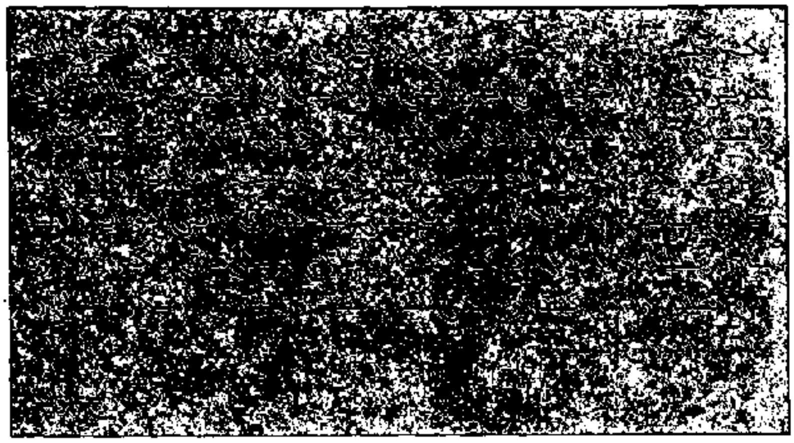


مسأله حل کردن در برنامهٔ ریاضی (۱)

از انتشارات انجمن ریاضی آمریکا

by: Alan Schoen Feld
ترجمه میرزا جلیلی

پیشنهاداتی برای مسأله حل کردن

روش صحیحی جهت حل مسأله وجود ندارد خیلی باید باشهامت بود تا راه یا راههایی برای بررسی مسائل پیشنهاد نمود. تعداد راههای خوب و مؤثر برای یاد دادن تفکر ریاضی برابر با تعداد معلمین خوب است. علاوه براین روشهایی که در یک کلاس به کارگرفته می‌شود نیز یک مسأله شخصی است. آنچه برای یک معلم کارآیی دارد شاید برای یك معلم دیگر قابل استفاده نباشد ویا برای استفاده ازآن باید مورد بازنگری قرار داده شود. پیشنهادات زیر با توجه به‌این واقعیت‌ها تنظیم می‌شوند. این پیشنهادات کارآیی‌خوبی درکلاسهای مختلف‌داشته است. خواهش این است‌که این پیشنهادات را مثل پیشنهادهای یك همکار نزدیك موردبررسی قرار دهید. سعی‌کنید آنهایی راکه بنظرتان درست و مناسب میآید آزمایش کرده سپس آنها را طوری طراحی نمائید که به راحتی بتوانید با آنها کارکنید.

الف– پیشینه ومنطق اساسی

ـ اختلاف زیادی بین راهی که ما در ریاضی بکار می‌بریم و راهی که دانش‌آموزان آنرا می‌بینند وجود دارد ـ کار با ریاضی یک کار اساسی است و آن پیشروی در مراحل عمل، کشف و رسیدن به درك طبیعت خاص هدفها و دستگاههای ریاضی است. ما ابتدا به یك مطلب ریاضی برمی‌خوریم، همانطور که درآن غورمی‌کنیم این تصور درما رشد پیدا می‌کند و این گمان تقویت می‌شود که درآن چیز درستی باید وجود داشته باشد. با مثالهایی آنرا آزمایش می‌کنیم و به جستجوی مثال نقض می‌پردازیم. سعی داریم که درك کنیم که چرا آن چیز باید درست باشد. این کوششها ممکن است موفق یا ناموفق باشد. درشروع ممکن است بارها اشتباه کنیم راههای عوضی پیش برویم، کم‌حوصله ومأیوس بشویم ویا بازنگریهای پیگیر و موفقی داشته باشیم تا اینکه به‌نتیجه برسیم. بعضی از تجربه‌ها بسیار مهیج و راضی‌کننده است چه ما درقلمرو مجهولات تجسس

می‌کنیم وخود را درحل مسائل قوی می‌سازیم.

متأسفانه دانش‌آموزان کمتر آگاهی دارند که کار با ریاضی باید چنین باشد. تعجب‌انگیز آنکه، اغلب، دانش‌آموزان فدای حرفه‌ای بودن ما معلمین می‌شوند، مطالبی که باید به آنها داده شود زیاد است و ما نتایج مطالعات و کشفیات ریاضی خود را بصورت مرتب شده‌ایی به‌آنها ارائه می‌دهیم، درنتیجه، آنها زودتر مهارت پیدا می‌کنند اما پیدا کردن این مهارت تابع ناسیمونی نیز دربرخواهد داشت. چه دانش‌آموزان فکر می‌کنند که همهٔ ریاضیات شناخته شده است وباید آنها را مثل گرامر زبان آنقدر تکرارکرد تا یاد گرفته شود. و دراین یادگیری، برای آنها هیچ نوع هیجان، لذت کشف و خلاقیت وجود ندارد بلکه تنها یك رضایت کوچك وساده ازانجام کار دربرخواهد داشت. ما درکار با ریاضی چنان‌آسان برخورد می‌کنیم‌که وقتی مسأله‌ایی برای دانش‌آموز مشکل است احساس ضعف می‌کند. آنها هیچ نوع آگاهی ندارند که خودما نیز برای درك مطالب نو در ریاضی باید تقلا وکوشش فراوان کنیم.

دیگر آنکه آنها هیچگونه اطلاعی ندارند که برای درك یك مطلب ریاضی باید با طرح سؤال وجواب مناسب آنرا خوب حلاجی کرد و اینکار تا آنجا ادامه داد که مطلب روشن و مفهوم شود. **درك ریاضی با دوباره تولید و تکرار کردن مطالبی که قبلا فراگرفته شده است، حاصل نمی‌شود.**

دراینجا من یك نکته بنظرم میرسد وآن اینکه ما می‌توانیم و وظیفه داریم‌که دانش‌آموزان را با روش یادگیری ریاضی آنطور که باید باشد آشنا سازیم. من اعتقاد دارم که معلمین می‌توانند چنین‌کاری را با موفقیت انجام دهند.

بطور منطقی، دراوائل آموزش ریاضی باید روش مسأله حل کردن را به دانش‌آموزان یاد داد. جای تأسف است که دانش‌آموزان بطور طبیعی فکر نمی‌کنند که درحل بعضی مسائل باید شکل کشیده شود تا مسأله روشن شود ویا کشیدن شکل ممکن‌است به حل مسأله کمك نماید وباز نمی‌دانند که باید درستی احکام را با حالات خاص آزمایش‌کنند وناراحت‌کننده‌تر آنکه به‌ندرت تشخیص میدهند که آنها نیز قادرند فکرکنند ویا اینکه میتوانند توانایی حل مسأله را با تجربه حاصل از شکست و موفقیت‌های قبلی، درخود تقویت نمایند. اگرچه ممکن است احمقانه بنظر برسد ولی شاید ارزش مطرح کردن داشته باشد که اصولاً ما از دانش‌آموزان‌خود می‌خواهیم از ریاضیات چه چیزی‌کسب نمایند؟

تقریباً آخرین برخورد، بیشتر دانش‌آموزان با ریاضی در محاسبات مشتق و انتگرال است. من حقیقتاً ارزش زیادی در کوشش برای محاسبهٔ سطح حادث از دوران یك منحنی نمی‌بینم این نیست‌که این مطلب ذاتاً ارزش نداشته باشد تصادفاً هم ریاضی‌است وهم زیبا. اما بطورکلی دانش‌آموزان‌هیچکدام از اینها را نمی‌بینند. در داد و ستد کنجکاوانهٔ ریاضی، کار محاسبهٔ یك سطح‌می‌تواند یك کشف باشد و بعنوان یك کاربرد ماهرانه انتگرال ریمان (محاسبهٔ سطح زیرمنحنی) موردتحسین قرارگیرد و این نکته‌ای است که اغلب دانش‌آموزان متوجه آن نیستند و این محاسبات را یك کار شاق، دنبالهٔ انتگرال‌گیری می‌دانند.

بنظر می‌رسد که خدمت‌واقعی که ما می‌توانیم به‌دانش‌آموزان خود ارائه دهیم، هم به‌آنهائی که رشتهٔ ریاضی هستند و هم به غیرریاضی‌ها، این است‌که آنها را مجهز به مهارت تفکر و اندیشه کنیم تا بتوانند بعد از امتحانات و مدرسه آنرا بکار ببرند. مطمئناً ریاضی‌می‌تواند یك وسیلهٔ بسیار قوی برای اینکار باشد غیر ازاین راه بهتری برای آموزش اینکه «درك» یعنی چه وجود ندارد. تفکر ریاضی‌هم دقیق‌وهم منطقی‌است: تکنیك‌هائی که ما درحل مسائل بکار می‌بریم بطور وسیعی دراین زمینه قابل استفاده هستند اما دانش‌آموزان در این مایه‌ها نیستند که چنین برداشتی از «درك» بدست‌آورند ویا از آن روشها استفاده ببرند مگرآنکه به‌آنها تصریح شود. بعید بنظر می‌رسد که آنها بعد از یادگیری آن تکنیك‌ها تفکرریاضی خود را بالا ببرند **مگر آنکه ما دریادگیری آنها نقش کاتالیزور داشته باشیم کمك به یافتن راه حل کنیم نه حل نمائیم.** من معتقدم که معلمین می‌توانند چنین نقشی داشته باشند. آنچه از این بحث نتیجه می‌شود نکاتی است که من در حل مسائل توجه می‌کنم وبکارمی‌برم و دلایلی است که چرا چنین می‌کنم.

ایده‌هائی درمسئله حل‌کردن

> مسائل قلب ریاضیات هستند. هالموس

معلم درنقش راهنما

داستانی راجع به یکی از اساتید معروف ریاضی، که ارائه برهان اوچنان سریع بود که اغلب دانش‌آموزان را درابهام رها می‌کرد، نقل می‌کنند.

روزی در آغاز کلاس دانش‌آموزی دست بلند کرد و از استاد خواست که یکی ازمسائل تکلیف شب را حل‌کند. استادصورت مسأله را خواند و چند دقیقه‌ای فکر کرد و گفت بله جواب $\frac{\pi}{4}$ است و روی تخته سیاه نوشت $\frac{\pi}{4}$ دانش‌آموزکه زیرك بود درصدد کسب اطلاعات بیشتر برآمده و گفت: ببخشید استاد راه دیگری وجود ندارد؟ معلم‌پاسخ داد این‌یك سؤال‌جالب‌است، او برای یك لحظه درفکر عمیقی فرورفت سپس گفت: این یك‌مسأله ساده و سرراست است، البته محاسبات آن قدری ناجور است و به تخته برگشت ویك $\frac{\pi}{4}$ خیلی تمیز دیگرکنار $\frac{\pi}{4}$ قبلی نوشت‌و سپس از کلاس خواست اگر سؤال دیگری دارند مطرح کنند؟

بخشی از مشکلات آموزش مهارتهای تفکر ریاضی این‌است که خود ما به‌مطالب تسلط کامل داریم (مخصوصاً وقتی‌ریاضیات

مقدماتی را می‌آموزیم) طوریکه احتیاج به فکرکردن نداریم فقط بطور اتوماتیک عمل می‌کنیم. ما راه صحیح برخورد با بیشتر مسائلی که در کلاس مطرح می‌شود می‌دانیم اما دانش‌آموزان نمی‌دانند ونشان دادن راه درست به‌تنهایی کمک نمی‌کند که آنها تمام برخوردهای نادرست خود را با مسأله آزمایش نکنند. از اینجهت ما باید بعضی از تفکرهای ریاضی خود را ازپشت پرده بیرون بیاندازیم طوری که دانش‌آموزان بتوانند آنها را دنبال کنند. برای این کار سه راه که با هم در ارتباط مستقیم هستند وجود دارد.

(I)- رفتن بتوی جریان عمل برمبنای قدم به قدم (حتی وقتی ما جواب را می‌دانیم).

مسأله زیر را بعنوان مثال موردبررسی قرار دهید:

فرض کنید $p(x)$ و $Q(x)$ دو چند جمله‌ای با ضرائب با ترتیب معکوس باشند.

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

$$Q(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n$$

درحالی که $a_n\neq 0\neq a_0$. چه رابطه‌ای بین ریشه‌های این دو معادله وجود دارد؟ جواب خود را اثبات کنید.

البته این مسأله یك راه‌حل جالب دارد که در صفحات بعد خواهدآمد. اما من فکرمی‌کنم کاری به ترتیب زیر حتی اگر ساختگی بنظر آید، در درازمدت می‌تواند مفید باشد. شما وقتی با یك چنین مسأله‌ای مواجه می‌شوید چکارمی‌کنید؟ می‌دانیم یك روش کلی برای بدست‌آوردن ریشه‌های یك چندجمله‌ای وجود ندارد همچنین روشی برای مقایسهٔ ریشه‌های آنها نیز موجود نیست بهترین کاری که دراین شرایط می‌توان انجام داد جستجو برای یافتن چند مثال ساده است. امیدوارم که من بجای بررسی مستقیم دومعادله بتوانم تصوری شهودی ازآنها ایجاد کنم. شاید هم بایستی یك زوج سه‌جمله‌ای درجه دوم را درنظر بگیرم و آنها را حل کنم ببینم چه اتفاقی می‌افتد؟

$$P(x)=ax^2+bx+c$$

$$Q(x)=cx^2+bx+a$$

که ریشه‌ها به‌ترتیب عبارتند از:

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2c}\ \text{و}\ \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ظاهراً چیزی قابل بررسی در جوابها مشاهده نمی‌شود که بتوان مسأله را جلو برد وبا تعمیم داد، اگرچه صورت دو کسر یکی است. من دراینجا یکی دو دقیقه مکث می‌کنم و بعد چیز دیگری را مورد آزمایش وبررسی قرارمی‌دهم خوب، اجازه بدهید من دوجمله‌ای خطی را مورد مطالعه قرار بدهم

$$P(x)=ax+b$$

$$Q(x)=bx+a$$

که ریشه‌ها به ترتیب $-\frac{b}{a}$ و $-\frac{a}{b}$ بوده و عکس یکدیگرند ولی اینهم زیاد جالب نیست. من هنوز واقعاً برداشت دقیقی ندارم که در مورد ریشه‌ها چه اتفاقی می‌افتد لذا کار را با انجام یکی دومثال ساده‌تر ادامه داده به دنبال یك الگو خواهم گشت. یك کارجالب، ممکن است‌چندجمله‌ایهائی را امتحان‌کنم که قابل تجزیه باشند، بدین طریق آسانتر می‌توان ریشه‌ها را پی‌گیری کرد بسیار خوب، چیز ساده‌ای مثل $(x+3)(x+2)$ چطور است؟

$$P(x)=x^2+5x+6$$

که ریشه‌های‌آن -2 و -3 است.

$$Q(x)=6x^2+5x+1=(2x+1)(3x+1)$$

که ریشه‌های‌آن $-\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{3}$ است. اینها نیزمعکوس هم هستند واین نسبتاً جالب است راجع به‌معادلات زیرچطور؟

$$P(x)=(3x+5)(2x-7)=6x^2-11x-35$$

که ریشه‌های آن $\frac{-5}{3}$ و $\frac{7}{2}$ است.

$$Q(x)=-35x^2-11x+6=-(35x^2+11x-6)$$
$$=-(7x-2)(5x+3)$$

که ریشه‌های‌آن $\frac{-3}{5}$ و $\frac{2}{7}$ است.

اینجا نیز ریشه‌ها عکس‌یکدیگرند. این دیگر نمی‌تواند تصادفی باشد. بازهم بهتراست ادامه دهیم و در عوامل تجزیه دقت کنیم آیا ترتیب ضرائب آنها نیز معکوس یکدیگرند؟ راجع به معادلات زیرچطور؟

$$P(x)=(ax+b)(cx+d)=acx^2+(bc+ad)x+bd$$

$$Q(x)=bdx^2+(ad+bc)x+ac=(bx+a)(dx+c)$$

بله، آن هم درست است. من فکرمی‌کنم که این قابل تعمیم‌است. دراینجا برای ادامه کار دو راه وجود دارد بطور کلی فرض کنیم ریشه‌های چندجمله‌ای $P(x)$ معکوس ریشه‌های $Q(x)$ هستند (اگر هنوز هم مطمئن نیستیم باید باکثیرالجمله‌ای درجه ۳که قابل تجزیه باشد کار را ادامه دهیم). دراین مرحله سعی من این‌است که بحث بالا را تعمیم بدهم. اما همچنین ساده و سرراست نمی‌باشد اولاً هرچندجمله‌ایی قابل تجزیه نیست، ثانیاً پی‌گیری کردن ضرائب نیز کار آسانی نیست. **شاید اکنون ارزش مکث کردن ومجدداً حدس را از ابتدا آزمایش‌کردن داشته باشد. فرض‌کنیم $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ایی با ضرائب باترتیب معکوس باشند ثابت کنید ریشه‌های $P(x)$ و $Q(x)$ عکس یکدیگرند.** خوب‌اجازه بدهید دقت کنیم که مسأله چه می‌خواهد اینکه عددی مثل r ریشه $P(x)$ است به‌چه معنا می‌باشد؟ $P(r)=0$ به‌چه معناست؟ آیا اینکه عکس r باید ریشهٔ

$Q(x)$ باشد بمعنای $Q\left(\frac{1}{r}\right)=0$ است؟ عجب؟

برگردیم به معادله درجه ۲ و به بینیم درمورد آن چه اتفاقی می‌افتد.

فرض‌کنیم: $P(x)=ax^2+bx+c=0$

$Q(x)=cx^2+bx+a=0$

اگر r یك ریشه $P(x)$ باشد: $P(r)=ar^2+br+c=0$

حال به بینیم $Q\left(\frac{1}{r}\right)$ برابر چیست؟

$$Q\left(\frac{1}{r}\right)=c\left(\frac{1}{r}\right)^2+b\left(\frac{1}{r}\right)+a=0$$

لذا آن شدنی است $=\frac{c+br+ar^2}{r^2}=\frac{P(r)}{r^2}=0$

حالا این بحث قابل تعمیم خواهد بود ومن می‌توانم یك قضیه وبرهان را بیان کنم.

قضیه ـ اگر $P(x)$ و $Q(x)$ دو چند جمله‌ایی با ضرائب باترتیب معکوس باشند ریشه‌های $Q(x)$ عکس ریشه‌های $P(x)$ خواهد بود.

برهان ـ فرض کنیم r یك ریشه $P(x)$ باشد به قسمی که $P(r)=0$ با توجه به‌اینکه $r\neq 0$ و $a\neq 0$ علاوه براین:

$$Q\left(\frac{1}{r}\right)=a_0\left(\frac{1}{r}\right)^n+a_1\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}+\dots+a_{n-1}\left(\frac{1}{r}\right)+a_n$$

$$=\left(\frac{1}{r_n}\right)(a_0+a_1r+a_2r^2+\dots+a_{n-2}r^{n-2}+$$

$$a_{n-1}r^{n-1}+a_nr^n)=\left(\frac{1}{r^n}\right)(P(r))=0$$

بنابراین $\frac{1}{r}$ یك ریشه $Q(x)$ است. برعکس اگر s یك ریشهٔ $Q(x)$ باشد متوجه میشویم که $P\left(\frac{1}{s}\right)=0$، بسیار خوب،

حالا موقع کالبدشکافی است این مسأله، مثل هر بحث کلاسیك ریاضی، بطوروروشنی نتایج فکری مراحل حل‌را (فرایند) ارائه می‌دهد. اما الهام راه‌حل از کجا آمد؟ اگربه مسیری که بحث در آن تکامل پیدا کرد برگردیم دو راه نفوذی اساسی را مشاهده خواهیم کرد اولین آنها به درك مسأله و برداشتی که از آن بدست‌آورده میشود ارتباط پیدا می‌کند، صورت‌مسأله، دربیان کلی، کمك بسیاراندکی به یافتن راه‌حل می‌کند. آنچه ما انجام دادیم این بود که به منظوریافتن یك الگو حالات خاص را موردآزمایش قرار دادیم، خاصه اینکه کوشش اولیه در حالات خاص درمورد معادله درجه دوم بینش زیادی بدست نداد و ما مجبور شدیم به‌حالات خاص‌تری متوسل شویم لذا کارما عبارت بود:

جستجو برای یافتن یکسری مثالهای سرراست که محاسبه ریشه‌های آنها ساده باشد. بدین منظور که شاید بطورتصادفی الگوئی ظاهر گردد که قابل تعمیم باشد.

دراینجا ما درجستجوی یافتن ریشه‌های چندجمله‌ایی بودیم و برای اینمنظور آنهایی راکه بسادگی قابل‌تجزیه بودند انتخاب کردیم. البته موقعیت‌های مختلف ما را به انتخابهای مختلف هدایت خواهد کرد. اما این استراتژی به ما اجازه حدس زدن می‌دهد.

دومین راه نفوذی، بعد ازحدس زدن پدیدار گشت. اگرچه ما تقریباً میدانستیم که چرا باید مطلب درست باشد. اما بحث‌قدری ناجور به‌نظر می‌آمد. لذا مکث کردیم تا برای یك لحظه دوباره مطلب‌را بررسی کنیم. آنچه ما در آن توقف انجام دادیم مهم است وغالباً ازنظرها دور می‌ماند.

ما به‌عقب و به مفروضات مسأله برگشته آنها را پی‌گیری کرده و برای یافتن یك ارتباط ملموس بین‌آنها و نتایجی که می‌خواستیم تلاش کردیم.

سؤالاتی ازقبیل r ریشهٔ $P(x)$ است یعنی چه؟ معکوس r چه خواهد شد؟ مفهوم $\left(\frac{1}{r}\right)$ ریشه $Q(x)$ است چیست؟ هر کدام به تنهایی خیلی جزیی وبی‌ارزش بنظرمیآید اما اینها توجه ما را درست به‌همان چیزهایی که ما را به‌یافتن راه‌حل کشانید، جلب کرد اکنون ممکن است بنظر آید که مطالب یکی دوصفحه آخر، شبیه «چوب زدن به‌مرده» باشد. ریاضی‌دانها مقدمتاً علاقمند به نتیجه هستند که در دو سطر حاصل میشود ولی فکر مراحل حل (فرآیند) که به‌وجود آورنده آن برهان است برای آنها طبیعت‌دوم مسأله است تجربه من این است که این فکر فرآیند حل کاملاً برای دانش‌آموزان بیگانه است این فرآیند دوچیز را روشن می‌سازد. یکی اینکه مرموز بودن ریاضی را ازبین می‌برد وآنرا بیشترعادی وقابل دسترس می‌سازد. به عبارت‌دیگر، وقتی دانش‌آموزان به‌بینند که ایده راه حل مسأله از کجا میآید دیگرحل یك مسأله برای آنان، مثل بیرون آوردن خرگوش از زیرکلاه نخواهد بود.

دوم اینکه استراتژی که در بحث بالا مورد دقت قرار گرفت قابل تعمیم می‌باشد ودرجاهای دیگر نیزممکن است مفید واقع شود. یادگیری اینکه چگونه آنها بکار گرفته شوند به دانش‌آموزان کمك می‌کند تا درحل مسأله توانا شوند.

هدف مقدماتی من از طرح بحث بالا این است که «ارائهٔ درس» هنوزیك‌طرفه است. معلم بازتوضیح میدهد که دانش‌آموز چگونه باید با مسأله برخورد کند. اگر مسأله حل کردن یك تجربهٔ یادگیری شخصی است پس دانش‌آموز نیز باید در آن درگیر گردد وآن بمراه دومی منتهی می‌شود که نقش و خدمت معلم بعنوان راهنماست.

(II) ـ حل‌مسأله باکمك دانش‌آموزان بابهره‌گیری ازایده‌های آنها

دراینجا مراد این است که کلاس، مسائل را با همکاری هم حل‌کنند و معلم تنها نقش هماهنگ‌کننده نظرات و ایده‌ها را داشته‌باشد. بدین معنا که بدون «خود محور بودن» سؤالات مهمی را مطرح سازد و بحث را در مسیر صحیح خود

نگهدارد. معلم نباید راه‌حل مسائل را ارائه دهد بلکه درعوض باید به‌دانش‌آموزان کمک کند تا آنها به بهترین وجه از اطلاعات خود استفاده نموده درمسائل نفوذ کنند.

معلم ممکن است مسائلی را بعنوان تکلیف شب به دانش‌آموزان بدهد و درکلاس یکی را بطورمفصل مورد حل و بحث قراردهد.

درشروع کار، همانطور که برای یافتن راه حل مسأله تلاش وجستجو می‌کنیم معمولاً سؤالات زیرمطرح می‌گردد.

آیا کسی راه‌حلی پیشنهاد می‌کند؟ پیشنهادات دیگرچطور؟ چه چیز موجب شد که شما چنین فکرکنید؟ چه چیز باعث می‌شودکه شما فکرکنید که این یک عمل منطقی است که باید انجام شود؟ بسیارخوب اکنون ما پیشنهاداتی داریم که چیزهای درستی نیز درآنها وجود دارد. با کدامیک باید شروع کنیم؟ چه چیز باعث می‌شود که شما فکرکنید که این یک راه‌حل بهتری است؟ آیا جواب معقول بنظر میرسد؟ آیا من باید آنرا امتحان کنم؟ وقس‌علیهذا.

پنج دقیقه است که این بحث‌ها را ادامه می‌دهیم و هنوز به جایی نرسیده‌ایم آیا شما واقعاً مطمئن هستید که منظور مسأله را خوب درك کرده‌ایم (صورت مسأله را خوب فهمیده‌ایم؟) چه چیزی را باید مورد بررسی قرار دهیم آیا چیزی از بحثهای اکتشافی ما جالب بوده است؟ وغیره

این گوشه‌ای ازگفتگوهای با کلاس را بما نشان میدهد. امید است که با پشتکار معلمین اینگونه پرسشها درنهایت، طبیعت ثانوی دانش‌آموزان شود وبه طرح کردن آنها عادت کنند. اگر پرسشها خوب‌ارائه وهدایت‌شود معلم در وسط سال درمرحله‌ایی ازپرسش‌ها میتواند از دانش‌آموزان خود سؤال کند «خوب حالا من قصد دارم چه سؤالی را مطرح کنم؟» ومعمولاً در پایان سال آنها باید بتوانند بخوبی به معلم پاسخ دهند ویا در مرحله‌ای از خودشان سؤال کنند «حالا من باید چه سؤالی را برای معلم مطرح بکنم؟»

(III)ـ کارمعلم درجا ـ حل مسائل نو

یاد دادن اینکه چگونه مسأله حل کنیم‌کار بسیار مشکلی‌است، زیرا قانون معینی در این زمینه وجود ندارد. درست وقتی که دانش‌آموزان فکرمی‌کنند که دیگرهمه چیز را یاد گرفته‌اند طرح یك مسأله جدیدآنها را به دردسر می‌اندازد. برای اینکه دانش‌آموزان‌نفسی تازه کنند و مرا نیز در وضع مشابهی ببینند (که من هم ممکن است به دردسر بیفتم) به‌آنها اجازه می‌دهم به من مسأله‌ای برای حل بدهند درست همانطورکه من مسأله برای‌حل کردن به‌آنها می‌دهم. آیا کسی مسأله‌ای برای من دارد؟

اگرآنها مسأله‌ای نو برای من داشتند من آنرا با صدای بلند روی تخته سیاه حل می‌کنم و بدین ترتیب آنها را تشویق می‌کنم که ملاحظه کنند که من چگونه استراتژی حل را، بدون شکل تکراری وتمرینی‌آن، که طبیعت مرموز حل مسأله را ازبین می‌برد، بکارمی‌برم.

ب‌ـ معلم درنقش مربی ورزش

شنیده‌ام که بعضی ازهمکارانم، برای دانش‌آموزان خود، ریاضیات را بمثابه یك «ورزش درگیر» توصیف کرده‌اند منظور آنها این است که فرد باید درتجربه یادگیری ریاضی درگیر شود. کسی ازکنارگود نمی‌تواند فریاد بارك‌اله را بلند کند. یك تشابه دیگر دراین زمینه وجود دارد، معلم که نقش انتقال‌دهنده علم را دارد درضمن‌نقش شبیه مربی‌ورزش را هم‌ایفا می‌کند. البته ازبسیاری جهات، مهارتهای قهرمانی خیلی پیشرفته‌تر ازمهارتهای هوشی وفکری است. تصور ویژگیهای یك «مربی هوشی»ارزش کشف کردن را دارد.

آموزش یك فن ساده به یك ورزشکار را، مثلاً پرتاب یك توپ در بسکتبال ویا زدن سرو درتنیس را درنظر بگیرید. آن مربی که می‌گوید «تماشا کن که من چطور عمل می‌کنم و سپس برو همینطور تمرین بکن» بعنوان یك مربی خوب قلمداد نمی‌شود مسلماً چنین مربی برای مدت مدیدی شغل خود را حفظ نخواهدکرد. اما یك مربی‌خوب مراحل عمل را که توضیح می‌دهد به‌نمایش می‌گذارد وسپس این مراحل را به مرحله‌های جزئی ونکات بسیارکوچك تقسیم می‌کند و ورزشکار معمولاً از میان همهٔ این مراحل جزئی می‌گذرد ـ تا اینجا روش مثل روش یك معلم ریاضی است ـ همچنین ورزشکار برای زمانی به حال خود واگذاشته می‌شود که خود تمرین‌کند اما بعد ازمدتی، مربی برمی‌گردد وجزئیات حرکات او را تصحیح می‌کند مثلاً می‌گوید «شانه‌های شما خیلی پائین است، شما درموقع پرتاب به اندازهٔ کافی بلند نمی‌شوید» وغیره.

معمول نیست که مربی و ورزشکار با کمك‌نوار ویدئوحرکات آهستهٔ ورزشکار را به‌بینند وبررسی کنند تنها کار موردنظر این است: **مراحل جزئی را از هم جدا کنید وبا تمرین آنها را پیشرفت دهید.**

این قسمت ازآموزش مربی به آنچه که می‌تواند «مهارتهای اساسی» یا «فرآیند استاندارد» نامیده شود مربوط می‌شود ـ اما معمولاً مربی‌های ورزش خیلی فراتر ازاین قدم می‌گذارند. در حقیقت بیشتر توجه‌آنها صرف این می‌شودکه ورزشکارچگونه در موقع عمل ونمایش تصمیمات‌هوشمندانه بگیرد معمولاً، بیشترین گله وشکایت که ازطرف مربی بعد ازاشتباه یك ورزشکار شنیده می‌شود این است که «آن یك بازی بسیار سطح پائین و انجام آن مزخرف بود».

معادل هوشی آنرا درحل مسائل معمولی مورد بررسی قرار دهید. دریك امتحان از تکنیك‌های انتگرال، ۴۴ نفراز ۱۷۸ نفر دانش‌آموز درمحاسبهٔ $\int \frac{x\,dx}{x^2-9}$ از تجزیه کسرها استفاده

کرده‌اند و ۱۷ نفر تغییر متغیر $x = 3\sin\theta$ داده‌اند «استفاده از هریک از این راهها بی‌معنی و وقت‌گیر است» با کمی دقت می‌توان فهمید که مسأله با تغییر متغیر ساده و مقدماتی $\mu = x^2 - 9$ حل می‌شود.

یک توصیهٔ استاندارد: **عملاً دامنهٔ عملیات خود را کوتاه کنید و هیچ راه‌حل مشکل و پرکاری را ادامه ندهید مگر آنکه مطمئن شوید که راه‌حل ساده‌تری برای مسأله وجود ندارد.**

این از نوع توصیه‌هایی است که یک مربی ورزش نیز ممکن است انجام دهد.

بنظر می‌رسد که توجه به این مطلب خیلی باارزش‌تر از این باشد که به دانش‌آموز راه حل مسأله داده شود.

ج- بیش از یک راه برای پوست کندن گربه ریاضی وجود دارد

ازآنجا که بیشتر مسائلی را که درکلاس حل می‌کنیم تمرین است ما معمولاً به‌یک راه‌حل، که شبیه تکنیک‌های آموزش داده شده است، بسنده می‌کنیم و وقتی آن مسأله حل‌شد به سراغ مسأله دیگر می‌رویم وکار حل تمرین همینجا تمام می‌شود. **اما بعد ازحل تمرینات دانش‌آموزان فکرمی‌کنند که آنها راه حل صحیح مسأله را یاد گرفته‌اند و برای حل هرمسأله تنها یک راه صحیح وجود دارد** واین برداشت درست نیست. مثلاً، به راه‌حل‌های زیادی‌که برای اثبات قضیه فیثاغورث وجود دارد توجه کنید، هرکدام ازما چقدر خوشحال خواهیم شد اگر موفق شویم راه جدیدی براین راهها بیفزائیم.

قسمتی از لذت ریاضی شامل کشف چیزهای نواست و قسمتی نیزکشف ارتباط بین‌حقایقی است که اکنون وجود دارد و همچنین یافتن راههای جدید برای قضایا و مسائلی است که اکنون راه‌حلی دارند. وجود مقالات فراوان در مجلات ریاضی تحت‌عنوان «یک برهان جدید برای فلان قضیه» این مطلب را به اندازهٔ کافی روشن می‌سازد. دیگر آنکه اطلاع جزئی ازیک چیز ممکن است گمراه‌کننده باشند.

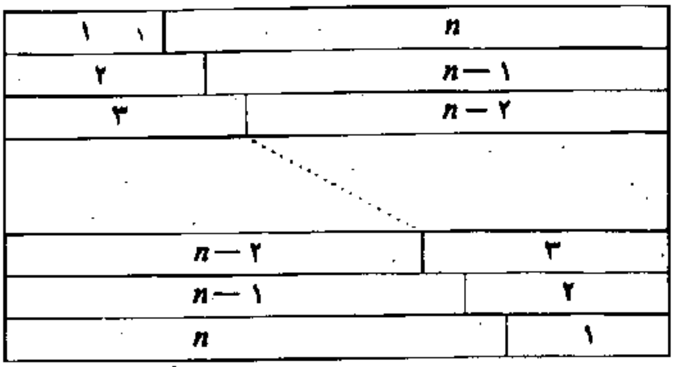
درک یک حقیقت ریاضی یا دستگاه ریاضی بمعنای درک تمام پیوندهای ممکن و موجود است.

درک من ازمجموع گوس $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ تمامی غنای آنست، زیرا من به‌آن چنین می‌اندیشم.

۱- بعنوان نتیجه $\frac{n}{2}$ زوج جهائی که مجموع هر کدام $n+1$ است.

$$1+2+3+\cdots\cdots+(n-2)+(n-1)+n$$

۲- ازنظر تصویری، نصف مساحت شکل ارائه شده در زیر یعنی نصف $n(n+1)$ می‌باشد.



که ازنظرمحاسبات حسابی می‌توان آنرا به‌صورت زیر ارائه داد:

$$S = 1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n$$
$$S = n+(n-1)+(n-2)+\cdots 3+2+1$$
$$2S = \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)}_{\text{به‌تعداد } n \text{ مرتبه}}$$

۳- بعنوان یک گزاره که درستی آن با روش استقراء قابل بیان است.

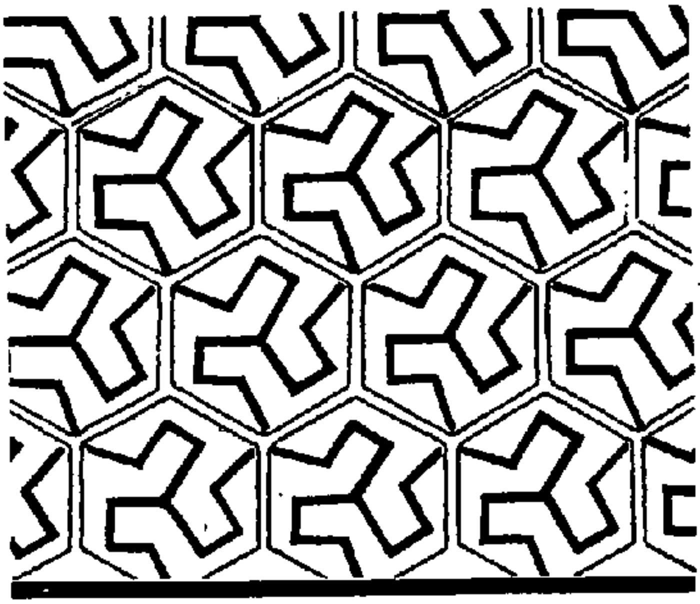
۴- بعنوان یک حالت خاص ازیک معادله دیفرانسیل وغیره [یا محاسبه تعداد اقطار یک n ضلعی محدب $\frac{n(n-3)}{2}$ را می‌توان ازطریق هندسی، آنالیز ترکیبی $\binom{n}{2} - n$ و استقراء مورد بحث قرار داد].

اگرمن تنها یکی از این راهها را یاد گرفته باشم ممکن است به‌نوعی مغبون باشم. اما این مغبون بودن تنها قسمتی از داستان است. هریک ازاین راههایی که راجع به‌مسأله فکری شود یک بینش خاصی ازتفکر را مجسم می‌سازد که به‌صورتهای مختلف می‌تواند تعمیم پیدا کند.

وقتی من با یک مسأله جدید روبرو می‌شوم هر یک از این راهها ممکن است کلیدی برای راه‌حل آن مسأله باشد.

همچنین اطلاع ازاینکه مسائل می‌توانند با راههای مختلف حل شوند در روشی که دانش‌آموزان با مسائل برخورد می‌کنند تأثیر خواهد گذاشت. دانش‌آموزی که فکرمی‌کند که تنها یک «راه درست» برای حل مسأله وجود دارد ممکن است روی مسأله خاصی مدتی فکرکند واگر توفیقی حاصل نکرد آنرا رها کند ومنتظر بماند تا درکلاس تکنیک حل به او ارائه شود و این الگویی است‌که بیشتر دانش‌آموزان ما درمدرسه بکارمی‌گیرند. شاگردی که فکرمی‌کند جا برای کشف ریاضی وجود دارد واز آن استفاده می‌کند. احتمال زیاد دارد که با مسأله بیشتر درگیر شود، پیوندهایی برای خودش پیدا کند و شاید به‌یک راه‌حل غیرمنتظرانه‌ای دست‌یابی پیدا نماید.

ادامه دارد

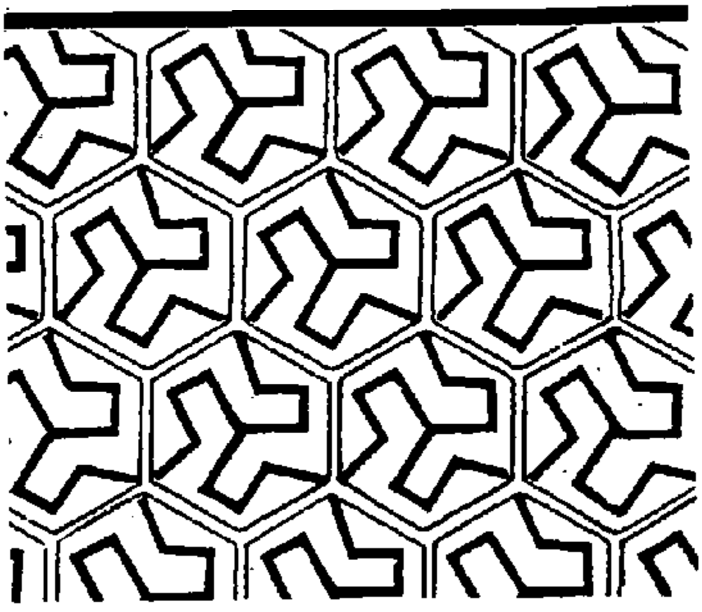


مسأله حل کردن در برنامه ریاضی (۲)

by Alan H. Schoen feld

از انتشارات انجمن ریاضی آمریکا

ترجمه: میرزا جلیلی



مسائل نمونه و بحث‌های کلاسی

نوع مسائلی که ما در کلاس مورد بحث قرار می‌دهیم و تجاربی که از آنها می‌آموزیم در طول سال تغییرمی‌کند مقایسه تشابه یادگیری یك بازی ورزشی با یك مسألهٔ فکری مراحل پیشرفت یادگیری را نشان می‌دهد. در اوائل سال که دانش‌ـ آموزان مهارت کمتری در تکنیك‌های حل مسأله دارند در آن دسته از تکنیك‌های اساسی، که بعداً در طول دوره بکار گرفته می‌شوند، آموزش می‌بینند و تمرین می‌کنند (جستجو برای استدلالهای استقرایی، بررسی و آزمایش حالات خاص، استفاده از مسائل ساده‌تر در رابطه با مسأله اصلی، تخصیص و تعمیم) درست به همان طریقی که مثلاً یك مبتدی در تنیس آموزش می‌بیند و تمرین می‌کند که چگونه سرو بزند و یا چگونه باجلو و پشت دست آبشار بزند. زمانی که مهارتهای اساسی خوب فرا گرفته شد می‌توان از آنها در شرایط مختلفی که پیش می‌آید به طور گسترده ومتنوعی استفاده کرد. مسائلی که ما کارمی‌کنیم به‌تدریج مشکل‌تر و وقت‌گیرتر می‌شود در حقیقت دانش‌آموزان دیگر تنها اصول حل مسأله را نمی‌بینند بلکه یك آموزش خوب ریاضی محض به‌آنها داده می‌شود مطلبی که اکنون رو در روی دانش‌آموزان قرار می‌گیرد انتخاب تکنیك‌های مناسب برای برخورد با مسائل و استفاده مفید و مؤثر از آنها می‌باشد. بحث‌های کلاسی نیز به‌تدریج، همانطور که پیش می‌رویم، تغییر می‌کنند و تأکید بیشتر روی طرح‌ریزی راه حل‌ها و ارزشیابی آنها قرارمی‌گیرد. بعضی ازمسائل نمونه‌کلاس در زیر مطرح شده است.

مسائلی که نکته آموزند

اغلب برای آنکه من اطمینان حاصل کنم که نکته خاصی به‌طور بارزی حتماً به دانش‌آموزان انتقال پیدا خواهدکرد از یك سری مسائل معین که در اختیار دارم استفاده می‌کنم.

این مسائل به‌نظر و تجربه من به طور یقین عکس‌العمل‌های مناسب و خاصی را در دانش‌آموزان ایجاد می‌نماید و استفاده درست و منطقی ازآنها می‌تواند کاملاً مفید ومؤثر واقع شود.

مثلاً این مسأله حائزاهمیت است که درشروع سال تحصیلی که هنوز وضع کلاس نامرتب و غیرطبیعی است و باید جهت داده شود به دانش‌آموزان فهماند وآنها را متقاعدکرد که شما واقعاً چیزی را برای یاد دادن به‌آنها دارید. درطول سالهای تحصیلی بچه‌ها، شاید شما اولین معلم باشیدکه توجه خاص

به مراحل راه حل مسأله دارید. دانش‌آموزان تا این مرحله از تحصیل خود، بدون آنکه نگرانیهای خاصی داشته باشند کار خود را خوب انجام داده‌اند. و اغلب سؤال می‌کنند که چرا حالا ناگهان ما باید اینطور در حل مسائل غور و کنکاش کنیم. مخصوصاً وقتی مسائل مقدماتی مطرح است آنها در وضع خاصی قرار می‌گیرند که اغلب احساس ناراحتی می‌کنند.

برای جلوگیری از بروز این احساس، دسته مسائل من برای چند روز اول کلاس معمولاً شامل بعضی مسائل به صورت زیر است:

۱ــ مجموع دنبالهٔ زیر را تعیین کنید.

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

۲ــ برای چه مقادیری از a دستگاه معادلات زیر:

$$\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ (x-a)^2+y^2=1 \end{cases}$$

دارای ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵ جواب است؟

۳ــ مطلوبست محاسبه:

$$\sqrt{\underbrace{(111\cdots 1)}_{\text{۱۰۰ تا یك}}\underbrace{(1000\cdots 05)}_{\text{۹۹ تا صفر}}}$$

۴ــ اگر مقادیر a، b، c، d بین ۰ و ۱ باشد ثابت کنید:

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \geqslant 1-a-b-c-d$$

۵ــ چه تعداد زیر مجموعه زوج عضوی (۲ عضوی، ۴ عضوی، ...) در مجموعه‌ای که دارای ۸۷ عضو است وجود دارد؟ برای مجموعه n عضوی چه حدس می‌زنید؟

۶ــ چه اعدادی به شکل $\underbrace{aaaa\cdots aaa}_{n \text{ مرتبه}}$ مربع کامل هستند.

۷ــ یك عدد سه رقمی را در نظر بگیرید مثلاً ۱۲۳ یك عدد شش رقمی با نوشتن دو مرتبه تکرار این عدد بنویسید، ۱۲۳۱۲۳ آیا این عدد بر ۷ بخش‌پذیر است؟ بر ۱۱ چطور؟ مانده این عدد بر ۱۳ چیست؟ آیا می‌توان قانونی در این زمینه بیان کرد؟

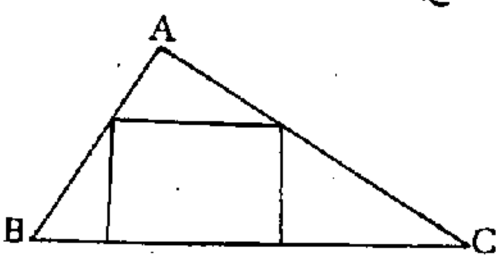
۸ــ درحالت کلی فرمولی برای چند جمله‌ای درجه $n+1$ پیدا کنید که از نقاط زیر بگذرد (n نقطه)

(x_1, y_1) و (x_2, y_2) و (x_3, y_3) و ... و (x_n, y_n)

۹ــ مثلثی را با در دست داشتن زاویه A، ضلع a و ارتفاع وارد بر ضلع a رسم کنید.

۱۰ــ مثلثی را با در دست داشتن دو ضلع a و b و طول میانه وارد بر ضلع سوم رسم کنید.

۱۱ــ مثلث زیر را در نظر بگیرید. ثابت کنید مربعی قابل محاط شدن در این مثلث وجود دارد یعنی نشان دهید که مربعی وجود دارد که چهار رأس آن روی اضلاع مثلث است (دو رأس روی یك ضلع).



تجربه من این است که دانش‌آموزان معمولاً بیست دقیقه روی هر یك از این مسائل، بدون اخذ نتیجه، وقت صرف می‌کنند. اگر آنها موفق به پیدا کردن راه حل هم بشوند. این راه حل اغلب اشتباه و یا آبکی است مثلاً ما تشخیص می‌دهیم که مسأله ۱ همان دنبالهٔ معروف ادغام است که در آن جملات مجاور وقتی که هرکدام به صورت زیر بیان شود

$$\frac{1}{i(i+1)}=\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}$$

حذف خواهند شد. دانش‌آموزانی که با این دنباله برخورد نکرده باشند احتمال ضعیف دارد که قادر به حل مسأله باشند اغلب دانش‌آموزان اقرار کرده‌اند که به نظر می‌آید که حل آن مثل خرگوش از زیر کلاه بیرون آوردن است و آنها هرگز خود قادر به حل آن نبوده‌اند.

در مسأله ۲ دانش‌آموزان فوری به راه حل جبری رو می‌آورند. پی‌گیری راه حل‌های مختلف برای یك مسأله نیز برای آنها خیلی مشکل است و اگر ازمیان دانش‌آموزان کسانی هم این کار را انجام بدهند عدهٔ آنها بسیار محدود خواهد بود

همچنین مسائل ۳ و ۴ ممکن است با راه‌حل‌های مختلف حل گردد.

وقتی مسأله ۴ در یك مجله ماهانه به چاپ رسید من تعداد زیادی راه‌حل‌های مختلف دریافت کردم اما در مورد دانش - آموزان به طور کلی می‌توان گفت که آنها پرانتزها را ضرب وهمهٔ جملات را به‌طرف چپ منتقل می‌کنند وبا تحمل زحمات زیاد ثابت می‌کنند که عبارت دست چپ مثبت است.

در مورد مسأله ۵ دانش‌آموزان فوری به فرمولهای پیچیده ترکیبات متوسل می‌شوند. درمورد مسأله ۶ اگر دانش‌آموزان به حالات‌خاص بپردازند مسلماً به‌نتیجه‌خواهند رسید. زمانی که این مسائل مطرح است من به کلاس اجازه می‌دهم مدتی روی آنها کار کنند و سپس به آنها چند قانون کلی برای مسأله حل کردن می‌دهم که مسلماً شما با آنها آشنا هستید پیشنهادات برای مسائل فوق به‌قرار زیر است:

۱ـ اگر درمسأله «پارامتر صحیح» n وجود دارد مسأله را برای حالات خاص $n = ۱,۲,۳,۴,۵$ حل کنید. ممکن است ضمن آزمایش حالات خاص به یك الگو دست پیدا کنید. اگر الگو ظاهر شد صحت آن‌را با روش استقراء ثابت کنید.

۲ـ هرجا ممکن است شکل رسم کنید.

۳ـ اگر مسأله به‌صورت داده شده مشکل است موقتاً یکی ازشرایط مسأله راکنار بگذارید و درجستجوی مسأله‌ای قدری ساده‌تر باشید. وقتی مطمئن شدید که مسأله ساده‌تری که طبیعت آن با مسأله اصلی یکی است پیداکردید قاعدتاً برای این مسأله جدید باید راه‌حل‌های بیشتری وجود داشته باشد. به همه راه حل‌های این مسأله ساده شده توجه‌کنید شاید راه حلی برای مسأله اصلی در بین آنها وجود داشته باشد.

۴ـ اگر در مسأله متغیرهای متعددی وجود دارد که نقش همه آنها یکی است بدنبال مسأله متشابه با یك یا دو متغیر باشید. ممکن است بدین طریق موفق شوید راه حلی پیدا کنید.

با این اشارات، دانش‌آموزان معمولاً قادر خواهند بود ظرف چند دقیقه مسائل ۱,۲,۳,۵,۷ را حل کنند ولی بقیه مسائل ممکن است وقت بیشتری بگیرند ولی درمجموع، طرح و بحث همه آنها برای کلاس مفید خواهد بود.

پیشنهادات برای حل مسائل کاملاً طبیعی ومنطقی به‌نظر می‌آیند.

در حقیقت، برای مسأله حل‌کردن، نکات ومطالبی وجود دارد که دانش‌آموزان باید بدانند ولی نمی‌دانند و تذکر آنها ضروری است.

با این سیاست‌واستراتژی وقتی دانش‌آموز ازکلاس بیرون می‌آید احساس می‌کند که بعضی از مهارتهای مسأله حل‌کردن را درکلاس یادگرفته است و از این جهت خوشحال به نظر می‌رسد.

به‌ترتیب که دانش‌آموزان درحل مسأله مهارت پیدا می‌کنند مسائل مناسب دیگری مطرح می‌شوند که نتایج خاصی ازآنها را همراه خود به خانه خواهند برد. مثلاً دانش‌آموزان به زودی ارزش پیشنهاد مطرح شده در بند ۱ بالا را تشخیص خواهند داد در این موقع از سال مسأله زیر مفید خواهد بود:

در یك مسابقه حذفی شطرنج بازیکنان به طور تصادفی زوج، زوج انتخاب می‌شوند و هر زوج یك بازی را انجام می‌دهد و بازنده از مسابقه حذف می‌شود و برنده ادامه می‌دهد. مثلاً اگر ما با ۳۲ بازیکن شروع‌کنیم پس‌از بازی اول ۱۶ نفر برای دور دوم باقی می‌مانند. اگر تعداد بازیکنان فرد باشند یك‌نفر بازی نمی‌کند امامرتب به دورهای بعدی راه پیدا می‌کند. اگر عدهٔ بازیکنان ۱۵ نفر باشند یك نفر بدون بازی جلو می‌رود و پس‌از بازی اول ۷ نفر برنده وآمادهٔ دوربعد خواهند شد.

در حالت کلی اگر n بازیکن شرکت داشته باشند:
اگر n زوج باشد آنگاه $\frac{n}{۲}$ بازی انجام خواهد شد و $\frac{n}{۲}$ بازیکن به دور بعدی راه پیدا می‌کنند اگر n فرد باشد $\frac{n-۱}{۲}+۱$ یا $\frac{n+۱}{۲}$ بازیکن ادامه خواهند داد $\frac{n-۱}{۲}$ بازی انجام شده است.

سؤال: اگر n بازیکن در مسابقه شرکت کنند، قبل‌از اینکه برنده تعیین شود، چند بازی باید انجام گردد؟

برای حل این مسأله عده زیادی ازدانش‌آموزان به‌آموزش واطلاعات خود مراجعه خواهندکرد وفوری به‌تکنیك «پارامتر صحیح» متوسل خواهند شد. وقتی آنها برای حالات خاص $n = ۲,۳,۴,۵,۶$ آزمایش کردند الگوی مسأله کاملاً روشن خواهد شد.

اگر n نفر بازی را شروع کنند و اگر در هر بازی یك نفر حذف شود آنگاه $n - ۱$ بازنده خواهد بود لذا $n - ۱$ بازی انجام شده است.

نتیجه:

ـ قبل‌ازآنکه شروع به‌حل مسأله کنید مطمئن شوید که مسأله

را خوب فهمیده‌اید.

– راه حل‌های پیچیده و پر عمل را ادامه ندهید مگر آنکه مطمئن شوید که راه ساده‌تری وجود ندارد.

– یك هدف اصلی در حل مسائل روشن ساختن نقش ارائه برهانهای مختلف (راه حل‌های مختلف) در ریاضیات است لذا برای رسیدن به جواب به راه حل‌های مختلف توجه کنید.

مسأله زیر نا مأنوس‌ترین ولی از قوی‌ترینهاست.

مسأله: مجموع سری هندسی زیر را پیدا کنید

$$S=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\cdots+\frac{۱}{۲^n}+\cdots$$

اگر دانش‌آموزان قبول کنند که این مجموع دارای حداست آنگاه راه حل زیر بهترین خواهد بود.

طرفین تساوی فوق را در ۲ ضرب می‌کنیم می‌شود:

$$۲S=۱+\underbrace{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\cdots+\frac{۱}{۲^n}+\cdots}_{S}$$

همانطورکه انتظار داشتیم:

$$۲S=۱+S \implies \boxed{S=۱}$$

وقتی دانش‌آموزان این شکل راه حل را می‌بینند معمولاً احساس می‌کنند که بحث ε و δ با آن ظرافت ودقت که به‌آنها تحمیل می‌شود غیر ضروری است چرا بایدآنهمه‌کش و قوس رفت در حالی‌که ما چنین استدلال ساده و قابل قبولی برای مسأله داریم.

من بحث مسأله زیر را نیز مفید می‌دانم

مسأله: مطلوبست تعیین مجموع سری زیر:

$$T=۱+۲+۴+۸+\cdots+۲^n+\cdots$$

از بحثی نظیر آنچه در بالا گذشت حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}۲T&=۲+۴+۸+۱۶+\cdots+۲^n+\cdots\\&=۱+(۲+۴+۸+۱۶+\cdots+۲^n+\cdots)-۱\\&=\underbrace{(۱+۲+۴+۸+۱۶+\cdots+۲^n+\cdots)}_{T}-۱\\&=T-۱\end{aligned}$$

$$\boxed{T=-۱\ ?}$$

(لغزشهای ریاضی ماکسول[1] یکی از منابع قوی برای استدلالهای نظیر استدلال بالاست. برای دوره‌های پیشرفته گل‌بام[2] و وال‌مست مثالهای نقص در آنالیز مفید می‌باشد).

نکته آموزشی

آماده ساختن دانش‌آموزان برای مسأله حل کردن که حالات خاص را مورد آزمایش قرار دهند و یا مسائل ساده‌تر در ارتباط با مسأله اصلی را بررسی کنند و یا استراتژی مختلف مسأله حل کردن را به‌کار بگیرند باید با همان دقت و تمرین انجام شود که ما آنها را برای به‌کار بردن مثلاً، فرمول معادله درجه دوم و یا قانون جزء به جزء در انتگرال‌گیری آماده می‌سازیم.

به طور کلی، من بحث منطقی زیر را برای آموزش هر تکنیکی مفید می‌دانم:

۱– آموزش هر تکنیك را با طرح مسائل خاص، جالب و دلچسبی شروع نمائید.

۲– در هفته‌های بعد، تعداد زیادی تمرین روی آن تکنیك حل کنید (مثلاً $\frac{۱}{۳}$ مسائل کلاس).

۳– در طول سال، به طور متعادلی، مسائلی که با آن تکنیك حل می‌شوند به‌کلاس بدهید.

بحث کلاس روی یك مسأله مشکل

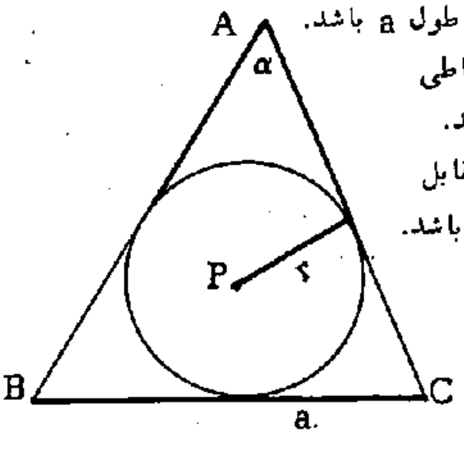
دراین قسمت کوشش من این است که گوشه‌ای از بحث‌های کلاس که روی مسأله زیر انجام گرفته است ارائه دهم.

مسأله: دو پاره خط به طولهای a و r مفروضند زاویه α نیز داده شده است مثلثی بسازید که دارای خواص زیر باشد.

۱– یك ضلع آن به طول a باشد.

۲– شعاع دایره محاطی داخلی مثلث r باشد.

۳– اندازه زاویه مقابل به ضلع a برابر α باشد.



برای سهولت در مراجعات بعدی، مثلث مطلوب را به T، نمایش می‌دهیم در شکل، اجزایی که سیاه‌تر ترسیم شده‌اند مفروضات مسأله را نشان می‌دهند که می‌خواهیم با استفاده از آنها مثلث T را بسازیم. کلاس با اساس به‌کارگیری خط‌کش و پرگار در رسم‌های هندسی آشناست. علاوه بر این بچه‌ها رسم کمان در خور زاویه α متناظر با خط a را نیز می‌دانند. روش استاندارد برای حل اینگونه مسائل این است که سعی شود مستقیماً مثلث مطلوب ساخته شود راه حل را می‌توان با یکی از فرض‌های داده شده مسأله شروع کرد و آنگاه سعی نمود با تعیین تلاقی دو مکان هندسی ساخته شده نقطه‌ای تعیین کرد که به طور یگانه‌ای مثلث T را مشخص سازد ـ کلاس همچنین با روش دیگری نیز آشناست «ساختن مثلث متشابه با مثلث T و سپس رسیدن به T با کم و زیاد کردن نسبت (مقیاس) تشابه» شاید منطقی باشد که به دنبال چنین راه حلی نیز رفت.

در زیر بحث‌های کلاس را که، مدت ۴۰ دقیقه وقت ما را اشغال نمود و به وسیله دو نفر از دانش‌آموزان یادداشت و تنظیم شده است می‌بینید[۳].

طرح تصمیم‌گیری

به نظر شما شروع کار باید با کدام یك از مفروضات زیر باشد؟

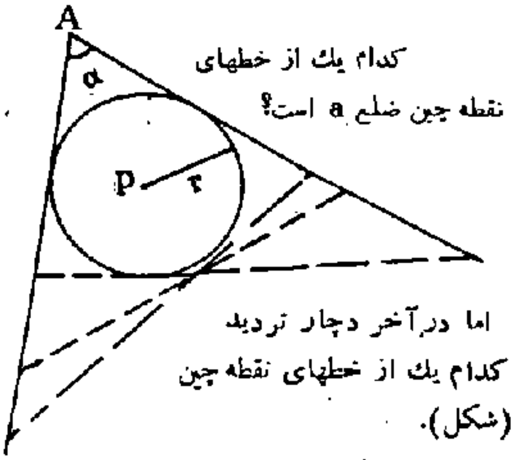
الف ـ دایره محاطی با شعاع r.

ب ـ ضلع a از مثلث.

ج ـ زاویه α به رأس A

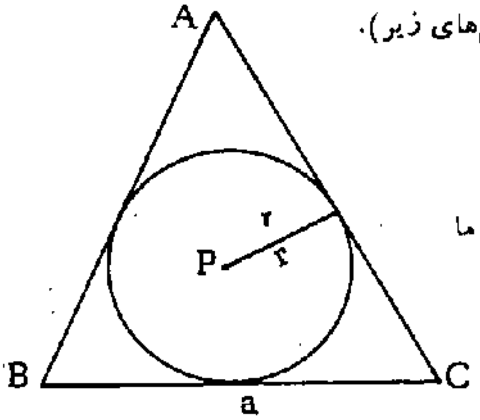
آیا انتخاب الف خارج از بحث است؟ ببینیم اگر با دایره محاطی شروع کنیم وضع ضلع a چطور می‌شود؟

ضلع a چگونه با رأس A ارتباط پیدا می‌کند؟ به نظر می‌رسد که این یکی ارزش پی‌گیری کردن را ندارد. اما انتخاب «ب» منطقی به نظر می‌رسد اگر با ضلع a شروع کنیم ما می‌توانیم (I) مکان هندسی رأس A را رسم کنیم (II) مکان مرکز دایره محاطی یعنی، P را تعیین نماییم. اما این دو مکان چگونه با هم ارتباط پیدا می‌کنند روشن نیست؟ ممکن است این مطلب ارزش پی‌گیری کردن را داشته باشد. اما اجازه بدهید نگاهی هم به انتخاب «ج» بیاندازیم. اگر با زاویه α شروع کنیم به نظر می‌آید که ما می‌توانیم دایره را محاط نماییم. آیا می‌توان از آنجا راه‌حلی بدست آورد؟ جواب هم ممکن است و هم ممکن نیست اما به‌نظرمی‌رسد که ارزش دنبال کردن داشته باشد با زاویه α شروع می‌کنیم نقطه P به‌آسانی

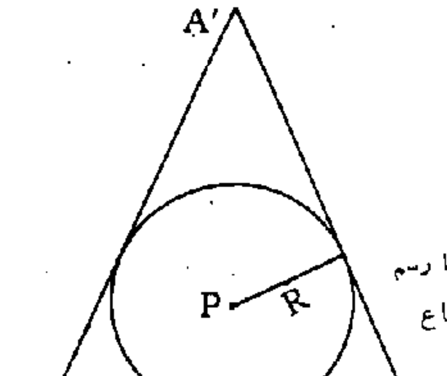


بدست می‌آید. اما درآخر دچار تردید می‌شویم که آیا کدام یك از خطهای نقطه چین ضلع a است؟ (شکل).

ما طول ضلع a را و اینکه بر دایره باید مماس باشد می‌دانیم. دو نوع اطلاع راجع به ضلع a داریم اما ظاهراً راهی برای ارتباط آنها به نظر نمی‌آید اگر چه قدری باز ـ نگهدارنده است اما هنوز هم ممکن است ما بتوانیم از تشابه اشکال رسم شده چیزی به دست آوریم و این ارزش یك امتحان کردن مختصر را دارد ما یك مماس دلخواه را در پایین دایره می‌کشیم و امید داریم که بعداً با کم و زیاد کردن نسبت تشابه به a برسیم (شکل‌های زیر).



این شکلی است که ما می‌خواهیم به شعاع r و BC=a



این شکل را می‌توان با رسم یك دایره محاطی به شعاع دلخواه R به دست آورد

در شکل بالا، اگر دو مثلث متشابه باشند داریم $\frac{x}{R}=\frac{a}{r}$ و این به نظر نمی‌آید که به جائی برسد و متوقف می‌شویم.

طرح تصمیم‌گیری ۵ دقیقه از وقت کلاس را می‌گیرد. در این موقع من نقش راهنما را بازی می‌کنم و سؤالاتی از این

قبل مطرح می‌کنم: خوب، چه انتخابهایی ما داریم؟ آیا انتخابهای دیگر نیز وجود دارد؟ کدام از اینها امیدوار کننده‌تر به‌نظر می‌رسند؟ بنابراین انتخاب ما، بین ب و ج خواهد بود. شما باکدام یك از این دو شروع خواهیدکرد؟ دانش‌آموزان کلاس راجع به کارآئی هر یك از این دو راه بحث می‌کنند و تصمیم می‌گیرند. فرض ج را آزمایش کردیم به‌نتیجه نرسید.

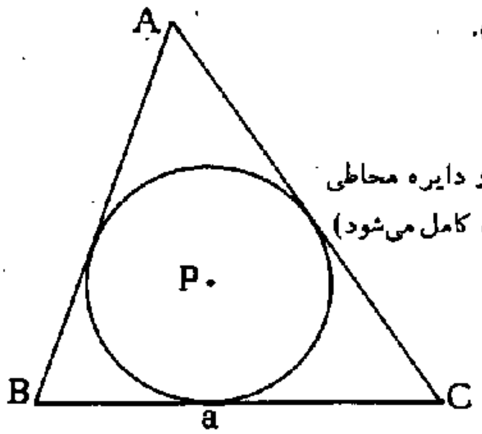
تصمیم مدبرانه

آیا ما باید این خط فکری را بیشتر دنبال‌کنیم و یا اینکه برگردیم و راه دیگری را جستجوکنیم. بدین ترتیب به نظر می‌رسدکه ما به بن‌بست رسیده‌باشیم لذا تصمیم گرفتیم دوباره به انتخاب «ب» برگردیم.

۱ــ می‌دانیم‌که ما می‌توانیم مکان هندسی نقاطی راکه مقابل ضلع a هستند وزاویهٔ ثابتی را می‌سازند (کمان درخور زاویه α متناظر با پاره‌خط a) رسم کنیم.

۲ــ می‌دانیم‌که برای نقطه P، یعنی مرکز دایره محاطی نیز یك مکان داریم.

ما نیاز به اطلاع دیگری راجع به مثلث داریم. اگربتوانیم مکان دیگری را برای رأس A پیداکنیم آنگاه کارساختن مثلث تمام شده است تعیین مکان دیگری برای نقطهٔ P، مرکز دایره محاطی، به ما امکان رسم دایره محاطی را می‌دهد. همچنین به ما امکان خواهد داد از دوسر پاره‌خط a دومماس بردایره رسم کنیم. (شکل زیر).



(با داشتن ضلع a و دایره محاطی درجا ساختن مثلث کامل می‌شود)

در زیر انتخابهای ممکن دسته‌بندی شده است

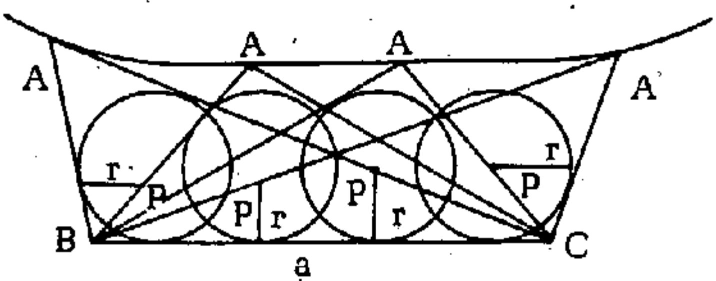
۱ــ تعیین مکان رأس A وقتی ضلع a ثابت ودایره محاطی داخلی مثلث با شعاع ثابت‌که برضلع a مماس است تغییرکند.

۲ــ تعیین مکان مرکز دایره محاطی داخلی مثلث وقتی‌که ضلع a ثابت واندازهٔ زاویه A نیزبرابر مقدارثابت α باشد و رأس A تغییرکند (کمان درخور زاویه α نظیر وتر a) کدام یك را باید ادامه داد؟

پیشنهاد: ما در وضع غیر ثابتی هستیم و اساسی برای یك قضاوت خوب نداریم شاید حالا وقت آن رسیده باشدکه چند تا شکل تقریبی رسم‌کنیم چه مشاهده بعضی کارهای عملیّ و ترسیمی ممکن است ما را هدایت‌کندکه یك انتخاب را بر دیگری ترجیح دهیم و حتی ممکن است فرضیه و ایدهٔ جدیدی نیز به‌دست دهد. ما انتخابهای ۱ و ۲ را به ترتیب درشکلهای ۱ و ۲ آزمایش می‌کنیم.

انتخاب ۱

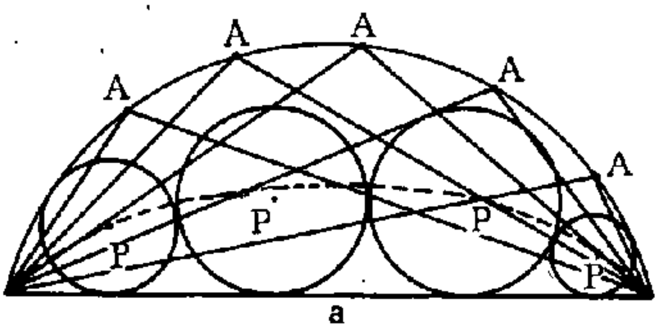
تعیین مکان رأس A با در دست داشتن ضلع ثابت a و دایره محاطی متغیر با شعاع ثابت r به نظر نمی‌آیدکه این شکل راه‌گشا باشد.



شکل (۱)

انتخاب ۲

تعیین مرکزدایره محاطی P، با در دست داشتن a و رأس متغیر A متقابل به زاویه α نظیر a



شکل (۲)

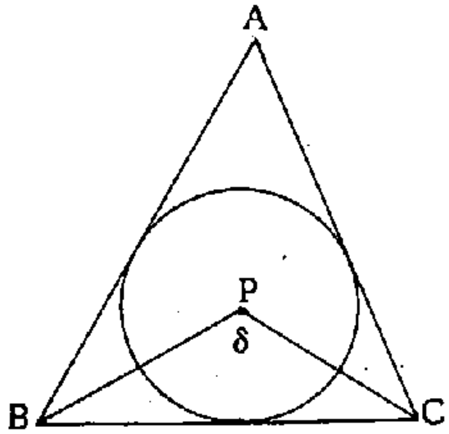
مکان متقارن است واز دوسر پاره‌خط a می‌گذرد واحتمال دارد قوسی ازیك دایره باشد. این انتخاب ممکن است ما را به جائی برساند. شکل تقریبی رسم شده نشان می‌دهدکه مکان P، با دردست داشتن متغیر A، ممکن است دایره‌ای باشد، که

ضلع a وتر آن است (اگر ما از حدس خود مطمئن نیستیم می‌توانیم شکل‌های دقیق‌تری رسم کنیم. اجازه بدهید این کشف عملی را دست‌کم نگیریم).

لم ۱ (زیر مسأله) - ثابت کنید مکان هندسی نقطه P (مرکز دایره محاطی) وقتی ضلع a و رأس متغیر A داده شده دایره‌ای است که a یک وتر آن می‌باشد.

سؤال - چگونه این مطلب را ثابت کنیم؟ ما راجع به دایره و وتر و خواص آن چیزهائی در این زمینه می‌دانیم.

بیان لم بالا به شکل دیگر - ثابت کنید که با در دست داشتن a و α، نقطه P یک زاویه ثابت متقابل (متناظر) ضلع a می‌سازد (کمان درخور شکل زیر).

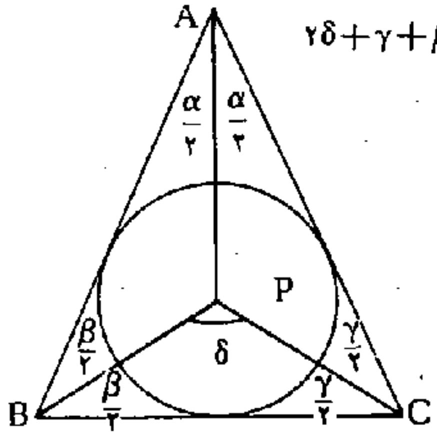


آیا می‌توان ثابت کرد که زاویه δ فقط بستگی به α دارد؟

لم ۲ (زیر مسأله) - فرمولی که δ را برحسب α نشان دهد به دست آورید. در مثلث PBC داریم:

$$\delta+\frac{\gamma}{۲}+\frac{\beta}{۲}=۱۸۰^\circ$$

$$۲\delta+\gamma+\beta=۳۶۰^\circ \qquad (۱)$$



در مثلث ABC نیز داریم

$$\alpha+\beta+\gamma=۱۸۰^\circ \qquad (۲)$$

با توجه به (۱) و (۲) می‌شود:

$$\boxed{\delta=۹۰^\circ+\frac{\alpha}{۲}}$$

یعنی δ فقط بستگی به α دارد، و این مسأله را حل می‌کند. مرکز دایره محاطی از محل تلاقی دایره و یک خط، به شرح زیر به دست می‌آید.

۱- رسم کمان درخور زاویه $\delta=۹۰+\frac{\alpha}{۲}$ متناظر با پاره خط a

۲- رسم خط موازی a و به فاصله r از آن

جمع‌بندی مختصر بحث فوق

همانطور که در بالا گفته شد، حل این مسأله ۴۵ دقیقه وقت کلاس را گرفت تا به نتیجه رسید. درصورتی که می‌شد ظرف ده دقیقه یا کمتر راه حل را ارائه داد - آیا این همه وقت صرف یک مسأله کردن؛ با شروع‌های نادرست آغاز کردن، به عقب برگشت کردن، راههای کور تجربه کردن استراتژی مهم تصمیم گرفتن، دنبال لم‌ها رفتن و غیره حقیقتاً ارزش پی‌گیری کردن دارد و قابل دفاع است؟ جواب من مثبت است، اگرچه مطمئناً قصد این را ندارم که توصیه کنم هر مسأله‌ای را از این راه حل کنید.

مواقعی است که ما فقط نیاز داریم اطلاعات را ارائه دهیم مثلاً آن زمان که دانش‌آموزان می‌خواهند در راه حل‌های معمولی مهارت پیدا کنند.

ما باید دانش‌آموزان را هدایت کنیم که اندیشیدن و کشف کردن را بیاموزند. در حقیقت مهمترین وظیفه ما به عنوان یک معلم و راهنما این است که دانش‌آموزان خود را طوری تربیت کنیم که خودکار و خود اندیش باشند من فکر می‌کنم که این طریق مسأله حل کردن در کلاس یک کاتالیزور برای اینگونه آموزش است.

در محاسبهٔ زاویه δ برحسب α، کلاس یک کشف کاملاً غیر منتظره‌ای انجام داد «مکان هندسی مرکز دایره محاطی با مفروضات داده شده (ضلع ثابت a و رأس متغیر A با زاویه α متقابل a) دایره‌ای است که a وتر آن است» کار این کشف به علت نیاز و همچنین انجام چند ترسیم تسریع شد مهم اینکه آن در حل مسائل دیگر نیز مفید خواهد بود. خلاصه اینکه آن‌روز دانش‌آموزان در کلاس کار ریاضی کردند تجربه‌ای که آنها در آن کشف کوچک داشتند شبیه تجربه خود ماست وقتی که با ریاضیات عالی کار می‌کنیم. این روش مسأله حل کردن به ما اجازه می‌دهد که ریاضی را به عنوان یک درس زنده و حیاتی، که در آن کشف هم ممکن است و هم لذت بخش، معرفی

نمایيم.

اما راجع به شروعهای نادرست، عقب گردها، راههای کور و غیره چطور؟ در حقیقت کار ریاضی کردن شامل همهٔ این مراحل می‌شود. کار ریاضی یعنی فائق آمدن برهمهٔ این مشکلات دانستن آنکه چه موقع باید کنکاش کرد. تصمیم گیری روی انتخابهایی که جلوی روی ماست، چه راهی را باید دنبال نمود، کدامها نتیجه می‌دهند و کدامها باید رها شوند، و غیره. دانش آموزانی که این مطالب را می‌دانند به احتمال خیلی قوی در حل مسائل مبارزه جوتر و با شهامت‌تر خواهند بود. آنها وقتی کار ریاضی می‌کنند، مسأله حل می‌کنند و یا راه‌حل‌ها را شخصاً تجربه می‌کنند از این راه کلی مطلب یاد می‌گیرند.

مسأله حل کردن مشکل ریاضی‌دانهاست، **آن لذت وهیجان** ریاضی است. ما وظیفه داریم و حتی بدهکاریم به آنهایی که در آینده می‌خواهند ریاضی‌دان شوند و یا آنهایی که کار ریاضی را انجام می‌دهند و یا ریاضی را به کار می‌برند و یا کسانی که نسبت به ریاضی علاقه دارند **تجربه مسأله حل کردن را یاد بدهیم.**

ما معتقدیم که آموزش روش مسأله حل کردن به دانش آموزان هیجان و زیبایی ریاضی را نشان خواهد داد. به همان درجه که ما دانش آموزان خود را تربیت کنیم که مستقلاً فکر کنند و از اطلاعات خود خوب استفاده نمایند. ما به عنوان یك معلم در کار خود توفیق پیدا کرده‌ایم.

نمونه مسائل کار در کلاس

۱ـ فرض کنید p عدد اول بزرگتر از ۳ باشد ثابت کنید که باقیماندهٔ P^2 بر عدد ۱۲ برابر ۱ است.

۲ـ فرض کنید P یك چند ضلعی با ۱۰۰۱ ضلع باشد آیا:

الف ـ هرگز

ب ـ بعضی اوقات ولی نه همیشه

ج ـ همیشه می‌توان خط راستی رسم کرد که همهٔ اضلاع P را قطع کند؟

۳ـ آیا فقط با به کار گرفتن اسکناسهای ۷ و ۱۷ تومانی می‌توان:

الف ـ یك دفترچه ۵ تومانی خرید و باقی پول را نیز درست تحویل گرفت؟

ب ـ یك مجلهٔ ۱۱ تومانی؟ و یك باغ ۹۸۷۶۹۸۷۶ تومانی؟

۴ـ آیا فقط با به کار گرفتن اسکناسهای ۶ و ۱۵ تومانی می‌توان

الف ـ یك کتابچه ۵ تومانی خرید؟ یك مداد ۱۲ تومانی خرید؟ یك باغ ۱۲۳۴۵۶۷۸۹ تومانی خرید؟ (و باقیمانده را درست دریافت کنید).

۵ـ اگر a، b، c، d اعداد مفروض مثبت باشند ثابت کنید

$$\frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)}{abcd} \geqslant 16$$

۶ـ با در دست داشتن قطعه خطی به طول l، آیا می‌توان پاره‌خطی به طول:

$$l\left(\frac{\sqrt{13}-3}{4}\right)$$

رسم کرد؟

۷ـ مجموع زیر را پیدا کنید

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}$$

۸ـ اینهم برای کسانی که «حساب حروفی» را دوست دارند، مجموع‌های زیر را حساب کنید. (هرحرف متمایز نمایش یك رقم متمایز است)

```
  FORTY
+   TEN        SEND
+   TEN     +  MORE
  -----     -------
  SIXTY      MONEY
```

زیرنویس‌ها:

1– Maxwell,s Fallacies in Mathematics.

2– Gelbaum and Olmest.

۳ـ مطالب در کلاس خیلی سریع پیش می‌رود و یادداشت برداشتن اغلب موجب عدم توجه دقیق دانش‌آموزان به مطلب درسی می‌شود. ما معمولاً در کلاس بدین ترتیب عمل می‌کنیم که در هر جلسه به نوبت دو نفر از دانش‌آموزان یادداشت برمی‌دارند و بعد با استفاده از آنها بحث کلاس تنظیم و تدوین و به وسیله خودم یادداشتها تصحیح می‌شود و سپس بین دانش‌آموزان توزیع می‌گردد (از ضبط و نوار هم استفاده می‌شود) بقیه دانش‌آموزان در آن روز از نوت برداری رسمی معاف هستند ولی ممکن است نکات مهم، جالب و آموزنده درس‌را برای‌خود یادداشت کنند که به همین یادداشتها نیز به عنوان کار در کلاس توجه و نمره داده می‌شود.