) اگر: $Y = \log_۲^x$ ، آنگاه: $e^{y\ln a} = a^y = x$. کافی است بگیریم: $Y = y^{\ln a}$ و $x=X$ تا داشته باشیم: $Y=\ln X$. پس با ترکیب دو تغییر متغیر خطی به شـــکل بالا یک تغییر متغیر خطی به دست می‌آید که کار را تمام می‌کند.

د) اگر: $y = k\log_a x + 1$ ، آنگاه:

$$e(\frac{y-1}{k})^{\ln a} = a^{\frac{y-1}{k}} = x$$

پس باید قرار دهیم: $Y=(\frac{y-1}{k})\ln a$ و $x=X$ تا به تابع $Y=\ln X$ برگردیم.

پاسخ مسئلهٔ ۵

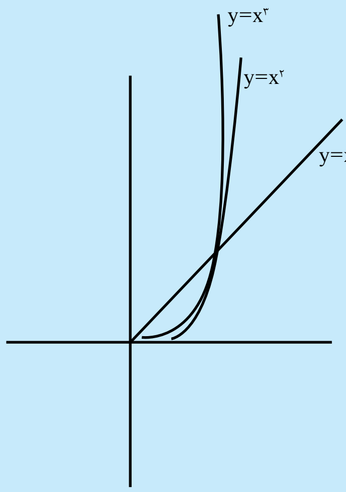
الف) تعداد مربع‌ها در مرحله n-ام برابر 4^{n-1} است. حال نمودار تابع $y=4^{x-1}$ را به‌عنوان یک تابع پیوسته رسم کنید.

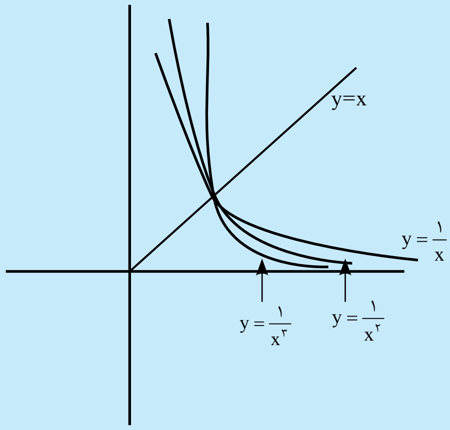
ب) طول ضلع یک مربع کوچک، در مرحلهٔ n-ام برابر $\frac{1}{2^n}=2^{-n}$. حال تابع $y=2^{-x}$ را به‌عنوان یک تابع پیوسته رسم کنید.

ج) باید ثابت کنیم برای هر عدد طبیعی n از جایی به بعد داریم: $4^{x-1}>x^n$. می‌دانیم از جایی به بعد: $4^{x-1}=2^{2x-2}>2^x$. پس کافی است نشان دهیم از جایی به بعد: $2^x>x^n$. از دو طرف $\log_2$ می‌گیریم و باید نشان دهیم: $x>n\log_2 x$. قرار می‌دهیم: $\frac{x}{n}=X$ و باید نشان دهیم: $X>\log_2 nX$ یا: $X>\log_2 X+k$. اینجا روشن است که برای هر k از جایی به بعد این نامساوی برقرار است. کافی است به نمودار $y=\log_2 x$ توجه کنید و آن را با نمودار $y=x$ مقایسه کنید.

د) باید ثابت کنیم بر هر عدد طبیعی n از جایی به بعد داریم: $\frac{1}{2^x}<\frac{1}{x^n}$ که همان نامساوی (ج) است.

هـ)





پاسخ مسئلهٔ ۶

فقط باید نشان دهیم که از جایی به بعد داریم: $k\log_9 x+b<x$ که این از شکل نمودار روشن است.

پاسخ مسئلهٔ ۷

از جایی به بعد نامساوی‌های زیر برقرار است:

$$\log(2\log x)<\log x^2<2^{\log_{10} x}<x+2<x^2-5<3^x<2^{2x}$$

پاسخ مسئلهٔ ۸

الف) رشد جمعیت و زوال جمعیت در بسیاری از معادلات دیفرانسیل دیده می‌شوند؛ پدیده‌های تکثیر سلول‌ها، نیمه‌عمر رادیواکتیو، و مانند آن.

ب) رشد قطر درختان برحسب سن آن‌ها چندجمله‌ای است.

ج) در اینترنت فرمول استرلینگ را جستوجو کنید.