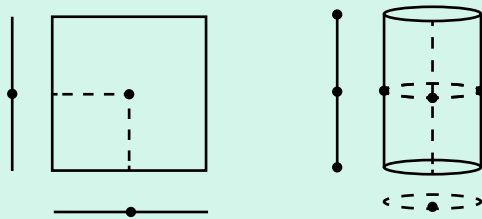


# جور دیگر باید دید

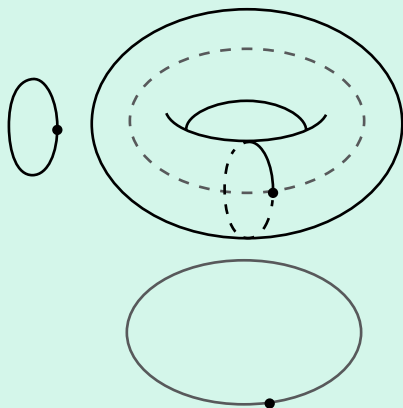
## تمرین‌های متفاوت ریاضی

### ادامه تمرین‌ها خسرو داودی، آرش رستگار

**مسئله ۶.** چنبره را می‌توان به صورت حاصل ضرب دایره در دایره فهمید. همان‌طور که استوانه را می‌توان حاصل ضرب دایره در یک بازه بسته متناهی در نظر گرفت. یا صفحه را حاصل ضرب خط در خط دانست؛ به طوری که هر نقطه از حاصل ضرب متناظر زوج نقطه‌هایی به دست آید که از دو دایره یا دایره و بازه یا دو خط انتخاب شوند و یک تناظر یک‌به‌یک بدهند؛ مطابق شکل‌های زیر.



حال سعی کنید برای تعدادی نقطه، روی چنبره میانگین تعریف کنید. برای  $n$  نقطه،  $n!$  نامزد وجود دارد!



### هفتمی‌ها، فصل نهم، آمار و احتمال

**مسئله ۶.** نمودار میله‌ای را می‌توان بر یک صفحه استوار کرد. برای مثال، به جای اینکه میله‌ها روی یک خط قرار گرفته باشند، روی یک صفحه قرار بگیرند. مثال‌هایی برای چنین نمودار میله‌ای در زندگی روزمره ارائه دهید.

**مسئله ۷.** نمودار میله‌ای را می‌توان بر سطح کره استوار کرد. برای مثال نمودار جمعیت شهرها را توسط میله‌های روی سطح کره جغرافیایی نمایش داد. این کار را می‌توان با یک کاردستی یا به کمک رایانه انجام داد.

### هشتمی‌ها

### فصل هشتم، آمار و احتمال

**مسئله ۴.** مفهوم میانگین را می‌توان به کمک دسته‌بندی داده‌ها بهتر فهمید. اگر داده‌ها را دسته‌بندی کنیم و در هر دسته میانگین را حساب کنیم، می‌توان به کمک میانگین دسته‌ها میانگین کل داده‌ها را به دست آورد؛ به شرط اینکه میانگین هر دسته را با تکرار تعداد داده‌های آن دسته حساب کنیم. آیا می‌توانید این گفته را به زبان ریاضی ترجمه کنید و به صورت فرمولی بنویسید؟ به کمک فرمول‌بندی ریاضی این نکته را ثابت کنید و درستی آن را نشان دهید.

**مسئله ۵.** اگر  $n$  زاویه روی دایره مثلثاتی قرار داشته باشند، دقیقاً  $n$  نقطه متمایز روی دایره مثلثاتی که  $n$  زاویه هم هستند، می‌توانند مانند میانگین عمل کنند. آیا می‌توانید کاربردی از چنین مفهوم میانگینی در نظر بیاورید؟ (دایره مثلثاتی دایره‌ای به شعاع واحد به مرکز مبدأ مختصات است که در آن زاویه‌های یک ضلعشان روی جهت مثبت محور  $x$  هاست. اگر این تعریف گویا نیست از ساعت کمک بگیرید.)

## هشتمی‌ها

### فصل نهم، دایره

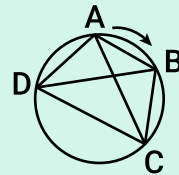
**مسئله ۳.** درستی حکم‌های زیر را در حالت‌های حدی بررسی کنید:

(الف) دو مماس مشترک دو دایره داده شده با هم برابرند.  
(ب) از یک نقطه خارج دایره دو مماس می‌توان بر دایره رسم کرد که طول آن‌ها برابرند.

(ج) شعاع دایره محاطی مثلث اکیداً کوچک‌تر از شعاع دایره محیطی آن است. (دایره محاطی يك مثلث بزرگ‌ترین دایره‌ای است که در مثلث جا می‌شود و دایره محیطی کوچک‌ترین دایره‌ای است که شامل مثلث می‌شود.)  
(د) زاویه محاطی روبه‌رو به قطر قائمه است.

(هـ) رابطه بطلیوس: در چهار ضلعی محاطی بین طول ضلع‌ها و قطرهای رابطه زیر برقرار است:

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$



(نیازی به اثبات این حکم نیست. فقط حالت حدی را در نظر بگیرید که چهار ضلعی به یک مثلث میل می‌کند.)

**مسئله ۴.** الف) آیا می‌توانید صفحه را به صورت اجتماعی از دایره‌ها بنویسید؟

ب) اگر فرض کنید یک نقطه مجاز است در این اجتماع به عنوان حالت حدی دایره‌ها اضافه شود، آیا این کار ممکن است؟

ج) آیا می‌توانید این کار را چنان انجام دهید که این نقطه مرکز هیچ‌کدام از دایره‌ها نباشد.

د) آیا می‌توانید این کار را چنان انجام دهید که هیچ دو دایره‌ای هم‌مرکز نباشند.

هـ) به سؤال‌های بالا برای حالت نیم‌صفحه پاسخ دهید.

**مسئله ۵.** اگر به جای دایره دو خط متقاطع بگذاریم و قضایای مربوط به دایره را که می‌دانید چنان فرمول‌بندی کنید که خط‌های متقاطع نقش دایره را ایفا کنند، حکم‌های درستی به دست می‌آورید؟ به مثال‌های زیر توجه کنید:

(الف) اگر پاره‌خطی را روی یکی از دو خط متقاطع ثابت

بگیریم، آیا زاویه‌هایی که رأس آن‌ها روی خط دیگری باشند و روبه‌رو به این پاره‌خط ثابت باشند، با هم برابرند؟  
(ب) هر خط یا دایره را قطع نمی‌کند یا در دو نقطه یا در یک نقطه دو برابر قطع می‌کند. آیا در مورد دو خط متقاطع چنین است؟ آیا هر خطی دو خط متقاطع را قطع می‌کند؟ آیا تعداد نقطه‌های تقاطع یا دو یا یک است؟ اگر تقاطع خط با زوج خط‌های متقاطع تنها یک نقطه باشد، آیا لزوماً آن نقطه دو برابر است؟ دقیق می‌پرسیم آیا ممکن است دو برابر باشد؟ آیا ممکن است دو برابر نباشد؟

(ج) به جای دو خط متقاطع، دو خط موازی قرار دهید و به سؤال‌های بالا پاسخ دهید؟

(د) به جای دو خط موازی یک خط دو برابر قرار دهید و به سؤال‌های قبل پاسخ دهید.

**مسئله ۶.** آیا ممکن است دایره در حالت حدی به سوی یک خط میل کند؟ آیا خط ممکن است در حالت حدی به سوی یک دایره میل کند؟ چرا خط نوعی دایره است، اما دایره نوعی خط نیست؟ به یک خط نقطه‌ای در بی‌نهایت اضافه کنید که سروته آن را در بی‌نهایت به هم وصل کند. در این صورت چیزی شبیه دایره به دست می‌آید، چون یک مسیر بسته است. شباهت‌ها و تفاوت‌های این شکل به دست آمده با دایره را بررسی کنید.