ریاضی و مسئله
دورهٔ ۲۹ | شمارهٔ ۸

جور دیگر باید دید

تمرین‌های متفاوت ریاضی

آموزش معلمان

خسرو داودی، آرش رستگار

کتاب هفتم- فصل نهم، آمار و احتمال

فهرست بخش‌ها:

جمع‌آوری و نمایش داده‌ها
نمودارها و تفسیر نتیجه‌ها
احتمال با اندازه‌گیری شانس
احتمال و تجربه

مفاهیم اصلی:

داده‌های آماری
مقدار تقریبی
میانگین
دو رویداد هم شانس

مهارت‌های اصلی:

جمع‌آوری داده‌های آماری
نمایش داده‌ها توسط نمودار دایره‌ای
نمایش داده‌ها توسط نمودار میله‌ای
نمایش داده‌ها توسط نمودار خط شکسته
محاسبهٔ احتمال رویداد

محتوای نگرشی:

خلاصه‌کردن داده‌ها هم به روش ناورداهای عددی و هم به روش نمایش نموداری به ما کمک می‌کند که نظم آن‌ها را بهتر بفهمیم و بتوانیم آن‌ها را تحلیل کنیم. این فقط داده‌های زندگی روزمره نیستند که با نمایش آن‌ها بهتر می‌فهمیمشان، بلکه استفاده از ناورداهای عددی و نمایش داده‌ها ابزاری مهم در تحقیقات ریاضی نیز می‌باشد. گاهی برای الگویابی و حدس‌زدن صورت قضایا ناچاریم محاسباتی فراوان انجام دهیم و در حالاتی مقادیر دنباله‌ای را محاسبه نماییم.

محتوای شناختی:

لفظ آمارگر کلمه‌ای است که از زبان پهلوی باستان به یادگار مانده است. آمارگر نام فردی بوده است که از طرف دولت داده‌ها را جمع می‌کرده تا حکمرانان بتوانند برآورده‌شدن نیازهای جامعه را مدیریت کنند. شاید امروز جایگزین این کلمه چیزی مانند ساختارگر باشد که کارش احصاء کلیهٔ ساختارهای جامعه می‌باشد. شاید ساختارگر همان چیزی باشد که به آن جامعه‌شناس می‌گویند. البته وظیفهٔ ریاضی‌دان هم ساختارگری است. ریاضی‌دان ساختارساز و ساختارشناس است. از این رو می‌توان او را ساختارگر هم نامید.

نکات آموزشی:

نگاه دانش‌آموز به داده‌های عددی باید موسع باشد. هم باید آن‌ها را در بستر زمان ببیند و هم اینکه بتواند از زبانی به زبانی ترجمه کند و هم اینکه بتواند از آن‌ها خرد استخراج نماید و آن‌ها را ادراک‌پذیر کند. دانش‌آموز باید یاد بگیرد فرق بین داده‌های خام و غیر آن چیست.

نکات نگرشی:

این فرهنگ که باید همهٔ داده‌ها جمع‌آوری شوند و ساختار آن‌ها استخراج شود هم در زندگی روزمره و هم در ریاضیات بسیار کارآمد است. در یک نظریهٔ ریاضی شما می‌توانید بپرسید چه حالات خاصی را مهم است به‌طور مبسوط محاسبه نمایید تا به شما دید و بینش صحیحی در مورد حالت کلی بدهد و ساختارهای پنهان مسئله را بیرون بکشد. در زندگی روزمره هم می‌توان پرسید که چه داده‌هایی ارزش مطالعه‌کردن دارند و چگونه باید آن‌ها را جمع‌آوری

کرد و یا حتی زندگی روزمرهٔ مردم را به چه سمت و سویی هدایت کرد تا آن داده‌های مهم جمع‌آوری شود.

نکات شناختی:

مطالعهٔ ساختارهای پنهان در داده‌ها، در انسان، در جامعه در طبیعت از مهم‌ترین کاربردهای عقل ساختارساز و ساختارشناس است که تنها جزئی از شناخت بشری را تشکیل می‌دهد. هدف ریاضی این است که شناخت ما برای بیرون کشیدن و فهمیدن این ساختارها آماده نماید. اما وقتی ریاضی‌دان شناختی ورزیده پیدا کرد که برای مطالعهٔ هر چیز آماده شده است، نباید فکر کند که می‌تواند در مورد همه چیز نظر بدهد.

مثلاً در اصول و مبانی چنین است که یک ریاضی‌دان می‌تواند بهتر از یک جامعه‌شناس ساختارهای پنهان در جامعه را بیرون بکشد. اما شناخت ورزیده کافی نیست. ریاضی‌دان باید بین جامعه‌شناسان زندگی کند و آراء آنان را بفهمد و جامعه را بشناسد و جامعه‌شناسی را زندگی کند، تا بعد بتواند به جامعه‌شناسان خدمت شناختی بکند. در مورد سایر حوزه‌های معرفتی هم همین‌طور است. نباید ورزیدگی شناختی ریاضی‌دان باعث شود که فکر کند بدون زحمت می‌تواند خدماتی به اندیشمندان جامعه برساند. بدون آنکه در کنار آنان زندگی کند و علوم و نگاه ایشان را بشناسد. این نگاه به موضوع اصلی درس هم بر می‌گردد. آمار رشته‌ای تخصصی است. این‌طور نیست که هر کس آمار خواند در همهٔ حوزه‌های آمار حرفی برای گفتن داشته باشد. برای مثال، آمار در علوم انسانی یک علم است و آمار در حوزهٔ داده‌های نفت چیز دیگری است که هر دو با آمار در حوزهٔ آب تفاوت اساسی دارند. این تفاوت هم در فلسفهٔ آمار است و هم در تکنیک‌هایی که استفاده می‌شود و هم در روش‌های جمع‌آوری داده‌ها و هم در اینکه اصلاً داده در این حوزه‌ها یعنی چه و هم در اینکه چگونه می‌توان از داده‌ها معرفت بیرون کشید. این‌ها نکاتی هستند که باید معلم به دانش‌آموزان خود گوشزد نماید تا هم به اهمیت علم آمار پی ببرند و هم خود را برای دریافت چنین نوعی از معرفت آماده بنماید، هم آمادگی شناختی مدنظر است و هم آشنایی با پیش‌نیازها و هم درک درستی از مفهوم داده در هر حوزهٔ شناختی که نیاز به مطالعهٔ عمیق آن رشته دارد.

نکات آموزشی مسئلهٔ ۱: از نرم‌افزار جئوجبرا برای پیاده‌سازی چنین نمودارهایی کمک بگیرید.

نکات آموزشی مسئلهٔ ۲: نمودارهای روی دایره را می‌توان روی چنبره نیز که دایره در دایره است رسم کرد.

نکات آموزشی مسئلهٔ ۳: تنوع روش‌های دسته‌بندی داده‌ها مورد تأکید است.

نکات آموزشی مسئلهٔ ۴: تنوع روش‌های هندسی‌سازی پرانتزگذاری‌ها مورد تأکید است.

نکات آموزشی مسئلهٔ ۵: با جئوجبرا یک تقسیم چنبره‌ای بسازید.

نکات آموزشی مسئلهٔ ۶: داده‌های مسطح می‌توانند روی نقشهٔ جغرافیایی هم رسم شوند. به مسئلهٔ ۷ رجوع کنید.

نکات آموزشی مسئلهٔ ۷: چندین نمودار مختلف را که روی کرهٔ جغرافیای معنی پیدا می‌کنند تعریف کنید. آن‌ها را روی کره توسط جئوجبرا به اجرا بگذارید و با کمک ماوس امکان چرخاندن کره و دیده‌شدن پشت آن را فراهم آورید.

کتاب هشتم- فصل هشتم، آمار و احتمال

فهرست بخش‌ها:
دسته‌بندی داده‌ها
میانگین داده‌ها
احتمال با اندازه‌گیری شانسی
بررسی حالت‌های ممکن

مفاهیم اصلی:
داده‌ها
میانگین داده‌ها
شانس یا احتمال عددی

مهارت‌های اصلی:
نمایش داده‌ها توسط نمودارهای مختلف
دسته‌بندی داده‌ها
محاسبهٔ میانگین با کمک دسته‌بندی داده‌ها
محاسبهٔ احتمال پیشامد

محتوای نگرشی:
مفهوم میانگین مشابه مفهوم مرکز ثقل در فیزیک و مشابه مفهوم امید ریاضی در احتمال است. در مثال‌های گسسته برای محاسبهٔ میانگین احتیاج به مجموع گرفتن و در مثال‌های پیوسته احتیاج به انتگرال‌گرفتن می‌باشد. همین اصل برای محاسبهٔ مرکز ثقل و یا امید ریاضی صادق است. اما می‌توان میانگین را هم به کمک دسته‌بندی داده‌ها و محاسبهٔ میانگین هر دسته انجام داد. این کار مشابه توسط یک انتگرال چندگانه به صورت ترکیب پشت سر هم چند انتگرال یک‌گانه است که به قضیهٔ فوبینی مربوط می‌شود.

محتوای شناختی:
تنوع نمایش داده‌ها بسیار به تنوع فرمول‌بندی‌های یک نظریه شباهت دارد. البته نمایش‌های مختلف داده‌ها تصویری هستند. اما فرمول‌بندی‌های یک نظریه معمولاً مفهوی و کلامی هستند. همان‌طور که بین دو نظریه ممکن است آنالوژی برقرار باشد. در این صورت باید بررسی کرد که آیا این مشابهت دلایل عمیق و فلسفی دارد یا خیر.

نکات آموزشی:
در بسیاری از صحنه‌ها جمع‌کردن داده‌ها معنی دارد ولی میانگین معنی نمی‌پذیرد. یک مثال که در حد فهم دانش‌آموز باشد میانگین چند زاویه است برای این کار شاید لازم باشد مفهوم دایرهٔ مثلثاتی را در حد نیاز دانش‌آموزان برای ایشان معرفی نمایید. روی چنبره که به شکل دایره در دایره است نیز جمع‌کردن معنی می‌پذیرد ولی میانگین خوش‌تعریف نیست. آشنایی با صحنه‌هایی که در آن تقسیم معنی ندارد برای دانش‌آموز درس‌آموز است.

نکات نگرشی:
وجود مرکز ثقل چیزی عمیق‌تر از مفهوم میانگین است چون هندسه در آن وارد می‌شود. اینکه می‌توان فرض کرد داده‌ها در یک مرکز ثقلی متمرکز هستند به فهم صحیح داده‌ها کمک می‌کند. بنابراین نگاه، داده‌ها ممکن است چند بعد داشته باشند و در هر یک از این ابعاد بتوان برای آن‌ها میانگین تعریف کرد. در نهایت هم این مرکز ثقل داده‌ها باید معنایی مستقل از تشخیص ما از ایجاد مختلف داده و میانگین‌گیری در این ابعاد باشد. این نگاه هندسی به داده‌هاست که چنین بینشی می‌دهد. ضمناً همهٔ این نکات باید در بستر زمان فهمیده شود.

نکات شناختی:
تنوع نمایش داده‌ها مانند تنوع فرمول‌بندی‌های یک تئوری در یک پارادایم مشترک انجام می‌شود. اما آنالوژی ساختار داده‌ها مانند آنالوژی بین تئوری‌ها می‌تواند در چند پارادایم مختلف برقرار باشد. همان‌طور که بین تئوری‌های آنالوژگ، حقیقت پشت صحنه‌ای هست که در آن‌ها تجلی می‌کند، بین

داده‌های آنالوژی هم حقیقت پشت صحنه‌ای در کار است. گاهی می‌توان با یک مدل ریاضی مشترک این حقیقت پشت صحنه را شکار کرد.

در مورد شناخت ساختارهای پنهان در داده‌ها ریاضیات عمیقی به کار می‌رود. مثلاً از روش‌های توپولوژی جبری ناورداهایی به داده‌ها نسبت داده می‌شود. اینکه دو مجموعه از داده ناورداهای مشترکی داشته باشند آن‌ها را به آنالوژی نزدیک‌تر می‌کند. همان‌طور که تئوری‌پردازی باید در بستر یک نگاه بلندمدت پرسش‌گرانه انجام شود وگرنه تئوری‌ها بی‌مایه و ضعیف از آب درمی‌آیند، جمع‌آوری و مطالعهٔ داده هم باید در بستر یک نگاه بلندمدت و پرسپکتیو آینده‌نگر انجام شود، وگرنه کُنه ارزش داده‌ها فهم نمی‌شود و یا حتی داده‌ها به درستی استخراج نخواهند شد. این از نکات مهمی است که در فلسفهٔ آمار باید مدنظر قرار بگیرد که هر مطالعهٔ آماری باید در بستر یک مطالعهٔ بلندمدت و یک نگاه سرتاسری و عمیق قرار بگیرد. بدون چنین پرسپکتیوی حتی نمی‌توان فهمید داده‌های مهم چیستند و چگونه باید استخراج شوند و به چه زبانی باید استخراج شوند و چگونه باید از این داده‌ها ساختارهای درونی آن‌ها را بیرون کشید و باید منتظر دسترسی به چه ساختارهایی بود. یک نکتهٔ مهم هم نباید مغفول بماند که فقط ساختارهای پنهان در داده‌ها کفایت نمی‌کند. شاکلهٔ کلی و کل‌نگرانهٔ داده‌ها و حرکت این شاکله در بستر زمان مجردتر از ساختارهاست و به زبان فرم و صورت و رسم و نمودار باید فهمیده شود که شاید اهمیت آن بیشتر هم باشد.

نکات آموزشی مسئلهٔ ۱: برای nهای مختلف نشان دهید که $k\frac{۳۶۰^\circ}{n}$ برای k برابر ۰، ۱، ...، $n-1$ بعد از nبار جمع‌شدن با خودش روی زاویهٔ صفر درجه قرار می‌گیرند.

نکات آموزشی مسئلهٔ ۲: مسئله را به‌طور عملی با یک سطح فلزی و یک لبهٔ تیز مانند لبهٔ خط‌کش به آزمایش بگذارید.

نکات آموزشی مسئلهٔ ۳: پیش روی دانش‌آموزان برای مفهوم میانگین وزن‌دار یک تئوری بسازید.

نکات آموزشی مسئلهٔ ۴: محاسبهٔ میانگین را می‌توان با دسته‌بندی داده‌ها ساده‌تر کرد. آیا در مورد شاخص‌های آماری دیگر مانند میانه و مد چنین است؟ چه فرقی وجود دارد؟

نکات آموزشی مسئلهٔ ۵: اینکه دایره روی دایرهٔ دیگری با nبار پیچ خوردن نگاشته شود با کمک نخ پیچیده شده دور یک میله به‌طور عملی پیش روی دانش‌آموزان به نمایش بگذارید.

نکات آموزشی مسئلهٔ ۶: تعداد زوج‌های
$(k\frac{۳۶۰^\circ}{n}\ ,\ l\frac{۳۶۰^\circ}{n})$
برای k و l که در $\{۰, ۱, \dots, n-۱\}$ تغییر می‌کنند دقیقاً برابر $n^۲$ است .

کتاب هشتم- فصل نهم، دایره

فهرست بخش‌ها:

خط و دایره
زاویه‌های مرکزی
زاویه‌های محاطی

مفاهیم اصلی:

خط
دایره
خط مماس بر دایره
شعاع دایره
زاویهٔ مرکزی
کمان روبه‌رو به زاویهٔ مرکزی
زاویهٔ محاطی
کمان روبه‌رو به زاویهٔ محاطی

مهارت‌های اصلی:

محاسبهٔ زاویهٔ مرکزی با کمک کمان روبه‌رو
محاسبهٔ زاویهٔ محاطی با کمک کمان روبه‌رو

محتوای نگرشی:

دایره از مفاهیمی است که توسط انسان انتزاع شده است وگرنه در طبیعت دایرهٔ کامل وجود ندارد. اولین قضیه‌ها دربارهٔ دایره توسط تالس مطرح شدند. مثلاً اینکه هر قطر اصلی آن را به دو نیمهٔ قابل انطباق تقسیم می‌نماید. عددمندی زاویه با عددمندی فاصله دو مصداق اصلی اندازه‌گیری در هندسه هستند. اما فاصله روی محور اعداد زندگی می‌کند و اندازهٔ زاویه روی دایرهٔ مثلثاتی زندگی می‌کند که طبیعت بسیار متفاوتی با هم دارند. تساوی فاصله‌ها و تساوی زاویه‌ها لزوماً لازم نیست عددمند مطرح شوند. اما عددمندکردن آن‌ها بسیار به پیشرفت ریاضیات کمک کرده است.

محتوای شناختی:

آشنایی با خط و دایره و ارتباط آنان و زوایای محاطی و مرکزی و ارتباط آنان در کنار آشنایی با مثلث مقدمات فهم تئوری هندسه اقلیدسی را برای دانش‌آموز فراهم می‌کنند. با این مثال می‌توان به دانش‌آموزان فهماند که انتظارات از یک تئوری چیست. مثلاً با اشیاء ساده و کمی باید بتوان مفاهیم بسیار و محاسبات بسیار و قضیه‌های بسیاری را به دست داد. آشنایی با تفکر اصل موضوعه‌ای که توسط ارسطو ابداع شد و بعد توسط اقلیدس به اجرا گذاشته شد به درک مفهوم نظریه بسیار کمک خواهد کرد.

نکات آموزشی:

دانش‌آموز باید درک درستی از اینکه چه فهمی یا فهم‌هایی از دایره کلیدی هستند و ابعاد دیگر شناخت ما از دایره بر آن‌ها استوار شده‌اند، پیدا کند. این بدان دلیل است که بداند در تئوری‌سازی‌های مشابه کدام احکام اهمیت بیشتری دارند. مثلاً اینکه دایره را که معادلهٔ درجهٔ دوم دارد با دو خط متقاطع جایگزین کنیم به نظر بسیار منطقی می‌رسد، اما اینکه دو زاویهٔ مخاطی روبه‌رو به یک کمان مشترک برابرند، در دو خط متقاطع مشابهی ندارد که باعث می‌شود بسیاری از ابعاد شناخت و امکانات ما در مطالعهٔ دایره در هنگام جایگزینی با دو خط متقاطع از دست برود.

نکات نگرشی:

مفاهیم خط، دایره، نقطه و حرکت پیوستهٔ نقطه روی خط توسط بشر انتزاع شده است اما بر مبنای الگوی عالم بالایی و باطنی بوده است و تجلی حقیقتی بالاتر است. مثلاً می‌توانستیم در دایره همواره فرض کنیم نقطه‌ای روی محیط با سرعت ثابت دوران می‌کند یا کل نقاط در حال دوران هستند یا در مورد خط، نقطه‌ای روی خط با سرعت ثابت حرکت می‌کند یا کل نقاط در حال حرکت هستند. با این روش اشیاء ریاضی متفاوتی ساخته می‌شوند. اما کارآمدی لازم را برای ایفای نقش یک آینه برای فرمول‌بندی تئوری‌هایی که حقایق عالم بالا در آن‌ها متجلی شوند را می‌توانستند داشته باشند.

نکات شناختی:

هندسهٔ اقلیدسی از لحاظ شناختی تأثیرات مهمی بر

تفکر بشری گذاشته است و تالس و افلاطون و ارسطو هم در این بین نقش مهمی ایفا کرده‌اند و لازم اســت دانش‌آموزان هندســهٔ اقلیدسی را به‌عنوان یک سنت تئوری‌پردازی بشری عمیقاً درک کنند.

ریاضیــات اصــل موضوعه‌ای و حتــی نگرش اصل موضوعه‌ای در علم نزد ارسطو و مفاهیم فرضیه‌سازی و تئوری‌پردازی همه در اینجا تبلور پیدا کرده‌اند. اینکه چه فرضیاتی قابل قبول هستند و چه فرضیاتی ارزشمند هســتند و چه فرضیاتی همهٔ حکــم را در خود پنهان کرده‌اند و ارزشی ندارند همه نکاتی هستند که می‌توان در بستر هندسهٔ اقلیدسی به دانش‌آموزان آموزش داد و این سطح هندسهٔ اقلیدسی که در مدارس ما آموزش داده می‌شــود، واقعاً به ایــن کار نمی‌آید. ما نباید در مورد اینکه چه چیزهایی در دبیرستان آموزش بدهیم یا چقدر هندســه در دبیرســتان آموزش بدهیم پیرو استانداردهای بین‌المللی باشیم. بلکه باید استقلال فکر داشته باشــیم و از امکانات موجود و دانش و توانایی معلمان ایران بهترین استفاده را ببریم. توانایی‌هایی که معلمان ایران در آموزش هندسه دارند ثروتی است که کشورهای دیگر از آن برخوردار نیستند. سنت هندسهٔ اقلیدســی در حوزه‌های علمی ما، ســنتی است که در کشورهای دیگر وجود ندارد. ما باید از این ظرفیت‌ها بهره ببریم و برنامهٔ درسی کشــورمان را به کمک این ظرفیت‌ها طراحی کنیم. خلاصه اینکه، ما مقدار تأثیری که بر شناخت دانش‌آموزانمان‌می توانیم داشته باشیم، زیر سایهٔ ثروت‌های شناختی معلمانمان تعریف می‌شود و اگر این سرمایه‌های انسانی را به خوبی نشناسیم و از آن‌ها استفاده نکنیم نمی‌توانیم در جهت ارتقاء علم و فرهنگ در کشورمان قدم برداریم.

نکات آموزشــی مســئلهٔ ۱: آیا مشــابه مفهوم زاویهٔ محاطی روی سطح کره در سه بعد وجود دارد؟ اندازهٔ زاویهٔ محاطی را چطور تعریف می‌کنید؟

نکات آموزشی مسئلهٔ ۲: زاویهٔ محاطی در حالت حدی روی سطح کره را چطور تعریف می‌کنید؟

نکات آموزشی مسئلهٔ ۳: در کلاس احکام مهم هندسهٔ اقلیدسي را در حالت‌های حدی بررسی کنید

نکات آموزشی مسئلهٔ ۴: به مفهوم دستهٔ دایره‌ها اشاره کنید.

نکات آموزشی مســئلهٔ ۵: به این نکته اشاره کنید که مشــابهت دایره با دو خط متقاطع به خاطر این است که هر دو جواب‌های یک معادلهٔ درجهٔ دوم هستند.

نکات آموزشی مســئلهٔ ۶: به مفهوم دســتهٔ دایره‌ها اشــاره کنید. برای فهم بهتر هندســهٔ تصویری توسط دانش‌آموزان از نرم‌افزار جئوجبرا کمک بگیرید.

کتاب ریاضی نهم- فصل هشتم، حجم و مساحت

فهرست بخش‌ها:

حجم و مساحت کره
حجم هرم و مخروط
سطح و حجم

مفاهیم اصلی:

کره
هرم
مخروط
قطر کره
منشور
ارتفاع هرم
استوانه
مقطع شکل سه‌بعدی

مهارت‌های اصلی:

محاسبهٔ مساحت جانبی کره
محاسبهٔ حجم کره
محاسبهٔ حجم هرم
بازکردن مخروط به شکل قسمتی از دایره
محاسبهٔ سطح جانبی مخروط
رسم صورت گستردهٔ یک شکل سه‌بعدی

محتوای نگرشی:

کره، هرم، مخروط، منشور و استوانه از مفاهیمی هستند که توسط انسان انتزاع شده‌اند. وگرنه در طبیعت کرهٔ کامل وجود ندارد و در مورد سایر شکل‌ها هم همین‌طور است. البته سطح جانبی و حجم شکل‌های سه بعدی ساده در کنار مساحت شکل‌های سادهٔ هندسی در تمدن‌های بابل و مصر و سایر تمدن‌های باستانی قبل از تمدن یونان مطرح بودند. اما محاسبهٔ دقیق آن‌ها به کمک اثبات صحت فرمول‌ها مختص تمدن یونان است. مفهوم اثبات هندسی توسط تالس و مفهوم اثبات عددی توسط فیثاغورس مطرح شدند. تالس و فیثاغورس هر دو از خانواده‌های مهاجر سریانی بودند که به یونان مهاجرت کرده بودند.

محتوای شناختی:

می‌توان مفاهیم هندسهٔ مسطحه را با مفاهیم هندسهٔ فضایی با هم متناظر کرد و در یک آنالوژی و مشابهت قرار داد. این اولین جایی است که در تاریخ مفهوم آنالوژی بین تئوری‌های ریاضی خود را نشان داده است. البته این آنالوژی یک آنالوژی درون رشته‌ای است. یعنی بین یک تئوری در هندسه و تئوری دیگری در همان شاخه رابطهٔ آنالوژی برقرار شده است. خیلی اوقات یک تئوری در یک شاخه با یک تئوری دیگر در شاخه‌ای دیگر آنالوگ یا متشابه می‌گردند که البته مطالعهٔ آن‌ها بسیار پیچیده‌تر خواهد بود. برای مثال، محیط یک شکل دوبعدی مشابه مساحت جانبی یک شکل سه‌بعدی است. برای مثال، برای دایره $\frac{\text{مساحت}}{(\text{محیط})^2}$ ربطی به شعاع دایره ندارد. در کره $\frac{(\text{حجم})^2}{(\text{مساحت جانبی})^3}$ ربطی به شعاع کره ندارد. این نسبت‌ها برای همهٔ شکل‌های متشابه در صفحه و فضا یکسان است.

نکات آموزشی:

درک ارتباط احجام سادهٔ هندسی با یکدیگر و به‌کاربردن این درک در جهت فهم بهتر آن‌ها و محاسبهٔ حجم‌های آن‌ها و اثبات فرمول‌های مساحت جانبی و حجم مورد تأکید است. همین نگرش را می‌توان در سال‌های بعد در مطالعهٔ حجم‌های افلاطونی و درک ارتباط آن‌ها با یکدیگر به پیش برد که نگرشی عمیق به یادگیری را پیش پای دانش‌آموزان قرار می‌دهد که در آن ارتباطات بین اشیاء و مفاهیم از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند.

نکات نگرشی:

اینکه ذهن ما اشیاء زندگی روزمره را ایدئال‌سازی می‌کند، از خصوصیات ساختارشناختی بشر است. مثلاً شاید درکی که ما از مفهوم خدا داریم از ایدئال‌سازی مفهوم مادر به‌دست آمده باشد. یا مفهوم بی‌نهایت

به ناچار از ایدئال‌سازی به‌دست آمده است. وگرنه تجربه‌های روزمرهٔ ما چگونه می‌توانستند ما را به خلق چنین مفهومی رهنمون نمایند. ایدئال‌سازی ذهن انسان را می‌توان در بستر درک جدید ما از ساختار نورونی مغز انسان فهمید. یافته‌های جدید نشان می‌دهند استعاره‌ها نقش مهمی در ساختن و توسعهٔ ریاضیات توسط ذهن ما ایفا می‌کنند.

نکات شناختی:

آنالوژی‌های درون شاخه‌ای در درک مفهوم آنالوژی بسیار اهمیت دارند چون داخل یک پارادایم زندگی می‌کنند. هندسه‌های اقلیدسی، هذلولوی و کروی با یکدیگر آنالوژی دارند اما در یک پارادایم زندگی نمی‌کنند. اما آنالوژی هندسهٔ دوبعدی و هندسهٔ سه‌بعدی در یک پارادایم مشترک برقرار است. و لذا به فهم مفهوم آنالوژی به دانش‌آموزان کمک ویژه می‌کند. چون در دسترس‌تر هست.

برای مثال، قضیهٔ فیثاغورس مسطحه مشابه فضایی دارد. در یک کنج سه قائمه مجموع مربعات مساحت‌های سه وجه کنج قائمه، برابر است با مربع مساحت وجه روبه‌رو به کنج. همان‌طور که قضیهٔ فیثاغورس حالت خاص قضیهٔ کسینوس‌هاست مشابه قضیهٔ کسینوس‌ها در هرم چهاروجهی هم وجود دارد و حالت خاص آن هم قضیهٔ فیثاغورس سه‌بعدی است. بسیاری از احکام مثلث مشابه سه‌بعدی دارند. بسیاری از ساختارهای ریاضی وابسته به هندسهٔ مثلث مشابه سه‌بعدی دارند. برای مثال، دایرهٔ نه نقطهٔ اویلر برای یک هرم چهاروجهی که ارتفاع‌های آن همرسند مشابهی دارد که کرهٔ اویلر نامیده می‌شود. دایره‌های نه نقطه وجوه چنین هرمی روی سطح کره‌ای قرار می‌گیرند که نشان می‌دهد ساختارهای هندسهٔ اقلیدسی دوبعدی با ساختارهای هندسهٔ اقلیدسی سه‌بعدی مشابه هستند و بین آن‌ها رابطهٔ آنالوژی برقرار است. اولین کسی که به شکل‌های چهاربعدی فکر کرد، سجزی یا سجستانی یا سیستانی ریاضی‌دان ایرانی بود. امروز مشابه ابعاد بالای احجام افلاطونی را می‌شناسیم و در مورد بسیاری از این شکل‌های بعد بالا فهم هندسی عمیقی داریم و آنالوژی بین هندسهٔ دو بعدی و هندسهٔ سه‌بعدی به ابعاد بالا هم تعمیم پیدا کرده است. می‌توان به قضیه‌های هندسه به زبان معادلات جبری هم فکر کرد و پرسید آیا جواب‌های این معادله‌ها در اعداد مختلط هم چنین نظمی از خود نشان می‌دهند یا خیر؟

نکات آموزشی مسئلهٔ ۱: سعی کنید درستی اصل کاوالیری را با توضیحاتی فلسفی توجیه کنید.

نکات آموزشی مسئلهٔ ۲: درستی اصل کاوالیری را در دوبعد و سه‌بعد با هم مقایسه کنید.

نکات آموزشی مسئلهٔ ۳: به این نکته اشاره کنید که مقاطع دو شکل لازم نیست با هم متشابه باشند.

نکات آموزشی مسئلهٔ ۴: در کلاس روش‌های دیگری برای استخراج فرمول محیط و مساحت دایره پیشنهاد کنید.

نکات آمورشی مسئلهٔ ۵: آیا روش‌های پیشنهادی شما در مسئلهٔ ۴ برای کره هم کارآمد هستند؟

نکات آموزشی مسئلهٔ ۶: آیا این شکل‌ها و محاسبات مشابه دو بعدی هم دارند؟