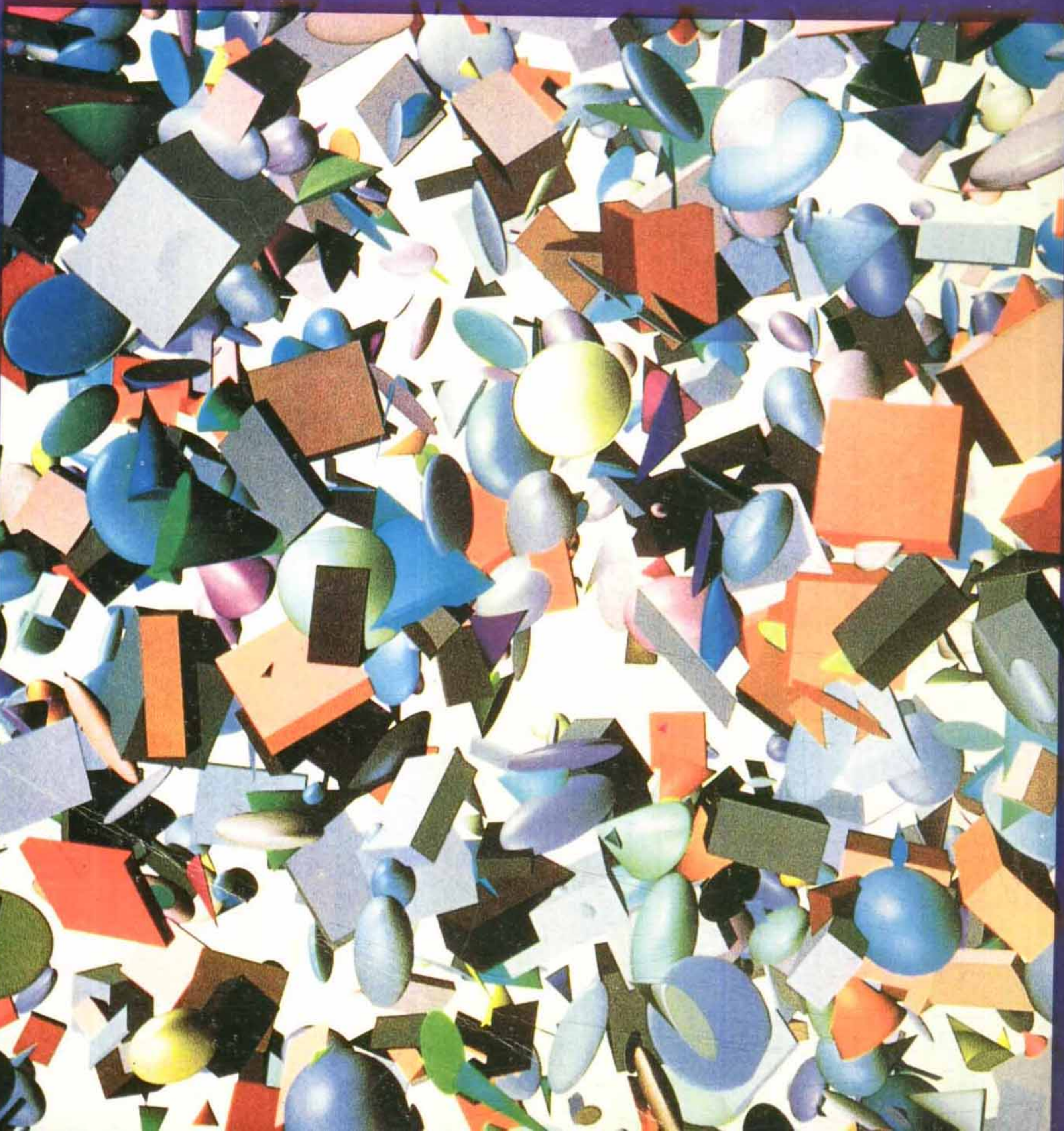
مجله ریاضی

برهان

برای دانش‌آموزان دبیرستان

۷

سال دوّم، تابستان ۱۳۷۲، شمارهٔ سوّم، بهاء ۷۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

• صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه
• مدیر مسئول: محمود ابراهیمی • سردبیر: حمیدرضا امیری

اعضای هیئت تحریریه:
• حمیدرضا امیری • محمدهاشم رستمی • احمد قندهاری
• سیدمحمدرضا هاشمی موسوی • غلامرضا یاسی‌پور

(باتشکرازهمکاری‌ارزنده آقایان پرویزشهریاری ، محمدعابدی ومهدی قمصری)

• مسئول فنی: هوشنگ آشتیانی • صفحه‌آرا: مهرزاد طاهری
• رسام: فرخ نیکزاد • حروفچینی: یگانه • تیراژ: ۵۰۰۰۰ نسخه

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱ـ نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی دبیرستان)

۲ـ طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن

۳ـ طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن

۴ـ طرح معماهای ریاضی

۵ـ نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

• هیئت تحریریه درحک واصلاح وحذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.
• مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
• مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

مطالب این شماره

□ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهرشمالی، کوچه بهرام چوبینی، پلاک ۱۷ تلفن: ۸۸۲۶۰۰۷ ، ۸۸۲۵۹۶۴ ، ۸۸۲۳۱۴۹ ، فاکس ۸۸۲۰۵۹۹

حرف اول

همه ساله هزینه‌های بسیار بالایی صرف تعلیم و تربیت و آموزش شما عزیزان دانش‌آموز می‌شود و چون هریک از شما در آینده باید در گوشه‌ای از این کشور اسلامی و پهناور عهده‌دار مسئولیتی باشید، امروز کاملاً به هوش باشید تا در انتخاب راهتان و انگیزهٔ این انتخاب خدای ناکرده دچار گمراهی نشوید و راه آیندهٔ خود را با انگیزه‌هایی الهی و نه از روی هوی و هوس و نگرش مادی انتخاب کرده و در آن راه سعی و کوشش کنید و در تمامی مراحل، خدا و خدمت به خلق خدا را در نظر داشته باشید.

اگر امروز شما از تسهیلات آموزشی که با پس‌انداز همهٔ اقشار ملت و برنامه‌ریزی و مدیریت مسئولین فراهم آمده، استفاده می‌کنید، فردا روزی است که شما باید با همهٔ توان و تخصصی که به‌دست آورده‌اید و با همان انگیزه‌های الهی در خدمت این اقشار باشید اگر پس از سالها تحصیل به اخذ درجه مهندسی‌یاپزشکی‌در یکی از رشته‌های موجود نایل می‌شوید مبادا فقط به فکر خود و مدرکتان باشید که این طرز فکر شیطانی و فناپذیر است.

اگر پیرمردی را در خیابان مشاهده می‌کنید که به خاطر فقرش محکوم به مرگ است و در بیمارستانی از او x تومان بابت عمل جراحی روی یک تومور مغزی درخواست کرده‌اند و او جرمش فقر است و به حکم این جرم محکوم به مرگ، و شما با استفاده از مواهب الهی و تسهیلاتی که همین مردم در اختیارتان گذاشته و می‌گذارند روزی یک جراح مجرّب شده و توانستید درد چنین دردمندانی را دوا کنید آیا جای آن را ندارد که در هفته روزی را برای خدا و رایگان و به نیت کمک به چنین مردمی به جراحی و طبابت بپردازید. اگر چنین کنید شما چه از دست داده‌اید و چه چیز به‌دست آورده‌اید آیا دِین خود را اداکرده‌اید. این طرز فکر الهی و فناناپذیر است!

آری عزیزانِ دانش‌آموز شما گردانندگان و آینده‌سازان این مملکت هستید و چه کسی دلسوزتر از شما به حال آیندهٔ کشور خود.

به امید روزی که آخرین خورشید آسمان امامت از پشت ابرهای غیبت به درآید و روشنی بخش راه همهٔ ما و پیروان بر حقش باشد، انشاءا...

سردبیر

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید ۷

● پرویز شهریاری

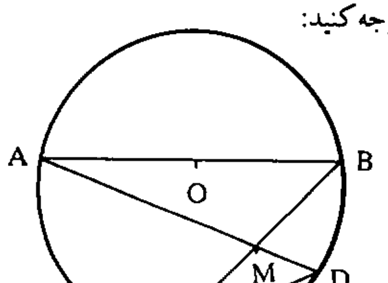
بحث شمارهٔ قبل برهان را دنبال می‌کنیم.

چرا باید «شک» کرد و در کجا و چگونه؟

«شک» را، در حالت کلی، می‌توان به دو گونه تقسیم کرد: ۱) شک نسبت به درستی داوری خود، ۲) شک نسبت به درستی و منطقی بودن داوری دیگران و در این جا، بیشتر به گونهٔ اول آن کار داریم، یعنی: شک نسبت به عمل و کار خود و بررسی و تجزیه و تحلیل دقیق آن. گونهٔ دوم شک، گرچه برای پیشرفت دانش، و از آن جمله ریاضیات، اهمیّتی جدی دارد، ولی از آن‌جا که به مرزهای بالای علمی مربوط می‌شود؛ در شرایط دانش‌آموزی و وقتی که تنها نوآموزی در ریاضیات هستیم، به ما، به من و شما، ربطی پیدا نمی‌کند. اگر من و شما توانستیم، زمانی، خود را به مرز شناخته‌ها و ناشناخته‌ها در ریاضیات برسانیم، آن وقت حق داریم، دربارهٔ کارهای دیگران هم، به بررسی و تحقیق بپردازیم و تلاش خود را در دقیقترکردن و عامترکردن آنها آغاز کنیم. ولی حالا، بیش از همه، باید به خود بپردازیم.

شک نسبت به درستی عمل و داوری خود، به این معنا است که، وقتی قضیه‌ای را ثابت می‌کنیم یا وقتی مسأله‌ای را حل می‌کنیم، دائماً از خود بپرسیم: «آیا عملها را درست انجام داده‌ایم؟» ، «آیا با استدلالی منطقی و قانع کننده پیش رفته‌ایم؟» «آیا تعریف، مفهوم یا قضیه‌ای که مورد استفاده قرار داده‌ایم، بواقع در این‌جا کاربرد دارد؟» ، «آیا همهٔ فرضهای مسأله را درنظر گرفته‌ایم؟» ، «بر کدام قضیه‌ها یا فرمولها تکیه کرده‌ایم، آیا اثبات ریاضی آنها را می‌دانیم؟» ، «آیا شکل، ما را فریب نداده است؟»، در یک کلام، همهٔ عملها و داوریهای خود را، جزء به جزء بشکافیم و، دست کم خودمان، نسبت به درستی آنها و درستی مفهومها و قضیه‌های مورد استنادمان، قانع شویم.

آیا این قضیه درست است، اگر بگوییم: «**برای برابر بودن دو مثلث، کافی است سه زاویه و یک ضلع از مثلثی با سه زاویه و یک ضلع از مثلث دیگر، برابر باشند**»به‌ظاهر، اشکالی در بیان این قضیه نیست. به این مسأله توجه کنید:



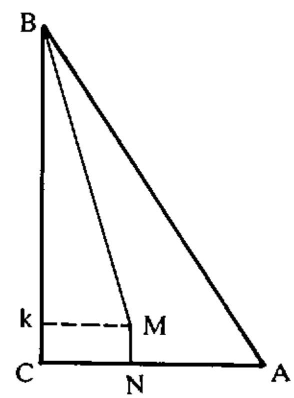
شکل ۱

در شکل، AB قطر دایره، BC وتری دلخواه از آن و M ، نقطهٔ وسط پاره‌خط راست BC است. دو مثلث AMB و MCD را درنظر می‌گیریم. سه زاویهٔ مثلث اول با سه زاویهٔ مثلث دوم، برابرند(زاویه‌های‌به رأس M روبه‌رو و برابرند، دو زاویهٔ به

رأسهای A و C ،محاطی و روبه‌رو به یک کمان از دایره‌اند، زاویه‌های به رأسهای B و D هم، زاویه‌های محاطی روبه‌رو به یک کمان از دایره‌اند). در ضمن دو پاره‌خط راست MB و MC طولی برابر دارند. به این ترتیب سه زاویه و یک ضلع از مثلث AMB ، با سه زاویه و یک ضلع از مثلث MCD برابرند. بنابر قضیه‌ای که در بالا آوردیم، باید دو مثلث برابر باشند که، از آن‌جا نتیجه می‌شود: $|CD| = |AB|$. طول قطر دایره با طول وتری از آن برابر شد. اشتباه در کجاست؟ اگر صورت قضیه را درست به‌حساب آوریم، در استدلالهای ما نقصی وجود ندارد. پس باید گرفتاری، ناشی از صورت قضیه باشد. چه اشکالی در قضیه وجود دارد؟ آیا می‌توانید آن را پیدا کنید؟ قضیه را چگونه تنظیم کنیم که درست باشد و موجب نتیجه گیری نادرست نشود؟

حالا به این مسأله توجه کنید:

مسأله. در مثلث قائم الزاویهٔ ABC ($\hat{C} = 90°$) می‌دانیم: $|BC| = a$ و $|AC| = b$. عمود منصف ضلع AC را رسم کرده‌ایم تا نیمساز داخلی زاویهٔ B را در نقطهٔ M قطع کند. نقطهٔ وسط ضلع AC را N می‌نامیم. اگر داشته باشیم $|MN| = m$ ، طول پاره‌خط راست BM را پیدا کنید.



شکل ۲

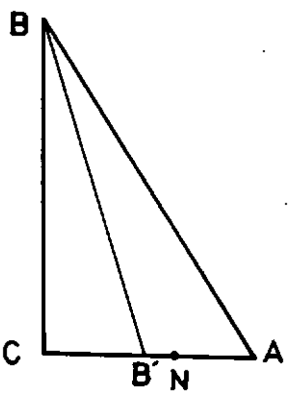
حل. محاسبهٔ طول پاره‌خط راست BM دشوار نیست. از روی شکل معلوم است که: $|BK| = a-m$ و $|KM| = \frac{b}{2}$. بنابراین، در مثلث قائم الزاویهٔ KMB داریم:

$$|BM|^2 = |BK|^2 + |KM|^2 = (a-m)^2 + \frac{b^2}{4}$$

که از آن جا به‌دست می‌آید: $|BM| = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + (a-m)^2}$

مسأله حل شد. به هیچ دشواری برنخوردیم. ولی اندکی بیندیشیم. چرا درصورت مسأله گفته بود، BM نیمساز داخلی زاویهٔ B است؟ نیمساز بودن BM ، چه فایده‌ای داشت؟ ما، ضمن حل مسأله، از نیمساز بودن BM ، هیچ استفاده‌ای نکردیم آیا بی‌جهت، یک فرض اضافی درصورت مسأله آمده است که به هیچ دردی نمی‌خورد؟

دربارهٔ ویژگیهای نیمساز داخلی یک زاویهٔ مثلث بیندیشیم، شاید ما را به نکته‌ای راهنمایی کند. بدون توجه به جنبه‌های دیگر مسأله، نیمساز داخلی زاویهٔ B را در مثلث قائم الزاویهٔ ABC ($\hat{C} = 90°$) رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در B′ قطع کند. یکی از ویژگیهای نیمساز این است که ضلع قاعده را به نسبت طولهای دو ضلع دیگر قطع می‌کند، یعنی باید داشته باشیم



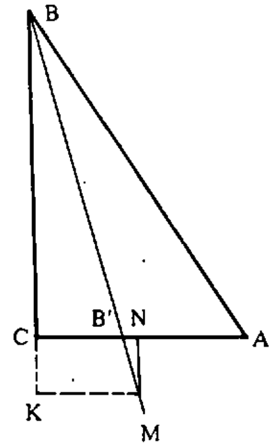
شکل ۳

$$\frac{|CB'|}{|B'A|} = \frac{|BC|}{|AB|} \qquad (1)$$

سمت راست برابری (۱)، کسری است کوچکتر از واحد، زیرا در مثلث قائم الزاویه، طول ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه از طول وتر کوچکتر است، پس:

$\frac{|CB'|}{|B'A|} < 1$ و $|CB'| < |B'A|$

یعنی نقطهٔ N، وسط ضلع AC، بین دو نقطهٔ 'B و A قرار دارد ... عجب! شکل ۲ را اشتباه کشیده بودیم. شکل درست مسأله باید شبیه شکل ۴ باشد. ولی در این‌صورت محاسبهٔ ما برای طول پاره‌خط راست BM، چیز دیگری می‌شود:



شکل ۴

$$|BM| = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4(a+m)^2}$$

می‌بینید که ممکن است، شکل، ما را فریب بدهد. معمولاً شکل را با دست و به تقریب رسم می‌کنیم و این، در بسیاری موردها و به‌دلیل عدم دقت شکل، موجب گمراهی ما می‌شود.

می‌دانیم، ضمن جمع جبری چند عدد، می‌توان آنها را، به هرنحوی گروه‌بندی کرد، مثلاً:

$$5 - 2 - 7 + 11 = 5 - (2 + 7 - 11)$$
$$= (5 - 7) + (11 - 2) = \ldots$$

اکنون فرض کنید، بخواهیم این مجموع را، که تعداد جمله‌های آن، بی‌نهایت است، محاسبه کنیم:

$$S = 1 - 5 + 5^2 - 5^3 + 5^4 - 5^5 + \ldots \qquad (1)$$

اگر مجموع (۱) را به این‌صورت بنویسیم:

$$S = 1 - 5(1 - 5 + 5^2 - 5^3 + \ldots)$$

روشن است که مقدار داخل پرانتز، همان S است و به‌دست می‌آید:

$$S = 1 - 5S \Rightarrow 6S = 1 \Rightarrow S = \frac{1}{6} \qquad (2)$$

یک شگفتی! مجموع جبری عددهای درست، برابر با یک عدد کسری شد! همین مطلب، ما را به فکر وامی‌دارد که بیشتر دقت کنیم. عددها را به‌ترتیب دیگری گروه‌بندی می‌کنیم:

$$S = (1 - 5) + (5^2 - 5^3) + (5^4 - 5^5) + \ldots$$

عجب! داخل هر پرانتز، عددی منفی قرار دارد، و این عددهای منفی، از لحاظ قدر مطلق، مرتباً بزرگ و بزرگتر می‌شوند و، به هرحال، S عددی منفی است. نسبت به جواب (۲) بیشتر شک می‌کنیم، باز هم گروه‌بندی عددها را عوض می‌کنیم:

$$S = 1 + (5^2 - 5) + (5^4 - 5^3) + (5^6 - 5^5) + \ldots$$

در این حالت، برای S مقداری مثبت به‌دست می‌آید ... چرا چنین می‌شود؟ چرا هربار، برای S، مقدار دیگری به‌دست می‌آید. حقیقت این است که قانون گروه‌بندی، در جمع جبری جمله‌ها، تنها وقتی اطمینان بخش است که با تعداد محدودی جمله سروکار داشته باشیم، نه با بی‌نهایت جمله ... و در واقع، برای S، اصلاً مجموعی وجود ندارد!

اکنون مثال ساده‌ای از معادله‌های مثلثاتی را می‌آوریم. می‌خواهیم این معادله را حل کنیم:

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2\operatorname{cotg}x - 1 \qquad (1)$$

برای حل، اگر از دستور تانژانت مجموع استفاده کنیم، به این معادله می‌رسیم:

$$\frac{\operatorname{tg}x + 1}{1 - \operatorname{tg}x} = \frac{1}{\operatorname{tg}x} - 1 \qquad (2)$$

که بعد از ساده کردن و از بین بردن مخرجها، جواب به‌دست می‌آید:

$$\operatorname{tg}x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = k\pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)$$

چون tgx برابر $\frac{1}{2}$ شده است و برابر ۰ یا ۱ نیست، بنابراین نیازی به آزمایش جواب نیست. به‌ظاهر، همه چیز درست است ولی شتاب نکنیم با مراجعه به معادلهٔ اصلی، یعنی معادلهٔ (۱)، معلوم می‌شود که $x=\frac{\pi}{2}$ و، به‌طور کلی، $x=\frac{2k+1}{2}\pi$ در معادله صدق می‌کند. چرا این جواب را گم کردیم؟ اندکی دقت کنیم. همین جواب $\frac{\pi}{2}(2k+1)$، در معادلهٔ (۲) صدق نمی‌کند. پس، ضمن عبور از (۱) به (۲)، این جواب را، از دست داده‌ایم. معادله‌های (۱) و (۲) هم ارز نیستند. همهٔ اشکال مربوط به این دو تبدیل است:

$$tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+tgx}{1-tgx}, \quad cotgx = \frac{1}{tgx} \qquad (3)$$

سمت چپ در هریک از این دو نابرابری، به ازای $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$، معنا دارد، درحالی که سمت راست برابریها، به ازای این مقدارهای x، معنا ندارد. و، به‌همین مناسبت، این جوابها از دست رفتند. این پرسش در برابر ما قرار می‌گیرد: چه کنیم که ضمن تبدیلها، دچار اشتباه نشویم و جواب یا جوابهایی را از دست ندهیم؟ چرا نمی‌توانیم از «اتحاد»های مثلثاتی، برای ساده‌تر کردن معادله استفاده کنیم؟ و یا دقیقتر: با چه شرطی می‌توان از این «اتحادها» استفاده کرد؟ ظاهر امر این است که، استفادهٔ از «اتحادها» نباید موجب ویرانی یک برابری شود! برای رفع دشواری، از خودمان می‌پرسیم: اتحاد یعنی چه؟ پرسش را به‌صورت دیگری می‌آوریم: آیا برابری $\sqrt{x}=\sqrt{-x}$ یک اتحاد است؟ در سمت چپ این برابری، مقدارهای $x \ge 0$ و در سمت راست آن، مقدارهای $x \le 0$ قابل قبول است، یعنی در این برابری، تنها می‌توان $x=0$ گرفت و، به ازای این مقدار هم، برابری برقرار است. پس برابری $\sqrt{x}=\sqrt{-x}$، برای همهٔ مقدارهای قابل قبول x برقرار است، یعنی یک اتحاد است. ولی آیا این، به‌معنای آن است که در هرجا، می‌توان به‌جای $\sqrt{x}$، عبارتِ $\sqrt{-x}$ را گذاشت؟ نه! تنها اگر داشته باشیم $x=0$، آن‌وقت حق داریم $\sqrt{x}$ را به $\sqrt{-x}$ تبدیل کنیم، اتحادهای (۳) هم، وقتی برقرارند که $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ (و برای اولی، در ضمن $x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}$) باشد. در این مورد، می‌توان مثلاً از برابریهای

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\,.\sqrt{b}, \quad \log_m(ab)=\log_m a+\log_m b \qquad (4)$$

نام برد که در هر دو، می‌توان هردو مقدار a و b را در سمت چپ برابری منفی گرفت، درحالی که در سمت راست، هم a و هم b مقدارهایی مثبت. اتحادهای (۴) تنها وقتی برقرارند که، برای اولی داشته باشیم $a \ge 0$ و $b \ge 0$ و برای دومی $a>0$، $b>0$. به این معادله توجه کنید:

$$\log[x(x+9)] + \log\frac{x+9}{x} = 0 \qquad (5)$$

که اگر آن را به‌این‌صورت تبدیل کنیم:

$$\log + \log(x+9) + \log(x+9) - \log x = 0$$

که به جواب $x=-8$ می‌رسد. ولی $x=-8$ در معادلهٔ (۵) صدق نمی‌کند، درحالی که $x=-10$ در آن صدق می‌کند. برای رسیدن به جواب باید اتحاد دوم (۴) را به این صورت نوشت:

$$(\log_m(ab) = \log_m|a| + \log_m|b|$$

به این ترتیب، معادلهٔ (۵)، این‌طور تبدیل می‌شود:

$$\log|x| + \log|x+9| + \log|x+9| - \log|x| = 0$$

که منجر به دو جواب $x_1=-8$ و $x_2=-10$ می‌شود و، بعد از آزمایش، معلوم می‌شود که معادلهٔ (۵) تنها یک جواب دارد. $x=-10$.

گاهی «معرفت شهودی» نتیجه‌ای را به ما القا می‌کند، ولی تا زمانی که این «استنباط»، با استدلال قیاسی و منطقی همراه نشود، قابل اعتماد نیست. «معرفت شهودی» اغلب متکی بر تجربهٔ گذشتهٔ ما و گاه متکی بر استقرای ناقص است. ذهن، با ترکیب سریع مشاهده‌ها و تجربه‌های قبلی، و بیشتر ناآگاهانه، نتیجه‌ای را به ما تلقین می‌کند و یا راهی را برای حل مسأله در برابر ما می‌گذارد ولی این «استنباط» ممکن است درست باشد و

ممکن است درست نباشد. استقرای ناقص، یعنی درست درآمدن «استنباط شهودی» در چند مورد خاص، هرچند که تعداد این موردها زیاد باشد، نمی‌تواند جای استدلال قیاسی ریاضی را بگیرد. اندکی به تاریخ ریاضیات مراجعه کنیم.

در یونان باستان و دوران اعتلای دانش و هنر آن سرزمین، اغلب گمان می‌کردند با فرو رفتن در خود و تنها با اندیشیدن، بدون مراجعه به دنیای واقع و بدون شناخت قانونهای موجود در طبیعت، می‌توان به رمز ساختمان جهان پی برد. تالس گمان می‌کرد، سرچشمه و زیربنای ساختمان جهان «آب» است، دموکریت، ذرّه‌های کوچک تقسیم ناپذیر را ـ که «اتم» می‌نامید، اساس ساختمان جهان می‌دانست؛ افلاطون زیبایی را در تقارن می‌دانست و، به تعبیری، «اصل زیبایی» را، اصل حاکم بر جهان می‌دانست [قضیه‌ای در هندسهٔ مسطحه وجود دارد که، امروز، درستی آن ثابت شده است: **از بین همهٔ شکلهای مسطحهٔ با محیط برابر، مساحت دایره از همه بیشتر است. افلاطون**، برای «اثبات» درستی این قضیه می‌گوید: دایره متقارنترین و، بنابراین، زیباترین شکلهاست، پس حق دایره است که بیشترین مساحت را داشته باشد.]، پارمنیدس، جهان را یک پارچه‌وبی‌حرکت می‌دانست و معتقد بود، حرکتهای ظاهری، نتیجه‌ای از تخیل ماست و، در واقع امر، وجود ندارند؛ فیثاغورس و هواداران او، «عدد» را بنیان ساختمان جهان می‌دانستند و ...

درست است که، برخی از این دیدگاه‌ها، با همهٔ عدم دقتها و نادرستیها، انگیزه‌ای برای بحث و، در نتیجه، وسیله‌ای برای پیشرفت دانش شدند، در برخی موردها هم، به‌صورت سدی در برابر دانش واقعی درآمدند و حرکت آن را کُند و یا منحرف کردند. ولی شکست این دیدگاه‌ها، در ذات آنها نهفته بود: به طبیعت یا به اجتماع نمی‌توان قانونی را تحمیل کرد، باید قانونهای حاکم بر طبیعت و جامعه را شناخت و، با پیروی از آنها، راهی برای تسلط انسان پیدا کرد ... البته، انسان هوشمندتر از آن است که به دیدگاه‌های ناشی از ذهن و گمان، تن در دهد؛ انسان، درطول زمان، همین دیدگاه‌ها را می‌کاود و از میان سنگلاخ و آشوب دیدگاه‌های مختلف، راه خود را به سمت جلو باز می‌کند.

زنون، یکی از شاگردان پارمنیدس و هوادار نظریهٔ او مبنی بر عدم وجود حرکت، برای اثبات نظریهٔ استاد، چهار استدلال ریاضی آورد که، در تاریخ ریاضیات، مشهورند. او در همهٔ این استدلالها، با استفادهٔ نادرست از دو مفهوم «بی‌نهایت کوچک» و «بی‌نهایت بزرگ»، با سرایت دادن «معرفت شهودی» به «استدلال ریاضی» با مخلوط کردن قانونهای مربوط به عمل روی عددهای گویا با عمل روی «بی‌نهایت کوچکها و بی‌نهایت بزرگها» و عدم درک درست از مفهومهای «پیوستگی» و «ناپیوستگی»، به گمان خود، یک پارچه بودن و بی‌حرکت بودنِ جهان را ثابت کرد. استدلالهای زنون نادرست بود، ولی تأثیری منفی، بر کار ریاضی‌دانان بعد از خود گذاشت. اگر از ارشمیدس ـ که شجاع و سنت‌شکن بود ـ بگذریم، دیگر ریاضی‌دانان یونانی، به‌دلیل عجز خود در پاسخ‌گویی به «استدلالهای» زنون، از نزدیک شدن به مفهوم «بی‌نهایت» پرهیز می‌کردند و پرداختن به آن را، بیرون از حیطهٔ ریاضیات تصور می‌کردند. سده‌ها طول کشید تا ریاضی‌دانان بر این ترس غلبه کردند و قانونهای حاکم بر «بی‌نهایت کوچکها» و «بی‌نهایت بزرگها» را کشف کردند.

دربارهٔ دیدگاه فیثاغورس و فیثاغوریان، اندکی بیشتر صحبت می‌کنیم. فیثاغوریان تصور می‌کردند، «عدد» سازندهٔ جهان است و بر تمامی جهان حکومت می‌کند. از قبل این را بگوییم که «عدد» به معنایی که در آن زمان می‌شناختند، عددهای طبیعی و نسبتهای آنها، یعنی «عددگویا و مثبت» بود.

گرچه فیثاغورس و هواداران او، به‌خاطر دلبستگی به «عدد» و اعتقاد به «نیروی عدد» توانستند بسیاری از رازهای درونی عدد را بشناسند و، از این جهت، باید آنها را بنیان‌گذاران نخستین نظریهٔ عددها دانست، ولی در مجموع، مُبلغ نظریه‌ای ذهنی و بی‌منطق دربارهٔ ساختمان جهان و قانونمندیهای حاکم بر

جامعه‌های انسانی بودند ...

افلاطون که، در ضمن، گرایشهای فیثاغوری داشت، در کتاب معروف خود «جمهور» تلاش می‌کند با استفاده از عدد و پهلوی هم چیدن «عددهای زشت و زیبا» آرمان شهر خود را با رنگ و بوی ریاضی بیاراید، ولی در واقع، بخشی از «جمهور» که به این جنبه‌های «رمزگونهٔ عدد» پرداخته است، نه ارزش ریاضی دارد، نه ارزش اجتماعی و نه ارزش تاریخی.

فیثاغوریان، که عدد را به‌معنای عددگویا یعنی نسبت دو عدد درست (و مثبت) می‌شناختند، اعتقاد داشتند، می‌توان همهٔ پدیده‌ها و روندهای طبیعی و اجتماعی، و حتی خلق و خو و رفتار احساسی آدمی را، به یاری عدد توضیح داد ... و سرانجام، همین اعتقاد، جمع آنها را متلاشی کرد و به «ضد اعتقاد» آنها تبدیل شد. جریان این است که خود فیثاغورس ـ و یا به احتمالی قویتر، یکی از هواداران او ـ قضیه‌ای را که امروز هم، به‌نام قضیهٔ فیثاغورس می‌شناسیم، کشف کرد: اگر در مثلث قائم‌الزاویه، طول وتر را برابر c و طول ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه را، برابر a و b بگیریم، همیشه داریم:

$$c^۲ = a^۲ + b^۲$$

فیثاغوریان با این پرسش روبه رو شدند که: **اگر در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، طول هریک از ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه برابر واحد باشد، طول وتر مثلث چقدر است!** امروز می‌گوییم، طول وتر این مثلث، برابر است با $\sqrt{۲}$. ولی هواداران فیثاغورس ـ که عددهای گنگ را نمی‌شناختندـ می‌خواستند $\sqrt{۲}$ را، با نسبت دو عدد درست بیان کنند که ممکن نبود. در واقع، اگر m و n را دو عدد درست و نسبت به هم اول بگیریم و فرض کنیم:

$$\sqrt{۲} = \frac{m}{n}$$

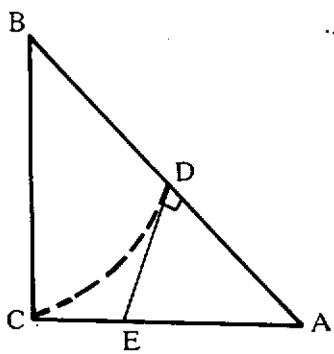
به تناقض برخورد می‌کنیم. وقتی m و n نسبت به هم اوّلند، به‌معنای آن است که مقسوم علیه مشترکی ندارند، ولی از رابطهٔ فرض به‌دست می‌آید:

$$۲ = \frac{m^۲}{n^۲} \Rightarrow m^۲ = ۲n^۲$$

و این به‌معنای آن است که m عددی است زوج $m = ۲k$ می‌گیریم، در این صورت به برابری:

$$۴k^۲ = ۲n^۲ \Rightarrow n^۲ = ۲k^۲$$

می‌رسیم، یعنی n هم باید عددی زوج باشد. به این ترتیب، m و n عددهایی زوجند و مقسوم علیه مشترکی برابر ۲ دارند که فرض ما را، یعنی بر این که m و n نسبت به هم اوّلند، نقض می‌کند. $\sqrt{۲}$ را نمی‌توان به‌صورت نسبت دو عدد درست نوشت. گنگ بودن $\sqrt{۲}$ را به یاری هندسه هم می‌توان ثابت کرد. وقتی می‌گوییم: $\sqrt{۲}$ عددی گنگ است، به این معناست که، برای دو پاره خط راستی که یکی به‌طول واحد و دیگری به طول $\sqrt{۲}$ است، نمی‌توان مقیاس مشترکی پیدا کرد، یعنی نمی‌توان پاره‌خط راستی پیدا کرد که بتوان پاره‌خطهای راست به طولهای واحد و $\sqrt{۲}$ را برحسب طول این پاره‌خط مقیاس، با عددهای درستی بیان کرد.



شکل ۵

مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ABC

$\hat{C} = ۹۰°$ ؛ $|AC| = |BC|$) را درنظر می‌گیریم و طول هر ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه آن را، برابر واحد فرض می‌کنیم. آیا پاره‌خطهای راست BC (به طول واحد) و AB (به‌طول $\sqrt{۲}$) مقیاس مشترکی دارند؟ اگر به مرکز B و به شعاع برابر $|BC|$، کمانی از دایره را رسم کنیم تا وتر را در D قطع کند و، سپس، از

D مماسی بر این کمان رسم کنیم تا AC را در E قطع کند، روشن است که:

$$|CE| = |DE| = |AD|$$

اگر پاره‌خطهای راست BC و AB مقیاس مشترکی داشته باشند، با توجه به برابری $|BC| = |BD|$، باید پاره‌خطهای راست AD و AE هم مقیاس مشترکی داشته باشند ولی $|AD| < \frac{1}{2}|BC|$ و $|AE| < \frac{1}{2}|AB|$ (چرا؟).

پیدا کردن مقیاس مشترک بین دو پاره‌خط راست اخیر هم، با همان روش، منجر به پیداکردن مقیاس مشترک بین دو پاره‌خط راست دیگری می‌شود که از نصف پاره‌خطهای راست نخستین، کوچکترند. اگر این عمل را ادامه دهیم، مرتباً با پاره‌خطهای راست کوچک و کوچکتری سروکار پیدا می‌کنیم و هرگز به مقیاس مشترک معینی نمی‌رسیم.

به هرحال، همهٔ تلاشهای هواداران فیثاغورس، برای بیان وتر مثلث قائم الزاویهٔ متساوی‌الساقین (وقتی ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن، برابر واحد باشد) به شکست انجامید: عدد (یعنی عدد گویا)، که بنا به اعتقاد فیثاغوریان، باید قدرت بیان هر پدیده‌ای را داشته باشد، از عهدهٔ بیان طول یک پاره‌خط راست عاجز ماند... فیثاغوریان تلاش کردند، این کشف را از دیگران مخفی کنند و، برای فاش کنندهٔ آن، مجازاتی سخت درنظر گرفتند. ولی هیچ رازی پنهان نمی‌ماند و بتدریج، همگان از «ناتوانی» عدد در بیان طول یک پاره‌خط راست، آگاه شدند... هواداران فیثاغورس کوشیدند راهی برای نجات خود پیدا کنند و پدیده‌ها و روندها را به دو گروه تقسیم کردند: گروهی که به کمک عدد قابل بیانند و گروهی که به‌وسیلهٔ عدد بیان نمی‌شوند. گروه اول را گویا (یا مُنطِق) و گروه دوم را گنگ (یا اَصَم) نامیدند ... ولی این تلاش هم، مُشکل آنها را حل نکرد و مکتب فلسفی فیثاغوری از هم پاشید.

تا بعد

تفریح اندیشه ۱

مسأله ـ مهرداد تمام پولهای خود را در پنج مغازه‌ای که از آنها خرید کرده بود خرج کرد.

او در هر مغازه پنج ریال بیشتر از نصف مبلغی را که به‌هنگام ورود به آن مغازه داشت خرج کرده است. مقدار پولی را که مهرداد قبل از خرید داشته است تعیین کنید.

جواب در صفحهٔ ۹۶

دیفرانسیل و انتگرال

(قسمت دوم)

● احمد قندهاری

مورد استفاده دانش آموزان، سال چهارم

نوع ششم : انتگرال گیری توابع سادهٔ مثلثاتی

۱) $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$

مثال: $\int \sin ۴x dx = -\frac{1}{۴}\cos ۴x + c$

۲) $\int \cos ax dx = \frac{1}{a}\sin ax + c$

مثال: $\int \cos ۲x dx = \frac{1}{۲}\sin ۲x + c$

۳) $\int tg^۲ ax dx = \frac{1}{a} tg ax - x + c$

مثال: $\int tg^۲ ۱۰x dx = \frac{1}{۱۰} tg ۱۰x - x + c$

۴) $\int cotg^۲ ax dx = -\frac{1}{a} cotg ax - x + c$

مثال: $\int cotg^۲ \frac{x}{۵} dx = -۵ cotg \frac{x}{۵} - x + c$

تمرینها : انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

$\int \sin \frac{۱۰x}{۳} dx \qquad \int \cos \frac{۲x}{\sqrt{۳}} dx$

$\int tg^۲ ۲\sqrt{۲}x dx \qquad \int cotg^۲ \frac{x\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}} dx$

نوع هفتم : انتگرال گیری توابع مثلثاتی:

I. $\int \sin u du = -\cos u + c$

II. $\int \cos u du = \sin u + c$

III. $\int tg^۲ u du = tg u - u + c$

IV. $\int cotg^۲ u du = -cotg u - u + c$

مسأله : انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

۱) $I = \int \frac{\cos(tg x) dx}{\cos^۲ x}$

$u = tg x \Longrightarrow du = (۱ + tg^۲ x) dx = \frac{dx}{\cos^۲ x} \Longrightarrow$

$I = \int \cos u du = \sin u + c = \sin(tg x) + c$

۲) $I = \int -\sin x \, tg^۲(\cos x) dx$

$u = \cos x \Longrightarrow du = -\sin x dx \Longrightarrow$

$I = \int tg^۲ u du = tg u - u + c$

$= tg(\cos x) - \cos x + c$

۳) $I=\int cotg^2(tgx)(1+tg^2x)dx$

$u=tgx \Longrightarrow du=(1+tg^2x)dx \Longrightarrow$

$I=\int cotg^2u\,du=-cotg\,u-u+c$

$=-cotg(tgx)-tgx+c$

---

۴) $I=\int x^{n-1}\sin x^n dx$

$u=x^n \Longrightarrow du=nx^{n-1}dx \Longrightarrow$

$I=\frac{1}{n}\int \sin u\,du=-\frac{1}{n}\cos u+c$

$=-\frac{1}{n}\cos x^n+c$

تمرینها : مطلوب‌است محاسبه انتگرالهای زیر:

$\int\frac{\cos(tg5x)}{\cos^2 5x}dx$ $\qquad$ $\int\frac{\sin(cotg2x)}{\sin^2 2x}dx$

$\int\frac{cotg^2(cotg10x)}{\sin^2 10x}dx$ $\qquad$ $\int\frac{tg^2(tg4x)}{\cos^2 4x}dx$

نوع هشتم: انتگرالهایی است مثلثاتی ؛ مانند نوع دوم جبری، یعنی مسأله شامل دوعامل‌است به نامهای عامل‌اصلی و عامل مشتق و مانند همان‌نوع دوم‌جبری حل می‌شود.

مثال :
$$\begin{cases} tgx & :\text{عامل اصلی} \\ \frac{1}{\cos^2x} & :\text{عامل مشتق}\end{cases}$$

$I=\int\frac{\sin^7x\,dx}{\cos^9x}=\int tg^7x\times\frac{dx}{\cos^2x}$

$u=tgx \Longrightarrow du=\frac{dx}{\cos^2x} \Longrightarrow$

$I=\int u^7du=\frac{1}{8}u^8+c=\frac{1}{8}tg^8x+c$

$I=\int\frac{2\cos2x\,dx}{\sin2x\sqrt{\sin2x}}$

$u=\sin2x \Longrightarrow du=2\cos2x\,dx$

$\Longrightarrow I=\int\frac{du}{u\sqrt{u}}=\int\frac{du}{u^{\frac{3}{2}}}=\int u^{-\frac{3}{2}}du$

$=-\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{u}}+c$

$=\frac{-1}{2\sqrt{\sin2x}}+c$

نوع نهم : انتگرالهایی است مانند نوع چهارم جبری، یعنی مسأله انتگرال‌شامل سه‌عامل‌است‌به نامهای: اصلی، مشتق و اضافی و مانند همان نوع‌چهارم جبری‌حل می‌شود.

مسأله :

$I=\int\sin^4x\cos^3x\,dx$

$I=\int\underbrace{\sin^4x}_{\text{اصلی}}\ \underbrace{\cos^2x}_{\text{اضافی}}\ \underbrace{\cos x}_{\text{مشتق}}dx$

$$\begin{cases} u=\sin x \\ du=\cos x\,dx \\ \cos^2x=1-\sin^2x=1-u^2\end{cases}$$

$\Longrightarrow I=\int u^4(1-u^2)du=$

$\int u^4du-\int u^6du=\frac{1}{5}u^5-\frac{1}{7}u^7+c$

$\Longrightarrow I=\frac{1}{5}\sin^5x-\frac{1}{7}\sin^7x+c$

تمرینها : مطلوب است محاسبه انتگرالهای زیر:

$$\int tg^6 x \times \frac{dx}{\cos^4 x} \quad \text{و} \quad \int \cos^7 x \sin^5 x\, dx$$

$$\int \frac{tg^{20} x}{\cos x \sqrt{\cos x}}\, dx \quad \text{و} \quad \int \frac{\cos^{10} x}{\sin^{14} x}\, dx$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2}$$

نوع دهم : انتگرال گیری توانهای فرد $\sin x$ و $\cos x$.

الف) درمورد $\cos^{2n-1}_{n\in N} x$: $\cos x^1$ راکنار گذاشته، بقیه‌را به $\sin x$ تبدیل می کنیم،سپس، $\sin x$ را u فرض می کنیم پس از دیفرانسیل گیری در مسأله قرار می‌دهیم.

ب) در مورد $\sin^{2n-1} x$: $n \in N$

$\sin x$ را کنار گذاشته، بقیه را به $\cos x$ تبدیل می کنیم، سپس $\cos x$ را u فرض می کنیم، از این فرض دیفرانسیل گرفته در مسأله قرار می‌دهیم.

مسأله:

$$I = \int \cos^5 x\, dx$$

$$I = \int \cos^4 x \cdot \cos x\, dx = \int (\cos^2 x)^2 \cos x\, dx$$

$$= \int (1 - \sin^2 x)^2 \cos x\, dx$$

$$u = \sin x \implies du = \cos x\, dx$$

$$\implies I = \int (1-u^2)^2 du = \int (1 + u^4 - 2u^2) du$$

$$= \int du + \int u^4 du - 2\int u^2 du =$$

$$u + \frac{1}{5}u^5 - \frac{2}{3}u^3 + c =$$

$$\frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \sin x + c$$

مسأله:

$$I = \int \sin^7 x\, dx$$

$$I = \int \sin^6 x \cdot \sin x\, dx = \int (\sin^2 x)^3 \sin x\, dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x)^3 \sin x\, dx$$

$$u = \cos x \implies du = -\sin x\, dx$$

$$\implies I = \int -(1-u^2)^3 du$$

$$= -\int (1 - u^6 + 3u^4 - 3u^2) du$$

$$= -\int du + \int u^6 du - 3\int u^4 du +$$

$$3\int u^2 du = -u + \frac{1}{7}u^7 - \frac{3}{5}u^5 + u^3 + c$$

$$= -\cos x + \frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{3}{5}\cos^5 x + \cos^3 x + c$$

تمرینها : مطلوب است محاسبهٔ:

$$\int \cos^7 x\, dx \qquad \int \sin^9 x\, dx$$

نوع یازدهم : انتگرال گیری توانهای زوج $\sin x$ و $\cos x$.

باید کلیهٔ توانهای زوج را به کمك فرمولهای زیر حذف کرد.

$$2\cos^2 a = 1 + \cos 2a \qquad 2\sin^2 a = 1 - \cos 2a$$

مسأله :

$$I = 8\int \sin^4 x\, dx$$

$$I = 2\int 4\sin^4 x\, dx = 2\int (2\sin^2 x)^2 dx$$

$$= 2\int (1 - \cos 2x)^2 dx$$

$$I=2\int(1+\cos^{2}2x-2\cos 2x)dx$$

$$=\int(2+2\cos^{2}2x-4\cos 2x)dx$$

$$=\int(2+1+\cos 4x-4\cos 2x)dx$$

$$=\int(3+\cos 4x-4\cos 2x)dx$$

$$=3\int dx+\int\cos 4x\,dx-4\int\cos 2x\,dx$$

$$=3x+\frac{1}{4}\sin 4x-2\sin 2x+c$$

تمرینها : مطلوب‌است محاسبهٔ انتگرالهای زیر:

$$8\int\cos^{4}x\,dx \qquad 32\int\sin^{6}x\,dx$$

$$32\int\cos^{6}x\,dx \qquad 64\int\cos^{8}x\,dx$$

نوع دوازدهم : اگرمسأله انتگرال شامل حاصل‌ضرب سینوسها وکسینوسها باشد، ابتداآنها را به حاصل‌جمع تبدیل کرده انتگرال می‌گیریم.

مثال : $I=2\int\sin 20x\sin 3x\,dx$

داریم : $2\sin a\sin b=\cos(a-b)-\cos(a+b)$

$$\Longrightarrow\ I=\int[\cos(20-3)x-\cos(20+3)x]dx$$

$$I=\int(\cos 17x-\cos 23x\,dx)$$

$$=\int\cos 17x\,dx-\int\cos 23x\,dx$$

$$=\frac{1}{17}\sin 17x-\frac{1}{23}\sin 23x+c$$

تمرینها : مطلوب‌است محاسبهٔ انتگرالهای زیر:

$$2\int\cos 7x\sin 2x\,dx$$

$$2\int\cos 5x\cos x\,dx$$

$$2\int\cos\frac{17x}{2}\cos\frac{5x}{2}dx$$

$$2\int\sin\frac{17x}{4}\cdot\cos\frac{3x}{4}dx$$

نوع سیزدهم : انتگرال‌گیری توانهای زوج

tgx و $cotgx$

از توان مسأله دو واحد، دو واحدکم‌کرده جمله‌هایی به مسأله اضافه وکم می‌کنیم، سپس بـا فاکتورگیری از راه دسته‌بندی مشتق tgx را می‌سازیم. سپس tgx را u فرض‌می‌کنیم پس از دیفرانسیل‌گیری در مسأله قرار می‌دهیم.

مسأله : $I=\int tg^{8}x\,dx$

$$I=\int(tg^{8}x+tg^{6}x-tg^{6}x+tg^{4}x-tg^{4}x+tg^{2}x-tg^{2}x+1-1)dx$$

$$I=\int[tg^{6}x(1+tg^{2}x)-tg^{4}x(1+tg^{2}x)+tg^{2}x(1+tg^{2}x)-(1+tg^{2}x)+1]dx$$

$$I=\int tg^{6}x(1+tg^{2}x)dx-\int tg^{4}x(1+tg^{2}x)dx+\int tg^{2}x(1+tg^{2}x)dx+\int(1+tg^{2}x)dx+\int dx$$

$$u=tgx\ \Longrightarrow\ du=(1+tg^{2}x)dx$$

$$I=\int u^{6}\,du-\int u^{4}du+\int u^{2}du-\int du$$

$$+\int dx=\frac{1}{7}u^{7}-\frac{1}{5}u^{5}+\frac{1}{3}u^{3}-u+x+c$$

$$=\frac{1}{7}tg^{7}x-\frac{1}{5}tg^{5}x+\frac{1}{3}tg^{3}x+tgx+x+c$$

توجه: فرمول انتگرال‌گیری توانهای زوج

tgx و $cotgx$ $\qquad n\in N$

$$1):\int tg^{2n}x\,dx=\frac{1}{2n-1}tg^{2n-1}x-\frac{1}{2n-3}tg^{2n-3}x$$

$$+\frac{1}{2n-5}tg^{2n-5}x-\dots\pm tgx\mp x+c$$

$$2):\int cotg^{2n}x\,dx=-\frac{1}{2n-1}cotg^{2n-1}x$$

$$+\frac{1}{2n-3}cotg^{2n-3}x-\frac{1}{2n-5}cotg^{2n-5}x$$

$$+\dots\pm cotgx\pm x+c$$

مثال :

$$\int cotg^{10}x\,dx=-\frac{1}{9}cotg^{9}x+\frac{1}{7}cotg^{7}x-\frac{1}{5}cotg^{5}x$$

$$+\frac{1}{3}cotg^{3}x-cotgx-x+c$$

تمرینها : مطلوب‌است محاسبهٔ انتگرالهای زیر:

$$\int tg^{6}2x\,dx \qquad \int cotg^{8}8x\,dx$$

$$\int tg^{6}\frac{x}{3}dx \qquad \int cotg^{12}\frac{x}{4}dx$$

نوع چهاردهم : انتگرال $Arcsin\,u$.

داریم :

$$\int\frac{du}{\sqrt{1-u^{2}}}=Arcsin\,u+c$$

مسأله :

$$I=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^{2}-x^{4}}}\qquad a>0$$

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{\sqrt{a^{2}(1-\frac{x^{4}}{a^{2}})}}=\frac{1}{2a}\int\frac{2x\,dx}{\sqrt{1-\frac{x^{4}}{a^{2}}}}$$

$$\begin{cases}u=\dfrac{x^{2}}{a}\\[2mm] du=\dfrac{2x\,dx}{a}\\[2mm] a\,du=2x\,dx\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\quad I=\frac{1}{2a}\int\frac{a\,du}{\sqrt{1-u^{2}}}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^{2}}}$$

$$=\frac{1}{2}Arcsin\,u+c$$

$$I=\frac{1}{2}Arcsin\frac{x^{2}}{a}+c$$

تمرینها : مطلوب‌است محاسبهٔ انتگرالهای زیر :

$$\int\frac{(1+tg^{2}x)dx}{\sqrt{1-tg^{2}x}}\qquad\int\frac{dx}{sin^{2}x\sqrt{1-cotg^{2}x}}$$

$$\int\frac{x^{2}dx}{\sqrt{4-x^{6}}}$$

$$\int\frac{dx}{(1+x^{2})\sqrt{1-(Arctgx)^{2}}}$$

نوع پانزدهم : انتگرال $Arc\,tg\,u$.

داریم :

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \mathrm{Arc}tg\,u + c$$

مسأله :

$$I=\int \frac{-2\sin 2x\,dx}{1+\cos^2 2x}$$

$$u=\cos 2x \Longrightarrow du = -2\sin 2x\,dx$$

$$\Longrightarrow I = \int \frac{du}{1+u^2} = \mathrm{Arc}tg\,u + c$$

$$= \mathrm{Arc}tg(\cos 2x)+c$$

تمرینها : مطلوب است محاسبهٔ انتگرالهای زیر:

$$\int\frac{x^2dx}{4+x^6} \qquad \int \frac{dx}{(4+tg^2x)\cos^2 x}$$

نوع شانزدهم : محاسبهٔ انتگرال

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

به شرطی که $a>0$ و $\Delta<0$.

حل این انتگرال به حل انتگرال $\mathrm{Arc}tg\,u$ تبدیل می‌شود.

مسأله :

$$\int \frac{dx}{2x^2-8x+16} \qquad \begin{cases} a>0 \\ \Delta'<0 \end{cases}$$

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-4x+8}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-4x+4+4}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-2)^2+4}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{4\left[1+\frac{(x-2)^2}{4}\right]}=\frac{1}{8}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{x-2}{2}\right)^2}$$

$$u=\frac{x-2}{2} \Longrightarrow 2u=x-2 \Longrightarrow 2du=dx$$

$$\Longrightarrow I=\frac{1}{8}\int\frac{2du}{1+u^2}=\frac{1}{4}\int\frac{du}{1+u^2}$$

$$=\frac{1}{4}\,\mathrm{Arc}\,tg\,u+c$$

$$=\frac{1}{4}\,\mathrm{Arc}\,tg\,\frac{x-2}{2}+c$$

تمرینها : مطلوب است محاسبهٔ انتگرالهای زیر:

$$\int\frac{dx}{4x^2-4x+5} \qquad \int\frac{dx}{x^2-2\sqrt{2}x+6}$$

نوع هفدهم : محاسبهٔ انتگرالهای

$$\int\frac{dx}{1\pm\cos x} \qquad \int\frac{dx}{1\pm\sin x}$$

برای‌حل این انتگرالها، صورت ومخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم، سپس کسرحاصل را تفکیک می‌کنیم و انتگرال می‌گیریم .

مسأله :

$$I=\int\frac{dx}{1-\sin x}$$

$$I=\int\frac{dx}{1-\sin x}\times\frac{1+\sin x}{1+\sin x}$$

$$=\int\frac{(1+\sin x)dx}{1-\sin^2 x}=\int\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$\Longrightarrow I=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx$$

$$=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$=tg\,x+\frac{1}{\cos x}+c=tg\,x+\sec x+c$$

توجه :

$$y=\frac{1}{u} \Rightarrow dy=\frac{-du}{u^2} \Rightarrow$$

$$\int \frac{-du}{u^2}=+\frac{1}{u}+c$$

مثال :

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx \quad u=\cos x \Rightarrow du=-\sin x\,dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{-du}{u^2}=\frac{1}{u}+c=\frac{1}{\cos x}+c$$

تمرینها : مطلوب است محاسبهٔ انتگرالهای زیر:

$$\int\frac{dx}{1+\cos x} \qquad \int\frac{dx}{1+\sin x} \qquad \int\frac{dx}{1-\cos x}$$

نوع هجدهم : محاسبهٔ انتگرالهای

$$\int\frac{dx}{1+\sin^2 x} \qquad \int\frac{dx}{1+\cos^2 x}$$

$\cos^2 x$ را به $tg^2 x$ و $\sin^2 x$ را به $cotg^2 x$ تبدیل می‌کنیم پس از ساده کردن حل مسأله به حل انتگرال $Arctg u$ تبدیل می‌شود.

مسأله :

$$I=\int\frac{dx}{1+\cos^2 x}$$

$$\cos^2 x=\frac{1}{1+tg^2 x} \Rightarrow$$

$$I=\int\frac{dx}{1+\frac{1}{1+tg^2 x}}=\int\frac{dx}{\frac{2+tg^2 x}{1+tg^2 x}}$$

$$\Rightarrow I=\int\frac{(1+tg^2 x)dx}{2+tg^2 x}=\frac{1}{2}\int\frac{(1+tg^2 x)dx}{1+\frac{tg^2 x}{2}}$$

$$u=\frac{tg x}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2}u=tg x \Rightarrow$$

$$\sqrt{2}du=(1+tg^2 x)dx$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{2}du}{1+u^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{du}{1+u^2}$$

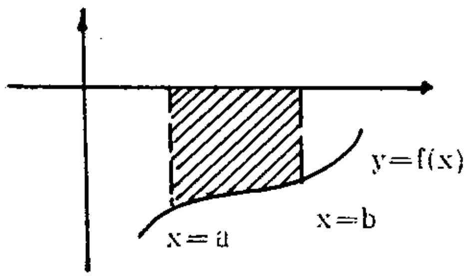
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}Arctg u+c$$

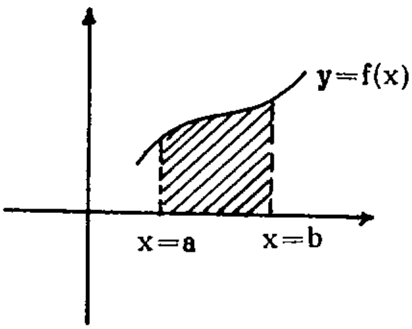
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}Arctg\left(\frac{tg x}{\sqrt{2}}\right)+c$$

تمرین : مطلوب است محاسبهٔ انتگرال

$$\int\frac{dx}{1+\sin^2 2x}$$

انتگرال معین:





قضیه: اگر تابع به معادلهٔ $y=f(x)$ درفاصلهٔ (I) پیوسته باشد ودرهمین فاصله $f(x)\geqslant 0$ یا $f(x)\leqslant 0$ در این‌صورت

سطح محصور بین منحنی تابع به معادله $y=f(x)$ ومحور xها و دو خط به معادله‌های $x=a$ و $x=b$ ($a,b\in I$ و $a<b$) از رابطهٔ $S=|F(b)-F(a)|$ به دست می‌آید، که $F(x)$ یکی از توابع اولیهٔ تابع $f(x)$ است.

بنابراین $\int_a^b f(x)\cdot dx$ که یک عدد است را انتگرال معین می‌نامند و a و b را حدود انتگرال می‌گویند.

مثال :

$$\int_1^2(-x^2+2x)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2\right)_1^2$$

$$=\left(-\frac{8}{3}+8\right)-\left(-\frac{1}{3}+2\right)=\frac{11}{3}$$

یك فرمول مفید:

$$\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$$

اثبات : اگر

$$\int f(x)dx=F(x)$$

آنگاه داریم:

$$\int_0^a f(x)dx=F(a)-F(0)$$

در این صورت:

$$\int_0^a f(a-x)dx=-F(a-x)$$

است و

$$\int_0^a f(a-x)dx=-F(0)+F(a)$$

پس؛ تساوی فوق درست است.

کاربرد فرمول

$\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$ درحل مسائل زیر است. ثابت کنید:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\,dx}{\sin x+\cos x}=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,dx}{\sin x+\cos x}=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x\,dx}{\sin^2 x+\cos^2 x}=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin x}\,dx}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\cos x}\,dx}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}=\frac{\pi}{4}$$

درحالت کلی:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x\,dx}{\sin^n x+\sin^n x}=\frac{\pi}{4}\qquad n\in N$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^n x\,dx}{\sin^n x+\cos^n x}=\frac{\pi}{4}\qquad n\in N$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[n]{\sin x}\,dx}{\sqrt[n]{\sin x}+\sqrt[n]{\cos x}}=\frac{\pi}{4}\qquad n\in N$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[n]{\cos x}\,dx}{\sqrt[n]{\sin x}+\sqrt[n]{\cos x}}=\frac{\pi}{4}\qquad n\in N$$

برای نمونه یکی از آنها را حل می‌کنیم.

مسأله: ثابت کنید:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{n}x\,dx}{\sin^{n}x+\cos^{n}x}=\frac{\pi}{4}$$

بنا به فرمول بالا:

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{n}x\,dx}{\sin^{n}x+\cos^{n}x}$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{n}(\frac{\pi}{2}-x)\,dx}{\sin^{n}(\frac{\pi}{2}-x)+\cos^{n}(\frac{\pi}{2}-x)}$$

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{n}x\,dx}{\cos^{n}x+\sin^{n}x}$$

$$2I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{n}x\,dx}{\sin^{n}x+\cos^{n}x}+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{n}x\,dx}{\cos^{n}x+\sin^{n}x}$$

$$\Longrightarrow\ 2I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin^{n}x}{\sin^{n}x+\cos^{n}x}+\frac{\cos^{n}x}{\cos^{n}x+\sin^{n}x}\right)dx$$

$$\Longrightarrow\ 2I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{n}x+\cos^{n}x}{\sin^{n}x+\cos^{n}x}\,dx$$

$$\Longrightarrow\ 2I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}dx=\left(x\right)_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}\ \Longrightarrow I=\frac{\pi}{4}$$

ادب ریاضی

اینشتاین نشان داده است که هندسهٔ اقلیدسی باید کنار گذاشته شود، او براساس نظریهٔ جاذبی خویش، با پرسشهای کیهان شناسانه‌ای سروکار دارد و نشان می‌دهد که وجود یک عالم متناهی ممکن است. به‌علاوه، تمام نتایجی که از اخترشناسی حاصل آمده است، با این اصل که عالم بیضوی است، کاملاً سازگار است. تأسیس ما دایر بر آنکه عالم متناهی است به دو جهت است یعنی راجع است به بی‌نهایت کوچک و بی‌نهایت بزرگ. اما احتمالاً هنوز مسألهٔ عمده این است که نامتناهی جای بر حقی در تفکرات ما اشغال کرده است و نقش یک مفهوم ضروری را ایفا می‌کند.

دیوید هیلبرت

فلسفهٔ ریاضی. حسین ضیائی و دیگران

کانت می‌گوید که هیچ چیز در حقیقت فضایی نیست و ظاهر فضایی اشیا فقط چیزی است که در مغز ما، نمایان می‌شود. اما علم وظیفه دارد جهان را به‌صورتی که به ما ظاهر می‌شود و نه به‌صورتی که در حقیقت دارد (و به عقیدهٔ کانت برای ما شناختنی نیست) مورد مطالعه قرار دهد. به‌عقیدهٔ کانت این فرضیه روشن می‌سازد که چرا هندسه علم است، یعنی روشن می‌سازد که چگونه ما می‌توانیم از شکل فضایی جهانی که در برابر ما قرار دارد، یک معرفت ترکیبی بسازیم. برخی تضادها که خود وی آنها را آنتی‌نومی (Antinomy) می‌نامد او را ملزم به قبول این نتایج می‌سازند.

فلسفهٔ ریاضی. استیفن بارکر

احمد بیرشک

آموزش ترجمه متون ریاضی (۳)

● حمید رضا امیری

Inverse functions

توابع معکوس

If for a given function f a function g can be found such that

$$gf: x \mapsto x$$

and also

$$fg: x \mapsto x,$$

then g is denoted by f^{-1} and is said to be the *inverse* of f.

هرگاه با در نظرگرفتن تابع f بتوان تابعی مانند g یافت به قسمی که $gf: x \to x$ و همچنین $fg: x \to x$، در این صورت g به‌صورت f^{-1} نمایش داده شده و به آن معکوس f می‌گوییم.

In general, for a function f to have an inverse f^{-1} the following conditions must be satisfied:
(i) the range of f = the codomain of f,
(ii) $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$,
(iii) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, } for all x_1 and x_2 in the domain of f.

درحالت کلّی، برای تابعی چون f یک معکوس مانند f^{-1} داریم هرگاه شروط زیر صادق باشند:

(۱) هم دامنهٔ f = بُرد f

(۲)(۱) $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

(۳) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ } برای هر x_1 و x_2 در دامنهٔ f

(۱) با توجه به این‌که f را یک تابع فرض کرده‌ایم شرط دوّم همواره برقرار می‌باشد.

Example 4
(a) $f: x \mapsto 3x + 1$.
Let $y = 3x + 1$, so that $x = (y - 1)/3$. Then $f: (y - 1)/3 \mapsto y$

$$\Rightarrow f^{-1}: y \mapsto (y - 1)/3 \quad \text{or} \quad f^{-1}: x \mapsto (x - 1)/3,$$

with domain and range $\mathbb{R}$.
(b) $f: x \mapsto \frac{1}{x}$.

Let $y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y} \Rightarrow f: \frac{1}{y} \mapsto y$.

Therefore, $f^{-1}: y \mapsto \frac{1}{y}$ or $f^{-1}: x \mapsto \frac{1}{x}$.
Hence, f is its own inverse.

مثال ۴

(الف) $f: x \to ۳x + ۱$

فرض کنیم: $y = ۳x + ۱ \Rightarrow x = \frac{(y - ۱)}{۳}$

بنابراین $f: \frac{(y - ۱)}{۳} \to y$ درنتیجه:

$f^{-1}: y \to \frac{(y - ۱)}{۳}$ یا $f^{-1}: x \to \frac{(x - ۱)}{۳}$

که دامنه و بُرد آن IR می‌باشد.

(ب) $f: x \to \frac{۱}{x}$

فرض کنیم: $y = \frac{۱}{x} \Rightarrow x = \frac{۱}{y} \Rightarrow f: \frac{۱}{y} \to y$

بنابراین، $f^{-1}: y \to \frac{۱}{y}$ یا $f^{-1}: x \to \frac{۱}{x}$.
پس وارون f خودش می‌باشد.

The above examples suggest the following rule for obtaining the inverse. If $y = f(x)$ is the equation of the graph for any function f which has an inverse, then (i) interchange x and y so that $x = f(y)$, (ii) solve, if possible, for y in terms of x.
The result gives the inverse function f^{-1} if it exists.

مثالهای بالا دستور زیر را برای به دست آوردن معکوس یک تابع پیشنهاد می‌کنند.

اگر $y = f(x)$ معادلهٔ نمودار هر تابع مانند f بوده به قسمی که آن تابع دارای یک معکوس باشد، در این صورت (برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع معکوس آن به این شکل عمل می‌کنیم)

(۱) جای x و y را عوض می‌کنیم به قسمی که $x = f(y)$ (x را برحسب y به‌دست می‌آوریم)

(۲) در معادلهٔ y برحسب x ($y = f(x)$) به‌جای x مقدار به‌دست آمده برحسبِ y را قرار می‌دهیم: (با توجه به تعریف f^{-1} ضابطهٔ آن را از روی معادلهٔ حاصل و با وارون کردنِ آن به‌دست می‌آوریم که البته می‌توان ضابطهٔ f^{-1} را برحسب x نیز بیان کرد.)(۱)

نتیجه به‌دست آمده، معکوس تابع یعنی f^{-1} را درصورت وجود حاصل می‌کند.

(c) Consider the function $f: x \mapsto x^2$ with the domain $\mathbb{R}$. Clearly, both 2 and −2 map to 4. As it is not possible to say uniquely which point maps to 4, this function does not have an inverse.
However, if we restrict the domain to $\mathbb{R}^+$, the set of positive real numbers, then f maps onto the codomain $\mathbb{R}^+$ and f does have an inverse:

$$f^{-1}: x \mapsto \sqrt{x}.$$

[Note we use $\sqrt{x}$ to denote the positive square root of x.]

(پ) تابع $f: x \to x^2$ را با دامنهٔ IR درنظر می‌گیریم. واضح است، دوعدد ۲ و ۲- روی عدد ۴ نگاشته می‌شوند ($f(۲) = ۴$ و $f(-۲) = ۴$). به هرصورت این امکان نیست که بیان کنیم منحصراً یک نقطه روی ۴ نگاشته می‌شود، این تابع دارای معکوس نمی‌باشد.

درهر حال، اگر دامنه را به IR^+، مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت، محدود کنیم، آنگاه f به روی هم دامنه‌اش IR^+ نگاشته می‌شود و دارای معکوس است:

$f^{-1}: x \sqrt{x}$

(توجه کنید که ما برای نشان دادن ریشهٔ دوّم مثبتِ x از $\sqrt{x}$ استفاده می‌کنیم.)

(d) If $f: x \mapsto x + 1$ and
$g: x \mapsto x^2$
then
$fg: x \mapsto x^2 + 1$.
The inverse is obtained by solving $y^2 + 1 = x$, which gives $y = \pm\sqrt{(x-1)}$. For $(fg)^{-1}$ to be a function we must restrict the new domain to $x \geq 1$ and the range to, say, the positive square root of $(x - 1)$. Then

$$(fg)^{-1}: x \mapsto +\sqrt{(x-1)} \quad \text{for } x \geq 1.$$

Notice that

$$f^{-1}: x \mapsto x - 1,$$
$$g^{-1}: x \mapsto +\sqrt{x}$$

and

$$g^{-1}f^{-1}: x \mapsto +\sqrt{(x-1)} \quad \text{for } x \geq 1.$$

Hence, with above restrictions on domain and range

$$(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$$

(ت) اگر $f: x \to x + ۱$ و $g: x \to x^۲$ در این صورت $fg: x \to x^۲ + ۱$ با حلِ معادلهٔ $y^۲ + ۱ = x$ معکوس به‌دست می‌آید، که خواهیم داشت $y = \pm\sqrt{(x - ۱)}$. برای اینکه $(fg)^{-1}$ تابع باشد باید دامنه و بُرد جدیدی را به $x \geq ۱$ محدود کنیم، می‌گوییم، ریشهٔ دوّمِ مثبت از $(x - ۱)$ بنابراین

$(fg)^{-1}: x \to +\sqrt{(x - ۱)}$ برای $x \geq ۱$.

توجه دارید که:

$f^{-1}: x \to x - ۱$

$g^{-1}: x \to +\sqrt{x}$.

و $g^{-1} f^{-1}: x \to +\sqrt{(x - ۱)}$ برای $x \geq ۱$

بنابراین، با محدودیت بالا روی دامنه و برد $(fg)^{-1} = g^{-1} f^{-1}$.

(۱) دو مرحلهٔ (۱) و (۲) را می‌توان به این صورت خلاصه کرد و به کار برد: در معادلهٔ نمودار ابتدا جای x و y را عوض می‌کنیم و سپس y را برحسب x به‌دست می‌آوریم ضابطهٔ به‌دست آمده همان $f^{-1}(x)$ است.

Note the order, which may at first seem strange. It does, however, agree with practical experience — 'drive the car into the garage and then close the door' but the inverse is '*first* open the door and *then* drive the car out'.

بعلاوه توجه داریم که (مطلب فوق) در وهلهٔ اول ممکن است تا حدودی عجیب به نظر آید. به هر حال (دستورات و تعاریف فوق راجع به معکوس تابع) با این تجربه عملی مطابقت دارد ـ (عملِ تابع به منزلهٔ) «راندن ماشین داخل گاراژ و سپس بستن درب گاراژ است؟» امّا معکوس تابع «ابتدا» درب را باز می‌کند و سپس ماشین را به بیرون می‌راند؟»

The general result is: for all functions f, g, . . . , p, q such that the inverse function $(fg \ldots pq)^{-1}$ exists

$$(fg \ldots pq)^{-1} = q^{-1}p^{-1} \ldots g^{-1}f^{-1}.$$

This may be proved by induction (see page 46).

نتیجهٔ کلّی این‌که: برای هر تابع مانند f و g و ... p و q که معکوس تابع $(fg\ldots pq)^{-1}$ وجود داشته باشد

$$(fg\ldots pq)^{-1} = q^{-1}p^{-1}\ldots g^{-1}f^{-1}$$

اثبات رابطهٔ بالا توسط استقراء امکان پذیر است (به صفحهٔ ... مراجعه کنید).

1.2 Indices, surds and logarithms

۱.۲ نماها، اعداد گنگ (رادیکالی) و لگاریتمها

Indices

The three basic rules of indices are:

(i) To *multiply* powers of the same base *add indices*:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

(ii) To *divide* powers of the same base *subtract indices*:

$$a^m \div a^n = a^{m-n}.$$

(iii) To raise a power of a base to a second index *multiply the indices*:

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

These rules apply for $m, n \in \overline{Z}^+$. If we apply them to $m, n \in Q$, we require the following interpretations:

نماها

سه دستور اساسیِ نماها عبارتند از:

(۱) برای ضرب توانها با پایهٔ متشابه نماها را با هم جمع می‌کنیم:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

(۲) برای تقسیم توانها با پایهٔ متشابه نماها را از هم کم می‌کنیم:

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

(۳) برای این‌که توانِ یک پایه را مجدداً به توان برسانیم نماها را درهم ضرب می‌کنیم:

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

این دستورها برای $m, n \in Z^+$ به کار می‌رود. اگر ما اعداد $m , n \in Q$ را به کار ببریم تعبیرهای زیر برای ما ایجاب می‌شود.

ادب و ریاضی

چون جهان حقیقت، به‌معنای مطلق کلمه، اگر نگوییم مستقل از هر فکر انسانی است، لااقل مستقل از شخصیت دانشمند است. هر کشفی که به‌وسیلهٔ فرد خاصی صورت پذیرد ارزش و معنایی عام پیدا می‌کند. این امر برای دانشمندی که در سکوت آزمایشگاه خود با مسأله‌ای دست به گریبان است، این یقین را به بار می‌آورد که اگر به نتیجه‌ای برسد، این نتیجه را سراسر جهان دانش خواهد پذیرفت. این احساس که وی دربارهٔ اهمیّت کار خود دارد، سرچشمهٔ سعادت اوست و گذشتهایی را که بارها در زندگی به آنها رضا داده، جبران می‌کند.

تصویر جهان در فیزیک جدید. ماکس پلانک

مرتضی صابری

اثبات شرطی

● غلامرضا یاسی‌پور

۱. قانون تقویت شده اثبات شرطی[1]:

در قسمتهای قبل* روش اثبات شرطی تنها درمورد استدلالهایی[2] به‌کار رفت که نتایجشان[3] صورت[4] شرطی داشت. اما در فصل بعد راحت‌تر است که روشی شبیه به روش اثبات شرطی در مورد استدلالهایی که نتایجشان گزاره‌های شرطی[5] واضح نیستند به کار رود. برای رسیدن به این مقصود قانون اثبات شرطی‌مان را تقویت می‌کنیم و از این رو به آن خاصیت عملی بودن وسیعتری می‌دهیم.

برای تنظیم قانون تقویت شدهٔ اثبات شرطی‌مان بی‌فایده نیست که در نوشتن اثباتها روش جدیدی راکه از روش شرطی[6] استفاده می‌کند بپذیریم. همان‌طور که در قسمتهای قبل توضیح داده شد، روش اثبات شرطی را برای اثبات درستی[7] استدلالی که گزاره‌ئی شرطی به‌عنوان نتیجه داشت، با اضافه کردن مقدم[8] آن گزارهٔ شرطی به مقدمات[9] استدلال به‌عنوان فرض[10]، و سپس استنتاج[11] تالی[12] آن گزارهٔ شرطی، به‌کار می‌بردیم، و علامت‌گذاری بخش قبل شامل استفاده از یک خط مایل اضافی و یک علامت بنابراین اضافی، همان‌گونه که در اثبات درستی استدلال:

$A \Rightarrow B$

$\therefore A \Rightarrow (A \wedge B)$

توسط اثبات چهار سطری زیر به کار می‌رود، بود:

۱. $A \Rightarrow B \quad /\therefore \quad A \Rightarrow (A \wedge B)$

۲. $A \quad /\therefore \quad A \wedge B$ (C.P.)

۳. B ۱، ۲، M.P.

۴. $A \wedge B$ ۲، ۳، Conj

اثبات شرطی درستی همین استدلال در علامت‌گذاری جدیدمان به‌صورت دنبالهٔ[13] پنج سطری زیر انجام می‌گیرد:

۱. $A \Rightarrow B \quad /\therefore \quad A \Rightarrow (A \wedge B)$

۲. A فرض

۳. B ۱، ۲، M.P.

۴. $A \wedge B$ ۲، ۳، Conj

۵. $A \Rightarrow (A \wedge B)$ ۲، ۴، C.P.

در این‌جا سطر پنجم نه از یک یا دو سطر قبل بلکه از دنبالهٔ سطرهای ۲ و ۳ و ۴ که استنتاج درست سطر ۴ را از سطرهای ۱ و ۲ به‌دست می‌دهد استنتاج شده است. در سطر ۵ درستی استدلال:

$A \Rightarrow B$

$\therefore A \Rightarrow (A \wedge B)$

را از درستی مبرهن[14] استدلال:

$A \Rightarrow B$

A

$\therefore A \wedge B$

استنتاج می‌کنیم. این استنتاج[15] با اشاره به دنبالهٔ سطرهایی که به آنها رجوع شده، و با به کار بردن حروف «C.P.» برای نشان دادن این که اصل اثبات شرطی به کار رفته است، «توجیه» می‌شود.

در اثبات اخیر سطرهای ۳ و ۴ به سطر ۲ یعنی فرض بستگی دارند. اما سطر ۵ به سطر ۲ وابسته نیست بلکه فقط به سطر ۱ وابسته است. بنابراین سطر ۵ خارج یا ماورای برد[16] فرضی است که در سطر ۲ درنظر گرفته شده است. چون در اثبات شرطی درستیبی، فرضی در نظر گرفته می‌شود، «بردش» همواره محدود[17] است، و هیچ‌گاه به آخرین سطر برهان[18] نمی‌رسد.

اکنون علامت‌گذارئی را معرفی می‌کنیم که در مشخص کردن رد مفروضات و برد آنها بسیار مفید است. برای این منظور از پیکان شکسته‌یی که سرش از طرف چپ اشاره به فرض دارد و انتهایش در زیر آخرین سطر برد فرض واقع است استفاده می‌کنیم. به این ترتیب برد فرض اثبات قبل به ترتیب زیر مشخص می‌شود:

$1.\ A \Rightarrow B \quad /\therefore\ A \Rightarrow (A \wedge B)$

$\to 2.\ A$ — فرض

$3.\ B$ — ۱، ۲، M.P.

$4.\ A \wedge B$ — ۲، ۳، Conj

$5.\ A \Rightarrow (A \wedge B)$ — ۲، ۴، C.P.

به این مطلب باید توجه شود که تنها، سطری که توسط اصل اثبات شرطی استنتاج شده است برد یک فرض را پایان می‌دهد، و هرباراستفاده از قانون اثبات شرطی به پایان دادن برد یک فرض کمک می‌کند. زمانی که برد یک فرض پایان گرفت می‌گوییم: آن فرض بی‌اثر شده است، و دیگر هیچ سطر بعدی‌یی را نمی‌توان با مراجعه به آن یا هر سطر بین آن و سطر استنتاج شده از قانون شرطی‌یی که آن را بی‌اثر کرده، توجیه کرد. و تنها سطرهای واقع بین یک فرض با برد محدود و سطری که آن را بی‌اثر کرده، را می‌توان با مراجعه به آن فرض توجیه نمود. بعد از آن که فرضی با برد محدود و سطری که آن را بی‌اثر کرده، را می‌توان با مراجعه به آن فرض توجیه نمود. بعد از آن که فرضی با برد محدود بی‌اثر شد، می‌تواند فرض دیگری درنظر گرفته و سپس بی‌اثر شود. یا فرض با برد محدود دومی را می‌توان در داخل برد اولی نوشت. به این ترتیب بردهای مفروضات مختلف ممکن است پس از یکدیگر بیایند، یا یکی کاملاً داخل دیگری قرار گیرد.

اگر بُرد یک فرض تا انتهای یک اثبات نرسد، دراین صورت سطر آخر به آن فرض بستگی ندارد، بلکه ثابت شده است که به‌تنهایی از مقدمات اصلی نتیجه شده است. درنتیجه لازم نیست که خود را محدود به استفاده از تنها مقدمهای نتایج شرطی به‌عنوان مفروضات کنیم، و هر گزاره[19] را می‌توان به‌عنوان فرضی با برد محدود درنظر گرفت، زیرا سطر نهایی که همان نتیجه است همیشه خارج برد آن و مستقل از آن خواهد بود.

برهان زیر، برهان پیچیده‌تری است که شامل دو مفروض است (چون در این مورد اگر علامت پیکان شکسته را به کار بریم، دیگر لازم نیست که کلمهٔ «فرض» را بنویسیم، زیرا هر فرض به قدر کافی با سر پیکان مشخص می‌شود):

$1.\ (A \vee B) \Rightarrow [(C \vee D) \Rightarrow E] \quad /\therefore\ A\ [(\Rightarrow C \wedge D) \Rightarrow E]$

$\to 2.\ A$

$3.\ A \vee B$ — ۲، Add

$4.\ (C \vee D) \Rightarrow E$ — ۱، ۳، M.P.

$\to 5.\ C \wedge D$

$6.\ C$ — ۵، simp

$7.\ C \vee D$ — ۶، Add

$8.\ E$ — ۴، ۷، M.P.

$9.\ (C \wedge D) \Rightarrow E$ — ۵، ۸، C.P.

$10.\ A \Rightarrow [(C \wedge D) \Rightarrow E]$ — ۲-۹، C.P.

در این اثبات، سطرهای ۲ تا ۹ در برد فرض اول قرار می‌گیرند، در حالی‌که سطرهای ۵، ۶، ۷، و ۸ در برد فرض دوم واقع می‌شوند. از این دو مثال واضح است که برد مفروض α در

یک اثبات، شامل تمام سطرهای α تا φ که در آن سطر بعد از φ به‌صورت $\varphi \Rightarrow \alpha$ است و از آن دنبالهٔ سطرها با استفاده از C.P. استنتاج شده، می‌باشد. در مثال قبل، مفروض دوم در برد مفروض اول به این علت قرار می‌گیرد که بین مفروض اول و سطر ۱۰ که از دنبالهٔ سطرهای ۲ تا ۹ با استفاده از C.P. استنتاج شده، واقع است.

زمانی‌که روش جدید نوشتن اثبات شرطی درستی را به کار می‌بریم برد هر مقدمهٔ اصلی تا پایان اثبات می‌رسد. این مقدمات اصلی را می‌توان با مفروضات اضافی به شرطی‌که برد آنها محدود باشد و به پایان اثبات نرسد، تکمیل کرد. هر سطر اثبات صوری[۲۰] درستی باید یا مقدمه یا مفروضی با برد محدود باشد، و یا باید از یک یا دو سطر قبل و با استفاده از یکی از قوانین استنتاج[۲۱] به‌درستی نتیجه شود، یا باید از دنباله‌ئی از سطرهای قبل و با استفاده از اصل اثبات شرطی به‌دست آید.

به این مطلب باید توجه شود که اصل تقویت شدهٔ اثبات شرطی شامل روش اثبات غیرمستقیم[۲۲] به‌عنوان حالتی خاص است، چه از آنجا که می‌توان هر مفروض برد محدودی را در اثبات شرطی درستی درنظر گرفت، می‌توانیم به‌عنوان مفروضمان نقیض[۲۳] نتیجهٔ استدلال را درنظر گیریم، و زمانی‌که تناقض[۲۴] یا کاذبی به‌دست آمد، می‌توانیم برای حاصل کردن نتیجهٔ مطلوب با توجه به آن کاذب و با استفاده از جمع[۲۵] و قیاس فاصل[۲۶] به اثبات ادامه بدهیم. چون این عمل انجام شد، می‌توانیم از قانون اثبات شرطی برای پایان دادن به برد آن مفروض استفاده کنیم و شرطیئی به‌دست آوریم که تالیش نتیجهٔ استدلال و مقدمش نقیض آن نتیجه است. و از چنین شرطیئی نتیجهٔ استدلال را با استفاده از استلزام[۲۷]، نقیض دوگانه[۲۸]، و صادق[۲۹] حاصل کنیم.

از این جابه بعد، به قانون تقویت شدهٔ اثبات شرطی، به‌طور ساده به‌عنوان قانون اثبات شرطی اشاره خواهیم کرد.

یادداشتها

* به شماره‌های ۳، ۴، ۵ و ٦ برهان مراجعه شود.

1. The Strengthened Rule of Conditional Proof
2. Arguments
3. Conclutions
4. Form
5. Conditional Statements
6. Conditional Method
7. Validity
8. Antecedent
9. Premisses
10. Assumption
11. Deduce
12. Consequent
13. Sequence
14. Demonstrated Validity
15. Inference
16. Scope
17. Limited
18. Demonstration
19. Proposition
20. Formal Proof
21. Rules of Inference
22. Indirect Proof
23. Negation
24. Contradiction
25. Addition
26. Disjunctive Syllogism
27. Implication
28. Double Negation
29. Tautology

تاریخچه مجلات ریاضی ایران (٦)

دراین شماره نیز به‌بررسی مجلهٔ آشتی با ریاضیات می‌پردازیم:

در مقالهٔ نظریه فاجعه[۲۱] چنین آمده که: دانشمندان به‌طورکلی دوگونه فرآیند در طبیعت شناخته‌اند: فرآیندهای پیوسته یا همواره، همچون گردش سیاره‌ها، یا جریان الکتریسیته در یک سیم؛ و فرآیندهای ناپیوسته یا ناگهانی که پدیده‌هایی مانند جداشدن ناگهانی یک تیر حمال تحت فشار در یک ساختمان، یا تقسیم سلولی در یک بافت درحال رشد، از آن‌جمله است.

رفتار فرآیندهای پیوسته به کمک حساب دیفرانسیل و انتگرال که ۳۰۰ سال پیش توسط نیوتن و لایب‌نیتز پایه گذاری شد، قابل مطالعه و شناخت است. ولی در مقابل، گونه‌ای از ریاضیات که به کمک آن شرح و بسط و شناخت پدیده‌های ناپیوسته ممکن باشد، دردست نبود.

به‌هر تقدیر اکنون مطالعات رنه‌توم[۲۲] استاد ریاضیات در انستیتو مطالعات عالی علمی پاریس، چنین نظریه‌ای را حاصل آورده است. تحقیقات و مطالعات توم نظریهٔ فاجعه‌ها نام گرفته‌است، زیرا پدیده‌هایی را بررسی می‌کند که به‌طور ناگهانی از یک گونه رفتار به گونه رفتار کاملاً متفاوتی جهش می‌کنند. (این پدیده‌ها لزوماً یک بلای ناگهانی نیست.)

این نظریه همچنان‌که در فیزیک و مهندسی قابل کارگیری است، در علوم اجتماعی و علوم زیستی نیز کاربردهایی اساسی را دارا می‌باشد.

نظریهٔ فاجعه‌ها در شاخهٔ توپولوژی از ریاضیات جای دارد. پدیده‌های مطرح شده در توپولوژی بیشتر از لحاظ وضع شکلی مورد توجه‌اند تا اندازه و شکل هندسی آنها، و سروکار با مشخصات و حالاتی است که تغییرات اندازه در آنها بی‌اثر است. بنابر نظریهٔ فاجعه‌ها، واقعه‌های ناپیوسته با شکلهای مشخصی قابل بیان می‌باشند.

شکلها، سیمای اساسی نظریهٔ فاجعه‌ها می‌باشند. رنه‌توم اثبات کرده است که هرچند تعداد پدیده‌های ناپیوسته در شاخه‌های مختلف علوم نامتناهی است، ولی فقط تعداد مشخصی فاجعه‌های اولیه از اشکال مختلف موجود هستند.

هنگامی‌که درگیر سه بعد فضا و یک بعد زمان هستیم، فاجعه‌های اولیه هفت‌تا می‌باشند که عبارت‌اند از: **فاجعهٔ چین**، که برای مثال، برای بیان شکست نور در قطرات باران و تشکیل رنگین‌کمان به کار می‌آید؛ **فاجعهٔ گوشه**، که برای مطالعهٔ وقایعی نظیر جنگ و گریز، عشق و تنفر، و اضطراب و آرامش در انسان و حیوان به کار می‌رود؛ **فاجعهٔ دم پرستو**، که برای به‌دست آوردن بینش جدیدی در طبیعت تقسیم سلولی در جنینها به کارگرفته‌شده است، **فاجعهٔ پروانه**، که برای پیشگویی عکس‌العملهای مشخص رشتهٔ اعصاب نامنظم انسانی به کار می‌آید؛ **فاجعهٔ هذلولوی**، که در تحلیل فرو ریختن پلها و پیشبرد وسایل آفتابی مفید است؛ **فاجعهٔ بیضوی**، که مدلی برای جریان مایعات به‌دست می‌دهد؛ و **فاجعهٔ سهموی**، که همچون مدلی در حل مسائل زبان‌شناسی به کار می‌آید.

غیاث الدین جمشید کاشانی آخرین خورشید ریاضی آسمان ایران کیست؟ در مقاله‌ای به‌همین نام[۲۳] چنین می‌خوانیم که کاشانی در سدهٔ نهم هجری (پانزدهم میلادی) می‌زیست. از کتاب (های) شناخته شدهٔ او به زبان فارسی «زیج خاقانی»، «مختصری در علم هیأت» و «شرح آلات رصد» و مشهورترین کتابهایی که به‌زبان عربی نوشته است «رسالهٔ محیطیّه»، «مفتاح‌الحساب» و «رسالهٔ وتر و جیب» است.

درهمین کتاب است که کاشانی کسرهای دهدهی را کشف کرده است (کشفی که در فرهنگ غرب، معمولاً به سیمون‌استون[۲۴] نسبت می‌دهند، درحالی‌که استون در سال ۱۵۴۸ میلادی به‌دنیا آمده است، یعنی درست ۱۲۱ سال بعد از تنظیم کتاب «مفتاح‌الحساب» به‌وسیلهٔ کاشانی). کاشانی در این کتاب، علاوه بر قانونهایی که برای محاسبهٔ جذر، محاسبهٔ سطح و حجم شکلهای هندسی، بررسی مثلثها و تنظیم جدولهای مثلثاتی، حل معادلهٔ درجه سوم، محاسبهٔ مجموع رشته‌های عددی و حتی تنظیم جدول وزن مخصوص جسمهای جامد و مایع می‌دهد، به ریاضیات کاربسته هم می‌پردازد و روش اندازه‌گیری طاقها و گنبدها را، که در معماری شرق به کار می‌رفت، مورد بررسی قرار می‌دهد. کاشانی در همین کتاب، ضریبهای بسط دوجمله‌ای و قانون $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$ راکشف کرد.

در کتاب «رسالةالمحیطیه»ی خود به محاسبهٔ عدد π می‌پردازد و با محاسبهٔ محیط $۸۰۵۳۰۶۳۶۸ = ۳ \times ۲^{۲۸}$ ضلعی منتظم داخلی و خارجی و واسطهٔ عددی آنها عدد π را با ۱۷ رقم دهدهی به‌دست می‌دهد که تنها رقم آخر آن اشتباه است.

یکی از جالبترین کارهای او، محاسبهٔ سینوس یک درجه است که در رسالهٔ «وتروجیب» او آمده و درواقع توانسته است با حل معادلهٔ درجه‌سوم $۴x^۳ - ۳x + \sin ۳^\circ = ۰$ به‌نتیجهٔ موردنظر خود برسد.[۲۵]

درمقالهٔ مرگ یک ریاضی‌دان[۲۶] به مناسبت درگذشت[۲۷] استاد علامه دکتر غلامحسین مصاحب شرح حال مختصری از او به‌ترتیب زیر آمده است:

غلامحسین مصاحب در سال ۱۲۸۹ هجری شمسی در تهران متولد شد. در تهران، فرانسه، و انگلستان تحصیل کرد. در سال ۱۳۲۷ به اخذ درجهٔ دکتری از دانشگاه کیمبریج و به عضویت انجمن ریاضی لندن و انجمن فلسفی کیمبریج نایل گردید.
در سال ۱۳۰۶ وارد خدمت وزارت فرهنگ شد و تا سال ۱۳۳۲ کارمند آن وزارت (در سمتهای رئیس کل تعلیمات عالیه، مدیرکل فنی و معاون فنی) بود. درضمن مشاغل اداری، همواره به تألیف و تدریس اشتغال داشت. در سال ۱۳۴۵ مؤسسهٔ ریاضیات را در دانشگاه تربیت معلم[۲۸] تأسیس کرد و تا آخرین روز حیات خود به سمت استادی در آن مؤسسه اشتغال داشت.

اهم آثار وی به‌ترتیب تاریخ انتشار به شرح زیر است:

مجلهٔ ریاضیات عالی و مقدماتی (۱۳۰۹ - ۱۳۱۰).

جبر و مقابلهٔ خیام (تهران، ۱۳۱۷، ۲۹۰ صفحه) مشتمل بر متن عربی و ترجمهٔ فارسی رسالهٔ خیام در جبر و تاریخ ریاضیات تا زمان خیام، که در آن برای نخستین بار مقام علمی خیام مستنداً به فارسی زبانان شناسانیده شده است.

رسالهٔ

On Differentiation and Denjoy - Behaviour of Functions of Two Real Variables.

که در جلد چهل‌وششم (مورخ سال ۱۹۵۰) مجلهٔ انجمن فلسفی کیمبریج به طبع رسیده است.

مدخل منطق صورت (از انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۳۴، ۷۰۰ صفحه)، که نخستین کتاب فارسی در این علم است، و در مجلهٔ مشهور

Journal of Symbolic Logic

بر آن تقریظ نوشته‌اند (شمارهٔ چهارم جلد بیست‌ودوم، ۱۹۵۷).

حکیم عمرخیام به‌عنوان عالم جبر (انجمن آثار ملی، ۱۳۳۹، ۳۰۰ صفحه)، مشتمل بر اثری ناشناخته از خیام در ریاضیات.

دایرةالمعارف فارسی (جلد اول، ۱۳۴۵).

مدخل آنالیز ریاضی[۲۹] (۹۳۰ صفحه، چاپهای ۱۳۴۸، ۱۳۵۰، ۱۳۵۲).

دورهٔ تئوری مقدماتی اعداد که جلد اول آن در دو قسمت و در ۱۳۹۵ صفحه به چاپ رسیده و جلد دوم آن در دست انتشار است.[۳۰]

در مقالهٔ نظریهٔ بازی در ریاضیات[۳۱] چنین می‌خوانیم:

برای حل بسیاری از مسائل اقتصادی، نظامی، تولیدی و غیره

باید به تحلیل وضعیتی پرداخت که میان دو یا چند حریف وجود دارد. چنین وضعیتی را «وضعیت برخوردی» می‌نامند. اگر به‌یکی از بازیهای ورق توجه کنیم، این موضوع به‌روشنی ملاحظه می‌شود. بدیهی است در یک وضعیت برخوردی عمل هر یک از حریفان (بهتر است آنها را بازیکنان بنامیم) بستگی به عمل حریفان دیگر دارد. درعمل، حریفها یا بازیکنان رقیبان تجاری، صاحبان کارخانه و سرمایه و طراحان نظامی هستند.

به‌منظور تحلیل ریاضی یک وضعیت برخوردی در سالهای اخیر فصلی بر دفتر ریاضیات عملی به‌نام «نظریهٔ بازی[۳۲]» افزوده شده است. هدف اصلی در این نظریه یافتن عاقلانه‌ترین راه برای هر یک از بازیکنان در یک وضعیت برخوردی است. باید دانست که وضعیت برخوردی واقعی بسیار پیچیده است و تحلیل آن به‌لحاظ وجود عوامل ملازم متعدد، نیاز به بررسی و تحقیق عمیق دارد. برای تحلیل ریاضی وضعیت برخوردی واقعی باید برخی از عوامل ثانوی را حذف کرد و مدل صوری ساده‌ای بنا نمود. چنین مدلی را «بازی» می‌نامند.

میان یک بازی و یک وضعیت واقعی اختلاف بارزی وجود دارد. بازی همیشه براساس قواعد معین غیرقابل تخطّی هدایت می‌شود، درحالی‌که در وضعیت برخوردی واقعی ممکن است عملیات از چهارچوب یک سلسله قواعد مشخص خارج شود.

از زمانهای قدیم مردم از مدلهای صوری وضعیت برخوردی مانند بازیهای شطرنج، تخته‌نرد، بازیهای ورق و حتی بازیهای کودکان چون شیروخط و دوزبازی، به‌عنوان بازی و سرگرمی استفاده می‌کرده‌اند. درتمام این بازیها قواعد ویژه‌ای وجود دارد و درانتها هریک ازآنها «برنده»، «مساوی» یا «بازنده» می‌شود.

نظریهٔ بازی به‌معنی کلمهٔ امروزی نخست توسط بورل[۳۳] مطرح گردید. بورل در کتاب خود از حالت خاصی از قضیهٔ اصلی بازی استفاده کرد، اما از عهدهٔ اثبات آن برنیامد. در سال ۱۹۲۸ جان ون نیومن[۳۴] این قضیه را ثابت کرد. اما تا سال ۱۹۴۴ کمتر نامی از نظریهٔ بازی شنیده می‌شد. در این سال اثر تاریخی نیومن و مورگنسترن[۳۵] انتشار یافت.[۳۶] در این کتاب اساس ریاضی نظریهٔ بازی ارائه گردید و طریق استفاده از آن در اقتصاد مطرح شد. کتاب نیومن و مورگنسترن به‌زودی مورد استقبال ریاضی‌دانها و پژوهشگران مسائل تولیدی، مدیریت و نظامی قرارگرفت و در مدت کوتاهی نظریهٔ بازی از جنبهٔ نظری و عملی گسترش و توسعهٔ بسیار یافت. معلوم گردید که نظریهٔ بازی نه‌تنها قابل کارگیری در اقتصاد است، بلکه حتی در تحلیل استراتژیها و نقشه‌های نظامی نیز بسیار سودمند می‌باشد.

یکی از مقاله‌های خوب مجله مقالهٔ **تدریس ریاضیات و تلاشی برای بهترکردن آن**[۳۷] است. این مقاله راگروهی از اعضای انجمن ریاضی آمریکا نوشته‌اند و بنا به نوشتهٔ مترجم فارسی آن گرچه برای سیستم آموزشی آمریکا نوشته شده برای معلمان ایرانی نیز مفید است و دید آنها را گسترش می‌دهد. در زیر بعضی از فرازهای این مقاله را می‌آوریم.

معلم باید پیش‌از آغاز کلاسها به محتوای درس فکر کند و آن را با مطالبی اضافی ازکتابهای جنب درسی و مرجع و نکات تاریخی وکاربردهای جالب بیاراید.

باید در جلسهٔ اول عنوان و موضوع درس را اعلام و یادآوری‌کند که‌برای یادگرفتن آن درس به چه‌آگاهیهایی نیاز است.

روی تختهٔ سیاه نام خود و ساعاتی راکه در دفتر خواهد بود بنویسد.

روش خود را در مورد تکلیف شب، امتحانات، و نمره دادن توضیح دهد.

هدفهای کلاس را تشریح کند، و راجع‌به یادداشت برداشتن و اندازهٔ آن و زمانهای مناسب آن توضیح دهد. جای شاگردان را بداند و تکلیف شب آنها را شخصاً و یکی‌یکی به آنها بازگرداند. هنگامی‌که مطلبی برای کلاس آماده می‌کند به چند بخش بعدی هم نگاهی بیندازد، وکوشش داشته باشد که هرکلاس را با مطالبی شروع کند که دانشجویان با آنها آشنایی دارند، و یک‌مرتبه داخل مطالب تازه نشود.

زیاد بپرسد و از دانشجویان مختلف بپرسد، وحتی‌الامکان از سخنرانیهای طولانی خودداری کند. به‌موقع سر کلاس بیاید، درکلاس به چشم دانشجویان نگاه کند و برای در و دیوار درس ندهد. روشن و شمرده و با صدای بلند صحبت کند. صدایش یکنواخت نباشد و درضمن صحبت مواظب تغییر چهرهٔ دانشجویان باشد. به‌دانشجو فرصت فکر کردن بدهد به‌عبارت دیگر تمام وقت کلاس را باگفتن و شنیدن نگذراند. دانشجو را تشویق به پرسیدن کند. چون سؤالی مطرح شود ابتدا اطمینان حاصل کند که همه آن را شنیده‌اند و بعد به جواب آن بپردازد. حدس زدن را تشویق کند و سؤالهای بد و جوابهای نادرست را به مسخره نگیرد.

درکلاس درس تا آن‌جاکه می‌تواند و شرایط اجازه می‌دهد خودمانی باشد. خود را به مطالب درس علاقه‌مند نشان‌دهد و از گفتن لطیفهٔ به‌جا خودداری نکند. هرچند وقت یکبار لبخند بزند و هیچ‌وقت در کلاس عصبانی نشود و با دانشجویان مؤدب باشد و در صحبت خود از اشارات و نکته‌های تاریخی غافل نماند.

اگر اشتباهی کرد حالت دفاعی به‌خود نگیرد. از دانشجویان کمک بخواهد و باکمک آنها به تصحیح اشتباه بپردازد. اگر کسی سؤالی کرد که جوابش را نمی‌داند کوشش نکند که به‌نحوی ندانستن خود را بپوشاند بلکه سعی کند جواب را باکمک کلاس به‌دست آورد یا قول دهد که جواب آن را بعداً بیاورد.

کلاس درس را حتی‌الامکان نزدیک به وقت مقرر تمام کند و شاگردان را بعد از وقت کلاس درکلاس نگه ندارد. هر کار را خوب، با دقت وکامل انجام دهد.

مطالب نوشتنی را با دقت و آرامی بر تختهٔ سیاه بنویسد و آنچه راکه می‌نویسد با صدای بلند تکرار کند و تا آن‌جاکه می‌شود جلو نوشته نایستد. به‌طور کامل و دقیق، متن آنچه راکه می‌خواهد ثابت کند یا درباره‌اش حرف بزند بنویسد. برای تأکید نکته‌های مهم، خلاصهٔ آنها را روی تخته بنویسد، و وقتی مسأله‌ای را حل می‌کند صورت کامل یا مرجع آن را بنویسد. هیچ‌گاه مطلب نادرستی را، حتی هنگامی‌که می‌خواهد بعداً نادرستی آن را متذکر شود، ننویسد. بعد از کلاس، بسرعت بیرون نرود و بالاخره تختهٔ سیاه را برای معلم بعدی پاک کند.

به‌دانشجویان تکلیف شبانه دهد و مسائل آن را با دقت انتخاب کند و هنگام ورود به کلاس تکالیف را جمع کند و این کار را به آخر وقت موکول نکند. تکلیف شب را به‌عنوان قسمتی از نمرهٔ کلاس به‌حساب آورد.

درمورد امتحان روشی اتخاذ کند که سرنوشت دانش‌آموز تنها با یک امتحان معلوم نشود و به‌عبارت دیگر درطی سال به‌انجام امتحانهای متعدد بپردازد. درامتحان سؤالها را به‌روشنی و از آسان به مشکل انتخاب کند و نکته‌ای را مبهم نگذارد و به این ترتیب بهانه‌ای به‌دست دانش‌آموز ندهد. بین مسائلی که برای حل آنها تنها از فرمول استفاده می‌شود و مسائلی که جنبهٔ نظری یاکار بسته دارند تعادل ایجاد کند. از به‌هم ربط دادن سؤالات مختلف بپرهیزد. از تستی امتحان کردن نیز تاجایی که امکان دارد دوری کند. مسأله‌های داستانی بدهد. دانش‌آموزان را مجبور کند تعریفها را به کار برند. قبل از امتحان کردن با استفاده از همان ورقه‌ای که دانش‌آموز باید به کار برد مسأله‌های امتحان را حل کند (حتی بهتر است کس دیگری این‌کار را انجام دهد). وقت امتحان را به‌وضوح اعلام و روی آن پافشاری کند.

ورقه‌ها را بلافاصله تصحیح کرده به دانش‌آموزان بازگرداند. تا آن‌جاکه ممکن است ورقه‌ها را یکنواخت تصحیح کند. مسأله‌ها را یکی‌یکی تصحیح کند، یعنی اول مسألهٔ یک را در تمام ورقه‌ها تصحیح کرده بعد به مسألهٔ دوم بپردازد. فقط به‌جواب مسأله توجه نکند بلکه راه‌حل آن را نیز به‌دقت ملاحظه کند. اگر فرصت حل کامل مسائل امتحان را درکلاس ندارد حل آنها را موقع برگرداندن ورقه‌ها به‌دانش‌آموز بدهد.

برای شاگردان توضیح بدهد که چرا بعضی مطالب مهمتر از مطالب دیگراند. توجه در منظم نگهداشتن اطلاعات مربوط به‌کار دانشجو داشته باشد چه این کار نه‌تنهابه‌دادن نمرهٔ آخر سال کمک می‌کند بلکه درآینده هم به‌کار نوشتن توصیه‌نامه برای دانش‌آموز می‌آید و به‌دیگران نیز برای این‌قبیل کارها در غیاب معلم کمک می‌کند.

در مقالهٔ هندسه[۳۸] چنین می‌خوانیم که اگر مسیر تکامل ریاضیات را دنبال کنیم به‌روشنی می‌بینیم که عاملهای این تکامل را دو عنصر اصلی ریاضیات تشکیل می‌داده‌اند: عدد و هندسه. هندسهٔ تصویری که به این سؤال که چه رابطه‌ای بین یک شکل و تصویرش بر صفحه یا مقطع موجود است پاسخ می‌دهد با قضیهٔ دزارگ[۳۹] رونق گرفت. اما این هندسه با همان سرعت که بالید و شکوفا شد با شکفتن نوگل دیگری روبه پژمردگی گذاشت. رقیب نورسیده همان‌چیزی است که به آن هندسهٔ تحلیلی می‌گوییم. این هندسه پلی بین جبر و هندسه ایجاد کرده بود، و به‌عبارت دیگر از راه جبر خواص منحنیها را مورد بررسی قرار می‌داد.

هندسهٔ دیفرانسیلی جنبه‌های گوناگون مسأله‌ها را بدون محاسبهٔ شیب یا انحنا درنظر می‌گرفت. مسألهٔ مهم ژئودزی[۴۰] نیز یکی از نکته‌هایی بود که زیر نظر هندسهٔ دیفرانسیلی قرارداشت.

این هندسه علاوه بر مسألهٔ ژئودزی به بررسی مسأله‌های مهم دیگری نیز می‌پرداخت. بعضی از این مسأله‌ها عبارت بودند از: انحنای سطحها، نقشه‌برداری، کمترین مساحت محصور بین منحنیهای فضایی.

در قرن نوزدهم بار دیگر هندسهٔ تصویری باتوجه به کارهای مونژ[۴۱] و شاگردان و پیروانش از قبیل کارنو[۴۲]، بریانشون[۴۳]، و پونسله[۴۴] به‌طور جدی پی‌گیری شد، تا اینکه با طلوع ستارهٔ جدیدی موسوم به هندسهٔ نااقلیدسی بار دیگر روبه افول گذاشت.

توپولوژی شاخه‌ای از هندسه است که در زمان حاضر با جدیت تمام روی آن کار می‌شود. مسألهٔ مهم توپولوژی عبارت است از هم‌ارزی توپولوژیکی، یعنی شناخت هم‌ارزی دو شکل ازنظر توپولوژی. این هم‌ارزی، اکثراً و به آسانی، با چشم تشخیص داده نمی‌شود.

یادداشتها

۲۱. Catastrophe Theory، همان مرجع سال‌دوم شمارهٔ ۶ صفحهٔ ۹۷، ترجمهٔ یحیی‌تابش

۲۲. Rene Thom

۲۳. همان مرجع، سال سوم شمارهٔ اول صفحهٔ ۳، به قلم پرویز شهریاری

۲۴. مهندس فلاندری (۱۵۴۸ ـ ۱۶۲۰) مبدع کسرهای اعشاری، ربح مرکب و کارهایی در استاتیک و هیدرواستاتیک

۲۵. در شماره‌ای از مجله که این مقاله در آن است و در شرح حال غیاث‌الدین جمشید کاشانی به نقل از «دایرةالمعارف فارسی» آمده که کاشانی جیب (سینوس) یک درجه را در شمار ستینی برابر

۱ ۲ ۴۹ ۴۳ ۱۱ ۱۴ ۴۴ ۱۶ ۲۶ ۱۷

یافته‌است که به حساب اعشاری مساوی

۰/۱۷۴۵۲۴۰۶۴۳۷۷۲۸۳۵۱

می‌شود، که هر هفده رقم آن درست است.

۲۶. همان مرجع، سال سوم شمارهٔ اول صفحهٔ ۱۰۲.

۲۷. روز شنبه ۲۱ مهرماه ۱۳۵۸ هجری شمسی

۲۸. دانشسرای عالی سابق

۲۹. ظاهراً کلمهٔ «مدخل» واقع در نام کتاب مذکور در مقاله، بعداً برداشته شده زیرا در عنوان کتاب تنها **آنالیز ریاضی** آمده است، ضمناً چاپ چهارمی هم از این کتاب در آبان ماه ۱۳۵۶ انجام گرفته است.

۳۰. جلد دوم این کتاب در سه قسمت و در ۱۸۰۳ صفحه در اسفندماه ۱۳۵۸ توسط انتشارات سروش به چاپ رسیده‌است. دراین مجلد و در مطلبی تحت‌عنوان **یادداشت ناشر** در شرح حال مرحوم مصاحب چنین می‌خوانیم:
مرحوم دکتر غلامحسین مصاحب در اولین لحظات بامداد روز شنبه ۲۱ مهرماه ۱۳۵۸ در حالی‌که آخرین صفحات این کتاب را از نظر خرده‌بین خود می‌گذرانید در میانِ یادداشتها و و اوراق و لوازم‌کار خود و با داشتن قلم در دست در یک آن چشم از جهان فروبست و به سرمنزل جاوید شتافت. روانش شاد باد.
غلامحسین مصاحب زبانهای فارسی، فرانسه، انگلیسی و عربی را خیلی خوب می‌دانست و با زبان آلمانی نیز برای رفع احتیاج ترجمه‌های هندسی و تحلیل ریاضی آشنا بود و وسعت اطلاعات علمی قدیم و جدید وی کم‌نظیر بود. به‌همین جهت آثار علمی وی حتی آنهاکه مربوط به دوران جوانی اوست هنوز هم معادل ندارد با این‌همه او مطلقاً اهل ادعا نبود و فوق‌العاده فروتن و آزاده بود.

۳۱. همان مرجع، سال سوم شمارهٔ دوم صفحهٔ ۱، بدون ذکر نام نویسنده.

۳۲. Game Theory

۳۳. امیل بورل «E. Borel»، ریاضی‌دان فرانسوی

۳۴. John Von Neumann، بیشتر با تلفظ فون نویمان

۳۵. Morgenstren

۳۶. به نام: Theory of Games and Economic Behavior

۳۷. همان مرجع، سال سوم شمارهٔ دوم صفحهٔ ۷۹، ترجمهٔ شهریار شهریاری

۳۸. همان مرجع، سال سوم شمارهٔ سوم صفحهٔ ۱، ترجمهٔ هرمز شهریاری

۳۹. Gerard Desargues مهندس و آرشیتکت فرانسوی در قرن هفدهم که قضیه‌اش چنین است: در هر مثلث هر ضلع شکل اصلی با ضلع نظیر آن در مقطع، یکدیگر را در نقطه‌ای قطع می‌کنند و سه نقطهٔ به این ترتیب به‌دست آمده بر یک استقامت واقعند.

۴۰. Geodesy این مسئله عبارت‌است از تعیین کوتاهترین فاصلهٔ بین دو نقطهٔ واقع بر یک سطح

۴۱. گاسپار مونژ «Gaspard Monge» (۱۷۴۶ ـ ۱۸۱۸) دانشمند فرانسوی و واضع هندسهٔ ترسیمی Descriptive Geometery

۴۲. لازار کارنو «Lazare Carnot» (۱۷۵۳ ـ ۱۸۲۳) دانشمند فرانسوی شاگرد مونژ و واضع هندسهٔ موقع و مقاله‌ای در مورد تئوری موربها

۴۳. Charles J. Brianchon (۱۷۸۵ ـ ۱۸۶۴)

۴۴. ژان ویکتور پونسله «Jean Victor Poncelet» (۱۷۸۸ ـ ۱۸۶۷) صاحب رسالهٔ خواص تصویری اشکال و واضع دو وسیلهٔ ریاضی اصل ثنیه و اصل پیوستگی.

تعیین دامنه و برد توابع (قسمت دوّم)

مورد استفاده دانش آموزان سالهای دوم، سوم و چهارم

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

در شمارهٔ قبل مجله با تعیین دامنه و برد توابع چندجمله‌ای، کسری، گنگ (اصم) آشنا شدیم. در این شماره نیز تعیین دامنه و برد چند نوع تابع دیگر را بیان می‌کنیم.

۴ـ تعیین دامنه و برد توابع شامل جزء صحیح[10] (براکت):
توابع جزء صحیح (براکت) توابعی هستند که شامل عباراتی با علامت [ ] (علامت جزء صحیح) باشند. دامنه و برد این گونه توابع را با استفاده از ضوابط و قوانین جزء صحیح به دست می‌آوریم.

مثال ۱۴: دامنه و برد تابع با ضابطهٔ زیر را تعیین کنید:

$$y=f(x)=\frac{x+[x-[x]]}{x+[x]+[-x]}$$

حل: می‌دانیم:

$$[x]\leqslant x<[x]+1$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$0\leqslant x-[x]<1$$

بنابراین به ازای هر عدد حقیقی x همواره داریم:

$$[x-[x]]=0 \qquad (1)$$

همچنین می‌دانیم:

$$[x]+[-x]=\begin{cases} 0 & x\in z \ \text{(مجموعهٔ عددهای صحیح)} \\ -1 & x\notin z \end{cases} \qquad (2)$$

با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) تابع به صورت زیر ساده می‌شود:

$$y=\begin{cases} \dfrac{x}{x} & x\in z \\ \dfrac{x}{x-1} & x\notin z \end{cases} \Longrightarrow$$

$$y=\begin{cases} 1 & x\in z-\{0\} \\ \dfrac{x}{x-1} & x\notin z \end{cases} \Longrightarrow D_f=R-\{0\}$$

تعیین برد تابع:

$$x\notin z: y=\frac{x}{x-1} \Longrightarrow xy-y=x \Longrightarrow$$

$$x(y-1)=y \Longrightarrow x=\frac{y}{y-1}\notin z \Longrightarrow y\neq 0 ,2$$

با توجه به ضابطهٔ اول تابع نتیجه می‌شود که اگر $x\in z-\{0\}$ باشد $y=1$ است. بنابراین اگر $x\notin z$ باشد $y\neq 1$ است.
بنابراین برد تابع مجموعهٔ عددهای حقیقی مخالف صفر است:

$$R_f=R-\{0 ,2\}$$

مثال ۱۵: دامنه و برد تابع با ضابطهٔ زیر را تعیین کنید:

$$y=f(x)=\frac{[x+1]+[-x]}{[1-x]+[x]}$$

---

10) Integral part functions

حل : برای‌تعیین دامنه و بردتابع ابتدا تابع را به شکل زیرمی‌نویسیم:

$$y=\frac{[x]+[-x]+1}{[-x]+[x]+1} \Longrightarrow$$

$$[-x]+[x]=\begin{cases} 0 & x\in z \\ -1 & x\notin z \end{cases}$$

$$\Longrightarrow y=\begin{cases} 1 & x\in z \\ \text{مبهم}\ (\frac{0}{0}) & x\notin z \end{cases} \Longrightarrow$$

$$D_f=z \quad , \quad R_f=\{1\}$$

مثال ۱۶: دامنه و برد تابع باضابطهٔ زیررا تعیین کنید:

$$y=f(x)=\frac{2x+1}{[1-x]+[x+1]}+\frac{[[x]-x]}{[x]+[-x]}$$

حل : برای‌تعیین دامنه و بردتابع ابتدا تابع را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$y=\frac{2x+1}{[-x]+[x]+2}+\frac{[[x]-x]}{[-x]+[x]}$$

می‌دانیم :

$$[x]\leqslant x<[x]+1$$

و در نتیجه داریم :

$$-[x]-1<-x\leqslant -[x]$$

$$\Longrightarrow -1<[x]-x\leqslant 0 \Longrightarrow$$

$$[[x]-x]=\begin{cases} 0 & x\in z \\ -1 & x\notin z \end{cases}$$

همچنین داریم:

$$[-x]+[x]=\begin{cases} 0 & x\in z \\ -1 & x\notin z \end{cases}$$

با توجه‌به رابطه‌های اخیر تابع‌به شکل زیر تحویل می‌شود:

$$y=\begin{cases} \frac{2x+1}{2}+\frac{0}{0}\ (\text{مبهم}) & x\in z \\ 2x+2 & x\notin z \end{cases}$$

در این‌جا دامنه و برد تابع مشخص می‌شود:

$$D_f=R-z \quad , \quad R_f=R-z$$

دامنه و بردتابع مجموعهٔ عددهای حقیقی غیرصحیح است:

$$D_f=R_f=R-z$$

مثال ۱۷: دامنه و بردتابع باضابطهٔ زیررا تعیین‌کنید:

$$y=f(x)=\left[\frac{x^4+2x^2+2}{x^4+4x^2+5}\right]+\frac{x-[x]}{[x+1]+[1-x]}$$

حل : با توجه به ضابطهٔ تابع داریم:

$$x^4+2x^2+2=(x^4+2x^2+1)+1$$
$$=(x^2+1)^2+1>0$$

$$x^4+4x^2+5=(x^4+4x^2+4)+1$$
$$=(x^2+2)^2+1>0$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود صورت و مخرج کسر

$$\frac{x^4+2x^2+2}{x^4+4x^2+5}$$

هردو مثبت و همواره صورت کسر کوچکتر از مخرج آن است. بنابراین کسرفوق همواره بزرگترازصفروکوچکتراز یک است:

$$0<\frac{x^4+2x^2+2}{x^4+4x^2+5}<1$$

بنابراین به ازای هرعددحقیقی x همواره داریم:

$$\left[\frac{x^4+2x^2+2}{x^4+4x^2+5}\right]=0$$

اینک کسر دوم را بررسی می‌کنیم:

$$y=\frac{x-[x]}{[x+1]+[1-x]}=$$

$$\frac{x-[x]}{[x]+[-x]+2}=\begin{cases}0 & x\in z\\ x-[x] & x\notin z\end{cases}$$

بنابراین دامنهٔ تابع مجموعهٔ عددهای حقیقی است:

$$D_f=R$$

تعیین برد تابع:

می‌دانیم: $0\leqslant x-[x]<1$ و اگر x عددی صحیح نباشد داریم:

$$x\notin z \Longrightarrow 0<x-[x]<1 \Longrightarrow 0<y<1$$

از طرفی اگر $x\in z$ آنگاه $y=0$ و در نتیجه برد تابع چنین است:

$$R_f=[0,1)$$

تمرین: دامنه و برد توابع با ضابطه‌های:

$$y=\frac{1}{[2x]-2x},$$

و

$$y=(-1)^{\frac{1}{[x-1]+[2-x]}}$$

را تعیین کنید.

۵ـ تعیین دامنه وبرد توابع شامل قدرمطلق[11]:

مثال ۱۸: دامنه وبرد تابع باضابطهٔ زیررا تعیین کنید:

$$y=f(x)=\frac{x+2}{|x|-2}$$

حل: تعیین دامنهٔ تابع:

$$|x|-2=0 \Longrightarrow |x|=2 \Longrightarrow x=\pm 2$$

$$\Longrightarrow D_f=R-\{-2\ ,\ 2\}$$

برای تعیین برد تابع دوحالت درنظر می‌گیریم:

$$y=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x-2} & x\geqslant 0\\[2mm] \dfrac{x+2}{-x-2} & x<0\end{cases} \xrightarrow[]{x\neq -2}$$

$$y=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x-2} & x\geqslant 0\\[2mm] -1 & x<0\end{cases}$$

$$x\geqslant 0: y=\frac{x+2}{x-2} \Longrightarrow xy-2y=x+2$$

$$\Longrightarrow x(y-1)=2(y+1)$$

$$\Longrightarrow x=\frac{2(y+1)}{y-1}\geqslant 0 \Longrightarrow \frac{y+1}{y-1}\geqslant 0$$

y	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\frac{y+1}{y-1}$		$+$	0	$-$		$+$	
			صفر		نامعین		

$$\Longrightarrow \begin{cases}x\geqslant 0\ :\ y\in(-\infty,-1]\cup(1,+\infty)\\ x<0\ :\ y=-1\end{cases}$$

$$\Longrightarrow R_f=(-\infty,-1]\cup(1,+\infty)$$

مثال ۱۹: دامنه وبرد تابع باضابطهٔ زیررا تعیین کنید.

11) Absolute value functions

$$y=f(x)=\frac{۱}{\sqrt{|x+۱|-۴}}$$

حل: باتوجه به ضابطهٔ تابع برای حقیقی‌بودن y شرط زیر کافی می‌باشد:

$$|x+۱|-۴>۰ \Rightarrow |x+۱|>۴ \Rightarrow$$

$$\begin{cases}x+۱>۴\\x+۱<-۴\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x>۳\\x<-۵\end{cases} \Rightarrow$$

$$D_f=(-\infty,-۵)\cup(۳,+\infty)$$

برای‌تعیین بردتابع ابتدا ازضابطهٔ آن نتیجه می‌شود: $y>۰$.

از طرف دیگر داریم:

$$y^۲=\frac{۱}{|x+۱|-۴}\xRightarrow{(y\neq ۰)}|x+۱|-۴=\frac{۱}{y^۲}$$

$$\Rightarrow |x+۱|=\frac{۱}{y^۲}+۴>۴ \Rightarrow \frac{۱}{y^۲}>۰$$

$$\Rightarrow y\in(-\infty,۰)\cup(۰,+\infty)$$

از اشتراك $y>۰$ و $y\in(-\infty,۰)\cup(۰,+\infty)$ برد تابع به دست می‌آید:

$$R_f=(۰,+\infty)=R^+ \Rightarrow R_f=R^+$$

۶- تعیین دامنه وبرد توابع‌نمایی[۱۲]:

توابع نمایی را در حالت عمومی به صورت

$$y=a^{u(x)}$$

درنظرمی گیریم که در آن $a>۰$ و $u(x)$ تابعی‌از x می‌باشد. تعیین دامنه وبرد این‌نوع توابع بستگی‌به عبارت $u(x)$ دارد. در حالت خاص $a=e=۲/۷۱۸۲۸...$ داریم:

$$y=e^{u(x)}$$

برای این‌که تابع $y=a^{u(x)}$ مفهوم بهتری پیداکند می‌توان آن را چنین نوشت:

$$y=e^{u(x)\log_e^a}$$

عبارت $\log_e^a$ را با نماد $\ln a$ نمایش می‌دهیم و درنتیجه داریم:

$$y=a^{u(x)}=e^{u(x)\ln a}$$

با این‌تعریف‌ثابت می‌شود که بافرض‌حقیقی‌بودن عبارت $u(x)$ شرط $a>۰$ برای معین بودن توابع نمایی به صورت

$$y=a^{u(x)}$$

شرط کافی است. برای روشن‌شدن مطلب‌به بیان‌یك مثال اکتفا می‌کنیم. به عنوان مثالی ساده می‌توان‌تابع باضابطهٔ

$$y=f(x)=(\sqrt{۲})^{\sqrt{۱۲}}$$

را درنظر گرفت. تابع فوق‌را می‌توان چنین نوشت:

$$y=۲^{\sqrt{۳}}$$

برای تعیین دامنه و برد تابع کافی است بگوییم عدد $۲^{\sqrt{۳}}$ چه مفهومی‌دارد؟ ازآن‌جاکه توان ۲ یعنی $\sqrt{۳}$ عددی گنگ‌است، به همین دلیل نمی‌توان ازآن مفهومی برداشت‌کرد. از طرفی می‌دانیم تابع باضابطهٔ $y=e^x$ به ازای هرعددحقیقی x معین وتعریف شده‌است. زیرا تساوی زیر برقرار است:

$$y=e^x=\lim_{n\to\infty}(۱+\frac{۱}{n})^{nx}=۱+\frac{x}{۱!}+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۳}{۳!}+\cdots$$

بنابراین برای‌تعریف مناسبی برای $۲^{\sqrt{۳}}$ الزاماً بایدداشته‌باشیم:

$$۲^{\sqrt{۳}}=(e^a)^{\sqrt{۳}} \Rightarrow e^a=۲ \Rightarrow a=\ln ۲$$

درنتیجه ضابطهٔ‌تابع موردنظر را می‌توان‌به شکل زیرنوشت که دارای مفهوم باشد:

$$y=۲^{\sqrt{۳}}=e^{\sqrt{۳}\ln ۲} \Rightarrow \left|\begin{array}{l}D_f=R\\R_f=\{e^{\sqrt{۳}\ln ۲}\}\end{array}\right.$$

12) Exponential functions

مثال ۲۰: دامنه و برد تابع با ضابطهٔ

$$y=f(x)=2^{-x^{-2}}$$

را تعیین کنید.

حل: ابتدا تابع را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$y=2^{-x^{-2}}=2^{-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2^{\frac{1}{x^2}}}=e^{-x^{-2}\ln 2}$$

مشاهده می‌شود که اگر $x \to 0$ آنگاه:

$$\frac{1}{2^{\frac{1}{x^2}}} \to 0$$

اما تابع در $x=0$ تعریف نشده است. بنابراین دامنهٔ تابع مجموعهٔ عددهای حقیقی به جز صفر می‌باشد:

$$D_f=R-\{0\}$$

تعیین برد تابع: ابتدا از ضابطهٔ تابع نتیجه می‌شود:

$$y>0$$

اینک x را برحسب y حل می‌کنیم: برای این منظور با توجه به $y>0$ لگاریتم طرفین را به دست می‌آوریم:

$$\log y=\frac{-1}{x^2}\log 2 \implies x^2=\frac{-\log 2}{\log y} \implies$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{\log 2}{-\log y}}$$

برای حقیقی بودن x باید داشته باشیم:

$$\log y<0 \qquad y>0$$

از شرایط اخیر حدود y تعیین می‌شود:

$$0<y<1$$

در این جا از اشتراک $y>0$ و $0<y<1$ برد تابع معین می‌شود:

$$R_f=(0,1)$$

مثال ۲۱: دامنه و برد تابع با ضابطهٔ

$$y=f(x)=e^{\frac{-1}{\sqrt{x-[x]}}}$$

را تعیین کنید.

حل: می‌دانیم به ازای هر عدد حقیقی x داریم:

$$[x]\leqslant x<[x]+1$$

در نتیجه به ازای هر عدد حقیقی x خواهیم داشت:

$$0\leqslant x-[x]<1$$

مشاهده می‌شود که اگر $(x-[x])\to 0^+$ آنگاه

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{\sqrt{x-[x]}}}}\to 0^+$$

اما اگر $x\in Z$ آنگاه $x-[x]=0$ و در نتیجه تابع به ازای مجموعهٔ عددهای صحیح Z نامعین است و در نتیجه داریم:

$$D_f=R-Z$$

تعیین برد تابع: ابتدا از ضابطهٔ تابع نتیجه می‌شود:

$$y>0$$

اینک به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$y=e^{\frac{-1}{\sqrt{x-[x]}}} \implies \log_e^y=\frac{-1}{\sqrt{x-[x]}} \implies$$

$$\sqrt{x-[x]}=\frac{-1}{\log_e^y}=\frac{-\log e}{\log y}$$

طرف اول تساوی همواره مثبت است. بنابراین برای مثبت بودن طرف دوم الزاماً خواهیم داشت:

$$y>0 \quad , \quad \log y<0 \implies 0<y<1$$

در این جا از اشتراک $y>0$ و $0<y<1$ برد تابع معین می‌شود:

$$R_f=(0,1)$$

۷ـ تعیین دامنه و برد توابع لگاریتمی[13]:

توابع لگاریتمی‌را درحالت عمومی‌به شکل زیر درنظر می‌گیریم:

$$y=\log_a^{A(x)}$$

که دراین‌گونه توابع همواره داریم:

$$A(x)>0 \quad , \quad a\neq 1 \quad , \quad a>0$$

بنابراین برای تعیین دامنهٔ توابع لگاریتمی کافی است شرایط اخیررا برقرارکنیم.

مثال ۲۲: دامنه وبردتابع باضابطهٔ زیررا حساب‌کنید:

$$y=f(x)=\log\frac{x-2}{x+2}$$

حل: تعیین دامنه:

$$D_f=\left\{x\,\middle|\,\frac{x-2}{x+2}>0\right\}$$

$$\frac{x-2}{x+2}>0$$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-2}{x+2}$		$+$		$-$	0	$+$	

$$\Longrightarrow D_f=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$$

برای‌تعیین بردتابع ابتدا x را برحسب y حل می‌کنیم، سپس باتوجه به دامنهٔ تابع yهای موردقبول‌را معین می‌کنیم:

$$\frac{x-2}{x+2}=10^y \Longrightarrow x-2=10^y\times x+2\times 10^y$$

$$\Longrightarrow x=\frac{2(1+10^y)}{1-10^y}\in D_f \Longrightarrow$$

$$\frac{2(1+10^y)}{1-10^y}>2 \quad \text{یا} \quad \frac{2(1+10^y)}{1-10^y}<-2$$

بنابراین اجتماع مجموعهٔ‌جوابهای‌نامعادله‌های اخیر بردتابع را تشکیل می‌دهد.

نامعادله‌های فوق‌را به شکل ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\frac{10^y}{1-10^y}>0 \quad \text{یا} \quad \frac{1}{1-10^y}<0$$

$$1-10^y=0 \Longrightarrow 10^y=1 \Longrightarrow y=0$$

y	$-\infty$		0		$+\infty$
$1-10^y$		$+$	0	$-$	

بنابراین اجتماع $y>0$ و $y<0$ بردتابع را تشکیل می‌دهد:

$$R_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)=R-\{0\}$$

مثال ۲۳: دامنه و بردتابع باضابطهٔ زیر را تعیین‌کنید:

$$y=f(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(9-x^2)}$$

حل: باتوجه به ضابطهٔ تابع برای‌تعیین دامنهٔ تابع کافی است مجموعهٔ‌جواب دستگاه‌نامعادله‌های زیر رابه دست آوریم:

$$\begin{cases} 9-x^2>0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(9-x^2)\geqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2<9 \\ \log_{\frac{1}{2}}(9-x^2)\geqslant \log_{\frac{1}{2}}1 \end{cases}$$

13) Logarithmic functions

$$\Longrightarrow \begin{cases} -3<x<3 \\ \dfrac{\log(9-x^2)}{\log\frac{1}{2}} \geqslant \dfrac{\log 1}{\log\frac{1}{2}} \end{cases} \xRightarrow{(\log\frac{1}{2}<0)}$$

$$\begin{cases} -3<x<3 \\ \log(9-x^2) \leqslant \log 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -3<x<3 \\ 9-x^2 \leqslant 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -3<x<3 \\ x^2 \geqslant 8 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} -3<x<3 \\ x \geqslant 2\sqrt{2} \quad \text{یا} \quad x \leqslant -2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$D_f=\{x \mid -3<x<3\} \cap \{x \mid x \geqslant 2\sqrt{2} \ \text{یا}\ x \leqslant -2\sqrt{2}\}$$

$$\Longrightarrow D_f=(-3,-2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2},3)$$

تعیین برد تابع: ابتدا از ضابطهٔ تابع نتیجه می‌شود:

$$y \geqslant 0$$

اینک x را برحسب y حل می‌کنیم:

$$y^2=\log_{\frac{1}{2}}(9-x^2) \Longrightarrow 9-x^2=\left(\frac{1}{2}\right)^{y^2}$$

$$x^2=9-\left(\frac{1}{2}\right)^{y^2} \Longrightarrow$$

$$|x|=\sqrt{9-\left(\frac{1}{2}\right)^{y^2}} \in [2\sqrt{2},3)$$

$$\Longrightarrow 2\sqrt{2} \leqslant \sqrt{9-\left(\frac{1}{2}\right)^{y^2}} < 3$$

$$\Longrightarrow 8 \leqslant 9-\left(\frac{1}{2}\right)^{y^2} < 9$$

$$\Longrightarrow -1 \leqslant -\left(\frac{1}{2}\right)^{y^2} < 0$$

$$0<\left(\frac{1}{2}\right)^{y^2} \leqslant 1 \Longrightarrow$$

$$R_f=\{y \mid y \in R \ , \ y \geqslant 0\} \Longrightarrow R_f=[0,+\infty)$$

مثال ۲۴: دامنه و برد تابع باضابطهٔ زیر را تعیین کنید:

$$y=f(x)=\sqrt{\log\frac{10x+10}{x^2-1}+\log\frac{x^2-1}{x+1}+\cos x}$$

حل: ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$y=\sqrt{\log\left(\frac{10(x+1)}{x^2-1}\right)\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right)+\cos x}$$

$$\xRightarrow{x^2-1\neq 0} y=\sqrt{\log 10+\cos x}$$

$$\Longrightarrow y=\sqrt{1+\cos x}$$

$$\xRightarrow{1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}} y=\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}=\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|$$

در این‌جا با توجه به شرط:

$$x \neq \pm 1 \quad \text{و یا} \quad x^2-1 \neq 0$$

دامنهٔ تابع چنین است:

$$D_f=R-\{-1\ ,\ 1\}$$

تعیین برد تابع: ابتدا از ضابطهٔ تابع نتیجه می‌شود:

$$y \geqslant 0$$

اینک با توجه به:

$$0 \leqslant \left|\cos\frac{x}{2}\right| \leqslant 1$$

داریم:

$$0 \leqslant \sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right| \leqslant \sqrt{2} \Longrightarrow 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{2}$$

حال با توجه به دامنهٔ تابع نتیجه می‌شود که زوجهای مرتب

$$(-1 , f(1)) \;,\; (1 , f(1))$$

جزو مجموعهٔ f نمی‌باشند. بنابراین باید مقدار $f(\pm 1)$ را حساب کرده و از فاصلهٔ $[0, \sqrt{2}]$ حذف کنیم:

$$f(\pm 1)=\sqrt{2}\left|\cos\left(\frac{\pm 1}{2}\right)\right| = \sqrt{2}\cos\frac{1}{2}$$

بنابراین در این‌جا بردتابع معین می‌شود:

$$R_f=\left\{y \mid 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{2}\right\}-\left\{\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}\right\}$$

۸ــ تعیین دامنه و برد توابع مثلثاتی[14]:

توابع ساده مثلثاتی با ضابطهٔ

$$g(x)=\cos x \quad \text{یا} \quad f(x)=\sin x$$

دارای دامنهٔ R (مجموعهٔ عددهای‌حقیقی) می‌باشند و اگر

$$f(x)=tg x$$

باشد:

$$f(x)=tg x=\frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad \cos x=0 \Longrightarrow$$

$$x=k\pi+\frac{\pi}{2} \Longrightarrow D_f=R-\left\{x \mid x=k\pi+\frac{\pi}{2}\right\}$$

و اگر $g(x)=cotg x$ باشد:

$$g(x)=\frac{\cos x}{\sin x} \;\text{ و }\; \sin x=0 \Longrightarrow x=k\pi \Longrightarrow$$

$$D_g=R-\{x \mid x=k\pi\}$$

تعیین برد توابع: اگر

$$f(x)=\cos x \quad \text{یا} \quad f(x)=\sin x$$

چون‌همواره $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ و $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ بنابراین داریم:

$$R_f=[-1 , 1]$$

14) Trigonometric functions

و اگر $g(x)=tg x$ یا $g(x)=cotg x$ تمام عددهای حقیقی R می‌باشد:

$$R_f=R$$

باید توجه داشت که معمولاً برای تعیین برد توابع مثلثاتی از مقادیرحداقل وحداکثرتوابع $\sin x$ و $\cos x$ استفاده می‌شود.

مثال ۲۵: دامنه وبرد تابع باضابطهٔ زیر را تعیین‌کنید:

$$y=f(x)=\sin x+\cos x$$

حل: دامنهٔ هریك از توابع $\sin x$ و $\cos x$ مجموعهٔ عددهای‌حقیقی R است، بنابراین دامنهٔ مجموع این‌دوتابع R می‌باشد:

$$D_f=R$$

برای تعیین برد تابع از اتحاد:

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

استفاده می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

از آن‌جاکه می‌دانیم:

$$-1 \leqslant \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$$

پس نتیجه می‌شود:

$$-\sqrt{2} \leqslant \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \leqslant \sqrt{2}$$

$$\Longrightarrow -\sqrt{2} \leqslant y \leqslant \sqrt{2} \Longrightarrow$$

$$R_f=[-\sqrt{2} , \sqrt{2}]$$

مثال ۲۶: دامنه وبردتابع با ضابطهٔ زیررا تعیین‌کنید:

$$y=f(x)=\sin\pi x+\cos\pi x+\sqrt{-\sin^4\pi x}$$

حل: ازآن‌جاکه فرجهٔ رادیکال زوج‌است پس باید

$\sin^4\pi x \leqslant 0$ و یا $-\sin^4\pi x \geqslant 0$

باشد.

اما همواره $\sin^4\pi x > 0$ و در نتیجه تابع وقتی معین است که داشته باشیم:

$$-\sin^4\pi x = 0 \Rightarrow \sin\pi x = 0 \Rightarrow$$

$$\pi x = k\pi \Rightarrow x = k \in Z$$

(k متعلق‌به مجموعهٔ عددهای صحیح است.) بنابراین‌دامنهٔ‌تابع، مجموعهٔ عددهای صحیح است: $D_f = Z$

با توجه به دامنه، ضابطهٔ تابع به شکل‌زیر تحویل می‌شود:

$$D_f = Z : y = \cos\pi x = \pm 1$$

درنتیجه بردتابع مجموعهٔ دوعضوی $\{-1,1\}$ می‌باشد:

$$R_f = \{-1,1\}$$

مثال ۲۷: دامنه وبرد تابع باضابطهٔ زیررا تعیین کنید:

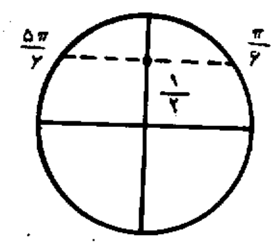
$$y=f(x)=\frac{2}{\sqrt{8\sin x - 4}}$$

حل : دامنهٔ تابع چنین است:

$$D_f=\{x \mid 8\sin x - 4 > 0\}$$

$$8\sin x - 4 > 0 \Rightarrow 8\sin x > 4 \Rightarrow$$

$$\sin x > \frac{1}{2} \Rightarrow$$



با توجه به شکل داریم:

$$D_f = \left\{x \mid 2k\pi + \frac{\pi}{6} < x < 2k\pi + \frac{5\pi}{6}\right\}$$

تعیین برد تابع: از ضابطه تابع نتیجه می‌شود:

$$y>0$$

اینك $\sin x$ را ازضابطهٔ تابع برحسب y به‌دست‌می‌آوریم و سپس‌شرط $\frac{1}{2} \leqslant \sin x \leqslant 1$ را برقرار می‌کنیم:

$$y^2=\frac{4}{8\sin x-4}\Rightarrow y^2=\frac{1}{2\sin x - 1}$$

$$2y^2\sin x - y^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\sin x = \frac{1+y^2}{2y^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2y^2} \leqslant 1$$

$$\Rightarrow 0<\frac{1}{2y^2}\leqslant\frac{1}{2} \Rightarrow 0<\frac{1}{y^2}\leqslant 1$$

$$\frac{1}{y^2}\leqslant 1 \Rightarrow y^2\geqslant 1\Rightarrow$$

$|y|\geqslant 1$ ($y\geqslant 1$ یا $y\leqslant -1$)

از اشتراك $|y|\geqslant 1$ و $y>0$ برد تابع معین می‌شود:

$$R_f=[1,+\infty)$$

مثال ۲۸: دامنه و بردتابع باضابطهٔ زیر را تعیین کنید:

$$y=f(x)=\sin(\log_2\log_3 x)$$

حل: تعیین دامنه تابع:

$$\log_3 x>0 \Rightarrow \log_3 x > \log_3 1 \Rightarrow$$

$$x>1 \Rightarrow D_f=(1,+\infty)$$

تعیین برد تابع:

$$|\sin(\log_2\log_3 x)|\leqslant 1$$

$$\Rightarrow |y|\leqslant 1 \Rightarrow -1\leqslant y\leqslant 1$$

$$\Rightarrow R_f=[-1,1]$$

ادامهٔ مطلب درشمارهٔ آینده ارائه خواهد شد.

طرح یک مسألهٔ جالب توجه دربارهٔ قوطیهای نگهدارندهٔ مواد غذایی و نوشابه‌ها

برگرفته شده از کتاب «معماهای ابوالهول»*

ترجمهٔ: حسن نصیرنیا

چنان‌که همه می‌دانیم استوانه، شکل متداول قوطیهای نگهدارندهٔ مواد غذایی و نوشابه است که در اندازه‌های بسیار متفاوت از باریک و بلند تا قطور و کوتاه ساخته می‌شود. فرض کنید یک تولید کنندهٔ قوطیهای فلزی می‌خواهد مقدار حلبی لازم (برای سطح جانبی و سطح دو قاعدهٔ استوانه) را به حداقل برساند. به سخن دیگر می‌خواهد ـ بی‌آنکه حجم قوطی تغییر کند، ظرف را طوری انتخاب کند که مساحتهای سطح جانبی و دو قاعدهٔ آن کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

یک رابطهٔ ساده میان طول استوانه و قطر آن وجود دارد که اگر این رابطه برقرار شود، مراد حاصل است. آیا شما آن را می‌دانید؟

پاسخ «طرح یک مسألهٔ جالب توجه ....»

لازمهٔ این‌که سطح یک استوانهٔ مستدیر قائم با یک حجم مشخص، کمترین مقدار مساحت را دارا باشد، این است که ارتفاع آن (استوانه) دقیقاً برابر قطرش باشد. اینک نشان خواهیم داد که چگونه می‌توان این نتیجهٔ بسیار ساده را از یک واقعیت حتی ساده‌تر به دست آورد. اما پیش از آن، می‌خواهیم به ذکر برخی از علل عدم رعایت این تناسب در ساختن قوطیها و بشکه‌ها بپردازیم.

واضح‌ترین علت آن این است که سازندگان می‌خواهند هزینهٔ ساخت را به حداقل برسانند که.البته این امر با به حداقل رساندن مساحت رویهٔ مصالح به کار رفته ملازم نیست. یکی از راههای کاهش هزینه و در عین حال تضمین دوام و استحکام مطلوب، آن است که بدنه‌های قوطی یا بشکه نسبت به دو سطح فوقانی و تحتانی آن از مواد ارزانتری ساخته شوند. طول درزها نیز از اقلامی است که بر هزینه اثر می‌گذارد. این ملاحظات سبب می‌شوند که طول قوطیها را بیشتر از عرض آنها بسازند. از سوی دیگر شکل ظاهریِ قوطی ممکن است میزان فروش را بالا ببرد؛ به این ترتیب که به‌نظر خریداران، قوطیهای درازتر از قوطیهای کوتاه‌تر هم حجم، حجم بیشتری دارند.

حال شکل استوانه‌ای با حداقل مساحت سطح و حجمی مفروض را با شکل منشور مربع القاعده‌ای با کمترین مقدار مساحت سطح و حجمی مفروض مرتبط می‌کنیم. چون جای هیچ شگفتی نیست که جواب مسأله یک مکعب باشد، تساوی ارتفاع و قطر استوانه‌ای با مساحت سطح حداقل تا حدی نیز طبیعی به‌نظر می‌رسد.

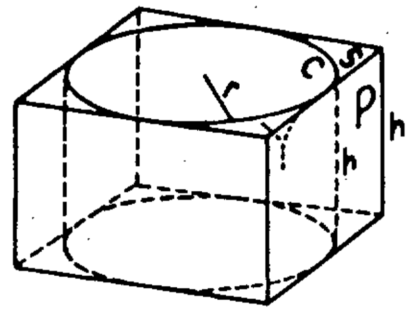
نخست یک پیکربندی واقع در صفحه را که شامل دایرهٔ C به شعاع r و یک مربع S محیط بر آن است در نظر می‌گیریم. اگر pc و Ps به ترتیب معرف محیطهای دایره و مربع باشند، خواهیم داشت:

$$(C)\ \text{مساحت} = \frac{r}{2}\, pc \qquad (1)$$

$$(S)\ \text{مساحت} = \frac{r}{2}\, ps$$

به‌طوری که ملاحظه می‌شود، می‌توان هریک از این شکلها را به مثلثهایی تقسیم کرد که قاعده‌های آنها بر محیط شکل و رأسهایشان در مرکز آن باشند. (در مورد دایره باید تعداد بسیار زیاد از مثلثهای بسیار باریک را در ذهن مجسم کرد.) همهٔ این مثلثها ارتفاعی برابر r دارند. با توجه به این نکات نتیجه می‌شود که: (C) مساحت : (S) مساحت = pc:ps

که نسبتهای فوق برابر $4/\pi$ است، ولی برای استدلال ما مورد نیاز نیست.



حال استوانهٔ مستدیر Y به شعاع r و ارتفاع h و منشور مربع القاعدهٔ P محیط برآن را درنظر می‌گیریم. بر قاعدهٔ فوقانی و قاعدهٔ تحتانی آن همان پیکربندی مذکور را می‌بینیم. از این رو، قاعده‌ها و درنتیجه حجمهای این منشورها دارای نسبت pc:ps هستند. میان مساحتهای سطحهای آنها نیز همین نسبت برقرار است، چه، می‌توان با گسترانیدن وجوه جانبی آنها و تشکیل یک مستطیل به این نتیجه دست یافت. از این رو داریم:

$$\frac{\text{حجم } Y}{\text{حجم } P} = \frac{\text{مساحت سطح } Y}{\text{مساحت سطح } P}$$

بنابراین چنانچه بدانیم که درمیان همهٔ منشورهای مربع القاعدهٔ با حجم ثابت، منشوری که مساحت سطح آن کمترین مقدار باشد یک مکعب است، در آن صورت می‌توانیم نتیجه بگیریم که در میان همهٔ استوانه‌های مستدیر با یک حجم، استوانهٔ محاط در مکعب کمترین مساحت سطح را دارد.

حکم مربوط به مکعب را با استفاده از مبحث حسابان بسادگی می‌توان ثابت کرد و در آن صورت حکم اصلی مورد نظر ما، یعنی حکم مربوط به استوانه نیز بسادگی قابل حل است. اما ما راه حل دیگری ارائه می‌دهیم براساس این واقعیت که میانگین حسابی سه عدد مثبت از میانگین هندسی آنها بزرگتر است، مگر این‌که آن سه عدد برابر باشند. (برای آگاهی از این راه حل رجوع کنید به:
An Introduction to Inequalities, by Edwin Beckenbach & Richard Bellman, NML Vol. 3, P.53.)

با استفاده از این حکم نه‌تنها حداقل مساحت سطح برای منشورهای مربع القاعده رابه‌دست می‌آوریم بلکه مساحت سطح متوازی السطوحهای قائم با یالهای اختیاری a و b و c را نیز به حداقل می‌رسانیم. مساحت سطح یک چنین جسمی برابر است با $2(ab + ac + bc)$. حاصل‌ضرب سه جملهٔ درون پرانتز برابر V^2 است. بنابراین میانگین هندسی آنها تنها به V و درنتیجه به میانگین حسابی بستگی دارد و حاصل جمع‌شان تنها درصورتی کمترین مقدار را داراست که آنها همگی برابر باشند. این امر فقط زمانی صادق است که متوازی‌السطوح یک مکعب باشد.

فرض کنید می‌خواهیم جعبه‌ای به‌شکل منشور بسازیم که قاعده‌اش یک شش ضلعی منتظم باشد. آیا می‌توانید بگویید که نسبتهای ابعاد جعبه چه مقدار باید باشد تا مساحت سطح آن با حجم ثابت مفروض به حداقل برسد؟ پاسخ را در همین صفحه ملاحظه می‌کنید.

پاسخ بخش دوّم «طرح یک مسألهٔ جالب توجه ...»

* گاردنر، مارتین، **معماهای ابوالهول**، ترجمهٔ حسن نصیرنیا، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۷۰، فصل ۶، نوار علامت «باربرپولیا»، (ص ۱۱۲).

تابع معکوس، تابعهای مثلثاتی (Arcها) (قسمت دوّم)

مورد استفاده دانش آموزان سالهای دوم، سوم و چهارم

● علی حسن‌زاده ماکویی

۳. خلاصه مطالب شمارهٔ گذشته.

(الف) مجموعـهٔ مقادیر کمانهـای اصلی (Arcهـا) عبارتنداز :

(۱) $-\frac{\pi}{2}\leqslant \mathrm{Arc}\sin(m)\leqslant\frac{\pi}{2}, |m|\leqslant 1$

(۲) $0\leqslant \mathrm{Arc}\cos(n)\leqslant\pi \quad , \quad |n|\leqslant 1$

(۳) $-\frac{\pi}{2}< \mathrm{Arc}\,tg(t) <\frac{\pi}{2} \quad , \quad t\in \mathbb{R}$

(۴) $0<\mathrm{Arc}\,cotg(q)<\pi \quad , \quad q\in \mathbb{R}$

(۵)

(I) $0\leqslant \mathrm{Arc}\sec(s)<\frac{\pi}{2}\ ,\ s\geqslant 1$

(II) $\frac{\pi}{2}<\mathrm{Arc}\sec(s)\leqslant\pi\ ,\ s\leqslant -1$

(۶)

(I) $0<\mathrm{Arc}\csc(c)\leqslant\frac{\pi}{2}\ ,\ c\geqslant 1$

(II) $-\frac{\pi}{2}\leqslant \mathrm{Arc}\csc(c)<0\ ,\ c\leqslant -1$

(ب) مجموعهٔ مقادیر کمانهایی که به صورت arc هستند، به ترتیب عبارتنداز:

(۱) $x=\mathrm{arc}\sin(m)\ ,\ |m|\leqslant 1 \Longrightarrow$

$x=2k\pi+\mathrm{Arc}\sin(m)$ یا $+(\pi-\mathrm{Arc}\sin(m))$

(۲) $y=\mathrm{arc}\cos(n)\ ,\ |n|\leqslant 1 \Longrightarrow$

$y=2k\pi\pm \mathrm{Arc}\cos(n)$

(۳) $z=\mathrm{arc}\,tg(t)\ ,\ t\in\mathbb{R}$ (مجموعهٔ عددهای حقیقی) $\Longrightarrow$

$z=k\pi+\mathrm{Arc}\,tg(t)$

(۴) $u=\mathrm{arc}\,cotg(q)\ ,\ q\in\mathbb{R} \Longrightarrow$

$u=k\pi+\mathrm{Arc}\,cotg(q)$

(۵) $v=\mathrm{arc}\sec(s)\ ,\ |s|\geqslant 1 \Longrightarrow$

$v=2k\pi\pm \mathrm{Arc}\sec(s)$

(۶) $w=\mathrm{arc}\csc(r)\ ,\ |r|\geqslant 1 \Longrightarrow$

$w=2k\pi+\mathrm{Arc}\csc(r)$ یا $(\pi-\mathrm{Arc}\csc(r))$

۴. با توجه به مجموعهٔ مقادیر Arcها، رابطه‌های زیر را به‌آسانی می‌توان نتیجه گرفت:

(۱) $\mathrm{Arc}\sin(-m)=-\mathrm{Arc}\sin(m)$

(۲) $\mathrm{Arc}\cos(-n)=\pi-\mathrm{Arc}\cos(n)$

(۳) $\mathrm{Arc}\,tg(-t)=-\mathrm{Arc}\,tg(t)$

(۴) $\mathrm{Arc}\,cotg(-q)=\pi-\mathrm{Arc}\,cotg(q)$

(۵) $\mathrm{Arc}\sec(-s)=\pi-\mathrm{Arc}\sec(s)$

(۶) $\mathrm{Arc}\csc(-r)=-\mathrm{Arc}\csc(r)$

به مثالهای زیر توجه کنید:

(۱)

$$\mathrm{Arc}\sin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}=-\mathrm{Arc}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

(۲)

$$\mathrm{Arc}\cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}=\pi-\mathrm{Arc}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

(۳)

$$\mathrm{Arc}tg(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}=-\mathrm{Arc}tg(\sqrt{3})$$

(۴)

$$\mathrm{Arc}\ cotg(-\sqrt{3})=\frac{5\pi}{6}=\pi-\mathrm{Arc}\ cotg(\sqrt{3})$$

(۵)

$$\mathrm{Arc\ sec}\ (-2)=\frac{2\pi}{3}=\pi-\mathrm{Arc\ sec}\ (2)$$

(۶)

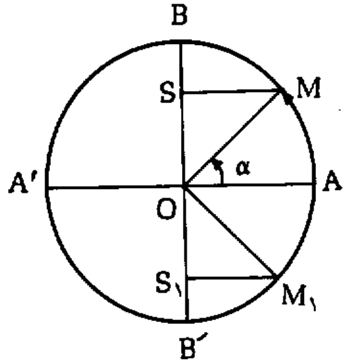
$$\mathrm{Arc\ csc}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{3}=-\mathrm{Arc\ csc}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

۵ . **رسم کمانهای اصلی :** هرگاه یکی از مقادیر نسبتهای مثلثاتی کمان اصلی معلوم باشد، با استفاده از جدول نسبتهای مثلثاتی کمانها، و رابطه‌های بین کمانهای قرینه ومکمل اندازهٔ کمان مزبور را (به استثنای چند حالت‌خاص) می‌توان به طور تقریب تعیین کرد. اینك به وسیله چند مثال با روش ترسیم کمانهای مزبور آشنا می‌شویم.

(۱) رسم کمان اصلی :

$\alpha=\mathrm{Arc}\sin(m)\ ,\ |m|\leqslant 1$

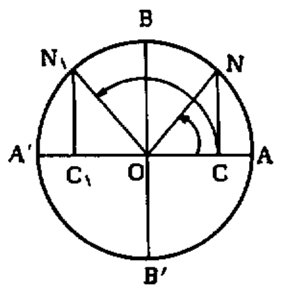
(الف) $m=\frac{2}{3}$ ، در دایرهٔ مثلثاتی روی محور سینوسها درجهت مثبت (روی OB) طول OS را به اندازهٔ $\frac{2}{3}$ جدا ، سپس از نقطهٔ S خطی موازی وهمجهت با OA (بخش مثبت محور کسینوسها) رسم کنیم تا دایره‌را در نقطهٔ M قطع کند، کمان حادهٔ مثبت $\widehat{AM}$ همان کمان $\mathrm{Arc}\sin(\frac{2}{3})$ است.



(ب) $m=-\frac{3}{4}$ ، طول OS_1 را روی OB' به‌اندازهٔ $\frac{3}{4}$ جدا واز S_1 خطی موازی و همجهت با OA رسم کنیم تا دایره‌را درنقطهٔ M_1 قطع کند. کمان‌حادهٔ منفی $\widehat{AM_1}$ همان کمان، $\mathrm{Arc}\sin(-\frac{3}{4})$ است.

(۲) رسم کمان‌اصلی، $|n|\leqslant 1$ و $\beta=\mathrm{Arc}\cos(n)$.

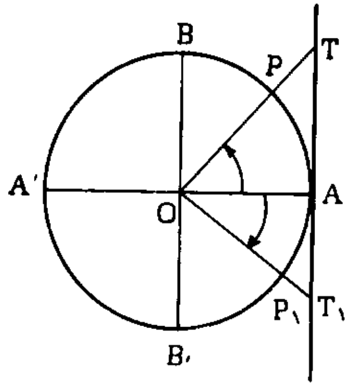
(الف) $n=\frac{3}{5}$ ، در دایرهٔ مثلثاتی روی محور کسینوسها درجهت مثبت (روی OA) طول OC را به اندازهٔ $\frac{3}{5}$ جدا ، سپس از نقطـهٔ C خطی موازی وهمجهت با OB (بخش مثبت محور سینوسها) رسم کنیم. کمان حادهٔ مثبت $\widehat{AN}$ همان کمان، $\mathrm{Arc}\cos(\frac{3}{5})$ است.



(ب) $n=-\frac{۲}{۳}$ ، طول OC_1 را روی OA' به‌اندازهٔ $\frac{۲}{۳}$ جدا سپس از C_1 خطی موازی وهمجهت با OB رسم‌کنیم، کمان منفرجهٔ مثبت $\widehat{AN_1}$ همان‌کمان $\text{Arc}\cos(\frac{-۲}{۳})$ است.

(۳) رسم کمان اصلی، $\gamma=\text{Arc}\,tg(t)$.

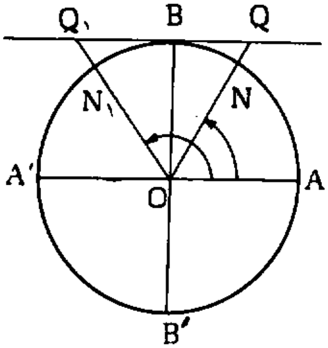
(الف) $t=\frac{۶}{۵}$ ، در دایرهٔ مثلثاتی روی محور تانژانتها در جهت مثبت طول AT را بـه اندازهٔ $\frac{۶}{۵}$ جدا، سپس از T به O وصل کنیم، کمان‌حادهٔ مثبت $\widehat{AP}$ همان‌کمان ، $\text{Arc}\,tg(\frac{۶}{۵})$ است.



(ب) $t=-\frac{۳}{۵}$ ، طول AT_1 را روی محور تانژانتها در جهت منفی به اندازه $\frac{۳}{۵}$ جدا، از T_1 به مرکزدایـره وصل کنیم، کمان حادهٔ منفی $A\hat{P}_1$ همان‌کمان $\text{Arc}\,tg(-\frac{۳}{۵})$ است.

(۴) رسم کمان اصلی، $\lambda=\text{Arc}\,cotg(q)$.

(الف) $q=\frac{۱}{۲}$ ، در دایرهٔ مثلثاتی روی محور کتانژانتها درجهت مثبت طول BO را به اندازهٔ $\frac{۱}{۲}$ جـدا سپس از Q به مرکزدایره وصل کنیم ،کمان‌حادهٔ مثبت $\widehat{AN}$ همان : $\text{Arc}\,cotg(\frac{۱}{۲})$ است.

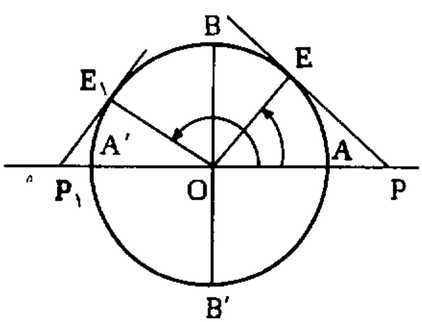


(ب) $q=-\frac{۳}{۴}$ ، روی محور کتانژانتها در جهت منفی طول، BQ_1 را به‌اندازهٔ $\frac{۳}{۴}$ جدا ، سپس از نقطهٔ Q_1 بـه مرکز دایره (O) وصل کنیم. کمان منفرجهٔ مثبت ، $\widehat{AN_1}$ همان کمان $\text{Arc}\,cotg(\frac{-۳}{۴})$ است.

(۵) رسم کمان اصلی،

$\varphi=\text{Arc}\sec(S)$ و $|S|\geqslant ۱$

(الف) $S=\frac{۳}{۲}$ در دایرهٔ مثلثاتی روی محور کسینوسها درجهت مثبت طول OP را به اندازهٔ $\frac{۳}{۲}$ جدا، سپس‌از نقطهٔ P مماس PE را بر ناحیهٔ اول دایره رسم‌کنیم ، کمان حادهٔ مثبت $\widehat{AE}$ همان‌کمان $\text{Arc}\sec(\frac{۳}{۲})$ است.

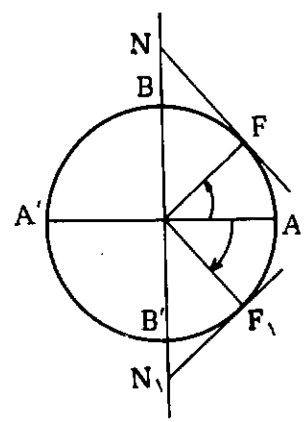


(ب) $S=\frac{-۴}{۳}$ روی محور کسینوسها در جهت منفی $OP_۱$ را به اندازهٔ $\frac{۴}{۳}$ جدا سپس از $P_۱$ مماس $P_۱E_۱$ را بر ناحیهٔ دوم دایرهٔ مثلثاتی رسم کنیم، کمان منفرجهٔ مثبت $\widehat{AE_۱}$ همان کمان $\text{Arc sec}\,(\frac{-۴}{۳})$ است.

(۶) رسم کمان اصلی،

$$\theta=\text{Arc csc}\,(r) \quad \text{و} \quad |r|\geqslant ۱$$

(الف) $r=\frac{۵}{۳}$ در دایرهٔ مثلثاتی روی محور سینوسها در جهت مثبت طول ON را به اندازهٔ $\frac{۵}{۳}$ جدا، سپس از نقطهٔ N مماس NF را بر ناحیهٔ اول دایرهٔ مثلثاتی رسم کنیم، کمان حادهٔ مثبت $\widehat{AF}$ همان کمان، $\text{Arc csc}\,(\frac{۵}{۳})$ است.



(ب) $r=-\frac{۴}{۳}$ روی محور سینوسها در جهت منفی طول $ON_۱$ را به اندازهٔ $\frac{۴}{۳}$ جدا، سپس از $N_۱$ مماس $N_۱F_۱$ را بر ناحیهٔ چهارم دایرهٔ مثلثاتی رسم کنیم، کمان حادهٔ منفی $AF_۱$ همان کمان $\text{Arc csc}\,(-\frac{۴}{۳})$ است.

۶. **تابع معکوس تابعهای مثلثاتی.** با توجه به تعریف تابع معکوس و شرط وجود آن در تابع، $y=f(x)$ به آسانی می‌توان نتیجه گرفت، هر گاه دامنهٔ هریک از تابعهای مثلثاتی با مجموعهٔ مقادیر (برد) Arc مربوطه‌اش برابر باشد، توابع Arcها، تابع معکوس تابعهای مثلثاتی هستند.

یعنی داریم:

$$m=\sin(\alpha) \quad \text{و} \quad -۱\leqslant m\leqslant ۱ \quad \text{و} \quad \frac{-\pi}{۲}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{۲}$$

$$\Longrightarrow \alpha=\sin^{-۱}(m)=\text{Arc}\sin(m)$$

$$n=\cos(\beta) \quad \text{و} \quad -۱\leqslant n\leqslant ۱$$

$$۰\leqslant\beta\leqslant\pi \Longrightarrow \beta=\cos^{-۱}(n)=\text{Arc}\cos(n)$$

$$t=tg\gamma \quad \text{و} \quad t\in \mathbb{R}$$

$$\frac{-\pi}{۲}<\gamma<\frac{\pi}{۲} \Longrightarrow \gamma=tg^{-۱}(t)=\text{Arc }tg(t)$$

$$q=cotg(\gamma) \quad \text{و} \quad q\in \mathbb{R}$$

$$۰<\gamma<\pi \Longrightarrow \gamma=cotg^{-۱}(q)=\text{Arc}cotg(q)$$

$$s=\sec(\varphi) \quad \text{و} \quad s\geqslant ۱$$

$$۰\leqslant\varphi<\frac{\pi}{۲} \text{ یا } s\leqslant -۱ \text{ و } \frac{\pi}{۲}<\varphi\leqslant\pi \Longrightarrow$$

$$\varphi=\sec^{-۱}(s)=\text{Arc sec}\,(s)$$

$$r=\csc(\theta) \quad \text{و} \quad r\geqslant ۱ \quad \text{و} \quad ۰<\theta\leqslant\frac{\pi}{۲}$$

یا

$$r\leqslant -۱ \quad \text{و} \quad \frac{-\pi}{۲}\leqslant\theta<۰ \Longrightarrow$$

$$\theta=\csc^{-۱}(r)=\text{Arc csc}\,(r)$$

چند مثال:

مجموعهٔ جواب x را چنان معین کنید که رابطه‌های زیر برقرار باشند:

(۱)

$3x = \text{Arc}\cos(n) - \frac{3\pi}{5}$ و $|n| \leqslant 1 \Rightarrow$

$0 \leqslant \text{Arc}\cos(n) \leqslant \pi \Rightarrow$

$0 \leqslant 3x + \frac{3\pi}{5} \leqslant \pi \Rightarrow$

$-\frac{\pi}{5} \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{15}$

$\alpha = 3\text{Arc}\csc(2x-1)$ (۲)

$0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$0 < \text{Arc}\csc(2x-1) \leqslant \frac{\pi}{6} \Rightarrow$

$2x - 1 \geqslant 2 \Rightarrow x \geqslant \frac{3}{2}$

$\beta = 2\text{Arc}\,tg\left(\frac{3-x}{2x}\right)$ (۳)

$\frac{\pi}{2} \leqslant \beta < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} \leqslant \text{Arc}\,tg\left(\frac{3-x}{2x}\right) < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\frac{3-x}{2x} \geqslant 1 \Rightarrow \frac{3(1-x)}{2x} \geqslant 0 \Rightarrow$

$0 < x \leqslant 1$

$\varphi = \sqrt{\pi - 4\text{Arc}cotg(x)} \Rightarrow$ (۴)

$\pi - 4\,\text{Arc}\,cotg(x) \geqslant 0 \Rightarrow$

$\text{Arc}\,cotg(x) \leqslant \frac{\pi}{4} \Rightarrow x \geqslant 1$

$\theta = \sqrt{3\text{Arc}\cos(3x) - \pi} \Rightarrow$ (۵)

$\pi \geqslant \text{Arc}\cos(3x) \geqslant \frac{\pi}{3} \Rightarrow$

$-1 \leqslant 3x \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{1}{6}$

$2\text{Arc}\sin(x) > \sqrt{10}$ (رادیان) $\Rightarrow$ (۶)

$\text{Arc}\sin(x) \leqslant \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$2\text{Arc}\sin(x) \leqslant \pi < \sqrt{10} \Rightarrow$

در نتیجه

$\frac{\pi}{2} - 3\text{Arc}\,cotg(x) < 2$ (رادیان) $\Rightarrow$ (۷)

$\text{Arc}\,cotg(x) > \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}$,

$\text{Arc}\,cotg(x) > 0 > \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3} \Rightarrow$

درنتیجه، $x \in \mathbb{R}$ (مجموعهٔ عددهای حقیقی)

حاصل عبارتهای زیر را معین کنید:

$M = \cos \text{Arc}\,cotg \sin(\text{Arc}tg(2)) \Rightarrow$ (۸)

$\text{Arc}\,tg(2) = \alpha \Rightarrow \frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ و $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$,

$\text{Arc}\,cotg\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \beta \Rightarrow$

$\frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow M = \cos\beta = \frac{2}{3}$

$\omega = \text{Arc}tg(3) + \text{Arc}\,cotg(3) \Rightarrow$ (۹)

$\text{Arc}\,tg(3) = \alpha \Rightarrow tg\alpha = 3$ و

$\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ و $cotg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 3$

$\text{Arc}\,cotg(3) = \beta \Rightarrow$

$cotg(\beta) = 3$ و $0 < \beta < \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \alpha = \beta \Rightarrow$

$\omega = \frac{\pi}{2}$

تمرین : با استفاده از مثال‌فوق رابطهٔ

$$\mathrm{Arc}\,tg(p)+\mathrm{Arc}\,cotg(p)=\frac{\pi}{۲} \quad \text{و} \quad p\in IR$$

را نتیجه بگیرید.

(۱۰)

$$\theta=\mathrm{Arc}\,sin(\frac{-۴}{۵})+\mathrm{Arc}\,cos(\frac{-۴}{۵})\Longrightarrow$$

$$\mathrm{Arc}\,sin(\frac{۴}{۵})=\alpha \Longrightarrow \frac{\pi}{۴}<\alpha<\frac{\pi}{۲} \quad \text{و} \quad sin\alpha=\frac{۴}{۵}$$

$$\mathrm{Arc}\,cos(\frac{۴}{۵})=\beta \Longrightarrow$$

$$۰<\beta<\frac{\pi}{۴} \quad \text{و} \quad cos(\beta)=\frac{۴}{۵}=sin\alpha \Longrightarrow$$

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲} \quad \text{و} \quad \mathrm{Arc}\,sin(\frac{-۴}{۵})=-\alpha$$

و

$$\mathrm{Arc}\,cos(\frac{-۴}{۵})=\pi-\beta \Longrightarrow$$

$$\theta=-\alpha+\pi-\beta=\pi-(\alpha+\beta)=\pi-\frac{\pi}{۲}=\frac{\pi}{۲}$$

تمرین : با استفاده از مثال‌فوق رابطهٔ $|m|\leqslant ۱$ و

$$\mathrm{Arc}\,sin(m)+\mathrm{Arc}\,cos(m)=\frac{\pi}{۲}$$

را نتیجه بگیرید.

$$\varphi=\mathrm{Arc}\,cos(\frac{-۳}{۵})+\mathrm{Arc}\,cos(\frac{-۴}{۵}) \quad (۱۱)$$

$$\mathrm{Arc}\,cos(\frac{۳}{۵})=\alpha$$

و

$$\mathrm{Arc}\,cos(\frac{۴}{۵})=\beta=\mathrm{Arc}\,sin(\frac{۳}{۵})$$

$$\varphi=\pi-\alpha+\pi-\beta=۲\pi-(\alpha+\beta)=\frac{۳\pi}{۲}$$

(۱۲)

$$\lambda=\mathrm{Arc}\,tg(sin\varphi)+\mathrm{Arc}\,cotg(sin\varphi)$$

$$\frac{-\pi}{۲}<\varphi<۰ \;,\; sin\varphi=-m \;,\; m>۰ \Longrightarrow$$

$$\frac{-\pi}{۲}<\mathrm{Arc}\,tg(-m)<۰ \quad \text{و}$$

$$\frac{\pi}{۲}<\mathrm{Arc}\,cotg(-m)<\pi$$

$$\mathrm{Arc}\,tg(-m)=-\mathrm{Arc}\,tg(m)$$

و

$$\mathrm{Arc}\,cotg(-m)=\pi-\mathrm{Arc}\,cotg(m)$$

$$\lambda=\pi-(\mathrm{Arc}\,tg(m)+\mathrm{Arc}\,cotg(m))$$

$$=\pi-\frac{\pi}{۲}=\frac{\pi}{۲}$$

تمرینهای قسمت دوم

مجموعهٔ جواب x را چنان معین کنید که رابطه‌های زیر برقرار باشند:

۱. $x=\mathrm{Arc}\,sin\,(m)+\frac{۲\pi}{۳} \;,\; |m|\leqslant ۱$

۲. $۳x=۲\mathrm{Arc}\,cotg\,(q)-\frac{\pi}{۵}$

۳. $\omega=۲\mathrm{Arc}\,sec\,(۳x-۲) \;,\; ۰\leqslant\omega\leqslant\frac{۲\pi}{۳}$

۴. $\varphi=\mathrm{Arc}\,csc\,(\frac{۲-x}{x}) \;,\; \frac{-\pi}{۲}<\varphi<۰$

۵. $\lambda=\sqrt{\pi+۶\operatorname{Arc\,sin}x}$

۶. $\theta=\sqrt{\pi-۴\operatorname{Arc\,tg}۲x}$

۷. $\operatorname{Arc\,tg}x>\sqrt{۳}$

۸. $\operatorname{Arc\,cotg}(x)<۳$

۹. $\operatorname{Arc\,cos}(x)>۲$

۱۰. $-\frac{\pi}{۳}<\operatorname{Arc\,sin}x<۱$

۱۱. $\operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{۲-x}{۱+x}\right)\geqslant\frac{\pi}{۴}$

۱۲. $\frac{\pi}{۴}\leqslant\operatorname{Arc\,cotg}\left(\frac{۲x+۱}{۳x-۱}\right)\leqslant\frac{۳\pi}{۴}$

حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

۱۳.

$A=\cos\operatorname{Arc\,tg}\sin(\operatorname{Arc\,cotg}(-\sqrt{۷}))$

۱۴. $\alpha=\operatorname{Arc}\sin(\operatorname{Arc}tg(\frac{\sqrt{۳}}{۳}))$

$+\operatorname{Arc\,cos}(\operatorname{Arc}\cos(\frac{\sqrt{۳}}{۲}))$

۱۵. $B=\sin\operatorname{Arc\,sin}\cos\left(\frac{۱۱\pi}{۷}\right)$

۱۶. $C=\frac{\sqrt{۱-n^۲}}{\cos(\operatorname{Arc\,sin}n)}\ ,\ |n|\leqslant ۱$

راهنمایی و جواب تمرینهای قسمت دوم

۱. $\frac{\pi}{۶}\leqslant x\leqslant\frac{۷\pi}{۶}$ ۲. $\frac{-\pi}{۱۵}<x<\frac{۳\pi}{۵}$

۳. $x\geqslant\frac{۴}{۳}$ ۴. $x<۰$

۵. $\frac{-۱}{۲}\leqslant x\leqslant ۱$ ۶. $x\leqslant\frac{۱}{۲}$

۷. (رادیان) $\Longrightarrow \operatorname{Arc\,tg}x<\frac{\pi}{۲}<\sqrt{۳}$

مجموعهٔ جواب x تهی است

۸. $x>cotg(۳)$ (واحد کمان در $cotg(۳)$، رادیان است)

۹. $-۱\leqslant x<\cos(۲)$

۱۰. $\frac{-\sqrt{۳}}{۲}<x<\sin(۱)$

۱۱. $\frac{۲-x}{۱+x}\geqslant ۱ \Longrightarrow \frac{۱-۲x}{۱+x}\geqslant ۰ \Longrightarrow$

$-۱<x\leqslant\frac{۱}{۲}$

۱۲. $-۱\leqslant\frac{۲x+۱}{۳x-۱}\leqslant ۱ \Longrightarrow$

$\left(\frac{۲x+۱}{۳x-۱}\right)^۲\leqslant ۱ \Longrightarrow x\leqslant ۰$ یا $x\geqslant ۲$

۱۳. $\alpha=\operatorname{Arc\,cotg}(-\sqrt{۷})\ ,$

$\frac{\pi}{۲}<\alpha<\pi \Longrightarrow A=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$

۱۴. $\alpha=\operatorname{Arc}\sin(\frac{\pi}{۶})+\operatorname{Arc}\cos(\frac{\pi}{۶})=\frac{\pi}{۲}$

۱۵.

$\cos(\frac{۱۱\pi}{۷})=\cos(\frac{۳\pi}{۷})=\sin(\frac{\pi}{۲}-\frac{۳\pi}{۷})=\sin(\frac{\pi}{۱۴})$

$\Longrightarrow B=\sin\operatorname{Arc\,sin}(\frac{\pi}{۱۴}) \Longrightarrow B=\frac{\pi}{۱۴}$

۱۶.

$\alpha=\operatorname{Arc}\sin(n) \Longrightarrow \sin\alpha=n\ ,\ \frac{-\pi}{۲}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{۲}$

$\Longrightarrow \cos\alpha=\sqrt{۱-n^۲} \Longrightarrow C=۱$

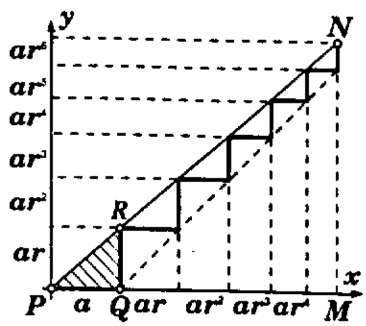
مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۵)

Mathematics Teachers: از

ترجمهٔ نغمه شریک‌زاده

تصور دکارتی

اگر سری هندسی با جملهٔ اول a و قدر نسبت r ($a>0$ ، $0<r<1$) را در دستگاه مختصات دکارتی نمایش دهیم (شکل ۱)، تساوی زیر از تشابه مثلثهای $\Delta PQR \sim \Delta PMN$ آشکار است.



شکل ۱

$$\frac{a}{ar}=\frac{a+ar+\ldots+ar^{n-1}}{ar+\ldots+ar^{n-1}+ar^{n}}$$

بنابراین در مورد مجموع:

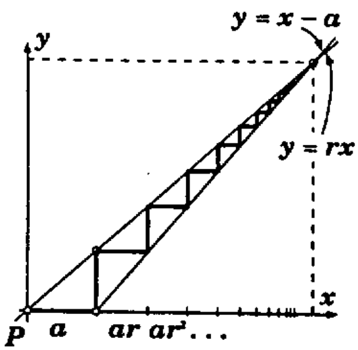
$$S_n=a+ar+\ldots+ar^{n-1}$$

داریم:

$$\frac{a}{ar}=\frac{S_n}{S_n-a+ar^{n}}$$

از این تساوی می‌توانیم تساوی زیر را محاسبه کنیم:

$$S_n=a.\frac{r^{n}-1}{r-1}$$



شکل ۲

در مورد سری هندسی نامتناهی داریم (شکل ۲):

$$a+ar+ar^{2}+\ldots=\frac{a}{1-r}$$

زیرا $a/(1-r)$ مختص x نقطهٔ تقاطع خطوط مستقیم $y=rx$ و $y=x-a$ است.

مفهومهای اصلی و اصل موضوعها در هندسهٔ فضایی

قسمت اوّل

● پرویز شهریاری

۱. ورود به مطلب

«جسم از همه به احساس نزدیکتر است، سپس سطح، بعدخط و سرآخر، دورتر از همهٔ اینها، نقطه. ولی به عقل چیزی نزدیکتر است که از بخشهای کمتری نسبت به دیگر چیزهای مشخص، تشکیل شده باشد؛ هرچیزی که ساده‌تر باشد، به عقل نزدیکتر است. به‌این ترتیب، به‌جایی می‌رسیم که دربارهٔ چیزی بیندیشیم که برای وجود آن، هیچ جزیی دخالت نکرده باشد. به این ترتیب، از لحاظ عقلی، در ردیفی که به دست می‌آید، نقطه در جای نخست قرارگرفته است، سپس خط، بعد سطح و درجای آخر جسم. باوجود این، وقتی که با یک دانش‌آموز سروکار داریم، از آن جاکه در سالهای نخست یادگیری، بیشتر به جانبی که محسوس باشد تمایل دارد، ردیفی را به کار می‌بریم که متناظر بااحساس است، ولی در تألیف یک اثر علمی، از ردیفی که عقلانی‌تر است، استفاده میکنیم. در نتیجه، آموزش از جسم محسوس و قابل لمس آغاز می‌شود، سپس این جسم از همهٔ آن چه که آن را محسوس می‌کند، جدا و منتزع می‌شود، بعد به سطح و خط و سرانجام به نقطه پرداخته می‌شود. بنابراین، بهتر این است که کار خود را، از احساس و در مسیر تجزیه آغاز کنیم تا به نقطه برسیم، سپس، به ردیفی بپردازیم که متناظر باعقل است، یعنی به ترکیب.»

ابونصر فارابی (۲۵۹ ـ ۳۳۹ ه. ق.)

امروز، نزدیک به یازده سده بعداز این مربی و روش شناس بزرگ ایرانی، آموزش هندسه، براساس همین اصل آموزشی فارابی قرار دارد. ما در سالهای پیش‌از دبیرستان، با بسیاری از جسمهای هندسی (مثل مکعب، مکعب مستطیل، هرم، منشور، کره) آشنا می‌شویم ولی برای آن که با مفهومها، تعریفها و اصل موضوعهای هندسهٔ فضایی، به‌صورتی دقیق و منظم، آشنا شویم، کار با بسیاری از این جسمها را فرامی‌گیریم: (محاسبهٔ حجم، مساحت، سطح جانبی، ...). اگر به‌تاریخ ریاضیات هم مراجعه کنیم، متوجه می‌شویم که بشر هم، به همین ترتیب، به آگاهیهای هندسی دست یافته‌است و، البته در این راه، طبیعت و نیازهای زندگی، راهنما و انگیزه کار او بوده‌است. لازم بود برای ادامهٔ زندگی، میزان محصول کشاورزی برآورد شود و انبارهای مناسب برای ذخیرهٔ آنها ساخته شود، ولی برای این منظور، باید بتوان حجم انبارها را ارزیابی کرد و، برای ساختن آنها، مقدار مصالحی را که لازم است، فراهم آورد. در مرحله‌های بعدی، بازرگانی و کشتیرانی، نیازهای محاسبه‌ای تازه‌ای را مطرح کرد و، در کنار آن، ساختن معبدها، قلعه‌ها و کاخهای بزرگ، مهندسان و معمارانی را می‌طلبید که در کار محاسبه و شناخت جسمهای هندسی، آگاه‌تر و داناتر باشند. حتی در شرایط امروزی هم که ریاضیات بی‌اندازه پیش رفته است، نیاز، انگیزهٔ پیشرفت ریاضیات و ریاضیات وسیله‌ای برای حل دشواریهای دانشهای دیگر است. وقتی که فدوروف برای تعیین انواع بلورهای ممکن مطالعه می‌کرد، ناچار شد، ابتدا بلورشناسی را کنار بگذارد و به بررسی جسمهای هندسی متقارن

بپردازد. او در هندسه، و بدون رابطه با بلورشناسی، همهٔ گونه‌های جسمهای متقارن را پیدا کرد. مسالهٔ فدوروف ۲۳۰ جواب داشت و اینها همان‌گونه‌های ممکن بلورها بودند.

باهمهٔ اینهاباید اعتراف کنیم که، اغلب ما، نخستین درسهای هندسهٔ فضایی رادر دبیرستان (جایی که به قول فارابی، باید هندسه را به شیوهٔ عقلانی یادگرفت)، با دشواری آغاز می‌کنیم، و این، ناشی از دو علت است: اول بغرنجی خود هندسهٔ فضایی که نیاز به تجسم دارد، باید شکلهای فضایی را روی صفحه رسم کرد، باید بتوان در روی شکلی که رسم شده است، بخش قابل دیدن راکه روبروی ماست، از بخش پنهانی که در «پشت» جسم قرار دارد، تشخیص داد، باید خطهای راستی راکه بازاویهٔ حاده یا منفرجه به هم رسیده‌اند، قائمه به حساب آورد و بسیاری چیزهای دیگر. ولی اشکال دوم، به نحوهٔ برخورد ما با هندسهٔ فضایی مربوط می‌شود. در کتابهای درسی، برای درک مفهومهای اصل هندسهٔ فضایی و اصل موضوعهای آن، تلاش اندکی شده است که، در مقایسه با هندسهٔ روی صفحه، بسیار ناقص است. البته، این وضع، کاملاً طبیعی است، چراکه صفحه‌های محدود کتابهای درسی و ساعتهای محدودی که برای تدریس آنها درنظر گرفته‌شده‌است، فرصتی برای طرح این موضوعها، به‌نحوی که شایسته باشد، به‌دست نمی‌دهد.

این مقاله، برای دانش‌آموزان علاقه‌مندی تهیه شده‌است که می‌خواهند، این کمبود را، جبران کنند و در تصورهای فضایی و در رسم شکلهای فضایی مهارت بیشتری به‌دست آورند. متن را با دقت بخوانید، به پرسشها، با دقت پاسخ دهید و مسأله‌ها را به‌طور کامل و تا آخر حل‌کنید. شکلها را روشن و دقیق رسم‌کنید؛ خطهای راستی راکه درمیدان دیدشما قرارداوند، از خطهای راستی که درپشت شکل پنهان شده‌اند، جداکنید (بهتراست، خطهای راست پنهان را، نقطه چین رسم کنید)؛ مسأله‌های نمونه حل شده‌اند، هم به حل و هم به شکلها توجه کنید؛ به یاد داشته باشید که رسم درست شکل، کار شما را در استدلال و در حل مسأله ساده می‌کند. در ضمن، این مقاله می‌تواند به دبیران هندسه هم کمک کند تا درس خود را بر مبنای مستحکمتر و علمیتری قرار دهند.

۲. مفهومهای اصلی و اصل موضوعهای هندسهٔ فضایی

۱. در هندسهٔ دبیرستانی، چهار مفهوم اساسی مورد استفاده قرار می‌گیرد که تعریفی برای آنها نیامده است: **نقطه**، **خط راست**، **صفحه**، **فاصلهٔ بین دو نقطه**. گاهی هم، **مفهومهایی از مجموعه‌ها**، به‌عنوان مبانی ریاضیات عمومی، به یاری طلبیده می‌شود. بقیهٔ مفهومهای هندسی، همراه با تعریف‌اند. در هندسهٔ دبیرستانی، دربارهٔ شکل، کم و بیش، به این صورت گفته می‌شود: هرمجموعه‌ای از نقطه‌ها را شکل گویند. خط راست و صفحه، نمونه‌هایی از شکل هستند که، تصور آنها، برای همهٔ ما روشن است.

مجموعهٔ همهٔ نقطه‌هایی که در هندسهٔ فضایی مورداستفاده‌اند، معمولاً فضا نامیده می‌شود. هرشکلی ـ و مثلاً خط راست یاصفحه ـ زیر مجموعه‌ای است از فضا. هر صفحه‌ای در فضا جا می‌گیرد، ولی نمی‌تواند برآن منطبق شود. هرخط راستی در صفحه جامی‌گیرد، ولی نمی‌تواند تمامی صفحه‌را پرکند.

۲. در هندسهٔ دبیرستانی، بسیاری از اصل موضوعها آمده است؛ مثلاً اصل موضوع مربوط به خط راست (از هر دونقطه، یک و تنها یک خط راست می‌گذرد) و همچنین، اصل موضوعهای مربوط به فاصله.

اکنون فرض می‌کنیم، همهٔ اصل موضوعهای هندسهٔ مسطحه، برای هر صفحه‌ای از فضا برقرار باشد. این توافق به ما امکان می‌دهد، همهٔ قضیه‌های هندسهٔ مسطحه را تنظیم کنیم و آنها را، برای هر صفحه‌ای از فضا به‌کار بریم. ولی بجز اصل موضوعهای هندسهٔ مسطحه، به اصل موضوعهای تازه‌ای، برای بیان ویژگیهای اصلی صفحه، نیاز داریم.

اصل موضوع ۱. از هر سه نقطه‌ای که روی یک خط راست نباشند، می‌توان یک صفحه، و تنها یک صفحه، عبور داد (اصل موضوع صفحه).

این اصل موضوع را می‌توان به کمک سه میلهٔ نوک تیز قائم و یک مقوا مجسم کرد. صفحه‌ای را که از سه نقطهٔ A، B و C گذشته باشد [$C \notin (AB)$]، بانماد (ABC) نشان می‌دهند.

اصل موضوع ۲. خط راستی که از دو نقطهٔ واقع برصفحه بگذرد، براین صفحه قرار دارد (اصل موضوع خط راست و صفحه).

اگر خط راست a برصفحهٔ α منطبق باشد، بانماد $a \subset \alpha$ نشان داده‌می‌شود.

اصل موضوع خط راست وصفحه، به ما امکان می‌دهد تا، در عمل، بتوانیم مسطح بودن سطح هر فراورده‌ای را مورد تحقیق قرار دهیم. لبهٔ خط کش دقیقی را، درجهتهای مختلف، روی سطح فراوردهٔ موردنظر قرار می‌دهیم و تحقیق می‌کنیم، آیا موردی پیدا می‌شود که بین لبهٔ خط کش و سطح، روزنه‌ای وجود داشته باشد!

خط راست می‌تواند تنها یک نقطهٔ مشترک با صفحه داشته‌باشد. وضع، برای هر خط راستی که شامل نقطه‌ای از صفحه و نقطه‌ای در بیرون صفحه باشد، چنین است. در این حالت گویند، خط راست صفحه را قطع کرده است.

اصل موضوع ۳. اگر دو صفحهٔ مختلف در نقطه‌ای مشترک باشند، آن وقت دریک خط راست مشترک خواهند بود (اصل موضوع برخورد دو صفحه).

دو صفحه‌ای راکه دریک خط راست مشترک باشند، صفحه‌های متقاطع گویند. به‌عنوان نمونه‌ای از دو صفحهٔ متقاطع، می‌توان دو دیوار مجاور اطاق را درنظر گرفت.

اصل موضوعها، ویژگیهای اصلی فضای فیزیکی را منعکس می‌کنند. این ویژگیها را، بشر، درطول هزاران سال مشاهده کرده است. بنابراین، هندسهٔ فضایی دبیرستانی، برپایهٔ تجربهٔ زندگی انسانها قرار دارد و به همین مناسبت، نتیجه گیریهای هندسهٔ فضایی کاربرد گسترده‌ای در عمل پیدا می‌کنند.

پرسشها و مسأله‌ها

۱. کدام‌یک از این شکلها، صفحه یا بخشی از یک صفحه‌اند: ۱) دایره، ۲) مربع، ۳) مکعب، ۴) کره، ۵) متوازی‌الاضلاع، ۶) متوازی‌السطوح، ۷) مکعب مستطیل، ۸) خط شکسته، ۹) زاویه، ۱۰) اجتماعی از سه نیم خط راست با مبداء مشترک.

۲. مفهومهای تازه‌ای از هندسه را نام ببرید که بتوان آنها را تعریف کرد. این تعریفها را تنظیم کنید.

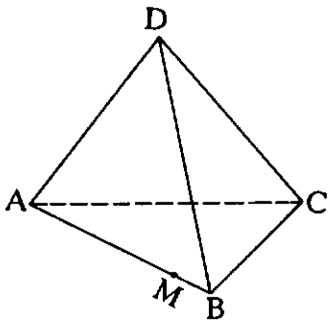
۳. برای تعریف ۱) دایره، ۲) خط شکسته، ۳) نیم خط راست و ۴) خطهای راست موازی، از کدام مفهومهای اصلی هندسه استفاده می‌شود؟

۴. این گزاره‌ها را بااستفاده از نمادهای $\in$ و $\notin$ بنویسید: ۱) نقطهٔ M به صفحهٔ α تعلق دارد؛ ۲) نقطهٔ B به صفحهٔ α تعلق ندارد؛ ۳) صفحهٔ β از نقطهٔ P می‌گذرد؛ ۴) صفحهٔ β از نقطهٔ Q نمی‌گذرد؛ ۵) خط راست a ازنقطهٔ A می‌گذرد؛ ۶) خطهای راست a و b، از نقطهٔ C می‌گذرند.

۵. ۱) صفحهٔ α و متوازی‌الاضلاع ABCD مفروض‌اند. آیا ممکن است صفحهٔ α، تنها از سه رأس متوازی‌الاضلاع بگذرد؟ ۲) دو نقطه از محیط دایره و مرکز آن، برصفحه‌ای قرار دارند، آیا درست است بگوییم: هر نقطه‌ای از محیط دایره برصفحه واقع است؟

۶. ۱) آیا از چهار نقطهٔ دلخواه فضا، می‌توان صفحه‌ای گذراند؟ ۲) چرا تکیه گاه دوربین عکاسی را، سه پایه می‌سازند، نه دو پایه یا چهارپایه؟

۷. در شکل ۱، هرمی با قاعدهٔ مثلثی داده شده است (یک چهار وجهی) با استفاده از نام رأسها، وجه‌های آن را چگونه نشان دهیم؟



شکل ۱

۸. با دراختیار داشتن یک صفحهٔ واقعی، چگونه می‌توان کیفیت یک خط کش را تحقیق کرد؟ این تحقیق برچه اساسی است؟

۹. نقطهٔ M روی پاره‌خط راست AB از چهار وجهی ABCD (شکل ۱) داده‌شده است. بااستفاده از نمادهای $\subset$ و $\not\subset$ نشان دهید: ۱) خط راست AB متعلق به صفحهٔ ABC است، ۲) خط راست CM بر صفحهٔ ABC است، ۳) خط راست DM روی صفحهٔ ABC نیست.

۱۰. فصل مشترک صفحه‌هایی را نام ببرید که از وجه‌های چهاروجهی ABCD (شکل ۱) می‌گذرند. صفحه‌ای که از نقطه‌های C ، D و M می‌گذرد، از کدام وجه چهار وجهی می‌گذرد؟ آن را چگونه نشان می‌دهند؟ فصل مشترک این صفحه‌را، باوجه‌های دیگر چهاروجهی مشخص کنید.

۱۱. دو صفحهٔ α و β که برهم منطبق نیستند، از نقطه‌های A و B می‌گذرند. ثابت کنید: $\alpha \cap \beta = (AB)$.

۱۲. در چهاروجهی ABCD ، نقطه‌های $M\in[AB]$ و $N\in[AD]$ را درنظر می‌گیریم. مطلوب است فصل مشترک صفحه‌های: ۱) ABD و CMN ، ۲) CMN و ABC ، ۳) CMN و ADC.

۱۳. مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ را روی یک صفحه نشان دهید و دو نقطهٔ دلخواه M و N را، در درون وجه ABCD انتخاب کنید. فصل مشترک این صفحه‌ها را مشخص کنید: ۱) ABC و A_1MN ؛ ۲) B_1MN و BCC_1 ؛ ۳) C_1MN و CC_1D.

۱۴. ۱) با چه‌شرطی، دوصفحهٔ MAB و MDC متقاطع‌اند؟ ۲) فصل مشترک صفحه‌های ABD و ACD کدام است؟

۳. نتیجه‌های حاصل از اصل موضوعها

برخی نتیجه‌های حاصل از این اصل موضوعها را ثابت می‌کنیم. این نتیجه‌ها، برای اثبات قضیه‌ها و حل مسأله‌ها، اهمیت زیادی دارند.

نتیجهٔ ۱. از یک خط‌راست و نقطه‌ای که متعلق به آن نیست، همیشه می‌توان یک صفحه، و تنها یک صفحه، عبور داد.

اثبات. خط‌راست a و نقطه M ، واقع در بیرون آن را درنظر می‌گیریم. دونقطهٔ B و C را روی خط راست a انتخاب می‌کنیم. ازنقطه‌های M ، B و C صفحه‌ای می‌گذرانیم (اصل موضوع صفحه)؛ درضمن، خط راست a ، روی این صفحه‌است (اصل موضوع خط راست و صفحه). به این ترتیب، وجود صفحه‌ای که از a و M می‌گذرد، روشن شد. این صفحه را α می‌نامیم و ثابت می‌کنیم، منحصر به فرد است. در واقع، هرصفحه‌ای که از خط راست a و نقطه M بگذرد، باید شامل نقطه‌های B و C و M باشد. ولی از این سه نقطه، بیش از یک صفحه عبور نمی‌کند (اصل موضوع صفحه).

نتیجهٔ ۲. از دو خط راست متقاطع، می‌توان یک صفحه، و تنها یک صفحه، عبور داد.

اثبات. این نتیجه، کاملاً شبیه اثبات نتیجهٔ ۱ است. خودتان این اثبات را توضیح دهید.

پیش‌از آن‌که به نتیجهٔ دیگری بپردازیم، آنچه را دربارهٔ خطهای راست موازی، درهندسهٔ مسطحه خوانده‌ایم، به یاد بیاورید، چرا که، برای مطالعهٔ درس «توازی در فضا» اهمیت دارد. تعریفی که برای خطهای راست موازی در هندسهٔ مسطحه دیده‌ایم، در هندسهٔ فضایی هم به قوت خودباقی است: **دو خط راست a و b را موازی گوییم، وقتی که دریک صفحه باشند، نقطهٔ مشترکی نداشته باشند و برهم منطبق نباشند.** در هندسهٔ مسطحه، بااصل موضوع توازی آشنا شده‌ایم: **از هر نقطهٔ صفحه، نمی‌توان بیش‌از یک خط راست، موازی با خط راست مفروض رسم کرد.** اصل موضوع توازی، برای هر صفحه‌ای از فضا درست است.

نتیجهٔ ۳. از دوخط راست‌موازی، می‌توان یک صفحهٔ منحصر به فرد عبور داد.

اثبات. وجود صفحه، نتیجه‌ای است از تعریف خطهای راست موازی. اکنون فرض می‌کنیم، از این دو خط راست، صفحهٔ دیگری هم گذشته‌باشد. روی یکی از آنها، نقطه‌های A و B ، و روی دیگری نقطهٔ C را درنظر می‌گیریم؛ معلوم می‌شود که از سه نقطهٔ A

و B و C ، دو صفحه گذشته است؛ ولی این، اصل موضوع صفحه را نقض می‌کند.

مسأله. ثابت کنید، از هر نقطهٔ فضا، می‌توان تنها یک خط راست، موازی با خط راست مفروض رسم کرد.

حل. خط راست a و نقطهٔ M را درنظر می‌گیریم. دو حالت پیش می‌آید: الف) $M \notin a$. خط راست مجهول باید روی صفحهٔ α، شامل خط راست a و نقطهٔ M، باشد. باتوجه به نتیجهٔ ۱، صفحهٔ α وجود دارد و منحصر به فرد است. از هندسهٔ مسطحه می‌دانیم، در این صفحه، تنها یک خط راست b وجود دارد که از M می‌گذرد و با خط راست a موازی است. ب) $M \in a$. در این حالت، تنها خط راستی که از M بگذرد و با a موازی باشد، خود خط راست a است.

پرسشها و مسأله‌ها

۱۵. نقطهٔ M روی [AB] از چهار وجهی ABCD قرار دارد. چند صفحه می‌توان عبور داد: ۱) از (DC) و M ؛ ۲) از (AB) و M ؟

۱۶. چهار وجهی ABCD را رسم کنید و خط راست a را طوری درنظر بگیرید که یالهای AD و CD را قطع کند. فصل مشترک صفحه‌ای را که از خط راست a و نقطهٔ B گذشته‌است: ۱) با (ABD)؛ ۲) با (BCD) پیدا کنید.

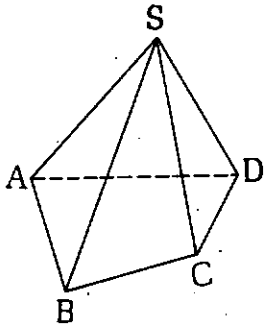
۱۷. خط راست a و نقطهٔ M مفروض‌اند. چند صفحه می‌توان از این خط راست و نقطه گذراند؟

۱۸. ۱) چهار نقطه داده‌شده‌اند که بر صفحه واقع نیستند. ثابت کنید، نمی‌توان بین این چهار نقطه، سه نقطه پیدا کرد که بر یک خط راست واقع باشند؛ ۲) آیا عکس این حکم درست است؟

۱۹. دو خط راست داده‌شده‌اند که در نقطهٔ O یکدیگر را قطع کرده‌اند. ۱) ثابت کنید، هرخط راستی که این دو خط راست را قطع کند و از نقطهٔ O نگذرد، بااین دو خط راست دریک صفحه قرار دارد؛ ۲) آیا اگر جملهٔ «از نقطهٔ O نگذرد» را حذف کنیم، بازهم به گزارهٔ درستی می‌رسیم؟

۲۰. مجموعه‌ای از نیم خطهای راست، که آغازی مشترک دارند، در اختیار داریم و می‌دانیم هیچ سه نیم خطی روی یک صفحه نیستند. چند صفحه می‌توان رسم کرد، به نحوی که هرکدام از آنها، شامل دونیم خط راست باشند. به شرطی که تعداد نیم خطهای راست ۱) ۳، ۲) ۴، ۳) n باشد؟

۲۱. هرم SABCD را، باقاعدهٔ چهارضلعی رسم کنید (شکل ۲). ۱) فصل مشترک قاعدهٔ ABCD را با صفحه‌هایی پیدا کنید که از SA و SC ، یا از SB و SD می‌گذرند، ۲) فصل مشترک دو صفحهٔ اخیر را پیدا کنید.



شکل ۲

۲۲. ۱) خط شکستهٔ ABCD داده شده است؛ درضمن $M = (BD) \cap (AC)$. ثابت کنید، این خط شکسته، شکلی مسطحه است؛ ۲) نجاری می‌خواهد به کمک دو نخ تحقیق کند، آیا میز چهار پایه‌ای را که ساخته است، روی کف اطاق، استوار می‌ایستد یا نه؟ چگونه؟

۲۳. دو خط راست موازی و مختلف داده‌شده‌اند. ثابت کنید، همهٔ خطهای راستی که هر دو خط راست مفروض را قطع کرده‌اند، روی یک صفحه قرار دارند.

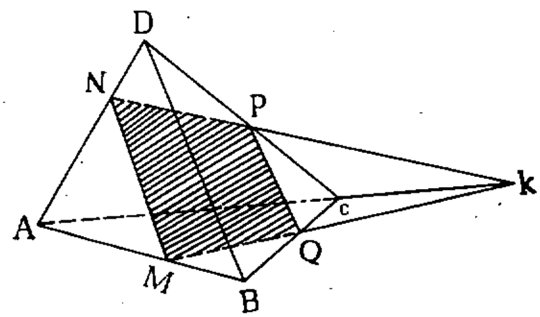
۴. ساختن مقطع چندوجهیها و حل مسأله‌های مربوط به آنها

تصور چندوجهی را در هندسهٔ دبیرستانی، به‌عنوان یک جسم هندسی که سطح آن به‌وسیلهٔ چند ضلعیها پوشیده‌شده باشد، به‌دست آورده‌اید. فصل مشترک یک چندوجهی، و مثلاً چهار وجهی ABCD (شکل ۱) را، باصفحهٔ α درنظر می‌گیریم؛ این فصل

مشترک، ممکن است مجموعه‌ای تهی، یک نقطه، یک خط راست و یا یک چند ضلعی باشد. اگر فصل مشترک چندوجهی باصفحه، یک چند ضلعی باشد، این چند ضلعی را، **مقطع چندوجهی** گویند. در این جا، دومسأله‌ای را که به ساختن مقطع یک چندوجهی بایک صفحه مربوط می‌شوند، حل کرده‌ایم. اصطلاح «ساختن»، در این جا هم، به همان معنایی است که در هندسهٔ مسطحه به کار می‌رود. «ساختن» یا «رسم» باید تنها به کمک خط کش و پرگار انجام گیرد.

مسألهٔ ۱. روی یالهای AB ، AD و CD از چهاروجهی $ABCD$ (شکل ۳)، به ترتیب، نقطه‌های M ، N و P را انتخاب کرده‌ایم، به‌نحوی که خطهای راست NP و AC باهم موازی نباشند. مقطع چهار وجهی را با صفحه‌ای پیدا کنید که از این نقطه‌ها می‌گذرد.

حل. صفحه‌ای را که از نقطه‌های M ، N و P می‌گذرد، α می‌نامیم. برای ساختن مقطع، کافی است فصل مشترک صفحهٔ α را با وجه‌های چهاروجهی پیدا کنیم. از اصل موضوع برخورد دو صفحه و اصل موضوع خط راست و صفحه استفاده می‌کنیم، در این صورت، پیدا کردن فصل مشترک یک وجه با صفحهٔ α، منجربه پیدا کردن دو نقطه‌ای می‌شود که هم به صفحهٔ α و هم به‌صفحهٔ این وجه تعلق داشته‌باشند. باتوجه به این نکته، پاره‌خط راست NP، فصل مشترک‌وجه DAC باصفحه α و، همچنین، پاره‌خط راست MN، فصل مشترک صفحهٔ α باوجه ABD را رسم می‌کنیم. ولی در صفحهٔ ABC، تنها نقطهٔ M را می‌شناسیم که به‌صفحهٔ α تعلق دارد. نقطهٔ دوم، عبارت است از نقطهٔ K که در محل برخورد خطهای



شکل ۳

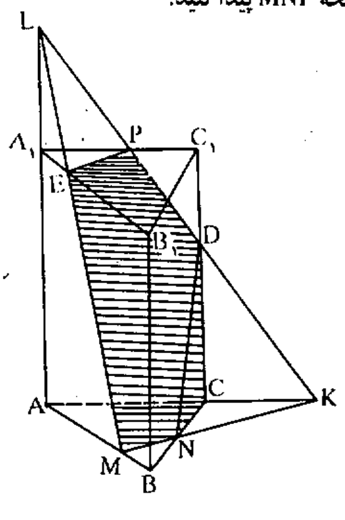
راست NP و AC قرار دارد؛ از این دوخط راست، NP روی صفحهٔ α و AC روی صفحهٔ ABC است (هر دو خط راست، متعلق به‌صفحهٔ ABC هستند و، بنا به شرط مسأله، باهم موازی نیستند). بارسم خط راست MK، نقطهٔ Q، برخورد آن را با یال BC پیدا می‌کنیم. به این ترتیب، Q رأس چهارم مقطع مجهول $MNPQ$ است.

صورت مسأله و حل آن را به‌صورت نمادی تنظیم می‌کنیم.

می‌دانیم: $\Phi = ABCD$ یک چهار وجهی است و $M\in[AB]$، $N \in [AD]$، $P \in [CD]$ و $(NP)\not\parallel(AC)$. مطلوب است: $\Phi \cap (MNP)$:

حل. ۱) $[NP]$ ؛ ۲) $[MN]$ ؛ ۳) $K = (NP) \cap (AC)$ ؛ ۴) $Q = (MK) \cap (BC)$ ؛ ۵) $[PQ]$ ؛ چهارضلعی $MNPQ$ مقطع مجهول است.

مسألهٔ ۲. روی یالهای AB ، BC و A_1C_1 از منشور قائم $ABCA_1B_1C_1$ (شکل ۴)، به‌ترتیب، نقطه‌های M ، N و P داده شده است: درضمن، خط راست MN باخط راست AC موازی نیست. مقطع منشور را باصفحهٔ MNP پیدا کنید.



شکل ۴

بخشی از راه حل مسأله را نمی‌آوریم، زیرا هیچ اختلافی با حل

مسألهٔ ۱ ندارد. $\alpha = (MNP)$ می‌گیریم. فصل مشترک α با وجه ABC عبارت است از پاره‌خط راست MN. نقطهٔ P روی صفحهٔ α و روی صفحهٔ وجه ACC_1A_1 است. همین دوصفحه، در نقطهٔ K، محل برخورد خطهای راست MN و AC، به‌هم می‌رسند. با رسم خط‌راست KP، نقطه‌های

$$D = (KP) \cap (CC_1)\ ,\ L = (KP) \cap (AA_1)$$

به‌دست می‌آید. نقطهٔ E، محل برخوردخط راست LM ویال A_1B_1 است. پنج ضلعی MNDPE، مقطع مجهول است.

پرسشها و مسأله‌ها

۲۴. تعداد ضلعهای مقطع ۱) چهار وجهی، ۲) منشور با قاعدهٔ مثلثی، چه‌عددی می‌تواند باشد؟

۲۵. چهاروجهی ABCD داده‌شده‌است. می‌خواهیم مقطع آن را باصفحه‌ای پیداکنیم که از نقطه‌های ۱) $M \in [AB]$، $N \in [BC]$، $P \in [BD]$؛ ۲) B، D، $Q \in [AC]$؛ ۳) $R \in [DC]$، $N \in [BC]$، $Q \in [AC]$ گذشته است.

۲۶. ۱) مقطع چهاروجهی ABCD را باصفحه‌ای که از نقطه‌های B، $M \in [AD]$ و $N \in [DC]$ می‌گذرد، پیداکنید؛ ۲) مساحت این مقطع را به‌دست آورید، به‌شرطی که طول هریک از یالهای چند وجهی برابر a و نقطه‌های M و N در وسط یالهای متناظر باشند.

۲۷. ۱) مقطع چهاروجهی ABCD را باصفحه‌ای که از یال DC و نقطهٔ M واقع در درون وجه ABC می‌گذرد، پیداکنید؛ ۲) مساحت این مقطع را محاسبه کنید، به‌شرطی که هر یال چهار وجهی برابر a باشد و (CM) از وسط [AB] بگذرد.

۲۸. چهاروجهی ABCD مفروض است. مقطع آن را با صفحه‌ای پیدا کنید که از خط راست DD_1 و نقطهٔ M واقع در درون وجه ADC گذشته است (D_1، نقطه‌ای از یال DC است).

۲۹. صفحهٔ α به‌وسیلهٔ سه نقطه‌ای که، به ترتیب، روی یالهای DA، DB و DC از چهاروجهی ABCD قرار دارند، مشخص‌شده‌است. اگر M نقطه‌ای در درون وجه ABC باشد، نقطهٔ برخورد صفحهٔ α را باخط راست DM پیدا کنید.

۳۰. منشور قائم $ABCA_1B_1C_1$ مفروض است. مقطع این منشور را باصفحه‌ای که از رأس B و نقطه‌های M و N، به ترتیب، متعلق به یالهای A_1B_1 و CC_1 می‌گذرد، پیدا کنید.

۳۱. مطلوب‌است مقطع‌منشورقائم $ABCA_1B_1C_1$، باصفحهٔ MNP، به‌شرطی‌که $M\in[AA_1]$، $N\in[BB_1]$، $P\in[A_1C_1]$.

۳۲. ۱) مقطع منشور قائم $ABCA_1B_1C_1$ را با صفحه‌ای پیدا کنید که از خط راست AB و نقطهٔ K واقع در درون پاره‌خط راست AC گذشته‌است؛ ۲) محیط و مساحت این مقطع را پیدا کنید، به‌شرطی که طول هر یال منشور برابر a باشد.

۳۳. صفحهٔ α به‌وسیلهٔ نقطه‌های M، N و P، به‌ترتیب، متعلق به یالهای AA_1، BB_1 و CC_1 از منشور قائم $ABCA_1B_1C_1$ مشخص شده‌است. نقطهٔ L، در درون وجه $A_1B_1C_1$ است. نقطهٔ برخورد صفحهٔ α را با خط راست CL پیدا کنید.

ادامه دارد...

ادب و ریاضی

ما در عصری زندگی می‌کنیم که سرعت تغییر چنان است که شاید هرگز به این بزرگی نبوده است. ما چگونه جوانان را برای این سرعت تغییر آماده کنیم؟ چگونه مراقبت کنیم که بیش از حد «متخصص» نشوند، و در مسیر خود، در شیاری نیفتند که از آن بیرون نتوانند آمد؟ من همیشه این گفته را پسندیده‌ام که چنین شیاری در حکم گوری است، اما درازتر؛ آماده بودن برای تبعیت از دگرگونیها خیلی اهمیّت دارد.

فرض و اسطوره در فیزیک نظری. هرمان باندی
رضا منصوری. احمد بیرشک

طرح و حل مسائل اساسی ریـاضی

بـه روشهای مقدماتی (۵)

یک مسأله مشهور هندسه

از :

100 Great Problems of Elementary Mathematics

By Heinrich Dörrie

« مسألهٔ مالفاتی »

رسم سه دایره در مثلثی معلوم، چنان‌که هریک از آنها به دو دایرهٔ دیگر و دوضلع مثلث مماس باشد.

مسألـهٔ مشهور فـوق تـوسط **مالفاتی** « Malfatti » (۱۷۳۱ ـ ۱۸۰۷) ریاضی‌دان ایتالیایی درسال ۱۸۰۳ مطرح و در جلد دهم

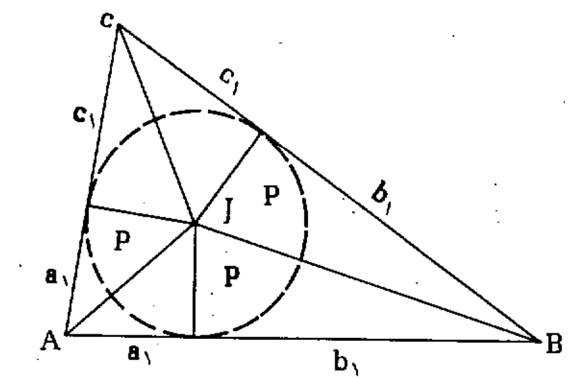
Memorie di Matematica e di Fisica della Societá italiana delle Scienze

حل‌شده. راه‌حل جبری ـ هندسی مزبور را، فی‌المثل، می‌توان در جلد ۱۲۳

Ostwald's *Klassiker der exakten Wisse-nschaften*

یافت. راه‌حل صرفاً هندسی مسألهٔ مالفاتی که توسط **یاکوب اشتاینر** «Steiner Jakob» درسال ۱۸۲۶ بدون اثبات ارائـه شد، نیز درآن‌جا توصیف و اثبات شده است. در اینجا منحصراً بـه شرح راه‌حل کاملاً ساده‌ای که توسط **شل باخ** Schellbach در جلـد ۴۵ « *Crelle's Journal* » بـه چـاپ رسیده، می‌پردازیم.

فرض می‌کنیم ABC مثلث مفروض با اضلاع a، b، c، محیط 2s و زوایای α، β، γ، باشد. فرض می‌کنیم دوایـر مالفاتی مورد جستجو (کـه بـه اضلاع زوایـای α، β، γ مماس‌اند) B، D، R، مراکزشان P، Q، R واشعه‌شان p، q، r باشند. فرض می‌کنیم مماسهای از زوایای A، B، C به B، D، R به ترتیب u، v، w باشند.



Z، دایرهٔ محاط در مثلث موردبحث‌را درنظرمی گیریم. فرض می‌کنیم مرکز آن J وشعاع آن ρ بـاشد، و مماسهای از زوایای A، B، C برآن به ترتیب a_1، b_1، c_1 باشند. از سه تساوی :

$$b_1+c_1=a \quad c_1+a_1=b,\ a_1+b_1=c$$

مقادیر

$$a_1=s-a \quad b_1=s-b\ ,\ c_1=s-c$$

را به دست می‌آوریم.

از آن‌جا که نقاط P و J بر نیمساز زاویهٔ α واقعند، از قضیهٔ مربوط به شعاع نتیجه می‌شود که:

$$p/\rho = u/a_1 \quad \text{یا} \quad p=\frac{\rho}{a_1}u$$

به همین ترتیب $q=\frac{\rho}{b_1}v$ را به دست می‌آوریم.

نقاط تماس B و D با AB را U و V می‌نامیم و

$$UV=t$$

را محاسبه می‌کنیم. از آن‌جا که PF، عمود وارد از P بر QV، برابر t است، از مثلث قائم‌الزاویهٔ PQF نتیجه می‌شود که:

$$PQ^2=PF^2+FQ^2$$

یا

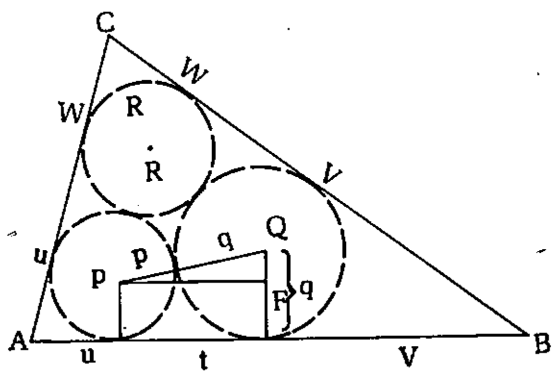
$$(p+q)^2=t^2+(p-q)^2$$

و از آن:

$$UV=t=2\sqrt{pq}$$

دراین‌صورت اگرمقادیری‌راکه درفوق برای p و q به دست آوردیم، دراین‌جا قراردهیم، خواهیم داشت:

$$t=2\sqrt{uv}\sqrt{\frac{\rho^2}{a_1b_1}}$$



اما می‌دانیم که:

$$\rho^2=a_1b_1c_1/s$$

این رابطه مقدار t را به صورت زیرساده می‌کند:

$$UV=t=2\sqrt{\frac{c_1}{s}}\sqrt{uv}$$

ازآن‌جاکه ضلع AB از مثلث موردبحث از سه‌پاره‌خط AU، BV، و UV ترکیب شده است، معادلهٔ زیر را به دست می‌آوریم:

$$u+v+2\sqrt{\frac{c_1}{s}}\sqrt{uv}=c$$

به همین‌طریق در مورد BC و CA، دو ضلع دیگر مثلث، به دست می‌آوریم:

$$v+w+2\sqrt{\frac{a_1}{s}}\sqrt{vw}=a$$

و

$$w+u+2\sqrt{\frac{b_1}{s}}\sqrt{wu}=b$$

با درنظر گرفتن نیم محیط مثلث بـه عنوان واحد طول، روابط به گونه‌ای ساده‌تر زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} v+w+2\sqrt{a_1}\sqrt{vw}=a \\ w+u+2\sqrt{b_1}\sqrt{wu}=b \\ u+v+2\sqrt{c_1}\sqrt{uv}=c \end{cases} \qquad (1)$$

اکنون کسرهای سرهٔ a، b، c، u، v، w را به‌صورت مربعات سینوسهای شش‌زاویهٔ‌حادهٔ λ، μ، ν، ψ، φ، χ در نظرمی گیریم:

$$\sin^2\lambda=a\ ,\quad \sin^2\mu=b\ ,\quad \sin^2\nu=c\ ,$$

$$\sin^2\psi=u\ ,\quad \sin^2\varphi=v\ ,\quad \sin^2\chi=w$$

دراین‌صورت (ازآن‌جاکه $a+a_1=s=1$، $b+b_1=1$، $c+c_1=1$) نیز:

$$\cos^2\lambda=a_1\ ,\quad \cos^2\mu=b_1\ ,\quad \cos^2\nu=c_1$$

و سه معادلهٔ به دست آمدهٔ (۱)، به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\begin{cases}\sin^2\varphi+\sin^2\chi+2\sin\varphi\sin\chi\cos\lambda=\sin^2\lambda\\ \sin^2\chi+\sin^2\psi+2\sin\chi\sin\psi\cos\mu=\sin^2\mu\\ \sin^2\psi+\sin^2\varphi+2\sin\psi\sin\varphi\cos\nu=\sin^2\nu\end{cases}$$

اکنون، بـه عنوان مثال، اولین این معادله‌ها را مورد بـررسی قرار می‌دهیم! این معادله چیزی جزعبارت مثلثاتی رابطهٔ معروف ($\varphi+\chi=\lambda$) بین زوایای φ و χ ی دو رأس یك مثلث و λ، زاویهٔ خارجی رأس سوم آن نیست. اگر، فی‌المثل، چنین مثلثی را با دایرهٔ محیطی به قطر ۱ درنظر بگیریم، در این صورت سه ضلع آن $\sin\varphi$، $\sin\chi$، $\sin\lambda$ می‌باشند، وقضیهٔ کسینوسها رابطهٔ زیر را به دست می‌دهد:

$$\sin^2\lambda=\sin^2\varphi+\sin^2\chi+2\sin\varphi\sin\chi\cos\lambda$$

دراین صورت از (۲) نتیجه می‌شود که:

$$\varphi+\chi=\lambda\ ,\quad \chi+\psi=\mu\ ,\quad \psi+\varphi=\nu$$

و ازآنها، با $\sigma=\dfrac{\lambda+\mu+\nu}{2}$

$$\psi=\sigma-\lambda\ ,\quad \varphi=\sigma-\mu\ ,\quad \chi=\sigma-\nu$$

و به این ترتیب ترسیم سادهٔ زیر را به دست می‌آوریم:

۱. سه زاویهٔ λ، μ، ν یی را، که مربعهای سینوس آنها مساوی اضلاع مثلث مفروض‌اند (ودر آن نصف محیط مثلث واحد طول است) رسم می‌کنیم.

۲. نیم مجموع سه زاویهٔ λ، μ، ν، یعنی:

$$\sigma=\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}$$

و سه زاویهٔ جدید

$$\psi=\sigma-\lambda\ ,\quad \varphi=\sigma-\mu\ ,\quad \chi=\sigma-\nu$$

را رسم می‌کنیم.

۳. مربعهای سینوس سه‌زاویهٔ ψ، φ، χ را رسم می‌کنیم. اینها مماسهای از رئوس مثلث مفروض بـه سه دایرهٔ مالفاتی می‌باشند.

تبصره: اگـر بخواهیم:

$$m=\sin^2 w$$

مربع سینوس زاویهٔ مفروض w، یازاویهٔ w (که مربع سینوس آن برابر m است) را رسم کنیم، به طریق زیر عمل می‌کنیم:

نیم‌دایرهٔ G به قطر $HK=1$ را رسم می‌کنیم. زاویـهٔ معلوم w را در K بر KH رسم کرده از L نقطهٔ تقاطع ضلع آزاد آن با G عمود LM را بر HK وارد می‌کنیم. در این صورت

$$HM=m=\sin^2 w$$

برعکس، اگر m معلوم ویافتن w لازم باشد:

$$HM=m$$

را بر HK رسم کرده از M عمودی بر HK اخراج کرده آن را تا L، تقاطعش با G امتداد داده LK را امتداد می‌دهیم. در این صورت $\sphericalangle HKL=w$.

اثبات. از مثلث قائم‌الزاویهٔ HML نتیجه می‌شود که:

$$m=HM=HL\times\sin HLM=HL\sin w$$

واز مثلث قائم‌الزاویهٔ HKL

$$HL=HK\sin w=\sin w$$

در نتیجه:

$$m=\sin^2 w$$

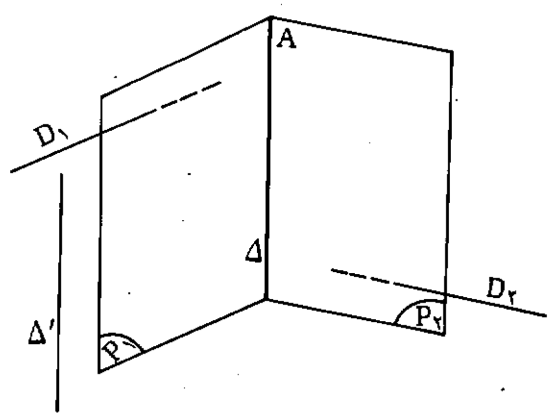
عمود مشترك دوخط متنافر

محمد ابراهیم گیتی‌زاده

★قابل استفادهٔ دانش آموزان سال چهارم ریاضی

۱- می‌دانیم که ازهر نقطهٔ دلخواه A می‌توان خطی‌رسم کرد که بردوخط متنافرمعلوم، مانند D_1 و D_2، عمودباشد. این خط، که آن‌را Δ می‌نامیم، فصل مشترك دوصفحه، مانند P_1 و P_2، است که ازنقطهٔ A بریکی‌از این دوخط عمود می‌شوند، آن‌گاه هرخط دیگر، مثل Δ'، که به موازات Δ رسم‌شود، بر دوخط متنافرمفروض عمود خواهدبود. بنا براین، می‌توان خط Δ را راستای کلیهٔ‌خطوطی اختیار کردکه بردوخط متنافر عمود می‌شوند.

$$(P_1 \perp D_1) \wedge (P_2 \perp D_2) \text{ ، } (P_1 \cap P_2) = \Delta \implies$$
$$(\Delta \perp D_1) \wedge (\Delta \perp D_2)$$
$$(\Delta' \| \Delta) \implies (\Delta' \perp D_1) \wedge (\Delta' \perp D_2)$$



در هندسه تحلیلی، راستای کلیهٔ خطوط عمود بردو خط متنافر D_1 و D_2 را می‌توان‌راستای‌حاصل‌ضرب برونی‌دو بردار هادی‌این دوخط اختیار کرد. مثلاً، دوبردار هادی‌دوخط D_1 و D_2 با معادله‌های:

$$D_1 : x - 5 = \frac{y+2}{2} = -z - 1$$

$$D_2 : \frac{x-1}{2} = y + 1 = z$$

به ترتیب:

$$\vec{v_2}(2 , 1 , 1) \quad \text{و} \quad \vec{v_1}(1 , 2 , -1)$$

می‌باشند، و راستای هرخطی‌که براین دو خط عمود می‌شود راستای بردار زیر است:

$$\vec{v_1} \wedge \vec{v_2} = \vec{w_1}(3 , -3 , -3)$$

یا

$$\vec{w}(1 , -1 , -1)$$

مثال . معادله‌های خطی را بنویسیدکه از مبدأ مختصات بگذرد و بردوخط Δ_1 و Δ_2، با معادله‌های زیر، عمود باشد.

$$\Delta_1 : \frac{x-1}{3} = 2y = z$$

$$\Delta_2 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = -z + 1$$

حل . بردارهای هادی این‌دوخط به ترتیب عبارتنداز:

$$\vec{a_1}(3, \frac{1}{2}, 1) \quad , \quad \vec{a_2}(2, 2, -1)$$

راستای هر خطی که بر این دو خط عمود باشد راستای بردار زیر است:

$$\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 = \vec{a}\left(-\frac{5}{2},5,5\right) \quad \text{یا} \quad \vec{u}(-1,2,2)$$

و معادله‌های خطی که از نقطهٔ $O(0,0,0)$ در راستای بردار

$$\vec{u}(-1\ ,\ 2\ ,\ 2)$$

رسم می‌شود به صورت زیر نوشته می‌شوند:

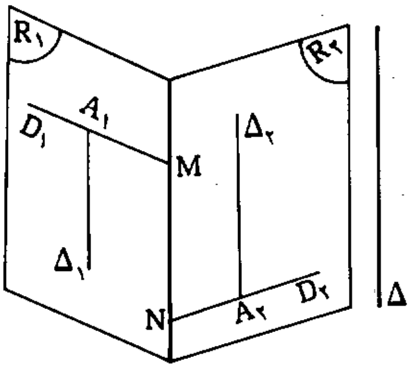
$$-x = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$$

۲ـ عمود مشترک دو خط متنافر: خطی که بر دو خط متنافر D_1 و D_2 عمود باشد و این دو خط را قطع کند عمود مشترک این دو خط نامیده می‌شود. بنابراین، در بین خطوط بی‌شماری که می‌توانند بر دو خط متنافر عمود باشند، تنها خطی که با هر دو متقاطع می‌باشد عمود مشترک آنها است. برای این که بر شرط متقاطع بودن عمود مشترک با دو خط متنافر تأکید شده باشد، معمولاً آن را به صورت یک پاره‌خط که دو سر آن بر روی دو خط متنافر قرار دارد، نشان می‌دهند. این پاره‌خط، کوتاه‌ترین فاصله بین دو خط متنافر است، یعنی طول آن از طول هر پاره‌خط دیگر که بر دو خط متنافر متکی باشد کوچکتر است.

۳ـ طریقه تعیین عمود مشترک دو خط متنافر و معادله‌های آن: پس از آن که راستای خطوط عمود بر دو خط متنافر را یافتیم، باید به حل مسأله زیر بپردازیم تا عمود مشترک دو خط متنافر به دست آید.

مسأله ـ سه خط D_1 و D_2 و Δ، که دو به دو نسبت به هم متنافر می‌باشند، معلومند. خطی رسم کنید که با Δ موازی بوده دو خط D_1 و D_2 را قطع کند.

حل. بر دو خط D_1 و D_2 به ترتیب دو صفحه R_1 و R_2 را چنان می‌گذرانیم که با خط Δ موازی باشند. بدین ترتیب که از نقطهٔ دلخواه A_1 واقع بر خط D_1 و از نقطه اختیاری A_2 واقع بر خط D_2 دو خط Δ_1 و Δ_2 را به موازات خط Δ رسم می‌کنیم. دو خط متقاطع D_1 و Δ_1 صفحه R_1 و دو خط D_2 و Δ_2 صفحه R_2 را تشکیل می‌دهند. فصل مشترک این دو صفحه، که با خط Δ موازی می‌باشد، و دو خط D_1 و D_2 را به ترتیب در نقاط M و N قطع می‌کند، جواب مسأله است. در حقیقت نقطه M محل تلاقی صفحه R_2 و خط D_1 و نقطه N محل برخورد صفحه R_1 و خط D_2 است.



مثال ۱ـ مطلوب است تعیین معادله‌های خطی که با راستای

$$\vec{w}(1\ ,\ -1\ ,\ -1)$$

موازی بوده دو خط D_1 و D_2 با معادله‌های زیر را قطع کند.

$$D_1:\ x-5 = \frac{y+2}{2} = -z-1$$

$$D_2:\ \frac{x-1}{2} = y+1 = z$$

حل. از نقطه دلخواه $A_1(5,-2,-1)$ واقع بر خط D_1 خط Δ_1 را هم راستا با بردار $\vec{w}$ مرور می‌دهیم. دو خط متقاطع D_1 و Δ_1 صفحه R_1 را تشکیل می‌دهند که بردار نرمال آن حاصل‌ضرب برونی دو بردار هادی این دو خط، یعنی:

$$\vec{w}(1,-1,-1) \quad \text{و} \quad \vec{v}_1(1,2,-1)$$

است:

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{w} = \vec{u}_1(-3,0,-3) \quad \text{یا} \quad \vec{w}_1(1,0,1)$$

$$\begin{cases} \vec{w}_1(1,0,1) \\ A_1(5,-2,-1) \end{cases} \Longrightarrow R_1 :\ x+y-4=0$$

به همین ترتیب صفحه R_2 را چنان رسم می‌کنیم که شامل خط D_2 وخط Δ_2 هم‌راستا با بردار $\vec{w}$ باشد:

$$\begin{cases} \vec{v}_2 \wedge \vec{w} = \vec{u}_2(0,3,-3) \quad \text{یا} \quad \vec{w}_2(0,1,-1) \\ A_2(1,-1,0) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow R_2 :\ y-z+1=0$$

خط مطلوب، فصل مشترک دوصفحهٔ R_1 و R_2 با معادله‌های زیر است:

$$\begin{cases} x+z-4=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$$

که معادله کانونیك آن به صورت زیر می‌باشد:

$$4-x=y+1=z$$

اگر خواسته باشیم قطعه‌ای از این خط را که به دوخط متنافر متکی می‌باشد، مشخص کنیم، کافی است مختصات نقاط تلاقی خط D_2 باصفحه R_1 وخط D_1 با صفحهٔ R_2 را به دست آوریم:

$$D_2 :\ \begin{cases} x=2t+1 \\ y=t-1 \\ z=t \end{cases} \quad \text{و} \quad R_1 :\ x+z-4=0$$

$$2t+1+t-4=0 \Longrightarrow t=1 \Longrightarrow$$

$$M(3\ ,\ 0\ ,\ 1)$$

$$D_1 :\ \begin{cases} x=k+5 \\ y=2k-2 \\ z=-k-1 \end{cases} \quad \text{و} \quad R_2 :\ y-z+1=0$$

$$2k-2+k+1+1=0 \Longrightarrow k=0 \Longrightarrow$$

$$N(5\ ,\ -2\ ,\ -1)$$

وجواب مسأله قطعه‌خط MN است.

مثال ۲ - معادله‌های عمود مشترك دوخط متنافر D_1 و D_2 را با معادله‌های زیر پیدا کنید:

$$D_1 :\ x-5=\frac{y+2}{2}=-z-1$$

$$D_2 :\ \frac{x-1}{2}=y+1=z$$

حل . از آن جا که در مثال ۱ ، بردار

$$\vec{w}(1\ ,\ -1\ ,\ -1)$$

راستای خطوط عمود بر دو خط D_1 و D_2 و قطعه خط MN هم‌راستا با بردار $\vec{w}$ و متقاطع با دوخط مفروض است، این قطعه خط همان عمود مشترك دوخط متنافر D_1 و D_2 می‌باشد و معادلهٔ MN معادلهٔ عمود مشترك خطوط D_1 و D_2 است.

۴- تعیین عمود مشترك دوخط متنافر به طریقه دیگر: در این طریقه، عمود مشترك دوخط متنافر D_1 و D_2 با عملیات زیر به دست می‌آید:

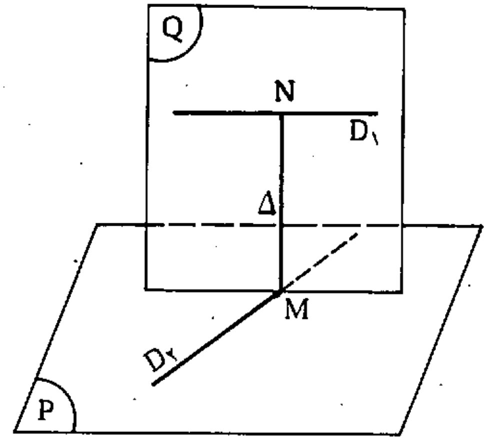
الف - برخط D_2 صفحه P را بـه موازات خط D_1 می‌گذرانیم.

ب - صفحه Q را به نحوی رسم می‌کنیم که شامل خط D_1 بوده و برصفحه P عمود باشد. این صفحه، صفحهٔ مصور خط D_1 بر روی صفحه P است وفصل مشترك آن با صفحه P تصویر خط D_1 می‌باشد، که دراین جا باخود خط D_1 موازی است.

ج- نقطه تلاقی خط D_2 وصفحه Q را به دست آورده M می‌نامیم.

د - ازنقطه M ، خط Δ را برصفحهٔ P عمود می‌کنیم. این خط درصفحهٔ Q واقع می‌شود و باخط D_1 متقاطع است.

ه ــ نقطه‌تلاقی دوخط Δ و $D_۱$ را به دست می‌آوریم و آن‌را N می‌نامیم. پاره‌خط MN عمود مشترک مطلوب است.



مثال . معادله‌های عمود مشترک دو خط متنافر زیر را به طریقه دوم پیدا کنید:

$$D_۱:\ x-۵=\frac{y+۲}{۲}=-z-۱$$

$$D_۲:\ \frac{x-۱}{۲}=y+۱=z$$

حل . مسأله‌را به ترتیب فوق‌حل می‌کنیم:

الف ــ تعیین معادله‌صفحه P که شامل‌خط $D_۲$ وموازی باخط $D_۱$ است:

بردارهای هادی دو خط $D_۲$ و $D_۱$:

$$\vec{v}_۱(۱,۲,-۱) \text{ و } \vec{v}_۲(۲,۱,۱)$$

امتداد بردار نرمال صفحهٔ P:

$$\vec{v}_۱\wedge\vec{v}_۲=\vec{w}_۱(۳,-۳,-۳)$$

یــا

$$\vec{w}(۱,-۱,-۱)$$

نقطه‌ای از خط $D_۲$ و ازآن‌جا نقطه‌ای ازصفحه P:

$$A(۱,-۱,۰)$$

معادلهٔ صفحهٔ P:

$$۱(x-۱)-۱(y+۱)-۱(z-۰)=۰$$

$$P:\ x-y-z-۲=۰$$

ب ــ تعیین معادلهٔ صفحه Q کــه شامل خط $D_۱$ وعمود برصفحه P است:

$\vec{v}_۱(۱,۲,-۱)$ بردار هادی خط $D_۱$

$\vec{w}(۱,-۱,-۱)$ بردار نرمال صفحه P

$$\vec{v}_۱\wedge\vec{w}=\vec{u}_۱(-۳,۰,-۳)$$

یــا

$\vec{w}_۱(۱,۰,۱)$ بردار نرمال صفحه Q

نقطه‌ای ازخط $D_۱$ و درنتیجه نقطه‌ای ازصفحهٔ Q :

$$B(۵,-۲,-۱)$$

$$۱(x-۵)+۰(y+۲)+۱(z+۱)=۰$$

$$Q:\ x+z-۴=۰$$

ج ــ تعیین مختصات نقطه برخورد خط $D_۲$ وصفحه Q:

$$D_۲:\ \begin{cases}x=۲t+۱\\ y=t-۱\\ z=t\end{cases}\qquad Q:\ x+z-۴=۰$$

$$۲t+۱+t-۴=۰ \implies t=۱ \implies$$

$$M(۳,۰,۱)$$

د ــ معادله‌های‌خط Δ که از نقطهٔ $M(۳,۰,۱)$ برصفحهٔ P عمود می‌شود:

بردار نرمال‌صفحه P و بردار هادی‌خط Δ :

$$\vec{w}(۱,-۱,-۱)$$

$$\Delta:\ x-۳=-y=-z+۱$$

ه ـ مختصات نقطه‌تلاقی دوخط D_1 و Δ:

$$D_1:\begin{cases}x=k+5\\ y=2k-2\\ z=-k-1\end{cases}\qquad \Delta:\begin{cases}x=k'+3\\ y=-k'\\ z=-k'+1\end{cases}$$

$$\begin{cases}k+5=k'+3\\ 2k-2=-k'\\ -k-1=-k'+1\end{cases}$$

ازحل دستگاه‌بالا جواب متوافق $k=0$ و $k'=2$ وازآن‌جا $N(5,-2,-1)$ بـه دست می‌آید و پاره خط MN عمود مشترك‌دوخط متنافر D_1 و D_2 است. معادلهٔ MN به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\vec{MN}(-2,2,2) \text{ و } M(3,0,1)$$

$$\frac{x-3}{-2}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{2}$$

$$MN:\ 3-x=y=z-1$$

۵ـ کوتاه‌ترین فاصله‌بین دوخط متنافر: چنانچه‌قبلاً گفته شد، طول پاره‌خط‌عمود مشترك، کوتاه‌ترین فاصله بین‌دوخط متنافر است. برای دو خط متنافر D_1وD_2 ، بامعادله‌های‌مفروضشان، این‌فاصله برابراست‌با:

$$MN=\sqrt{(5-3)^2+(-2-0)^2+(-1-1)^2}$$
$$=2\sqrt{3}$$

چنانچه‌فقط محاسبهٔ‌کوتاه‌ترین فـاصله بین دوخط متنافر منظورباشد، کافی‌است بریکی‌از دوخط‌صفحه‌ای به موازات‌خط دیگرمرور داده فاصله یك نقطه دلخواه از خط اخیررا تا این صفحه به دست‌آورد. در مثال‌بالا، صفحه P برخط D_2 گذشته وباخط D_1 موازی‌است. بنابراین، اگرنقطهٔ دلخواه‌ازخط D_1 را $A(5,-2,-1)$ اختیارکنیم، کوتاه‌ترین‌فاصله‌بین‌دوخط متنافر D_1 و D_2 ، فاصله‌نقطهٔ A ازصفحه P می‌شود:

$$P:\ x-y-z-2=0 \quad \text{و} \quad A(5,-2,-1)$$

$$d=MN=\frac{|5-(-2)-(-1)-2|}{\sqrt{1+1+1}}=2\sqrt{3}$$

۶ـ تعیین‌عمود مشترك‌دوخط متنافرعمود برهم: درحالت خاصی که دوخط متنافر برهم عمودهستند، چون برهرخطمی‌توان صفحه‌ای گذراندکـه برخط دیگر عمود باشد، فصل مشترك دو صفحه‌ای که‌بدین‌طریق‌رسم می‌شوند عمود مشترك‌مطلوب‌خواهد بود.

مثال ۱ - عمود مشترك دوخط D_1 و D_2 رابامعادله‌های زیر پیداکنید:

$$D_1:\ \frac{x-1}{2}=-y-1=z$$

$$D_2:\ \frac{x}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{-z-2}{2}$$

حل - بردارهای هادی این دوخط عبارتنداز:

$$\vec{v_1}(2,-1,1)\ ,\ \vec{v_2}(3,4,-2)$$

چون

$$\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}=2\times3-1\times4+1(-2)=0$$

دوخط برهم عمودند.

ازنقطهٔ $A_1(1,-1,0)$ واقع‌برخط D_1، صفحهٔ P را برخط D_2 عمود می‌کنیم (خط D_1 برصفحه P منطبق‌می‌شود):

$\vec{v_2}(3,4,-2)$ بردار نرمال صفحه P

$A_1(1,-1,0)$ نقطه‌ای از صفحه P

$$3(x-1)+4(y+1)-2(z-0)=0$$

$$P:\ 3x+4y-2z+1=0$$

ازنقطهٔ $A_2(0,1,-2)$ واقع‌برخط D_2، صفحه Q را برخط D_1 عمود می‌کنیم (خط D_2 برصفحه Q منطبق می‌شود):

$$\vec{v_1}(2,-1,1) \quad \text{و} \quad A_2(0,1,-2)$$

$$2(x-0)-1(y-1)+1(z+2)=0$$

$$Q:\ 2x-y+z+3=0$$

خط Δ به معادله‌های زیر، عمود مشترك مطلوب است.

$$\Delta:\begin{cases}3x+4y-2z+1=0\\ 2x-y+z+3=0\end{cases}$$

تمرین: در مثال ۱ ، اولاً ــ معادله‌های کانونیك عمود مشترك‌را به دست آورید. ثانیاً ــ عمود مشترك را به صورت یك پاره‌خط نشان‌دهید و کوتاه‌ترین‌فاصله‌بین دوخط D_1 و D_2 را تعیین کنید.

مثال ۲ ــ عمود مشترك‌محور ox وخط D به معادله‌های زیر را پیداکنید:

$$D:\begin{cases}x=1\\ \dfrac{y-3}{2}=z+1\end{cases}$$

حل ــ بردار هادی خط D ، بردار

$$\vec{v}(0\ ,\ 2\ ,\ 1)$$

است، پس‌خط D برمحور ox عموداست. صفحه‌ای‌که برخط D می گذرد و برمحور ox عمود می‌شود این محور را درنقطهٔ

$$M(1\ ,\ 0\ ,\ 0)$$

که نقطه‌ای‌از عمود مشترك‌است قطع می کند. نقطه دیگر عمود مشترك‌راکه برخط D واقع است، می‌توانیم به طریقه‌های زیر تعیین کنیم:

اولاً ــ برمحور ox صفحه‌ای می گذرانیم که برخط D عمودباشد. می‌توان بردارنرمال این‌صفحه را بردار

$$\vec{v}(0\ ,\ 2\ ,\ 1)$$

و نقطه‌ای از این‌صفحه راکه برمحور ox واقع است

$$O(0\ ,\ 0\ ,\ 0)$$

اختیار کرد، بنابراین:

$$0(x-0)+2(y-0)+1(z-0)=0$$

$$2y+z=0$$

نقطه تلاقی این‌صفحه بـاخط D نقطهٔ $N(1,1,-2)$ می‌شود. چرا؟

ثانیاً ــ برخط D نقطهٔ

$$N(1\ ,\ 2t+3\ ,\ t-1)$$

رابه طریقی‌تعیین می کنیم‌که MN بر D عمود باشد:

$$\overrightarrow{MN}(0\ ,\ 2t+3\ ,\ t-1)\quad و \quad \vec{v}(0,2,1)$$

$$\overrightarrow{MN}\perp\vec{v}\implies\overrightarrow{MN}\cdot\vec{v}=0\implies$$

$$2(2t+3)+t-1=0$$

$$t=-1\implies N(1,1,-2)$$

ثالثاً ــ نقطهٔ N را چنان می‌یابیم‌که طول $MN=f(t)$ مینیمم باشد:

$$M(1,0,0)\ و\ N(1,2t+3,t-1)$$

$$MN=f(t)=\sqrt{(2t+3)^2+(t-1)^2}$$

$$=\sqrt{5t^2+10t+10}$$

$$f'(t)=\frac{10t+10}{2\sqrt{5t^2+10t+10}}$$

$$f'(t)=0\implies t=-1\implies N(0,1,-2)$$

تمرین : قطعه خط MN که درآن

$$M(1,0,0)\ و\ N(0,1,-2)$$

است عمود مشترك مطلوب می‌باشد. معادله‌های کانونیك آن را بنویسید.

مسائل زیر را حل کنید:

۱ ــ معادله‌های عمود مشترک دو خط D_1 و D_2 را با معادله‌های زیر تعیین کنید و کوتاه‌ترین فاصله بین آنها را به دست آورید.

$$D_1:\begin{cases}\dfrac{x+2}{2}=-y-4\\ z=5\end{cases}$$

$$D_2:\begin{cases}x-2=\dfrac{y+1}{2}\\ z=1\end{cases}$$

راهنمایی ــ دو خط برهم عمودند و عمود مشترک به موازات محور oz است.

۲ ــ معادله‌های عمود مشترک محور oz و خط D به معادله‌های زیر را پیدا کنید:

$$D:\begin{cases}\dfrac{x+2}{2}=-y-4\\ z=0\end{cases}$$

راهنمایی ــ خط D بر صفحه xoy منطبق و مبدأ مختصات یک نقطه از عمود مشترک است.

۳ ــ خط D به معادله‌های زیر مفروض است:

$$D:\begin{cases}x=2t+6\\ y=4t-2\\ z=t\sqrt{2}-2\sqrt{2}\end{cases}$$

اولاً ــ مختصات نقطهٔ M تصویر نقطهٔ O (مبدأ مختصات) را بر روی خط D تعیین کنید.

ثانیاً ــ معادله‌های خط Δ را به طریقی بیابید که با محور ox زاویهٔ 60° تشکیل داده پاره‌خط OM عمود مشترک دو خط متنافر D و Δ باشد.

تفریح اندیشه ۲

جواب در صفحهٔ ۹۶

از یک محصول به دو صورت مایع و پودر استفاده می‌شود. در یک تحقیق، نتایج زیر به‌دست آمده است:

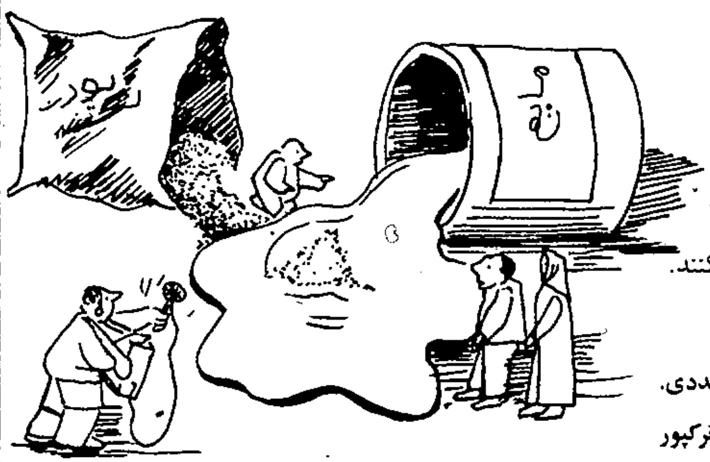
$\frac{1}{3}$ از همهٔ اشخاص مورد سؤال پودر مصرف نمی‌کنند.

$\frac{2}{7}$ از همهٔ اشخاص مورد سؤال مایع به کار نمی‌برند.

۴۲۷ نفر مایع و پودر را توأماً مورد استفاده قرار می‌دهند.

$\frac{1}{5}$ از مجموع سؤال شوندگان از این محصول استفاده نمی‌کنند.

در این تحقیق چند نفر مورد سؤال قرار گرفته‌اند؟



از کتاب بازیهای عددی.

ترجمهٔ سیمین‌دخت ترکپور

مرکزیاب دایره

این وسیله یک طرح ابتکاری است که می‌تواند براحتی مرکز دایره را پیدا کند. طرز ساخت و چگونگی کار این وسیله به شرح زیر می‌باشد:

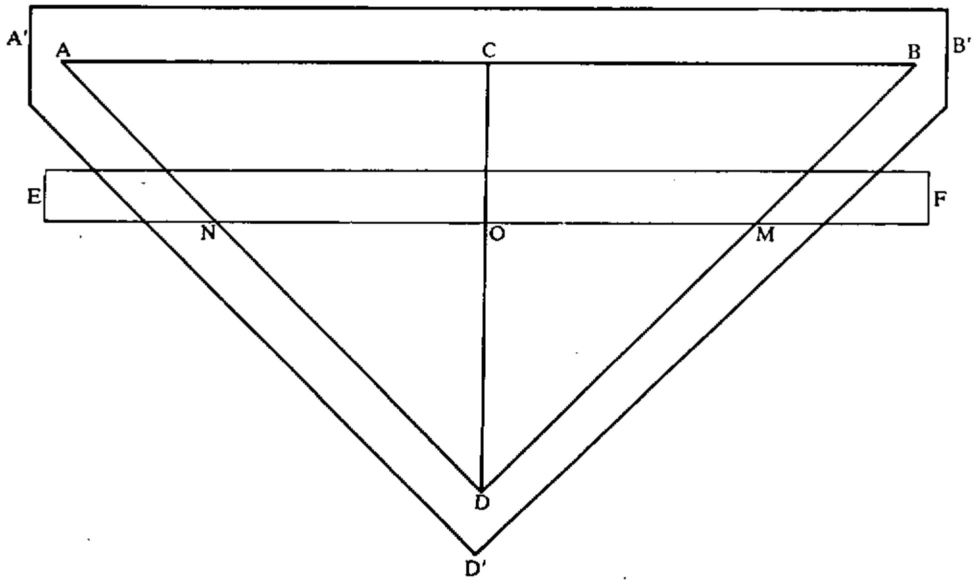
بر طبق شکل پاره‌خط AB به‌اندازه دلخواه انتخاب می‌شود. سپس پاره‌خط CD که به اندازهٔ نصف AB است بر وسط آن یعنی نقطهٔ C عمود می‌شود. بدین ترتیب سه مثلث به‌دست می‌آید که هرسه قائم الزاویهٔ متساوی الساقین هستند. مثلثهای: ΔABD , ΔADC , ΔDCB

البته در ساخت وسیله پاره‌خطهای CD و AD و BD به‌صورت شیارهایی درمی‌آیند و پاره‌خطهای $B'D'$ ، $A'B'$ و $A'D'$ لبه‌های چوب یا مقوا و یا هر جنسی که وسیله از آن ساخته می‌شود، می‌باشند. در شکل یک بازوی متحرک (EF) بر روی وسیله مشاهده می‌شود. این بازوی متحرک به طریقی روی شیار CD وصل می‌شود که بتواند حرکت کند (درجهت بالا به پایین و به‌عکس). این بازو باید بر شیار CD به‌حالت دو خط عمود برهم قرار گیرد. این بازو در هر نقطه‌ای از شیار CD که قرار گیرد حالت خاصی ایجاد می‌کند.

به‌عنوان مثال درحالتی که در شکل دیده می‌شود: $OD = OM = ON$.

حال برای پیدا کردن مرکز دایره باید این وسیله را روی کاغذ گذاشته و طوری آن را جابه‌جا کنیم که نقطهٔ D (محل تقاطع سه شیار) و نیز جاهایی که بازوی متحرک دوشیار BD و AD را قطع می‌کند (در اینجا M و N) روی محیط قرار گیرند به این ترتیب چون قبلاً ذکر کردیم: $OD = OM = ON$، گویی سه شعاع دایره یکدیگر را در یک نقطه قطع کرده‌اند، پس آن نقطه مرکز دایره است (نقطهٔ O). از بهترین جنسی که برای این وسیله می‌توان انتخاب کرد، جنس نقاله‌ها یا گونیاهای امروزی است.

طرح از: الهه تاجیک و مریم رفعتی. کلاس اول دبیرستان فرزانگان منطقهٔ ۱۴



معرفی کتاب

جبر پایه (۴)

مؤلف محمدهاشم رستمی

ناشر انتشارات مدرسه

بررسیهای صاحب نظران و تجربهٔ چندین ساله نشان داده است، دانش‌آموزانی دورهٔ دبیرستان را با موفقیت کامل پشت سر گذاشته، به‌راحتی در رشتهٔ دلخواه خود در دانشگاهها پذیرفته می‌شوند، که مطالب کتب درسی را به‌خوبی فرا گرفته، برهمهٔ نکات و ظرایف در ارتباط با هر مطلب درسی، احاطهٔ کامل پیدا کرده باشند. و این درصورتی امکان پذیر است که کتابهای کمک آموزشی لازم که تأمین‌کننده اهداف فوق است، در اختیار آنان قرار داشته باشد. کتاب جبر پایه (این مجلد برای دانش آموزان سال چهارم رشتهٔ علوم تجربی و ریاضی فیزیک و داوطلبان کنکور) به‌همین منظور تألیف گردیده است.

در این کتاب پس از ارائه هر قسمت از درس، مطالب تکمیلی مربوط به آن قسمت، و نمونه‌هایی از مسائل امتحانات نهایی سال چهارم رشتهٔ علوم تجربی و نمونه‌هایی از تستهای کنکورهای سراسری در ارتباط با آن مطلب حل شده است. پس از آن نیز تمرینهایی وجود دارد که شامل سؤالهای امتحانات نهایی سال چهارم رشتهٔ علوم تجربی استانها و سراسر کشور می‌باشد. با حل این تمرینها مطلب درسی به‌صورت کامل فرا گرفته می‌شود و در ذهن تثبیت می‌گردد.

کتاب جبر پایه (۴) علاوه بر مطالب درسی و تکمیلی شامل دو مجموعه زیر است:

۱ - مجموعهٔ کامل سؤالهای امتحانات نهایی سال چهارم رشتهٔ علوم تجربی استانها و سراسر کشور از سال ۱۳۵۷ تا سال ۱۳۷۰ که هر سؤال امتحانی در مبحث مربوط به خود آمده است.

۲ - بیش از ۸۳۰ تست با پاسخ (در فصل هفتم کتاب) که این تستها به ترتیب فصلهای کتاب تنظیم شده است تا دانش‌آموزان پس از حل تمرینهای مربوط به هر مطلب از هر فصل، تستهای مربوط به آن مطلب را حل نمایند. این تستها شامل تستهای کنکورهای سراسری وزارت علوم و آموزش عالی در رشتهٔ علوم تجربی از سال ۱۳۵۸ تا سال ۱۳۷۱ و سؤالهای کنکور رشته‌های پزشکی دانشگاه آزاد اسلامی ایران از سال ۱۳۶۴ تا سال ۱۳۷۰ می‌باشد.

بخشهای مختلف کتاب جبر پایه از جمله: مشتق، مقاطع مخروطی، انتگرال و ... برای دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی فیزیک نیز کاملاً قابل استفاده است.

این کتاب یار و مددکاری صدیق برای استادان و آموزندگان محترم ریاضی نیز می‌باشد.

کتاب جبر پایه به‌صورت خودآموز تألیف گردیده است تا هر دانش‌آموزی در هر نقطه‌ای از کشور بدون اینکه نیازمند شرکت در کلاسهای تقویتی و کنکور باشد، با مطالعهٔ آن بتواند آمادگی لازم برای موفقیت در اتمام دورهٔ دبیرستان و ورود به دانشگاه را پیدا نماید.

جُنگ ریاضی دبیرستان البرز

به کوشش: غلامرضا یاسی‌پور، سیدحسین سید موسوی

جُنگ ریاضی مجموعه‌ای از مقاله‌ها و مسائل ریاضی و کامپیوتر به گونه‌ای است که دانش‌آموز دبیرستان را به کار آید و زمینهٔ مطالعه‌ای به دبیر ریاضی دبیرستان بدهد. تهیه کنندگان جُنگ بر این بوده‌اند که مطالب جنگ درعین ساده بودن بدیع باشد و بعید نباشد و به‌همین خاطر مطالبی را اختیار کرده‌اند که درعین چنان بودن و چنین نبودن با بیانی آسانگیر همراه باشد.

پیشگفتار جنگ به طرح سه سؤال اصلی ریاضیات که: سرچشمهٔ ریاضیات چیست؟ ریاضیات خود چیست؟ و به کجا می‌رود، پرداخته و در پاسخ به آنها با اختصار ساخته است.

مقالهٔ خلاصة الحساب آن در شرح زندگی شیخ بهائی و تشریح کتاب معروف او با همین نام است.

در مقالهٔ: با آرکها آشتی کنیم با مسائل و مشکلات مسائل مربوط به آرکها مواجه می‌شویم و گرهی چند از آنها را با دست تدبیر باز می‌کنیم.

در مقالهٔ: میزگردی با دو ریاضی‌دان کشور به بحث دربارهٔ ریاضیات ترکیبیاتی و مواردکاربرد آن، نیز آغاز و انجام نسبی و آینده و اهمیّت آن می‌نشینیم.

مقالهٔ: بررسی معادلهٔ $|x-a| + |x-b| = b$ به بررسی این معادله با استفاده از مفهوم هندسی قدر مطلق عددهای حقیقی می‌پردازد، و مقالهٔ: آیا آموزش با کامپیوتر مضر است؟ که از آنِ پ. ر. هالموس است با برنامه‌های خوب و پاسخهای بی‌موقع می‌سازد.

مقالهٔ: معرفی یک فارغ‌التحصیل برجستهٔ البرز در معرفی دکتر لطفعلی عسکری زاده ریاضی‌دان ایرانی و واضع منطق فازی است.

مقاله‌های دیگر جُنگ عبارتند از: روش کلی محاسبهٔ انتگرال معین توابع وارون، الگوریتم محاسبهٔ بزرگترین مقسوم علیه مشترک بدون انجام عمل تقسیم، معضل کنکور و پی‌آمدهای آن، مقدمه‌ای بر رمزشناسی، و معرفی کتاب.

جنگ با طرح مسائلی برای دانش‌آموزان اول تا چهارم دبیرستان پایان می‌یابد.

فرمولهای ریاضیات: جبر،حساب،هندسه،آنالیزریاضی‌وریاضیات‌جدید
ترجمه و تنظیم از: غلامرضا یاسی‌پور: ناشر انتشارات مدبر.

در این کتاب با فرمولهای جبر، حساب، دنباله‌ها، مشتقات، انتگرالها، انتگرالهای خطی، انتگرالهای سطحی، سریها و حاصل ضربها، سری اعداد، سری توابع، حاصل ضربهای نامتناهی، اعداد و توابع مختلط، توابع متعالی، توابع هذلولوی، تابع گاما، توابع بسل، توابع ابر هندسی هم جریان، منطق ریاضی، مجموعه‌ها، گروه‌ها، حلقه، میدان، رابطه، تابع، ماتریس، نظریهٔ اعداد، آمار، احتمال و ... آشنا می‌شوید.

در مقدمهٔ کتاب چنین آمده که: اگر ریاضیات را آموختن اندیشیدن نه آموختن اندیشه‌ها بدانیم و اگر ریاضی‌دان را خلاّق نه حافظ فرمول بخوانیم دراین صورت، دیگر به حفظ فرمولها و دستورهای ریاضی رغبتی نشان نخواهیم داد و درنتیجه به جُنگها و مراجعی که حاوی این دستورها باشند نیازمند می‌شویم و دیگر ذهن خود را برای دربر داشتن آنها گران بار نخواهیم کرد.

فرمولهای کتاب، همان‌گونه که مؤلفین محترم آن نیز خاطر نشان کرده‌اند، از میان فرمولهای معروف و غالباً در ریاضیات به کار رفته انتخاب و برای دانش‌آموزان دبیرستان، دانشجویان دانشگاه، مهندسان و دانشمندان درنظر گرفته شده‌اند و خوانندهٔ کتاب می‌تواند برای توضیح بیشتر آنها به کتابهای تخصصی‌تر مراجعه کند.

مجموعهٔ مقاله‌ها و مسائل ریاضی
جلد اول: تنظیم از غلامرضا یاسی‌پور
ناشر انتشارات مدبر

در جلد اول مجموعه با مقاله‌های: مصاحبه با استاد پرویز شهریاری، توابع و نمودارهای آن، معرفی کتاب «من ریاضی‌دانم» هندسهٔ فضایی، هندسهٔ تصویری، مثلثات، ماتریسها، منطق و زبان، نظریهٔ گرافها، نظریهٔ بازیها، فرهنگ ریاضیات، ابن هیثم ریاضی‌دان اسلامی، نیوتن و اندیشهٔ ریاضی زمان ما، فرهنگ ریاضیات، مسائل ریاضی، و نکته‌های ریاضی برمی‌خوریم و با آثار و نوشته‌های کسانی چون: موسی آذرنوش، پرویز شهریاری، محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری، حمیدرضا امیری، سیدحسین سید موسوی، محمد رضا هاشمی موسوی، نغمهٔ شریک زاده، و غلامرضا یاسی‌پور آشنا می‌شویم.

مجموعه هم به طرح مطالب تازهٔ ریاضیات می‌پردازد و هم مطالب قدیمیتر آن را با قالبی نو بیان می‌کند. از تاریخ ریاضیات و کاربرد آن سخن می‌گوید و وسیلهٔ آشنایی خواننده را با ریاضی‌دانهای معاصر فراهم می‌آورد.

مجموعه نشریه‌ای است برای دانش‌آموز دبیرستان و دانشجوی دانشگاه، که علاوه بر آن‌که می‌تواند مورد استفادهٔ معلم و دبیر ریاضی قرار گیرد به کار تمام کسانی که به نحوی از انحا با ریاضیات تعلیمی سروکار دارند نیز می‌آید.

با داشتن مجلدات مجموعه مجموعه‌ای غنی از مقاله‌ها و مسائل ریاضی در اختیار خواهید داشت.

آشنایی با ریاضیات جدید
محمد رجبی طرخورانی، سیدحسین سید موسوی
ناشر مبتکران

مطالب کتاب ریاضیات جدید سال سوم ریاضی فیزیک را دربر می‌گیرد و چهار فصل آن عبارتند از: فضاهای برداری، آنالیز ترکیبی، احتمال، و جبر بول و کاربردی از آن.

کتاب، بنا به روایتی که در مقدمهٔ آن مذکور افتاده، به گونه‌ای تهیه شده که نه‌تنها دانش‌آموزان برای تعمیق مطالب درسی آن از آن بهره برند، بلکه دبیران نیز مطالب بیشتری برای آموزش موضوعات مورد بحث کتاب درسی در اختیار داشته باشند.

اغلب مسائل شناخته شدهٔ آنالیز ترکیبی، فضای برداری، جبر بول و احتمال مطرح شده‌اند و علاوه بر آن تعدادی مسأله نیز به‌عنوان تمرین برای خواننده درنظر گرفته شده است.

در قسمت توصیه‌های یک استاد آنالیز ریاضی چنین آمده که اغلب دانش‌آموزان مسألهٔ «شمارش» را تا حدی به این دلیل مشکل می‌یابند که در سایر دروس ریاضیات مقدماتی، به‌انواع مسائل کلیشه‌ای از قبیل «معادلهٔ $x^2 - 5x - 6 = 0$ را حل کنید»، «از xsinx مشتق بگیرید» و غیره عادت کرده‌اند. مسائلی چنین را می‌توان با به خاطر سپردن قواعدی معین و بدون هیچ تفکری مستقل حل کرد، و آنگاه توضیح توصیه‌های لازم آورده شده است.

یکی از جنبه‌های مهم کتاب جنبهٔ خودآموز بودن آن است.

کاربردهای بی‌نهایت لیوزیپین
منوچهر میثاقیان　　　مرکز نشر دانشگاهی

خوانندهٔ این کتاب ممکن است دانش‌آموزی تازه آشنا با ریاضیات یا فردی باشد که بیشتر دانسته‌های خود را به کناری نهاده و به بوتهٔ فراموشی سپرده است. از سوی دیگر، کتاب، جز فصل اولش، جنبهٔ ریاضی دارد، یعنی عرضهٔ دقیق مطالبی است تاحدی انتزاعی. بنابراین، خواننده‌ای که موضوع کتاب را جالب می‌یابد، باید آمادگی داشته باشد تا کمی فکرش را به کار اندازد و با فکر کردن روی بعضی مطالب، گاهی بعضی از مسائل را حل کند.

کتاب براساس گفته‌ای از داوید هیلبرت که ریاضیات را به مثابهٔ «دانش بی‌نهایتها» تعریف می‌کند نگاشته شده است. قضایای جالب ریاضی با نتایج جالب سایر حوزه‌های دانش تفاوت دارند، زیراگذشته از زیبایی و شگفت‌انگیزی مطالبی که بیان می‌کنند «سیمایی جاودانه» دارند و همواره جزئی از رشتهٔ نامتناهی نتایجند. هیلبرت در مورد بی‌نهایت بر این است که این فکر در همهٔ اعصار، ژرف‌ترین تحرک را در اندیشهٔ آدمی به وجود آورده است و کار کانتور را وارد کردن بشر به بهشت بی‌نهایت توصیف می‌کند.

کتاب گذشته از پیشگفتار مؤلف و فصل ۱ آن که در مورد بی‌نهایتهای متداول و بی‌نهایتهای ریاضی است پنج فصل دیگر دارد که به‌ترتیب عبارتند از: از اعداد طبیعی تا $\sqrt{2}$، از $\sqrt{2}$ تا ترامتناهی، زیگزاگها: به‌سوی حد اگر حد وجود داشته باشد،

مستطیل زرین جاودان، ترسیمها و برهانها. در آخر آن نیز حل مسأله‌ها و کتابنامه آمده است.

کتاب برای دانش‌آموزان دبیرستان و دبیران ریاضی و فیزیک و اشخاص علاقه‌مند به ریاضیات مفید است و خواندنش را بخصوص به این افراد توصیه می‌کنیم.

نخستین گام در جبر و آنالیز

تألیف: حسین هاشمی، محمدرضا پوررنگی، رامین منوری

ناشر انتشارات علوی

در نظام آموزشی مطلوب علاوه بر برنامهٔ مصوب که حداقلِ آموزش فراگیر را مشخص می‌کند، آموزشهای غیررسمی نیز که تکمیل کنندهٔ آموزش رسمی است اهمیت ویژه‌ای دارد زیرا از یک سو امکان تقویت پایهٔ علمی دانش‌آموزان را در هر گروهی که باشند فراهم می‌کند و از سوی دیگر امکان رشد و شکوفایی استعدادهای برجسته را فراهم می‌سازد. از جمله لوازم اساسی حرکت در این مسیر نشر کتابهای آموزشی ارزنده است؛ کتاب نخستین گام در جبر و آنالیز از جملهٔ این‌گونه کتابهاست.

در این کتاب کلیهٔ مطالب اساسی دروس جبر و آنالیز دورهٔ دبیرستان به‌شیوه‌ای ساده و دقیق بیان شده است. توضیحات و مثالها نیز به گونه‌ای است که خواننده درکی صحیح از مطالب پیدا می‌کند. در این اثر مؤلفان بیشتر به ایده بخشیدن در درک مفاهیم علاقه نشان داده‌اند و تلاش کرده‌اند تا مطالب از جنبه شهودی خوبی برخوردار باشد، و نیز سعی نموده‌اند تا روشهای گوناگون حل مسائل به خواننده آموزش داده شود. به نظر می‌رسد اعتقاد مؤلفان بر این بوده است که صرفِ ارائه دقیق مطالب یا حل مسائل خوب جهت فراگیری کفایت نمی‌کند، لذا با تلفیقی زیبا از هر دو جنبه، مطالعهٔ کتاب را هم آموزنده‌تر و هم جذابتر کرده‌اند.

با این تفاصیل می‌توان گفت این مجموعه یکی از کتابهای سودمند برای دانش آموزان سالهای آخر دبیرستان است که می‌توان از آن به‌عنوان کتابی مکمل کتابهای درسی استفاده کرد. داوطلبان کنکور نیز می‌توانند از آن بهره‌های فراوان برند.

تفریح اندیشه ۳

مسأله ـ ۷۳ مرغ در ۷۳ روز ۷۳ دوجین تخم می‌کنند و نیز می‌دانیم ۳۷ مرغ در ۳۷ روز ۳۷ کیلو دانه می‌خورند. برای به‌دست آوردن یک دوجین تخم مرغ چند کیلو دانه لازم است؟

جواب در صفحهٔ ۹۶

جواب نامه‌ها

آقای رضا معنوی دانش‌آموز سال سوم ریاضی (گرگان)

ضمن تشکر از مقالهٔ شما تحت عنوان «مفاهیم جبرکلیدی» به عرض می‌رسانیم که معیار یک مقالهٔ خوب و قابل چاپ ازنظر هیأت تحریریهٔ مجلهٔ برهان تازگی و کامل بودن مطالب آن است. و قصد تکرار و یا برداشت مستقیم از کتابهای درسی و دیگر کتابهای موجود نیست. امید است با در نظر گرفتن معیارهای فوق مقاله‌های بعدی خود را ارائه دهید. موفقیت و پیروزی هرچه بیشتر شما را از خداوند منان خواستاریم.

خانم معصومه آهنگران فراهانی دانش‌آموز سال دوم ریاضی (اراک)

با تشکر از دو مسأله ارسالی شما درصورت لزوم در جای مناسب از آنان استفاده خواهد شد.

آقای سید مسعود جلالی کاشانی دانش آموز سال دوم ریاضی (کاشان)

با تشکر از مسائل ارسالی شما امید است در شماره‌های آیندهٔ مجله از آنان استفاده کنیم.

آقای مهدی شاطری (اصفهان)

با تشکر از نامهٔ شما به عرض می‌رسانیم که ایراد شما در رابطه با مقالهٔ مندرج در شمارهٔ ۴ مجله به جا است ولی این طریق نوشتن فقط به خاطر رعایت کردن سبک کتابهای درسی فعلی بوده است.

آقای یوسف محمدی پورنوین دانش‌آموز سال دوم ریاضی (تبریز)

با تشکر از تستهای ارسالی شما درصورت لزوم از آنان استفاده خواهد شد.

آقای علی کاویانی دانش‌آموز سال سوم ریاضی (گرگان)

از مقالهٔ ارسالی شما بسیار سپاسگزاریم. امید است برای شماره‌های آیندهٔ مجله از آن استفاده کنیم.

آقای محمد صالح نانبیان دانش آموز سال دوم دبیرستان (مشهد)

از مقاله و مسائل ارسالی شما متشکریم. ولی باید به‌عرض برسانیم که مسائل ارسالی باید با حل کامل ارائه شود و در غیر این‌صورت امکان درج آنان نیست. همچنین در رابطه با بخش جدید در باغ تجربه‌ها باید بگوییم که این بخش می‌تواند لااقل برای برخی از خوانندگان انگیزه‌ها و جهشهایی را برای نیل به پژوهش و تحقیق ایجاد کند که امید است بیان تجربه‌های معلمین و استادان و دانش‌آموزان موفق رهگشا و راهنمایی برای خوانندگان عزیز باشد. همچنین متذکر می‌شویم که مجلهٔ ریاضی برهان یک مجلهٔ تعلیمی و آموزشی در جنبه‌های مختلف ریاضیات دبیرستانی است.

آقای حسن عطاردی دانش‌آموز سال سوم تجربی (گناباد)

ضمن تشکر از مسائل ارسالی شما باید به عرض برسانیم که مسائل ارسال شده باید همراه با حل کامل ارائه شوند تا درصورت مناسب بودن آنان چه ازنظر طرح و چه ازنظر حل، در یکی از شماره‌های آیندهٔ مجله به نام خودتان به چاپ برسد.

آقای مهرداد ناصرنژاد (آمل)

ضمن تشکر از مسائل ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که مسائل باید همراه با حل ارائه شوند. و ضرورتاً باید منبع و یا مأخذ آن نیز ذکر شود.

آقای جمال معروفی دانش آموز سال دوم ریاضی (آذربایجان غربی)
ضمن تشکر از مقالهٔ ارسالی شما در رابطه با «تثلیث زاویه با استفاده از خط کش و پرگار» به‌عرض می‌رسانیم که این مسأله و مسائلی نظیر آن مانند تربیع دایره و تضعیف مکعب ازنظر جواب ممتنع می‌باشند و امتناع آن را نیز می‌توانید در اکثر کتب معتبر ریاضی مشاهده کنید. البته برای حل تقریبی هریک از این گونه مسائل روشهای بسیاری موجود است که ازنظر عملی بسیار دقیق و خطای آن قابل اغماض است. بنابراین با توجه به اثبات امتناع هر یک از مسائل فوق نتیجه می‌شود که هر روشی که در رابطه با حل این گونه مسائل ارائه شود روش تقریبی است. درهر صورت تلاش شما تحسین آمیز است و موفقیت شما باعث شادمانی می‌باشد.

آقای امیر پاشامیربهاء دانش آموز سال دوم ریاضی (تهران)
با تشکر از مسأله ارسالی شما، امید است که در شماره‌های آیندهٔ مجله در قسمت مسائل از آن استفاده کنیم.

آقای عبدالرضا حیدری دانش آموز سال چهارم ریاضی (یزد)
با تشکر از مسائل ارسالی شما، امید است از آن در شماره‌های بعدی مجله استفاده شود.

آقای حسین اصلانی دانش آموز سال دوم (تبریز)
با عرض سلام و تشکر متقابل به عرض می‌رسانیم که سعی کنید مسائل را در سطح مطلوبتری ارائه دهید تا مورد استفادهٔ دانش آموزان قرار گیرد. با این حال درصورت امکان از مسائل شما استفاده خواهد شد.

آقای وحید فرشاد دانش آموز سال چهارم ریاضی (تبریز)
با تشکر از شما برای حل مسائل مسابقه‌ای و طرح و حل چند مسأله، به عرض می‌رسانیم که پس از بررسی لازم، از مسائل ارسالی شما درصورت لزوم استفاده خواهد شد.

آقای محمد رضا پویا دانش آموز سال سوم ریاضی (مشهد)
ضمن تشکر از دو مسائل ارسالی شما باید به عرض برسانیم که سعی کنید مسائلی را که ارائه می‌دهید بیشتر جنبهٔ طراحی و یا مفهومی داشته باشند و یا از منابع معتبر استخراج شده باشند تا مورد استفادهٔ دانش آموزان دبیرستان قرار گیرد. ضمناً مِسأله‌یی را که برای آن درخواست راهنمایی کرده بودید یک معادله نیست و یک عبارت جبری است، زیرا فاقد تساوی است. امید است که در طرح و عنوان مسائل بیشتر دقت شود.

خانم نسرین محمد زاده دانش آموز سال سوم ریاضی (بابل)
ضمن تشکر از مسائل ارسالی شما باید به عرض برسانیم که سعی کنید مسائلی راکه طرح و یا از منبعی برداشت می‌کنید در زمینهٔ ریاضیات دبیرستانی باشد و حتماً پاسخ مسائل را به‌طور تشریحی ارائه دهید.

آقای محمد قدرتی دانش آموز سال دوم ریاضی (بجنورد)
ضمن تشکر از مسأله ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که دستگاه‌هایی به شکل عمومی:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + y = m \\ x + \sqrt{y} = n \end{cases} \quad \text{و یا} \quad \begin{cases} x^2 + y = m \\ x + y^2 = n \end{cases}$$

منسوب به خیام است ولی در اصل از شیخ بهایی بوده است.

آقای مزدک نعمتیان (تهران)
ضمن عرض سلام و تشکر از توجه شما باید به عرض برسانیم که مجلهٔ ریاضی برهان همیشه از مقاله‌ها و مسائل و مطالب جدید و متنوع در سطح دانش آموزان دبیرستان استقبال می‌کند.

آقای مهدی احمدی اصل (تبریز)
با تشکر از شما برای ارسال دو مسأله با حل، امید است از آنان در آینده استفاده کنیم.

آقای کاظم ابام دانش‌آموز سال دوم ریاضی (بوکان)

با تشکر از مسألهٔ ارسالی شما، درصورت لزوم از آن استفاده خواهد شد.

آقای مهدی وحیدی دانش‌آموز سال دوم ریاضی (تهران)

با تشکر از مسألهٔ ارسالی شما امید است که در شماره‌های آیندهٔ مجله از آن استفاده کنیم.

آقای جعفر نوّابی دانش‌آموز سال اول (بروجرد)

ضمن تشکر از مقالهٔ شما در رابطه با اثبات هندسی اتحادهای جبری، به‌اطلاع می‌رسانیم که متأسفانه فقط اثبات هندسی اتحاد مربع قابل قبول است که این نوع اثبات را می‌توان در برخی از کتب خصوصاً کتب تاریخی مشاهده کرد. ضمن آرزوی موفقیت برای شما در انتظار مقاله‌های بعدی نیز هستیم.

خانم لیدا حامد سنگری دانش‌آموز سال دوم ریاضی (اصفهان)

ضمن عرض سلام از مسألهٔ ارسالی شما تشکر می‌کنیم. امید است از آن درآینده استفاده شود. همچنین متذکر می‌شویم که عموماً اگر بخواهیم از مسأله‌یی ارسالی استفاده کنیم، حتماً نام نویسندهٔ آن را قید خواهیم کرد.

آقای علی محمدی مقدم

ضمن تشکر از همکاری شما با مجلهٔ ریاضی برهان تقاضا می‌شود که مطالب ارسالی را به‌صورتی کاملتر همراه با شکل، یا به‌صورت تست تنظیم و مدون فرمایید تا برای درج در مجله مورد استفاده قرار گیرد.

آقای علی بهرامی زاده دانش‌آموز سال دوم ریاضی (نیشابور)

ضمن عرض تشکر از ارسال دو مسألهٔ حل شدهٔ شما به عرض می‌رسانیم که درصورت لزوم از مسائل شما استفاده خواهد شد.

آقای عباس زوّار دانش‌آموز سال سوم ریاضی (تکاب)

ضمن تشکر از نامهٔ شما به عرض می‌رسانیم که هدف مجلهٔ برهان آموزش و تعلیم ریاضیات دبیرستانی است. در هر صورت اگر در به ثمر رساندن این هدف موفق شویم امید است که جایی برای آموزش کامپیوتر و نظایر آن باز شود.

آقای هادی جمشیدی کارگر (بجنورد)

ضمن تشکر از نامهٔ شما به عرض می‌رسانیم که پاسخ گویی به سؤالهای ریاضی دانش‌آموزان جزو هدفهای مجلهٔ ریاضی برهان نیست و با توجه به حجم کاری روزافزون مجله امکان آن نیز بعید به‌نظر می‌رسد. به‌هرحال برای راهنمایی شما می‌توانیم کتاب تئوری اعداد دکتر غلامحسین مصاحب و یا تئوری اعداد دکتر نارنجانی و یا تئوری اعداد سید حسین سید موسوی را پیشنهاد کنیم.

آقای سیدجواد حسینی (تهران)

ضمن تشکر و قدردانی از زحمات بی‌دریغ شما برای ارسال مقاله‌ای تحت عنوان «چگونگی تدریس مبحث مشتق» به عرض می‌رسانیم که اولاً: لازمهٔ تدریس هر مبحث ریاضی در ابتدا آموزش مفاهیم بنیادی و قراردادها و پیش نیازهای آن است که پس از القای این مطالب می‌توان وارد عملیات مورد لزوم برای آن مبحث شد. به‌عنوان مثال اگر مبحث مورد نظر مشتق (یا رشد لحظه‌ای) باشد ابتدا باید به انگیزه‌های تاریخی آن اشاره‌ای شود و سپس وارد مفاهیم بنیادی آن شد و پس از آن باید علائم و قراردادها و فرمولهای آن را عنوان کرد. و درصورت لزوم به پیش نیاز آن که مبحث حدّ است از طریقی مثلاً دنباله‌ها اشاره‌ای کرد. و در آخر اعمال مربوط به آن و نتایج و کاربردهای آن را ارائه داد. در این‌جا با توجه به موارد اخیر نتیجه می‌شود که مقالهٔ شما فقط شامل قسمت آخر یعنی عملیات مشتق است که کتاب درسی از این نظر تقریباً کامل است و مشکل اساسی

دانش‌آموزان نمی‌باشد. و مشکل آنان بیشتر در انگیزه و فهم مشتق می‌باشد،که اگر در این زمینه مطالب جدید و متنوعی ارائه شود بسیار مورد تقدیر و توجه قرار خواهد گرفت. ضمن آرزوی موفقیت بیشتر و روزافزون در انتظار مقاله‌های بعدی شما هستیم.

آقای مسعود ساروی (گروه ریاضی دانشگاه پیام نور ساری)

ضمن تقدیر از ارسال مقالهٔ شما تحت عنوان «محاسبهٔ $\sum_{r=۱}^{n} r^k$ برای هر K صحیح و مثبت» به عرض می‌رسانیم که این مقاله در نوزدهمین کنفرانس ریاضی که در دانشگاه گیلان برگزار شده بود جزو مقاله‌های اختصاصی ارائه شد و به نام ارائه دهندهٔ آن نیز در شمارهٔ مسلسل ۱۶ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی صفحهٔ ۵۶ به چاپ رسید که در این‌جا نتیجه نهایی آن مقاله که یک دترمینان مرتبهٔ n ام است را جهت اطلاع عموم می‌آوریم:

$$S_k = ۱^k + ۲^k + ۳^k + \dots + n^k$$

$$S_k = \sum_{r=۱}^{n} r^k$$

$$S_k = \frac{n+۱}{(k+۱)!}$$

$$\begin{array}{cccccl}
۲ & ० & ० & ० & ० & \dots (n+۱)-۱ \\
۳ & ۳ & ० & ० & ० & \dots (n+۱)^۲-۱ \\
۴ & ۶ & ۴ & ० & ० & \dots (n+۱)^۳-۱ \\
۵ & ۱۰ & ۱۰ & ۵ & ० & \dots (n+۱)^۴-۱ \\
\dots & & & & & \\
K+۱ & \dots & & & & \dots (n+۱)^k-۱
\end{array}$$

تفریح اندیشه ۴

مربع سحرآمیز زیر به‌نظر ساده می‌رسد، اما در واقع مربع سحرآمیزی بسیار غیرمعمول است. چون عددهای آن را به‌طور افقی، قائم، یا قطری جمع کنیم نتیجه: ۲۶۴ است.

18	99	86	61
66	81	98	19
91	16	69	88
89	68	11	96

در مربع سحرآمیز ۴ در ۴ای چون این مربع، می‌توان این انتظار را نیز داشت که چهار مربع گوشه‌ای، چهار مربع داخلی، و هریک از چهار مربع نیز به‌همان مجموع سحرآمیز برسند. تا این‌جا چیز شگفت‌انگیزی موجود نیست.

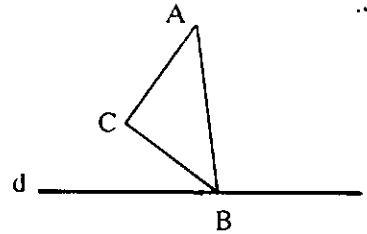
دراین‌صورت، چه چیز بخصوص سحرآمیزی در مورد این مربع موجود است؟ این دقیقاً همان چیزی است که باید آن را بیابید.

جواب در صفحهٔ ۹۶

مسائل مسابقه‌ای برهان ۷

● محمد هاشم رستمی

۱ـ نقطهٔ ثابت A و خط d که از نقطه A نمی‌گذرد، مفروض‌اند. مکان هندسی رأس زاویهٔ قائمه C از مثلث متساوی‌الساقین ABC را تعیین کنید که وترش AB و رأس B از آن روی خط ثابت d تغییر مکان می‌دهد.



۲ـ نقاط A (۱+ ، ۱- ، ۰) و B (۰ و ۱- و ۲) و صفحه $P: x - 2y - 2z - 3 = 0$ مفروض‌اند.

الف ـ مشخص سازید که نقاط A و B در یک طرف صفحهٔ P واقع‌اند یا در دوطرف آن.

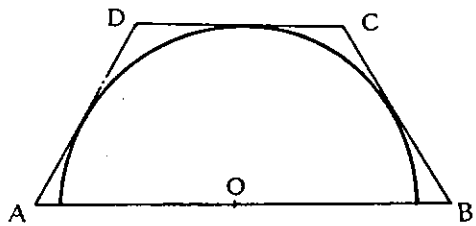
ب ـ نقطه‌ای روی صفحهٔ P بیابید که تفاضل فاصله‌اش از نقاط A و B بیشترین مقدار ممکن باشد.

ج ـ نقطه‌ای روی صفحهٔ P تعیین کنید که مجموع فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B کمترین مقدار ممکن باشد.

مسئله‌ای از المپیادهای بین‌المللی ریاضی

مرکز دایره‌ای بر ضلع AB از چهار ضلعی محاطی ABCD قرار دارد. سه ضلع دیگر چهار ضلعی بر این دایره مماسند.

ثابت کنید که: $AD + BC = AB$



بیست و ششمین المپیاد بین‌المللی ریاضی ۱۹۸۵

ادب ریاضی

منطق ریاضی پئانو، کلیهٔ قضیه‌های درعین حال پیچیدهٔ ریاضیات را، به کمک کمترین تعداد ممکن علامتهای قراردادی نمایش می‌دهد، که البته ترجمهٔ آنها به زبان معمولی خسته کننده خواهد بود، اما این عمل به معنای یک نوع ساده نویسی و تلخیص یا یک روش تندنویسی نیست، بلکه امکان می‌دهد تا قانونهای مربوط به این علامتها و تبدیل جمله‌ها، مورد بررسی قرار گیرند.

سرگذشت آنالیز ریاضی

آندره دولاشه، پرویز شهریاری

قضیهٔ دوبواریموند براین است که: «اگر رشتهٔ بی‌نهایتی از تابعهای صعودی داشته باشیم، همیشه یک تابع صعودی وجود دارد که از هریک از این تابعها بزرگتر است»، و به این ترتیب لزوم اعداد ترانسفینی یا ترامتناهی را آشکار کرده است، چه به این ترتیب مشخص می‌شود که رشتهٔ اعداد صحیح برای شمردن رشتهٔ تابعهای فوق کافی نیست و به عبارت دیگر مجموعهٔ تابعها، مجموعه‌ای قابل شمارش نمی‌باشد.

سرگذشت آنالیز ریاضی

آندره دولاشه، پرویز شهریاری

حل مسائل مسابقه‌ای برهان(۵)

۱ ـ بدون بسط و با استفاده از خواص دترمینان ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix} = x^2z^2$$

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -z \end{vmatrix}$$

$$= 0 + x \times (-x) \times z \times (-z) = x^2z^2$$

(در ماتریس اوّلی چون دو سطر ماتریس با هم برابر است پس مقدار دترمینان آن صفر است.)

[راه حل از مهرداد کاظمیان کلاس دوّم ریاضی (اصفهان)]

۲ ـ تابعی چند ضابطه‌ای چنان تعریف کنید که نمودار حاصل از آن کلمهٔ «برهان» را در صفحهٔ مختصات دکارتی رسم کند.

راه حل اول از: محسن عطاردی از شهرستان گناباد

$$f(x) = \begin{cases} y=2 & 1 \le x \le 4 \ ،\ 8 \le x \le 10 \ ،\ x = 12 \ \text{اگر} \\ y=4 & x = 2/5 \ ،\ 5 \le x \le 9 \ ،\ 10 \le x \le 14 \ \text{اگر} \\ y=5 & 7 \le x \le 9 \quad \text{اگر} \\ x=14 & 4 \le y \le 5 \quad \text{اگر} \\ x=10 & 2 \le y \le 5 \quad \text{اگر} \\ x=9 & 4 \le y \le 5 \quad \text{اگر} \\ x=8 & 4 \le y \le 5 \quad \text{اگر} \\ x=7 & 4 \le y \le 5 \quad \text{اگر} \\ x=5 & 4 \le y \le 10 \quad \text{اگر} \\ x=4 & 2 \le y \le 4 \quad \text{اگر} \\ x=1 & 2 \le y \le 4 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

راه حل دوم از: شهریار لطفی، سال چهارم ریاضی (شهرستان خوی)

$$\begin{cases} \dfrac{5x-68}{2x-27} & 11/5 \le x < 13/5 \\ -\sqrt{\dfrac{9}{4} - (x-10)^2} + 3 & 10 \le x \le 11/5 \\ (y-4)^2 = -2\left(x - \dfrac{19}{2}\right) & 7 \le x \le 9/5 \\ 4\left(x - \dfrac{15}{2}\right)^2 + (y-4)^2 = 1 & 7 \le x \le 8 \\ \dfrac{5x-30}{2x-9} & 4/5 \le x \le 7 \\ -\sqrt{\dfrac{9}{4} - \left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2} + 3 & 1 \le x \le 4 \\ 1/5 & x = 12/5 \\ 2/5 & x = 2/5 \end{cases}$$

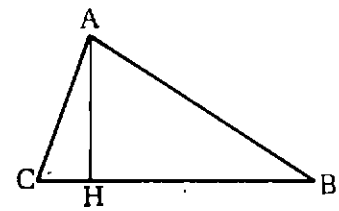
مسائل برای حل

- هندسه: محمد هاشم رستمی
- ریاضیات جدید: حمید رضا امیری
- جبر و مثلثات: احمد قندهاری و محمدرضا هاشمی

مسائل ریاضیات سال اول ریاضی

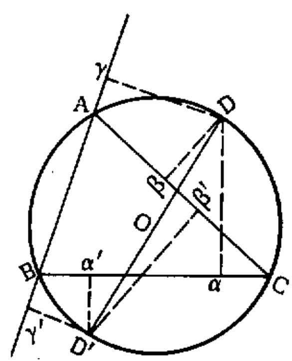
۱ــ درمثلث ABC، اگر $AB>AC$ و AH ارتفاع نظیر رأس A باشد، ثابت کنید که:

$$H\hat{A}B > H\hat{A}C$$



۲ــ ثابت کنید که خطوط سنسون مربوط به دوسر هر قطر از دایرهٔ محیطی یك مثلث، برهم عمودند.

تعریف خط سنسون ــ تصاویر هر نقطه از دایرهٔ محیطی یك مثلث روی اضلاع یا امتداد اضلاع آن مثلث سه نقطه‌اند واقع بر یك خط راست، که این خط راست‌را خط سنسون نظیر آن نقطه می‌نامند.



۳ــ هرگاه گزاره‌های

$$(p \Rightarrow q) \text{ و } (q \Rightarrow r) \text{ و } (\sim r \vee \sim p)$$

دارای ارزش درست باشند، ارزش گزارهٔ

$$r \Leftrightarrow (\sim r \vee p) \Rightarrow q$$

را تعیین کنید.

۴ــ برای ۳ مجموعهٔ دلخواه A و B و C ثابت کنید:

$$(C \cap [(A-B) \cup B]) \cup (A \cup B) = (A \cup B)$$

۵ــ هرگاه:

$$A = \{a\,,\,\{a\}\,,\,\{a\,,\,\{a\}\}\}$$

اولاً ــ یك افراز برای مجموعهٔ A بنویسید که دوعضوی باشد
ثانیاً ــ اگر این مجموعه ۲۴ زیر مجموعه از زیر مجموعه‌های مجموعهٔ B کمتر داشته باشد معین کنید B چند عضوی است.

۶ــ دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} \frac{x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{u}=\frac{u}{s}=\frac{s}{t} \\ x=۸u \\ x+y+z+u+s+t=۱۵\frac{۳}{۴} \end{cases}$$

(بهروز بیرامی دانش‌آموز رشته ریاضی شهرستان نقده)

۷ــ معادله:

$$(x-۱)m^{۲}+(x+۱)m+(۶-۲x)=۰$$

را حل و بحث کنید.

۸ـ دستگاه مقابل را حل کنید:

$$\begin{cases} x+y+z=۶ \\ y+z+t=۹ \\ z+t+x=۸ \\ t+x+y=۷ \end{cases}$$

مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱ـ در مثلث ABC ،

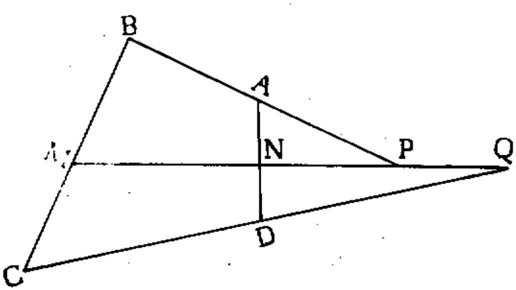
$AC=۱۵cm$ و $AB=۱۴cm$ ، $BC=۱۳cm$

است. دایره‌ای که مرکز آن روی ضلع AB واقع است در نقاط D و E بر اضلاع AC و BC مماس می‌باشد. مساحت قطاع ODE را به دست آورید.

فرستنده: آقای محمدعلی سلحشور دبیر ریاضی از اصفهان

۲ـ چهارضلعی $ABCD$ مفروض است. نقاط M و N به ترتیب وسط ضلعهای مقابل BC و DA می‌باشند. خط راست MN امتداد ضلعهای AB و CD را به ترتیب در نقاط P و Q قطع می‌کند. ثابت کنید که :

$$\frac{PA}{PB}=\frac{QD}{QC}$$



۳ـ هرگاه رابطهٔ R روی مجموعهٔ A یك رابطهٔ هم‌ارزی باشد ثابت کنید $R^{-۱}$ نیز یك رابطهٔ هم‌ارزی است.

۴ـ خاصیت یك به یکی و پوشایی‌را برای تابع باضابطهٔ زیر بررسی کنید:

$$f: IR^۲ \to IR^۲$$

$$f(x,y)=\left(\frac{۲x-۶}{x+۲}\ ,\ \frac{y+۴}{۲y-۱}\right)$$

۵ـ در گروه $(G,*)$ هرگاه داشته باشیم:

$$\forall x,y\in G \ ، \ (x*y)^۲=x^۲*y^۲$$

ثابت کنید $(G,*)$ آبلی است.

۶ـ به روش برداری ثابت کنید در هرمتوازی‌الاضلاع قطرها منصف یکدیگرند.

۷ـ نقاط $A\begin{vmatrix} ۰ \\ ۰ \end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix} ۶ \\ ۰ \end{vmatrix}$ دو رأس مثلث قائم‌الزاویه ABC می‌باشدکه مساحت آن (۱۲) است اگر **AB یك ضلع** زاویه‌قائمه باشد، مختصات رأس(C) را بیابید. (چهار جواب)

۸ـ نامعادله مقابل را حل کنید:

$$۲x^۳-۷x^۲+۳x<۰$$

۹ـ اگر $tg\,x=۲$ باشد حاصل عبارت زیر را حساب کنید.

$$A=\frac{۴۵(sin^۵x+cos^۵x+sin\,x)}{sin^۳x+cos^۳x}$$

(جواد محمدپور دانش‌آموز رشته ریاضی لنگرود)

۱۰ـ اگر $cos\,x=\frac{b}{a}$ و $a\neq ۰$ و x حاده باشد، ثابت کنید:

$$\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}+\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}=\frac{۲}{sin\,x}$$

(اسماعیل مهدوی دانش‌آموز رشتهٔ تجربی آمل)

۱۱– معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید:

$$(\sin x+۱)(\sin x+۶)(\sin x+۲)(\sin x-۳)=-۸۴$$

(محمد قدرتی دانش‌آموز رشته ریاضی بجنورد)

مسائل ریاضیات سال سوم ریاضی

۱– نقطهٔ برخورد AA' و BB' و CC'، نیمسازهای زوایای داخلی مثلث ABC را O می‌نامیم.

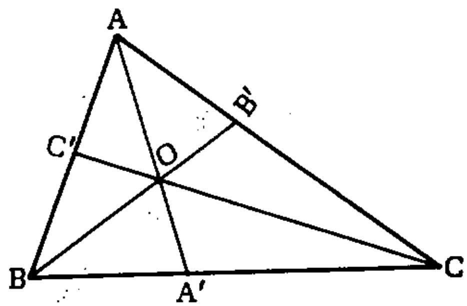
اولاً– اندازهٔ پاره‌خطهای OA و OB و OC را برحسب اندازهٔ اضلاع مثلث به دست آورید.

ثانیاً– ثابت کنید که:

$$\frac{OA}{AA'}+\frac{OB}{BB'}+\frac{OC}{CC'}=۲$$

ثالثاً – ثابت کنید که:

$$OA \cdot OB \cdot OC=۴Rr^۲$$



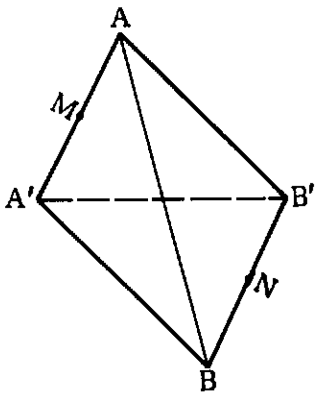
۲– چهار وجهی $AA'BB'$ را که در آن

$$AB=A'B'=AB'=A'B$$

است، در نظر می‌گیریم.

الف– ثابت کنید که AA' و BB' برهم عمودند.

ب– ثابت کنید که پاره خط MN که وسطهای پاره‌خطهای AA' و BB' را به هم‌وصل می‌کند عمود مشترک این دو پاره‌خط است.



۳– هرگاه بردارهای v_1، v_2، ... و v_n از فضای برداری v مستقل‌خطی باشند ثابت کنید هرزیر مجموعه از این مجموعه بردارها نیز مستقل‌خطی است.

۴– هرگاه داشته باشیم:

$$T=xy+xz+x'yz$$

اولاً– جدول ارزشی را برای عبارت بولی T معین کنید.

ثانیاً– آن‌را ساده کرده و توسط عضوهای منطقی رسم کنید.

۵– درجعبه A، ۴ مهره قرمز و ۲ مهره سبز ودرجعبهٔ B، ۵ مهره قرمز و ۳ مهره سبز موجود است. ازهرجعبه ۲ مهره به تصادف خارج می‌کنیم مطلوب است احتمال آنکه : الف) هر ۴ مهرهٔ خارج‌شده همرنگ باشند، ب) ۳ مهره از ۴ مهرهٔ خارج شده قرمز باشند.

۶– درتابع باضابطهٔ $y=(x-۱)(x^۲+mx+۲)$، m راچنان‌بیابید تاعرض ماکزیمم یا عرض مینیمم تابع برابر صفر باشد.

۷– به‌ازای مقادیرمختلف m در تعداد و علامت ریشه‌های معادله $x^۳-۳x+۱-m=۰$ به کمك رسم‌منحنی بحث کنید.

۸– ثابت کنید:

$$A=\cos\frac{\pi}{۱۱}+\cos\frac{۳\pi}{۱۱}+\cos\frac{۵\pi}{۱۱}+\cos\frac{۷\pi}{۱۱}+\cos\frac{۹\pi}{۱۱}=\frac{۱}{۲}$$

(جواد محمدپور دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی لنگرود)

۹ـ معادلات زیر را حل کنید:

الف) $\sin^3 x+\sin^3 2x+\sin^3 3x$
$=(\sin x+\sin 2x+\sin 3x)^3$

(ادریس عبادی دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی مشهد)

ب) $\cos 2(x+\frac{\pi}{3})+4\sin(x+\frac{\pi}{3})=\frac{5}{2}$

(رضا نصیری دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی استان زنجان)

مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱ ـ بردارهای:

$$\vec{v}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k} \quad \text{و} \quad \vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$$

مفروضند.

اولاً ـ اندازهٔ جبری تصویر بردار $\vec{u}$ روی بردار $\vec{v}$ را محاسبه کنید.

ثانیاً ـ بردار $\vec{u}$ را به دو بردار $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ چنان تجزیه کنید که:

$$\vec{u}_2 \perp \vec{v} \quad \text{و} \quad \vec{u}_1 \parallel \vec{v}$$

باشند.

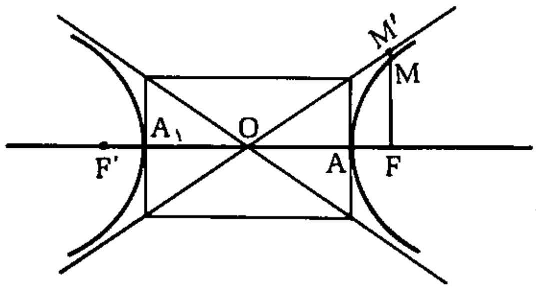
۲ـ وضع خط $D:\begin{cases}x=0\\ y-z=2\end{cases}$ را نسبت به هریك از محورهای مختصات تعیین کنید.

۳ـ معادله دایره‌ای را بنویسید که شعاعش برابر ۴ است، از نقطهٔ $M(4,0)$ می‌گذرد و بر دایرهٔ

$$C: x^2+y^2-2x+2y=0$$

عمود است.

۴ـ از کانون F یك هذلولی، عمودی برمحور کانونی آن (دریك طرف محور) اخراج می‌کنیم تا هذلولی را در نقطهٔ M و مجانب را در نقطهٔ M' قطع کند. ثابت کنید که اندازهٔ پاره‌خط MM' برابر است با شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث تشکیل‌شده از مجانبها و خط مماس در یك رأس هذلولی.



۵ـ درستی استنتاج زیر را بررسی کنید:

$$\begin{aligned}
&1)\quad (p \Rightarrow \sim r) \quad \wedge\\
&2)\quad (\sim p \wedge r) \Rightarrow q \quad \wedge\\
&3)\quad (\sim t \wedge r)\\
\hline
&\therefore \quad t \Leftrightarrow \sim q
\end{aligned}$$

۶ـ در تقسیم عددی بر ۲۵، باقیمانده مکعب خارج قسمت است. این عدد را معین کنید.

۷ـ هرگاه p عددی اول و بزرگتر از ۵ باشد ثابت کنید p^4-1 بر ۱۲۰ بخش‌پذیر است.

۸ـ هرگاه $(a,b)=d$ و $[a,b]=c$ ثابت کنید:

$$(a+b\ ,\ c)=d$$

۹ـ هرگاه A ماتریسی وارون‌پذیر بوده و داشته باشیم $A'A=AA'$ ثابت کنید:

$$(A'A^{-1})'=(A'A^{-1})^{-1}$$

۱۰ـ تابع با ضابطهٔ:

$$a,b,c>0 \text{ و } c\neq 0,\ y=\frac{ax^2+b}{cx}$$

را چنان مشخص کنید تا حاصل ضرب طولهای نقاط اکسترمم منحنی تابع برابر ۱ − و قدرمطلق تفاضل مقادیر اکسترمم منحنی تابع برابر (۴) باشد.

۱۱− خط $y=m$ منحنی تابع با ضابطهٔ:

$$y=\frac{x^2-2x+5}{2x-1}$$

را در نقاط A و B وخط $x=1$ را درنقطهٔ M قطع می‌کند.

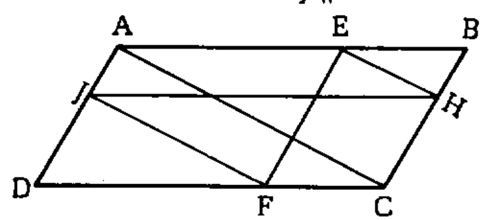
اولاً− ثابت کنید معادله مکان‌هندسی نقطه P وسط AB از نقاط مشخص منحنی تابع‌فوق می‌گذرد. ثانیاً− مطلوب است تعیین معادله مکان‌هندسی نقطه N مزدوج توافقی نقطه M نسبت به دو نقطه A و B.

مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

۱− در متوازی الاضلاع ABCD :

$EH \parallel AC$ و $FJ \parallel AC$ و $EF \parallel AD$

است. ثابت کنید که $HJ \parallel AB$ است.



۲− در مثلث ABC :

$\hat{A}=60^\circ$ و $AC=8cm$ و $AB=12cm$

است. اندازهٔ ارتفاع AH را به دست آورید.

۳− اگر درمعادلهٔ $ax^2+bx+c=0$، یکی از ریشه‌ها m برابر دیگری باشد حاصل عبارت $A=x_1^2-2x_2^2$ را حساب کنید (m مخالف‌صفر و x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌فرض می‌شوند).

(رضا نصیری دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی استان زنجان)

۴− چهارعددطبیعی متوالی پیدا کنید که مکعب یکی از آنان برابر مجموع مکعبات سه‌عدد دیگر باشد (مسئله‌چندجواب دارد).

(بهادر طالبی دانش‌آموز تبریز)

۵− اگر m برابر جملهٔ mام یک تصاعدحسابی با p برابر جملهٔ pام آن برابر باشد با توجه به شرط $m\neq p$ ثابت کنید جملهٔ $(m+p)$ام آن برابرصفر است.

(محمد قدرتی دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی بجنورد)

۶− معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\sqrt{\log_{\sqrt{5}}^{x^2}}+\sqrt{\log_{25}^{x}}=4+\sqrt{2}$$

(حسن ولی‌زاده دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی مهاباد)

۷− مقدار عبارت زیررا تعیین کنید:

$$A=3tg130^\circ-2cotg140^\circ-tg230^\circ-5tg310^\circ+cotg40^\circ-4tg50^\circ$$

$$B=\cos\left(\mathrm{Arc}\cos\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)+\mathrm{Arc}\,tg\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)+\mathrm{Arc}cotg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\mathrm{Arc}\sin\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

۸− معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$\sin x-\cos x-\sin x\cos x+1=0$$

(مسائل ۷ و ۸ اسماعیل مهدوی دانش‌آموز رشتهٔ تجربی آمل)

مسائل ریاضیات سوم تجربی

۱− نقاط :

$C(3,0)$ و $B(-2,1)$ و $A(0,3)$

رئوس مثلث ABC مفروضند. قرینهٔ مرکزی مثلث ABC

نسبت به رأس A را پیدا کنید و اندازهٔ بردار مکان مرکز ثقل این مثلث را حساب کنید.

۲ـ مثلث قائم الزاویهٔ $(\hat{A}=90^\circ)ABC$ مفروض است. اگر $AB=10$ و $AC=24$ باشد.

اولاً ـ حجم کرهٔ حاصل از دوران دایرهٔ محیطی این مثلث حول وتر مثلث را محاسبه کنید.

ثانیاً ـ سطح قطاعی از این کره را که زاویهٔ مسطحهٔ فرجه‌اش 60° است به دست آورید.

۳ـ نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB و M نقطه‌ای دلخواه از خط راست AB می‌باشد، ثابت کنید:

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2=2(\overline{OA}^2+\overline{OM}^2)$$

(محمد قدرتی دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی بجنورد)

۴ـ حد زیر را حساب کنید:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$$

(رشید مقدسی دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی شیروان)

۵ـ ثابت کنید شرط آنکه خط:

$$ax+by+c=0$$

برمنحنی نمایش تابع با ضابطهٔ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

مماس گردد چنین است: $a^4+b^4=c^2$

(حسن ولی‌زاده دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی مهاباد)

۶ـ اگر $x+y+z=k\pi$ ثابت کنید:

$$tg\,x+tg\,y+tg\,z=tg\,x\,tg\,y\,tg\,z$$

(محمد قدرتی دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی بجنورد)

۷ـ معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید:

$$2\cos\frac{x}{3}+\sin\frac{x}{2}=2$$

(کاوه بذرافکن دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی تهران)

۸ـ حاصل عبارت زیر را حساب کنید:

$$A=tg10^\circ tg50^\circ-tg10^\circ tg70^\circ+tg50^\circ tg70^\circ$$

(کاظم ایام دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی بوکان)

مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱ـ معادلهٔ مکان هندسی مرکز تقارن منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ:

$$f(x)=\frac{1-12mx}{4x-3m}$$

به ازای مقادیر مختلف m کدام است؟

۲ـ نقاط:

$$F'(2+2\sqrt{3},-3) \text{ و } F(2-2\sqrt{3},-3)$$

کانونهای یک هذلولی متساوی القطرین می‌باشند. معادلهٔ این هذلولی را بنویسید.

۳ـ اندازهٔ سطح محصور بین دو سهمی به معادلات:

$$y^2=k^3x \text{ و } x^2=k^3y$$

برابر ۷۲ است، مقدار $|k|$ را پیدا کنید.

۴ـ مقدار:

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} cotg^m 2x\, cosec^2 2x\, dx$$

برابر $\frac{1}{14}$ است، مقدار m را حساب کنید.

۵ـ به ازای چه مقادیری از m معادلهٔ:

$$m(1+\sin x+\cos x)=3\cos x+2$$

دارای جواب است؟

حل مسائل برهان شمارهٔ ۶

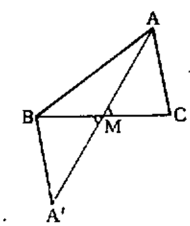
حل مسائل سال اول

۱- میانهٔ AM را بــه اندازهٔ خود تا نقطهٔ A' امتداد می‌دهیم. از A' به B وصل می‌کنیم. دومثلث MAC و $MA'B$ به حالت برابری دو ضلع و زاویهٔ بین متساویند زیرا:

$$A\hat{M}C = A'\hat{M}B \quad \text{و} \quad MA'=MA \quad \text{و} \quad MB=MC$$

است. از تساوی این دومثلث نتیجه می‌شود که:

$$M\hat{A}'B = M\hat{A}C \quad \text{و} \quad A'B=AC$$



اما بنابــه فرض $AB>AC$ است پس $AB>A'B$ می‌باشد لذا در مثلث ABA' داریم:

$$B\hat{A}'M > B\hat{A}M$$

که اگــر به جای $B\hat{A}'M$ مساویش $M\hat{A}C$ را قــرار دهیم، خواهیم داشت :

$$M\hat{A}C > B\hat{A}M$$

و یا :

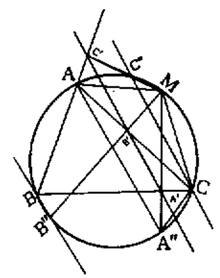
$$M\hat{A}B < M\hat{A}C$$

با توجه به ایــن مسأله می‌توان گفت که : در مثلث غیر متساوی‌الساقین در یک‌رأس، میانهٔ نظیر آن رأس باضلع بزرگتر، زاویه‌ای می‌سازد که این زاویه، کوچکتر است از زاویه‌ای که با ضلع کوچکتر می‌سازد.

$$\Delta ABC : M\in BC \quad \text{و} \quad MB=MC \quad \text{و} \quad AB>AC$$

$$\Longrightarrow M\hat{A}B < M\hat{A}C$$

۲- می‌دانیم که نقاط A' و B' و C' که تصاویر نقطهٔ M از دایرهٔ محیطی مثلث به ترتیب روی اضلاع BC و AC و AB می‌باشند، سه‌نقطه‌اند واقع بریک‌خط راست که این خط راست را خط سمسن نظیر نقطهٔ M می‌نامند.



از M بــه رأسهای A و C و از رأس C به نقطهٔ A'' وصل می‌کنیم. در چهار ضلعیهای محاطی :

$$MB'A'B \quad \text{و} \quad MAA''C$$

داریم:

$$A\hat{A}''M = A\hat{C}M \qquad (۱)$$

و

$$B'\hat{A}'M = B'\hat{C}M \qquad (۲)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که:

$$A\hat{A}''M = B'\hat{A}'M'$$

در نتیجه خط AA'' با خط سمسن نظیر نقطهٔ M یعنی بــا خط $A'B'C'$ موازی است.

به همین ترتیب ثابت می‌شود که خطهای BB'' و CC'' نیز باخط $A'B'C'$ موازی می‌باشند.

۳- چون $p \Longleftrightarrow q$ گزاره‌ای‌درست‌است لذا $p\equiv q$
از طرفی چون $(p\wedge q)$ نادرست است پس $p\equiv q\equiv F$ پس:

$$p\equiv F \to \sim p\equiv T \to [q \Longleftrightarrow \underbrace{(\sim p\vee s)}_{T}]\equiv F$$

$$p\equiv F \to (p\Longrightarrow r)\equiv T$$

وچون گزارهٔ دو شرطی دارای دو مؤلفه یکی درست وطرف دیگرنادرست‌است پس درکل نادرست‌است.

۴-

الف) $A-B=\{x\in \mathbb{R} \mid ۵<x\}$

ب) $B-A=\{x\in \mathbb{R} \mid x<۲\}$

ج) $B'=\{x\in \mathbb{R} \mid x>۵\} \Longrightarrow B'-A=\varnothing$

د) $A'=\{x\in \mathbb{R} \mid x<۲\} \Longrightarrow A'\cap B'=\varnothing$

۵-

$$\frac{۱}{۵x-y-۱}=A \quad \text{و} \quad \frac{۱}{۳x+۲y-۱۱}=B$$

$$\xrightarrow[-۵]{۴} \begin{cases} ۴A+۵B=۲ \\ ۳A+۴B=\frac{۳۱}{۲۰} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} ۱۶A+۲۰B=۸ \\ -۱۵A-۲۰B=-\frac{۳۱}{۴} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$A=8-\frac{31}{4} \Rightarrow \boxed{A=\frac{1}{4}} \Rightarrow \boxed{B=\frac{1}{5}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\frac{1}{5x-y-1}=\frac{1}{4}\\ \frac{1}{3x+2y-11}=\frac{1}{5}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}5x-y-1=4\\ 3x+2y-11=5\end{cases}$$

$$\Rightarrow 2\begin{cases}5x-y=5\\ 3x+2y=16\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}10x-2y=10\\ 3x+2y=16\end{cases} \Rightarrow 13x=26$$

$$\Rightarrow \boxed{x=2} \Rightarrow \boxed{y=5}$$

۶ـ

$$\begin{cases}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0\\ (\sqrt{b}-\sqrt{c})^2\geqslant 0\\ (\sqrt{c}-\sqrt{a})^2\geqslant 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a+b-2\sqrt{ab}\geqslant 0\\ b+c-2\sqrt{bc}\geqslant 0\\ c+a-2\sqrt{ac}\geqslant 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}(a+b)\geqslant 2\sqrt{ab}\\ (b+c)\geqslant 2\sqrt{bc}\\ (c+a)\geqslant 2\sqrt{ac}\end{cases}$$

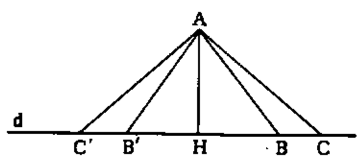
چون دوطرف مثبت‌اند طرفین‌را در هم‌ضرب می‌کنیم:

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8\sqrt{a^2b^2c^2}$$

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc$$

حل تشریحی تستهای سال اول

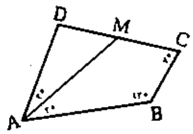
۱ـ گزینهٔ (۳) جواب‌است. زیرا اگر ازنقطهٔ A عمود AH را برخط d فرود آوریم $AH=4$ است و در نتیجه مجموعهٔ نقاطی ازخط d که در رابطهٔ $5\leqslant AM\leqslant 6$ صدق می‌کنند. دو پاره‌خط متساوی‌درطرفین‌نقطهٔ H را تشکیل می‌دهند.



۲ـ گزینهٔ (۴) جواب است زیرا:

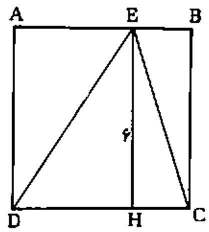
$D\hat{A}B=60°$ و با $D\hat{A}M=30°$ است. ازآن‌جا:

$$A\hat{D}M=360-(60+130+70)=100°$$



۳ـ گزینهٔ (۲) جواب است زیرا مساحت مثلث EDC برابراست با $\frac{1}{2}DC\times EH$ یعنی:

$$S_{EDC}=\frac{1}{2}\times 6\times 6=18cm^2$$



نکته: باید توجه داشت‌که اندازهٔ مساحت مثلث EDC به اندازه پاره‌خط $EB=2$ بستگی ندارد زیرا نقطهٔ E برهر نقطه‌ای ازخط AB منطبق‌باشد ارتفاع نظیر ضلع DC از مثلث EDC مقداری ثابت‌برابر ۶ سانتی‌متر می‌باشد.

۴ـ گزینهٔ (۲) صحیح‌است زیرا:

گزاره‌های $(p\vee q)$ و $(p\Leftrightarrow q)$ هردو درست بوده پس $p\equiv q\equiv T$ و چون تالی گزارهٔ $p\Longrightarrow(\sim p\wedge\sim q)$، یعنی گزارهٔ p درست‌است پس‌ارزش این گزاره همواره درست است.

۵ـ گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

اگر مثلاً فرض کنیم:

$A=\{1,2,3,4\}$

$B=\{1,2,5\}$ و $C=\{1,2,5,8,9\}$

هیچ‌یك از مواردقبل برقرار نیست.

۶ـ گزینه ۳ درست است زیرا $a>b$ طرفین را در $b^2>0$ ضرب می‌کنیم: $ab^2>b^3$

۷ـ

$$\frac{a^6-b^6}{(a+b)^3(a^3-b^3)}=\frac{(a^3+b^3)\cancel{(a^3-b^3)}}{(a+b)^3\cancel{(a^3-b^3)}}$$

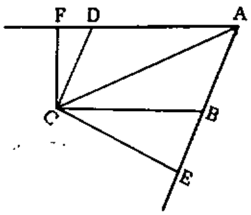
$$=\frac{(2\sqrt{2})^3+2\sqrt{2}}{(3\sqrt{2})^3}=\frac{18\sqrt{2}}{54\sqrt{2}}=\frac{1}{3}$$

حل مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱ ـ در متوازی‌الاضلاع ABCD، $AB=CD$ و $BC=AD$ است و دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BCE و CDF متشابهند زیرا: $\hat{B}_1=\hat{D}_1$ است لذا داریم:

$$\frac{BC}{CD}=\frac{BE}{DF} \Longrightarrow BC\cdot DF=CD\cdot BE \Longrightarrow$$

$$AD\cdot DF=AB\cdot BE \qquad (1)$$



در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACE می‌توان نوشت:

$$AC^2=AE^2+EC^2 \Longrightarrow$$

$$AC^2=(AB+BE)^2+EC^2 \Longrightarrow$$

$$AC^2=AB^2+BE^2+2AB\cdot BE+EC^2$$

$$BE^2+EC^2=BC^2=AD^2 \Longrightarrow$$

$$AC^2=AB^2+AB\cdot BE+AD^2+AB\cdot BE$$

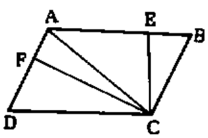
$$AC^2=AB^2+AB\cdot BE+AD^2+AD\cdot DF \Longrightarrow$$

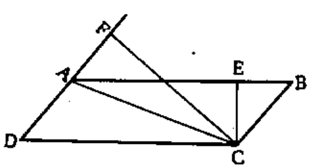
$$AC^2=AB(AB+BE)+AD(AD+DF) \Longrightarrow$$

$$AC^2=AB\cdot AE+AD\cdot AF$$

درصورتی‌که AC قطر کوچك‌متوازی‌الاضلاع ABCD باشد (شکل‌زیر)، درحالتی‌که نقاط E وF روی‌اضلاع‌متوازی‌الاضلاع قرار داشته‌باشند رابطهٔ فوق تغییر نمی‌کند و درحالتی که یکی‌از دونقطهٔ E یا F در امتداد یك ضلع متوازی‌الاضلاع واقع شود رابطه به صورت زیر درمی‌آید (نقطهٔ F در امتداد ضلع AD است).

$$AC^2=AB\cdot AE-AD\cdot AF$$

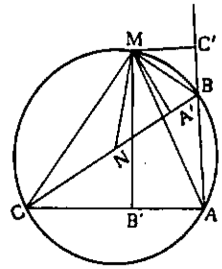




۲ـ روی‌پاره‌خط BC نقطهٔN را چنان‌اختیارمی‌کنیم که:

$M\hat{N}B = M\hat{C}A$

باشد. دراین صورت داریم:



$\Delta BMN \sim \Delta AMC : M\hat{B}N = M\hat{A}C$

$M\hat{N}B = M\hat{C}A \Rightarrow \frac{BN}{MA'} = \frac{AC}{MB'} \qquad (۱)$

$\Delta MCN \sim \Delta AMB : M\hat{C}N = M\hat{A}B$

$M\hat{N}C = ۱۸۰ - M\hat{N}B = ۱۸۰ - M\hat{C}A = M\hat{B}A$

$\Rightarrow \frac{CN}{MA'} = \frac{AB}{MC'} \qquad (۲)$

ازجمع رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$\frac{BN}{MA'}+\frac{CN}{MA'} = \frac{AC}{MB'}+\frac{AB}{MC'} \Rightarrow$

$\frac{BC}{MA'} = \frac{AC}{MB'}+\frac{AB}{MC'}$

۳-

فرض کنیم $(x,y)\in(R\cap R^{-1}) \Rightarrow$

$(x,y)\in R \wedge (x,y)\in R^{-1}$

$\xRightarrow{\text{تعریف وارون}} (y,x)\in R^{-1}\wedge (y,x)\in R$

$\xRightarrow{\text{تعریف اشتراک}} (y,x)\in(R\cap R^{-1})$

پس $(R\cap R^{-1})$ دارای خاصیت تقارنی است.

و به همین‌صورت ثابت می‌شود $(R\cup R^{-1})$ نیزدارای خاصیت‌تقارنی است.

۴- برای‌اینکه رابطهٔ R خاصیت پادتقارنی داشته‌باشد می‌بایست:

$\forall x,y\in \mathbb{R} ,\ (xRy\wedge yRx)\Rightarrow x=y$

پس فرض می‌کنیم xRy و yRx وثابت می‌کنیم $x=y$

$xRy \wedge yRx \Rightarrow ax+by=c \wedge ay+bx=c$

$\Rightarrow ax+by=ay+bx \Rightarrow$

$(a-b)x=(a-b)y$

وشرط اینکه ازتساوی اخیربه تساوی $x=y$ برسیم آن است که بتوانیم طرفین‌را بر $(a-b)$ تقسیم کنیم که ایجاب می‌کند،

$a\neq b$

- اثبات پوشایی تابع :

$f: N^2 \to N$

$f(a,b)=۲^{a-1}(۲b-1)$

درصفحهٔ ۳۲ ، مثال ۱۴ ازهمین شماره اثبات شده است. حال به بررسی‌خاصیت یك‌به‌یکی این تابع می‌پردازیم.

$f(a_1 , b_1)=f(a_2 , b_2) \Rightarrow$

$۲^{a_1-1}(۲b_1-1)=۲^{a_2-1}(۲b_2-1) \Rightarrow$

$\frac{۲^{a_1-1}}{۲^{a_2-1}}=\frac{۲b_2-1}{۲b_1-1} \Rightarrow ۲^{a_1-a_2}=\frac{۲b_2-1}{۲b_1-1}$

سمت راست تساوی اخیرتقسیم دو عدد فرد بریکدیگر است که حاصل همواره فرد است و سمت چپ تساوی اگر $a_1\neq a_2$ به صورت‌توانی از ۲ بوده و زوج‌است واین‌غیرممکن‌است پس: $a_1=a_2$ یا $a_1-a_2=0$ یا $۲^{a_1-a_2}=1$ پس:

$\frac{۲b_2-1}{۲b_1-1}=1 \Rightarrow ۲b_2-1=۲b_1-1$

$\Rightarrow b_2=b_1$

بنابراین $(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$ یعنی‌تابع یك‌به یك است.

۵- $x'^{10}=a \quad x''^{10}=b$

$x'^{10}+x''^{10}=k$

$\Rightarrow a+b=k$

طرفین را بتوان ۳ می‌رسانیم:

$a^3+b^3+3ab(a+b)=k^3$

$\underbrace{x'^{30}+x''^{30}}+3x'^{10}\cdot x''^{10}(x'^{10}+x''^{10})=k^3$

$S_{30}+3(x'x'')^{10}(k)=k^3$

$S_{30}+3(-1)^{10}(k)=k^3 \Rightarrow$

$\boxed{S_{30}=k^3-3k}$

۶- $a^{\lg x}$ و $a^{\lg y}$ و $a^{\lg z}$ تصاعد هندسی می‌سازند پس می‌توان نوشت:

$(a^{\lg y})^2=a^{\lg x}\times a^{\lg z}$

$a^{2\lg y}=a^{\lg x+\lg z} \Rightarrow 2\lg y=\lg x+\lg z$

$\Rightarrow \lg y^2=\lg x\cdot z$

$\Rightarrow y^2=x\cdot z$

۷- به ترتیب داریم:

$\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{10}+\frac{3\pi}{10}$

$\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{10} \Rightarrow$

$\sin\frac{2\pi}{10}=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{10})$

$\sin\frac{2\pi}{10}=\cos\frac{3\pi}{10} \Rightarrow$

$2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}=4\cos^3\frac{\pi}{10}-3\cos\frac{\pi}{10}$

چون $\cos\frac{\pi}{10}\neq 0$ است، بنابراین پس از تقسیم طرفین تساوی فوق بر $\cos\frac{\pi}{10}$ وتبدیلهای لازم خواهیم داشت:

$4\sin^2\frac{\pi}{10}+2\sin\frac{\pi}{10}-1=0$

وبا توجه‌به $\sin\frac{\pi}{10}>0$ داریم:

$\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

۸- حداکثرمقدار سمت‌چپ معادله برابراست‌با ۲ وآن وقتی است‌که هم $\sin x=1$ وهم $\sin 5x=1$ باشد. حداقل مقدار سمت‌راست معادلـه هم برابر ۲ می‌باشد، بـه شرطی‌که $\cos x=0$ باشد. بنابراین معادله وقتی برقراراست‌که دستگاه توأم زیرجواب داشته‌باشد.

$$\begin{cases}\sin 5x=1\\ \sin x=1\\ \cos x=0\end{cases}$$

ازحل معادله‌های دستگاه و اشتراك‌آنها خواهیم داشت:

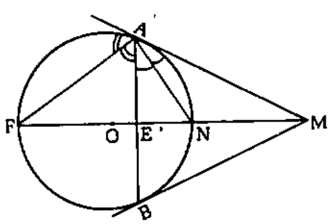
$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$

حل تشریحی تستهای سال دوم ریاضی

۱- اگر از نقطهٔ A به نقاط N و F وصل‌کنیم خطوط AN و AF نیمسازهای درونی و بیرونی زاویهٔ A از مثلث AME می‌باشند بنابراین داریم :

$\frac{FM}{FE}=\frac{NM}{NE}$

پس گزینهٔ (۲) درست است.



۲- مساحت قطاع $\alpha°$ در یك دایره به شعاع R برابر است با :

$S_{\text{قطاع } \alpha°}=\frac{\pi R^2\alpha°}{360°}$

پس :

$$۳\pi=\frac{\pi R^۲\times ۳۰}{۳۶۰}\Longrightarrow$$

$$R^۲=۳۶\Longrightarrow R=۶\Longrightarrow ۲R=۱۲$$

لذا گزینهٔ (۳) جواب است.

۳ـ گزینهٔ (۲) درست است زیرا:

$$C_۵^۳=\frac{۵!}{۳!(۵-۳)!}=\frac{۵\times۴\times۳!}{۳!\times۲!}=\frac{۲۰}{۲}=۱۰$$

۴ـ گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

قبلاً درشماره‌های قبل مجله ثابت کردیم هر رابطهٔ تك‌عضوی به انتفای مقدم دارای دوخاصیت پادتقارنی و تعدی می‌باشد.

۵ـ گزینهٔ (۱) صحیح‌است زیرا:

$$IR^{+۲}=\{(x,y)\mid x\in IR^+\wedge y\in IR^+\}$$

تابع‌پوشا نیست زیرا:

$\forall y\in IR^+ \; ; \; \sqrt{y}>۰$ و $\forall x\in IR^+ \sqrt{x}>۰$

و در نهایت $\forall x , y\in IR^+$ ، $(\sqrt{x},\sqrt{y})\in IR^{+۲}$ پس هیچگاه $IR^{-۲}$ پوشیده نخواهدشد ازطرفی

$$f(x_۱,y_۱)=f(x_۲,y_۲)\Longrightarrow$$
$$(\sqrt{x_۱},\sqrt{y_۱})=(\sqrt{x_۲},\sqrt{y_۲})\Longrightarrow$$
$$x_۱=x_۲\wedge y_۱=y_۲\Longrightarrow (x_۱,y_۱)=(x_۲,y_۲)$$

تابع یك‌به‌یك است.

۶ـ گزینهٔ (۲) صحیح‌است زیرا:

$$\forall x\in N \text{ ، } x\geqslant ۱\Longrightarrow$$
$$\forall x\in N \text{ ، } x*۱=۱*x=\mathrm{Max}\{۱,x\}=x$$

۷ـ $S_n=۲n(۳n+۱)$

$$n=۱\Longrightarrow S_۱=a_۱=۲(۳+۱)=۸\Longrightarrow a_۱=۸$$

$$\begin{cases}S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)\\ S_n=۲n(۳n+۱)\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)=۲n(۳n+۱)$$
$$a_۱+a_n=۴(۳n+۱)$$
$$۸+a_n=۱۲n+۴\Longrightarrow a_n=۱۲n-۴$$

۸ـ $\lg_۳{}^۲$ عددی‌است بین‌صفرویك مانند عدد $\left(\frac{۲}{۳}\right)$ بیشترین مقدار عددی مانند $\left(\frac{۲}{۳}\right)^{\sin\alpha}$ وقتی‌است که $\sin\alpha$ مساوی (۱ −) باشد همچنین $\left(\lg_۳{}^۲\right)^{\sin\alpha}$ وقتی‌بیشترین مقدار را پیدا می‌کندکه $\sin\alpha$ مساوی ۱ − باشد پس:

$$\left(\lg_۳{}^۲\right)^{-۱}=\frac{۱}{\lg_۳{}^۲}=\lg_۲{}^۳$$

۹ـ گزینهٔ (ب) صحیح‌است. زیرا داریم:

$$\frac{\sin nx}{۱+\cos nx}=\frac{۲\sin\frac{nx}{۲}\cos\frac{nx}{۲}}{۲\cos^۲\frac{nx}{۲}}\quad \left(x\neq\frac{۲k\pi+\pi}{n}\right)$$

$$\frac{\sin\frac{nx}{۲}}{\cos\frac{nx}{۲}}=tg\frac{nx}{۲}$$

۱۰ـ گزینهٔ (الف) صحیح است، زیرا داریم:

$$\sqrt[۴]{\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x}}=\sqrt[۴]{\frac{\sin^۲\frac{x}{۲}+\cos^۲\frac{x}{۲}-۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}{\sin^۲\frac{x}{۲}+\cos^۲\frac{x}{۲}+۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}}$$

$$=\sqrt[۴]{\frac{(\sin\frac{x}{۲}-\cos\frac{x}{۲})^۲}{(\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲})^۲}}=\sqrt{\left|\frac{\sin\frac{x}{۲}-\cos\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲}}\right|}$$

درنتیجه به دست می‌آید:

$$\sqrt{\frac{\cos\frac{x}{۲}-\sin\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲}}}\sqrt{\left|\frac{\cos\frac{x}{۲}-\sin\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲}}\right|}$$

$$=\left|\frac{\cos\frac{x}{۲}-\sin\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲}}\right|$$

چون انتهای x درناحیهٔ‌اول است بنابراین همواره داریم:

$$\cos\frac{x}{۲}\geqslant\sin\frac{x}{۲}\geqslant ۰$$

و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\cos\frac{x}{۲}-\sin\frac{x}{۲}\geqslant ۰$$

پس خواهیم داشت:

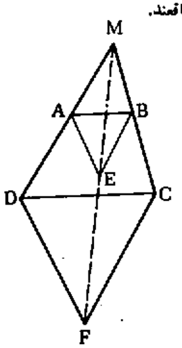
$$\left|\frac{\cos\frac{x}{۲}-\sin\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲}}\right|=\frac{\cos\frac{x}{۲}-\sin\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲}}$$

حل مسائل ریاضیات سال سوم ریاضی

۱ـ دو مثلث ABE و DCF نسبت به مرکز تجانس M و نسبت تجانس $\frac{AB}{DC}$ مجانس یکدیگرند. زیرا:

$$\frac{MA}{MD}=\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{DC}=\frac{AE}{DF}=\frac{ME}{MF}=K$$

است. پس نقطهٔ E مجانس نقطهٔ F نسبت به مرکز تجانس M و نسبت تجانس ثابت $\frac{AB}{CD}$ می‌باشد بنابراین نقاط E و F و M روی یك‌خط راست واقعند.



به بیان دیگر می‌توان گفت که اگر از نقطهٔ F به نقطهٔ E وصل کنیم خط FE از نقطهٔ ثابت M می‌گذرد، زیرا:

$DF=CD$ و $AE=AB$ و $AE\parallel DF$

است . پس اگر نقطهٔ تقاطع FE با ساق AD نقطه‌ای مانند M' باشد داریم :

$$\frac{M'A}{M'D}=\frac{AE}{DF}=\frac{AB}{CD}$$

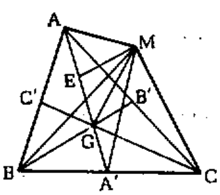
و چون $\frac{MA}{MD}=\frac{AB}{CD}$ است پس نقطهٔ M' برنقطهٔ M منطبق است. بنابراین FE از M می گذرد یعنی سه‌نقطهٔ F و E و M روی‌یك خط‌راست قرار دارند.

۲ـ در مثلث ABC نقطهٔ برخورد میانه‌های AA' و BB' و CC' را G و وسط پاره خط AG را E می‌نامیم. در مثلثهای MBC و MEA' و MAG داریم:

$$MB^۲+MC^۲=۲MA'^۲+\frac{۱}{۲}BC^۲\quad (۱)$$

$$MA'^۲+ME^۲=۲MG^۲+\frac{۱}{۲}EA'^۲\quad (۲)$$

$$MA^۲+MG^۲=۲ME^۲+\frac{۱}{۲}AG^۲\quad (۳)$$



ازجمع رابطه‌های (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌شود:

$$MA^۲+MB^۲+MC^۲=۳MG^۲+\frac{۱}{۲}BC^۲+\frac{۳}{۴}AG^۲$$

به همین‌ترتیب اگر برای میانه‌های BB' و CC' نظیر رابطهٔ فوق‌را بنویسیم وسه‌رابطه‌را باهم جمع‌کنیم داریم:

$$۳(MA^۲+MB^۲+MC^۲)$$

$$=9MG^2+\frac{1}{2}(BC^2+CA^2+AB^2)+$$
$$\frac{3}{2}(GA^2+GB^2+GC^2)$$

اما:

$$AB^2+AC^2+BC^2=3(GA^2+GB^2+GC^2)$$

است. پس:

$$MA^2+MB^2+MC^2$$
$$=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$$

۳- فرض‌کنیم v_1 ، v_2 ،... و v_n ، بردارهایی ازفضای برداری V باشند و بردارهای:

$$(p<n)v_p\ ,\ \cdots\ ,\ v_2\ ,\ v_1$$

p بردار وابسته خطی از این n بردار باشند پس ترکیبی‌خطی از این p بردار مساوی با بردارصفر وجود دارد به قسمی‌که لااقل یکی‌از ضرایب آن ناصفر است.

$$(1)\quad a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_pv_p=\bar{0}$$
$$\exists\ a_i\neq 0\quad 1\leqslant i\leqslant p$$
$$(1)\Longrightarrow a_1v_1+\cdots+a_pv_p+0v_{p+1}+0v_{p+2}$$
$$+\cdots+0v_n=\bar{0}\qquad (2)$$

رابطهٔ (۲) همان رابطهٔ (۱) است با این تفاوت‌که رابطهٔ (۲) نشان‌دهندهٔ ترکیبی‌خطی از n بردار v_1 تا v_n است‌که مساوی با بردار صفراست و لااقل یك ضریب مخالف‌صفر از a_1 تا a_p درآن یافت می‌شود پس این‌بردارها وابستهٔ خطی‌اند.

۴- دراین مسأله $n(s)=12!$ حال درهرقسمت به‌دنبال $n(A)$ هستیم:

الف) $n(A)=\binom{10}{4}\times 4!\times 2!\times 6!\Longrightarrow$

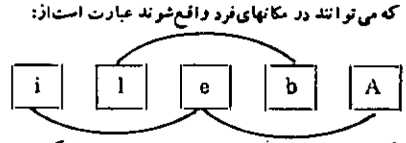
$$p(A)=\frac{\binom{10}{4}\times 4!\times 2!\times 6!}{12!}$$

(اول تعدادحالاتی که می‌توان ۴نفررا ازبین ۱۰نفر(غیردو برادر) انتخاب کرد سپس جایگشتهای آن چهارنفر و دو برادر و ۶ نفر باقی‌مانده).

ب) $n(A)=11!\times 2!\Longrightarrow p(A)=\frac{11!\times 2!}{12!}$

(دوبرادر را یك‌نفر فرض‌کرده با ۱۰نفردیگر ۱۱نفر می‌شوند که ۱۱! جایگشت‌دارند و ۲! نیز دوبرادر).

۵- حروف باصدا درکلمهٔ Abeli (درصورت‌مسأله به غلط Abcli چاپ‌شده) عبارتنداز A و e و i وتعداد حالاتی که می‌توانند در مکانهای‌فرد واقع‌شوند عبارت است‌از:



که ۳! حروف با صدا و ۲! حروف بی‌صدا جایگشت دارند

پس:

$$p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3!\times 2!}{5!}$$

۶- هردونفر می‌توانند یك‌حالت دست دادن با یکدیگر را ایجادکنند پس n نفر به $\binom{n}{2}$ طریق می‌توانند با هم‌دست بدهند پس:

$$\binom{n}{2}=28\Longrightarrow\frac{n!}{2!(n-2)!}=28\Longrightarrow$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!}=28$$
$$n(n-1)=56\Longrightarrow\boxed{n=8}$$

۷- $y=\dfrac{ax+b}{a'x+b'}$

مجانب قائم : $x=-\dfrac{b'}{a'}=-\dfrac{1}{2}$

$$\Longrightarrow\boxed{b'=\frac{1}{2}a'}$$

مجانب‌افقی : $y=\dfrac{a}{a'}=1\Longrightarrow\boxed{a=a'}$

$$A\left|\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{در تابع}}-1=\frac{b}{b'}\Longrightarrow b=-b'$$

$$\Longrightarrow\boxed{b=-\frac{1}{2}a'}$$

$$\Longrightarrow y=\frac{ax+b}{a'x+b'}=\frac{a'x-\frac{1}{2}a'}{a'x+\frac{1}{2}a'}$$

$$=\frac{x-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}=\frac{2x-1}{2x+1}\Longrightarrow\boxed{y=\frac{2x-1}{2x+1}}$$

خط قائم $m=-\dfrac{1}{4}\Longrightarrow$ مماس $m=4$

$$y'=\frac{4}{(2x+1)^2}=\frac{4}{1}\Longrightarrow$$
$$(2x+1)^2=1\Longrightarrow 2x+1=\pm 1$$
$$2x=-1\pm 1\Longrightarrow$$
$$2x=0\Longrightarrow x=0\Longrightarrow A\left|\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}\right.$$
$$2x=-2\Longrightarrow x=-1\Longrightarrow B\left|\begin{matrix}-1\\3\end{matrix}\right.$$

۸-

$$y=\frac{x^2+4\sqrt{2}}{x^2}\Longrightarrow y'=\frac{x^2-4\sqrt{2}}{x^2}$$

$$N\left|\begin{matrix}\alpha\\ \dfrac{\alpha^2+4\sqrt{2}}{\alpha}\end{matrix}\right.\quad \text{پای قائم}$$

$$\Longrightarrow \text{مماس}\ m=\frac{\alpha^2-4\sqrt{2}}{\alpha^2}$$

$$\Longrightarrow \text{قائم}\ m=\frac{-\alpha^2}{\alpha^2-4\sqrt{2}}$$

$$y-y_N=m(x-x_N)$$

$$y-\frac{\alpha^2+4\sqrt{2}}{\alpha}=\frac{-\alpha^2}{\alpha^2-4\sqrt{2}}(x-\alpha)$$

معادلهٔ قائم درنقطهٔ N

$$O\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{دراین معادله قرار می‌دهیم}}$$

$$0-\frac{\alpha^2+4\sqrt{2}}{\alpha}=\frac{-\alpha^2}{\alpha^2-4\sqrt{2}}(0-\alpha)$$

$$\frac{\alpha^2+4\sqrt{2}}{\alpha}=\frac{-\alpha^3}{\alpha^2-4\sqrt{2}}\Longrightarrow$$

$$\alpha^4-32=-\alpha^4\Longrightarrow\alpha^4=16$$

طولهای پای قائم $\boxed{\alpha=\pm 2}$

$\alpha=2$ یا $\alpha=-2$

$y=(\sqrt{2}+1)x$ معادله خط قائم

توجه‌کنیدکه خط قائم یك‌خط است ولـی در دو نقطه برمنحنی عمود است.

۹- الف) معادلـه را بر $\cos^2 x$ کـه مخالف صفر فرض می‌شود تقسیم می‌کنیم، پس‌خواهیم داشت:

$$m\,tg^2x-(4m+1)tgx+1=0\qquad (1)$$

$$tgx=\frac{4m+1\pm\sqrt{\Delta}}{2m}$$

$$\Delta=(4m+1)^2-4m=16m^2+1+8m-4m$$

$$\Delta=16m^2+4m+1\Longrightarrow\Delta>0$$

Δ همواره مثبت است، پس معادله به ازای تمام مقادیر m بجز $m=0$ جواب دارد . پس شرط وجود جواب چنین است:

$$m\in\mathbb{R}-\{0\}$$

ب) ریشه‌های معادله‌را باتوجه به شرط مسأله (ریشه‌ها بین ۰ و 2π) .

$$y+\pi\ ،\ y\ ،\ \pi+x\ ،\ x$$

در نظر می‌گیریم. بنابراین داریم:

$$x+(\pi+x)+y+(\pi+y)=\frac{9\pi}{2}$$

$$2x+2y=\frac{9\pi}{2}-2\pi=\frac{5\pi}{2}$$

$$x+y=\frac{5\pi}{4} \Longrightarrow x+y=\pi+\frac{\pi}{4}$$

$$tg(x+y)=tg(\pi+\frac{\pi}{4}) \Longrightarrow tg(x+y)=tg\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{tgx+tgy}{1-tgx\,tgy}=1$$

(رابطه‌ای بین ریشه‌ها وضرایب معادله (۱))

$$\begin{cases} tgx+tgy=\dfrac{4m+1}{m} \\ tgx\,tgy=\dfrac{1}{m} \end{cases}$$ و

$$\Longrightarrow \frac{\frac{4m+1}{m}}{1-\frac{1}{m}}=1 \xRightarrow{(m\neq 0)} \frac{4m+1}{m-1}=1$$

$$\Longrightarrow 4m+1=m-1 \Longrightarrow 3m=-2$$

$$\Longrightarrow m=\frac{-2}{3}$$

حل تشریحی تستهای سال سوم ریاضی

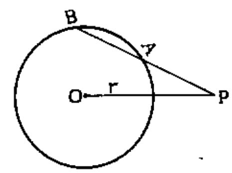
۱- گزینهٔ (۲) درست‌است زیرا داریم:

$$PA\cdot PB=d^2-R^2 \Longrightarrow$$

$$PA(2PA)=25-9=16$$

$$2PA^2=16 \Longrightarrow PA^2=8 \Longrightarrow$$

$$PA=2\sqrt{2}=AB$$



۲- گزینهٔ (۲) درست‌است زیرا این‌رابطه وقتی‌برقرار است‌که مثلث در رأس B قائم‌الزاویه باشد.

$$(p-a)(p-c)=p(p-b) \Longrightarrow$$

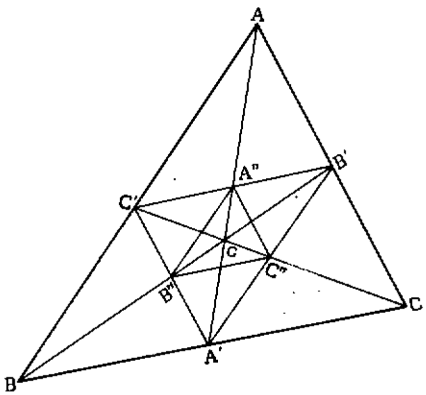
$$\frac{b+c-a}{2}\times\frac{a+b-c}{2}=\frac{a+b+c}{2}\times\frac{a+c-b}{2} \Longrightarrow b^2-(c-a)^2=(a+c)^2-b^2$$

$$\Longrightarrow b^2=a^2+c^2 \Longrightarrow \hat{B}=90^\circ$$

۳- گزینهٔ (۴) درست است. زیرا مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث ABC نسبت‌به مرکز تجانس G و نسبت تجانس $-\frac{1}{2}$ است و مثلث $A''B''C''$ نیز مجانس مثلث $A'B'C'$ نسبت‌به مرکز تجانس G و نسبت‌تجانس $-\frac{1}{2}$ می‌باشد بنابراین مثلث $A''B''C''$ مجانس مثلث ABC نسبت به مرکز تجانس G و نسبت‌تجانس $\frac{1}{4}$ می‌باشد:

$$\frac{\overline{GA'}}{\overline{GA}}=-\frac{1}{2} \text{ و } \frac{\overline{GA''}}{\overline{GA'}}=-\frac{1}{2} \Longrightarrow$$

$$\frac{\overline{GA''}}{\overline{GA}}=(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) \Longrightarrow \frac{\overline{GA''}}{\overline{GA}}=\frac{1}{4}$$



۴- گزینهٔ (۱) درست است. زیرا اگر حجم مخروط ایجاد شده در بالا را V_1 وحجم مخروط اولی‌را V فرض‌کنیم داریم:

$$\frac{V_1}{V}=(\frac{SH'}{SH})^3 \Longrightarrow \frac{V_1}{V}=(\frac{k}{h})^3=\frac{k^3}{h^3}$$

۵- گزینهٔ (۳) جواب تست می‌باشد زیرا:

اگر Q روی IR را درنظر بگیریم دراین صورت‌ضرب اسکالر در Q بسته نیست:

$\sqrt{2}\in IR\ ,\ 1\in Q$ ولی $1\times\sqrt{2}=\sqrt{2}\notin Q$

۶- گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

$p(\text{رو})=\frac{1}{4} \Longrightarrow p(\text{پشت})=\frac{3}{4}$

با توجه به فرمول دوجمله‌ای داریم:

$$\binom{5}{3}\times(\frac{1}{4})^3\times(\frac{3}{4})^{5-3}=10\times\frac{1}{4^3}\times\frac{3^2}{4^2}$$

$$=\frac{90}{1024}$$

۷- گزینهٔ (۳) صحیح‌است. زیرا:

بنابرحل مسألهٔ ۴ قسمت الف) داریم:

تعداد حالاتی‌که دقیقاً ۳ مدادبین دوخودکار است $=\binom{8}{3}\times 3!\times 2!\times 5!=$

۸-

$$D_f=[-1\,,\,1] \Longrightarrow -1\leqslant x\leqslant +1$$

$$D_{f(2x-3)}:\begin{cases} -1\leqslant 2x-3\leqslant +1 \\ 2\leqslant 2x\leqslant 4 \\ 1\leqslant x\leqslant 2 \Longrightarrow D_{f(2x-3)}=[1,2] \end{cases}$$

۹-

$$y=x^3-3x$$

$$y'=3x^2-3=0 \Longrightarrow x^2=1 \Longrightarrow x=\pm 1$$

$$M\left|\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right. \qquad N\left|\begin{matrix}+1\\-2\end{matrix}\right.$$

اگر جای نقاط را مشخص‌کنیم، وخطوط را رسم‌کنیم مستطیلی‌به دست می‌آید‌که طولش ۴ وعرضش ۲ است پس:

$$S=8$$

۱۰- گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا داریم:

$$x+y=\frac{\pi}{2}$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$=2\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{x-y}{2}=\sqrt{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sqrt{2}\cos\frac{x-y}{2}=m \Longrightarrow$$

$$\cos\frac{x-y}{2}=\frac{m}{\sqrt{2}} \Longrightarrow |\frac{m}{\sqrt{2}}|\leqslant 1$$

$$|m|\leqslant\sqrt{2} \Longrightarrow -\sqrt{2}\leqslant m\leqslant\sqrt{2}$$

$$\Longrightarrow m\in[-\sqrt{2}\,,\,\sqrt{2}]$$

۱۱- گزینهٔ (۳) صحیح‌است، زیرا داریم:

$Arc\cos(1-2x^4)=\alpha$ و $Arc\sin(x^4)=\beta$

$$\cos\alpha=1-2x^4\ ,\ \sin\beta=x^4\ ,\ \alpha=2\beta$$

$$\cos\alpha=\cos 2\beta=1-2\sin^2\beta \Longrightarrow$$

$$1-2x^4=1-2x^8$$

$$x^8-x^4=0 \Longrightarrow x^4(x^4-1)=0 \Longrightarrow$$

$x=0$ یا $x=\pm 1$

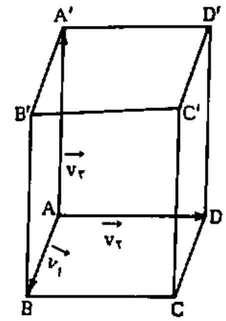
حل مسائل ریاضیات چهارم ریاضی

۱- می‌دانیم‌که قدر مطلق عدد حاصل‌ضرب $\vec{V_1}\vec{V_2}\vec{V_3}$ برابر با عددحجم متوازی‌السطوحی است‌که ابعادش:

$|\vec{V_3}|$ و $|\vec{V_2}|$ و $|\vec{V_1}|$

باشند. حال اگر $|\vec{V_1}|$ و $|\vec{V_2}|$ را ابعاد قاعده‌فرض‌کنیم،

متوازی‌السطوح قائم، و ارتفاعش $|\vec{v_۳}|$ است پس:



$S_{قاعده}=|\vec{v_۱}\wedge\vec{v_۲}|$

$=|\vec{v_۱}|\cdot|\vec{v_۲}||\sin(\vec{v_۱},\vec{v_۲})|$

$\Longrightarrow S_{قاعده}=۳\sqrt{۳}\times۴\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۱۸$

$V_{حجم\ متوازی‌السطوح}=۱۸\times۵=۹۰ \Longrightarrow$

$|\vec{v_۱}\,\vec{v_۲}\,\vec{v_۳}|=۹۰$

۲- نقطهٔ موردنظر را $M(۰,y,۰)$ فرض می‌کنیم و فاصلهٔ نقطهٔ M از صفحهٔ P را محاسبه می‌کنیم و مساوی اندازهٔ پاره‌خط MA قرار می‌دهیم.

$A(۲,۳,-۱)$ و $M(۰,y,۰)$

$P: ۲\sqrt{۲}x-z-۹=۰$

$MH=\frac{|۰-۰-۹|}{\sqrt{۸+۱}}=۳$

$MA=\sqrt{(۰-۲)^۲+(y-۳)^۲+(۰+۱)^۲}$

$MA=\sqrt{(y-۳)^۲+۵}$

$MH=MA \Longrightarrow ۳=\sqrt{(y-۳)^۲+۵} \Longrightarrow$

$(y-۳)^۲=۴ \Longrightarrow y-۳=\pm۲ \Longrightarrow$

$y=۱$ و $y=+۵ \Longrightarrow$

نقاط جواب مسأله:

$M_۱(۰,۱,۰)$ و $M_۲(۰,۵,۰)$

۳- مختصات مرکز اصلی سه‌دایره را پیدا می‌کنیم (مرکز دایرهٔ مطلوب) و طول مماس مرسوم از این‌نقطه بریکی از سه دایره را به‌دست می‌آوریم (شعاع دایره مطلوب). سپس با معلوم بودن مختصات مرکز و شعاع دایره معادله دایرهٔ اصلی را می‌نویسیم:

$c_۱: x^۲+y^۲-۲x-۶y+۶=۰$

$c_۲: x^۲+y^۲+۲x-۲y+۱=۰$

$c_۳: x^۲+y^۲+۴y=۰$

$\Delta_۱: c_۲-c_۱=۰ \Longrightarrow ۴x+۴y-۵=۰$

$\Delta_۲: c_۳-c_۲=۰ \Longrightarrow -۲x+۶y-۱=۰$

$$\begin{matrix}\Delta_۱\\ \Delta_۲\end{matrix}\begin{cases}۴x+۴y-۵=۰\\ -۲x+۶y-۱=۰\end{cases} \Longrightarrow$$

مرکز اصلی سه دایره $\omega\left(\frac{۱۳}{۱۶},\frac{۷}{۱۶}\right)$

$P\omega/c_۱=c_۱\left(\frac{۱۳}{۱۶},\frac{۷}{۱۶}\right)$

$=\left(\frac{۱۳}{۱۶}-۱\right)^۲+\left(\frac{۷}{۱۶}-۳\right)^۲-۴=\frac{۶۶۶}{۲۵۶}=\omega T^۲$

$\Longrightarrow \omega T=R=\frac{۳\sqrt{۷۴}}{۱۶}$ شعاع دایرهٔ اصلی

$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲ \Longrightarrow$

$\left(x-\frac{۱۳}{۱۶}\right)^۲+\left(y-\frac{۷}{۱۶}\right)^۲=\frac{۶۶۶}{۲۵۶}=\frac{۳۳۳}{۱۲۸}$

$$\boxed{\left(x-\frac{۱۳}{۱۶}\right)^۲+\left(y-\frac{۷}{۱۶}\right)^۲=\frac{۳۳۳}{۱۲۸}}$$

معادلهٔ دایرهٔ اصلی سه‌دایره

-۴

۱) $(\sim p\wedge r)\Longrightarrow q \quad \wedge$

۲) $(r\wedge s) \quad \wedge$

۳) $\sim(s\Longrightarrow q)\equiv s\wedge\sim q$

$\therefore \sim p\Longrightarrow(r\Longrightarrow\sim s)$

۴) $r\Longrightarrow(\sim p\Longrightarrow q)$ از ۱ وعطف مقدمات

۵) r از ۲ وحذف عاطف

از ۴ و ۵ وانتزاع

۶) $(\sim p\Longrightarrow q)\equiv(\sim q\Longrightarrow p)$

۷) $\sim q$ از ۳ وحذف عاطف

۸) p از ۶ و ۷ وانتزاع

۹) $\underbrace{p\vee(r\Longrightarrow\sim s)}\equiv\sim p\Longrightarrow(r\Longrightarrow\sim s)$

از ۸ و ادخال فاصل

۵- درحلقهٔ $R=\{۰\}$ صفرحلقه و یک‌حلقه برهم منطبقند! حال فرض‌کنیم F یک میدان باشد پس یک حلقهٔ جابجایی می‌باشد لذا طبق قضیهٔ کتاب کافی است ثابت‌کنیم در F قانون حذف برقرار است:

(می‌دانیم درمیدان F هرعضو مخالف‌صفر وارون دارد)

$\forall a,b,c\in F \ ،\ ab=ac \Longrightarrow$

$a^{-۱}ab=a^{-۱}ac \Longrightarrow \underline{b=c}$

در F قانون‌حذف برقرار است لذا طبق‌قضیهٔ کتاب، یک حوزهٔ صحیح است.

۶- می‌دانیم در حالت کلی:

$۴^{۴k+r}\overset{۱۰}{\equiv}۴^r$ و $۳^{۴k+r}\overset{۱۰}{\equiv}۳^r$ و $۲^{۴k+r}\overset{۱۰}{\equiv}۲^r$

حال اگر n مضرب ۴ باشد پس ۳n و ۵n نیز مضرب ۴ هستند.

$$\left.\begin{matrix}۳^{۳n+۱}\overset{۱۰}{\equiv}۳^۱\\ ۲^{۵n+۳}\overset{۱۰}{\equiv}۲^۳=۸\end{matrix}\right\}\Longrightarrow$$

$۳^{۳n+۱}\times۲^{۵n+۳}\overset{۱۰}{\equiv}۲۴\overset{۱۰}{\equiv}۴$

$۴^{n+۱}\overset{۱۰}{\equiv}۴$

$\Longrightarrow A\overset{۱۰}{\equiv}۴+۴=۸$

۷- فرض کنید $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ یک ماتریس متعامد باشد.

بنابراین $A^{-۱}=A'$ درنتیجه:

$$\frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}$$

چون A متعامد است، بنابراین:

$|A|=-۱$ یا $|A|=۱$

پس دوحالت درنظر می‌گیریم:

حالت ۱) $|A|=۱$ دراین صورت:

$$\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}a=d\\b=-c\end{cases}$$

پس ماتریسهای متعامدی که $|A|=+۱$ به صورت زیر می‌باشند:

$$A=\begin{bmatrix}a&-c\\c&a\end{bmatrix}$$

از طرف دیگر داریم:

$|A|=a^۲+c^۲$

پس $a^۲+c^۲=۱$ و لذا $a=\cos\alpha$ و $c=\sin\alpha$. پس A به صورت زیر می‌باشد:

$$A=\begin{bmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\ \sin\alpha&\cos\alpha\end{bmatrix}$$

حالت۲) $|A|=-۱$ که به طریق مشابه ثابت می‌شود A به صورت زیر است:

$$A=\begin{bmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\\ \sin\alpha&-\cos\alpha\end{bmatrix}$$

(حل از کتاب آشنایی با ماتریسها تألیف سیدحسین سیدموسوی)

-۸ $x^۲-۵x-۲=۰$

$\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}+\frac{۱}{\gamma}=-\frac{c}{d}=-\frac{۵}{۲}$

به‌توان ۲ می‌رسانیم

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}+2\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}\right)=\frac{25}{4}$$

$$\alpha^{-2}+\beta^{-2}+\gamma^{-2}+2\left(\frac{\gamma+\beta+\alpha}{\alpha\beta\gamma}\right)=\frac{25}{4}$$

$$\alpha^{-2}+\beta^{-2}+\gamma^{-2}+2\left(\frac{0}{-\frac{d}{a}}\right)=\frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow \alpha^{-2}+\beta^{-2}+\gamma^{-2}=\frac{25}{4} \qquad (I)$$

طرفین معادله را بر x^3 تقسیم می‌کنیم:

$$1-\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x^3}=0$$

در معادلهٔ جدید به‌جای x یکبار α و یکبار β و یکبار γ را قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases}1-\frac{5}{\alpha^2}-\frac{2}{\alpha^3}=0\\ 1-\frac{5}{\beta^2}-\frac{2}{\beta^3}=0\\ 1-\frac{5}{\gamma^2}-\frac{2}{\gamma^3}=0\end{cases}$$

$$3-5(\alpha^{-2}+\beta^{-2}+\gamma^{-2})$$

$$-2(\alpha^{-3}+\beta^{-3}+\gamma^{-3})=0$$

$$3-5\left(\frac{25}{4}\right)=2(\alpha^{-3}+\beta^{-3}+\gamma^{-3}) \Rightarrow$$

$$\alpha^{-3}+\beta^{-3}+\gamma^{-3}=-\frac{113}{8}$$

۹−

$$I=\int\frac{\sqrt{\sin^3 2x}}{\sin^5 x}dx \qquad 0<x<\frac{\pi}{2}$$

$$I=\int\frac{\sin 2x\sqrt{\sin 2x}}{\sin^5 x}dx$$

$$=\int\frac{2\sin x\cos x\sqrt{2\sin x\cos x}}{\sin^5 x}dx$$

صورت کسر را در $\cos x$ ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$I=\int\frac{2\cos x\sqrt{2\sin x\cos x}}{\sin^4 x}dx$$

$$I=\int\frac{2\cos^2 x\sqrt{\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x}}}{\sin^4 x}dx$$

$$=\int\frac{2\cos^2 x}{\sin^2 x}\times\frac{1}{\sin^2 x}\sqrt{2\,tg x}\,dx$$

$$I=2\sqrt{2}\int cotg^2 x(1+cotg^2 x)\times\frac{1}{\sqrt{cotg x}}dx$$

$$u=cotg x \Rightarrow du=-(1+cotg^2 x)dx$$

$$I=-2\sqrt{2}\int\frac{u^2 du}{\sqrt{u}}$$

$$=-2\sqrt{2}\int u^{\frac{3}{2}}du=-2\sqrt{2}\times\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+c$$

$$=-2\sqrt{2}\times\frac{cotg^{\frac{5}{2}}x}{\frac{5}{2}}+c$$

$$=-\frac{4\sqrt{2}}{5}cotg^2 x\sqrt{cotg x}+c$$

حل تشریحی تستهای سال چهارم ریاضی

۱− گزینهٔ (۳) جواب است زیرا:

$$M(5,\frac{\pi}{6}) \text{ و } N(12,\alpha) \text{ و } MN=13$$

$$MN^2=\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\theta-\theta') \Rightarrow$$

$$169=25+144-120\cos(\alpha-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow$$

$$\cos(\alpha-\frac{\pi}{6})=0 \Rightarrow$$

$$\alpha-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\alpha=\frac{2\pi}{3} \text{ و } \alpha-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha=-\frac{\pi}{3}$$

راه دیگر: داریم $12^2+5^2=13^2$ پس مثلث OMN در رأس O قائم‌الزاویه است یعنی $M\hat{O}N=90^\circ$ است لذا:

$$\alpha=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{3} \text{ و } \alpha=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}=\frac{-\pi}{3}$$

۲− گزینهٔ (۲) جواب است زیرا:

$$\vec{v_1}(2,-1,3) \text{ و } \vec{v_2}'(-2,3,0)$$

$$\vec{R}=\vec{v_2}+\vec{v_1}(0,2,3)$$

$$\vec{d}=\vec{v_2}-\vec{v_1}(-4,4,-3)$$

$$Pr\frac{\vec{R}}{\vec{d}}=\frac{\vec{R}\cdot\vec{d}}{|\vec{d}|}=\frac{0+8-9}{\sqrt{16+16+9}}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{41}}=\frac{-\sqrt{41}}{41}$$

۳− گزینهٔ (۳) جواب است زیرا:

$$D: 2x-1=y+3=-3z \Rightarrow$$

$$D:\frac{x-\frac{1}{2}}{3}=\frac{y+3}{6}=\frac{z}{-2} \Rightarrow$$

$$\vec{v_1}(3,6,-2) \text{ و } \vec{v_2}(1,-1,2) \Rightarrow$$

$\vec{v_1}\wedge\vec{v_2}(10,-8,-9)$ بردار نرمال صفحه

$A(\frac{1}{2},-3,0)\in D$ یک‌نقطه از خط D،

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$10(x-\frac{1}{2})-8(y+3)-9z=0 \Rightarrow$$

$$10x-8y-9z-29=0$$

راه دیگر: مختصات نقطهٔ $(\frac{1}{2},-3,0)$ که نقطه‌ای از خط D است، فقط در گزینهٔ (۳) صدق می‌کند زیرا صفحه‌ای که‌شامل خط D باشد هر نقطه‌ای‌از این‌خط را در برمی‌گیرد. پس گزینهٔ (۳) جواب است.

۴− گزینهٔ (۴) جواب است زیرا اگر H پای عمود مرسوم از نقطهٔ A برمحور xها باشد داریم:

$$AH=\sqrt{y^2+z^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

۵− می‌دانیم که اگر:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=-\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}}=K$$

ونقطهٔ O وسط پاره‌خط MM' باشد داریم:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=K^2$$

از آن‌جا خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}-\overline{OA}}=\frac{K^2}{1-K^2} \Rightarrow \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}}=\frac{K^2}{1-K^2}$$

پس گزینهٔ (۲) جواب است.

۶−

$$c: 2x^2+2y^2-3x+4y=0 \Rightarrow$$

$$c: x^2+y^2-\frac{3}{2}x+2y=0$$

$$c': x^2+y^2+x-y=1$$

محوراصلی دودایره $\Delta: x^2+y^2+x-y-1-$

$$(x^2+y^2-\frac{3}{2}x+2y)=0 \Rightarrow$$

$$\frac{5}{2}x-3y-1=0$$

معادلهٔ محور اصلی دو دایره $\Delta: 5x-6y-2=0$

$$M(a+2,\ 2a-1)$$

$$\xrightarrow{\text{در معادلهٔ محور اصلی}} 5(a+2)-6(2a-1)-2=0$$
$$\Rightarrow a=2$$

پس گزینهٔ (۲) جواب است. درازای مقدار به‌دست آمده a، نقطهٔ $M(2,3)$ به دست می‌آید که خارج هر دو دایره واقع است.

۷- محور کانونی بیضی به معادلهٔ:

$$4x^2+9y^2+16x-18y-23=0$$

خط $y=1$ است که موازی محور xها است (زیرا در معادلهٔ بیضی ضریب x^2 کوچکتر از ضریب y^2 است $9>4$).

$$f'_x=8x+16=0 \Rightarrow x=-2$$

محور ناکانونی بیضی

$$f'_y=18y-18=0 \Rightarrow y=1$$

محور کانونی بیضی

پس $F\left|\begin{matrix}\alpha\pm c\\ \beta\end{matrix}\right.$ یعنی عرض کانون بیضی برابر ۱ می‌باشد

و بین چهار گزینهٔ داده‌شده فقط در گزینهٔ (۳) عرض کانون داده شده ۱ است. پس این گزینه درست است.

۸- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

گزارهٔ $[(p\wedge q)\Longrightarrow p]$ یک استلزام منطقی و همیشه درست است و چون این گزاره تالی گزارهٔ داده‌شده در صورت تست است پس آن گزاره که عکس نقیضش را خواسته‌ایم همیشه درست است و لذا عکس نقیض آن نیز باید همیشه درست باشد که فقط $p\Longrightarrow p$ دارای ارزش همیشه درست است.

۹- گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

در Z_8 مقسوم علیه صفر وجود دارد ($2\otimes 4=0$) پس طبق تعریف نمی‌تواند حوزهٔ صحیح باشد.

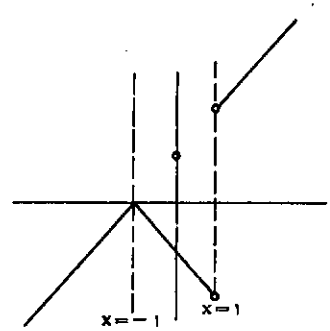
۱۰- گزینهٔ (۴) صحیح است.

شروع کرانهای بالای مجموعهٔ A، عدد ۱۰ و شروع کرانهای پایین A، عدد ۵- است.

۱۱- گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

ماتریس A یک ماتریس متعامد است (دوران به اندازه °۹۰) و می‌دانیم تبدیلهای متعامد طول و زاویه را ثابت نگه می‌دارند پس شکل تبدیل‌یافته کاملاً قابل انطباق بر شکل قبل است.

۱۲-



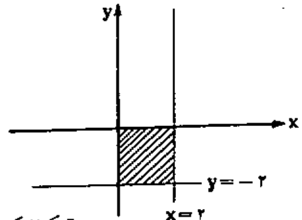
$$-1<x<+1 \Rightarrow y=\frac{-(x-1)(x+1)}{x-1}$$
$$\Rightarrow y=-x-1$$

$x>1$ یا $x<-1 \Rightarrow y=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}$

$$\Rightarrow y=x+1$$

۱۳-

$$\begin{cases}|x-1|\leqslant 1 \Rightarrow \begin{cases}-1\leqslant x-1\leqslant 1\\ -1\leqslant y+1\leqslant 1\end{cases}\\ |y+1|\leqslant 1 \Rightarrow \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2\\ -2\leqslant y\leqslant 0\end{cases}$$

نمودار یک مربع است

حل مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

۱- در مثلث ABC، $EF\parallel AB$ است پس:

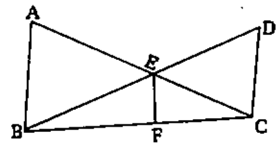
$$\frac{EF}{AB}=\frac{CF}{CB} \qquad (1)$$

و در مثلث BDC، $EF\parallel CD$ است پس:

$$\frac{EF}{CD}=\frac{BF}{BC} \qquad (2)$$

از جمع رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{EF}{AB}+\frac{EF}{CD}=\frac{CF+BF}{BC}$$
$$\Rightarrow \frac{EF}{AB}+\frac{EF}{CD}=\frac{BC}{BC}=1$$
$$\Rightarrow \frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}=\frac{1}{EF}$$

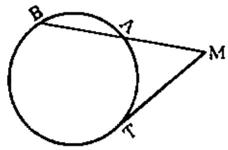


۲- می‌دانیم که:

$$MT^2=MA\cdot MB$$

اما:

$$MA=8 \text{ و } MA=AB \Rightarrow MB=16$$
$$\Rightarrow MT^2=8\times 16=128 \Rightarrow MT=8\sqrt{2}$$



۳- الف) در معادلهٔ $x=-1$ را قرار می‌دهیم و در نتیجه خواهیم داشت:

$$x=-1 : 25^{-1}=3+m\times 5^{-1}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{25}=3+\frac{m}{5}$$
$$\frac{m}{5}=\frac{1}{25}-3=\frac{1-75}{25}=\frac{-74}{25}$$
$$\Rightarrow m=\frac{-74}{5}=-14/8$$

ب) $25^x=3+m5^x \overset{(1)}{\Longrightarrow}$

$$(5^x)^2-m(5^x)-3=0$$
$$5^x=y : y^2-my-3=0 \overset{(2)}{\Longrightarrow}$$
$$\Delta_y=m^2+12>0$$

مبین معادله همواره مثبت است. پس معادلهٔ (۲) به ازای همهٔ مقادیر m دارای جواب است. اما داریم:

$$y=5^x \Rightarrow x=log_5^y$$

پس باید داشته باشیم: $y>0$.

از آن‌جا که معادلهٔ (۲) به ازای هر مقدار m دارای یک ریشهٔ مثبت است پس معادلهٔ (۱) نیز به ازای همهٔ مقادیر m لااقل دارای یک جواب است.

ج) $m=2 : 25^x=3+2\times 5^x \Longrightarrow$

$$(5^x)^2-2(5^x)-3=0$$

با فرض $y=5^x$ داریم:

$$y^2-2y-3=0 \Rightarrow$$
$$y=1\pm\sqrt{1+3}=1\pm 2 \Rightarrow$$
$$y=3 \text{ یا } y=-1$$
$$y=5^x \Rightarrow x=log_5^y \quad (y>0)$$

جواب $y=-1$ قابل قبول نیست زیرا داریم: $y>0$.

$$y=3 : x=log_5^3 \Longrightarrow \text{مجموعهٔ جواب معادله}=\{log_5^3\}$$

۴- درصورتی که a_1 و u_1 به ترتیب جمله‌های اول و d و q قدرنسبتهای تصاعد حسابی و هندسی باشند، با توجه به فرض مسأله و فرمولهای زیر:

جملهٔ عمومی تصاعدحسابی $a_n = a_1 + (n-1)d$

جملهٔ عمومی تصاعدهندسی $u_n = u_1 q^{n-1}$

داریم:

$$\begin{cases} x = a_1 + 4d = u_1 q^4 \\ y = a_1 + 16d = u_1 q^{16} \\ z = a_1 + 36d = u_1 q^{36} \end{cases}$$

ودر نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x - y = -12d \\ y - z = -20d \\ z - x = 32d \end{cases}$$

وبا استفاده از رابطه‌های اخیر داریم:

$$x^{y-z} \cdot y^{z-x} \cdot z^{x-y}$$
$$= (u_1 q^4)^{-20d} (u_1 q^{16})^{32d} (u_1 q^{36})^{-12d}$$
$$= q^{-20d+32d-12d} \cdot u^{-80d+512d-432d}$$
$$= 1 \times 1 = 1$$

۵−

$$tg\alpha\, x^2 - (tg^2\alpha + 3)x + 3tg\alpha = 0$$
$$\Delta = (tg^2\alpha + 3)^2 - 12 tg^2\alpha$$
$$= tg^4\alpha + 6tg^2\alpha + 9 - 12tg^2\alpha$$
$$= tg^4\alpha - 6tg^2\alpha + 9$$
$$= (tg^2\alpha - 3)^2$$
$$x = \frac{tg^2\alpha + 3 \pm (tg^2\alpha - 3)}{2tg\alpha}$$

پس داریم:

$$x = \frac{tg^2\alpha + 3 + tg^2\alpha - 3}{2tg\alpha} = \frac{2tg^2\alpha}{2tg\alpha} \overset{(tg\alpha \neq 0)}{=\!=} tg\alpha$$

و یا:

$$x = \frac{tg^2\alpha + 3 - tg^2\alpha + 3}{2tg\alpha} = \frac{6}{2tg\alpha} = \frac{3}{tg\alpha} = 3cotg\alpha$$

۶− از فرض:

$$(1 + \sin x)(\sin x + \cos x) \neq 0$$

می‌توان نوشت:

$$\frac{1 - \sin x}{\sin x + \cos x} = \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x}$$
$$(1 - \sin x)(1 + \sin x)$$
$$= (\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)$$
$$1 - \sin^2 x = \sin^2 x - \cos^2 x$$
$$1 - (1 - \cos^2 x) = 1 - \cos^2 x - \cos^2 x$$
$$3\cos^2 x = 1 \implies \cos^2 x = \frac{1}{3}$$

$$\cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \implies$$
$$x = 2k\pi \pm \mathrm{Arc}\cos\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$
$$x \simeq 2k\pi \pm 54/74$$

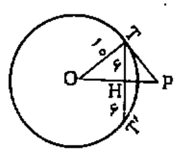
یا

$$x \simeq 2k\pi \pm 125/26$$

حل تشریحی تستهای سال دوم تجربی

۱− گزینهٔ (۲) جواب است زیرا داریم:

$$TT' = 12 \implies HT = 6 \implies OH = 8 \implies$$
$$OT^2 = OH \cdot OP \implies$$
$$100 = 8 \times OP \implies OP = 12/5$$
$$PT = \sqrt{12/5^2 - 100} = 7/5$$



۲− اگر $a = 2\sqrt{3}$ و $b = 4$ و $c = 2$ سانتی‌متر باشد، کوچکترین ضلع AB است و زاویهٔ مقابل به آن زاویهٔ C می‌باشد. پس:

$$\cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{12 + 16 - 4}{16\sqrt{3}}$$
$$= \frac{24\sqrt{3}}{16 \times 3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$$

پس گزینهٔ (۱) جواب است.

۳− گزینهٔ (۲) درست است زیرا داریم:

$S =$ شش‌ضلعی منتظم محیط بردایرهٔ به شعاع R

$$\frac{1}{2} n C'_n R = \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} R \times R = 2\sqrt{3} R^2$$

۴− عبارت $\frac{(1-x^2)^5}{\sqrt[4]{x^3}}$ وقتی معین است که داشته باشیم:

$$x > 0 \quad \text{یا} \quad x^3 > 0$$

و همچنین وقتی منفی است که داشته باشیم:

$$1 - x^3 < 0 \implies x^3 > 1 \implies x > 1$$

بنابراین از اشتراک $x > 0$ و $x > 1$ داریم: $x > 1$.

پس گزینهٔ (۳) صحیح است.

۵− گزینهٔ (۲) صحیح است. زیرا داریم:

$$\log_y^x = \frac{\log_z^x}{\log_z^y} \implies 2\log_{x^2}^{(a^2+c^2)}$$

$$= \frac{2\log(a^2 + c^2)}{\log x^2} = \frac{2\log(a^2 + c^2)}{2\log x}$$
$$= \log_x^{(a^2+c^2)}$$

به همین ترتیب داریم:

$$4\log_{x^4}^{b^2} = \log_x^{b^2}$$

و

$$8\log_{x^8}^{(c^2-a^2)} = \log_x^{(c^2-a^2)}.$$

و با توجه به واسطهٔ حسابی داریم:

$$\log_x^{(c^2-a^2)} + \log_x^{(c^2+a^2)} = 2\log_x^{b^2}$$
$$\implies \log_x^{(c^4-a^4)} = \log_x^{b^4}$$
$$\implies c^4 - a^4 = b^4 \implies a^4 + b^4 = c^4$$

۶− شرط ریشهٔ مضاعف چنین است:

$$\Delta' = (3b)^2 - 9ac = 0$$
$$\Delta' = 9b^2 - 9ac = 0 \implies$$
$$9(b^2 - ac) = 0 \implies b^2 - ac = 0$$

بنابراین a وb وc تشکیل یک تصاعدهندسی می‌دهند زیرا:

$$b^2 = ac$$

پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

۷− گزینهٔ (۴) صحیح است. زیرا داریم:

$$\mathrm{Arc}\cos\left(\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{2} \implies$$
$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{2} \implies \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \implies$$
$$x - \frac{\pi}{3} = k\pi \implies x = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

۸− گزینهٔ (۳) صحیح‌است زیرا درصورت‌عبارت:

$$\log\left(tg\frac{\pi}{4}\right)$$

وجود دارد که داریم:

$$\log\left(tg\frac{\pi}{4}\right) = \log 1 = 0$$

پس صورت عبارت p صفر ومخرج آن عدد است که در نتیجه خواهیم داشت: $p = 0$ وتنها گزینهٔ (۳) برابر صفر است:

$$\log \sin\frac{\pi}{2} = \log 1 = 0$$

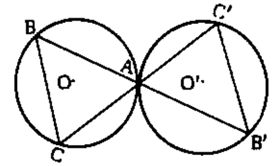
حل مسائل ریاضیات سال سوم تجربی

۱− دودایره به شعاعهای برابر که درنقطه A مماس برونی باشند قرینهٔ مرکزی یکدیگرند که مرکز تقارن همان نقطهٔ تماس دو دایره است، هرخطی که از مرکزتقارن این دو دایره رسم شود و دو دایره‌را در دونقطه مانند B و B' یا C و C' قطع کند نقاط B و B' و همچنین دو نقطهٔ C و C' قرینه مرکزی

یکدیگرند بنابراین:

$BC \parallel B'C'$ و $BC=B'C'$

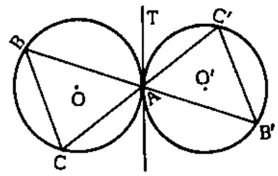
است، زیرا قرینه مرکزی هر پاره‌خط باخودآن پاره‌خط‌مساوی است. وازطرفی‌قرینه مرکزی هرخط راست‌خطی‌راست موازی خودآن خط است.



راه دیگر: اگرمماس مشترک‌داخلی این دودایره را رسم کنیم به آسانی ثابت می‌شودکه:

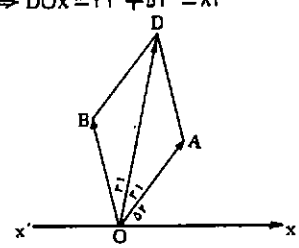
$\hat{B}=\hat{B'}$ و $\hat{C}=\hat{C'}$

است وازآن‌جا ثابت می‌گرددکه دومثلث ABC و $A'B'C'$ باهم برابرند.



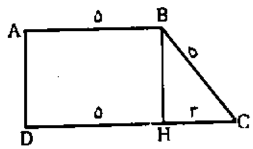
۲- چون اندازه‌های دوبردار $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ باهم‌برابرند پس بسردار $\overrightarrow{OD}$ یعنی بسرایند این دوبردار نیمساز زاویـهٔ $A\hat{O}B$ می‌باشد اما:

$$A\hat{O}x=52^\circ \quad \text{و} \quad B\hat{O}x=114^\circ$$
$$\Longrightarrow B\hat{O}A=B\hat{O}x-A\hat{O}x=114-52=62^\circ$$
$$\Longrightarrow D\hat{O}B=\frac{1}{2}A\hat{O}B=\frac{62}{2}=31^\circ$$
$$\Longrightarrow D\hat{O}x=31^\circ+52^\circ=83^\circ$$



۳- اولاً- از رأس B عمود BH رابرقاعدهٔ CD فرود می‌آوریم داریم:

$$CH=8-5=3 \quad \text{و} \quad BC=5 \Longrightarrow$$
$$BH^2=BC^2-CH^2=25-9=16$$
$$\Longrightarrow BH=4$$
$$\Longrightarrow AD=4$$ اندازهٔ ساق قائم ذوزنقه

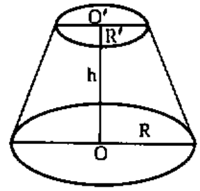


ثانیاً- حجم مخروط ناقص که شعاعهای دوقاعده‌اش R و R' و ارتفاعش h باشد برابر است با:

$$v=\frac{h}{3}(\pi R^2+\pi R'^2+\pi RR')$$

از آن‌جا:

$$v=\frac{4}{3}(25\pi+64\pi+40\pi)=172\pi$$



۴- درتابع $f(x)$ ابتدا x را به $g(x)$ تبدیل می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{1}{x+1} \xrightarrow{x \to g(x)}$$

$$f(g(x))=\frac{1}{g(x)+1} \qquad (1)$$

از طرفی داریم:

$$fog(x)=f(g(x))=\frac{x^2}{x^2+1} \qquad (2)$$

بنابراین از رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$fog(x)=\frac{1}{g(x)+1}=\frac{x^2}{x^2+1} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{g(x)+1}=\frac{x^2}{x^2+1}$$

$$g(x)+1=\frac{x^2+1}{x^2} \Longrightarrow$$

$$g(x)=\frac{x^2+1}{x^2}-1=\frac{1}{x^2}$$

اینک ضابطه $gof(x)$ رابه دست می‌آوریم:

$$gof(x)=g(f(x))=g\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{1}{x+1}\right)^2}\overset{(x\neq -1)}{=}(x+1)^2$$

بنابراین داریم: $D_{gof}=\mathbb{R}-\{-1\}$.

۵- الف) با جایگزین کردن $x=1$ عبارت فوق به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ درمی‌آید. بنابراین باید عامل ابهام $(x-1)$ را پس‌از تجزیهٔ‌صورت ومخرج حذف کرد:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-3x+2}{(x^5-1)^2}\right)=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)^2(x^4+x^3+x^2+x+1)^2}$$

با جایگزین‌کردن $x=1$ در عبارت فوق باز هم حالت مبهم $\frac{0}{0}$ پیش خواهد آمدکه مجدداً رفع ابهام می‌کنیم:

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)^2}$$

پس از رفع ابهام داریم:

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{(x^4+x^3+x^2+x+1)^2}=\frac{3}{25}$$

ب)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^n+n}{x^{n+1}+x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^n(1+\frac{n}{x^n})}{x^n(x+\frac{x}{x^n})}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{n}{x^n}}{x+\frac{1}{x^{n-1}}}$$

چون $x\to\pm\infty$ عبارتهای $\frac{n}{x^n}$ و $\frac{1}{x^{n-1}}$ به‌صفرمیل می‌کنند، پس داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$$

۶- الف) اگر طرفین معادلـه را در $2\sin\frac{\pi}{5}$ ضرب کنیم وسپس تمام جمله‌هارابه مجموع تبدیل کنیم، صحت اتحاد مسلم می‌شود.

ب) در اتحاد فوق $x=0$ را اختیار می‌کنیم که دراین صورت‌نتیجهٔ زیرحاصل خواهدشد:

$$\sin\frac{\pi}{5}+\sin\frac{3\pi}{5}=\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{4\pi}{5}$$

اگرطرفین رابطهٔ اخیر را به صورت ضرب تبدیل کنیم، پس‌از ساده‌کردن به تساوی زیر خواهیم رسید:

$$\sin\frac{3\pi}{5}=\sin\frac{2\pi}{5}$$

و از این تساوی داریم:

$$3\sin\frac{\pi}{5}-4\sin^3\frac{\pi}{5}=2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}$$

و چون $\sin\frac{\pi}{5}\neq 0$ است، طرفین آن را به $\sin\frac{\pi}{5}$ ساده

می‌کنیم :

$$3-4\sin^2\frac{\pi}{5}=2\cos\frac{\pi}{5}$$

$$3-4(1-\cos^2\frac{\pi}{5})=2\cos\frac{\pi}{5}$$

اینک از این رابطه مقدار $\cos\frac{\pi}{5}$ به دست خواهد آمد:

$$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

۷ـ باتوجه به اتحاد زیر:

$$\sin x+\sin(x+\frac{2\pi}{5})+\sin(x+\frac{4\pi}{5})$$

$$=\sin(x+\frac{\pi}{5})+\sin(x+\frac{3\pi}{5})$$

می‌توان معادلهٔ مفروض‌را چنین‌نوشت:

$$\sin(x+\frac{\pi}{5})+\sin(x+\frac{3\pi}{5})=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

با تبدیل سمت‌چپ معادله به صورت ضرب به معادلهٔ سادهٔ زیر خواهیم رسید :

$$\sin(x+\frac{2\pi}{5})=\frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x=2k\pi+\frac{13\pi}{30} \\ x=2k\pi-\frac{7\pi}{30} \end{array} \right.$$

حل تشریحی تستهای سال سوم تجربی

۱ـ گزینهٔ (۲) جواب است زیرا:

$$G\left| \begin{array}{l} x=\frac{x_C+x_A+x_B}{3}=\frac{0+0+3}{3}=1 \\ y=\frac{y_C+y_A+y_B}{3}=\frac{0+3+0}{3}=1 \end{array} \right.$$

$$OG=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

۲ـ گزینهٔ (۱) جواب است زیرا:

$$(\vec{a}+2\vec{b})(\vec{a}-3\vec{b})=|\vec{a}|^2-6|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$=(4)^2-6(3)^2-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$$

$$=16-54-4\times3\times\cos\frac{\pi}{2}=-38$$

۳ـ گزینهٔ (۲) جواب‌است زیرا طبق دستوراولر داریم:

$$F+S=A+2 \Longrightarrow 12+S=30+2$$

$$\Longrightarrow S=20$$

۴ـ گزینهٔ (۲) جواب است. زیرا اگر شعاع قاعدهٔ مشترک استوانه دوار ومخروط دوار را R وارتفاع استوانه را h و استوانه مخروط‌را h' فرض کنیم داریم:

$$v=\pi R^2h=3v'=3\times\frac{1}{3}\pi R^2h' \Longrightarrow$$

$$h=h' \Longrightarrow \frac{h}{h'}=1$$

۵ـ گزینهٔ (۳) صحیح‌است زیرا داریم:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x+1}>0 \\ \log\frac{x-1}{x+1}\geqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x<-1 \text{ یا } x>1 \\ \frac{x-1}{x+1}\geqslant 1 \Longrightarrow \frac{x-1}{x+1}-1\geqslant 0 \Longrightarrow x<-1 \end{cases}$$

$$\left(\frac{x-1}{x+1}-1=\frac{x-1-x-1}{x+1}=\frac{-2}{x+1}\geqslant 0 \Longrightarrow x<-1\right)$$

ازاشتراک ($x>1$ یا $x<-1$) و $x<-1$ نتیجه می‌شود:
$x<-1$

۶ـ گزینهٔ (۲) صحیح‌است زیرا داریم:

$$fog(x)=(x+\frac{1}{x})^3-3(x+\frac{1}{x})+3(x+\frac{1}{x})$$

$$=(x+\frac{1}{x})^3 \qquad (1)$$

$$f(x)=x^3-1 \Longrightarrow \qquad (2)$$

$$f(g(x))=g^3(x)-1 \Longrightarrow fog(x)=g^3(x)-1$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$g^3(x)-1=(x+\frac{1}{x})^3$$

$$g^3(x)=(x+\frac{1}{x})^3+1 \Longrightarrow$$

$$g(x)=\sqrt[3]{(x+\frac{1}{x})^3+1}$$

$$gof(x)=\sqrt[3]{(x^3-1+\frac{1}{x^3-1})^3+1}$$

$$\Longrightarrow gof(0)=\sqrt[3]{(-2)^3+1}$$

$$gof(0)=-\sqrt[3]{7}$$

۷ـ گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا از شرایط پیوستگی داریم :

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

$$\left(\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)\right) \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{2-x}\right)=c$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)(x+2)}{-(x-2)}\right)\overset{\text{(رفع ابهام)}}{=\!=\!=}$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+2}{-1}\right)=-4=c \Longrightarrow c=-4$$

۸ـ گزینهٔ (۱) صحیح است. زیرا داریم:

$$f'(x)=-2x_M=0$$

(طول نقطهٔ ماکزیمم) $x_M=0 \Longrightarrow f(0)=1$

$\Longrightarrow M\left|\begin{array}{l}0\\1\end{array}\right.$ مختصات نقطهٔ ماکزیمم

می‌دانیم مرکز تقارن توابع درجه‌سوم نقطهٔ عطف آنان می‌باشد بنابراین مرکز تقارن تابع:

$$g(x)=x^3-3x^2+3x+1$$

نقطهٔ عطف آن است که طول آن چنین است:

$$x_p=-\frac{-3}{3}=1$$

$y_p=g(1)=2 \Longrightarrow p(1,2)$ (مختصات نقطهٔ عطف)

$$g'(x)=3x^2-6x+3 \Longrightarrow$$

$$g'(1)=0 \Longrightarrow m=0$$

(معادلهٔ خط مماس)

$$y-y_p=m(x-x_p) \Longrightarrow y-2=0$$

اگر d فاصلهٔ نقطهٔ M از خط مماس باشد، داریم:

$$d=\frac{|1(1)-2|}{\sqrt{1}}=1 \Longrightarrow \boxed{d=1}$$

حل مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱ـ مرکز تقارن منحنی نمایش تابع هموگرافیک با ضابطهٔ

$y=\frac{x}{x-1}$ و یا $xy=x+y$

محل تلاقی مجانبهای آن است :

$$I(1\,,\,1)$$

و مختصات مرکز تقارن بیضی به معادلهٔ:

$$f(x,y)=4x^2+9y^2-12x-36y+2=0$$

از رابطه‌های زیر به دست می‌آید:

$$\omega\left|\begin{array}{l} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\omega\left|\begin{array}{l}6x-12=0\\18y-36=0\end{array}\right. \Rightarrow \omega(2\,,\,2)$$

اینک فاصلهٔ $I\omega$ را تعیین می‌کنیم:

$$I\omega=\sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$$

۲ـ برای تعیین دامنه و برد تابع $fog(x)$ ابتدا باید ضابطهٔ آن‌را مشخص کنیم. برای این منظور ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$gof(x)=g(f(x))=g\left(1-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1+x}{\sqrt{1+x}}$$

$$1-\frac{1}{x+1}=t \Rightarrow \frac{1}{x+1}=1-t \Rightarrow$$

$$x+1=\frac{1}{1-t} \Rightarrow x=\frac{1}{1-t}-1$$

$$x=\frac{t}{1-t}\ :\ g(t)=\frac{1+\frac{t}{1-t}}{\sqrt{1+\frac{t}{1-t}}}$$

$$=\frac{\frac{1}{1-t}}{\sqrt{\frac{1}{1-t}}}=\frac{\sqrt{1-t}}{1-t}$$

t متغیر ظاهری است، بنابراین ضابطهٔ $g(x)$ چنین است:

$$g(x)=\frac{\sqrt{1-x}}{1-x}$$

اینک ضابطهٔ $fog(x)$ را می‌نویسیم:

$$fog(x)=f(g(x))=\frac{g(x)}{g(x)+1}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{1-x}}{1-x}}{\frac{\sqrt{1-x}}{1-x}+1}\overset{(x\neq 1)}{=}\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}+1-x}$$

$$y=fog(x)=\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}+1-x}$$

$$=\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x}\sqrt{1-x}}$$

$$=\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}$$

تعیین دامنهٔ تابع fog :

$$\begin{cases}x\neq 1\\1-x\geqslant 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\neq 1\\x\leqslant 1\end{cases} \Rightarrow x<1$$

$$\Rightarrow D_f=(-\infty,1)$$

تعیین برد تابع fog : از ضابطهٔ تابع نتیجه می‌شود:

$$1+\sqrt{1-x}=\frac{1}{y} \Rightarrow$$

$$\sqrt{1-x}=\frac{1}{y}-1=\frac{1-y}{y}>$$

$$\frac{1-y}{y}>0 \Rightarrow 0<y<1 \Rightarrow$$

$$R_{fog}=(0\ ,\ 1)$$

۳ـ اگر تابع اولیهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)$ را به $F(x)$ نمایش دهیم، بدیهی است مشتق تابع با ضابطهٔ $F(x)$ همان تابع با ضابطهٔ $f(x)$ است. پس برای تعیین ضریب زاویهٔ خط مماس بر منحنی نمایش تابع F در نقطه‌ای روی محور عرضها کافی است $f(0)$ را حساب کنیم:

$m=f(0)=0$ (ضریب زاویه خط مماس)

از شرط این که عرض اکسترمم تابع اولیهٔ تابع f برابر $\frac{-1}{9}$ است نتیجه می‌شود:

$$F(0)=\frac{-1}{9}$$

$$F(x)=\int\frac{x^9dx}{\sqrt[5]{x^5-1}}$$

$$x^5-1=u \Rightarrow x^5=u+1$$

$$\Rightarrow 5x^4dx=du$$

$$F(x)=\int\frac{x^5\cdot x^4dx}{\sqrt[5]{x^5-1}}=\frac{1}{5}\int\frac{x^5(5x^4)dx}{\sqrt[5]{x^5-1}}$$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{(u+1)du}{\sqrt[5]{u}}$$

$$F(x)=\frac{1}{5}\int u^{-\frac{1}{5}}(u+1)du$$

$$=\frac{1}{5}\int(u^{\frac{4}{5}}+u^{-\frac{1}{5}})du$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{5}{9}u^{\frac{9}{5}}+\frac{5}{4}u^{\frac{4}{5}}\right)+c$$

$$F(x)=\frac{1}{9}(x^5-1)^{\frac{9}{5}}+\frac{1}{4}(x^5-1)^{\frac{4}{5}}+c$$

$$F(0)=\frac{-1}{9}\ :\ F(0)=\frac{1}{9}(0-1)^{\frac{9}{5}}$$

$$+\frac{1}{4}(0-1)^{\frac{4}{5}}+c=\frac{-1}{9} \Rightarrow c=-\frac{1}{4}:$$

$$F(x)=\frac{1}{9}(x^5-1)^{\frac{9}{5}}+\frac{1}{4}(x^5-1)^{\frac{4}{5}}-\frac{1}{4}$$

۴ـ الف)

$$\cos x\sin x-m\cos^2x=\frac{1-m}{2}$$

$$2\sin x\cos x-2m\cos^2x=1-m$$

$$\sin 2x-m(2\cos^2x-1)=1 \Rightarrow$$

$$\sin 2x-m\cos 2x=1$$

با توجه به اتحادهای مثلثاتی:

$$\cos 2x=\frac{1-tg^2x}{1+tg^2x}\ \text{و}\ \sin 2x=\frac{2tgx}{1+tg^2x}$$

داریم:

$$\left(\frac{2tgx}{1+tg^2x}\right)-m\left(\frac{1-tg^2x}{1+tg^2x}\right)=1 \Rightarrow$$

$$2tgx-m+m\,tg^2x=1+tg^2x$$

$$(m-1)tg^2x+2tgx-(m+1)=0$$

از معادلهٔ اخیر داریم:

$tgx=1$ یا $tgx=\frac{1+m}{1-m}=tg\alpha$

$$x=k\pi+\frac{\pi}{4}$$

یا

$$x=k\pi+\alpha\ \left(\alpha=Arctg\frac{1+m}{1-m}\right)$$

بنابراین معادله همواره دارای جواب $k\pi+\frac{\pi}{4}$ است و به m بستگی ندارد.

ب) $m=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$:

$$tgx=\frac{1+m}{1-m}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}}{1-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}}$$

$$tgx=\frac{\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}=tg\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{3}$$

پس مجموعهٔ جوابهای معادله چنین است:

$$R=\left\{x\,|\,x=k\pi+\frac{\pi}{4},\ x=k\pi+\frac{\pi}{3}\right\}$$

۵ـ می‌دانیم مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر است با:

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

و همچنین برای هر مثلث به اضلاع a و b و c داریم:

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A\ ,\ a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

از تقسیم دو رابطهٔ اخیر داریم:

$$\frac{2S}{a^2}=\frac{bc\sin A}{b^2+c^2-2bc\cos A}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Longrightarrow 2bc\sin A+2\sqrt{3}\,bc\cos A=\sqrt{3}(b^2+c^2)$$

$$\sin A+\sqrt{3}\cos A=\frac{\sqrt{3}(b^2+c^2)}{2bc}$$

(معادلهٔ کلاسیك نوع اول)

$$\sin A+\operatorname{tg}60^\circ\cos A=\frac{\sqrt{3}(b^2+c^2)}{2bc}$$

$$\sin A+\frac{\sin 60^\circ\cos A}{\cos 60^\circ}=\frac{\sqrt{3}(b^2+c^2)}{2bc}\Longrightarrow$$

$$\frac{\sin(A+60^\circ)}{\cos 60^\circ}=\frac{\sqrt{3}(b^2+c^2)}{2bc}$$

$$\sin(A+60^\circ)=\frac{\sqrt{3}(b^2+c^2)}{4bc}\qquad(1)$$

طرف دوم تساوی (۱) نشان می‌دهد که $A+60^\circ$ از 180° کمتراست ودر نتیجه خواهیم داشت:

$$60^\circ<A+60<180^\circ\Longrightarrow$$

$$0<\sin(A+60)\leqslant 1\Longrightarrow$$

$$0<\frac{\sqrt{3}(b^2+c^2)}{4bc}\leqslant 1\Longrightarrow$$

$$\sqrt{3}(b^2+c^2)\leqslant 4bc$$

$$\sqrt{3}(b+c)^2-2\sqrt{3}\,bc\leqslant 4bc\Longrightarrow$$

$$\sqrt{3}(b+c)^2\leqslant 2(2+\sqrt{3})bc$$

$$\frac{(b+c)^2}{2bc}\leqslant\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\Longrightarrow$$

$$\frac{(b+c)^2}{2bc}\leqslant\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\qquad\text{(شرط جواب)}$$

از تساوی (۱) زاویهٔ A به دست می‌آید (یك و یا دو جواب برای A). برای محاسبهٔ دو زاویهٔ دیگر $\hat{B}$ و $\hat{C}$ داریم:

$$\begin{cases}\hat{B}+\hat{C}=\pi-A\\[4pt] \dfrac{b}{\sin\hat{B}}=\dfrac{c}{\sin\hat{C}}\end{cases}\qquad(2)$$

$$\Longrightarrow\frac{\sin\hat{B}}{\sin\hat{C}}=\frac{b}{c}$$

از معادلهٔ دوم دستگاه نتیجه می‌شود که:

$$\operatorname{tg}\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}=\frac{b-c}{b+c}\operatorname{cotg}\frac{\hat{A}}{2}\qquad(3)$$

از معادلهٔ (۳) $\operatorname{tg}\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}$ ودر نتیجه $\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}$ به دست می‌آید واز دستگاه (۲) زاویه‌های $\hat{B}$ و $\hat{C}$ حاصل می‌شود.

برای محاسبهٔ ضلع a نیز از تساوی:

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

استفاده می‌کنیم.

حل تشریحی تستهای ریاضیات سال چهارم تجربی

۱- گزینهٔ (۱) صحیح است زیرا داریم:

$$f(x)=\log_2\frac{4-x^2}{2+x}=\log_2\frac{(2-x)(2+x)}{2+x}$$

$$x\neq-2\ :\ f(x)=\log_2(2-x)\Longrightarrow$$

$$2-x>0\Longrightarrow x<2$$

از اشتراك $x\neq-2$ و $x<2$ داریم:

$$DF=(-\infty\,,\,-2)\cup(-2\,,\,2)$$

۲- گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا بـا تبدیل x به $\frac{1}{x}$ دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases}2f(\frac{1}{x^5})+f(x^5)=\frac{1}{x}\\[4pt] f(\frac{1}{x^5})+2f(x^5)=x\end{cases}\Longrightarrow$$

$$f(x^5)=\frac{2x}{3}-\frac{1}{3x}$$

$$x^5=t\Longrightarrow x=\sqrt[5]{t}$$

$$f(t)=\frac{2\sqrt[5]{t}}{3}-\frac{1}{3\sqrt[5]{t}}\Longrightarrow$$

$$f(x)=\frac{2\sqrt[5]{x}}{3}-\frac{1}{3\sqrt[5]{x}}\quad\text{و}\quad g(x)=\frac{1}{x}$$

$$fog(x)=\frac{2}{3\sqrt[5]{x}}-\frac{\sqrt[5]{x}}{3}\Longrightarrow$$

$$fog(-1)=\frac{-2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{-1}{3}$$

۳- گزینه (۲) صحیح است. زیرا می‌دانیم:

$$\lim_{x\to a}f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$$

پس داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1+x}{2x-1}\right)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{6x^5+4x^2-1}{x^7+x^5+x^2}\right)=\frac{1}{2}\times 4=2$$

۴- از شرایط پیوستگی داریم:

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)=f(a)$$

پس خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 0}(2x^2+k)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 2x}{x^2}\right)=f(0)=k$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 2x}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}4\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2=4$$

پس گزینهٔ (۴) صحیح است. $\Longrightarrow k=4$

۵- می‌دانیم ریشه‌های حقیقی مشتق تابع درجهٔ سوم طولهای ماکزیمم و مینیمم را می‌دهد:

$$y'=3x^2+2mx+1=0\Longrightarrow$$

$$x_M+x_m=\frac{-2m}{3}$$

از طرفی مرکز تقارن تـابع هموگرافیك، محل تلاقی مجانبهای آن است: $I(\frac{-1}{3}\,,\,\frac{2}{3})$

بنابراین طول مرکز تقارن تابع $y=\frac{2x-1}{3x+1}$ برابر $\frac{-1}{3}$ است ودر نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{-2m}{3}=\frac{-1}{3}\Longrightarrow m=\frac{1}{2}$$

پس گزینهٔ (۳) صحیح است.

۶- به ترتیب داریم:

$$\frac{\cos B-\cos C}{1+\cos A}=\frac{1-\cos A}{\cos B+\cos C}$$

$$(\cos B-\cos C)(\cos B+\cos C)$$

$$=(1-\cos A)(1+\cos A)$$

$$\cos^2B-\cos^2C=1-\cos^2A\Longrightarrow$$

$$1-\cos^2A+1-\cos^2B=1-\cos^2C$$

$$\sin^2A+\sin^2B=\sin^2C\Longrightarrow$$

$$\frac{\sin^2A}{4R^2}+\frac{\sin^2B}{4R^2}=\frac{\sin^2C}{4R^2}$$

$$\left(\frac{\sin A}{2R}\right)^2+\left(\frac{\sin B}{2R}\right)^2=\left(\frac{\sin C}{2R}\right)^2\Longrightarrow$$

$$a^2+b^2=c^2\qquad\text{(مثلث قائم‌الزاویه)}$$

پس گزینهٔ (۳) صحیح است.

۷- معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$m(\sin x+\cos x)+\cos x=\sin x+2$$

(معادله کلاسیك نوع اول)

$$(m-1)\sin x+(m+1)\cos x=2$$

$$\Delta=(m+1)^2+(m-1)^2-4$$

$$=m^2+2m+1+m^2-2m+1-4$$

$$\Delta=2m^2-2<0\Longrightarrow$$

$$m^2<1\Longrightarrow -1<m<1$$

پس گزینهٔ (۴) صحیح است.

جوابهای تفریح اندیشه

جواب ۱

حل ـ اگر او آخرین ۵ ریال را در مغازه پنجم خرج نمی‌کرد برایش ۵ ریال بیشتر از وقت خروجش از این مغازه باقی می‌ماند، و این نصف آن مبلغی است که او به‌هنگام ورود به مغازه پنجم داشته است. پس اگر از آخرین مغازه شروع کنیم که پس از آن دیگر مهرداد هیچ پولی نداشته است، خواهیم داشت:

مبلغی که مهرداد هنگام ورود به مغازهٔ پنجم داشته است:

$۲(۰+۵)=۱۰$

مبلغی که مهرداد هنگام ورود به مغازهٔ چهارم داشته است:

$۲(۱۰+۵)=۳۰$

مبلغی که مهرداد هنگام ورود به مغازهٔ سوم داشته است:

$۲(۳۰+۵)=۷۰$

مبلغی که مهرداد هنگام ورود به مغازهٔ دوم داشته است:

$۲(۷۰+۵)=۱۵۰$

مبلغی که مهرداد هنگام ورود به مغازهٔ اول داشته است:

$۲(۱۵۰+۵)=۳۱۰$

پس پولی را که مهرداد قبل از خرید داشته است ۳۱۰ ریال است.

جواب ۲

اشخاص مورد سؤال به چهار دسته تقسیم می‌شوند:

A: آنهائیکه از محصول استفاده نمی‌کنند

B: عدّه‌ای که آن را فقط به‌صورت مایع بکار می‌برند

C: تعدادی که از محصول به هر دوصورت استفاده می‌کنند

D: عده‌ای که آن را فقط به‌صورت پودر بکار می‌برند

بموجب داده‌ها داریم:

$A+D=\frac{۲}{۷}$ کلّ افراد مورد سؤال. و $A+B=\frac{۱}{۳}$ کلّ افراد مورد سؤال. و $A=\frac{۱}{۵}$ کلّ افراد مورد سؤال. و $C=۴۲۷$. از آنجا:

$$B=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۵}=\frac{۲}{۱۵} \quad \text{و} \quad D=\frac{۲}{۷}-\frac{۱}{۱۵}=\frac{۳}{۳۵} \quad \text{و}$$

$$A+B+D=\frac{۴۴}{۱۰۵} \Rightarrow C=\frac{۶۱}{۱۰۵}$$

$$۴۲۷ : \frac{۶۱}{۱۰۵}=\frac{۴۲۷\times۱۰۵}{۶۱}=۷۳۵$$

پس تمام افراد مورد سؤال ۷۳۵ نفر می‌باشند.

جواب ۳

به‌طور متوسط ۷۳ مرغ در یک روز یک دوجین تخم می‌کنند و ۳۷ مرغ یک کیلو دانه را در یک روز می‌خورند برای برداشتن یک دوجین تخم مرغ در یک روز لازمست که ۷۳ مرغ در یک روز دانه بخورند برای این منظور $\frac{۷۳}{۳۷}$ کیلو دانه لازم است که آن کمی کمتر از دوکیلو می‌شود

جواب ۴

مربع سحرآمیز مورد بحث چون سر و ته شود باز هم می‌تواند مربع سحرآمیز خوانده شود.

فرم اشتراک

عزیزانی‌که‌مایل‌به‌اشتراک ۴ شمارهٔ‌مجلهٔ‌برهان هستند باواریزمبلغ ۳۰۰۰ریال به‌حساب جاری ۷۹۱۰/۵ بانک ملت شعبهٔ‌کریمخان‌زند به‌نام مشترکین‌انتشارات‌مدرسه، **اصل فیش واریزی** را همراه‌بافرم تکمیل‌شده به آدرس دفترمرکزی‌انتشارات‌مدرسه واقع درخیابان ایرانشهرشمالی، کوچه‌بهرام‌جوبینی پلاک ۱۷ ارسال‌دارند.

■ **لطفاً از ارسال وجه نقد جداً خودداری فرمایید.**

در صورت مشترک بودن کد اشتراک خود را حتماً ذکر فرمایید: ....

۱ـ نام خانوادگی .... ۲ـ نام .... ۳ـ سال تولد .... ۴ـ دختر ☐ پسر ☐

۵ـ پایه و رشته تحصیلی .... ☐☐

۶ـ نشانی: استان .... شهرستان .... خیابان .... کوچه .... پلاک ....

۷ـ کدپستی .... ۸ـ مبلغ‌واریزی .... ۹ـ شماره‌فیش .... ۱۰ـ تاریخ فیش ....

In the name of God

Borhan

VOL.2. No.3
Serial numbers; 7
Aug 1993

Borhān is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:
Madrasse Publication- No. 268, Iranshahr-e -Shomali Ave. Tehran Iran Post code: 15875

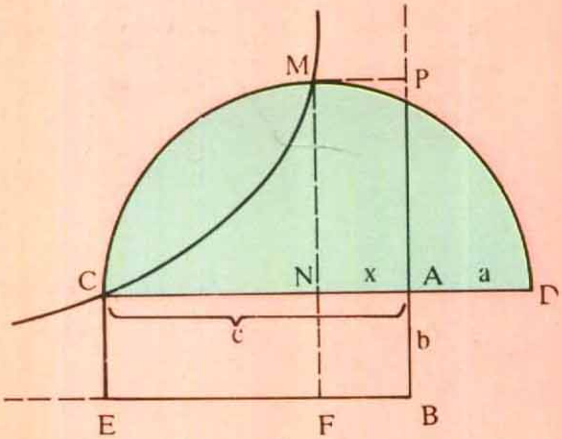
Contents:

روش حکیم عمر خیام، برای حل معادلهٔ درجهٔ سوم

خیام (سدهٔ پنجم هجری قمری ـ سدهٔ یازدهم میلادی)، اهل نیشابور خراسان، یکی از بزرگترین دانشمندان مسلمان ایرانی، نوشته‌هایی در زمینهٔ ریاضیات، اخترشناسی، فیزیک و شعر و عرفان از خود باقی گذاشته و تقویم جلالی یا ملکشاهی را تنظیم کرده است. مسأله‌ای که در این جا می‌آید، از کتاب «الجبر و المقابلة» او برداشته شده است.

با فرض مثبت بودن ضریبهای a، b' و c'، مطلوب است حل معادلهٔ درجهٔ سوم

$$x^3 + ax^2 + b'x = c'$$



حل: اگر $b = \sqrt{b'}$ و $c = \frac{c'}{b'}$ بگیریم، به این معادله می‌رسیم:

$$x^3 + ax^2 + b^2x = b^2c \quad (*)$$

مستطیل ABEC را با ضلعهای $|AB| = b$ و $|AC| = c$ می‌سازیم و پاره‌خط راست CA را به‌اندازهٔ $|AD| = a$ امتداد می‌دهیم. شاخه‌ای از هذلولی متساوی‌الساقینی را رسم می‌کنیم که از نقطهٔ C بگذرد و خطهای راست AB و BE مجانبهای آن باشند. اگر این هذلولی، نیم دایره «به قطر [CD] را در M قطع کند، آن‌وقت طول پاره‌خط راست AN (N، پای عمودی است که از M بر [CD] فرود آمده است)، برابر x.

اثبات: دو مستطیل MPBF و ABEC مساحتهایی برابر دارند (چرا؟)، بنابراین دو مستطیل MPAN و NFEC هم ارزند، یعنی:

$$\frac{|MN|}{|NC|} = \frac{|AB|}{|AN|} \qquad (1)$$

ولی $|MN|^2 = |DN|.|NC|$، بنابراین:

$$\frac{|MN|^2}{|NC|^2} = \frac{|DN|.|NC|}{|NC|^2} = \frac{|DN|}{|NC|} \qquad (2)$$

با توجه به (۱) و (۲) به‌دست می‌آید:

$$\frac{|AB|^2}{|AN|^2} = \frac{|DN|}{|NC|} \Rightarrow |NC|.|AB|^2 = |DN|.|AN|^2$$

و یا $(c - x)b^2 = (a + x)x^2$ که بعد از منظم کردن، به‌همان معادلهٔ (*) می‌رسیم.

خیام، با پیدا کردن یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجه سوم (و اغلب به‌طریق هندسی و با استفاده از مقطعهای مخروطی)، معادله را حل شده می‌پنداشت و به جست و جوی ریشهٔ احتمالی دیگر نمی‌رفت. خیام به ریشه‌های منفی معادله هم، توجهی نداشت.