انتشارات مدرسه

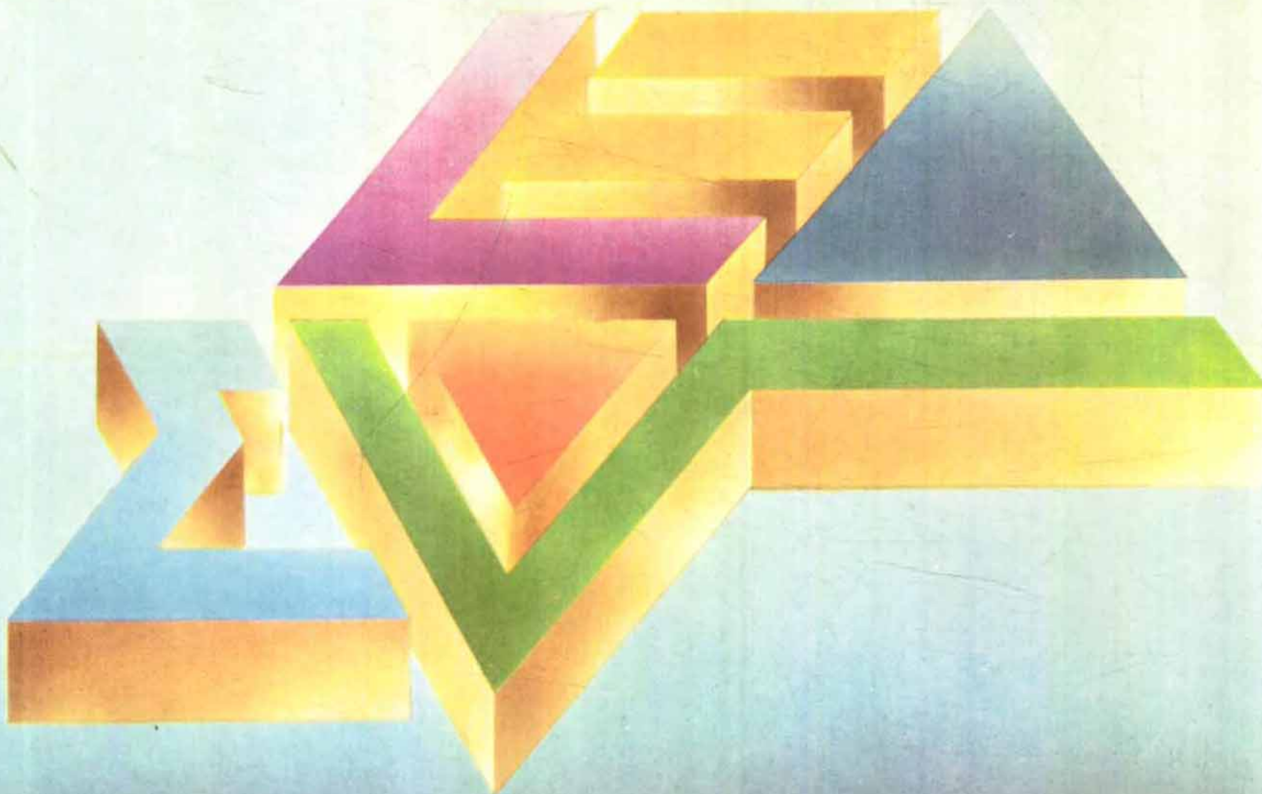
مجله ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۱

سال اول، زمستان ۱۳۷۰ بها ۵۰۰ ریال



چاپ پنجم

بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

برهان تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱ ـ نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث درسی کتب ریاضی دبیرستان)

۲ ـ طرح مسائل کلیدی (برای دانش آموزان) به همراه حل آن

۳ ـ طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش آموزان) به همراه حل آن

۴ ـ طرح معماهای ریاضی

۵ ـ نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و...)

مقالات وارده باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.
هیئت تحریریه درحکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.

□ نشانی : خیابان ایرانشهرشمالی ، پلاک ۲۶۸ ، ساختمان شمارهٔ ۴ وزارت آموزش و پرورش تلفن : ۸۲۶۰۰۷

مطالب این شماره

سخن سردبیر

عزیزان سلام

مدتی بود که با جمعی از دوستان در گروه ریاضی انتشارات مدرسه، که همگی از دبیران و اساتید با تجربهٔ ریاضیات هستند مشغول مذاکره و مشاوره بودیم تا بلکه باعنایت خداوند گرهی از گره‌های فراوان دانش‌آموزان و معلمین را در امر آموزش و فهم ریاضیات ، بازکنیم.

دوستی می‌گفت : متأسفانه توزیع معلمین کارآمد و پرتجربه و امکانات آموزشی در مناطق مختلف کشور و حتّی در مناطق مختلف تهران عادلانه نیست و چون بسیاری از مطالب کتابهای درسی نیاز به توضیح و تفصیل دارند و در روش تدریس ریاضیات هم میان معلمین هماهنگی وجود ندارد؛ بچه‌ها برای جبران کمبودهای درسشان به آموزشگاههای تضمینیِ خصوصی و کتابهای کمک درسی و کمک آموزشی رو می‌آورند. آموزشگاههایِ تضمینیِ خصوصی مانند قرص مسکّن فقط تا لب امتحان دانش آموز را می‌رساند و با تمام شدن امتحانات اثرات این قرصها هم از بین می‌رود (یعنی علم و دانش هیچ). کتابهای کمک آموزشی هم اکثراً پیش دانشگاهی است و تازه همینها هم غالباً از مرزهای تهران خارج نمی‌شود.

دوست دیگری می‌گفت: «البته ما چند مجلهٔ ریاضی هم در کشور داریم ولی متأسفانه هیچکدامشان دانش آموزی نیست. در این میان دانش آموزانی که بنیهٔ علمی متوسطی دارند عملاً در نشریات و کتابهای کمک آموزشی فراموش شده‌اند. خلاصه، بحثهای فراوانی شد تا بالاخره به اینجا رسیدیم که با یاری دوستان همدل، دست به تولید یک مجلهٔ ریاضی دانش آموزی بزنیم و به این ترتیب به راهی پر پیچ و خم قدم گذاشتیم که امیدواریم به لطف خدا قدمهایمان نلغزد.

در این مجله که با استمداد از قرآن مجید[1] نام برهان به آن داده‌ایم، سعی شده علاوه برمقالات درسی که در سطح دانش آموزان اول تا چهارم متوسطه است، مقالات عمومی قابل استفاده‌ای برای معلمین و دانش آموزان علاقه‌مند نیز گنجانده شود. حتی‌الامکان مقالات دنباله‌دار نخواهیم داشت، و هر مقاله را (ان‌شاءا...) در همان شمارهٔ مجله تمام خواهیم کرد. البته فعلاً تنها بخش دنباله‌دار مجله (بنابر ضرورت)، بخش «مسائل برای حل» و «مسائل مسابقه‌ای» خواهد بود. صورت مسائل هر دو قسمت در این شماره چاپ می‌شود و حل مسائل در شماره بعد چاپ خواهد شد. در بخش «مسائل مسابقه‌ای» خوانندگان عزیز حل مسائل را حداکثر تا یکماه به آدرس مجله پست خواهند کرد و مابرای کسانی که جواب درست فرستاده باشند جوایزی ارسال خواهیم کرد و اسامی آنها را نیز در مجله چاپ خواهیم کرد. «مسائل برای حل» طوری طراحی شده‌اند که هم زمان با پیشرفت درسهای کتابهای ریاضی و هماهنگ با مطالب آنها باشد. همچنین بخشهای متنوع دیگری با عناوین «ادب ریاضی» و «تفریح اندیشه» در لابه لای مقالات گنجانده شده که امیدواریم مورد توجه و استفادهٔ شما عزیزان واقع شود. البته قسمتی از مجله را نیز از شمارهٔ بعد به مقالات و نظرات شما و جواب نامه‌هایتان اختصاص خواهیم داد. مجلهٔ برهان فعلاً به صورت فصلنامه منتشر می‌شود که امیدواریم ـ به خواست خداوند ـ بتوانیم آن را ماهانه منتشر کنیم و بالاخره از آنجا که هیچ کلامی جز کلام خدا و معصومین(ع) خالی از خطا و اشتباه نیست، از همهٔ اساتید محترم، معلمین گرامی و دانش آموزان عزیز تقاضا می‌کنیم که ما را از نظرات، انتقادات و پیشنهادات خود بهره‌مند کنند و این مجله را مجلهٔ خودشان بدانند.

سردبیر

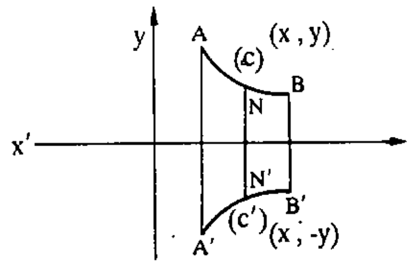
۱ـ کلمهٔ برهان و مشتقات آن ۸ بار در قرآن آمده است از جمله آیهٔ : یاأَیُّهَاالنّاسُ قَدْجاءَکُمْ بُرْهانٌ مِن رَبِّکُم «سورهٔ نساء آیهٔ ۱۷۴»

مبحث تقارن

(مورد استفاده دانش آموزان سال چهارم ریاضی)

● محمد عابدی

۱ : تقارن منحنی نسبت به محور x ها : برای به‌دست آوردن قرینه نقطه A نسبت به محور x ها از نقطه A عمود AH را بر محور x ها فرود آورده، AH را به اندازه خود امتداد داده تا نقطه A' به‌دست آید در این صورت نقطه A' را قرینه نقطه A نسبت به محور x نامیده و محور x ها را محور تقارن می‌نامند. اگر قرینه هر نقطه منحنی (C) را نسبت به محور x ها به‌دست آوریم و این نقاط را به هم وصل نماییم شکل (C') را قرینه منحنی (C) نسبت به محور x ها می‌نامند.



شکل ۱

اگر مختصات نقطه A را (x , y) فرض نماییم مختصات نقطه A' به صورت (x , −y) می‌باشد اگر معادله منحنی (C) به صورت $y=f(x)$ باشد برای به دست آوردن معادله منحنی C' بایستی در معادله منحنی (C) ، x را تغییر نداده و y را به −y تبدیل نماییم.(شکل ۱)

مثال ۱ : مختصات قرینه نقطه $A(2,3)$ را نسبت به محور x ها بیابید.

حل : کافی است y را به −y یعنی ۳ را به ۳− تبدیل نماییم، داریم : $A'(2\ ,\ -3)$.

مثال ۲ : اگر نقاط $A(m+4\ ,\ n+6)$ و $A'(-m\ ,\ 2n)$ نسبت به محور x ها قرینه باشند m و n کدام است؟

حل :

$$x_A = x_{A'} \Rightarrow -m = m + 4 \Rightarrow -2m = 4 \Rightarrow \boxed{m=-2}$$

و

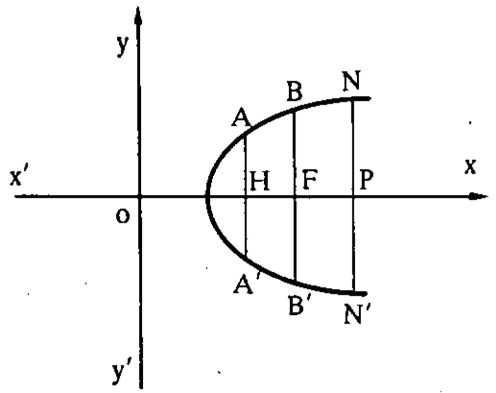
$$y_A = -y_{A'} \Rightarrow n+6 = -2n \Rightarrow 3n = -6 \Rightarrow \boxed{n=-2}$$

$$\Rightarrow A(-2+4, -2+6) \Rightarrow A(2,4) \text{ و } A'(2,-4)$$

مثال ۳ : معادله قرینه خط به معادله $y = x+2$ را نسبت به محور x ها بیابید.

حل :
$$y \to -y \Rightarrow -y = x+2 \Rightarrow \boxed{y=-x-2}$$

تبصره ۱ : محور x ها را محور تقارن یک منحنی گویند اگر قرینه هر نقطه منحنی نسبت به محور x ها روی خود منحنی باشد. (شکل ۲)



شکل ۲

$$AH = HA' \text{ و } BF = FB' \text{ و } NP = PN'$$

مثال ۴ : محور تقارن منحنی به معادله $y^2=x$ کدام است؟

حل : اگر y را به −y تبدیل کنیم معادله تغییر نمی‌کند بنابراین محور تقارن منحنی محور x ها می‌باشد.

مثال ۵ : اگر محور تقارن منحنی به معادله $y^4-(m-1)y^3+2=x$ محور x ها باشد m کدام است؟

حل : اگر y را به −y تبدیل نماییم باید معادله تغییر نکند.

$$(-y)^4-(m-1)(-y)^3+2=x \Rightarrow y^4+(m-1)y^3+2=x$$

با مقایسه معادله اخیر با معادله منحنی داریم :

$$-(m-1) = m-1 \Rightarrow 2(m-1) = 0 \Rightarrow \boxed{m=1}$$

یا می‌توانیم بگوییم با تبدیل y به $-y$ ، y^3 تغییر می‌کند پس باید y^3 وجود نداشته باشد و این در صورتی است که ضریب y^3 یعنی

$-(m-1)=0$ یا $\boxed{m=1}$ باشد.

مثال ۶: محور تقارن منحنی $|y| = x^2 - x$ کدام است؟

حل: اگر y را به $-y$ تبدیل کنیم چون $|-y| = |y|$ می‌باشد پس معادله $|-y| = x^2 - x$ همان معادله داده شده می‌باشد بنابراین چون معادله تغییر نمی‌کند لذا محور تقارن منحنی محور xها می‌باشد.

تبصره ۲: نشان دهید محور تقارن منحنی به معادله $y = \pm f(x)\sqrt{g(x)}$ محور xها می‌باشد.

حل: اگر طرفین معادله را به توان (۲) برسانیم معادله به‌صورت $y^2 = f^2(x)\,g(x)$ در آمده اگر در این معادله y را به $-y$ تبدیل نماییم معادله تغییر نمی‌کند پس محور تقارن منحنی محور xها می‌باشد مثلاً محور تقارن $y = \pm x\sqrt{x^2+1}$ محور xها است.

مثال ۷: اگر محور تقارن منحنی به‌معادله $y=m-2\pm x\sqrt{x-2}$ محور xها باشد m کدام است؟

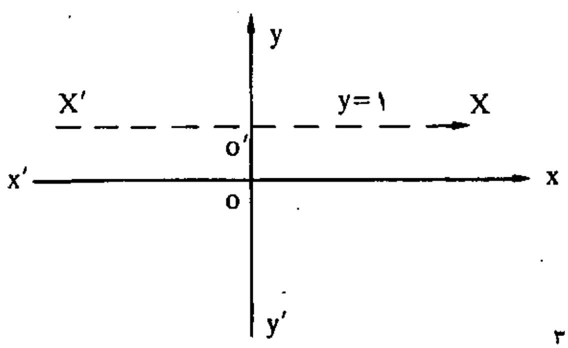
حل: اگر $m-2=0$ یا $\boxed{m=2}$ باشد معادله به‌صورت $y = \pm x\sqrt{x-2}$ درآمده پس محور تقارن منحنی محور xها خواهد بود.

مثال ۸: نشان دهید محور تقارن منحنی به‌معادله $y^2-2y-x=0$ خط $y=1$ می‌باشد.

حل: مبدأ مختصات را به نقطه $O'(\alpha=0\,,\ \beta=1)$ انتقال داده، معادله منحنی را در دستگاه جدید می‌نویسیم:

$$x = X+\alpha \Rightarrow x = X+0 = X,\ y = Y+\beta = Y+1$$

به جای x در معادله X و به جای y در معادله $Y+1$ قرار داده داریم:



شکل ۳

$$(Y+1)^2-2(Y+1)-X=0 \Rightarrow Y^2+2Y+1-2Y-2-X=0 \Rightarrow Y^2-X-1=0$$

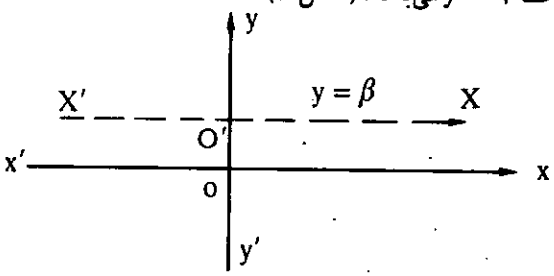
اگر در این معادله Y را به $-Y$ تبدیل نماییم معادله تغییر نمی‌کند پس محور تقارن محور xهای جدید یعنی خط $y=1$ محور تقارن منحنی می‌باشد. (شکل ۳)

مثال ۹: اگر محور تقارن منحنی به معادله $y^2-2y-x=0$ خطی موازی محور xها باشد معادله محور تقارن را بیابید.

حل: مطابق فرض خط $y=\beta$ محور تقارن منحنی بوده مبدأ مختصات را به نقطه $O'(0\,,\beta)$ انتقال داده داریم:

$$x = X+0 = X,\ y=Y+\beta,\ (Y+\beta)^2-2(Y+\beta)-X=0 \Rightarrow Y^2+2\beta Y+\beta^2-2Y-2\beta-X=0 \Rightarrow Y^2+2Y(\beta-1)-X+\beta^2-2\beta=0$$

اگر در معادله اخیر Y را به $-Y$ تبدیل نماییم معادله نباید تغییر کند و این درصورتی است که $\beta-1=0$ یا $\beta=1$ پس محور تقارن منحنی خط $y=1$ می‌باشد. (شکل ۴)

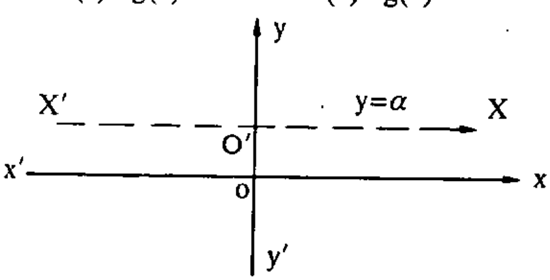


شکل ۴

تبصره ۳: نشان دهید محور تقارن منحنی به معادله $y = a \pm f(x)\sqrt{g(x)}$ خط $y=a$ می‌باشد.

حل: مبدأ مختصات را به نقطه $O'(\alpha=0\,,\ \beta=a)$ انتقال داده داریم:

$$x = X+0 = X,\ y = Y+\beta = Y+a,\ Y+a = a\pm f(x)\sqrt{g(x)} \Rightarrow Y = \pm f(x)\sqrt{g(x)}$$



شکل ۵

یعنی محور xهای جدید یا خط $y=a$ محور تقارن است. (شکل ۵)

مثال ۱۰ : اگر خط $y = ۱$ معادله محور تقارن منحنی $y = m - ۱ \pm x\sqrt{x}$ باشد m کدام است؟

حل: با توجه به تبصره (۳) خط $y = m - ۱ = ۱$ محور تقارن بوده پس $\boxed{m = ۲}$ می‌باشد.

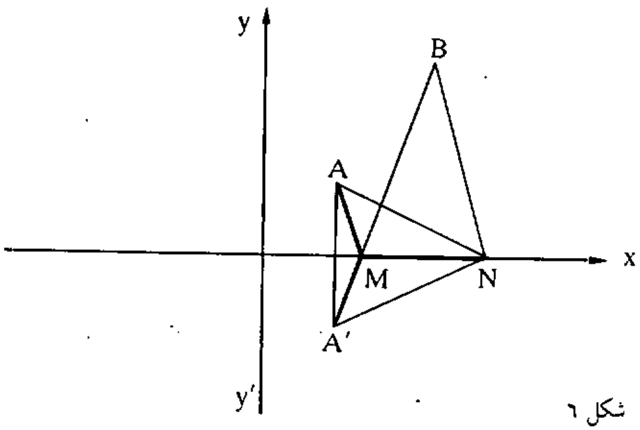
مثال ۱۱ : نقطه‌ای روی محور x ها بیابید که مجموع فواصل آن نقطه از نقاط $B\,(۲\,,\,۳)$ و $A(۱\,,\,۱)$ می‌نیمم باشد.

حل : قرینه نقطه A را نسبت به محور x ها به‌دست آورده آن‌را نقطه A' می‌نامیم نقطه A' را به B وصل نموده تا محور x ها را در نقطه M قطع نماید نقطه M جواب مسأله است زیرا اگر نقطه دیگری مانند N روی محور x ها در نظر بگیریم نشان خواهیم داد که $NA + NB > MA + MB$ می‌باشد. چون نقاط N و M روی عمود منصف AA' می‌باشند پس $NA = NA'$ و $MA = MA'$ (هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط فاصله‌اش از دو سر آن پاره خط به یک اندازه می‌باشد) و در مثلث $NA'B$ داریم :

$$A'B < NA' + NB \Rightarrow A'M + MB < NA' + NB \Rightarrow$$

$$\boxed{MA + MB < NA + NB}$$

برای به‌دست آوردن نقطه M معادله خط $A'B$ را نوشته در این معادله به جای y صفر قرار داده طول نقطه M به‌دست می‌آید.



شکل ۶

$A'(x_1 = ۱\,,\,y_1 = -۱)$ و $B(x_2 = ۲\,,\,y_2 = ۳),\ A'B \overset{\text{به‌معادله}}{\equiv}$

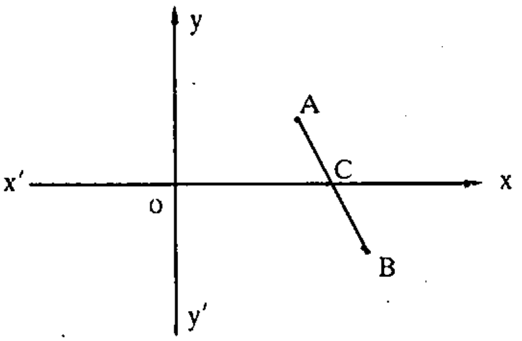
$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Rightarrow \frac{y+۱}{x-۱} = \frac{۳+۱}{۲-۱} \Rightarrow \frac{y+۱}{x-۱} = ۴\,,$$

$$y = ۰ \Rightarrow \frac{۱}{x-۱} = ۴ \Rightarrow ۴x - ۴ = ۱ \Rightarrow x = \frac{۵}{۴}\,,$$

$$\boxed{M(\frac{۵}{۴}\,,\,۰)}$$

مثال ۱۲ : نقطه‌ای روی محور x ها بیابید که مجموع فواصل آن از دو نقطه $B(۲\,,\,-۱)$ و $A(۱\,,\,۱)$ می‌نیمم باشد.

حل : چون دو نقطه B و A در طرفین محور x ها قرار دارند جواب مسأله نقطه برخورد خط AB با محور x ها یعنی نقطه C است.



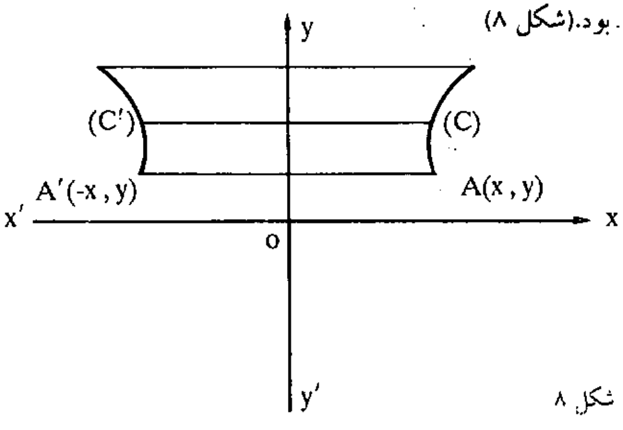
شکل ۷

$A(x_1 = ۱\,,\,y_1 = ۱)$ و $B(x_2 = ۲\,,\,y_2 = -۱),\ AB \overset{\text{به‌معادله}}{\equiv}$

$$\frac{y-۱}{x-۱} = \frac{-۱-۱}{۲-۱} = -۲ \text{ و } y_c = ۰ \Rightarrow \frac{-۱}{x-۱} = -۲ \Rightarrow \frac{۱}{x-۱} = ۲ \Rightarrow$$

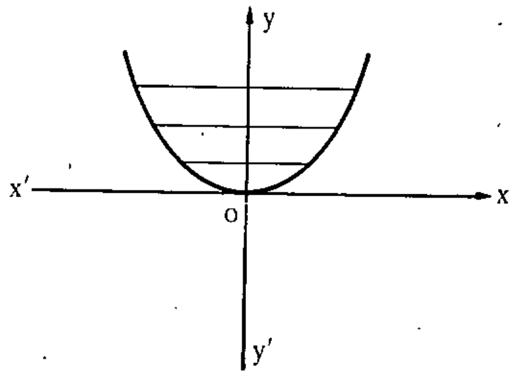
$$۲x - ۲ = ۱ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \boxed{C(\frac{۳}{۲}\,,\,۰)}$$

۲ : تقارن منحنی نسبت به محور y ها : برای به‌دست آوردن قرینه منحنی (C) نسبت به محور y ها قرینه هر نقطه منحنی را نسبت به محور y ها به‌دست آورده این نقاط را به هم وصل نموده شکل به دست آمده یعنی (C') قرینه منحنی نسبت به محور y ها خواهد بود. (شکل ۸)



شکل ۸

به خصوص اگر قرینه هر نقطه منحنی نسبت به محور y ها روی خود منحنی باشد در این صورت می‌گوییم محور y ها محور تقارن منحنی است. (شکل ۹)



شکل ۹

برای به‌دست آوردن قرینه نقطه $A(x , y)$ نسبت به محور y ها کافی است x را به $-x$ تبدیل نماییم یعنی نقطه $A'(-x , y)$ قرینه نقطه A می‌باشد. و برای به دست آوردن معادله منحنی (C') در معادله منحنی (C) بایستی x را به $-x$ تبدیل نماییم و y را تغییر ندهیم.

مثال ۱: مختصات قرینه نقطه $A(۲ , ۳)$ نسبت به محور y ها کدام است؟

حل: کافی است x نقطه A را به $-x$ یعنی ۲ را به -۲ تبدیل نماییم پس قرینه نقطه A نقطه $A'(-۲ , ۳)$ می‌باشد.

مثال ۲: اگر دو نقطه $A(a + ۲ , ۳)$ و $A'(۲ , ۳)$ قرینه یکدیگر باشند مقدار a کدام است؟

حل: $x_{A'} = -x_A \Rightarrow ۲ = -a-۲ \Rightarrow \boxed{a = -۴}$

مثال ۳: معادله قرینه پاره خط AB که در آن $B(۲ , ۳)$ و $A(۱ , ۱)$ می‌باشد نسبت به محور y ها کدام است؟

حل: $A(x_1 = ۱ , y_1 = ۱)$ و $B(x_2 = ۲ , y_2 = ۳)$,

$$AB \overset{\text{به‌معادله}}{\equiv} \frac{y-۱}{x-۱} = \frac{۳-۱}{۲-۱} = ۲$$

کافی است در این معادله x را به $-x$ تبدیل نماییم داریم:

$$\frac{y-۱}{-x-۱} = ۲ \Rightarrow y-۱ = -۲x-۲ \Rightarrow \boxed{y = -۲x-۱}$$

مثال ۴: محور تقارن شکل به معادله $y = |x|$ کدام است؟

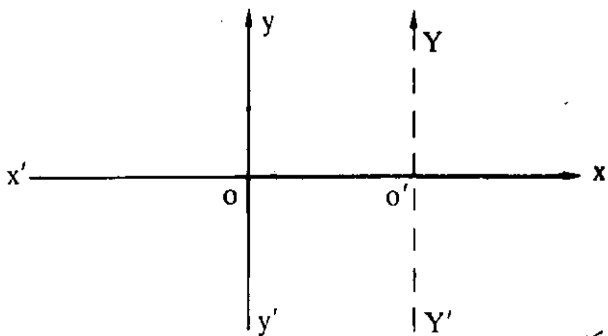
حل: اگر x را به $-x$ تبدیل کنیم $y = |-x| = |x|$ چون معادله تغییر نکرد لذا محور y ها محور تقارن است.

مثال ۵: نشان دهید محور تقارن منحنی به معادله $y = x^۲-۴x+۱$ خط $x = ۲$ می‌باشد.

حل: مبدأ مختصات را به نقطه $O'(\alpha=۲ , \beta=۰)$ انتقال داده داریم:

$$x = X+\alpha = X+۲ , y = Y+\beta = Y+۰ = Y , Y = (X+۲)^۲-۴(X+۲)+۱ \Rightarrow Y = X^۲+۴X+۴-۴X-۸+۱ \Rightarrow Y = X^۲-۳$$

اگر در این معادله X را به $-X$ تبدیل کنیم معادله تغییر نمی‌کند لذا محور تقارن منحنی محور y های جدید یعنی خط $x = ۲$ می‌باشد. (شکل ۱۰)

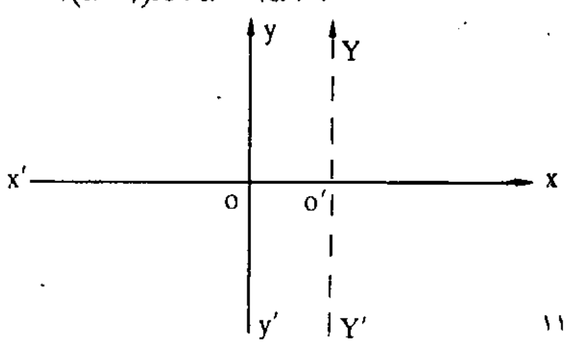


شکل ۱۰

مثال ۶: اگر محور تقارن منحنی $y = \frac{x^۲-۲x+۳}{x^۲-۲x+۶}$ موازی y ها باشد معادله این محور تقارن کدام است؟

حل: محور تقارن را خط $x = \alpha$ فرض کرده مبدأ مختصات را به نقطه $O'(\alpha , ۰)$ انتقال داده داریم:

$$x = X+\alpha , y = Y+۰ = Y \Rightarrow Y = \frac{X^۲+۲\alpha X+\alpha^۲-۲X-۲\alpha+۳}{X^۲+۲\alpha X+\alpha^۲-۲X-۲\alpha+۶} = \frac{X^۲+۲(\alpha-۱)X+\alpha^۲-۲\alpha+۳}{X^۲+۲(\alpha-۱)X+\alpha^۲-۲\alpha+۶}$$



شکل ۱۱

اگر در معادله اخیر X را به X− تبدیل نماییم معادله نباید تغیر کند و این در صورتی است که $\alpha-1=0$ یا $\alpha=1$ پس $x=1$ محور تقارن منحنی می‌باشد. (شکل ۱۱)

تبصره ۴: شرط آنکه منحنی به معادله $y=\frac{aX^2+bX+c}{a'X^2+b'X+c'}$ فقط دارای یک محور تقارن موازی y ها باشد چیست؟ و معادله محور تقارن را بیابید.

حل: محور تقارن را خط $X=\alpha$ فرض نموده مبدأ مختصات را به نقطه $O'(\alpha, 0)$ انتقال داده داریم:

$$X=X+\alpha, y=Y+0=Y \Rightarrow Y=$$

$$\frac{a(X+\alpha)^2+b(X+\alpha)+c}{a'(X+\alpha)^2+b'(X+\alpha)+c'}=$$

$$\frac{aX^2+2a\alpha X+a\alpha^2+bX+b\alpha+c}{a'X^2+2a'\alpha X+a'\alpha^2+b'X+b'\alpha+c'}=$$

$$\frac{aX^2+(2a\alpha+b)X+a\alpha^2+b\alpha+c}{a'x^2+(2a'\alpha+b')X+\alpha'\alpha^2+b'\alpha+c'}$$

اگر X را به X− تبدیل نماییم باید معادله تغییر نکند و این در صورتی است که

$$2a\alpha+b=0 \Rightarrow \alpha=\frac{-b}{2a} \text{ و } 2a'\alpha+b'=0 \Rightarrow \alpha=-\frac{b'}{2a'} \Rightarrow$$

$$\frac{-b}{2a}=\frac{-b'}{2a'} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{b'}{a'} \Rightarrow \frac{b}{b'}=\frac{a}{a'}$$

اگر چنانچه $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=K$ باشد در این صورت .

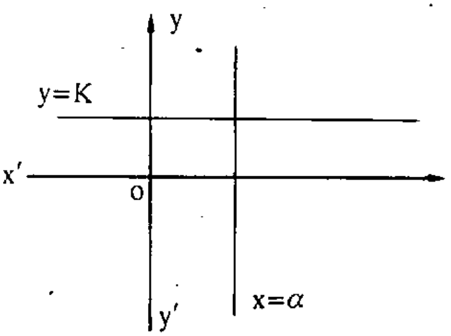
$$a=a'K, b=b'K, c=c'K,$$

$$y=\frac{a'Kx^2+b'Kx+c'K}{a'x^2+b'x+c'}=$$

$$\frac{K(a'x^2+b'x+c')}{a'X^2+b'x+c'}=K \Rightarrow y=K$$

زیرا خط $y=K$ دارای بی‌شمار محور تقارن موازی y ها دارد.

در شکل (۱۲) اگر مثلاً خط دلخواه $x=\alpha$ را در نظر بگیریم قرینه هر نقطه خط $y=K$ نسبت به خط $x=\alpha$ روی خط $y=K$ قرار خواهد گرفت. لذا بایستی $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ باشد و معادله محور تقارن



شکل ۱۲

خط $x=\alpha=\frac{-b}{2a}=\frac{-b'}{2a'}$ است.

مثال ۷: معادله محور تقارن منحنی به معادله $y=\frac{x^2-(\alpha-1)x+2}{3x^2+2x+1}$ کدام است؟

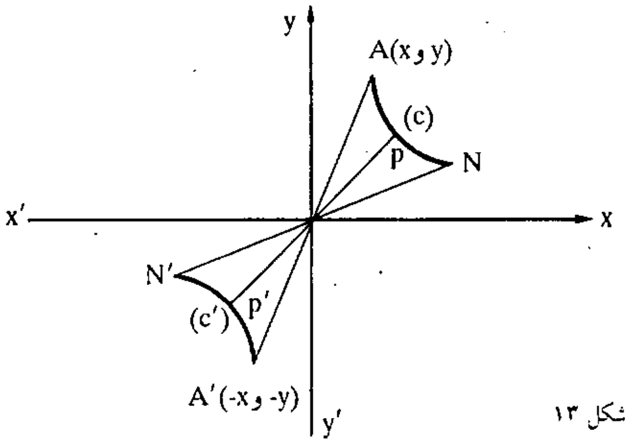
حل:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'} \text{ و } \frac{1}{3}=\frac{-\alpha+1}{2}\neq\frac{2}{1} \Rightarrow$$

$$2=-3\alpha+3 \Rightarrow \alpha=\frac{1}{3} \text{ و } x=-\frac{b}{2a}=\frac{\alpha-1}{2}=\frac{\frac{1}{3}-1}{2}=$$

$$-\frac{1}{3} \text{ یا } x=-\frac{b'}{2a'}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{x=-\frac{1}{3}}$$

۳: تقارن منحنی نسبت به مبدأ مختصات: برای به‌دست آوردن قرینه نقطه A نسبت به مبدأ O از نقطه A به O وصل کرده، OA را به اندازه خود امتداد می‌دهیم تا A' به‌دست آید نقطه A' را قرینه نقطه A نسبت به مبدأ O نامیده و نقطه O را مرکز تقارن



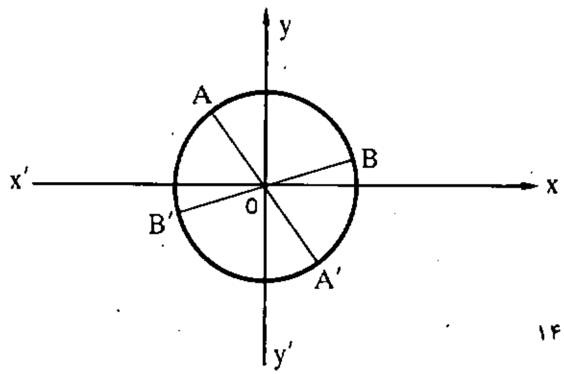
شکل ۱۳

می‌نامند و برای به‌دست آوردن قرینه مرکزی منحنی (c) نسبت به مبدأ O قرینه‌های مرکزی هر یک از نقاط منحنی (c) را به‌دست آورده این نقاط را به هم وصل می‌نماییم منحنی (c′) قرینه منحنی (c) نسبت به مبدأ O می‌باشد. (شکل ۱۳)

$$OA=OA' , OP=OP' , ON=ON'$$

بخصوص اگر قرینه هرنقطه از منحنی (c) نسبت به‌مبدأ O بر خود منحنی (c) منطبق باشد مبدأ O را مرکز تقارن منحنی نامند. (شکل ۱۴)

$$OA = OA' \text{ و } OB = OB'$$



شکل ۱۴

و نیز اگر نقطه A(x,y) باشد مختصات نقطه A′ قرینه نقطه A به صورت $A'(-x\ ,\ -y)$ است. یعنی برای به‌دست آوردن مختصات قرینه نقطه A نسبت به مبدأ O بایستی x را به x− و y را به y− تبدیل نماییم و برای به‌دست آوردن معادله منحنی (c′) در معادله منحنی (c) بایستی x را به x− و y را به y− تبدیل نماییم.

مثال ۱ : مختصات قرینه نقطه A(۲,۳) نسبت به مبدأ O کدام است؟

حل : x را به x− و y را به y− تبدیل می‌نماییم قرینه نقطه A نقطه A′(−۲,−۳) می‌باشد.

مثال ۲ : اگر نقاط A(a+b,۲a−b) و B(۳,۳) نسبت به مبدأ O قرینه باشند a و b کدام است؟

حل :

$$\begin{cases} x_A = -x_B \\ y_A = -y_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = -۳ \\ ۲a-b = -۳ \end{cases} \Rightarrow \quad ۳a = -۶ \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{a = -۲} \quad \text{و} \quad \boxed{b = -۱}$$

مثال ۳ : مرکز تقارن شکل به معادله $|y| = |x|$ کدام است؟

حل : x را به x− و y را به y− تبدیل کرده داریم :

$$|-y| = |-x| \Rightarrow |y| = |x|$$

چون معادله تغییر نکرد پس مبدأ مختصات مرکز تقارن منحنی می‌باشد.

مثال ۴ : اگر مبدأ مختصات مرکز تقارن منحنی

$$y=x^{۳}-(a+b-۲)x^{۲}+x+۲a-b+۳ \qquad (۱)$$

باشد a و b کدام است؟

حل : x را به x− و y را به y− تبدیل نموده معادله نباید تغییر کند.

$$-y=-x^{۳}-(a+b-۲)x^{۲}-x+۲a-b+۳$$

طرفین معادله را در منها ضرب کرده‌داریم:

$$y=x^{۳}+(a+b-۲)x^{۲}+x-۲a+b-۳ \qquad (۲)$$

با مقایسه معادله‌های (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} -(a+b-۲)=a+b-۲ \\ ۲a-b+۳= -۲a+b-۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲(a+b-۲)=۰ \\ ۲(۲a-b+۳)=۰ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a+b-۲=۰ \\ ۲a-b+۳=۰ \end{cases} \Rightarrow ۳a+۱=۰ \qquad \Rightarrow$$

$$\boxed{a= -\frac{۱}{۳}} \text{ و } \frac{-۱}{۳}+b-۲=۰ \Rightarrow \boxed{b=\frac{۷}{۳}}$$

یا می‌توانیم بگوییم جملاتی که تغییر می‌کنند باید وجودنداشته باشند یعنی بایستی ضرایب آنها صفر باشد.

مثال ۵ : معادله قرینه منحنی به معادله $y = x^{۳}-x$ نسبت به مبدأ O کدام است؟

حل : x را به x− و y را به y− تبدیل نموده داریم :

$$-y = -x^{۳}+x \Rightarrow \boxed{y = x^{۳}-x}$$

چون معادله به دست آمده همان معادله اولیه می‌باشد لذا مبدأ مختصات مرکز تقارن منحنی است.

مثال ٦ : نشان دهید نقطه $O'(۱\ ,\ ۱)$ مرکز تقارن منحنی به معادله $y = \frac{x+۱}{x-۱}$ می‌باشد.

حل : مبدأ مختصات را به نقطه $O'(\alpha = ۱\ ,\ \beta = ۱)$ انتقال داده داریم :

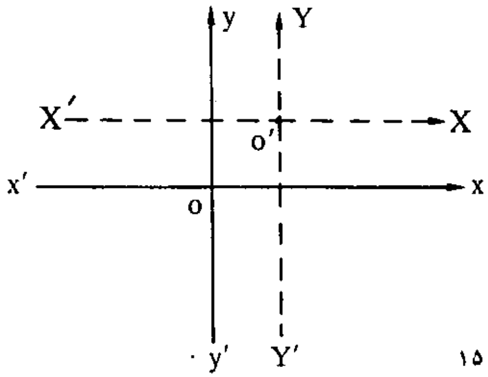
$x=X+\alpha=X+1$ و $y=Y+\beta=Y+\beta$ و $Y+1=\dfrac{X+1+1}{X+1-1}$

$$\Rightarrow Y=\frac{X+2}{X}-1=1+\frac{2}{X}-1\Rightarrow Y=\frac{2}{X}$$

اگر در این معادله X را به $-X$ و Y را به $-Y$ تبدیل کنیم معادله نباید تغییر کند داریم:

$$-Y=-\frac{1}{X}\Rightarrow Y=\frac{1}{X}$$

لذا مبدأ جدید یعنی $O'(1\ ,\ 1)$ مرکز تقارن منحنی می‌باشد. (شکل ۱۵)



شکل ۱۵

مثال ۷: مطلوب است مرکز تقارن منحنی به معادله $y=\dfrac{x^2-x+2}{x-1}$.

حل: فرض می‌کنیم نقطه $O'(\alpha\ ,\ \beta)$ مرکز تقارن منحنی باشد مبدأ مختصات را به نقطه O' انتقال داده داریم:

$$x=X+\alpha, y=Y+\beta, Y+\beta=\frac{X^2+2\alpha X+\alpha^2-X-\alpha+2}{X+\alpha-1}$$

$$\Rightarrow Y=\frac{X^2+2\alpha X+\alpha^2-X-\alpha+2}{X+\alpha-1}-\beta\ \Rightarrow$$

$$Y=\frac{X^2+2\alpha X+\alpha^2-X-\alpha+2-\beta X-\alpha\beta+\beta}{X+\alpha-1}\Rightarrow$$

$$Y=\frac{X^2+(2\alpha-\beta-1)X+\alpha^2-\alpha\beta+\beta-\alpha+2}{X+\alpha-1}\qquad(1)$$

X را به $-X$ و Y را به $-Y$ تبدیل نموده سپس طرفین معادله را در منها ضرب می‌کنیم باید معادله تغییر نکند.

$$-Y=\frac{X^2-(2\alpha-\beta-1)X+\alpha^2-\alpha\beta+\beta-\alpha+2}{-X+\alpha-1}\Rightarrow$$

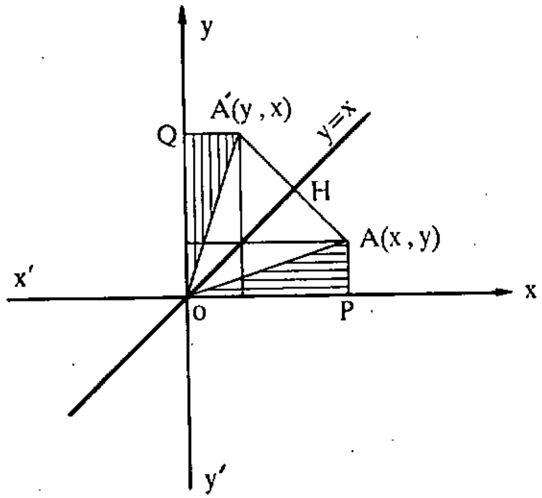
$$Y=\frac{X^2-(2\alpha-\beta-1)X+\alpha^2-\alpha\beta+\beta-\alpha+2}{X-\alpha+1}\qquad(2)$$

با توجه به معادلات (۱) و (۲) جملاتی که تغییر می‌کنند ضرایب آنها را صفر قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases}2\alpha-\beta-1=0\\ \alpha-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta=1\\ \alpha=1\end{cases}\Rightarrow O'(1,1)$$

۴: تقارن منحنی نسبت به نیمسازهای $y=x$ و $y=-x$: قرینه نقطه A را نسبت به خط $y=x$ نقطه A' می‌نامیم چون خط $y=x$ عمود منصف AA' می‌باشد پس

$$A\hat{O}H=A'\hat{O}H \text{ و نیز } OA=OA'$$



شکل ۱۶

و چون $P\hat{O}H=Q\hat{O}H$ بنابراین داریم:

$$P\hat{O}H-A\hat{O}H=Q\hat{O}H-A'\hat{O}H\ \Rightarrow P\hat{O}A=Q\hat{O}A'$$

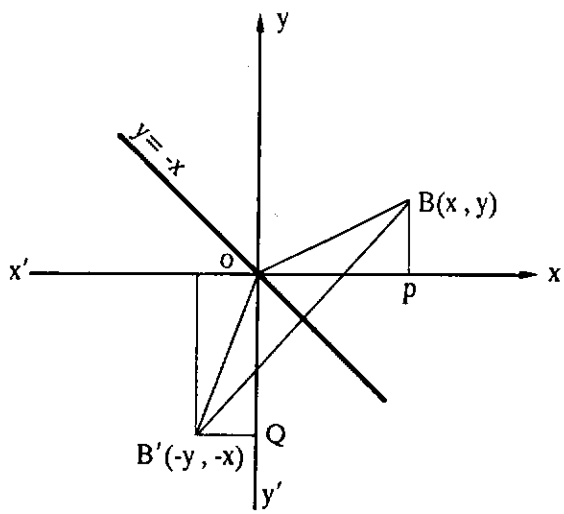
دو مثلث قائم‌الزاویه AOP و $A'OQ$ بنا به حالت تساوی وتر و یک زاویه حاده برابر بوده داریم:

$\overline{OP}=\overline{OQ}$ و $\overline{PA}=\overline{QA'}\Rightarrow x_A=y_{A'}$ و $y_A=x_{A'}$

یعنی قرینه نقطه $A(x\ ,\ y)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم نقطه $A'(y,x)$ می‌باشد. (شکل ۱۶)

و برای به‌دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به خط $y=x$

در معادله منحنی x را به y و y را به x تبدیل می‌نماییم.
قرینه نقطه $B(x,y)$ را نسبت به خط $y=-x$ نقطه B' می‌نامیم مانند قسمت قبل ثابت می‌شود دو مثلث قائم الزاویه OBP و $OB'Q$ برابرند بنابراین $x_{B'}=-y_B$, $y_{B'}=-x_B$ یعنی قرینه نقطه $B(x,y)$ نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم نقطه $B'(-y,-x)$ می‌باشد.



شکل ۱۷

و برای به دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به خط $y-x$ در معادله منحنی x را به $-y$ و y را به $-x$ تبدیل می‌نماییم.

مثال ۱ : مختصات قرینه‌های نقطه $A(-۲\ ,\ ۳)$ را نسبت به نیمسازهای ربع اول و دوم بیابید.
حل : قرینه نقطه A را نسبت به نیمساز ربع اول نقطه A' و نسبت به نیمساز ربع دوم نقطه A'' نامیده داریم:

$$x_{A'}=y_A=۳\ ,\ y_{A'}=x_A=-۲ \Rightarrow \boxed{A'(۳,-۲)}$$ و

$$x_{A''}=-y_A=-۳ \text{ و } y_{A''}=-x_A=-(-۲)=۲ \Rightarrow$$

$$\boxed{A''(-۳,۲)}$$

مثال ۲ : اگر دو نقطه $A(a+b\ ,\ a-b)$ و $A'(-۲\ ,\ ۳)$ نسبت به نیمساز ربع دوم قرینه باشند a و b کدام است؟

حل :

$$\begin{cases} x_A=-y_{A'} \\ y_A=-x_{A'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=-۳ \\ a-b=۲ \end{cases} \Rightarrow ۲a=-۱ \Rightarrow$$

$$\boxed{a=-\frac{۱}{۲} \text{ و } b=-\frac{۵}{۲}}$$

مثال ۳ : محورهای تقارن منحنی به معادله $x^۲+y^۲=۴$ را بیابید.
حل : اگر در معادله منحنی x را به $-x$ تبدیل کنیم معادله تغییر نمی‌کند بنابراین محور yها یعنی خط $x=۰$ محور تقارن است. اگر در معادله منحنی y را به $-y$ تبدیل کنیم معادله تغییر نمی‌کند بنابراین محور xها یعنی خط $y=۰$ محور تقارن است. اگر در معادله منحنی x را به y و y را به x تبدیل کنیم معادله تغییر نمی‌کند بنابراین خط $y=x$ محور تقارن است. و اگر در معادله منحنی x را به $-y$ و y را به $-x$ تبدیل کنیم معادله تغییر نمی‌کند بنابراین خط $y=-x$ محور تقارن است.

مثال ۴ : معادله قرینه منحنی به معادله $y=x^۲-x$ را نسبت به نیمساز ربع دوم بیابید.
حل : در معادله داده شده x رابه $-y$ و y رابه $-x$ تبدیل نموده داریم:

$$-x=y^۲-y \Rightarrow \boxed{x=y-y^۲}$$

۵ : طریقه به‌دست آوردن مرکز تقارن منحنیهای درجه دوم یعنی منحنیهایی که معادله آنها شامل $x^۲$ یا $y^۲$ یا xy بوده و به‌صورت $ax^۲+۲bxy+cy^۲+۲dx+۲ey+۲f=۰$ می‌باشد.

حل: نقطه $O'(\alpha,\beta)$ را مرکز تقارن فرض نموده مبدأ مختصات را به این نقطه انتقال داده‌داریم:

$$X=X+\alpha, y=Y+\beta \Rightarrow a(X+\alpha)^۲+۲b(X+\alpha)(Y+\beta)+$$
$$c(Y+\beta)^۲+۲d(X+\alpha)+۲e(Y+\beta)+۲f=۰ \Rightarrow aX^۲+$$
$$۲a\alpha X+a\alpha^۲+۲bXY+۲b\beta X+۲b\alpha Y+۲b\alpha\beta+cY^۲+$$
$$۲c\beta Y+c\beta^۲+۲dX+۲d\alpha+۲eY+۲e\beta+۲f=۰ \Rightarrow$$
$$aX^۲+۲bXY+cY^۲+(۲a\alpha+۲b\beta+۲d)X+$$
$$(۲b\alpha+۲c\beta+۲e)Y+k=۰$$

مجموع اعداد معلوم را k فرض نمودیم اگر در این معادله X را به $-X$ و Y را به $-Y$ تبدیل کنیم معادله نباید تغییر کند لذا ضرایب

را که تغییر می‌نمایند صفر قرار می‌دهیم داریم:

$$\begin{cases} 2a\alpha+2b\beta+2d=0 & (1) \\ 2b\alpha+2c\beta+2e=0 & (2) \end{cases}$$

برای به‌دست آوردن معادلات (۱) و (۲) در معادله اصلی y را ثابت نگاه داشته نسبت به متغیر x از معادله منحنی مشتق می‌گیریم و نیز x را ثابت نگاه داشته نسبت به متغیر y از معادله منحنی مشتق می‌گیریم به جای x و y به ترتیب α و β قرارداده معادلات (۱) و (۲) به‌دست می‌آیند، پس:

$$\begin{matrix} y=\text{ثابت} \Rightarrow \\ x=\text{ثابت} \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} 2ax+2by+2d=0 \\ 2bx+2cy+2e=0 \end{cases}$$

از حل دستگاه بالا مختصات مرکز تقارن به‌دست می‌آید.

تبصره ۵: اگر معادله منحنی از درجه دوم ولی شامل xy نباشد برای به‌دست آوردن محور یا محورهای تقارن y را ثابت نگاه داشته نسبت به متغیر x از معادله منحنی مشتق می‌گیریم و نیز x را ثابت نگاه داشته نسبت به متغیر y از معادله منحنی مشتق می‌گیریم از حل معادلات به‌دست آمده معادله‌های محورهای تقارن منحنی به‌دست می‌آید. روش استدلال مشابه قسمت (۵) می‌باشد.

مثال ۱: مرکز تقارن منحنی به معادله $y=\frac{x+1}{x-1}$ کدام است؟

حل:

$$y=\frac{x+1}{x-1} \Rightarrow yx-y=x+1 ،\ x=\text{ثابت} \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow$$

$$\boxed{x=1} \quad y=\text{ثابت} \Rightarrow \boxed{y=1}$$

بنابراین $O'(1,1)$ مرکز تقارن تابع هموگرافیک بالا می‌باشد.

مثال ۲: اگر مرکز تقارن منحنی به معادله $y=\frac{x^2-bx+2}{x-a}$ نقطه $O'(1,1)$ باشد a و b کدام است؟

حل:

$$y=\frac{x^2-bx+2}{x-a} \Rightarrow x^2-bx+2=yx-ay ,\ x=\text{ثابت} \Rightarrow$$

$$x-a=0 ,\ y=\text{ثابت} \Rightarrow 2x-b=y ,$$

$$\begin{cases} x-a=0 \\ 2x-b=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-a=0 \\ 2-b=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=1} \quad \text{و} \quad \boxed{b=1}$$

مثال ۳: مرکز تقارن منحنی به معادله $y=x-1\pm\sqrt{4-x^2}$ کدام است؟

حل:

$$y=x-1\pm\sqrt{4-x^2} \Rightarrow y-x+1=\pm\sqrt{4-x^2} \Rightarrow (y-x+1)^2= 4-x^2 \Rightarrow y^2+x^2+1-2yx+2y-2x=4-x^2 \Rightarrow 2x^2-2yx+y^2+2y-2x-3=0$$

$$\begin{matrix} y=\text{ثابت} \Rightarrow \\ x=\text{ثابت} \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} 4x-2y-2=0 \\ -2x+2y+2=0 \end{cases} \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0 ,$$

$$y=-1 \Rightarrow \boxed{O'(0,-1)}$$

مثال ۴: محور تقارن منحنی به معادله $y=ax^2+bx+c$ کدام است؟

حل:

$$y=\text{ثابت} \Rightarrow 0=2ax+b \Rightarrow \boxed{x=-\frac{b}{2a}} \quad \text{و}$$

$x=\text{ثابت} \Rightarrow 1=0$ امکان ندارد

مثال ۵: اگر محور تقارن منحنی به معادله $x=y^2-ay+2$ خط $y=1$ باشد a کدام است؟

حل:

$$x=\text{ثابت} \Rightarrow 0=2y-a \Rightarrow y=\frac{a}{2}=1 \Rightarrow \boxed{a=2}$$

مثال ۶: معادلات محورهای تقارن منحنی به معادله $2x^2+3y^2-6x-8y=0$ را بیابید.

حل:

$$y=\text{ثابت} \Rightarrow 4x-6=0 \Rightarrow x=\frac{6}{4} \Rightarrow \boxed{x=\frac{3}{2}} \quad \text{و}$$

$$x=\text{ثابت} \Rightarrow 6y-8=0 \Rightarrow y=\frac{8}{6} \Rightarrow \boxed{y=\frac{4}{3}}$$

۶: طریقه به‌دست آوردن مرکز تقارن منحنی تابع هموگرافیک به معادله $y=\frac{ax+b}{a'x+b'}$

حل:

$$y=\frac{ax+b}{a'x+b'} \Rightarrow a'xy+b'y=ax+b ,$$

$y=$ ثابت $\Rightarrow a'y=a \Rightarrow y=\frac{a}{a'}$, $x=$ ثابت $\Rightarrow a'x+b'=0$

$$\Rightarrow x=-\frac{b'}{a'} \Rightarrow O'\left(\frac{-b'}{a'},\frac{a}{a'}\right)$$

اگر x به سمت ∞ میل کند خط $y=\frac{a}{a'}$ مجانب افقی و اگر y به سمت ∞ میل کند خط $x=\frac{-b'}{a'}$ مجانب قائم است همان‌طور که ملاحظه می‌شود محل برخورد مجانبهای مرکز تقارن منحنی می‌باشد.

مثال: معادله مکان هندسی مرکز تقارن منحنی به معادله $y=\frac{(m-1)x+2}{x-2m}$ را وقتی m تغییر می‌کند بیابید.

حل:

$x\to\infty \Rightarrow y=m-1$, $y\to\infty \Rightarrow x-2m=0 \Rightarrow x=2m \Rightarrow$
$o'(x=2m\ ,\ y=m-1)$

برای به‌دست آوردن معادله مکان نقطه O' بین x و y پارامتر m را حذف می‌کنیم.

$$m=\frac{x}{2} \Rightarrow y=m-1=\frac{x}{2}-1 \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}x-1}$$

تبصره ۶: به‌طور کلی می‌توان بررسی کرد اگر معادله منحنی از درجه دوم یعنی شامل x^2 یا y^2 یا xy باشد و دارای دو مجانب باشد نقطه محل برخورد مجانبها مرکز تقارن منحنی است مانند تابع هموگرافیک مثال بالا.

تبصره ۷: اگر در تابع کسری درجه صورت کسر از مخرج کسر یک درجه بیشترباشد در مبحث مجانبها ثابت می‌کنند برای به‌دست آوردن معادله مجانب مایل صورت کسر را برمخرج کسر تقسیم نموده تابع خارج قسمت معادله مجانب مایل است و نیز ثابت می‌کنند

معادله مجانب منحنی به معادله $y=g(x)+\frac{p(x)}{h(x)}$ اگر $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{p(x)}{h(x)}=0$، باشد به‌صورت $Y=g(x)$ و معادله مجانب‌های منحنی $y=mx+h+\sqrt{ax^2+bx+c}$ که درآن $a>0$ است به‌صورت $Y=mx+h+\left|\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right|$ اگر $x\to+\infty$ معادله مجانب به صورت $Y=mx+h+\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}$ و اگر $x\to-\infty$ معادله مجانب به صورت $Y=mx+h-\sqrt{a}x-\frac{b}{2\sqrt{a}}$ می‌باشد.

مثال ۱: مرکز تقارن منحنی $y=\frac{x^2+2x+5}{x-3}$ را بیابید.

حل:

$y=\frac{x^2+2x+5}{x-3} \Rightarrow yx-3y=x^2+2x+5$, $x=$ ثابت $\Rightarrow$
$x-3=0 \Rightarrow x=3,\ y=$ ثابت $\Rightarrow y=2x+2 \Rightarrow$
$y=2\times 3+2=8 \Rightarrow O'(3,8)$

و یا آنکه می‌توانیم بگوییم چون معادله منحنی پس از طرفین وسطین نمودن از درجه دوم است و دارای دو مجانب می‌باشد محل برخورد مجانبها مرکز تقارن منحنی است $y\to\infty \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3$

$y\to\infty \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3$

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x+5 & x-3 \\ \cline{2-2} -x^2+3x & x+5 \\ \hline 5x+5 & \\ -5x+15 & \\ \hline 20 & \end{array} \quad \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=x+5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{O'(3,8)}$$

مثال ۲: اگر مرکز تقارن منحنی $y=x+b+\frac{20}{x+a}$ نقطه $O'(3,8)$ باشد a و b کدام است؟

حل:

معادله مجانب قائم $y\to\infty \Rightarrow x+a=0 \Rightarrow x=-a$

، معادله مجانب مایل $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{20}{x+a}=0 \Rightarrow Y=x+b$

$$\begin{cases} x=-a \\ y=x+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3=-a \\ 8=3+b \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=-3\ ,\ b=5}$$

مثال ۳: مرکز تقارن منحنی به معادله $y=x+1\pm\sqrt{x^2+4x+1}$ کدام است؟

حل: معادله مجانبها به‌صورت $Y=x+1+|x+2|$

$$x\to+\infty \Rightarrow Y=x+1+(x+2)=2x+3$$
$$x\to-\infty \Rightarrow Y=x+1+(-x-2)=-1$$

توجه داشته باشید معادلات مجانبها با رادیکال مثبت و رادیکال منفی معادلات بالا می‌باشد.

$y=x+1\pm\sqrt{x^2+4x+1} \Rightarrow y-x-1=\pm\sqrt{x^2+4x+1} \Rightarrow$
$(y-x-1)^2=x^2+4x+1$

چون معادله بالا از درجه دوم است محل برخورد مجانبهای مرکز

تقارن منحنی می‌باشد

$$\begin{cases} Y=2x+3 \\ Y=-1 \end{cases} \Rightarrow -1=2x+3 \Rightarrow$$

$$x=-2 \Rightarrow \boxed{O'(-2,-1)}$$

۷: مرکز تقارن منحنی به معادله $y=ax^3+bx^2+cx+d$ نقطه عطف منحنی می‌باشد

اثبات: نقطه $o'(\alpha,\beta)$ را مرکز تقارن منحنی فرض‌نموده داریم:

$$x=X+\alpha ,y=Y+\beta \Rightarrow Y+\beta=a(X+\alpha)^3+b(X+\alpha)^2+c(X+\alpha)+d \Rightarrow Y+\beta=a(X^3+3X^2\alpha+3\alpha^2X+\alpha^3)+b(X^2+2\alpha X+\alpha^2)+c(X+\alpha)+d \Rightarrow Y=aX^3+(3a\alpha+b)X^2+(3a\alpha^2+2b\alpha+c)X+a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d-\beta \quad (1)$$

$$X\rightarrow -X, Y\rightarrow -Y \Rightarrow -Y=aX^3+X^2(3a\alpha+b)-x(3a\alpha^2+2b\alpha+c)+a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d-\beta$$

طرفین را در منها ضرب کنید $Y=aX^3-(3a\alpha+b)-X$

$$+(3a\alpha^2+2b\alpha+c)X-a\alpha^3-b\alpha^2-c\alpha-d+\beta \quad (2)$$

با مقایسه معادلات (۱) و (۲) جملاتی را که تغییر می‌کنند ضرایب آنها را صفر قرار می‌دهیم داریم.

$$3a\alpha+b=0 \Rightarrow \boxed{\alpha=-\frac{b}{3a}} \text{ و } a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d-\beta=0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\beta=a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d}$$

حال طول نقطه عطف را به‌دست می‌آوریم:

$$y'=3ax^2+2bx+c \Rightarrow y''=6ax+2b=0 \Rightarrow x=-\frac{2b}{6a} \Rightarrow x=-\frac{b}{3a}=\alpha , y=a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=\beta$$

یعنی نقطه عطف منحنی تابع درجه سوم همان مرکز تقارن منحنی می‌باشد.

مثال ۱: مرکز تقارن منحنی $y=x^3-3x^2+2$ را بیابید.

حل: چون تابع درجه سوم می‌باشد مرکز تقارن منحنی همان نقطه عطف منحنی می‌باشد پس:

$$y'=3x^2-6x \Rightarrow y''=6x-6=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=1-3+2=0 \Rightarrow o'(1,0)$$

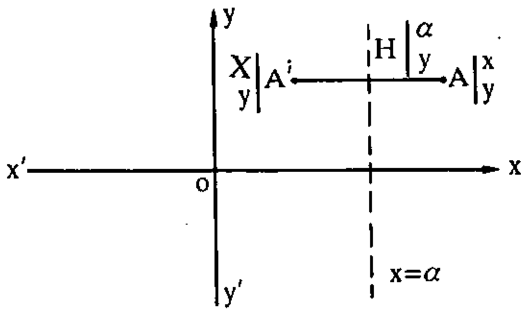
مثال ۲: در تابع $y=x^3-3x^2+bx+2$، b را چنان بیابید که مرکز تقارن منحنی روی محور x ها باشد.

حل: $y'=3x^2-6x+b \Rightarrow y''=6x-6=0 \Rightarrow x=1$

چون مرکز تقارن منحنی روی محور x ها می‌باشد عرض آن صفر است پس $o'(1,0)$ و چون مرکز تقارن نقطه عطف است لذا مختصات آن در معادله منحنی صدق می‌کند یعنی

$$0=1^3-3\times 1^2+b\times 1+2 \Rightarrow \boxed{b=0}$$

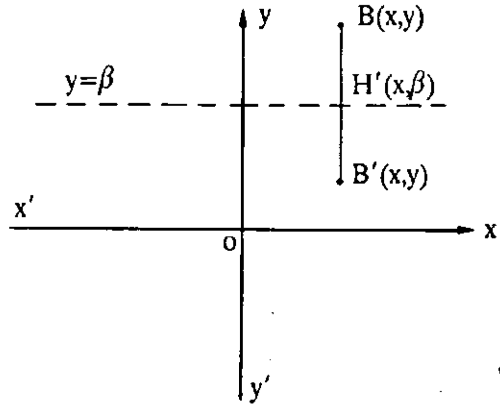
۸: طریقه به‌دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به خط $x=\alpha$ و خط $y=\beta$ و نقطه $o'(\alpha,\beta)$



شکل ۱۸

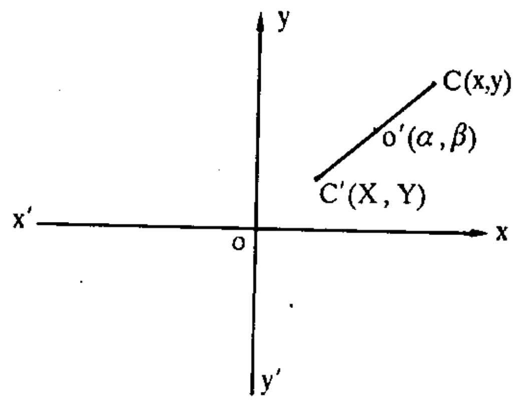
قرینه نقطه $A(x,y)$ نسبت به خط $x=\alpha$ نقطه $A'(x,y)$ می‌باشد و نقطه $H(\alpha,y)$ وسط پاره خط AA' است پس $\alpha=\frac{x+X}{2}$ یا $x=2\alpha-X$ بنابراین برای به‌دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به خط $x=\alpha$ کافی است در معادله منحنی x را به 2α-x تبدیل نموده و y را تغییر ندهیم. (شکل ۱۸)

و قرینه نقطه $B(x,y)$ نسبت به خط $y=\beta$ نقطه $B'(x,y)$ می‌باشد و نقطه $H'(x,\beta)$ وسط پاره خط BB' است، پس: $\beta=\frac{y+Y}{2}$ یا $y=2\beta-Y$ یعنی برای به‌دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به خط $y=\beta$ کافی است در معادله منحنی y را به 2β-Y تبدیل



شکل ۱۹

نماییم و x را تغییر ندهیم. (شکل ۱۹)
و قرینه نقطه $C(x,y)$ نسبت به نقطه $o'(\alpha , \beta)$ نقطه $c'(x , y)$ می‌باشد.



شکل ۲۰

و نقطه $o'(\alpha , \beta)$ وسط پاره خط CC' است پس:

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{x+X}{2}\\ \beta=\dfrac{y+Y}{2}\end{cases}$$

یا $y=2\beta-Y$ و $x=2\alpha-X$ یعنی برای به‌دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به نقطه $o'(\alpha , \beta)$ کافی است در معادله منحنی x را به $2\alpha-X$ و y را به $2\beta-Y$ تبدیل نماییم.(شکل ۲۰)

مثال ۱ : معادله قرینه منحنی به معادله $y=x^2-2x$ را نسبت به خط $x=1$ بیابید.

حل : به‌جای x در معادله منحنی $2\alpha-X=2-X$ قرار می‌دهیم:

$y=(2-X)^2-2(2-X) \Rightarrow y=4-4X+X^2-4+2X \Rightarrow$
$y=X^2-2X$

چون معادله به‌دست آمده همان معادله اولیه می‌باشد پس خط $x=1$ محور تقارن معادله است. از ابتداء هم می‌توانستیم بگوییم در معادله $y=ax^2+bx+c$ محور تقارن خط $x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{2}{2}=1$ بوده بنابراین قرینه منحنی نسبت به محور تقارن آن یعنی نسبت به خط $x=1$ همان خود منحنی می‌باشد یعنی معادله قرینه همان معادله $y=x^2-2x$ است.

مثال ۲ : معادله قرینه منحنی $y=x^2-x$ رانسبت به‌نقطه $o'(1,1)$ بیابید.

حل: کافی است در معادله منحنی x را به $2\alpha-X=2\times1-X=2-X$ و y را به $2\beta-Y=2\times1-Y=2-Y$ تبدیل نماییم پس :

$$2-Y=(2-X)^2-(2-Y) \Rightarrow 2-Y=$$
$$4-4X+X^2-2+Y \Rightarrow -2Y=X^2-4X \Rightarrow$$

$$\boxed{Y=-\frac{1}{2}X^2+2X}$$

مثال ۳ : معادله قرینه منحنی $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ را نسبت به نقطه $o'(2,1)$ بیابید.

حل : می‌دانیم در تابع هموگرافیک محل برخورد مجانبها مرکز تقارن منحنی است پس:

$x \to \infty \Rightarrow y=\dfrac{a}{a'}=\dfrac{1}{1}=1$ و

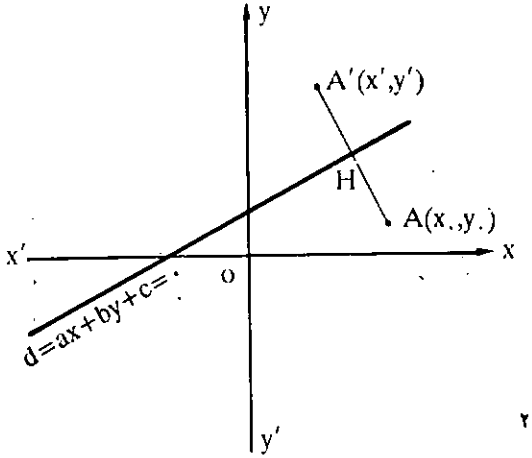
$y \to \infty \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow o'(2,1)$

چون نقطه o' مرکز تقارن منحنی می‌باشد بنابراین معادله قرینه منحنی نسبت به نقطه o' به‌صورت $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ می‌باشد.

۹ : طریقه به‌دست آوردن مختصات قرینه نقطه $A(x_0,y_0)$ نسبت به خط $ax+by+c=0$

حل : قرینه نقطه $A(x,y)$ نسبت به خط مزبور نقطه $A'(x',y')$ بوده ونقطه H روی خط فوق (خط d) وسط AA' است داریم:

$m_d=d$ ضریب زاویه خط $=-\dfrac{a}{b} \Rightarrow m_{AA'}=-\dfrac{1}{m_d}=\dfrac{b}{a}$,



شکل ۲۱

$$AA' \xrightarrow{\text{به معادله}} y-y_0=\frac{b}{a}(x-x_0) \Rightarrow \frac{y-y_0}{b}=\frac{x-x_0}{a}=k \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_H=x_0+ak \\ y_H=y_0+bk \end{cases}$$

این مختصات را در معادله خط (d) قرارداده داریم:

$$a(x_0+ak)+b(y_0+bk)+c=0 \Rightarrow$$

$$k(a^2+b^2)=-ax_0-by_0-c \Rightarrow$$

$$\boxed{k=-\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}}\ , x_H=\frac{x'+x_0}{2} \Rightarrow x'=2x_H-x_0=2$$

$$(x_0+ak)-x_0 \Rightarrow \boxed{x'=x_0+2ak}\ , y_H=\frac{y'+y_0}{2} \Rightarrow$$

$$y'=2y_H-y_0=2(y_0+bk)-y_0 \Rightarrow \boxed{y'=y_0+2bk}$$

مثال : مختصات قرینه خط $A(2,3)$ را نسبت به خط $y=x+2$ بیابید.

حل: $A(x_0=2\ ,\ y_0=3)\ ,\ x\text{-}y+2=0\ ,$

$$k=-\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}=-\frac{2-3+2}{4+9}=-\frac{1}{13},$$

$$x'=x_0+2ak=2+2\times1\times-\frac{1}{13}=$$

$$2-\frac{2}{13}=\boxed{\frac{24}{13}} \text{ و } y'=y_0+2bk=3+2\times-1\times-\frac{1}{13}=$$

$$3+\frac{2}{13}=\boxed{\frac{41}{13}} \Rightarrow \boxed{A'\left(\frac{24}{13},\frac{41}{13}\right)}$$

۱۰ : محورهای تقارن منحنی‌های به‌معادله

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x+b'} \quad \text{و} \quad y=\frac{ax+b}{a'x+b'}$$

با استفاده از ماتریسهای تعامد می‌توان ثابت کرد معادله‌های محورهای تقارن تابع هموگرافیک $y=\frac{ax+b}{a'x+b'}$ به صورت $y=-x+\frac{a-a'}{a'}$ و $y=x+\frac{a+b'}{a'}$ و نیز محورهای تقارن منحنی به معادله $y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}$ خطوط نیمسازهای مجانبهای قائم و مایل منحنی می‌باشد اثبات مطالب بالا مورد نیاز نمی‌باشد فقط از نظر اطلاع بیشتر دانش‌آموزان مطالب فوق را مطرح نمودم معذالک برای دست یافتن به اثبات آنها می‌توانید به کتاب متمم جبر و آنالیز تألیف محمدعابدی در بخش (۱۲) مبحث تقارن صفحه (۹۰) مراجعه نمایید.

مثال ۱ : معادله محورهای تقارن منحنی به معادله $y=\frac{x+2}{4x+3}$ را بیابید.

حل: $y=x+\frac{a+b'}{a'}=x+\frac{1+3}{4} \Rightarrow \boxed{y=x+1}$ و

$$y=-x+\frac{a-a'}{a'}=-x+\frac{1-4}{4} \Rightarrow \boxed{y=-x-\frac{3}{4}}$$

مثال ۲ : معادلات محورهای تقارن منحنی به معادله $y=\frac{x^2+2x+4}{x+2}$ را بیابید.

حل: و معادله مجانب‌قائم $y \to \infty \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow \boxed{x=-2}$

$$y=\frac{x(x+2)+4}{x+2} \Rightarrow y=x+\frac{4}{x+2}$$ و

معادله مجانب مایل $Y=x \Leftarrow \lim_{x\to\infty}\frac{4}{x+2}=0$

می‌دانیم معادلات نیمسازهای خطوط

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

به‌صورت

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

و $\begin{cases} Y-x=0 \\ x+2=0 \end{cases}$ و $\frac{Y-x}{\sqrt{(-1)^2+(1)^2}}=\pm\frac{x+2}{\sqrt{(1)^2+(0)^2}} \Rightarrow$

$$\frac{Y-x}{\sqrt{2}}=\pm(x+2) \Rightarrow Y=x\pm\sqrt{2}(x+2) \Rightarrow$$

$\boxed{Y=(\sqrt{2}+1)x+2\sqrt{2}}$ و $\boxed{Y=(1-\sqrt{2})x-2\sqrt{2}}$

۱۱ : خلاصه مطالب مربوط به مبحث تقارن که می‌توانـد مورد استفاده تستهای کنکور در این مبحث قرارگیرد

دانش آموزان عزیز توجه داشته باشند یادگیری مطالب زیر به شرطی مفید می‌باشد که خواننده قبلاً کلیه مطالب مربوط به تقارن را مطالعه کرده‌باشد.

۱ : قرینه نقطه $A(x,y)$ نسبت به محور x ها نقطه $A'(x,-y)$ می‌باشد و برای به‌دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به محور x ها کافی است در معادله منحنی y را به $-y$ تبدیل نماییم. اگر چنانچه معادله به‌دست‌آمده تغییر نکند محور x ها محور تقارن منحنی می‌باشد.

۲ : قرینه نقطه $A(x,y)$ نسبت به محور y ها نقطه $A'(-x,y)$ می‌باشد و برای به‌دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به محور y ها کافی است در معادله منحنی x را به $-x$ تبدیل نماییم. اگر چنانچه معادله به‌دست آمده تغییر نکند محور y ها محور تقارن منحنی می‌باشد.

۳ : قرینه نقطه $A(x,y)$ نسبت به مبدأ o نقطه $A'(-x,-y)$ می‌باشد و برای به‌دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به نقطه o کافی است در معادله منحنی x را به $-x$ و y را به $-y$ تبدیل نماییم. اگر چنانچه معادله به‌دست آمده تغییر نکند مبدأ مختصات مرکز تقارن منحنی می‌باشد.

۴ : قرینه نقطه $A(x,y)$ نسبت به خط $y=x$ نقطه $A'(y,x)$ می‌باشد و برای به‌دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به خط $y=x$ کافی است در معادله منحنی x را به y و y را به x تبدیل نماییم اگر چنانچه معادله منحنی تغییر نکند خط $y=x$ محور تقارن منحنی می‌باشد.

۵ : قرینه نقطه $A(x,y)$ نسبت به خط $y=-x$ نقطه $A'(-y,-x)$ می‌باشد و برای به‌دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به خط $y=-x$ کافی است در معادله منحنی x را به $-y$ و y را به $-x$ تبدیل نماییم. اگر چنانچه معادله منحنی تغییر نکند خط $y=-x$ محور تقارن منحنی می‌باشد.

۶ : برای به‌دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به خط $x=\alpha$ کافی است در معادله منحنی x را به $2\alpha-X$ تبدیل نماییم. اگر چنانچه معادله منحنی تغییر نکند خط $x=\alpha$ محور تقارن منحنی می‌باشد.

۷ : برای به‌دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به خط $y=\beta$ کافی است در معادله منحنی y را به $2\beta-Y$ تبدیل نماییم. اگر چنانچه معادله منحنی تغییر نکند خط $y=\beta$ محور تقارن منحنی می‌باشد.

۸ : برای به‌دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به نقطه $o'(\alpha\ ,\ \beta)$ کافی است در معادله منحنی x را به $2\alpha-X$ و y را به $2\beta-Y$ تبدیل نماییم. اگر چنانچه معادله منحنی تغییر نکند نقطه o' مرکز تقارن منحنی می‌باشد.

۹ : معادله محور تقارن منحنی به معادله $y=\pm f(x)\sqrt{g(x)}$ محور x ها می‌باشد.

۱۰ : معادله محور تقارن منحنی به معادله $y=a\pm f(x)\sqrt{g(x)}$ خط $y=a$ می‌باشد.

۱۱ : برای به‌دست آوردن مرکز تقارن منحنی درجه‌دوم به معادله $f(x,y)=0$ که $f(x,y)$ شامل x^2 یا y^2 یا xy است y را ثابت نگاه داشته از معادله منحنی نسبت به متغیر x مشتق می‌گیریم یعنی $f'_x(x,y)=0$ و نیز x را ثابت نگاه داشته از معادله منحنی نسبت به متغیر y مشتق می‌گیریم یعنی $f'_y(x,y)=0$ از حل دستگاه

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=۰ \\ f'_y(x,y)=۰ \end{cases}$$

مختصات مرکز تقارن منحنی به‌دست می‌آید و نیز اگر معادله منحنی از درجه دوم ولی جمله شامل xy نداشته باشد معادلات $f'_x(x,y)=۰$ و $f'_y(x,y)=۰$ معادله محورهای تقارن را در صورت وجود مشخص می‌نمایند و به‌خصوص محور تقارن منحنی به معادله $y=ax^۲+bx+c$ خط $x=-\frac{b}{۲a}$ و محور تقارن منحنی به‌معادله $x=ay^۲+by+c$ خط $x=-\frac{b}{۲a}$ می‌باشد.

۱۲ : مرکز تقارن منحنی به معادله $y=ax^۳+bx^۲+cx+d$ نقطه عطف آن که طول آن $x=-\frac{b}{۳a}$ بوده و برای به‌دست آوردن عرض آن $x=-\frac{b}{۳a}$ را در معادله قرار داده عرض نقطه عطف به‌دست می‌آید.

۱۳ : اگر معادله یک منحنی پس از طرفین وسطین نمودن از درجه دوم یعنی شامل $x^۲$ یا $y^۲$ یا xy باشد و دارای دو مجانب باشد نقطه محل برخورد مجانبها مرکز تقارن منحنی می‌باشد و اگر درجه صورت کسر از درجه مخرج یک درجه بیشتر باشد برای به‌دست آوردن معادله مجانب مایل صورت کسر را برمخرج کسر تقسیم نموده تابع خارج قسمت معادله مجانب مایل می‌باشد و به خصوص اگر معادله منحنی به‌صورت $y=f(x)+\frac{p(x)}{h(x)}$ باشد به‌طوری که $\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{h(x)}=۰$، باشد معادله $Y=f(x)$ معادله مجانب منحنی می‌باشد.

۱۴ : مختصات قرینه نقطه $A(x_۰,y_۰)$ نسبت به خط $ax+by+c=۰$ نقطه $A'(x',y')$ است که $y'=y_۰+۲bk$ و $x'=x_۰+۲ak$ و $k=-\frac{ax_۰+by_۰+c}{a^۲+b^۲}$ می‌باشد.

۱۵ : معادله محورهای تقارن منحنی به معادله $y=\frac{ax+b}{a'x+b'}$ به صورت $y=-x+\frac{a-a'}{a'}$ و $y=x+\frac{a+a'}{a'}$ بوده و نیز معادله محورهای تقارن منحنی به معادله $y=\frac{ax^۲+bx+c}{a'x+b'}$ نیمسازهای بین مجانبهای قائم و مایل منحنی می‌باشد.

تمرینهای مربوط به تقارن

۱ : قرینه نقطه $A(۲,۳)$ را نسبت به محور yها نقطه A' فرض کرده و قرینه نقطه A' را نسبت به محور xها نقطه A'' گرفته مختصات نقطه A'' کدام است؟

الف) $A''(-۲,۳)$ ب) $A''(-۲,-۳)$

ج) $A''(۲,-۳)$ د) $A''(-۲,-۳)$

۲ : قرینه نقطه $A(-۱,-۳)$ را نسبت به نقطه $C(۳,۱)$ نقطه A' گرفته و قرینه نقطه A' را نسبت به نقطه $C'(-۱,-۲)$ نقطه A'' فرض نموده طول پاره خط AA'' کدام است؟

الف) ۵ ب) ۸ ج) ۱۰ د) ۹

۳ : قرینه نقطه $A(-۲,-۳)$ را نسبت به نیمساز ربع سوم نقطه A' فرض نموده و قرینه نقطه A' را نسبت به نیمساز ربع دوم نقطه A'' گرفته مختصات نقطه A'' کدام است؟

الف) $A''(۳,۲)$ ب) $A''(-۳,-۲)$

ج) $A''(۲,-۳)$ د) $A''(۲,۳)$

۴ : اگر قرینه نقطه $A(۲,۴)$ نسبت به خط (d) نقطه $A'(۴,۲)$ باشد معادله عمود منصف پاره خط AA' کدام است؟

الف) $y=-x$ ب) $y=x$ ج) $y=x+۱$ د) $y=-x+۲$

۵ : اگر قرینه نقطه $A(۲,۳)$ نسبت به خط d نقطه $A'(-۲,۱)$ باشد معادله عمود منصف پاره خط AA' کدام است؟

الف) $y=-۲x+۲$ ب) $y=x+۲$

ج) $y=-x+۲$ د) $y=-۲x+۱$

۶ : مختصات قرینه نقطه $A(۱,۲)$ را نسبت به خط $y=x+۱$ نقطه A' فرض نموده مختصات نقطه A' کدام است؟

الف) $A'(۱,۲)$ ب) $A'(-۱,۲)$

ج) $A'(۲,۱)$ د) $A'(-۲,۱)$

۷ : قرینه نقطه $A(۱,۰)$ را نسبت به خط $y=x+۱$ نقطه A' فرض نموده مختصات نقطه A' کدام است؟

الف) $A'(-۱,۴)$ ب) $A'(-۱,۲)$

ج) $A'(-۲,۲)$ د) $A'(۲,۲)$

۸ : قرینه نقطه $A(1,2)$ را نسبت به خط $y=2x-1$ نقطه A' گرفته مختصات نقطه A' کدام است؟

الف) $A'(\frac{8}{5},\frac{6}{5})$ ب) $A'(\frac{6}{5},\frac{9}{5})$

ج) $A'(\frac{9}{5},\frac{9}{5})$ د) $A'(\frac{9}{5},\frac{8}{5})$

۹ : اگر مبدأ مختصات مرکز تقارن منحنی

$$(2a-1)x^2+(b+2)xy-(a+b)y^2+(a+b+2)x+(4a-8)y=2$$

باشد a و b کدام است؟

الف) $b=4$ و $a=-2$ ب) $b=-2$ و $a=\frac{1}{2}$

ج) $b=-2$ و $a=2$ د) $b=-4$ و $a=2$

۱۰ : کدام گزینه زیر درمورد منحنی به معادله

$$\begin{cases} x=\sec\alpha \\ y=tg\alpha \end{cases}$$

درست می‌باشد؟

الف) منحنی یک محور تقارن و یک مرکز تقارن دارد، ب) منحنی یک مرکز تقارن و دو محور تقارن دارد، ج) فقط یک محور تقارن دارد، د) مرکز تقارن ندارد

۱۱ : معادله محور تقارن منحنی $xy=4$ کدام است؟

الف) $y=x$ ب) $y=-x$ ج) محور xها د) الف و ب

۱۲ : محور تقارن منحنی به معادله $y=\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}$ کدام است؟

الف) محور xها ب) محور yها ج) $y=x$ د) $y=-x$

۱۳ : شکل به معادله $|x|+|y|=2$ دارای چند محور تقارن می‌باشد؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) هیچ د) ۴

۱۴ : شکل به معادله $|x-1|+|y+2|=4$ دارای چند محور تقارن می‌باشد؟

الف) ۱ ب) ۴ ج) هیچ د) ۳

۱۵ : مختصات مرکز تقارن منحنی به معادله

$$\begin{cases} x=1+2\sin\alpha \\ y=2+4\cos\alpha \end{cases}$$

کدام است؟

الف) $O'(-1,2)$ ب) $O'(1,-2)$

ج) $O'(-1,-2)$ د) $O'(1,2)$

۱۶ : منحنی به معادله

$$\begin{cases} x=1+\sin\alpha \\ y=2+\cos\alpha \end{cases}$$

دارای چند محور تقارن می‌باشد؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) بی‌شمار د) هیچ

۱۷ : کدام‌گزینه زیردرمورد منحنی به‌معادله $y=x\pm\sqrt{4-x^2}$ درست می‌باشد؟

الف) محور تقارن محور x ها است، ب) محور تقارن محور y ها است، ج) مبدأ مختصات مرکز تقارن است، د) هیچ نوع تقارنی ندارد

۱۸ : کدام گزینه زیر در مورد منحنی به معادله $y=\log(\sqrt{x^2+1}-x)$ درست می‌باشد؟

الف) محور تقارن محور x ها است، ب) محور تقارن محور y ها است، ج) مرکز تقارن مبدأ مختصات است، د) هیچ نوع تقارنی ندارد

۱۹ : منحنی به معادله $y=1\pm\sqrt{-x^2+2x}$ دارای چند محور تقارن می‌باشد؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) بی‌شمار د) هیچ

۲۰ : محور تقارن منحنی به معادله

$$\begin{cases} x=\cos 2\alpha \\ y=\sin\alpha \end{cases}$$

کدام است؟

الف) محور x ها ب) محور y ها

ج) نیمساز ربع اول د) نیمساز ربع دوّم

۲۱ : منحنی به معادله $(x-y)^2+x^2y^2=1$ دارای چند محور تقارن است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) هیچ

۲۲ : معادله قرینه منحنی $y=2x^3-x+2$ نسبت به نقطه $O'(0,2)$ کدام است؟

الف) $y=2x^3-x+2$ ب) $y=x^3-2x^2+1$

ج) $y=x^3+x-2$ د) $y=x^3-x-2$

۲۳ : معادله قرینه منحنی $y=2x^2-8x+1$ نسبت به خط $x=2$ کدام است؟

الف) $y=x^2-4x+2$ ب) $y=2x^2-8x-1$

ج) $y=2x^2+8x-1$ د) $y=2x^2-8x+1$

۲۴: اگر معادله قرینه منحنی $y=\frac{1}{x}$ نسبت به خط $y=\beta$ به‌صورت $Y=\frac{2x-1}{x}$ باشد β کدام است؟

الف) $\beta=2$ ب) $\beta=-1$

ج) $\beta=1$ د) $\beta=\frac{3}{2}$

۲۵: اگر معادله قرینه‌منحنی به‌معادله $y=\frac{1}{x}$ نسبت به‌نقطه $O'(\alpha,\beta)$ به‌صورت $Y=\frac{2x-3}{x-2}$ باشد مختصات نقطه O' کدام است؟

الف) $O'(-1,-1)$ ب) $O'(1,-1)$

ج) $O'(1,1)$ د) $O'(-1,1)$

۲۶: معادله محور تقارن منحنی $y=\frac{(m-3)x^2-2x+3}{2mx^2-x+4}$ کدام است؟

الف) $x=\frac{1}{4}$ ب) $x=\frac{-1}{4}$

ج) $x=\frac{1}{2}$ د) $x=\frac{-1}{2}$

۲۷: اگرنقطه $O'(0,1)$ مرکز تقارن منحنی $y=\frac{x^2+mx+1}{x}$ باشد m کدام است؟

الف) $m=1$ ب) $m=-1$

ج) $m=2$ د) $m=-2$

۲۸: اگر مرکز تقارن منحنی به‌معادله $y=\frac{x^2-2x+5}{x-3}$ روی خط $y=x+m$ باشد m کدام است؟

الف) $m=1$ ب) $m=2$

ج) $m=-2$ د) $m=-1$

۲۹: اگر مرکز تقارن منحنی به معادله $y=x+1\pm\sqrt{x^2-2mx+1}$ نقطه $O'(1,2)$ باشد m کدام است؟

الف) $m=-1$ ب) $m=1$

ج) $m=\frac{1}{2}$ د) $m=\frac{-1}{2}$

۳۰: مختصات مرکز تقارن منحنی به‌معادله $y=\operatorname{tg}x$ کدام است؟

الف) $O'(k\pi,0)$ ب) $O'(\frac{k\pi}{2},0)$

ج) $O'(2k\pi,0)$ د) $O'((2k+1)\frac{\pi}{2},0)$

۳۱: منحنی به معادله $y=\operatorname{tg}x$ دارای چند محور تقارن موازی y ها می‌باشد؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) بی شمار د) هیچ

۳۲: مختصات مرکز تقارن منحنی به‌معادله $y=\sin x$ کدام است؟

الف) $O'(\frac{k\pi}{2},0)$ ب) $O'(k\pi,0)$

ج) $O'(2k\pi,0)$ د) $O'((2k+1)\pi,0)$

۳۳: معادله محور تقارن منحنی به معادله $y=\sin x$ در فاصله $[0,2\pi]$ کدام است؟

الف) $x=\frac{\pi}{2}$ ب) $x=\frac{3\pi}{2}$

ج) $x=\pi$ د) الف و ب

۳۴: معادله محور تقارن منحنی به معادله $y=\cos(ax+b)$ کدام است؟

الف) $x=\frac{b}{a}$ ب) $x=\frac{-b}{a}$

ج) $x=\frac{a}{b}$ د) $x=\frac{-b}{2a}$

۳۵: معادله محور تقارن منحنی به معادله $y=\cos x$ کدام است؟

الف) $x=\frac{k\pi}{2}$ ب) $x=k\pi$

ج) $x=2k\pi$ د) $x=(2k-1)\frac{\pi}{2}$

۳۶: کدام نقطه زیر روی محور y ها وجود دارد که مجموع فواصل آن از دو نقطه $A(2,1)$ و $B(3,2)$ می‌نیمم باشد؟

الف) $M(\frac{7}{5},0)$ ب) $M(\frac{8}{5},0)$

ج) $M(\frac{6}{5},0)$ د) $M(\frac{9}{5},0)$

۳۷: اگر قرینه محور y ها را نسبت به خط (d) خط به معادله $y=\frac{4}{3}x$ باشد معادله خط (d) کدام است؟

الف) $y=\frac{-1}{3}x$ ب) $y=3x$ ج) $y=\frac{1}{3}x$ د) الف و ب

۳۸: نقاط $A(1,2)$ و $B(2,3)$ و $C(-3,1)$ رؤس مثلث ABC می‌باشند مختصات قرینه محل برخورد میانه‌های مثلث نسبت به نقطه A کدام است؟

الف) $G'(2,1)$ ب) $G'(2,2)$

ج) $G'(1,3)$ د) $G'(3,2)$

۳۹: تابع $y=\frac{x+m}{x-a}$ مفروض است اگر خط $x=2$ مجانب و خط به معادله $y=x-1$ محور تقارن منحنی باشد m کدام است؟

الف) $m=1$ ب) $m=-1$ ج) دلخواه د) $m=0$

۴۰: فاصله مرکز تقارن منحنی به معادله $y=\frac{x-1}{x+1}$ از محور تقارن منحنی $y=\frac{2x+3}{x-1}$ که موازی نیمساز ربع دوم می‌باشد کدام است؟

الف) $2\sqrt{2}$ ب) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ج) $3\sqrt{2}$ د) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید

نا آمدگان، اگر بدانند که ما
از دهر چه می‌کشیم، نایند دگر
گر علم بُدی به کارها، در گردون
کی خاطر اهل علم، رنجیده بُدی

اندکی به گذشته برگردیم، به گذشته کشور خودمان. فرض کنیم در دویست، سیصد سال پیش زندگی می‌کنیم. مدرسه‌ای به سبک امروزی وجود ندارد؛ از کتاب درسی خبری نیست؛ به سختی می‌توان کسی را پیدا کرد که، در راه کسب دانش، ما را راهنمایی کند؛ بیشتر کتاب‌های موجود، خطی و کمیاب است؛ نوشته‌ها پیچیده و غیر قابل فهم‌اند؛ فرهنگ یا واژه نامه‌ای هم وجود ندارد که بتوان، به یاری آنها، گره این پیچیدگی‌ها را باز کرد؛ کشور ناامن است؛ حتی هستند افراد با نفوذی که کار علمی، و به خصوص کار ریاضی را، ناپسند می‌دانند و مردم را از نزدیک شدن به آن منع می‌کنند و...

از زبان حکیم عمر خیام، ریاضی دان، اخترشناس و شاعر نامدار بشنویم. او در مقدمه کتاب معروف «جبر» خود می‌نویسد:

«... دچار زمانه‌ای شده‌ایم که اهل علم از کار افتاده و جز عدهٔ کمی باقی نمانده‌اند تا از فرصت، برای بحث و تحقیق علمی استفاده کنند. برعکس حکیم نمایان دورهٔ ما، همه دست اندرکارند که حق را با باطل بیامیزند، جز ریا و تدلیس کاری ندارند؛ اگر دانش و معرفتی نیز دارند؛ صرف اغراض پست جسمی می‌کنند؛ اگر با انسانی روبه‌رو شوند که در جست و جوی حقیقت راسخ و صادق است و روی از باطل و زور می‌گرداند، او را استهزا و تحقیر می‌کنند...»

و هم اوست که، همهٔ این دردها را، در بیتی زیبا خلاصه می‌کند:

نا آمدگان، اگر بدانند که ما
از دهر چه می‌کشیم، نایند دگر

و یا

گر علم بُدی به کارها، در گردون
کی خاطر اهل علم، رنجیده بُدی

پس چگونه است که، در چنین دوره‌هایی و با وجود چنین دشواری‌هایی، باز هم ریاضی‌دانان بزرگی همچون خوارزمی، بیرونی، فارابی، ابن سینا، خیام، جمشید کاشانی داشته‌ایم؟ ریاضی‌دانانی که، سهمی عظیم در ساختمان دانش ریاضی جهان داشته‌اند و نوشته‌ها و آثار آنها، هنوز هم، بعد از گذشت سده‌های بسیار، قابل استفاده و منبع الهام علاقه‌مندان است؟

و آیا امروز، وقتی که بسیاری از این دردها وجود ندارد، باید به بهانه‌جویی برخی از جوانان که، ناکامی خود را در درس‌های ریاضی (و البته، نه تنها ریاضی)، ناشی از نارساییهای کتب درسی و معلم و محیط مدرسه، و نداشتن «معلم خصوصی» می‌دانند، تسلیم شد؟

□

ریاضیات، تکیه براندیشه و عقل آدمی دارد و سرو کارش با استدلال منطقی است و هر انسانی، ولو با استعدادی نه چندان درخشان، می‌تواند با یاری جستن از اندیشه، عقل و استدلال خود، به ریاضیات دست یابد و آن را فرابگیرد. در مرحلهٔ کنونی، کسی از دانش آموزان ما نمی‌خواهد، ریاضی‌دان باشند و نایافته‌های ریاضی را بیابند (گرچه، رسیدن به چنین مرحله‌ای هم، ناممکن نیست). از ما می‌خواهند، چیزهایی را یاد بگیریم که صدها سال پیش پیدا شده و در طول سده‌های متوالی سوهان خورده و به صورتی شفاف و قابل درک به ما رسیده‌اند. شاید، شعر گفتن کار ساده‌ای نباشد، ولی هر کسی می‌تواند یادبگیرد، شعر حاضر و آمادهٔ دیگران را، چگونه بخواند: در کجاها مکث کند، روی چه واژه‌هایی تکیه کند، کجا صدای خود را اندکی بالا ببرد و کجا اندکی پایین بیاورد و البته، به شرطی می‌تواند غزل حافظ و یا رباعی خیام را، درست و بی‌عیب بخواند که معنای آن را به خوبی درک کرده باشد. و این، کار دشواری نیست: همت و غیرت می‌خواهد و اندکی صرف وقت. تجربه نشان

● پرویز شهریاری

داده است که هرکسی (به شرطی که، به مفهوم واقعی کلمه، عقب افتادگی ذهنی نداشته باشد)، می‌تواند ریاضیات دبیرستانی را به خوبی فرابگیرد و برجنبه‌های مختلف آن مسلط شود و تنها شرط رسیدن به چنین موفقیتی «خواستن» است.

دو نمونه از تجربهٔ معلمی خودم را، برایتان روایت می‌کنم.

سالها پیش، درس هندسهٔ یکی از کلاسهای دبیرستان به عهدهٔ من بود. در آغاز سال، وقتی برای نخستین بار، به این کلاس می‌رفتم، مدیر دبیرستان، که مردی آزموده و شایسته بود، نام دانش‌آموزی را برد و به من توصیه کرد، مراقب باشم که سربه‌سر او نگذارم، چراکه «بی‌ادب» است و، اغلب، به معلمان خود بی‌احترامی می‌کند. پرسیدم: «درس ریاضی او چطور است؟» مدیر دبیرستان، با نگاه معنی دار خود، به من فهماند که «چودانی و پرسی، سؤالت خطاست».

می‌خواستم با این دانش آموز آشنا شوم. ضمن حضور و غیاب، وقتی به نام او رسیدم، دلم فرو ریخت. به او نگاه کردم؛ آرام برخاست و، مثل دیگران، گفت «حاضر». چه خوب! هیچ اتفاقی نیفتاد. لحن کلام و رفتار او، با دیگران، تفاوت چندانی نداشت... پس این، همان شاگردی است که باید از او بیم داشته‌باشم؟ ولی، چرا هیچ پرخاشی نکرد؟ در آن زمان، دانشجو بودم و تفاوت سنی چندانی با او نداشتم و حتی در زورآزمایی بدنی هم، می‌توانست از عهدهٔ من برآید... متوجه سکوت طولانی خود شدم، به خود آمدم و «حضور و غیاب» را ادامه دادم.

دانش آموزی را پای تخته سیاه فرستادم و مسأله‌ای را، برای حل، پیشنهاد کردم. هرجا در کار خود می‌ماند، از دیگران کمک می‌خواستم و، به ندرت، خودم هم راهنمایی می‌کردم. بحث دربارهٔ مسأله، به جای مناسبی رسیده بود، پرسشی ساده در ذهن خود طرح کردم و از «او» خواستم به آن پاسخ دهد. پرسش ساده بود و هر کسی می‌توانست پاسخ درست را بدهد. «او» هم به درستی پاسخ داد. آرام، ولی جدی، او را تشویق کردم: «بسیار خوب! کاملاً درست است! تو باید استعداد ریاضی خوبی داشته باشی»... شگفت زده به دور و بر خود نگاه کرد. باور نمی‌کرد، کسی با این لحن تشویق آمیز با او صحبت کند. ولی قیافهٔ من جدی بود و هیچ نشانه‌ای از شوخی یا تمسخر در آن دیدهٔ نمی‌شد... سرش را پایین انداخت و نشست.

همین صحنه را در جلسهٔ بعد و جلسه‌های بعد تکرار کردم. هر بار از او می‌پرسیدم، ولی همیشه، به نحوی که مطمئن باشم، پاسخ درست را می‌داند...

یک روز، وقتی از راهرو ساختمان مدرسه می‌گذشتم، «او» را دیدم که سراغ یکی از هم کلاسیهای خود رفته و التماس می‌کند: «من فقط پیش همین معلم هندسه آبرو دارم، به من کمک کن تا آبرویم نرود». .

تیرم به هدف خورده بود و، البته، من هرگز نگذاشتم آبروی او برود. همیشه و مرتب از او می‌پرسیدم، ولی هربار، به صورتی که موجب تشویق او بشود... سه ماههٔ اول، نتیجهٔ امتحانش، چندان درخشان نبود. او را خواستم و قیافه‌ای متعجب و شماتت بار گرفتم: «مگر موقع امتحان حالت بد بود؟ چه شد، با این همه انتظاری که از تو داشتم، این ورقه رابه من داده‌ای؟» از چهره‌اش فهمیدم که می‌خواهد عصیان کند و «حقیقت» را بگوید، ولی من فرصت حرف زدن به او ندادم: «نمرات را به دفتر نمی‌دهم. نمرهٔ سه ماهه دوم را، برای سه ماهه اول به حساب می‌آورم. نمی‌گذارم، با این درک و استعدادی که داری، سابقه‌ات خراب شود»... و از او جدا شدم.

و «او»، به تدریج، یکی از شاگردان خوب کلاس، در درس هندسه شد، به نحوی که حتی به دیگران هم کمک می‌کرد. در سه ماهه دوم، نمرهٔ قابل قبولی داشت.

در یکی از روزهای نیمهٔ دوم اسفند ماه، پدرش به دیدن من آمد. می‌خواست بداند، با پسر او چه کرده‌ام که، این قدر، به هندسه علاقه‌مند شده است. می‌گفت: «هنوز پسرم، همان بی‌شعور سابق است، ولی حتی ضمن خوردن غذا، روی مسألهٔ هندسه کار می‌کند». و من، در پاسخ او، تنها یک حرف داشتم: «پسر شما بی‌شعور نیست و من، این را، به او فهماندم. منتهی اگر می‌خواستم این حرف را به طور مستقیم و نصیحت وار به او بگویم، باور نمی‌کرد، چراکه همه، و حتی پدرش، او را «بی‌شعور» می‌دانستند. چگونه می‌توانست، حرف

یک نفر را، در برابر ده‌ها نفر بپذیرد؟... در عمل و به طور غیر مستقیم، به او فهماندم که، تو هم مثل دیگران شعور داری و می‌توانی هندسه را یادبگیری»...

و او، هندسه را یادگرفت؛ نمرهٔ سه ماههٔ سوم او، درخشان بود، با وجود این، آن سال در آن کلاس مردود شد... به خاطر درسهای دیگرش.

اما، روایت دوم. در یکی از دبیرستانهای تهران، دانش‌آموزی داشتم که هندسه را دوست نداشت و گمان می‌کرد، استعداد فراگیری هندسه را ندارد. سه سال آخر دبیرستان را، با کلاس او بودم. در این سه سال ، تقریباً همه درسهای ریاضی آن‌ها، با من بود. این دانش‌آموز، در همهٔ درس‌های ریاضی برجسته بود، ولی هندسه را، با نمره‌ای پایین و حتی گاهی به صورت «تک درس» می‌گذراند. در سال آخر دبیرستان (نظام قدیم)، درسی داشتند با عنوان «هندسه و مخروطات». بخش مخروطات این درس، هم به هندسهٔ مسطحه مربوط می‌شد و هم به هندسهٔ فضائی. کسی می‌توانست به خوبی از عهدهٔ آن برآید که، کم و بیش، بر هندسه دوسال قبل مسلط باشد. عادت من این بود که، گاهی، تدریس فصلی از کتاب درسی را، به عهدهٔ یکی از دانش‌آموزان می‌گذاشتم و، دانش آموز مورد بحث، همیشه داوطلب تدریس «جبر» و «مثلثات» و «حساب استدلالی» بود ولی من، «مخروطات» را به او پیشنهاد کردم. در ضمن، به او گفتم: «نمرهٔ تدریس تو، نه تنها نمرهٔ امتحانی «مخروطات»، بلکه نمرهٔ امتحانی «جبر» و «مثلثات» تو هم خواهد بود». او وحشت زده اعتراض کرد : «من هندسه نمی‌دانم. از هندسه متنفرم. نمرهٔ مخروطات به نمرهٔ جبر چه ربطی دارد؟» پاسخی ندادم و از او جدا شدم.

او به جنب و جوش افتاده بود. یکی دو هفته بعد، به من مراجعه کرد که : «آقا، مجبورم هندسهٔ سالهای قبل را هم بخوانم!» پاسخ من کوتاه بود : «همان کاری را بکن که لازم است»...

لزومی ندارد، از همهٔ نگرانیها و آشفتگیهای او، در سه ماهی که به آغاز تدریس او مانده بود، یاد کنم. در آغاز، هر کسی را که می‌توانست واسطه قرار داد تا مرا از تصمیم خود منصرف کند، ولی من پایداری کردم. سرانجام، روز موعود فرا رسید و او، به عنوان معلم، پای تخته سیاه رفت. همین قدر بگویم که، تدریس او، به هیچ وجه از تدریس یک معلم خوب، بدتر نبود. با روشنی و دقت، قضیه‌ها را ثابت می‌کرد، مثال می‌زد، تمرین نمونه حل می‌کرد و، بعد، دربارهٔ نکته‌های ظریفی که در درس وجود داشت، از دانش آموزان، و منجمله از من (که به عنوان دانش آموز، در کنار دیگران نشسته بودم) می‌پرسید... هندسه را یادگرفته بود و... خیلی خوب!

گمان می‌کنم، همین دو روایت، به اندازهٔ کافی قانع کننده باشند:

هر کسی می‌تواند ریاضیات را یادبگیرد، به شرطی که بخواهد.

چرا باید ریاضیات را یاد گرفت؟ فرو رفتن در مسأله‌هایی دور از ذهن، که شاید هرگز در زندگی به کارمان نخورد، چه فایده‌ای دارد؟ این همه صرف وقت و انرژی، برای اثبات قضیه‌هایی، که برخی از آن‌ها بدون اثبات هم واضح‌اند، برای چیست؟ آیا همهٔ این‌ها، تنها برای موفقیت در امتحان است؟ و مگر موفقیت در امتحان، می‌تواند دلیل قانع کننده‌ای باشد؟ مگر دشواریهای انسان امروزی را می‌توان با تکیه بر این گونه «موفقیت‌ها» حل کرد؟ برخی می‌گویند، ریاضیات، برای تقویت و شکوفائی اندیشه و ذهن آدمی سودمند است. مگر نمی‌شود، اندیشه و ذهن را، با کار روی موضوعهایی تقویت کرد که، در ضمن، برای زندگی و برای جامعهٔ انسانی هم مفید باشد؟... و اگر به ناچار قبول کنیم که، به دلیلی مجهول، باید ریاضیات را یاد گرفت، چگونه و از کجا باید آغاز کرد؟ چه باید کرد که، استدلالهای ریاضی ما، درست و قانع کننده باشد؟ چه باید کرد که بتوانیم از عهدهٔ حل مسأله‌های ریاضی برآییم؟ آیا کسی که در درس‌های ریاضی خود ناموفق است، به دلیل بی‌استعدادی اوست یا به خاطر این که «بی‌راهه» می‌رود؟ راه اصلی در کجاست؟ کدام مسیر، ما را به «راه» اصلی می‌رساند؟... آیا هرکسی می‌تواند ریاضی‌دان بشود و به مرزهای ناشناختهٔ ریاضی دست یابد؟ و اگر پاسخ به این پرسش مثبت است، چگونه و از کجا آغاز کنیم؟...

به همهٔ این پرسشها و پرسشهای فراوان دیگری که دربارهٔ ریاضیات وجود دارد، پاسخ خواهیم داد. ولی ابتدا و قبل از هر چیز، باید به یک توصیه عمل کنید، نه تنها کسانی که با ریاضیات سروکار دارند، بلکه هر کسی که می‌خواهد در زندگی علمی و اجتماعی خود موفق باشد. این، یک توصیهٔ عام است و برای هر دانش آموزی، در هر رشته‌ای، در هر سطحی و با هر استعدادی، سودمند است. آزمایش آن را، از همین امروز آغاز کنید؛ خیلی زود، اثر آن را در زندگی فرهنگی و معرفتی خود خواهید دید.

دفتری انتخاب کنید و در صفحهٔ اول آن بنویسید : «دفتر خاطره‌های علمی و فرهنگی» و، بعد، هر وقت به مطلب تازه و جالبی برخوردید (هرچه و درهر زمینه‌ای) در آن ثبت کنید.

ساعتها و روزهای متوالی، روی مسأله‌ای (و مثلاً، یک مسألهٔ ریاضی) اندیشیده‌اید، راه‌ها و روشهای مختلف را آزمایش کرده‌اید، با مراجعهٔ به کتاب‌های مختلف درسی و غیر درسی، برای رفع مشکل خود به جست و جو پرداخته‌اید،... ولی مسأله تسلیم نمی‌شود. شاید یک معماست و یا شاید، با طرح آن، خواسته‌اند شما را دست بیندازند... ولی یکبار، و اغلب ناگهانی، اندیشه‌ای به ذهنتان می‌رسد، اندیشه‌ای تازه... قلم را روی کاغذ می‌گذارید و آزمایش می‌کنید، مسأله حل می‌شود... ممکن است هرگز چنین اندیشه‌ای (که منجر به حل مسأله بشود) به ذهن شما نرسد، ولی از زبان معلم، یا در یک کتاب آشنا ویا به طریق دیگری، با راه حل آن آشنا شوید... عجب، پس این طور! پس راه حل آن، چنین بود. چقدر جالب!... این، یک خاطرهٔ علمی است و باید در دفتر خود یادداشت کنید. اول تاریخ بگذارید و بعد تمام ماجرا را شرح دهید. صورت مسأله چیست؟ چه کسی آن را به شما داده و یا در کدام کتاب دیده‌اید؟ چند ساعت یا چند روز با آن مشغول بوده‌اید؟... و سرانجام راه حل رابیاورید و، در ضمن، یاد آوری کنید که این راه حل را، چگونه و از کجا به‌دست آورده‌اید.

کتابی می‌خوانید (مجموعهٔ شعر، داستان، تاریخ، ریاضی، زندگی جانوران یا هر چیز دیگری) به نکته‌ای یا مطلبی بر می‌خورید که برای شما تازگی دارد، شگفت انگیز است، دل شما را می‌لرزاند و یا، خیلی ساده نظر شما را جلب می‌کند... این، یک خاطرهٔ علمی است. تاریخ بگذارید و آن را یادداشت کنید (باذکر منبع) و، در آخر نظر خود را (مثبت یا منفی) دربارهٔ آن بنویسید؛ اگر استدلالی هم، برای نظر خود دارید، ذکر کنید.

تلویزیون را تماشا یا رادیو را گوش می‌کنید، سر کلاس نشسته‌اید یا در جمع دوستان و آشنایان حضور دارید، هر کسی حرفی می‌زند و... ناگهان، مطلبی می‌شنوید که برای شما فوق العاده جالب است... این، یک خاطرهٔ علمی است و فراموش نکنید که، ضمن یادداشت آن، تاریخچهٔ خاطره را بنویسید : در کجا پیش آمد؟ چه کسی آن را مطرح کرد؟ نظر شما دربارهٔ آن چیست؟

پیاده روی می‌کنید، در اتوبوس نشسته‌اید، به سفر رفته‌اید، برای لذت بردن از مسابقهٔ فوتبال، به ورزشگاه آمده‌اید، از تماشای تابلوهای نقاشی در یک نمایشگاه یا از گوش دادن به یک کنسرت موسیقی لذت می‌برید،... چشم و گوش خود را باز کنید، به همه چیز دقت کنید، از هیچ چیز سرسری نگذرید، شاید حادثه‌ای، منظره‌ای، صحبتی یا ساختمانی باشد که جاذبه‌ای در شما ایجاد کند و برای ثبت در دفتر شما مفید باشد.

امروز با یکی از دوستان بحث داشته‌اید (دربارهٔ یک مسألهٔ ریاضی، دربارهٔ مسابقهٔ والیبال دو تیم مورد علاقه‌تان، دربارهٔ یک موضوع اجتماعی یا سیاسی...) و، در دل خود، به نظرتان می‌رسد، ضمن این بحث از جادهٔ انصاف خارج شده‌اید. به جای این که با دقت به حرفها و استدلالهای او گوش کنید، دائماً در این فکر بوده‌اید که چگونه او را از میدان در کنید یا، برعکس، او به چنین شیوهٔ نادرستی متوسل شده است. این، یک خاطرهٔ علمی است و ارزش یادداشت دارد.

... دفتر یادداشت خاطره‌ها، برای خودتان است، بنابراین می‌توانید همه چیز را صادقانه و همان طور که می‌اندیشید، در آن ثبت کنید. این دفتر، معرف زندگی فکری و معرفتی شماست و، در عین حال، رشد ذهنی و عقلی شما را، در طول زمان، نشان می‌دهد. هر وقت آن را ورق بزنید، همچون یک آینه، گذشتهٔ علمی و فکری شما را جلوتان می‌گذارد. در آن، به خوبی می‌بینید که چگونه پیش رفته‌اید، چه اشتباهایی داشته‌اید و چه کُمبودهایی! و چگونه می‌توانید، با تجربه از گذشته، راه آیندهٔ خود را انتخاب کنید. ضمن یادداشت مطالب در دفتر خود، دقیقاً مواظب باشید، نوشتهٔ شما، تا جایی که می‌توانید، خوانا و روشن باشد، به موقع نقطه‌گذاری کنید، به موقع سرسطر بروید، تاریخ و محل حادثه را فراموش نکنید، از به‌کار بردن واژه‌ای که معنای آن را نمی‌دانید پرهیز کنید، اگر مطلبی را از جایی نقل می‌کنید، منبع آن را بیاورید...

دفتر خاطره‌های علمی، اگر با پی‌گیری و دقت و به طور مستمر ادامه پیدا کند، می‌تواند برای شما آینده‌ساز باشد، چرا که شما را وامی‌دارد، ضمن خواندن کتاب یا گوش دادن به سخن دیگران و یا تماشای چشم اندازهای جلو خود، دقیق و کنجکاو باشید، شما را وامی‌دارد، دربارهٔ هر موضوعی بیندیشید، دربارهٔ هر مطلبی، ذهن و استعداد خود را بیازمایید و، سخن کوتاه، همهٔ شرطهایی را به دست آورید که یک اندیشمند و پژوهشگر باید داشته باشد.

تا بعد

نظریهٔ اعداد و کامپیوتر

● ترجمهٔ: غلامرضا یاسی پور و سید حسین سیدموسوی

نظریهٔ اعداد موضوعی است که توجه بشر را برای هزاران سال به خود جلب کرده‌است. در این مقاله بررسی مختصری از نظریهٔ اعداد، باتشریح اینکه چرا این موضوع مجذوب کننده و مهم است به دست می‌دهیم.

نظریهٔ اعداد، در کلی‌ترین مفهوم خود، مطالعهٔ اعداد و خواص آنهاست. در این نظریه، ابتداءً به اعداد صحیح، ۰، ۱ ±، ۲ ±، ... پرداخته می‌شود، و خواص جالب بسیاری از این اعداد و روابط بین آنها مورد بحث قرارمی‌گیرد. در این مقاله، موارد استعمال نظریهٔ اعداد، به‌خصوص آنها راکه متوجه دانش کامپیوترند، بررسی می‌کنیم. گسترش دانش و تکنولوژی جدید به گسترش روشهای باکفایت در ارائهٔ اعداد صحیح و حساب اعداد صحیح ورزیدن وابسته است. از ۵۰۰۰ سال پیش به این طرف، روشهای متفاوتی، با به کار گرفتن اعداد صحیح مختلفی به‌عنوان مبنا، در نمایش اعداد صحیح مطرح شده‌است. بابلیهای باستان ۶۰ را به‌عنوان مبنای دستگاه عددیشان به کار برده‌اند، و مایائیهای باستان ۲۰ را. روش مرسوم ما در بیان اعداد، یعنی، دستگاه اعشاری به کار برندهٔ ۱۰ به‌عنوان مبنا، ابتدا در هندوستان و در حدود شش قرن پیش مطرح شد. امروزه، دستگاه دوتایی، که ۲ را به‌عنوان مبنا اختیار می‌کند، به طرز وسیعی در ماشینهای محاسب به کار رفته‌است.

هنگامی که طریقی در ارائهٔ اعداد صحیح مطرح می‌شود، به روشهایی برای حساب ورزیدن، بااستفاده از این نمایشها، نیاز است. در واقع عبارت آلگوریتم[1] که امروزه به هر روش مربوط به حل کردن یک مسألهٔ کلی اشاره دارد، در اصل و به طور خاص به چنین روشهایی اشاره داشته‌است. طرح روشهای کارا برای حساب، از هنگامی که کامپیوترها به طور افزایش یابنده‌ای با اعداد بزرگتر سروکار پیدا کرده‌اند، از اهمیت بسیار زیادی برخوردار شده‌است. نظریهٔ اعداد به طرق بسیار در طرح آلگوریتمهای کارا برای حساب کامپیوتری کارا به کار رفته است. و در این زمینه، نتایج اساسی جدیدی در دههٔ گذشته کشف شده‌اند.

یونانیان باستان، ۲۵۰۰ سال پیش، در مکتب فیثاغورس، بین **اعداد اول**[2] و **اعداد مرکب**[3] تمایز قائل می‌شدند. **عدد اول** عدد صحیح مثبتی است که عاملی جز یک و خودش ندارد. مسائل مربوط به اعداد اول نظر ریاضیدانها را از عهد عتیق تا زمان حاضر به خود جلب کرده‌است. شاید اولین سؤالی که در مورد اعداد اول به ذهن خطور کرده این سؤال که آیا بی‌نهایت اعداد اول وجود دارد یا خیر، باشد. در مقدمات[4] اقلیدس، ریاضیدان یونان باستان می‌توان برهانی، در مورد این که بی‌نهایت عدد اول موجود است، یافت. سؤال دیگری که در این مورد مطرح می‌شود این است که: آیا فرمولی که اعداد اول را تولید کند وجود دارد؟ پی‌یرفرما، نظریهٔ اعداد پرداز بزرگ فرانسوی قرن هفدهم، تصور می‌کرد که جمیع اعداد صحیح به صورت $2^{2^n}+1$ اولند، اما دروغ بودن این مطلب، یک قرن بعد از آنکه فرما چنین ادعایی کرد، توسط لئوناردواولر، ریاضیدان مشهور سوئیسی، که مبرهن ساخت که ۶۴۱ عامل $2^{2^5}+1$ است، به اثبات رسید.

مسألهٔ متمایز کردن اعداد اول از اعداد مرکب به طور وسیعی مورد بررسی قرارگرفته است. این مسأله، گرچه در ابتدا تنها به خاطر کنجکاویهای روشنفکرانه مورد بررسی قرار گرفت، امروزه مسألهٔ بسیار مهمی در رمز شناسی است. اراتستن دانشمند یونان باستان روشی، که امروزه **غربال اراتستن**[5] نامیده می‌شود، و جمیع اعداد اول کمتر از حد مشخصی را به دست می‌دهد، اختراع کرد. این روش ابتدا جمیع اعداد صحیح زوج را حذف می‌کند، بعد اعداد صحیح باقیماندهٔ قابل قسمت به سه را حذف می‌کند، سپس به حذف اعداد صحیح

باقیماندهٔ بخش‌پذیر بر پنج می‌پردازد، و همینطور ادامه می‌دهد، و هنگامی که اعداد صحیح بخش‌پذیر بر بزرگترین عدد اول نامتجاوز از جذر حد زبرین دنبالهٔ مورد بحث حذف شده باشند، از کار می‌ایستد. در این صورت جمیع اعداد صحیح مانده، به جز ۱، اول اند.

گاهی نیاز به تعیین اول بودن عدد صحیح خاصی داریم. متأسفانه استفاده از غربال اراتستن در تشخیص اینکه عدد صحیح خاصی اول است یا نه، بی‌فایده است، بنابراین ریاضیدانها به جستجوی روشهای دیگری در تعیین اول بودن یک عدد صحیح رفته‌اند. ریاضیدانهای چین باستان تصور می‌کردند که اعداد اول دقیقاً آن اعداد صحیح مثبت n اند که $2^n - 2$ را عاد می‌کنند. فرما نشان داد که اگر n اول باشد، در این صورت $2^n - 2$ را عاد می‌کنند. اما در اوایل قرن نوزدهم، معلوم شد که اعداد صحیح مرکب n ی، چون $n=341$، چنانکه n، $2^n - 2$ را عاد کند، موجودند. اعداد مرکب مزبور به شبه اول[6] موسومند. از آنجا که اغلب اعداد صحیح مرکب شبه‌اول نیستند، امکان طرح تستهای اول بودن برمبنای اندیشهٔ چینی اولیه، همراه با ملاحظاتی اضافی، موجود می‌شود. و اکنون یافتن اعداد اول به کارایی امکان می‌یابد؛ در واقع، اعداد اولی با ۲۰۰ رقم اعشاری را می‌توان با چند دقیقه کار کامپیوتر به‌دست آورد. در حال حاضر قسمت عظیمی از تحقیقات جاری به نشان دادن اعداد صحیحی که اولند اختصاص یافته‌اند.

قضیهٔ اساسی حساب[7]، معروف یونانیان باستان، براین است که هر عدد صحیح مثبت را می‌توان به‌طور منحصر به فردی به صورت حاصل ضرب اعداد اول نوشت. این تجزیه را می‌توان با آزمایش تقسیم آن عدد بر اولهای کمتر از جذر آن به‌دست آورد؛ اما این روش، متأسفانه، بسیار وقت‌گیر است. فرما، اولر، و بسیاری از ریاضیدانهای دیگر، در این مورد، روشهای تجزیهٔ ابتکاری ای ارائه داده‌اند. اما، تجزیهٔ عدد صحیحی با ۲۰۰ رقم اعشار، بااستفاده از کاراترین تکنیکی که تاکنون به وجود آمده، می‌تواند به بلیونها سال وقت کامپیوتر نیاز داشته‌باشد. به همین جهت است که امروزه برای یافتن راههایی تازه در تجزیهٔ سریع اعداد صحیح بزرگ، تلاشهای وسیعی در دست اقدام است.

کارل فریدریش گوس ریاضیدان آلمانی، که یکی از بزرگترین ریاضیدانهای تمام اعصار به حساب می‌آید، **لسان هم نهشتیها**[8] را در اوائل قرن نوزدهم مطرح کرد. در این صورت هنگام انجام محاسبات معینی، بااستفاده از لسان هم نهشتیها، به‌جای اعداد، می‌توان باقیمانده‌های آنها را، چون بر عدد معینی تقسیم شوند، قرار داد. با استفاده از مفهوم هم نهشتی می‌توان مسائل بسیاری را، که بدون این اصطلاح تنها می‌توانند به صورت پیچیده و ناهنجاری بیان شوند، به گونه‌ای ظریف و موجز به عبارت آورد. هم نهشتیها کاربردهای متعددی در دانش کامپیوتر، از جمله کاربردهایی در فایل * حافظهٔ کامپیوتری، حساب با اعداد صحیح بزرگ، و ایجاد اعداد شبه **تصادفی**[9] دارند.

یکی از مهمترین کاربردهای نظریهٔ اعداد در دانش کامپیوتر حوزهٔ رمزنگاری است. از هم نهشتیها می‌توان برای مطرح کردن انواع گوناگون رمزها استفاده کرد. اخیراً نوع جدیدی از سیستمهای رمزی، موسوم به **سیستم رمزی عام ـ کلید** ارائه شده است. در این صورت چون رمز عام ـ کلیدی به کار رود، هر فرد یک کلید رمز بندی عام و یک کلید رمزگشایی خاص دارد. پیغامها با استفاده از کلید عمومی گیرنده رمز بندی می‌شوند. گذشته از این، تنها گیرنده می‌تواند پیغام مورد بحث را رمزگشایی کند، زیرا رمزگشایی، هنگامی که تنها کلید رمز بندی معلوم است، به مقدار بسیار زیادی زمان کامپیوتری نیاز دارد. سیستم رمزی عام ـ کلید بیش از همه به کار رفتهٔ فوق بر تفاوت کلی زمان کامپیوتری مورد نیاز برای یافتن اعداد اول بزرگ و تجزیهٔ اعداد صحیح بزرگ متکی است. در حالت خاص، در تهیهٔ یک کلید رمز بندی به این نیاز است که دو عدد اول بزرگ پیدا و سپس در هم ضرب شوند؛ و این کار را می‌توان در چند دقیقه بر کامپیوتر انجام داد. در این صورت کلید رمزگشایی مورد نظر، چون اولهای بزرگ مزبور مشخص شوند، می‌تواند به سرعت به دست آید. اما یافتن کلید رمزگشایی از کلید رمزبندی نیاز به این دارد که یک عدد بزرگ، یعنی حاصل‌ضرب اعداد اول بزرگ مزبور تجزیه شود، و این کار ممکن است بلیونها سال طول بکشد.

۱_ Algorithm
۲_ Primes
۳_ Composite
۴_ Elements
۵_ Sieve of Erathosthense
۶_ Pseudoprime
۷_ Fundamental theorem of arithmetic
۸_ Congruences
۹_ Pseudo _ random numbers

*پرونده

● احمد قندهاری

لگاریتم

(مورد استفاده دانش‌آموزان سال دوم، سوم و چهارم دبیرستان)

جان نپر[1] ریاضی‌دان اسکاتلندی درسال ۱۶۱۴ میلادی کتابی به‌زبان لاتین تحت عنوان «شرح جدول شگفت‌انگیز لگاریتمها» منتشر کرد که‌فوق‌العاده موردتوجه ریاضی‌دانان قرار گرفت.

جدول این کتاب بعدها به‌جدول لگاریتم معروف شد.

«نپر» برای محاسبات ایـن‌کتاب حدود بیست سال زحمت کشیده‌بود. مبنای لگاریتم«نپر» عدد «e»است که‌مقدار آن از سری $e = ۱ + \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \cdots$

به‌دست می‌آید (مقدار تقریبی این‌عدد (۲/۷۱۸۲) است). به‌همین‌علت لگاریتم‌ابداعی یـا اختراعی «نپر» را لگاریتم «نپری» یـا «نپرین»گویند و آن را بـه‌صورت log یا Ln نشان می‌دهند.

یك سال پس‌ازانتشار کتاب «نپر» یك معلم‌ریاضی‌در انگلستان به‌نام «بریگز[2]» دست ازکارخودکشید و به‌اسکاتلند نزد «نپر» رفت، ضمن‌تشویق وقدردانی، ازاوخواست کـه جدول لگاریتمی برمبنای (۱۰) بنویسد. نپر از این پیشنهاد استقبال‌کرد ولی‌عمرش‌کفاف نداد‌که‌آن را به‌پایان برساند.

«بریگز»کارنیمه‌تمام «نپر» را ادامه داد تـا درسال ۱۶۲۴ میلادی جدول‌لگاریتم دهگانی‌را به‌پایان رسانـد و منتشر کرد. این‌جدول بعدها به‌وسیلهٔ دیگران تکمیل شد.

بخش اول: تعریف لگاریتم وفرمولهای‌آن

کلیه اعدادی‌که در این مقالـه مطرح می‌شود اعداد حقیقی‌است.

۱ . تعریف لگاریتم:

فرض می‌کنیم عدد (a) مثبت ومخالف یك باشد.

اگراعدادی مانند (N) و (x) داشته‌باشیم، به‌طوری که: $N = a^x$ ، دراین‌صورت بنا به‌تعریف می‌گوییم لگاریتم N درمبنای (a) مساوی (x) است:

$$N = a^x \Longleftrightarrow \log_a^N = x$$

عدد (x) را لگاریتم وعدد (a) را مبنا وعـدد (N) را آنتی‌لگاریتم یاعدد مابه‌ازاء گویند.

چون a عددی مثبت‌است وعدد مثبت به‌هرتوان که‌برسد، مثبت‌است، پس a^x ودرنتیجه N همواره مثبت‌است. به‌همین علت‌است‌که می‌گوییم اعداد منفی‌وصفر، لگاریتم‌ندارد.

مثال ۱ : ازتساوی $\log_{\sqrt[4]{5}} 5\sqrt{5} = x$ مقدارxرا بیابید.

حل: بنا به‌تعریف می‌توان نوشت:

$$5\sqrt{5} = (\sqrt[4]{5})^x$$

طرفین تساوی را به‌توان (۴) می‌رسانیم

$$5^4 \times 5^2 = 5^x$$

$$5^6 = 5^x \Longrightarrow \boxed{x = 6}$$

مثال ۲ : ازتساوی $\log_{a^2\sqrt[7]{a}} N = \frac{9}{14}$ مقـدار N را بیابید.

حل :

$$N = (a^2\sqrt[7]{a})^{\frac{9}{14}} = (a^{14}a^{3})^{\frac{1}{14}} = (a^{21})^{\frac{1}{14}} = a^{\frac{3}{2}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{N = a\sqrt{a}}$$

۱ـ Neper یا Nepier

۲ـ Briggs

مثال ۳ : از تساوی $\log_a(۲+\sqrt{۳}) = -۱$، مقدار a را بیابید.

حل :

$$(۲+\sqrt{۳}) = a^{-۱} \Longrightarrow \frac{۱}{a} = ۲+\sqrt{۳}$$

$$\Longrightarrow a = \frac{۱}{۲+\sqrt{۳}} \Longrightarrow a$$

$$= \frac{۱}{۲+\sqrt{۳}} \times \frac{۲-\sqrt{۳}}{۲-\sqrt{۳}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{a = ۲-\sqrt{۳}}$$

II . فرمولهای لگاریتم:

هرعددی‌که درمبنای لگاریتم قرار می‌گیرد شرط مثبت ومخالف یك‌بودن را دارا هست.

$$۱ = a^{۰} \Longrightarrow \boxed{\log_a ۱ = ۰} \quad (۱)$$

$$a = a^{۱} \Longrightarrow \boxed{\log_a a = ۱} \quad (۲)$$

اگر $M = a^x$ و $N = a^y$ ، آنگاه خواهیم داشت:

$$\log N_a = y \;,\; \log M_a = x$$

$$M \cdot N = a^x \cdot a^y \Longrightarrow MN = a^{x+y}$$

$$\Longrightarrow \log_a MN = x+y$$

$$\Longrightarrow \boxed{\log_a MN = \log_a H + \log_a N} \quad (۳)$$

تعمیم:

$$\log a M . N . K \ldots = \log_a M + \log_a N + \log a K + \cdots$$

مثال :

$$\log_۴ ۵ \times ۱۱ \times ۱۷ = \log_۴ ۵ + \log_۴ ۱۱ + \log_۴ ۱۷$$

می‌توان نوشت

اگر $M = a^x \Longrightarrow \log_a M = x$

اگر $N = a^y \Longrightarrow \log_a N = y$

$$\frac{M}{N} = \frac{a^x}{a^y} \Longrightarrow \frac{M}{N} = a^{x-x}$$

$$\Longrightarrow \log_a \frac{M}{N} = x-y$$

$$\Longrightarrow \boxed{\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N} \quad (۴)$$

مثال : $\log_۴ \frac{۶۲۵}{۱۱} = \log_۴ ۶۲۵ - \log_۴ ۱۱$

نتیجه‌ای ازفرمول (۵)

$$\log_a \frac{۱}{N} = \log_a ۱ - \log_a N \Longrightarrow \boxed{\log_a \frac{۱}{N} = -\log_a N}$$

اگر $N = a^x \Longrightarrow \log_a N = x$

$x \neq ۰$ یا $N \neq ۱$

فرض می‌کنیم $\log_{a^p} N^m = kx$ ، می‌خواهیم k را بیابیم .

$$\log_{a^p} N^m = kx \Longrightarrow N^m = (a^p)^{kx} \Longrightarrow N^m = a^{pkx}$$

$$\Longrightarrow (a^x)^m = a^{pkx} \Longrightarrow a^{mx} = a^{pkx}$$

$$\Longrightarrow mx = pkx \Longrightarrow m = pk \Longrightarrow \boxed{k = \frac{m}{p}}$$

$$\Longrightarrow \log_{a^p} N^m = kx \Longrightarrow \log_{a^p} N^m = \frac{m}{p} x$$

$$\Longrightarrow \boxed{\log_{a^p} N^m = \frac{m}{p} \log_a N} \quad (۶)$$

مثال:

$$\log_{128}64=\log_{2^7}2^6=\frac{6}{7}\log_2 2=\frac{6}{7}$$

نتایج فرمول (۶)

$$\text{I) } \log_a N^m = m\log_a N$$

$$\text{II) } \log_{a^p} N = \frac{1}{p}\log_a N$$

$$\text{III) } \log_{a^m} N^m = \log_a N$$

مثال:

$$\log_a N=\log_{a^2}N^2=\log_{a^3}N^3=\dots=\log_{\sqrt{a}}\sqrt{N}$$

$$=\log_{\sqrt[3]{a}}\sqrt[3]{N}=\dots$$

$$\text{IV) } \log_{\frac{1}{a}}\frac{1}{N}=\log_{a^{-1}}N^{-1}=\log_a N$$

$$\text{V) } \log_{\sqrt[p]{a}}\sqrt[m]{N}=\log_{a^{\frac{1}{p}}}N^{\frac{1}{m}}=\frac{p}{m}\log_a N$$

اگر $\log_b a = x \ , \ \log_a b = y$

آنگاه: $a=b^x \ , \ b=a^y \Longrightarrow a=(a^y)^x$

$$\Longrightarrow a=a^{xy}$$

$$\Longrightarrow xy=1 \Longrightarrow \boxed{\log_b a \times \log_a b = 1} \quad (۷)$$

نتایج فرمول (۷)

$$\text{I) } \log_b a \cdot \log_a b = 1 \Longrightarrow \boxed{\log_b a=\frac{1}{\log_a b}} \quad (۸)$$

$$\text{II) } \log_{MN} a=\frac{1}{\log_a MN}=\frac{1}{\log_a M+\log_a N}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\log_{MN} a=\frac{1}{\log_a M+\log_a N}} \quad (۹)$$

مثال: ثابت کنید:

$$\log_{\sqrt{24}}\sqrt{2}=\frac{1}{3+\log_2 3}$$

حل:

$$\log_{\sqrt{24}}\sqrt{2}=\log_{24}2=\frac{1}{\log_2 24}=\frac{1}{\log_2 2^3\times 3}$$

$$=\frac{1}{3\log_2 2+\log_2 3}=\frac{1}{3+\log_2 3}$$

فرض می‌کنیم:

$$\log_b a = x \ , \ \log_c b = y \ , \ \log_c a = z$$

$$\Longrightarrow a=b^x \ , \ b=c^y \ , \ a=c^z \qquad (۱)$$

$$\begin{cases} a=b^x \\ b=c^y \end{cases} \Longrightarrow a=(c^y)^x \Longrightarrow a=c^{xy} \quad (۲)$$

بامقایسه روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$c^{xy}=c^z \Longrightarrow xy=z$$

$$\Longrightarrow \boxed{\log_b a\times\log_c b=\log_c a} \qquad (۱۰)$$

تعمیم $\log_b a\times\log_c b\times\log_d c\times\dots\times\log_n k=\log_n a$

مثال:

$$\log_{10}25\times\log_5 10=\log_5 25=\log_5 5^2=2\log_5 5=2$$

نتیجه‌ای از دستور (۱۰)

$$\log_b a\times\log_c b=\log_c a \Longrightarrow \log_b a=\frac{\log_c a}{\log_c b}$$

اگر به‌جای c عدد (۱۰) را قراردهیم، خواهیم داشت:

$$\boxed{\log_b a=\frac{\log a}{\log b}} \qquad (۱۱)$$

توجه: اگرمبنا عدد (۱۰) باشدآن را نمی‌نویسند.

مثال:

$$\log_{1000}10000=\frac{\log 10000}{\log 1000}=\frac{\log 10^4}{\log 10^3}$$

$$=\frac{4\log 10}{3\log 10}=\frac{4}{3}$$

اگر $\log_c x = k \Longrightarrow x = c^k$

اگر $\log_b k = p \Longrightarrow k = b^p$

اگر $\log_a p = m \Longrightarrow p = a^m$

$$\left.\begin{array}{l} \log_c x = k \Longrightarrow x = c^k \\ \log_b k = p \Longrightarrow k = b^p \\ \log_a p = m \Longrightarrow p = a^m \end{array}\right\} \Longrightarrow x = c^k = c^{b^p} = c^{b^{a^m}}$$

$$\Longrightarrow \log_a p = \log_a(\log_b k) = \log_a(\log_b(\log_c x))$$

داشتیم $\log_a p = m$

$$\Longrightarrow \boxed{\log_a(\log_b(\log_c x)) = m \Longrightarrow x = c^{b^{a^m}}} \quad (۱۲)$$

مثال :

$$\log_{\sqrt{۲}}(\log_{\frac{۳}{\sqrt{۴}}} \log_{\frac{۴}{\sqrt{۸}}} x) = ۲$$

$$\Longrightarrow x = \sqrt{۸}^{\sqrt[۳]{۴}^{\sqrt{۲}^{۲}}} \qquad \Longrightarrow \boxed{x = ۸}$$

اگر $\log_a N = p \;,\; p = \log_a N$

$$\Longrightarrow N = a^p \Longrightarrow \boxed{N = (a)^{\log_a^N}} \quad (۱۳)$$

به طور کلی داریم :

$$\boxed{(x)^{\log_a^y} = (y)^{\log_a^x}} \quad (۱۴)$$

زیرا اگر از طرفین درمبنای a لگاریتم بگیریم خواهیم داشت: $\log_a^y \cdot \log_a^x = \log_a^x \cdot \log_a^y$

مثال : $(۵)^{\log x} = (x)^{\log ۵}$

مثال : $(۱۰)^{\log x} = x$

فرض می‌کنیم $a > ۱$ ، باتوجه به‌مطالب گفته شده خواهیم داشت:

$$\text{I)} \quad \log_a^N > ۰ \Longrightarrow N > a^۰ \Longrightarrow N > ۱$$

$$\text{II)} \quad \log_a^N < ۰ \Longrightarrow ۰ < N < a^۰ \Longrightarrow ۰ < N < ۱$$

$$\text{III)} \quad \log_a^N > ۱ \Longrightarrow N > a$$

$$\text{IV)} \quad \log_a^N < ۱ \Longrightarrow ۰ < N < a$$

$$\text{V)} \quad \log_a^N > -۱ \Longrightarrow N > a^{-۱} \Longrightarrow N > \frac{۱}{a}$$

$$\text{VI)} \quad \log_a^N < -۱ \Longrightarrow ۰ < N < a^{-۱} \Longrightarrow ۰ < N < \frac{۱}{a}$$

حال فرض می کنیم $۱ > a > ۰$ ومی‌دانیم $\log a$ عددی است منفی، دراین‌صورت خواهیم داشت:

$$(\text{I})' \quad \log_a^N > ۰ \Longrightarrow \frac{\log N}{\log a} > ۰ \Longrightarrow \log N < ۰ \Longrightarrow ۰ < N < ۱$$

$$(\text{II})' \quad \log_a^N < ۰ \Longrightarrow \frac{\log N}{\log a} < ۰ \Longrightarrow \log N > ۰ \Longrightarrow N > ۱$$

$$(\text{III})' \quad \log_a^N > ۱ \Longrightarrow \frac{\log N}{\log a} > ۱ \Longrightarrow \log N < \log a \Longrightarrow ۰ < N < a$$

$$(\text{IV})' \quad \log_a^N < ۱ \Longrightarrow \frac{\log N}{\log a} < ۱ \Longrightarrow \log N > \log a \Longrightarrow N > a$$

$$(\text{V})' \quad \log_a^N > -۱ \Longrightarrow \frac{\log N}{\log a} > -۱ \Longrightarrow \log N < -\log a \Longrightarrow \log N < \log a^{-۱} \Longrightarrow \log N < \log \frac{۱}{a} \Longrightarrow ۰ < N < \frac{۱}{a}$$

$$(\text{VI})' \quad \log_a^N < -۱ \Longrightarrow \frac{\log N}{\log a} < -۱ \Longrightarrow \log N > -\log a \Longrightarrow \log N > \log a^{-۱} \Longrightarrow \log N < \log \frac{۱}{a} \Longrightarrow N > \frac{۱}{a}$$

مثال ۱ : حدود x را بیابید. $\log(۲x - ۳) < ۰$

بنابه‌نتیجه (II) صفحهٔ (۲۹)

$$۰ < ۲x - ۳ < ۱ \Longrightarrow ۳ < ۲x < ۴ \Longrightarrow \frac{۳}{۲} < x < ۲$$

مثال ۲ : $\log_{\frac{1}{4}}(2x-3)>0$

بنا به‌نتیجه $(I)'$ صفحهٔ (۲۹)

$$\Rightarrow 0<2x-3<1 \Rightarrow 3<2x<4$$
$$\Rightarrow \frac{3}{2}<x<2$$

مثال ۳ : $\log_{\frac{1}{6}}(4x-6)<-1$

بنا به‌نتیجه $(VI)'$ صفحهٔ (۲۹)

$$\Rightarrow 4x-6>\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$$
$$4x-6>6 \Rightarrow 4x>12 \Rightarrow x>3$$

مثال ۴ : $\log_{\frac{1}{8}}(2x-8)>-1$

بنا به نتیجهٔ $(V)'$ صفحهٔ (۸)

$$0<2x-8<\left(\frac{1}{8}\right)^{-1} \Rightarrow 0<2x-8<8$$
$$8<2x<16 \Rightarrow 4<x<8$$

بخش دوم : می‌دانیم:

$$100=10^{2} \Rightarrow \log 100=2$$
$$1000=10^{3} \Rightarrow \log 1000=3$$

اگر عددی بین ۱۰۰ و ۱۰۰۰ باشد، مسلماً لگاریتم آن بین ۲ و ۳ است.

مثلاً : $\log 200=2/30103$

عدد (۲) مفسر وعدد اعشاری ۰/۳۰۱۰۳ را مانتیس یا قسمت اعشاری گویند که ازجدول لگاریتم به‌دست می‌آید.

مفسر ازلحاظ علامت مثبت یا منفی است، ممکن است صفر هم باشد ولی مانتیس همواره مثبت است.

اگر مبنای لگاریتم (۱۰) باشد، به‌طوری که قبلاً گفته شد مبنا را نمی‌نویسند و این لگاریتم را لگاریتم اعشاری یا لگاریتم دهگانی گویند.

در بحث زیر مبنای لگاریتم ۱۰ و $N>1$ است.

مفسر: اگر مفسر مثبت یا صفر باشد، چنانچه یك واحد به آن اضافه کنیم تعداد ارقام عدد آنتی لگاریتم به دست می‌آید.

اگر مفسر منفی باشد، قدر مطلق آن نشان‌دهندهٔ تعداد صفرهای سمت‌چپ عدد است. با احتساب صفر ممیز.

مثال:

اگر $\log N=4/251 \Longrightarrow$ N عددیست پنج رقمی

اگر $\log N=\bar{3}/251 \Longrightarrow$ درسمت‌چپ عدد N با احتساب صفرممیز سه صفروجود دارد

مثال :
$$\log 0/1=-1$$
$$\log 0/01=-2$$
$$\log 0/001=-3$$

کلگاریتم : لگاریتم $\frac{1}{N}$ را کلگاریتم N گویندپس

$$-\log N=\operatorname{colog} N \quad , \quad -\operatorname{colog} N=\log N$$

طرز تعیین $\operatorname{colog} N$ از روی $\log N$:

$(+1)$ رابه مفسر $\log N$ اضافه می‌کنیم پس از جمع جبری علامت آن‌را عوض می‌کنیم. درمورد قسمت اعشاری: اولین‌رقم بامعنای سمت‌راست قسمت اعشاری را از (۱۰) و بقیه‌را از (۹) کم می‌کنیم.

مثال : $\log N=\bar{2}/21450 \quad , \quad \operatorname{colog} N=?$

$\operatorname{colog} N=1/7855$

سؤال: اگر $\operatorname{colog} N$ را داشته‌باشیم، $\log N$ چگونه به‌دست می‌آید.

پاسخ: به‌همان طریقی که از روی $\log N$ ، $\operatorname{colog} N$ را به دست آوردیم :

مثال : $\operatorname{colog} N=4/2160 \Longrightarrow \log N=\bar{5}/784$

---

۱. جمع لگاریتمها :

برای جمع چندلگاریتم، مانتیس آنها را با هم جمع

می‌کنیم، سپس واحدهای صحیحی که به‌دست می‌آید با مفسرها جمع‌جبری می‌کنیم.

مثال :

$$\left.\begin{array}{l} \log x = ۲/۸۵۱۲ \\ \log y = \bar{۵}/۹۳۲۰ \end{array}\right\} \Longrightarrow \log x + \log y =$$

$$۲/۸۵۱۲ + \bar{۵}/۹۳۲۰ = \bar{۲}/۷۸۳۲$$

۲. تفریق لگاریتمها :

برای تفریق لگاریتمها، مفروق را به کلگاریتم تبدیل می‌کنیم سپس به‌جای عمل تفریق عمل جمع‌را انجام می‌دهیم.

مثال :

$$\begin{cases} \log x = \bar{۴}/۶۳۹۲ \\ \log y = ۲/۱۸۶۰ \end{cases} \Longrightarrow \log x - \log y =$$

$$\log x + \operatorname{colog} y = \bar{۴}/۶۳۹۲ + \bar{۳}/۸۱۴۰ = \bar{۶}/۴۵۳۲$$

۳. ضرب عدد m در log x

الف: اگر m مثبت‌باشد، عمل ضرب معمولی انجام می‌گیرد، باتوجه به‌اینکه مانتیس‌همواره مثبت است.

مثال:

$$\log x = \bar{۲}/۸۱۴۰ \Longrightarrow ۵\log x = ?$$

$$۵\log x = ۵(\bar{۲}/۸۱۴۰) = ۵(-۲ + ۰/۸۱۴۰)$$

$$= -۱۰ + ۴/۰۷ = \bar{۶}/۰۷$$

ب: اگر عدد m منفی‌باشد، دراین صورت $\operatorname{colog} x$ را در $|m|$ ضرب می‌کنیم.

مثال:

$$\log x = ۱/۱۲۴۳ \Longrightarrow -۵\log x = ?$$

$$-۵\log x = ۵(\operatorname{colog} x) = ۵(\bar{۲}/۸۷۵۷)$$

$$= ۵(-۲ + ۰/۸۷۵۷) = -۱۰ + ۴/۳۷۸۵$$

$$= \bar{۶}/۳۷۸۵$$

۴. تقسیم logx برعدد k

الف: اگر k مثبت و مفسر، $\log x$ ، مثبت باشد، در این‌صورت باتقسیم معمولی‌اعشاری جواب به‌دست می‌آید.

مثال:

$$\log x = ۲/۱۲۴۵ \Longrightarrow$$

$$\frac{\log x}{۳} = \frac{۲/۱۲۴۵}{۳} = ۰/۷۰۸۱۶$$

ب: اگر k مثبت ومفسر، $\log x$ منفی‌باشد، ولی عدد مفسر به‌عدد k بخش‌پذیر باشد بازهم تقسیم به‌صورت‌معمولی انجام می‌شود.

مثال:

$$\log x = \bar{۶}/۸۱۴۱ \Longrightarrow$$

$$\frac{\log x}{۳} = \frac{\bar{۶}/۸۱۴۱}{۳} = \bar{۲}/۲۷۱۳$$

ج: اگر k مثبت ومفسر $\log x$ منفی باشد ولی عدد مفسر بر k بخش‌پذیر نباشد دراین‌صورت بزرگترین عددمنفی رابه مفسر اضافه می‌کنیم تا برعدد k بخش‌پذیر شود و در عین‌حال همان‌عدد باعلامت‌مثبت‌را به مانتیس اضافه‌می‌کنیم، سپس‌عمل تقسیم‌را انجام می‌دهیم:

مثال:

$$\log x = \bar{۲}/۱۲۲۵ \Longrightarrow \frac{\log x}{۵} = \frac{\bar{۲}/۱۲۲۵}{۵}$$

$$= \frac{-۲ + ۰/۱۲۲۵}{۵} = \frac{-۲ - ۳ + ۳ + ۰/۱۲۲۵}{۵}$$

$$= \frac{-۵ + ۳/۱۲۲۵}{۵} = -۱ + ۰/۶۲۴۵$$

$$= \bar{۱}/۶۲۴۵$$

د: اگر k منفی باشد، دراین صورت به‌جای تقسیم $\log x$ برعدد منفی k ، $\operatorname{colog} x$ را بر $|k|$ تقسیم می‌کنیم، که دراین وضعیت‌عملیات به‌حالتهای گفته‌شده تبدیل‌می‌شود.

مثال:

$$\log x = ۲/۲۳۸۶ \Longrightarrow \frac{\log x}{-۳} = \frac{-\log x}{۳}$$

$$= \frac{\operatorname{colog} x}{۳} = \frac{\bar{۳}/۷۶۱۴}{۳} = \bar{۱}/۲۵۳۸$$

۵. ضرب یا تقسیم دو لگاریتم

الف: اگرمفسرهای هردو لگاریتم مثبت باشند، اعمال ضرب یا تقسیم، همان اعمال ضرب یا تقسیم دوعدداعشاری در یکدیگر یا بریکدیگر است.

مثال:

$$\begin{cases} \log x = ۲/۲۳۴۵ \\ \log y = ۳/۰۱۲۴ \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\log x \cdot \log y = ۲/۲۳۴۵ \times ۳/۰۱۲۴ = ۶/۷۳۱۲$$

ب: اگرمفسرهای هردو لگاریتم منفی باشد، کلگاریتمهای آنهارا درهم ضرب یا تقسیم می کنیم.

مثال:

$$\begin{cases} \log x = \bar{۱}/۴۱۲۳ \\ \log y = \bar{۴}/۲۱۴۵ \end{cases} \Longrightarrow \log x \times \log y$$

$$= \operatorname{colog} x \times \operatorname{colog} y = (۰/۵۸۷۷)(۳/۷۸۵۵)$$

$$= ۲/۲۲۴۷$$

ج: اگر یکی از مفسرها مثبت و دیگری منفی بساشد، به‌جای آنکه مفسرش منفی است کلگاریتم آن‌را قرارمی‌دهیم، سپس‌از حاصل‌ضرب یا تقسیم، کلگاریتم می گیریم.

مثال:

$$\begin{cases} \log x = ۲/۲۱۴۵ \\ \log y = \bar{۳}/۴۱۲۲ \end{cases} \Longrightarrow \log x \cdot \log y$$

$$= -(\log x)(\operatorname{colog} x) = -(۲/۲۱۴۵)(۲/۵۸۷۸)$$

$$= -(۵/۷۳۰۷) = \bar{۶}/۲۶۹۳$$

توجه: $\log ۵ = \log \frac{۱۰}{۲} = \log ۱۰ - \log ۲ = ۱ - \log ۲$

$\Longrightarrow \log ۵ = ۱ - \log ۲$ یا $\log ۲ = ۱ - \log ۵$

مسائل

مسأله ۱ - اگر $x \neq y$ و داشته‌باشیم $\log_y^x = \log_x^y$ ، ثابت کنید $xy = ۱$.

حل: $\log_y^x = \log_x^y \Longrightarrow \log_y^x = \frac{۱}{\log_y^x} \Longrightarrow (\log_y^x)^۲ = ۱$

$$\Longrightarrow \log_y^x = \pm ۱ \Longrightarrow x = y^{\pm ۱} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x = y & \text{غ ق ق} \\ x = y^{-۱} \Longrightarrow x = \frac{۱}{y} \Longrightarrow \boxed{xy = ۱} \end{cases}$$

مسأله ۲ - اگر $۳\log x = ۲$ ، x بین کدام دو عدد صحیح متوالی است؟

$$۳\log x = ۲ \Longrightarrow \log x^۳ = \log ۱۰۰$$

$$\Longrightarrow x^۳ = ۱۰۰ \Longrightarrow ۴ < x < ۵$$

مسأله ۳ - از رابطه $x \times ۵^{\log a} = a$ مقدار (x) رابیابید.

$$x = \frac{a}{۵^{\log a}} = \frac{a}{a^{\log ۵}} = a^{۱-\log ۵} = a^{\log ۲} \Longrightarrow$$

$$x = a^{\log ۲}$$

مسأله ۴ - مقـدار عددی $(۱۰)^{(۲\log \sqrt[۴]{۶} - \log ۲)}$ را حساب کنید.

$$(۱۰)^{(۲\log \sqrt[۴]{۶} - \log ۲)} = (۱۰)^{\log \sqrt{۶} - \log \sqrt{۴}} =$$

$$(۱۰)^{\log \frac{\sqrt{۶}}{۲}} = \frac{\sqrt{۶}}{۲}$$

مسأله ۵ - حدود $|x|$ را بیابید. اگر

$$\log_{\frac{۱}{۵}}(x^۲ - ۴) \geqslant -۱$$

$$\log_{\frac{۱}{۵}}(x^۲-۴)\geqslant -۱ \Rightarrow ۰<x^۲-۴\leqslant \left(\frac{۱}{۵}\right)^{-۱}$$

$$\Rightarrow ۰<x^۲-۴\leqslant ۵ \Rightarrow ۴<x^۲\leqslant ۹$$

$$\Rightarrow ۲<|x|\leqslant ۳$$

مسأله ۶ - بازاء چه‌مقادیر a معادله:

$$x^۲-۲(۱+\log a)x+۱-\log^۲ a=۰$$

دو ریشه مختلف‌العلامه دارد؟

$$\frac{c}{a}<۰ \Rightarrow \frac{۱-\log^۲ a}{۱}<۰ \Rightarrow$$

$$۱-\log^۲ a<۰ \Rightarrow \log^۲ a>۱ \Rightarrow \begin{cases}\log a>۱\\ \text{یا}\\ \log a<-۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a>۱۰\\ \text{یا}\\ ۰<a<\frac{۱}{۱۰}\end{cases}$$

مسأله ۷ - اگر $\log_۹ ۸=a$ ، عبارت

$$\log_{۲۷}۱۶\times\log_۳ ۲=?$$

$$\log_۹ ۸=a \Rightarrow \log_{۳^۲}۲^۳=a \Rightarrow \frac{۳}{۲}\log_۳ ۲=a$$

$$\Rightarrow \log_۳ ۲=\frac{۲}{۳}a$$

$$\log_{۲۷}۱۶\times\log_۳ ۲=\log_{۳^۳}۲^۴\times\log_۳ ۲=\frac{۴}{۳}\log_۳ ۲$$

$$\times\log_۳ ۲=\frac{۴}{۳}(\log_۳ ۲)^۲=\frac{۴}{۳}\left(\frac{۲}{۳}a\right)^۲=\frac{۴}{۳}\times\frac{۴}{۹}a^۲$$

$$=\frac{۱۶}{۲۷}a^۲$$

مسأله ۸ - اگر $\log ۲=۰/۳۰۱۰۳$، درسمت‌چپ عدد $\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۱۰}$ چندصفر با احتساب‌صفر ممیز وجود دارد.

$$\Rightarrow \operatorname{colog} ۲=\bar{۱}/۶۹۸۹۷$$

$$\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۱۰}=(۲^{-۲})^{۱۰}=۲^{-۲۰}$$

$$\log ۲^{-۲۰}=-۲۰\log ۲=۲۰(-\log ۲)$$

$$=۲۰(\bar{۱}/۶۹۸۹۷)=۲۰(-۱+۰/۶۹۸۹۷)$$

$$=-۲۰+۱۳/۹۷۹۴=\bar{۷}/۹۷۹۴$$

پس‌در سمت‌چپ $(۴)^{-۱۰}$ ، با احتساب‌صفر ممیز هفت‌صفر وجود دارد.

مسأله ۹ - معادله‌زیر را حل کنید.

$$۲۵^{\log x}=۵+۴(x^{\log ۵})$$

$$۵^{۲\log x}=۵+۴(۵^{\log x}) \qquad \text{فرض می‌کنیم } ۵^{\log x}=y$$

$$y^۲=۵+۴y \Rightarrow y^۲-۴y-۵=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases}y=-۱ & \text{غ ق ق}\\ y=+۵\end{cases}$$

$$۵^{\log x}=۵ \Rightarrow \log x=۱ \Rightarrow \boxed{x=۱۰}$$

مسأله ۱۰ - اگر

$$(۳)^{\frac{۱+۲+۳+۴+\dots+n}{n}}=(۴)^{\log_۲ ۹}$$

مقدار n را بیابید.

$$۱+۲+۳+\dots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

$$\Rightarrow (۳)^{\frac{n(n+۱)}{۲n}}=(۴)^{\log_۴ ۸۱} \Rightarrow ۳^{\frac{n+۱}{۲}}=۸۱$$

$$\Rightarrow ۳^{\frac{n+۱}{۲}}=۳^۴ \Rightarrow \frac{n+۱}{۲}=۴ \Rightarrow \boxed{n=۷}$$

مسأله ۱۱ - اگر $\log ۲=۰/۳۰۱۰۳$ ، عدد $(۶۲۵)^{۱۰}$ چندرقمی است

$$(۶۲۵)^{۱۰}=(۵^۴)^{۱۰}=۵^{۴۰}=\left(\frac{۱۰}{۲}\right)^{۴۰}$$

$$\log\left(\frac{۱۰}{۲}\right)^{۴۰}=۴۰\left(\log\frac{۱۰}{۲}\right)=۴۰(۱-\log ۲)$$

$$=۴۰(۱+\operatorname{colog} ۲)=۴۰(۱+\bar{۱}/۶۹۸۹۷)$$

$$=۴۰(۰/۶۹۸۹۷)=۲۷/۹۵۸۸$$

چون مفسر (۲۷) است پس‌عدد $(۶۲۵)^{۱۰}$ عددی‌است بیست وهشت رقمی.

مسأله ۱۲- حدود تغییرات x را در تابع:

$$y=\log_a(\log_a(\log_a x))$$

را باشرط $0<a<1$ بیابید.

$$\log_a(\log_a x)>0 \Longrightarrow 0<\log_a x<1$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \log_a x<1 \Longrightarrow x>a \\ \log_a x>0 \Longrightarrow 0<x<1 \end{cases} \Longrightarrow 1<x<a$$

مسأله ۱۳- معادله $x+(24)^{\log x}=(26)^{\log x}$ را حل کنید.

$$x=10^{\log x}$$

طرفین معادله‌را بر $(26)^{\log x}$ تقسیم می‌کنیم.

$$(10)^{\log x}+(24)^{\log x}=(26)^{\log x}$$

$$\left(\frac{10}{26}\right)^{\log x}+\left(\frac{24}{26}\right)^{\log x}=1 \Longrightarrow$$

$$\left(\frac{5}{13}\right)^{\log x}+\left(\frac{12}{13}\right)^{\log x}=1$$

اعداد $\frac{5}{13}$ و $\frac{12}{13}$ را درنظر می‌گیریم. چون

$$\left(\frac{5}{13}\right)^2+\left(\frac{12}{13}\right)^2=1$$

پس $\log x=2$ درنتیجه $\boxed{x=100}$

مسأله ۱۴- بیشترین مقدار $(\log_3 2)^{\sin\alpha}$ چیست؟

$$0<\log_3 2<1\ ,\ -1\leqslant \sin\alpha\leqslant +1 \Longrightarrow$$

$$\mathrm{Max}(\log_3 2)^{\sin\alpha}=(\log_3 2)^{-1}=\frac{1}{\log_3 2}=\log_2 3$$

گوشه‌ای از تاریخ ریاضیدانها

(از: کاشانی نامه، ابوالقاسم قربانی)

از نامه غیاث الدین جمشید کاشانی به پدرش

غرض که چون بنده همچنین جایی درآمد و هر کس چشم و گوش برگماشتند که معلوم کنند که این کس در چه نصاب است، هر چند روز بندگی حضرت سلطنت پناهی در حلقهٔ درس حاضر می‌شود و چون حاضر شد درس ریاضیات مقدم می‌دارند و این بنده هم حاضر شد. یکی از امتحان طلبه این است که هر کس به حلقهٔ درسی درآید غافل است از آن که چه مسأله در میان خواهد بود و اصحاب مدرسه آن را به تجدید مطالعه بلیغ کرده‌اند، چون آغاز بحث می‌شد هر بار به عنایة اللّه تعالی و یمن همت آن خداوندی این بنده دخل کاملی کرده چنانکه چند چیز که ایشان را از مطالعه معلوم نشده گفته و اعتراضات وارده بر سخن ایشان کرده و نکته‌های لطیف بیرون آورده که همه حیران مانده‌اند. پیش از آمدن این بنده اشکالی چند ایشان را واقع شده بود و در میان یکدیگر انداخته و هیچکس بیرون آوردن آن نتوانسته است. مثلا خواسته‌اند که اسطرلابی که یک گز قطر آن باشد بسازند... همهٔ مستخرجان فرمودند که به اتفاق عمل کنند... و درمانده بودند. ریاضی دانان را اشارت فرموده بودند که به قوت قوانین هندسی تحقیق و تصحیح آن بکنند. هیچ کس نتوانسته است که تحقیق آن بکند... هر چند عمل می‌کرده‌اند و فکر در آن می‌نموده‌اند راست نمی‌آمده. چون این بنده رسید در روز این مسأله در حضرت سلطنت پناهی پیش آورده‌اند و این بنده در فور و هم در مجلس تصحیح یکی از آن کرده و منشأ غلط ایشان بیان کرده و تطبیق کلام زیج بر این بیان کرد.

تاریخچه مختصر پیدایش هندسه

● محمّد هاشم رستمی

زمان دقیق پیدایش هندسه به درستی مشخص نیست. امّا مسلم است که پس از گذشت قرنها از عمر آدمی، درک مفهومهای هندسی میسر گردیده است.

ژئومتری (هندسه) از دو کلمه یونانی ژئو به معنی زمین و متراین به معنی اندازه‌گیری آمده‌است. زیرا گفته می‌شود که هندسه در اصل علم اندازه‌گیری زمین بوده است.

هرودت مورخ یونانی (سده پنجم قبل از میلاد)، پدیدآورندگان هندسه را مساحان مصری می‌داند که مجبور بوده‌اند هر سال پس از طغیان رودخانه نیل محدودهٔ زمینها را مجدداً مشخص سازند. اما تمدنهای کهن دیگر مانند بابلی، هندی و چینی هم اطلاعات هندسی زیادی داشته‌اند. از آن جمله بابلیان قضیهٔ فیثاغورث راکه در هر مثلث قائم الزاویه مربع اندازهٔ وتر مساوی مجموع مربعین اندازه‌های دوضلع دیگر است، خیلی پیش از آن که فیثاغورث به دنیا بیاید می‌دانسته‌اند.

هندسه زمان باستان موضوعی تجربی بود که نتایج تقریبی به‌دست آمدهٔ آن برای مقاصد عملی آن زمان کافی بودند مثلاً بابلیان سالهای ۲۰۰۰ تا ۱۶۰۰ ق. م. عدد π را مساوی ۳ اختیار می‌کردند یعنی محیط دایره را سه برابر قطرش در نظر می‌گرفتند و در نوشته‌های چینی نیز همین مقدار پیدا شده است و این همان مقداری است که ویتروویوس [1] معمار رومی نیز به آن داده بود. مصریان سال ۱۸۰۰ قبل از میلاد طبق نوشته‌های پاپیروس رایند که از یکی کهنترین اسناد ریاضیات مصر باستان است π را مساوی $۳/۱۶۰۴ \simeq \left(\frac{۱۶}{۹}\right)^{۲}$ می‌گرفته‌اند که این مقدار با توجه به آن زمان، از دقت جالبی برخوردار است.

خلاصه، هندسهٔ پیشینیان مجموعه‌ای بود از قواعدی که از طریق آزمایش، بررسی شباهتها و حدسها به‌دست آمده بود امّا این قواعد هیچ‌گونه ارتباطی به یکدیگر نداشتند و هیچ‌کس حتی حدس هم نمی‌توانست بزند که مجموعهٔ این قواعد را از عّده کمی قاعده (اصول) بتوان نتیجه گرفت. بنابراین هندسه در مصر و بابل به معنی واقعی کلمه علم نبود بلکه انبانی بود پر از قواعد محاسبه. تا آنکه حدود هفت سده ق. م. درهای علم برروی بابلیان و مصریان مسدود گردید و مشعل دانش به‌دست یونانیان سپرده شد. یونانیان و بیش از همه تالس (۶۲۵ - ۵۴۵ق. م.) اصرار داشتند که احکام هندسی نه از راه آزمایش و خطا بلکه از راه استدلال قیاسی باید ثابت گردند. (تالس خورشید گرفتگی سال ۵۸۵ ق. م. رانیز پیش‌بینی کرد و بدین سبب نیز مشهور است.)

تالس با اطلاع از محاسبات ریاضیات مصری و بابلی ضمن تلاش برای مشخص ساختن نتایج درست از نادرست نخستین هندسهٔ منطقی را بنا نهاد.

نظم بخشیدن به هندسه و تابع اصول سازی آن که با تالس شروع گردید توسط فیثاغورث و شاگردانش به مدت دو قرن ادامه یافت. فیثاغورث (۵۶۹ - ۵۰۰ ق. م.) خود مدتها در مصر بسر برد و در خدمت کاهنان مصری به شاگردی پرداخت و اطلاعات و معتقدات بسیاری کسب کرد و از آنجا روانهٔ بابل شد و دوران شاگردی را از نو آغاز نمود. آنگاه به وطن بازگشت و در جزیرهٔ کروتون [2] در ایتالیای جنوبی مکتب اخوتی دایر نمود تا بتواند مسائل عالی ریاضیات و نظریه‌های فیزیکی و اخلاقی را تدریس کند و پیشرفت دهد. چنانکه مشهور است بین اروپاییان فیثاغورث نخستین کسی بود که در این نکته اصرار ورزید که در هندسه باید ابتدا اصول (متعارفی و موضوع) را معین کرد و آنگاه به اتکای آنها روش استنتاج متوالی را پیش گرفت و با این روشن استدلال پیشرفت نمود (مثل زمان حاضر). بدین ترتیب اروپاییان فیثاغورث رانخستین کسی می‌دانند که استدلال را وارد ریاضیات کرد.

سقراط ریاضی‌دان (با طبیبی به همین نام اشتباه نشود) که از

پیروان مکتب فیثاغورث بود در حدود سال ۴۰۰ ق. م. پی ریزی منظم هندسه مسطحه را در کتابی به نام اصول به انجام رسانید که طبق بررسیهای انجام شده مطالب این کتاب قسمت اعظم مطالب کتابهای اول تا چهارم اقلیدس را که یک قرن بعد منتشر گردید در برداشته است.

بدین ترتیب استخراج منظم قضایا از راه اثبات از مشخصات ریاضیات یونانی و کاملاً تازه بوده‌است گو اینکه طبق بررسیهایی که اخیراً به عمل آمده مشخص گردیده است که بابلیان نخستین کسانی بوده‌اند که لزوم استدلال در ریاضیات را حس نموده‌اند و این موضوع خود یکی از بزرگترین ترقیاتی است که در ریاضیات انجام گرفته است. امّا یونانیان دربارهٔ پیشگامان خود سخاوت بخرج نداده و در این مورد نامی از آنان نبرده‌اند.

«هر کس هندسه نمی‌داند وارد نشود» جمله‌ای است نوشته شده بر سر در آکادمی علوم و فلسفه افلاطون بزرگترین مرکز آموزش ریاضی آن زمان که در حدود سال ۳۸۷ ق. م. بنا نهاده شد، که این جمله خود اهمیت ریاضیات و به خصوص هندسه را نزد یونانیان باستان بخوبی نشان می‌دهد.

افلاطون در کتاب جمهوری خود می‌نویسد «مطالعه ریاضیات دستگاهی ذهنی را توسعه می‌دهد و به کار می‌اندازد که ارزش آن از هزار چشم بیشتر است زیرا که درک حقیقت فقط از راه ریاضی میّسر است.» با وجودی که افلاطون شخصاً ریاضیدان نبود امّا او را ایجاد - کنندهٔ ریاضی‌دانان نامیده‌اند زیرا وی بسیاری از ریاضیدانانی را که هزاران بار از نظر ریاضی بر او تقدّم فضل داشتند وادار به ابداعات ریاضی واقعی کرد. تأثیر افلاطون بر ریاضی‌دانان مشکلاتی هم برای ریاضیات و به‌خصوص هندسه به‌وجودآورد زیرا بنابه نوشتهٔ دکتر اریک تمپل‌بل نویسنده کتاب ریاضی‌دانان نامی که خود از ریاضی‌دانان بزرگ است، حکومت مستبدانه افلاطون برهندسه بیش‌از بیست قرن طول کشید و تنها ۱۹۸۵ سال بعداز مرگ افلاطون بااختراع هندسهٔ تحلیلی توسط دکارت، هندسه توانست از زیر این بارگران شانه خالی کند. البته دانشمندانی چون ارشمیدس (۲۱۲ تا ۲۸۷ ق. م.) هم بودند که دنبال افکار استبدادی افلاطون نرفتند (ارشمیدس اندکی بعد از آن که اقلیدس در دانشگاه اسکندریه به تدریس پرداخت برای تحصیل به آنجا رفت و پس از تحصیل به سراکیرز بازگشت) و بدین علت شاهکارهای زیادی در ریاضی به وجودآوردند. ارشمیدس دانشمندی به معنی واقعی کلمه متجدد بود به طوری که ۲۰۰۰ سال قبل از نیوتن و لایب‌نیتز موفق به اختراع حساب انتگرال شد و حتی می‌توان او را از پیشقدمان فکر ایجاد حساب دیفرانسیل دانست. اگر ریاضیدانان و دانشمندان یونانی بجای تبعیت از اقلیدس و افلاطون و ارسطو، از روش ارشمیدس پیروی می‌کردند به آسانی می‌توانستند دوران جدید ریاضیات را که همراه با دکارت (۱۶۵۰ - ۱۵۹۶ م) و نیوتن در قرن هفدهم شروع می‌شود و عصر فیزیک جدید را که گالیله ۱۶۴۲ - ۱۵۶۴ م) واضع آن است لااقل دو هزار سال جلو بیندازند.

اقلیدس (۳۵۰ - ۲۷۶ ق .م.) که شاگرد مکتب افلاطون بود، روش قاطع هندسه یونانی و نظریه اعداد را در کتاب اصول[3] که در سیزده جلد تدوین شده‌بود منتشر ساخت که در قرن پانزدهم وقتی ماشین چاپ اختراع گردید، جزو اولین کتابهایی بود که به چاپ رسید. شاهکاراقلیدس مدون ساختن و تنظیم کردن هندسه بود. پیش از اقلیدس ریاضیدانان برجسته‌ای چون تالس و فیثاغورث دربارهٔ هندسه کارهای زیادی انجام داده‌بودند امّا آن را مدّون نساخته‌بودند. اقلیدس کارهای پیشینیان را گردهم آورد و خود به آن مطالبی افزود و همه را برمبنای اصول (اصول متعارفی و اصول موضوع) چنان مرتب و منظم کرد که قرنها بهترین نمونهٔ کار علمی بود. وی تجارب فیثاغورسیان را در کتابهای اول تا چهارم و هفتم و نهم، نتایج کارهای آرکیتاس (۴۲۸ ـ ۳۴۷ ق. م.) را در کتاب هشتم، کارهای ائودوکس (۴۰۸ ـ ۳۵۵ ق.م.) را در کتابهای پنجم و ششم و دوازدهم و کارهای تئه‌تتوس را در کتابهای دهم و سیزدهم گردآورده‌است.

آرکیتاس، اهل تارانت، ریاضیدان، منجم، فیلسوف و... بود و تمام علوم و فنون زمان خود را می‌دانست. وی دست به اختراعات زیادی زده‌بود. آرکیتاس در سال ۴۳۸ ق.م. طی حادثه‌ای در دریا غرق شد. ائودوکس[4] - اهل کنید، طبیب، منجم، قانونگذار، ریاضیدان برجسته‌ای بود که افکار علمی او چند قرن جلوتر از معاصرانش بود. وی مانند گالیله و نیوتن هرگونه بحث و اظهار نظر را در مورد جهان خارجی که به‌وسیله مشاهده و تجربه قابل تحقیق نبود بیهوده می‌دانست و از آنها اجتناب می‌کرد. ائودوکس دوست صمیمی افلاطون بود.

کتاب اصول اقلیدس آنچنان به طور کامل جایگزین تلاشهای پیشینیان در شناسانیدن هندسه گردید که کمتر نشانه‌ای از آن کوششها

به‌جای ماند. روش اصل موضوعی که اقلیدس به‌کار برد الگویی است برای آنچه که ما امروز ریاضیات محض می‌نامیم و این روش او متجاوز از ۲۰۰۰ سال برهندسه مسلط بود. محض به معنی اندیشه محض است، هیچ تجربه عینی برای تحقیق درستی احکام لازم نیست تنها باید مراقب استدلال در اثبات قضایا بود.

کاربزرگ اقلیدس آن بود که با انتخاب چند اصل ساده که بدون هیچ توجیهی پذیرفتنی بودند توانست ۴۶۵ گزاره را که بسیاری از این گزاره‌ها پیچیده هم بودند و به طور شهودی مسلم و بدیهی نبودند نتیجه بگیرد. مفروضاتی را که اقلیدس به‌عنوان اصول هندسه خویش پذیرفت مدتها بود که صورت حقایق مسلم و غیرقابل انکاری را پیداکرده بودند که آدمی توانسته‌بود به اتکاء هوش فوق‌العاده خود آنها را به‌عنوان جوهر واقعی تمام اشیای مادی کشف کند.

یک دلیل برزیبایی کار اقلیدس این است که توانست این همه را از آن اندک نتیجه بگیرد.

یکی دیگر از یونانیانی که آثارشان در ریاضیات بعد از قرن هفدهم مؤثر واقع شد آپولونیوس (۲۶۰ - ۲۰۰ ق.م.) است. آپولونیوس هندسه را به مفهومی که اقلیدس در نظر می‌گرفت تا جایی پیش برد که قابل قیاس با آنچه اقلیدس باقی گذارده بود نیست. آپولونیوس بین هندسه‌دانان نوع خویش در اطلاع برهندسه خالص نظیری نیافت مگر در قرن نوزدهم که اشتاینر (۱۸۶۳ - ۱۷۸۶) را می‌توان با وی مقایسه کرد. (آثار اشتاینر باوجود همه زیبایی و لطفی که دارند به علت تعصب وی که می‌خواست هندسه را به کلی از آنالیز جداسازد فراموش شده‌اند.)

پس از اقلیدس حدود ۲۰۰۰ سال در زمینهٔ هندسهٔ اقلیدسی کاری چندان مهم وجدی انجام نگرفت. یکی از کارهای انجام شده شرحی است که پروکلوس (۴۸۵ - ۴۱۰ م) برکتاب اصول اقلیدس نوشته‌است که قسمت اعظم اطلاعات کنونی ما در مورد هندسه از این کتاب است. تا آنکه باکشف هندسهٔ نااقلیدسی در اوایل قرن نوزدهم توسط گائوس (۱۸۵۵ — ۱۷۷۷) و یانوش بویوئی (۱۸۶۰ - ۱۸۰۲) و لوباچفسکی (۱۸۵۶ - ۱۷۹۳) بیست سال آخر قرن نوزدهم بسیاری از ریاضیدانان احساس نمودند که لازم است استخوان بندی منطقی استدلالهای هندسه اقلیدسی را روشن و واضح سازند و آنها را از قید و بند توجه به الهام و اشراق و بدیهیات فارغ سازند امّا پیش از هیلبرت هیچکس موفق به اجرای این برنامه آن هم با این همه دقت و روشنی نشده بود. داوید هیلبرت (۱۹۴۳ - ۱۸۶۲) در کتابش به‌نام مبانی هندسه که در سال ۱۸۹۹ منتشر شد تعاریف هندسه اقلیدسی را روشن ساخت و شکافهای موجود دربرخی از استدلالهای اقلیدس را پرکرد و اصول جدیدی به آن افزود و هندسهٔ اقلیدسی زمان حاضر را تدوین نمود. البته در برخی موارد تغییراتی در این هندسه نیز داده‌شده و اصلاحاتی صورت گرفته است.

علاوه برهیلبرت لازم است از مورتیس پاش، م. پیری، هـ - ورونز، اُ. وبلن، ربینسون، ا. و. هنتینگتن و فوردر که تلاش نموده‌اند تا بنیاد محکمی برای هندسه اقلیدس بریزند نیز نام ببریم.

منابع

۱- ریاضیدانان نامی. اریک تمپل بل. ترجمه حسن صفاری

۲- هندسه اقلیدسی و نااقلیدسی. ماروین - جی گرینبرگ. ترجمه م - هـ - شفیعیها

۳- کتب هندسهٔ دبیرستان - وزارت آموزش و پرورش

۱- Vitruvius ۲- Crotone ۳- Elements ۴- Eudoxe

از نامهٔ ژاکوبی به لژاندر

با مسرت گزارش آقای پواسون را راجع به اثرم خواندم و تصور می‌کنم از آن بسیار راضیم... اما آقای پواسون نمی‌باید عبارت نسبتاً خام آقای فوریه را، که آبل و مرا برای نپرداختن به کار جریان حرارت مورد سرزنش قرار داده، تکرار می‌کرد.

راست است که آقای فوریه چنین اندیشیده که هدف اصلی ریاضیات منفعت عام و فایده‌اش توضیح پدیده‌های طبیعی است. اما فیلسوفی چون او باید دانسته باشد که تنها هدف علم تجلیل روح بشری است. و از این لحاظ موضوعی در نظریهٔ اعداد، به ارزش مسأله‌ای در مورد دستگاه جهان است.

(Collected Works of Jaccobi vol. 1.p. 454)

منطق قدیم و ریاضیات

● غلامرضا یاسی‌پور

همچنان که موضوع جمال شناسی را «زیبایی» و موضوع اخلاق را «خیر» معین می‌کند موضوع منطق را «صدق» مشخص می‌نماید. «فرگه»

شیخ الرئیس ابوعلی سینا در کتاب اشارات و تنبیهات خود در فصل مربوط به قول شارح و معرف در نهج اول در غرض از منطق چیزی شبیه به این مضمون می‌گوید که :

آنچه از منطق اراده می‌شود این است که منطق آلت قانونی‌ای است که مراعات آن آدمی را از گمراهی در فکر ممانعت می‌کند.[1]

و قطب الدین شیرازی در کتاب درّة التاج چنین می‌گوید که :

علم منطق شناختن معنیهایی است که از آن معانی رسیدن به انواع علوم مکتسب ممکن باشد.

و در جای دیگر چنین که :

اما علم منطق که حکیم ارسطاطالیس[2] آن را مدون کرده است و از قوت به فعل آورده، مقصور است بردانستن کیفیت دانستن چیزها، و طریق اکتساب مجهولات.

شیخ اشراق در حکمة الاشراق خود در فایدهٔ منطق چنین مقرر می‌کند که :

من خود به آنچه یافته‌ام باور دارم واز لحاظ خود نیازی به برهان و استدلال ندارم و اگر استدلال و برهانی اقامه کرده‌ام، درمقام تعلیم کرده‌ام.

در فرهنگ «اخوان الصفا» منطق با ریاضیات پیوسته است، چه همان گونه که ریاضیات آدمی را از محسوس به معقول رهنمون است، منطق نیز نقش واسطه را میان طبیعیات و مابعدالطبیعه ایفا می‌کند.

در تاریخ منطق برآنند که هندیان و یونانیان نخستین کسانی بوده‌اند که نظریه‌های منطقی را خلق کرده‌اند. ارسطو در اواخر اثری که امروزه ابطالهای سوفسطایی[3] نامیده می‌شود ظاهراً ادعا می‌کند که موضوع منطق را او به وجود آورده است. اما به نظر نمی‌رسد که این مطلب یک باره درست باشد، چه فی‌المثل افلاطون در کتاب جمهور[4] چنین می‌گوید که :

یک چیز در یک زمان، نسبت به جزء خودش، و در رابطه با همان چیز، نمی‌تواند به دو طریق متقابل عمل کند یا برآن عمل شود، یا دو چیز متقابل باشد.

و ارسطو ادعا می‌کند که محقق ترین تمام اصول عبارت از این است که :

یک صفت ثابت نمی‌تواند در یک زمان و از لحاظ یکسان به یک شیء هم متعلق باشد هم نباشد.

اصل اخیر، شکل ارسطویی قانون عدم تناقض[5] است و آدمی را وسوسه می‌کند که بگوید که ارسطو نه تنها این قانون بلکه بسیاری از نظریاتش در منطق را از پیشینیانش دریافت کرده است. با وجود این، شخص باید در مقابل این وسوسه ایستادگی کند زیرا افلاطون این نکته

را به طور گذرا بیان کرده و مدرکی در دست نیست که او، یا شخص دیگری قبل از ارسطو، کوشش در تنظیم قواعد استنتاج صحیح کرده باشد. بنابراین می‌توانیم ادعای ارسطو را بپذیریم و این سؤال را مطرح کنیم که چه چیزی او را به «خلق» منطق رهنمون شده است.

ارسطو در جملهٔ آغازگر و معروف کتاب مابعدالطبیعهٔ[6] خود چنین می‌گوید که :

تمام انسانها بالطبیعه مایل به دانستن‌اند.

و در رابطه با همین دانستن بود که دو فصل مهم ریاضیات وسفسطه در کتاب دانش بشری نوشته شد، و نیاز به تدوین منطق هم در رابطه با این دو فصل احساس شد.

یونانیان قدیم به هندسه اهمیت بسیار می‌دادند و مشهور است که بر سر در آکادمی افلاطون به زبان یونانی نوشته شده بود که : «هرکس هندسه نمی‌داند داخل نشود.» نیز همو می‌گوید :

خداوند همواره به کار هندسه مشغول است.

اما ادعای ارسطو در مورد به وجود آورندهٔ منطق، بر این مبنا قرار دارد که او اولین کسی بوده که قوانین موجود منطق را به طور دقیق تنظیم کرده است. در حقیقت ارسطو نظریهٔ قیاس[7] را، که امروزه می‌دانیم که تنها قسمت کوچکی از منطق است، تنظیم کرده، گرچه بسیاری از فلاسفهٔ شیفتهٔ آن چنین پنداشته‌اند که این نظریه قسمت اعظم (یا حتی تمام) منطق است.

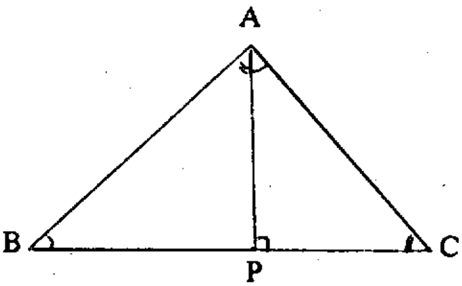
همان طور که قبلاً نیز اشاره شد یکی از انگیزه‌های مهم بررسی منطق احتمالاً از میل غلبه به پارادوکسها[8] و نمودن فساد مغالطه یا سفسطه‌ها به وجود آمده است، چه در آن زمانها تعداد زیادی پارادوکس و مغالطه کشف شده بود که بعضی از آنها مشکلاتی بودند که از استعمال (یا بد به کار بردن) زبان به وجود آمده بودند و بعضی از آنها با مشکلاتی بیشتر ریاضی سروکار داشتند. ارسطو مانند افلاطون سفسطه را دانشی توصیف می‌کند که نه واقعی بلکه ظاهری است، و همچنان که طلا می‌تواند حقیقی یا تقلبی باشد، براهین نیز می‌توانند حقیقی یا کاذب باشند. ابوعلی در رسالهٔ منطق دانشنامهٔ علایی خود در بخشی با عنوان : «وصیتها که از مغالطات ایمنی دهند» چنین می‌گوید که :

« وصیت می‌کنیم به اصلی چند، تا از غلط اندر قیاس ایمنی افتد، و حاجت نباید به درازا کشیدن سخن، و بیاد کردن همهٔ اسباب مغالطه»

مقالهٔ سوم کتاب حکمة‌الاشراق سهروردی نیز در باب مغالطات است.

اما پارادوکس به یک معنی راست کج نما و مدح شبیه به ذم یا نادرستی که هنوز نادرستی‌اش به درستی معلوم نشده، است. در این مورد به ذکر دومثال مشهور رو می‌آوریم.

مثال ۱ : هر دانش‌آموزی در ایام تحصیلش با قضیه‌ای که نام فیثاغورس را دارد، یعنی این قضیه که مجموع مربعات اضلاع کوچکتر هر مثلث قائم الزاویه برابر مربع وتر آن است، برخورد می‌کند. گرچه ممکن است که اولین کسی که این قضیه را بیان کرده فیثاغورس، ۵۶۶ ـ ۴۹۷ ق. م ، نبوده باشد، اما تصور می‌رود که او اولین کسی بوده که با استفاده از مثلثهای متشابه آن را ثابت کرده است.



درشکل فوق ABC مثلثی قائم الزاویه در A، و AP عمودی از A بر BC است. از زوایای مساوی نشان داده شده در شکل،نتیجه می‌شود که مثلثهای ABC ، PBA و PAC متشابه‌اند. دراین صورت

$$\frac{AC}{CP} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow AC^2 = BC \cdot CP$$

$$\frac{AB}{BP} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow AB^2 = BC \cdot BP$$

اکنون با جمع این دو رابطه داریم

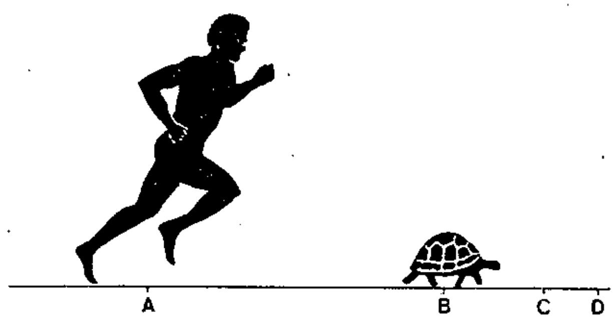
$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= BC\,(BP + CP) \\ &= BC^2 \end{aligned}$$

در وهلهٔ اول جمیع این اعمال بی‌عیب به نظر می‌رسند، اما اشکال از این جا ناشی می‌شود که قضایای مربوط به مثلثهای متشابه به نوبهٔ خود با تقسیم اضلاع به اجزاء، به طوری که m جزء از یک ضلع برابر n

جزء از ضلع دیگر باشد، ثابت شده بودند، و در این مورد فرض مأخذ این است که هر طول برحسب نسبت دو عدد صحیح قابل بیان است.

این کشف که قطر یک مربع واحد را نمی‌توان بدین سان بیان کرد پارادوکسی بود که مکتب فیثاغورسی را در هم ریخت، زیرا این پارادوکس نه تنها اثباتهای قضایای هندسی پذیرفته شده‌شان را بی‌بنیان می‌کرد بلکه این عقیده‌شان به عدد به عنوان اصل متحدکنندهٔ حساب و هندسه رانیز باطل می‌نمود. به همین مناسبت مبهوت و حیران از این پارادوکس و ترسان از این که مبادا بر ملا شود سوگند خوردند که هرگز این راز را آشکار نکنند.

مثال ۲ : پارادوکس دیگری که به وجود آمد در مورد آشیل[9]، دوندهٔ سریع، و لاک پشت بود. استدلال در این مورد چیزی شبیه زیر است: اگر آشیل از نقطهٔ A، که به فاصلهٔ معینی در عقب لاک پشت، که در نقطهٔ B قرار دارد، شروع به حرکت کند، و هر دو در یک مسیر و یک زمان و با ماکزیمم سرعتهای مربوط به خودشان حرکت کنند، زمانی که آشیل به B می‌رسد لاک پشت به C رسیده است. سپس، زمانی که آشیل به C برسد، لاک پشت به D رسیده است. در هر حالت فاصلهٔ لاک پشت از آشیل کمتر می‌شود، اما استدلال می‌تواند برای همیشه روی فواصل کوچکتر و کوچکتر ادامه یابد. بنابراین آشیل هرگز به لاک پشت نمی‌رسد، که نتیجه‌ای واضحاً دروغ است.



پارادوکسهای دیگری از مفهوم یونانی بی‌نهایت به وجود آمد، و این مطلب واضح شد که مشکلات ناشی از چنین پارادوکسهایی نیاز به توضیح طبیعت استدلال و بررسی مجدد مفروضاتی راکه استدلالات موجود بر پایهٔ آنها بنا شده بودند، ایجاب می‌کند. نظریهٔ قیاس ارسطویی مبنایی برای استدلال به دست می‌داد که به مدت بیست قرن تنها با تغییرات نسبتاً جزیی[10] باقی ماند، گرچه این نظریه از حل بسیاری از پارادوکسهایی که در آن زمان شناخته شده بودند ناتوان بود.

اساس این نظریه براین فرض است که تمام استدلالات صحیح را می‌توان در گزاره‌هایی از یک صورت بخصوص، که آن را قضیهٔ موضوع ـ محمولی[11] می‌نامیم، تحلیل کرد. مثالهای این قضیه عبارتند از :

تمام انسانها میرا هستند.
هیچ ماهی‌ای پرنده نیست.
بعضی یونانیها شریرند.
بعضی زنها مادر نیستند.

در هر حالت، و در جملهٔ مربوطه، موضوعی[12] وجود دارد که برای تعیین این که تمام اعضای یک طبقه یا صرفاً بعضی از اعضای یک طبقه، توسط فعلی به محمولی[13] مربوط شده‌اند، مسوّر شده است. اگر موضوع و محمول را به ترتیب با S و P نمایش دهیم، امکانات زیر را خواهیم داشت :

تمام S ها P اند.
هیچ S ی P نیست.
بعضی S ها P اند.
بعضی S ها P نیستند.

این امکانات با چهار مثال قبل‌مان متناظرانـد، و به ترتیب : موجبهٔ کلیه[14]، سالبهٔ کلیه[15]، موجبهٔ جزئیه[16]، سالبهٔ جزئیه[17]، و به طور کلی قضایای محصوره یا مسوّره نامیده می‌شوند.

ابوعلی در دانشنامه در مورد قضایای محصوره چنین می‌گوید که :

یا پیدا کرده بود چندیِ حکم، و این را محصور خوانند، و لفظ پیداگرِ چندی را سور[18] خوانند. و محصور چهار گونه است :

یکی آن است که حکم بر همه کرده بود به اثبات، چنان که گویی: هر چه مردم بُوَد حیوان بُوَد، یاگویی : هر مردمی حیوان است، و این راکلّیِ موجب خوانند، و سور وی لفظ هرچه و هر بود.

و دیگر آن است که حکم بر همه کرده باشد به سلب و نفی؛ چنان که گویی : هیچ مردم جاودانه نیست، و این راکلّی سالب خوانند و سور وی لفظ هیچ بود.

و سیوم آن است که حکم بر برخی کرده باشد به اثبات و هستی؛ چنان که گویی : برخی مردم دبیر است، و این را جزویِ موجب

خوانند و سور وی لفظ برخی بود.

و چهارم آن است که حکم بر برخی کرده باشد به نفی و نیستی؛ چنان که گویی : نیست برخی مردم دبیر، و این را جزوی سالب خوانند، و سور وی لفظ نیست برخی بود.

برای ارسطو هر **استدلال**[۱۹] مجموعه‌ای از چنین قضایایی، که به طریق معینی با هم مربوط شده‌اند، است. از این گذشته، ارسطو براین فرض بود که یک استدلال درست را می‌توان به استدلالات اساسی متوالی‌ای که هر یک تنها از سه قضیه ترکیب شده، و به **قیاسات**[۲۰] موسوم‌اند، تجزیه کرد. در هر قیاس، دوقضیه، **مقدمات**[۲۱]، و سومی **نتیجه**[۲۲] را تشکیل می‌دهند.

دراین مورد در دانشنامه چنین آمده که :

قیاس بر دوگونه است یکی را اقترانی خوانند و یکی را استثنایی.[۲۳]

مثالی از قیاس اقترانی یا به طور ساده قیاس می‌آوریم:

اگر تمام انسانها میراباشند.
و تمام یونانیها انسان باشند.
در این صورت تمام یونانیها میراهستند.

با به‌کار بردن S و P برای موضوع و محمول نتیجه، یعنی، «تمام یونانیها میرا هستند»، توجه می‌کنیم که مقدمهٔ اول شامل P و مقدمهٔ دوم شامل S است. P و S به ترتیب به حدکبری یا **اکبر**[۲۴] و حد صغری یا **اصغر**[۲۵]، و بنابراین، مقدمهٔ شامل P به مقدمهٔ کبری[۲۶]، یا به طور خلاصه کبری، و مقدمهٔ شامل S به مقدمهٔ صغری[۲۷]، یا به طور خلاصه صغری، معروف‌اند. حد[۲۸] «انسان» که در هریک از مقدمات ظاهر می‌شود اما در نتیجه ظاهر نمی‌شود به حد وسط یا **اوسط**[۲۹] موسوم است، و آن را با M نمایش می‌دهیم. به این ترتیب استدلال مورد بحث به صورت زیر درمی‌آید :

اگر تمام M ها P باشند.
و تمام S ها M باشند.
در این صورت تمام S ها P اند.

کار مهم و اصلی ارسطو تحقیق در تمام صورتهای ممکن منطق بود، تعداد این صورتها بسیار است، گرچه تنها، بعضی از آنها به صورتهای درست منجر می‌شوند. صورت درست را منتج[۳۰] و صورت نادرست را عقیم[۳۱] می‌گویند.

به‌عنوان مثال، قیاسی که هم اکنون مورد بحث قرار گرفت دارای صورت زیر است :

MP
SM
SP.

ابتدا، S و P می‌توانند در مقدمات مربوط به خودشان یا به عنوان موضوع یا به عنوان محمول ظاهر شوند، در حالی که حد وسط متناظر با جزء دیگر مقدمه است. (به خاطر داشته باشید که S و P به ترتیب موضوع و محمول نتیجه‌اند.) این مطلب چهار ترکیب، که به **چهار شکل قیاس**[۳۲] یا **اشکال اربعه**[۳۳] موسوم‌اند، را به دست می‌دهد :

شکل	I	II	III	IV
مقدمهٔ کبری	MP	PM	MP	PM
مقدمهٔ صغری	SM	SM	MS	MS
نتیجه	SP	SP	SP	SP

در هر یک از این اشکال، قضایا می‌توانند کلیه یا جزئیه، موجبه یا سالبه باشند. به این ترتیب ۲۵۶ (= ۴ × ۴ × ۴ × ۴) قیاس ممکن وجود دارد، گرچه بسیاری از آنها استدلالات نادرستی هستند که در آنها نتیجه از مقدمات به‌دست نمی‌آید. در شکل I ، مثالی از چنین قیاسات نادرستی عبارت است از :

اگر هیچ M ی P نباشد،
و تمام S ها M باشند،
در این صورت بعضی S ها P اند.

به طور کلی شرایط عمومی انتاج اشکال عبارت از : سالبه نبودن هر دو مقدمه و جزئیه نبودن هر دو مقدمه است و شرایط خاص هر شکل را باید در کتب مفصل منطق پی گرفت.

به علت این که قیاس ارسطویی ارتباط کمی با استدلال ریاضی دارد آن را در مطالب مربوط به ریاضیات پی‌نمی‌گیریم، اما اهمیت دارد که به خاطر داشته باشیم که عمل دسته بندی کردن تمام صورتهای درست قیاس، آن قدر مهم بود که ادعای ارسطو را راجع به این که

مؤسس علم منطق است به حق توجیه کند.

اما پیش از آن که کار ارسطو را ترک کنیم، باید به ذکر مربع تقابل[۳۴] که ارتباطی با اثبات در ریاضیات دارد بپردازیم. با معلوم بودن چهار نوع قضیهٔ :

موجبهٔ کلیه	(تمام S ها P اند)
سالبهٔ کلیه	(هیچ S ی P نیست)
موجبهٔ جزئیه	(بعضی S ها P اند)
سالبهٔ جزئیه	(بعضی S ها P نیستند)

و درنظر گرفتن یک S و P در سراسر عملیات، واضح می‌شود که این قضایا در روابط بخصوصی با یکدیگر قرار می‌گیرند، اما در بارهٔ این روابط چه می‌توان گفت؟

دو قضیه را متناقضان[۳۵] می‌گویند اگر چون یکی از آن دو راست باشد دیگری دروغ باشد و برعکس. دراین مورد تفتازانی در تهذیب ـ المنطق چنین می‌گوید که :

تناقض، اختلاف دو قضیه و چنان است که از صدق یکی از آنها کذب دیگری ذاتاً لازم شود، و برعکس[۳۶].

به‌عنوان مثال، قضایای زیر را در نظر می‌گیریم :

تمام انسانها دروغگویند.	(موجبهٔ کلیه)
بعضی انسانها دروغگو نیستند.	(سالبهٔ جزئیه)

در این صورت اگر قضیهٔ اول راست باشد، قضیهٔ دوم باید دروغ باشد و برعکس. نیز اگر قضیهٔ اول دروغ باشد، قضیهٔ دوم باید راست باشد، و برعکس. به این ترتیب این قضیه‌ها متناقضند.

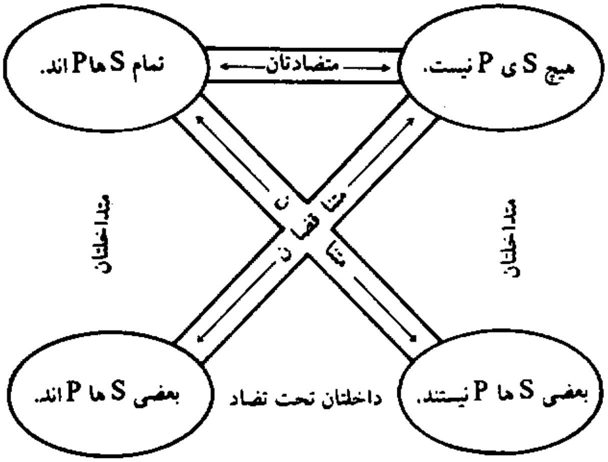
دو قضیه را متضادتان[۳۷] می‌گویند اگر هر دو نتوانند راست باشند، اما ممکن باشد که هر دو دروغ باشند. به این ترتیب قضیهٔ متضاد:

تمام انسانها دروغگویند (موجبهٔ کلیه)

قضیهٔ :

هیچ انسانی دروغگو نیست (سالبهٔ کلیه)

است، چه این دو قضیه نمی‌توانند هر دو راست باشند، اما در صورتی که بپذیریم که بعضی، اما نه تمام، انسانها دروغگویند، هر دو دروغند. این روابط را می‌توانیم توسط نموداری نمایش دهیم، گرچه (تا آنجا که می‌دانیم) ارسطو چنین نکرده است.



ضلع بالای «مربع» متضادها و اقطار آن متناقضها را نشان می‌دهند، و اضلاع باقی ماندهٔ آن روابط بین :

تمام S ها P اند.	و	بعضی S ها P اند.
هیچ S ی P نیست.	و	بعضی S ها P نیستند.
بعضی S ها P اند.	و	بعضی S ها P نیستند.

را بیان می‌کنند. ارسطو چنین فرض کرده که در دو حالت اول فوق، قضیهٔ دوم (قضیه‌های پایین نمودار) را می‌توان از قضیهٔ اول، استنتاج کرد، و بعدها، منطقیون نام متداخلتان[۳۸] را به این رابطه دادند. اما، ممکن است به این فرض، باتوجه به‌این مطلب که «مجموعهٔ تمام S ها» ممکن است تهی باشد، اعتراض کرد. نیز ارسطو مطرح کرده که از رابطهٔ بین

بعضی S ها P اند. و بعضی S ها P نیستند.

که بعداً به داخلتان تحت تضاد[۳۹] معروف شده، آگاه است.

در اینجا سؤال دیگری مطرح می‌شود و آن این است که : معمولاً چه وقت مجاز است که در یک قضیه S و P را با یکدیگر تعویض

کنیم؟ عکس یا عکس مستوی[40] قضیه‌ای به صورت SP همان قضیه است که درآن P و S باهم عوض شده‌اند، و این تعویض در حالت کلی، تنها در قضیه‌ای که به‌یکی از دو صورت زیر باشد مجاز است:

هیچ S ی P نیست. (سالبهٔ کلیه)

بعضی S ها P اند. (موجبهٔ جزئیه)

در این مورد منطقیون اسلامی و فی‌المثل تفتازانی در تهذیب، عکس مستوی را تعویض طرفین قضیه بابقای صدق وکیف تعریف کرده‌اند[41] به این ترتیب عکس موجبهٔ کلیه را موجبهٔ جزئیه و عکس موجبهٔ جزئیه را موجبهٔ جزئیه و عکس سالبهٔ کلیه را سالبهٔ کلیه دانسته‌اند و برآنند که سالبهٔ جزئیه عکس لازم الصّدق ندارد و در این‌باره این مثال را می‌آورند که عکس : «بعضی انسانها ریاضیدان نیستند»، «بعضی ریاضیدانها انسان نیستند» می‌شود که صد البته ناراست است.

در مورد دو صورت مجاز مذکور در فوق، فی‌المثل، اگر راست باشد که :

هیچ پرنده‌ای پستاندار نیست.

در این صورت این نیز راست است که :

هیچ پستانداری پرنده نیست.

نیز، اگر

بعضی یونانیها دروغگو باشند.

در این صورت

بعضی دروغگوها یونانی‌اند.

و در مورد صور دیگر، مثلاً، در حالت موجبهٔ کلیه، فی‌المثل،

تمام انسانها حیوان هستند.

ممکن نیست که جای انسان و حیوان را با هم عوض کنیم و قضیه‌ای راست به‌دست آوریم، و همین مطلب در مورد حالت سالبهٔ جزئیه برقرار است. البته این حرف بدین‌معنی نیست که هیچ گاه ممکن نیست که در یک موجبهٔ کلیه جای S و P را تعویض کنیم ــ فی‌المثل، تمام S ها S اند را بررسی کنید ــ اما نمی‌توانیم این عمل را خود به خود، آن گونه که در حالت سالبهٔ کلیه یا موجبهٔ جزئیه برقرار است، انجام دهیم.

درمقابل عکس مستوی عکس نقیض[42] را داریم که در مورد آن ، بنا بـه قول تفتازانی، « تبدیل نقیض طرفین قضیه با بقای صدق و کذب[43]» می‌کنیم.

اهمیت دارد که به این موضوع توجه کنیم که نظریهٔ قیاس ارسطویی اساساً منطق طبقات[44] است که در آن شخص باید به جای «متغیرهای» S و P طبقات اشیایی چون تمام انسانها، بعضی یونانیها، دروغگوها، پستانداران، و غیره، یا گاهی، یک شیء منحصر به فرد (که آن را به‌عنوان طبقه‌ای که یک عضو دارد در نظر می‌گیریم) را قرار دهد. امامعروف است که منطقی باستانی یا منطق رواقیونی[45]، که توسط زنون[46]، ۴۹۵ ـ ۴۳۵ قبل از میلاد، تأسیس شده، وجود داشته که اساساً منطق قضایا[47] بوده و، چنان که، می‌تواند مقدم حقیقی منطق امروزی به شمار رود.

منطق رواقی از منطق مکتب مگاری[48]، که توسط اقلیدس[49] ۴۳۰ ـ ۳۶۰ قبل از میلاد، تأسیس شده بود، به وجود آمد. این اقلیدس شاگردی به نام اوبولیدس[50] داشت که بیشتر معروفیتش به خاطر کشف تعدادی پارادوکس است که قابل توجه‌ترینشان معروف به «پارادوکس کاذب یا دروغگو[51]» که صورت امروزی آن:

این جمله دروغ است.

می‌باشد، است. فرض می‌کنیم که این جمله راست باشد، در این صورت راست است که راست نیست، به همین ترتیب فرض می‌کنیم که این جمله دروغ است، در این صورت نتیجه می‌شود که راست است. (این پارادوکس بسیار معروف شد و حتی در اولین نامه‌ای که پولس مقدس[52] به تیتوس[53] نوشته نیز ذکر شده است.) «پارادوکس کاذب» از این حقیقت که جملهٔ آن به طریق خاصی به خودش برمی‌گردد ناشی شده است. در این مورد تنها در سالهای اخیر بوده که تفاوت بین زبان[54] و ماورای زبان[55] که در آن شخص زبان را مورد بحث قرار می‌دهد، آشکار شده است.

البته در بسیاری از حالات بازگشت به خود[56] پارادوکسی روی نمی‌دهد. فی‌المثل، از جملهٔ فارسی زیر هیچ اشکالی به وجود

نمی‌آید:

این گزاره دقیقاً شامل هفت کلمه است.

اما ممکن است شخص سؤال کند که در صورتی که این جمله به زبان چینی ترجمه شود چه اتفاقی می‌افتد.

متأسفانه، تنها قسمتهایی از نوشته‌های مگاری ـ رواقی باقی مانده و بنابراین چنین پیش آمده که منطق قدیم به مقدار زیادی به معنی منطق قیاسی ارسطویی باشد.

این اقلیدس را، که نامش بیش از یک بار در نوشته‌های افلاطون ذکر شده، نباید با مؤلف کتاب **مقدمات یا اصول**[57]، یعنی اقلیدس[58]، ریاضیدان یونانی، که مکتب اسکندریه را در حدود ۳۰۰ قبل از میلاد به وجود آورد، اشتباه کرد (کاری که بعضی از فلاسفهٔ قرون وسطی کردند).

مقدمات بالغ بر سیزده جلد می‌شود که از آن نه جلد به هندسهٔ مسطحه و فضایی و چهار جلد به حساب اختصاص دارد. بسیاری از مواد آن، تنظیم سیستماتیک ریاضیاتی است که پیش از او معلوم بوده، و در حقیقت کار بیش از یک فرد است. (حتی مطرح شده که چندین نویسنده عمداً از نام اقلیدس استفاده کرده‌اند، مانند نام بورباکی[59] که در ایام اخیر چنان به کار رفته است.)

دقیقاً مشخص نشده که قصد اقلیدس از نوشتن مقدمات چه بوده‌است، اما نتیجهٔ مهم آن به‌عنوان «بزرگترین کتاب درسی تمام ایام» تعریف شده است، و در حقیقت، از این بازماندهٔ بیش از ۲۰۰۰ سال قبل، در قرن اخیر نیز به طور منظم در مدارس استفاده شده است.

در این کتاب، کار با **۲۳ تعریف**[60]، **۵ اصل موضوع**[61] و **۵ اصل متعارفی**[62] آغاز، و از آنها قضایای[63] بسیاری استنتاج می‌شود. این کار تمثیل بسیار ابتدایی‌ای از آنچه امروزه روش آکسیوماتیک[64] نامیده می‌شود و با پیشرفتهای جدید منطق ریاضی قرابت بسیار دارد، می‌باشد. در این جا از آوردن فهرست تمام تعاریف و... خودداری می‌کنیم، اما یکی دومثال، از جمله مثال مربوط به اصل توازی را، که بعداً به آن رجوع خواهیم کرد، به دست می‌دهیم.

مثالهایی از تعاریف:

نقطه چیزی است که جزء ندارد.

خط طولی بدون پهناست.

سطح چیزی است که تنها طول و عرض دارد.

در این‌جا بد نیست که نگاهی به تعاریف ابوریحان بیرونی دانشمند بزرگ اسلامی داشته باشیم. این دانشمند در کتاب **التّفهیم** خود که کتابی مقدماتی است و برای تدریس به ریحانه بنت الحسین الخوارزمی که بنا به قول ابوریحان خواهندهٔ او بوده به «طریق پرسیدن و جواب دادن برروئی که خوب‌تر بُوَد و صورت بستنِ آن آسان‌تر[65]» نوشته شده، در مورد سطح و خط و نقطه به ترتیب چنین می‌گوید که:

سطح چیست؟ جسم ناچار بی‌نهایت نبود به همه سوها، و نهایت او سطح است و این نام را از بام خانه گرفتند. و نیز او را بسیط گویند یعنی گسترده ازیراک سطح برجسم گسترده است.

خط چیست؟ اگر بسیط را نهایت باشد آن نهایتِ او ناچار خطی باشد و آن خط طولی باشد بی‌عرض.

نقطه چیست؟ چون خط را نهایت باشد نهایتِ او نقطه بُوَد و نقطه کمتر از خط باشد به یک بعد و خط را جز طول نیست.

اما، مثالهایی از اصول موضوع:

تمام زوایای قائمه برابرند.

اگر خط راستی دو خط مستقیم را قطع کند و زوایای داخلی واقع در یک طرف آن کمتر از دو قائمه باشد، دراین صورت دو خط مستقیم به طور نامحدود رسم شده، یکدیگر را در همان طرف تلاقی می‌کنند.

مثالهایی از اصول متعارفی:

اگر مساویها به مساویها اضافه شوند، نتایج مساویند.

کل از جزء بیشتر است.

در واقع، اصل موضوع دومی که نقل شد، پنجمین اصل موضوع

اقلیدس، و موسوم به **اصل توازی**[۶۶] است، زیرا می‌توان نشان داد که این اصل معادل اصل زیر می‌باشد:

> از یک نقطهٔ معلوم خارج یک خط مستقیم معلوم، تنها یک خط می‌توان موازی آن خط مستقیم رسم کرد.

هم این اصل موضوع، هم اصل متعارفی «کل از جزء بیشتر است» تا زمانی که طرحهای ریاضی قرن نوزدهم، سازمانهای[۶۷] هندسی‌ای به دست دادند که در آنها راست[۶۸] نبودند، به‌عنوان حقایق مورد قبول در نظر گرفته می‌شدند.

از موارد مهم قابل اشاره یکی این است که کتاب مقدمات اقلیدس از تمرین خالی بود، گویی اقلیدس جمیع مشکلات را بر طرف و تمام مسائل را حل کرده چیزی برای دیگران باقی نگذاشته بود.

به هرحال، اکنون آنچه را که منطق قدیم[۶۹] نامیدیم تحت سه عنوان اصلی می‌آوریم:

(۱) نظریهٔ قیاس ارسطویی
(۲) منطق مگاری ـ رواقی
(۳) مقدمات اقلیدس

عنوان (۱) نظریهٔ جامعی بر مبنای قیاس به دست می‌دهد که برای بیست قرن تأثیر عظیمی بر فلسفه و الهیات داشت، (۲) اولین کوشش در تحلیل پارادوکسها را به‌دست می‌دهد، اما از این موضوع چیز نسبتاً کمی باقی می‌گذارد، و (۳) نمایشی جامع و سیستماتیک و به صورت آکسیوماتیک از اغلب مطالبی که در قرون باستانی از هندسه و حساب شناخته شده بودند به‌دست می‌دهد.

در انتهای مقال ابتدا دو سخن می‌آوریم یکی از سلطان الحکما خواجه نصیر طوسی و از آغاز کتاب اساس الاقتباس او، که تحت عنوان: «ابتدای سخن در منطق» در تعریف و فایدهٔ منطق چنین می‌گوید که:

> و نه هرکه کاری کند داند که چه می‌کند یا چه می‌باید کرد. بلک بسیار کسان باشند که درکارها شروع کنند بر سبیل خبط. و هم چنین باشد حکم کسانی که طلب علوم کنند و بر صناعت منطق واقف نباشند.
>
> پس علم منطق شناختن معنیهایی است که از آن معانی رسیدن به انواع علوم مکتسب ممکن باشد، و آنک از هر معنی به کدام علم توان رسید.

و دیگری از معلم ثانی، ابونصر فارابی، که در آغاز فصل دوم کتاب إحصاء العلوم خود در باب منطق چنین می‌گوید که:

> صناعت منطق، به طور کلی، قوانینی را به دست می‌دهد که پیروی از آنها باعث استقامت خرد می‌گردد، و در مواردی که ممکن است در بعضی از معقولات برای آدمی اشتباهی پیش آید او را به راه درست و حقیقت رهنمون می‌شود.

و سپس قول پیرس[۷۰] را متذکر می‌شویم که براین است که «در حدود صد تعریف از منطق در دست است» و با این همه همچنان در اول وصف آن مانده‌اند، و بعد قول صدرالمتألهین را در تعریف منطق می‌آوریم که:

> «منطق میزان ادراکی‌ای است که افکار را، برای دانستن صحیح از فاسدشان، با آن وزن می‌کنند.[۷۱]»

و سرانجام، و با این همه، با این که به این قول که:

> «منطق بررسی استدلال است»

باور داریم با گفتهٔ شیخ محمود شبستری، در گلشن راز، سخن مان را ختم محمود می‌کنیم:

بود فکر نکو را شرطْ تجرید پس آنگه لمعه‌یی از نور تأیید
هر آن کس را که ایزد راه ننمود ز استعمال منطق هیچ نگشود

* * *

۱. المراد من المنطق ان یکون عندالانسان آلة قانونیة تعصمه مراعاتها عن ان یضّل فی فکره.

۲. Aristotle (ارسطو)

۳. Sophistical Refutations

۴. Republic

۵. Law of Non - Contradiction

۶. Metaphysics

۷. Theory of Syllogism

۸. Paradox

۹. Achilles

۱۰. البته منهای کارهای منطقیون مسلمان و ایرانی که تحقیقات مفصلی در این مورد کرده‌اند.

۱۱. Subject - Predicate Proposition

۱۲. Subject

۱۳. Predicate

۱۴. Universal Affirmative

۱۵. Universal Negative

۱۶. Particular Affirmative

۱۷. Particular Negative

۱۸. Quantifier حصار گرد شهر

۱۹. Argument

۲۰. Syllogisms

۲۱. Premisses

۲۲. Conclusion

۲۳. قیاس استثنایی یا Modus Ponens همان است که در منطق جدید آن را به صورت:

$$p \Rightarrow q$$
$$p$$
$$\therefore q$$

علامتی می‌کنند.

۲۴. Major

۲۵. Minor

۲۶. Major Premiss

۲۷. Minor Premiss

۲۸. Term

۲۹. Middle Term

۳۰. Valid

۳۱. Invalid

۳۲. Figure of Syllogism

۳۳. قدما در این مورد حفظ ابیات زیر را توصیه می‌کردند:

اوسط اگر حمل یافت در بر صغری و باز
وضع به کبری گرفت شکل نخستین شمار
حمل به هر دو دوم، وضع به هر دو سوم
رابع اشکال را عکس نخستین بیار

۳۴. Square of Opposition

۳۵. Contradictories

۳۶. التّناقض اختلاف القضیّتین بحیث یلزم لذاته من صدق کلّ منهما کذب الاخری، و بالعکس.

۳۷. Contraries

۳۸. Subalternations

۳۹. Sub - Contraries

۴۰. Converse

۴۱. العکس المستوی تبدیل طرفی القضیه مع بقاء الصدق و الکیف.

۴۲. Contraposition

۴۳. عکس النقیض، تبدیلُ نقیضی الطرفینِ مع بقاءِ الصّدق و الکیف.

۴۴. Logic of Classes

۴۵. Stoics

۴۶. Zenon

۴۷. Logic of Propositions

۴۸. Megarian School

۴۹. Eukleides

۵۰. Eubulides

۵۱. Liar Paradox

۵۲. St. Paul

۵۳. Titus

۵۴. Language

۵۵. Metalanguage
۵۶. Self - Reference
۵۷. Elements
۵۸. Euclid
۵۹. Bourbaki
۶۰. Definition
۶۱. Postulate
۶۲. Common Principle
۶۳. Theorems
۶۴. Axiomatic Method
۶۵. داخل گیومه از متن کتاب التفهیم است.
۶۶. Parallel Postulate
۶۷. Geometric Structure
۶۸. True
۶۹. Ancient Logic
۷۰. Charles Peirce
۷۱. المنطق قسطاس ادراکیٌ یوزن به الافکار لیعلم صحیحها من فاسدها.

منابع فارسی و عربی

۱. تاریخ ریاضیات، دیوید اسمیت، ترجمهٔ غلامحسین صدری افشار
۲. التفهیم، ابوریحان بیرونی، تصحیح جلال الدین همایی
۳. ریاضیدانان نامی، اریک تمپل بل، ترجمهٔ حسن صفاری
۴. تهذیب المنطق، مولانا سعدالدین تفتازانی
۵. اساس الاقتباس، خواجه نصیرطوسی، تصحیح مدرس رضوی
۶. احصاء العلوم، ابونصر فارابی، ترجمهٔ خدیم جم
۷. اشارات و تنبیهات، ابوعلی سینا
۸. درّة التاج، قطب الدین شیرازی
۹. حکمة الاشراق، شهاب الدین سهروردی، ترجمهٔ دکتر سجادی
۱۰. رسالهٔ منطق دانشنامهٔ علائی، ابوعلی سینا، مقدمه و حواشی: دکتر معین و محمد مشکوة
۱۱. تاریخ منطق، آ. ماکوولسکی، فریدون شایان
۱۲. اللمعات المشرقیه فی الفنون المنطقیه، صدر الدین شیرازی
۱۳. گلشن راز، شیخ محمود شبستری

منابع خارجی

14. A Profile of Mathematical Logic ,Howard Delony
15. Logic II: proof , Prepared by the Mathematics Foundation Course Team. (منبع اصلی)
16. Philosophical Logic ,Edited by P. F. Strawson.
17. Dictionary of Philosophy and Psychology , Jawes Mark Baldwin
18. Logic , John Nolt , Dennis Rohatyn
19. Symbolic Logic , Copi

ادب ریاضی

(از: التّفهیم، ابوریحان بیرونی، به تصحیح جلال الدین همائی)

یکی چیست؟

آن است که یگانگی بر او افتد و بدو نام زده شود. و از تمامی وی آن است که کمی و بیشی نپذیرد و ز حال خویش به ضرب و قسمت نگردد و اندر قوت همه عددهاست و همه خاصیتهای ایشان. و حال یکی اندر آن چیزها که شمرده شود بدو، هر چند یگانگی او نه به حقیقت باشد، و لکن از جهت نهادن مردمان یک دیگر [نیز همچنان است]. و این یکی ایستاده است میان آن عددها که از مانندهٔ او گرد آید به جمله شدن و میان آن پاره‌ها که از او کمترند. و این ایستادن او میان ایشان از بهر آن است که او چون میانهٔ معتدل راست است. اگر او را به مثل خویش زنی یا بر مثل خویش قسمت کنی هم یکی باشد. و دیگر عددها که از او بیشند هر گه که یکی ایشان را ضرب کنی بیفزایند. و قسمت کنی بکاهند. و اما اجزاها که ازو کمترند هرگاه که ضرب کنی بکاهند و که قسمت کنی بیفزایند. و یکی به میان ایشان برحال خویش است.

گروه[1]، پیدایش و کاربرد نظریه گروهها

(مورد استفاده دانش آموزان سال دوّم و سوّم ریاضی)

● حمید رضا امیری

یکی از دستگاههای مهمّ جبری و یکی از مفاهیم اساسی جبر مفهومی است که آن راگروه نامیده‌اند. در دنیای ریاضیات محض، این مفهوم یکی از مواد اصلی در ساختمان جبر مجرّد است. اصطلاح مجرّد، وابسته به طرز تفکّر و برداشت شخص می‌باشد، زیرا ممکن است مطلبی یا مفهومی به نظر شخصی مجرّد آید (کاملاً ذهنی) ولی در تعبیرات شخص دیگری واقعی و عملی جلوه کند. امّا اساساً وظیفه ریاضیات محض و به‌خصوص جبر مجرّد خلق دستگاهها و مفاهیم ریاضی به‌صورت مجرد است، که البته در اکثر موارد این دستگاهها و مفاهیم را می‌توان تعمیم داد و از کاربردهای آن در بقیه علوم استفاده کرد. یکی از این مفاهیم که امروزه در علومی چون، فیزیک ـ شیمی ـ زیست شناسی ـ نجوم و... کاربردهای با ارزشی دارد مفهوم گروه است. این مفهوم در عصرما تا حد زیادی پیشرفت کرده و اکنون به شکل یکی از شاخه‌های اصلی علم جبر در آمده است. از پایه‌گذاران جبر مجرّد و به‌خصوص نظریه گروهها شخصی است به نام اواریست گالوا[2] که نظریه خود را در ۱۹ سالگی به تقریر در آورد.

وی یکی از نوابغ ریاضیات است. گالوا در زمان خود به درس جبر با چشم تحقیر می‌نگریست و در آن خلاقیّت و ابتکاری مشاهده نمی‌کرد. او در این درس به‌دنبال روشها و خلاقیتهای بزرگ بود و همین امر باعث شد که حتی معلمین سرشناس و بزرگ زمانش نتوانند او را درک کنند. گالوا در سنّ ۲۱ سالگی در یک دوئل جان باخت و فرصت زیادی برای ادامه راهش در زمینهٔ جبر مجرّد و تئوریها و نظریه‌هایش نیافت، ولی شیوهٔ تفکّر گالوا باعث شد امروزه نظریه او یکی از مهمترین تئوریهای ریاضی به شمار آید و عمومیت داشتن این نظریه نیز موجب استفادهٔ وسیع از آن در علوم دیگر شد. مثلاً در علم شیمی، کار برد نظریه گروه بسیار عمیق و کارساز است تاجایی که در سالهای آخر دورهٔ لیسانس و حتی فوق لیسانس کار برد شیمیایی نظریه گروه در تقارن مولکولی و شیمی کوانتم به دانشجویان این رشته تدریس می‌شود.

همانطور که بعداً خواهیم دید ما برای بیان مفهوم گروه نیاز به یک مجموعه[3] و تعریف یک عمل دوتایی[4] روی این مجموعه خواهیم داشت. حال اگر در مبحث شیمی مجموعه را مجموعه‌ای از عناصر شیمیایی و عمل دوتایی را ترکیب کردن یا... تعریف کنیم و این مجموعه با عمل تعریف شدهٔ روی آن همهٔ خواص لازم برای تشکیل یک گروه (به مفهوم ریاضی) را داشته باشد در این صورت می‌توان از کلیه قوانین و قضایایی که ریاضیدانان در نظریه گروهها ثابت کرده‌اند استفاده نمود و به نتایج جالبی در علم شیمی دست یافت.

اکنون به بیان و بررسی نظریه گروهها می‌پردازیم و به طور

اختصار وارد قلم رو این شاخهٔ بسیار زیبا از ریاضیات می‌شویم.

تعریف عمل دوتایی

یک عمل دو تایی روی مجموعهٔ ناتهی A تابعی[5] است از A×A به A که به هر زوج مرتب از A × A عضو منحصر به‌فردی از A را نسبت می‌دهد به عنوان مثال اگر * یک عمل دوتایی روی مجموعهٔ A باشد، آن رابه‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$* : A \times A \to A$$
$$(a , b) \longmapsto a * b$$

مثال ۱ : عمل + روی IR به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$+ : IR \times IR \to IR$$
$$(a , b) \longmapsto a + b$$

به عنوان مثال زوج مرتب (۲− , ۴) تحت این عمل به عدد ۲=(۲−)+۴ ربط داده می‌شود.

تعریف : مجموعهٔ A را نسبت به قانون * بسته گوییم هرگاه برای هر دو عضو مجموعهٔ A مانند x و y داشته باشیم $x * y \in A$ (حاصل ترکیب هر دو عضو مجموعهٔ A تحت قانون * عضوی از مجموعهٔ A باشد).

به‌عبارت دیگر:

$$A \Leftrightarrow (a , b) \in A \times A \Rightarrow a * b \in A$$

نسبت به * بسته است.

توضیح این مطلب واجب است که با توجه به تعریف عمل، اگر لفظ عمل را بر یک قانون اطلاق کنیم یعنی تابعی متصور است مانند * از A×A به A که بسته بودن مجموعهٔ A نسبت به عمل * در تعریف عمل نهفته است. در حقیقت هرگاه می‌گوییم مجموعهٔ A همراه با عمل * مفروض است، نیازی به بررسی خاصیت بسته بودن در مجموعهٔ A نسبت به‌عمل * نمی‌باشد، زیراطبق تعریف عمل، عمل * ناچاراً به هر دو عضو از A عضوی منحصر بفرد از A را نسبت می‌دهد و این همان مفهوم بسته بودن است ولی اگر لفظ قانون بر * اطلاق شود بررسی خاصیت بسته بودن الزامی است.

در اینجا قبل از معرفی و تعریف گروه به بررسی چند خاصیت مهمّ که اساس و پایه‌های یک گروه بر آنها استوار می‌باشد خواهیم پرداخت.

خاصیت شرکت پذیری : فرض کنیم عمل دوتایی * روی مجموعهٔ A تعریف شده باشد. در این صورت می‌گوییم مجموعهٔ A نسبت به عمل * دارای خاصیت شرکت پذیری است هرگاه داشته باشیم:

$$a , b , c \in A \Rightarrow (a * b) * c = a * (b * c)$$

مثال : مجموعهٔ اعداد حقیقی IR نسبت به عمل جمع معمولی دارای خاصیت شرکت پذیری است یعنی برای هر سه عضو از این مجموعه مانند a و b و c داریم:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

مثال : مجموعهٔ اعداد صحیح Z نسبت به عمل ضرب معمولی خاصیت شرکت پذیری دارد یعنی:

$$a , b , c \in Z \Rightarrow (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

مثال : مجموعهٔ اعداد گویا Q نسبت به عمل * که به صورت زیر تعریف می‌شود خاصیت شرکت پذیری دارد.

$$\forall x , y \in Z \ , \ x * y = x + y - ۵$$

زیرا: $(x * y) * z = (x + y - ۵) * z =$

$$[(x + y - ۵) + z] - ۵ \overset{\text{شرکت پذیری } Z}{=} (x + y + z) - ۱۰ \qquad (۱)$$

$$x * (y * z) = x * (y + z - ۵) = [x + (y + z - ۵)] - ۵$$
$$\overset{\text{شرکت پذیری } Z}{=} (x + y + z) - ۱۰ \qquad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z)$$

خاصیت جابجایی : فرض کنیم عمل دوتایی * روی مجموعهٔ A تعریف شده باشد، می‌گوییم مجموعهٔ A نسبت به عمل * دارای خاصیت جابجایی است هرگاه داشته باشیم:

$$a , b \in A \Rightarrow a * b = b * a$$

مثال : مجموعهٔ اعداد حقیقی IR نسبت به عمل جمع معمولی دارای خاصیت جابجایی است یعنی برای هر دو عدد حقیقی مانند a و b داریم:

$$a + b = b + a$$

مثال: مجموعهٔ ماتریسهای ۲×۲ نسبت به عمل جمع ماتریسی دارای خاصیت جابجایی است زیرا اگر

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} , \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

دو عضو دلخواه این مجموعه باشند داریم:

$$A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (a_1 + a_2) & (b_1 + b_2) \\ (c_1 + c_2) & (d_1 + d_2) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (a_2 + a_1) & (b_2 + b_1) \\ (c_2 + c_1) & (d_2 + d_1) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = A_2 + A_1$$

خاصیت عضو خنثی: فرض کنیم عمل دوتایی * روی مجموعهٔ A تعریف شده باشد در این صورت عضو e را عضو خنثی در مجموعهٔ A می‌نامیم هرگاه: اوّلاً $e \in A$ و ثانیاً برای هر عضو مجموعهٔ A مانند a داشته باشیم $a * e = e * a = a$.

مثال: در مجموعهٔ اعداد حقیقی نسبت به عمل جمع معمولی عددِ صفر عضو خنثی است زیرا اگر a عضو دلخواهی از IR باشد داریم

$$a + 0 = 0 + a = a$$

مثال: اگر مجموعهٔ اعداد گویای مثبت را در نظر بگیریم و عمل * را به‌صورت زیر تعریف کنیم در این صورت عضو خنثی عددِ ۳ خواهد بود.

$$\forall x , y \in Q^+ , x * y = \frac{x \cdot y}{3}$$

زیرا: $x * 3 = \frac{x \cdot 3}{3} = x , \; 3 * x = \frac{3 \cdot x}{3} = x$

خاصیت عضو متقابل یا وارون

فرض کنیم عمل دوتایی * روی مجموعهٔ A تعریف شده باشد در این صورت می‌گوییم مجموعهٔ A نسبت به عمل * دارای خاصیت عضو متقابل است هرگاه برای هر عضو مجموعهٔ A مانند a عضوی از A مانند a' یا (a^{-1}) وجود داشته باشد به قسمی که:

$$a * a' = a' * a = e$$

(e همان عضو خنثی در A است.)

مثال: مجموعهٔ اعداد حقیقی IR نسبت به عمل جمع معمولی دارای خاصیت عضو متقابل است زیرا: برای هر عدد حقیقی مانند x، عدد $-x$ عددی حقیقی است و $x + (-x) = (-x) + x = 0$ که ۰ عضو خنثی در IR نسبت به جمع است.

مثال: اگر مجموعهٔ اعداد گویای مثبت را در نظر گرفته و تعریف کنیم.

$$\forall x , y \in Q^+ , x * y = \frac{x \cdot y}{4}$$

در این صورت عضو متقابل هر عضو از Q^+ به‌صورت زیر به دست می‌آید

$$\left.\begin{array}{l} x * x' = e \Rightarrow \frac{x.x'}{4} = e \Rightarrow x.x' = 4e \Rightarrow x' = \frac{4e}{x} \\ x' * x = e \Rightarrow \frac{x'.x}{4} = e \Rightarrow x'.x = 4e \Rightarrow x' = \frac{4e}{x} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow x' = \frac{4e}{x}$$

تذکر: اگر مجموعه نسبت به عمل دوتایی دارای خاصیت جابجایی باشد (مانند مثال بالا) برای به‌دست آوردن عضو خنثی کافی است یکی از دو معادلهٔ زیر را حل کنیم

$$\begin{cases} x * e = x \\ e * x = x \end{cases}$$

و برای به‌دست آوردن عضو متقابلِ هر عضو کافی است یکی از دو معادلهٔ زیر را حل کنیم.

$$\begin{cases} x * x' = e \\ x' * x = e \end{cases}$$

حال به تعریف گروه می‌پردازیم:

تعریف: مجموعهٔ ناتهی G، همراه با عمل * که روی G تعریف شده یک گروه نامیده می‌شود و می‌نویسیم $(G , *)$ گروه است، اگر و فقط اگر خواص زیر برقرار باشند:

۱- $\forall a,b \in G, a*(b*c) = (a*b)*c$ (خاصیت شرکت‌پذیری[1])

۲ـ $\exists!$[7] $e\in G\ \forall a\in G,\ e*a=a*e=a$ (خاصیت عضوخنثی[8])

۳ـ $\forall a\in G\ \exists! a'\in G,\ a*a'=a'*a=e$ (خاصیت عضومتقابل)

تذکر: گزاره‌های سوریِ $\exists!x\forall y$ و $\forall y\exists!x$ با هم تفاوت بسیار دارند. وقتی می‌نویسیم $\exists!x\forall y$ یعنی x ای منحصر بفرد هست که برای تمام y ها خاصیتی برقرار است پس این x برای همهٔ y ها ثابت است امّا وقتی می‌نویسیم $\forall y\exists!x$ یعنی برای هر y، x ای منحصر بفرد هست که خاصیتی برقرار است، پس هر y برای خودش یک x منحصر بفرد دارد، مثلاً اگر ۱۰ عدد y داشته باشیم در قسمت اوّل فقط دارایِ یک x هستیم ولی در قسمت دوّم دارای ۱۰ عدد x خواهیم بود.

اگر گروه $(G, *)$ علاوه بر خواص سه گانهٔ فوق دارای خاصیت زیر نیز باشد آن را یک گروه جابجایی[9] یا آبلی می‌نامیم:

$$\forall a, b\in G,\ a*b=b*a$$

تعریف: اگر گروه G دارای تعدادی متناهی عضو باشد آن را یک گروه متناهی و اگر تعداد اعضاء گروه G نامتناهی باشد آن را یک گروه نامتناهی می‌نامیم، مثلاً $(Z, +)$ یک گروه نامتناهی است ولی $(\{1, -1\}, \cdot)$ یک گروه متناهی است.

حال به بررسی و معرفی چند گروه ریاضی که اکثر خوانندگان با آنها برخورد داشته و تا حدود زیادی قابل درک هستند، می‌پردازیم و سپس اندک اندک بحث را به بررسی و شناخت گروههای مجرّدتر همراه با اعمال غیر ملموس‌تر و ناآشناتر، می‌کشانیم.

مثال ۱: اگر قرار دهیم $G=Z$ و عمل * را همان جمع معمولی تعریف کنیم در این صورت $(Z, +)$ یک گروه جابجایی است.

تذکر: اگر مجموعه‌ای مانند A نسبت به عمل * دارای خواص شرکت پذیری یا جابجایی باشد این خاصیتها به کلیه زیر مجموعه‌های A (همراه با همان عملِ *) القاء می‌شود یا به ارث می‌رسند! مثلاً مجموعهٔ اعداد حقیقی یعنی IR نسبت به عمل جمع دارای خاصیت شرکت پذیری و جابجایی است بنابراین تمام زیر مجموعه‌های IR این دو خاصیت را نسبت به همان عمل جمع دارا می‌باشند.

مثال ۲: اگر قرار دهیم $G=Z$ و عمل * را همان عمل ضرب معمولی که با $\cdot$ نشان می‌دهیم تعریف کنیم در این صورت $(Z, \cdot)$ تشکیل گروه نمی‌دهد. زیرا خاصیت عضو متقابل برای هر عضو Z نسبت به عمل ضرب برقرار نیست، چون می‌دانیم عدد ۱ عضو خنثی نسبت به عمل ضرب در Z می‌باشد لذا اگر $a\in Z$ عضوی دلخواه باشد عضو متقابل آن یعنی a' به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$a'.a=e=1\Rightarrow a'=\frac{1}{a}$$

و مثلاً اگر قرار دهیم $a=2$ در این صورت $a'=\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}\notin Z$ و یا اگر $a=0$ خواهیم داشت: $a'=\frac{1}{0}$ که a' تعریف نشده است.

مثال ۳: اگر فرض کنیم $G=\{1, -1\}$ و عمل * را ضرب معمولی فرض کنیم در این صورت $(G, \cdot)$ یک گروه جابجایی است (به‌عنوان تمرین به عهدهٔ خواننده).

تذکّر: همان طور که ملاحظه می‌شود در مثال ۳ مجموعهٔ $\{1, -1\}$ یکی از زیر مجموعه‌های بسیار کوچک Z می‌باشد ولی این مجموعهٔ ۲ عضوی با همان عمل ضرب معمولی که روی Z تعریف کردیم و Z با آن تشکیل گروه نداد، می‌توانند یک گروه جابجایی تشکیل دهد و این گویای این مطلب است که بزرگی یا کوچکی (تعداد اعضاء) و متناهی یا نامتناهی بودن یک مجموعه هیچ‌کدامْ نمی‌تواند ملاک قطعی برای گروه بودن آن باشند.

مثال ۴: اگر فرض کنیم $G=Q$ و عمل * را ضرب معمولی تعریف کنیم در این صورت $(Q, \cdot)$ یک گروه نمی‌باشد، زیرا در این مجموعه عدد گویایِ صفر نسبت به عمل ضرب فاقد عضو متقابل است.

تذکر: باید توجه داشته باشیم که خاصیت بسته بودن یک مجموعه نسبت به عملی که روی آن تعریف کرده‌ایم ممکن است به زیر مجموعه‌هایش القاء نشود، مثلاً Z نسبت به عمل تفریق بسته است ولی N که زیر مجموعهٔ Z می‌باشد نسبت به این عمل بسته نیست.

مثال ۵: اگر فرض کنیم مجموعه اعداد گویا با مخرج فرد $=G$ و قانونِ * را روی این مجموعه همان تفریق معمولی تعریف کنیم در این صورت $(G, -)$ تشکیل یک گروه نمی‌دهد، زیرا این مجموعه نسبت به قانون تعریف شده روی آن، خاصیت عضو خنثی ندارد مثلاً اگر $e=0$

$$\frac{1}{3}-0\neq 0-\frac{1}{3}$$

حال که تا اندازه‌ای با اسکلت ساختمانِ گروهها در ریاضی آشنا شدیم و چهار چوب این ساختمان را بنا کردیم به داخل ساختمان قدم می‌گذاریم تا خواص و ویژگیهای موجود در یک گروه و قضایای حاکم بر آن را مورد بررسی قرار دهیم، ابتدا به اثبات چند قضیهٔ مهّم و اساسی در گروهها می‌پردازیم.

قضیهٔ ۱: در هر گروه مانند $(G,*)$ عضو خنثی منحصربفرد است

برهان: درحقیقت می‌خواهیم ثابت کنیم اگر درگروه $(G,*)$ برای هر $a\in G$ داشته‌باشیم $e*a=a*e=a$ و $e_1*a=a*e_1=a$ در این صورت $e=e_1$.

$$\left.\begin{array}{l} e_1\in G \text{ و } e \text{ عضو خنثی چون } \Rightarrow e*e_1=e_1 \\ e\in G \text{ و } e_1 \text{ عضو خنثی چون } \Rightarrow e*e_1=e \end{array}\right\}\Rightarrow e=e*e_1=e_1\Rightarrow e=e_1$$

قضیهٔ ۲: در هر گروه مانند $(G,*)$ عضو متقابل برای هر عضو G منحصر بفرد است.

برهان: در این قضیه منظور ما این است که اگر مثلاً برای یک عضو دلخواه G مانند a داشته باشیم:

$$a*a'=a'*a=e,\ a*a''=a''*a=e$$

در این صورت باید $a'=a''$.

به شکل زیر قضیه را اثبات می‌کنیم.

$$a'=e*a'=(\underbrace{a''*a}_{e})*a'=a''*(\underbrace{a*a'}_{e})=a''*e=a''$$

قضیهٔ ۳: هرگاه $(G,*)$ یک گروه باشد و $a,b\in G$ آنگاه معادلات $a*x=b$ و $y*a=b$ جوابهای منحصر بفردی برای x و y در G خواهند داشت و خصوصاً دو قانون حذف (از چپ و از راست) در G برقرارند یعنی

$a*b=a*c\Rightarrow b=c$ (قانون حذف از چپ)

$b*a=c*a\Rightarrow b=c$ (قانون حذف از راست)

برهان:

فرض کنیم: $a*x=b\Rightarrow a^{-1}*(a*x)=a^{-1}*b\Rightarrow(a^{-1}*a)*x=a^{-1}*b\Rightarrow e*x=a^{-1}*b\Rightarrow \boxed{x=a^{-1}*b}$

و با توجه به قضیهٔ ۲ اگر متقابل a را a^{-1} بنامیم در این صورت a^{-1} منحصر بفرد است پس $x=a^{-1}*b$ منحصر بفرد است.

حال اگر فرض کنیم: $y*a=b\Rightarrow(y*a)*a^{-1}=b*a^{-1}\Rightarrow y*(a*a^{-1})=b*a^{-1}\Rightarrow y*e=b*a^{-1}\Rightarrow y=b*a^{-1}$

و چون a^{-1} طبق قضیه منحصر بفرد است پس $y=b*a^{-1}$ نیز منحصر بفرد است.

اکنون به اثبات یکی از قوانین حذف در یک گروه دلخواه مانند $(G,*)$ می‌پردازیم:

فرض کنیم: $a*b=a*c\Rightarrow a^{-1}*(a*b)=a^{-1}*(a*c)\Rightarrow$

$$(a^{-1}*a)*b=(a^{-1}*a)*c\xRightarrow{\text{چون e منحصر بفرد است}}e*b=e*c\Rightarrow b=c$$

اثبات قانون حذف از راست به‌عنوان تمرین به عهدهٔ خواننده.

تمرین: ثابت کنید اگر $(G,*)$ یک گروه آبلی باشد داریم:
$a*b=c*a\Rightarrow b=c$

قضیهٔ ۴: در هر گروه $(G,*)$ و برای هر دو عضو این گروه مانند x و y داریم:

$$(x*y)^{-1}=y^{-1}*x^{-1}$$ (x^{-1} متقابل x است نسبت به عمل *)

برهان: ابتدا ثابت می‌کنیم $(x*y)*(y^{-1}*x^{-1})=e$ و سپس با استفاده از قانون حذف قضیه را به اثبات می‌رسانیم:

$$(x*y)*(y^{-1}*x^{-1})=x*[y*(y^{-1}*x^{-1})]=x*[(y*y^{-1})*x^{-1}]$$
$$=x*(e*x^{-1})=x*x^{-1}=e \qquad (1)$$

و همچنین واضح است که $(x*y)*(x*y)^{-1}=e$:(۲) پس داریم:

$$e=e\xRightarrow{(1)\text{و}(2)}(x*y)*(x*y)^{-1}=(x*y)*(y^{-1}*x^{-1})$$
$$\xRightarrow{\text{بنابر قانون حذف}}(x*y)^{-1}=y^{-1}*x^{-1}$$

قضیهٔ ۵: ثابت کنید در هر گروه دلخواه مانند $(G,*)$ و برای هر $a\in G$ داریم:

$$(a^{-1})^{-1}=a$$

$$\left.\begin{array}{l} a^{-1}*a=e \\ a^{-1}*(a^{-1})^{-1}=e \end{array}\right\} \Rightarrow a^{-1}*a=a^{-1}*(a^{-1})^{-1}$$

$$\xrightarrow{\text{بنابر قانون حذف}} a=(a^{-1})^{-1}$$

اکنون آمادگی داریم تا به بررسی و معرفی بعضی از گروههای مجرّد بپردازیم و اندکی این مطلب را کلّی‌تر بیان کنیم.

مثال ٦: اگر فرض کنیم $G=Q^+$ و عمل $*$ را روی Q^+ به‌صورت زیر تعریف کنیم در این صورت $(Q^+ , *)$ یک گروه جابجایی است.

$$\forall a , b\in Q^+ ، a*b=\frac{a.b}{7}$$

$$1)\ a*(b*c)=a*\left(\frac{b.c}{7}\right)=\frac{a.\frac{b.c}{7}}{7}=\frac{a.(b.c)}{49} \qquad (1)$$

$$(a*b)*c=\frac{a.b}{7}*c=\frac{\left(\frac{a.b}{7}\right).c}{7}=\frac{(a.b).c}{49}=\frac{a.(b.c)}{49} \qquad (2)$$

از مقایسهٔ (۱) و (۲) برقراری خاصیت شرکت‌پذیری حاصل می‌شود.

۲) برای اثبات خاصیت عضو خنثی به‌دنبال عضوی مانند e در Q^+ هستیم به قسمی که برای هر $a\in Q^+$ داشته باشیم: $a*e=e*a=a$ در این گونه موارد کافی است یکی از دو معادله $a*e=a$ یا $e*a=a$ را حل کنیم و e را به دست آوریم زیرا ثابت می‌شود $(Q^+,*)$ دارای خاصیت جابجایی است.

$$a*e=a \Rightarrow \frac{a.e}{7}=a \Rightarrow a.e=7.a \Rightarrow e=7$$

یعنی در این مجموعه عدد گویای ۷ نسبت به عمل $*$ نقش عضو خنثی را ایفا می‌کند و در واقع عضو خنثی می‌باشد.

۳) حال به‌دنبال یافتن عضو متقابل برای هر عضو Q^+ هستیم یعنی اگر $a\in Q^+$ به‌دنبال عضوی مانند a' در Q^+ می‌باشیم به قسمی که $a*a'=a'*a=e$ که در آن $e=7$ پس کافی است یکی از دو معادله $a*a'=e=7$ یا $a'*a=e=7$ را حل کنیم و a' را بیابیم؛

$$a*a'=7 \Rightarrow \frac{a.a'}{7}=7 \Rightarrow a.a'=49 \Rightarrow a'=\frac{49}{a}$$

و واضح است که اگر $a\in Q^+$ در این صورت $a'=\frac{49}{a}\in Q^+$، مثلاً اگر $b\in Q^+$، وارونِ b یعنی b' برابر است با $\frac{49}{b}$ (وارونِ $\frac{2}{3}$ عبارت است از $\frac{49}{\frac{2}{3}}=\frac{147}{2}$ لذا تاکنون ثابت شد که $(Q^+,*)$ یک گروه است، از طرفی:

$$\forall a,b \in Q^+ ، a*b=\frac{a.b}{7}=\frac{b.a}{7}=b*a \Rightarrow a*b=b*a$$

بنابراین $(Q^+,*)$ یک گروه آبلی یا جابجایی است.

مثال ۷: فرض کنیم $G=\{a_0,a_1,...,a_6\}$ و عمل $*$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\forall a_i , a_j\in G ; a_i*a_j=\begin{cases} a_{i+j} & i+j<7 \\ a_{i+j-7} & i+j\geq 7 \end{cases}$$

مثلاً: $a_1*a_3=a_{1+3}=a_4$ (چون $1+3<7$)

$a_4*a_5=a_{4+5-7}=a_2$ (چون $4+5>7$)

ثابت می‌کنیم $(G,*)$ یک گروه آبلی است.

۱) بررسی خاصیت شرکت پذیری:

برای هر a_i و a_j و a_K اگر $i+j+K<7$ که داریم:

$$a_i*(a_j*a_K)=a_i*(a_{j+K})=a_{i+(j+K)}$$

$$(a_i*a_j)*a_K=(a_{i+j})*a_K=a_{(i+j)+K}=a_{i+(j+K)}$$

و اگر $i+j+K\geq 7$ اثبات به‌عهده خوانندگان.

۲) بررسی خاصیت عضو خنثی: واضح است که در این مجموعه $e=a_0$ زیرا $\forall i ، a_i*a_0=a_{i+0}=a_i , a_0*a_i=a_{0+i}=a_i$

۳) بررسی خاصیت عضو متقابل:

برای هر a_i به‌دنبال عضوی مانند a_j هستیم به قسمی که $a_j*a_i=a_i*a_j=e=a_0$ با توجه به تعریف عمل، برای هر i اگر قرار دهیم $j=7-i$ در این صورت $a_i*a_{7-i}=a_{i+7-i}=a_7=a_{7-7}=a_0$

مثلاً متقابل a_5 برابر است با a_2 زیرا $a_{7-5}=a_2$ ، $5+2=7$ پس

$$a_5*a_2=a_{5+2-7}=a_0$$

پس $(G,*)$ یک گروه است از طرفی

اگر $i+j<7$ $\quad a_i*a_j=a_{i+j}=a_{j+i}=a_j*a_i$

اگر $i+j>7$ $\quad a_i*a_j=a_{(i+j)-7}=a_{(j+i)-7}=a_j*a_i$

بنابراین گروه $(G,*)$ یک گروه آبلی است.

مثال ۸: فرض کنیم $G=Z$ و عمل * را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$\forall x, y\in Z ; x*y=x+y-۲$

ثابت می‌کنیم $(Z,*)$ یک گروه جابجایی است.

۱) $x*(y*z) = x*(y+z-۲) = [x+(y+z-۲)]-۲=$
$x+(y+z)-۴$ (۱)

$(x*y)*z=(x+y-۲)*z=[(x+y-۲)+z]-۲=$
$(x+y)+z-۴= x+(y+z)-۴$ (۲)

با توجه به (۱) و (۲) شرکت‌پذیری حاصل می‌شود

۲) به دنبال عضوی در Z مانند e هستیم که برای هر $x\in Z$ داشته‌باشیم.
$x*e=e*x=x$

$x*e=x \Rightarrow x+e-۲=x \Rightarrow \boxed{e=۲}$

۳) برای هر $x\in Z$ به دنبال عضوی در Z مانند x' هستیم به قسمی که:
$x*x'=x'*x=e=۲$

$x*x'=۲ \Rightarrow x+x'-۲=۲ \Rightarrow x+x'=۴ \Rightarrow x'=۴-x$

مثلاً متقابلِ عدد ۳ عبارت است از:

اگر $x=۳ \Rightarrow x'=۴-۳=۱ \Rightarrow x'=۱$

پس $(Z,*)$ یک گروه است از طرفی

$\forall x,y\in Z;x*y=x+y-۲=y+x-۲=y*x$

بنابراین $(Z,*)$ یک گروه جابجایی است.

تعریف: هرگاه $(G,*)$ یک گروه باشد و $a\in G$ در این صورت:
$a^۲=a*a$ و $a^۳=a^۲*a,...,a^n=a^{n-۱}*a$

حال تا حدودی به بررسی خواص و ویژگیهای گروهها با توجه به اعمال تعریف شده روی آنها می‌پردازیم.

مثال ۹: ثابت کنید اگر برای هر دو عضو از گروه $(G,*)$ مانند a و b داشته باشیم، $(a*b)^{-۱}=a^{-۱}*b^{-۱}$ در این صورت $(G,*)$ یک گروه جابجایی است.

تذکر: قبلاً طبق قضیهٔ ۳ ثابت کردیم $(a*b)^{-۱}=b^{-۱}*a^{-۱}$

حال باید ثابت کنیم:

$\forall a, b\in G ; a*b=b*a$

$$(a*b)=\left((a*b)^{-۱}\right)^{-۱}=(b^{-۱}*a^{-۱})^{-۱}$$

از طرفی چون G گروه است و $a, b\in G$ پس $a^{-۱}, b^{-۱}\in G$ لذا

طبق فرض $(b^{-۱}*a^{-۱})^{-۱}=(b^{-۱})^{-۱}*(a^{-۱})^{-۱}=b*a$

پس ثابت شد $a*b=b*a$ یعنی $(G,*)$ یک گروه آبلی است.

مثال ۱۰: ثابت کنید هر گروه از مرتبهٔ ۳ آبلی است. فرض کنیم G یک گروه از مرتبهٔ ۳ باشد لذا دارای ۳ عضو است که باتوجه به گروه بودن G و اینکه $e\in G$ پس G حداکثر دارای ۲ عضو مخالفِ e مانند a و b می‌باشد یعنی $G=\{a,b,e\}$.

حال به بررسی خاصیت جابجایی گروه $(G,*)$ می‌پردازیم. خاصیت جابجایی برای هر یک از دو عضو a و b با e باتوجه به خاصیت عضو خنثی در گروه G واضح است یعنی همواره:

$$a*e=e*a=a$$
$$b*e=e*b=b$$

و نیز خاصیت جابجایی برای هر عضو G با خودش واضح است یعنی $a*a=a*a$ و $b*b=b*b$ و $e*e=e*e$

حال ثابت می‌کنیم $a*b=b*a$.

اگر $a*b=c$، با توجه به بسته بودن گروه G نسبت به عمل * باید $c\in G$ اگر $c=a$ در این صورت

$a*b=a$ و $a*e=a \Rightarrow a*b=a*e \xrightarrow{\text{قانون حذف}} b=e$

و این با منحصر بفرد بودنِ e تناقض دارد پس $c\neq a$ و اگر $c=b$ در این صورت

$a*b=b$ و $e*b=b \Rightarrow a*b=e*b$
$\xrightarrow{\text{قانون حذف}} a=e$

و این نیز با منحصر بفرد بودن e تناقض دارد پس $c\neq b$ لذا باید $c=e$ یعنی $a*b=e$ و به همین قیاس ثابت می‌شود $b*a=e$ پس $a*b=b*a$ بنابراین $(G,*)$ یک گروه آبلی است.

مثال ۱۱: ثابت کنید هر گاه برای هر عضو گروه $(G,*)$ مانند x اگر داشته باشیم $x=x^{-۱}$ (متقابلِ هر عضو خودش باشد) آنگاه G آبلی است.

ثابت می‌کنیم: $\forall x, y \in G ; x*y=y*x$

طبق‌فرض داریم: $(x*y)=(x*y)^{-۱}$ (متقابل‌هر عضو خودش می‌باشد)

از طرفی چون G گروه است: $(x*y)^{-۱}=y^{-۱}*x^{-۱}$

و طبق فرض $y^{-1}=y$ و $x^{-1}=x$، لذا

$$(x*y)=(x*y)^{-1}=(y^{-1}*x^{-1})=(y*x) \Rightarrow x*y=y*x$$

پس G آبلی است.

گاهی اوقات مجموعه‌ها را همراه با عمل تعریف شده روی آنها و اثر عمل روی هر یک از اعضاء مجموعه به صورتِ جدولی نمایش می‌دهیم که بنوبهٔ خود دارای خواص و ویژگیهای قابل توجهی می‌باشد. مثلاً در مثال ۱۰ و با توجه به مطالب اثبات شده در آن می‌توان گروه G از مرتبه ۳ را به صورت جدولی نمایش داد.

*	a	b	e
a	b	e	a
b	e	a	b
e	a	b	e

تذکر : هر گاه یک گروه و نتیجه حاصل از عملِ * روی اعضاء این گروه را به صورت جدولی نمایش دهیم و قطر اصلی جدول را رسم کنیم (مطابق شکل) و اعضاء دو طرف قطر نسبت به آن تقارن داشته باشند در این صورت حتماً گروه مزبور یک گروه آبلی است (اثبات به عهدهٔ خواننده) و نیز اگر در یک جدول یک عضو مجموعه بیش از یک بار در هر سطر یا ستون تکرار شود آن مجموعه همراه با آن عمل تشکیل گروه نمی‌دهد (اثبات به عهده خواننده).

مثال :

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

قطر اصلی

اگر $G = \{ e, a, b, c \}$.

طبق مطالب فوق $(G, *)$ یک گروه آبلی است.

مثال: اگر $G = \{ A, B, C, D \}$ در این مثال چون در سطر اوّل B دوبار تکرار شده و یا در سطر آخر D دو بار تکرار شده و یا در ستون دوّم B دوبار تکرار شده لذا بنابر مطالب فوق $(G , *)$ نمی‌تواند یک گروه باشد. البته واضح است که C نقش عضو خنثی را دارد، زیرا ترکیب آن از چپ و از راست با هر عضو G خود آن عضو را نتیجه می‌دهد. امّا مثلاً عضو D فاقد متقابل است زیرا ترکیب هیچ یک از اعضاء G با D عضو خنثی یعنی C را نتیجه نمی‌دهد.

*	A	B	C	D
A	B	C	A	B
B	C	D	B	A
C	A	B	C	D
D	A	B	D	D

به عنوان تمرین ثابت کنید جدول زیر مشخص کننده یک گروه است (عضو خنثی و وارون هر عضو را مشخص کنید)، آیا گروه آبلی است؟

×	۱	−۱	i	−i
۱	۱	−۱	i	−i
−۱	−۱	۱	−i	i
i	i	−i	−۱	۱
−i	−i	i	۱	−۱

تعریف : مجموعهٔ $\{ ۰, ۱, ۲, ..., n-۱ \}$ را مجموعهٔ باقیمانده‌های تقسیم اعداد صحیح مثبت بر n می‌نامیم که در آن $n \geq ۱$، و با Z_n نمایش می‌دهیم مثلاً $Z_۶ = \{ ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ \}$.

تذکر: می‌دانیم هرگاه عددی صحیح و بزرگتر از صفر بر n تقسیم شود باقیماندهٔ این تقسیم یا صفر است یا یک است یا... یا $n - ۱$ است، واضح است چون بخش پذیری در اعداد صحیح مثبت مطرح است باقیماندهٔ تقسیم اعدادکوچکتر از n بر n خودشان می‌شوند مثلاً باقیماندهٔ تقسیم عدد ۴ بر ۸ برابر است با ۴ زیرا

$$۴ = ۰ \times ۸ + ۴$$ یا $$\begin{array}{r|l} ۴ & ۸ \\ \cline{2-2} ۰ & ۰ \\ \hline ۴ & \end{array}$$

حال جمع و ضرب جدیدی روی چنین مجموعه‌هایی تعریف کرده و خواهیم دید که این مجموعه‌ها با اعمال تعریف شده روی آنها تشکیل گروه جابجایی می‌دهند.

مثال ۱۲: فرض کنیم $G = Z_5$ یا $G = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ و عمل $\oplus$ را روی اعضاء این مجموعه به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: $\forall x, y \in Z_5$ ، $x \oplus y =$ باقیمانده تقسیم $x + y$ بر ۵ (اگر $x+y$ را بر عدد ۵ تقسیم کنیم باقیماندهٔ تقسیم حتماً یکی از اعداد ۰ تا ۴ خواهد بود پس مجموعه نسبت به عمل بسته است).

$$\begin{array}{r|l} x+y & 5 \\ \hline r & m \end{array}$$

$$\Rightarrow x+y=5m+r \Rightarrow r=(x+y)-5m$$

$$\Rightarrow \forall x, y \in Z_5, x \oplus y = (x+y) - 5m$$

$$m \in \{0, 1\}$$

به عنوان مثال: $2 = 3 \oplus 4$ زیرا $7 = 3 + 4$ و باقیماندهٔ تقسیم ۷ بر ۵ برابر با ۲ است. حال $(Z_5, \oplus)$ را به‌صورت جدولی نمایش می‌دهیم:

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

۱) بررسی خاصیت شرکت پذیری با توجه به جدول واضح و به عهدهٔ خواننده.

۲) به‌دنبال عضوی در Z_5 مانند e هستیم به قسمی که برای هر $x \in Z_5$ داشته باشیم:

$$x \oplus e = e \oplus x = x$$

$$x \oplus e = x \Rightarrow x + e - 5m_1 = x \Rightarrow e = 5m_1$$

و با توجه به اینکه باید $e \in Z_5$ باشد بنابراین $m_1 = 0$ ، یعنی:

$$\boxed{e = 0}$$

۳) برای هر عضو Z_5 مانند x به دنبال عضوی از Z_5 مانند x' هستیم به قسمی که $x \oplus x' = x' \oplus x = e = 0$.

$$x \oplus x' = 0 \Rightarrow x + x' - 5m_1 = 0 \Rightarrow x' = 5m_1 - x$$

اگر $x = 0 \Rightarrow x' = 5m_1 - 0 \xrightarrow{m_1 = 0} x' = 0$

اگر $x = 1 \Rightarrow x' = 5m_1 - 1 \xrightarrow{m_1 = 1} x' = 4$

اگر $x = 2 \Rightarrow x' = 5m_1 - 2 \xrightarrow{m_1 = 1} x' = 3$

اگر $x = 3 \Rightarrow x' = 5m_1 - 3 \xrightarrow{m_1 = 1} x' = 2$

اگر $x = 4 \Rightarrow x' = 5m_1 - 4 \xrightarrow{m_1 = 1} x' = 1$

پس $(Z_5, \oplus)$ یک گروه است. از طرفی با توجه به خاصیت جابجایی جمع معمولی در اعداد حقیقی داریم:

$$x \oplus y = (x + y) - 5m_1 = (y + x) - 5m_1 = y \oplus x$$

لذا $(Z_5, \oplus)$ یک گروه آبلی است.

به همین ترتیب در حالت کلّی می‌توان ثابت کرد که $(Z_n, \oplus)$ یک گروه جابجایی است.

تمرین: اگر $G = Z_5 - \{0\} = \{1, 2, 3, 4\}$ و عمل $\otimes$ را روی اعضاء این مجموعه به‌صورت زیر تعریف کنیم ثابت کنید $(Z_5 - \{0\}, \otimes)$ یک گروه جابجایی است.

$\forall x, y \in Z_5 - \{0\}$ ، $x \otimes y =$ باقیمانده تقسیم $x \times y$ بر ۵ $=$

$$x \times y - 5m \quad (m \in Z)$$

مثلاً $2 = 4 \otimes 3$ زیرا $12 = 4 \times 3$ و باقیمانده تقسیم ۱۲ بر ۵ برابر با عدد ۲ است.

تمرین:

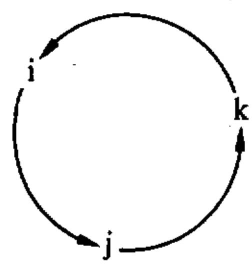
۱) نشان دهید که اگر G گروهی از مرتبهٔ زوج باشد (تعداد اعضاء G زوج است) آنگاه G دارای عضوی چون $a \neq e$ می‌باشد به قسمی که $a^۲ = e$.

۲) ثابت کنید برای هرگروه دلخواه چون G اگر رابطهٔ زیر برقرار باشد آنگاه G یک گروه آبلی (جابجایی) است.

$$\forall a , b , c \in G ; a * b = c * a \Rightarrow b = c$$

۳) فرض کنیم G مجموعه‌ای از عناصر به صورت $G=\{\pm ۱ , \pm i , \pm j , \pm k\}$ و عمل ضرب معمولی را روی اعضاء G به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$i^۲ = j^۲ = k^۲ = -۱$$
$$ij = -ji = k$$
$$jk = -kj = i$$
$$ki = -ik = j$$



ثابت کنید مجموعهٔ G با ضرب معمولی تعریف شده روی آن یک گروه است. آیا گروه آبلی است؟

۴) اگر a و b و c اعضاء گروه $(G , *)$ باشند ثابت کنید

$$((a * b) * c)^{-۱} = (c^{-۱} * b^{-۱}) * a^{-۱}$$

۵) فرض کنیم $A = \{ a , b , c \}$ ثابت کنید $(P(A) , \cap)$ و نیز $(P(A) , \cup)$ هیچ کدام گروه نمی‌باشند.

در مسائل ۶ تا ۱۰ عمل دوتایی * را روی Z تعریف کرده‌ایم. مشخص کنید Z با کدام یک از اعمال تعریف شده تشکیل گروه می‌دهد و کدام یک گروه جابجایی است.

۶) $x * y = x + y + ۱$ ۷) $x * y = x + xy$

۸) $x * y = x + xy + y$ ۹) $x * y = xy + y$

۱۰) $x * y = x - y$

یادداشتها

۱ـ Group ۲ـ Evariste Galois
۳ـ set ۴ـ Binary opration
۵ـ Function ۶ـ Associative
۷ـ Existential - uniqueness quantifier (سور وجودی یکتا)
۸ـ Identityelement
۹ـ Commutative group

ادب ریاضی ترجمهٔ پرویز شهریاری

گوشه‌ای از تاریخ ریاضیدانها

آخرین سخنان لاگرانژ از زبان مونژ

از مرگ نباید هراس داشت. وقتی که بدون درد فرارسد هیچ چیز ناگواری در آن وجود ندارد. چند دقیقهٔ دیگر، بدن من از زندگی جدا می‌شود، همه جا مرگ و نیستی خواهد بود. آری من دارم می‌میرم و این خوشایند من است. من زندگی کردم. احترام یک ریاضی دان را به دست آوردم. هرگز کینهٔ خود را به کسی نیازمودم. هیچ بدی نکرده‌ام. مرگ برایم خیلی ساده است.

از کتاب اوریست گالوا اثر لئوپولد اینفلد

بخش پذیری در چند جمله ایها

(مورد استفاده دانش آموزان سال سّوم ریاضی)

● سید محمد رضا هاشمی موسوی

بخش پذیری :

هرگاه باقی ماندهٔ چند جمله‌ای: $p_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$ بر چند جمله‌ای: $g_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m$ را به $R_{m-1}(x)$ و خارج قسمت این تقسیم را به $q_{n-m}(x)$ نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$p_n(x)=g_m(x)q_{n-m}(x)+R_{m-1}(x)$ لازم به توضیح است که اندیسهای فوق نشان دهندهٔ درجهٔ چند جمله‌ای است یعنی اندیس n و m و $n-m$ و $m-1$ به ترتیب نشان‌دهندهٔ درجهٔ چند جمله‌ای $p(x)$ و $g(x)$ و $q(x)$ و $R(x)$ می‌باشد. برای توضیح اندیسهای منتخب خارج قسمت و باقی مانده می‌توان گفت که بزرگترین جملهٔ توان دار در خارج قسمت تقسیم $p_n(x)$ بر $g_m(x)$ عبارت است از: $\frac{a_0x^n}{b_0x^m}$ و یا به‌عبارت ساده‌تر: $\frac{a_0}{b_0}x^{n-m}$ که در واقع این جمله درجهٔ خارج قسمت را تعیین می‌کند. به همین علت درجهٔ $q(x)$ برابر $n-m$ است. و همچنین درجهٔ انتخاب شده برای باقی مانده به این علت است که تقسیم مقسوم بر مقسومٌ علیه وقتی خاتمه می‌یابد که درجهٔ باقی‌مانده حداقل یک درجه از درجهٔ مقسومٌ علیه کمتر باشد. به همین علت درجهٔ باقی مانده معمولاً $m-1$ است در صورتی که درجهٔ مقسومٌ علیه برابر m باشد.

مثال ۱: در یک تقسیم در صورتی که درجهٔ باقی مانده ۴ و درجهٔ خارج قسمت ۷ باشد درجهٔ مقسوم چیست؟

حل: در صورتی که درجهٔ مقسوم را به n و درجهٔ مقسومٌ علیه را به m نشان دهیم درجهٔ خارج قسمت برابر $n-m$ و درجهٔ باقی مانده برابر $m-1$ می‌شود. بنابراین داریم:

$$\left\{\begin{array}{l} m-1=4 \Rightarrow m=5 \\ n-m=7 \Rightarrow n=m+7 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$n=5+7=12\,,\quad \overset{\text{درجهٔ مقسوم}}{n=12}$$

۱) بخش پذیری چند جمله‌ای $p(x)$ بر $x-a$:

بنابر آنچه در قبل گفته شده در صورتی که خارج قسمت $p(x)$ بر $(x-a)$ را به $q(x)$ نمایش داده و باقی ماندهٔ آن را به R نمایش دهیم در این صورت خواهیم داشت: $p(x)=(x-a)\,q(x)+R$ در این رابطه R یک عدد حقیقی است (زیرا درجهٔ مقسومٌ علیه برابر یک است). رابطهٔ اخیر به ازای هر x حقیقی برقرار است. بنابراین با اختیار $x=a$ داریم: $p(a)=(a-a)\,q(a)+R$ و نتیجه می‌شود: $R=p(a)$ یعنی باقی ماندهٔ $p(x)$ بر $(x-a)$ برابر است با: $p(a)$. بنابراین برای تعیین باقی ماندهٔ چند جمله‌ای مفروض $p(x)$ بر $(x-a)$ کافی است $p(a)$ را پیدا کنیم. بنابراین اگر $p(a)=0$ آنگاه $p(x)$ بر $(x-a)$ بخش پذیر است.

مثال ۲: باقی ماندهٔ $p(x)=x^7-3x^5+x^2-1$ را بر $x+1$

پیدا کنید.

حل : می‌دانیم $R = p(a)$ بنابراین داریم :

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow a = -1$

$R = p(-1) = (-1)^7 - 3(-1)^5 + (-1)^2 - 1 =$

باقی مانده:

$-1 + 3 + 1 - 1 = 2 \Rightarrow R = 2$

مثال ۳: s و k را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای، $p(x) = x^5 + kx^3 + sx^2 + 3$ بر $x - 1$ بخش پذیر و باقی‌ماندهٔ آن بر $x + 1$ برابر -4 باشد.

حل : چون باید $p(x)$ بر $x - 1$ بخش پذیر باشد بنابراین باید باقی‌ماندهٔ $p(x)$ بر $(x - 1)$ برابر صفر و یا $p(1) = 0$ باشد. و چون باقی ماندهٔ $p(x)$ بر $x + 1$ برابر -4 شده است بنابراین $p(-1) = -4$ است. و در نتیجه از دستگاه مقابل s و k محاسبه می‌شوند.

$$\begin{cases} p(1) = 0 \\ p(-1) = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(1) = 1 + k + s + 3 = 0 \\ p(-1) = -1 - k + s + 3 = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s + k = -4 \\ s - k = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = -5 \\ k = 1 \end{cases}$$

بنابراین چند جمله‌ای مفروض چنین است:

$$p(x) = x^5 + x^3 - 5x^2 + 3$$

مثال ۴: در چند جمله‌ای: $p(x) = x^4 + ax^3 + 3x^2 + 4x + 1$ مقدار a را چنان تعیین کنید که $p(x)$ بر $(x+a)$ بخش پذیر باشد.

حل : برای اینکه $p(x)$ بر $(x+a)$ بخش پذیر باشد باید داشته باشیم : $x + a = 0 \Rightarrow x = -a$

$$p(-a) = R \Rightarrow R = 0 \Rightarrow p(-a) = 0$$

$$p(-a) = (-a)^4 + a(-a)^3 + 3(-a)^2 + 4(-a) + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$3a^2 - 4a + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ \text{یا} \\ a = \frac{1}{3} \end{cases}$$

۲) تعیین خارج قسمت تقسیم $p(x)$ بر $(x-a)$:

چند جمله‌ای : $p(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n$ را در نظر می‌گیریم، خارج قسمت این چند جمله‌ای بر $x-a$ یک چند جمله‌ای است از درجهٔ $n-1$، که فرض می‌کنیم این چند جمله‌ای به صورت : $g(x) = B_0x^{n-1} + B_1x^{n-2} + \dots + B_{n-1}$ باشد. در اینجا می‌خواهیم روشی را ارائه دهیم که بدون عمل تقسیم بتوان ضرایب B_0 و B_1 و ... و B_{n-1} را پیدا کنیم و درنتیجه توانسته‌ایم خارج قسمت تقسیم را مشخص کنیم. همانطور که از قضیهٔ تقسیم نتیجه می‌شود در اینجا باید داشته باشیم

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \dots + A_n = (x-a)(B_0x^{n-1} + B_1x^{n-2} + \dots + B_{n-1}) + R$$

که R باقی مانده است. پس از ضرب و مرتب کردن طرف دوم داریم:

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n \equiv B_0x^n + (B_1 - aB_0)x^{n-1} + (B_2 - aB_1)x^{n-2} + \dots + (B_k - aB_{k-1})x^{n-k} + \dots + R$$

از تساوی ضرایب جمله‌های هم درجه خواهیم داشت :

$A_0 = B_0 \;,\; A_1 = B_1 - aB_0 \;, \dots ,\; A_k = B_k - aB_{k-1} \;, \dots ,\; A_n = R - aB_{n-1}$

و یا :

$B_0 = A_0 \;,\; B_1 = A_1 + aB_0 \;, \dots ,\; B_k = A_k + aB_{k-1} \;, \dots ,\; R = A_n + aB_{n-1}$

بنابراین در این‌جا به طور زنجیروار ضرایب خارج قسمت را بدون تقسیم می‌توان به‌دست آورد.

مثال ۵ : خارج قسمت تقسیم $p(x) = x^5 - 3x^3 + 2x + 1$ بر $x - 2$ را به‌دست آورید (بدون استفاده از تقسیم).

حل : خارج قسمت تقسیم از درجهٔ ۴ است و می‌توان آن را چنین فرض کرد :

$$q(x) = B_0x^4 + B_1x^3 + B_2x^2 + B_3x + B_4$$

و در نتیجه از قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم : $a=2$.

$B_0=A_0=1$, $B_1=A_1+aB_0=0+2\times1=2$, $B_2=A_2+aB_1=-3+2\times2=1$

$B_3=A_3+aB_2=0+2\times1=2, B_4=A_4+aB_3=$

باقی‌مانده:

$2+2\times2=6, R=A_5+aB_4=1+2\times6=13 \Rightarrow R=13$

بنابراین خارج قسمت تقسیم چنین است :

$$q(x)=x^4+2x^3+x^2+2x+6$$

مثال ۶ :باقی ماندهٔ تقسیم چند جمله‌ای $p(x)$ بر ax^n+b را در صورتی که داشته باشیم: $p(x)=ax^{3n+2}+bx^{2n+1}+c$ به‌دست آورید.

حل : برای به‌دست آوردن باقی ماندهٔ تقسیم ابتدا $p(x)$ را برحسب قوای x^n منظم می‌کنیم. و سپس $x^n=-\frac{b}{a}$ قرار می‌دهیم که در این‌صورت باقی ماندهٔ تقسیم به‌دست می‌آید و داریم :

$$(ax^n+b=0\Rightarrow x^n=-\frac{b}{a})\quad p(x)=a(x^n)^3x^2+b(x^n)^2x+c$$

و با جایگزینی داریم :

$$R(x)=a(-\frac{b}{a})^3x^2+b(-\frac{b}{a})^2x+c$$

و یاپس از اختصار لازم داریم:

$$R(x)=-\frac{b^3}{a^2}x^2+b(-\frac{b^3}{a^2})x+c$$

۳) تقسیم چند جمله‌ای $p(x)$ بر ax^n+b:

به‌طور کلی برای تعیین باقی ماندهٔ $p(x)$ بر ax^n+b ابتدا $p(x)$ را بر حسب قوای x^n منظم می‌کنیم و سپس $x^n=-\frac{b}{a}$ قرار می‌دهیم و باقی‌مانده به‌دست می‌آید.

مثال ۷ : باقی‌ماندهٔ ، $P(x)=x^{27}-2x^6+3x^5-x^3+x-1$ را بر x^3+1 پیدا کنید.

حل : $P(x)$ را برحسب قوای x^3 منظم می‌کنیم بنابراین داریم $P(x)=(x^3)^9-2(x^3)^2+3(x^3)x^2-x^3+x-1$ و با جایگزینی $x^3=-1$ داریم:

$$R(x)=(-1)^9-2(-1)^2+3(-1)x^2-(-1)+x-1$$

پس از اختصار لازم داریم: $R(x)=-3x^2+x-3$

۴) تقسیم چند جمله‌ای $p(x)$ بر ax^2+bx+c:

روش اول : برای تعیین باقی ماندهٔ $p(x)$ بر ax^2+bx+c ابتدا $p(x)$ رابرحسب قوای x^2 مرتب‌کرده وسپس $x^2=-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$ را قرار می‌دهیم که در این صورت عبارت حاصله باقی ماندهٔ تقسیم است.

مثال ۸ : اگر عبارت $p(x)=x^4+1$ بر x^2-mx+n بخش پذیر باشد، m و n را حساب کنید.

حل : ابتدا باقی ماندهٔ $p(x)$ را بر x^2-mx+n پیدا می‌کنیم و سپس آن را متحد با صفر قرار می‌دهیم یعنی m و n را طوری تعیین می‌کنیم که باقی ماندهٔ بازاء جمیع مقادیر متغیر x برابر صفر باشد، در این صورت داریم: $R(x)\equiv 0$ که ضرایب کلیهٔ درجات متغیر برابر صفر خواهد بود. بنابراین داریم:

$$x^2-mx+n=0\Rightarrow x^2=mx-n$$
$$x^2=mx-n\Rightarrow R(x)=(mx-n)^2+1=$$
$$m^2x^2-2mnx+n^2+1$$
$$R(x)=m^2(mx-n)-2mnx+n^2+1=(m^3-2mn)$$
$$x-m^2n+n^2+1\equiv 0$$

$$\Rightarrow\left|\begin{array}{l} m^3-2mn=0\Rightarrow m(m^2-2n)=0 \begin{cases} m=0 \\ m^2=2n \end{cases} \\ n^2-m^2n+1=0 \end{array}\right.$$

به ازای $m=0$ در معادلهٔ دوم دستگاه جواب حقیقی نداریم.

ولی به ازای $m^2=2n$ معادلهٔ دوم دستگاه چنین می‌شود: $n^2-2n^2+1=0$ و در نتیجه مقدار m و n محاسبه می‌شوند یعنی داریم: $n^2=1\Rightarrow n=\pm1$.به ازای $n=-1$ مقدار m غیر حقیقی است. و به ازای $n=1$ دو مقدار برای m به‌دست می‌آید و داریم : $n=1\Rightarrow m^2=2\Rightarrow m=\pm\sqrt{2}$ و در نتیجه اگر $n=1$ آنگاه

$m=\pm\sqrt{2}$ و بنابراین جواب مسئله $n=1$ و $m=\sqrt{2}$ یا $n=1$ و $m=-\sqrt{2}$ است.

روش دوم: برای تعیین باقی ماندهٔ $p(x)$ بر ax^2+bx+c اگر معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز باشد می‌توان به روش دیگر نیز آن را محاسبه کرد. اگر α و β دو ریشهٔ آن باشند، خواهیم داشت: $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$. در این صورت طبق رابطهٔ بخش پذیری داریم:

$$p(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)q(x)+kx+s$$

که در این رابطه $R=kx+s$ باقی ماندهٔ تقسیم است. حال طبق قانون بخش پذیری داریم:

$$p(\alpha)=k\alpha+s \quad \text{و} \quad p(\beta)=k\beta+s$$

یعنی k و s از دستگاه زیر به‌دست می‌آیند:

$$\left|\begin{array}{l} k\alpha+s=p(\alpha) \\ k\beta+s=p(\beta) \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} k=\dfrac{p(\alpha)-p(\beta)}{\alpha-\beta} \\ s=\dfrac{\alpha p(\beta)-\beta p(\alpha)}{\alpha-\beta} \end{array}\right.$$

می‌دانیم $p(\alpha)$ و $p(\beta)$ به ترتیب باقی مانده‌های $p(x)$ بر $(x-\alpha)$ و $(x-\beta)$ می‌باشند و در نتیجه داریم:

$$p(\alpha)=R_1,\ \ p(\beta)=R_2$$

مثال ۹: اگر باقی ماندهٔ تقسیم چند جمله‌ای $p(x)$ بر $x+1$ و $x-1$ به ترتیب برابر ۲ و ۴- باشد باقی ماندهٔ $p(x)$ را بر x^2-1 پیدا کنید.

حل: چون داریم: $x^2-1=(x-1)(x+1)$ و $p(1)=-4$ و $p(-1)=2$ بنابراین داریم:

$$k+s=-4 \qquad (R(x)=kx+s)$$
$$k(-1)+s=p(-1),\ k+s=p(1)$$

و در نتیجه دستگاه مقابل حاصل می‌شود:

$$-k+s=2 \Rightarrow k=-3,\ s=-1 \Rightarrow R(x)=-3x-1$$

مثال ۱۰: نشان دهید هرگاه باقی ماندهٔ چند جمله‌ای های: $A(x)$ و $B(x)$ بر ax^2+bx+c به ترتیب برابر $kx+s$ و $mx+n$ باشند برای تعیین باقی ماندهٔ $A(x)B(x)$ بر ax^2+bx+c کافی است باقی ماندهٔ: $(kx+s)(mx+n)$ را بر ax^2+bx+c پیدا کنیم.

حل: بنابر قانون بخش پذیری داریم:

$$\begin{cases} A(x)=q_1(x)\,(ax^2+bx+c)+kx+s \\ B(x)=q_2(x)\,(ax^2+bx+c)+mx+n,\ A(x)\,B(x)= \end{cases}$$

$$q_3(x)(ax^2+bx+c)+R(x) \qquad (1)$$

در اینجا کافی است $R(x)$ را تعیین کنیم. بنابراین حاصل ضرب $A(x)$ و $B(x)$ را به‌دست می‌آوریم و از آنجا با مقایسه می‌توان $R(x)$ را به‌دست آورد. یعنی:

$$A(x)B(x)=[\,q_1(x)(ax^2+bx+c)+kx+s\,][q_2(x)(ax^2+bx+c)+mx+n]$$

$$A(x)B(x)=q_1(x)q_2(x)(ax^2+bx+c)^2+[(mx+s)q_1(x)+(kx+s)q_2(x)\,](ax^2+bx+s)+(kx+s)(mx+n)$$

$$A(x)B(x)=\underbrace{[q_1(x)q_2(x)(ax^2+bx+c)+(mx+s)q_1(x)+(kx+s)q_2(x)]}_{q_3(x)}$$
$$\times(ax^2+bx+s)+(kx+s)(mx+n) \qquad (2)$$

بنابراین در اینجا با مقایسهٔ روابط (۱) و (۲) داریم:

$$A(x)B(x)=q_3(x)(ax^2+bx+s)+\underbrace{(kx+s)(mx+n)}_{R(x)}$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$R(x)=(kx+s)(mx+n)$$

از آنجاکه باقی ماندهٔ هر تقسیم حداقل یک درجه از درجهٔ مقسومٌ علیه کمتر است بنابراین باقی ماندهٔ $A(x)B(x)$ از تقسیم نهایی $R(x)$ بر ax^2+bx+c به‌دست می‌آید و در نتیجه باقی‌ماندهٔ $A(x)B(x)$ بر ax^2+bx+c برابر باقی ماندهٔ $R(x)=(kx+s)(mx+n)$ بر ax^2+bx+c می‌باشد. در اینجا برای روشن شدن مطلب یک مثال عددی حل می‌کنیم. مثلاً اگر باقی ماندهٔ $A(x)$ و $B(x)$ بر x^2-3x+2 به ترتیب $x+2$ و $x-2$ باشد باقی‌ماندهٔ $A(x)B(x)$ بر x^2-3x+2 را پیدا کنید.

حل: برای به‌دست آوردن باقی ماندهٔ $A(x)B(x)$ بر x^2-3x+2 کافی است باقی‌ماندهٔ x^2-4 را بر x^2-3x+2 پیدا کنیم. بنابراین داریم:

$$x^2-3x+2=0 \Rightarrow x^2=3x-2 \Rightarrow R(x)=(3x-2)-4=3x-6$$

و در نتیجه باقی‌ماندهٔ $A(x)B(x)$ بر x^2-3x+2 برابر $3x-6$ می‌باشد.

مثال ۱۱ : نشان دهید در صورتی که $p(x)$ بر $x^{n+1}-1$ بخش‌پذیر باشد بر $1+x+...+x^{n-2}+x^{n-1}+x^n=g(x)$ نیز بخش‌پذیر است.

حل : کافی است به اتحاد : $(1+x+...+x^{n-1}+x^n)(x-1)=1-x^{n+1}$ توجه کنیم. زیرا اگر $p(x)$ بر $x^{n+1}-1$ و یا $(x-1)(x^n+x^{n-1}+...+x+1)$ بخش‌پذیر باشد بر هر یک از عامل‌های مقسوم یعنی $x-1$ و $x^n+x^{n-1}+...+x+1$ نیز بخش‌پذیر است. به‌عنوان مثال اگر عبارتی بر x^5+1 بخش‌پذیر باشد بر عامل‌های آن (عامل‌های مقسوم‌علیه) یعنی $x+1$ و $x^4-x^3+x^2-x+1$ نیز بخش‌پذیر است. زیرا داریم: $x^5+1=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$ بنابراین در اینجا نتیجه می‌شود که اگر عبارتی بر عبارت دیگر بخش‌پذیر باشد بر عامل‌های آن عبارت نیز بخش‌پذیر است.

مثال ۱۲ : اگر p و q و r و s و t اعداد طبیعی باشند ثابت کنید،

$$A(x)=x^{14p+6}-x^{14q+5}+x^{14r+4}-x^{14r+3}+x^{14s+2}-x^{14s+1}+x^{14t}$$

بر

$$x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1$$

بخش‌پذیر است.

حل : در این مسئله کافی است ثابت کنیم $A(x)$ بر x^7+1 بخش‌پذیر است. بنابراین $A(x)$ را برحسب توان‌هایی از ۷ منظم می‌کنیم و با در نظر داشتن $x^7+1=0$ به‌جای x^7 مقدار -1 را قرار می‌دهیم. یعنی :

$$A(x)=(x^7)^{2p}\ x^6-(x^7)^{2q}\ x^5+(x^7)^{2r}\ x^4-(x^7)^{2r}\ x^3+(x^7)^{2s}x^2-(x^7)^{2s}x+(x^7)^{2t}$$

$$R(x)=(-1)^{2p}x^6-(-1)^{2q}x^5+(-1)^{2r}x^4-(-1)^{2r}x^3+(-1)^{2s}x^2-(-1)^{2s}x+(-1)^{2t}=x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1=0$$

بنابراین $A(x)$ برعبارت مفروض بخش‌پذیر است. زیراباقی‌ماندهٔ تقسیم $R(x)$ بر $x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1$ برابر صفر است.

۵) بخش‌پذیری $p(x)$ بر $(x-a)^n$:

اگر $p(x)$ بر $(x-a)^n$ بخش‌پذیر باشد آنگاه،
$p(x)=(x-a)^n q(x)$ و بنابراین با مشتق‌گیری مکرر تا $(n-1)$ مرتبه از این رابطه خواهیم دید که عامل $(x-a)$ باز هم موجود خواهد بود و در نتیجه با قرار دادن $x=a$ داریم $p^{(n-1)}(a)=0$ یعنی اگر از $p(x)$ به‌طور مکرر $(n-1)$ مرتبه مشتق بگیریم عبارت حاصل که $p^{(n-1)}(x)$ می‌باشد باز هم بر $x-a$ بخش پذیر است، به‌عبارت دیگر چون، $p^{(n-1)}(a)=0$ بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم $p^{(n-1)}(x)$ بر $x-a$ صفر است و در نتیجه $p^{(n-1)}(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است. و در اینجا از نتیجهٔ فوق می‌توان قضیه زیر را استخراج کرد.

قضیه : شرط لازم و کافی برای آنکه چند جمله‌ای $p(x)$ بر $(x-a)^n$ بخش‌پذیر باشد آن است که $p(x)$ و همهٔ مشتقات متوالی آن تا مرتبهٔ $(n-1)$ ام بر $(x-a)$ بخش‌پذیر باشند. یعنی داشته باشیم:

$$p(a)=p'(a)=p''(a)=...=p^{(n-1)}(a)=0$$

مثال ۱۳ : به ازای چه مقادیری از a و b و c عبارت درجهٔ چهارم $p(x)=x^4+ax^2+bx+c$ بر $(x+1)^3$ بخش‌پذیر است.

حل : شرط این‌که $p(x)$ بر $(x+1)^3$ بخش‌پذیر باشد این‌است که $p(x)$ و $p'(x)$ و $p''(x)$ بر $(x+1)$ بخش‌پذیر باشند. با دوبار مشتق‌گیری داریم :

$$p'(x)=4x^3+2ax+b\ ,\ p''(x)=12x^2+2a$$

چون $p(x)$ و $p'(x)$ و $p''(x)$ بر $(x+1)$ بخش‌پذیرند بنابراین داریم:

$$x+1=0\ ،\ x=-1$$

$$\Rightarrow p(-1)=(-1)^4+a(-1)^2+b(-1)+c=0$$

$$\Rightarrow p(-1)=1+a-b+c=0 \qquad (1)$$

$$p'(-1)=4(-1)^3+2a(-1)+b=0$$

$$\Rightarrow p'(-1)=-4-2a+b=0 \qquad (2)$$

$$p''(-1)=12(-1)^2+2a=0\Rightarrow 12+2a=0\Rightarrow a=-6 \qquad (3)$$

از روابط (۱) و (۲) و (۳) مقادیر a و b و c به‌دست می‌آیند یعنی داریم:

$$a=-۶: -۴-۲a+b=۰ \Rightarrow$$
$$-۴-۲(-۶)+b=۰ \Rightarrow b=-۸$$
$$a=-۶\,,\, b=-۸: ۱+a-b+c=۰ \Rightarrow ۱-۶-(-۸)+c$$
$$=۰ \Rightarrow c=-۳$$

و بنابراین $p(x)$ مشخص می‌شود یعنی:

$$p(x)=x^۴-۶x^۲-۸x-۳$$

مثال ۱۴ : در چند جمله‌ای: $p(x)=x^۳+px^۲+qx+R$ مقادیر p و q و R را چنان تعیین کنید که $p(x)$ بر $(x-۱)^۲$ و $x+۲$ بخش‌پذیر باشد.

حل : فرض می‌کنیم که $p(x)$ بر $(x-۱)^۲$ بخش‌پذیراست بنابراین $p'(x)$ نیز بر $(x-۱)$ بخش پذیر است و داریم:

$$x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \qquad (۱)$$
$$p(۱)=(۱)^۳+p(۱)^۲+q(۱)+R=۰\,,$$

$$p'(x)=۳x^۲+۲px+q \Rightarrow p'(۱)=$$
$$۳(۱)^۲+۲p(۱)+q=۰ \qquad (۲)$$

از طرفی دیگر $p(x)$ بر $x+۲$ نیز باید بخش‌پذیر باشد بنابراین داریم : $x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲$

$$p(-۲)=(-۲)^۳+p(-۲)^۲+q(-۲)+R=۰ \qquad (۳)$$

از روابط (۱) و (۲) و (۳) دستگاه سه معادله و سه مجهول تشکیل می‌شود که از حل این دستگاه پارامترهای مطلوب محاسبه می‌شوند یعنی:

از حل دستگاه فوق داریم:

$$\begin{cases} p+q+R=-۱ \\ ۲p+q=-۳ \\ ۴p-۲q+R=۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=۰ \\ q=-۳ \\ R=۲ \end{cases}$$

و در نتیجه $p(x)$ مشخص می‌شود یعنی: $p(x)=x^۳-۳x+۲$

٦) بخش‌پذیری $x^n \pm a^n$ بر $x \pm a$:

در اینجا لازم است چهار حالت را مورد بررسی قرار دهیم و شرط بخش‌پذیری را برای هر یک از حالات چهارگونه به‌دست آوریم.

۱) $p(x)=x^n+a^n$ بر $x-a$ هرگز بخش‌پذیر نیست زیرا داریم : $R=p(a)=۲a^n$.

۲) $p(x)=x^n+a^n$ بر $x+a$ وقتی بخش‌پذیر است که n فرد باشد. زیرا داریم :

$$x+a=۰ \Rightarrow x=-a: R=p(-a)=(-a)^n+a^n=۰ \Rightarrow$$
$$n=۲k-۱:$$

و می‌دانیم:

$$x^n+a^n=(x+a)(x^{n-۱}-ax^{n-۲}+\dots-a^{n-۲}x+a^{n-۱})$$

۳) $p(x)=x^n-a^n$ بر $x+a$ وقتی بخش‌پذیر است که n زوج باشد. زیرا داریم:

$$x+a=۰ \Rightarrow x=-a: R=p(-a)=(-a)^n-a^n=۰$$
$$n=۲k: x^n-a^n=(x+a)$$

و می‌دانیم:

$$(x^{n-۱}-ax^{n-۲}+\dots+a^{n-۲}x-a^{n-۱})$$

۴) $p(x)=x^n-a^n$ بر $x-a$ همواره بخش‌پذیر است. زیرا داریم:

$$x-a=۰ \Rightarrow x=a: R=p(a)=a^n-a^n=۰$$

و می‌دانیم:

$$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-۱}+ax^{n-۲}+\dots+a^{n-۱})$$

مثال ۱۵ : آیا عبارت $x^{۱۵}+y^{۴۵}$ بر $x+y^۳$ بخش‌پذیر است؟

حل: بله، زیر داریم:

$$x+y^۳=۰ \Rightarrow x=-y^۳: R=(-y^۳)^{۱۵}+y^{۴۵}=-y^{۴۵}+y^{۴۵}=۰$$

مثال ۱۶ : آیا عبارت $x^۴-۱۶$ بر $x+۲$ و $x-۲$ بخش‌پذیر است؟

حل: بله، زیراداریم:

$$x-۲=۰ \Rightarrow x=۲, x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲$$
$$: R=(\pm۲)^۴-۱۶=۱۶-۱۶=۰$$

مثال ۱۷ : آیا عبارت x^7+y^{14} بر $x-y^2$ بخش‌پذیر است؟

حل : خیر، زیرا داریم:

$$x-y^2=0 \Rightarrow x=y^2:$$
$$R=(y^2)^7+y^{14}=y^{14}+y^{14}=2y^{14}$$

۷ : بخش پذیری $p(x)=x^n \pm a^n$ بر $x^k \pm a^k$ (با فرض: $n,k\in N$ و $a>0$):

در این جا نیز چهار حالت ممکن را در نظر می‌گیریم و مورد بررسی قرار می‌دهیم:

۱) $p(x)=x^n+a^n$ بر x^k-a^k بخش‌پذیر نیست. زیرا داریم:

$$x^k-a^k=0 \Rightarrow x^k=a^k \Rightarrow \begin{cases} k \text{ زوج}: x=\pm a \\ k \text{ فرد}: x=a \end{cases} \Rightarrow$$

$$R=(\pm a)^n+a^n \Rightarrow \begin{cases} n \text{ زوج}: R=2a^n \\ n \text{ فرد}: R=2a^n \text{ و } R=0 \end{cases}$$

بنابراین به ازای هر مقدار n و k ، $p(x)$ بر x^k-a^k بخش‌پذیر نیست. بدیهی است که در حالت k زوج و n فرد $p(x)$ باید بر $x-a$ و $x+a$ بخش‌پذیر باشد که می‌دانیم $p(x)=x^n+a^n$ بر $x-a$ بخش‌پذیر نیست.

۲) $p(x)=x^n+a^n$ بر x^k+a^k وقتی بخش‌پذیر است که $\frac{n}{k}$ عددی فرد باشد. به‌عنوان مثال عبارت $x^{48}+1$ بر $x^{16}+1$ بخش‌پذیر است زیرا داریم: $\frac{48}{16}=3$ و بنابراین داریم: $x^{48}+1=(x^{16})^3+1$ و $x^{16}=-1$ و در نتیجه، $R=(-1)^3+1=0$

۳) $p(x)=x^n-a^n$ بر x^k+a^k وقتی بخش‌پذیر است که $\frac{n}{k}$ زوج باشد، یعنی: $\frac{n}{k}=2t$. زیرا داریم:

بافرض

$$n=2kt: p(x)=x^{2kt}-a^{2kt}=(x^{kt}-a^{kt})(x^{kt}+a^{kt})$$
$$p(x)=[(x^k)^t-(a^k)^t][(x^k)^t+(a^k)^t] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t=\text{فرد}: \text{عامل } (x^k)^t+(a^k)^t \text{ بر } x^k+a^k \text{ بخش‌پذیراست} \\ t=\text{زوج}: \text{عامل } (x^k)^t-(a^k)^t \text{ بر } x^k+a^k \text{ بخش‌پذیراست} \end{cases}$$

به‌عنوان مثال $x^{48}-1$ بر x^6+1 و x^4+1 و x^3+1 و x^2+1 بخش‌پذیر است، زیراداریم: $\frac{48}{2}=24$ و $\frac{48}{3}=16$ و $\frac{48}{4}=12$ و $\frac{48}{6}=8$.

۴) $p(x)=x^n-a^n$ بر x^k-a^k وقتی بخش‌پذیر است که n بر k قابل قسمت باشد یعنی داشته باشیم: $n=kt$ زیرا اگر n را بر k تقسیم کنیم داریم، $n=kt+r$ و در نتیجه خواهیم داشت:

$p(x)=x^{kt+r}-a^{kt+r} \Rightarrow p(x)=(x^k)^t x^r-a^{kt+r}$ و اگر قرار دهیم $x^k=a^k$ باقی‌ماندهٔ تقسیم چنین است:

$$R=(a^k)^t x^r-a^{kt+r}=a^{kt}(x^r-a^r)$$

برای آنکه باقی ماندهٔ صفر شود باید داشته باشیم: $x^r-a^r=0$ که چون $x\neq a$ لذا $r=0$ و در نتیجه به‌دست می‌آید: $n=kt$.

به‌عنوان مثال $p(x)=x^{36}-y^{54}$ بر x^9-y^{18} بخش‌پذیر است زیرا داریم:

$$x^9-y^{18}=0 \Rightarrow x^9=y^{18}: R(x)=(y^{18})^4-y^{54}=y^{54}-y^{54}=0$$

مثال ۱۸ : آیا عبارت $p(x)=64A^{12}B^{18}-C^6D^{24}$ بر $8A^6B^9-C^3D^{12}$ بخش‌پذیر است؟

حل : ابتدا $p(x)$ را برحسب توانی از ۶ منظم می‌کنیم یعنی: $p(x)=(2A^2B^3)^6-(CD^4)^6$ سپس مقسومٌ علیه را برحسب توانی از ۳ منظم می‌کنیم یعنی:

$$8A^6B^9-C^3D^{12}=(2A^2B^3)^3-(CD^4)^3$$

بافرض $\begin{cases} x=2A^2B^3 \\ y=CD^4 \end{cases}$ ، $p(x)$ و مقسومٌ علیه چنین می‌شوند:

$$p(x)=x^6-y^6 , (2A^2B^3)^3-(CD^4)^3=x^3-y^3$$

چون $\frac{n}{k}=\frac{6}{3}=2$ عددی است صحیح بنابراین n بر k بخش‌پذیر است و در نتیجه $p(x)$ بر x^3-y^3 بخش‌پذیر است و داریم: $\frac{p(x)}{x^3-y^3}=\frac{x^6-y^6}{x^3-y^3}=x^3+y^3$. بنابراین باقی ماندهٔ تقسیم صفر و خارج قسمت آن چنین است: $q(x)=x^3+y^3=8A^6B^9+C^3D^{12}$.

مسائل بخش‌پذیری:

۱) در یک تقسیم در صورتی که درجهٔ خارج قسمت ۵ و درجهٔ باقی‌مانده ۳ باشد درجهٔ مقسوم چیست؟

۲) در چند جمله‌ای $p(x)=x^5+ax^3+bx^2+c$: مقادیر a و c و b را طوری تعیین کنید که $p(x)$ بر x^2-1 بخش‌پذیر باشد و باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x+2$ برابر -3 شود.

۳) خارج قسمت و باقی ماندهٔ تقسیم: $p(x)=x^5-3x+1$ را بر $x-1$ بدون عمل تقسیم به‌دست آورید.

۴) باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)=x^{45}-3x^{30}+2x^{15}-x^5+1$ بر x^5+1 را حساب کنید.

۵) اگر عبارت $p(x)=x^8+16$ بر $x^{40}-mx^2+n$ بخش پذیر باشد m و n را حساب کنید.

۶) باقی ماندهٔ تقسیم $p(x)=x^5-3x^3+2x+1$ را بر x^2+x-2 به‌دست آورید.

۷) اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چند جمله‌ای $A(x)$ بر $x+2$ و $x-1$ به ترتیب برابر -2 و 1 باشد باقی‌ماندهٔ تقسیم $A(x)$ بر x^2+x-2 را به‌دست آورید.

۸) نشان دهید اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $A(x)$ بر $g(x)$ برابر R_1 و باقی‌ماندهٔ تقسیم $B(x)$ بر $g(x)$ برابر R_2 باشد، آنگاه باقی‌ماندهٔ تقسیم $A(x)B(x)$ بر $g(x)$ برابر با باقی‌ماندهٔ تقسیم R_1R_2 بر $g(x)$ است.

۹) اگر باقی‌ماندهٔ $A(x)$ بر x^2-3x+2 برابر $x-1$ و باقی‌ماندهٔ تقسیم $B(x)$ بر x^2-3x+2 برابر $x+2$ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $A(x)B(x)$ بر x^2-3x+2 را تعیین کنید.

۱۰) باقی‌ماندهٔ تقسیم $x^{5n+30k+1}$ را بر $x^4+x^3+x^2+x+1$ به‌دست آورید.

۱۱) اگر A و B و C اعداد طبیعی باشند، ثابت کنید عبارت:
$A(x)=x^{12A+1}+x^{20B+2}+x^{40C+3}+1$ بر x^3+x^2+x+1 بخش پذیر است.

۱۲) در تقسیم $p(x)=x^5+kx^3+sx^2+t$ مقادیر k و s و t را چنان تعیین کنید که $p(x)$ بر $(x+1)^3$ بخش پذیر باشد.

۱۳) آیا عبارت $x^{30}+y^{135}$ بر x^2+y^9 بخش‌پذیر است؟

۱۴) در عبارت $A(x)=x^{77}+y^{7n}$ مقدار n را چنان تعیین کنید که عبارت $A(x)$ بر $x^{11}+y^5$ بخش پذیر باشد.

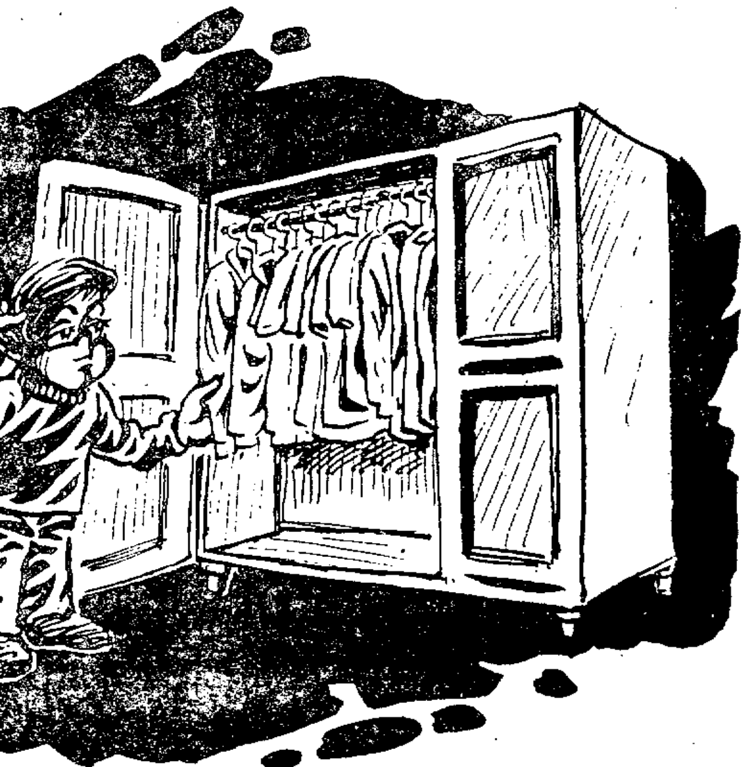
۱۵) عبارت $x^{96n}+k^{3n}$ به ازای چه مقادیری از k و n بر عبارت $x^{32}+k$ بخش‌پذیر است.

تفریح اندیشه

(از : Games of Logic , Pierre Berloquin)

کمد پیراهنهای تیمور دارای ۱۷ پیراهن آبی، ۱۱ زرد، ۹ نارنجی، ۳۴ سبز، و ۲ بنفش است که مطابق رنگهاشان قرار نگرفته‌اند.
برق رفته و تیمور نمی‌تواند رنگهای پیراهنها را تشخیص دهد. در این صورت تیمور چند پیراهن باید بردارد تا مطمئن شود که حداقل دو پیراهن از یک رنگ را برداشته است؟

جواب: پنج رنگ موجود است. پنج پیراهن اول ممکن است همه به رنگهای مختلف باشند، در حالی که شش پیراهن اول نمی‌توانند.



تفریح اندیشه

(از : دانشنامهٔ علائی، رسالهٔ منطق. بوعلی سینا)
به تصحیح : دکتر محمد معین و سید محمد مشکوه

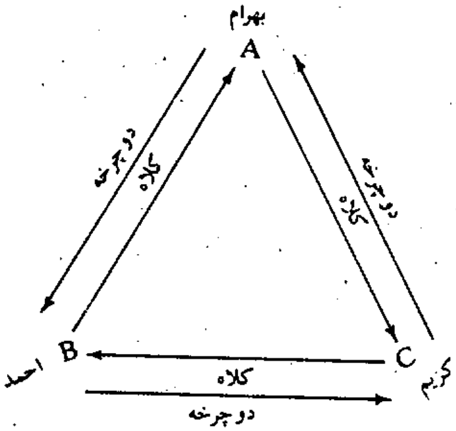
دانستن دوگونه است

یکی اندر رسیدن، که به تازی تصور خوانند، چنانکه اگر کسی گوید : مردم، یا پری، یا فرشته و هر چه بدین ماند تو فهم کنی؛ و تصور کنی، و اندر یابی.
و دوم، گرویدن چنانکه بگروی که پری هست، و مردم زیر فرمان است، و هر چه بدین ماند؛ و این را به تازی تصدیق گویند.
و این هر دو دوگونه‌اند :
یکی آن است که به اندیشه شاید اندر یافتن، و چاره نبود که او را به طلب از راه خود شاید به جای آوردن، چنانکه اندر رسیدن به چه چیزی روان، و تصور کردن وی؛ و چنانکه گرویدن به نامردن روان، و تصدیق کردن به وی.
و دیگر آن است که او را اندر یابیم و به وی بگرویم، نه از جهت اندیشه، و نه به طلب خرد، بلکه به اول خرد دانیم.*
چنانکه دانیم که هر چه برابر باشند با یک چیز که هر یک چند وی بوند، یک با دیگر نیز برابر بوند.

* این‌ها همانند که در ریاضیات به عبارات تعریف نشده و به اصول موضوعه معروف‌اند.

(از : Games of Logic , Pierre Berloquin)

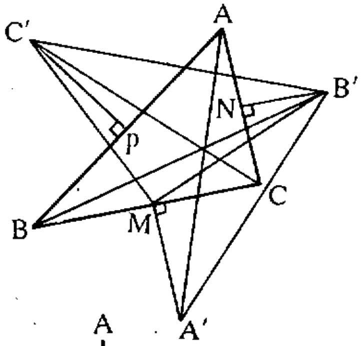
احمد، بهرام و کریم سوار دوچرخه‌اند. هر یک سوار دوچرخهٔ دوستش شده و کلاه دوست دیگرش را بر سر نهاده است.
آنکه کلاه کریم را برسر دارد دوچرخهٔ بهرام را می‌راند. چه کسی بر دوچرخهٔ احمد سوار است؟



جواب : شخصی که دوچرخهٔ بهرام را می‌راند و کلاه کریم را بر سر دارد نمی‌تواند بهرام یا کریم باشد، پس احمد است.
اگر بهرام سوار بر دوچرخهٔ احمد باشد، کریم سوار بر دوچرخهٔ خود است، اما چنین نیست، بنابراین بهرام دوچرخهٔ کریم و کریم دوچرخهٔ احمد را می‌راند.

مسائل مسابقه‌ای

محمد هاشم رستمی

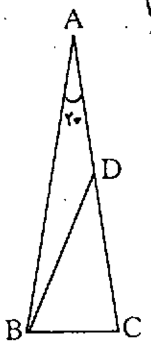


۱ ـ مثلث ABC را در نظر گرفته اوساط اضلاع BC و CA و AB را به ترتیب M و N و P می‌نامیم و در خارج مثلث پاره خطهای MA' و NB' و PC' را به ترتیب عمود بر BC و CA و AB و مساوی نصف آنها رسم می‌کنیم. ثابت کنید:

اولاً ـ مثلث $B'MC'$ قائم الزاویهٔ متساوی الساقین است.

ثانیاً ـ $A'B'$ و CC' بر هم عمود و با هم مساویند.

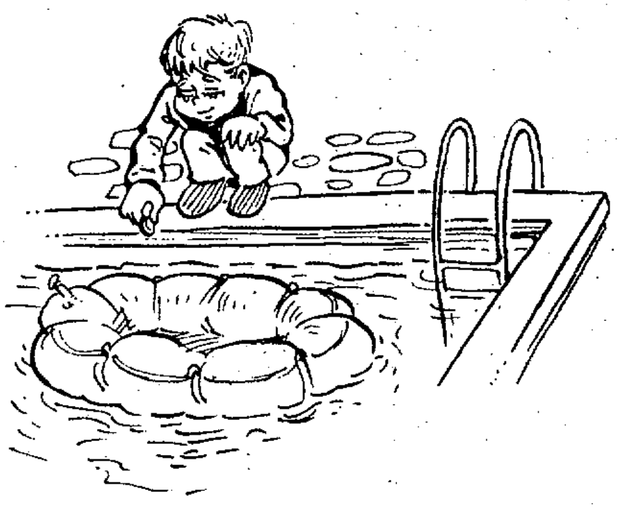
ثالثاً ـ خطوط AA' و BB' و CC' از یک نقطه می‌گذرند.



۲ ـ در مثلث متساوی الساقین ABC ، $(AB=AC)$ اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}=۲۰^\circ$ است.
روی ساق AC از نقطهٔ A به طرف C پاره خط AD را مساوی قاعده BC جدا می‌کنیم و از D به B وصل می‌نماییم. اندازهٔ زاویهٔ BDC را محاسبه کنید.

تفریح اندیشه

(از : Games of Logic , Pierre Berloquin)



در استخری یک قایق لاستیکی باد شده انداخته‌ایم. کدام عمل سطح آب را بالاتر می‌آورد : انداختن سکه‌ای درون قایق، یا انداختن سکه‌ای در آب؟

جواب : انداختن سکه در قایق، زیرا سکه در آب به اندازهٔ حجمش آب را تغییر حجم می‌دهد، در حالی که در قایق به اندازهٔ آب هم وزنش آن را جابه‌جا می‌کند، و از آنجا که سکهٔ فلزی از آب سنگین‌تر است، سکه بیش از آب هم حجمش وزن دارد.

مسائل برای حل
(مورد استفاده دانش آموزان سالهای اول تا چهارم دبیرستان)

سال اول

جبر سال اوّل

سید محمّدرضا هاشمی موسوی

۱) عبارت $A(x)=\sqrt{x+1}+\frac{x^3+1}{x^2-1}-\frac{3x+3}{x(x^2-2)}$ در مجموعه اعداد حقیقی به‌ازاء چه مقادیری از x تعریف شده است (دامنه تعریف $A(x)$). سپس $A(-1)$ و $A(-3)$ را به‌دست آورید.

۲) عبارتهای $A=2a^2b^3cx^2y^4z^5$ و $B=-4ab^2c^2x^2y^3z^7$ و $C=-6a^3bd^2xyz$ را در نظر می‌گیریم:

a) عبارت $\frac{A^2C}{B}$ نسبت به x و y و z و t و a و b و abc و xyzt از درجه چند است؟

b) حاصل نسبت $\frac{A^4+B^4+C^4}{ABC}$ را به‌دست آورید.

c) عامل مشترک عبارت: $A^3+B^3+C^3$ را به‌دست آورید.

d) بزرگترین عامل مشترک (ب. م. م) و کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) بین A و B و C را تعیین کنید.

۳) در عبارتهای زیر به جای؟ عبارت مناسب بنویسید:

a) $\frac{(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4})}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = ? + \sqrt{2}$

b) $9y^2+?+4p^2q^4=(??+2pq^2)^2$

c) $x^2-4a^2b^2x+?=(x-??)^2$

d) $\left(1+\frac{2x^ny^n}{x^{2n}+y^{2n}}\right)\left(1-\frac{2x^ny^n}{(x^n+y^n)^2}\right)=?$

e) $1+4x^4=(1+2x+2x^2)(?)$

f) $(x^5+1)\div(x+1)=?$

g) $\sqrt[5]{3\sqrt[5]{2\sqrt[5]{3\sqrt[5]{2\cdots}}}}=?$

h) $-2+\cfrac{3}{-2+\cfrac{3}{-2+\cdots}}=?$

i) $(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})\dots(1+x^{2^n})=1-?$

۴) عبارتهای $A=x^2+x+1$ و $B=2x^2-3x+2$ و $C=3x^2+x-4$ را در نظر می‌گیریم:

a) عبارت $3A-B+2C$ را به‌دست آورید.

b) مقدار x را طوری تعیین کنید که داشته باشیم $A+B=C$.

c) عبارت B^2-4A^2 را تجزیه کنید.

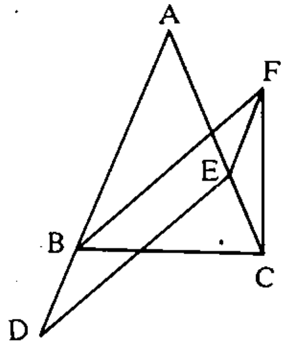
d) مقدار ABC را به ازاء $x=-1$ حساب کنید.

e) درجه عبارت $C(B-2A)$ را به‌دست آورده و برحسب قوای صعودی مرتب کنید.

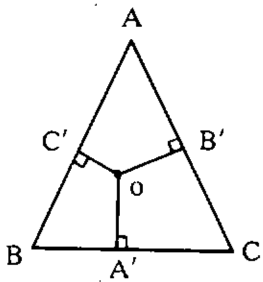
هندسه سال اوّل

محمد هاشم رستمی

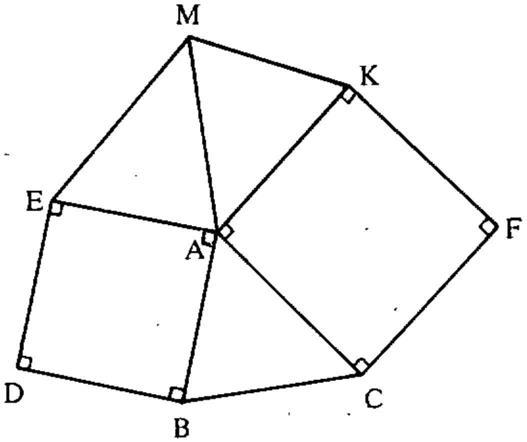
۱) در مثلث متساوی الساقین ABC ، $(AB=AC)$ در امتداد ضلع AB نقطهٔ اختیاری D و روی ضلع AC نقطه E را چنان اختیار می‌کنیم که $BD=CE$ باشد. ثابت کنید اگر با اضلاع BD و DE متوازی الاضلاع DBFE را بنا کنیم FC بر BC عمود است.



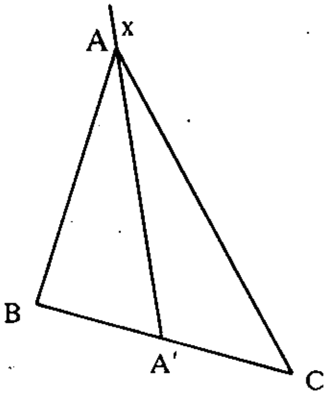
۲) از نقطه O واقع در داخل مثلث متساوی الاضلاع ABC عمودهای OA' و OB' و OC' را به ترتیب بر اضلاع BC و AC و AB فرود می‌آوریم، ثابت کنید که با تغییر مکان نقطهٔ O در داخل مثلث ABC همواره $AC'+BA'+CB'$ مقداری است ثابت.



۳) روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC و درخارج آن دو مربع ABDE و ACFK و سپس روی AE و AK متوازی‌الاضلاع AEMK را می‌سازیم. ثابت کنید که $AM=BC$ و $AM \perp BC$ است.

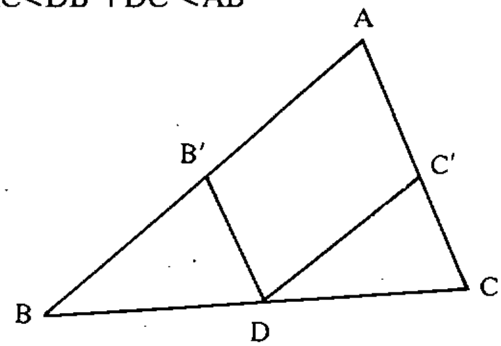


۴) از نقطهٔ A' وسط پاره خط BC نیم خط $A'x$ را رسم می‌کنیم و روی آن نقطهٔ A را اختیار می‌کنیم. ثابت کنید بنابر آنکه پاره خط AA' مساوی یا بزرگتر یا کوچکتر از $\frac{BC}{۲}$ باشد. زاویهٔ A از مثلث ABC به ترتیب قائمه یا حاده یا منفرجه است.



۵) در مثلث ABC با فرض $AB>AC$ از نقطهٔ D واقع بر ضلع BC خطوطی به موازات دو ضلع دیگر مثلث رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط B' و C' قطع کنند. ثابت کنید:

$AC<DB'+DC'<AB$



ریاضیات جدید سال اوّل

حمید رضا امیری

۱) ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید:

الف) $\forall x\in IR\,,\, x^2>0$ ب) $\forall x\in N\,,\, x-1\in N$

ج) $\exists x\in Z\,,\, x^2\notin N$ د) $\nexists x\in Q\,,\, x^2+1=0$

۲) ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید:

الف) $(\forall x\in N\,,\, x+1\in N)\wedge(\exists x\in N\,,\, x+1\notin N)$

ب) $(\forall x\in IR\,,\, \frac{x+1}{x-1}\in IR)\Rightarrow 2^{21}=49684$

ج) $(p \vee \sim p)\wedge(p\wedge \sim p)$

د) $12^8 = 8499088 \Rightarrow$ ۴ عددی زوج است

هـ) ۵ عددی زوج یا منفی است $\Leftrightarrow$ ۳ عددی فرد و اوّل است

۳) اگر ارزش گزارهٔ $(p\wedge q)\Rightarrow(q\vee r)$ درست باشد و q نیز گزاره‌ای درست باشد ارزش گزارهٔ $[(p\Leftrightarrow q)\wedge p]\Rightarrow(p\wedge s)$ را تعیین کنید.

۴) اگر ارزش گزارهٔ $(p\vee r)\Leftrightarrow(q\Rightarrow s)$ نادرست باشد و q نیز گزاره‌ای نادرست باشد در این صورت ارزش گزارهٔ $(\sim p\vee\sim q)\Leftrightarrow(r\wedge s)$ را تعیین کنید.

۵) متوازی‌الاضلاع بودن چه شرطی برای مستطیل بودن است؟

۶) عدد اوّل بودن چه شرطی برای طبیعی بودن است؟

۷) اگر $A=\{a,\{a\},\{a,\{a\}\}\}$ اوّلاً معین کنید مجموعهٔ A دارای چند زیر مجموعه است، ثانیاً تعیین کنید گزارهٔ زیر درست یا نادرست است؟ با ذکر دلیل.

$$(\{a\}\in A)\wedge(\{a\}\subseteq A)$$

۸) دو مجموعهٔ A و B روی هم دارای ۱۰ عضو می‌باشند و تعداد زیر مجموعه‌های مجموعهٔ A چهار برابر تعداد زیر مجموعه‌های مجموعهٔ B است. معین کنید هر یک چند عضو دارند.

۹) مجموعه‌های زیر را با نماد ریاضی نشان دهید:

$$A=\{1\,,\frac{1}{2}\,,\frac{1}{4}\,,\frac{1}{8}\,,\frac{1}{16}\}\quad B=\{-3,-2,2,3\}$$

۱۰) ثابت کنید هرگاه $A\cup B=M$ و $A\cap B=\phi$ (M مجموعهٔ مرجع است) در این صورت $B=A'$ (قضیهٔ یکتایی متمم).

۱۱) ابتدا ثابت کنید: $A\cap(A\cup B)=A$ و سپس با استفاده از آن تساوی روبرو را ثابت کنید: $A\cup(A\cap B)=A$ (این دو تساوی به قوانین جذب معروف می‌باشند)

سال دوم تجربی

جبر سال دوّم تجربی

سید محمّدرضا هاشمی موسوی

۱) کلیه‌ریشه‌های معادلهٔ $x^2(x^2-1)(x^3+1)(x^2-3x+2)=0$ را به دست آورید.

۲) معادلهٔ درجه دوّم: $x^2-2m^2x+m=0$ مفروض است.

a) m را چنان تعیین کنید که معادله ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

b) به ازاء چه مقادیری از m معادله همواره دارای دو ریشهٔ حقیقی است؟

c) به ازاء چه مقادیری از m معادله ریشه حقیقی ندارد؟

d) m را چنان تعیین کنید که یک ریشهٔ معادله برابر با عدد ۱ باشد.

e) به ازاء چه مقادیری از m معادله دو ریشهٔ مثبت دارد.

f) مقدار m را طوری تعیین کنید که معادله دو ریشهٔ عکس داشته باشد.

۳) به ازاء چه مقادیری از m و n نقاط $A\left|\begin{matrix}-n\\m\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}2m\\-2\end{matrix}\right.$ نسبت به نقطهٔ $M\left|\begin{matrix}3n-1\\m+n\end{matrix}\right.$ قرینهٔ یکدیگرند؟

۴) مقدار m را چنان تعیین کنید که معادلهٔ پارامتری زیر دارای ۲ ریشهٔ حقیقی مثبت باشد.

$$(m+1)x^2-8x+m+1=0$$

۵) مقدار k را چنان تعیین کنید که یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجه دوّم زیر مربع ریشهٔ دیگر باشد.

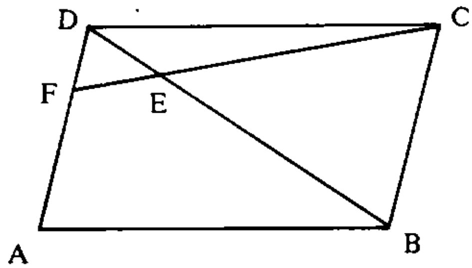
$$4x^2-15x+k=0$$

هندسه سال دوّم تجربی

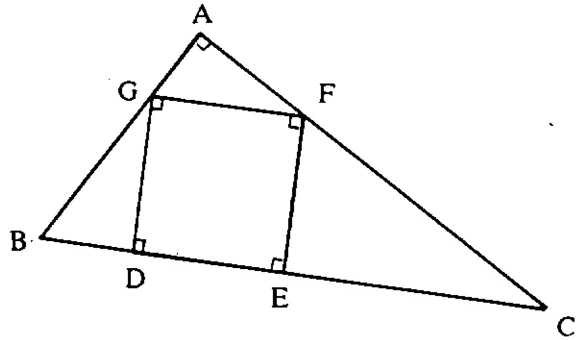
محمد هاشم رستمی

۱) متوازی‌الاضلاع $ABCD$ مفروض است. از رأس C خطی رسم می‌کنیم که قطر BD را در E قطع کند به قسمی که

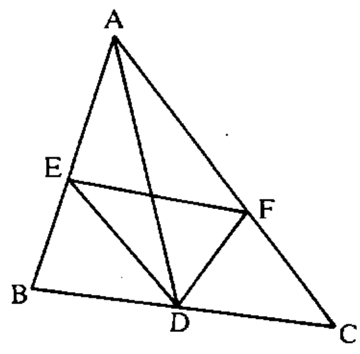
$BD=4DE$ باشد. اگر امتداد CE ، AD را در F قطع کند ثابت کنید $AF=2FD$ است.



۲) مثلث قائم الزاویهٔ ABC مفروض است ($\hat{A}$ قائمه است). مربع DEFG را چنان در این مثلث محاط می‌کنیم که ضلع DE روی وتر مثلث و دو رأس دیگر مربع روی اضلاع AB و AC قرار داشته باشند. ثابت کنید که $DE^2=BD.EC$ است.



۳) در مثلث ABC میانهٔ AD را در نظر گرفته و نیمسازهای دو زاویهٔ ADB و ADC را رسم می‌کنیم تا به ترتیب اضلاع AB و AC را در نقاط E و F قطع کنند. ثابت کنید که EF موازی با BC است.



مثلثات دوّم تجربی و ریاضی

حمیدرضا امیری

۱) اگر ۱/۲ برابر اندازهٔ زاویه‌ای برحسب گراد را به اندازهٔ همان زاویه برحسب درجه اضافه کنیم عدد ۴۵ به‌دست می‌آید اندازهٔ این زاویه برحسب رادیان چقدر است؟

۲) اندازهٔ زاویه‌ای برحسب رادیان برابر است با حاصل تقسیم 5π براندازهٔ همان زاویه برحسب درجه. اندازهٔ این زاویه را برحسب گراد محاسبه نمایید.

۳) x چه زاویه‌ای است، اگر حاصلضرب 900π در تفاضل عکس اندازه‌های آن برحسب درجه و گراد با دو برابر اندازهٔ آن برحسب رادیان برابر باشد.

۴) هرگاه $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ و $\cos x=2m-1$ حدود تغییرات m را تعیین کنید.

۵) اگر $A=\frac{\operatorname{tg} x \operatorname{cotg}^2 x}{(1-\cos x)}<0$ معین کنید انتهای کمان مربوط به زاویهٔ x در کدام ناحیه دایره مثلثاتی باید واقع باشد.

۶) بیشترین وکمترین مقدارعددی‌عبارت $A=\sin^2 x-2\sin x+5$ را محاسبه کنید.

۷) در صفحهٔ مختصات دکارتی اگر $p\left|\begin{matrix}15\\8\end{matrix}\right.$ و O مبدأ مختصات باشد و زاویه‌ای را که op با محور xها می‌سازد (زاویهٔ حاده) θ بنامیم مطلوب است محاسبهٔ کلیه نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ θ

۸) اگر $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{x+1}$ و $\sin\alpha=\sqrt{\frac{y}{y-1}}$ چه رابطه‌ای بین x و y برقرار است.

۹) در معادلهٔ $a^{\cos^2 x}+a^{\sin^2 x}=a+1$ مقدار x را به دست آورید

۱۰) درستی اتحادهای مثلثاتی زیر را بررسی کنید

الف) $\cos\alpha-\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}+\operatorname{tg}\alpha.\sin\alpha=0$

ب) $\sec^4\alpha-\operatorname{tg}^4\alpha=\sec^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha$

ج) $\operatorname{cotg}\alpha.\sec\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$

د) $\frac{1}{\sec^2\alpha} + \sec^2\alpha + \frac{1}{\operatorname{cosec}^2\alpha} - \frac{\sec^2\alpha}{\operatorname{cosec}^2\alpha} = 2$

۱۱) درستی نامساویهای زیر را تحقیق کنید (α و β حاده‌اند)

الف) $\frac{tg\alpha+tg\beta}{2} \ge \sqrt{tg\alpha\, tg\beta}$

ب) $(tg^2\alpha + cotg^2\alpha)^2 \ge (tg\alpha - cotg\alpha)^4$

سال دوم ریاضی

جبر دوم ریاضی

سید محمّدرضا هاشمی موسوی

۱) معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}2\\-2\end{matrix}\right.$ گذشته و برخط $4y-2x-1=0$ عمود باشد.

۲) هرگاه فاصلهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\right.$ از خط $2y-3px+1=0$ برابر با ۱ باشد پارامتر p را تعیین کرده و سپس خط را رسم کنید.

۳) سه خط D و D′ و D″ به معادلات

$$\begin{cases} D: ax+y+1=0 \\ D': ay+bx-1=0 \\ D'': 2x-y-b=0 \end{cases}$$

مفروضند:

اولاً: a و b را چنان تعیین کنید که خط D′ بر خط D″ عمود و با خط D موازی باشد ($ab\neq 0$).

ثانیاً: فاصلهٔ دو خط D و D′ را حساب کنید.

ثالثاً: خط $y=mx+h$ را طوری تعیین کنید که از نقطهٔ تقاطع D′ و D″ گذشته و با خط $2x+3y+1=0$ موازی باشد.

۴) معادلهٔ خطی را بنویسید که از دو نقطهٔ $A(\sqrt{3}, 3)$ و $B(0, 2)$ عبور کند و سپس زاویهٔ این خط را با محورهای مختصات تعیین کنید و در آخر اگر M وسط AB باشد اندازهٔ میانهٔ OM و معادلهٔ ارتفاع OH را بنویسید.

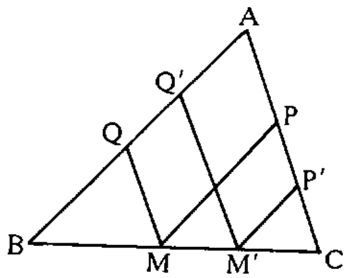
۵) معادلهٔ قطر AC از مربع ABCD عبارت است از $x-2y=0$ و طول نقطهٔ A برابر ۴ و اندازهٔ AC برابر $2\sqrt{5}$ می‌باشد. مختصات رئوس مربع را پیدا کنید.

٦) معادلهٔ خطی را بنویسید که از محل برخورد میانه‌های مثلث ABC به رئوس $A\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}-3\\1\end{matrix}\right.$ عبور کرده و بر نیمساز AA′ عمود باشد.

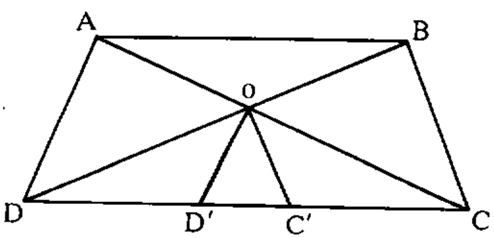
هندسه سال دوّم ریاضی

محمّد هاشم رستمی

۱) مثلث ABC مفروض است، از دو نقطهٔ M و M′ که روی ضلع BC قرار دارند دو خط به موازات ضلع AB رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در نقاط P و P′ قطع کنند. و نیز از همان دو نقطه M و M′ خطوطی به موازات ضلع AC رسم می‌نماییم تا ضلع AB را در نقاط Q و Q′ قطع نمایند. ثابت کنید: $\frac{PP'}{QQ'} = \frac{AC}{AB}$.

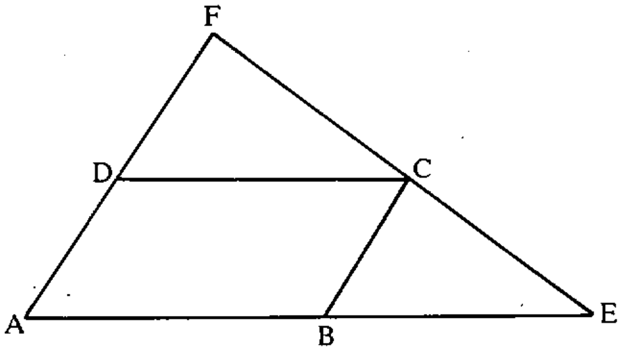


۲) از نقطه O محل تلاقی اقطار ذوزنقهٔ ABCD خطوطی به موازات ساقهای BC و AD رسم می‌کنیم تا قاعدهٔ CD را در نقاط C′ و D′ قطع کنند. ثابت کنید که: $DD'=CC'$.



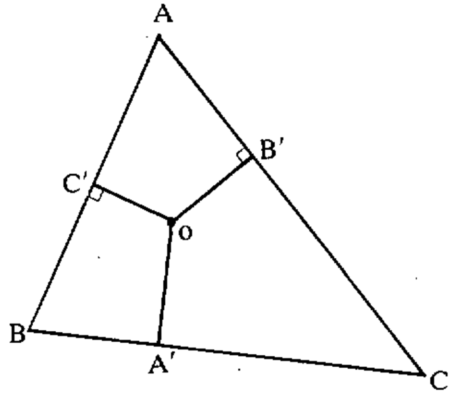
۳) متوازی الاضلاع ABCD مفروض است. از رأس C خطی در خارج متوازی الاضلاع رسم می‌کنیم تا امتداد اضلاع AB و AD را به ترتیب در نقاط E و F قطع کند. ثابت کنید:

$$\frac{AB}{AE}+\frac{AD}{AF}=۱$$



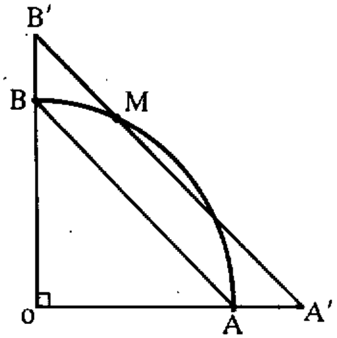
۴) از نقطهٔ O واقع در درون مثلث ABC عمودهای OA' و OB' و OC' را به ترتیب براضلاع BC و AC و AB رسم می‌کنیم. ثابت کنید که:

$$AB'^{۲}+BC'^{۲}+CA'^{۲}=AC'^{۲}+BA'^{۲}+CB'^{۲}$$



۵) ربع دایرهٔ AOB به مرکز O مفروض است. از نقطهٔ دلخواه M واقع بر این ربع دایره خطی موازی وتر AB رسم می‌کنیم تا امتدادهای OA و OB را به ترتیب در نقاط A' و B' قطع کند. ثابت کنید:

$$MA'^{۲}+MB'^{۲}=AB^{۲}.$$



ریاضیات جدید دوّم ریاضی

حمید رضا امیری

۱) برای هر سه مجموعهٔ A و B و C ثابت کنید:

الف) $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$

ب) اگر $A\subseteq B$ آنگاه $(A\times C)\subseteq(B\times C)$

۲) در مجموعهٔ $A=\{۲,۳,۴,۵\}$ رابطه‌ای بنویسید که: الف) هیچ یک از خواص رابطهٔ هم ارزی رانداشته باشد. ب) هیچ یک از خواص رابطهٔ ترتیب را نداشته باشد. ج) فقط خاصیت پاد تقارن داشته باشد. د) فقط خاصیت تقارنی داشته باشد. هـ) فقط خواص تقارنی و پاد تقارنی داشته باشد. و) فقط دارای خواص بازتابی و تقارنی باشد.

۳) رابطهٔ R روی $N\times N$ به‌صورت زیر تعریف شده است. ثابت کنید رابطهٔ R هم ارزی است و کلاس هم ارزیِ $[(۵ , ۳)]$ را بنویسید.

$$\forall(a,b)\,,\,(c,d)\in N\times N\ ;\ (a,b)R(c,d)\Leftrightarrow a+d=b+c$$

۴) یک افراز برای مجموعهٔ $A=\{a,\{a\},\{a,\{a\}\}\}$ بنویسید.

۵) روی $IR^{۲}$ رابطهٔ R به‌صورت زیر تعریف شده است. ثابت کنید این رابطه هم ارزی است و کلاس هم ارزی $[(۱,۲)]$ را معین کنید.

$(x,y)R(x',y') \Leftrightarrow \exists\lambda\in \mathrm{IR} ; ((\lambda>0) , x'=\lambda x , y'=\lambda y)$

۶) چند رابطه روی یک مجموعه k عضوی می‌توان تعریف کرد؟

۷) فرض کنیم مجموعهٔ A دارای m عضو و B مجموعه‌ای با n عضو باشد. ثابت کنید اگر $m>n$ آنگاه هیچ تابع یک بیک از A در B وجود نخواهد داشت.

۸) تابع $\begin{cases} f: \mathrm{IR}\to\mathrm{IR}-\{2\} \\ f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+6}\end{cases}$ مفروض است نشان دهید f وارون پذیر است و ضابطهٔ وارون آن را به دست آورید.

۹) آیا رابطهٔ زیر تابع است؟ چرا؟

$$f:\mathrm{IR}\to\mathrm{IR} \quad f(x)=\begin{cases} x^2-3x & x>3 \\ 0 & x=3 \\ x-3 & x<3\end{cases}$$

۱۰) تابع $\begin{cases} f: \mathrm{IR}\to\mathrm{IR} \\ f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}\end{cases}$

مفروض است درمورد یک بیکی و پوشایی f بررسی کنید.

۱۱) تابع $\begin{cases} f: \mathrm{IR}^2\to\mathrm{IR}^2 \\ f(x,y)=(x+y , x+2y)\end{cases}$

مفروض است خاصیت یک بیکی و پوشایی را برای f بررسی کنید.

۱۲) ثابت کنید

با $A=\{x\in\mathrm{IR} \mid 0<x<1\}$ که $f : A \to \mathrm{IR}$

ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{2x-1}{x(1-x)}$ یک تابع دو سویی است.

۱۳) ثابت کنید تابع زیرنه یک بیک و نه پوششی است.

$f: \mathrm{IR}^2\to \mathrm{IR}^2$

$f(x , y) = (2x+y , 6x+3y)$

۱۴) تابع $\begin{cases} f:\mathrm{IR}\to\mathrm{IR} \\ f(x)=\dfrac{|x|+7}{x}\end{cases}$

مفروض‌است خاصیتهای‌یک بیک و پوشایی را برای این تابع بررسی کنید.

جبر سال سوم رشتهٔ تجربی

محمّد هاشم رستمی

۱) نقاط A و B به ترتیب به طولهای ۴ و ۶− روی محور $x'ox$ مفروض‌اند. نقطهٔ M را روی این محور به قسمی تعیین کنید که:

اولاً: $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=-\dfrac{2}{3}$ ، ثانیاً: $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{AB}}=2$ باشد.

۲) با استفاده از تعریف فاصله، عبارتهای زیر را خلاصه کنید.

الف) $]-3 , 4[\cap[2,6]$ ب) $[-4 , 3[\cup[3,5[$

۳) مقادیر a و b را به قسمی تعیین کنید که نقطهٔ $M(2a-b-1 , a+2b+3)$ بر مبدأ مختصات منطبق گردد.

۴) به ازاء چه مقداری از m نقطهٔ $A(2m-1 , 3m+6)$ بر مبدأ مختصات منطبق می‌شود؟

۵) اگر $A\left|\begin{matrix}2a-1\\a+2b\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}-2\\1\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}2b+1\\a-b\end{matrix}\right.$ باشند، مقادیر a و b را چنان بیابید که نقطهٔ C وسط پاره خط AB باشد.

۶) نقطه‌ای روی نیمساز ربع دوم و چهارم تعیین کنید که فاصله‌اش از نقطهٔ $M(-2,4)$ برابر $2\sqrt{5}$ باشد.

۷) اگر $f(x+2)=x+\sqrt{x+5}$ باشد، مطلوب است محاسبهٔ $f(-2)$.

۸) اگر $f(x)=\begin{cases} x^2+1 , x\geq 1 \\ 3-2x , x<1\end{cases}$ باشد، مطلوب است محاسبهٔ

$f(\sqrt{2}-1) , f(0) , f(\sqrt{2})$

۹) دامنهٔ تعریف هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $y=\sqrt[5]{\dfrac{3}{x^2-3x-4}}$ ب) $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{|x|-x}}$

د) $y = \sqrt{x-|x|} + \sqrt{4x^2-1}$　　ج) $y = \frac{2x}{\sqrt{9-x^2}}$

۱۰) اگر $f\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \frac{x+2}{x-1}$ باشد، $f(x)$ را محاسبه کنید.

۱۱) اگر $f(x)=x^3-3x$ و $g(x)=\sqrt{8x}+3$ باشد، $(fog)\ (3)$ را محاسبه کنید.

۱۲) اگر $g(x) = x+1$ و $(fog)\ (x)= x^2+4x-2$ باشد، تابع $f\ (x)$ را تعیین کنید.

۱۳) اگر $f(x)=\frac{1}{x^2}$ باشد، تابع $(fof)\ (x)$ را تعیین کنید.

۱۴) منحنی به معادلهٔ $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ مفروض است. مطلوب است تعیین معادلهٔ قرینهٔ این منحنی نسبت به:

۱) محور xها　۲) محور yها　۳)نیمساز ربع اول و سوم

۴) خط $x=1$　۵) خط $y-2=0$　۶) خط $x-2y-5=0$

۷)نقطهٔ $o'(1,-2)$

۱۵) نقاط $A(3,-1)$ و $B(a+b\ ,\ b-2a)$ و خط $\Delta:2x+y-1=0$ مفروض‌اند. مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که دو نقطهٔ A و B نسبت به خط Δ قرینه یکدیگر باشند.

۱۶) نقطهٔ $M(-3,\frac{1}{2})$ وسط پاره خط AB است. در صورتی که نقطه A روی محور طولها و نقطهٔ B روی محور عرضها واقع باشند معادلهٔ خط AB را بنویسید.

۱۷) معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $A(3\ ,\ 4)$ می‌گذرد و با محورهای مختصات مثلثی به مساحت ۳ تشکیل می‌دهد.

۱۸) نقطهٔ $A(4,2)$ یک رأس متوازی الاضلاعی است که دو ضلعش به معادلات $2x-3y+1=0$ و $4x+3y=7$ می‌باشند. مطلوب است تعیین :

۱) معادلات دو ضلع دیگر متوازی الاضلاع

۲) مختصات مرکز متوازی الاضلاع

۳) مساحت متوازی الاضلاع

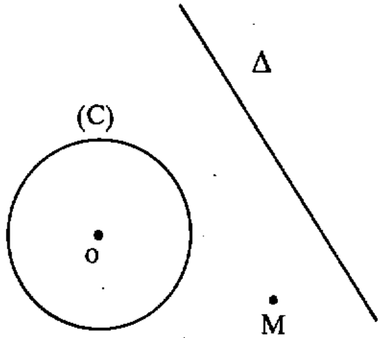
۱۹) مقدار λ را به قسمی تعیین کنید که دو خط $\Delta\ :\ \lambda x+2y-4=0$ و $\Delta'\ :\ 3x-y=6$ روی محور طولها متقاطع باشند.

۲۰) نقطهٔ $A(-2,1)$ یک رأس مربعی است که خط $\Delta:5x-12y-17=0$ یک قطر آن می‌باشد. مساحت این مربع را محاسبه کنید.

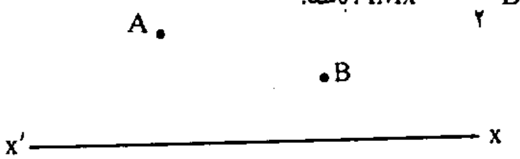
هندسه سوّم تجربی

محمّد هاشم رستمی

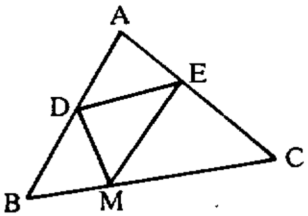
۱) دایرهٔ $C(O\ ,\ R)$ و خط Δ و نقطهٔ M غیر واقع بر Δ مفروض می‌باشند. مطلوب است تعیین نقطه‌ای از دایره (C) که قرینهٔ آن نقطه نسبت به نقطهٔ M روی خط Δ قرار گیرد (بحث کنید).



۲) خط x'x و دو نقطهٔ A و B در یک طرف آن خط مفروض‌اند. نقطهٔ M را روی خط x'x به قسمی تعیین کنید که $A\hat{M}x' = \frac{1}{2}B\hat{M}x$ باشد.



۳) مثلث ABC و نقطهٔ M واقع بر ضلع BC مفروض‌اند. مثلث MDE را طوری در مثلث ABC محاط کنید که محیط مثلث MDE کمترین مقدار ممکن را دارا باشد.



۴) اگر $|\vec{a}| = 2$ و $|\vec{b}| = 3$ و $(\vec{a}\ ,\vec{b}) = \frac{\pi}{3}$ باشد مطلوب است محاسبهٔ:

الف) $(-3\vec{a})\ .\ (2\vec{b})$　　ب) $|\vec{a}+\vec{b}|\ /\ |\vec{a}-\vec{b}|$

مثلثات سال سوم رشتهٔ تجربی و ریاضی

محمّد هاشم رستمی

۱) مجموع دو زاویه مساوی $\frac{7\pi}{9}$ رادیان و عدد اندازهٔ یکی برحسب گراد ۱۰ برابر عدد اندازهٔ دیگری برحسب درجه است. این دو زاویه را محاسبه کنید.

۲) اگر $\cos x = \frac{3}{5}$ باشد، $\cos(2x-5\pi)$ را محاسبه کنید.

۳) اگر $\frac{5\pi}{3} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ باشد حداکثر مقدار عبارت $\frac{\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{1+\cos x}}$ را تعیین کنید.

۴) در صورتی که $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{2}{5}$ و $\cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$ باشد حاصل عبارت $A=\cos 2\alpha+\cos 2\beta+2\cos\alpha\cos\beta$ را به‌دست آورید.

۵) درستی برابریهای زیر را بررسی کنید.

الف) $\sin 7x(\cos 5x-\sin 7x)+\cos 7x(\sin 5x-\cos 7x)-\sin 12x=-1$

ب) $\cos\alpha+\cos(\alpha+\frac{2\pi}{3})+\cos(\alpha+\frac{4\pi}{3})=0$

ج) $tg\alpha+tg(\alpha\pm\frac{\pi}{3})+tg(\alpha\pm\frac{2\pi}{3})=3tg3\alpha$

د) $\cos[\mathrm{Arcsin}\frac{\sqrt{2}}{2}+3\mathrm{Arctg}(-1)+\mathrm{Arccos}(\frac{-1}{2})+2\mathrm{Arccotg}(-1)]=\frac{1}{2}$

هـ) $\mathrm{Arctg}2+\mathrm{Arctg}3=\frac{3\pi}{4}$

و) $\sin(\alpha+2\beta)-\sin(\alpha-2\beta)=4\cos\alpha\cos\beta\sin\beta$

۶) در صورتی که $\alpha+\beta=k\pi-\frac{\pi}{4}$ باشد ثابت کنید که رابطهٔ زیر برقرار است. $(1-tg\,\alpha)(1-tg\,\beta)=2$

۷) ثابت کنید درصورتی که $\sin 2\alpha=2\sin^2\beta$ باشد رابطه $2\cos^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\cos 2\beta$ برقرار است.

۸) ثابت کنید عبارتهای زیر مربع کامل هستند.

الف) $2(1+\cos\frac{x}{2})(1+\sin\frac{x}{2})$

ب) $(\sin\alpha+\frac{1}{\cos\alpha})^2+(\cos\alpha+\frac{1}{\sin\alpha})^2$.

۹) هریک از عبارتهای زیر را به عبارت قابل محاسبه به وسیلهٔ لگاریتم تبدیل کنید.

الف) $\frac{\cos x-\cos 3x}{\cos x+\cos 3x}-\frac{\cos 2x-\cos 4x}{\cos 2x+\cos 4x}$

ب) $\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}$

ج) $\cos^2\beta-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha-\cos^4\alpha$

د) $\frac{1+\cos 2x-\sin 2x}{1+\cos 2x+\sin 2x}$

هـ) $\cos A+\cos B+\cos C+\cos(A+B+C)$

۱۰) درستی هر یک از رابطه‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\cos\alpha\cos(\alpha+2\beta)-\cos\beta\cos(2\alpha+\beta)=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$

ب) $\sin(\alpha+3\beta)\sin(\alpha-3\beta)-\sin(\frac{\alpha}{3}+3\beta)\sin(\frac{\alpha}{3}-3\beta)=\sin\frac{4\alpha}{3}\sin\frac{2\alpha}{3}$

ج) $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$

۱۱) عبارت زیر را به مجموع تبدیل کنید.

الف) $4\sin x\sin 2x\sin 3x$ ب) $\sin 20\sin 40\sin 80$

۱۲) هر یک از معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $tg(3x-\frac{\pi}{4})+cotg(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6})=0$

ب) $2\cos^2 2x+\sin(3x-\frac{\pi}{4})=1$

ج) $\sin^2 2x-\sin 2x\cos 2x=1$

د) $tg(\frac{x}{3}+1)\,.\,tg(1-\frac{x}{4})=-1$

هـ) $\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\cos(3x-\frac{\pi}{6})$

و) $\sin x+\sin 3x+\sin 5x=0$

ز) $\sin 7x+\sin 3x+2\sin^2 x=1$

ح) $\sin 3x\sin x+\cos 6x\cos 2x+\cos 5x=0$

۱۳) معادله $a\sin^2(3x-\frac{\pi}{4})=1$ مفروض است. مقدار a را به قسمی تعیین کنید که یکی از جوابهای معادلهٔ $x=\frac{5\pi}{4}$ باشد. سپس در ازاء مقدار به‌دست آمدهٔ a معادله را حل کنید.

۱۴) حداکثر و حداقل مقدار عبارت $\cos^2x-2\cos x$ را تعیین کنید.

سال سوم رشتهٔ ریاضی

جبر سال سوّم ریاضی

سید محمّدرضا هاشمی موسوی

۱) m و n را چنان تعیین کنید که چند جمله‌ای x^3+mx^2+nx+3 بر $(x-1)$ بخش‌پذیر باشد و باقیماندهٔ آن بر $(x+1)$ برابر -2 باشد.

۲) اگر عبارت $A(x)=16x^4+4$ بر $4x^2-2kx+s$ بخش‌پذیر باشد k و s را حساب کنید.

۳) ضریب x^{-10} را در بسط $(x^4-x^{-3})^{15}$ پیدا کنید.

۴) آیا در $(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}})^7$ جملهٔ مستقل از x وجود دارد؟ (در صورت وجود آن را بیابید.)

۵) تابع $f(x)$ را از ضابطهٔ $af(x)+bf(\frac{1}{x})=x$ به‌دست آورده و تعیین‌کنید به‌ازای چه مقادیری از a و b، $f(x)$ نامعین است.

۶) دامنهٔ تعریف تابع $f(x)=\frac{x}{x-1}+\sqrt{x(x-1)}+\frac{1}{x}$ را به صورت فاصله نشان دهید.

۷) تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=\frac{1}{x-1}$ مفروض‌اند. دامنهٔ تعریف توابع $f\circ g(x)$ و $g\circ f(x)$ را حساب کنید.

۸) تابع $f(x)=[2x]+|x|$ را دربارهٔ $[-2,3]$ رسم کنید

۹) با استفاده از تعریف حد ثابت کنید

$$\lim_{x\to 1}(3x-2)=1$$

۱۰) در تابع

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & x\leq 1 \\ 5-kx^2 & x>1 \end{cases}$$

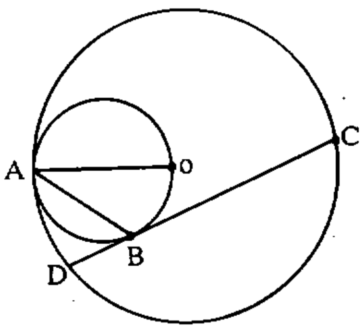
مقدار k را چنان تعیین‌کنید که تابع فوق در نقطهٔ $x=1$ پیوسته باشد.

۱۱) در تابع $f(x)=a[x]+b[x-1]+c[|x+2|]$ پارامترهای a و b و c را چنان تعیین کنید که اوّلاً: تابع در نقطه $m\left|\begin{matrix}-2\\1\end{matrix}\right.$ پیوسته باشد و ثانیاً: منحنی نمایش تابع از نقطهٔ $N\left|\begin{matrix}-\frac{1}{2}\\-1\end{matrix}\right.$ عبور کند و پس از تعیین پارامترها منحنی را رسم کنید.

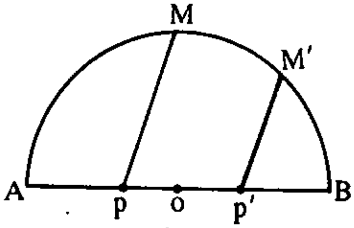
هندسهٔ سوّم ریاضی

محمّد هاشم رستمی

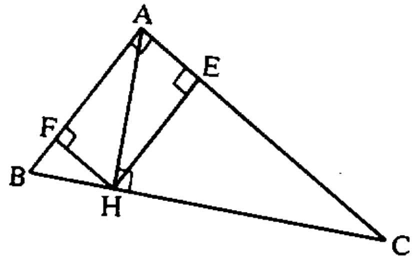
۱) دایره‌ای به قطر OA مفروض است. از نقطهٔ B واقع بر این دایره خطی مماس برآن رسم می‌کنیم تا دایرهٔ به مرکز O و به‌شعاع OA را در دو نقطهٔ C و D قطع کند. ثابت کنید که $BD.\ BC=AB^2$ است.



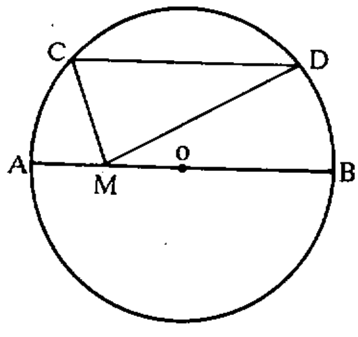
۲) نیم‌دایرهٔ به قطر AB و به مرکز O مفروض است. نقاط P و P′ را به فاصلهٔ مساوی از مرکز نیم‌دایره اختیار می‌کنیم و از این دو نقطه دو خط موازی رسم می‌کنیم تانیم‌دایره را به ترتیب در نقاط M و M′ قطع کنند ثابت کنید که حاصل ضرب $PM.\ P'M'$ با تغییر امتداد خطوط موازی MP و M′P′ تغییر نمی‌کند (ثابت می‌ماند).



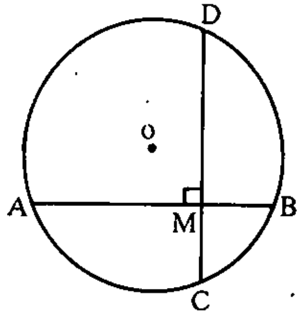
۳) ارتفاع AH از مثلث قائم الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ را رسم می‌کنیم و تصاویر نقطهٔ H روی اضلاع AC و AB را به ترتیب E و F می‌نامیم. ثابت کنید که $\frac{AC^{۳}}{AB^{۳}}=\frac{CE}{BF}$ است.



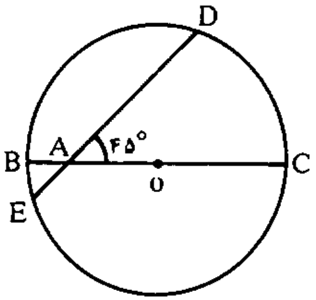
۴) دایره‌ای به قطر AB مفروض است. اگر M نقطه‌ای واقع بر قطر AB و CD وتری از دایره موازی قطر AB باشد. ثابت کنید $MC^{۲}+MD^{۲}=MA^{۲}+MB^{۲}$ است.



۵) از نقطهٔ ثابت M واقع در داخل دایرهٔ C(O , R) دو وتر عمود برهم AMB و CMD را رسم می‌کنیم. ثابت کنید اگر این دو وتر با همان حالت عمود برهم حول نقطهٔ O دوران نمایند حاصل $AB^{۲}+CD^{۲}$ مقداری است ثابت.



۶) وتر DAE از دایرهٔ C(O,R) قطر BC از این دایره را در نقطهٔ A به زاویهٔ ۴۵° قطع می‌کند. ثابت کنید: $AD^{۲}+AE^{۲}=۲R^{۲}$.



ریاضیات جدید سوّم ریاضی

حمیدرضا امیری

۱) ثابت کنید در حالت کلّی، اگر $W_۱$ و $W_۲$ دو زیر فضای فضای برداریِ V باشند نمی‌توان نتیجه گرفت که $W_۱ \cup W_۲$ نیز یک زیر فضای V است.

۲) نشان دهید که اگر a و b و c اعداد حقیقی باشند دراین صورت مجموعهٔ W که به صورت زیر تعریف می‌شود یک زیر فضای $IR^{۳}$ است

$$W=\{(x,y,z)\,|\,x,y,z\in IR\ ,\ ax+by+cz=۰\}$$

۳) در فضای برداری IR^n

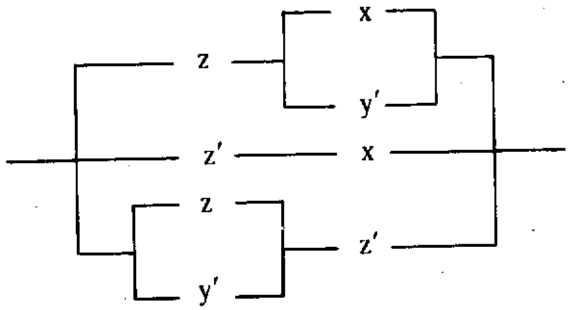
$$(IR^n=\{(x_۱,x_۲,...,x_n)\,|\ \ x_۱,x_۲,...,x_n\in IR\})$$

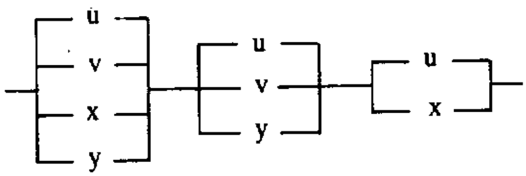
ثابت کنید هر $n+۱$ بردار وابستگی خطی دارند.

۴) ثابت کنید اگر W یک زیر مجموعهٔ ناتهی از فضای برداری V باشد شرط لازم و کافی برای آنکه W یک زیر فضای V باشد آن است که $\forall a , b \in \mathbb{R} , \forall w_1,w_2 \in W ; aw_1+bw_2 \in W$

۵) اگر x و y و z ، ۳ بردار در فضای برداری V بوده و مستقل خطی باشند ثابت کنید بردارهای $x+y-z$ و $x-2y+z$ و $2x-y+z$ نیز مستقل خطی‌اند.

۶) عبارت جبری مدارات زیر را نوشته و آنها را ساده کنید.



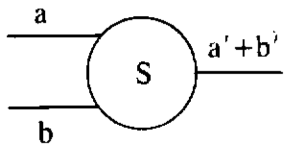


۷) ۴ نفر متشکل از دو مرد و دو زن دربارهٔ موضوعاتی رأی می‌دهند، تصویب یک موضوع منوط به این شرط است که دو مرد یا دو زن و یک مرد به آن رأی مثبت بدهند. مداری طرح کنید که تصویب یک موضوع را با روشن شدن یک چراغ اطلاع دهد.

۸) متمم عبارت $(x+y)(x+y')(x'+y')$ را بنویسید.

۹) عبارت بولی زیر را ساده کنید $(a+b)[a+b'(a+b)]$.

۱۰) مدار منطقی S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم



یا $aSb=a'+b'$

با توجه به تعریف مدار S و فقط با استفاده از کلیدهای a و b عبارتهای زیر را به‌دست آورید:

الف) a ب) a' ج) $a'+b'$ د) $(a+b)'$ هـ) ab'

سال چهارم رشته تجربی

جبر سال چهارم رشتهٔ تجربی

محمّد هاشم رستمی

۱) مشتق هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $y=3\cos^2(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})+\cot g^5\sqrt[3]{x^2-2x}$

ب) $y=\sin\sqrt[3]{\frac{x+2}{2x-1}}$

ج) $y=8\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\sin\frac{x}{8}$

د) $y=\sin(\cos^2x)+\cos(\sin^2x)$

۲) مقدار عددی مشتق تابع $y=\sqrt[5]{(2+tg2x)^3}$ را به ازای $x=\frac{3\pi}{8}$ محاسبه کنید.

۳) اگر $f(a)=\frac{1}{2}$ و $f'(a)=4$ باشد مقدار مشتق عبارت $\frac{3}{f(x)}+f^3(x)$ را در $x=a$ محاسبه کنید.

۴) اگر $(x+y)^3-2x^2y+x^2-y^2-1=0$ باشد، مطلوب است محاسبهٔ y'_x و x'_y.

۵) در تابع پارامتری $\begin{cases} x=t-2 \\ y=3t^2+t \end{cases}$ ، مطلوب است محاسبهٔ y'_x.

۶) در صورتی که مشتق مرتبهٔ سوم تابع $y=a\sin 2x$ در $x=\frac{\pi}{6}$ برابر ۴ باشد مقدار a را محاسبه کنید.

۷) معادلات خطوط مماس و قائم بر منحنی به معادلهٔ $y=\cos(\pi\sin x)$ را در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{6}$ واقع بر آن بنویسید.

۸) حدود m را چنان تعیین کنید که تابع $y=mx^3+x^2+mx-1$ همواره صعودی باشد.

۹) معادلهٔ خط قائم برمنحنی به معادلهٔ $\sqrt{x}+\sqrt{y}=۱$ را در نقطهٔ $M(\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۴})$ بنویسید.

۱۰) تابع $y=ax^۳+bx^۲+cx+d$ مفروض است. ضرایب a و b و c و d را چنان بیابید که درازاء $x=-۱$ تابع دارای ماگزیمم یا می‌نیممی برابر ۴ بوده و نقطهٔ عطف آن به طول ۱ و روی منحنی به معادلهٔ $y=\frac{۵x+۷}{x-۲}$ قرار داشته باشد.

۱۱) تابع $y=x^۲+۲mx+m-۱$ مفروض است. معادلهٔ خط مماس بر منحنی نمایش تغییرات این تابع در نقطه‌ای به طول ۱ واقع برآن محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. مقدار m را چنان تعیین کنید که مساحت مثلث OAB برابر ۳ باشد.

۱۲) معادلهٔ درجهٔ دوّم $x^۲-(m^۲-m-۲)x+۲m+۱=۰$ مفروض است. مقدار m را به قسمی تعیین کنید که مجموع ریشه‌های این معادله حداقل مقدار ممکن را دارا باشد.

۱۳) تابع $y=(m+۱)x^۲-۲mx+m-۳$ مفروض است. معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ ماگزیمم یا می‌نیمم این تابع را وقتی پارامتر m تغییر می‌کند به‌دست آورید.

۱۴) تابع $y=x^۳+mx^۲+(۱-m)x+۲$ مفروض است. اولاً: مقدار m را به قسمی تعیین کنید که مجموع طولهای نقاط ماگزیمم و می‌نیمم این تابع برابر $\frac{۲}{۳}$ باشد. ثانیاً: در ازاء $m=-۱$ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع فوق را رسم کنید.

۱۵) تعداد ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم
$۲x^۳-۳x^۲-۱۲x+۵=۰$ را تعیین کنید.

۱۶) تابع $y=\frac{mx+۳}{x+۲m-۲}$ مفروض است. مقدار m را به قسمی تعیین کنید که مرکز تقارن منحنی نمایش تغییرات این تابع روی خط به معادله $۲x-y+۳=۰$ قرار داشته باشد.

۱۷) تابع $y=\frac{x+a}{ax+a+۲}$ مفروض است. مقدار a را چنان تعیین کنید که:

۱) منحنی نمایش تغییرات تابع تبدیل به خط راستی موازی محور طولها گردد.

۲) منحنی نمایش تغییرات تابع به خط راستی غیر موازی با دو محور تبدیل شود.

۳) خط مماس بر منحنی نمایش تغییرات این تابع در نقطه‌ای به طول ۱− برخط به معادله $۲x-y=۱$ عمود باشد.

۱۸) تابع $y=\frac{ax+b}{cx-۲}$ مفروض است. ضرایب a و b و c را به قسمی تعیین کنید که مرکز تقارن منحنی نمایش تغییرات این تابع نقطه‌ای به طول ۱+ واقع برخط به معادله $y=۲x-۳$ باشد و ضریب زاویهٔ خط مماس بر منحنی تابع فوق در نقطهٔ برخوردش با محور عرضها برابر ۱− باشد.

سال چهارم رشتهٔ ریاضی

جبر چهارم ریاضی فیزیک

سید محمّد رضا هاشمی موسوی

۱) دامنه تعریف تابع: $y=\frac{x-۴}{x-۴}+\sqrt{۱-x^۲}+\frac{x^۲-۱}{\sqrt{۱-x}}$ را به‌دست آورید.

۲) دامنه تابع: $f(x)=\frac{x}{۱+[x]}+\frac{x+۱}{[x]+[-x]}$ را به دست آورید.

۳) دورهٔ تناوب $y=\sin^۲\frac{۲x}{۳}+tg^۳\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲}$ را تعیین کنید.

۴) ضابطهٔ تابع معکوس تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x^۳+۲}$ را به‌دست آورید.

۵) با استفاده از تعریف حدّ ثابت کنید:

الف) $\lim_{x\to-۱}(x^۲-۴)=-۳$ ب) $\lim_{x\to\bar{۰}}\frac{۱}{x}=-\infty$

ج) $\lim_{x\to+\infty}(x^۶+x+۱)=+\infty$ د) $\lim_{x\to۲}\frac{x+۱}{x-۲}=\infty$

هـ) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۱-۲x}{۳x-۵}=\frac{-۲}{۳}$ و) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳-۴x^۲}{۲x+۱}=\pm\infty$

۶) حدود زیر را محاسبه کنید

الف) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[۳]{x^۳+x-۲}-\sqrt{x^۲-۲x+۳})$

ب) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^n} - \frac{1}{\sin^n x}\right)$

ج) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$

د) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+2^n+3^n+4^n+5^n}{6^n+7^n+8^n+9^n}\right)$

هـ) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[5]{x-1}}\right)$

و) $\lim_{x\to 0} \left(x^n \sin\frac{1}{x^n}\right)$

ز) $\lim_{x\to 1} (1+x^2) \log_x^2 2$

ح) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n^2+n}$

هندسه سال چهارم ریاضی

محمّد هاشم رستمی

۱) اگر نقطهٔ A ابتدا و نقطهٔ B انتهای بردار $\vec{V}=\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$ و نقطه $M(\frac{5}{2},\frac{1}{2},2)$ وسط پاره خط AB باشد مختصات نقاط A و B را پیدا کنید.

۲) اگر $\sum_{i=1} \vec{V}_i=\vec{0}$ و $|\vec{V}_1|=3$ و $|\vec{V}_2|=2$ و $|\vec{V}_3|=5$ باشد مطلوب است محاسبهٔ:

الف) $\vec{V}_1 . \vec{V}_2$

ب) $\vec{V}_1 . \vec{V}_2 + \vec{V}_2 . \vec{V}_3 + \vec{V}_3 . \vec{V}_1$

ج) $\vec{V}_1 . (\vec{V}_2 + \vec{V}_3)$

۳) بردار V را چنان تعیین کنید که بر دو بردار

$\vec{V}_2=18\vec{i}-22\vec{j}-5\vec{k}$ و $\vec{V}_1=3\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$

عمود باشد و با oy زاویهٔ منفرجه بسازد و قدر مطلق آن برابر ۱۴ باشد.

۴) ثابت کنید که چهار نقطهٔ $A(5,5,4)$ و $B(2,-1,1)$ و $C(4,1,3)$ و $D(3,2,-1)$ در یک صفحه قرار ندارند.

۵) نقاط $A(5,0,-1)$ و $B(-1,3,1)$ و $C(2,0,3)$ رئوس مثلث ABC می‌باشند. معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث ABC بر محور yها عمود رسم می‌شود.

۶) نقاط $A(-3,1,4)$ و $B(2,-4,-6)$ مفروض‌اند. نقطهٔ M روی خط AB به قسمی قرار دارد که $2\overrightarrow{MA}=-3\overrightarrow{MB}$ است. معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که در نقطهٔ M برخط AB عمود رسم می‌شود.

۷) وضع دو نقطهٔ $M_1(1,-2,2)$ و $M_2(0,3,-1)$ را نسبت به صفحهٔ $P: 2x-y+2z-5=0$ مشخص سازید و در صورتی که M_1M_2 موازی صفحهٔ P نباشد، مختصات نقطهٔ برخورد M_1M_2 با صفحه P را تعیین کنید.

۸) تحقیق کنید که دو نقطهٔ $A(-2,1,3)$ و $B(0,1,-1)$ هر دو داخل یک فرجه از فرجه‌های حاصل بین دو صفحهٔ $P: x-y-z+2=0$ و $P': 2x+y+z+3=0$ واقع‌اند یا در داخل دو فرجهٔ متمایز.

۹) مطلوب است محاسبه حجم چهار وجهی حاصل بین صفحهٔ $P: 2x-3y+6z-12=0$ و صفحات مختصات.

۱۰) حجم مکعبی را تعیین کنید که دو وجه مقابل آن دو صفحه $P: 2x+y-2z=5$ و $P': 4x+2y-4z=6$ باشند.

۱۱) نقطه‌ای از صفحهٔ به معادله $2x-3y+3z-17=0$ را تعیین کنید که مجموع فواصل آن از دو نقطهٔ $A(0,-1,1)$ و $B(2,0,3)$ می‌نیمم باشد.

۱۲) معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $M(2,1,-2)$ می‌گذرد و با صفحهٔ $P: x+y-z+2=0$ موازی است و خط $D: \frac{x}{2}=y=\frac{z-1}{-1}$ را قطع می‌کند.

۱۳) معادلهٔ کانونیک خطی را بنویسید که از نقطهٔ $A(-3,1,2)$ و نقطهٔ M وسط پاره‌خطی از خط $D:\begin{cases} x+y=2 \\ 2y-z=5 \end{cases}$ که محصور بین دو صفحهٔ

$P: 3x-y+z-1=0$

و

$P': 3x-y+z=5$

است می‌گذرد.

۱۴) کوتاهترین فاصلهٔ بین دو خط

$$D:\begin{cases} x=t-1 \\ y=-t+2 \\ z=3t+5 \end{cases}$$

و

$$D' : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = z$$

را پیدا کنید

۱۵) مختصات نقطهٔ برخورد خط $D: \frac{x+2}{3} = 2(y-1) = z+2$ و صفحه $P: x-2y+z-3=0$ را پیدا کنید.

۱۶) مختصات قرینهٔ نقطهٔ $A(0,1,-2)$ را نسبت به خط $D : \frac{x}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-1}{3}$ به‌دست آورید.

۱۷) مختصات تصویر قائم نقطهٔ $M(3,-1,0)$ روی صفحه $P: x-2y+z-2=0$ را تعیین کنید.

۱۸) مختصات قرینهٔ نقطهٔ $M(3,2,-1)$ را نسبت به صفحه $P: x+y-z-3=0$ به‌دست آورید.

۱۹) معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از فصل مشترک دو صفحه $P : 2x-y+3z-2=0$ و $P' : x+y+3=0$ می‌گذرد و بر صفحهٔ $R : -x+y+2z=1$ عمود است.

ریاضیات جدید چهارم ریاضی

حمید رضا امیری

۱) نقیض گزاره‌های سوری زیر را بنویسید:

الف) $\forall x \exists y, (x+1=3) \Rightarrow [(x=2) \wedge y=0]$

ب) $\forall x \forall y, (x<y \vee y\leq x)$

ج) $\forall x \exists y, (x+y=0 \Rightarrow x=-y)$

د) $\exists x \forall y, [\,|x| = |y| \Rightarrow (x^2=y^2 \vee x^3=y^3)]$

۲) درستی استنتاجهای زیر را بررسی کنید.

الف)
$$\begin{array}{l} (p\wedge q) \Rightarrow [p \Rightarrow (s\wedge r)] \\ \underline{(p\wedge q)\wedge t} \\ \therefore s \vee r \end{array}$$

$$p \vee (q \vee r)$$

ب)
$$\begin{array}{l} (q\Rightarrow s)\wedge(r\Rightarrow t) \\ (s\vee t) \Rightarrow (p\vee r) \\ \underline{\sim p} \\ \therefore r \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p\Rightarrow q \\ q\Rightarrow r \end{array}$$

ج)
$$\begin{array}{l} (s \Rightarrow r) \wedge (t\Rightarrow q) \\ \underline{(\sim r \vee \sim q)\wedge(\sim u \vee \sim p)} \\ \therefore (\sim s \vee \sim t)\wedge(\sim u \vee \sim p) \end{array}$$

۳) ثابت کنید هر میدان یک حوزهٔ درست است. آیا عکس مطلب برقرار است؟ چرا؟

۴) ثابت‌کنید $U= \{a|a=3m, m\in Z\}$ یک ایده‌آل حلقهٔ Z است.

۵) ثابت کنید که مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی به‌صورت $m+n\sqrt{2}$ که درآن $n\in Z$ و m یک حوزهٔ صحیح است.

۶) با استفاده از استقراء ریاضی ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، عدد $a=4^n+15n-1$ بر عدد ۹ بخش‌پذیر است.

۷) با استفاده از استقراء ریاضی ثابت کنید:

$$\sin x+\sin 2x+\dots+\sin nx= \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{nx}{2}$$

۸) مطلوب است تعیین دو عدد طبیعی متمایز که حاصل ضرب آنها مربع کامل باشد و کوچکترین مضرب مشترکشان برابر با ۴۸ باشد.

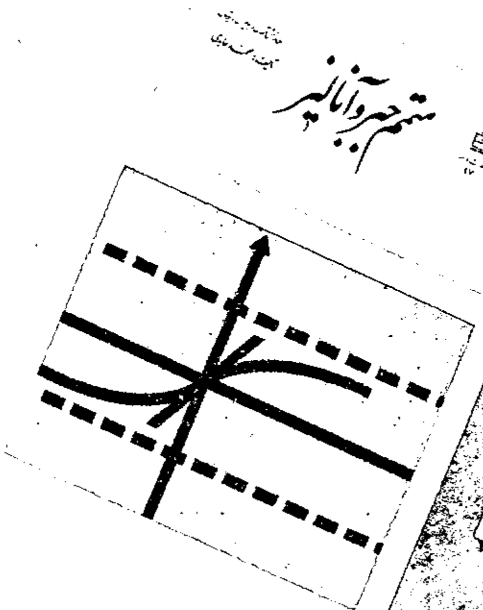
۹) ثابت کنید اگر $(a,4)=(b,4)=2$ آنگاه $(a+b,4)=4$.

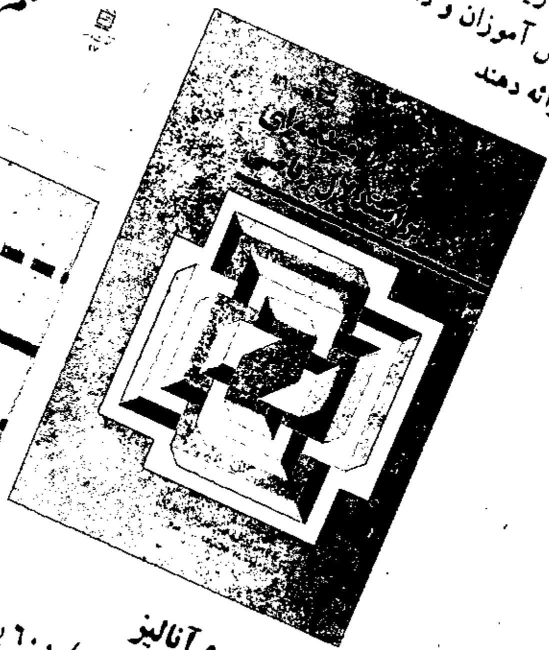
معرفی کتابهای ریاضی انتشارات مدرسه

مقدمه‌ای بر استدلال ریاضی

۳۱۵ صفحه / چاپ اول / ۹۰۰ ریال

... بنابه تجربیات ما بیشتر دانشجویان هنگامی که با مسائل ریاضی روبرو می‌شوند از آنجا که اعتقاد دارند مهارت در ریاضیات، ترکیبی از فورمولهای حفظ شده و عملیات جبری است، مایلند که عقل سلیم را کنار بگذارند... این مسأله و مشکلات دیگر در زمینهٔ فهم صحیح از ریاضیات معلول فقدان تفکر ریاضی است. مؤلفین این کتاب سعی کرده‌اند تا استدلال ریاضی را به دانش آموزان و دانشجویان بشناسانند و روشهای صحیح استدلال ریاضی را ارائه دهند





متمم جبر و آنالیز

۲۴۰ صفحه / چاپ ششم/ ۶۰۰ ریال

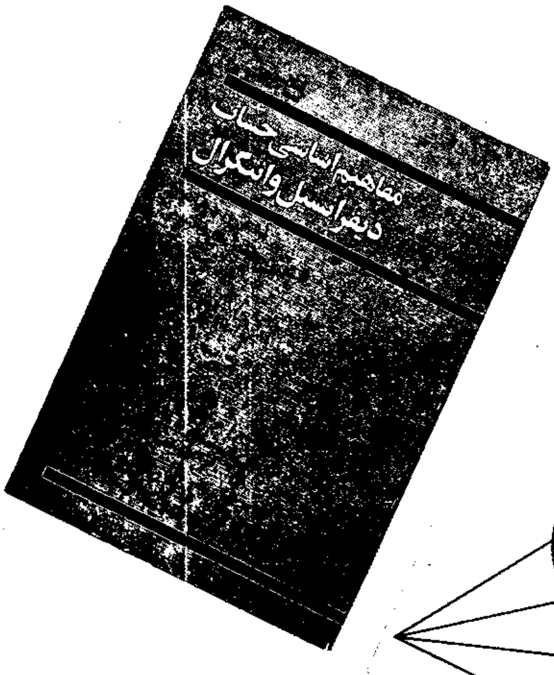
مؤلف در طی سالیان طولانی تدریس کتب ریاضی به برخی از نکات مبهم و پیچیده کتب جبر و آنالیز دبیرستانی برخورده است که در این کتاب سعی کرده این مشکلات را حل کند. لذا قضایای این کتاب تقریباً همان قضایای جبر و آنالیز سالهای سوم و چهارم رشتهٔ ریاضی است که همراه با اثبات دقیق آن بیان شده است.

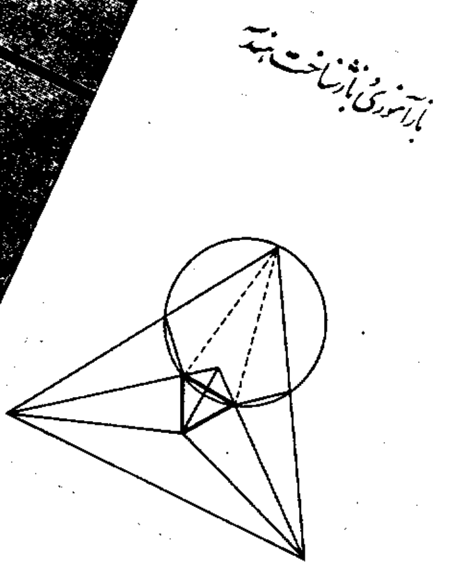
معرفی کتابهای ریاضی انتشارات مدرسه

بازآموزی و بازشناخت هندسه

۲۳۲ صفحه / چاپ ششم / ۴۵۰ ریال

کتاب بازآموزی و بازشناخت هندسه، شامل شش بخش دربارهٔ مفاهیم و قضایای کلی هندسه و همچنین نکات جالب و تازه‌ای از هندسهٔ مسطحه می‌باشد. این کتاب هم برای دانش آموز و هم برای دبیران قابل استفاده است.





مفاهیم اساسی حساب دیفرانسیل و...

۱۶۴ صفحه / چاپ دوم / ۴۵۰ ریال

تاراسو، مؤلف کتاب از معروفترین معلمین ریاضی و فیزیک در شوروی است. او در این کتاب تعدادی از مسائل و زیربنایی دیفرانسیل و انتگرال را در قالب گفتگوی میان استاد و شاگرد مطرح کرده است.

حکیم عمر خیام نیشابوری (۴۳۹ - ۵۲۶ هـ.ق)

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!} a^{n-r} b^r$$

ریاضیدان بزرگ مسلمان ایرانی که ترجمهٔ بسیاری از آثار او (و دیگر دانشمندان مسلمان) به زبانهای اروپائی از موجبات مهم و اساسی رنسانس علمی اروپا است. به عنوان مثال بسط دو جمله‌ای $(a+b)^n$ که منتسب به نیوتن می‌باشد مدتها پیش از او توسط خیام به دست آمده بود.