انتشارات مدرسه

مجله ریاضی برهان

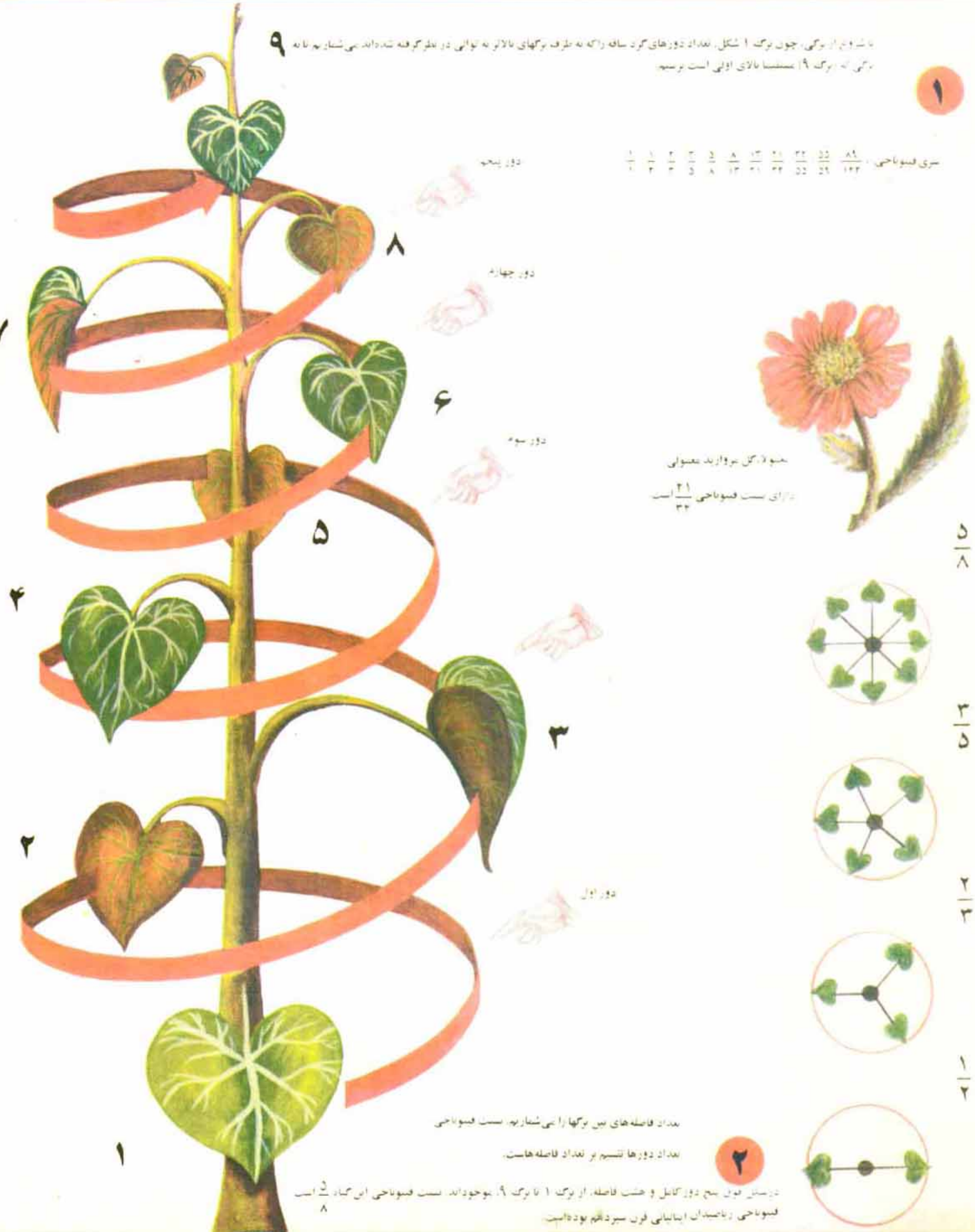
برای دانش آموزان دبیرستان

۲

سال اول، بهار ۱۳۷۱

بهاء ۵۰۰ ریال

چاپ پنجم



بسم الله الرحمن الرحیم

اعضای هیئت تحریریه:
آقایان: ● محمد هاشم رستمی،
● غلامرضا یاسی پور
● سید حسین سیدموسوی،
● سید محمد رضا هاشمی‌موسوی،
● حمید رضا امیری
(با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقایان پرویز شهریاری و محمد عابدی)

● سردبیر: حمید رضا امیری
● ویراستار ادبی: حسن طلایی عبدی
● طرح جلد: سوسن نصیری
● صفحه آرا: هوشنگ آشتیانی
● رسام: سید محسن طرازانی

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱ ـ نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث درسی کتب ریاضی دبیرستان)
۲ ـ طرح مسائل کلیدی (برای دانش آموزان) به همراه حل آن
۳ ـ طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش آموزان) به همراه حل آن
۴ ـ طرح معماهای ریاضی
۵ ـ نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

● مقالات وارده باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.
● هیئت تحریریه درحکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقالات آزاداست.
● مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

□ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، پلاک ۲٦۸، ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش تلفن: ۸۲٦۰۰۷

مطالب این شماره

سخن سردبیر

عزیزان سلام:

پس از چاپ شمارهٔ اول مجلهٔ ریاضی «برهان» که با استقبال بسیار زیادی از طرف شما دانش‌آموزان عزیز و معلمین گرامی روبرو شد و با توجه به پیشنهادات، انتقادات، تشویقها و دلگرمیهای خوانندگان محترم که به‌صورت کتبی و یا شفاهی به اینجانب رسیده مطالبی به نظرم رسید که مختصراً عنوان می‌کنم:

۱ - «مسائل برای حل» از این شماره به بعد همراه با تست خواهد بود.

۲ - بریده مطالب «تفریح اندیشه» و «ادب ریاضی» را که مورد توجه شما عزیزان واقع شده، افزایش داده‌ایم.

۳ - از این شماره به بعد در قسمت مسائل مسابقه‌ای، مسائلی از ریاضیات جدید و جبر نیز طرح خواهیم کرد. در ضمن پس از چاپ هر شماره فقط یک ماه فرصت دارید تا جواب مسائل مسابقه‌ای را برای ما ارسال کنید.

۴ - از این شماره به بعد قسمتی را به «تاریخچه مجلات ریاضی در ایران» اختصاص داده‌ایم و در بعضی موارد از این مجلات نکات و مسائل جالبی آورده‌ایم که حتماً مورد توجه شما عزیزان قرار خواهد گرفت.

ضمناً چون تاریخ چاپ این شمارهٔ مجله احتمالاً مصادف با «هفته معلم» است این هفته را از طرف خود و همهٔ دست‌اندرکاران مجله ریاضی «برهان» به تمامی «معلمینی که شمع وجودشان روشنگر راه شما دانش‌آموزان عزیز است» تبریک عرض می‌کنم.

والسلام

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۲)

● پرویزشهریاری

از «دفتر خاطره‌های علمی» صحبت می‌کردیم. اگر کار با این دفتر را بدون وقفه و باحوصله ادامه دهید، به‌تدریج چنان علاقه‌مندی شما را جلب خواهد کرد که در تمامی زندگی علمی خود درآینده، نمی‌توانید از آن دل بکنید و تا آنجا به آن عادت می‌کنید که جزئی از زندگی شما خواهدشد. وجود این دفتر، شما را در همهٔ زمینه‌ها کنجکاو می‌کند و وامی‌دارد تا به هر پیشامدی با دیدی علمی، و درعین حال انتقادی، نگاه کنید. وقتی باکسی دربارهٔ موضوعی بحث‌می‌کنید، به‌جای آن که، در ذهن خود، درفکر پاسخگویی به او و دفاع از نظر خود باشید، به حرفها و استدلالهای او گوش می‌کنید و درجهت جداکردن درست از نادرست تلاش می‌ورزید.

فرض کنید، دربخش محل زندگی شما، یا درمسیری که هرروز به مدرسه می‌روید، بعضی از خیابانها را، برای عبور اتومبیل، یک طرفه اعلام کنند. با این مسأله، خیلی ساده و مثل یک حادثهٔ معمولی، برخورد نکنید. سعی کنید، بادیدی علمی، دربارهٔ آن بیندیشید. آیا به واقع، به ساده‌تر شدن عبور و مرور کمک کرده‌است؟ آیا تصادف کمتری رخ می‌دهد؟ آیا زودتر و راحت‌تر به‌منزل یا مدرسه می‌رسید؟ مسیر عبور بااتومبیل، از منزل به مدرسه، یابرعکس، چقدر طولانیترشده؟ آیا می‌توانید، در وقت بی‌کاری خود، آماری تهیه کنید و معین کنید، به‌خاطر یک طرفه شدن این خیابانها و، درنتیجه، طولانیتر شدن مسیر برخی اتومبیلها، چقدر به مصرف بنزین اضافه شده‌است؟ شاید، به دلیل این که اتومبیلها کمتر معطل می‌شوند، درمصرف بنزین هم، صرفه‌جویی شود! آیا وقت افراد کمتر تلف می‌شود یا بیشتر؟ در مورد استهلاک اتومبیلها چطور؟ آیا می‌توانید راهی برای این «محاسبه‌ها» پیداکنید و سود یازیان این وضع جدید را بسنجید؟ آیا می‌توانید بااستدلال و آمار، درستی یا نادرستی این تعمیم را نشان‌دهید؟ این، یک مسألهٔ ریاضی است و البته نه‌چندان ساده، هروقت، به‌هر نتیجه‌ای یا محاسبه‌ای، هرچند کوچک رسیدید، در «دفتر خاطره‌های علمی» خود یادداشت کنید و، بعد، به فکر کاملتر کردن بیفتید.

بیشتر ساختمانهایی که در تهران می‌سازند، بعداز ۲۰ یا ۲۵ سال (وگاهی کمتر)، «کلنگی» به‌حساب می‌آیند؛ آنها را خراب می‌کنند و دوباره، به‌جای آنها، ساختمانهای تازه‌ای بنا می‌شود. در محله‌ای که زندگی می‌کنید، آمارگیری کنید: متوسط عمر ساختمانهای این محله چندسال است؟ کدام یک به‌خاطر عریض‌کردن خیابان بازسازی شده‌است و کدام به‌خاطر کم دوامی ساختمان یا بی‌سلیقگی درنقشهٔ آن؟ این خراب کردن و دوباره ساختن، چقدر از پول و نیرو را هدر می‌دهد؟ زیان مالی مملکت، از بابت عدم توجه کافی به ساختمانها دراین محله، به‌طور متوسط، سالی چقدر است؟... چه راهی برای این «محاسبه‌ها» و به‌دست آوردن جواب پیشنهاد می‌کنید؟

دریک شهر بندری زندگی می‌کنید. کشتیهای حامل کالا، مرتباً وارد می‌شوند و، برای تخلیه، نوبت می‌گیرند. به‌نظر شما کدام راه بهتر است: انبارهای بزرگ برای نگهداری کالاها ساخته‌شود یاایستگاه قطار را تانزدیکی اسکله بیاورند و بارکشتیها را مستقیم از کشتی به‌قطار منتقل کنند؟ ساختن جاده‌های استاندارد و تدارک کامیونها و تریلیها

به‌صرفه نزدیکتر است یاکشیدن راه‌آهن؟... آیا تصمیم‌گیری دراین مورد، تنها باتصور یاتکیه به تجربه ممکن است یا با محاسبه؟ و کدام محاسبه؟ آیا باید به‌این مسأله، به‌عنوان یک مسألهٔ ریاضی نگاه کرد؟ اگر چنین است، راه‌حل آن کدام است؟...

جهان دور و برما، یعنی طبیعت و زندگی اجتماعی، پراز مسأله است و بسیاری از این مسأله‌ها، هنوز حل نشده‌اند. درجهان امروز، بدون دانش و بدون دید علمی، نمی‌توان زندگی شایسته‌ای داشت. به‌هر گوشه‌ای از طبیعت و زندگی نگاه کنید، می‌توانید جنبه‌هایی از آن را پیداکنید که به‌دانش، و به‌خصوص به ریاضیات، مربوط می‌شود، بنابراین، ارزش اندیشیدن‌دارند و نتیجهٔ این اندیشه‌ها، هرچند کوچک، باید در «دفتر خاطره‌های علمی» شما منعکس شود.

گاه به گاه، دفتر خاطره‌های علمی خود را ورق بزنید. به‌عقب برگردید، یک سال یا دوسال پیش چگونه فکر می‌کرده‌اید؟ به چه مسأله‌هایی می‌اندیشیده‌اید؟ با چه دشواریهایی روبرو بوده‌اید؟... آن وقت می‌فهمید که، درهمین مدت کوتاه، چقدر رشد کرده‌اید؟ دانش و آگاهی شما تا چه‌اندازه بالا رفته‌است؟ ممکن است به برخی اندیشه‌های قبلی خود بخندید، ولی هرگز آنها را دور نریزید و مسیر زندگی علمی خود را، بادقت، برای خود حفظ کنید.

□

خاطره نویسی، علاوه برآن که ما را وامی‌دارد تا ذهنی کنجکاو و نکته سنج و چشمی تیزبین و دقیق داشته‌باشیم؛ دربارهٔ معنای واقعی هر واژه بیندیشیم؛ توجه خود را نه به ظاهر پیشامدها و پدیده‌های طبیعی و اجتماعی، بلکه به‌رابطهٔ متقابل آنها و به ماهیت درونی آنها معطوف کنیم و به ریشه‌یابی استدلالی آنها، به‌جای روایت ساده و بی‌مضمون، بپردازیم و...، می‌تواند وظیفه‌ای تاریخی، اجتماعی و میهنی هم به‌حساب آید.

درشرق، و از آن جمله درایران، به دلایلی که جای ذکرش دراین جانیست، بسیارکم بوده‌اند کسانی که «یادداشتهای روزانه» و «سفرنامه» یا «دفترخاطره» ای از خود باقی گذاشته باشند و، به همین مناسبت، درشناخت تاریخ اجتماعی مردم سرزمینمان، دچار دشواریهای فراوان هستیم. اگر از بعضی نوشته‌های رسمی (مثل نوشته‌های منشیهایی که در رکاب شاهان و امیران بوده‌اند) بگذریم، بسختی می‌توانیم مدرکی یا سندی پیدا کنیم که مثلاً زندگی عادی مردم کشورمان را در پانصد سال پیش به ما نشان دهد و ناچاریم، برای بازیابی تاریخ اجتماعی مردم ایران در چهارصدسال اخیر، به سفرنامه‌های بیگانگانی مراجعه کنیم که اغلب، به غرض سیاسی یا به‌طمع سودمالی باکشور ما رفت و آمد داشته‌اند.

وقتی شما سفرنامهٔ ناصرخسرو را می‌خوانید (و توصیه می‌کنم، حتماً آن را بخوانید) تمامی زندگی مردم شهرهایی که مورد بازدید نویسندهٔ آن قرار گرفته‌است، جلوچشم شما زنده می‌شود و افسوس که نمی‌توانیم شبیه شاهکار ناصرخسرو را، دست‌کم برای هرصدسال یکی، داشته باشیم... و چنین است که مردم شرق، تاریخ و درنتیجه هویت خود را، کم و بیش گم کرده‌اند و ناچارند تنها با حدس و گمان، دربارهٔ پدران خود ودربارهٔ شیوهٔ زندگی اجتماعی آنها داوری کنند.

اگر از همین روزهایی که پشت نیمکتهای دبیرستان نشسته‌ایم، به‌خاطره نویسی عادت کنیم، دست کم از امروز به بعد، این کمبود را از بین برده‌ایم و وظیفهٔ خود را دربرابر تاریخ، مردم و کشورمان انجام داده‌ایم.

وقتی که بیش‌از پانصدسال پیش، دریانوردان ماجراجوی اسپانیایی و پرتغالی، سرزمینهای ناشناختهٔ امریکا راکشف کردند و مردم بومی ساکن درآن را ازدم تیغ گذراندند، به‌نحوی که در مدتی بسیارکوتاه، جمعیت بیش‌از پنجاه میلیونی آن را، به کمتراز پنج میلیون رساندند، ادعا می‌کردند با مردمی وحشی روبرو بوده‌اند و، به‌همین بهانه، همهٔ آثار ساختمانی و هنری آنها را ازبین بردند، کتابها و نوشته‌های آنها را نابود کردند و باقی ماندهٔ مردمشان را، به بردگی درکشتزارها واداشتند. ولی امروز که اندک آثار باقی ماندهٔ قومهای ساکن امریکای قبل از کشف ــ مثل قومهای آزتک، اینکا و مایا ــ مورد بررسی دانشمندان قرار گرفته، روشن شده‌است که در مرحلهٔ کم و بیش پیشرفته‌ای از تمدن و فرهنگ به سرمی‌برده‌اند: به بسیاری از کشفهای ریاضی و اخترشناسی دست یافته بودند؛ در صنایع دستی و هنرهای گوناگون، پیشرفت داشته‌اند و از بسیاری کشورهای آن روز این طرف دنیا، حتی برخی کشورهای اروپایی آن روزگار، عقب‌تر نبودند. اصولاً عنوان «انسان وحشی» ساخته و پرداختهٔ ذهن استعمارگرانی است که می‌خواستند و می‌خواهند وحشی‌گریهای خود را در غارت و کشتار مردم سرزمینهای دیگر، توجیه کنند... خود اصطلاح «کشف امریکا»

هم، تاحد زیادی خود خواهانه و بی‌معنی است. وقتی، چندسال پیش، یکی از رهبران سرخپوستان امریکا، درفرودگاه رُم از هواپیما پیاده می‌شد، باطنز پردردی به خبرنگاران گفت، می‌توانید نام مرا، به عنوان کسی که ایتالیا را کشف کرد، ثبت کنید. زیرا نخستین سرخپوستی هستم که قدم به‌خاک ایتالیا می‌گذارم... ولی توجه کنیم، اگر قومهای بومی ساکن امریکا، اندیشه‌ها و پیشرفتهای خود را، به‌صورت نوشته باقی نمی‌گذاشتند و اگر این چند اثر اندک، از دستبرد مهاجمان مصون نمی‌ماند، چگونه می‌شد به مظلومیت و حقانیت مردم بومی امریکا پی‌برد؟...

عادت به خاطره نویسی و ثبت یادداشتهای روزانه، نقش سازندهٔ دیگری هم دارد. وقتی حادثه‌ای دریک خیابان اتفاق می‌افتد، دهها و گاهی صدها نفر آن را می‌بینند، ولی همه، خیلی زود آن را فراموش می‌کنند و، جز خاطره‌ای مبهم و سطحی، چیزی در ذهن‌شان باقی نمی‌ماند. تنها اگر در بین این دهها و صدها نفر، نویسنده یا شاعری تیزبین وجود داشته باشد، از آن حادثه، شاهکاری می‌آفریند و برای همیشه آن را زنده‌نگه‌می‌دارد. چرا؟ برای این که نویسنده یا شاعر، اگر نویسنده یا شاعر به‌معنای واقعی کلمه باشد، به‌دقت و تیزبینی عادت کرده‌است، نکته‌هایی را می‌بیند که دیگران نمی‌بینند، صداهایی را می‌شنود که به‌گوش دیگران نمی‌رسد. او نالهٔ گُلی را که زیر پاله می‌شود، فریاد درختی را که از تشنگی رنج می‌برد و غرش درون مردی را که آرام و بی‌صدا، ولی گیج و مات از خیابان می‌گذرد، می‌شنود... و شما هم، اگر بخواهید قدرت شنیدن آواهای پنهان و زخمهای نهان را داشته‌باشید، اگر بخواهید خود را صاحب قلمی کنید که دیگران را تکان‌دهد و به فکر وادارد، اگر بخواهید نیروی آن را پیدا کنید که بتوانید اندیشه‌های خود را، به‌صورتی گویا و پرجذبه، برای دیگران بنویسید و یا... حتی اگر بخواهید امکان پیداکنید که راه‌حل مسأله‌های دشوار را، به زبانی ساده و قابل فهم روی کاغذ بیاورید، باید خود را به «نوشتن» و به‌خصوص «خاطره نویسی» عادت دهید...

اندیشه معمولاً جرقه می‌زند و در ذهن پدیدمی‌آید، ولی باید از مرحله‌هایی بگذرد تا پخته و قابل عرضه شود... ولی اندیشه را باید بیان کرد و شما حتماً تجربه کرده‌اید که «بیان» یک مطلب، دشوارتر از «اندیشیدن» دربارهٔ آن است. شما مطلب را می‌دانید و در ذهن خود پخته‌اید، ولی در لحظهٔ بیان آن، دچار دشواری می‌شوید و در می‌مانید. دشوارتر از بیان یک مطلب، به روی کاغذ آوردن آن است: از کجا باید آغاز کرد؟ با چه مقدمه‌ای؟ آیا اصلاً به مقدمه‌ای نیاز دارد یابهتراست، بدون هیچ توضیح اضافی، اصل مطلب به‌طور مستقیم مطرح شود؟... چرا جمله‌ها ساده و زیبا از آب در نمی‌آیند؟ چرا واژه‌ها نرمش ندارند؟ به دلخواه آدم در بین جمله‌ها جانمی‌گیرند؟ این «نوشته» چقدر خشک است، هیچ کس را جلب نمی‌کند!... و سرانجام، بعداز ساعتها کشش و کوشش، بازهم از نوشتهٔ خود راضی نیستید: آن چه در ذهن خود داشتید، روی کاغذ نیامده؛ حرف شما چیزدیگری بود واین نوشته چیز دیگری از آب درآمد...

بله، از اندیشیدن دربارهٔ یک مطلب و فهمیدن آن، تا بیان آن به‌صورت یک نوشته برای دیگران، مسیری پرپیچ و خم وجود دارد که جز با تمرین مستمر شناخته نمی‌شود... و «خاطره نویسی» یکی از راههای این تمرین و احتمالاً بهترین آنهاست.

ضمن نوشتن خاطره یا یادداشت روزانه، به این نکته‌ها توجه داشته باشید:

۱ـ همان طور که می‌اندیشید و همان‌گونه که برای دیگران تعریف می‌کنید، بنویسید. به خودتان فشار نیاورید که جمله‌هاتان «ادیبانه» باشد. تاجایی که می‌توانید، از جمله‌های دراز پرهیز کنید. از همان واژه‌هایی استفاده کنید که ضمن صحبت با دوستانتان به‌کار می‌برید. کافی است معنا و مفهوم جمله‌روشن باشد و منظور شما را برساند. ساده نویسی، هنراست، درحالی که به کاربردن واژه‌ها و جمله‌های پیچیده و دور از ذهن، موجب دورشدن از مطلب و، درنتیجه، گمراهی خواننده‌می‌شود. جمله‌های پر پیرایه ممکن است خواننده را دچار شگفتی لحظه‌ای کند، ولی چیزی به او نمی‌دهد و، به‌همین جهت، خیلی زود فراموش می‌شود. هرگز از واژه، اصطلاح یا ضرب‌المثلی که معنای درست و دقیق آن را نمی‌دانید، استفاده نکنید.

۲ـ تلاش کنید، درنوشته‌های خود، از جادهٔ انصاف خارج نشوید. حادثه‌ها را همان‌طور که پیش آمده‌اند روایت کنید، نه آن طور که شما و در آرزوهای خود انتظار داشته‌اید. عیبی‌ندارد آرزوهای خودتان را هم روی کاغذ بیاورید، ولی مرز آنها را با پیشامدهای واقعی، به روشنی معین کنید؛ مثلاً به این صورت: «من انتظار داشتم... ولی در واقع این طور نشد و...». اگر می‌خواهید شخصیتی را بستایید یا

مورد بی‌مهری قراردهید، یادآوری کنید که عقیدهٔ خود را بیان می‌کنید و چه بهتر که نظردیگران را هم، بادقت و بی‌طرفی بیاورید. ننویسید «فلانی چنین است»، بنویسید «آن طور که من تصور می‌کنم، فلانی این طور است».

انسان، موجود پیچیده و گاه‌متضادی است، در زندگی خود، همه جا و همیشه رفتاری یکسان ندارد و زیر تأثیر پیشامدها و به‌انگیزه‌های عاطفی یا اجتماعی تغییر می‌کند. برای داوری دربارهٔ یک انسان، باید تمامی زندگی او، مجموعهٔ رفتارهای او و همهٔ انگیزه‌های درونی و بیرونی او را شناخت. بایک برخورد کوتاه و مقطعی، نمی‌توان دربارهٔ شخصیت و اعتبار کسی، داوری قاطع و بی‌چون و چراکرد.

۳ـ پاکیزه بنویسید. حتی وقتی که برای خودتان یادداشت برمی‌دارید، سعی کنید نوشتهٔ شما، چه از نظر دستوری و جمله‌بندی و چه ازنظر زیبایی و خوش نویسی، بالاترین حد توانایی شما را منعکس کند. به موقع نقطه‌گذاری کنید، به‌جای خود، سرسطر بیایید و تاریخ و محل نوشتهٔ خود را فراموش نکنید. نوشتهٔ هرکس، معرف سلیقه، اخلاق و رفتار اوست و پاکیزگی و نظم، باید یکی از ویژگیهای هر انسان امروزی باشد.

۴ـ وقتی دریک مجلس سخنرانی یاکلاس درس یاگفت وگوی با دوستان، به مطلبی برخوردید که در خور ثبت در دفترخاطرهای علمی شما بود، همان جا برخی نکته‌های اساسی آن را یادداشت کنید؛ حافظه همه چیز را و همان‌گونه که مایلید، نگه نمی‌دارد. به‌این مناسبت، دفتر یادداشت کوچکی در جیب داشته‌باشید که هر وقت چیزی به ذهنتان رسید، به‌موقع یادداشت کنید تا تفصیل آن را، سرفرصت، در دفتر خاطره‌های خود بنویسید.

□

واژه نامهٔ ریاضی

از دانش‌آموز خوبی که درسال سوم دبیرستان، رشتهٔ‌ریاضی ـ فیزیک تحصیل می‌کرد، خواستم روی تختهٔ‌سیاه بنویسد: a^2-b^2 بعداز او پرسیدم: «این چیه؟ درجبر، به a^2-b^2 چه می‌گویند؟» و دانش‌آموز پاسخ داد: «این، یک **اتحاد مزدوج** است.» کلاس اعتراضی نکرد، من هم مخالفت نکردم. به او گفتم: «بسیارخوب، ولی اول اتحاد را تعریف کن. اتحاد یعنی چه؟»

بعداز گفت و شنود کم و بیش طولانی باکلاس، به این نتیجه رسیدیم که: **اتحاد، نوعی برابری است.** پرسیدم: «چه نوع برابری؟» و بازهم، بعداز اظهار نظرهای متفاوت، باچند تعریف که کم و بیش هم ارز یکدیگر بودند، باهم توافق کردیم:

ـ دراتحاد، در دوطرف برابری، یک عبارت، منتهی به دوصورت مختلف نوشته‌شده‌است.

ـ اتحاد یک برابری است که، به کمک تبدیلها و عملهای مجاز، بتوان یکی از دو طرف را، به‌طرف دیگر منجرکرد.

ـ اتحاد به چنان برابری گویند که، باانجام عملهای مجاز، بتوان از آن، به یک برابری واضح، مثل $x=x$ رسید.

ـ برابری اتحاد، باید به‌ازای هر مقدار دلخواه مجهول یا مجهولها، برقرار باشد.

پرسیدم: «چند اتحاد جبری داریم؟» یکی گفت ۱۲ تا، دیگری گفت ۱۳ تا،... پرسیدم: «$2x-x=x$»، چه نوع برابری است؟ آیا اتحاد است؟» این جابود که همه به‌اشتباه خود پی‌بردند: «آقا! بی‌نهایت اتحاد جبری وجود دارد.»

ـ بسیارخوب، حال به من بگویید، آیا برابری $\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$ یک اتحاد است؟

ـ بله!

ـ ولی قرار شد، اتحاد به‌ازای همهٔ مقدارهای مجهول برقرارباشد. آیا می‌توان در دوطرف این برابری $x=1$ قرارداد؟

ـ نه! مخرج نمی‌تواند برابر صفر باشد؛ به‌جای x نمی‌توان عدد ۱ را قرارداد.

بنابراین، باید در تعریفهای خود تجدیدنظر کنیم؛ آنها به دقت بیشتری نیازدارند. عبارت $\frac{x^2-1}{x-1}$، تنها با شرط $x\neq1$، باعبارت $x+1$ متحداست. سرانجام، روشن شد که، درتعریف اتحاد باید شرط «برای مقدارهای قابل قبول مجهول یا مجهولها» ذکر شود. به زبان دیگر، دریک اتحاد، باید عبارتهایی که در دوطرف برابری قرار دارند، حوزهٔ تعریف یادامنهٔ مشترکی داشته‌باشند.

پرسیدم: «بالاخره، تکلیف ما بابرابری $\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$ چیست؟

اتحاد است یا یک برابری از نوع دیگری؟»

وبعداز گفت و گوها و ذکر مثالها، به این نتیجه رسیدیم که این، یک اتحاد مشروط است:

$\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$، باشرط $x\neq 1$، یک اتحاد است.

همچنین روشن شد که، مثلاً، می‌توان گفت:

برابری $x^3+y^3+z^3=3xyz$، باشرط $x+y+z=0$، یک اتحاد است. می‌دانید چرا؟... اگر سمت چپ برابری را، به‌ازای $z=-(x+y)$ محاسبه کنیم، به‌دست می‌آید:

$$x^3+y^3+z^3=x^3+y^3-(x+y)^3=x^3+y^3-(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)=-3x^2y-3xy^2=-3xy(x+y)=-3xy(-z)=3xyz$$

سمت‌چپ برابری، باتوجه به‌شرط $x+y+z=0$، باانجام عملهای مجاز، به‌سمت راست برابری تبدیل شد.

[یادتان باشد که باید معنای «انجام عملهای مجاز» را روشن کنیم؛ درضمن به این مطلب هم بپردازیم که، اگر یک برابری اتحاد نباشد، چه نامی دارد؟... در فرصتهای بعدی به آنها خواهیم پرداخت.]

گفتم: بحث اتحاد اندکی طولانی شد، به مطلب خود برگردیم. دوباره پرسش اول خودرا، منتهی به صورت دیگری، تکرار می‌کنم:

ـ آیا a^2-b^2 یک برابری است؟

ـ نه.

ـ پس، اتحاد هم نمی‌تواند باشد. حداقلِ شرطی که باید یک «اتحاد» داشته‌باشد، وجود یک برابری است: «اتحاد نوعی برابری است که...» a^2-b^2 اتحاد نیست.

به واژهٔ «مزدوج» بپردازیم. در ریاضیات، و به خصوص در جبر، درکجا از واژهٔ «مزدوج» استفاده می‌کنیم؟ «مزدوج» یعنی چه؟

سرانجام معلوم شد، برای استفاده از واژهٔ «مزدوج» باید با دو عبارت دوجمله‌ای سروکار داشته‌باشیم: دوعبارت دوجمله‌ای را وقتی مزدوج هم‌گویند که، درآنها، یکی‌از جمله‌ها برابروجمله‌های دوم‌قرینهٔ یکدیگر باشند، مثلاً $a+b$ و $a-b$ مزدوج یکدیگرند.

ـ $x+y$ چند مزدوج دارد؟

ـ دوتا! $x-y$ و $-x+y$.

ـ $x+y+z$ چند مزدوج دارد؟

ـ آقا، این سه جمله‌ای است نه دو جمله‌ای!

و دانش‌آموزی دیگر:

ـ می‌توان $(x+y)$ را، یک جمله به‌حساب آورد.

ـ فقط $(x+y)$ را؟

ـ نه! $(x+z)$ یا $(y+z)$ راهم می‌توان به‌عنوان یک جمله درنظر گرفت.

ـ بالاخره $x+y+z$ چند مزدوج دارد؟

ـ شش تا:

$$(x+y)-z,\quad -(x+y)+z,$$
$$(x+z)-y,\quad -(x+z)+y,$$
$$x-(y+z),\quad -x+(y+z),$$

ـ بسیار خوب، دوباره به a^2-b^2 برگردیم. آیا دراین جا با دوعبارت سروکار داریم؟

ـ نه!

ـ ولی شرط اصلی استفاده از واژهٔ مزدوج این است که دو عبارت داشته‌باشیم: $a+b$ و $a-b$ یا $x+y+z$ و $x+y-z$. به‌این ترتیب، برای a^2-b^2، که یک عبارت است و نه دوعبارت، نمی‌توان از واژهٔ مزدوج استفاده کرد.

به دانش‌آموزی که کنار تخته سیاه ایستاده بود، بالحنی شماتت بار گفتم:

ـ شما، برای معرفی a^2-b^2، از دو واژه استفاده کردید: «اتحاد» و «مزدوج». ولی a^2-b^2 نه اتحاد است و نه مزدوج. پس چیست؟ و توضیح دادم:

ـ چرا به چشمهای خود اعتماد نمی‌کنید؟ هرچه می‌بینید، همان را به زبان بیاورید.

ـ آقا، این یک عبارت جبری است.

ـ درست است. ولی «عبارت جبری» خیلی کلی و مبهم است. سعی کنید، بیشتر و بهتر آن را معرفی کنید.

ـ این، یک دوجمله‌ای جبری است.

ـ چه نوع دوجمله‌ای؟

ـ تفاضل دومجذور کامل.

ـ بله، کاملاً درست است. a^2-b^2، نه اتحاد است و نه‌مزدوج؛

تفاضل دو مجذور کامل است. و اگر بخواهیم، ویژگیهای بیشتری از آن را بیان کنیم، می‌توانیم بگوییم:

a^2-b^2، یک دوجمله‌ای و به صورت تفاضل دو مجذور کامل است و، بنابراین، می‌توان آن را به ضرب دوعبارت مزدوج تجزیه کرد:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b) \qquad (1)$$

و برابری (۱)، یک اتحاد است. حالا دیگر، رابطهٔ a^2-b^2 با واژه‌های «اتحاد» و «مزدوج» روشن شد.

□

می‌بینید، حتی در ساده‌ترین موضوعها، اگر معنا و تعریف درست واژه‌ها را ندانیم، ممکن است دچار چه گمراهیهایی بشویم!

شما معمولاً، ضمن عملهایی که انجام می‌دهید، اغلب از این جمله‌ها استفاده می‌کنید:

«معلوم و مجهول می‌کنیم» ؛ «طرفین وسطین می‌کنیم» ؛ «دور در دور، نزدیک در نزدیک» ؛... این جمله‌ها، به‌خودی خود، هیچ معنایی ندارند؛ آنها را روی کاغذ بنویسید وبه کسی نشان دهید که با زبان فارسی آشناست، ولی ریاضیات نمی‌داند. بدون تردید، به شما خواهد گفت: این جمله‌ها بی‌معنی‌اند؛ «طرفین وسطین می‌کنیم» ، هیچ معنای روشنی ندارد. اصلاً «طرفین» یا «وسطین» یعنی چه؟

توصیهٔ من این است که، هرگز از این گونه جمله‌ها استفاده نکنید. سعی کنید، معنای ریاضی عملی را که انجام می‌دهید، برای خودتان روشن کنید و ، بعد، چیزی را برزبان بیاورید که معرف آن عمل ریاضی باشد. شما، عمل را درست انجام می‌دهید، ولی معنای آن را نمی‌دانید، یعنی نمی‌دانید از کدام عمل ریاضی، به چه دلیل و باچه شرطی استفاده‌می‌کنید.

عمل «طرفین وسطین کردن» را بشکافیم.

اگر a و b، دوعدد و، درضمن، b مخالف صفر باشد، $\frac{a}{b}$ را نسبت هندسی دوعدد a و b گویند. اکنون اگر دونسبت هندسی برابر داشته‌باشیم:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad (2)$$

بایک تناسب هندسی سروکار داریم. برابری (۲) ، باشرط $b\neq 0$ و $d\neq 0$، یک تناسب هندسی است که می‌توان آن را، این‌طور هم نوشت:

$$a:b=c:d \qquad (2)'$$

وقتی تناسب هندسی را به‌صورت $(2)'$ بنویسیم، عددهای a و d در دوطرف و عددهای b و c در وسط قرارمی‌گیرند؛ به‌همین جهت a و d را «طرفین» و b و c را «وسطین» گویند. اگر دوطرف برابری (۲) یا $(2)'$ را درعدد bd ضرب کنیم، به برابری $ad=bc$ می‌رسیم؛ یعنی درهر تناسب هندسی، حاصل ضرب دوعدد «طرفین» ، برابر است با حاصل‌ضرب دو عدد «وسطین». این، یک ویژگی تناسب هندسی است و وقتی می‌گوییم «طرفین وسطین می‌کنیم»، از این ویژگی استفاده‌می‌کنیم.

بنابراین، اگر هم می‌خواهیم از همین جمله استفاده کنیم، لااقل به این صورت بیان کنیم:

«حاصل ضرب طرفین را مساوی حاصل ضرب وسطین قرار می‌دهیم.»

خلاصه نویسی و خلاصه‌گویی، کار درستی است، ولی نباید به قیمت از دست رفتن معنای جمله تمام شود. می‌گویند «وقت ارزش دارد» یا «وقت طلاست» ولی اگر شما وظیفهٔ تهیهٔ کالایی را به‌عهده دارید، حق ندارید به بهانهٔ «صرفه‌جویی در وقت» کالای ناقص یا معیوبی تهیه کنید.

باهمهٔ اینها، بهترین روش این است که اصلاً از واژه‌های «طرفین» و «وسطین» استفاده نکنید و همان عمل ریاضی را که انجام می‌دهید، بیان کنید و بگویید: در برابری (۲)، می‌دانیم b و d مخالف صفرند؛ بنابراین می‌توانیم دوطرف برابری را در bd ضرب کنیم.

زمانی در راهرو یکی از دبیرستانها، به دختر دانش‌آموزی برخوردم که چیزی را، به زبانی کاملاً ناآشنا، تکرار می‌کرد. جلو رفتم و پرسیدم چه می‌خوانی! گفت: «فرمولهای مثلثات را حفظ می‌کنم» خواهش کردم، یکبار دیگر تکرار کند و او گفت:

ـ وقتی سینوس باشد، می‌شود «سَن کو سَن کو» و وقتی کسینوس باشد می‌شود «کوکو سَن سَن».

پرسیدم یعنی چه؟ این چه زبانی است؟ چینی یا ژاپنی؟

ـ نه آقا، به این فرمولها نگاه کنید:

$$\sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\cos a\sin b,$$
$$\cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\sin a\sin b$$

وقتی سینوس را بخواهیم، حاصل آن از دوجمله تشکیل شده‌است که هرکدام حاصل ضرب یک سینوس در یک کسینوس است، یعنی «sin ـ co» (سَن کو)، یعنی برای سینوس داریم «سن‌کو سن‌کو» و همچنین برای کسینوس.

از این نوع یادگیری ریاضیات، چیزی عاید شما نمی‌شود ریاضیات «سن‌کو سن‌کو ـ کوکو سن‌سن»، تنها به درد شوخی و طنز روی صحنه و برای خنداندن شنونده می‌خورد.

سالها قبل، وقتی که دورهٔ دبستان شش‌سال و دورهٔ دبیرستان هم شش سال بود، دریکی از دبیرستانها، در ساعت فراغت خود، به کلاس‌دوم دبیرستان (که در آن ساعت، معلم نداشت) رفتم. هندسه داشتند. پرسیدم: «کسی می‌تواند دایره را تعریف کند.»

تقریباً همهٔ دانش‌آموزان دست خود را بلند کردند. یکی از آنها را انتخاب کردم و او آغاز کرد:

«دایره، منحنی مسدودی است که همهٔ نقطه‌های آن از نقطه‌ای به نام مرکز، به یک فاصله باشند.»

به‌سرعت برق و باد حرف می‌زد و واژه‌ها همچون تگرگ از زبان او بیرون می‌ریخت و مغز شنونده را بمباران می‌کرد.

گفتم: پسرم، من باید بتوانم سخن تو را در مغز خود حلاجی کنم. مغز من قدرت جذب این همه سرعت و شتاب را ندارد. شمرده‌تر و آرام‌تر تکرار کن.

مثل نواری که حرکت آن را کند کرده‌باشند، تکرار کرد:

«دایره... منحنی... مسدودی...»

او را نگه‌داشتم:

ـ می‌گویی «منحنی مسدود»؛ یعنی چه؟

نوار به دور افتاد. دانش‌آموز مرتباً تکرار می‌کرد:

«منحنی مسدودی است که... منحنی مسدودی است که...»

پرسیدم «مسدود» یعنی چه؟ معنای واژهٔ «مسدود» را می‌خواهم. معلوم شد معنای این واژه را نمی‌داند. از دیگران پرسیدم و سرانجام، یکی گفت «مسدود، یعنی بسته».

از همان دانش‌آموزی که معنای «مسدود» را گفته بود، خواستم پای تخته سیاه بیاید و یک منحنی یا یک شکل رسم کند که مسدود باشد، ولی دایره نباشد. و او درماند. مگر می‌شود چیز دیگری، غیراز دایره، مسدود باشد. او حفظ کرده‌بود: «دایره، منحنی مسدودی است...»، اگر چه هرشکلی که او رسم می‌کرد، به همه‌چیز شباهت داشت به جز دایره.

... درریاضیات (و نه تنها در ریاضیات)، کمتر حفظ کنید و بیشتر بفهمید... اغلب، چیزهایی می‌گوییم و از واژه‌هایی استفاده‌می‌کنیم که معنای درست، و به‌خصوص، معنای ریاضی آنها را نمی‌دانیم و این، سرچشمهٔ اصلی ناکامیهای ما در درسهای ریاضی است. بسیار دیده‌شده‌است که جوانی یا حتی نوجوان یا کودکی، غزلی از حافظ را از حفظ می‌خواند، ولی حتی یک بیت آن را نمی‌تواند معنی کند. این، نوعی تحمیل به حافظه است و، به خصوص، موجب تضعیف نیروی استدلالی فرد می‌شود، به‌نحوی که بتدریج، به‌جای «اندیشیدن و انتخاب کردن»، به «پذیرفتن» عادت می‌کند... تأکید می‌کنم: تنها وقتی جمله‌ای را برزبان بیاورید که معنای آن و معنای تک تک واژه‌های آن را بدانید.

این کمبودها را چگونه جبران کنیم؟

درهر کلاسی که هستید، حتی اگر گمان می‌کنید فهم موضوعهای ریاضی برای شما دشوار است، از همین امروز تصمیم بگیرید، یک «واژه نامهٔ ریاضی» برای خودتان درست کنید.

وقتی سرکلاس به درس معلم گوش می‌دهید، وقتی مسأله‌ای را حل می‌کنید یا یک کتاب ریاضی را می‌خوانید، به واژه‌هایی که معنای ریاضی دارند، توجه کنید و همهٔ آنها را روی ورق کاغذی بنویسید: «ضریب»، «جمله»، «معادله»، «دایره»، «چندضلعی منتظم»، «مخروط ناقص»، «کسر»، «نابرابری»،...

بعد، درمنزل، سعی کنید، دربارهٔ معنای ریاضی آنها بیندیشید؛ به کتاب مراجعه کنید، از دوستان و یا دبیران خود بپرسید، جست وجو کنید تامعنا و تعریف درست هر واژه را پیداکنید، اگر لازم است چند مثال مربوط به آن را بیابید، چند مسألهٔ مربوط به آن را حل کنید و، بعد، در دفتر «واژه نامهٔ ریاضی» خود بنویسید. برای هر واژه، چند صفحه اختصاص بدهید تا اگر، بعدها، بازهم مطلبی دربارهٔ آن داشتید و یا بنظرتان رسید که باید مطلب قبلی را اصلاح کنید، جاداشته‌باشید. مثلاً:

معادله، یعنی یک برابری که...

آن وقت چند مثال بیاورید، مثالها را حل کنید، راه شناسایی معادله را توضیح دهید؛ چند نوع معادله می‌شناسید؟ و چگونه باید آنها را

حل کرد؟ چه گمراهیهایی در حل معادله وجود دارد؟...

به یاد داشته‌باشید که، هر «اصطلاحی» معنای خاصی‌دارد و ممکن است، این معنا، در دانشهای مختلف، متفاوت باشد: «آنالیز ریاضی»، غیراز «آنالیزشیمی» است. «عددگنگ» مفهومی غیراز «آدم گنگ» دارد. در ریاضیات «اول» با «نخست» فرق دارد و به «عدد اول» نمی‌توان گفت «عدد نخست» یا به‌جای «عددگویا» نمی‌توان «عدد زبان‌دار» به‌کار برد.

شما در ریاضیات، با «تصاعد نزولی» سروکار دارید. معنای تحت الفظی آن، چیزی به شما نمی‌دهد: «تصاعد» حکایت از «صعودی بودن» می‌کند و با «نزولی» سازگار نیست، مثل این که کسی بگوید «مرتفع عمیق» یا «ستمکار عادل». پس، اصطلاح «تصاعد نزولی»، معنایی ریاضی دارد، غیراز آن چه از ظاهر واژه‌ها به‌دست می‌آید. همهٔ «اصطلاحها» کم و بیش چنین‌اند: وقتی می‌گویید «فرودگاه»، در واقع از یک اصطلاح استفاده کرده‌اید؛ فرودگاه، تنها محل فرود آمدن هواپیما نیست؛ در فرودگاه، پرواز و بلند شدن هواپیما هم اتفاق می‌افتد. دراین جا، قصد شما از واژهٔ «فرودگاه»، مشخص کردن محلی است که همگان معنای آن را می‌دانند. در ریاضیات هم، باید معنای هر اصطلاحی، برای کسی که با ریاضیات کار می‌کند، معلوم باشد. درغیر این صورت، نمی‌توان بر ریاضیات مسلط شد. اصطلاحهای ریاضی، «الفبای» زبان ریاضیات‌اند و، بدون آشنایی کامل با الفبا، نمی‌توان از «زبان» سردرآورد.

«واژه نامهٔ ریاضی» شما، باید هرروز غنی و غنی‌تر شود و، اگر به ریاضیات علاقه‌مندید، بعداز پایان تحصیل هم ادامه پیداکند. نه تنها هرروز باید واژه یا واژه‌های تازه‌ای به آن اضافه شود، بلکه باید دایم در واژه‌های قبلی هم تجدید نظر کرد و اگر بی‌دقتی و کمبودی در آنها وجود دارد و یا اگر مطلب تازه‌ای دربارهٔ آنها پیداکرده‌اید، به اصلاح و تکمیل آنها بپردازید.

در بحث بعدی، نمونهٔ کوچکی از این «واژه نامه» را می‌آوریم، ولی حتی دربارهٔ این نمونه هم، کار را تمام شده نپندارید، دربارهٔ تعریفها و مثالهای آن بیندیشید، شاید درآنها ابهامها یاکمبودهایی وجودداشته‌باشد. هرکسی که اهل دانش باشد، درهمان حال که به نوشته‌ها و کارهای دیگران ارج می‌گذارد، نباید دربست به آنها تسلیم شود؛ اگر تسلیم به کارهای علمی گذشتگان کار درستی بود، دانش دریک جا متوقف می‌شد و پیش نمی‌رفت. به این سخن رنه‌دکارت، ریاضیدان و فیلسوف فرانسوی توجه کنید:

«وقتی روی موضوعی بررسی می‌کنیم، نباید چیزی را جست‌وجو کنیم که دیگران فکر می‌کنند یاخودمان تصور می‌کنیم، بلکه باید در جست وجوی چیزی باشیم که یا آشکارا و به روشنی دیده‌می‌شود و یا بااستدلال قیاسی قابل اثبات است، زیرا دانش به صورت دیگری به‌دست نمی‌آید.»

ویاحتی روشنتر از آن، این سخن بودا:

«ما نباید گفته‌ای را، به صرف این که دیگران گفته‌اند، باورکنیم؛ نباید اخبار دیگران را، به‌صرف این که از قدیم به ما رسیده‌اند، باورکنیم؛ نباید بدون فکر به گفته و نوشتهٔ دانشمندان و خردمندان، تنها چون گفته و نوشتهٔ دانشمندان و خردمندان است، تسلیم شویم...؛ نباید به ملاحظهٔ شباهت و قیاس، چیزی را بپذیریم؛ نباید کلام استاد را، تنها چون کلام استاد است قبول کنیم. ماباید، باتکیه به عقل و فهم و ادراک خود، چیزی را بپذیریم که درستی آن برایمان روشن و آشکاراست، خواه کلام باشد، خواه نوشته یا هرچیزدیگری.»

می‌دانید چرا؟ به این خاطر که به‌قول رژه‌گودسان، استاد دانشکدهٔ علوم دانشگاه پاریس:

«نخستین وظیفهٔ ریاضیدان، ساختن و تحویل دادن چیزی است که، شاید امروز، کمتر کسی طالب آن باشد، یعنی «انسان»، انسانی که می‌اندیشد، انسانی که می‌تواند درست را از نادرست تشخیص دهد، انسانی که برایش شناخت و انتشار حقیقت، برخیلی چیزها و مثلاً بریک تلویزیون دو بعدی برتری دارد، انسانی آزاد نه آدم واره‌ای آهنی.»

تابعد

— مرد جنگی باید که علم عدد را فرا گیرد وگرنه نخواهد دانست سپاه خود را چگونه بیاراید؛ و فیلسوف هم برای اینکه از دریای تبدّلات به درآید و مقام حقیقی خویش را بازیابد، باید یک حسابدان باشد... علم حساب نتیجه‌ای عظیم و عالی دارد، و ذهن را به تفکر دربارهٔ عدد مجرد معتاد می‌کند.

جمهور افلاطون
تاریخ ریاضیات اسمیت.
ترجمهٔ صدری افشار

بیش از هر مردی در زمان خویش بخشی بزرگ از جهان را گشته‌ام و در باب دوردست‌ترین چیزها به پژوهش پرداخته‌ام، اقالیم و سرزمینهای بسیار دیده‌ام و به سخنان دانشمندان بسیار گوش فراداده‌ام، ولی هیچ کدام تاکنون در ترسیم خطوط و اثبات آنها بر من پیشی نگرفته، نه حتی «مساحان مصری» که روی هم رفته پنج سال با آنان در دیار غربت به سربردم.

دموکریتوس فیلسوف خندان
تاریخ ریاضیات اسمیت. ترجمهٔ صدری افشار

دنباله[1]

احمد قندهاری

۱ـ دنبالهٔ عددهای طبیعی:

اگر مجموعه‌ای از اعداد طبیعی متوالی را پشت سرهم تا عدد n بنویسیم، این مجموعه را دنبالهٔ عددهای طبیعی گوییم.
مانند $۱ , ۲ , ۳ , \cdots , n , n+۱ , \cdots$

۲ـ دنبالهٔ اعداد :

به مجموعه‌ای از اعداد مرتب شده که با دنبالهٔ عددهای طبیعی یا بخشی از آن در تناظر یك به‌یك باشد، دنباله گفته می‌شود.

در هر دنباله، جمله متناظر با عدد یك را جمله یکم ($a_۱$) و جمله متناظر با عدد دو را جمله‌دوم ($a_۲$) و ... و جمله متناظر با عدد n را جمله nام یا جمله‌عمومی (a_n) گوییم.
مانند دنبالهٔ اعداد زوج

$$\begin{array}{ccccc} ۲ , & ۴ , & ۶ ,\cdots , & ۲n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_۱ & a_۲ & a_۳ \cdots & a_n \end{array}$$

مانند دنباله عددهای طبیعی مربع کامل

$$\begin{array}{cccccc} ۱ , & ۴ , & ۹ , & ۱۶ , & ۲۵ , & \cdots , n^۲ \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ a_۱ & a_۲ & a_۳ & a_۴ & a_۵ & \cdots a_n \end{array}$$

۳ـ جمله عمومی یك دنباله :

در هر دنباله، جمله‌ای که برحسب عبارتی از n بیان‌شود، جمله عمومی آن دنباله گفته می‌شود. مثلاً در دنباله عددهای طبیعی مربع کامل عبارت ($n^۲$) جمله عمومی این دنباله است. مسلماً اگر در جمله‌عمومی به‌جای n ، عدد ۱ را قراردهیم، جمله اول و اگر به‌جای n عدد۲ را قراردهیم جمله‌دوم... دنباله به دست می‌آید.

۴ـ تعریف دیگر دنباله:

تابع f به صورت:

$$\begin{cases} f : N \rightarrow R \\ n \rightarrow f(n) \end{cases}$$

را درنظر می‌گیریم.

این تابع، تابعی است که $D_f \subset N$ و $R_f \subset R$ و جمله عمومی‌آن $f(n)$ ضابطه تابع است.

این تابع یك دنباله‌را تعریف می‌کند.

مثلاً تابع $\begin{cases} f : N \rightarrow R \\ n \rightarrow f(n) = n^۲ + n \end{cases}$ که هرعدد طبیعی

1_ Sequence

را به مجموع، مربع خودش + خودش مربوط می‌کند.

$$۲ , ۶ , ۱۲ , \cdots, n^۲+n$$

مثلاً تابع
$$\begin{cases} f : N \to R \\ n \to f(n) = \frac{۱}{n+۲} \end{cases}$$

$$\frac{۱}{۳} , \frac{۱}{۴} , \frac{۱}{۵} , \cdots , \frac{۱}{n+۲}$$

مساله : کدام جمله از دنباله $a_n = ۳n^۲+۵n$ مساوی (۱۸۲) است ؟

$$۳n^۲+۵n = ۱۸۲ \implies ۳n^۲+۵n-۱۸۲ = ۰$$

$$n = \frac{-۵ \pm \sqrt{۲۲۰۹}}{۶} = \frac{-۵ \pm ۴۷}{۶} \begin{cases} ۷ \\ -۱۳ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

پس جمله هفتم .

۵ـ انواع دنباله :

الف: دنباله صعودی و نزولی

اگر قدرمطلق هرجمله‌دنباله، بزرگتر از ، قدرمطلق جمله ماقبل باشد، چنین‌دنباله‌ای را دنباله صعودی گوییم اگرقدرمطلق هرجمله دنباله،کوچکتر از، قدرمطلق جمله ماقبل باشد، چنین دنباله‌ای‌را دنباله نزولی گوییم.

مانند :

دنباله صعودی
$$\begin{rcases} \frac{۱}{۲} , ۲ , ۸ , ۳۲ \\ \frac{۱}{۲} , -۲ , ۸ , -۳۲ \end{rcases}$$

دنباله نزولی
$$\begin{rcases} \frac{۱}{۲} , \frac{۱}{۴} , \frac{۱}{۸} , \frac{۱}{۱۶} \\ \frac{۱}{۲} , -\frac{۱}{۴} , \frac{۱}{۸} , -\frac{۱}{۱۶} \end{rcases}$$

□

ب: دنباله متناوب به دوصورت زیر است:

۱ـ به دنباله‌هایی گفته می‌شود که جملاتش یك در میان مثبت و منفی باشد مانند :

$$\frac{۱}{۲} , -۲ , ۸ , -۳۲$$

به‌این دنباله، دنباله متناوب صعودی گوییم.

۲ـ به‌دنباله‌هایی گفته می‌شود که جملات آن‌در فاصله‌های معین تکرار می‌شود.

مانند: $۰ , ۱ , ۰ , -۱ , ۰ , ۱ , ۰ , -۱ , \cdots$

$$a_n = \sin\frac{k\pi}{۲} \ , \ k \in z$$

□

ج: دنباله مثبت

دنباله‌ای است که همه جملاتش مثبت باشد.

□

د : دنباله منفی ، دنباله‌ای است که همه جملاتش منفی باشد .

سری یا رشته[۲]

متناظر باهردنبالهٔ a_n ، دنبالهٔ S_n وجوددارد به‌طوری که:

$$S_n = a_۱+a_۲+a_۳+\cdots+a_n$$

به این مجموع، رشته یا سری گویند.

2_ Series

به‌عبارت دیگر، سری عبارت است از مجموع n جمله مرتب‌شده یك‌دنباله که n مقادیر طبیعی از یك تا هرعدد دلخواه را می‌پذیرد.

a_n که قبلاً گفته شد، جمله عمومی دنباله است، جمله عمومی سری‌نیز می‌باشد. معمولاً برای‌نمایش‌سری از نماد $\sum$ (= سیگما) استفاده می‌شود.

اگر a_n جمله‌عمومی دنباله‌ای باشد، سری متناظر آن را با نماد $\sum_{n=1}^{n} a_n$ نشان می‌دهیم.

یادداشت :

$$\sum_{n=1}^{n} n = ۱+۲+۳+ \cdots +n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

$$\sum_{n=1}^{n} n^۲ = ۱^۲+۲^۲+۳^۲+ \cdots +n^۲ = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

$$\sum_{n=1}^{n} n^۳ = ۱^۳+۲^۳+۳^۳+ \cdots +n^۳ = \frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$$

$$\sum_{n=1}^{n} ۲n = ۲+۴+۶+ \cdots +۲n = n(n+۱)$$

$$\sum_{n=1}^{n} (۲n-۱) = ۱+۳+۵+ \cdots +۲n-۱ = n^۲$$

توجه: انواع سری، همان‌انواع دنبالهٔ مولد آنها می‌باشد.

تصاعد عددی یا حسابی

دنباله‌ای است که هرجمله آن برابر باشد با جمله قبل به اضافه‌عدد ثابتی. این‌عدد ثابت‌را قدرنسبت گویند و با حرف r یا d نشان می‌دهند.

مثال:

$$\div ۳ , ۷ , ۱۱ , ۱۵ , \cdots$$
$$d = ۴$$

درحالت‌کلی، دنباله تصاعد عددی را به صورت زیر می‌توان نشان داد:

$$\div a_۱ , (a_۱+d) , (a_۱+۲d) , (a_۱+۳d) , \cdots ,$$

$a_۱$ جمله‌اول، $a_۲$ جمله‌دوم، $a_۳$ جمله‌سوم، $a_۴$ جمله‌چهارم ...

$a_۱+(n-۱)d$ جمله n‌ام

۱- هرگاه $\div x , y , z$ سه‌جمله‌متوالی یك‌تصاعدعددی باشد داریم:

$$x = a_k \ , \ y = a_k+d \ , \ z = a_k+۲d ، k \in N$$

$$۲(a_k+d) = (a_k)+(a_k+۲d)$$

$$\Longrightarrow \boxed{۲y = x+z} \quad (۱)$$

۲- جمله عمومی یا جمله (n) ام :

$$\boxed{a_n = a_۱+(n-۱)d} \quad (۲)$$

۳- در هر تصاعد عددی داریم:

$$a_m - a_n = (m-n)d$$

اثبات :

$$\begin{cases} a_m = a_۱+(m-۱)d \\ a_n = a_۱+(n-۱)d \end{cases}$$

$$a_m - a_n = a_۱+md-d-a_۱-nd+d$$

$$\boxed{a_m - a_n = (m-n)d} \quad (۳)$$

مثال: در یک تصاعد عددی $a_{10}=24$ و $a_{15}=39$، جمله‌چهلم چند است؟

$$a_{15}-a_{10}=39-24 \Rightarrow 5d=15 \Rightarrow d=3$$
$$a_{40}-a_{15}=25d \Rightarrow a_{40}-a_{15}=25(3)$$
$$\Rightarrow a_{40}-39=75 \Rightarrow a_{40}=114$$

۴ـ نتیجه: در هر تصاعد عددی داریم:

$$\text{اگر} \begin{cases} a_m=n \\ a_n=m \end{cases} \Rightarrow d=-1 \ , \ \boxed{a_{m+n}=0} \quad (۴)$$

اثبات: بنا به (۳) داریم:

$$a_m-a_n=(m-n)d$$
$$n-m=(m-n)d \Rightarrow \boxed{d=-1}$$
$$a_{m+n}-a_m=(m+n-n)d$$
$$a_{m+n}-n=nd \Rightarrow a_{m+n}-n=-n \Rightarrow$$
$$\boxed{a_{m+n}=0}$$

مثال:

$$\text{اگر} \begin{cases} a_{15}=10 \\ a_{10}=15 \end{cases} \Rightarrow d=-1 \ , \ a_{25}=0$$

۵ـ قاعده اول اندیس:

در هر تصاعد عددی داریم:

$$\boxed{2a_n=a_{n+p}+a_{n-p}} \quad (۵) \quad p\,,n\in N\,,\ p<n$$

اثبات:

$$2a_n=a_{m+p}+a_{n-p}$$
$$2[a_1+(n-1)d]=a_1+(n+p-1)d+a_1+(n-p-1)d$$
$$2a_1+2(n-1)d=$$
$$2a_1+(n+p-1+n-p-1)d$$
$$2a_1+2(n-1)d=2a_1+(2n-2)d$$
$$2a_1+2(n-1)d=2a_1+2(n-1)d$$

مثال: دریک تصاعد عددی جمله‌اول دوبرابر جمله‌بیستم است. جمله سی‌ونهم این‌تصاعد،چند است؟

$$1+39=2(20)$$
$$\Rightarrow a_1+a_{39}=2a_{20} \Rightarrow a_{39}=0$$

۶ـ قاعده دوم اندیس:

در هر تصاعد عددی داریم:

به شرطی‌که $m+n=p+k$ $\quad m\,,n\,,p\,,k\in N$

$$\boxed{a_m+a_n=a_p+a_k} \quad (۶)$$

اثبات:

$$a_1+(m-1)d+a_1+(n-1)d=$$
$$a_1+(p-1)d+a_1+(k-1)d$$
$$2a_1+(m+n-2)d=2a_1+(p+k-2)d \ \ldots$$

چون $m+n=p+k$ پس‌تساوی فوق‌همواره درست است.

اثبات: با استفاده از دستور شماره (۳)

$$a_m-a_p=a_k-a_n$$
$$(m-p)d=(k-n)d$$
$$md-pd=kd-nd \Rightarrow (m+n)d=(k+p)d$$
$$\Rightarrow m+n=k+p$$

که برقرار است.

مثال: دریك تصاعد عددی مجموع دوجمله‌نهم و بیست و نهم مساوی (۱۰۰) است، اگر جمله پانزدهم (۳۲) باشد جمله بیست وسوم این‌تصاعد چند است؟

$$a_{15}+a_{23}=a_9+a_{29}$$
$$32+a_{23}=100 \Longrightarrow a_{23}=68$$

۷- S_n مجموع n جمله اول یك تصاعد حسابی :

در هر تصاعد حسابی

$$\div a_1\,,\,(a_1+d)\,,\,(a_1+2d)\,,\,(a_1+3d)\,,\,\cdots$$

داریم:

$$\boxed{S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)} \qquad (7)$$

اثبات:

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n$$
$$S_n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_3+a_2+a_1$$
$$\Longrightarrow 2S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+\cdots$$

تعداد پرانتزهای این‌تساوی (n) است وهریك از این‌پرانتزها بنا به قاعده‌دوم اندیسها مساوی (a_1+a_n) می‌باشد پس:

$$2S_n=n(a_1+a_n)\Longrightarrow S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$$

مثال: در یك تصاعد عددی داریم :

$$a_7+a_{14}=100$$

مجموع بیست جمله‌اول این‌تصاعد چند است؟

$$S_{20}=\frac{20}{2}(a_1+a_{20})$$

بنا به قاعده‌دوم اندیس داریم:

$$a_1+a_{20}=a_7+a_{14}$$
$$\Longrightarrow S_{20}=10(100)=1000$$

۸- اگر در دستور $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$ بـه جای a_n، مساویش‌را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\boxed{S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]} \qquad (8)$$

۹- در هر تصاعد عددی داریم:

$$\boxed{a_n=S_n-S_{n-1}} \qquad (9)$$

اثبات:

$$a_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]-\frac{n-1}{2}\times[2a_1+(n-2)d]$$
$$a_n=\frac{1}{2}[2a_1n+n(n-1)d-2a_1n+2a_1-(n-1)(n-2)d]$$
$$a_n=\frac{1}{2}[2a_1+(n-1)d(n-n+2)]$$
$$a_n=\frac{1}{2}[2a_1+2(n-1)d]=a_1+(n-1)d=a_n$$

مثال: دریك تصاعد عددی داریم:

$$S_n+n(4n+1)$$

جمله‌دهم این‌تصاعدچند است؟

حل:

$$a_{10}=S_{10}-S_9=10(41)-9(37)\Longrightarrow$$

$$\boxed{a_{10}=77}$$

مثال : دریك تصاعد عددی داریم:

$a_n=?$ و $S_n=n(۲n+۵)$

حل : $n=۱ \Rightarrow S_۱=a_۱=۷$

داریم :

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n) \Rightarrow$$

$$\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)=n(۲n+۵)$$

$$\Rightarrow \frac{n}{۲}(۷+a_n)=n(۲n+۵) \Rightarrow$$

$$۷+a_n=۴n+۱۰ \Rightarrow a_n=۴n+۳$$

مثال: دریك تصاعد عددی داریم:

$S_n=?$ و $a_n=۵n-۲$

حل: $n=۱ \Rightarrow a_۱=۳$

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)=\frac{n}{۲}(۳+۵n-۲)$$

$$\Rightarrow S_n=\frac{n}{۲}(۵n+۱)$$

▲

۱۰- در هر تصاعد عددی داریم :

$$\boxed{\text{اگر } S_m=S_n \Rightarrow S_{m+n}=۰} \quad (۱۰) \quad m\neq n$$

اثبات :

$$S_m=S_n \Rightarrow \frac{m}{۲}[۲a_۱+(m-۱)d]=\frac{n}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d]$$

$$\Rightarrow ۲a_۱m+(m^۲-m)d=۲a_۱n+(n^۲-n)d$$

$$\Rightarrow ۲a_۱(m-n)+d(m^۲-m-n^۲+n)d=۰$$

$$\Rightarrow ۲a_۱(m-n)+[m^۲-n^۲-(m-n)]d=۰$$

$$\Rightarrow ۲a_۱(m-n)+[(m-n)(m+n)-(m-n)]d=۰$$

$$\Rightarrow ۲a_۱(m-n)+(m-n)(m+n-۱)d=۰$$

بر $(m-n)$ تقسیم

$$\Rightarrow ۲a_۱+(m+n-۱)d=۰$$

در $\frac{m+n}{۲}$ ضرب

$$\frac{m+n}{۲}[۲a_۱+(m+n-۱)d]=۰$$

$$\Rightarrow S_{m+n}=۰$$

مثال : اگر $S_۶=S_۴ \Rightarrow S_{۱۰}=۰$

▲

۱۱- اگر دریك تصاعد عددی تعداد جملات فرد وجمله وسط (k) باشد داریم:

$$\boxed{۲k=a_۱+a_n} \quad (۱۱)$$

اثبات : $\div a_۱ , a_۲ , a_۳ , \dots, a_p , \dots, a_n$

اگر $k=a_p$ جمله وسط باشد داریم :

$$۲p=۱+n$$

بنا به قاعده اول اندیس خواهیم داشت:

$$۲a_p=a_۱+a_n \Rightarrow ۲k=a_۱+a_n$$

▲

۱۲- اگر دریك تصاعد عددی تعداد جملات فرد و جمله وسط k باشد داریم:

$$۲k=a_۱+a_n \quad , \quad S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$$

$$\Rightarrow S_n=\frac{n}{۲}(۲k) \Rightarrow \boxed{S_n=n\cdot k} \quad (۱۲)$$

مثال : زوایای داخلی یك پنج‌ضلعی محدب تصاعد عددی می‌سازند، زاویه وسطی چند درجه است؟

مجموع زوایای داخلی یك n ضلعی محدب

$$(2n-4)\times 90^\circ$$

مجموع زوایای داخلی یك پنج ضلعی محدب

$$n=5 \Longrightarrow 6\times 90^\circ = 540^\circ$$

$$S_n = nk \Longrightarrow 540^\circ = 5k \Longrightarrow k = 108^\circ$$

▲

۱۳- اگر در یك تصاعد عددی داشته باشیم

$$\frac{S_m}{S_n} = \left(\frac{m}{n}\right)^2 ,\ m\neq n$$ آنگاه:

$$\boxed{d = 2a_1}$$

اثبات :

$$\frac{\frac{m}{2}(a_1+a_m)}{\frac{n}{2}(a_1+a_n)} = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \Longrightarrow \frac{a_1+a_m}{a_1+a_n} = \frac{m}{n}$$

$$\Longrightarrow \frac{2a_1+(m-1)d}{2a_1+(n-1)d} = \frac{m}{n} \Longrightarrow$$

$$2a_1n + mnd - nd = 2a_1m + mnd - md$$

$$\Longrightarrow 2a_1(n-m) = (n-m)d$$

$$\Longrightarrow d = 2a_1$$

مثال : اگر در یك تصاعد داشته باشیم:

$$\frac{S_7}{S_3} = \left(\frac{7}{3}\right)^2$$

آنگاه $d = 2a_1$.

۱۴- مجموع اعداد هر جدول ضرب مساوی مربع مجموع اعداد سطر اول

اثبات : جدول ضرب $n\times n$ را در نظر می‌گیریم.

$$\text{مجموع اعداد سطر اول} = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n}{2}(n+1)$$

$$\text{مجموع اعداد سطر دوم} = 2+4+6+\cdots+2n = n(n+1)$$

$$d = n(n+1) - \frac{n}{2}(n+1) = \frac{n}{2}(n+1)$$

بنابراین مجموع اعداد این جدول ضرب برابر است با مجموع n جمله اول تصاعد عددی زیر:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{n}{2}(n+1) \\ d = \frac{n}{2}(n+1) \\ \text{تعداد جملات} = n \end{cases}$$

$$\Longrightarrow S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}[n(n+1) + (n-1)\times\frac{n}{2}(n+1)]$$

$$S_n = \frac{n}{2}\times\frac{n}{2}[2(n+1)+(n-1)(n+1)] = \frac{n^2}{4}[2n+2+n^2-1]$$

$$S_n = \frac{n^2}{4}[n^2+2n+1] = \frac{n^2}{4}(n+1)^2 \equiv \text{مربع مجموع اعداد سطر اول}$$

مثال : مجموع اعداد یك جدول ضرب ۱۲ × ۱۲ چیست؟

$$S = 1+2+3+\cdots+12 = \frac{12}{2}(12+1) =$$

$۶(۱۳)=۷۸$

مجموع اعداد این جدول‌ضرب $= ۷۸^۲=۶۰۸۴$

۱۵- اگر بین دوعدد a و b ، n واسطه عددی‌درج‌کنیم خواهیم داشت ......

$$\div a , \underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{n} , b$$

$$b=a+(n+۱)d \implies b-a=(n+۱)d$$

$$\implies \boxed{d=\frac{b-a}{n+۱}} \quad (۱۳)$$

مثال : اگر بین دو عدد ۱۰ و ۱۴ ، سیصد و نود و نه واسطه عددی درج‌کنیم، جمله دویست و نود و نهم این تصاعد چند است؟

$$a=۱۰ \quad , \quad b=۱۴$$

$$d=\frac{b-a}{n+۱}=\frac{۴}{۴۰۰}=\frac{۱}{۱۰۰}$$

$$a_{۲۹۹}=a_۱+۲۹۸d=۱۰+۲۹۸\left(\frac{۱}{۱۰۰}\right)=$$

$$۱۰+۲/۹۸=۱۲/۹۸$$

۱۶- اگر بین دو عدد a و b ، n واسطه عـددی درج کنیم، خواهیم داشت:

b جمله $(n+۲)$ ام است

$$\div a , \underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{n \text{ تا}} , b$$

$$S_{n+۲}=\frac{n+۲}{۲}(a+b)=\left(\frac{n}{۲}+۱\right)(a+b)=$$

$$\frac{n}{۲}(a+b)+(a+b) \implies$$

$$\boxed{\text{واسطه } S_n=\frac{n}{۲}(a+b)} \quad (۱۴)$$

مثال : اگر بین دوعدد ۸ و ۲۲ ، دویست واسطه عددی درج کنیم، مجموع این واسطه‌ها چقدر است؟

$$S=\frac{n}{۲}(a+b)=\frac{۲۰۰}{۲}(۸+۲۲)=$$

$$۱۰۰(۳۰)=۳۰۰۰$$

توجه : درجمله عمومی، a_n ، ضریب n مساوی d (قدر نسبت)است.ودرعبارت S_n، ضریب $n^۲$، مساوی $\left(\frac{d}{۲}\right)$ است.

مثال : دریك تصاعدعددی $S_n=۲n(۳n-۱)$، حاصل $(a_{n+۵}-a_{n-۵})$ چند است؟

حل : $\frac{d}{۲}=۶=n^۲$ ضریب $\implies d=۱۲$

$$a_{n+۵}-a_{n-۵}=۱۰d=۱۲۰$$

۱۷- اگردو تصاعدعددی باقدرنسبتهای $d_۱$ و $d_۲$ داشته باشیم .

چنانچه بین‌آنهاجملات مشترکی‌وجود داشته‌باشد، این‌جملات مشترك تصاعد عددی جدیدی می‌سازندکه قدر نسبت‌آن مساوی $(d_۱ \cdot d_۲)$ است.

اثبات :

$\div a_۱ , a_۲ , a_۳ , \cdots , a_n$

تصاعد اولی: $d_۱=$ قدر نسبت

$\div u_۱ , u_۲ , u_۳ , \cdots , u_n$

تصاعد دومی: $d_۲=$ قدر نسبت

فرض می‌کنیم $d_۱$ و $d_۲$ نسبت به هم‌اول باشند.

فرض می‌کنیم $a_۱$ و a_p و a_k با $u_۱$ و u_t و u_l جملات

مشترکی از دو تصاعد باشند که خودشان یك تصاعد عددی می‌سازند
پس:

$$\left.\begin{matrix}\div a_1\ ,\ a_p\ ,\ a_k \\ \div u_1\ ,\ u_t\ ,\ u_t\end{matrix}\right\} \text{قدر نسبت} = d'_1$$

$$\begin{cases} a_p = a_1 + d_1' \\ a_p = a_1 + (p-1)d_1 \end{cases} \Longrightarrow d'_1 = (p-1)d_1 \quad (I)$$

$$\begin{cases} u_t = u_1 + d'_1 \\ u_t = u_1 + (t-1)d_2 \end{cases} \Longrightarrow d'_1 = (t-1)d_2 \quad (II)$$

با مقایسه روابط (I) و (II) نتیجه می‌شود

$$(p-1)d_1 = (t-1)d_2$$

چون d_1 و d_2 نسبت به هم اول‌اند پس:

$$d_2 = p-1 \quad , \quad d_1 = t-1$$

پس:

$$d_1' = (p-1)d_1 \Longrightarrow d_1' = d_1 \cdot d_2$$

توجه: اگر d_1 و d_2 نسبت به هم اول نباشد باز هم مسألهٔ قابل اثبات است. (اثبات به عهده خواننده واگذار می‌شود).

مثال: در دو تصاعد عددی، $\div 3, 6$ و $\div 3, 7$، مجموع ده جمله مشترك اولیه چقدر است؟

$$\begin{cases} d_1 = 3 \\ d_2 = 4 \end{cases} \Longrightarrow d_1' = 12$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d = \frac{12}{2}[6 + 9 \times 12] =$$

$$6(114) = 684$$

مسائل:

مسأله ۱- به چه‌شرطی عبارتهای:

$$x^2+xy+y^2\ ,\ y^2+yz+z^2\ ,\ z^2+xz+x^2$$

تصاعد عددی می‌سازند.

حل: سه‌جمله را به ترتیب a_1 و a_2 و a_3 فرض می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$a_1 - a_2 = a_2 - a_3 \quad \leftarrow \text{ یا } \quad 2a_2 = a_1 + a_3$$

$$x^2+xy+y^2-y^2-yz-z^2=$$

$$y^2+yz+z^2-z^2-xz-x^2$$

$$x^2+xy-yz-z^2=y^2+yz-xz-x^2$$

$$+xz-xz \qquad\qquad +xy-xy$$

$$x(x+y+z)-z(x+y+z)=$$

$$y(x+y+z)-x(x+y+z)$$

$$(x+y+z)(x-z)=(x+y+z)(y-x)$$

$$\Longrightarrow x-z=y-x \Longrightarrow 2x=y+z$$

یعنی y و x و z باید سه‌جمله متوالی یك تصاعد عددی باشند. ■

مسأله ۲ - مجموع سه‌عدد m و مجموع مربعات آنها n است اگر این سه‌عدد جمله‌های متوالی یك تصاعد عددی باشد، به چه‌شرطی مسأله‌دارای جواب است؟

حل: جمله وسطی‌را b و قدر نسبت‌را d فرض‌می‌کنیم. و تصاعد به صورت: $\div b-d : b : b+d$ است

$$\Longrightarrow \begin{cases} 3b = m \Longrightarrow b = \dfrac{m}{3} \\ b^2+(b+d)^2+(b-d)^2 = n \Longrightarrow \\ b^2+2(b^2+d^2)=n \end{cases}$$

$$3b^2+2d^2=n \implies d^2=\frac{n-3b^2}{2} \implies$$

$$d^2=\frac{n-3\left(\frac{m^2}{9}\right)}{2} \implies d^2=\frac{3n-m^2}{9}$$

شرط وجود جواب مسأله آن است که $3n-m^2>0$ یا:

$$\boxed{n>\frac{m^2}{3}}$$

مسأله ۳ - یک تصاعد عددی بیابید که مجموع n جمله اول آن $n(2n+3)$ باشد.

این مسأله را از راههای زیر می توان حل کرد .

راه اول: فرمول S_n را نوشته هم‌ارز $2n^2+3n$ قرار می‌دهیم.

$$S_n \equiv 2n^2+3n \implies$$

$$\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d] \equiv n(2n+3)$$

$$2a_1+(n-1)d \equiv 4n+6 \implies$$

$$nd+(2a_1-d) \equiv 4n+6$$

$$\implies \begin{cases} d=4 \\ 2a_1-d=6 \implies 2a_1-4=6 \implies \\ a_1=5 \end{cases}$$

$$\implies \div\ 5\ ,\ 9\ ,\ 13\ ,\ \ldots$$

راه دوم:

$$S_n=2n^2+3n$$

ضریب n^2 : قبلاً گفته شد $= \frac{d}{2} \implies$

$$2=\frac{d}{2} \implies \boxed{d=4}$$

$$n=1 \implies S_1=a_1=5$$

$$\implies \div\ 5\ ,\ 9\ ,\ 13\ ,\ \ldots$$

راه سوم:

$$n=1 \implies S_1=a_1=5$$

$$S_n=n(2n+3)$$

$$\frac{n}{2}(a_1+a_n)=n(2n+3) \implies$$

$$a_1+a_n=4n+6$$

$$5+a_n=4n+6 \implies a_n=4n+1$$

n ضریب $=d \implies \boxed{d=4}$

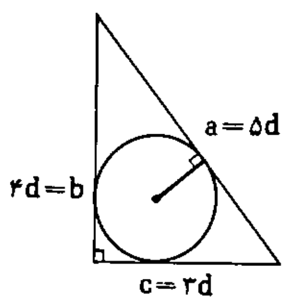
$$\implies \div\ 5\ ,\ 9\ ,\ 13\ ,\ \ldots$$

مسأله ۴ - ثابت کنید اگر اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای تصاعد عددی بسازند، اولاً ضلع‌وسطی چهار برابر قدرنسبت است، ثانیاً شعاع‌دایره محاطی داخلی مساوی قدرنسبت است.

$$\div\ c\ ,\ b\ ,\ a$$

یا

$$\div\ b-d \quad b \quad b+d$$



داریم :

$$a^2=b^2+c^2 \implies (b+d)^2=b^2+(b-d)^2$$

$$\implies (b+d)^2-(b-d)^2=b^2 \implies$$

$$4bd=b^2 \implies \boxed{4d=b}$$

بدین‌ترتیب اگر اضلاع مثلث قائم الزاویه‌ای تصاعد عددی بسازد، اضلاع آن را می توان به‌صورت 3d و 4d و 5d نشان داد .

داریم :

$$r=\frac{s}{p}=\frac{6d^2}{6d}\Longrightarrow \boxed{r=d}$$

■

مسأله ۵ - مجموع هفت جمله اول یك تصاعد عددی (۷) است و حاصل ضرب این جملات صفر است. تصاعد را معلوم کنید.

حل : جمله وسطی را k و قدر نسبت را (d) می‌نامیم.

$$\div\, k-3d\,,\ k-2d\,,\ k-d\,,\ k\,,\ k+d\,,$$

$$k+2d\,,\ k+3d \Longrightarrow 7k=7 \Longrightarrow \boxed{k=1}$$

$$\Longrightarrow k(k^2-d^2)(k^2-4d^2)(k^2-9d^2)=0$$

$$(1-d^2)(1-4d^2)(1-9d^2)=0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} d=\pm 1 \\ d=\pm\frac{1}{2} \\ d=\pm\frac{1}{3} \end{cases}$$

تصاعدهای موردنظر مسأله :

$$\div -2\,,\ -1\,,\ 0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 4$$

$$\div\ 4\,,\ 3\,,\ 2\,,\ 1\,,\ -1\,,\ -2$$

$$\div -\frac{1}{2}\,,\ 0\,,\ \frac{1}{2}\,,\ 1\,,\ \frac{3}{2}\,,\ 2\,,\ \frac{5}{2}$$

$$\div \frac{5}{2}\,,\ 2\,,\ \frac{3}{2}\,,\ 1\,,\ \frac{1}{2}\,,\ 0\,,\ -\frac{1}{2}$$

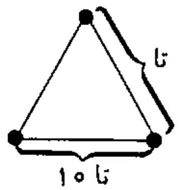
$$\div 0\,,\ \frac{1}{3}\,,\ \frac{2}{3}\,,\ 1\,,\ \frac{4}{3}\,,\ \frac{5}{3}\,,\ 2$$

$$\div 2\,,\ \frac{5}{3}\,,\ \frac{4}{3}\,,\ 1\,,\ \frac{2}{3}\,,\ \frac{1}{3}\,,\ 0$$

■

مسأله ۶ - چهار وجهی منتظمی داریم که در آن با شرایط زیر گلوله‌گذاری شده است. به طوری‌که در هررأس یك گلوله و روی هریال ۱۰ گلوله قرار گرفته است، اگر کل فضای داخلی آن را با شرایط فوق گلوله‌گذاری کنیم، تعیین کنید در حجم آن چند گلوله به‌کار رفته است؟

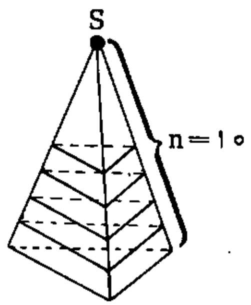
حل : می‌دانیم سطوح جانبی این چهار وجهی مثلثهای متساوی‌الاضلاع است. پس گلوله‌های سطح قاعده چنین چیده شده است.



$$1+2+3+\cdots+10=$$

$$\frac{n(n+1)}{2}=\frac{10(11)}{2}=55$$

پس‌در سطح‌قاعده ۵۵ گلوله گذاشته‌شده‌است ودر رأس S یك گلوله قرار گرفته‌است. اگرفرض‌کنیم گلوله‌ها روی‌صفحه‌هایی موازی سطح‌قاعده در داخل این‌چهار وجهی قرار گرفته باشند، در سطح‌پایینی (۵۵) گلوله ودر سطح‌بالایی یك گلوله قرار دارد و تعداد این‌صفحات (۱۰) است پس:



$$\begin{cases} a_1=1 \\ a_{10}=55 \\ n=10 \end{cases} \quad S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$$

$$=\frac{10}{2}(1+55)=5(56)=280$$

مسأله ۷ - دریک‌دنباله اعدادطبیعی، چهارعددفردمتوالی به‌طریقی بیابیدکه مجموع مربعات آنها از مجموع مربعات اعداد زوج بین‌آنها (۴۸) واحدبیشتر باشد.

چهار عدد فرد متوالی

$$n\ ,\quad n+۲\ ,\quad n+۴\ ,\quad n+۶$$

سه عدد زوج متوالی بین‌آنها

$$n+۱\qquad n+۳\qquad n+۵$$

$$n^۲+(n+۲)^۲+(n+۴)^۲+(n+۶)^۲=$$
$$۴۸+(n+۱)^۲+(n+۳)^۲+(n+۵)^۲$$
$$\Longrightarrow n^۲+۶n-۲۷=۰ \Longrightarrow$$
$$\begin{cases} n=۳ \\ n=-۹ \quad \text{غ ق ق} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{۳\ ,\ ۵\ ,\ ۷\ ,\ ۹}$$

توضیح اینکه: مقاله راجع‌به تصاعد هندسی در شماره۳ این مجله خواهدآمد.

تیمور پس از یک سفر طولانی به خارج، گزاره‌های زیر را در مورد هتلهای مورد علاقه‌اش بیان کرده‌است:

۱- وقتی غذای هتل خوب باشد، گارسنها مؤدبند.

۲- هیچ هتل سرتاسرسال بازی از داشتن منظره‌ای از اقیانوس محروم نیست.

۳- غذا تنها در بعضی هتلهای ارزان قیمت بد است.

۴- هتلهایی که استخرشنا دارند دیوارهاشان را به‌دقت با پیچ امین‌الدوله می‌پوشانند.

۵- هتلهایی که خدمه‌شان نامؤدبند آنهایی هستند که تنها قسمتی از سال بازند.

۶- هیچ هتل ارزان قیمتی سگها را نمی‌پذیرند.

۷- هتلهای بی‌استخرشنا منظره‌ای از اقیانوس ندارند.

آیا دراین هتلها، یک دارندهٔ سگ می‌تواند از پیچ امین‌الدوله لذت ببرد؟

جواب

می‌توانیم نظریات تیمور را به‌ترتیب زیربازنویسی کنیم:

۶- اگر هتلی سگها را بپذیرد، قیمتش بالاست.

۳- اگر قیمت هتل بالاست، غذای آن خوب است.

۱- اگر غذا خوب است، پیشخدمتها مؤدبند.

۵- اگر پیشخدمتها مؤدبند، هتل سراسر سال باز است.

۲- اگر هتل سراسر سال باز است، منظره‌ای از اقیانوس دارد.

۷- اگر منظره‌ای از اقیانوس موجودباشد، استخرشنا موجود است.

۴- اگر استخرشنا موجودباشد، پیچ امین‌الدوله روی دیوارهایش هست.

بنابراین، هتلهایی که سگ می‌پذیرند پیچ‌امین الدوله روی دیوارهاشان دارند.

تاریخچهٔ مجلات ریاضی در ایران[1]

● غلامرضا یاسی پور

گـواه رهـرو آن بـاشدکـه سردش یابی از دوزخ
نـشان عـاشق آن بـاشدکـه خشکش بینی از دریا
سخن کز راه دین گویی چه سُریانی[1] چه عِبرانی[2]
مکان کـز بهر حق جونی چه جابُلقا[3] چه جابُلسا[4].
«سنایی»

سخن از مجلات ریاضی منتشر شده در ایران داریم و از یکی از قدیمی‌هاشان* یعنی «حل المسائل ریاضی که شامل حل مسائل شعب مختلفهٔ علوم ریاضی بوده و در تحت نظر و مراقبت **ناصر ـ هورفر ـ ریاضی**[5]» انتشار می‌یافته آغاز می‌کنیم.

جلد اول این مجله در ۱۵ دیماه ۱۳۰۶ شمسی در مطبعهٔ نهضت شرق طهران به چاپ رسیده و در روی جلد آن چنین می‌خوانیم:

در اول و پانزدهم هر ماه منتشر خواهد شد.[6]
وجه اشتراک سالیانه در طهران و ولایات یک تومان
قیمت یک جلد ده‌شاهی

* البته به زعم ما، چه تاکنون از این قدیمتر سراغ نکرده‌ایم و این یکی را نیز از آقای پرویز شهریاری به امانت گرفته‌ایم. ناگفته نماند که خود این کار نیز به اشارت مشارٌ الیه صورت گرفته است.

اشخاصی که مایل به اشتراک باشند به کتابخانهٔ طهران (خیابان لاله‌زار) رجوع نمایند.

مسائلی که در این مجموعه حل می‌گردد عموماً از مسابقه‌ها و امتحانات نهائی ایران و اروپا و غیر آن اتخاذ می‌شود. ضمناً بعضی از مسائل که در یکی دو جلد بعد حل می‌شود در جلدهای قبل به عنوان سؤال طرح خواهد شد و اسامی مشترکینی که مسائل مندرجه را بعد از پانزده روز از نشر مجموعه، صحیح حل کرده بفرستند در ذیل همان مسأله درج خواهد شد.

مجله به قطع بزرگ و به خط نستعلیق و به خامهٔ زرین خط است، هر شمارهٔ آن هشت صفحه دارد و صفحات مجلدات آن مسلسل و در مطالب آن غلبه با مسائل هندسه است و در مقدمهٔ آن چنین آمده:

«هیچ کس اهمیت ریاضیات و دخالت مستقیم آن را در علوم و صنایع امروزهٔ دنیا انکار ندارد. حتی متخصصین فنون دیگر نیز از آموختن اصول و مبانی این علم ناگزیرند زیرا دانستن ریاضی نه تنها وسیلهٔ پیشرفت در علوم مربوط به آن است بلکه دماغ[۷] را برای فهم هرگونه مطلب غیر آن حاضر می‌نماید.

چنانکه پاسکال گوید «مابین افکار متساویه آنکه استعداد هندسه دارد مطالب را بهتر درک می‌کند.» و به همین جهت است که حکما و فلاسفهٔ قدیم همواره مردم را به آموختن هندسه تحریض و ترغیب می‌کرده‌اند چه می‌دانستند اساس و بنیان هر علم وقتی محکم و محقق می‌گردد که مبنی بر تعاریف و موضوعهای منطقی باشد و هندسه تنها علمی بوده که در آن زمان به این عنوان شناخته می‌شده.

از کلمات افلاطون است: «انسان لایق کسی است که اصّم[۸] بودن نسبت قطر مربع را به ضلعش بداند[۹]» و نیز گفته است: «اعداد در دنیا حکومت می‌کنند.[۱۰]

از این قبیل کلمات بسیار و گنجاندن آنها در این مختصر دشوار است. فقط منظور و مقصود اصلی از ذکر این مقال بیان این مطلب است که بدون آموختن ریاضی پیشرفت در علوم دیگر مشکل بلکه محال است.»

سپس به علل نیاز به وجود کتب مسائل می‌پردازد و به این ترتیب بنای وجودکتب شامل حل مسائل رامی‌سازد و درطی آن وعده می‌دهد که:

«این نامه به نام مجموعهٔ حل المسائل به استثنای دو ماه از تعطیل تابستان در اول و پانزدهم هر ماه منتشر خواهد شد (و) شامل حل مسائلی است که متناسب با قوه و استعداد محصلین متوسطه می‌باشد.»

چیز مهم دیگری در رابطه با مقاصد مجله حداقل درهفت شماره‌ای که نزد نویسندهٔ این سطور است نیست، بنابراین از سر این مطلب می‌گذریم و برای آگاهی خواننده به ذکر مسائلی چند از متن آن می‌پردازیم.

اولین مثال را از شمارهٔ اول و از حساب انتخاب می‌کنیم:

اجرت روزانهٔ بنا وگچ بر و نقاش به ترتیب سه قران و ۴ قران و ۷ قران است[۱۱]. معین کنید یک عمله[۱۲] در ماه چند روز به هر یک از شغل‌های مذکور می‌پردازد تا آنکه ماهی ۱۸٦ قران به او عاید گردد؟

فرض کنیم عدهٔ روزهای بنائی و گچ‌بری و نقاشی در ماه به ترتیب x، y، z باشد. پس بنا به فرض مسأله $x+y+z=۳۰$[۱۳] و $۳x+۴y+۷z=۱۸٦$. و پس از حذف z بین این دو معادله

$$۴x+۳y=۲۴$$

و یا[۱۴]

$$y=\frac{۲۴-۴x}{۳}=۸-x-\frac{x}{۳}$$

حال اگر فرض کنیم[۱۵]، $\frac{x}{۳}=t$ نتیجه می‌شود.

$$x=۳t\,,\,y=۸-۴t$$

و چون x و y باید مثبت باشند، پس $۳t>۰$ و $۸-۴t>۰$ و یا $t>۰$ و $t<۲$، یعنی t فقط می‌تواند واحد باشد، بنابراین[۱٦]

$$t=۱\,,\,x=۳\,,\,y=۴\,,\,z=۲۳$$

مثال دوم از هندسه و از همان شماره است:

مثلث غیر مشخص ABC مفروض است، دایرهٔ محیطی این مثلث را رسم کنید و بعد از نقطهٔ A قوسی مساوی و مختلف الجهة با AC جدا کرده[۱۷] از نقطهٔ D خطی بر ضلع AB عمود کنید تا محیط دایره را در نقطهٔ E قطع کند. ثابت کنید که خط AE بر BC عمود است.

برای اثبات از نقطهٔ B خط BF را بر AB عمود می‌کنیم چون

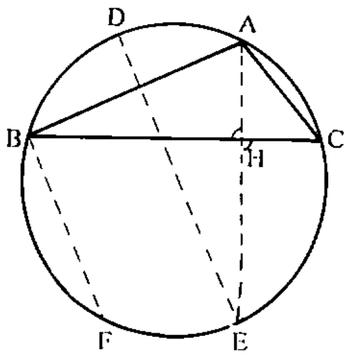
زاویهٔ ABF قائمه است، نقطهٔ F متقاطر[۱۸] A می‌شود. بنابراین $DF=CF$. بعلاوه خط BF موازی DE نیز می‌گردد و بالنتیجه $\widehat{DB}=\widehat{EF}$ و بنابراین $BF=CE$. پس چون درتساوی واضح:

نصف محیط $=\widehat{AB}+\widehat{BF}$ ، به جای BF مساویش CE را قرار دهیم چنین خواهیم داشت:

$$\text{نصف محیط} = \widehat{AB}+\widehat{CE}$$

پس مقیاس زاویهٔ H[۱۹] عبارت خواهد بود از

$$\text{ربع محیط}^{20} = \frac{\widehat{AB}+\widehat{CE}}{2}$$



مثال سوم را از جبر و از همین شماره می‌آوریم:

معادلهٔ درجه چهارم $x^4-6x^3+5x^2+4x-1=0$ را حل کنید.

ابتدا آن را چنین می‌نویسیم:

$$x^4-6x^3=-5x^2-4x+1$$

و چون بر طرفین معادله $9x^2$ اضافه کنیم:

$$x^4-6x^3+9x^2=4x^2-4x+1$$

و یا

$$(x^2-3x)^2=(2x-1)^2$$

و بنابراین[۲۱]

$$(x^2-3x)^2-(2x-1)^2\equiv(x^2-5x+1)(x^2-x-1)=0$$

پس حل معادلهٔ مفروض به حل دو معادلهٔ درجه دوم $x^2-5x+1=0$ و $x^2-x-1=0$ راجع می‌شود و از آنجا

$$x=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2} \quad \text{و} \quad x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

و چنانکه دیده می‌شود معادله دارای چهار ریشهٔ حقیقی است.

در مجله نه تنها از مسائل معمول بلکه از معماها و چیستانهای متداول آن زمانها نیز استفاده شده و مثلاً در انتهای شمارهٔ دوم آن این مسأله آمده است:

گوشواری داشتم از لعل و مروارید و زر
بود یک مثقال وزن آن مُرصّع گوشوار
قیمتش کردند صّرافان ز روی معدلت
لعل مثقالی به سی،لؤلؤ به هجده، زر، چهار
بِستَد از من صِیرفی و بیست دینارم بداد
مانده‌ام من اندرین دادو ستد بی‌اختیار

در مجله و مثلاً در مجلّد سوم آن به اسامی افراد معروفی نظیر تقی هورفر، محمد علی مجتهدی، غلامحسین مصاحب، محمود مهران و محسن هشترودی[۲۲] نیز برخورد می‌کنیم که پیداست مسائلی را در مجله طرح یا حل کرده‌اند و از آنِ هشترودی به قرار ذیل است:

معادلهٔ سیّالهٔ $x^2+y^2+z^2+t^2=N^2$ را از روی اتحادهای جبری حل کنید.

مجله درکنار مسائل ساده و متوسط گاه مسائل بسیار مشکلی را نیز مطرح کرده و از جمله مسألهٔ زیر راکه حل آن ریاضی‌دانها را قرن‌ها به خود مشغول داشته است[۲۳]:

ثابت کنید که اگر در مثلثی دو منصّف الزاویه متساوی باشند آن مثلث متساوی الساقین است.

از غلط‌های چاپی نیز طبق معمول تهی نیست. اما گاهی بعضی از

اشتباهات آن به صورت طنزآمیزی در آمده، و مثلا در یک مورد به جای: «صحت اتحاد ذیل را تحقیق کنید»، «صحت الحاد ذیل را تحقیق کنید» آورده است[۲۴].

به ریاضیات عالی نیز پرداخته و مثلاً محاسبهٔ مشتق $y=\log_a x$ و $y=e^x$ و $y=x^x$ را، که در زمانهای اخیر معمولاً در سال اول دانشکده‌ها مطرح می‌شود، خواسته است.

به تاریخ ریاضی نیز پرداخته و فی‌المثل راجع به مقدار π، پس از آنکه اثبات $\operatorname{arctg} 1/2 + \operatorname{arctg} 1/3 = \frac{\pi}{4}$ را خواسته، چنین می‌نویسد[۲۵] که:

«ارشمیدس اول کسی است که نسبت محیط دایره را به قطرش به حرف یونانی π نمایش داد.»

واضح است π حد محیط کثیرالاضلاع منتظم محاطی یا محیطی در دایرهٔ به قطر واحد است، وقتی عدهٔ اضلاع آن کثیرالاضلاع از هر حدی تجاوز کند. از قدیم اصم بودن π معلوم بوده چنانکه ارشمیدس محیط کثیرالاضلاع $3\times 2^5 = 96$ ضلعی محاط در دایرهٔ به قطر واحد را حساب کرده ثابت کرد مقدار آن بین $3\frac{10}{70}$ و $3\frac{10}{71}$ می‌باشد، و بنابراین $\frac{22}{7}$ مقدار تقریبی π است تا ۰/۰۰۲ تقریب، یعنی دو رقم اعشار آن صحیح است. بعدها علمای ریاضی طریقهٔ مهندس[۲۶] یونانی را تعقیب کردند و به واسطهٔ سهولتی که اعداد اعشاری در محاسبه ایجاد می‌کند توانستند مقدار تقریبی π را تا ۳۵ رقم اعشار به دست آورند.

ارشمیدس در ۲۵۰ سال قبل از میلاد کسر $\frac{22}{7}$ را به دست آورد و ۷۸۰ سال بعد آریابهاتا محیط کثیرالاضلاع منتظم $3\times 2^7 = 384$ ضلعی محاط در دایرهٔ به قطر واحد را حساب کرده از آن رو مقدار π را تا چهار رقم اعشار تقریب به دست آورد.

در مشرق نیز علمای اسلامی مخصوصاً ایرانیها برای تعیین π تحقیقاتی نموده‌اند چنانکه غیاث‌الدین جمشید کاشانی در مفتاح‌الحساب می‌نویسد:

«مقداری را که در رسالهٔ موسوم به محیطیّه برای نسبت محیط به قطر به‌دست آورده‌ام بعدازطرح روابع این‌است:

جه	قه	ثانیه	ثالثه
ج	ح	کط	مد»

و چون حروف را به عدد تبدیل کنیم:[۲۷]

$$3 + \frac{8}{60} + \frac{29}{60^2} + \frac{44}{60^3} = 3/141592592$$

چنانکه دیده می‌شود این مقدار تا ۶ رقم اعشار با مقداری که امروز برای π به دست آمده موافق است و به سهولت معلوم می‌شود که تفاوت π با این مقدار از $\frac{1}{10^7}$ کمتر است.

در ۱۵۸۵ ویت از روی محیط کثیرالاضلاع منتظم $3\times 2^{16} = 393216$ ضلعی مقدار π را تا ۹ رقم اعشار تقریب تعیین کرد و نیز در ۱۵۹۷ آدریانوس رومانوس از روی کثیرالاضلاع $3\times 5\times 2^{24}$ ضلعی مقدار π را تا ۱۵ رقم اعشار تقریب تعیین نمود و بالاخره آخرین کسی که بدین وسیله مقدار π را تعیین کرد لودلف می‌باشد که در ۱۶۱۵ و ۱۶۲۱ از حساب محیط کثیرالاضلاعهای $3\times 5\times 2^{35}$ ضلعی و 2^{65} ضلعی مقدار π را اول دفعه تا ۲۰ رقم و دفعهٔ ثانی تا ۳۵ رقم اعشار تقریب به دست آورد و به همین مناسبت است که در آلمان π را لودلف می‌گویند[۲۸].

کسر $\frac{22}{7}$ یا ۳/۱۴ برای اغلب موارد استعمال π کفایت می‌کند و در نظر داشتن آن نیز سهل است معذالک می‌توان از روی عبارت (سه و یک می‌شود چهار) آن رابه‌نظرآورد و هم چنین برای آنکه مقدار آن تا چهار رقم اعشار تقریب به نظر آید عبارت ذیل را باید به خاطر سپرد: (۳ و ۱ می‌شود ۴ و ۱ می‌شود ۵).

ولی از آنجایی که اثر نظم در به خاطر سپردن مطالب بیش از نثر است در ممالک مختلفه اشعاری گفته شده که عدهٔ حروف کلمات به ترتیب ارقام مقدار π می‌باشند، و چون رقم سی دوم آن صفر است این اشعار تا سی رقم اعشار آن را بیشتر به دست نمی‌دهد.

و ما اینجا به ذکر اشعار فرانسه و انگلیسی و آلمانی آن پرداخته و امیدواریم که دانشمندان این سرزمین هم به ساختن قطعه‌ای که متضمن این مقصود باشد بپردازند و نام نیک خویش را در صفحات کتب ریاضی جای دهند.

«کارکنان مجموعهٔ حل المسائل به نوبهٔ خود زحمات شعرائی که این مقصود را انجام دهند تقدیر نموده و آنان را مفتخر به اخذ جائزه خواهد کرد.[۲۹]»

اما بر نویسندهٔ مقاله معلوم نیست که کسی در آن زمان و در این مورد زحمتی کشید و به راحتی رسید یا نه. اما بعدها افرادی به گفتن اشعاری از این دست همت گماشتند و از آن جمله است شعر زیر که از آن غلامحسین صدری افشار است[۳۰]:

گر زقدر پی‌کنند از تو سؤال[۳۱] پاسخی ده که خردمند ترا آموزد

خرد و بینش و آگاهی دانشمندان

۳ ۱ ۴ ۱ ۵ ۹

ره سرمنزل توفیق بما آموزد

۲ ۶ ۵ ۳ ۵

در مجلدات مورد بحث مسائلی از هیأت، فیزیک، مکانیک، هندسهٔ ترسیمی و هندسهٔ رقومی نیز آمده که ذکر مواردی از آنها در این مختصر نمی‌گنجد و به کار فعلی ما نیز نمی‌آید.

مقاله را با ذکر یک دو مثال دیگر از مجلدات مزبور خاتمه می‌دهیم و از خوانندگانی که اطلاعات بیشتری در مورد مجلدات احتمالی دیگر آن، نیز دربارهٔ شرح حال ناصر ـ هورفر ـ ریاضی که قاعدتاً اعضای هیأت تحریریهٔ آن بوده‌اند، دارند، تقاضا می‌کنیم که ما را هم بی‌خبر نگذارند تا در جائی دیگر به ذکر آن خبرها بپردازیم.

مسأله. مقدار $e = \text{حد}\ (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\ L\alpha=0$ را تعیین کنید.

واضح است که وقتی α به سمت صفر میل کند e به صورت مبهم 1^{∞} در می‌آید و برای تعیین مقدار واقعی آن فرض می‌کنیم $\alpha=\frac{1}{m}$ و بنابراین $m=\frac{1}{\alpha}$ و لهذا

$$e = \text{حد}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\ L\alpha=0 = \text{حد}(1+\frac{1}{m})^{m}\ Lm=\infty$$

حال چون موافق دستور دو جملهٔ نیوتن

$$(a+b)^{m} \equiv a^{m}+\frac{m}{1}a^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{1\times 2}a^{m-2}b^{2}+\dots+\frac{m(m-1)(m-2)(\dots)(m-p+1)}{1\times 2\times 3\times\dots\times p}a^{m-p}b^{p}+\dots$$

عبارت $(1+\frac{1}{m})^{m}$ را بسط می‌دهیم:

$$(1+\frac{1}{m})^{m}\equiv 1+\frac{m}{1}\times\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{1\times 2}\cdot\frac{1}{m^{2}}+\dots+\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-p+1)}{1\times 2\times 3\times\dots\times p}\cdot\frac{1}{m^{p}}+\dots$$

و یا

$$(1+\frac{1}{m})^{m}\equiv 1+1+\frac{1-\frac{1}{m}}{1\times 2}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1\times 2\times 3}+\dots$$

که چون m به سمت بی‌نهایت میل کند مقادیر $\frac{1}{m}$، $\frac{2}{m}$، $\frac{3}{m}$ و غیره به سمت صفر میل کرده چنین خواهیم داشت:

$$e\equiv\text{حد}(1+\frac{1}{m})^{m}\ Lm\to\infty\equiv 1+1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{1\times 2\times 3}+\dots$$

(حاصل ضرب $1\times 2\times 3\times 4\dots m$ را به علامت اختصاری $m!$ نوشته آن را m عامله تلفظ می‌کنند[۳۲]) پس مقدار e را می‌توان به صورت ذیل نوشت

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\dots+\frac{1}{m!}$$

به دلایلی که این مختصر گنجایش ذکر آنها را ندارد می‌توان ثابت کرد که این رشته دارای حدی است از سه کوچکتر[۳۳] و مقدار آن تا ده رقم اعشار تقریب عبارت است از

۲/۷۱۸ ۲۸۱ ۸۲۸ ۴

مسأله. مطلوب است حل معادلهٔ $f(x)\equiv 8x^{3}-12x^{2}-2x+3=0$ در صورتی که بدانیم ریشه‌های آن تصاعد عددی تشکیل می‌دهند.

اگر α و β و γ ریشه‌های معادلهٔ مفروض باشند بنابر فرض مسأله $\gamma-\beta=\beta-\alpha$ و یا $\alpha+\gamma=2\beta$. اما موافق روابط بین ضرایب و ریشه‌ها $\alpha+\beta+\gamma=\frac{12}{8}$ بنابراین $3\beta=\frac{12}{8}$ یعنی $\beta=\frac{1}{2}$ و از آنجا

معلوم می‌شود که یکی از ریشه‌های معادله باید $\frac{1}{2}$ باشد، پس $f(x)$ بر $x-\frac{1}{2}$ یا $2x-1$ باید قابل قسمت باشد به قسمی که

$$f(x) \equiv 8x^3 - 12x^2 - 2x + 3 \equiv (2x-1)(4x^2-4x-3)$$

لهذا ریشه‌های معادلهٔ مفروض $-\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{2}$ می‌باشند، و چنانکه دیده می‌شود این سه عدد تصاعد عددی تشکیل می‌دهند که قدر نسبتش واحد است.

توضیح: نام محمد علی مجتهدی به نام حل کننده زیر راه حل مسأله آمده است.

یادداشتها

۱. منسوب به سوریه و زبانی از لهجهٔ آرامی

۲. عبری

۳. شهری خیالی در مشرق

۴. شهری خیالی در مغرب

۵. داخل گیومه از روی جلد است.

۶. همّت را بنگرید که چگونه وعده می‌دهند که در هر ماه دو شماره نشرکنند.

۷. فکر، ذهن

۸. گنگ

۹. البته این سخن شاید شرط لازم انسان لایق باشد اما حتماً شرط کافی آن نیست، و اگر مقصود از انسان لایق «خردمند کافی» باشد شرط لازم هم نخواهد بود.

۱۰. این گفته را به دیگران از جمله فیثاغورس نیز نسبت داده‌اند و امروزه با وجود کامپیوترها به خصوص در مورد جهان غرب حرف بسیار بی‌ربطی نیز نیست.

۱۱. معلوم است که در آن زمان‌ها نیز گرانی به بیداد بوده و قران همان گران است!

۱۲. عمله جمع است و جمع عامل است و اکنون معلوم می‌شود که چرا آن را جمع بسته‌اند زیرا به چند کار متفاوت می‌پرداخته و به‌قول حافظ، « چندین هنره بوده است.

۱۳. ماه را ۳۰ روز فرض کرده و این از نوع همان استدلالهایی است که در منطق آن را با **مقدمات مفقوده** می‌گویند و قیاس چنینی را **قیاس اضماری** می‌نامند.

۱۴. آوردن «و یا» در بسیاری از عبارات از جمله در همین عبارت خطاست و «یا»ی تنها کافی است چه در این گونه موارد آوردن «و یا» به قول منطقیون جدید فورمول را «بدترکیب» می‌کند. (در مقابل **فورمول خوش ترکیب** «well - formed formula» که آن را wff اختصار می‌کنند.)

۱۵. البته خواننده متوجه است که دستگاه مورد بحث، دستگاه معادلات سیّاله یا دیوفانتی است.

۱۶. باز از جوابهای مسأله مشخص می‌شود که عملهٔ مزبور واقعاً «عمله» بوده چه هر ۳۰ روز ماه را به کاری مشغول بوده و حتی یک روز هم استراحت نداشته‌است.

۱۷. در اینجا باید اضافه شود: « انتهای آن را D می‌نامیم.»

۱۸. یعنی نقطه‌ای که چون به A وصل شود قطری از دایره را به‌وجود می‌آورد.

۱۹. که نگفته کدام نقطه است اما از شکل معلوم می‌شود.

۲۰. در شکل آمده در کتاب، BF بر AB عمود نیست.

۲۱. رسم الخط از خود کتاب است.

۲۲. البته معروف در زمان ما و از نظر معلمی با حدود سی سال سابقهٔ معلمی و زنده.

۲۳. این مسأله عاقبت در قرن هجدهم توسط مهندسی فرانسوی به نام **دسکوب** حل شد، و بعدها راه حلهای متعددی از جمله جبری (با استفاده از رابطهٔ بین اضلاع و نیمساز داخلی مثلث) و مثلثاتی (بااستفاده از فورمول محاسبهٔ نیمساز داخلی برحسب اضلاع و زوایای مثلث) برای آن پیدا شد. در ایران آقای **احمد آرام** به حل هندسی جدیدی از آن دست یافته است (که در یکی از شماره‌های مجلهٔ ریاضی **یکان** مسطور است و انشاءالله‌به‌ذکر آن خواهیم پرداخت). برای بعضی از راه حلهای این مسأله مثلاً به کتاب حل المسائل **هندسه و مخروطات** آقای **پرویز شهریاری** و کتاب **قضایا و مسائل هندسهٔ غلامرضا یاسی پور** رجوع کنید.

۲۴. در انتهای جلد چهارم

۲۵. در صفحهٔ ۵۱ جلد هفتم که آخرین مجلدی است که در دست‌بنده است و فعلاً نمی‌دانم که آخرین مجلد این دوره نیز بوده است یا خیر.

۲۶. معنی اصلی « مهندس» هندسه دان است و آن به مفهوم کسی است که اندازه‌گیری یا تقدیر را می‌داند، مثال از حافظ:

مهندس فلکی راه‌دیر شش‌جهتی — چنان ببست که ره‌نیست زیر دیر مغاک

۲۷. تا زمان غیاث الدین کسرها ستّینی (یعنی شستگانی) بوده و ظاهراً او اولین

کسی است که کسرهای اعشاری را به وجود آورده است. برای تفصیل این حکایت به کتاب کاشانی نامه اثر آقای **ابوالقاسم قربانی** رجوع کنید.

۲۸. در این مورد در رسالهٔ کاشانی نامهٔ آقای ابوالقاسم قربانی می‌خوانیم که: در فصل هشتم **محیطیّه**، کاشانی مقدار محیط دایره را به فرض آن که شعاع آن واحد باشد، یعنی در واقع 2π، را در دستگاه شمار دهگانی یا کسرهای اعشاری که خود مخترع آنهاست به دست آورده است به این شرح

$$۲\pi = ۶/۲۸۳\ ۱۸۵\ ۳۰۷\ ۱۷۹\ ۵۸۶\ ۵$$

همهٔ شانزده رقم اعشاری این عدد دقیق است، و این نهایت دقت کاشانی را در محاسبه می‌رساند. همو در جای دیگر همین کتاب می‌نویسد که کاشانی عدد π یعنی نسبت محیط دایره به قطر آن را با دقتی که تقریباً تا صد و پنجاه سال بعد از وی بی‌رقیب ماند حساب کرد.

۲۹. کارکنان مجله باید در واقع جایزهٔ مورد بحث را به خود کاشانی یا به اخلاف او می‌دادند زیرا چنانکه در کاشانی نامهٔ مذکور در فوق آمده: کاشانی به خوبی از اهمیت کار خود در محاسبهٔ 2π آگاه بوده و برای آنکه نتیجهٔ کارش محفوظ بماند ارقام آن را (از چپ به راست) هم در یک بیت عربی و هم در یک بیت فارسی به‌نظم در آورده است.

و بَحجا خَنَج صَز از طَه خُوَّةٌ

محیطٌ لقطر هُوَ اثنان منه

در مصراع اول کلمهٔ صَز مرکب از صاد حرف اول صفر وزا یعنی رقم ۷ می‌باشد.

شش و دوهشت و سه یک هشت و پنج و سه صفری

بهفت و یک زا و نه پنج و هشت و شش پنج است.

درمصراع دوم زا به معنی رقم ۷ است.

۳۰. از کتاب: تربیع دایره و غیرجبری بودن عدد π، ترجمهٔ: **پرویزشهریاری**.

۳۱. این مصراع به وزن سه مصراع بعدی یعنی : فعلاتن فعلاتن فعلاتن فعلات نیست، و مثلاً می‌تواند به این صورت تصحیح شود: گر ز قدر عددپی بکنند از توسؤال

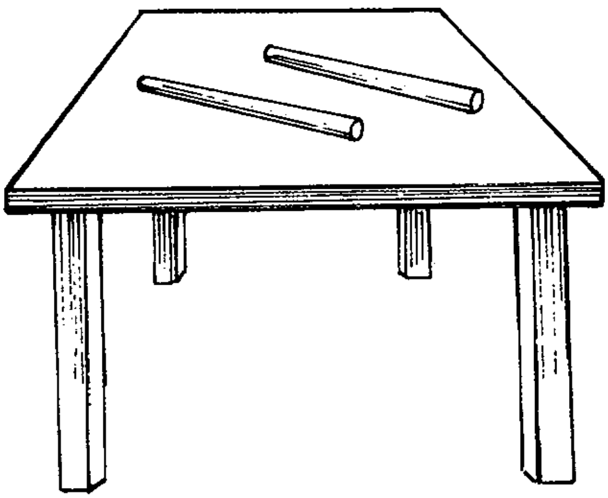
۳۲. m عامله همان فاکتوریل m است.

۳۳. برای اثبات این موضوع می‌توانید به هرکتاب انتگرال و دیفرانسیل (جامع و فاضل) رجوع کنید.

تفریح اندیشه

دو میلهٔ آهنی برمیزی قراردارند. آندو یکسان به‌نظر می‌رسند، اما یکی از آنها آهنربایی است که درهریک از دوسر آن قطبی است، و دیگری نیست.

چگونه می‌توانیم بدون اینکه آنها را بلند کنیم و بدون آنکه از شیء دیگری استفاده کنیم تنها باحرکت دادن آنها روی میز مشخص کنیم که کدامیک آهنرباست؟



جواب

یکی از دومیله را درنظر گرفته آن را با لغزاندن روی میز عمود بر وسط دیگری قرار می‌دهیم تاشکل T بسازند. اگر میلهٔ آهنربا بالای باشد میلهٔ دیگر آن را جذب نمی‌کند.

معادلات[1]

سید محمدرضا هاشمی موسوی

حل و بحث معادلات درجهٔ اول و دوم یك مجهولی

به طور کلی هرمعادلهٔ درجهٔ nام یك مجهولی را در حالت عمومی به شکل زیر نمایش می‌دهیم:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots$$
$$+a_{n-1}x+a_n=0 \quad (n\in N) \qquad (1)$$

در حالت عمومی $n\geqslant 5$ معادلهٔ (۱) به‌وسیلهٔ رادیکالهای بسته و محدود قابل‌حل نیست. یعنی ریشهٔ معادلهٔ (۱) در حالت عمومی $n\geqslant 5$ به‌وسیلهٔ رادیکالهای متناهی قابل بیان نیست. در این حالت معادله را با روشهای تقریبی موجود حل می‌کنند. بنا براین حل معادلهٔ (۱) فقط درحالت $n\leqslant 4$ ممکن است. زیرا دراین حالت معادلهٔ حلال معادلهٔ منظور، ازنظر درجه، یك درجه کمترازدرجهٔ معادله اصلی است. بنا براین دراین جا نتیجه می‌شود که معادلهٔ (۱) را تنها درمجموعه‌ای محدود از n می‌توان حل نمود یعنی:

$$n=\{1, 2, 3, 4\}$$

دراین شماره کلیهٔ مطالب در رابطهٔ باحل معادلهٔ (۱) به ازای $n=1$ و $n=2$ ارائه می‌شود.

1) Equations

۱) حل معادلهٔ (۱) در حالت $n=1$:

معادلهٔ (۱) به‌ازای $n=1$ به شکل خاص

$$a_0x+a_1=0$$

درمی‌آید. برای‌حل این معادله‌کافی است a_1 را به‌طرف دیگر برده و طرفین‌را بر a_0 که مخالف‌صفر فرض شده است تقسیم کنیم یعنی:

$$x=-\frac{a_1}{a_0}$$

حل و بحث معادلهٔ درجهٔ اول: بنا بر مقادیری که a_0 و a_1 کسب می‌کنند سه حالت می‌تواند وجود داشته باشد که موردبحث قرار گیرند. I) اگر $a_0=0$ و $a_1\neq 0$ دراین صورت معادله جواب ندارد. II) اگر $a_0=0$ و $a_1=0$ معادله به‌شکل $0\times x+0=0$ درمی‌آید و ریشهٔ معادله مبهم است. III) اگر $a_0\neq 0$ و $\forall a_1\in R$ ریشهٔ معادله چنین است:

$$x=-\frac{a_1}{a_0}$$

مثال۱: به‌ازای مقادیرمختلف m در وجود یا عدم ریشهٔ معادلهٔ: $m^2x+2m+1=(3m-2)x$ بحث کنید.

حل: ابتدا مجهولات‌را به سمت‌چپ ومعلومات‌را به‌طرف راست‌انتقال می‌دهیم. (با توجه به‌اینکه هرعدد از یك‌طرف به طرف‌دیگر برده‌شود علامتش عوض می‌شود.) بنا براین داریم:

$$m^2x-3mx+2x=-2m-1 \Longrightarrow$$
$$(m^2-3m+2)x=-(2m+1)$$

معادله به‌ازای $m=R-\{1\ ,\ 2\}$ یک ریشه حقیقی دارد.

$$x=\frac{-(2m+1)}{m^2-3m+2}=-\frac{2m+1}{(m-1)(m-2)}$$

بحث:

I) اگر $(m-1)(m-2)=0 \Longrightarrow$ معادله ریشه حقیقی ندارد. $m=1 \vee m=2$

II) اگر $(m-1)(m-2)\neq 0 \Longrightarrow$ معادله یک ریشه حقیقی دارد. $m\neq 1 \wedge m\neq 2$

مثال ۲: به ازای مقادیر مختلف m و n در وجود یا عدم ریشه معادله زیر بحث کنید.

$$(3m-2n+1)x+1=(2m-n)x+3n-2m$$

حل:

$$(3m-2n+1)x-(2m-n)x=3n-2m-1$$
$$(m-n+1)x=3n-2m-1 \Longrightarrow$$
$$x=\frac{3n-2m-1}{m-n+1}$$

بحث:

I) اگر $m-n+1=0 \wedge 3n-2m-1\neq 0$ غیر ممکن

II) اگر $m-n+1=0 \wedge 3n-2m-1=0$ مبهم

III) اگر $m-n+1\neq 0 \wedge \forall m$ و $n\in R$ ممکن

توجه: برای به دست آوردن m و n در حالت مبهم کافی است دستگاه زیر را حل کنیم. از حل دستگاه نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} m-n+1=0 \\ 3n-2m-1=0 \end{cases} \Longrightarrow n=-1 \text{ و } m=-2$$

۲) حل معادلهٔ (۱) درحالت $n=2$:

معادله (۱) به‌ازای $n=2$ به شکل خاص

$$a_0x^2+a_1x+a_2=0$$

درمی‌آید. برای سادگی معادله درجه دوم را درحالت عمومی به شکل آشنای مقابل درنظر می‌گیریم:

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0) \qquad (2)$$

معادله (۲) را می‌توان با روشهای جبری، هندسی، مثلثاتی، ترسیمی (گرافیکی) حل نمود. در اینجا تنها به‌ذکر یک روش جبری ساده اکتفا می‌کنیم.

روش جبری: ابتدا معادله(۲) را در $4a$ ضرب می‌کنیم. سپس به طرفین معادلهٔ حاصله b^2 را اضافه می‌کنیم یعنی:

$$4a(ax^2+bx+c)=0$$
$$4a^2x^2+4abx+4ac=0 \Longrightarrow$$
$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$$

طرف اول رابطه اخیر مربع $(2ax+b)$ است بنابراین داریم:

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac \qquad (3)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود طرف اول رابطه(۳) همواره مثبت است، بنابراین طرف دوم تساوی فوق نیز همواره باید مثبت و یا مساوی صفر باشد. دراین‌صورت اگر طرف دوم تساوی فوق‌الذکر را به Δ نمایش دهیم می‌توانیم Δ را مبین حل معادلهٔ (۲) منظور کنیم. یعنی برای وجود جواب معادله(۲) باید داشته باشیم:

$$\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$$

در اینجا با فرض $\Delta\geqslant 0$ می‌توان از طرفین رابطهٔ (۳) جذر گرفت وسپس x را محاسبه نمود. یعنی:

$$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac} \Longrightarrow$$
$$2ax=-b\pm\sqrt{\Delta} \Longrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \quad (a\neq 0)$$

بحث‌در وجود یا عدم ریشه‌های معادله (۲) : به‌طور کلی اگر

$\Delta \geqslant 0$ باشد معادله ریشه‌حقیقی‌دارد. و اگر $\Delta < 0$ باشدمعادله ریشه حقیقی ندارد. یعنی:

بحث:

I) اگر $\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Longrightarrow$
معادلهٔ (۲) دو ریشه حقیقی متمایز دارد.

II) اگر $\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Longrightarrow$
معادلهٔ (۲) دو ریشه مساوی (ریشه‌مضاعف) دارد.

III) اگر $\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Longrightarrow$
معادلهٔ (۲) ریشه حقیقی ندارد.

تبصره۱ : درحالت $\Delta < 0$ معادله دو ریشه غیر حقیقی داردکه به شکل کلی: $x = \alpha \pm i\beta$ می‌باشند. این نوع اعداد که درآنها $i = \sqrt{-1}$ است از دوجزء تشکیل‌یافته‌اند، که‌این دوجزء عبارتنداز جزءحقیقی[1] (یعنی α) وجزء موهومی[2] (یعنی $i\beta$). به‌عنوان مثال معادله: $x^2 + x + 1 = 0$ دارای دوریشه غیرحقیقی (مختلط[3]) است که عبارتنداز:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2} =$$

$$\frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{-1}}{2} = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\alpha} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\beta} i \quad (i = \sqrt{-1})$$

$$\Longrightarrow x = \alpha \pm i\beta \qquad \text{(ریشه‌های‌مختلط‌معادله)}$$

مثال۳: ریشه‌های غیرحقیقی (مختلط) معادله

$$x^2 - 3x + 4 = 0$$

را به‌دست‌آورید.

حل : داریم: $x = \frac{3 \pm \sqrt{9-16}}{2}$

1) Real 2) Imaginary 3) Complex

ودر نتیجه ریشه‌های مختلط چنین می‌شوند.

$$x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{-7}}{2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i \quad (i = \sqrt{-1})$$

تبصرهٔ ۲ : ریشه‌های غیر حقیقی (مختلط) همـواره در معادلات باضرایب حقیقی به شکل مزدوج ظاهر می‌شوند یعنی اگـر معادلهٔ درجهٔ دومی دارای ریشهٔ $2 - i\sqrt{3}$ باشد ریشهٔ دیگرش درصورت‌حقیقی‌بودن‌ضرایب، $2 + i\sqrt{3}$ می‌باشد.

G

مثال۴: معادلهٔ درجهٔ دومی که یك ریشهٔ غیر حقیقی آن $\frac{3 + i\sqrt{5}}{2}$ است، ریشهٔ‌دیگرش‌درصورت‌حقیقی‌بودن‌ضرایب، چیست.

حل : چون فرض شده‌است ضرایب معادله حقیقی است بنابراین‌ریشه دیگرمعادله باید مزدوج ریشهٔ‌داده شده‌باشد یعنی ریشهٔ دیگر معادله $\frac{3 - i\sqrt{5}}{2}$ است.

تذکر: اگر درمعادلهٔ(۲) b زوج‌باشد (یعنی $b = 2b'$) معادله‌را می‌توان بافرمول ساده‌تری حل‌نمود. زیرا داریم:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Longrightarrow b = 2b' \Longrightarrow$$

$$x = \frac{-(2b') \pm \sqrt{(2b')^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$\frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

$$\Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \Delta' = b'^2 - ac \\ b = 2b' \end{array} \right. \Longrightarrow x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$$

روابط بین ریشه‌های معادلهٔ (۲) :

اگر دو ریشهٔ معادلهٔ (۲) را با x' و x'' نمایش‌دهیم و معادلهٔ دوجه‌دوم (۲) را بر a که مخالف‌صفر فرض شده است تقسیم کنیم، از مقایسهٔ معادلهٔ حاصل و معادلهٔ:

$$(x-x')(x-x'')=0$$

و یا معادله: $x^2-(x'+x'')x+x'x''=0$ روابط بین ریشه‌ها و ضرایب به‌دست می‌آید. یعنی:

$$\left|\begin{array}{l} x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \\ x^2-(x'+x'')x+x'x''=0 \end{array}\right. \quad \overset{\text{از مقایسه}}{\Longrightarrow}$$

$$\left|\begin{array}{l} x'+x''=-\frac{b}{c} \\ x'x''=\frac{c}{a} \end{array}\right. \quad (۴)$$

مثال۵: به ازای مقادیر مختلف m در وجود یا عدم ریشه‌های معادله:

$$mx^2-2(m-1)x+m+1=0$$

بحث کنید. ومقدار m را طوری تعیین کنید که ریشه‌ها عکس و قرینهٔ یکدیگر باشند. و تعیین کنید به ازای چه مقادیری از m معادله دو ریشه قرینه دارد.

حل : برای بحث در وجود یا عدم ریشه‌های حقیقی معادله کافی است مبین معادله را تشکیل دهیم. چون b زوج است بهتر است Δ' را تشکیل دهیم. بنابراین داریم :

$$\Delta'=(m-1)^2-m(m+1)$$

$$\Delta'=m^2-2m+1-m^2-m=-3m+1$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \Delta'=-3m+1>0 & \text{۱) دو ریشه‌حقیقی‌دارد.} \\ \Delta'=-3m+1=0 & \text{۲) ریشه مضاعف دارد.} \\ \Delta'=-3m+1<0 & \text{۳) ریشه حقیقی‌ندارد.} \end{cases}$$

ویا داریم:

$$\Longrightarrow \begin{cases} -3m+1>0 \Longrightarrow -3m>-1 \Longrightarrow \\ m<\frac{1}{3} & \text{۱) دو ریشهٔ‌حقیقی‌دارد.} \\ -3m+1=0 \Longrightarrow -3m=-1 \Longrightarrow \\ m=\frac{1}{3} & \text{۲) ریشهٔ مضاعف دارد.} \\ -3m+1<0 \Longrightarrow -3m<-1 \Longrightarrow \\ m>\frac{1}{3} & \text{۳) ریشهٔ حقیقی ندارد.} \end{cases}$$

اگر ریشه‌ها عکس وقرینهٔ یکدیگر باشند داریم:

$$x''=\frac{-1}{x'} \Longrightarrow \begin{cases} x'x''=-1 \\ x'x''=\frac{c}{a}=\frac{m+1}{m} \end{cases} \Longrightarrow$$

از روابط بین ریشه‌ها و ضرایب داریم:

$$\frac{m+1}{m}=-1 \Longrightarrow m+1=-m \Longrightarrow 2m=-1$$

$$\Longrightarrow m=\frac{-1}{2}$$

بنابراین به‌ازای $m=-\frac{1}{2}$ ریشه‌ها عکس وقرینهٔ یکدیگرند.

اگر ریشه‌ها قرینهٔ یکدیگر باشند داریم: $x''=-x'$

و از روابط بین ریشه‌ها وضرایب داریم:

$$x''+x'=-\frac{b}{a}$$

بنابراین با جایگزینی داریم:

$$-x'+x'=-\frac{b}{a} \Longrightarrow -\frac{b}{a}=0 \Longrightarrow b=0$$

بنابراین به‌ازای $m=1$ ریشه‌ها قرینهٔ یکدیگرند. زیرا داریم:

$$b=-2(m-1)=0 \Longrightarrow m=1$$

تعیین معادلهٔ درجهٔ دوم، با معلوم‌بودن ریشه‌ها:

با توجه به‌روابط بین ریشه‌ها و ضرایب می‌توان به‌طور مستقیم معادلـه‌را مشخص نمود. یعنی اگر فـرض‌کنیم مجموع ریشه‌ها برابر S و حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر P باشد در این صورت داریم :

$$\begin{cases} x'+x''=-\dfrac{b}{a}=S \\ x'x''=\dfrac{c}{a}=P \end{cases} \Longrightarrow$$

$$x^{2}-\left(-\frac{b}{a}\right)x+\frac{c}{a}=0 \Longrightarrow x^{2}-Sx+P=0$$

مثال۶: معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ باشد.

حل: داریم: $x'=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ و $x''=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

بنابراین ازجمع وضرب‌ریشه‌ها نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} x'+x''=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=1 \\ x'x''=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=-1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x'+x''=1 \\ x'x''=-1 \end{cases} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} S=1 \\ P=-1 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$x^{2}-x-1=0$$

نتیجه : با در دست‌داشتن دو ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم به طور مستقیم می‌توان‌از رابطهٔ:

$$x^{2}-(x'+x'')x+x'x''=0$$

استفاده‌کرد و معادلهٔ درجهٔدوم منظور را نوشت.

> * برهان نکاتی چند درمورد معادلهٔ درجهٔدوم که‌درتست می‌توان بکار برد.

$$ax^{2}+bx+c=0 \qquad (2)$$

۱) همواره قدرمطلق تفاضل‌ریشه‌ها چنین است:

$$|x'-x''|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

برهان: همان‌طورکه می‌دانیم ریشه‌های معادلهٔدرجهٔ دوم (۲) چنین است:

$$x' \ , \ x''=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

بنابراین داریم :

$$\begin{cases} x'=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x''=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} \quad \text{و یا} \quad \begin{cases} x'=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x''=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

پس به ترتیب داریم:

$$x'-x''=\frac{\sqrt{\Delta}}{a} \quad \text{و یا} \quad x'-x''=\frac{-\sqrt{\Delta}}{a} \Longrightarrow$$

$$x'-x''=\frac{\pm\sqrt{\Delta}}{a}$$

$$a(x'-x'')=\pm\sqrt{\Delta} \Longrightarrow |a(x'-x'')|=\sqrt{\Delta}$$

$$\Longrightarrow |a|\,|x'-x''|=\sqrt{\Delta}$$

و بنابراین از رابطهٔ اخیر داریم:

$$|x'-x''|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

(لازم به توضیح است‌که رابطهٔ اخیر را از اصل:

$$|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$$

نتیجه گرفته‌ایم.)

۴) با استفاده از روابط بین‌ریشه‌ها وضرایب‌معادلهٔ(۲) عبارتهای متقارن اصلی زیر را برحسب S و P محاسبه کنید (x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ(۲) فرض شده‌اند).

(لازم به ذکر است که عبارت متقارن برحسب x و y عبارتی است که اگر x به y و y به x تبدیل‌شود عبارت تغییر نکند، به عبارت دیگر عبارات متقارن عباراتی هستند که اگر نقش متغیرها را بایکدیگر عوض کنیم عبارت تغییری نکند، به عنوان مثال عبارت $P=x^2+y^2+xy$ یک عبارت متقارن است زیرا اگر x به y و y به x تبدیل شود عبارت چنین می‌شود:

$$P=y^2+x^2+yx$$

که در واقع همان عبارت قبلی است. به عنوان مثالی دیگر $S=x^3+xyz+y^3+z^3$ نیز متقارن است.)

$$A=x_1^2+x_2^2 \quad \text{و} \quad B=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$$

$$C=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2} \quad \text{و} \quad D=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$$

$$E=\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}+\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} \quad \text{و} \quad F=x_1^3+x_2^3$$

$$G=\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3} \quad \text{و} \quad H=x_1^4+x_2^4$$

$$*(S_k=x_1^k+x_2^k)*$$

حل: همان‌طور که می‌دانیم روابط بین‌ریشه‌ها وضرایب معادلهٔ (۲) چنین است:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=S \\ x_1x_2=P \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$A=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$$
$$=S^2-2P$$

$$B=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{S}{P}$$

$$C=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)^2-2\frac{1}{x_1x_2}$$
$$=\frac{S^2}{P^2}-\frac{2}{P}$$

$$D=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{S^2-2P}{P}$$

$$E=\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}+\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} \Longrightarrow E^2=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+2$$

$$E^2=\frac{S^2-2P}{P}+2=\frac{S^2-2P+2P}{P}=\frac{S^2}{P} \Longrightarrow$$

$$E=\frac{S}{\sqrt{P}}\times\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{P}}=\frac{S\sqrt{P}}{P} \quad (P>0)$$

$$F=x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$$
$$=S^3-3PS$$

$$g=\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}=\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1^3x_2^3}=\frac{S^3-3PS}{P^3}$$

$$H=x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2$$
$$=(S^2-2P)^2-2P^2=S^4-4PS^2+2P^2$$

* (برای محاسبهٔ S_k برحسب P و S چنین‌عمل‌می‌کنیم:

$$S_k=\left(\frac{S-\sqrt{S^2-4P}}{2}\right)^k+\left(\frac{S+\sqrt{S^2-4P}}{2}\right)^k$$

(لازم به توضیح است که x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ (۲) می‌باشند و داریم:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{S-\sqrt{S^2-4P}}{2} \\ x_2=\dfrac{S+\sqrt{S^2-4P}}{2} \end{cases}$$

و با جایگزینی x_1 و x_2 در S_k به رابطهٔ فوق رسیده‌ایم.)

پس‌از بسط هریك‌از پرانتزها و اختصار لازم مقدار S_k برحسب S و P محاسبه می‌شود یعنی :

$$S_k = \frac{1}{2^{k-1}}\Big[S^k + \frac{k(k-1)}{1\times 2}(S^2-4P)S^{k-2} + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{1\times 2\times 3\times 4}(S^2-4P)^2S^{k-4} + \dots\Big]$$

رابطهٔ اخیر بیان S_k را برحسب S و P نشان می‌دهد.) *

مثال ۷ : اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم:

$$x^2-\sqrt{3}x-2\sqrt{6}=0$$

باشند عبارت متقارن زیر را حساب کنید.

$$A = x_1^3x_2^4+x_2^3x_1^4+x_1^3x_2^2+x_2^3x_1^2$$

حل :
$$A = x_1^3x_2^3(x_1+x_2)+x_1^2x_2^2(x_1+x_2) = (x_1+x_2)(x_1^3x_2^3+x_1^2x_2^2)$$

$$A = S(P^3+P^2) \Longrightarrow A = SP^2(P+1) \Longrightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l} x_1+x_2=\sqrt{3}=S \\ x_1x_2=-2\sqrt{6}=P \end{array}\right. \Longrightarrow A = 24(\sqrt{3}-6\sqrt{2})$$

مثال ۸: عبارت $T=\dfrac{x_1^8-x_2^8}{x_1^2-x_2^2}$ در صورتی که x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x+1=0$ باشند را حساب کنید.

$$T = \frac{(x_1^4-x_2^4)(x_1^4+x_2^4)}{x_1^2-x_2^2} = \frac{(x_1^2-x_2^2)(x_1^2+x_2^2)(x_1^4+x_2^4)}{x_1^2-x_2^2}$$

با حذف $x_1^2-x_2^2$ ازصورت و مخرج داریم:

$$\Longrightarrow T = (x_1^2+x_2^2)(x_1^4+x_2^4)$$

$$T = (S^2-2P)[(S^2-2P)^2-2P^2] = (S^2-2P)^3-2P^2(S^2-2P)$$

از طرفی داریم :

$$\begin{cases} x_1+x_2=S=3 \\ x_1x_2=P=1 \end{cases}$$

بنابراین نتیجه می‌شود:

$$T = (9-2)^3-2(9-2) = 7^3-14 = 329$$

---

۳) تشکیل معادلهٔ درجهٔ دومی که بین ریشه‌های آن و ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم مفروضی رابطهٔ خاصی برقرار باشد.
به عنوان مثال معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش k واحد بیشتر و یا کمتراز معادلهٔ (۲) باشد. و یا معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که هرریشهٔ آن مکعب هرریشهٔ معادلهٔ (۲) باشد و.... در این‌جا برخی از این گونه مسائل را مطرح و با یکی از دو روش معمول یعنی استفاده از عبارتهای متقارن و یا برقراری رابطهٔ بین ریشه‌های معادلهٔ مفروض (x) و ریشه‌های معادلهٔ مطلوب (y) حل می‌کنیم. البته باید به این نکته توجه داشت که در برخی از مسائل روش اول و در برخی دیگر روش دوم ساده‌تر است. و در بعضی از مسائل تنها از یکی از روشهای معمول می‌توان استفاده کرد.

۳-۱) معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش k واحد بیشتر یا کمتر از معادلهٔ (۲) باشد.

$$ax^2+bx+c=0 \quad (2)$$

حل : ریشهٔ معادلهٔ مطلوب را y فرض می‌کنیم. بنابراین با برقراری رابطهٔ بین ریشه‌های معادلهٔ مفروض و ریشه‌های معادلهٔ مطلوب داریم :

$$y = x \pm k \Longrightarrow x = y \mp k$$

با جایگزینی رابطهٔ اخیر درمعادلهٔ (۲) داریم:

$$a(y\mp k)^{۲}+b(y\mp k)+c=۰$$

معادلهٔ مطلوب :

$$ay^{۲}\mp ۲aky+k^{۲}+by\mp bk+c=۰ \Longrightarrow$$
$$ay^{۲}+(b\mp ۲ak)y+(k^{۲}\mp bk+c)=۰$$

(اگر k واحد بیشتر باشد با علامت منفی $(-)$ و اگر k واحد کمتر باشد باعلامت مثبت $(+)$ درنظر می‌گیریم.)

مثال۹: معادلهٔ درجهٔ‌دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش ۲ واحد کمتر از ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲}-۴x+۲=۰$ باشد.

حل : ریشهٔ معادلهٔ مطلوب را y فرض می‌کنیم. در این صورت داریم: $y=x-۲$

$$x=y+۲ \Longrightarrow (y+۲)^{۲}-۴(y+۲)+۲=۰$$
$$\Longrightarrow y^{۲}+۴y+۴-۴y-۸+۲=۰$$

بنابراین معادلهٔ مطلوب چنین است :

$y^{۲}-۲=۰$ (معادله‌ای که ریشه‌هایش ۲ واحد کمتر از معادلهٔ مفروض است).

۳-۲) معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش k برابر ریشه‌های معادلهٔ(۲) باشد.

حل : ریشهٔ معادلهٔ مطلوب را y فرض می‌کنیم، در این صورت داریم: $y=kx$

با محاسبهٔ x برحسب y و جایگزینی آن در معادلهٔ (۲) خواهیم داشت: $x=\dfrac{y}{k}$

$$a\left(\frac{y}{k}\right)^{۲}+b\left(\frac{y}{k}\right)+c=۰ \Longrightarrow$$
$$\frac{ay^{۲}}{k^{۲}}+\frac{by}{k}+c=۰ \Longrightarrow$$
$$ay^{۲}+bky+ck^{۲}=۰$$

مثال ۱۰: معادلهٔ درجهٔ‌دومی تشکیل‌دهید که ریشه‌هایش ۳ برابر ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲}+x-۳=۰$ باشد.

حل : y را ریشهٔ معادلهٔ مطلوب فرض می‌کنیم بنابراین باید داشته باشیم: $y=۵x$

با محاسبهٔ x برحسب y وجایگزینی درمعادله داریم:

$$x=\frac{y}{۵} \Longrightarrow \left(\frac{y}{۵}\right)^{۲}+\left(\frac{y}{۵}\right)-۳=۰$$

ودر نتیجه داریم:

$$\frac{y^{۲}}{۲۵}+\frac{y}{۵}-۳=۰ \Longrightarrow y^{۲}+۵y-۷۵=۰$$

(معادلهٔ مطلوب)

۳-۳) معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل‌دهید که به‌ترتیب ریشه‌هایش معکوس، مجذور، مکعب و قرینهٔ ریشه‌های معادلهٔ (۲) باشد.

حل : اگر ریشهٔ‌معادلهٔ مطلوب را y فرض کنیم، در این صورت داریم :

$$y=\frac{۱}{x} \Longrightarrow x=\frac{۱}{y}$$

با جایگزینی در معادلهٔ (۲) داریم:

$$a\left(\frac{۱}{y}\right)^{۲}+b\left(\frac{۱}{y}\right)+c=۰ \Longrightarrow$$
$$\frac{a}{y^{۲}}+\frac{b}{y}+c=۰$$

باضرب طرفین معادلهٔ‌اخیر در $y^{۲}$ معادلهٔ‌مطلوب یعنی‌معادله‌ای که ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادلهٔ (۲) می‌باشد چنین است :

$$cy^{۲}+by+a=۰$$

همچنین اگر مجذور باشد داریم:

$$y=x^{۲} \Longrightarrow x=\pm\sqrt{y}$$

با جایگزینی در معادلهٔ (۲) داریم:

$$a(\pm\sqrt{y})^2+b(\pm\sqrt{y})+c=0 \Longrightarrow$$

$$ay\pm b\sqrt{y}+c=0$$

$$ay+c=\mp b\sqrt{y} \Longrightarrow (ay+c)^2=(\mp b\sqrt{y})^2$$

$$\Longrightarrow a^2y^2+2acy+c^2=b^2y$$

معادله‌ای که ریشه‌هایش مجذور ریشه‌های معادلهٔ (۲) است:

$$a^2y^2+(2ac-b^2)y+c^2=0$$

همچنین اگر مکعب باشد داریم:

$$\begin{cases} y_1=x_1^3 \\ y_2=x_2^3 \end{cases} \Longleftarrow \text{ریشه‌های } y_2 \text{ و } y_1 \text{ معادلهٔ مطلوب فرض می‌شوند.}$$

و می‌دانیم:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=S \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}=P \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y_1+y_2=x_1^3+x_2^3 \\ y_1y_2=x_1^3x_2^3 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} y_1+y_2=S^3-3PS \\ y_1y_2=P^3 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$y^2-(S^3-3PS)y+P^3=0$$

بنابراین معادله‌ای که ریشه‌هایش مکعب ریشه‌های معادلهٔ (۲) می‌باشد چنین است:

$$a^3y^2+(b^3-3abc)y+c^3=0$$

بالاخره معادله‌ای که ریشه‌هایش قرینهٔ معادلهٔ (۲) است چنین است:

$$y=-x \Longrightarrow x=-y$$

$$a(-y)^2+b(-y)+c=0 \Longrightarrow$$

$$ay^2-by+c=0 \quad \text{(معادلهٔ مطلوب)}$$

مثال ۱۱: معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش معکوس ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x+1=0$ باشد.

حل: ریشهٔ معادلهٔ مطلوب را y فرض می‌کنیم، بنابراین داریم:

$$y=\frac{1}{x} \Longrightarrow x=\frac{1}{y} \Longrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{y}\right)^2-3\left(\frac{1}{y}\right)+1=0$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{1}{y^2}-\frac{3}{y}+1=0 \Longrightarrow y^2-3y+1=0$$

بنابراین چنین نتیجه می‌شود که اگر ریشه‌های معادلهٔ

$$x^2-3x+1=0$$

را معکوس کنیم باز هم در معادله صدق می‌کنند.

مثال ۱۲: معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش مجذور ریشه‌های معادلهٔ $x^2-x-1=0$ باشد.

حل: روش اول: ریشهٔ معادلهٔ مطلوب را y فرض می‌کنیم، پس داریم: $y=x^2$

$$x=\pm\sqrt{y} \Longrightarrow$$

$$(\pm\sqrt{y})^2-(\pm\sqrt{y})-1=0 \Longrightarrow$$

$$y\mp\sqrt{y}-1=0 \Longrightarrow y-1=\pm\sqrt{y}$$

$$\Longrightarrow (\pm\sqrt{y})^2=(y-1)^2$$

$$\Longrightarrow y=y^2-2y+1 \Longrightarrow$$

$$y^2-3y+1=0 \quad \text{(معادلهٔ مطلوب)}$$

روش دوم: ریشه‌های معادلهٔ مطلوب را y_1 و y_2 فرض می‌کنیم، در این صورت داریم:

$$\begin{vmatrix} y_1=x_1^2 \\ y_2=x_2^2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} y_1+y_2=x_1^2+x_2^2 \\ y_1y_2=x_1^2x_2^2 \end{array}\right.$$

$$\left(\text{می‌دانیم}: \left|\begin{array}{l} x_1+x_2=1 \\ x_1x_2=-1 \end{array}\right. \right) \Rightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l} y_1+y_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2 \\ y_1y_2=(x_1x_2)^2 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} y_1+y_2=(1)^2-2(-1)=3 \\ y_1y_2=(-1)^2=1 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} y_1+y_2=3 \\ y_1y_2=1 \end{array}\right. \Rightarrow y^2-3y+1=0$$

مثال ۱۳: معادلهٔ درجهٔدومی تشکیل‌دهید که ریشه‌هایش مکعب ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x-2=0$ باشد.

حل: ریشه‌های‌معادلهٔ‌مطلوب‌را y_1 و y_2 فرض‌می‌کنیم،

پس داریم:

$$\left|\begin{array}{l} y_1=x_1^3 \\ y_2=x_2^3 \end{array}\right.$$

ودر نتیجه داریم:

$$\begin{cases} y_1+y_2=x_1^3+x_2^3= \\ (x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2) \\ y_1y_2=x_1^3x_2^3=(x_1x_2)^3 \end{cases}$$

$$\left(\text{می‌دانیم}: \left|\begin{array}{l} x_1+x_2=3 \\ x_1x_2=-2 \end{array}\right. \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1+y_2=(3)^3-3(-2)(3) \\ \qquad =27+18=45 \Rightarrow \\ y_1y_2=(-2)^3=-8 \end{cases}$$

$$y^2-45y-8=0 \quad (\text{معادلهٔ مطلوب})$$

مثال ۱۴: معادلهٔ درجهٔدومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش قرینهٔ ریشه‌های معادلهٔ $x^2-5x+3=0$ باشد.

حل: اگر ریشه‌های معادلهٔ مطلوب‌را به y نمایش دهیم، دراین‌صورت داریم: $y=-x \Rightarrow x=-y$

و با جایگزین کردن درمعادلهٔ مفروض داریم:

$$(-y)^2-5(-y)+3=0 \Rightarrow$$
$$y^2+5y+3=0$$

۴-۳) معادلهٔ درجهٔدومی تشکیل‌دهید که هر ریشهٔ آن از k برابر هریك‌از ریشه‌های‌معادلهٔ(۲)، m واحدکمتر باشد.

حل: ریشهٔ‌معادلهٔ مطلوب‌را y فرض‌می‌کنیم بنابراین‌از شرایط مسئله داریم:

$$y=kx-m$$

از رابطهٔ‌اخیر x را برحسب y محاسبه‌می‌کنیم وسپس‌درمعادلهٔ (۲) قرار می‌دهیم، یعنی:

$$x=\frac{y+m}{k} \Rightarrow a\left(\frac{y+m}{k}\right)^2+$$
$$b\left(\frac{y+m}{k}\right)+c=0$$

$$\frac{a}{k^2}(y^2+2my+m^2)+\frac{b}{k}(y+m)+c=0$$

$$\Rightarrow ay^2+2amy+bky+am^2+bkm$$
$$+k^2c=0$$

بنابراین معادلهٔ مطلوب چنین است:

$$ay^2+(2am+bk)y+am^2+bkm+k^2c=0$$

مثال ۱۵: معادلهٔ درجهٔدومی تشکیل‌دهید که هر ریشهٔ‌آن از ۳ برابر هریك‌از ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-4x+1=0$ به اندازهٔ ۲ واحد بیشتر باشد.

حل: ریشهٔ معادلهٔ مطلوب را y فرض می‌کنیم بنابراین

با توجه به‌شرایط مسئله داریم:

$$y=3x+2$$

و در نتیجه داریم:

$$x=\frac{y-2}{3}\Rightarrow 2\left(\frac{y-2}{3}\right)^2-4\left(\frac{y-2}{3}\right)+1=0$$

$$\frac{2}{9}(y^2-4y+4)-\frac{4}{3}(y-2)+1=0 \Rightarrow$$

$$2y^2-8y+8-12y+24+9=0$$

پس از اختصار لازم معادلهٔ مطلوب چنین است:

$$2y^2-20y+41=0$$

۴) نتایجی از حالتهای خاص ضرایب a و b و c:

۴-۱) هرگاه در معادلهٔ (۲) داشته باشیم $a=0$ آنگاه یک ریشهٔ معادله به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

۴-۲) اگر $c=0$، یک ریشهٔ معادله صفر و ریشهٔ دیگر آن برابر $\frac{-b}{a}$ است زیرا داریم:

$$ax^2+bx=0$$

$$x(ax+b)=0 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x=0 \\ ax+b=0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{-b}{a} \end{array}\right.$$

۴-۳) اگر $b=0$، باشرط مختلف‌العلامت بودن a و c معادله دو ریشهٔ قرینه دارد زیرا:

$$b=0:\ ax^2+c=0 \Rightarrow x^2=-\frac{c}{a} \Rightarrow$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

۴-۴) اگر در معادلهٔ (۲) داشته باشیم:

$$a=b=c=0$$

آنگاه معادله بی‌شمار جواب دارد زیرا در این حالت معادله به اتحاد عددی تبدیل می‌شود. یعنی:

$$0\times x^2+0\times x+0=0 \Rightarrow 0=0$$

۴-۵) اگر $a+b+c=0$ آنگاه یک ریشهٔ معادله $x_1=1$ و ریشهٔ دیگر معادله $x_2=\frac{c}{a}$ است و برعکس. زیرا اگر درمعادلهٔ (۲) مقدار $x=1$ را قراردهیم خواهیم داشت:

$$a(1)^2+b(1)+c=0 \Rightarrow a+b+c=0\ ,$$

$$\begin{cases} x_1=1 \\ x_1x_2=\frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow 1\times x_2=\frac{c}{a} \Rightarrow x_2=\frac{c}{a}$$

۴-۶) اگر $a+c=b$ آنگاه یک ریشهٔ معادله $x_1=-1$ و ریشهٔ دیگر معادله $x_2=-\frac{c}{a}$ است و برعکس. زیرا اگر در معادلهٔ (۲) مقدار $x=-1$ را قرار دهیم خواهیم داشت:

$$a(-1)^2+b(-1)+c=0 \Rightarrow a-b+c=0$$

$$\Rightarrow a+c=b\ ,\ \begin{cases} x_1=-1 \\ x_1x_2=\frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow$$

$$(-1)x_2=\frac{c}{a} \Rightarrow x_2=\frac{-c}{a}$$

۴-۷) اگر درمعادلهٔ (۲) مقادیر a و c مختلف‌العلامت باشند یعنی $\frac{c}{a}<0$، معادله همواره دو ریشهٔ حقیقی مختلف‌العلامت‌دارد و نیازی به‌تشکیل Δ (مبین) نمی‌باشد. زیرا با این شرط همواره $\Delta>0$ است. همچنین باید توجه داشت‌که اگر $\frac{c}{a}>0$ باشد دلیلی برنداشتن ریشه‌نیست و Δ را باید تشکیل دهیم.

۴-۸) اگر در معادلهٔ (۲) داشته باشیم $a=c$ یعنی: $\frac{c}{a}=1$ ، معادله دو ریشهٔ معکوس دارد. زیرا در این حالت داریم:

$$x_1x_2=\frac{c}{a} \Longrightarrow \frac{c}{a}=1 \Longrightarrow x_1x_2=1 \Longrightarrow$$

$$x_2=\frac{1}{x_1} \text{ یا } x_1=\frac{1}{x_2}$$

۵) برای آنکه دو معادلهٔ

$ax^2+bx+c=0$ و $a'x^2+b'x+c'=0$

ریشهٔ مشترک داشته‌باشند باید داشته باشیم:

$$(ab'-a'b)(bc'-b'c)=(ac'-a'c)^2$$

برهان:

$$\begin{cases} ax^2+bx+c=0 \\ a'x^2+b'x+c=0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{matrix} -a' \\ a \end{matrix}\begin{cases} ax^2+bx+c=0 \\ a'x^2+b'x+c'=0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} -a'ax^2-a'bx-a'c=0 \\ aa'x^2+ab'x+ac'=0 \end{cases}$$

ازجمع‌دو رابطهٔ دستگاه‌نتیجه می‌شود:

$$(ab'-a'b)x=a'c-ac' \Longrightarrow$$

$$x=\frac{a'c-ac'}{ab'-a'b}$$

ازآنجاکه ریشهٔ‌اخیر در هردو معادله‌صادق‌است داریم:

$$a\left(\frac{a'c-ac'}{ab'-a'b}\right)^2+b\left(\frac{a'c-ac'}{ab'-a'b}\right)+c=0$$

$$a(a'c-ac')^2+b(a'c-ac')(ab'-a'b)$$

$$+c(ab'-a'b)^2=0$$

$$a(a'c-ac')^2+(ab'-a'b)[b(a'c-ac')$$
$$+c(ab'-a'b)]=0$$

$$a(a'c-ac')^2+(ab'-a'b)[ba'c-bac'$$
$$+cab'-ca'b]=0$$

$$a(a'c-ac')^2+a(ab'-a'b)(b'c-bc')=0$$

بنابراین با فرض $a\neq 0$ داریم:

$$(ac'-a'c)^2=(ab'-a'b)(bc'-b'c)$$

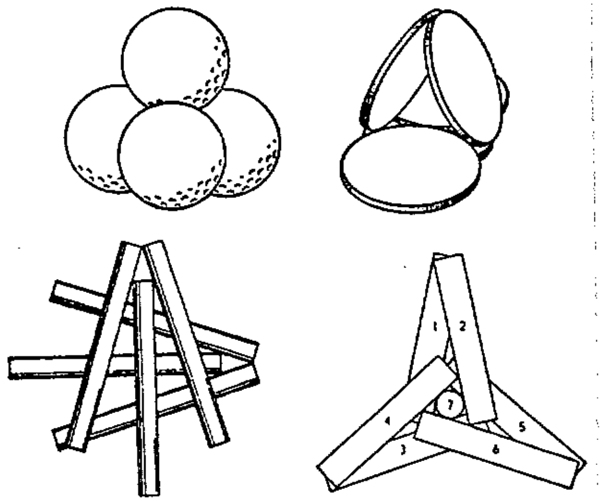
۱) پنج توپ‌گلف را چنان قراردهید که هر توپ به سه توپ دیگر تماس داشته‌باشد. ۲) پنج سکهٔ دو ریالی را چنان قراردهید که هر سکه به چهارسکهٔ دیگر برخوردکند. ۳) آیا ممکن است شش سیگار را چنان قراردهیم که هریك از آنها با پنج قطعهٔ دیگر برخوردکند؟ سیگارها را نباید خم کرد یا شکست. هفت سیگار را چطور؟

مارتین‌گاردنر

معماها و تفریحات ریاضی،

ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور

جواب



اسماعیل قصاب، رئیس کمیتهٔ مغازه‌داران خیابان، که شامل بقال، نانوا، و سیگارفروش نیز هست، می‌باشد. تمام آنها دورمیزی نشسته‌اند.

- اسماعیل سمت چپ اسمال نشسته است.
- اصغر سمت راست بقال نشسته است.
- اصلان که مقابل اسمال است نانوا نیست.
- اصغر چه دکانی دارد؟

جواب

باتخصیص اسماعیل درصندلی ته میز، چهار شخص مذکور می‌توانند تنها به این طریق بنشینند:

اصغر

اسمال اصلان

اسماعیل

درنتیجه، اسمال بقال است، و اصلان سیگار فروش، و اصغر نانوا.

ادب ریاضی

دیوفانت «Diophantus» (حدود ۲۵۰ ب.م) کتاب حساب «Arithmetica» خود را، که اولین کتاب شناخته‌شده راجع به جبر است، نوشت. این کتاب شامل اولین کاربرد سیستماتیک نماد ریاضی در ارائهٔ مجهولات معادلات و توانهای این مجهولات است. تقریباً چیزی در مورد زندگی دیوفانت، جز اینکه در حدود ۲۵۰ب.م در اسکندریه می‌زیسته، نمی‌دانیم. تنها منبع مربوط به جزئیات زندگی دیوفانت از مضمونی یافت‌شده در مجموعه‌ای موسوم به گلچین یونانی «anthology Greek» به دست آمده‌است: «دیوفانت یک ششم زندگی خود را در کودکی گذراند، یك‌دوازدهم آن را در نوجوانی، و یك‌هفتم آن را در جوانی. پنج‌سال بعد از ازدواجش پسرش که چهارسال پیش از پدر، در سنی برابر نصف سن او، مرد، متولدشد.»

خواننده از این نکته می‌تواند نتیجه بگیرد که دیوفانت تا سن ۸۴ سالگی در قیدحیات بوده‌است.

ازکتاب: نظریهٔ اعداد مقدماتی

ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور

منطق جدید و ریاضیات

غلامرضا یاسی‌پور

به خاطر اجتناب از عدم کفایتهای زبانهای طبیعی در اهداف تحلیل منطقی، لازم است که زبان طبیعی به نمادی دقیقتر ترجمه شود.

آلونزوچرچ[1]

ارزیابی استدلالات ارائه شده در زبان فارسی یا هر زبان طبیعی دیگر غالباً به علت طبیعت مبهم و دوپهلوی کلمات به‌کار رفته در آنها، ابهام ساختاری‌شان، اصطلاحات گمراه کننده‌ای که ممکن است دربرداشته باشند، شیوهٔ استعاری بالقوه گیج‌کننده‌شان، و آشفتگی حاصل از مقصود عاطفی‌شان، مشکل است. حتی هنگامی که این مشکلات برطرف شوند، مسألهٔ تشخیص درستی یا نادرستی استدلال همچنان باقی می‌ماند، برای اجتناب از این مشکلات برونی شایسته‌است که زبان علامتی مصنوعی[2] بری از نقایص فوقی، که بتوان در آن گزاره‌ها و استدلالات را علامتی کرد، طرح‌شود، و عهده‌دار این مهم موضوعی است که منطق علامتی[3] یا سمبلیک نامیده می‌شود.

جورج‌بول در آغاز فصل اول کتاب مشهورش به‌نام قوانین تفکر[4] چنین تقریر می‌کند که:

> مقصود از مقالهٔ زیر تحقیق در قوانین اساسی آن دسته از اعمال ذهن که استدلال به کمک آنها انجام می‌گیرد؛ نمایش آنها در زبان علامتی یك حساب، و بر این مبنا، تأسیس علم منطق و بنای روش آن؛ تنظیم این روش به عنوان مبنای روش عمومی‌ای در کاربرد اصول ریاضی احتمالات؛ و بالاخره، جمع بعضی از دلالات محتمل مربوط به طبیعت و ساخت ذهن بشری از عناصر گوناگون صدقی که طی این تحقیقات آشکار می‌شوند، است.

اما در این تحقیقات این که چه‌چیز اصل است و چه فرع خیلی روشن نیست و بناچار باید به قول پاتنم[5] که:

> متجسس در ریاضیات باید حقیقت ریاضیات را به عنوان فرضی قبلی یا پیشینه فرض قبول کند، نه این که دنبال توضیح آن برود.

یا به گفتهٔ فرگه که:

> در حساب سروکار ما با چیزهایی نیست که... با

خارج بیگانه باشند، بلکه با چیزهایی است که
مستقیماً با قوهٔ عقلی ما ارتباط دارند و برای آن
چنان روشن‌اند که گویی نزدیکترین بستهٔ آن‌اند.

عمل کنیم و در این مراحل، چنان که غالب ریاضیدانها نمی‌ایستند، توقف نکنیم. در این مورد راسل به این موضوع اعتقاد داشت که ریاضیات در واقع همان منطق است. و در واقع نشان‌داد که ریاضیات عبارت است از منطق و نظریهٔ مجموعه‌ها، یعنی می‌توان با صبر و حوصلهٔ کافی و تعاریفی به‌قدر کافی طولانی، هر یك از شاخه‌های ریاضیات را برحسب منطق و نظریهٔ مجموعه‌ها تعریف کرد و همهٔ اثباتها را در چهارچوب حساب احتمالات انجام‌داد.

در این صورت به منطق نمادی یاعلامتی که به قول اندرتون[6] مدلی ریاضی برای تفکر قیاسی است، یا حداقل در آغاز چنین بوده، می‌پردازیم، و به تعریف منطق رومی‌آوریم، و در تعریف به صدق آن می‌گوییم که: منطق دانش بررسی ساختهای نمونهٔ صادق است، و در تعریف به استنتاج آن مطرح می‌کنیم که: منطق دانش بررسی ساختمانهای استنتاجی درست است.

منطق جدید، همان‌طور که به تفصیل ملاحظه خواهیم‌کرد، در رابطه با آنچه که به نام بحران در اصول ریاضیات نامیده‌شده، و در آغاز قرن بیستم، حضور و سرعت یافت. هرگونه کوشش در طرح سیستماتیك ریاضیات (یا هرعلم دیگر) به مسألهٔ انتخاب مفاهیم اساسی(اولیه) و اصولی که کل طرح بر آن مبتنی است، منجر می‌شود. مسألهٔ انتخاب و توجیه انتخاب مفروضات اولیهٔ مزبور قاعدةً در خارج علم مربوطه قرارمی‌گیرد و به فلسفه و متدولوژی علم مربوط می‌شود.

بسیاری از اشخاص کوشیده‌اند ویژگی ریاضیات را، هم از لحاظ موضوع هم از لحاظ روش تعریف کنند. موضوع ریاضیات به‌طور مداوم افزایش می‌یابد و با نظامهای جدید غنی می‌شود، بنابراین، به‌جای این که به‌طور ساده به شمارش این نظام بپردازیم، باید طریقی در توصیف به کفایت محتویات نظریه‌های ریاضی بیابیم. در قرن نوزدهم، کوشش در مشخص کردن ریاضیات به عنوان علم کمیت انجام گرفت. اما امروزه باید بپذیریم که این تعریف بس محدودکننده است؛ و فی‌المثل، مفاهیم اساسی ریاضیات چون نظریهٔ گروهها یا توپولوژی را در برنمی‌گیرد. این موضوعات با ساختهای اساسی‌ای سروکار دارند که توجه ریاضیدانها به آنها، در خالص‌ترین صورت‌شان، تنها از پایان قرن گذشته به این طرف معطوف شده‌است. به این ترتیب مشخص کردن ریاضیات با موضوعش مرتب در حال تغییر است و ممکن است آنچه که امروزه موضوع آن در نظر گرفته می‌شود فردا متغیر شود. اما مطالب مربوط به روش ریاضیات در اساس همان است که دوهزار سال پیش بوده، و از ریاضیدان این انتظار می‌رود که قضایای علم خود را ثابت کند، و در این مورد رابطهٔ خوش تعریفی بین یك قضیهٔ ریاضی و قضایایی که در اثبات این قضیه به آنها رجوع می‌شود موجود است، و کار منطق بررسی این رابطه می‌باشد.

اکنون با اشاره به این که منطق را علم بررسی استدلال خوب و بد نیز دانسته‌اند، به آن می‌پردازیم.

مورد استعمال عبارت «منطق» طی قرون متمادی به‌گونهٔ وسیعی از نویسنده‌ای به نویسنده‌ای تغییر کرده است. اما چنین به‌نظر می‌رسد که موارد استعمال گوناگون مذکور دارای این قسمت مشترك باشند که: منطقی که به صورت متداول توصیف‌شده، به طور مبهم، علم استنتاج لازم است، و تمایل فزاینده‌ای موجود است که عبارت «منطق» را به این حوزه محدود کنند.

ویژگی به گونه‌ای کمتر مبهم این حوزه، به این ترتیب است که: عبارات اساسی شامل «اگر»، «در این صورت»، «و»، «یا»، «نه»، «جزاینکه»، «بعضی»، «همه»، «هیچ»، «هر»، «آن» و غیره، که سخن را با آنها آغاز می‌کنیم، را می‌توان منطقی[7] نامید. عبارات فوق در گزاره‌های مربوط به هر موضوعی ظاهر می‌شوند، و نمونه‌ای که طبق آن سایر اجزاء خاصتر یك گزاره، طبق این عبارات اساسی به یکدیگر مربوط می‌شوند را می‌توان ساخت منطقی[8] آن گزاره‌ها خواند، به عنوان مثال، گزاره‌های:

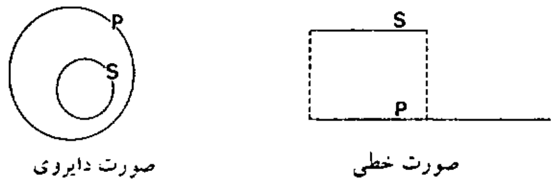
۱ ـ هر میکربی حیوان یا سبزی است،
۲ ـ هر ایرانی‌ای شیعه یا سنـی است،

دارای ساخت منطقی یکسانند. در این صورت منطق حمل ساخت منطقی برصدق و کذب را بررسی می‌کند.

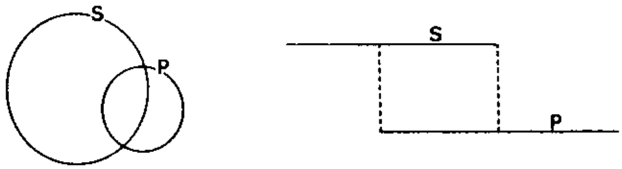
معمولاً ظهور منطق جدید را با کارهای جورج‌بول[9]

(۱۸۱۵-۱۸۶۴) در جبر منطق [10] درنظر می‌گیرند، ولی ما تاریخ آن را یک قرن زودتر و با فیلسوف و ریاضیدان آلمانی، گوتفریدویلهلم‌لایب‌نیتز [11] (۱۶۴۶-۱۷۱۶) آغاز می‌کنیم.

لایب‌نیتز احتمالاً نخستین ریاضیدانی بود که مفهوم منطق را مورد توجه قرارداد. شهرت اصلی این ریاضیدان برجسته برای کارهای خلاقش در حساب جامع و فاضل است، گرچه طراح یک زبان علامتی بین‌المللی نیز بوده‌است. این دانشمند در کوششهایی که برای علامتی‌کردن استدلالات منطقی در عبارات جبری به عمل‌آورد بر بول مقدم بود. اما آثارش در این مورد از آنجاکه تا سال ۱۹۰۳ به چاپ نرسید، کم‌اثر یا بی‌اثر بودند. لایب‌نیتز به نمایش هندسی قیاسات نیز توجه داشت و اولین کسی بود که آنچه راکه امروز به عنوان نمودارهای ون می‌شناسیم (۲۰۰ سال قبل از ون) به‌کاربرد، و همراه با نمودارهای (مجموعه‌ای) دایروی از نمودارهای خطی نیز، از آنجاکه آنها را برای به‌کارگرفتن آسانتر می‌پنداشت، استفاده کرد. دو مثال زیر مفهوم کلی این موضوع را به دست می‌دهند.



تمام S ها P اند



بعضی S ها P اند

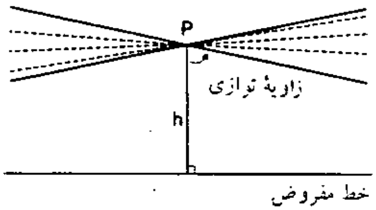
در این مورد لئونارد اولر [12] (۱۷۰۷-۱۷۸۳) سوئیسی و جان‌ون [13] (۱۸۳۴-۱۹۲۳) و بالاخره چارلز داج‌سون [14] (۱۸۳۲-۱۸۹۸) که دوایر ون را در مستطیل (یا مربع)ی نمایش دهندهٔ عالم مقال* (مجموعهٔ جهانی) قرار، و به این ترتیب نمودار ون را به طریقی که امروزه آن را به کارمی‌بریم به دستمان دادند، سهمی دارند.

اصل توازی [15] اقلیدس را می‌شناسیم. طی قرون متمادی کوششهای بسیاری برای اثبات این اصل (یا اصول معادل آن) با استفاده از تعریفات، اصول موضوعه، و اصول متعارفی، گرچه بدون موفقیت، به عمل آمد. با این همه اصل مزبور همواره به عنوان حقیقتی بدیهی [16] درنظر گرفته‌می‌شد، تا اینکه نیکلای لباچفسکی [17] (۱۷۹۳-۱۸۵۶)، ریاضیدان روسی، با تغییر این اصل، هندسه‌ای غیراقلیدسی کشف و جزئیات آن را منتشر کرد.

در هندسهٔ لباچفسکی به جای توازی اقلیدسی اصل زیر قرار دارد:

> از یک نقطه خارج یک خط معلوم می‌توان بی‌نهایت خط موازی با آن خط معلوم رسم کرد.

در این مورد نمودار زیر را درنظر می‌گیریم:



(از تفسیر اقلیدسی این نمودار خودداری کنید.) در این شکل خطوط گذرنده از P به دو طبقه تقسیم شده‌اند، طبقهٔ اول آنهاکه خط معلوم را قطع می‌کنند، و طبقهٔ دوم آنهاکه آن را قطع نمی‌کنند، و دو خطی که مرز بین طبقات را تشکیل می‌دهند، با عمود مرسوم از P به خط، زاویه‌ای حاده، که معروف به زاویهٔ توازی است، و مقدار واقعی آن به ارتفاع h نقطهٔ Pی بالای خط معلوم بستگی دارد، می‌سازند. این زاویه هنگامی که h زیاد می‌شود به ۰، و زمانی که کم می‌شود به ۹۰° میل می‌کند.

خاصیت جالب هندسهٔ لباچفسکی در این است که این هندسه مقیاس مطلق فاصله، یعنی مقیاسی که به انتخاب واحد (مثل متر و

* اصطلاح را از این بیت حافظ گرفته‌ایم:
من که ملول گشتمی ازنفس فرشتگان — قال و مقال عالمی می‌کشم از برای تو

یارد) بستگی ندارد، را به دست می‌دهد. و این بدین علت است که فاصلهٔ (ارتفاع) h به تمامی برحسب زاویه، یک کمیت بدون بعد، اندازه‌گیری می‌شود. نتیجهٔ دیگر اصل لباچفسکی این است که مجموع زوایای داخلی هر مثلث از دو قائمه کمتر است، اما همچنان که سطح مثلث به صفر میل می‌کند به مقدار اقلیدسی مایل می‌شود. از آنجا که در این هندسه، فاصله تنها به زوایا بستگی دارد، مثلثهای متساوی‌الزوایا لزوماً دارای یک سطح‌اند و قضایای تشابه اقلیدسی بی‌معنی می‌شوند.

مثال دیگری از هندسهٔ نا اقلیدسی دیگر، توسط برنهارد ـ ریمان[۱۸] (۱۸۲۶-۱۸۶۶) داده‌شد. این ریاضیدان طی یک دوره سخنرانی معروف در دانشگاه گوتینگن[۱۹] در سال ۱۸۴۵ هندسه‌ای را مطرح کرد که در آن از یک نقطهٔ خارج یک خط معلوم هیچ خطی را نمی‌توان موازی آن خط رسم کرد. در هندسهٔ ریمان مجموع زوایای داخلی هر مثلث بیش از دو قائمه است، اما همچنان که مساحت مثلث به صفر میل می‌کند، به مقدار اقلیدسی مایل می‌شود.

هر دو هندسهٔ غیر اقلیدسی فوق، دستگاههایی کاملاً سازگارند، گرچه شهودمان بر این است که، به این مفهوم، که چنین به‌نظر می‌رسد که دنیای فیزیکی اطرافمان برمقیاس کوچکی که می‌توانیم آن را اندازه بگیریم اقلیدسی است، راست نیستند. اما شهودها به‌هیچ‌وجه همیشه راهنمایی قابل اعتماد نیستند. و در این مورد باید قبل از اینکه هندسه‌های دیگر را کنار بگذاریم احتیاط کرده به خاطر بیاوریم که هندسهٔ اقلیدسی نیز بر تعاریف اشیایی بناشده که در دنیای فیزیکی مانندی ندارند، و به عنوان نمونه، نقطه به صورت «چیزی که جزء ندارد» تعریف شده‌است. نیز باید این را به خاطر داشته‌باشیم که تئوری نسبیت[۲۰] اینشتین که یکی از صورتهای تعمیم یافتهٔ هندسهٔ ریمانی است در فضای فیزیکی راست است.

اکنون به جورج بول، که پیش از این نامش را ذکر کردیم، و کارش، راجع به جبر منطق، که با آن نام آگوستوس دومورگان[۲۱] (۱۸۰۶-۱۸۷۱)، نیز مربوط است و هر دو آنها کارشان را در سال ۱۸۴۷ انتشار دادند، بازمی‌گردیم.

بول در ابتدا با توسعهٔ جبرمنطق سروکار داشت، و با به‌کار بردن صورتی از جبر، که با جبرمعمولی تفاوت داشت، دریافت که امکان دارد که نظریهٔ کامل قیاس را استنتاج کند و در حقیقت توانست خطاهای نظریهٔ ارسطو را، که به مدت ۲۰۰۰ سال کشف نشده باقی‌مانده بود، مورد بحث قراردهد. اما آنچه که امروزه به نام جبربول[۲۲] معروف است، در واقع، توسعهٔ بعدی جبری است که توسط بول مطرح شده‌است. توسعهٔ مذکور کار ارنست شرودر[۲۳] (۱۸۴۱ ـ ۱۹۰۲)، منطقی بود، که کارش را با دستگاه بول آغاز کرد، اما بعد آن را برای مقابله با مشکلات خاصی که در تعبیر، به خصوص تعبیر جمع منطقی[۲۴] رخ می‌داد، تعدیل کرد.

بول به این مطلب توجه‌کرد که ارسطو در کار خود به طبقات[۲۵] اشیاء نظر داشته‌است، زیرا گزارهٔ

تمام انسانها میرا هستند.

بدین معنی است که طبقهٔ تمام انسانها زیر طبقهٔ[۲۶] تمام موجودات میراست. به این ترتیب، زیر طبقهٔ اعضای طبقهٔ x، که اعضای طبقهٔ y نیز هستند، را با xy، ضرب منطقی[۲۷]، نمایش داد، و طبقهٔ تمام اشیایی که به طبقهٔ x تعلق نداشتند را با $1-x$ نشان داد. و طبقهٔ تمام اشیای متعلق به طبقهٔ x یا طبقهٔ y، با فرض اینکه x و y عضو مشترک ندارند، را با $x+y$، جمع منطقی، نمایش داد. برای نمایش‌دادن اینکه طبقهٔ x تهی است (یعنی، عضو ندارد)، $x=0$، و برای نمایش دادن اینکه طبقات x و y یکسان‌اند، $x=y$ نوشت. به این ترتیب اثبات روابط زیرکاری نسبتاً آسان است:

$$xy=yx$$
$$x+y=y+x$$
$$(xy)z=x(yz)$$
$$(x+y)+z=x+(y+z)$$
$$x(y+z)=xy+xz$$

تمام این روابط با روابط آشنا در جبر معمولی متناظرند، اما برخلاف جبر معمولی، این رابطه نیز نتیجه می‌شود که

$$xx=x$$
$$(x+y)(x+z)=x+yz$$

اما در مورد جمع منطقی مزبور، زمانی که x و y اعضای مشترکی داشتند، مشکلی بروز کرد. در این مورد بول طی مسأله‌ای استفاده از

$$x+y$$

را مجاز ساخت، اما، از آنجا که این موضوع، در چنین حالاتی، «صورت نامعبری[۲۸]» بود، لازم دانست که مطلب مزبور در پاسخ نهایی خود به‌طور مناسبی باز-حل شود. بنابراین، در دستگاه بول، عبارت

$$x+x=x$$

از آنجا که سمت راست آن از لحاظ او نامعبر است، یافت نمی‌شود.

اکنون می‌توانیم مثالی چند از موارد استعمال دستگاه علامتی بول به‌دست دهیم. به عنوان نمونه، اگر

x طبقهٔ اشیای سخت باشد،

y طبقهٔ اشیای کش‌دار باشد،

و

z طبقهٔ اشیای فلزی باشد،

در این صورت

xz طبقهٔ اشیای سخت فلزی را نشان می‌دهد،

و

$z(1-y)$ طبقهٔ اشیای ناکش‌دار فلزی را نمایش می‌دهد.

باز به عنوان مثال، چهار قضیهٔ اساسی ارسطو را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

تمام S ها P است	با	$s(1-p)=0$
هیچ S ی P نیست	با	$sp=0$
بعضی S ها P اند	با	$sp\neq 0$
بعضی S ها P نیستند	با	$s(1-p)\neq 0$

(حروف کوچک s و p به عنوان علایم متناظر با طبقات S، P در منطق ارسطو به کار رفته‌اند.)

در منطق ارسطو، قیاس:

اگر هر M ی P باشد
و هر M ی S باشد
در این صورت بعضی S ها P اند.

درست درنظر گرفته می‌شود، اما، چون دو مقدمهٔ آن را در دستگاه علامتی بول به ترتیب به صورت

$$m(1-p)=0$$

و

$$m(1-s)=0$$

قراردهیم، آشکار می‌شود که لزوماً چیزی در مورد S و P نتیجه نمی‌شود، زیرا معادلات مزبور به ازای $m=0$، و به عبارت دیگر چون M طبقه‌ای تهی باشد، برقرارند. به همین ترتیب، قیاس ارسطویی:

اگر هیچ M ی P نباشد،
و تمام M ها S باشد،
در این صورت، بعضی S ها P نیستند.

که آن نیز به صورت درست درنظر گرفته می‌شد، به طور مساوی با تهی‌بودن M برقرار می‌شود. اما، درستی صورت ضعیف‌تر اولین این دو قیاس، یعنی

اگر بعضی M ها P باشند،
و تمام M ها S باشند،
در این صورت، بعضی S ها P اند.

توسط بول نشان‌داده‌شده، زیرا از

$$mp \neq ۰$$
$$m(۱-s) = ۰$$

می‌توان نتیجه گرفت که

$$sp \neq ۰$$

بول توجه خود را به طبقات و نظریهٔ قیاس معطوف کرد، اما معاصر او دومورگان به طور وسیعی با طبقات و نسب[۲۹] بین طبقات سروکار داشت. در واقع بسیاری از نتایجی که این دو به دست آوردند یکسان بودند. این نتایج، با ادراکاتی که امروزه از این مسأله داریم به هیچ‌وجه قابل توجه نیستند، گرچه چنین به‌نظر می‌رسد که در روزگار خودشان نیز وضع بدین منوال بوده‌است.

نام دومورگان امروزه با قوانین تتمیم[۳۰]

$$\overline{x \cap y} = \overline{x} \cup \overline{y}$$
$$\overline{x \cup y} = \overline{x} \cap \overline{y}$$

همراه است، اما این قوانین و بسیاری از روابط دیگر بین طبقات در دوران مدرسی*[۳۱] مشخص بوده‌اند و صرفاً توسط دومورگان برحسب جبر طبقات[۳۲] صوری بازگویی شده‌اند.

همانطور که ملاحظه کردیم بول و دومورگان در اصل به بیان قوانین قبلاً مشخص‌شدهٔ استدلال و طبقه‌بندی، برحسب جبر علامتی می‌پرداختند، و مؤسس واقعی آنچه که امروزه به منطق ریاضی معروف است گوتلب فرگه[۳۳] (۱۸۴۸-۱۹۲۵) است. و نه تنها در حساب گزاره‌ها[۳۴]، بلکه برای کاربرد کامل سورهای عمومی و وجودی[۳۵] در ریاضیات، و تحلیل منطقی روش مهم اثبات با استقرای ریاضی[۳۶] به او مدیونیم. مقصود اصلی فرگه بنای حساب، تنها بر منطق بود؛ یعنی این هدف که درحساب، گزاره‌هایی در مورد حقایق تجربی موجود نباشد، و در این راه در واقع از رؤیای زبان علامتی جهانی[۳۷] لایب نیتز پیروی می‌کرد. و روش برخوردش، چون روش اقلیدس، آکسیوماتیک بود، و بر تمایز بین مقدمات[۳۸] (که می‌توانند به صورت علامتی نمایش داده‌شوند) و قواعد استنتاج[۳۹] (که در صورتی که شخص محدود به علایم مقدمات مزبور باشد نمی‌توانند به صورت علامتی نوشته‌شوند) تأکید می‌کرد.

فرگه، برخلاف بول، نتوانست کار علامتی کردن خود را بر مبنای علایم جبری بگذارد زیرا سعی در استفاده از منطق در بنانهادن پایه‌های حساب داشت، و در نتیجه مجبور بود که از ظهور مقدماتی آنچه که جهد در استخراجش داشت خودداری کند. سهم بزرگ او در دقت استثنایی روش علمی‌اش در کوشش در بنانهادن پایه‌های ریاضیات، قراردارد.

به مفهومی بس حقیقی، بول، دومورگان و شرودر در پایان مسیر درازی که مستقیماً به ارسطو بازمی‌گردد، ایستاده‌اند، در حالی که فرگه در آغاز راه تازه‌ای در منطق که همچنان ادامه‌دارد، و خطوط مهیجی در تحقیق را به دست می‌دهد، قرارگرفته‌است.

در این مرحله، لازم می‌نماید که به عقب برگردیم و دو بحران ریاضیات را، که یکی از آنها هنوز هم به مقدار وسیعی لاینحل مانده‌است، مورد بررسی قراردهیم.

در قرون هفدهم و هجدهم، ریاضیدانها تحت تأثیر قدرت حساب دیفرانسیل و انتگرال، بسیاری از مسائلی راکه تا آن زمان بسیار مشکل بودند، حل کردند. در انجام این کار، آنان هیچ‌گاه در مورد صحت روشهاشان نگران نبودند، و بعضی از کارهاشان را می‌توان، حداقل، به عنوان بی‌قید توصیف کرد. فی‌المثل، اولر در آثارش سری متباعدی چون

$$۱-۱+۱-۱+۱-\ldots$$

که جمع آن را با بیان آن به صورت

$$۱-x+x^۲-x^۳+\ldots$$

و قراردادن $x=۱$ به دست‌آورد، به کارگرفت، و با دریافتن اینکه این سری (که تصاعدی هندسی است) دارای مجموع حدی

$$\frac{۱}{۱+x}$$

به ازای $x<۱$، است، نتیجه گرفت که مجموع سری اصلی $\frac{۱}{۲}$ است. روش اولر، اما، لزوماً جوابهای سازگار به دست نمی‌دهد. به عنوان

* قرون وسطی

مثال، مورد زیر را درنظر می‌گیریم

$$\frac{1+x}{1+x+x^2} = \frac{1-x^2}{1-x^3}$$

$$= (1-x^2)(1+x^3+x^6+\ldots) =$$
$$= 1-x^2+x^3-x^5+x^6-\ldots$$

که چون $x=1$ را در آن قراردهیم باردیگر سری
$1-1+1-1+1-\ldots$
را به دست می‌آوریم، اما این‌بار حیلهٔ اولر

$$\frac{1+1}{1+1+1} = \frac{2}{3}$$

را به عنوان جمع حدی آن به دست‌می‌دهد.

بحران فوق که از کاربرد بی‌احتیاط روشهای حدی سرچشمه می‌گیرد توسط آگوستین‌لویی‌کوشی[40]، (۱۷۸۹-۱۸۵۷) که نشان داد که چگونه می‌توان کاربرد به احتیاط نظریهٔ حدود را به جای روشهای بی‌قید اولر قرارداد، برطرف شد. از پس این بحران، مسألهٔ بسیار مشکل‌تر دیگری به وجود آمد.

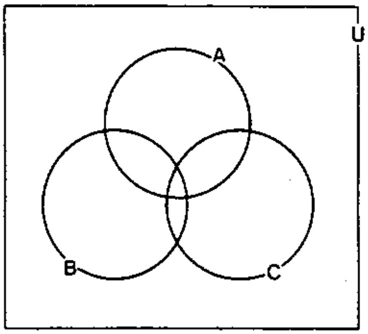
در نیمهٔ دوم قرن نوزدهم نشان‌داده‌شد که بیشتر ریاضیاتی که تا آن زمان شناخته‌شده‌بود، می‌تواند به دستگاهی بناشده از حساب اعداد صحیح مثبت تحویل شود. اما طنزدر اینجاست‌که‌این‌موضوع نه‌تنهاصحت و ایقان ریاضیات را بنا نکرد بلکه چاهی، که برگرد آن بسیاری از مطالب ریاضیات بناشده‌بود، را نیز آشکارکرد. در گسترش دستگاههای پیچیده‌تر از حساب مقدماتی، به‌نظریهٔ مجموعه‌هایی نیاز است، و نه صرفاً نظریهٔ مجموعه‌های اعداد صحیح، بلکه نظریه‌ای که مفهوم مجموعهٔ مجموعه‌ها، مجموعهٔ مجموعه‌های مجموعه‌ها و غیره را دربرگیرد.

خالق نظریهٔ مجموعه‌ها[41] جورج‌کانتور[42]، (۱۸۴۵-۱۹۱۸) بود. او چنین مطرح کرد که کلمهٔ نامتناهی[43] در ریاضیات دارای دو معنی است. اول، می‌تواند به جای مقداری که ماورای هرحد مشخصی افزایش می‌یابد قرارگیرد، و کانتور آن راکه توسط علامت اکنون آشنای ∞ نمایش داده‌شده نامتناهی ناتمام[44] نام‌نهاد. معنی دوم را می‌توان با درنظرگرفتن یک خط متناهی[45] به عنوان مجموعهٔ نامتناهی‌ای از نقاط توضیح‌داد.

به علت اینکه خط مورد بحث متناهی است، دریافتی وجوددارد که در آن می‌توانیم از این مجموعه به عنوان نامتناهی تمام[46] یادکنیم* (خط مزبور می‌تواند در تمامیت خود با وجود اینکه شامل بی‌نهایت نقطه است رسم‌شود، اما یک مقدار افزایش یابنده نمی‌تواند با هیچ شکل کاملی نمایش داده‌شود).

تعریف کانتور از مجموعه به عنوان «دسته‌ای اشیای معین و جدا از هم»، تا وقتی که تنها به بررسی تعداد متناهی‌ای از اشیا می‌پردازیم به اشکالی برخورد نمی‌کند. اما مشکل در ارتباط با مجموعه‌های نامتناهی، و، به خصوص، با مجموعهٔ جمیع مجموعه‌ها[47] پدیدار می‌شود.

کانتور دو مجموعه را معادل یا هم‌ارز[48] نامید در صورتی‌که بتوانند در تناظری یک به یک[49] قرار گیرند؛ به این ترتیب مجموعه‌های {a, b, c, d, e} و {۱,۲,۳,۴,۵} معادل‌اند، زیرا



* این بحث یادآور این مطلب از گلشن راز شیخ محمود شبستری است که در پاسخ شخصی که از او سؤال می‌کند که:

مسافر چون بود رهرو کدام است — که را گویم که او مرد تمام است، می‌گوید:

بود مرد تمام آن کز تمامی — کند با خواجگی کار غلامی

فی‌المثل، تناظر:

a ↔ ۱
b ↔ ۲
c ↔ ۳
d ↔ ۴
e ↔ ۵

را داریم. واضح است که مجموعه‌های معادل باید تعداد عضوهای یکسان [۵۰] داشته‌باشند، و تا وقتی که کار خود را محدود به مجموعه‌های متناهی کرده‌ایم پارادوکسی حاصل نمی‌شود. اکنون مجموعهٔ اعداد صحیح زوج مثبت، زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ جمیع اعداد صحیح مثبت، را درنظر می‌گیریم. این مجموعه را می‌توان در تناظر یك‌به‌یک با مجموعهٔ جمیع اعداد صحیح مثبت، فی‌المثل:

۲ ↔ ۱
۴ ↔ ۲
۶ ↔ ۳
۸ ↔ ۴

و در حالت کلی،

۲n↔n

قرارداد. به این ترتیب درست به اندازهٔ اعداد صحیح زوج مثبت عدد صحیح مثبت موجود است. مثالهای بسیاری از چنین مجموعه‌هایی که تعداد اعضایی برابر تعداد اعضای زیرمجموعهٔ واقعی‌ای از خود دارند موجودند، اما در هر یک از چنین حالاتی تعداد اعضا نامتناهی است.

در این صورت بر سر اصل متعارف اقلیدس:

«کل چیزی بزرگتر از جزء آن چیز است»

چه می‌آید؟ این اصل به‌طور واضح در مورد مجموعه‌های نامتناهی برقرار نیست. در واقع، می‌توانیم، مجموعهٔ متناهی [۵۱] را به عنوان مجموعه‌ای که نمی‌تواند با زیرمجموعهٔ واقعی خود معادل باشد، و مجموعهٔ نامتناهی [۵۲] را به صورت مجموعه‌ای که می‌تواند، تعریف کنیم. با این همه نباید تصور کنیم که با نظریهٔ مجموعه‌های کانتور، جمیع مسائل و پارادوکسهای مطرح‌شده حل شده‌اند.

برای مشخص‌کردن اینکه چنین نیست، به ذکر تنها یکی از مشکلات نظریهٔ کانتور می‌پردازیم.

اگر مجموعه‌هایی راکه شامل خودشان نیستند نرمال [۵۳]، و آنهایی راکه شامل خودشان هستند (چون مجموعهٔ جمیع مجموعه‌ها) آنرمال [۵۴] بنامیم، در این صورت می‌توانیم این مسأله راکه آیا مجموعهٔ جمیع مجموعه‌های نرمال، نرمال است یا آنرمال، مطرح کنیم. فرض می‌کنیم نرمال باشد. در این صورت بنابه تعریف شامل خودش نیست. اما به عنوان مجموعهٔ جمیع مجموعه‌های نرمال، شامل خودش است. اکنون فرض می‌کنیم آنرمال است. در این صورت شامل خودش هست، و بنابراین باید نرمال باشد. به این ترتیب در هر یک از دو حالت به تناقض می‌رسیم. (این پارادوکس خاص به نام برتراندراسل [۵۵] (۱۸۷۲ ـ ۱۹۷۰)، فیلسوف انگلیسی، که آن راکشف کرد، معروف است.) صورتهای معروف بسیاری از این پارادوکس در دست است، و یکی از آنها صورت زیر می‌باشد:

> در دهکده‌ای، آرایشگر دهکده صورت کسانی و تنها کسانی راکه خودشان را اصلاح نمی‌کنند اصلاح می‌کند. آیا بنابراین، آرایشگر مزبور صورت خودش را اصلاح می‌کند؟

فرض می‌کنیم که آرایشگر خودش صورت خود را اصلاح کند. در این صورت نتیجه‌می‌شود که چنین نمی‌کند، زیرا تنها کسانی را اصلاح می‌کند که خودشان صورت خود را اصلاح نمی‌کنند. اکنون فرض می‌کنیم صورت خود را اصلاح نمی‌کند. در این صورت، صورت خود را اصلاح می‌کند. زیرا او تمام کسانی راکه صورت خود را اصلاح نمی‌کنند اصلاح می‌کند: می‌توان به‌طور ساده از پارادوکس عامه‌پسند راسل باگرفتن این نتیجه که نتیجهٔ مزبور ثابت می‌کند که اصول موضوعه‌مان دروغ‌اند، یعنی، چنین آرایشگری نمی‌تواند وجود داشته‌باشد، خلاص شویم. اما، مجموعه‌های نرمال و آنرمال وجوددارند، بنابراین مسیر برخورد با پارادوکس راسل روشن نیست، گرچه باید یا اشتباهی در استدلال یا سستی‌ای در تعاریف آن موجود باشد.

کار فرگه، که آن را به اختصار مورد بحث قراردادیم، شدیداً بر

راسل که به اتفاق آلفردنورث وایتهد[۵۶] (۱۸۶۱-۱۹۴۷) کتاب سه‌جلدی اصول ریاضیات[۵۷] را تهیه کرد، اثر گذاشت. راسل و وایتهد هوشیارانه از اصول کلی فرگه تبعیت کردند اما تغییراتی را در علامت‌نویسی و اصطلاحات او به وجودآوردند. در اینجا به بحث در تغییرات مزبور نمی‌پردازیم؛ و به طریقی که آنها برای اجتناب از مشکل پارادوکس راسل مطابق آن مطرح شدند، توجه می‌کنیم.

کار را با به دست‌دادن تعریفی از عدد ۱، که، در واقع، تعبیری از آنچه راسل و وایتهد در نماد جدید:

$$۱=\{X: \sim(X=\phi) \text{ و } y\in X\wedge z\in X\Rightarrow y=z\}$$

بیان کرده‌اند، است، آغاز می‌کنیم. این نماد را به صورت زیر می‌خوانیم:

«عدد یک مجموعهٔ اشیای X و چنان است که هیچ Xی تهی نیست، و چنان که اگر y و z هر دو به یك X متعلق باشند، در این صورت y و z یکی باشند.»

دراین مورد به خصوص توجه داشته‌باشید که هر X باید خود یک مجموعه‌باشد (زیرا چیزی در مورد اعضای X، نیز اینکه هیچ Xی تهی نیست گفته‌ایم)، و در نتیجه ۱ به صورت مجموعهٔ مجموعه‌ها تعریف شده‌است. در واقع، ۱ به‌طور ساده به صورت مجموعهٔ جمیع مجموعه‌های دارای یک عضو منفرد تعریف شده‌است. ممکن است تعریف فوق در نگاه اول تعریفی به گونه‌ای پیچیده به‌نظر برسد، اما در واقع چنین نیست، چه با روشی که در زندگی روزمره‌مان، طبق آن، با اعداد آشنا شده‌ایم، به خوبی موافقت دارد. تهیهٔ چنین تعریفی دستاوردی بزرگ بود، زیرا قبلاً تصور می‌رفت که اعداد صحیح و مثبت، چیزهایی که دیگر نمی‌توانند مورد تحلیل قرارگیرند، هستند. لئوپلدکرونکر[۵۸] (۱۸۲۳-۱۸۹۱) این جملهٔ معروف را خاطرنشان کرده‌بود که:

خداوند اعداد صحیح را آفرید، مابقی اثر انسان است*.

اما حتی تعریف فوق نیز خالی از اشکال نیست، زیرا برحسب نظریهٔ مجموعه‌ها اداشده، اما این نظریه نمی‌تواند نظریهٔ مجموعه‌های کانتور باشد زیرا مورد اخیر شامل همان پارادوکسی است که تعریف مورد بحث برای اجتناب از آن طرح شده‌است. وایتهد و راسل به این تشخیص رسیدند که علت اصلی مشکل مورد بحث در مجاز شمردن تعلق هرچیز به خودش قراردارد، و لذا نظریهٔ انواع[۵۹] را مطرح کردند. به این ترتیب گفته‌می‌شود که:

افراد[۱۵] از نوع ۰ اند،
مجموعهٔ افراد از نوع ۱ اند،
مجموعه اشیای نوع ۱ از نوع ۲ اند، و غیره.

عباراتی چون

$$y\in X$$

تنها اگر X از نوعی دقیقاً یکی بیشتر از y باشد، مجازند. این موضوع از مشکلات پارادوکس راسل جلو می‌گیرد، اما اینکه در مورد آن مشکلات دیگری ظهور می‌کنند یا خیر آشکار نیست.

با بازگشت به تعریف عدد ۱ به عنوان مجموعهٔ مجموعه‌ها، و پذیرفتن نظریهٔ انواع، درمی‌یابیم که مسألهٔ جدی‌ای داریم: y ، z باید از یک نوع باشند، و بنابراین X باید از نوع بالاتری باشد. به‌طور واضح ، ۱ به عنوان مجموعهٔ Xها باز هم باید از نوع یکی بالاتری باشد. مطابق با انتخاب‌مان در مورد yها و zها می‌توانیم اعداد از نوع ۲، ۳، ۴، و غیره را انتخاب کنیم، اما این به‌هیچ‌وجه آنچه که مقصودمان بود نیست. اینکه بکوشیم که ۱ از نوع (مثلاً) ۲ را به ۱ از نوع ۳ بیفزاییم چه معنی دارد؟ مقصودمان از ابتدا تعریف یک عدد ۱ منحصربه‌فرد بود.

* Jahresberichte der Deutschen Mathematiker Vereinigung, Bd.2, page 19.

وایتهد و راسل تصمیم گرفتند بامعرفی آنچه که آن را آکسیوم تحویل‌پذیری[۶۱] نامیدند، خود را از این مخمصه خلاص کنند. این آکسیوم (به‌طور تقریبی) به این معنی است که اگر شیء ریاضی‌ای از نوع معینی را تعریف کردیم، می‌توانیم وجود اشیای از هر نوع دیگر متناظر با آن را بینگاریم. مقصود کلی موضوع اخیر را می‌توانیم به صورت زیر درنظر بگیریم:

انواع اگرچه گاهی اهمیت پیدا می‌کنند،
می‌توان اغلب اوقات از آنها چشم پوشید.

به‌طور وضوح، یک چنین فرضی امکان وقوع ناسازگاری را بار دیگر به دست می‌دهد. ظاهراً کوشش در بنانهادن ریاضیات براساس منطق غیرقابل لرزانی، بادوام نیست. لزوم آکسیومی چون آکسیوم تحویل‌پذیری عامل مهمی در سرخوردگی ریاضیدانها از دستگاه وایتهد - راسل شد.

شکست جهد فوق در استخراج ریاضیات از منطق یکی از معضلات مهم ریاضی قرن بیستم را آشکار می‌کند؛ اما در این مورد کوششهای دیگری نیز برای روشن‌کردن مسائل جدی رخ دهنده در اساس ریاضیات انجام‌گرفته‌بود.

برخوردی کاملاً متفاوت به این مسأله از ریاضیدان هلندی ال.ای.جی.بروئر[۶۲] (۱۸۸۱-۱۹۶۸) بود. بروئر پیشتاز آنچه که به مکتب شهودگرای[۶۳] ریاضیدانها معروف شده، بود. شاید نام مزبور اندکی بداقبال باشد، زیرا چنین به‌نظر می‌رسد که مستلزم این باشد که در جریان اثباتهای ریاضی توسلی به شهود صورت می‌گیرد. اما در واقع، اثباتهای شهودگرایان حداقل به اندازهٔ اثباتهای ریاضیدانهای دیگر دقیق‌اند؛ و اغلب دقت منطقی بیشتری را می‌طلبند. نام مزبور از این حقیقت مشتق‌شده که شهودگرایان هرگونه کوشش در بنانهادن حساب بر دستگاه اساسی‌تری را مردود می‌شمارند، و اعداد صحیح و مثبت را به عنوان حقیقتی شهودی که به صورت مبنای مطمئنی که بناکردن بر آن انجام می‌گیرد، به کار می‌رود، درنظر می‌گیرند. در دفاع از این نظرگاه حرف بسیاری برای گفتن موجوداست.

بروئر تصور وجود[۶۴] در ریاضیات را مرادف ساخت پذیری[۶۵]، و صدق[۶۶] را مرادف اثبات‌پذیری[۶۷] درنظر می‌گرفت. بنابراین ادعای صدق یک گزارهٔ ریاضی ادعای اینکه اثباتی از آن داریم می‌شود. به همین‌ترتیب، ادعای کذب[۶۸] یک گزارهٔ ریاضی به این معنی که اثباتی داریم که «اگر گزارهٔ مزبور را راست بینگاریم این پندار گرفتار تناقض‌مان می‌کند»، می‌باشد. این مطلب استلزامات منطقی مهمی در بردارد.

می‌دانیم که به ازای هر گزارهٔ a

$$a \vee \sim a$$

صادق[۶۹] (یعنی a هرچه باشد راست) است. در واقع این صادق، که از دوران گذشته به عنوان قانون طرد اوسط[۷۰] معروف بوده، بر این است که یک گزارهٔ معلوم باید راست[۷۱] یا دروغ[۷۲] باشد. برای شهودگرا این مطلب به این مفهوم است که «یا اثباتی برای a داریم یا در غیراین‌صورت، این اثبات، که فرض a به تناقض می‌انجامد، در دست است»، بنابراین قانون طرد اوسط نمی‌تواند در دستگاه شهودگرایان داخل شود، زیرا این دستگاه مستلزم این است که چیزی به عنوان مسألهٔ حل‌نشده وجود ندارد. اثر مفروضات شهودگرایان این است که کل حوزه‌هایی از ریاضیات کلاسیک که در آنها اثباتهای سنتی بناشده بر مفروض

$$a \vee \sim a$$

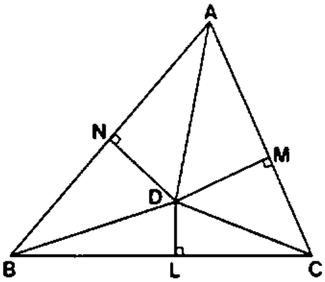
نتوانند بر مبنایی شهودگرا دوباره‌سازی شوند، باید کنار گذاشته شود. اغلب ریاضیدانها موافقت دارند که هرچیزی که در دستگاه شهودگرا ثابت شود درست است، اما عموماً چنین تصور می‌رود که شهودگرایان بیش از اندازه محتاط‌اند، و ردشان بر آن همه ریاضیات در غیر این صورت پذیرفتنی، زیانی جدی است.

اکنون به سراغ مؤسس مکتب دیگری از تفکر می‌رویم. دیوید‌هیلبرت[۷۳] (۱۸۶۲-۱۹۴۳) عقیده‌داشت که کوشش در بناکردن کل ریاضیات بر مبنای منطق بسیار جاه‌طلبانه است. برخورد او تجزیه‌کردن مسائل گوناگون به اجزا و خرد خرد به آنها پرداختن است. نخست، مسألهٔ صدق و کذب، که همواره باعث مشکلات فلسفی شده‌بود، باید به کناری نهاده می‌شد، و تمرکز بر سازگاری[۷۴] و تمامیت[۷۵] مجموعه‌های آکسیومها قرارمی‌گرفت. سازگاری در این

زمینه مستلزم این است که در هیچ دستگاهی شخص نمی‌تواند یک مطلب و نقیض همان مطلب را اثبات کند. و تمامیت به این معنی است که آکسیومهای کافی، برای این که جمیع نتایجی که باید (به مفهومی) استنتاج‌پذیر باشند بتوانند استنتاج شوند، داده‌شده‌باشد.

یکی از دستاوردهای اولیهٔ هیلبرت تنظیم مجموعهٔ کامل آکسیومهای هندسهٔ اقلیدسی بود. اثبات اقلیدسی زیر را درنظر می‌گیریم:

فرض می‌کنیم ABC مثلث دلخواهی باشد:



و فرض می‌کنیم نیمساز زاویهٔ A و عمودمنصف BC در D تلاقی کنند. عمودهای DN،DM را به ترتیب بر AB،AC فرود می‌آوریم. DC ، DB را وصل می‌کنیم. فرض می‌کنیم L وسط BC باشد. اکنون از آنجا که $BL=LC$، DL مشترک است، و $\angle BLD=\angle CLD=90^\circ$، مثلثهای BLD، CLD همنهشت‌اند، و بنابراین $BD=CD$ است. از آنجا که زوایای NAD و MAD مساوی‌اند، $\angle AND=\angle AMD=90^\circ$ و AD مشترک است، مثلثهای AND، AMD همنهشت‌اند، و بنابراین $DN=DM$، $AN=AM$ است.

از آنجا که $DN=DM$، $BD=DC$ و $\angle BND=\angle CMD=90^\circ$ است، مثلثهای BND ، CMD همنهشت‌اند، و بنابراین $NB=MC$ است. و از آنجا که

$$AN=AM \text{ و } NB=MC$$

نتیجه می‌شود که

$$AB=AC$$

بنابراین مثلث دلخواهی متساوی‌الساقین است؛ در نتیجه هر مثلث متساوی‌الساقین می‌باشد

مطلب فوق آشکارا یاوه است، و با این همه اثبات آن از آکسیومهای اقلیدسی در مورد هندسه به‌دست می‌آید. اشکال در این واقعیت قراردارد که آکسیومهای اقلیدسی ناتمام[۷۶] اند و نیاز به این دارند که با آکسیومهای برخورد*[۷۷] که بیان‌کنندهٔ این مطلب‌اند که چون خطوطی به طریق معینی رسم شوند، در قسمت معینی از صفحه برخورد می‌کنند، تکمیل شوند. (طریقی که شکل را رسم کرده‌ایم مفروض است و در نتیجه بیان می‌کند که D داخل مثلث واقع می‌شود که فرضی ناموجه است.)

به علت این که هیلبرت و پیروانش برساخت دستگاههای صوری، که به کمک آن توانستند هر یك از شاخه‌های مشخص ریاضیات را به طور جداگانه مورد بررسی قراردهند، متمرکز شده‌بودند، برخوردشان به عنوان صورت‌گرایی[۷۸] شناخته، و برنامه‌هاشان به خاطر قادرشدن به بررسی سازگاری و تمامیت این دستگاههای صوری، شامل ساخت زبان کلی‌تر، یا ماورای زبانی[۷۹]، که دستگاههای صوری بتوانند در آنها مورد بحث قرارگیرند، شد. و سرانجام، نشان داده‌شد که سازگاری دستگاههای صوری به سازگاری حساب مقدماتی وابسته است.

متأسفانه، برنامهٔ هیلبرت نیز مانند سایر برنامه‌های مقدم برآن، سرانجام به مانعی جدی برخورد کرد. و این زمانی اتفاق افتاد که در ۱۹۳۰ کورت‌گودل[۸۰] (۱۹۰۶...) نتایج خود را در مورد قضایای تردیدآمیز دستگاه صوری اعلام کرد.

گودل نشان داد که در هر دستگاهی که در بیان حساب مقدماتی به قدرکافی «غنی» باشد، یا گزاره‌های اثبات شده‌ای که دروغ‌اند، یا گزاره‌های اثبات نشدنی‌ای که راست‌اند، و در آنها باید به دروغ و راست تعبیری مطابق دستگاه مورد بررسی داده‌شود، وجوددارند. این نتیجه احتمالاً بزرگترین نتیجه در منطق جدید است. برای آگاهی‌یافتن

* وقوع، تلاقی

از اهمیت این موضوع، دستگاه صوری ساده‌ای را مورد بررسی قرارمی‌دهیم.

فرض می‌کنیم که کار را با دستگاه صوری‌ای شامل (مثلاً) یک یا دو علامت منطقی، تعدادکمی علایم حسابی چون ۰، ۱، +، =، و چند آکسیوم و قاعدهٔ تبدیل آغاز کنیم. می‌توان تصورکرد که جمیع گزاره‌های ممکن در چنین دستگاهی را می‌توان نوشت. اما دستگاه‌مان نباید چنان «غنی» باشد که پارادوکسهایی چون پارادوکس دروغگو*[۸۱] را در برگیرد، یا ناسازگار باشد. اما، فرض می‌کنیم که شامل گزاره‌ای به صورت

این گزاره اثبات پذیر نیست.

باشد. گزارهٔ مزبور را S می‌نامیم.

اگر S راست باشد، در این صورت S اثبات‌پذیر نیست.
اگر S راست نباشد، در این صورت S اثبات‌پذیر است.
اگر S اثبات‌پذیر باشد، در این صورت S راست نیست.
اگر S اثبات‌پذیر نباشد، در این صورت S راست است.

بنابراین باید نتیجه بگیریم که اگر دستگاه‌مان برای دربرداشتن S به‌قدرکافی «غنی» باشد، در این صورت باید حداقل شامل یک جمله که راست است اگر و تنها اگر اثبات‌پذیر نباشد، باشد. این مشکل در جمیع دستگاههایی که برای دربرگرفتن حساب مقدماتی به‌قدر کافی «غنی»اند، رخ می‌دهد، و بنابراین در پایان نشان داده‌می‌شود که برخورد صورت‌گرایی نیز، درست به اندازهٔ برنامهٔ استخراج کل ریاضیات از منطق، غیرقابل دفاع است و اکنون آشکار می‌شود که هیچ‌یك از چنین دستگاههایی نمی‌تواند هم سازگار، هم تمام باشد.

در «تاریخچه»مان سعی در نشان دادن این داشتیم که چگونه ریاضیات و منطق در سرتاسر گسترشهای مربوطه‌شان به‌طور مکرر بر یکدیگر اثر گذاشته‌اند، و هر بار که تأثیر متقابل مستقیمی وجودداشته هر دو دستگاه بهره‌مند شده‌اند. بسیاری از مسائل حل‌شده، اما حل مسائل یک قرن به‌طور تغییرناپذیری مسائل دیگری را، که می‌بایست توسط منطقیون و ریاضیدانهای قرن بعد به آنها پرداخته شود، مطرح‌کرده‌است. و اکنون می‌توانیم این سؤال را مطرح کنیم که «در چه مرحله‌ای قرارگرفته‌ایم؟» زیرا به‌نظر می‌رسد که هنوز هم پارادوکسهای حل‌نشده‌ای در اساس ریاضیات موجود باشد. و اوضاع را می‌توان احتمالاً مطابق چیزی شبیه این توصیف کرد:

اگر طالب ایقان مطلق‌ایم، در این صورت باید به محدودکردن خود به دستگاه بسیار «مختصری» چون حساب گزاره‌ها با گزاره‌هایی به تعداد متناهی، قناعت کنیم. اما، اگر مایل به لذت‌بردن از غنای مخاطرات [illegible] در استدلالهایی که مفاهیم نظریهٔ مجموعه‌ها و اعداد مجازشان می‌شمریم، هستیم، در این صورت باید عناصری از ناامنی، و امکان روبروشدن با پارادوکسهایی که تنها سفری دورتر به اطراف و اکناف (امکاناً) حتی ناامن‌تر توان حل‌شان حاصل می‌شود، را به‌جان بپذیریم.

در پایان قولی از راسل می‌شنویم:

حاصل نخستین و بلاواسطهٔ لحظهٔ شهود، اعتقاد به امکان نحوه‌ای از معرفتی است که می‌توان آن را مکاشفه یا الهام یا اشراق نامید، به خلاف احساس و استدلال و تجزیه وتحلیل، که ما را در وادی جهل و وهم سرگردان می‌سازند.

و به قولی از آنِ جلال‌الدین محمد مولوی گوش دل فرامی‌دهیم:

درگشاد عقده‌ها گشتی تو پیر عقده‌ای چند دگربگشاده گیر
عقده را بگشاده گیر ای منتهی عقده‌ای سخت است برکیسهٔ تهی
عقده‌ای کان برگلوی‌تست سخت اینکه دانی که خسی یانیک بخت
حل این اشکال کن‌گر آدمی خرج این دم کن اگر صاحب دمی

ومن الله‌التوفیق

*(به مقالهٔ منطق قدیم و ریاضیات در شمارهٔ ۱ مجلهٔ برهان رجوع شود.)

* این پارادوکس به صورت جدیدش چنین است: این گزاره دروغ است.

یادداشتها

1. Alonzo Church
2. Artificial Symbolic Language
3. Symbolic Logic
4. Laws of Thought
5. H. Putnam
6. Herbert B.Enderton
7.Logical
8.Logical Structure
9.George Boole
10. Algebra of Logic
11. Gottfried Wilhelm Leibniz
12. Leonhard Euler
13. John Venn
14. Charles Dodgson
15. Parallel Postulate
16. Self - evident Truth
17. Nikolai Lobachevski
18. Bernhard Riemman
19. Göttingen
20. Theory of Relativity
21. Augustus De Morgan
22. Boolean Algebra
23. Ernst Schröder
24. Logical Sum
25. Classes
26. Sub-class
27. Logical Product
28. Uninterpreted Form
29. Relations
30. Complementation Laws
31. Scholastic Times
32.Algebra of classes
33. Gottlob Frege
34. Propositional Calculus
35. Universal and Existential Quantifiers
36. Mathematical Induction
37. Universal Symbolic Language
38. Premisses
39. Rules of Inference
40. Augustin Louis Cauchy
41. Theory of Sets
42. Georg Cantor
43.Infinite
44. Improper Infinite
45. Finite
46. Completed Infinite
47. Set of all Sets
48. Equivalent
49. One-one Correspondence
50. Same number of Elements
51. Finite Set
52. Infinite Set
53. Normal
54. Abnormal
55. Bertrand Russell
56. Alfred North Whitehead
57. Principia Mathematica
58. Leopold Kroneker
59. Theory of Types
60. Individuals
61. Axiom of Reducibility
62. L.E.J. Brouwer
63. Intuitionist School
64. Existence
65. Constructibility
66. Truth
67. Provability
68. Falsehood
69. Tautology
70. Law of Excluded Middle
71. True
72. False
73. David Hilbert
74. Consistency
75. Completeness
76. Incomplete
77. Axioms of Incidence
78. Formalism
79. Metalanguage
80. Kurt Gödel
81. Liar Paradox

مراجع:

الف: فارسی

۱ـ منطق و اثبات: ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور
۲ـ خودآموز منطق ریاضی: ترجمهٔ غلامرضایاسی‌پور
۳ـ فلسفهٔ ریاضی: نظارت و مقدمهٔ حسین‌ضیایی
۴ـ فلسفهٔ ریاضی: ترجمهٔ احمدبیرشک
۵ـ منطق ریاضی چیست؟ ترجمهٔ شاپور اعتماد، غلامرضا برادران خسروشاهی
٦ـ آشنایی با منطق ریاضی: ترجمهٔ غلامرضا برادران خسروشاهی، محمد رجبی طرخورانی
۷ـ منطق و عرفان: ترجمهٔ نجف دریابندری

ب: انگلیسی

1. An Investigation of the Laws of Thought, George Boole.
2. Logic, Quine
3. Logic II: Proof, prepared by the Mathematics Foundation Course Team (مرجع اصلی)
4. Logic, Copi
5. Mathematical Logic, Yu.L. Ershov, E.A. Palyutin
6. Introduction to Mathematical Logic, H. Hermes

مقدمهٔ رسالهٔ محیطیهٔ غیاث‌الدین جمشید کاشانی

ستایش خداوندی را سزد که از نسبت قطر به محیط آگاه است[1] و اندازهٔ هر مرکب و بسیط را می‌شناسد و آفرینندهٔ زمین و آسمانها و قراردهندهٔ نور در تاریکی است. و درود و سلام بر محمدمصطفی که مرکز دایرهٔ رسالت و محیط[2] اقطار رهنمایی و دادگری است و بر خاندان و یاران پاک او باد.

اما بعد نیازمندترین بندگان خدای تعالی به آمرزش وی جمشید پسرمسعود پسرمحمود، طبیب کاشانی ملقب به غیاث، که خداوند احوال او را نیکوگرداند، می‌گوید: ارشمیدس ثابت کرده است که محیط (دایره) از سه برابر قطرش به اندازهٔ کمتر از $\frac{۱}{۷}$ و بیشتراز $\frac{۱۰}{۷۱}$ قطر، بزرگتر است. پس تفاوت بین این دو مقدار $\frac{۱}{۴۹۷}$ (قطر) است. پس دایره‌ای که قطرش ۴۹۷ ذراع یا قصب[3] یا فرسنگ باشد مقدار محیطش در حدود یک ذراع یا قصب یا فرسنگ مجهول و مشکوک است و دایرهٔ عظیمه‌ای که بر کرهٔ زمین واقع باشد محیطش در حدود پنج فرسنگ مجهول است زیرا قطر آن برحسب فرسنگ تقریباً پنج برابر مقدار مذکور می‌باشد[4] و در فلک‌البروج در حدود بسیار بیش از صدهزارفرسنگ مجهول است، و این مقادیر که در محیطها (این‌اندازه) زیاد هستند در مساحت(ها) چه خواهندبود؟

از: کاشانی نامه . ابوالقاسم قربانی

۱ـ اشارهٔ لطیفی است به اسم‌بردن نسبت قطر دایره به محیط آن ($\frac{۱}{\pi}$).

۲ـ از صنایع تلمیح و مراعات نظیر استفاده کرده‌است.

۳ـ احتمالاً به معنای نی است که چون ذراع واحد اندازه‌گیری بوده‌است.

۴ـ بنابراین کاشانی قطر کرهٔ زمین را تقریباً ۲۴۸۵=۴۹۷×۵ فرسنگ محسوب داشته است.

هم ورزش هم اندیشه

هرروز صبح تیمور، هرمز و بهرام، قبل از صبحانه در پارك می‌دوند. بعد از یك ماه دریافتند که در این مدت تیمور بیش از آنکه از هرمز عقب بماند از او جلو زده‌است، و هرمز بیش از آنکه از بهرام عقب‌بماند از او جلو افتاده‌است.

آیا امکان دارد که بهرام بیش از آنکه از تیمور عقب مانده باشد از او جلو زده‌باشد؟

جواب: بله امکان دارد. فرض می‌کنیم سه رفیق مزبور سی‌مرتبه با این نتایج دویده‌باشند:

برای ده روز اول ترتیب جلوبودن: تیمور، هرمز، بهرام،

برای ده روز دوم ترتیب جلوبودن: هرمز، بهرام، تیمور،

برای ده روز آخر ترتیب جلوبودن: بهرام، تیمور، هرمز، باشد. در این صورت: تیمور بیست‌مرتبه از سی‌مرتبه از هرمز جلوزده‌است. هرمز بیست‌مرتبه از سی‌مرتبه از بهرام جلوزده‌است. بهرام بیست‌مرتبه از سی مرتبه از تیمور جلو زده‌است.

پی‌یر برلوکوئین
بازیهای منطقی،
ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور

اتحادهای مثلثاتی، نامساویهای مثلثاتی

حمیدرضا امیری

(مورد استفاده دانش‌آموزان سال دوم تجربی‌وریاضی)

۱ـ ساده‌کردن عبارتهای مثلثاتی

یادآوری و اثبات چند فرمول مهم مثلثاتی جهت‌استفاده در ساده‌کردن و اثبات اتحادهای مثلثاتی

الف) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Longleftrightarrow \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$
$\Longleftrightarrow \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$

ب) $\boxed{1+tg^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha}$

ج) $\boxed{1+cotg^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}=cosec^2\alpha}$

د) $\boxed{tg^n\alpha.cotg^n\alpha=1} \Longleftrightarrow tg^n\alpha=\dfrac{1}{cotg^n\alpha} \Longleftrightarrow$
$cotg^n\alpha=\dfrac{1}{tg^n\alpha}\quad (n\in N)$

ه) $(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\pm 2\sin\alpha\cos\alpha$
$=1\pm 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\Longrightarrow \boxed{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha}$ &

$\boxed{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha}$

و) $\boxed{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$

اثبات ← داریم $(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2=1^2 \Longrightarrow$
$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$
$\Longrightarrow \sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos 2\alpha$

ز) $\boxed{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$

اثبات ← داریم $(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^3=1^3 \Longrightarrow$
$\sin^6\alpha+3\sin^4\alpha\cos^2\alpha+3\cos^4\alpha\sin^2\alpha+\cos^6\alpha=1$
$\Longrightarrow \sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$$\overbrace{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}^{1}=1$$

$\Longrightarrow \sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

ح) $\boxed{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$

اثبات ← $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=$
$(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)\underbrace{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}_{1}=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$

به همان قیاس خواهیم داشت

$\boxed{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$

ط) $\boxed{tg\alpha + cotg\alpha = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}}$

اثبات $\rightarrow$ $tg\alpha + cotg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} =$

$$\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

ساده‌کردن عبارتهای مثلثاتی و مسائل حل شده

برای ساده‌کردن عبارتهای مثلثاتی با استفاده از فرمولها و برابریهای مهم‌که اهم آنها به اثبات رسید، عبارت مثلثاتی را به ساده‌ترین صورت درآورده به‌طوری‌که ساده‌تر نشود. (درحقیقت هرگاه طرف دوم یك اتحاد مثلثاتی راکه مفصل دربارهٔ آن مطلب خواهیم گفت حذف‌کنیم عبارتی مثلثاتی به‌دست می‌آیدکه اگرساده شود همان طرف دوم‌حاصل می‌شود.)

مسأله ۱- عبارت مثلثاتی زیر را ساده‌کنید.

$A = (\cos x + \sin x - 1)(\cos x + \sin x + 1)$

اتحاد مزدوج $\Longrightarrow A = (\cos x + \sin x)^2 - 1 =$

$(1 + 2\sin x\cos x) - 1 = 2\sin x\cos x$

مسأله ۲- عبارت مثلثاتی زیر را ساده‌کنید.

$B = (\sin\alpha + \cos\alpha)(tg\alpha + cotg\alpha)$

$B = (\sin\alpha + \cos\alpha)\left(\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\right) = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} =$

$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} \Longrightarrow B = \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha}$

تذکر: در حقیقت از تجزیه‌کسرها استفاده شده است و به‌طورکلی‌داریم:

$$\frac{A+B-C+D-E}{F} = \frac{A}{F} + \frac{B}{F} - \frac{C}{F} + \frac{D}{F} - \frac{E}{F}$$

مسأله ۳- عبارت مثلثاتی زیر را ساده‌کنید:

$C = (\sin\alpha + \cos\alpha)\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\cos\alpha}\right) =$

$(\sin\alpha + \cos\alpha)\left(\frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)$

اتحاد مزدوج $\Longrightarrow C = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} =$

$\frac{\cos^{\cancel{2}}\alpha}{\sin\alpha\cancel{\cos}\alpha} - \frac{\sin^{\cancel{2}}\alpha}{\cancel{\sin}\alpha\cos\alpha} = cotg\alpha - tg\alpha$

۲- اتحادهای مثلثاتی

تعریف وروشهای اثبات اتحادهای مثلثاتی ومسائل‌حل شده برای هر روش.

تعریف: هر تساوی مثلثاتی بین‌چندنسبت مثلثاتی که‌به‌ازای جمیع مقادیر متغیر یا متغیرهای آن همواره برقرار باشد را یك اتحاد مثلثاتی می‌نامیم.

برای اثبات یك اتحاد مثلثاتی به سه طریق می‌توان‌عمل نمودکه هرکدام از این روشها را پس ازتوضیح با ذکرمثالی وحل از همان روش در زیر آورده‌ایم.

روش اول: دراین روش ازیك طرف تساوی استفاده کرده وباکمك‌گیری از فرمولهای مثلثاتی و برابریهای اثبات شده‌که قبلاً آمده است به طرف دیگر تساوی می‌رسیم. لازم به تذکر است‌که اگراز طرف چپ اتحاد به‌طرف راست و یا ازسمت راست اتحاد به سمت چپ‌برسیم فرقی‌ندارد و بستگی به سلیقه و تشخیص خودمان دارد.

مسأله ۴- اتحاد مثلثاتی زیررا ثابت‌کنید.

$$\frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\cos^2 x} = (1 - tg x)(1 + tg x)$$

$$\frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=1-tg^2 x=(1-tgx)(1+tgx)$$

تذکر : قبلاً ثابت کردیم :

$$\cos^4 x-\sin^4 x=\cos^2 x-\cos^2 x$$

روش دوم : دراین روش ازهردوطرف تساوی‌استفاده می‌شود و باکمک‌گیری از فرمولها و برابریهای اثبات شده ، دو طرف تساوی را ساده‌کرده تا به یك مقدار مشترك برسیم .

مسألهٔ ۵- اتحاد مثلثاتی زیر را اثبات کنید (x درناحیه اول دایره مثلثاتی)

$$\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}=\frac{1}{\cos x}-tgx$$

سمت راست $=\frac{1}{\cos x}-tgx=\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}$

$$=\boxed{\frac{1-\sin x}{\cos x}}$$

سمت چپ $=\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}=$

$$\sqrt{\underbrace{\frac{(1-\sin x)(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}}_{\text{اتحادمزدوج}}}=\sqrt{\frac{(1-\sin x)^2}{1-\sin^2 x}}=$$

$$\sqrt{\frac{(1-\sin x)^2}{\cos^2 x}}=\boxed{\frac{1-\sin x}{\cos x}}$$

هر دوطرف به عبارت $\frac{1-\sin x}{\cos x}$ رسید بنابـراین دو طرف با هم برابرند لذا اتحاد برقرار است .

روش سوم : دراین روش ما تساوی را برقرار فرض می‌کنیم‌ودوطرف‌تساوی راساده‌کرده‌ویامثلاً یك‌طرف‌را به‌طرف دیگر منتقل می‌کنیم تا بـه یك تساوی منطقی و همیشه درست برسیم (دراین راه از همهٔ خواص تساویها علاوه برفرمولهای مثلثاتی می‌توان استفاده کرد). به‌محض اینکه به تساوی منطقی رسیدیم همهٔ عملیات را ازتساوی منطقی‌که همیشه برقراراست به‌سمت عقب بازمی‌گردیم تا به اتحاد مثلثاتی مورد نظردست یابیم، در اینجا نه تنها اتحاد مثلثاتی ثابت شده است بلکه به دست آمده‌است.درحقیقت این‌روش(مرحلهٔ بر گشت از تساوی منطقی به طـرف خود اتحاد) می‌تواند روشی بـرای ساختن اتحادهای مثلثاتی باشد.

مسألهٔ ۶- اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت‌کنید:

$$\frac{\sin z\, tgz}{tgz-\sin z}=\frac{tgz+\sin z}{\sin z\, tgz}$$

فرض‌کنیم اتحاد برقرارباشد بـا طرفین وسطین واستفاده از اتحاد مـزدوج داریـم:

$$\sin^2 z\ tg^2 z=tg^2 z-\sin^2 z \iff \sin^2 z\, tg^2 z=$$

$$\frac{\sin^2 z}{\cos^2 z}-\sin^2 z=\frac{\sin^2 z-\sin^2 z\cos^2 z}{\cos^2 z}$$

$$\iff \sin^2 z\, tg^2 z=\frac{\sin^2 z(1-\cos^2 z)}{\cos^2 z}=$$

$$\frac{\sin^2 z\sin^2 z}{\cos^2 z}=tg^2 z\cdot\sin^2 z$$

$\iff \sin^2 z\, tg^2 z=\sin^2 z\, tg^2 z \leftarrow$ تساوی منطقی

مسأله ۷- اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت‌کنید:

$$\sin^2 y-\sin^2 x=\cos^2 x-\cos^2 y$$

فرض‌کنیم اتحاد برقرارباشد $\Longrightarrow \sin^2 y+\cos^2 y=$

$\cos^2 x+\sin^2 x \Longrightarrow 1=1 \leftarrow$ تساوی منطقی

حال‌داریم $1=1 \Longrightarrow \sin^2 y+\cos^2 y=$

اتحاد به‌دست آمد $\leftarrow \cos^2 x-\cos^3 y$.

$$\sin^2 x+\cos^2 x \Longrightarrow \sin^2 y-\sin^2 x=$$

$$\cos^2 x-\cos^2 y$$

مسأله ۸- اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت‌کنید.

$$\sin^3 x+\cos^3 x=\sin x+\cos x-$$

$$\sin^2 x\cos x-\cos^2 x\sin x$$

$\sin^3 x\cos^3 x =$

$$(\sin x+\cos x)\,(\underbrace{\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x}_{1})$$

$$=(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)=$$

$$\sin x-\sin^2 x\cos x+\cos x-\sin x\cos^2 x$$

مسأله ۹- اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید:

$$\cos^2 x=\cot g^2 x-\cot g^2 x\cdot\cos^2 x$$

سمت راست $=\cot g^2 x-\cot g^2 x\cdot\cos^2 x=$

$\cot g^2 x(1-\cos^2 x)=\cot g^2 x\cdot\sin^2 x=$

$\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\sin^2 x=\cos^2 x=$ سمت چپ

مسأله ۱۰- اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید:

$$\frac{\cos^4 x\cdot\cot g^2 x}{1+\cot g^2 x}+\frac{\sin^4 x\cdot tg^2 x}{1+tg^2 x}=1-3\sin^2 x\cos^2 x$$

داریم: $1+\cot g^2 x=\dfrac{1}{\sin^2 x}\Longrightarrow\dfrac{1}{1+\cot g^2 x}=\sin^2 x$

و نیز داریم: $\dfrac{1}{1+tg^2 x}=\cos^2 x$

$\Longrightarrow$ سمت چپ اتحاد $=\dfrac{1}{1+\cot g^2 x}\cdot\cos^4 x\cdot\cot g^2 x$

$$+\frac{1}{1+tg^2 x}\cdot\sin^4 x\cdot tg^2 x=$$

$$\sin^2 x\cdot\cos^4 x\cdot\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}+\cos^2 x\cdot\sin^4 x\,\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=$$

$\underbrace{\cos^6 x+\sin^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x}_{\text{قبلاً ثابت شده است}}=$ سمت راست

مسأله ۱۱- اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید:

$$\sin^8 x+\cos^8 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x(2-\sin^2 x\cos^2 x)$$

داریم: $(\sin^4 x-\cos^4 x)^2=(\sin^2 x-\cos^2 x)^2$

$\Longrightarrow\sin^8 x+\cos^8 x-2\sin^4 x\cos^4 x=$

$\sin^4 x+\cos^4 x-2\sin^2 x\cos^2 x$

و نیز داریم: $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$

$\Longrightarrow\sin^8 x+\cos^8 x-2\sin^4 x\cos^4 x=$

$1-2\sin^2 x\cos^2 x-2\sin^2 x\cos^2 x$

$\Longrightarrow\sin^8 x+\cos^8 x=1-4\sin^2 x\cos^2 x+2\sin^4 x\cos^4 x$

$\Longrightarrow\sin^8 x+\cos^8 x=$

$1-2\sin^2 x\cos^2 x(2-\sin^2 x\cos^2 x)$

و اتحاد به‌دست آمده

مسأله ۱۲- اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید:

$$\sec^2 x-\mathrm{cosec}^2 x=tg^2 x-\cot g^2 x$$

قبلاً ثابت کردیم: $(\sin^4 x-\cos^4 x=\sin^2 x-\cos^2 x)$

سمت چپ $=\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}=\dfrac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=$

$$\frac{\sin^4 x-\cos^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{\sin^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x}-\frac{\cos^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x}$$

$=\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\Longrightarrow tg^2 x-\cot g^2 x=$ سمت راست

مسأله ۱۳- اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید:

$$\frac{1}{\sin^4 x}-\frac{2}{\sin^2 x}+1=\cot g^4 x$$

از اتحاد $1+\cot g^2 x=\dfrac{1}{\sin^2 x}$ استفاده می‌کنیم

سمت چپ $=\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)^2-2\times\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)+1=$

$(1+\cot g^2 x)^2-2\times(1+\cot g^2 x)+1$

$=1+\cot g^4 x+\cancel{2\cot g^2 x}-2-\cancel{2\cot g^2 x}+1=$

$\cot g^4 x$. و اتحاد ثابت شد.

مسأله ۱۴- اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید:

$$\frac{\sin^6 x-\cos^6 x}{2\sin^2 x-1}=1-\sin^2 x+\sin^4 x$$

از اتحاد a^3-b^3 استفاده می‌شود

$$\text{سمت چپ}=\frac{(\sin^2x-\cos^2x)(\sin^4x+\sin^2x\cos^2x+\cos^4x)}{2\sin^2x-(\sin^2x+\cos^2x)}$$

قبلاً ثابت کردیم : $\sin^4x+\cos^4x=1-2\sin^2x\cos^2x$

$$\Longrightarrow \text{سمت چپ}=\frac{\cancel{(\sin^2x-\cos^2x)}(1-\sin^2x\cos^2x)}{\cancel{(\sin^2x-\cos^2x)}}=$$

$$1-\sin^2x\cos^2x=1-\sin^2x(1-\sin^2x)=$$

$1-\sin^2x+\sin^4x=$ سمت راست تساوی

مساله ۱۵- اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید:

$$(tg\alpha+cotg\alpha-\sqrt{2})(\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}+\sqrt{2})=$$

$$tg^2\alpha+cotg^2\alpha$$

قبلاً ثابت کردیم $\rightarrow$ $tg\alpha+cotg\alpha=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$

$\Longrightarrow$ سمت چپ $=(tg\alpha+cotg\alpha-\sqrt{2})(tg\alpha+cotg\alpha+\sqrt{2})$ اتحاد مزدوج $(tg\alpha+cotg\alpha)^2-(\sqrt{2})^2$

$$=tg^2\alpha+cotg^2\alpha+2tg\alpha cotg\alpha-2=$$

$$tg^2\alpha+cotg^2\alpha+2-2=tg^2\alpha+cotg^2\alpha$$

۳- نامساویهای مثلثاتی

روشهای اثبات نامساویهای مثلثاتی - مسائل حل شده

برای اثبات برقراری نامساویهای مثلثاتی روشهای مختلفی برحسب نامساوی مورد نظر موجود است مثلاً بعضی از نامساویهای مثلثاتی را از روشهای ابتکاری و بعضی با استفاده از نامساویهای جبری اثبات می‌شوند اما می‌توان یك روش کلی برای اثبات نامساویهای مثلثی به‌کار برد ، به‌این صورت‌که ابتدا نامساوی را اثبات شده و برقرار فرض‌کرده، سپس با استفاده از خواص نامساویها آن را ساده می‌کنیم تا به یك نامساوی منطقی برسیم ، یعنی به یك نامساوی همیشه برقرار مثلاً، $\sin^2x\geqslant 0$ و بلافاصله به محض رسیدن به‌چنین نامساوی منطقی از همان نامساوی شروع و روابط را به‌عقب برمی گردیم تا به‌نامساوی مزبور برسیم و اینجاست که نه‌تنها نامساوی اثبات شده، بلکه به دست آمده است در حقیقت این روش که تقریباً درهمهٔ موارد به‌راحتی نتیجه می‌دهد، نه‌تنها روشی است برای اثبات نامساویها بلکه روشی است برای ساختن و طرح مسائل نامساویهای مثلثاتی. حال به حل چند نمونه از نامساویهای مثلثاتی می‌پردازیم:

مساله ۱۶- درستی نامساوی زیر را تحقیق کنید (α زاویه حاده).

$$\sin\alpha\cos\alpha\leqslant\frac{1}{2}$$

$$\sin\alpha\cos\alpha\leqslant\frac{1}{2}\Longrightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha\leqslant 1\Longrightarrow$$

$$\underbrace{1-2\sin\alpha\cos\alpha}_{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}\geqslant 0$$

$\Longrightarrow (\sin\alpha-\cos\alpha)^2\geqslant 0 \leftarrow$ نامساوی همیشه برقرار

حال داریم: $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2\geqslant 0\Longrightarrow$

$$1-2\sin\alpha\cos\alpha\geqslant 0\Longrightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha\leqslant 1$$

$$\Longrightarrow \sin\alpha\cos\alpha\leqslant\frac{1}{2}$$

مساله ۱۷- درستی نامساوی زیر را تحقیق کنید (α زاویه حاده).

$$\sin\alpha+\cos\alpha\leqslant\sqrt{2}$$

$$\sin\alpha+\cos\alpha\leqslant\sqrt{2}\Longrightarrow(\sin\alpha+\cos\alpha)^2\leqslant 2\Longrightarrow$$

$$1+2\sin\alpha\cos\alpha\leqslant 2\Longrightarrow 1-2\sin\alpha\cos\alpha\geqslant 0$$

$\Longrightarrow (\sin\alpha-\cos\alpha)^2\geqslant 0 \leftarrow$ نامساوی منطقی

حال داریم :

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2\geqslant 0\Longrightarrow 1-2\sin\alpha\cos\alpha\geqslant 0\Longrightarrow$$

$$2-1-2\sin\alpha\cos\alpha\geqslant 0\Longrightarrow$$

$$1+2\sin\alpha\cos\alpha\leqslant 2\Longrightarrow(\sin\alpha+\cos\alpha)^2\leqslant 2\Longrightarrow$$

$$\sin\alpha+\cos\alpha\leqslant\sqrt{2}$$

مساله ۱۸- درستی نامساوی زیر را تحقیق کنید (α

زاویه حاده) .

$$tg\alpha + cotg\alpha \geqslant 2$$

برای اثبات این نامساوی ازیك نامساوی جبری می‌توان استفاده کرد که ابتدا آن نامساوی را ثابت می‌کنیم :

$$a \geqslant 0 \ \text{فرض کنیم} \Longrightarrow (1-a)^2 \geqslant 0 \Longrightarrow$$

$$1 - 2a + a^2 \geqslant 0 \xrightarrow{\text{طرفین بر a تقسیم}} \frac{1}{a} - 2 + a \geqslant 0$$

$$\Longrightarrow a + \frac{1}{a} \geqslant 2$$

حال با توجه به اینکه حدود تغییرات تانژانت و کتانژانت از $-\infty$ تا $+\infty$ می‌باشد، پس هرعدد حقیقی می‌تواند تانژانت یا کتانژانت زاویه‌ای باشد و برعکس. اگر فرض کنیم $a = tg\alpha$ ، داریم :

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{tg\alpha} = cotg\alpha \Longrightarrow tg\alpha + cotg\alpha \geqslant 2$$ وحکم ثابت است

۴- پیداکردن رابطه‌های مستقل از زاویه (حذف زاویه)

روشهای حذف زاویه در دستگاههای پارامتری - مسائل حل شده

برای حذف زاویه در دستگاههای پارامتری ابتدا حتی‌الامکان دستگاه را برحسب دونسبت مثلثاتی تبدیل می‌کنیم (سینوس وکسینوس یا تانژانت وکتانژانت) و سپس هریك از این دو نسبت را برحسب پارامترهای موجود در دستگاه به‌دست می‌آوریم، مثلاً اگر پارامترهای دستگاه a و b باشند سینوس را برحسب a یا b وکسینوس را نیز برحسب a یا b یا هردو به دست می‌آوریم و سرانجام با استفاده از روابط و اتحادهای موجود بین سینوس وکسینوس مثل

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

ویا اگر دونسبت مثلثاتی تانژانت وکتانژانت بودند بااستفاده از رابطهٔ $tgx \cdot cotgx = 1$ و قراردادن مقادیر نسبتهای مثلثاتی برحسب پارامترها که قبلاً به‌دست آورده‌ایم در این اتحادها زاویه را حذف می‌کنیم. گاهی اوقات مجبور می‌شویم در یک دستگاه پارامتری برای حذف کمان یکی از نسبتها را مثلاً سینوس را برحسب کسینوس و برحسب یکی از پارامترها از یك معادله دستگاه به‌دست آورده و در معادلهٔ دیگر در همان دستگاه قرار دهیم و بدین ترتیب کسینوس برحسب یك پارامتر محاسبه شده و این مقدار را در رابطهٔ به‌دست آمدهٔ سینوس برحسب کسینوس قرار می‌دهیم و سینوس را نیز برحسب پارامتر محاسبه می‌کنیم.

مساله ۱۹- x را از دستگاه زیر حذف کنید.

$$\begin{cases} tg x + \sin x = a \\ cotg x + \cos x = b \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sin x}{\cos x} + \sin x = a \\ \dfrac{\cos x}{\sin x} + \cos x = b \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\sin x + \sin x \cos x}{\cos x} = a & (1) \\ \dfrac{\cos x + \sin x \cos x}{\sin x} = b & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Longrightarrow \sin x(1 + \cos x) = a\cos x \Longrightarrow$$

$$\sin x = \frac{a\cos x}{1 + \cos x} \qquad (3)$$

حال رابطهٔ (۳) را در معادلهٔ (۲) قرار می‌دهیم

$$\Longrightarrow \frac{\cos x + \dfrac{a\cos x}{1+\cos x} \cdot \cos x}{\dfrac{a\cos x}{1+\cos x}} = b \Longrightarrow$$

$$\frac{\dfrac{\cos x+\cos^2 x+a\cos^2 x}{1+\cos x}}{\dfrac{a\cos x}{1+\cos x}}=b$$

$$\Longrightarrow \frac{\cos x+\cos^2 x+a\cos^2 x}{a\cos x}=b \overset{\cos x\neq 0}{\Longrightarrow}$$

$$\cos x(1+\cos x+a\cos x)=ab\cos x$$

$$\Longrightarrow \cos x(1+a)=ab-1 \Longrightarrow \boxed{\cos x=\frac{ab-1}{a+1}}$$

حال مقدار کسینوس راکه برحسب پارامترهای a و b است در معادلهٔ ۳ قرار می‌دهیم خواهیم داشت

$$\sin x=\frac{a\cos x}{\cos x+1}=\frac{a\cdot\dfrac{ab-1}{a+1}}{\dfrac{ab-1}{a+1}+1} \Longrightarrow$$

$$\sin x=\frac{\dfrac{a(ab-1)}{a+1}}{\dfrac{ab-1+a+1}{a+1}}=\frac{a(ab-1)}{a(b+1)} \Longrightarrow$$

$$\sin x=\frac{ab-1}{b+1}$$

و داریم $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$$\Longrightarrow \left(\frac{ab-1}{b+1}\right)^2+\left(\frac{ab-1}{a+1}\right)^2=1$$

تمرین :

☐ عبارتهای مثلثاتی زیر را ساده کنید:

۱) $A=\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}-\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$

۲) $B=\left(\dfrac{1}{\sin x}-\sin x\right)\left(\dfrac{1}{\cos x}-\cos x\right)$

۳) $C=\dfrac{tg^2 x-\sin^2 x}{cotg^2 x-\cos^2 x}$

۴) $D=\dfrac{\sec^2 x}{\sec^2 x-1}$

۵) $E=\dfrac{\sec\alpha\cdot\sin\alpha}{tg\alpha+cotg\alpha}$

۶) $F=(1-\sin^2\alpha)(1+tg^2\alpha)$

۷) $G=\dfrac{1-tg^2 x}{1+tg^2 x}$

۸) $H=(\sec x-tg x)(cosec x+1)$

۹) $I=\dfrac{cosec x}{1+cosec x}-\dfrac{cosec x}{1-cosec x}$

☐ اتحادهای مثلثاتی زیر را ثابت کنید:

۱) $\left(\dfrac{1+tg^2\alpha}{tg\alpha}\right)^2=\dfrac{1+tg^4\alpha}{tg^2\alpha}+2$

۲) $(tg\alpha+cotg\alpha)(tg\alpha-2cotg\alpha)=$
$\dfrac{tg^4\alpha+tg^2\alpha-1}{1+tg^2\alpha}-\dfrac{2cotg^4\alpha+2cotg^2\alpha+1}{1+cotg^2\alpha}$

۳) $(\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\sqrt{5})(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha-\sqrt{5})=$
$-4(1+\sin^2\alpha\cos^2\alpha)$

۴) $\cos\alpha-\dfrac{tg\alpha}{\sin\alpha}+tg\alpha\cdot\sin\alpha=0$

۵) $\dfrac{\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-1}{\sin^2\alpha}=\cot g\alpha-1$

۶) $(\sin\alpha+\cos\alpha)(tg\alpha+\cot g\alpha)=\sec\alpha+\operatorname{cosec}\alpha$

۷) $\sec^4\alpha-tg^4\alpha=\sec^2\alpha+tg^2\alpha$

۸) $\dfrac{1+\cot g\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha}=\dfrac{1+tg\alpha}{\sec\alpha}$

۹) $\dfrac{tg\alpha}{1+\sec\alpha}+\dfrac{1+\sec\alpha}{tg\alpha}=2\operatorname{cosec}\alpha$

۱۰) $\left(\dfrac{\sin^2\alpha}{tg^4\alpha}\right)^3\left(\dfrac{\operatorname{cosec}^3\alpha}{\cot g^6\alpha}\right)^2=1$

۱۱) $\dfrac{tg\alpha}{1-\cot g\alpha}+\dfrac{\cot g\alpha}{1-tg\alpha}=1+\sec\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha$

۱۲) $\dfrac{1+\sec\alpha}{\sin\alpha+tg\alpha}=\operatorname{cosec}\alpha$

۱۳) $\dfrac{\cos\alpha}{1-tg\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{1-\cot g\alpha}=\cos\alpha+\sin\alpha$

۱۴) $\dfrac{tg\alpha-\sin\alpha}{\sec\alpha}=\dfrac{\sin^3\alpha}{1+\cos\alpha}$

۱۵) $\cot g\alpha\cdot\sec\alpha=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$

۱۶) $\dfrac{\sec x-1}{\sec x+1}+\dfrac{\cos x-1}{\cos x+1}=0$

۱۷) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=2\sec\alpha$

۱۸) $\sec^4\alpha-\sec^2\alpha=\dfrac{1}{\cot g^4\alpha}+\dfrac{1}{\cot g^2\alpha}$

۱۹) $\dfrac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=tg\alpha-\cot g\alpha$

۲۰) $\dfrac{1}{\sec^2\alpha}+\sec^2\alpha+\dfrac{1}{\cos\sec^2\alpha}-\dfrac{\sec^2\alpha}{\cos\sec^2\alpha}=2$

☐ عبارتهای زیر را با تغییر متغیر مناسب به عبارتهای مثلثاتی تبدیل کرده و ساده کنید:

۱) $A=\sqrt{a^2+x^2}$

۲) $B=\dfrac{1}{x^2+a^2}$ (راهنمایی: قرار دهید $x=a\,tg\alpha$)

۳) $C=\dfrac{\sqrt[3]{(a^2+x^2)^2}}{x}$

۴) $D=\sqrt{x^2-a^2}$

---

۵) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$ (راهنمایی: قرار دهید $x=a\sec\alpha$)

۶) $\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}$

☐ درستی نامساویهای زیر را تحقیق کنید (α و β زوایای حاده هستند).

۱) $\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{2}\geqslant\sqrt{tg\alpha\, tg\beta}$

۲) $tg\alpha\cot g\beta+tg\beta\cot g\alpha\geqslant 2$

۳) $(tg^2\alpha+\cot g^2\alpha)^2\geqslant(tg\alpha-\cot g\alpha)^4$

۴) $\sin^2\alpha(\sin\alpha-1)<\cos^2\alpha(1-\cos\alpha)$

۵) $\sin^2\alpha+1<\sec^2\alpha$

۶) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\geqslant\sin\alpha\sin\beta+\sin\alpha+\sin\beta-1$

(راهنمایی: طرفین را در ۲ ضرب کنید)

---

۷) $tg\alpha_1<\dfrac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_n}{\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cdots+\cos\alpha_n}<tg\alpha_n$

$\left(0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n<\dfrac{\pi}{2}\right)$

(راهنمایی: از نامساوی $tg\alpha_1<tg\alpha_i<tg\alpha_n$ و ضرب طرفین آن در $\cos\alpha_i$ استفاده کنید و به i اعداد ۱ تا n داده و نامساویها را جمع کنید و...)

ـ این نکته هرقدر عجیب به نظر برسد حقیقت دارد که «بسیاری از ریاضیدانان بزرگ استاد و معلم نبوده‌اند: عدهٔ کمی از ایشان از میان سربازان حرفه‌ای خارج شده‌اند» بسیاری دیگر از علوم الهی یا حقوق یا طب روی‌برتافته وارد در خط ریاضیات گردیده‌اند و یکی از بزرگترین ایشان به قدر اهل‌سیاست محیل و زیرك بود و حتی به خاطر نفع کشورش دروغ گفت و نیز چندتن از ایشان اصلاً شغل و حرفه‌ای نداشته‌اند. نکته‌ای عجیب‌تر از این نیز وجود دارد و آن اینکه: **همهٔ معلمین ریاضی ریاضیدان نبوده‌اند یا نیستند،** اما این نکته نباید ما را متعجب سازد زیرا کافی است ملاحظه کنیم که چه مغاك و فاصله‌ای یک نفر معلم شعر و ادب را، که حقوق بسیار خوبی دریافت می‌کند، از شاعری که از شدت گرسنگی در اتاق مخروبهٔ خود جان می‌سپارد، جدا می‌سازد.

اریك تمپل بل
ریاضیدانان نامی،
ترجمهٔ حسن صفاری

حساب و هندسه، در نگاه اول، چنین به‌نظر می‌رسند که حوزه‌هایی به‌طورکامل نامرتبط باشند. حساب برشمارش، یعنی مظهر جریانی گسسته[1] (یا رقمی[2]) بناشده‌است.

حقایق حساب را می‌توان به‌طور واضح به صورت نتایج جریانات شمارش خاصی دریافت، و شخص انتظارنمی‌برد که ماورای این هیچ گونه معنایی داشته‌باشند. از طرف دیگر، هندسه، به جای اشیاء گسسته، شامل اشیاء پیوسته‌ای[3]، چون خطوط، منحنیها، و سطوح است. اشیاءِ پیوسته را نمی‌توان از اعضای ساده‌تر، با استفاده از جریانات گسسته، بناکرد، و شخص انتظار دارد که به جای رسیدن به حقایق هندسی با استفاده از محاسبه، آنها را مشاهده کند.

قضیهٔ فیثاغورس اولین اشاره به رابطه‌ای ژرف‌تر و پنهان بین حساب و هندسه بوده، و به دارا بودن موقعیتی کلیدی بین این دو قلمرو در سرتاسر تاریخ ریاضیات ادامه داده است. موقعیت مزبور گاهی موقعیت همکاری بوده و گاهی، چنان که پس از کشف این موضوع که $\sqrt{۲}$ گنگ* است پیش‌آمد، موقعیت نزاع بوده است.

ازکتاب: ریاضیات و تاریخش

تألیف: استیل‌ول
ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور

* اصم

1. discrete　2. digital　3. continuous

مسائل مسابقه‌ای

سید محمدرضا هاشمی موسوی

۱ـ درصورتی‌که x_1 و x_2 و .... و x_n ریشه‌های معادلهٔ

$$x^n+x^{n-1}+\dots+x+1=0$$

باشند مقدار عبارات زیر را حساب کنید.

$$S=\frac{x_1}{x_2}\sqrt[n]{\frac{x_1}{x_2}}+\frac{x_2}{x_3}\sqrt[n]{\frac{x_3}{x_3}}+\frac{x_3}{x_4}\sqrt[n]{\frac{x_3}{x_4}}+\dots+\frac{x_{n-1}}{x_n}\sqrt[n]{\frac{x_{n-1}}{x_n}}$$

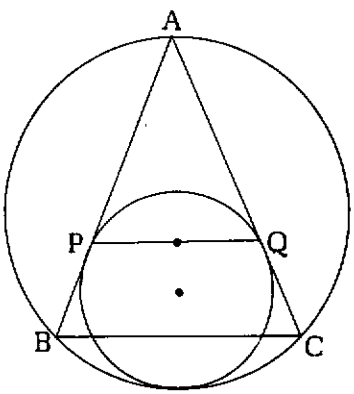
$$P=1\times 1!\,x_1^{n+1}+2\times 2!\,x_2^{n+1}+3\times 3!\,x_3^{n+1}+\dots+n\times n!\,x_n^{n+1}$$

۲ـ یک‌دسته ازجوابهای معادلهٔ مثلثاتی زیر را به دست آورید.

$$8^{\cos x}+\sqrt[n]{4}=8^{\sin x}$$

مسئله‌ای از المپیادهای ریاضی

۱۹۷۸/۴ ــ در مثلث ABC، $AB=AC$ است. دایره‌ای به دایرهٔ محیطی مثلث ABC مماس‌داخلی، همچنین به اضلاع AB و AC به ترتیب در نقاط P و Q مماس است. ثابت کنید که وسط پاره خط PQ مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC است.



بیستمین المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۷۸

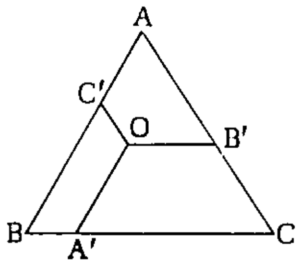
مسائل برای حل

(مورد استفادهٔ دانش آموزان سالهای اول تا چهارم دبیرستان)

● هندسه: محمد هاشم رستمی ● ریاضیات جدید : حمید رضا امیری
● جبر و مثلثات: محمد رضا هاشمی و محمد هاشم رستمی

مسائل هندسهٔ سال اول

۱ـ از نقطه O واقع در داخل مثلث متساوی الاضلاع ABC خطوطی به موازات اضلاع AB و BC و AC رسم می‌کنیم تا اضلاع BC و AC و AB را به ترتیب در نقاط

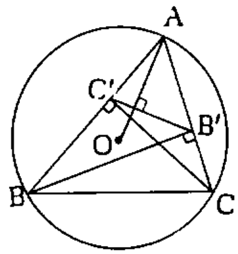


A′ و B′ و C′ قطع کنند. ثابت کنید که

$$OA'+OB'+OC'$$

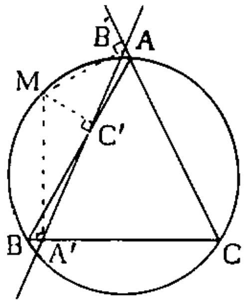
مقداری است ثابت که با تغییر مکان نقطه O در داخل مثلث، تغییر نمی‌کند.

۲ـ مثلث ABC مفروض است. ثابت کنید که شعاع OA از دایرهٔ محیطی این مثلث بر خط B′C′ که نقاط B′ و C′ پای



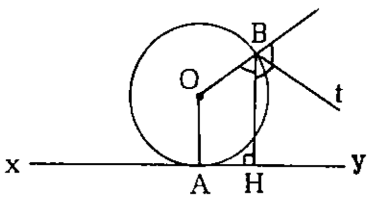
ارتفاعات رئوس B و C می‌باشند عمود است.

۳ـ ثابت کنید که تصاویر هر نقطه از دایرهٔ محیطی یک مثلث، روی اضلاع یا امتداد اضلاع آن مثلث، سه نقطه‌اند واقع



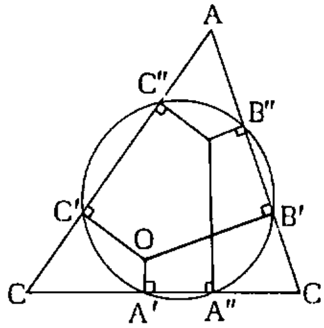
بر یک خط راست (خط سنسن یا خط سمسن).

۴ـ خط xy در نقطه A بر دایرهٔ به مرکز O مماس است. از نقطه متغیر B واقع بر این دایره، عمود BH را بر xy فرود



می‌آوریم. ثابت کنید که Bt نیمساز زاویهٔ مکمل ومجاور زاویهٔ OBH از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

۵ـ از نقطه O واقع در داخل مثلث ABC عمودهای OA′ و OB′ و OC′ را به ترتیب بر اضلاع BC و AC و AB فرود می‌آوریم و دایرهٔ محیطی مثلث A′B′C′ را رسم می‌کنیم. اگر نقاط دیگر برخورد این دایره با اضلاع مثلث ABC را



A″ و B″ و C″ بنامیم ، ثابت کنید عمودهایی کـه در نقاط A″ وB″ وC″ براضلاع مثلث ABC اخراج می‌شوند از یك نقطه می گذرند.

تستهای هندسهٔ سال اول

۱ـ اندازهٔ زاویهٔ بین نیمسازهای دو زاویهٔ مجاور ۶۵° است درصورتی که تفاضل این‌دو زاویه ۵۰° باشد زاویهٔ بزرگتر کدام است ؟

۱) ۶۵° ۲) ۷۵° ۳) ۹۰° ۴) ۱۰۵°

۲ـ زوایای A و B و C از مثلث ABC به ترتیب با اعداد ۸ و ۵ و ۲ متناسبند. کدام رابطه‌درست است؟

۱) زاویه B منفرجه‌است ۲) زاویه B قائمه‌است

۳) زاویه A قائمه است ۴) زاویه A منفرجه است

۳ـ در مثلث ABC ، AB = ۱۲ و AC = ۸ است. اندازهٔ میانهٔ AM درکدام رابطه‌صدق می کند ؟

۱) $AM > 10$ ۲) $AM = 10$

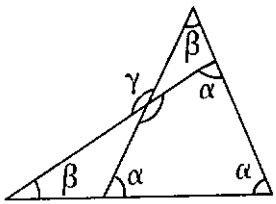
۳) $AM < 10$ ۴) $AM = 20$

۴ـ اندازهٔ زاویه‌بین میانه وارتفاع وارد بروتر ازمثلث قائم‌الزاویه‌ای ۲۰° است. اندازهٔزاویه‌حادهٔ کوچکتراین مثلث کدام است ؟

۱) ۵۵° ۲) ۴۵° ۳) ۳۵° ۴) ۲۵°

۵ـ درشکل‌زیر دو مثلث متساوی‌الساقین همان‌طوری‌که نشان داده شده است روی‌هم قرار گرفته‌اند. مقدار γ برحسب α و β کدام است ؟

۱) $\gamma=\alpha+\beta$ ۲) $\gamma=2\alpha+\beta$



۳) $\gamma=\alpha+2\beta$ ۴) $\gamma=\beta-\alpha$

۵) $\gamma=2\beta-\alpha$

۶ـ مجموع‌فاصله‌های هرنقطه واقع بـرقاعده یك مثلث متساوی‌الساقین‌از دوساق‌آن مثلث‌همواره برابراست با:

۱) قاعده مثلث

۲) ساق مثلث

۳) ارتفاع وارد برقاعده مثلث

۴) ارتفاع وارد برساق مثلث

۷ـ تعداد اقطاریك n ضلعی محدب‌که مجموع زوایای داخلی‌آن ۳ برابرمجموع زوایای‌داخلی‌یك۷ضلعی محدب‌است کدام است ؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۱۹ ۳) ۱۱۸ ۴) ۱۱۷

۸ـ اقطارچهارضلعیABCD برهم‌عمود وباهم‌مساویند. چهارضلعی حاصل از وصل کردن اوساط اضلاع متوالی این چهارضلعی کدام شکل‌است؟ (متوازی‌الاضلاع وارینیون چهار ضلعی ABCD)

۱) متوازی‌الاضلاع ۲) لوزی

۳) مستطیل ۴) مربع

۹ـ درمثلث ABC اندازهٔزوایای A وB به‌ترتیب 70° و 60° است. اندازهٔ زاویهٔ بین نیمسازهای درونی زوایای B و C کدام است؟

۱) 115° ۲) 120° ۳) 125° ۴) 130°

۱۰ـ پاره‌خط AB به‌طول ۵cm وخط d موازی آن و بفاصلهٔ ۲cm ازآن مفروض‌است. روی‌خط d چندنقطه وجود داردکه ازآن‌نقاط پاره‌خط AB به زاویهٔ 60° دیده شود.

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۱ـ زاویهٔ‌بین دومماس مرسوم‌از یك‌نقطه بریك دایره 40° است. اندازهٔ قوس کوچکتر ایجاد شده در دایره چقدر است؟

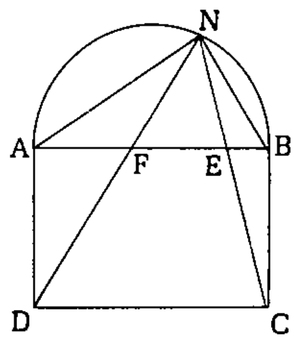
۱) 80° ۲) 140° ۳) 110° ۴) 220°

۱۲ـ در چهارضلعی محاطی ABCD اندازهٔ دو زاویهٔ مقابل $\hat{A}=3\alpha+10^\circ$ و $\hat{C}=\alpha-30^\circ$ است. اندازهٔزاویهٔ $\hat{A}$ چند درجه است؟

۱) ۵۰ ۲) ۱۵۰ ۳) ۱۶۰ ۴) ۱۲۰

مسائل هندسهٔ سال دوم ریاضی

۱ـ روی‌قطر AB ازنیمدایرهٔ ANB مستطیلی‌ساخته‌ایم که ارتفاع آن AD مساوی باضلع مربع محاطی‌دایرهٔ هم‌شعاع

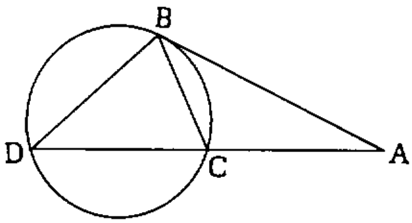


با نیمدایرهٔفوق است. اگررئوس C و D را به نقطهٔ‌دلخواه N از نیمدایره وصل‌کنیم و خطوط CN و DN قطر دایره را در نقاط E و F قطع‌نمایند، ثابت‌کنیدکه:

$$AE^2+BF^2=AB^2$$ (مسئله فرما)

۲ـ ازنقطهٔ A مماس AB و قاطع ACD نسبت به دایره‌ای‌رسم شده‌اند. ثابت کنیدکه:

$$\frac{AC}{AD}=\frac{BC^2}{BD^2}$$

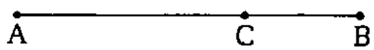


۳ـ ثابت کنیدکه اقطار هرپنج‌ضلعی منتظم یکدیگررا به نسبت‌طلایی تقسیم می‌کنند.

تعریف نسبت‌طلایی ـ هرگاه‌نقطهٔ Cروی پاره‌خط AB چنان قرار داشته باشدکه:

$$AC^2=AB\cdot BC$$

باشد، گفته می‌شودکه نقطهٔ C پاره‌خط AB را به نسبت طلایی یا به نسبت‌ذات وسط وطرفین تقسیم‌نموده است.



تستهای هندسهٔ سال دوم‌ریاضی

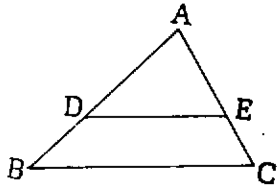
۱ـ اگر:

$$\frac{2a+2b}{2a+3b}=\frac{4}{5}$$

باشد نسبت $\frac{b}{a}$ چند است؟

۱) $\frac{2}{7}$ ۲) $\frac{7}{2}$ ۳) $\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{5}{4}$

۲ـ در مثلث ABC ، DE||BC و $۲BC = ۳DE$



است. درصورتی که $DB = ۴cm$ باشد اندازهٔ AB چندسانتی‌متر است ؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۳ـ نسبت تشابه دوچندضلعی $\frac{۹}{۴}$ است. نسبت اقطار متناظر این دوچند ضلعی کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۴ـ درمثلثی قائم‌الزاویه، تصویر میانهٔ وارد بروتر روی وتر ۱/۵ سانتی‌متر و ارتفاع وارد بروتر ۲ سانتی‌متر است. اندازهٔ وترچند سانتی‌متر است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۵

۵ـ چهار گوشهٔ یك مربع به ضلع ۱۰ سانتی‌متر را چنان تا می‌زنیم تادر مرکزمربع به‌هم برسند. اندازهٔ هرضلع مربع حاصل چند سانتی‌متر است؟

۱) ۵ ۲) $۵\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$

۶ـ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی بردایره‌ای به‌شعاع R محیط است. حاصل‌ضرب اندازه‌های دوقاعدهٔ این ذوزنقه برابر است با:

۱) $R^۲$ ۲) $۲R^۲$ ۳) $۳R^۲$ ۴) $۴R^۲$

۷ـ دایره‌ای به قطر ۶ سانتی‌متر مفروض است. نقطهٔ A در درون دایره به‌فاصلهٔ ۱ سانتی‌متر ازمحیط دایره حرکت می‌کند. نسبت مساحت ناحیه بین مسیر نقطهٔ A و محیط دایره، به‌مساحت دایره کدام است؟

۱) ۴ ۲) $\frac{۱۶}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

۸ـ درمثلث ABC ، $AB = ۶$ و $AC = ۸$ و $BC = ۱۰$ است. اندازهٔ قطعهٔ بزرگتر ایجادشده به‌وسیله نیمساز زاویهٔ B روی ضلع AC کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۲

۹ـ ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محیط بر دایره‌ای به شعاع ۸ سانتی‌متر کدام است؟

۱) $۱۶\sqrt{۳}$ سانتی‌متر ۲) ۱۶ سانتی‌متر

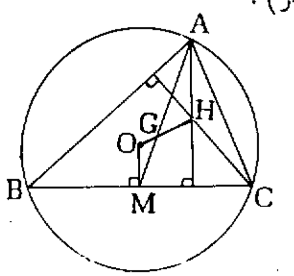
۳) $۸\sqrt{۳}$ سانتی‌متر ۴) $۴\sqrt{۳}$ سانتی‌متر

مسائل هندسهٔ سال سوم ریاضی

۱ـ ثابت کنید که در هرمثلث ABC ، نقطه O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث و نقطهٔ H محل برخورد ارتفاعات مثلث و نقطهٔ G محل تلاقی میانه‌های مثلث سه نقطه‌اند واقع بر یك خط راست به قسمی که:

$$\overline{GH} = -۲\overline{GO}$$

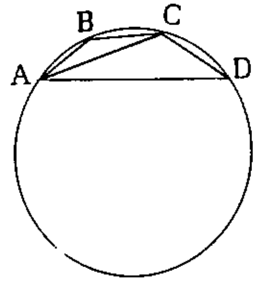
است (خط اولر).



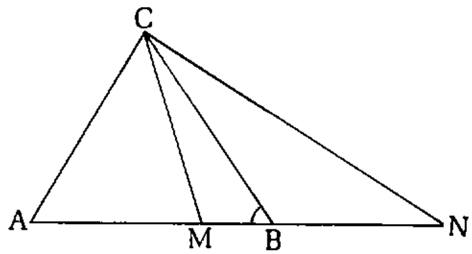
۲ـ اگر A و B و C و D رئوس متوالی یك چندضلعی

منتظم باشند، ثابت کنید که :

$$AC^2 - AB^2 = BC \cdot AD$$



۳ـ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC مفروض است. نقطهٔ M را روی ضلع AB و نقطهٔ N را در امتداد ضلع AB چنان اختیار می‌کنیم که مثلث AMC با مثلث ANC متشابه باشد. ثابت کنید:



اولاً ـ دایرهٔ محیطی مثلث MNC بر ضلع AC مماس است.

ثانیاً ـ رابطه $BM \cdot NC = BN \cdot MC$ برقرار است.

۴ـ ثابت کنید که در هر چهارضلعی محاطی حاصل‌ضربهای فاصله‌های هر نقطه واقع برمحیط دایرهٔ محیطی، ازهر دو ضلع غیرمجاور، با هم برابرند.

تستهای هندسهٔ سال سوم ریاضی

۱ـ از نقطهٔ A دو مماس بردایره‌ای رسم کرده‌ایم. اندازهٔ وتر واصل بین نقاط تماس ۱۲ سانتی‌متر و طول هرمماس رسم شده ۱۰ سانتی‌متر است. شعاع دایره چند سانتی‌متر است؟

۱) ۱۵ ۲) $\frac{۱۵}{۲}$ ۳) ۶ ۴) ۵

۲ـ دورترین ونزدیکترین فاصلهٔ یک نقطه واقع درخارج یک دایره از آن دایره برابر ۱۲ و ۳ سانتی‌متر است. طول مماس مرسوم از این نقطه بر دایره کدام است؟

۱) ۱۲ سانتی‌متر ۲) ۳ سانتی‌متر

۳) ۶ سانتی‌متر ۴) ۱۵ سانتی‌متر

۳ـ اندازه‌های سه ضلع مثلثی ۵ و ۱۲ و ۱۳ است. اندازهٔ ارتفاع وارد بر بزرگترین ضلع مثلث کدام است؟

۱) $\frac{۱۲}{۱۳}$ ۲) $\frac{۵}{۱۳}$ ۳) $\frac{۶۰}{۱۳}$ ۴) $\frac{۳۰}{۱۳}$

۴ـ در مثلث قائم الزاویه‌ای اندازه‌های دو ضلع زاویهٔ قائمه ۵ و ۱۲ سانتی‌متر است. طول نیمساز خارجی زاویهٔ قائمه چند سانتی‌متر است ؟

۱) $۶۰\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{۶۰\sqrt{۲}}{۱۱}$

۳) $\frac{۳۰\sqrt{۲}}{۷}$ ۴) $\frac{۶۰\sqrt{۲}}{۷}$

۵ـ تفاضل مربعات دوضلع مثلثی ۲۴ واندازهٔ ضلع سوم آن ۶ است. تصویر میانهٔ وارد برضلع سوم روی ضلع سوم کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۰ ۴) ۸

۶ـ ترکیب دو تقارن محوری با محورهای موازی کدام است؟

۱) دوران ۲) انتقال

۳) تقارن محوری ۴) تقارن مرکزی

۷ـ اگر : $۲\overline{SA'} = ۲\overline{SA}$ و $۴\overline{SA''} = -۳\overline{SA}$

باشد، در این صورت نقطهٔ A'' مجانس نقطهٔ A' نسبت به مرکز S با چه نسبتی است؟

۱) $\frac{-8}{9}$ ۲) $\frac{8}{9}$ ۳) $\frac{9}{8}$ ۴) $\frac{-9}{8}$

۸ــ در یك چند وجهی تعداد وجوه $F = 12$ و تعداد یالها $A = 30$ است. تعداد رئوس چند وجهی کدام است؟

۱) ۱۰   ۲) ۲۰   ۳) ۳۰   ۴) ۴۰

۹ــ هرم به‌حجم v را با صفحه‌ای موازی قاعده و به‌فاصلهٔ $\frac{1}{3}$ ارتفاع از سطح قاعده، قطع کرده‌ایم. نسبت حجم هرم ناقص ایجاد شده، به‌حجم هرم اولی کدام است؟

۱) $\frac{8}{27}$ ۲) $\frac{1}{27}$ ۳) $\frac{19}{27}$ ۴) $\frac{8}{19}$

۱۰ــ پنج نیم‌خط همرسند و هیچ سه‌تای آنها در یك صفحه قرار ندارند. در نقطهٔ همرسی آنها چند کنج مشخص می‌شود؟

۱) ۶   ۲) ۱۶   ۳) ۸   ۴) ۱۵

۱۱ــ چند کنج منتظم به‌رأس S می‌توان داشت که هر زاویه‌اش 45° باشد؟

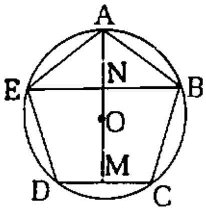
۱) ۳   ۲) ۴   ۳) ۵   ۴) ۶

۱۲ــ سطح قاچ 36° از یك کره برابر $3/6\pi$ است. حجم این کره چقدر است؟

۱) ۱۸   ۲) ۳۶   ۳) 18π ۴) 36π

مسائل هندسهٔ سال چهارم ریاضی

۱ــ پنج‌ضلعی منتظم ABCDE محاط در دایرهٔ O مفروض است. نقطهٔ تقاطع AO با CD و BE (یك ضلع و قطر موازی آن از پنج‌ضلعی) را به ترتیب M و N می‌نامیم. ثابت کنید که



نقاط M و N پاره‌خط AO را به نسبت توافقی تقسیم می کنند.

۲ــ مختصات قرینهٔ نقطهٔ $M(-2,1,3)$ را نسبت به صفحهٔ

$$P : 2x-3y+z+1=0$$

تعیین کنید.

۳ــ دو دایره :

$$C(x,y)=x^2+y^2-6x+3=0$$

و

$$C'(x,y)=x^2+y^2+4x+3=0$$

مفروض‌اند .

اولاً ــ معادلهٔ دسته دایرهٔ شامل این دو دایره را بنویسید.

ثانیاً ــ معادلهٔ دوایری از این دسته را پیدا کنید که شعاعشان برابر ۴ باشد.

ثالثاً ــ نقاط پونسله دسته دایره (دوایر به شعاع صفر دسته) را تعیین کنید .

رابعاً ــ معادلهٔ دسته دایرهٔ مزدوج دسته دایرهٔ فوق را بنویسید.

۴ــ دایره‌ای رسم کنید که از نقطهٔ مفروض A بگذرد و دایرهٔ $C(O\ ,\ R)$ را نصف کند و بر دایرهٔ $C'(O'\ ,\ R')$ عمود باشد .

۵ــ طول وتری از دایرهٔ به معادلهٔ :

$$x^2+y^2-4x-8y+10=0$$

را که نقطهٔ $M(1\ ,\ 2)$ وسط آن می باشد به دست آورید.

تستهای هندسهٔ سال چهارم ریاضی

۱ـ اگر:

$$\vec{v_2}=\vec{i}+3\vec{k} \quad \text{و} \quad \vec{v_1}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$$

باشد، تصویر بردار $(2\vec{v_1})\wedge(-3\vec{v_2})$ روی محور zها کدام است؟

۱) -54 ۲) -18
۳) -42 ۴) 42

۲ـ اگر فاصلهٔ نقطهٔ $A(a\,,\,2a-1\,,\,3a)$ از صفحهٔ:

$$P:\ 2x-y+2z-4=0$$

برابر ۵ باشد مقدار a کدام است؟

۱) ۳ و -2 ۲) ۳ و ۲
۳) -3 و ۲ ۴) -3 و -2

۳ـ دو نقطهٔ $A(-1\,,\,2\,,\,0)$ و $B(3\,,\,-2\,,\,4)$ نسبت به صفحهٔ:

$$P:\ 2x+2y-z+1=0$$

چه وضعی دارند؟

۱) در دو طرف صفحه واقع‌اند.
۲) در یك‌طرف صفحه واقع‌اند.
۳) نقطه A روی‌صفحه و نقطهٔ B خارج آن‌است.
۴) دونقطه A و B هر دو روی‌صفحه واقع‌اند.

۴ـ دوصفحهٔ:

$$P':\ 2x+z-3=0 \quad \text{و} \quad P:\ x+3y-z=1$$

مفروض‌اند. دونقطهٔ $A(0\,,1\,,2)$ و $B(-3,1,-1)$ نسبت به‌این دوصفحه چه‌وضعی دارند؟

۱) روی صفحهٔ P واقع‌اند.
۲) در دوفرجه متقابل‌حاصل از دوصفحه واقع‌اند.
۳) داخل دوفرجهٔ مجاور حاصل‌از دوصفحه واقع‌اند.
۴) روی صفحهٔ P' واقع‌اند.

۵ـ به‌ازای چه مقداری‌از a خط:

$$D:\ 3x=2y-1=(2a-1)z$$

با صفحهٔ:

$$P:\ 3x+y+3z=1$$

موازی است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) 2 ۴) -2

۶ـ معادلهٔ تصویر خط:

$$D:\begin{cases}x=2t-1\\ y=t\\ z=-2t+3\end{cases}$$

روی صفحهٔ:

$$P:\ 2x+y-z+1=0$$

کدام است؟

۱) $x=6y-3=2z$
۲) $3x=2y-1=\frac{6}{5}z$
۳) $3x=y-1=z$
۴) $x=2y-1=\frac{2}{5}z-\frac{3}{5}$

۷ـ معادلهٔ‌صفحه‌ای‌که از نقطهٔ $M(2,2,2)$ ومحور yها می‌گذرد کدام است؟

۱) $x+y=0$ ۲) $x-z=0$
۳) $y+z=0$ ۴) $y-z=0$

۸ـ اگر معادلهٔ محور اصلی دو دایره:

$c: x^2+y^2-2x-1=0$

و $c': x^2+y^2+ax=0$ خط $x=-\frac{1}{3}$

باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹– معادلهٔ دایرهٔ اصلی بیضی به معادلهٔ:

$$x^2+4y^2-2x+8y+1=0$$

کدام است؟

۱) $(x+1)^2+(y-1)^2=4$

۲) $(x+1)^2+(y+1)^2=4$

۳) $(x-1)^2+(y+1)^2=4$

۴) $(x-1)^2+(y-1)^2=4$

۱۰– نقطهٔ $F(2, 1)$ کانون و خط:

$\Delta: 3x+y=2$

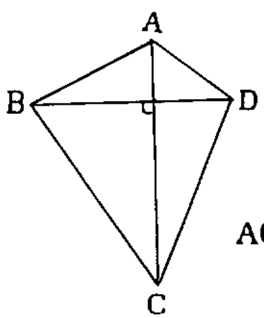
یك مجانب یك‌هذلولی است که محور کانونی آن موازی محور عرضها است. خروج‌از مرکز این هذلولی کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{10}}{3}$

۳) $\frac{\sqrt{10}}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{10}}{5}$

مسائل هندسهٔ سال دوم تجربی

۱– ثابت‌کنیدکه اگر اقطار یك چهارضلعی برهم‌عمود باشند مجموع مربعات اضلاع مقابل آن باهم برابرند.

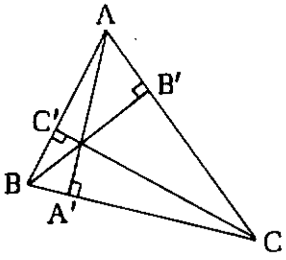


$AC \perp BD \Longrightarrow AD^2+BC^2=AB^2+DC^2$

۲– پاره‌خطهای AA' و BB' و CC' ارتفاعات مثلث ABC می‌باشند ثابت کنید که:

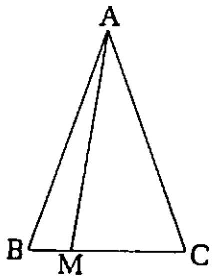
۱) $\frac{AB}{AC}=\frac{AB'}{AC'}$

۲) $AB' \cdot BC' \cdot CA' = AC' \cdot BA' \cdot CB'$



۳– اگر M نقطه‌ای واقع برقاعدهٔ BC ازمثلث‌متساوی‌الساقین ABC باشد ثابت‌کنیدکه:

$$AB^2-AM^2=MB \cdot MC$$



۴– ثابت‌کنیدکه اگر دریك متوازی‌الاضلاع یك‌زاویه برابر °۴۵ باشد مربع حاصل ضرب اقطار، مساوی با مجموع توان‌چهارم اندازه‌های دوضلع مجاور آن است.

$(d^2 \cdot d'^2=a^4+b^4)$

تستهای هندسه سال‌دوم تجربی

۱– در مثلث ABC:

$B'C' \parallel BC$ و $B'C'=\frac{3}{4}BC$ و $CC'=3$

است. اندازهٔ ضلع AC کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۲- دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابهند. درصورتی که $a=۷$ و $b=۸$ و $c=۹$ و محیط مثلث $A'B'C'$ مساوی ۷۲ باشد، کوچکترین ضلع مثلث $A'B'C'$ کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۴ ۳) ۲۱ ۴) ۱۴

۳- نسبت اندازه‌های قطرهای دوایر محیطی دومثلث متشابه برابر $\frac{۲}{۳}$ است. نسبت شعاعهای دوایر محاطی داخلی این دو مثلث کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) ۳

۴- در مثلثی قائم‌الزاویه اندازهٔ وتر ۱۰ سانتی‌متر و تصویر یك ضلع زاویهٔ قائمه بروتر نیز ۶/۴ سانتی‌متر است. اندازهٔ ضلع دیگر کدام است؟

۱) ۲ سانتی‌متر ۲) ۴ سانتی‌متر
۳) ۶ سانتی‌متر ۴) ۱۰ سانتی‌متر

۵- نقاط M و N و P و Q، اوساط اضلاع مربع ABCD را متوالیاً بهم وصل می‌کنیم. اگر:

$$AB=x\ ,\ MN=y$$

باشد کدام یك از مقادیر زیر مساحت شکل MNPQ را نشان می‌دهد؟

I) $y^۲$ II) $x^۲$ III) $x^۲-y^۲$

۱) فقط I ۲) فقط II ۳) فقط III
۴) I و II ۵) II و III

۶- قطر مربعی مساوی $۴\sqrt{۲}$ سانتی‌متر است. اندازهٔ مساحت این مربع چندسانتی‌متر مربع است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۷- سه‌ضلع مثلثی ۶ و ۸ و ۱۰ سانتی‌متر می‌باشند. مساحت این مثلث چند سانتی‌مترمربع است؟

۱) ۶۰ ۲) ۴۸ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

۸- دورترین و نزدیکترین فاصلهٔ یك نقطه واقع در داخل یك دایره از آن دایره به ترتیب ۳ و ۱۲ سانتی‌متراست. اندازهٔ وتری به طول می‌نیمم که از آن نقطه در دایره رسم می‌شود چند سانتی‌متر است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۳ ۴) ۴

مسائل هندسه سال سوم تجربی

۱- نقاط:

$$A(-۲\ ,\ ۱)\ ,\ B(۴\ ,\ -۵)\ ,\ C(۷\ ,\ -۲)$$

رئوس مثلث ABC مفروض‌اند. اندازهٔ بردار مکان مرکز ثقل این مثلث‌را تعیین کنید.

۲- متوازی‌الاضلاع ABCD به مرکز O و نقطهٔ دلخواه M درصفحه آن‌را درنظر می‌گیریم. ثابت کنید که همواره رابطهٔ

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=۴\overrightarrow{MO}$$

برقرار است.

۳- عدد اندازهٔ سطح یك کره ۳ برابر عدد اندازهٔ حجم آن می‌باشد. مساحت منطقه‌ای به ارتفاع $\frac{۱}{۲}$ از این کره‌را محاسبه کنید.

تستهای هندسهٔ سال سوم تجربی

۱- قرینه محوری یك لوزی کدام شکل است (قرینهٔ لوزی

نسبت به یك خط راست)؟

۱) مستطیل ۲) مربع

۳) متوازی الاضلاع ۴) لوزی

۲ـ از نقطهٔ S وسط خط المرکزین دو دایـره متساوی، قاطعی نسبت به دو دایره رسم می‌کنیم. نسبت اندازه‌های دو وتر ایجاد شده در دو دایره کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۳ـ نقاط $A(۳,۲)$ و $B(۵,۲)$ و $C(۵,۴)$ رئوس مثلث ABC مفروض‌اند. اندازهٔ بردار مکان محل تلاقی ارتفاعات این مثلث کدام است؟

۱) ۲۹ ۲) $\sqrt{۱۳}$ ۳) ۱۳ ۴) $\sqrt{۲۹}$

۴ـ اگر :

$$\vec{b} = \frac{-\vec{a}}{۲} \quad \text{و} \quad |\vec{a}| = ۱۸$$

باشد اندازهٔ $\vec{a}\cdot(\vec{a}+۲\vec{b})$ کدام است؟

۱) ۳۱۶ ۲) ۳۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۰

۵ـ تعداد چند وجهیهای منتظمی که می‌توان با پنج‌ضلعی منتظم ساخت کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶ـ در یك چند وجهی تعداد وجوه $F=۵$ و تعداد رئوس $S=۵$ است. تعداد یالهای آن کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۷ـ طول یال یك چهار وجهی منتظم $۶\sqrt{۲}$ است. اندازهٔ حجم آن کدام است؟

۱) ۷۲ ۲) $۳۶\sqrt{۲}$

۳) $۳۶\sqrt{۳}$ ۴) $۷۲\sqrt{۲}$

۸ـ استوانه دواری بـر منشور منتظم شش پهلویی محیط شده است. نسبت سطح جانبی آنها کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) π ۴) $\frac{۲\pi}{۳}$

۹ـ مساحت سطح قاچ ۹۰° در یك کره برابر ۳۶π است. اندازهٔ حجم این کره چند است؟

۱) ۱۴۴π ۲) ۲۸۸π ۳) ۷۲π ۴) ۲۸۸

مسائل ریاضیات جدید سال اول

۱ـ عکس نقیض گزارهٔ شرطی زیر را به صورت شرط لازم یا کافی بیان کنید (فرد بودن عددصحیح a شرط کافی است برای فرد بودن $a^۲$).

۲ـ اگر ارزش گـزارهٔ $(r\wedge\sim s) \Longleftrightarrow (p\vee\sim q)$ درست باشد و s نیز گزاره‌ای درست باشد دراین‌صورت ارزش گزارهٔ $(p\Longrightarrow r) \Longleftrightarrow (q\vee p)$ را تعیین کنید.

۳ـ اولاً، با استفاده ازجدول ارزشها ثابت کنید

$$(p\Longrightarrow q)\equiv \sim p\vee q$$

ثانیاً، ثابت کنید گزارهٔ

$$([(p\Longrightarrow q)\wedge p]\Longrightarrow q)$$

یك گزارهٔ همیشه درست است.

۴ـ ثابت کنید

$$[(A-B)\cup(B-A)]\cap(A\cap B)=\varnothing$$

تستهای ریاضیات جدید سال اول

۱ـ اگر گزارهٔ $p \Longrightarrow (q \vee \sim p)$ گزاره‌ای نادرست باشد کدام گزاره همواره درست است؟

الف) $p \Longrightarrow q$ ب) $\sim q \Longrightarrow \sim p$

ج) $q \Longrightarrow \sim p$ د) $\sim q \Longrightarrow (\sim p \wedge q)$

۲) اگر p گزاره‌ای درست باشد در این‌صورت ارزش گزارهٔ $[(t \Longrightarrow r) \Longrightarrow (q \Longrightarrow p)]$

الف) همواره نادرست است

ب) بستگی به ارزش t و r دارد

ج) همواره درست است

د) بستگی به ارزش t دارد

۳ـ عکس نقیض گزارهٔ $p \Longrightarrow (q \Longrightarrow r)$ کدام است؟

الف) $(r \Longrightarrow q) \Longrightarrow \sim p$

ب) $(\sim r \Longrightarrow q) \Longrightarrow \sim p$

ج) $(\sim r \Longrightarrow \sim q) \Longrightarrow \sim p$

د) $\sim(\sim q \vee r) \Longrightarrow \sim p$

۴ـ هرگاه برای هر گزارهٔ دلخواه مانند p ، اگر p ارزش‌درست داشته باشد، داریم:

$f(p) = 1$

و اگر ارزش p نادرست باشد، داریم:

$f(p) = 0$

در این‌صورت کدام‌یك از گزینه‌ها **نادرست** است؟

الف) $f(p \vee q) = f(p) + f(q) - f(p)f(q)$

ب) $f(p \wedge q) = f(p) \cdot f(q)$

ج) $f(p \wedge q) = f(p) + f(q)$

د) $f(p) + f(\sim p) = 1$

۵ـ مجموعهٔ

$A = \{ \{\varnothing\}, \varnothing, \{a, \varnothing\} \}$

چند زیر مجموعه دارد؟

الف) ۳ زیرمجموعه ب) 2×3 زیر مجموعه

ج) 2^4 زیرمجموعه د) ۸ زیر مجموعه

۶ـ کدام درست است؟

الف) $x \in \{ \{x, \{x\}\}, \{x, y\} \}$

ب) $\{x\} \subset \{ \{x\}, \{x, \{x, y\}\} \}$

ج) $\{x\} \subset \{x, \{x\}\}$

د) $x \in \{ \{x\} \}$

۷ـ اگر $p(A)$ مجموعهٔ همهٔ زیر مجموعه‌های A باشد در این‌صورت $p(p(p(A)))$ چند عضو دارد ، اگر A تك عضوی باشد.

الف) ۳ عضو دارد ب) ۸ عضو دارد

ج) ۱۶ عضو دارد د) ۳۲ عضو دارد

۸ـ هرگاه $A - B = A \cup B$ کدام درست است؟

الف) $A \subset B$ ب) $B \subset A$

ج) $B = \varnothing$ د) $A = \varnothing$

مسائل ریاضیات جدید سال دوم ریاضی

۱ـ اگرنقاط P و Q و R اوساط اضلاع مثلث ABC باشند ثابت کنید که بازای‌هرنقطهٔ دلخواه O :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$$

۲ـ نشان‌دهید هیچ دو ماتریس 2×2 ای مانند A و B نمی‌توان‌یافت به‌طوری‌که $AB - BA = I_2$

۳ـ اگر

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

ماتریس X را از معادلهٔ زیر به دست آورید:

$$AX=B$$

۴ـ مطلوب است محاسبهٔ ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۲\sqrt{۲} & -۲\sqrt{۲} \\ ۲\sqrt{۲} & ۲\sqrt{۲} \end{bmatrix}^{۹۶}$$

تستهای ریاضیات جدید سال‌دوم ریاضی

۱ـ تابع $f : IR-\{۰\} \rightarrow IR$ با قانون

$$f(x)=\frac{|x|+۱}{x}$$

مفروض است، کدام گزاره درست است؟

الف) تابع یک‌بیک و پوششی است.

ب) تابع یک‌بیک است ولی پوششی نیست.

ج) تابع یک‌بیک نیست ولی پوششی‌است.

د) تابع نه‌یک‌بیک و نه‌پوششی است.

۲ـ برای اینکه ضرب دو ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

تعویض‌پذیر باشد داریم :

الف) $a=b$ و $c=d$

ب) $a=d$ و $b=c$

ج) $a=c$ و $b=-d$

د) $a=d$ و $b=-c$

۳ـ اگر

$$A=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix}$$

در این‌صورت $A^۶$ برابر است با

الف) $\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{-۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} \frac{۲۷}{۶۴} & \frac{-۱}{۶۴} \\ \frac{۱}{۶۴} & \frac{۲۷}{۶۴} \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۴ـ نقطهٔ $M(۶ , -۱)$ تحت ماتریس A به نقطهٔ $M'(-۶ , ۱)$ تبدیل یافته ماتریس تبدیل A کدام است؟

الف) $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

۵ـ اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$، آنگاه کدام‌درست‌نیست؟

الف) $A^۲=A^{-۱}$ ب) $A^۳=I$

ج) $A^۲=I$ د) $A^۴=A$

۶ـ مجموعهٔ $A=\{۱ , -۱\}$ باکدام زوج از اعمال

زیر تشکیل گروه می‌دهد؟

الف) ضرب و تقسیم ب) جمع و تفریق

ج) ضرب و جمع د) ضرب و تفریق

۷ـ عمل $*$ در N به صورت

$$a*b=\mathrm{Max}\,\{a\,,\,b\}-۲$$

تعریف شده حاصل

$$[(۳*۵)*۶]+[۳*(۵*۶)]$$

کدام است؟

الف) ۹ ب) ۱۰ ج) ۶ د) ۱۹

۸ـ اگر در Z داشته باشیم

$$x*y=x+y+۵$$

در این صورت عضو بی‌اثر کدام است؟

الف) ۵ ب) $\frac{۱}{۵}$ ج) ۲۵ د) ۵−

۹ـ کدام یك زیر گروه $(Z\,,\,+)$ است؟

الف) اعداد طبیعی ب) اعداد زوج

ج) اعداد فرد د) اعداد اول

۱۰ـ عمل $*$ درجدول مقابل تعریف‌شده‌است، کدام‌حکم در موردآن‌برقرار است؟

الف) عضو خنثی ۲ وجابه‌جایی دارد

ب) عضو خنثی ۱ و جابه‌جایی‌ندارد

ج) عضوخنثی‌ندارد و جابه‌جایی‌دارد

د) عضو خنثی ۳ وجابه‌جایی دارد

*	۲	۳	۴
۲	۴	۲	۳
۳	۲	۳	۴
۴	۳	۴	۲

مسائل ریاضیات جدید سال سوم ریاضی

۱ـ ۳زوج‌خواهر و برادر، سرمیزی‌نشسته‌اند(هرطرف ۳ نفر). این ۶ نفر به چند طریق می‌توانند بنشینندکـه همواره هرخواهر روبروی برادرخودش باشد.

۲ـ ۵زوج زن وشوهر به چند طریق می‌توانند دور یك میز گرد قرار بگیرند به طوری‌کـه هر زن درکنار شوهر خود باشد.

۳ـ چند عدد ۴ رقمی وجود داردکه در هریك از آنها دو رقم زوج و دو رقم‌فرد وجود داشته‌باشد.

۴ـ یك مجموعهٔ n عضوی چند زیر مجموعهٔ k عضوی دارد؟ $(k<n)$

۵ـ ۳ سکه موجود است‌که یکی سالم، دومی در هردو طرف‌آن خط و سومی طوری است‌که احتمال خط آمدن $\frac{۱}{۳}$ است. دو مجموعهٔ

$$A=\{۱,۲,۳,۴,۵\} \text{ و } B=\{۱,۲,\cdots,۱۰\}$$

مفروض‌اند. قرارداد می‌کنیم پس از انتخاب یکی از سکه‌ها پرتاب‌آن اگرخط‌بیاید از اعداد مجموعهٔ A و اگر شیر بیاید از اعضای مجموعهٔ B یك‌عددرا انتخاب می‌کنیم (به‌تصادف) معین‌کنید احتمال‌آن راکه عدد برداشته شده **فرد** باشد.

۶ـ ثابت‌کنید اگر دریك مسأله آماری داده‌های آماری را k برابر کنیم میانگین‌داده‌های‌جدیدk برابر وانحراف‌معیار داده‌های‌جدید تغییری نمی‌کند.

تستهای ریاضیات جدید سوم ریاضی

۱ـ a را چه‌عددی درنظر بگیریم تا بردارهای

$$(-۶\ ,\ a+۱) \quad و \quad (۲\ ,\ a)$$

وابسته خطی باشند.

الف) $\frac{۱}{۴}$ ب) $\frac{۱}{۲}$ ج) -۴ د) $-\frac{۱}{۴}$

۲ـ ازکیسه‌ای که محتوی ۴مهره‌قرمز و ۵ مهره آبی‌است ۴ مهره به‌تصادف و با هم‌بیرون می‌آوریم احتمال‌اینکه دومهره همرنگ نباشند کدام است؟

الف) $\frac{۱۰}{۱۷}$ ب) $\frac{۲۱}{۲۳}$ ج) $\frac{۲۰}{۲۱}$ د) $\frac{۶}{۱۲۶}$

۳ـ کدام یك از گزاره‌های زیردرست است؟

الف) هرفضای‌برداری زیرفضای‌نابدیهی دارد.

ب) مجموعهٔ $\{۰\}$ نمی‌تواندزیر فضا باشد.

ج) فضای‌برداری IR روی‌خودش‌زیرفضای نابدیهی ندارد.

د) اعداد گویا روی IR یك فضای برداری است.

۴ـ به چندطریق می‌توان ۶ مهره‌رنگی‌راکنارهم‌چید به قسمی که دومهره مخصوص کنارهم واقع نشوند؟

الف) $۶!-۲!$ ب) $۶!-۵!\times ۲$

ج) $۵!\times ۲!$ د) $۶!\times ۲!$

۵ـ می‌خواهیم از بین ۱۲ نفرکه ۴نفر از آنها شیرازی هستندیك‌کمیسیون۴نفری‌تشکیل‌دهیم‌به‌قسمی که‌رئیس کمیسیون شیرازی‌باشد، این‌عمل به چندطریق ممکن‌است.

الف) ۶۶۰ ب) ۵۴۰ ج) ۱۶۹ د) ۴۵۰

۶ـ در معدل گیری یك‌کلاس ۵۰نفری به اشتباه نمره ۹ را ۱۹ گرفته‌ایم، معدل ۱۶ به‌دست‌آمده‌است. میانگین واقعی کدام است ؟

الف) ۱۶/۷ ب) ۱۵/۷

ج) ۱۶/۸ د) ۱۵/۸

۷ـ در بسط $(a+b+c)^۷$ ضریب جملهٔ $a^۴b^۲c$ کدام است؟

الف) ۲۱۰ ب) ۱۰۵

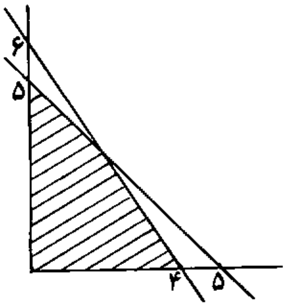
ج) ۳۰۵ د) ۴۱۰

۸ـ درکیسه‌ای ۴مهره‌قرمز و ۵مهره‌آبی وجود دارد. به چندطریق می‌توان‌از این‌کیسه ۴ مهره خارج‌کرد به طوری‌که لااقل ۳ مهره‌آبی‌باشد؟

الف) ۵۴ ب) ۴۵ ج) ۲۰۰ د) ۲۰۱

۹ـ بیشینهٔ $۳x+۲y$ که درشرایط نشان‌داده‌شده‌صدق می‌کند کدام‌است؟

الف) ۸ ب) ۷ ج) ۱۴ د) ۱۲



مسائل ریاضیات جدید سال چهارم ریاضی

۱ـ ثابت کنید اگر $(a\ ,\ b)=۱$ آنگاه:

$$(۲a+b\ ,\ a+۲b)$$

مساوی ۱ یا ۳ است.

۲ـ دو رقم سمت‌راست عدد 13^{10} را پیدا کنید.

۳ـ باقیمانده تقسیم 2^{1137} برعدد ۱۷ را تعیین کنید.

۴ـ بدون بسط و با استفاده از ویژگیهای دترمینان ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} m & a-d & mb+mc \\ m & b-d & ma+mc \\ m & c-d & ma+md \end{vmatrix} = 0$$

۵ـ ماتریس تقارن نسبت به خط $3x-2y=0$ را بنویسید.

تستهای ریاضیات جدید چهارم ریاضی

۱ـ گزارهٔ $(p \Rightarrow q) \vee [p \Rightarrow (q \wedge r)]$ هم‌ارز است با:

الف) $\sim p \Rightarrow q$ ب) $p \vee q$

ج) $p \Rightarrow q$ د) $p \Rightarrow \sim q$

۲ـ گزارهٔ $[p \Rightarrow (q \vee r)] \wedge (\sim p \wedge r)$ هم‌ارز است با:

الف) $p \wedge q$ ب) $p \vee r$

ج) $\sim p \wedge r$ د) $p \wedge (q \vee r)$

۳ـ اگر U مجموعهٔ اعداد صحیح زوج باشد، U با دو عمل جمع وضرب معمولی:

الف) حلقه تعویض‌پذیر است.

ب) حلقه تعویض‌پذیر و یکدار است.

ج) حلقه دارای مقسوم علیه‌صفر است.

د) میدان است.

(سراسری ۶۵)

۴ـ در بحث مقابل کدام‌یك از گزاره‌های زیر را به جای «؟» قراردهیم تا بحث معتبر شود؟

الف) $s \vee q$ ب) $q \wedge \sim p$

ج) $s \wedge q$ د) هرسه مورد درست است

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ s \Rightarrow \sim p \\ \sim p \wedge s \\ \hline \therefore ? \end{array}$$

۵ـ Q مجموعهٔ اعدادگویا است و I یك ایده‌آل آن و $2 \in I$ دراین‌صورت I کدام است؟

الف) اعداد صحیح ب) اعداد صحیح مثبت

ج) اعداد منطق د) اعداد منطق و مثبت

۶ـ کدام‌یك از دستگاههای زیر یك حوزهٔ درست نمی‌باشد؟

الف) $(Q , + , \times)$

ب) $(Z_5 , + , \times)$

ج) $(IR , + , \times)$

د) $(Z_8 , + , \times)$

۷ـ اگر ماتریسهای A و B پاد متقارن و تعویض‌پذیر باشند، کدام درست است؟

الف) AB پاد متقارن است.

ب) BA پاد متقارن است.

ج) AB متقارن است.

د) AB متقارن نیست.

۸ـ مقدار ویژهٔ ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

الف) ۲ ب) ۰ ج) −۱ د) −۳

(سراسری ۶۸)

۹- فرض کنیم A یک ماتریس متعامد باشد، $(A^{-1})'$ برابر کدام است؟

الف) A ب) A^{-1} ج) A' د) I

(سراسری ۶۷)

۱۰- عدد $11^{10}-1$ مضرب کدام یک از اعداد زیر است؟

الف) ۹۹ ب) ۱۰۱ ج) ۱۰۰ د) ۹

۱۱- جواب معادلهٔ $2x \overset{7}{\equiv} 1$ کدام است؟

الف) $x=7k+4$ ب) $x=7k+5$

ج) $x=7k+1$ د) $x=7k+3$

۱۲- باقیمانده تقسیم $2^{2n+1}+13^{2n+1}$ بر ۷ کدام است؟

الف) ۳ ب) ۱ ج) ۵ د) ۶

مسائل جبر سال اول

۱- حاصل هریک از عبارتهای زیررا حساب کنید.

A) $(\sqrt[7]{2-\sqrt{3}})(\sqrt[7]{2+\sqrt{3}})-(a\sqrt[4]{a^{-4}})=?$

B) $\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}+(\sqrt{\sqrt[5]{2}})^{3}-2^{0/3}-\sqrt[10]{8}=?$

C) $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{2}=?$

۲- کسرهای زیررا گویا کنید.

A) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ B) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}}$

C) $\dfrac{c}{\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}}$ D) $\dfrac{6}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$

۳- ریشه‌های معادلهٔ:

$$(2x^2+5)(x^3+1)(x^2-1)(x^2-3x+2)\times(2x-1)=0$$

را به‌دست آورید. و مجموعهٔ جوابهای معادله را بنویسید.

۴- دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2y^3}{x^3+y^3}=\dfrac{8}{9}\\[2mm] \dfrac{x^3-y^3}{x^2y^3}=\dfrac{7}{8}\end{cases}$$

را حل کنید.

۵- دستگاه نامعادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases}\dfrac{3x-1}{2}+\dfrac{2x+1}{3}>\dfrac{x-1}{6}\\[2mm] \dfrac{5x-1}{3}-\dfrac{x+2}{4}<\dfrac{2x-1}{12}\end{cases}$$

تستهای جبر سال اول

۱- معادلهٔ: $m(mx-1)=2x$ به‌ازای چه مقادیری از m جواب ندارد؟

الف) ۱- و ۱ ب) $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$

ج) ۲ و ۲- د) $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$

۲- در یک تقسیم چندجمله‌ای اگر درجهٔ خارج قسمت و درجه باقی‌مانده باهم برابر باشند آنگاه درجهٔ مقسوم علیه برابر است با:

(n درجه چند جمله‌ای مقسوم است)

الف) $\dfrac{n-1}{2}$ ب) $n+1$

ج) $\dfrac{n+1}{2}$ د) $n-1$

۳ـ در معادله :

$$(x-3y)^8+(y^2-2x)^6=0$$

مقادیر (x,y) به‌ترتیب برابرند با:

الف) (۰ , ۰) یا (۱۸ , ۶−)

ب) (۱۸ , ۶) یا (۱۸ , ۶−)

ج) (۶ , ۱۸) یا (۰ , ۰)

د) الف و ج صحیح.

۴ـ حاصل عبارت $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-2}$ برابراست با:

الف) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ ب) $5+2\sqrt{6}$

ج) $5-2\sqrt{6}$ د) هیچ کدام

۵ـ درصورتی که داشته باشیم:

$$2x+3y=21$$

مقادیر x و y را درعدد $\overline{34x3y}$ طوری تعیین کنید که این عدد بر ۹ بخش‌پذیر باشد.

الف) $x=6$ ، $y=7$

ب) $x=3$ ، $y=5$

ج) $x=5$ ، $y=9$

د) $x=9$ ، $y=5$

۶ـ به‌ازای چه مقادیری‌از x عبارت:

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^3-27}}}$$

دارای معنی است ؟

الف) $x\geqslant 27$ ب) $x\geqslant 60$

ج) $x\geqslant 3$ د) $x\geqslant 9$

۷ـ به‌ازای‌چه مقادیری‌از m دستگاه:

$$\begin{cases}3x-2my=2\\ 2y+x+4=0\end{cases}$$

جواب ندارد؟

الف) $\frac{-3}{2}$ ب) $\frac{-3}{4}$

ج) $\frac{-4}{3}$ د) $\frac{-9}{3}$

۸ـ حاصل عبارت :

$$\frac{(x^4-1)(x^4+x^2+1)}{x(x^2+1)(x^6-1)}$$

برابر است با :

الف) $\frac{1}{x^2-1}$ ب) $\frac{1}{x^3-1}$

ج) $\frac{1}{x^2}$ د) $\frac{1}{x}$

۹ـ حاصل :

$$(x^2+y^2-2xy)\left(1-\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)(x^2+y^2)^2\times$$

$$(x^2+y^2+2xy)\left(1-\frac{2xy}{(x+y)^2}\right)$$

کدام است ؟

الف) ۱ ب) x^4-y^4

ج) $(x^4-y^4)^2$ د) هیچ کدام

۱۰ـ به عبارت :

$$\frac{x^2}{4}+4y^2$$

کدام‌یك ازمقادیر زیررا اضافه‌کنیم تا عبارت‌فوق‌به مربع‌کامل

تبدیل شود؟

الف) $\pm xy$ ب) $\pm ۲xy$

ج) $\pm ۴xy$ د) هیچ‌کدام

جبر و حساب سال دوم ریاضی

۱- معادلات زیر را حل کنید.

A) $(\sqrt{۲-\sqrt{۳}})^x+(\sqrt{۲+\sqrt{۳}})^x=۲$

B) $\left(\frac{x+۱}{x}\right)^۲+\left(\frac{x}{x+۱}\right)^۲=۲$

C) $x^۳-۳x^۲+۳x-۶=۰$

D) $\sqrt{x^۲-x+۱}+\sqrt{x^۲-x+۲}=۳$

۲- ثابت کنید به‌ازای جمیع مقادیر m هریک ازخطوط زیر ازیک نقطهٔ ثابت می‌گذرند و مختصات آن نقطه را تعیین کنید.

A) $۲mx+(۱۰m-۳)y+۹-۲۶m=۰$

B) $(۴m^۲-۱)x+(۱۲m^۲+۴m+۱)y-۲۰m^۲-۸m-۳=۰$

۳- سه‌خط D و D′ و D″ به معادلات:

$$\begin{cases} D: ax+y=-۱ \\ D': ay+bx=۱ \\ D'': ۲x-y=b \end{cases}$$

مفروض‌اند.

اولاً: a و b را چنان تعیین کنید که خط D′ برخط D″ عمود وبا خط D موازی‌باشد $(ab\neq ۰)$.

ثانیاً: فاصلهٔ دوخط D و D′ را حساب کنید.

ثالثاً: خط $y=mx+h$ را طوری تعیین کنید که از نقطهٔ‌تقاطع D′ و D″ بگذرد و با خط:

$$۲x+۳y+۱=۰$$

موازی باشد.

۴- جملهٔ nام یك رشته مساوی است با:

$$\frac{۴^n-۳}{۲^{n+۱}}$$

کدام جمله از این‌رشته مساوی با $\frac{۶۱}{۱۶}$ است.

۵- جملهٔ k ام یك‌تصاعد حسابی مساوی S و جمله pام آن مساوی P است، این تصاعدرا مشخص کنید.

۶- اگرجملهٔ p ام یك‌تصاعدهندسی برابر R وجمله sام آن‌برابر T باشد تصاعد را مشخص کنید.

۷- آیا اعداد $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۷}$ می‌توانند جملاتی از یك‌تصاعد حسابی یا هندسی باشند.

۸- معادلات‌نمایی ولگاریتمی زیر را حل کنید.

A) $۲^x-۲^{۵-x}=۳$ C) $۲۵^x=۲۰^x+۱۶^x$

B) $۳^{۴+۸+۱۲+\dots+۴x}=۸۱$ D) $۲^{\log x}+x^{\log ۲}=۲$

E) $\log_{\sqrt{۲}}x+\log_{\sqrt[۳]{۳}}x+\log_{\sqrt[۴]{۴}}x+\dots+\log_{\sqrt[n]{n}}x=۱$

۹- حدود $|x|$ را بیابید.

$$\log_{\frac{۴}{۳}}(x^۲-۱)\geqslant -۲$$

۱۰- با فرض:

$$\log x=\log y=\log z=k$$

عبارت:

$$P=\sqrt[۷]{\frac{x^۵\sqrt[۳]{y^۲}}{\sqrt[۵]{x^۳y^۲z}}}$$

را برحسب k حساب کنید.

تستهای جبر سال دوم

۱ـ اگر $\log a$ و $\log b$ ریشه‌های معادله درجهٔ دوم:

$$x^2+2mx-3=0$$

باشند، مقدار عبارت $\frac{\log(ab)}{\log a\log b}$ برابراست با :

الف) $\frac{-2m}{3}$ ب) $\frac{3}{2m}$

ج) $\frac{2m}{3}$ د) $\frac{-3}{2m}$

۲ـ اگر $\sqrt{3}-2$ یك ریشهٔ معادلهٔ:

$$ax^2+bx+c=0$$

باشد وضرایب a و b و c گویا باشند، ریشهٔدیگرمعادله برابر است با :

الف) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ ب) $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$

ج) $-2+\sqrt{3}$ د) هیچ کدام

۳ـ اگر $x^6+y^6+z^6=3x^2y^2z^2\ (xyz\neq 0)$ باشد، حاصل عبارت :

$$\frac{\sqrt[n]{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt[n]{x^2}+\sqrt[n]{y^2}+\sqrt[n]{z^2}}$$

برابر است با :

الف) $\sqrt[n]{3}$ ب) $\frac{\sqrt[n]{3}}{3}$

ج) $\sqrt[n]{9}$ د) $\frac{\sqrt[n]{9}}{3}$

۴ـ اگر $\frac{x^n}{x^{2n}+x^n+1}=\frac{1}{4}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{x^{2n}}{x^{4n}+x^{2n}+1}$ برابر است با:

الف) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{4}$ ج) $\frac{1}{8}$ د) $\frac{1}{16}$

۵ـ عبارت $\sqrt[4]{\log(x^2-3)}$ به ازای کدام مقادیر x تعریف‌نشده است؟

الف) $x\leqslant -3$ و $x\geqslant 3$

ب) $-2\leqslant x\leqslant 2$

ج) $x\leqslant -2$ و $x\geqslant 2$

د) $x\leqslant -\sqrt{3}$ و $x\geqslant \sqrt{3}$

۶ـ حاصل عبارت:

$$\frac{n}{\log_{2}^{\,n+1}}+\frac{n}{\log_{\frac{3}{2}}n+1}+\dots+\frac{n}{\log_{\frac{n+1}{n}}n+1}$$

برابر است با:

الف) $n\log_n n+1$ ب) $\log n$

ج) ۱ د) n

۷ـ دریك تصاعد حسابی، مجموع جملات:

$$S_n=6n^2+9\log_n\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

است. قدر نسبت و جمله‌اول تصاعد برابراست با:

الف) $d=-12$ و $a=3$

ب) $d=12$ و $a=-3$

ج) $d=12$ و $a=3$

د) هیچ کدام

۸ـ درمعادلهٔ $2x^2-mx+4=0$ ، $x'+x''$و۵ و

$x'x''$ به‌ترتیب تشکیل تصاعد عددی می‌دهند. m برابر است با:

الف) ۵ ب) ۶ ج) ۷ د) هیچ کدام

۹ـ حاصل:

$$\left[(1-\frac{1}{3})^2(1-\frac{1}{4})^2(1-\frac{1}{5})^2\cdots(1-\frac{1}{n})^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

برابر است با:

الف) $1-\frac{1}{n}$ ب) ۱

ج) $\frac{2}{n}$ د) بی‌نهایت

۱۰ـ در صورتی که $\log 2 = 0/301$ باشد، 5^{25} چند رقمی است؟

الف) ۱۷ رقمی ب) ۱۸ رقمی

ج) ۱۹ رقمی د) ۲۰ رقمی

مسائل جبر سال سوم ریاضی

۱ـ با استفاده از تعریف حد ثابت کنید:

$$\lim_{x\to 1}(3x-2)=1$$

۲ـ مطلوب است محاسبهٔ حد هریك از توابع زیر در $x=1$:

A) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}=?$

B) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x^n-1)}{x^2-1}$

C) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{x-1}$

۳ـ هرکدام از حدهای زیررا حساب کنید.

A) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)=?$

B) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)tg\frac{\pi x}{2}=?$

C) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{tg\,tg\,tg\,tg\,x\ tg\,mx}{\sin\sin\sin x\sin nx}\right)=?$

۴ـ به‌ازای چه مقادیری از k، تابع f باضابطه‌های زیر پیوسته است.

$$f(x)=\begin{cases}5-k^2x^2 & x>-1\\ x+2 & x\leqslant -1\end{cases}$$

۵ـ مشتق توابع زیررا پیدا کنید.

A) $y=\frac{x^{100}+3x^{75}+x^{51}}{x^{55}}$

B) $y=\sqrt[5]{x^3+x+1}$

۶ـ مطلوب است معادلهٔ خط قائم برمنحنی $y=\frac{x-1}{x+1}$، در نقطه‌ای به‌طول $x_0=1$.

۷ـ در تابع:

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$

پارامترهای a و b و c و d را چنان تعیین کنید که اولاً مرکز تقارن منحنی $\omega(\frac{-۲}{۳} , ۲)$ باشد، ثانیاً برخط $y=x-۱$ مماس باشد.

تستهای جبر سال سوم

۱ـ باقی‌ماندهٔ چندجمله‌ای:

$$p(x)=x^{۹۹۹}+x^{۸۸۸}+\dots+x^{۱۱۱}+۱$$

بر $g(x)=x^{۹}+x^{۸}+\dots+x+۱$ برابر چیست؟

الف) $R=g(x)$ ب) $R=x^{۱۰}-۱$

ج) $R=۰$ د) هیچ کدام

۲ـ به‌ازای چه مقادیری از $n\in N$ بسط دوجمله‌ای:

$$\left(\sqrt[۳]{x^{۲}}-\frac{۱}{\sqrt[۵]{x^{۳}}}\right)^{n}$$

دارای جملات مستقل از x است؟

الف) $n=۱۹k$ ب) $n=۹k$

ج) $n=۱۹k-۹$ د) هیچ کدام

۳ـ اگر دامنهٔ تابع $y=f(x)$ ، فاصله $(۱ , ۰)$ باشد دامنهٔ تابع $f([x+۱]\log x)$ کدام است؟

الف) $(۰ , ۱]$ ب) $[۱ , ۱۰)$

ج) $(۱ , ۱۰)$ د) $(۱ , ۱۰]$

۴ـ $\lim_{x\to۰}\left(\frac{۱}{x^{۲}}-\frac{۱}{\sin^{۲}x}\right)$ حد برابر است با:

الف) $-\frac{۱}{۳}$ ب) $\frac{۱}{۳}$ ج) ۰ د) $-\infty$

۵ـ معادلهٔ خط قائم برمنحنی $y=x^{۲}+\cos x$ در نقطهٔ $x=۰$ چنین است:

الف) $x=۱$ ب) $x=۰$

ج) $y=۰$ د) $y=۱$

مسائل جبر و آنالیز سال چهارم ریاضی

۱ـ حد تابع:

$$y=\frac{\sin\sin\sin\cdots\cdots\sin x}{tg\,tg\,tg\cdots\cdots tg\,x}$$

وقتی $x\to۰$ چند است؟

۲ـ پیوستگی تابع زیر را در نقطهٔ $x_{۰}=۱$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}+\frac{x-۱}{|x-۱|}+۱ & \text{اگر } x\neq۱ \\ ۱ & \text{اگر } x=۱ \end{cases}$$

۳ـ در تابع:

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}+B & x<-۳ \\ -۴ & x=-۳ \\ Ax+۵ & x>-۳ \end{cases}$$

مقادیر A و B را طوری تعیین کنید تا تابع در نقطهٔ $x_{۰}=-۳$ مشتق‌پذیر باشد.

۴ـ مشتق مرتبهٔ دوم $f(x^{۳}+x)$ را به دست آورید.

۵ـ اگر منحنی تابع:

$$y=\frac{۳x+۶}{۳x^{۲}+kx+s}$$

فقط مجانب قائمی به معادلهٔ $x-۲=۰$ داشته باشد k و s را بیابید.

۶ـ در تعداد ریشه‌های معادلهٔ :

$$x^3-3x^2+4x+m=0$$

به‌ازای مقادیر مختلف m بحث کنید . سپس بـه‌ازای $m=2$ ریشه‌های حقیقی معادله‌را به دست آورید.

۷ـ انتگرالهای زیررا حساب‌کنید.

$$A)\ \int\frac{x^3\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[5]{x^3}}dx \qquad B)\ \int\frac{cotg^{100}3x}{sin^2 3x}dx$$

$$C)\ \int\frac{(3x+1)dx}{(3x^2+2x+7)^9}$$

۸ـ سطح محصور بین منحنی تابع :

$$y=\sqrt{5-5x^2}$$

و محور طولها را حول محورxها دوران می‌دهیم. حجم‌ایجاد شده چقدر است؟

۹ـ سطح محصور بین دومنحنی‌نمایش تغییرات‌توابع:

$$\begin{cases}y=x^2+3\\ y=-x^2+5x\end{cases}$$

را بیابید .

۱۰ـ انتگرال معین‌زیررا محاسبه‌کنید.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+tg^n x}$$

تستهای جبر و آنالیز چهارم ریاضی

۱) اگر $(fog)(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=\frac{x}{x+1}$، آنگاه D_f کدام است؟

الف) $(-\infty\,,1)$ ب) $[1\,,+\infty)$
ج) $[-1\,,1]$ د) $(-\infty\,,+\infty)$

۲ـ قرینه منحنی تابع :

$$f(x)=\sqrt[3]{x^3+1}$$

نسبت‌به نیمساز ربع اول و سوم‌کدام است؟

الف) $y=\sqrt[3]{x^3+1}$

ب) $y=-\sqrt[3]{x^3+1}$

ج) $y=\sqrt[3]{x^3-1}$

د) $y=-\sqrt[3]{x^3-1}$

۳ـ اگر داشته باشیم :

$$\lim(\sqrt{x^2-4x+5}-ax-b)=0$$

مقدار $a+b$ برابراست با:

الف) ۱ ب) ۱− ج) ۲ د) ۲−

۴ـ در تابع :

$$f(x)=\begin{cases}ax^2-b & x>-1\\ -1 & x=-1\\ ax+2b & x<-1\end{cases}$$

مقدار $a+b$ را طوری تعیین‌کنیدکه تابع درنقطه $x=-1$ پیوسته باشد.

الف) ۱− ب) ۳− ج) ۵− د) ۷−

۵ـ در تابع :

$$f(x)=\begin{cases}Ax+1 & x>1\\ 3 & x=1\\ Bx^2+2 & x<1\end{cases}$$

مقدار $A-B$ را طوری تعیین‌کنیدکه تابـع در نقطهٔ $x=1$ مشتق‌پذیر باشد .

الف) ۱− ب) ۱ ج) ۰ د) هیچ‌کدام

مسائل جبر سال سوم تجربی

۱ـ حد هریك از توابع زیررا در ازای مقدار داده‌شده محاسبه کنید.

الف) $\lim \dfrac{1+\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}}{1+\sin x-\cos x} \quad ، \quad x\to 0$

ب) $\lim \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}} \quad ، \quad x\to 0^+$

ج) $\lim \dfrac{\sin x \sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}\cdots\sin\frac{x}{n}}{x^n} \quad ، \quad x\to 0$

۲ـ اگر:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{a|x-1|+2x-1}{|3-x|+ax+3}=\frac{3}{4}$$

باشد، مقدار a را به دست آورید.

۳ـ مقادیر a و b را به قسمی تعیین کنید که تابع:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+ax & ، x>2\\ 3 & ، x=2\\ bx+1 & ، x<2\end{cases}$$

در نقطهٔ $x=2$ پیوسته باشد.

۴ـ اگر:

$$g(x)=tg x \quad \text{و} \quad f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$$

باشد اندازهٔ مشتق تابع $(fog)(x)$ را درازای $x=\frac{\pi}{8}$ به دست آورید.

۵ـ تابع $y=\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{1}{x+b}$ مفروض است. ثابت کنید که بین این تابع و مشتقهای آن رابطهٔ

$$\frac{2y'^2-yy''}{y^3}=\frac{2}{b-a}$$

برقرار است.

۶ـ مقدار a را به قسمی تعیین کنید که مجموع طول و عرض نقطهٔ می‌نیمم تابع $y=x^2+ax-1$ برابر $\frac{-7}{4}$ باشد.

۷ـ تابع $y=x^3+bx^2+cx-2$ مفروض است. ضرایب b و c را چنان تعیین کنید که نمودار تغییرات این تابع در نقطه‌ای به طول ۲ ـ برخط به معادلهٔ $x+y=2$ مماس باشد.

تستهای جبر سال سوم تجربی

۱ـ چهار نقطهٔ A و B و C و D روی یك محور قرار دارند، حاصل عبارت:

$$\frac{\overline{CA}+\overline{AB}+2\overline{BC}}{\overline{BA}+\overline{AD}+\overline{DB}+3\overline{CB}}$$

کدام است؟

۱) $\frac{-1}{3}$ ۲) $\frac{-1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۲ـ به ازای کدام مقدار m نقطهٔ:

$$A(m-1\ ,\ 2m+3)$$

برمبدأ مختصات منطبق می‌شود؟

۱) ۱ ۲) $-\frac{3}{2}$

۳) $-\frac{3}{2}$ و ۱ ۴) هیچ مقدار

۳ـ مختصات نقطه‌ای از ربع دوم که روی خط به معادلهٔ:

$$y+2x-1=0$$

واقع بوده و فاصلهٔ آن تا مبدأ مختصات برابر $\sqrt{2}$ باشد کدام است؟

۱) $\left(-\frac{1}{5}\,,\,\frac{7}{5}\right)$ ۲) $(1\,,\,-1)$

۳) $\left(\frac{1}{5}\,,\,-\frac{7}{5}\right)$ ۴) $(-1\,,\,1)$

۴ـ در تابع:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax}{x-1}\ , & x>0\\[2mm] x+b\ , & x\leqslant 0\end{cases}$$

اگر $f(2)=2$ و $f(-2)=0$ باشد، $a+b$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵ـ تصویر نقطهٔ $A(3\,,\,5)$ روی نیمساز ربع اول و سوم کدام نقطه است؟

۱) $A'(5\,,\,3)$ ۲) $A'(4\,,\,4)$

۳) $A'(3\,,\,5)$ ۴) $A'(-4\,,\,-4)$

۶ـ حد $\dfrac{k\sin x\sin 2x}{\cos 3x(1-\cos x)}$ وقتی $x\to 0$ کدام است؟

۱) $4k$ ۲) $\frac{k}{4}$ ۳) $8k$ ۴) k

۷ـ اگر حد عبارت $\dfrac{2x^3+x+1}{x^a+x^2+2}$ وقتی $x\to\pm\infty$ برابر صفر باشد، کدام رابطه درست است؟

۱) $a<3$ ۲) $a\geqslant 3$

۳) $a>3$ ۴) $a\leqslant 3$

۸ـ به‌ازای کدام مقدار a تابع:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a\sin x}{x}\ , & x\neq 0\\[2mm] 4a+1\ , & x=0\end{cases}$$

در نقطه $x=0$ پیوسته است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۳ ۴) -3

۹ـ در تابع:

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx-1$$

اگر: $f'(1)=0$ و $f''(-2)=6$ و $f'''(2)=-6$

باشد. اندازهٔ $3a-4b-c$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۰ ۴) ۱

۱۰ـ اندازهٔ مشتق تابع:

$$f(x)=tg\left(\cos\frac{x}{2}\right)$$

در نقطهٔ $x_0=\pi$ کدام است؟

۱) -2 ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{-1}{2}$

۱۱ـ کدام یك از توابع زیر همواره صعودی است؟

۱) $y=\frac{2}{x}$ ۲) $y=x^2+1$

۳) $y=-x^2+1$ ۴) $y=x^3+x^2+5x$

۱۲ـ اگر نقطهٔ $S(-2\,,\,4)$ رأس سهمی به معادلهٔ:

$$y=x^2+ax+b$$

باشد، اندازهٔ $2a+b$ کدام است؟

۱) -8 ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) -16

۱۳ـ ضریب‌زاویهٔ خط‌قائم برمنحنی به معادلهٔ:

$$y = -x^2 + 2x$$

درنقطه‌ای‌به عرض ۳ ــ واقع در ربع سوم‌کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) ۴ ۳) -3 ۴) $\frac{1}{3}$

۱۴ـ اگرخط مماس برمنحنی تابع:

$$y = x^3 + ax^2 + bx + 1$$

درنقطه‌ای به طول ۲ ــ موازی محورطولها باشدکدام رابطه بین a و b برقرار است؟

۱) $4a + b = 12$ ۲) $4a - b = 12$

۳) $4a - b = -12$ ۴) $-4a + b = 14$

مسائل جبر سال چهارم تجربی

۱ـ دایرهٔ به معادلهٔ :

$$x^2 + y^2 + ax + b = 0$$

مفروض است. ضرایب a و b را به قسمی تعیین‌کنیدکه طول مرکز این‌دایره برابر۱ باشد واین دایره ازخط به معادلهٔ :

$$3x - 4y + 12 = 0$$

وتری به طول ۸ جداکند.

۲ـ خطوط $x = 2$ و $y = -1$ به ترتیب محورهای کانونی و ناکانونی یك بیضی می‌باشند که خط واصل بین دو رأس A و B از آن به صورت: $3x + 2y - 10 = 0$ می‌باشد. معادلهٔ این بیضی‌را بنویسید.

۳ـ قطر اطول یك‌بیضی برقطر افقی‌دایره‌به معادلهٔ:

$$2x^2 + 2y^2 + 6x - 4y - \frac{3}{2} = 0$$

منطبق‌است وفاصلهٔ کانونی آن‌برابر۲ می‌باشد. معادله این‌بیضی را تعیین‌کنید.

۴ـ هذلولی به معادلهٔ :

$$y^2 - x^2 + 2x - 4y + 1 = 0$$

را رسم‌کنید.

نخست درعدهٔ نقاط تقاطع خط :

$$D : y = mx + 5$$

با هذلولی‌فوق بدازای‌جمیع مقادیر پارامتر m بحث کنید. سپس درحالتی‌که خط D هذلولی‌را در دو نقطهٔ M_1 و M_2 قطع‌می‌کند معادلهٔ‌مکان‌هندسی‌نقطهٔ I وسط‌پاره‌خط M_1M_2 را وقتی‌پارامتر m تغییر می‌کند، پیداکنید.

۵ـ خط $AA' : y - 2 = 0$ محورکانونی و خط :

$$\Delta : y = 7x - 1$$

مجانب ونقطهٔ $F(3 , 2)$ کانون‌یك‌هذلولی‌می‌باشند. معادلهٔ این هذلولی‌را بنویسید.

۶ـ تابع اولیه هریك ازتوابع زیررا پیداکنید.

الف) $f(x) = \sin^2 x \sin 3x$

ب) $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{\sqrt[3]{(1 + \cos^2 x)^2}} + \dfrac{x + 5}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$

۷ـ اگر :

$$F(x) = \int (x^2 - x - 1)^{\frac{3}{2}} dx$$

باشد، $F'(2)$ را محاسبه‌کنید.

۸ـ سطح محصور بین منحنی تابع

$$y = x^3 - 3x$$

ونیمساز ربع‌دوم وچهارم، آن‌قسمتی راکه‌درناحیهٔ‌دوم محورهای مختصات واقع‌است حساب‌کنید.

تستهای جبر سال چهارم تجربی

۱ـ اگر دو خط به معادلات :

$$۲x-y-۲=۰ \text{ و } ax+y+۳=۰$$

روی محور طولها متقاطع باشند اندازهٔ a کدام است؟

۱) -۳ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) -۲

۲ـ مختصات نقطه‌ای از خط به معادلهٔ $y-۲x-۱=۰$ که از خط:

$$\Delta : ۳x-۴y-۱=۰$$

به فاصلهٔ ۲ باشد کدام است؟

۱) $(۳ , ۵)$ ۲) $(-۳ , -۵)$

۳) $(-۳ , ۵)$ ۴) $(۳ , -۵)$

۳ـ اگر :

$$f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x^۲-۱}}$$

و

$$g(x)=\sqrt{x-\sqrt{x^۲-۱}}$$

باشد، حاصل $f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $۲x$ ۳) ۲ ۴) $-۲x$

۴ـ اگر :

$$f'(x)=\sqrt{\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}}$$

باشد مشتق $f(tgx)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{cos^۲x}\sqrt{cos۲x}$ ۲) $\frac{۱}{cos^۲x}\sqrt{sin۲x}$

۳) $\frac{۱}{sin^۲x}\sqrt{cos۲x}$ ۴) $\frac{۱}{sin^۲x}\sqrt{sin۲x}$

۵ـ ضریب‌زاویهٔ خط قائم برمنحنی نمایش تغییرات تابع

$$y=-۲x^۳+x^۲$$

در نقطهٔ عطفش کدام است؟

۱) -۶ ۲) -۴ ۳) -۲ ۴) -۱

۶ـ تابع :

$$y=x^۳+ax^۲+۳x-۱$$

به‌ازای چه مقادیری از a همواره صعودی است؟

۱) $-۳<a<۳$ ۲) $a>۳$

۳) $a<-۳$ ۴) $a\geqslant ۳$

۷ـ معادلهٔ :

$$(x-۱)^۳+(۴-۲x)^۳+(x-۳)^۳=۰$$

چند ریشه دارد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۰

۸ـ برمنحنی نمایش تغییرات تابع :

$$y=x^۳-۳x^۲+۲$$

دو مماس به موازات محور xها رسم‌شده است. فاصله بین این دوخط مماس چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹ـ معادلهٔ مکان هندسی مرکز تقارن منحنی تابع:

$$y=\frac{(m-۱)x+۲}{x-۲m}$$

وقتی پارامتر m تغییر می‌کند کدام است؟

۱) $y=x-۱$ ۲) $y=\frac{x}{۲}-۱$

۳) $y=۲x-۱$ ۴) $y=\frac{x}{۲}+۱$

۱۰ـ اگر از نقطهٔ $M(a-۲,b+۱)$ قائمهای بی‌شماری بردایره به معادلهٔ :

$$x^2+y^2-2x+y+1=0$$

بتوانیم رسم کنیم،مقدار $a+2b$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 0 ۳) 3 ۴) -3

۱۱ـ اندازهٔ مماس مشترك داخلی دو دایره به معادلات:

$$x^2+y^2=4 \quad \text{و} \quad (x-4)^2+(y+3)^2=1$$

کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۲ـ معادلهٔ بیضی‌که مرکزش نقطهٔ $C(2\,,\,-3)$ و برمحورهای مختصات مماس می‌باشدکدام است؟

۱) $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$

۲) $\frac{(y+3)^2}{9}+\frac{(x-2)^2}{4}=1$

۳) $\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1$

۴) $\frac{(y+3)^2}{4}+\frac{(x-2)^2}{9}=1$

۱۳ـ نقاط $F(1\,,\,1)$ و $F'(-3\,,\,1)$ کانونهای يك بیضی می‌باشندکه برمحورxها مماس‌است. طول‌قطر بزرگ‌این بیضی‌کدام است؟

۱) $2\sqrt{5}$ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $2\sqrt{3}$

۱۴ـ نقطهٔ $F(1\,,\,5)$ کانون يك‌هذلولی است که محور کانونیش‌موازی‌محورعرضها وخط $\Delta: 2y-x=3$ يك‌مجانب آن است. عرض مرکز این هذلولی‌کدام است؟

۱) -1 ۲) 0 ۳) ۱ ۴) ۲

۱۵ـ نقاط :

$$F(1+\sqrt{2}\,,\,-1) \quad \text{و} \quad F'(1-\sqrt{2}\,,\,-1)$$

کانونهای يك‌هذلولی‌متساوی‌الساقین‌می‌باشند. معادلهٔاین‌هذلولی کدام است ؟

۱) $x^2-y^2-2x=1$

۲) $x^2-y^2+2x-2y=1$

۳) $x^2-y^2-2x-2y=1$

۴) $x^2-y^2+2x-2y=1$

۱۶ـ معادلهٔ مکان هندسی‌نقاطی‌که از آن‌نقاط دو مماس عمود برهم برسهمی به معادلهٔ :

$$(y-1)^2=-2(x+2)$$

می‌توان رسم‌نمودکدام است ؟

۱) $2x+1=0$ ۲) $2x+3=0$

۳) $-2x+5=0$ ۴) $2y+3=0$

۱۷ـ اگر منحنی تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x=1$ برمحورxها مماس و $f''(x)=6x$ باشد، $f(x)$ کدام است ؟

۱) x^3-2x+1 ۲) x^3-3x+2

۳) x^3-3x^2+1 ۴) $2x^3-x^2+1$

۱۸ـ مساحت سطح محصور بین‌دوسهمی به معادلات:

$$x^2=2py \quad , \quad y^2=2px$$

کدام است ؟

۱) $\frac{4}{3}p^3$ ۲) $\frac{4}{3}p^2$

۳) $\frac{3}{4}p^2$ ۴) $\frac{3}{4}p^3$

مسائل مثلثات دوم تجربی و ریاضی

۱ـ معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید. [رشته تجربی]

الف) $cosec^4 2x - 4 = 0$

ب) $cotg\,x + tg\,x = cosec\,x + sec\,x$

ج) $2\sin^3 x + \sin^2 x - 2\sin x - 1 = 0$

د) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$

۲ـ معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید. [رشته ریاضی]

الف) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$

ب) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$

۳ـ از دستگاه زیر x را حذف کنید:

$$\begin{cases} cosec\,x - \sin x = a \\ sec\,x - \cos x = b \end{cases}$$

۴ـ ثابت کنید ماکزیمم و می‌نیمم عبارت مثلثاتی:

$y = a\sin x + b\cos x$

به ترتیب عبارت است از:

$\sqrt{a^2+b^2}$ و $-\sqrt{a^2+b^2}$

تستهای مثلثات سال دوم تجربی و ریاضی

۱ـ انتهای کمانهای مثلثاتی $\frac{3k\pi}{5}+\alpha$ در دایرهٔ مثلثاتی رئوس کدام شکل‌اند؟

۱) پنج‌ضلعی منتظم ۲) مثلث متساوی‌الاضلاع

۳) پنج‌ضلعی غیرمشخص ۴) ده‌ضلعی منتظم

۲ـ اگر $\frac{\sin\alpha}{tg\alpha}>0$ باشد انتهای کمان α در کدام ربع دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد؟

۱) فقط ربع اول ۲) فقط ربع دوم

۳) ربعهای اول و سوم ۴) ربعهای اول و چهارم

۳ـ در صورتی که:

$$\frac{-\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

باشد حداکثر مقدار عبارت $\sin^2 x - 2\sin x$ کدام است؟

۱) $\frac{11}{4}$ ۲) $\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{7}{4}$ ۴) $\frac{5}{4}$

۴ـ عبارت:

$$\sin\frac{217\pi}{6}\cos\left(\frac{-217\pi}{6}\right)tg\left(\frac{-137\pi}{6}\right)$$

مساوی کدام مقدار است؟

۱) $\frac{-1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{-1}{4}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۵ـ حاصل عبارت:

$$cotg\left(\frac{11\pi}{2}-x\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)-tg\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\cos(7\pi+x)$$

کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sin 2x}$ ۲) $\frac{2}{\sin 2x}$

۳) $\frac{1}{\cos 2x}$ ۴) $\frac{2}{\cos 2x}$

۶ـ اگر:

$cotg\varphi = m-1$

$(m \leqslant -2\ ,\ m \geqslant 0)\ ,\ \sin\varphi = \frac{1}{m+1}$

باشد، $\cos\varphi$ چقدر است؟

۱) $\frac{4}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{-3}{5}$ ۴) $\frac{-4}{5}$

۷ـ حاصل عبارت:

$$\frac{\sin^2 x\, tg^2 x}{1+tg^2 x}+\frac{\cos^2 x\, cotg^2 x}{1+cotg^2 x}+2\sin^2 x\cos^2 x$$

کدام است؟

۱) 1 ۲) -1 ۳) 2 ۴) -2

۸ـ مجموع جوابهای معادلهٔ:

$$\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=0$$

که درفاصله $[0\ ,\ \pi]$ واقع‌اند کدام است؟

۱) $\frac{6\pi}{5}$ ۲) $\frac{11\pi}{9}$ ۳) $\frac{13\pi}{9}$ ۴) $\frac{15\pi}{9}$

مسائل مثلثات سال سوم تجربی و ریاضی

۱ـ هریك‌از معادله‌های زیررا حل‌کنید:

الف) $2\sin x-4\sin^3 x=\cos 3x+\cos x$

ب) $1-4\cos^4\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin 6x$

ج) $Arc\ tg\,\frac{x+1}{x^2+1}+2Arc\ \cos\frac{1}{2}-$

$Arc\ \cos\left(-\frac{1}{2}\right)=Arc\ \sin\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲ـ هریك‌از عبارتهای زیر را به مجموع تبدیل‌کنید.

الف) $4\sin^2 2x\cos 3x$

ب) $4\cos x\cos(60-x)\cos(60+x)$

۳ـ مشتق هریك‌از توابع زیررا به دست‌آورید.

الف) $y=\sin^3\sqrt[5]{x^2+x-1}$

ب) $y=tg\sqrt{x}+\sqrt{tg x}$

ج) $y=\cos\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}}$

د) $y=tg^3 2x\cdot cotg^5(x+\sqrt{x})$

۴ـ اگر:

$y=\sin^3 2x\cos 2x-\cos^3 2x\sin 2x$

باشد ثابت‌کنیدکه $y''-64y=0$ است.

تستهای مثلثات سال سوم تجربی و ریاضی

۱ـ حاصل عبارت:

$\sin x+\cos x-|\sin x-\cos x|$

وقتی $\frac{\pi}{2}<\frac{x}{2}<\frac{5\pi}{8}$ باشدکدام است؟

۱) $2\sin x$ ۲) $2\cos x$

۳) $\sin x$ ۴) $\cos x$

۲ـ اگر:

$\cos 4x=3m-2$ و $\frac{-\pi}{12}<x\leqslant\frac{\pi}{12}$

باشد حدود m کدام است؟

۱) $\frac{5}{6}<m<1$ ۲) $\frac{5}{6}<m\leqslant 1$

۳) $\frac{5}{6}\leqslant m<1$ ۴) $\frac{5}{6}\leqslant m\leqslant 1$

۳ـ در صورتی که:

$\cos x<0$ و $\sin x=\frac{-\sqrt{3}}{2}$

باشد $tg\frac{x}{4}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\frac{-\sqrt{3}}{3}$ ۴) $-\sqrt{3}$

۴ـ معادلهٔ :

$$2(\sin 3x\cos x-\cos 3x\sin x)=1$$

در فاصلهٔ $[\pi\ ,\ 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵ـ عبارت $tg10^\circ tg50^\circ tg70^\circ$ با کدام یک از مقادیر زیر برابر است؟

۱) $tg80^\circ$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۳) $tg40^\circ$ ۴) $\sqrt{3}$

۶ـ عبارت $\sin 42+\cos 72$ برابر کدام یک از عبارتهای زیر است؟

۱) $\sqrt{3}\cos 12$ ۲) $\cos 24$

۳) $\cos 12$ ۴) $\sqrt{3}\cos 24$

۷ـ حاصل عبارت :

$$\sin\left[3\,\text{Arc}\cos\frac{1}{2}+2\,\text{Arc}\,tg(1)+\text{Arc}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}-2\,\text{Arc}\,cotg(-\sqrt{3})\right]$$

کدام است ؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\frac{-1}{2}$ ۴) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

۸ـ حاصل عبارت:

$$\sin x\cos x+\sin x\cos 3x+\sin x\cos 5x+\sin x\cos 7x-\frac{1}{2}\sin 8x$$

کدام است ؟

۱) $\sin 9x$ ۲) $\sin 8x$

۳) $\sin 7x$ ۴) ۰

مسائل مثلثات سال چهارم تجربی

۱ـ در صورتی که :

$$0<x<\frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad \sin 2x=\frac{1}{4}$$

باشد $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ را به دست آورید.

۲ـ معادلهٔ :

$$(m-2)\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=m+3$$

مفروض است .

اولاً ـ حدود m را به‌قسمی بیابید که معادله دارای جواب باشد .

ثانیاً ـ مقدار m را طوری تعیین کنید که یک جواب معادله $x=\frac{\pi}{2}$ باشد.

ثالثاً ـ مقدار m را چنان بیابید که $tg\frac{x}{4}=2$ باشد.

۳ـ هریک از معادله‌های زیر را حل کنید.

$$\sin^2 2x-\cos\left(\frac{3\pi}{2}-4x\right)=1$$

$$cotg\frac{x}{2}-tg\frac{x}{2}=2\sqrt{3}$$

$$2\sin\frac{x}{2}+\sin x=1+2\cos\frac{x}{2}$$

$$\cos 3x\cos 2x=\sin 3x\sin 2x-1$$

۴ـ مقدار a را به قسمی تعیین کنید که خط $x=\frac{2\pi}{3}$ یک مجانب قائم منحنی نمایش تغییرات تابع:

$$y=\frac{a\sin x}{a+2\cos 2x}$$

باشد.

۵ـ اگر:

$$\cos C=\frac{3}{5} \quad و \quad b=4 \quad و \quad a=10$$

باشد مساحت مثلث ABC را به دست آورید.

۶ـ نوع مثلثی‌را که درآن رابطهٔ $b=2a\cos C$ برقرار است تعیین کنید.

۷ـ اندازهٔ می‌نیمم تابع:

$$y=\frac{\cos x}{2\cos x-1}$$

را درفاصلهٔ $[0\ ,\ 2\pi]$ به‌دست‌آورید.

تستهای مثلثات سال چهارم تجربی

۱ـ اگر:

$$2\pi<x<3\pi \quad و \quad tg\,\frac{x}{2}=2-\sqrt{3}$$

باشد، اندازهٔ $tg\,4x$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۲) $-\sqrt{3}$ ۳) 1 ۴) -1

۲ـ حاصل کسر:

$$\frac{\sin(\pi-x)+2\sin 2x-\cos(\frac{\pi}{2}+3x)}{\cos(2\pi-x)+2\cos 2(x+\pi)+\cos 3x}$$

کدام است؟

۱) $tg\,x$ ۲) $tg\,2x$ ۳) $\sin x$ ۴) $\sin 2x$

۳ـ مجموع جوابهای معادلهٔ:

$$tg\frac{x}{2}+cotg\frac{x}{2}=4$$

درفاصلهٔ $[\frac{\pi}{2}\ ,\ \pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{3\pi}{4}$ ۴) $\frac{5\pi}{6}$

۴ـ به‌ازای‌کدام مقدار m معادلهٔ:

$$m\sin x+(m-3)\cos x=2-m$$

دارای جواب است؟

۱) هیچ مقدار ۲) ۳

۳) ۲ ۴) همه مقادیر

۵ـ بیشترین مقدار عبارت $1-\cos^2 x+3\cos x$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶ـ کوچکترین دورهٔ تناوب تابع:

$$f(x)=\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+\cos^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

کدام است؟

۱) π ۲) 2π ۳) 4π ۴) 6π

۷ـ یك جواب‌کلی معادلهٔ:

$$8\cos\frac{x}{3}\cos\frac{x}{6}\cos\frac{x}{12}\sin\frac{x}{12}=1$$

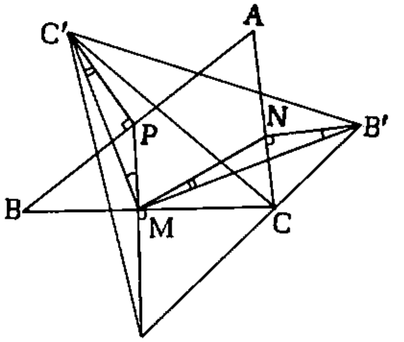
کدام است؟

۱) $x=3k\pi+\frac{3\pi}{4}$ ۲) $x=3k\pi+\frac{\pi}{4}$

۳) $x=2k\pi+\frac{5\pi}{4}$ ۴) $x=2k\pi+\pi$

حل مسائل مسابقه‌ای

حل۱ - اولاً ـ نقطهٔ M را به نقاط N و P وصل می‌کنیم. دومثلث MPC' و MNB' به‌حالت برابری دوضلع و زاویهٔ بین متساوی‌اند زیرا :



$$MP \parallel AC\ ,\ MP=\frac{AC}{۲}=NB'$$

$$MN \parallel AB\ ,\ MN=\frac{AB}{۲}=PC'$$

$$M\hat{P}C'=M\hat{N}B'=۹۰^\circ+\hat{A}$$

(چهار ضلعی ANMP متوازی الاضلاع است)

در نتیجه $MB'=MC'$ یعنی مثلث $MB'C'$ متساوی‌الساقین است. ازطرفی چون زاویهٔ $CNB'=۹۰^\circ$ است پس‌در مثلث MNB' داریم :

$$B'\hat{M}N+M\hat{B}'N+C\hat{N}M=۹۰^\circ$$

اما $N\hat{B}'M=P\hat{M}C'$ و $C\hat{N}M=N\hat{M}P$

در نتیجه : $B'\hat{M}N+P\hat{M}C'+N\hat{M}P=۹۰^\circ$

$$\Longrightarrow B'\hat{M}C'=۹۰^\circ$$

لذا مثلث $MB'C'$ قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است .

ثانیاً ـ دومثلث $MA'B'$ و MCC' باهم برابرند زیرا:

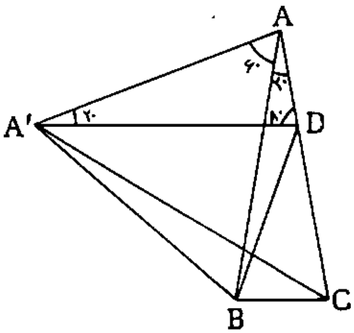
$$MB'=MC' \text{ و } MA'=MC=\frac{BC}{۲} \text{ و}$$

$$A'\hat{M}B'=C\hat{M}C'=۹۰^\circ+C\hat{M}B'$$

پس $CC'=A'B'$ و $M\hat{C}'C=M\hat{B}'A'$ است و چون دوضلع دو زاویهٔ اخیر برهم‌عمودند ($MC'\perp MB'$) پس $CC'\perp A'B'$ است.

ثالثاً ـ بنابه قسمت ثانیاً $CC'\perp A'B'$ است یعنی $C'C$ ارتفاع رأس C' ازمثلث $A'B'C'$ است: به‌همین‌ترتیب ثابت می‌شودکه خطوط AA' و BB' نیز دو ارتفاع دیگر مثلث $A'B'C'$ می‌باشند، پس خطوط AA' و BB' و CC' متقارب‌اند.

حل ۲- مثلث متساوی الساقین $A'AD$ را مساوی مثلث متساوی‌الساقین ABC چنان‌رسم می‌کنیم که قاعده‌اش پاره‌خط AD باشد. از نقطهٔ A' به‌نقاط B و C وصل می‌کنیم مثلث $AA'B$ متساوی‌الاضلاع است زیرا داریم:



$$A'A=A'D=AB=AC$$

$$A'\hat{A}B=۸۰^\circ-۲۰^\circ=۶۰^\circ$$

پس $A'B=A'A=AB$ و $A'\hat{B}A=A\hat{A}'B=۶۰^\circ$ است در نتیجه $A'B=A'D$ و $D\hat{A}'B=۴۰^\circ$ است . در مثلث متساوی الساقین $DA'B$ چون اندازهٔ زاویهٔ رأس $D\hat{A}'B=۴۰^\circ$ است پس هریک‌از زوایای مجاور به‌قاعدهٔ آن برابر ۷۰° می‌باشد یعنی :

$$A'\hat{B}D=A'\hat{D}B=۷۰^\circ$$

است و چون $A'\hat{D}A=A\hat{B}C=۸۰^\circ$ است پس:

$$B\hat{D}C=۱۸۰^\circ-(۸۰^\circ+۷۰^\circ)=۳۰^\circ$$

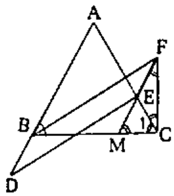
حل مسائل

حل مسائل هندسهٔ سال اول

حل ۱- امتداد FE ضلع BC را در نقطهٔ M قطع می‌کند. دو مثلث MEC و FEC متساوی‌الساقین‌اند زیرا:

$BD = EC$ و $BD = EF$

پس $EF = EC$ است. از طرفی $FM \parallel AB$، پس $\hat{M} = \hat{B}$، اما $\hat{B} = \hat{C}_۱$ پس $\hat{M} = \hat{C}_۱$ لذا $EM = EC$ می‌باشد. در نتیجه $EC = EM = EF$ است. چون در مثلث

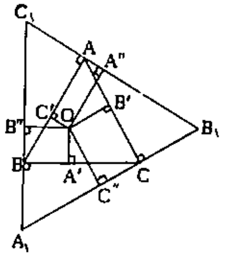


MFC میانهٔ وارد بر ضلع MF نصف آن ضلع است، این مثلث قائم‌الزاویه در رأس C است یعنی:

$F\hat{C}M = ۹۰^\circ$

و در نتیجه FC بر BC عمود است.

حل ۲- در نقاط A و B و C خطوطی عمود بر اضلاع AB و BC و AC رسم می‌کنیم تا در نقاط $A_۱$ و $B_۱$ و $C_۱$ یکدیگر را قطع نمایند. مثلث $A_۱B_۱C_۱$ نیز متساوی‌الاضلاع است زیرا سه مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC_۱$ و $BCA_۱$ و $ACB_۱$ باهم برابرند. حال اگر از نقطهٔ O عمودهای OA'' و OB'' و OC'' را بر اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع $A_۱B_۱C_۱$ فرود آوریم می‌دانیم که $OA''+OB''+OC''$ مقداری ثابت مساوی ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع $A_۱B_۱C_۱$ است اما چهارضلعیهای $OC'AA''$ و $OA'BB''$ و $OB'CC''$ مستطیل می‌باشند لذا



$OA'' = AC'$ و $OB'' = A'B$ و $OC'' = CB'$ است پس داریم:

$$AC' + BA' + CB' = OA'' + OB'' + OC'' = C''$$

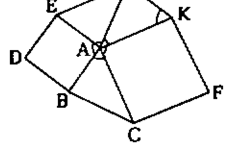
نکته: مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع در داخل مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن، مقداری است ثابت، مساوی ارتفاع آن مثلث.

حل ۳- دو مثلث AMK و ABC به حالت برابری دو ضلع و زاویهٔ بین باهم مساوی‌اند زیرا:

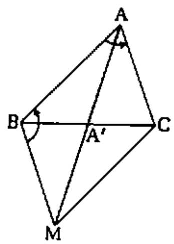
$AB = AE = MK$ و $AC = AK$

$B\hat{A}C = M\hat{K}A = ۱۸۰ - E\hat{A}K$

پس $AM = BC$ است.



حل ۴- در مثلث ABC میانه AA' را از طرف نقطهٔ A' به اندازهٔ خود تا نقطهٔ M امتداد می‌دهیم و از M به نقاط B و C وصل می‌کنیم. چهارضلعی ABMC متوازی‌الاضلاع است پس $MB = AC$ و دو زاویهٔ ABM و BAC مکمل یکدیگرند.



حال اگر:

$$AA' = \frac{BC}{۲}$$

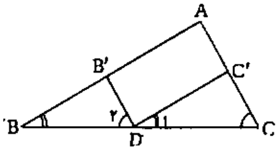
باشد، $AM = ۲AA' = BC$ خواهد بود و در نتیجه متوازی‌الاضلاع ABMC دو قطر مساوی خواهند بود پس ABMC مستطیل می‌باشد و در نتیجه $B\hat{A}C = ۹۰^\circ$ خواهد بود. در صورتی که $AA' > \frac{BC}{۲}$ باشد، $AM > BC$ و در دو مثلث ABM و ABC که $AB = AB$ و $MB = AC$، چون $AM > BC$ است، پس $A\hat{B}M > B\hat{A}C$ و چون این دو زاویه مکمل‌اند پس $B\hat{A}C < ۹۰^\circ$ خواهد بود. به همین ترتیب ثابت می‌شود که اگر $AA' < \frac{BC}{۲}$ باشد:

$$B\hat{A}C > ۹۰^\circ$$

است.

حل ۵- چهار ضلعی $AB'DC'$ متوازی‌الاضلاع است پس $AB'=DC'$ و $AC'=DB'$ و $\hat{D}_1=\hat{B}$ و $\hat{C}=\hat{D}_2$ است. چون $AB>AC$ است پس $\hat{C}>\hat{B}$ می‌باشد. در مثلث DBB' داریم:

$$\hat{D}_2=\hat{C}>\hat{B} \Rightarrow DB'<BB'$$



از طرفی $DC'=AB'$ است. از این‌دو رابطه نتیجه می‌شود:

$$DB'+DC'<BB'+AB'=AB$$

و در مثلث DCC' داریم:

$$\hat{C}>\hat{D}_1=\hat{B} \Rightarrow DC'>CC'$$

از طرفی $DB'=AC'$ پس:

$$DC'+DB'>CC'+AC'=AC$$

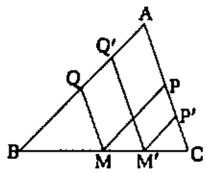
در نتیجه $AC<DB'+DC'<AB$.

حل مسائل هندسهٔ سال دوم ریاضی فیزیک

حل ۱- بنابه خاصیت‌خطوط متوازی‌که دوخط را قطع کرده‌اند داریم:

$$AB\|PM\|P'M' \Rightarrow \frac{PP'}{MM'}=\frac{AC}{BC} \quad (۱)$$

$$AC\|Q'M'\|QM \Rightarrow \frac{QQ'}{MM'}=\frac{AB}{BC} \quad (۲)$$



از تقسیم روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که:

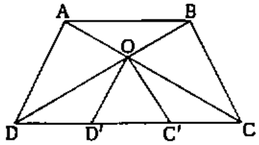
$$\frac{PP'}{QQ'}=\frac{AC}{AB}$$

حل ۲- در مثلث ADC داریم:

$$OD'\|AD \Rightarrow \frac{DD'}{DC}=\frac{AO}{AC} \quad (۱)$$

و در مثلث BDC داریم:

$$OC'\|BC \Rightarrow \frac{CC'}{CD}=\frac{OB}{BD} \quad (۲)$$



از طرفی در ذوزنقه ABCD داریم:

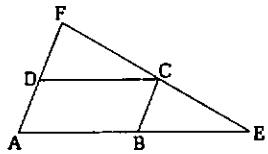
$$\frac{AO}{AC}=\frac{BO}{BD} \quad (۳)$$

از مقایسه روابط (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌شود کــه $\frac{DD'}{DC}=\frac{CC'}{DC}$ ودرنتیجه $DD'=CC'$ است.

حل ۳- در مثلث AEF داریم:

$$BC\|AF \Rightarrow \frac{AB}{AE}=\frac{FC}{FE} \quad (۱)$$

$$DC\|AE \Rightarrow \frac{AD}{AF}=\frac{CE}{EF} \quad (۲)$$

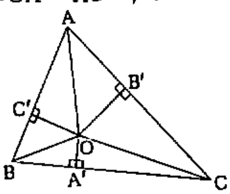


از جمع روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{AB}{AE}+\frac{AD}{AF}=\frac{FC+CE}{EF}=\frac{EF}{EF}=1$$

حل ۴- ازنقطهٔ O به رئوس مثلث وصل می‌کنیم. در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OAC' و OBC' داریم:

$$OC'^2=OA^2-AC'^2 \ , \ OC'^2=OB^2-BC'^2$$



در نتیجه خواهیم داشت:

$$OA^2-AC'^2=OB^2-BC'^2$$

و یا

$$AC'^2-BC'^2=OA^2-OB^2 \quad (۱)$$

وبه طریق مشابه خواهیم داشت:

$$CB'^2-AB'^2=OC^2-OA^2 \quad (۲)$$

و

$$BA'^2-CA'^2=OB^2-OC^2 \quad (۳)$$

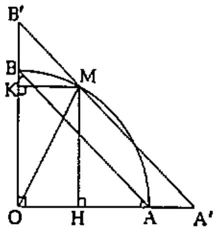
از جمع روابط (۱) و (۲) و (۳) داریم:

$$AC'^2-BC'^2+CB'^2-AB'^2+BA'^2-CA'^2=0$$

و از آنجا:

$$AC'^2+CB'^2+BA'^2=BC'^2+AB'^2+CA'^2$$

حل ۵- ازنقطهٔ M عمودهای MH و MK را به‌ترتیب بر OA و OB فرود می‌آوریم واز M به O وصل می‌کنیم. مثلثهای MHA' و MKB' قائم الزاویهٔ متساوی الساقین می‌باشند زیرا زوایای A' و B' هرکدام‌مساوی ۴۵° می‌باشند. (مثلث OAB قائم‌الزاویهٔ متساوی الساقین است و $A'B'\|AB$ و $O\hat{A}B=O\hat{B}A=45°$ است.) در نتیجه $MH=HA'$ و $MK=KB'$ است.



در مثلثهای قائم الزاویهٔ MHA' و MKB' می‌توان نوشت:

$$MA'^2=MH^2+HA'^2=2MH^2 \quad (۱)$$

و

$$MB'^2=MK^2+KB'^2=2MK^2 \quad (۲)$$

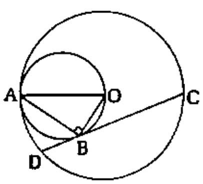
$$(1)+(2) \Rightarrow MA'^2+MB'^2=2(MH^2+MK^2)=2OM^2=2R^2=(\sqrt{2}R)^2=AB^2$$

حل مسائل هندسهٔ سال سوم ریاضی فیزیک

حل ۱- ازنقطهٔ O به‌نقطهٔ B وصل می‌کنیم بنابه تعریف قوت یك‌نقطه نسبت‌به یك‌دایره داریم:

$$\overline{BD}\cdot\overline{BC}=d^2-R^2 \Rightarrow$$

$$BD\cdot BC=R^2-d^2=OA^2-OB^2$$

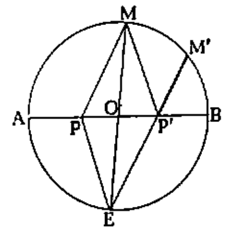


اما مثلث OAB قائم‌الزاویه در رأس B است لذا:

$$OA^2-OB^2=AB^2$$

پس داریم: $BD\cdot BC=AB^2$ (با رعایت اندازهٔ جبری می‌توان نوشت $\overline{BD}\cdot\overline{BC}=-AB^2$).

حل ۲- از نقطهٔ M به O مرکز دایره وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را درنقطهٔ E قطع کند. از E به نقاط P و P' وصل می‌کنیم. چهار ضلعی MPEP' متوازی‌الاضلاع است زیرا اقطار آن منصف یکدیگرند پس $PM = P'E$ است. ازطرفی M'P'E خط راست است زیرا :



$P'E \parallel PM$ و $P'M' \parallel PM$

می‌باشد. پس اگر قوت نقطهٔ P' را نسبت به دایرهٔ O بنویسیم خواهیم داشت :

$$\overline{P'M'} \cdot \overline{P'E} = \overline{P'A} \cdot \overline{P'B}$$

و با توجه به اینکه :

$$\overline{P'A} \cdot \overline{P'B} = P'O^2 - R^2 \quad , \quad P'E = PM$$

است داریم :

$$\overline{P'M'} \cdot \overline{PM} = R^2 - P'O^2 = C^{te}$$

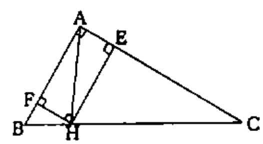
بنابراین حاصلضرب $PM \cdot P'M'$ مقداری‌است ثابت‌که با تغییر امتداد خطوط متوازی PM و P'M' تغییر نمی‌نماید.

حل ۳- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:

$$AB^2 = BH \cdot BC \text{ و } AC^2 = CH \cdot BC \Longrightarrow$$

$$\frac{AC^2}{AB^2} = \frac{CH \cdot BC}{BH \cdot BC} \Longrightarrow \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{CH}{BH} \Longrightarrow$$

$$\frac{AC^4}{AB^4} = \frac{CH^2}{BH^2} \quad (1)$$



ازطرفی در دومثلث قائم‌الزاویهٔ AHB و AHC داریم:

$$BH^2 = BF \cdot AB \quad , \quad CH^2 = CE \cdot AC$$

پس اگردررابطهٔ (۱) بجای CH^2 و BH^2 مقادیرمساوی‌شان را قراردهیم خواهیم داشت:

$$\frac{AC^4}{AB^4} = \frac{CE \cdot AC}{BF \cdot AB} \Longrightarrow \frac{AC^3}{AB^3} = \frac{CE}{BF}$$

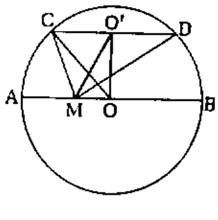
حل ۴- از نقطهٔ O به‌نقطهٔ O' وسط‌وتر CD وصل‌می‌کنیم. می‌دانیم‌که OO' عمود منصف‌وتر CD است. همچنین از O به C وصل می‌کنیم. بنابه‌خاصیت‌میانه درمثلث MCD می‌توان نوشت :

$$MC^2 + MD^2 = 2MO'^2 + \frac{CD^2}{2}$$

$$= 2MO'^2 + 2O'C^2 = 2(MO'^2 + O'C^2)$$

$$= 2(OM^2 + OO'^2 + O'C^2) = 2(OM^2 + OC^2)$$

$$= 2OM^2 + 2R^2 \quad (1)$$



از طرفی : $MB = OB + OM = R + OM$

$MA = OA - OM = R - OM \;,\; OA = OB = R$

است پس:

$$MA^2 + MB^2 = (R - OM)^2 + (R + OM)^2$$

$$= 2OM^2 + 2R^2 \quad (2)$$

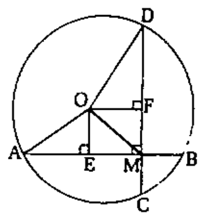
از مقایسهٔ روابط(۱) و (۲) نتیجه می‌شود که:

$$MC^2 + MD^2 = MA^2 + MB^2$$

حل ۵- عمودهای OE و OF را ازمرکز دایره‌به‌ترتیب بروترهای AB و CD فرود می‌آوریم واز O به نقاط M و A و D وصل می‌کنیم. می‌دانیم‌که $AE = EB$ و $DF = FC$ و چهار ضلعی OEMF مستطیل است. در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ OAE و OFD می‌توان نوشت:

$$AE^2 = OA^2 - OE^2 = R^2 - OE^2$$

$$DF^2 = OD^2 - OF^2 = R^2 - OF^2$$



ازجمع این دو رابطه نتیجه می‌شود :

$$AE^2 + DF^2 = 2R^2 - (OE^2 + OF^2)$$

اما درمستطیل OEMF.

$$OE^2 + OF^2 = OM^2$$

است پس $AE^2 + DF^2 = 2R^2 - OM^2$ ، از طرفی :

$$DF = \frac{CD}{2} \quad , \quad AE = \frac{AB}{2}$$

است پس خواهیم داشت:

$$AB^2 + CD^2 = 4(AE^2 + DF^2)$$

$$= 8R^2 - 4OM^2 = C^{te}$$

با توجه به‌اینکه R و OM مقادیر ثابتی می‌باشند پس:

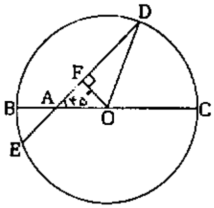
$$AB^2 + CD^2$$

مقداری ثابت است.

حل ۶- از O عمود OF را بر وتر DE رسم می‌کنیم $FE = FD$ ومثلث AOF ، قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است پس $AF = OF$ می‌باشد. حال می‌توان نوشت:

$$AD = AF + FD = OF + FD$$

و $AE = EF - AF = FD - OF$



از آنجا خواهیم داشت :

$$AD^2 + AE^2 = (OF + FD)^2 + (FD - OF)^2$$

$$= 2(OF^2 + FD^2) = 2OD^2 \Longrightarrow$$

$$AD^2 + AE^2 = 2R^2$$

حل مسائل هندسهٔ سال‌چهارم ریاضی فیزیک

حل ۱:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{AB}(1\,,\,3\,,\,-2)$$

$$\Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x_B - x_A = 1 \\ y_B - y_A = 3 \\ z_B - z_A = -2 \end{array} \right. \quad ، \quad \left| \begin{array}{l} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{5}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1}{2} \\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2} = 2 \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x_A + x_B = 5 \\ y_A + y_B = 1 \\ z_A + z_B = 4 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x_B - x_A = 1 \\ x_A + x_B = 5 \end{cases} \Longrightarrow x_A = 2 \text{ و } x_B = 3$$

$$\begin{cases} y_B - y_A = 3 \\ y_A + y_B = 1 \end{cases} \Longrightarrow y_A = -1 \text{ و } y_B = 2$$

$$\begin{cases} z_B - z_A = -2 \\ z_A + z_B = 4 \end{cases} \Longrightarrow z_A = 3 \text{ و } z_B = 1$$

$$\Longrightarrow A(2\,,\,-1\,,\,3) \;,\; B(3\,,\,2\,,\,1)$$

حل ۲-

$$\sum_{i=1}^{3} \vec{v_i} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{v_1} + \vec{v_2} + \vec{v_3} = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow \vec{v_1} + \vec{v_2} = -\vec{v_3}$$

(الف) $(\vec{v_1} + \vec{v_2}) \cdot (\vec{v_1} + \vec{v_2}) = (-\vec{v_3}) \cdot (-\vec{v_3})$

$$\Rightarrow |\vec{v}_1|^2+|\vec{v}_2|^2+2(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2)=|\vec{v}_3|^2$$
$$\Rightarrow 9+4+2(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2)=25$$
$$\Rightarrow \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=6$$

ب) $(\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3)^2=0$

$$\Rightarrow |\vec{v}_1|^2+|\vec{v}_2|^2+|\vec{v}_3|^2+$$
$$2(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2+\vec{v}_2\cdot\vec{v}_3+\vec{v}_1\cdot\vec{v}_3)=0 \Rightarrow$$
$$9+4+25+2(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2+\vec{v}_2\cdot\vec{v}_3+\vec{v}_3\cdot\vec{v}_1)=0$$
$$\Rightarrow \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2+\vec{v}_2\cdot\vec{v}_3+\vec{v}_3\cdot\vec{v}_1=-19$$

ج) $\vec{v}_1\cdot(\vec{v}_2+\vec{v}_3)=\vec{v}_1\cdot(-\vec{v}_1)$

$$=-|\vec{v}_1|^2=-9$$

حل ۳- فرض می‌کنیم $\vec{v}(X\,,\,Y\,,\,Z)$ باشد. باتوجه به اینکه زاویهٔ بردار v با محورzها منفرجه‌است داریم:

$$\vec{v}\perp\vec{v}_1 \Rightarrow 3X+2Y+2Z=0$$
$$\vec{v}\perp\vec{v}_2 \Rightarrow 18X-22Y-5Z=0$$
$$|\vec{v}|=14 \Rightarrow \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}=14$$
$$\Rightarrow X^2+Y^2+Z^2=196$$
$$\begin{cases}3X+2Y+2Z=0\\18X-22Y-5Z=0\\X^2+Y^2+Z^2=196\end{cases} \Rightarrow \left|\begin{array}{l}X=4\\Y=6\\Z=-12\end{array}\right.$$
$$\Rightarrow \vec{v}(4\,,\,6\,-12)$$

حل ۴ - راه‌اول: معادلهٔ‌صفحه‌ای‌راکه ازسه‌نقطه ازنقاط فوق می‌گذرد می‌نویسیم. مختصات نقطهٔ چهارم در معادلهٔ این صفحه نباید صدق کند.

$$A\left|\begin{array}{l}5\\5\\4\end{array}\right. \quad B\left|\begin{array}{r}2\\-1\\1\end{array}\right. \quad C\left|\begin{array}{l}4\\1\\3\end{array}\right. \Rightarrow$$
$$\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l}-3\\-6\\-3\end{array}\right. \quad \overrightarrow{AC}\left|\begin{array}{l}-1\\-4\\-1\end{array}\right.$$
$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\left|\begin{array}{l}6-12=-6=a\\3-3=0=b\\12-6=6=c\end{array}\right. \Rightarrow$$

بردار عمود برصفحهٔ ABC $\vec{v}\left|\begin{array}{l}-6\\0\\6\end{array}\right. \Rightarrow$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \Rightarrow$$
$$-6(x-5)+0(y-5)+6(z-4)=0 \Rightarrow$$
$$-6x+6z+6=0 \Rightarrow -x+z+1=0$$

معادلهٔ صفحهٔ ABC

$$D(3\,,\,2\,,\,-1) \xrightarrow{\text{درمعادلهٔ‌صفحه ABC}} -3-1+1=0$$
$$\Rightarrow -3\neq 0$$

پس نقطهٔ D روی صفحهٔ ABC نیست.

درنتیجه چهارنقطه روی یك صفحه قرار ندارند.

راه دوم: تصاویر بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ را به‌دست می‌آوریم وحاصل‌ضرب مختلط این سه‌بردار‌را محاسبه می‌کنیم اگر این‌حاصل‌ضرب مساوی‌صفرباشد چهار نقطه روی یك‌صفحه قرار دارند و اگر مخالف صفر باشد چهار نقطه روی یك‌صفحه نیستند.

$$A\left|\begin{array}{l}5\\5\\4\end{array}\right. \quad B\left|\begin{array}{r}2\\-1\\1\end{array}\right. \quad C\left|\begin{array}{l}4\\1\\3\end{array}\right. \quad D\left|\begin{array}{r}3\\2\\-1\end{array}\right. \Rightarrow$$
$$\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l}-3\\-6\\-3\end{array}\right. \quad \overrightarrow{AC}\left|\begin{array}{l}-1\\-4\\-1\end{array}\right. \quad \overrightarrow{AD}\left|\begin{array}{l}-2\\-3\\-5\end{array}\right.$$

اما حاصل ضرب مختلط سه بردار $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ و $\vec{v}_3$ به صورت‌زیر تعریف می‌شود.

$$(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2\cdot\vec{v}_3)=\vec{v}_1\cdot(\vec{v}_2\wedge\vec{v}_3)$$

بنابراین داریم:

$$(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD})$$

اما: $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD}(17\,,\,-3\,,\,-5)$

$$\overrightarrow{AB}(-3\,,\,-6\,,\,-3)$$
$$\Rightarrow (\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD})$$
$$=17(-3)+(-3)(-6)+(-5)(-3)$$
$$=-18\neq 0$$

پس چهارنقطهٔ A و B و C و D روی‌یك صفحه‌قرار ندارند.

حل ۵- نقطهٔ برخورد میانه‌ها

$$G\left|\begin{array}{l}x=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{5-1+2}{3}=2\\[2mm] y=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=\dfrac{0+3+0}{3}=1\\[2mm] z=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}=\dfrac{-1+1+3}{3}=1\end{array}\right.$$

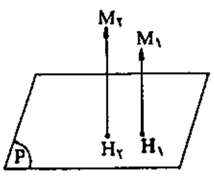
معادلهٔ صفحات عمود برمحورyها به‌صورت $y=k$ است‌پس معادلهٔ‌صفحهٔ مطلوب به صورت $y=1$ است.

حل ۶-

$$A(-3\,,\,1\,,\,4) \text{ و } B(2\,,\,-4\,,\,-6)$$
$$2\overrightarrow{MA}=-3\overrightarrow{MB} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}}=\frac{-3}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=\frac{-3}{2} \Rightarrow$$
$$x_M=\frac{kx_B-x_A}{k-1}=\frac{-\frac{3}{2}(2)-(-3)}{-\frac{3}{2}-1}=0$$
$$y_M=\frac{ky_B-y_A}{k-1}=\frac{-\frac{3}{2}(-4)-1}{-\frac{3}{2}-1}=-2$$
$$z_M=\frac{kz_B-z_A}{k-1}=\frac{-\frac{3}{2}(-6)-4}{-\frac{3}{2}-1}=-2$$
$$\Rightarrow M(0\,,\,-2\,,\,-2)$$
$$\overrightarrow{AB}(2+3\,,\,-4-1\,,\,-6-4) \Rightarrow$$
$$\overrightarrow{AB}(5\,,\,-5\,,\,-10)$$
$$P: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$\Rightarrow 5(x-0)-5(y+2)-10(z+2)=0$$
$$\Rightarrow P: 5x-5y-10z-30=0 \Rightarrow$$
$$x-y-2z-6=0$$

حل ۷- اگر از دونقطهٔ M_1 و M_2 عمودهای M_1H_1 و M_2H_2 را برصفحهٔ P فرودآوریم برای‌تعیین وضع‌دونقطهٔ M_1 و M_2 نسبت به صفحهٔ P کافی است $\overline{H_1M_1}$ و $\overline{H_2M_2}$ را محاسبه‌کنیم. اگر این‌دو مقدار متحدالعلامه باشند نقاط M_1 و M_2 دریکطرف‌صفحهٔ P واقع‌اند واگر مختلف‌العلامه‌باشند این دونقطه در دوطرف صفحهٔ P قرار دارند.

$$M_1(1\,,\,-2\,,\,2) \text{ و } M_2(0\,,\,3\,,\,-1)$$
$$P: 2x-y+2z-5=0$$
$$\overline{H_1M_1}=\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=$$
$$\frac{2(1)-(-2)+2(2)-5}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{+3}{3}=+1$$
$$\overline{H_2M_2}=\frac{2(0)-(3)+2(-1)-5}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{-10}{3}$$



پس دونقطهٔ M_1 و M_2 در دوطرف‌صفحهٔ P قرار دارند. برای‌تعیین‌مختصات‌نقطهٔ‌برخوردصفحه P وخط M_1M_2 باید معادلهٔ M_1M_2 را نوشته وبا معادلهٔ‌صفحهٔ P قطع دهیم.

$M_1M_2 / \frac{x-1}{0-1}=\frac{y+2}{3+2}=\frac{z-2}{-1-2} \Longrightarrow$

$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{5}=\frac{z-2}{-3}$

$$\begin{cases}\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{5}=\frac{z-2}{-3}=t \\ 2x-y+2z-5=0\end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x=-t+1 \\ y=5t-2 \\ z=-3t+2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{در معادلهٔ صفحهٔ P}}$$

$2(-t+1)-(5t-2)+2(-3t+2)-5=0$

$\Longrightarrow -13t+3=0 \Longrightarrow t=\frac{3}{13} \Longrightarrow$

$N\left(-\frac{3}{13}+1 \,,\, +\frac{15}{13}-2 \,,\, -\frac{9}{13}+2\right)$

مختصات نقطهٔ برخورد M_1, M_2 وصفحهٔ P

$N\left(\frac{10}{13} \,,\, \frac{-11}{13} \,,\, \frac{17}{13}\right)$

تبصره: برای‌تعیین وضع دونقطهٔ M_1 و M_2 نسبت بـه صفحهٔ $P(x,y,z)=0$ کافی است علامت:

$P(M_1)\cdot P(M_2)$

را تعیین‌کنیم. اگر

$P(M_1)\cdot P(M_2)>0$

باشد نقاط M_1 و M_2 دریك طرف صفحهٔ P واقع‌اند و اگر

$P(M_1)\cdot P(M_2)<0$

باشد نقاط M_1 و M_2 در دو طرف صفحهٔ P قرار دارند. در مسأله فوق داریم:

$P(M_1)\cdot P(M_2)=(+3)(-10)=-30<0$

$\Longrightarrow$ M_1 و M_2 در دوطرف صفحهٔ P می‌باشند.

حل ۸- $A(-2,1,3)$ و $B(0,1,-1)$

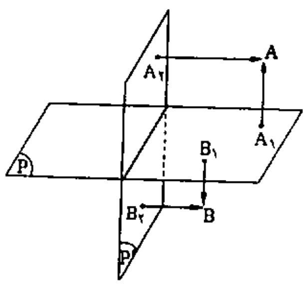
$P: x-y-z+2=0$

$P': 2x+y+z+3=0$

$P(A)\cdot P(B)=(-2-1-3+2)\times(0-1+1+2)=-8<0 \Longrightarrow$

نقاط A و B در دوطرف صفحهٔ P واقع‌اند

$P'(A)\cdot P'(B)=(-4+1+3+3)\times(0+1-1+3)=+9>0 \Longrightarrow$



نقاط A و B دریکطرف‌صفحهٔ P' واقع‌اند

پس دونقطهٔ A و B در دوفرجهٔ مجاور ازفرجه‌های‌حاصل بین صفحات P و P' قرار دارند.

حل ۹- نقاط برخورد صفحهٔ P بامحورهای مختصات‌را تعیین می‌کنیم.

$P: 2x-3y+6z-12=0 \Longrightarrow$

$A(6,0,0)$ و $B(0,-4,0)$ و $C(0,0,2)$

مساحت مثلث ABC را با معلوم بودن مختصات رئوس آن محاسبه می‌کنیم.

$\overrightarrow{AB}(-6,-4,0)$ و $\overrightarrow{AC}(-6,0,+2)$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(-8,12,-24)$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|=$

$\frac{1}{2}\sqrt{64+144+576}=14$

فاصلهٔ مبدأ مختصات ازصفحهٔ P راکه ارتفاع وارد برقاعدهٔ ABC ازچهار وجهی‌است محاسبه می‌کنیم.

$h=OH=\frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=$

$\frac{|-12|}{\sqrt{4+9+36}}=\frac{12}{7}$

چهار وجهی $v=\frac{1}{3}h\times S_{ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{12}{7}\times 14=8$

$\Longrightarrow$ واحد حجم $v=8$ چهار وجهی

نکته: اگر p و q و r طول‌از مبدأ، عرض از مبدأ و ارتفاع از مبدأصفحه‌ای باشند، حجم‌هرم حاصل‌ازآن صفحه و صفحات مختصات برابر است‌با

$v=\frac{1}{6}|p\cdot q\cdot r|$

در این مسئله:

$v=\frac{1}{6}|6\times-4\times2|=8$ واحد حجم

حل ۱۰- فاصلهٔ‌بین‌دوصفحه P و P' برابر باضلع‌مکعب است پس:

$P: 2x+y-2z-5=0$

$P': 4x+2y-4z-6=0$

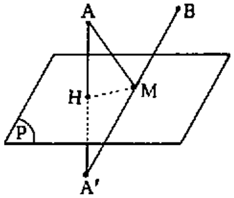
$P: 4x+2y-4z-10=0$

$d=\frac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|-10+6|}{\sqrt{16+4+16}}=$

$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}=a$ اندازهٔ ضلع‌مکعب

حجم مکعب $v=a^3 \Longrightarrow v=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$ واحدحجم

حل ۱۱- قرینهٔ نقطهٔ A را نسبت‌به صفحه P بـه دست آورده A' می‌نامیم. از A' به B وصل می‌کنیم تاصفحهٔ P را درنقطهٔ M قطع‌کند. این نقطه جواب مسأله است.



$A(0,-1,1) \,,\, B(2,0,3)$

$P: 2x-3y+3z-17=0$

$\vec{v}(2,-3,3)$ بردار نرمال صفحهٔ P $\Longrightarrow$

$AA'/\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-1}{3}$

$$\begin{cases}\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-1}{3} \\ 2x-3y+3z-17=0\end{cases} \Longrightarrow$$

$H\left(1,-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$ مختصات نقطهٔ H وسط AA'

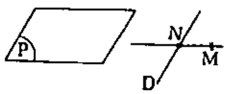
$\Longrightarrow A'(2,-4,4) \Longrightarrow$

$A'B:\begin{cases}x=2 \\ \frac{y}{-4}=\frac{z-3}{1}\end{cases}$ معادلهٔ خط A'B

$$\begin{cases}x=2 \\ y=-4z+12 \\ 2x-3y+3z-17=0\end{cases} \Longrightarrow$$

$M\left(2,\frac{-16}{15},\frac{49}{15}\right)$ مختصات نقطهٔ مطلوب

حل ۱۲- اگر نقطهٔ تقاطع خط مطلوب با خط D را N بنامیم ومعادلات پارامتری‌خط D را بنویسیم داریم:



$D:\frac{x}{2}=y=\frac{z-1}{-1}=t \Longrightarrow$

$$N\begin{vmatrix}x=2t \\ y=t \\ z=-t+1\end{vmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{MN}\begin{vmatrix}2t-2 \\ t-1 \\ -t+3\end{vmatrix}$$

$\vec{v}\begin{vmatrix}1 \\ 1 \\ -1\end{vmatrix}$ بردار نرمال‌صفحهٔ P $, \overrightarrow{MN}\perp\vec{v} \Longrightarrow$

$2t-2+t-1+t-3=0 \Longrightarrow$

$t=\frac{3}{2} \Longrightarrow N\left(3,\frac{3}{2},\frac{-1}{2}\right) \Longrightarrow$

$MN/\frac{x-2}{3-2}=\frac{y-1}{\frac{3}{2}-1}=\frac{z+2}{\frac{-1}{2}+2} \Longrightarrow$

معادلهٔ خط مطلوب $\frac{x-۲}{۱}=\frac{y-۱}{\frac{۱}{۲}}=\frac{z+۲}{\frac{۳}{۲}}$

حل ۱۳-

$$\begin{cases}x+y=۲\\ ۲y-z=۵\\ ۳x-y+z-۱=۰\end{cases}\Longrightarrow B(۲\,,۰\,,-۵)$$

نقطهٔ برخورد خط D با صفحهٔ P

$$\begin{cases}x+y=۲\\ ۲y-z=۵\\ ۳x-y+z=۵\end{cases}\Longrightarrow C(۴\,,-۲\,,-۹)$$

نقطهٔ برخورد خط D با صفحهٔ P'

BC وسط پاره خط $M(۳\,,-۱\,,-۷)\Longrightarrow$

$$AM/\frac{x+۳}{۳+۳}=\frac{y-۱}{-۱-۱}=\frac{z-۲}{-۷-۲}\Longrightarrow$$

$$AM/\frac{x+۳}{۶}=\frac{y-۱}{-۲}=\frac{z-۲}{-۹}$$ معادلهٔ خط مطلوب

حل ۱۴- خطوط D و D' متنافرند، زیرا دستگاه دو معادلهٔ یک‌مجهولی حاصل از معادلات این دو خط جواب ندارد.

$$D:\begin{cases}x=t-۱\\ y=-t+۲\\ z=۳t+۵\end{cases}\quad D':\frac{x-۱}{۲}=\frac{y+۲}{۳}=z$$

$$\frac{t-۱-۱}{۲}=\frac{-t+۲+۲}{۳}=۳t+۵\Longrightarrow$$

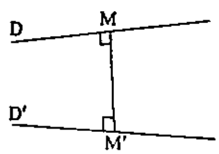
$$\begin{cases}\frac{t-۲}{۲}=\frac{-t+۴}{۳}\Longrightarrow t=۲/۸\\ \frac{t-۲}{۲}=۳t+۵\Longrightarrow t=-۲/۴\end{cases}$$

بنابراین برای تعیین کوتاهترین فاصلهٔ بین این دو خط باید طول عمود مشترک آنها را به دست آوریم.

$$M\in D\Longrightarrow M\left|\begin{matrix}t-۱\\ -t+۲\\ ۳t+۵\end{matrix}\right.$$

$$M'\in D'\Longrightarrow M'\left|\begin{matrix}x=۲t'+۱\\ y=۳t'-۲\\ z=t'\end{matrix}\right.$$

$$\overrightarrow{MM'}\left|\begin{matrix}۲t'+۱-t+۱=۲t'-t+۲\\ ۳t'-۲+t-۲=۳t'+t-۴\\ t'-۳t-۵=t'-۳t-۵\end{matrix}\right.$$



$$\overrightarrow{MM'}\perp D\Longrightarrow ۱(۲t'-t+۲)+(-۱)(۳t'+t-۴)+۳(t'-۳t-۵)=۰\Longrightarrow$$

$$۲t'-۱۱t-۹=۰$$

$$\overrightarrow{MM'}\perp D'\Longrightarrow ۲(۲t'-t+۲)+۳(۳t'+t-۴)+۱(t'-۳t-۵)=۰\Longrightarrow$$

$$۱۴t'-۲t-۱۳=۰$$

$$\begin{cases}۲t'-۱۱t=۹\\ ۱۴t'-۲t=۱۳\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}t=\frac{-۲}{۳}\\ t'=\frac{۵}{۶}\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\overrightarrow{MM'}\left(\frac{۱۳}{۳}\,,\frac{-۱۳}{۶}\,,\frac{-۱۳}{۶}\right)\Longrightarrow$$

$$|\overrightarrow{MM'}|=\sqrt{\frac{۱۶۹}{۹}+\frac{۱۶۹}{۳۶}+\frac{۱۶۹}{۳۶}}=\frac{۱۳\sqrt{۶}}{۶}$$

طول عمود مشترک خطوط D و D'

حل ۱۵-

$$\begin{cases}\frac{x+۲}{۳}=۲(y-۱)=z+۲=t\\ x-۲y+z-۳=۰\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\left|\begin{matrix}x=۳t-۲\\ y=\frac{t}{۲}+۱\\ z=t-۲\end{matrix}\right.$$

$$۳t-۲-۲\left(\frac{t}{۲}+۱\right)+t-۲-۳=۰\Longrightarrow$$

$$t=۳\Longrightarrow M(۷\,,۲/۵\,,۱)$$

حل ۱۶- معادلهٔ صفحهٔ P را که از نقطهٔ A عمود بر خط D رسم می‌شود می‌نویسیم و مختصات نقطهٔ تقاطع صفحهٔ P و خط D را به دست می‌آوریم اگر این نقطه را H بنامیم نقطهٔ A' قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ H را باید پیدا کنیم.

$$A(۰\,,۱\,,-۲)\quad,\quad D:\frac{x}{۲}=\frac{y+۳}{-۱}=\frac{z-۱}{۳}$$

بردار نرمال صفحهٔ P $\overrightarrow{v}(۲\,,-۱\,,۳)\Longrightarrow$

$$۲(x-۰)-۱(y-۱)+۳(z+۲)=۰\Longrightarrow$$

$۲x-y+۳z+۷=۰$ معادلهٔ صفحهٔ P

$$\begin{cases}۲x-y+۳z+۷=۰\\ \frac{x}{۲}=\frac{y+۳}{-۱}=\frac{z-۱}{۳}\end{cases}\Longrightarrow$$

$$H\left(\frac{-۱۳}{۷}\,,\frac{-۲۹}{۱۴}\,,\frac{-۲۵}{۱۴}\right)\Longrightarrow$$

$A'\left(\frac{-۲۶}{۷}\,,\frac{-۳۶}{۷}\,,\frac{-۱۱}{۷}\right)$ قرینهٔ نقطهٔ A

حل ۱۷- اگر نقطهٔ $M'(x_۱\,,y_۱\,,z_۱)$ تصویر قائم نقطهٔ M روی صفحهٔ P باشد، داریم:

$$x_۱-۲y_۱+z_۱-۲=۰$$

$$\overrightarrow{MM'}(x_۱-۳\,,y_۱+۱\,,z_۱)$$

بردار نرمال صفحهٔ P $\overrightarrow{v}(۱\,,-۲\,,۱)$

$$\overrightarrow{MM'}\parallel\overrightarrow{v}\Longrightarrow\frac{x_۱-۳}{۱}=\frac{y_۱+۱}{-۲}=\frac{z_۱}{۱}\Longrightarrow$$

$$\begin{cases}x_۱-۳=\frac{y_۱+۱}{-۲}=z_۱=t\\ x_۱-۲y_۱+z_۱-۲=۰\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\overrightarrow{M'}\left(\frac{۵}{۲}\,,۰\,,-\frac{۱}{۲}\right)$$

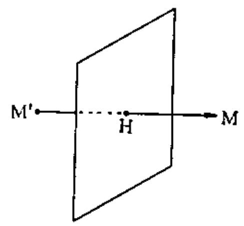
حل ۱۸: اگر قرینهٔ نقطهٔ M نسبت به صفحهٔ P را M' و وسط پاره‌خط MM' را H بنامیم داریم:

$$P:x+y-z-۳=۰\Longrightarrow$$

بردار نرمال صفحهٔ P $\overrightarrow{v}(۱\,,۱\,,-۱)$

$$M(۳\,,۲\,,-۱)\Longrightarrow$$

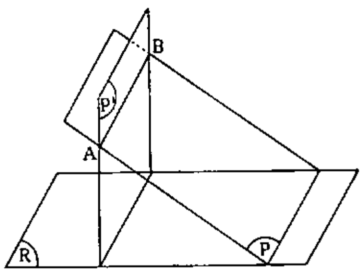
$\frac{x-۳}{۱}=\frac{y-۲}{۱}=\frac{z+۱}{-۱}$ معادلهٔ MM'



$$\begin{cases}x-۳=y-۲=-z-۱=t\\ x+y-z-۳=۰\end{cases}\Longrightarrow t=-۱$$

$$\Longrightarrow H(۲\,,۱\,,۰)\Longrightarrow M'(۱\,,۰\,,۱)$$

حل ۱۹- معادلهٔ دسته‌صفحه‌ای را که شامل دو صفحهٔ P و P' است می‌نویسیم و از بین صفحات این دسته‌صفحه‌ای را که عمود بر صفحهٔ R باشد مشخص می‌سازیم.



$$\alpha(۲x-y+۳z-۲)+\beta(x+y+۳)=۰\Longrightarrow$$

$$(۲\alpha+\beta)x+(\beta-\alpha)y+۳\alpha z-۲\alpha+۳\beta=۰$$

معادلهٔ دسته صفحه

$$aa'+bb'+cc'=۰\Longrightarrow$$

$$-(۲\alpha+\beta)+(\beta-\alpha)+۶\alpha=۰\Longrightarrow ۳\alpha=۰$$

$$\Longrightarrow\alpha=۰\Longrightarrow x+y+۳=۰$$

معادلهٔ صفحهٔ جواب مسئله

در این مسئله: صفحهٔ جواب همان صفحهٔ P' می‌باشد ولـی باید توجه داشت که همواره‌چنین نیست. (از ابتدا نیز مشخص بود که صفحهٔ جواب در این مسأله صفحهٔ P' است زیرا صفحهٔ:

$$P' : x+y+۳=۰$$

بر صفحه

$$R : -x+y+۲z=۱$$

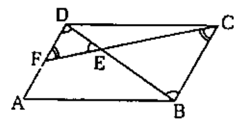
عمود است.

$$aa'+bb'+cc'=۰ \Longrightarrow$$
$$-۱+۱+۰=۰ \Longrightarrow ۰=۰)$$

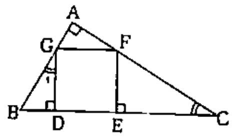
حل مسائل هندسهٔ سال‌دوم علوم تجربی

حل ۱ - دومثلث BEC و DEF متشابه می‌باشند.

پس: $\frac{DE}{EB}=\frac{DF}{BC}$ اما $\frac{DE}{EB}=\frac{۱}{۳}$ و $BC=AD$ است؛ پس $\frac{DF}{AD}=\frac{۱}{۳}$ در نتیجه $\frac{DF}{AF}=\frac{۱}{۲}$ ، یعنی: $AF=۲DF$ است.



حل ۲- دو مثلث قائم الزاویهٔ BDG و EFC متشابهند زیرا: $\hat{E}=\hat{D}=۹۰°$ و $\hat{C}=\hat{G}_۱$



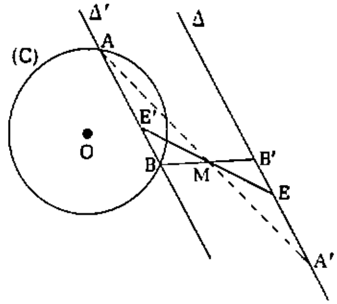
پس داریم: $\frac{DB}{EF}=\frac{DG}{EC}$ که اگر به جای DG و EF مقدار مساوی‌شان DE را قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\frac{DB}{DE}=\frac{DE}{EC} \Longrightarrow DE^۲=DB \cdot EC$$

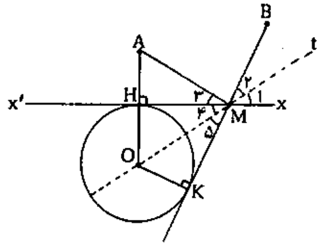
حل مسائل هندسهٔ سال‌سوم علوم‌تجربی

حل ۱- قرینهٔ خط Δ نسبت به نقطهٔ M را رسم می‌کنیم و Δ' می‌نامیم ، نقطهٔ بـرخورد Δ' با دایرهٔ (C) را A و B می‌نامیم. این دونقطه‌جواب مسأله می‌باشند.

بنابرآن‌که خط Δ' دایره (C) را در دو نقطه قطع‌کند و یا بر آن مماس‌باشد و یا آن‌را قطع‌نکند مسأله به‌ترتیب، دارای دوجواب، یک‌جواب است و یا جواب‌ندارد.



حل ۲- فرض می‌کنیم مسأله حل شده بـاشد و نقطهٔ M جواب مسأله بـاشد یعنی $B\hat{M}x=۲A\hat{M}x'$ باشد خط Mt نیمساز زاویهٔ BMx را رسم می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا خطی راکه از نقطهٔ A بر x'x عمود می‌شود در نقطهٔ O قطع‌کند.



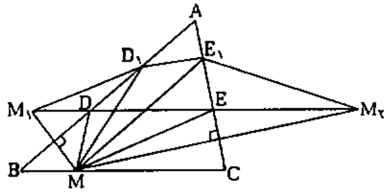
چون $\hat{M}_۱=\hat{M}_۲=\hat{M}_۳=\hat{M}_۴=\hat{M}_۵$ است ، پس نقطهٔ O قرینهٔ‌نقطهٔ A نسبت‌به‌خط x'x می‌باشد (زیرا درمثلث MAO خط Mx' نیمساز زاویـهٔ AMO و ارتفاع وارد بـر AO است) و نقطهٔ O روی‌نیمساززاویهٔ x'MK است پس‌دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OH=OK براضلاع زاویهٔ x'MK مماس می‌باشد.

بنابراین برای‌حل مسأله قرینهٔ‌نقطهٔ A نسبت‌به‌خط x'x را به‌ دست‌می‌آوریم و نقطهٔ O می‌نامیم، آن‌گاه‌به مرکز O و به شعاع OH (فاصلهٔ‌نقطهٔ O ازخط x'x) دایره‌ای رسم می‌کنیم و از نقطهٔ B مماسی براین دایره رسم می‌کنیم (مماس BK). نقطهٔ تقاطع‌این مماس‌با خط x'x نقطهٔ M جواب مسأله‌است یعنی داریم:

$$A\hat{M}x'=\frac{۱}{۲}B\hat{M}x$$

حل ۳- قرینهٔ نقطهٔ M نسبت به اضلاع AB و AC را به ترتیب $M_۱$ و $M_۲$ می‌نامیم. از $M_۱$ به $M_۲$ وصل می‌کنیم ونقاط برخورد $M_۱M_۲$ با اضلاع AB و AC رابه‌ترتیب D و E می‌نامیم . از M به D و E وصل می‌کنیم مثلث MDE جواب مسأله است. زیرا اگر مثلث دیگری به رأس M مانند مثلث $MD_۱E_۱$ درمثلث ABC محاط شده باشد ثابت می‌شود که محیط مثلث $MD_۱E_۱$ از محیط مثلث MDE بیشتر است زیرا:

$$D_۱M=D_۱M_۱ \quad , \quad E_۱M=E_۱M_۲$$



$$DM=DM_۱ \quad , \quad EM=EM_۲$$

اما :

MDE محیط مثلث $=MD+DE+EM=$

$DM_۱+DE+EM_۲=M_۱M_۲$

$MD_۱E_۱$ محیط مثلث $=MD_۱+ME_۱+D_۱E_۱=$

$M_۱D_۱+D_۱E_۱+E_۱M_۲=M_۱D_۱E_۱M_۲$

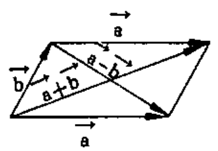
ازطرفی محیط خط‌شکسته $M_۱D_۱E_۱M_۲$ از پاره‌خط $M_۱M_۲$ بـزرگتر است، یعنی $M_۱D_۱E_۱M_۲ > M_۱M_۲$ پس :

محیط مثلث $MD_۱E_۱$ $>$ محیط مثلث MDE

بنابراین مثلث MDE بین مثلثهای بـه رأس‌نقطه ثابت M و محاط درمثلث ABC ، کمترین محیط را داراست.

حل ۴-

$$|\vec{a}|=۲ \quad , \quad |\vec{b}|=۳ \quad , \quad (\vec{a} \text{ و } \vec{b})=\frac{\pi}{۳}$$



$$(-۳\vec{a})\cdot(۲\vec{b})=-۶(\vec{a}\cdot\vec{b})=$$
$$-۶\times|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a} \text{ و } \vec{b}) \Longrightarrow$$
$$(-۳\vec{a})\cdot(۲\vec{b})=-۶\times۲\times۳\cos\frac{\pi}{۳}=-۱۸$$
$$|\vec{a}+\vec{b}|^۲=|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲+$$
$$۲|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a} \text{ و } \vec{b})=$$
$$۴+۹+۲\times۲\times۳\times\frac{۱}{۲}=۱۹ \Longrightarrow$$
$$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{۱۹}$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|^۲=|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲-۲|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a} \text{ و } \vec{b})=$$
$$۴+۹-۲\times۲\times۳\times\frac{۱}{۲}=۷ \Longrightarrow$$
$$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{۷}$$
$$\frac{|\vec{a}+\vec{b}|}{|\vec{a}-\vec{b}|}=\frac{\sqrt{۱۹}}{\sqrt{۷}}=\sqrt{\frac{۱۹}{۷}}$$

جواب سؤالات ریاضیات جدید اول

جواب سؤال ۱:

الف) نادرست، زیرا:

$0\in \mathbb{R}$, $0^2 \not> 0$

ب) نادرست، زیرا:

$1\in N$, $1-1=0\notin N$

ج) درست، زیرا:

$0\in Z$, $0^2=0\notin N$

د) درست

جواب سؤال ۲:

الف) نادرست

ب) درست (بهانتفای مقدم) چون مقدم نادرست ارزش گزاره درست است.

ج) نادرست، زیرا:

$(p\wedge\sim p)\equiv F$, $(p\wedge\sim p)\equiv T$

د) درست، زیرا: تالی گزاره شرط اگر درست باشد ارزش گزاره درست است.

هـ) نادرست، زیرا: دو طرف رابطهٔ دو شرطی هم ارز نیستند.

جواب سؤال ۳:

$q\equiv T \Rightarrow (q\vee r)\equiv T$

$\xRightarrow{\text{با توجه به فرض}} (p\wedge q)\equiv T$ یا $(p\wedge q)\equiv F$

اگر $\to (p\wedge q)\equiv T \xRightarrow{q\equiv T} p\equiv T \Rightarrow$

$(p\Leftrightarrow q)\equiv T \xRightarrow{p\equiv T} [(p\Leftrightarrow q)\wedge p]\equiv T$

$\Rightarrow ((p\wedge s)\Rightarrow \overbrace{[(p\Leftrightarrow q)\wedge p]}^{T})\equiv T$

اگر $\to (p\wedge q)\equiv F \xRightarrow{q\equiv T} p\equiv F$

$\Rightarrow (p\wedge s)\equiv F \Rightarrow ((\overbrace{p\vee s}^{F})$

$\Rightarrow [(p\Leftrightarrow q)\wedge p])\equiv T$

یعنی در هرصورت ارزش گزارهٔ شرطی:

$(p\wedge s)\Rightarrow [(p\Leftrightarrow q)\wedge p]$

یک بار به دلیل درست بودن تالی و یک بار به دلیل نادرست بودن مقدم درست است.

جواب سؤال ۴:

با توجه به فرض

$q\equiv F \Rightarrow (q\Rightarrow s)\equiv F \Rightarrow$

$(p\wedge r)\equiv F \Rightarrow p\equiv F\ ,\ r\equiv F$

و با توجه به ارزشهای بهدست آمده ارزش گزارهٔ:

$(r\wedge s) \Leftrightarrow (\sim p\vee\sim q)$

به دلیل نادرست بودن گزارهٔ $(r\wedge s)$ و درست بودن گزارهٔ $(\sim p\vee\sim q)$، نادرست است.

جواب سؤال ۵:

متوازی الاضلاع است $\Leftarrow$ اگر شکلی مستطیل باشد :

می‌دانیم پس «متوازی‌الاضلاع بودن شرط لازم است برای مستطیل بودن»

جواب سؤال ۶:

n طبیعی است $\Leftarrow$ اگر n اول باشد : می‌دانیم

بنابراین «اول بودن عدد n شرط کافی است برای طبیعی بودن»

جواب سؤال ۷:

چون مجموعهٔ A دارای ۳ عضو است پس $8=2^3$ زیر مجموعه دارد و گزارهٔ $(\{a\}\in A)\wedge(\{a\}\subseteq A)$ یک گزارهٔ درست است زیرا:

اولاً $\{a\}$ عضوی از A است و ثانیاً هرعضو مجموعهٔ $\{a\}$ یعنی a نیز عضو مجموعهٔ A است.

جواب سؤال ۸:

تعداد اعضای $A = x$

تعداد اعضای $B = y$

$\boxed{x+y=10}$, $2^x=4\times 2^y \Rightarrow \frac{2^x}{2^y}=4$

$\Rightarrow 2^{x-y}=4 \Rightarrow \boxed{x-y=2} \Rightarrow$

$\begin{cases}x+y=10\\ x-y=2\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}x=6\\ y=4\end{matrix}$

جواب سؤال ۹:

$A=\left\{\frac{2}{2^n} \mid 1\leqslant n\leqslant 5\ ,\ n\in N\right\}$

$B=\{x\in z \mid (x^2-9)(x^2-4)=0\}$

جواب سؤال ۱۰:

طبق فرض داریم : $A\cup B=M$, $A\cap B=\varnothing$

$B=B\cup\varnothing=B\cup(A\cap A')$

$=(B\cup A)\cap(B\cup A')=M\cap(B\cup A')$

$=(B\cup A')\xRightarrow{\text{ثابت شد}} B=B\cup A' \Rightarrow$

$A'\subseteq B$ (۱)

$B=B\cap M=B\cap(A\cup A')$

$=(B\cap A)\cup(B\cap A')=\varnothing\cup(B\cap A')$

$=(B\cap A')\xRightarrow{\text{ثابت شد}} B=B\cap A' \Rightarrow$

$B\subseteq A'$ (۲)

$(1)\ ,\ (2) \Rightarrow B=A'$

جواب سؤال ۱۱:

$A\cap(A\cup B)=(A\cup\varnothing)\cap(A\cup B)$

$=A\cup(\varnothing\cap B)=A\cup\varnothing=A$

$\xRightarrow{\text{ثابت شد}} A\cap(A\cup B)=A$

از طرفی

$A\cup(A\cap B)=(A\cup A)\cap(A\cup B)$

$=A\cap(A\cup B)=A$

$\xRightarrow{\text{پس ثابت شد}} A\cup(A\cap B)=A$

جواب سؤالات ریاضیات جدید دوم ریاضی

جواب سؤال ۱:

الف)

فرض کنیم : $[(x,y)\in[A\times(B-C)]] \xLeftrightarrow{\text{تعریف ضرب}}$

$x\in A\wedge y\in(B-C)$

$\xLeftrightarrow{\text{تعریف تفاضل}} x\in A\wedge(y\in B\wedge y\notin C)$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge x\in A)\wedge(y\in B\wedge y\notin C)$

$\xLeftrightarrow{\text{شرکت‌پذیری و جابجایی}} (x\in A\wedge y\in B)\wedge(x\in A\wedge y\notin C)$

$\xLeftrightarrow{\text{تعریف ضرب}} (x,y)\in A\times B\wedge(x,y)\notin A\times C$

$\xLeftrightarrow{\text{تعریف تفاضل}} (x,y)\in[(A\times B)-(A\times C)]$

$\Rightarrow A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$

ب)

$[(x,y)\in(A\times C) \xRightarrow{\text{تعریف ضرب}} x\in A\wedge y\in C$

$\xRightarrow{A\subseteq B} x\in B\wedge y\in C$

$\xRightarrow{\text{تعریف ضرب}} (x,y)\in(B\times C)]$

$\Rightarrow (A\times C)\subseteq(B\times C)$

جواب سؤال ۲ :

$A=\{2,3,4,5\}$

الف) $R_1=\{(2,3),(3,4)\}$

فقط خاصیت پاد تقارنی دارد (بهانتفای مقدم)

ب) $R_2=\{(2,3),(3,2)\}$

فقط خاصیت تقارنی دارد

ج) $R_3=\{(2,3),(3,4)\}$ مانند الف

د) $R_4=\{(2,4),(4,2)\}$ مانند ب

هـ) $R_5=\{(2,2)\}$

رابطهٔ R_5 دارای خواص تقارنی - پادتقارنی و تراگذری است، در واقع رابطه‌ای که فقط خواص تقارنی و پادتقارنی داشته باشد روی A نمی‌توان تعریف کرد.

و) $R_6=\{(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),$
$(2,3),(3,4)\}$

فقط خواص بازتابی و پاد تقارنی دارد

جواب سؤال ۳ :

۱) $\forall a,b\in N\ ;\ a+b=a+b$

بازتابی $\Leftrightarrow (a,b)R(a,b)$

۲) فرض کنیم $(a,b)R(c,d) \Rightarrow$

$a+d=b+c \Rightarrow c+b=d+a \Rightarrow$

$(c,d)R(a,b)$ تقارنی

۳) فرض کنیم $(a,b)R(c,d)\wedge(c,d)R(e,f)$

$\Rightarrow a+d=b+c\wedge c+f=d+e \Rightarrow$

$$a+\underbrace{(c+f-e)}_{d}=b+\underbrace{(d+e-f)}_{c}$$

$$\Longrightarrow (a+f)+(c-e)=(b+e)+(d-f)$$

$$\xRightarrow{c-e=d-f} (a+f)=(b+e) \Longrightarrow$$

$(a\ ,\ b)R(c\ ,\ f)$ تراگذری

بنابراین R یك‌رابطه هم‌ارزی است.

$$[(3,5)]=\{(x,y)\in N\times N|(x,y)R(3,5)\}$$
$$=\{(x,y)\in N\times N|x+5=y+3\}$$
$$=\{(x,y)\in N\times N|x-y=-2\}$$
$$\Longrightarrow [(3,5)]=$$
$$\{\cdots,(0,2),(-2,0),(3,5),\cdots\}$$

جواب سؤال ۴ :

$$A=\{a\ ,\ \{a\}\ ,\ \{a\ ,\ \{a\}\}\}$$
$$A_1=\{a\} \quad , \quad A_2=\{\{a\}\} \quad , \quad A_3=\{\{a\ ,\ \{a\}\}\}$$

(مجموعه‌های A_1 و A_2 و A_3 ، A را افراز می‌کنند)

جواب سؤال ۵ :

$$1) \quad \forall x,y\in IR \ ; \quad x=1\times x \ , \ y=1\times y$$
$$\Longrightarrow (x,y)R(x,y)$$

لذا R خاصیت بازتابی دارد $(\lambda=1)$

۲) فرض‌کنیم : $(x,y)R(x',y') \xRightarrow{\exists\lambda>0} x=\lambda x' \ , \ y=\lambda y'$

$$\xRightarrow{\frac{1}{\lambda}>0} x'=\frac{1}{\lambda}x,\ y'=\frac{1}{\lambda}y$$
$$\Longrightarrow (x'\ ,\ y')R(x\ ,\ y)$$

خاصیت تقارنی نیز برقرار است

۳) فرض‌کنیم : $(x,y)R(x',y')\wedge(x',y')R(x'',y'')$

$$\Longrightarrow (x=\lambda x',y=\lambda y')\wedge(x'=\lambda' x'',y'=\lambda' y'')$$
$$\lambda,\lambda'>0$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\lambda x'=\lambda(\lambda' x'')=\overbrace{(\lambda\lambda')}^{\lambda''}x'' \\ \Longrightarrow x=\lambda'' x'' \\ y=\lambda y'=\lambda(\lambda' y'')=\underbrace{(\lambda\lambda')}_{\lambda''}y'' \\ \Longrightarrow y=\lambda'' y'' \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$(x,y)R(x'',y'')$$

پس‌خاصیت تراگذری‌نیز دارد بنابراین R هم‌ارزی است.

$$[(1,2)]=\{(x,y)\in IR^2 \mid (x,y)R(1,2)\}=$$
$$\{(x,y)\in IR^2 \mid x=\lambda\times 1 \quad , \quad y=\lambda\times 2\} \xRightarrow{\lambda=\frac{1}{2}}$$
$$[(1,2)]=\{\cdots,(1,2),(2,4),\left(\frac{1}{2},1\right),\cdots\}$$

جواب سؤال ۶ :

می‌دانیم‌به‌اندازه تعداد زیرمجموعه‌های یك‌حاصل‌ضرب می‌توان رابطه روی‌آن تعریف‌کرد پس‌اگر مثلاً $n(A)=K$ دراین‌صورت $n(A\times A)=K\times K=K^2$ پس‌به تعداد 2^{K^2} زیرمجموعه داریم و به‌همین تعداد نیز می‌توانیم رابطه‌روی A تعریف کنیم.

جواب سؤال ۷ :

چون $n(A)>n(B)$ بنابراین اگـر تابعی روی همه اعضای A اثر کند ناچاراً عـلاوه بـر اینکه مجموعه B را می‌پوشاند به‌اندازهٔ $n(A)-n(B)$ عضو از B را ممکن‌است بیش‌از یك‌بار بپوشاند و چنین‌تابعی نمی‌تواند یك‌بیك باشد.

جواب سؤال ۸ :

برای اثبات وارون‌پذیری f کافی است نشان دهیم‌که f تابعی یك‌بیك است.

$$f(x_1)=f(x_2) \xRightarrow{x_1,x_2>0} \frac{2\sqrt{x_1}-1}{\sqrt{x_1}+6}=\frac{2\sqrt{x_2}-1}{\sqrt{x_2}+6}$$
$$\Longrightarrow 2x_1x_2+12\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}-6$$
$$=2x_1x_2-\sqrt{x_1}+12\sqrt{x_2}-6$$
$$\Longrightarrow 13\sqrt{x_1}-13\sqrt{x_2}=0$$
$$\Longrightarrow 13(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})=0$$
$$\Longrightarrow \sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=0 \Longrightarrow \sqrt{x_1}=\sqrt{x_2}$$
$$\xRightarrow{x_1,x_2>0} x_1=x_2$$
$$y=\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+6} \Longrightarrow y\sqrt{x}+6y=2\sqrt{x}-1$$
$$\Longrightarrow \sqrt{x}(y-2)=-1-6y$$
$$\Longrightarrow \sqrt{x}=\frac{-1-6y}{y-2}$$
$$\Longrightarrow x=\left(\frac{-1-6y}{y-2}\right)^2 \Longrightarrow$$

ضابطه‌تابع وارون $\leftarrow f^{-1}(x)=\left(\dfrac{-1-6x}{x-2}\right)^2$

جواب سؤال ۹ :

بلی تابـع است زیـرا : اصلاً نقطهٔ مشترکی در دامنه هرضابطه بادوضابطه‌دیگر وجودنداردکه بتوان‌به‌ازای‌آن نقطه مشترك به دومقدار متفاوت از برد رسید.

جواب سؤال ۱۰:

درتوابع چندضابطه‌ای برای‌بررسی یك‌بیکی آنها، باید اولاً یك‌بیکی را برای هرضابطه بررسی‌کنیم و ثانیاً بردهای ضابطه‌ها نباید نقطه مشترکی‌داشته باشند.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1+x} & x\geqslant 0 \\[2mm] \dfrac{x}{1-x} & x<0 \end{cases}$$

اگر x_1 و $x_2\geqslant 0$ و $f(x_1)=f(x_2) \Longrightarrow$

$$\frac{x_1}{1+x_1}=\frac{x_2}{1+x_2} \Longrightarrow$$
$$x_1+x_1x_2=x_2+x_1x_2 \Longrightarrow x_1=x_2$$

اگر x_1 و $x_2<0$ باشد و داشته باشیم:

$$f(x_1)=f(x_2) \Longrightarrow \frac{x_1}{1-x_1}=\frac{x_2}{1-x_2} \Longrightarrow$$
$$x_1-x_1x_2=x_2-x_1x_2 \Longrightarrow x_1=x_2$$

از طرفی اگر $x\geqslant 0$ برد تابع $f_1(x)=\dfrac{x}{1+x}$ مجموعهٔ $IR^+\cup\{0\}$ است در حالی‌که اگر $x<0$ برد تابع:

$$f_2(x)=\frac{x}{1-x}$$

مجموعهٔ IR^- می‌باشدکه باهم اشتراکی ندارند لذا تابع یك بیك است.

جواب سؤال ۱۱:

$$f(x_1\ ,\ y_1)=f(x_2\ ,\ y_2) \Longrightarrow (x_1+y_1,x_1+y_1)$$
$$=(x_2+y_2\ ,\ x_2+2y_2) \Longrightarrow$$
$$\begin{cases} x_1+y_1=x_2+y_2 \\ x_1+2y_1=x_2+2y_2 \end{cases} \Longrightarrow$$
$$\begin{cases} (x_1-x_2)=(y_2-y_1) \\ (x_1-x_2)=2(y_2-y_1) \end{cases} \Longrightarrow$$
$$(y_2-y_1)=2(y_2-y_1) \Longrightarrow y_2-y_1=0$$
$$\Longrightarrow \boxed{y_2=y_1} \Longrightarrow \boxed{x_1=x_2} \Longrightarrow$$

$(x_1\ ,\ y_1)=(x_2\ ,\ y_2)$ تابع یك‌بیك‌است

اگر $(x_1\ ,\ y_1)=(x+y\ ,\ x+2y)$ ، و $(x_1\ ,\ y_1)\in IR^2$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1=x+y \\ y_1=x+2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -x_1=-x-y \\ y_1=x+2y \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \boxed{y_1-x_1=y}$$
$$\Longrightarrow -x_1=-x-(y_1-x_1)$$
$$\Longrightarrow \boxed{x=2x_1-y_1}$$

پس برای‌هرزوج‌مرتب از IR^2 مانند (x_1,y_1) می‌توان از IR^2 زوج مرتب :

$$(x\ ,\ y)=(2x_1-y_1\ ,\ y_1-x_1)$$

را به دست آورد به قسمی‌که:

$$f(x\ ,\ y)=(x_1\ ,\ y_1)$$

جواب سؤال ۱۲:

اگر $f(x_1)=f(x_2) \Longrightarrow$

$$\frac{2x_1-1}{x_1(1-x_1)}=\frac{2x_2-1}{x_2(1-x_2)}$$
$$\Longrightarrow 2x_1x_2-2x_1x_2^2-x_2+x_2^2$$
$$=2x_1x_2-2x_2x_1^2-x_1+x_1^2$$
$$\Longrightarrow -2x_1x_2(x_2-x_1)-(x_2-x_1)$$
$$+(x_2^2-x_1^2)=0$$

$\Rightarrow (x_2-x_1)(-2x_1x_2-1+x_2+x_1)=0$

و با توجه به‌اینکه $x_1 , x_2\in A$ لذا $x_2<1$ و $x_1>0$ پس $(-2x_1x_2-1+x_2+x_1)\neq 0$ است!

لذا باید $x_2-x_1=0$ یعنی $\boxed{x_2=x_1}$ پس‌تابع یک بیک است.

حال اگر $y\in \mathbb{R} \Rightarrow y=\frac{2x-1}{x(1-x)}$

$$\Rightarrow yx-yx^2=2x-1$$
$$\Rightarrow yx^2+(2-y)x-1=0 \Rightarrow$$
$$x=\frac{-(2-y)\pm\sqrt{(2-y)^2-4\times y\times(-1)}}{2y}$$
$$\Rightarrow x=\frac{y-2\pm\sqrt{4+y^2}}{2y}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود ضابطهٔ اخیر نشان‌دهندهٔ این مطلب است که‌هرعضو از IR به‌جزعددصفر توسط تابع‌پوشیده‌می‌شود ودر مورد عددصفر نیز اگر قراردهیم $x=\frac{1}{2}$ داریم:

$$f(\tfrac{1}{2})=\frac{2\times(\frac{1}{2})-1}{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}=0$$

جواب سؤال ۱۲ :

$$f(2,-4)=$$
$$(2\times2+(-4), 6\times2+3\times(-4))$$
$$\Rightarrow f(2,-4)=(0,0)$$
$$f(3,-6)=$$
$$(2\times3+(-6), 6\times3+3\times(-6))$$
$$\Rightarrow f(3,-6)=(0,0)$$

لذا تابع یک‌بیک نیست.

ازطرفی تابع‌پوشا نیزنمی‌باشد مثلاً اگر $(1,1)\in\mathbb{R}^2$ دراین صورت تابع فوق $(1 , 1)$ را نمی‌پوشاند، زیرا اگر:

$$(1,1)=(2x+y , 6x+3y)$$
$$\Rightarrow \begin{cases}2x+y=1\\ 6x+3y=1\end{cases}$$

و این‌دستگاه جواب ندارد.

جواب سؤال ۱۴ :

شبیه به‌جواب سؤال ۱۰ است و به همان صورت بررسی می‌شود.

جواب سؤالات ریاضیات جدید سوم ریاضی

جواب سؤال ۱ :

با یک مثال نقض حکم کلی‌را می‌توان ردکرد اگرفرض کنیم:

$$w_1=\{(x,y)\mid x+y=0\}$$
$$w_2=\{(x,y)\mid x-y=0\}$$

واضح است که w_1 و w_2 هردو زیرفضای $\mathbb{R}^2$ هستند حال ثابت می‌کنیم $w_1\cup w_2$ نسبت به عمل‌جمع بسته‌نیست‌لذازیر فضا نمی‌باشد.

$$w_1\cup w_2=\{(x,y)\mid x+y=0 \vee x-y=0\}$$
$$(1,-1)\in w_1\Rightarrow(1,-1)\in w_1\cup w_2$$
$$(1,1)\in w_2\Rightarrow(1,1)\in w_1\cup w_2$$
$$(1,-1)+(1,1)=(2,0)\in w_1$$
$$(2,0)\notin w_2\Rightarrow(2,1)\in w_1\cup w_2$$

جواب سؤال ۲ :

واضح است که $w\subseteq\mathbb{R}^3$ بنابراین‌کافی‌است نشان دهیم که w نسبت‌به جمع وضرب اسکالر بسته است.

$$(x_1,y_1,z_1) , (x_2,y_2,z_2)\in w$$
$$\Rightarrow \begin{cases}ax_1+by_1+cz_1=0\\ ax_2+by_2+cz_2=0\end{cases}$$
$$(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)$$
$$=(x_1+x_2 , y_1+y_2 , z_1+z_2)\in w$$

زیرا: $a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2)+c(z_1+z_2)$

$$=\underbrace{(ax_1+by_1+cz_1)}_{0}+\underbrace{(ax_2+by_2+cz_2)}_{0}=0$$

پس نسبت به جمع بسته است

حال اگر $(x,y,z)\in w\Rightarrow ax+by+cz=0$

$$r(x,y,z)=(rx,ry,rz)\in w$$

زیرا: $arx+bry+crz$

$$=r(ax+by+cz)=r0=0$$

نسبت به‌ضرب اسکالر نیز بسته‌است لذا طبق‌قضیه زیرفضااست.

جواب سؤال ۳ :

هرگاه v_1 و v_2 و ... و v_{n+1}، $(n+1)$ بردار در فضای برداری $\mathbb{R}^n$ باشند داریم

اگر: $a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_{n+1}v_{n+1}$

$=(0 , 0 , 0 , \dots , 0)\rightarrow$ n تا صفر

$$\Rightarrow a_1(b_1 , b_2 , \dots , b_n)+a_2(c_1 , c_2 , \dots , c_n)$$
$$+\dots+a_{n+1}(t_1 , t_2 , \dots , t_n)=(0 , 0 , \dots , 0)$$
$$\Rightarrow\begin{cases}a_1b_1+a_2c_1+\cdots+a_{n+1}t_1=0\\ a_1b_2+a_2c_2+\cdots+a_{n+1}t_2=0\\ \vdots\\ a_1b_n+a_2c_n+\cdots+a_{n+1}t_n=0\end{cases}$$

دستگاه بالا دستگاهی است با n معادله و $(n+1)$ مجهول که این‌دستگاه همواره دارای بی‌نهایت جواب مخالف‌صفر است لذا این $(n+1)$ بردار طبق‌تعریف وابسته خطی‌اند.

جواب سؤال ۴ :

اگر W یک زیرفضای V باشد چون‌خود یک فضا است لذا نسبت به‌جمع وضرب اسکالر بسته‌است بنابراین‌رابطهٔ:

$$\forall r_1 , r_2\in\mathbb{R} , \forall w_1 , w_2\in W$$
$$r_1w_1+r_2w_2\in W$$

همواره برقرار است.

حال اگر رابطهٔ‌فوق برقرارباشد ثابت می‌کنیم W زیر فضا است وچون W زیرمجموعهٔ V است کافی‌است بااستفاده از رابطهٔ فوق ثابت کنیم نسبت به جمع و ضرب اسکالر بسته است.

اگر: $w_1 , w_2\in W\xRightarrow{\text{بنابر رابطهٔ فرض}} r_1=r_2=1$

$$\Rightarrow 1\cdot w_1+1\cdot w_2\in W\Rightarrow w_1+w_2\in W$$

نسبت‌به جمع بسته است.

اگر: $w_1\in W\xRightarrow{\text{بنابر رابطهٔ فرض}} r_1=r , r_2=0$

$$\Rightarrow r\cdot w_1+0\cdot w_2\in W\Rightarrow rw_1\in W$$

نسبت به ضرب اسکالر بسته است.

جواب سؤال ۵:

چون‌طبق‌فرض بردارهای x و y و z مستقل‌خطی‌اندلذا هرترکیب خطی‌از این ۳ بردار که مساوی‌صفر تشکیل شود باید ضرایب آن صفر باشند.

حال اگر: $a(x-2y+z)+b(x+y-z)$

$$+c(2x-y+z)=\bar{0}$$
$$\Rightarrow ax-2ay+az+bx+by-bz$$
$$+2cx-cy+cz=\bar{0}$$
$$\Rightarrow (a+b+2c)x+(-2a+b-c)y$$
$$+(a-b+c)z=\bar{0}$$

وچون بردارهای x و y و z طبق‌فرض مستقل خطی‌اند پس:

$$\begin{cases}a+b+2c=0\\ -2a+b-c=0\Rightarrow a=b=c=0\\ a-b+c=0\end{cases}$$

$\Longrightarrow$ بردارهای حکم مسأله مستقل خطی‌اند

جواب سؤال ۶ :

الف) $z(x+y')+z'x+(z+y')z'$

$$=zx+zy'+z'x+zz'+y'z'$$
$$=x(z+z')+y'(z+z')+0=x+y'$$

ب) $(u+v+x+y)(u+v+y)(u+x)$

$$=[(u+v+y)+x](u+v+y)(u+x)$$
$$=([(u+v+y)+x](u+v+y))(u+x)$$
$$\overset{\text{قانون‌جذب}}{=}(u+v+y)(u+x)$$
$$=uu+uv+uy+ux+vx+xy$$
$$=(u+uv)+uy+ux+vx+xy$$
$$\overset{\text{قانون‌جذب}}{=}(u+uy)+ux+vx+xy$$
$$\overset{\text{قانون‌جذب}}{=}(u+ux)+vx+xy\overset{\text{قانون‌جذب}}{=}u+vx+xy$$

جواب سؤال ۷:

$$T=(xyzt)+(xyzt')+(xyz't)+(xy'zt)$$
$$+(x'yzt)$$

که مدار را پس‌از ساده‌شدن رسم می‌کنیم

مرد	مرد	زن	زن	
x	y	z	t	T
۱	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۰	۱
۱	۱	۰	۱	۱
۱	۱	۰	۰	۱
۱	۰	۱	۱	۱
۱	۰	۱	۰	۰
۱	۰	۰	۱	۰
۱	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۰	۰
۰	۱	۰	۱	۰
۰	۱	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۱	۰
۰	۰	۱	۰	۰
۰	۰	۰	۱	۰
۰	۰	۰	۰	۰

جواب سؤال ۸:

$$[(x+y)(x+y')(x'+y')]'$$
$$=(x+y)'+(x+y')'+(x'+y')'$$
$$=x'y'+x'y+xy=x'y'+\underbrace{(x'+x)}_{1}y$$
$$=x'y'+y=(x'+y)\cdot\underbrace{(y'+y)}_{1}=(x'+y)$$

جواب سؤال ۹:

$$(a+b)[a+b'(a+b)]$$
$$=(a+b)[a+(b'a)+(b'b)]$$
$$=(a+b)[a+(b'a)]$$
$$=(a+b)[(a+b')\cdot\underbrace{(a+a)}_{a}]$$
$$\overset{\text{قانون جذب}}{=}(a+b)a\overset{\text{قانون جذب}}{=}a$$

جواب سؤال ۱۰:

الف) $(aSa)S(cSa)=(a'+a')S(a'+a')$
$=a'Sa'=(a')'+(a')'=a+a=a$

ب) $aSa=a'+a'=a'$

ج) $aSb=a'+b'$

د) $(a+b)S(a+b)=(a+b)'+(a+b)'$
$=(a+b)'$

هـ) ابتدا $(a'+b)$ را با توجه به مدار S به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\underbrace{[(aSa)S(aSa)]}_{a}\ S\underbrace{(bSb)}_{b'}=Sab'$$
$$=a'Sb \Longrightarrow (a'+b)S(a'+b)$$
$$=(a'+b)'+(a'+b)'=(a'+b)'=ab'$$

جواب سؤالات ریاضیات جدید چهارم ریاضی

جواب سؤال ۱:

الف) $\exists x\forall y\ (x+1=3)\wedge[(x\neq 2)\vee y\neq 0]$

ب) $\exists x\exists y\ (x\geqslant y\wedge y<x)$

ج) $\exists x\forall y\ (x+y=0\wedge x\neq -y)$

د) $\forall x\exists y[|x|=|y| \wedge (x^2\neq y^2\wedge x^3\neq y^2)]$

جواب سؤال ۲:

الف) ۱) $(p\wedge q)\Longrightarrow[p\Longrightarrow(s\wedge r)]$

۲) $(p\wedge q)\wedge t$

$\therefore \underline{s\vee r}$

۳) $p\wedge q \leftarrow$ استفاده از ۲ و حذف عاطف

۴) $p\Longrightarrow(s\wedge r) \leftarrow$ استفاده از ۱ و ۳ و قانون انتزاع

۵) $p \leftarrow$ استفاده از ۳ و حذف عاطف

۶) $s\wedge r \leftarrow$ استفاده از ۴ و ۵ و انتزاع

۷) $s \leftarrow$ استفاده از ۶ و حذف عاطف

۸) $s\vee r \leftarrow$ استفاده از ۷ و ادخال فاصل

توجه: استنتاج زیر همواره معتبر است

$$\begin{array}{l}(q\Longrightarrow s)\wedge(r\Longrightarrow t)\\ \underline{q\vee r}\\ \therefore s\vee t\end{array}$$

نام قانون بالا را قانون C.D می‌گذاریم

۱) $q\Longrightarrow s$

۲) $r\Longrightarrow t$

۳) $\sim r\Longrightarrow q$

$\therefore \sim r\Longrightarrow s \leftarrow$ ۱ و ۳ و قیاس

$\sim t\Longrightarrow\sim r \leftarrow$ ۲ و عکس نقیض

$\therefore \sim t\Longrightarrow s\equiv t\vee s$ قیاس

ب) ۱) $q\vee(q\vee r)$

۲) $(q\Longrightarrow s)\wedge(r\Longrightarrow t)$

۳) $(s\vee t)\Longrightarrow(p\vee r)$

۴) $\sim p$

$\therefore \underline{r}$

۵) $q\vee r \leftarrow$ با توجه به ۱ و ۴ و نقیض انتزاع

اثبات:

۶) $s\vee t \leftarrow C.D$ با توجه به ۲ و ۵ و

۷) $p\vee r \leftarrow$ با توجه به ۳ و ۶ و انتزاع

$\therefore \sim t\Longrightarrow s\equiv t\vee r$ قیاس

۸) $\underline{r} \leftarrow$ با توجه به ۴ و ۷ و نقیض انتزاع

به طریق مشابه می‌توان اثبات کرد که استنتاج زیر نیز همواره معتبر است که نام آن را قانون D.D می‌گذاریم

$$\begin{array}{l}(p\Longrightarrow q)\wedge(r\Longrightarrow s)\\ \underline{\sim q\vee\sim r}\\ \therefore \sim p\vee\sim s\end{array}$$

ج) ۱) $p\Longrightarrow q$

۲) $q\Longrightarrow r$

۳) $(s\Longrightarrow r)\wedge(t\Longrightarrow q)$

۴) $(\sim r\vee\sim q)\wedge(\sim u\vee\sim p)$

$\therefore (\sim s\vee\sim t)\wedge(\sim u\vee\sim p)$

۵) $\sim r\vee\sim q \leftarrow$ با توجه به ۴ و حذف عاطف

۶) $\sim s\vee\sim t \leftarrow D.D$ با توجه به ۳ و ۵ و قانون

۷) $\sim u\vee\sim p \leftarrow$ با توجه به ۴ و حذف عاطف

۸) $\therefore(\sim s\vee\sim t)\wedge(\sim u\vee\sim p) \leftarrow$ از ۶ و ۷

جواب سؤال ۳:

می‌دانیم میدان حلقه‌ای است تعویض‌پذیر که با عمل دوم (ضرب) نیز گروه جابجایی است پس قانون حذف در آن برقرار است لذا طبق قضیه یك حوزهٔ درست است. اما عکس مطلب برقرار نیست یعنی در حالت کلی هر حوزهٔ درست نمی‌تواند یك میدان باشد مثلاً $(Z,+,\circ)$ یك حوزهٔ درست است (حلقه‌ای تعویض‌پذیر راست و مقسوم علیه صفر ندارد) اما اعضای آن وارون ضربی ندارند لذا یك میدان نیست.

جواب سؤال ۴:

فرض کنیم $U=\{a\mid a=2m\ ,\ m\in Z\}$

واضح است که $U\subseteq Z$ حال برای ایده‌آل بودن آن ابتدا ثابت می‌کنیم U با عمل جمع زیر گروه $(Z,+)$ است.

فرض کنیم $a,b\in U\Longrightarrow a=2m_1\ ,\ b=2m_2$

$$\Longrightarrow a-b=2m_1-2m_2$$

$$2\underbrace{(m_1-m_2)}_{m_3}\Longrightarrow a-b=2m_3\in U$$

حال ثابت می‌کنیم برای هر $u\in U$ و هر $r\in Z$؛ $ur\in U$ و ru

فرض کنیم $u\in U$ و $r\in Z \Longrightarrow u=2m$

$$\Longrightarrow ru=r2m=2\underbrace{(rm)}_{m_1}=2m_1\in U$$

$$ur=2mr=2\underbrace{(rm)}_{m_1}=2m_1\in U$$

پس U یك ایده‌آل دوطرفه Z است.

جواب سؤال ۵:

اگر قرار دهیم:

$$Z\sqrt{2}=\{m+n\sqrt{2}\mid m\ ,\ n\in Z\}$$

واضح است که $(Z\sqrt{2}$ و $+)$ یك گروه جابجایی است (بررسی آن به عهدهٔ دانش‌آموز) و نیز نسبت به ضرب بسته ـ شرکت‌پذیر و ضرب در جمع از چپ و راست توزیع‌پذیر است لذا:

$(Z\sqrt{2}\ ,\ +\ ,\ \times)$

یك حلقه است از طرفی چون اعضای $Z\sqrt{2}$ همگی اعداد حقیقی هستند لذا در این حلقه قاعدهٔ حذف نیز برقرار است لذا طبق قضیه یك حوزهٔ درست است.

جواب سؤال ۶:

توسط استقرای ریاضی می‌خواهیم ثابت کنیم برای هر $n\in N$، عدد $a=4^n+15n-1$ بر عدد ۹ بخش‌پذیر است.

$$n(1): 4+15-1=18=9m$$

فرض استقراء $p(k): 4^k+15k-1=9m_1$

$p(k+1): 4^{k+1}+15(k+1)-1=9m_2$

حکم استقراء

سمت چپ حکم استقراء $=4\times 4^k+15k+15-1$

$=4(9m_1-15k+1)+15k+14$

$=36m_1-60k+15k+18$

$=9(4m_1-5k+2)=9m_2$

جواب سؤال ۷:

توسط استقرا می‌خواهیم ثابت کنیم

$$\sin x+\sin 2x+\dots+\sin nx=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{nx}{2}$$

$$p(1):\ \sin x=\frac{\sin\frac{1+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{x}{2}=\sin x$$

$$p(k):\ \sin x+\sin 2x+\dots+\sin kx$$

فرض استقراء:

$$=\frac{\sin\frac{k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{kx}{2}$$

با توجه به فرض

$$\Rightarrow \sin x+\sin 2x+\dots+\sin kx$$

$$+\sin(k+1)x=\frac{\sin\frac{k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{kx}{2}$$

$$+\sin(k+1)x=\frac{\sin\frac{k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{kx}{2}$$

$$+2\sin\frac{k+1}{2}x\cos\frac{k+1}{2}x$$

$$=\frac{\sin\frac{k+2}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{k+1}{2}x=p(k+1)$$

زیرا:

$$\left(2\cos\frac{k+1}{2}x\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{k+2}{2}x-\sin\frac{kx}{2}\right)$$

جواب سؤال ۸:

$[a,b]=48,\ (a,b)=d,\ a=a'd,\ b=b'd$

$(a',b')=1,\ ab=48d \Rightarrow a'b'd^2=48d$

$\Rightarrow a'b'=\frac{48}{d}$

حال چون طبق فرض ab مربع کامل است پس $\frac{48}{d}$ نیز مربع کامل است پس $d=3$ یا $d=12$.

اگر: $d=3\Rightarrow a'b'=16$ و $(a',b')=1$

$$\Rightarrow\begin{cases}a'=1\Rightarrow a=3\\ b'=16\Rightarrow b=48\end{cases}$$

اگر: $d=12\Rightarrow a'b'=4$

$$\Rightarrow\begin{cases}a'=1\Rightarrow a=12\\ b'=4\Rightarrow b=48\end{cases}$$

جواب سؤال ۹:

$$\begin{cases}(a,4)=2\\ (b,4)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\mid a\ , & 4\nmid a\\ 2\mid b\ , & 4\nmid b\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=4k+2\\ b=4k'+2\end{cases}$$

(a و b باید زوج باشند و چون ب.م.م آنها با عدد ۴ عدد ۲ است پس نباید مضرب ۴ باشند، پس باید به‌صورت $4k+2$ باشند.)

$\Rightarrow a+b=4(k+k'+1)\Rightarrow 4\mid a+b$

$\Rightarrow(a+b,4)=4$

جواب سؤالات جبر سال اول

جواب سؤال ۱:

عبارت $A(x)$ از سه جمله تشکیل یافته است که هریک باید معین باشند تا $A(x)$ معین باشد. جملهٔ $\sqrt{x+1}$ نتیجه می‌دهد که باید: $x+1\geqslant 0$ باشد و یا $x\geqslant -1$ باشد. جملهٔ $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ نتیجه می‌دهد که باید: $x^2-1\neq 0$ باشد و یا به عبارت‌دیگر: $x\neq\pm1$ باشد. وجمله $\frac{2x+3}{x(x^2-2)}$ نتیجه می‌دهد که باید $x(x^2-2)\neq 0$ باشد. و یا به‌عبارت‌دیگر باید‌داشته باشیم: $x\neq 0$ و $x^2-2\neq 0\Rightarrow x\neq\pm\sqrt{2}$ و بنابراین‌در اینجا از اشتراک قلمرو سه‌جمله نتیجه می‌شود که مقدار $A(x)$ نقطه به‌ازای مقادیر زیر حقیقی است و به ازای مجموعهٔ اعداد مقابل تعریف‌شده است. قلمرو یا دامنهٔ تعریف $A(x)$ را با A_A نمایش می‌دهیم: بنابراین داریم:

$$D_A=R-\{x\mid x=\pm\sqrt{2}\ \text{و}\ x=\pm1\ \text{و}\ x<-1\}$$

و یا به عبارت‌دیگر می‌توان نوشت،

$$D_A=\{x\mid x\neq\pm1\ \text{و}\ 0\ \text{و}\ x\neq\pm\sqrt{2}\ \text{و}\ x>-1\}$$

مقدار $A(-1)$ برابر $\frac{0}{0}$ است که مبهم نامیده می‌شود. مقدار $A(-3)$ نامعین‌است زیر $\sqrt{x+1}$ به‌ازای $x=-3$ به‌شکل $\sqrt{-2}$ درمی‌آید که این عددی است غیر حقیقی و نامعین واز طرفی‌دیگرمی‌توان گفت که $x=-3$ جزو قلمرو $A(x)$ نیست وبدیهی است که مقدارمعینی به‌دست نخواهدداد.

جواب سؤال ۲:

a) عبارت $\frac{A^2C}{B}$ را حساب می‌کنیم. داریم:

$A^2=(2a^2b^3cx^3y^4z^5)^2$

$A^2=4a^4b^6c^2x^6y^8z^{10}$

$C=-6a^3bd^2xyz$

$B=-4ab^2c^2x^2y^3z^7$

$$\frac{A^2C}{B}=\frac{(4a^4b^6c^2x^6y^8z^{10})(-6a^3bd^2xyz)}{(-4ab^2c^2x^2y^3z^7)}$$

$=6a^6b^5d^2x^5y^6z^4$

درجهٔ $\frac{A^2C}{B}$ نسبت به x و y و z و t و a و b و abc و xyzt به‌ترتیب از درجهٔ ۵ ، ۶ ، ۴ ، ۰ ، ۶ ، ۵ ، ۱۱ ، ۱۵ می‌باشد.

b) حاصل نسبت:

$$\frac{A^3}{BC}+\frac{B^3}{AC}+\frac{C^3}{AB}$$ و یا

$$\frac{A^4}{ABC}+\frac{B^4}{ABC}+\frac{C^4}{ABC}$$ و یا $$\frac{A^4+B^4+C^4}{ABC}$$

چنین‌است:

$$\frac{A^3}{BC}=\frac{(2a^2b^3cx^3y^4z^5)^3}{(-4ab^2c^2x^2y^3z^7)(-6a^3bd^2xyz)}$$

$$=\frac{8a^6b^9c^3x^9y^{12}z^{15}}{24a^4b^3c^2d^2x^3y^4z^8}$$

$$\frac{B^3}{AC}=\frac{(-4ab^2c^2x^2y^3z^7)^3}{(2a^2b^3cx^3y^4z^5)(-6a^3bd^2xyz)}$$

$$=\frac{-64a^3b^6c^6x^6y^9z^{21}}{-12a^5b^4cd^2x^4y^5z^6}$$

$$\frac{C^3}{AB}=\frac{(-6a^3bd^2xyz)^3}{(2a^2b^3cx^3y^4z^5)(-4ab^2c^2x^2y^3z^7)}$$

$$=\frac{-216a^9b^3d^6x^3y^3z^3}{-8a^3b^5c^3x^5y^7z^{12}}$$

پس‌از ساده‌کردن عبارتهای فوق داریم:

$$\frac{A^3}{BC}=\frac{a^2b^6cx^6y^8z^7}{3d^2}$$

$$\frac{B^3}{AC}=\frac{16b^2c^5x^2y^4z^{15}}{3d^2a^2}$$

$$\frac{C^3}{AB}=\frac{27a^6d^6}{b^2c^3x^2y^4z^9}$$

بنابراین مجموع عبارتهای اخیر برابراست با:

$$\frac{A^3}{BC}+\frac{B^3}{AC}+\frac{C^3}{AB}=\frac{a^2b^6cx^6y^8z^7}{3d^2}$$

$$+\frac{16b^2c^5x^2y^4z^{15}}{3a^2d^2}+\frac{27a^6d^6}{b^2c^3x^2y^4z^9}$$

c) عامل مشترك عبارت $A^3+B^3+C^3$ چنین است:

$(2a^2b^3cx^3y^4z^5)^3+(-4ab^2c^2x^2y^3z^7)^3$

$+(-6a^3bd^2xyz)^3=$

$8a^6b^9c^3x^9y^{12}z^{15}-64a^3b^6c^6x^6y^9z^{21}$

$-216a^9b^3d^6x^3y^3z^3=$

$8a^3b^3x^3y^3z^3(a^3b^6c^3x^6y^9z^{12}-8b^3c^6x^3y^6z^{18}$

$-27a^6d^6)$

بنابراین عامل مشترک عبارت فوق:

$(2abxyz)^3$ و یا $8a^3b^3x^3y^3z^3$

می‌باشد.

d) بزرگترین عامل مشترک (ب. م. م) و کوچکترین مضرب مشترک (ک. م. م) بین A و B و C چنین است:

$(\text{ب.م.م})=2abxyz$ و

$\Leftarrow (\text{ک.م.م})=12a^3b^3c^2d^2x^3y^4z^7$

جواب سؤال ۳:

a) از اتحاد $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ استفاده می‌کنیم و سپس صورت و مخرج را در $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ یعنی مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$\frac{(\sqrt[3]{5})^3-(\sqrt[3]{2})^3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{5-2}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2}=\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$$

b) در عبارت:

$$(??+2pq^2)^2=9y^2+?+4p^2q^4$$

با توجه به طرف‌دوم نتیجه می‌شود که به جای ?? باید جذر $9y^2$ گذاشته شود. یعنی باید داشته باشیم:

$$??=3y$$

پس بنابراین به جای ? باید $2(3y)(2pq^2)$ گذاشته شود. و دراین صورت عبارت به شکل زیر کامل می‌شود.

$$(3y+2pq^2)^2=9y^2+12pq^2y+4p^2q^4$$

c) در عبارت:

$$(x-??)^2=x^2-4a^2b^2x+?$$

با توجه به طرف‌دوم می‌توان نتیجه گرفت که اگر جملهٔ وسط را بر $2x$ تقسیم کنیم جملهٔ ?? بدست خواهد آمد. بنابراین:

$$??=2a^2b^2$$

و با مجذور کردن $2a^2b^2$ عبارت ? به دست خواهد آمد و در نتیجه عبارت‌فوق به‌شکل زیر کامل می‌شود.

$$(x-2a^2b^2)^2=x^2-4a^2b^2x+4a^4b^4$$

d) پرانتز اول و دوم‌را ساده‌می‌کنیم و سپس‌حاصل دو عامل‌را در هم‌ضرب می‌کنیم.

$$1+\frac{2x^ny^n}{x^{2n}+y^{2n}}=\frac{x^{2n}+y^{2n}+2x^ny^n}{x^{2n}+y^{2n}}$$

$$=\frac{(x^n+y^n)^2}{x^{2n}+y^{2n}}$$

$$1-\frac{2x^ny^n}{(x^n+y^n)^2}=\frac{(x^n+y^n)^2-2x^ny^n}{(x^n+y^n)^2}$$

$$=\frac{x^{2n}+y^{2n}}{(x^n+y^n)^2}$$

دوعبارت معکوس یکدیگرند وبنابراین حاصلضرب‌شان برابر ۱ می‌شود. ودر نتیجه داریم: $?=1$

e) کافی‌است عبارت $4x^2$ را اضافه و کم کنیم.

$$1+4x^4=1+4x^4+4x^2-4x^2$$

$$1+4x^4=(1+2x^2)^2-4x^2$$

$$=(1+2x^2-2x)(1+2x^2+2x)$$

$$\Longrightarrow ?=1-2x+2x^2$$

f)

$$\begin{array}{l|l} x^5+1 & x+1 \\ \hline \pm x^5 \pm x^4 & x^4-x^3+x^2-x+1 \\ \hline -x^4+1 & \\ \mp x^4 \mp x^3 & \\ \hline x^3+1 & \\ \pm x^3 \pm x^2 & \\ \hline -x^2+1 & \\ \mp x^2 \mp x & \\ \hline x+1 & \\ \pm x \pm 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\Longrightarrow ?=x^4-x^3+x^2-x+1$$

g) عبارت سمت‌راست را به x نمایش می‌دهیم:

$$x=\sqrt[5]{2\sqrt[5]{2\sqrt[5]{2\sqrt[5]{\cdots}}}}=?$$

طرفین را به توان ۵ می‌رسانیم:

$$x^5=2\sqrt[5]{2\sqrt[5]{2\sqrt[5]{\cdots}}}\Longrightarrow$$

$$\frac{x^5}{2}=\sqrt[5]{2\sqrt[5]{2\sqrt[5]{\cdots}}}$$

باز هم طرفین‌را به‌توان ۵ می‌رسانیم:

$$\left(\frac{x^5}{2}\right)^5=2\underbrace{\sqrt[5]{2\sqrt[5]{2\sqrt[5]{\cdots}}}}_{x}\Longrightarrow$$

$$\left(\frac{x^5}{2}\right)^5=2x$$

$$\frac{x^{25}}{2^5}=2x\Longrightarrow\frac{x^{25}}{729}-2x=0$$

$$\Longrightarrow x\left(\frac{x^{24}}{729}-2\right)=0\Longrightarrow x\neq 0$$

$$\frac{x^{24}}{729}-2=0\Longrightarrow\frac{x^{24}}{729}=2$$

$$\Longrightarrow x^{24}=2\times 729=1458$$

$$\Longrightarrow x=\sqrt[24]{1458}=?$$

h) عبارت سمت‌چپ را به x نمایش می‌دهیم:

$$x=-2+\cfrac{3}{\underbrace{-2+\cfrac{3}{-2+\cdots}}_{x}}$$

بنابراین داریم:

$$x=-2+\frac{3}{x}$$

$$x+2=\frac{3}{x}\Longrightarrow x(x+2)=3$$

$$x^2+2x-3=0\Longrightarrow(x-1)(x+3)=0$$

$$\Longrightarrow x=1\ ,\ x=-3\Longrightarrow ?=-3$$

عدد $x=1$ قابل‌قبول‌نیست زیراکسر به -3 میل می‌کند. به عنوان مثال می‌توان با گرفتن چند جملهٔ‌کسر مقدار تقریبی کسر را تا یک‌رقم اعشار محاسبه‌کرد.

$$x\approx-2+\cfrac{3}{-2+\cfrac{3}{-2+\cfrac{3}{-2}}}$$

$$=-2+\cfrac{3}{-2+\cfrac{3}{\cfrac{4+3}{-2}}}=-2+\cfrac{3}{-2-\cfrac{6}{7}}$$

$$-2+\cfrac{3}{\cfrac{-14-6}{7}}=-2+\frac{21}{-20}$$

$$=-2-\frac{21}{20}=-3\frac{1}{20}$$

$$\Longrightarrow x\approx-3/05\approx-3$$

بنابراین کسر میل می‌کند بـه عدد -3 (بنابراین $x=-3$ برای‌کسر قابل‌قبول است).

i)

$$(1-x^2)(1+x^2)=1-x^4$$

$$(1-x^4)(1+x^4)=1-x^8$$

$$(1-x^8)(1+x^8)=1-x^{16}$$

$$(1-x^{16})(1+x^{16})=1-x^{32}\ ,\ \ldots,$$

$$(1-x^{2^n})(1+x^{2^n})=1-x^{2^{n+1}}$$

$$\Longrightarrow ?=x^{2^{n+1}}$$

j) طرفین رابطه‌را در $x-a$ ضرب‌می‌کنیم، بنابراین داریم:

$$(x-a)(x+a)(x^2+a^2)(x^4+a^4)\ \ldots..$$

$$(x^{2^{n-1}}+a^{2^{n-1}})=?$$

$$(x-a)(x+a)=x^2-a^2\ ,$$

$$(x^2-a^2)(x^2+a^2)=x^4-a^4\ ,\ \ldots,$$

$$(x^{2^{n-1}}-a^{2^{n-1}})(x^{2^{n-1}}+a^{2^{n-1}})=x^{2^n}-a^{2^n}$$

$$\Longrightarrow ?=x^{2^n}-a^{2^n}$$

جواب سؤال ۴ :

a)
$$\begin{cases}A=x^2+x+1\\B=2x^2-3x+2\\C=3x^2+x-4\end{cases}$$
$$3A-B+2C=3(x^2+x+1)-(2x^2-3x+2)+2(3x^2+x-4)$$
$$=3x^2+3x+3-2x^2+3x-2+6x^2+2x-8$$
$$=7x^2+8x-7$$

b) شرط مسئله‌را برقرار می‌کنیم یعنی باید داشته باشیم:
$$A+B=C$$
$$x^2+x+1+2x^2-3x+2=3x^2+x-4$$
$$3x^2-2x+3=3x^2+x-4$$
$$-2x-x=-4-3 \Longrightarrow$$
$$-3x=-7 \Longrightarrow x=\frac{7}{3}$$

c) برای تجزیهٔ عبارت:
$$B^2-4A^2$$
از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم. بنابراین داریم:
$$B^2-4A^2=(B-2A)(B+2A)$$
$$=[2x^2-3x+2-2(x^2+x+1)][2x^2-3x+2+2(x^2+x+1)]$$
$$=(2x^2-3x+2-2x^2-2x-2)(2x^2-3x+2+2x^2+2x+2)$$
$$=(-5x)(4x^2-x+4)$$

d) مقدار ABC به‌ازای $x=-1$ چنین می‌شود:
$$\begin{cases}A(-1)=(-1)^2+(-1)+1=1\\B(-1)=2(-1)^2-3(-1)+2=7\\C(-1)=3(-1)^2+(-1)-4=-2\end{cases}$$
$$\Longrightarrow A(-1)B(-1)C(-1)$$
$$=1\times7\times(-2)=14$$
$$ABC=-14$$

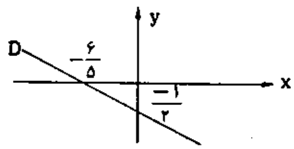
e) درجهٔ عبارت: $C(B-2A)$ برابر ۳ است زیرا:
$$C(B-2A)=BC-2AC$$
$$=(2x^2-3x+2)(3x^2+x-4)-2(x^2+x+1)(3x^2+x-4)$$
$$=6x^4+2x^3-8x^2-9x^3-3x^2+12x+6x^2+2x-8-(2x^2+2x+2)(3x^2+x-4)$$
$$=6x^4-7x^3-5x^2+14x-8-(6x^4+2x^3-8x^2+6x^3+2x^2-8x+6x^2+2x-8)$$
$$=6x^4-7x^3-5x^2+14x-8-(6x^4+8x^3-6x-8)$$
$$=6x^4-7x^3-5x^2+14x-8-6x^4-8x^3+6x+8=-15x^3-5x^2+20x$$
مرتب برحسب قوای نزولی

مرتب برحسب قوای صعودی $=20x-5x^2-15x^3$

جواب سؤالات جبر سال دوم ریاضی

جواب سؤال ۱ :
$$D: 4y-2x-1=0 \Longrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$$
$$\Longrightarrow m=\frac{1}{2} \text{ و } mm'=-1$$
$$\frac{1}{2}\times m'=-1 \Longrightarrow m'=-2$$
ضریب زاویهٔ خطی که برخط D عمود است.
$$A(2\ ,\ -2)$$
معادلهٔ خطی که از نقطهٔ A می‌گذرد و برخط D عمود است:
$$y+2=-2(x-2) \Longrightarrow y=-2x+2$$

جواب سؤال ۲ :
$$\boxed{D: 2y-3px+1=0 \text{ و } A(-1\ ,\ 1)}$$
$$\Longrightarrow AD=\frac{|-3p(-1)+2(1)+1|}{\sqrt{4+9p^2}}=1$$
$$|3p+3|=\sqrt{9p^2+4} \Longrightarrow$$
$$9p^2+4=9p^2+18p+9 \Longrightarrow$$
$$18p=-5 \Longrightarrow p=\frac{-5}{18}$$
$$D: 2y+\frac{5}{6}x+1=0 \Longrightarrow 12y+5x+6=0$$



جواب سؤال ۳:

a و b را باید طوری تعیین کنیم که
$$\begin{cases}D: ax+y+1=0\\D': ay+bx-1=0\\D'': 2x-y-b=0\end{cases} \qquad \begin{cases}D'\perp D'' & \text{:اولاً}\\D'\parallel D & \text{:ثانیاً}\end{cases}$$
همچنین ضریب‌زاویه‌های خطوط چنین است:
$$m_{D''}=2 \quad \text{و} \quad m_{D'}=\frac{-b}{a} \quad \text{و} \quad m_D=-a$$
طبق شرایط مسئله داریم:
$$D'\perp D'' \Longrightarrow m_{D'}.m_{D''}=-1$$
$$D'\parallel D \Longrightarrow m_{D'}=m_D$$
$$\Longrightarrow \begin{cases}\left(\frac{-b}{a}\right)(2)=-1\\-\frac{b}{a}=-a\end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases}a=2b\\b=a^2\end{cases} \Longrightarrow \left|\begin{array}{l}a=\frac{1}{2}\\b=\frac{1}{4}\end{array}\right.$$

برای محاسبهٔ فاصلهٔ دوخط D و D' ابتدا یک نقطهٔ دلخواه از D یا D' انتخاب کرده و سپس فاصلهٔ این نقطه که مثلاً روی خط D است را از خط D' محاسبه می‌کنیم. این فاصله در واقع فاصلهٔ دوخط موازی D و D' است. نقطه‌ای مانند A را روی خط D در نظر می‌گیریم.
$$D: \frac{1}{2}x+y+1=0 \Longrightarrow A\left|\begin{array}{l}0\\-1\end{array}\right.$$
فاصلهٔ AD' در واقع فاصلهٔ دوخط D و D' است.
$$D': \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y-1=0$$
$$AD'=\frac{|\frac{1}{4}x_A+\frac{1}{2}y_A-1|}{\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{4}}}$$
$$=\frac{|\frac{1}{4}(0)+\frac{1}{2}(-1)-1|}{\sqrt{\frac{5}{4}}}$$
$$=\frac{|-\frac{3}{2}|}{\frac{\sqrt{5}}{4}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{4}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

برای تعیین خط : $y=mx+h$

که از نقطهٔ تقاطع D' و D'' بگذرد و با خط :
$$2x+3y+1=0$$
موازی باشد. ابتدا باید نقطهٔ تلاقی دو خط D' و D'' را به دست آورد.
$$\begin{cases}D': \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y-1=0\\D'': 2x-y-\frac{1}{4}=0\end{cases}$$
$$\Longrightarrow 2\begin{cases}\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y-1=0\\2x-y-\frac{1}{4}=0\end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases}\frac{1}{2}x+y-2=0\\2x-y-\frac{1}{4}=0\end{cases}$$

$$۲x+\frac{۱}{۲}x-۲-\frac{۱}{۴}=۰ \Rightarrow \frac{۵}{۲}x=\frac{۹}{۴} \Rightarrow$$

$$x=\frac{۹}{۱۰}=۰/۹ \Rightarrow y=\frac{۳۱}{۲۰}=۱/۵۵$$

خط مفروض باید از نقطهٔ $A\begin{vmatrix}۰/۹\\ ۱/۵۵\end{vmatrix}$ یعنی نقطهٔ تلاقی دو خط D' و D'' بگذرد.

و با خط $۲x+۳y+۱=۰$ با ضریب زاویه‌ای $m=\frac{-۲}{۳}$ موازی باشد.

بنابراین نقطهٔ $A\begin{vmatrix}۰/۹\\ ۱/۵۵\end{vmatrix}$ باید درخط مفروض صدق کند.

و ضریب زاویهٔ خط مفروض باید برابر $m=\frac{-۲}{۳}$ باشد.

$$۰/۹m+h=۱/۵۵ \Rightarrow m=-\frac{۲}{۳}=-۰/۶۶$$

$$۰/۹\left(-\frac{۲}{۳}\right)+h=۱/۵۵ \Rightarrow$$

$$h=۱/۵۵+\frac{۱/۸}{۳}=\frac{۴/۶۵+۱/۸}{۳}$$

$$=\frac{۶/۴۵}{۳}=۲/۱۵$$

$$\Rightarrow y=-\frac{۲}{۳}x+۲/۱۵$$

معادلهٔ خطی که از نقطهٔ تقاطع دو خط D' و D'' عبور می‌کند و با خط به معادلهٔ $۲x+۳y+۱=۰$ موازی است.

جواب سؤال ۴:

ضریب زاویهٔ خطی که از دو نقطهٔ $A(\sqrt{۳},۳)$ و $B(۰,۲)$ می‌گذرد:

$$m=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{۳-۲}{\sqrt{۳}-۰}$$

$$m=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow$$

$$y-y_B=m(x-x_B) \Rightarrow y-۲=\frac{\sqrt{۳}}{۳}(x-۰)$$

خط گذرنده از A و B:

$$y-۲=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x \Rightarrow y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x+۲$$

زاویهٔ خط با محور طولها:

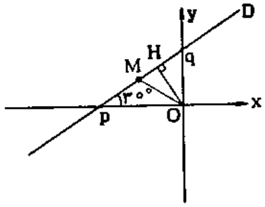
$$tg\,\alpha=m=\frac{\sqrt{۳}}{۳}=tg۳۰° \Rightarrow \alpha=۳۰°$$

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲} \Rightarrow \beta=۹۰°-۳۰°=۶۰° \Rightarrow$$

زاویهٔ خط با محور عرضها: $\beta=۶۰°$

$$x_M=\frac{x_p+x_q}{۲}=\frac{-۲\sqrt{۳}+۰}{۲}=-\sqrt{۳}$$

$p\begin{vmatrix}-۲\sqrt{۳}\\ ۰\end{vmatrix}$ و $q\begin{vmatrix}۰\\ ۲\end{vmatrix}$



$$y_M=\frac{y_p+y_q}{۲}=\frac{۰+۲}{۲}=۱ \Rightarrow M\begin{vmatrix}-\sqrt{۳}\\ ۱\end{vmatrix}$$

$$OM=\sqrt{x_M^۲+y_M^۲}=\sqrt{(-\sqrt{۳})^۲+۱}=۲$$

خط ارتفاع از مبدأ گذشته و برخط D عمود است، بنابراین:

$$y=-\sqrt{۳}x$$

(ثابت می‌شود: $OM=Mp=Mq=۲$)

جواب سؤال ۵:

چون نقطهٔ A روی قطر AC قرار دارد پس مختصات آن در معادلهٔ AC صدق می‌کند لذا:

$$x_A=۴ \Rightarrow ۴-۲y_A=۰ \Rightarrow$$

$$y_A=۲ \Rightarrow A\begin{vmatrix}۴\\ ۲\end{vmatrix}$$

ازطرفی قطر AC دارای ضریب زاویهٔ برابر با $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد

وچون در مربع قطر، نیمساز زاویه نیز هست پس:

$$\angle CAD=۴۵°$$

بنابراین با در دست داشتن ضریب زاویهٔ AC و زاویه بین AC و AD می‌توان ضریب زاویهٔ AD را از فرمول

$$tg\alpha=\frac{m-m'}{۱+mm'}$$

به دست آورد.

$$tg۴۵°=۱=\frac{m-\left(\frac{۱}{۲}\right)}{۱+m\left(\frac{۱}{۲}\right)}=\frac{m-\frac{۱}{۲}}{۱+\frac{m}{۲}}$$

$$\Rightarrow ۱+\frac{m}{۲}=m-\frac{۱}{۲} \Rightarrow m_{AD}=۳$$

و داریم:

$$A\begin{vmatrix}۴\\ ۲\end{vmatrix} \Rightarrow AD:(y-۲)=۳(x-۴) \Rightarrow$$

$$AD:\ \boxed{y=۳x-۱۰}$$

به همین ترتیب می‌توان معادلهٔ ضلع AB را به دست آورد.

ازطرفی با توجه به اینکه $\overline{AC}=۲\sqrt{۵}$ پس داریم:

$$\sqrt{(x_A-x_C)^۲+(y_A-y_C)^۲}=۲\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow (۴-x_C)^۲+(۲-y_C)^۲=۲۰$$

$$\Rightarrow \boxed{x_C^۲+y_C^۲-۸x_C-۴y_C=۰} \qquad (۱)$$

وچون نقطهٔ C روی قطر AC است پس مختصاتش در معادلهٔ AC صدق می‌کند یعنی داریم:

$$\boxed{x_C-۲y_C=۰} \qquad (۲)$$

وبا توجه به روابط (۱) و (۲) داریم:

$$C\begin{vmatrix}۰\\ ۰\end{vmatrix} \text{ یا } C\begin{vmatrix}\frac{۲۰}{۳}\\ \frac{۱۰}{۳}\end{vmatrix}$$

حال با داشتن مختصات نقطهٔ C، مثلاً $C\begin{vmatrix}۰\\ ۰\end{vmatrix}$ و اینکه ضلع BC موازی با AD است می‌توان معادلهٔ ضلع BC را نوشت و با توجه به اینکه ضلع DC موازی ضلع AB است می‌توان معادلهٔ DC را نیز به دست آورد که محل برخورد دو به دوی این خطوط همان رئوس مربع است.

جواب سؤال ۶:

محل برخورد میانه‌های مثلث همان مرکز ثقل مثلث است که مختصات این نقطه به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{۳}=\frac{۱+۱+(-۳)}{۲}=-\frac{۱}{۲}$$

$$y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{۳}=\frac{۲+(-۲)+۱}{۳}=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow G\begin{vmatrix}-\frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۳}\end{vmatrix}$$

حال برای نوشتن معادلهٔ خط مزبور نیاز به ضریب زاویهٔ نیمساز زاویهٔ A یعنی AA' داریم: ابتدا با در دست داشتن ضریب زاویه‌های AB و AC زاویهٔ A را به دست می‌آوریم:

$$m_{AB}=\frac{-۲-۲}{۱-۱} \Rightarrow \text{تعریف نشده است } m_{AB} \Rightarrow$$

AB برمحور xها عمود است

$$m_{AC}=\frac{۱-۲}{-۳-۱}=\frac{-۱}{-۴}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow$$

$\alpha=Arc\,tg\frac{۱}{۴}$ زاویه‌ای که ضلع AC با محور xها می‌سازد

$$\Rightarrow \hat{A}=\frac{\pi}{۲}-Arc\,tg\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{A}}{۲}=\frac{\pi}{۴}-\frac{Arc\,tg\frac{۱}{۴}}{۲}$$

$$tg\frac{\hat{A}}{۲}=\frac{m_{AC}-m_{AA'}}{۱+m_{AC}m_{AA'}}$$

$$\Longrightarrow m_{AA'}=\frac{m_{AC}-tg\frac{\hat{A}}{2}}{m_{AC}tg\frac{\hat{A}}{2}+1}=\frac{\frac{1}{2}-tg\frac{\hat{A}}{2}}{\frac{1}{2}tg\frac{\hat{A}}{2}+1}$$

پس معادلهٔ خط مطلوب چنین است:

$$(y-y_C)=-\frac{1}{m_{AA'}}(x-x_C)$$

جواب سؤالات جبر سال سوم ریاضی

جواب سؤال ۱:

چون چند جمله‌ای x^3+mx^2+nx-3 بر $(x-1)$ بخش‌پذیر است بنابراین باقیماندهٔ آن صفر است. و داریم:

$$x-1=0 \Longrightarrow x=1 \Longrightarrow$$
$$R=1+m+n-3=0 \Longrightarrow m+n=2$$

و چون باقیماندهٔ آن بر $(x+1)$ برابر -2 است بنابراین داریم:

$$x+1=0 \Longrightarrow x=-1$$
$$R=(-1)^3+m(-1)^2+n(-1)-3=-2$$
$$\Longrightarrow -1+m-n-3=-2 \Longrightarrow m-n=2$$
$$\begin{cases} m+n=2 \\ m-n=2 \end{cases} \Longrightarrow 2m=4 \Longrightarrow m=2\ ,\ n=0$$

چند جمله‌ای مطلوب: $\Longrightarrow x^3+2x^2-3$

جواب سؤال ۲:

باقیماندهٔ $A(x)$ را بر $4x^2-2kx+s$ به دست آورده و متحد باصفر قرار می‌دهیم.

ابتدا مقسوم‌علیه‌را برابرصفر قرار می‌دهیم واز آن‌برای به دست‌آوردن باقیمانده استفاده می‌کنیم.

$$4x^2-2kx+s=0 \Longrightarrow 4x^2=2kx-s$$
$$A(x)=16x^4+4 \Longrightarrow A(x)=(4x^2)^2+4$$
$$\Longrightarrow R(x)=(2kx-s)^2+4$$
$$R(x)=4k^2x^2-4ksx+s^2+4$$
$$=k^2(2kx-s)-4ksx+s^2+4$$
$$R(x)=(2k^3-4ks)x+s^2-k^2s+4\equiv 0$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} 2k^3-4ks=0 \\ s^2-k^2s+4=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k=0 \\ \text{یا} \\ k^2=2s \end{cases}$$

اگر $k=0$ اختیارشود جوابی‌در مجموعهٔ اعدادحقیقی وجود ندارد. اما اگر در معادلهٔ دوم دستگاه قرار دهیم:

$$k^2=2s$$

خواهیم داشت:

$$-s^2+4=0$$

و یا داریم:

$$s=\pm 2$$

که $s=-2$ قابل‌قبول نیست زیرا داریم:

$$s=\frac{k^2}{2} \text{ و یا } k^2=2s$$

که نتیجه می‌شود: $s>0$. بنابراین تنها جواب $s=2$ قابل قبول است و به ازای این‌مقدار s دو مقدار برای k به دست می‌آید و جوابها چنین می‌شوند:

$$\begin{cases} s=2 \\ k=2 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} s=2 \\ k=-2 \end{cases}$$

جواب سؤال ۳:

در بسط $(a+b)^n$ جملهٔ $k+1$ ام یعنی T_{k+1} به‌صورت:

$$T_{k+1}=(-1)^k\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

می‌باشد. بنابراین برای پیداکردن ضریب x^{-10} در بسط:

$$(x^4-x^{-3})^{15}$$

جملهٔ $k+1$ ام را می‌نویسیم وتوان x را مساوی -10 قرار می‌دهیم و k را بـه دست می‌آوریم. پس از تعیین k ضریب جمله مطلوب را به دست می‌آوریم.

$$T_{k+1}=(-1)^k\binom{15}{k}(x^4)^{15-k}(x^{-3})^k$$
$$=(-1)^k\binom{15}{k}x^{60-7k} \Longrightarrow 60-7k=-10$$
$$7k=70 \Longrightarrow k=10 \Longrightarrow$$
$$T_{11}=(-1)^{10}\binom{15}{10}x^{-10}$$
$$=\frac{15!}{10!(15-10)!}x^{-10}=3003x^{-10}$$

جواب سؤال ۴:

برای‌تحقیق اینکه‌جملهٔ مستقل‌از x وجوددارد ابتداجملهٔ عمومی بسط را می‌نویسیم و سپس‌توان x را برابر صفر قرار می‌دهیم؛ زیرا جملهٔ مستقل‌از x فاقد x است.

$$T_{k+1}=\binom{7}{k}(\sqrt{x})^{7-k}\left(\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)^k \text{ و } (k\in N)$$
$$T_{k+1}=\binom{7}{k}x^{\frac{7-k}{2}}\times x^{\frac{-3k}{2}}=\binom{7}{k}x^{\frac{7-4k}{2}}$$
$$\Longrightarrow \frac{7-4k}{2}=0 \Longrightarrow 7-4k=0$$

بنابراین جملهٔ مستقل از x وجود ندارد زیرا:

$$k=\frac{7}{4}\notin N$$

جواب سؤال ۵:

برای‌به دست‌آوردن $f(x)$ از رابطهٔ:

$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=x$$

کافی است x را به $\frac{1}{x}$ تبدیل‌کنیم و رابطهٔ فوق‌را با رابطهٔ به‌دست‌آمده دریك دستگاه قراردهیم و از دستگاه حاصله $f(x)$ را حساب‌کنیم.

$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=x \Longrightarrow x\to\frac{1}{x}$$
$$\Longrightarrow af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=\frac{1}{x}$$
$$\begin{matrix} -a \\ b \end{matrix}\begin{cases} af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=x \\ af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=\frac{1}{x} \end{cases} \Longrightarrow$$
$$\begin{cases} -a^2f(x)-abf\left(\frac{1}{x}\right)=-ax \\ baf\left(\frac{1}{x}\right)+b^2f(x)=\frac{b}{x} \end{cases}$$
$$(a^2-b^2)f(x)=ax-\frac{b}{x} \Longrightarrow$$
$$\boxed{f(x)=\frac{a}{a^2-b^2}x-\frac{b}{a^2-b^2}\,\frac{1}{x}}$$

برای‌اینکه $f(x)$ معین باشد، باید داشته باشیم:

$$a^2\neq b^2 \text{ و یا } a^2-b^2\neq 0$$

و اگر داشته باشیم:

$$a^2-b^2=0 \text{ و یا } a^2=b^2 \text{ و یا } \boxed{a=\pm b}$$

تابع $f(x)$ نامعین است.

جواب سؤال ۷:

دامنهٔ تعریف تابع:

$$f(x)=\frac{x}{x-1}+\sqrt{x(x-1)}+\frac{1}{x}$$

چنین است:

$$\begin{cases} x-1\neq 0 \Longrightarrow x\neq 1 \\ x(x-1)\geqslant 0 \\ x\neq 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

x	$-\infty$ … 0	0 … 1	1 … $+\infty$
x	−	+	+
x − 1	−	−	+
$x(x-1)\geqslant 0$	+	−	+

جواب جواب جواب جواب

بنابراین از اشتراك سه‌دامنه داریم:

$$D_f=]-\infty\ ,\ 0[\ \cup\ ]1\ ,\ +\infty[$$

جواب سؤال ۷:

دامنه‌های توابع $gof(x)$ و $fog(x)$ چنین می‌باشند:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$
$$fog(x)=f(g(x))=f\left(\frac{1}{x-1}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x-1}}$$
$$=x-1 \Longrightarrow D_{fog}=R$$

داریم:

$$g(x)=\frac{1}{x-1}\ ,\ f(x)=\frac{1}{x}$$

بنابراین داریم:

$$D_f=R-\{0\}\quad ,\quad D_g=R-\{1\}$$

با استفاده از تعریف D_{fog} نیز داریم:

$$D_{fog}=\{x\in R-\{1\}\mid \frac{1}{x-1}\in R-\{0\}\}=R$$

به‌طور مشابه داریم:

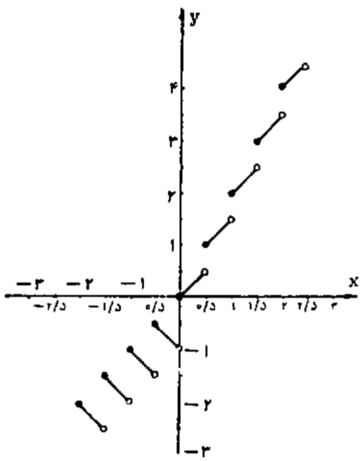
$$D_{gof}=\{x\in D_f\mid f(x)\in D_g\}$$
$$=\{x\in R-\{0\}\mid \frac{1}{x}\in R-\{1\}\}$$
$$D_{gof}=R-\{1\}\ ,\ gof(x)=g(f(x))$$
$$=g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x}-1}=\frac{x}{1-x}$$

جواب سؤال ۸:

رسم تابع $f(x)=[2x]+|x|$ در بازهٔ]۳ و ۲ −[چنین است:

تعریف: $n\leqslant x<n+1 \Rightarrow [x]=n$

$$-2\leqslant x<-1/5 \Rightarrow -4\leqslant 2x<-3$$
$$\Rightarrow f(x)=-4-x$$
$$-1/5\leqslant x<-1 \Rightarrow -3\leqslant 2x<-2$$
$$\Rightarrow f(x)=-3-x$$
$$-1\leqslant x<-0/5 \Rightarrow -2\leqslant 2x<-1$$
$$\Rightarrow f(x)=-2-x$$
$$-0/5\leqslant x<0 \Rightarrow -1\leqslant 2x<0$$
$$f(x)=-1-x$$
$$0\leqslant x<0/5 \Rightarrow 0\leqslant 2x<1 \Rightarrow f(x)=x$$
$$0/5\leqslant x<1 \Rightarrow 1\leqslant 2x<2$$
$$\Rightarrow f(x)=1+x$$



$$1\leqslant x<1/5 \Rightarrow 2\leqslant 2x<4$$
$$\Rightarrow f(x)=2+x$$
$$1/5\leqslant x<2 \Rightarrow 3\leqslant 2x<4$$
$$\Rightarrow f(x)=3+x$$
$$2\leqslant x<2/5 \Rightarrow 4\leqslant 2x<5$$
$$\Rightarrow f(x)=4+x$$
$$2/5\leqslant x<3 \Rightarrow 5\leqslant 2x<6$$
$$\Rightarrow f(x)=5+x$$

جواب سؤال ۹:

تعریف حد چنین است:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow$$
$$|f(x)-L|<\varepsilon$$

برای اثبات حد:

$$\lim_{x\to 1}(3x-2)=1$$

از تعریف فوق استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L$$

بنابراین داریم:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : 0<|x-1|<\delta \Rightarrow$$
$$|3x-2-1|<\varepsilon$$
$$|3x-3|<\varepsilon \Rightarrow 3|x-1|<\varepsilon$$
$$\Rightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \delta\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$$

درنتیجه برای برقراری رابطهٔ شرطی فوق‌کافی است $\delta\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$ اختیار شود. وچون رابطهٔ بین δ و ε به دست‌آمد بنابراین از طرفین نقطهٔ $x_0=1$ بی‌نهایت می‌توان به ۱ نزدیک شد و در نتیجه حد در این نقطه وجود دارد. باید توجه داشت که با اختیار $\delta\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$ می‌توان عملیات عکس بالا را انجام داد و به طرف‌دوم رسید به‌شکل زیر:

$$|x-1|<\delta\leqslant\frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow$$
$$3|x-1|<\varepsilon \Rightarrow |3x-3|<\varepsilon \Rightarrow$$
$$|3x-2-1|<\varepsilon$$

جواب سؤال ۱۰:

برای اینکه تابع:

$$f(x)=\begin{cases}x-1 & x\leqslant 1\\ 5-kx^2 & x>1\end{cases}$$

پیوسته باشد باید داشته باشیم:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

بنابراین با برقراری شرایط پیوستگی k را تعیین می‌کنیم، یعنی:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(5-kx^2)\\ \qquad =5-k \quad \text{و} \quad f(1)=0\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)=0\end{cases}$$
$$\Rightarrow 5-k=0 \Rightarrow k=5$$

بنابراین اگر $k=5$ اختیار شود تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=1$ پیوسته است. ودر نتیجه تابع به شکل زیر می‌باشد:

$$f(x)=\begin{cases}x-1 & x\leqslant 1\\ 5-5x^2 & x>1\end{cases}$$

جواب سؤال ۱۱:

از آنجاکه تابع:

$$f(x)=a[x]+b[x-1]+c[|x+2|]$$

باید درنقطهٔ $M(-2\ ,\ 1)$ پیوسته باشد. بنابراین باید داشته باشیم:

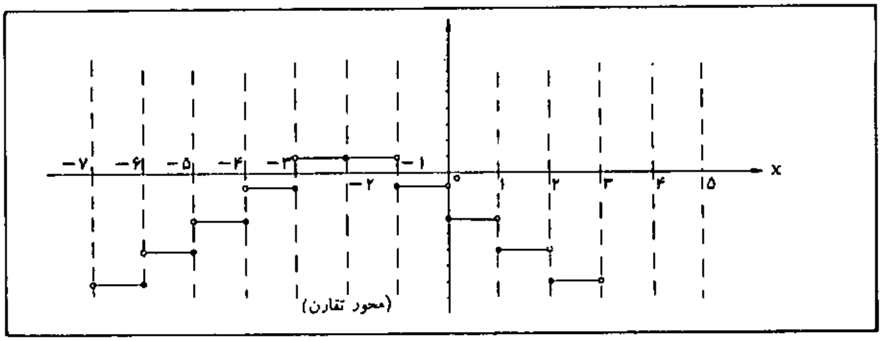
$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^-} f(x)=f(-2)$$
$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=$$
$$\lim_{x\to -2^+}(a[x]+b[x-1]+c[|x+2|])$$
$$=-2a-3b$$
$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=$$
$$\lim_{x\to -2^-}(a[x]+b[x-1]+c[|x+2|])$$
$$=-3a-4b$$
$$f(-2)=-2a-3b=1$$
$$\Rightarrow \begin{matrix}-3\\ 2\end{matrix}\begin{cases}-2a-3b=1\\ -3a-4b=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}6a+9b=-3\\ -6a-8b=2\end{cases}$$

بنابراین از حل دستگاه اخیر داریم:

$$b=-1 \quad \text{و} \quad a=1$$

ازطرفی نقطهٔ $N(-\frac{1}{2}\ ,\ -1)$ روی منحنی تابع است بنابراین مختصات آن در تابع صادق است ودر نتیجه مقدار c نیز محاسبه می‌شود، یعنی:

$$f(-\tfrac{1}{2})=a[-\tfrac{1}{2}]+b[-\tfrac{1}{2}-1]$$
$$+c[|-\tfrac{1}{2}+2|]=-1$$
$$f(-\tfrac{1}{2})=-a-2b+c=-1 \Rightarrow$$
$$-a-2b+c=-1 \Rightarrow \boxed{c=-2}$$



$$f(x)=[x]-[x-1]-2[|x+2|]$$
$$=[x]-[x]+1-2[|x+2|]$$

تابع $f(x)$ با چند ضابطه:

$$f(x)=1-2[|x+2|]$$

$$\Longrightarrow f(x)=\begin{cases}1-2[x+2] & x>-2\\ 1 & x=-2\\ 1-2[-x-2] & x<-2\end{cases}$$

تابع $f(x)$ را به شکل ساده‌تر نیز می‌توان نوشت:

$$f(x)=\begin{cases}-3-2[x] & x>-2\\ 1 & x=-2\\ 5-2[-x] & x<-2\end{cases}$$

ابتدا تابع را در بازهٔ]۳ و ۵−[رسم می‌کنیم وسپس برای کلیهٔ اعدادحقیقی‌دیگر نیز به‌طور مشابه‌تابع‌را ترسیم می‌کنیم، تابع $f(x)$ نسبت‌به محور $x=-2$ متقارن است و در نقطهٔ $M(-2\,,\,1)$ پیوسته می‌باشد. اصطلاحاً این نوع تابع را تابع پلهٔ متقارن می‌نامیم.

$$-5<x\leqslant-4:\ f(x)=5-2[-x]=5-2(4)=-3$$
$$-4<x\leqslant-3:\ f(x)=5-2[-x]=5-2(3)=-1$$
$$-3<x\leqslant-2:\ f(x)=5-2[-x]=5-2(2)=1$$
$$-2\leqslant x<-1:\ f(x)=-3-2[x]=-3-2(-2)=1$$
$$-1\leqslant x<0:\ f(x)=-3-2[x]=-3-2(-1)=-1$$
$$0\leqslant x<1:\ f(x)=-3-2[x]=-3-2(0)=-3$$
$$1\leqslant x<2:\ f(x)=-3-2[x]=-3-2(1)=-5$$
$$2\leqslant x<3:\ f(x)=-3-2[x]=-3-2(2)=-7$$

جواب سؤالات‌جبر وآنالیزسال چهارم‌ریاضی

جواب سؤال ۱:

دامنهٔ تعریف تابع:

$$y=\frac{x-2}{x-4}+\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2-1}{\sqrt{1-x}}$$

ازحل دستگاه توأم زیر نتیجه می‌شود.

$$\begin{cases}x-4\neq0 \Longrightarrow x\neq4\\ 1-x^2\geqslant0 \Longrightarrow -1\leqslant x\leqslant1\\ 1-x>0 \Longrightarrow x<1\end{cases}$$

از اشتراك سه‌رابطهٔ دستگاه نتیجه می‌شود:

$$-1\leqslant x<1$$

بنابراین داریم:

$$D_f=[-1\,,\,1[\quad (\text{دامنهٔ تابع})$$

جواب سؤال ۲:

برای تعیین دامنهٔ تعریف تابع:

$$f(x)=\frac{x}{1+[x]}+\frac{x+1}{[x]+[-x]}$$

دوحالت درنظر می‌گیریم. حالتی‌که $x\in z$ وحالتی که $x\notin z$ دراین دوحالت داریم:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{x+1}{x-x} & x\in z\ (\text{اعداد صحیح})\\[2mm] \dfrac{x}{1+[x]}+\dfrac{x+1}{-1} & x\notin z\end{cases}$$

(اگر x صحیح نباشد داریم:

$$([x]+[-x]=-1$$

به طور خلاصه داریم:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{0} & x\in z\\[2mm] \dfrac{x}{1+[x]}-(x+1) & x\notin z\end{cases}$$

بنابراین در حالتی‌که $x\in z$ باشد $f(x)$ نامعین است . و درحالتی‌که $x\notin z$ دامنهٔ تعریف تابع چنین است:

$$[x]+1\neq0 \Longrightarrow [x]\neq-1 \Longrightarrow$$
$$x>0\ ,\ x<-1$$

بنابراین داریم:

$$D_f=\{x|x\notin z\ ,\ x>0\ ,\ x<-1\}$$

به عبارت‌دیگر دامنهٔ‌تابع برابر اعداد غیرصحیح مثبت واعداد غیرصحیح‌کوچکتر از ۱− می‌باشد.

جواب سؤال ۳:

دورهٔ تناوب تابع:

$$y=\sin^2\frac{2x}{3}+tg\frac{3x}{2}+\cos\frac{x}{2}$$

چنین است:

$$y=\frac{1-\cos\frac{4x}{3}}{2}+tg\frac{3x}{2}+\cos\frac{x}{2} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases}\cos\frac{4x}{3} \to T_1=\frac{2\pi}{\frac{4}{3}}=\frac{3\pi}{2} \Longrightarrow T_1=\frac{9\pi}{6}\\[2mm] \cos\frac{x}{2} \to T_2=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi \Longrightarrow T_2=\frac{24\pi}{6}\\[2mm] tg\frac{3x}{2} \to T_3=\frac{\pi}{\frac{3}{2}}=\frac{2\pi}{3} \Longrightarrow T_3=\frac{4\pi}{6}\end{cases}$$

دورهٔ تناوب تابع: $T=\frac{72\pi}{6}=12\pi$

جواب سؤال ۴:

یك‌تابع وقتی معکوس‌پذیر است کـه یك‌به‌یك بـاشد یـا در دامنـه‌اش پیـوسته و اکیداً یکنوا باشد. چون تابع $f(x)$ یك به یك است پس وارون‌پذیر است.

و ضابطهٔ تابع معکوس تابع:

$$f(x)=\sqrt[3]{x^3+2}$$

چنین است:

$$f^3(x)=x^3+2 \Longrightarrow x=\sqrt[3]{f^3(x)-2}$$
$$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^3-2}$$

جواب سؤال ۵:

تعریف حد:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L$$
$$\forall\beta>0\ \exists\alpha>0:\ 0<|x-x_0|<\alpha \Longrightarrow$$
$$|f(x)-L|<\beta$$

الف)

$$\lim_{x\to-1}(x^2-4)=-3 \Longrightarrow$$
$$\forall\beta>0\ \exists\alpha>0:\ |x+1|<\alpha \Longrightarrow$$
$$|x^2-4+3|<\beta$$
$$|x^2-4+3|<\beta \Longrightarrow |x^2-1|<\beta \Longrightarrow$$
$$|x-1||x+1|<\beta$$

با استفاده از خاصیت همسایگی ($\alpha \leq 1$) داریم:

$$-2<x<0 \Rightarrow -1<x+1<1 \Rightarrow |x+1|<1$$

(نامعادلهٔ کمکی که درفرض استلزام ضرب می‌شود)

$$|x-1|\times 1<\beta \Rightarrow |x-1|<\beta \Rightarrow \alpha=\min(1,\beta)$$

چون عملیات معکوس‌پذیر است و رابطهٔ‌بین α و β به دست آمده‌است پس بنابراین حد فوق صادق است. لازم به توضیح است که تعریف‌حد یك‌رابطهٔ شرطی‌است واز فرض‌باید‌حکم‌را نتیجه گرفت یعنی‌باید تابعی از β را جایگزین α نمود تا حکم نتیجه شود. دراین مسئله چنین‌نتیجه شدکه اگر $\alpha\leq\beta$ اختیار شود ونامعادلهٔ‌کمکی $|x+1|<1$ را در فرض استلزام یعنی $|x-1|<\alpha\leq\beta$ ضرب‌کنیم حکم نتیجه خواهد شد.

ب) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x}=-\infty \Rightarrow$

$$\forall N>0\ \exists\alpha>0 : 0-\alpha<x<0 \Rightarrow \frac{1}{x}<-N$$

$$\frac{1}{x}<-N \Rightarrow \frac{-1}{N}<x<0 \Rightarrow 0<\alpha\leq\frac{1}{N}$$

پس اگر هرعدد مثبت‌کوچکتر یا مساوی $\frac{1}{N}$ را جایگزین α کنیم یعنی:

$$0<\alpha\leq\frac{1}{N}$$

استلزام فوق برقرار است وداریم:

$$\frac{-1}{N}<x<0 \Rightarrow \frac{1}{x}<-N$$

لازم به توضیح است‌که تابع $f(x)=-\frac{1}{x}$ وقتی‌که x به سمت‌صفرمیل می‌کند حد ندارد زیرا حدچپ و راست‌آن باهم مساوی نیستند.

ج) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^6+x+1)=+\infty \Rightarrow$

$$\forall N>0\ \exists M>0 : x>M \Rightarrow (x^6+x+1)>N$$

$$(x^6+x+1)>N \xRightarrow[\text{هم‌ارزی}]{x\to+\infty} x^6>N \Rightarrow$$

$$x>\sqrt[6]{N} \Rightarrow M\geq\sqrt[6]{N}$$

عکس عملیات فوق صادق‌است بنابراین استلزام منطقی برقرار است و حد فوق ثابت می‌شود.

د) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+1}{x-2}=\infty \Rightarrow$

$$\forall N>0\ \exists\alpha>0 : 0<|x-2|<\alpha \Rightarrow$$

$$\left|\frac{x+1}{x-2}\right|>N$$

$$\left|\frac{x+1}{x-2}\right|>N \Rightarrow \frac{|x+1|}{|x-2|}>N \Rightarrow$$

$$|x-2|<\frac{|x+1|}{N} \xRightarrow[(\alpha<1)]{\text{همسایگی}} 1<x<3$$

$$2<x+1<4 \Rightarrow -4<2<x+1<4 \Rightarrow$$

$$-4<x+1<4 \Rightarrow |x+1|<4 \Rightarrow$$

(نامعادله کمکی که درفرض‌ضرب می‌شود)

$$|x-2|<\frac{4}{N} \Rightarrow \alpha=\min(1,\frac{4}{N})$$

عملیات عکس‌صادق است پس استلزام منطقی است.

ه) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1-2x}{3x-5}=-\frac{2}{3}$

$$\forall\beta>0\ \exists M>0 : |x|>M \Rightarrow |f(x)-L|<\beta$$

$$\left|\frac{1-2x}{3x-5}+\frac{2}{3}\right|<\beta \Rightarrow \left|\frac{-7}{3(3x-5)}\right|<\beta$$

$$|3x-5|>\frac{7}{3\beta} \xRightarrow[\text{هم ارزی}]{x\to\pm\infty} |3x|>\frac{7}{3\beta} \Rightarrow$$

$$|x|>\frac{7}{9\beta} \Rightarrow M\geq\frac{7}{9\beta}$$

عکس عملیات فوق نیز صادق است. بنابراین رابطه شرطی استلزام منطقی‌است ودر نتیجه تعریف‌حد برقرار است.

و) توجه‌صورت مسئله‌در شمارهٔ(۱) اشتباه‌چاپی‌دارد و دراصل چنین است:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3-4x^2}{2x+1}=\mp\infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (I) : \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3-4x^2}{2x+1}=-\infty \\ (II) : \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3-4x^2}{2x+1}=+\infty \end{cases}$$

$$(I) : \forall N>0\ \exists M>0 : x>M \Rightarrow f(x)<-N$$

$$\frac{3-4x^2}{2x+1}<-N \Rightarrow$$

$$-2x+1+\frac{2}{2x+1}<-N \xRightarrow[\text{هم ارزی}]{x\to+\infty}$$

$$-2x+1<-N$$

$$-2x<-N-1 \Rightarrow x>\frac{N+1}{2} \Rightarrow$$

$$M\geq\frac{N+1}{2}$$

عکس این عملیات نیزصادق‌است. بنابراین‌رابطهٔ شرطی(I) یك استلزام منطقی است.

$$(II) : \forall N>0\ \exists M>0 : x<-M \Rightarrow f(x)>N$$

$$\frac{3-4x^2}{2x+1}>N \Rightarrow -2x+1+\frac{2}{2x+1}>N$$

$$\xRightarrow[\text{هم ارزی}]{x\to-\infty} -2x+1>N$$

$$-2x>N-1 \Rightarrow x<\frac{1-N}{2} \Rightarrow$$

$$-M\leq\frac{1-N}{2} \Rightarrow M\geq\frac{N-1}{2}$$

از آنجاکه عملیات عکس نیز صادق است. بنابراین رابطه شرطی (II) نیز یك استلزام منطقی است. درنتیجه تعریف حد برقرار است .

جواب سؤال ۶ :

الف) حد تابع :

$$\lim_{x\to+\infty} y=\sqrt[3]{x^3+x-2}-\sqrt{x^2-2x+3}$$

با استفاده از هم‌ارزی به سادگی محاسبه می‌شود یعنی :

$$\sqrt[3]{x^3+x-2}\equiv x\ ,\quad x\to+\infty$$

$$\sqrt{x^2-2x+3}=\sqrt{(x-1)^2+2}\quad x\to+\infty$$

$$=|x-1|\sqrt{1+\frac{2}{(x-1)^2}}=x-1\quad x\to+\infty$$

$$\Rightarrow y=x-(x-1)=1\quad x\to+\infty$$

ب) محاسبهٔ :

$$\text{حد}_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^n x}-\frac{1}{x^n}\right)$$

با قراردادن صفر حالت مبهم $(\infty-\infty)$ نتیجه می‌شودکه با گرفتن مخرج مشترك داریم:

$$\text{حد}_{x\to 0}\left(\frac{x^n-\sin^n x}{x^n\sin^n x}\right)$$

اینك با قراردادن صفرحالت مبهم $(\frac{0}{0})$ پیش می‌آیدکه برای رفع ابهام‌کافی است ازقاعدهٔ هوپیتال استفاده‌کنیم. اما قبل‌از این عمل بهتراست‌از رابطه‌هم‌ارزی استفاده‌کنیم و به‌جای‌مخرج کسر عبارت $x^n\sin^n x\approx x^{2n}$ را قراردهیم زیراوقتی $x\to 0$ داریم :

$$\sin^n x\approx x^n$$

بنابراین دراینجا پس از جایگزینی x^{2n} به جای مخرج کسر قاعدهٔ هوپیتال‌را اجرا می‌کنیم. یعنی :

$$\underset{x\to 0}{\text{حد}}\left(\frac{x^n-\sin^n x}{x^n\sin^n x}\right)\overset{\text{هم ارزی}}{=\!=}\underset{x\to 0}{\text{حد}}\left(\frac{x^n-\sin^n x}{x^{2n}}\right)$$

$$\overset{\text{هوبیتال}}{=\!=}\underset{x\to 0}{\text{حد}}\left(\frac{nx^{n-1}-n\sin^{n-1}x\cos x}{2nx^{2n-1}}\right)$$

پس از ساده‌کردن کسر فوق به n کافی‌است یك‌بار دیگر قاعدهٔ هوبیتال‌را اجرا کنیم. بنابراین داریم:

$$\overset{\text{هوبیتال}}{=\!=}\underset{x\to 0}{\text{حد}}\left(\frac{(n-1)x^{n-2}-(n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x+\sin^n x}{2(2n-1)x^{2n-2}}\right)$$

$$+\sin^n x$$

$$=\underset{x\to 0}{\text{حد}}\left(\frac{(n-1)x^{n-2}-(n-1)\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)}{2(2n-1)x^{2n-2}}\right)$$

$$\overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=}\underset{x\to 0}{\text{حد}}\left(\frac{(n-1)x^{n-2}-(n-1)x^{n-2}(1-x^2)+x^n}{2(2n-1)x^{2n-2}}\right)$$

$$=\underset{x\to 0}{\text{حد}}\left(\frac{nx^n}{2(2n-1)x^{2n-2}}\right)$$

به ازای هر n بالاخره محاسبه‌حد چنین می‌شود:

$$=\underset{x\to 0^+}{\text{حد}}\left(\frac{n}{2(2n-1)x^{n-2}}\right)$$

$$=\begin{cases}0 & n<2\\ \frac{1}{3} & n=2\\ +\infty & n>2\end{cases}$$

درصورتی که $2n-1=0$ یعنی $n=\frac{1}{2}$ باشد عبارت اخیر مبهم می‌شود که دراین‌حالت مستقلاً مقدار حد را حساب‌می‌کنیم.

$$n=\frac{1}{2}:\underset{x\to 0^+}{\text{حد}}\left(\frac{1}{\sqrt{\sin x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=$$

$$\underset{x\to 0^+}{\text{حد}}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x\sin x}}\right)$$

$$\overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=}\underset{x\to 0^+}{\text{حد}}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x^2}}\right)=\underset{x\to 0^+}{\text{حد}}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}}{x}\right)$$

$$\overset{\text{هوبیتال}}{=\!=}\underset{x\to 0^+}{\text{حد}}\left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}}{1}\right)$$

$$\overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=}\underset{x\to 0^+}{\text{حد}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{\cos x}{2\sqrt{x}}\right)=$$

$$\underset{x\to 0^+}{\text{حد}}\left(\frac{1-\cos x}{2\sqrt{x}}\right)=\underset{x\to 0^+}{\text{حد}}\left(\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$\overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=}\underset{x\to 0^+}{\text{حد}}\frac{x^2}{4\sqrt{x}}=\underset{x\to 0^+}{\text{حد}}\frac{x\sqrt{x}}{4}\Longrightarrow$$

$$\underset{x\to 0^+}{\text{حد}}\frac{x\sqrt{x}}{4}=0$$

ج)

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}\right)\Longrightarrow \text{حالت مبهم } \frac{0}{0}$$

برای‌رفع ابهام قاعدهٔ هوبیتال‌را اعمال می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{x}{2\sqrt{\cos x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\sqrt{x}}\right)=0$$

د)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2^n+3^n+4^n+5^n}{6^n+7^n+8^n+9^n}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5^n[(\frac{1}{5})^n+(\frac{2}{5})^n+(\frac{3}{5})^n+(\frac{4}{5})^n+1]}{9^n[(\frac{6}{9})^n+(\frac{7}{9})^n+(\frac{8}{9})^n+1]}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{9}\right)^n=0\quad(n\in N)$$

ازآنجاکه هرکسر کوچکتر از یك است بنابراین حد هر کسر وقتی‌به توان بی‌نهایت مثبت برسد‌برابرصفراست. وحدکسر وقتی $n\to\infty$ برابرصفر است.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\sum_{k=1}^{n}k^3}{\sum_{k=1}^{n}k^2\sum_{k=1}^{n}k}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\times\frac{n(n+1)}{2}}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^5}{4}}{\frac{2n^5}{12}}=\frac{3}{2}\qquad(n\in N)$$

ه)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[5]{x-1}}\right)=\frac{0}{0}\ \text{حالت مبهم}$$

برای رفع ابهام کافی است از قاعدهٔ هوبیتال استفاده کنیم.

پس‌از اعمال‌قاعدهٔ هوبیتال داریم:

$$\Longrightarrow\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}}{\frac{1}{4\sqrt[4]{(x+1)^3}}+\frac{1}{5\sqrt[5]{(x-1)^4}}}\right)=0$$

و) ازآنجاکه $|\sin\frac{1}{x^n}|<1$ بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^n\sin\frac{1}{x^n}\right)=\underbrace{\lim_{x\to 0}x^n}_{0}\times\underbrace{\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x^n}}_{\text{عددی}}=0$$

بین ۱ــ و ۱ می‌باشد

ز)

$$\lim_{x\to 1}(1+x^2)^{\log_{x^2}2}=\lim_{x\to 1}\left[(1+x^2)^{\frac{\log 2}{\log x^2}}\right]$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{(1+x^2)\log 2}{2\log x}\right]=\left\{\lim_{x\to 1^+}(1+x^2)^{\log_{x^2}2}\right.$$

$$=\frac{\log 2}{\log 1+}=\frac{\log 2}{0+}=+\infty$$

بنابراین تابع در نقطهٔ $x=1$ حد ندارد زیرا حد چپ با حد راست برابر نیست.

ح) می‌دانیم‌اگر a_1 و a_2 و ... و a_n اعداد مثبت‌باشند داریم:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots a_n}$$

اگر اعداد طبیعی‌را به ترتیب‌به a_1 و a_2 و ... و a_n نسبت‌دهیم داریم:

$$\frac{1+2+3+\cdots+n}{n}\geqslant\sqrt[n]{1\times2\times3\times\cdots\times n}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\\ 1\times2\times3\times\cdots\times n=n!\ (n\in N)\end{cases}$$

$$\frac{n(n+1)}{2n}\geqslant\sqrt[n]{n!}$$

بنابراین اگر $n\to\infty$ مقدار عبارت:

$$\frac{n+1}{2}\geqslant\sqrt[n]{n!}\Longrightarrow\frac{\sqrt[n]{n!}}{n+1}\leqslant\frac{1}{2}$$

کران‌دار است و ماکزیمم آن برابر $\frac{1}{2}$ است. بنابراین داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n+1}\leqslant\frac{1}{2}$$

(ماکزیمم عبارت فوق وقتی است که $n=1$ باشد.)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n^2+n}\right)=\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n+1}\right)}\times\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)}=0$$

۰ ضرب بین $\frac{1}{2}$ وصفرمی‌باشد

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n^2+n}\right)=0$$

حل مسائل جبر دوم تجربی

جواب سؤال ۱:

ریشه‌های معادلهٔ:

$$x^2(x^2-1)(x^3+1)(x^2-3x+2)=0$$

عبارتند از:

$x^2=0\Rightarrow x=0$ ریشهٔ مضاعف

$x^2-1=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm1$

دو ریشهٔ قرینه

$x^3+1=0\Rightarrow x^3=-1\Rightarrow x=-1$

$x^2-3x+2=0\Rightarrow$

$$(x-1)(x-2)=0\ \left|\begin{array}{l}x=1\\ x=2\end{array}\right.$$

بنابراین مجموعهٔ ریشه‌های معادله چنین است:

$$R=\{x\mid \overset{\text{مضاعف}}{x=0}\ ,\ \overset{\text{مکرر}}{x=\pm1}\ ,\ x=2\}$$

جواب سؤال ۲:

معادله مفروض: $x^2-2m^2x+m=0$

a) شرط اینکه معادلهٔ فـوق ریشهٔ مضـاعف داشـته باشداین است که مبین آن صفر باشد. بنابراین داریم:

$\Delta'=m^4-m=0\Rightarrow m^4-m=0\Rightarrow$

$$m(m^3-1)=0\Rightarrow\left|\begin{array}{l}m=0\\ m=1\end{array}\right.$$

b) وقتی معادله دو ریشهٔ‌حقیقی متمایز داردکه مبین آن‌مثبت‌باشد، یعنی‌داشته باشیم:

$\Delta'=m^4-m>0$

$$m(m^3-1)>0\Rightarrow\left|\begin{array}{l}m=0\\ m=1\end{array}\right.\Rightarrow$$

m	$-\infty$		0		1		$+\infty$
m		$-$	0	$+$		$+$	
m^3-1		$-$		$-$	0	$+$	
Δ'		$+$		$-$		$+$	

$$\Rightarrow\Delta'>0\begin{cases}m<0\\ m>1\end{cases}$$

بنابراین اگر m منفی (یاکوچکتر ازصفر) باشد و یا m بزرگتر از یک باشد Δ' مثبت ومعادله دو ریشهٔ‌حقیقی متمایز دارد.

c) بدیهی‌است اگر $\Delta'=m^4-m<0$ باشد معادله ریشه حقیقی نـدارد. به عبارت دیگر اگر $0<m<1$ باشد معادله ریشهٔ‌حقیقی ندارد.

d) اگر یک‌ریشهٔ معادله $x=1$ باشد بنابراین m چنین است:

$x=1:\ 1-2m^2+m=0\Rightarrow$

$2m^2-m-1=0$

$m=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1\pm3}{4}\Rightarrow$

$m=1\quad,\quad m=-\frac{1}{2}$

e) شرط اینکه معادله دو ریشهٔ مثبت داشته باشد ایـن است که اولاً $\frac{c}{a}>0$ و ثانیاً $-\frac{b}{a}>0$ بـاشد. بنابرایـن داریم:

$\frac{c}{a}=\frac{m}{1}=m>0$ و $-\frac{b}{a}=\frac{-(-2m^2)}{1}$

شرط اینکه دو ریشه مثبت داشته باشد:

$=2m^2>0\Rightarrow m>0$

f) شرط اینکه معادله‌دو ریشهٔ معکوس‌هم‌داشته‌باشد این است‌که $\frac{c}{a}=1$ باشد. بنابراین:

$\frac{c}{a}=\frac{m}{1}=1\Rightarrow m=1$

جواب سؤال ۳:

شرط اینکه دونقطهٔ A و B نسبت‌به M قرینه‌باشند این است که:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}\quad,\quad y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$$

$$A\left|\begin{array}{l}-n\\ m\end{array}\right.,\ B\left|\begin{array}{l}2m\\ -2\end{array}\right.,\ M\left|\begin{array}{l}3n-1\\ m+n\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\begin{cases}3n-1=\frac{2m-n}{2}\\ m+n=\frac{m-2}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7n-2m=2\\ 2n+m=-2\end{cases}$$

دستگاه‌فوق دارای‌جواب است و به‌ازای m و n دستگاه نقاط A و B نسبت به M قرینهٔ یکدیگرند یعنی:

$$\left|\begin{array}{l}m=\frac{-18}{11}\\ n=\frac{-2}{11}\end{array}\right.$$

جواب سؤال ۴:

برای‌اینکه معادله دارای دو ریشهٔ‌حقیقی مثبت‌باشد اولاً باید $\Delta>0$، ثانیاً باید $\frac{c}{a}>0$ و ثالثاً باید $-\frac{b}{a}>0$.

بنابراین خواهیم داشت:

$\Delta'>0\Rightarrow b'^2-ac>0\Rightarrow$

$16-(m+1)^2>0\Rightarrow 16-m^2-2m-1>0$

$\Rightarrow -m^2-2m+15>0$

ازطرفی: $\frac{-b}{a}>0\Rightarrow\frac{8}{m+1}>0\Rightarrow$

$m+1>0\Rightarrow\boxed{m>-1}$

$\frac{c}{a}=\frac{m+1}{m+1}=1>0$

پس‌داریم: $\begin{cases}-m^2-2m+15>0\Rightarrow-5<m<3\\ m>-1\end{cases}$

وجواب مشترک این‌دو مجموعه حدود m را مشخص می‌کندکه $\boxed{-1<m<3}$ می‌باشد.

جواب سؤال ۵:

فرض‌کنیم x_1 و x_2 دو ریشهٔ معادلهٔ:

$4x^2-15x+k=0$

باشند پس‌باید مثلاً $x_1=x_2^2$. ازطرفی داریم:

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}\Rightarrow x_2^2+x_2=\frac{15}{4}$

$\Rightarrow 4x_2^2+4x_2=15\Rightarrow$

$x_2=\frac{-5}{2}$ یا $x_2=\frac{3}{2}$

$x_1\times x_2=\frac{c}{a}\Rightarrow x_2^2\times x_2=\frac{k}{4}$

$\Rightarrow x_2^3=\frac{k}{4}$

اگر $x_2=\frac{-5}{2}\Rightarrow\left(\frac{-5}{2}\right)^3=\frac{k}{4}$

$\Rightarrow\boxed{k=\frac{-125}{2}}$

اگر $x_2=\frac{3}{2}\Rightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{k}{4}\Rightarrow\boxed{k=\frac{27}{2}}$

حل مسائل جبر سال سوم علوم تجربی

حل ۱:

(اولاً) $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=-\dfrac{2}{3}\quad,\quad x_A=4\quad,\quad x_B=-6$

$$\Longrightarrow x_M=\frac{kx_B-x_A}{k-1}=\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)(-6)-4}{-\frac{2}{3}-1}=0$$

(ثانیاً) $\overline{MA}=2\overline{AB}\Longrightarrow x_A-x_M=2(x_B-x_A)$

$\Longrightarrow 4-x_M=2(-6-4)\Longrightarrow x_M=24$

حل ۲:

(الف) $[+2\ ,\ 4[$ ، (ب) $[-2\ ,\ 5[$

حل ۳:

$$\begin{cases}a+2b+3=0\\2a-b-1=0\end{cases}\Longrightarrow a=\frac{-1}{5}\ \text{و}\ b=\frac{-7}{5}$$

حل ۴:

چون دستگاه دومعادلهٔ یك مجهولی متوافق نیست پس به ازای هیچ مقداری از m نقطهٔ A برمبدأ مختصات نمی‌تواند منطبق باشد.

$$\begin{cases}2m-1=0\Longrightarrow m=\frac{1}{2}\\3m+6=0\Longrightarrow m=-2\end{cases}$$

حل ۵:

$$\begin{cases}2b+1=\dfrac{-2+2a-1}{2}\\a-b=\dfrac{1+a+2b}{2}\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\begin{cases}2a-4b=5\\a-4b=1\end{cases}\Longrightarrow a=4\ \text{و}\ b=\frac{3}{4}$$

حل ۶:

$A(\alpha\ ,\ -\alpha)\ ,\ M(-2\ ,\ 4)$

$\Longrightarrow 2\sqrt{5}=\sqrt{(\alpha+2)^2+(-\alpha-4)^2}\Longrightarrow$

$2\alpha^2+12\alpha=0\Longrightarrow\alpha=0\ ,\ \alpha=-6\Longrightarrow$

$A_1(0\ ,\ 0)$ و $A_2(-6\ ,\ 6)$

حل ۷:

$x+2=-2\Longrightarrow x=-4\Longrightarrow$

$f(-4)=-4+\sqrt{-4+5}=-3$

حل ۸:

$f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2+1=3\quad,\quad f(5)=3$

$f(\sqrt{2}-1)=3-2(\sqrt{2}-1)=5-2\sqrt{2}$

حل ۹:

(الف) $y=\sqrt[5]{\dfrac{3}{x^2-3x-4}}\ ,\ D=R-\{-1\ ,\ 4\}$

(ب) $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{|x|-x}}\quad,\quad D=\begin{cases}4-x^2\geqslant 0\\|x|-x>0\end{cases}$

$\Longrightarrow D=[-2,0[$

(ج) $y=\dfrac{2x}{\sqrt{9-x^2}}\quad,\quad D=\{x|9-x^2>0\}$

$\Longrightarrow D:\ -3<x<3$

(د) $y=\sqrt{x-|x|}+\sqrt{4x^2-1}\ ,$

$D=\begin{cases}x-|x|\geqslant 0\\4x^2-1\geqslant 0\end{cases}\Longrightarrow D:\ x\geqslant\dfrac{1}{2}$

حل ۱۰:

(راه اول) $f\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)=\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{1}{\frac{x-1}{x+2}}$

$\Longrightarrow f(x)=\dfrac{1}{x}$

(راه دوم) $\dfrac{x-1}{x+2}=t\Longrightarrow x=\dfrac{2t+1}{1-t}$

$$\Longrightarrow f(t)=\frac{\frac{2t+1}{1-t}+2}{\frac{2t+1}{1-t}-1}=\frac{1}{t}\Longrightarrow f(x)=\frac{1}{x}$$

حل ۱۱:

$(fog)(3)=f[g(3)]=f(2\sqrt{6}+3)$

$=(2\sqrt{6}+3)^2-3(2\sqrt{6}+3)$

حل ۱۲:

(راه اول) $g(x)=x+1\ ,$

$(fog)(x)=x^2+4x-2$

$=(x+1)^2+2(x+1)-5$

$\Longrightarrow(fog)(x)=[g(x)]^2+2g(x)-5$

$\Longrightarrow f(x)=x^2+2x-5$

(راه دوم) $g(x)=x+1=u\Longrightarrow x=u-1$

$\Longrightarrow f[g(x)]=f(u)=(u-1)^2+4(u-1)-2$

$=u^2+2u-5\Longrightarrow f(u)=u^2+2u-5\Longrightarrow$

$f(x)=x^2+2x-5$

حل ۱۳:

$$f(x)=\frac{1}{x^2}\Longrightarrow(fof)(x)=\frac{1}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}=x^4$$

حل ۱۴:

$x^2+y^2-2x+4y+1=0$

1) $y\to -y\Longrightarrow x^2+y^2-2x-4y+1=0$

2) $x\to -x\Longrightarrow x^2+y^2+2x+4y+1=0$

3) $x\to y$ و $y\to x\Longrightarrow$

$y^2+x^2-2y+4x+1=0$

4) $x\to 2-x\Longrightarrow(2-x)^2+y^2-2(2-x)$

$+4y+1=0\Longrightarrow$

$x^2+y^2-2x+4y+1=0$

5) $y\to 4-y\Longrightarrow$

$x^2+(4-y)^2-2x+4(4-y)+1=0$

$\Longrightarrow x^2+y^2-2x-12y+33=0$

6) $\lambda=\dfrac{x-2y-5}{1+4}=\dfrac{x-2y-5}{5}$

$x\to x-2a\lambda=x-2\times\dfrac{x-2y-5}{5}$

$=\dfrac{3x+4y+10}{5}$

$y\to y-2b\lambda$

$=y+4\times\dfrac{x-2y-5}{5}=\dfrac{4x-3y-20}{5}$

$\Longrightarrow\left(\dfrac{3x+4y+10}{5}\right)^2+\left(\dfrac{4x-3y-20}{5}\right)^2$

$-2\left(\dfrac{3x+4y+10}{5}\right)+4\left(\dfrac{4x-3y-20}{5}\right)$

$+1=0\Longrightarrow x^2+y^2-2x+4y+1=0$

7) $O'(1,-2)\Longrightarrow\left|\begin{array}{l}x\to 2-x\\y\to -4-y\end{array}\right.$

$\Longrightarrow(2-x)^2+(-4-y)^2-2(2-x)$

$+4(-4-y)+1=0$

$\Longrightarrow x^2+y^2-2x+4y+1=0$

حل ۱۵:

راه اول:

$A(3\ ,\ -1)\ ,\ \Delta:\ 2x+y-1=0\Longrightarrow$

$\lambda=\dfrac{6-1-1}{4+1}=\dfrac{4}{5}$

$$A'\left|\begin{array}{l}x_1-2a\lambda=3-4\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{-1}{5}\\y_1-2b\lambda=-1-2\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{-13}{5}\end{array}\right.$$

قرینه نقطهٔ A نسبت به خط Δ

$$B\left|\begin{array}{l}a+b\\b-2a\end{array}\right.\Longrightarrow\begin{cases}a+b=\frac{-1}{5}\\b-2a=\frac{-13}{5}\end{cases}\Longrightarrow$$

$a=\dfrac{4}{5}\ ,\ b=-1$

راه دوم: اگر نقطهٔ $A'\left|\begin{array}{l}\alpha\\\beta\end{array}\right.$ قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خط Δ

باشد ، اولاً ــ نقطهٔ M وسط AA' روی خط Δ قرار دارد، ثانیاً ــ خط AA' بر Δ عمود است. با استفاده از این دو شرط مقادیر α و β محاسبه می‌شود.

حل ۱۶:

$$M\left|\begin{matrix}-3\\ \frac{1}{2}\end{matrix}\right. \Longrightarrow A\left|\begin{matrix}p\\ 0\end{matrix}\right. ,\quad B\left|\begin{matrix}0\\ q\end{matrix}\right.$$

$$\Longrightarrow p=-6 \ , \ q=1$$

$$\Longrightarrow \frac{x}{-6}+\frac{y}{1}=1 \Longrightarrow -x+6y=6$$

$$\Longrightarrow x-6y+6=0$$ معادلهٔ AB

حل ۱۷:

$$A(3\ ,\ 4) \text{ و } \frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1 \Longrightarrow \frac{3}{p}+\frac{4}{q}=1$$

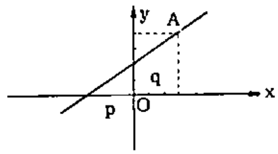
$$\Longrightarrow 3q+4p=pq \qquad (1)$$

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}|\overline{OA}\cdot\overline{OB}|=\frac{1}{2}|\,p\cdot q\,|=3$$

$$\Longrightarrow p\cdot q=+6 \quad (2) \quad \text{و} \quad pq=-6 \quad (3)$$

$$\begin{cases}3q+4p=pq\\ p\cdot q=6\end{cases} \Longrightarrow 4p^2-6p+18=0$$

جواب ندارد



$$\begin{cases}3q+4p=pq\\ pq=-6\end{cases} \Longrightarrow 4p^2+6p-18=0$$

$$\Longrightarrow p=-3 \text{ و } p=\frac{3}{2} \Longrightarrow$$

$$\left|\begin{matrix}p=-3\\ q=2\end{matrix}\right. \Longrightarrow \frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1$$

$$\Longrightarrow -2x+3y=6$$ معادلهٔ خط مطلوب

$$\left|\begin{matrix}p=\frac{3}{2}\\ q=-4\end{matrix}\right. \Longrightarrow \frac{x}{\frac{3}{2}}+\frac{y}{-4}=1$$

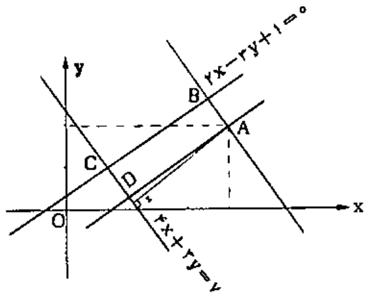
$$\Longrightarrow 8x-3y=12$$ معادلهٔ خط مطلوب

حل ۱۸:

$$A(4\ ,\ 2)\ ،\ 2x-3y+1=0\ ,\ 4x+3y=7$$

۱) معادلات خطوطی را که از رأس A به‌موازات هریک از دوضلع داده‌شدهٔ متوازی‌الاضلاع رسم می‌شوند می‌نویسیم

$$2x-3y+1=0 \Longrightarrow m=\frac{2}{3} \text{ و } A(4,2)$$



$$\Longrightarrow y-2=\frac{2}{3}(x-4)$$

$$\Longrightarrow y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$$ معادلهٔ AD

$$4x+3y=7 \Longrightarrow m=\frac{-4}{3} \text{ و } A(4,2)$$

$$\Longrightarrow y-2=\frac{-4}{3}(x-4)$$

$$\Longrightarrow y=\frac{-4}{3}x+\frac{22}{3}$$ معادلهٔ AB

۲) مختصات محل برخورد دوضلع داده‌شده را پیدا می‌کنیم (نقطه C). سپس مختصات وسط AC را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases}2x-3y+1=0\\ 4x+3y=7\end{cases} \Longrightarrow C\left|\begin{matrix}x=1\\ y=1\end{matrix}\right. \text{ و } A\left|\begin{matrix}4\\ 2\end{matrix}\right.$$

$$\Longrightarrow O' \text{ مرکز متوازی الاضلاع } \left|\begin{matrix}x=\frac{1+4}{2}=\frac{5}{2}\\ y=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}\end{matrix}\right.$$

۳) اگر از A عمود AH را برضلع CD فرود آوریم، داریم:

$$S_{ABCD}=CD\times AH$$

پس باید مختصات رأس D و از آنجا طول CD را محاسبه کنیم.

$$\begin{matrix}CD\\ AD\end{matrix}\begin{cases}4x+3y=7\\ y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\end{cases} \Longrightarrow D\left|\begin{matrix}\frac{3}{2}\\ \frac{1}{3}\end{matrix}\right. \text{ و } C\left|\begin{matrix}1\\ 1\end{matrix}\right. \Longrightarrow$$

$$CD=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{3}-1\right)^2}=\frac{5}{6}$$

$$AH=\frac{|4(4)+3(2)-7|}{\sqrt{16+9}}=\frac{15}{5}=3$$

$$\Longrightarrow S_{ABCD}=CD\times AH=\frac{5}{6}\times 3=\frac{5}{2}$$

واحد سطح

حل ۱۹:

$$\Delta':\ \begin{cases}3x-y=6\\ y=0 \ \text{محورxها}\end{cases} \Longrightarrow \left|\begin{matrix}x=2\\ y=0\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{درمعادلهٔ }\Delta}$$

$$2\lambda-4=0 \Longrightarrow \lambda=2$$

حل ۲۰:

$$A(-2\ ,\ 1)\ ,\ 5x-12y-17=0 \Longrightarrow$$

$$d=\frac{|-10-12-17|}{13}=3=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\Longrightarrow a=3\sqrt{2}$$ ضلع مربع

$$\Longrightarrow S=a^2=18$$ مربع

حل مسائل جبر سال چهارم علوم تجربی

حل ۱:

$$\text{الف)}\ y'=\frac{3}{2}\cos x-\frac{5(2x-2)}{3\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}}\times (1+cotg^2\sqrt[3]{x^2-2x})cotg^4\sqrt[3]{x^2-2x}$$

$$\text{ب)}\ y'=\frac{-5}{3(2x-1)^2\sqrt[3]{\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^2}}\times \cos\sqrt[3]{\frac{x+2}{2x-1}}$$

$$\text{ج)}\ y=4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\sin\frac{x}{4}=$$

$$2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}=\sin x \Longrightarrow y'=\cos x$$

$$\text{د)}\ y'=-2\sin x\cos x\cos(\cos^2 x) -2\sin x\cos x\sin(\sin^2 x)$$

حل ۲:

$$y=\sqrt[5]{(2+tg2x)^3} \Longrightarrow y'=\frac{6(1+tg^2 2x)}{5\sqrt[5]{(2+tg2x)^2}}.$$

$$x=\frac{3\pi}{8} \Longrightarrow y'=\frac{12}{5}$$

حل ۳:

$$z=f^3(x)+\frac{3}{f(x)} \Longrightarrow$$

$$z'=3f'(x)f^2(x)-\frac{3f'(x)}{f^2(x)} \Longrightarrow$$

$$z'_a=3f'(a)f^2(a)-\frac{3f'(a)}{f^2(a)}$$

$$=3\times4\times\frac{1}{4}-\frac{3\times4}{\frac{1}{4}}=3-48=-45$$

حل ۴:

$$(x+y)^3-2x^2y+x^2-y^2-1=0$$

$$y'_x=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{۳(x+y)^۲-۴xy+۲x}{۳(x+y)^۲-۲x^۲-۲y}$$

$$x'_y=-\frac{f'_y}{f'_x}=\frac{۱}{y'_x}=-\frac{۳(x+y)^۲-۲x^۲-۲y}{۳(x+y)^۲-۴xy+۲x}$$

حل ۵:

$$\begin{cases}x=t-۲\\ y=۳t^۲+t\end{cases}$$

راه اول: $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{۶t+۱}{۱}=۶t+۱$,

$t=x+۲ \Rightarrow y'_x=۶(x+۲)+۱$

$\Rightarrow y'_x=۶x+۱۳$

راه دوم: $t=x+۲ \Rightarrow$

$y=۳(x+۲)^۲+(x+۲) \Rightarrow$

$y=۳x^۲+۱۲x+۱۴ \Rightarrow y'_x=۶x+۱۳$

حل ۶:

$y=a\sin ۲x \Rightarrow y'=۲a\cos ۲x \Rightarrow$

$y''=-۴a\sin ۲x \Rightarrow y'''=-۸a\cos ۲x$

$\Rightarrow ۴=-۸a\cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow a=-۱$

حل ۷:

$$y=\cos(\pi\sin x) \Rightarrow \left|\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{۶}\\ y=۰\end{array}\right.$$

$y'=-\pi\cos x\sin(\pi\sin x) \Rightarrow$

$m_{\text{مماس}}=-\pi\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin\frac{\pi}{۲}=\frac{-\pi\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow$

$m_{\text{قائم}}=\frac{۲}{\sqrt{۳}\,\pi} \Rightarrow$

$y=\frac{-\pi\sqrt{۳}}{۲}\left(x-\frac{\pi}{۶}\right)$ معادلهٔ خط مماس

$y=\frac{۲}{\sqrt{۳}\,\pi}\left(x-\frac{\pi}{۶}\right)$ معادلهٔ خط قائم

حل ۸:

$y=mx^۳+x^۲+mx-۱ \Rightarrow$

$y'=۳mx^۲+۲x+m$

$$y'>۰ \Rightarrow \begin{cases}\Delta'<۰\\ a>۰\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}۱-۳m^۲<۰\\ ۳m>۰\end{cases}$$

$\Rightarrow m>\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

حل ۹:

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=۱$ و $M\left(\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۴}\right)$,

$y'_x=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\sqrt{\frac{y}{x}} \Rightarrow$

$m_{\text{مماس}}=-\sqrt{\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۱}{۴}}}=-۱ \Rightarrow m_{\text{قائم}}=۱$

$\Rightarrow y-\frac{۱}{۴}=۱\left(x-\frac{۱}{۴}\right) \Rightarrow$

$y=x$ معادله خط قائم

حل ۱۰:

$y=ax^۳+bx^۲+cx+d$

$$\text{Max یا Min}\left|\begin{array}{l}x=-۱\\ y=۴\end{array}\right. \qquad \text{نقطهٔ عطف}\left|\begin{array}{l}x=۱\\ y=-۱۲\end{array}\right.$$

$\left|\begin{array}{l}-۱\\ ۴\end{array}\right. \xrightarrow{\text{درتابع}} -a+b-c+d=۴ \qquad (۱)$

$y'=۳ax^۲+۲bx+c \Rightarrow$

$۳a-۲b+c=۰ \qquad (۲)$

$\left|\begin{array}{l}۱\\ -۱۲\end{array}\right. \xrightarrow{\text{درتابع}} a+b+c+d=-۱۲ \qquad (۳)$

$y''=۶ax+۲b \Rightarrow ۶a+۲b=۰ \qquad (۴)$

$(۱),(۲),(۳),(۴) \Rightarrow$

$a=۱\ ,\ b=-۳\ ,\ c=-۹\ ,\ d=-۱$

حل ۱۱:

$y=x^۲+۲mx+m-۱$,

$$\left|\begin{array}{l}x=۱\\ y=۱+۲m+m-۱=۳m\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\text{نقطهٔ تماس}\left|\begin{array}{l}x=۱\\ y=۳m\end{array}\right.$$

$y'=۲x+۲m \Rightarrow m_{\text{مماس}}=۲+۲m \Rightarrow$

$y-۳m=(۲+۲m)(x-۱)$ معادلهٔ خط مماس

$$A\left|\begin{array}{l}x=۰\\ y=m-۲\end{array}\right. \qquad B\left|\begin{array}{l}x=\frac{-m+۲}{۲+۲m}\\ y=۰\end{array}\right.$$

$S_{OAB}=\frac{۱}{۲}\left|\overline{OA}\cdot\overline{OB}\right| \Rightarrow$

$۲=\frac{۱}{۲}\left|(m-۲)\times\frac{-m+۲}{۲+۲m}\right|$

$\Rightarrow m^۲+۸m+۱۶=۰ \Rightarrow m=-۴$

و $m^۲-۱۶m-۸=۰ \Rightarrow m=۸\pm۶\sqrt{۲}$

حل ۱۲:

$x^۲-(m^۲-m-۲)x+۲m+۱=۰ \Rightarrow$

$S=\frac{-b}{a}=m^۲-m-۲$ مجموع ریشه‌های معادله

$S=m^۲-m-۲\ ,\ S'=۲m-۱\ ,\ S'=۰$

$\Rightarrow m=\frac{۱}{۲} \Rightarrow S=\frac{-۹}{۴}$ می‌نیمم مجموع ریشه‌ها

حل ۱۳:

$y=(m+۱)x^۲-۲mx+m-۳ \Rightarrow$

$$S\left|\begin{array}{l}x=\frac{۲m}{۲(m+۱)}=\frac{m}{m+۱}\\ y=\frac{۴(m+۱)(m-۳)-۴m^۲}{۴(m+۱)}=\frac{-۲m-۳}{m+۱}\end{array}\right.$$

$mx+x=m \Rightarrow m(x-۱)=-x \Rightarrow$

$m=\frac{x}{۱-x} \Rightarrow y=x-۳$

حل ۱۴:

$y=x^۳+mx^۲+(۱+m)x+۲ \Rightarrow$

$y'=۳x^۲+۲mx+۱+m$

$۳x^۲+۲mx+۱+m=۰$

معادلهٔ طولهای نقاط ماگزیمم و می‌نیمم

$\Rightarrow x_۱+x_۲=-\frac{b}{a}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{-۲m}{۳}=\frac{۲}{۳}$

$\Rightarrow m=-۱ \Rightarrow y=x^۳-x^۲+۲$

$y=x^۳-x^۲+۲ \Rightarrow y'=۳x^۲-۲x$,

$y'=۰ \Rightarrow x=۰$ و $x=\frac{۲}{۳}$,

$$\left|\begin{array}{l}x=۰\\ y=۲\end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l}x=\frac{۲}{۳}\\ y=\frac{۵۰}{۲۷}\end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l}x=-۱\\ y=۰\end{array}\right. \Rightarrow$$

$x^۳-x^۲+۲=۰ \Rightarrow$

$(x+۱)(x^۲-۲x+۲)=۰ \Rightarrow$

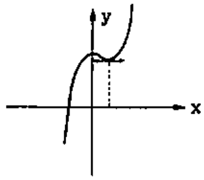
$x=-۱$ و $x^۲-۲x+۲=۰$ ؛ $\Delta'=-۱<۰$

ریشه ندارد

$$\left|\begin{array}{l}x=\pm\infty\\ y=\pm\infty\end{array}\right.$$

x	y
$y'=۰\begin{cases}۰\\ \frac{۲}{۳}\end{cases}$	۲ $\frac{۵۰}{۲۷}$
۰ -۱	۲ ۰
$\pm\infty$	$\pm\infty$

x	$-\infty$	-۱	۰	$\frac{۲}{۳}$	$+\infty$
y'		$+$	$۰ \; - \; ۰$	$+$	
y	$-\infty \nearrow ۰$	$\nearrow ۲$	$\searrow \frac{۵۰}{۲۷}$	$\nearrow$	$+\infty$



حل ۱۵ :

$$۲x^۳-۳x^۲-۱۲x+۵=۰,$$
$$y=۲x^۳-۳x^۲-۱۲x+۵ \Rightarrow$$
$$y'=۶x^۲-۶x-۱۲ \;,\; y'=۰ \Rightarrow$$
$$۶x^۲-۶x-۱۲=۰ \Rightarrow x^۲-x-۲=۰ \Rightarrow$$
$$x=۲ \text{ و } x=-۱$$
$$\text{Min}\left|\begin{matrix} x=+۲ \\ y_۱=-۱۵ \end{matrix}\right. \text{ و } \text{Max}\left|\begin{matrix} x=-۱ \\ y_۲=۱۲ \end{matrix}\right.$$
$$y_۱ \cdot y_۲=-۱۵\times ۱۲=-۱۸۰<۰ \Rightarrow$$
معادله سه ریشه دارد

حل ۱۶:

$$y=\frac{mx+۳}{x+۲m-۲} \Rightarrow O'\left|\begin{matrix} x=-۲m+۲ \\ y=m \end{matrix}\right.$$
$$\xrightarrow{\text{درمعادلهٔ خط}} ۲(-۲m+۲)-m+۳=۰$$
$$\Rightarrow -۵m+۷=۰ \Rightarrow m=\frac{۷}{۵}$$

حل ۱۷ :

$$y=\frac{x+a}{ax+a+۲} \Rightarrow y'=\frac{a+۲-a^۲}{(ax+a+۲)^۲}$$
$$۱)\; a+۲-a^۲=۰ \Rightarrow a^۲-a-۲=۰ \Rightarrow$$
$$a=۲ \text{ و } a=-۱$$
$$۲)\; a=۰$$
$$۳)\; -\frac{۱}{۲}=\frac{a+۲-a^۲}{(-a+a+۲)^۲} \Rightarrow$$
$$a^۲-a-۴=۰ \Rightarrow a=\frac{۱\pm\sqrt{۱۷}}{۲}$$

حل ۱۸ :

$$y=\frac{ax+b}{cx-۲}$$
$$x=۱ \Rightarrow y=۲-۳=-۱ \Rightarrow O'\left|\begin{matrix} x=۱ \\ y=-۱ \end{matrix}\right.$$
$$\left|\begin{matrix} x=۱=\frac{۲}{c} \Rightarrow c=۲ \\ y=-۱=\frac{a}{c} \Rightarrow a=-c=-۲ \end{matrix}\right.$$

$$\Rightarrow y=\frac{-۲x+b}{۲x-۲} \;،\; y'=\frac{۴-۲b}{(۲x-۲)^۲}$$
$$\Rightarrow -۱=\frac{۴-۲b}{۴} \Rightarrow b=۴$$

حل مسائل مثلثات دوم تجربی و ریاضی

جواب سؤال ۱ :

طبق فرض مسأله داریم :

$$۲/۱G+D=۴۵ \Rightarrow D=۴۵-۲/۱G$$
$$\text{از طرفی}: \frac{D}{۹}=\frac{G}{۱۰} \xRightarrow{\text{باتوجه‌به‌فرض}} \frac{۴۵-۲/۱G}{۹}=\frac{G}{۱۰}$$
$$\Rightarrow ۴۵۰-۲۱G=۹G \Rightarrow ۴۵۰=۳۰G$$
$$\Rightarrow G=۱۵۰ \Rightarrow \boxed{\alpha=۱۵۰_{gr}}$$
$$\frac{G}{۲۰۰}=\frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{۱۵۰}{۲۰۰}=\frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{۳}{۴}=\frac{R}{\pi} \Rightarrow$$
$$R=\frac{۳\pi}{۴} \Rightarrow \boxed{\alpha=\frac{۳\pi}{۴}\text{rad}}$$

جواب سؤال ۲:

طبق فرض مسأله داریم:

$$R=\frac{۵\pi}{D}$$
$$\text{از طرفی}: \frac{R}{\pi}=\frac{D}{۱۸۰} \Rightarrow \frac{\frac{۵\pi}{D}}{\pi}=\frac{D}{۱۸۰} \Rightarrow$$
$$\frac{۵\pi}{D\pi}=\frac{D}{۱۸۰} \Rightarrow ۹۰۰=D^۲ \Rightarrow$$
$$\boxed{D=\pm ۳۰} \text{ و } \frac{D}{۹}=\frac{G}{۱۰} \Rightarrow \frac{\pm ۳۰}{۹}=\frac{G}{۱۰} \Rightarrow$$
$$\boxed{G=\pm ۳۳/\overline{۳}}$$

جواب سؤال ۳ :

طبق فرض مسأله داریم :

$$۹۰۰\pi\left(\frac{۱}{D}-\frac{۱}{G}\right)=۲R$$
$$\text{از طرفی}: \frac{D}{۹}=\frac{G}{۱۰} \Rightarrow D=\frac{۹G}{۱۰} \Rightarrow$$
$$۹۰۰\pi\left(\frac{۱}{\frac{۹G}{۱۰}}-\frac{۱}{G}\right)=۲R \Rightarrow$$
$$۹۰۰\pi\left(\frac{۱۰}{۹G}-\frac{۱}{G}\right)=۲R \Rightarrow$$
$$۹۰۰\pi\left(\frac{۱}{۹G}\right)=۲R \Rightarrow \frac{۱۰۰\pi}{G}=۲R \Rightarrow$$
$$R=\frac{۵۰\pi}{G}$$

و داریم :

$$\frac{R}{\pi}=\frac{G}{۲۰۰} \Rightarrow \frac{\frac{۵۰\pi}{G}}{\pi}=\frac{G}{۲۰۰} \Rightarrow$$
$$\frac{۵۰\pi}{\pi G}=\frac{G}{۲۰۰} \Rightarrow G^۲=۱۰۰۰۰ \Rightarrow$$
$$G=\pm ۱۰۰ \Rightarrow \boxed{\alpha=\pm ۱۰۰_{gr}}$$

جواب سؤال ۴ :

$$\text{اگر}: \frac{\pi}{۲}<x<\pi \Rightarrow -۱<\cos x<۰$$
$$\Rightarrow -۱<۲m-۱<۰$$
$$\text{اگر ۱}: ۲m-۱<۰ \Rightarrow ۲m<۱ \Rightarrow$$
$$\boxed{m<\frac{۱}{۲}} \qquad (۱)$$
$$\text{اگر ۱}: ۲m-۱>-۱ \Rightarrow ۲m>۰ \Rightarrow$$
$$\boxed{m>۰} \qquad (۲)$$
$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \boxed{۰<m<\frac{۱}{۲}}$$

جواب سؤال ۵ :

$$\frac{tg x \cdot cotg^۲ x}{(۱-\cos x)}<۰ \xRightarrow{cotg^۲x>۰} \frac{tg x}{(۱-\cos x)}<۰$$
$$\xRightarrow{(۱-\cos x)>۰} tg x<۰$$

پس x می‌تواند زاویه‌ای درناحیهٔ دوم یا چهارم باشد.

جواب سؤال ۶ :

$$A=\sin^۲ x-۲\sin x+۵ \Rightarrow$$
$$A=(\sin x-۱)^۲+۴$$

می‌دانیم کمترین مقدار A زمانی‌است که داخل پرانتزصفر باشد؛ پس کمترین مقدار A برابراست با ۴ و بیشترین مقدار A زمانی است که داخل پرانتز بیشترین مقدارباشد و آن زمانی است که

$$\sin x=-۱$$

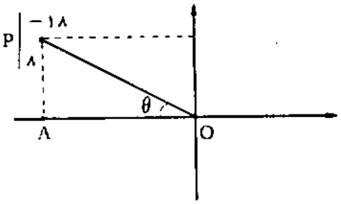
پس :

$$\text{بیشترین‌مقدار } A=(-۱-۱)^۲+۴=۸$$

جواب سؤال ۷ :

می‌دانیم :

$$OA=-۱۵ \quad , \quad AP=۸$$
$$\text{از طرفی}: OP^۲=OA^۲+AP^۲ \Rightarrow$$
$$OP^۲=۲۲۵+۶۴=۲۸۹ \Rightarrow OP=۱۷$$
$$\sin\theta=\frac{AP}{OP}=\frac{۸}{۱۷}$$
$$\cos\theta=\frac{OA}{OP}=\frac{-۱۵}{۱۷} \xRightarrow{\theta\text{ حاده‌است}} \cos\theta=\frac{۱۵}{۱۷}$$



$$tg\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{8}{15}\qquad cotg\theta=\frac{1}{tg\theta}=\frac{15}{8}$$

$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{17}{15}\ \text{و}\ cosec\theta=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{17}{8}$$

جواب سؤال ۸:

$$tg\alpha=\frac{1}{x+1}\ \text{و}\ \sin\alpha=\sqrt{\frac{y}{y-1}}\Longrightarrow$$

$$cotg\alpha=x+1$$

می‌دانیم:

$$\sin\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+cotg^2\alpha}}\Longrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{y}{y-1}}=\frac{1}{\pm\sqrt{1+(x+1)^2}}\Longrightarrow$$

$$\frac{y}{y-1}=\frac{1}{1+(x+1)}\Longrightarrow$$

$$\frac{y}{y-1}=\frac{1}{x^2+2x+2}\Longrightarrow$$

$$\boxed{y-1=y(x^2+2x+2)}$$

جواب سؤال ۹:

$$a^{\cos^2x}+a^{\sin^2x}=a+1$$

می‌دانیم:

$$\sin^2x=1-\cos^2x\Longrightarrow$$

$$a^{\cos^2x}+a^{(1-\cos^2x)}=a+1\Longrightarrow$$

$$a^{\cos^2x}+\frac{a}{a^{\cos^2x}}=a+1$$

اگر $a^{\cos^2x}=y\Longrightarrow y+\frac{a}{y}=a+1\Longrightarrow$

$$y^2+a=ay+y\Longrightarrow$$

$$y^2-(a+1)y+a=0$$

$$\Longrightarrow y=\frac{(a+1)\pm\sqrt{(a+1)^2-4a}}{2}$$

$$\Longrightarrow y=\frac{a+1\pm\sqrt{(a-1)^2}}{2}$$

$$\Longrightarrow y=\frac{a+1\pm|a-1|}{2}$$

$$\Longrightarrow y=\frac{2a}{2}=a\quad \text{یا}\quad y=\frac{2}{2}=1$$

اگر $1: y=a\Longrightarrow a^{\cos^2x}=a\Longrightarrow\cos^2x=1$

$$\Longrightarrow\cos x=\pm1\Longrightarrow$$

$$\boxed{x=2k\pi}\quad\text{یا}\quad\boxed{x=(2k+1)\pi}$$

اگر $2: y=1\Longrightarrow a^{\cos^2x}=1\Longrightarrow\cos^2x=0$

$$\Longrightarrow\cos x=0\Longrightarrow\boxed{x=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}}$$

جواب سؤال ۱۰:

الف) $\cos\alpha-\frac{tg\alpha}{\sin\alpha}+tg\alpha\cdot\sin\alpha$

$$=\cos\alpha-\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha$$

$$=\frac{\cos^2\alpha-1}{\cos\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-1}{\cos\alpha}$$

$$=\frac{1-1}{\cos\alpha}=0$$

ب) $\sec^4\alpha-tg^4\alpha=\frac{1}{\cos^4\alpha}-\frac{\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha}=\frac{1-\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha}$

$$=\frac{(1-\sin^2\alpha)(1+\sin^2\alpha)}{\cos^4\alpha}=\frac{\cos^2\alpha(1+\sin^2\alpha)}{\cos^4\alpha}$$

$$=\frac{\cos^2\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\cos^4\alpha}+\frac{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha}$$

$$=\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha+tg^2\alpha$$

ج) $\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\overbrace{\sin^2\alpha+1+\cos^2\alpha}^{1}+2\cos^2\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha(1+\cos^2\alpha)}\right)=\frac{1}{\sin\alpha}$$

از طرفی: $cotg\alpha\cdot\sec\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\times\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}$

دو طرف تساوی با یک مقدار مشترک برابر هستند، لذا اتحاد برقرار است.

د) $\frac{1}{\sec^2\alpha}+\sec^2\alpha+\frac{1}{cosec^2\alpha}-\frac{\sec^2\alpha}{cosec^2\alpha}$

$$=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\alpha}}+\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha}-\frac{\frac{1}{\cos^2\alpha}}{\frac{1}{\sin^2\alpha}}$$

$$=\overbrace{\cos^2\alpha+\frac{1}{\cos^2\alpha}+\sin^2\alpha}^{1}-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$=1+\frac{1}{\cos^2\alpha}-tg^2\alpha=1+1=2$$

$$\left(1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Longrightarrow\frac{1}{\cos^2\alpha}-tg^2\alpha=1\right)$$

جواب سوال ۱۱:

الف) فرض کنیم نامساوی برقرار باشد $\Longrightarrow$

$$\frac{tg\alpha+tg\beta}{2}\geqslant\sqrt{tg\alpha tg\beta}$$

$$\Longleftrightarrow\left(\frac{tg\alpha+tg\beta}{2}\right)^2\geqslant tg\alpha tg\beta$$

$$\Longleftrightarrow(tg^2\alpha+tg^2\beta+2tg\alpha tg\beta)\geqslant4tg\alpha tg\beta$$

$$\Longleftrightarrow(tg^2\alpha+tg^2\beta-2tg\alpha tg\beta)\geqslant0$$

$$\Longleftrightarrow(tg\alpha-tg\beta)^2\geqslant0$$

نامساوی همیشه برقرار است، لذا می‌توان روابط را به عقب برگشت و به خود نامساوی رسید و به این صورت نامساوی به دست می‌آید.

ب) فرض کنیم نامساوی برقرار باشد $\Longrightarrow$

$$(tg^2\alpha+cotg^2\alpha)^2\geqslant(tg\alpha-cotg\alpha)^4$$

$$\Longleftarrow(tg^2\alpha+cotg^2\alpha)\geqslant(tg\alpha-cotg\alpha)^2$$

$$\Longleftarrow tg^2\alpha+cotg^2\alpha\geqslant(tg^2\alpha+cotg^2\alpha-2\overbrace{tg\alpha cotg\alpha}^{1})$$

$\Longleftrightarrow -2\leqslant0$ نامساوی همیشه برقرار است

حل مسائل مثلثات سال سوم علوم تجربی و ریاضی

حل ۱- فرض می‌کنیم عدد اندازهٔ زاویهٔ بزرگتر برحسب گراد α و عدد اندازهٔ زاویهٔ کوچکتر برحسب درجه β باشد در این صورت داریم:

$$\alpha=10\beta\qquad(1)$$

از طرفی مجموع دو زاویه برابر $\frac{7\pi}{9}$ رادیان است پس:

$$\text{مجموع دو زاویه به درجه}=\frac{7\times180^\circ}{9}=140^\circ$$

$$\text{اندازهٔ زاویه بزرگتر برحسب درجه}=\alpha\times\frac{9}{10}$$

$$\Longrightarrow\frac{9\alpha}{10}+\beta=140^\circ\qquad(2)$$

$$\begin{cases}\alpha=10\beta\\ \frac{9\alpha}{10}+\beta=140^\circ\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\beta=14^\circ\ ,\ \alpha=140g=126^\circ$$

حل ۲-

$$\cos x=\frac{3}{5}\quad,\quad\cos(2x-5\pi)=\cos(\pi+2x)$$

$$=-\cos2x=1-2\cos^2x=1-2\left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\Longrightarrow \cos(2X-5\pi)=\frac{7}{25}$$

حل ۳-

$$\frac{\sqrt{2}\sin X}{\sqrt{1+\cos X}}=\frac{2\sqrt{2}\sin\frac{X}{2}\cos\frac{X}{2}}{\sqrt{2}|\cos\frac{X}{2}|}=\frac{2\sin\frac{X}{2}\cos\frac{X}{2}}{|\cos\frac{X}{2}|}$$

$$\frac{3\pi}{2}\leqslant X\leqslant\frac{5\pi}{3}\Rightarrow\frac{3\pi}{4}\leqslant\frac{X}{2}\leqslant\frac{5\pi}{6}\Longrightarrow$$

$\cos\frac{X}{2}<0$ و $\frac{1}{2}\leqslant\sin\frac{X}{2}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Longrightarrow \frac{\sqrt{2}\sin X}{\sqrt{1+\cos X}}=-2\sin\frac{X}{2}$$

$$\mathrm{Max}:-2\left(\frac{1}{2}\right)=-1$$

حل ۴-

$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{2}{5}$ و $\cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$

$$A=\cos2\alpha+\cos2\beta+2\cos\alpha\cos\beta$$
$$=2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$$
$$\Longrightarrow A=2\left(-\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)-\frac{2}{5}+\frac{3}{5}$$
$$=\frac{-12}{25}+\frac{1}{5}=\frac{-7}{25}$$

حل ۵-

الف) طرف اول $=\sin7X\cos5X-\sin^2 7X+\cos7X\sin5X-\cos^2 7X-\sin12X=$

$\sin(7X+5X)-(\sin^2 7X+\cos^2 7X)-\sin12X$

$=\sin12X-1-\sin12X=-1=$ طرف دوم

ب) طرف اول $=\cos\alpha+\cos\alpha\cos\frac{2\pi}{3}-\sin\alpha\sin\frac{2\pi}{3}+\cos\alpha\cos\frac{4\pi}{3}-\sin\alpha\sin\frac{4\pi}{3}=$

$\cos\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=0=$ طرف دوم

ج) (اتحاد را با علامت + درنظر می‌گیریم.)

$$tg\alpha+tg\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+tg\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=3tg3\alpha$$

طرف اول $=tg\alpha+\frac{tg\alpha+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\,tg\alpha}+\frac{tg\alpha-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\,tg\alpha}$

$=\frac{3(3tg\alpha-tg^3\alpha)}{1-3tg^2\alpha}=3tg3\alpha=$ طرف دوم

د) طرف اول $=\cos\left[-\frac{\pi}{4}+3\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{2\pi}{3}+2\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\cos\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}=$ طرف دوم

ه) $tg[\mathrm{Arc}\,tg2+\mathrm{Arc}\,tg3]=tg\frac{3\pi}{4}\Longrightarrow$

$$\frac{2+3}{1-2\times3}=-1\Longrightarrow\frac{5}{-5}=-1\Longrightarrow$$
$$-1=-1$$

و) طرف اول $=\sin(\alpha+2\beta)-\sin(\alpha-2\beta)$

$=2\sin2\beta\cos\alpha=4\cos\alpha\cos\beta\sin\beta=$ طرف دوم

حل ۶-

$$\alpha+\beta=k\pi-\frac{\pi}{4}\Longrightarrow tg(\alpha+\beta)$$
$$=tg\left(k\pi-\frac{\pi}{4}\right)\Longrightarrow\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$$
$$=tg\left(\frac{-\pi}{4}\right)=-1\Longrightarrow$$
$$tg\alpha+tg\beta=-1+tg\alpha tg\beta$$
$$\Longrightarrow 1-tg\alpha-tg\beta+tg\alpha tg\beta=2$$
$$\Longrightarrow(1-tg\alpha)-tg\beta(1-tg\alpha)=2$$
$$\Longrightarrow(1-tg\alpha)(1-tg\beta)=2$$

حل ۷-

$\sin2\alpha=2\sin^2\beta$ و $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\cos2\beta$

$$\Longrightarrow 1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)=\cos2\beta$$
$$\Longrightarrow 1-\sin2\alpha=1-2\sin^2\beta\Longrightarrow\sin2\alpha=2\sin^2\beta$$

پس رابطهٔ موردنظر برقرار است.

حل ۸-

الف) $2\left(1+\cos\frac{X}{2}\right)\left(1+\sin\frac{X}{2}\right)=$

$$2+2\sin\frac{X}{2}+2\cos\frac{X}{2}+2\sin\frac{X}{2}\cos\frac{X}{2}\Longrightarrow$$
$$2\left(1+\cos\frac{X}{2}\right)\left(1+\sin\frac{X}{2}\right)=$$
$$\left(1+\sin\frac{X}{2}+\cos\frac{X}{2}\right)^2$$

ب) $\left(\sin\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2+\left(\cos\alpha+\frac{1}{\sin\alpha}\right)^2=$

$$\sin^2\alpha+\frac{1}{\cos^2\alpha}+2tg\alpha+\cos^2\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha}+2cotg\alpha$$
$$=1+1+tg^2\alpha+2tg\alpha+1+cotg^2\alpha+2cotg\alpha$$
$$=3+tg^2\alpha+cotg^2\alpha+2tg\alpha+2cotg\alpha$$
$$=(1+tg\alpha+cotg\alpha)^2$$

حل ۹-

الف) $\frac{2\sin2X\sin X}{2\cos2X\cos X}-\frac{2\sin3X\sin X}{2\cos3X\cos X}=$

$$tgX(tg2X-tg3X)=tgX\times\frac{\sin(2X-3X)}{\cos3X\cos2X}$$
$$=\frac{-\sin^2X}{\cos X\cos2X\cos3X}$$

ب) $\frac{2\cos^2\alpha+2\cos2\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha+\cos2\alpha}=$

$$\frac{2\cos\alpha(\cos\alpha+\cos2\alpha)}{\cos\alpha+\cos2\alpha}=2\cos\alpha$$

ج) $\cos^2\beta-\frac{1}{4}(4\sin^2\alpha\cos^2\alpha)-\cos^4\alpha=$

$$\cos^2\beta-\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\cos^4\alpha=$$
$$\cos^2\beta-\cos^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$$
$$=\frac{1+\cos2\beta-1-\cos2\alpha}{2}=\frac{1}{2}(\cos2\beta-\cos2\alpha)=$$
$$\frac{1}{2}\times-2\sin\frac{2\beta+2\alpha}{2}\sin\frac{2\beta-2\alpha}{2}=$$
$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$

د) $\frac{2\cos^2X-2\sin X\cos X}{2\cos^2X+2\sin X\cos X}=$

$$\frac{2\cos X(\cos X-\sin X)}{2\cos X(\cos X+\sin X)}=\frac{\sqrt{2}\cos\left(X+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\sin\left(X+\frac{\pi}{4}\right)}=$$
$$cotg\left(X+\frac{\pi}{4}\right)$$

ه) $2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+$

$$2\cos\left(\frac{A+B}{2}+C\right)\cos\frac{A+B}{2}=$$
$$2\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B+2C}{2}\right)=$$
$$4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2}$$

حل ۱۰-

الف) طرف اول $=\frac{1}{2}[\cos(2\alpha+2\beta)+\cos2\beta-\cos(2\beta+2\alpha)-\cos2\alpha]$

$$=\frac{1}{2}(\cos2\beta-\cos2\alpha)=$$
$$\frac{1}{2}(2\cos^2\beta-1-2\cos^2\alpha+1)=$$

$=\cos^2\beta-\cos^2\alpha=$ طرف دوم

ب) طرف اول $=\frac{1}{2}\left(\cos6\beta-\cos2\alpha-\cos6\beta+\cos\frac{2\alpha}{3}\right)=\frac{1}{2}\times-2\sin\frac{4\alpha}{3}\sin\frac{-2\alpha}{3}$

$=\sin\frac{4\alpha}{3}\sin\frac{2\alpha}{3}=$ طرف دوم

ج) طرف اول اتحاد را در $2\sin\frac{\pi}{7}$ ضرب و بر آن تقسیم می‌کنیم.

$$\text{طرف اول}=\frac{2\sin\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$\Longrightarrow \frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=$$

$$\frac{\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\pi-\sin\frac{5\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=$$

$$\frac{-\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{2}=\text{طرف دوم}$$

حل ۱۱-

الف) $4\sin x\sin 2x\sin 3x=2\sin x(\cos x-\cos 5x)$

$=2\sin x\cos x-2\sin x\cos 5x=$

$\sin 2x-[\sin(x+5x)+\sin(x-5x)]$

$=\sin 2x+\sin 4x-\sin 6x$

ب) $\sin 20\sin 40\sin 80=$

$\frac{1}{2}\sin 20(\cos 40-\cos 120)=$

$\frac{1}{2}(\sin 20\cos 40+\frac{1}{2}\sin 20)=$

$\frac{1}{4}[\sin(-20)+\sin 60+\sin 20]$

$=\frac{1}{4}(-\sin 20+\sin 60+\sin 20)=\frac{\sqrt{3}}{8}$

حل ۱۲-

الف) $tg(3x-\frac{\pi}{4})+cotg(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6})=0\Longrightarrow$

$tg(3x-\frac{\pi}{4})=-cotg(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6})=$

$tg(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6})=tg(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{2})\Longrightarrow$

$3x-\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{3}+\frac{x}{2}\Longrightarrow$

$\frac{5x}{2}=k\pi+\frac{7\pi}{12}\Longrightarrow x=\frac{2k\pi}{5}+\frac{7\pi}{30}$

ب) $2\cos^2 2x+\sin(3x-\frac{\pi}{4})=1\Longrightarrow$

$\cos 4x=-\sin(3x-\frac{\pi}{4})=\cos(\frac{\pi}{2}+3x-\frac{\pi}{4})$

$\Longrightarrow \cos 4x=\cos(3x+\frac{\pi}{4})\Longrightarrow$

$4x=2k\pi\pm(3x+\frac{\pi}{4})\Longrightarrow$

$x=2k\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ x=\frac{2k\pi}{7}-\frac{\pi}{28}$

ج) $\sin^2 2x-\sin 2x\cos 2x=1\Longrightarrow$

$\cos^2 2x+\sin 2x\cos 2x=0\Longrightarrow$

$\cos 2x(\cos 2x+\sin 2x)=0$

$\cos 2x=0\Longrightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Longrightarrow$

$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\quad ,\quad \cos 2x+\sin 2x=0\Longrightarrow$

$tg 2x=-1=tg(-\frac{\pi}{4})\Longrightarrow 2x=k\pi-\frac{\pi}{4}$

$\Longrightarrow x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$

د) $tg(\frac{x}{3}+1)tg(1-\frac{x}{4})=-1\Longrightarrow$

$tg(\frac{x}{3}+1)=-cotg(1-\frac{x}{4})=$

$tg(\frac{\pi}{2}+1-\frac{x}{4})\Longrightarrow$

$\frac{x}{3}+1=k\pi+\frac{\pi}{2}+1-\frac{x}{4}\Longrightarrow$

$\frac{7x}{12}=k\pi+\frac{\pi}{2}\Longrightarrow x=\frac{12k\pi}{7}+\frac{6\pi}{7}$

ه) $\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\cos(3x-\frac{\pi}{6})\Longrightarrow$

$\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\cos(3x-\frac{\pi}{6})\Longrightarrow$

$\sin(2x-\frac{\pi}{4})=\sin(\frac{\pi}{2}-3x+\frac{\pi}{6})=$

$\sin(\frac{2\pi}{3}-3x)\Longrightarrow$

$2x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{2\pi}{3}-3x\Longrightarrow$

$x=\frac{2K\pi}{5}+\frac{11\pi}{60}$,

$2x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi-\frac{2\pi}{3}+3x\Longrightarrow$

$x=-2k\pi-\frac{7\pi}{12}$ یا $x=2k'\pi-\frac{7\pi}{12}$

و) $\sin x+\sin 3x+\sin 5x=0\Longrightarrow$

اسامی تعدادی از عزیزانی که حلّ مسائل مسابقه‌ای و مسائلی برای حل را در زمان تعیین شده برای ما فرستاده‌اند.

(پس از بررسی در صورت صحیح بودن جوابها جوایزی برای آنها ارسال می‌شود)

۱ ـ علی عابدینی
(سال دوّم ریاضی از تهران)

۲ ـ عباس نجفی‌زاده
(سال دوّم ریاضی از قم)

۳ ـ امیر حسن نافعی
(سال سوّم ریاضی از تهران)

۴ ـ نبی‌اله ابوالفتحی
(سال چهارم ریاضی از تهران)

۵ ـ فریبرز سیّدلو
(سال چهارم ریاضی از تهران)

۶ ـ عزیز مهاجری
(دبیر ریاضی دبیرستانهای تهران)

۷ ـ بهرام فرجی
(سال چهارم ریاضی از تهران)

۸ ـ جابر عامری
(دبیر ریاضی دبیرستانهای اهواز)

$$2\sin 3x\cos 2x+\sin 3x=0 \Longrightarrow$$

$$\sin 3x(2\cos 2x+1)=0$$

$$\sin 3x=0 \Longrightarrow 3x=K\pi \Longrightarrow$$

$$x=\frac{k\pi}{3}\ ,\ \cos 2x=\frac{-1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3} \Longrightarrow$$

$$2x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3} \Longrightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

ز) $\sin 7x+\sin 3x+2\sin^2 x=1 \Longrightarrow$

$$2\sin 5x\cos 2x-\cos 2x=0$$

$$\cos 2x(2\sin 5x-1)=0 \Longrightarrow \cos 2x=0 \Longrightarrow$$

$$2x=k\pi+\frac{\pi}{2} \Longrightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$$

$$2\sin 5x-1=0 \Longrightarrow \sin 5x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Longrightarrow \left| \begin{array}{l} 5x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \\ 5x=2k\pi+\frac{5\pi}{6} \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x=\frac{2k\pi}{5}+\frac{\pi}{30} \\ x=\frac{2k\pi}{5}+\frac{\pi}{6} \end{array} \right.$$

ح) $\sin 3x\sin x+\cos 6x\cos 2x+\cos 5x=0$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}[\cos 2x-\cos 4x+\cos 8x+\cos 4x]$$

$$+\cos 5x=0 \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 8x)+\cos 5x=0 \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\times 2\cos 5x\cos 3x+\cos 5x=0 \Longrightarrow$$

$$\cos 5x(\cos 3x+1)=0 \Longrightarrow \cos 5x=0 \Longrightarrow$$

$$5x=k\pi+\frac{\pi}{2} \Longrightarrow x=\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{10}\ ,$$

$$\cos 3x=-1=\cos\pi \Longrightarrow 3x=2k\pi+\pi \Longrightarrow$$

$$x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{3}$$

حل ۱۳ -

$$a\sin^2(3x-\frac{\pi}{4})=1\quad ,\quad x=\frac{5\pi}{4} \Longrightarrow$$

$$a\sin^2(\frac{15\pi}{4}-\frac{\pi}{4})=1 \Longrightarrow$$

$$a\sin^2\frac{7\pi}{2}=1 \Longrightarrow a=1$$

$$a=1 \Longrightarrow \sin^2(3x-\frac{\pi}{4})=1 \Longrightarrow$$

$$\frac{1-\cos(6x-\frac{\pi}{2})}{2}=1 \Longrightarrow$$

$$1-\cos(\frac{\pi}{2}-6x)=2 \Longrightarrow$$

$$1-\sin 6x=2 \Longrightarrow \sin 6x=-1=\sin(\frac{-\pi}{2})$$

$$\Longrightarrow 6x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$$

$$x=\frac{k\pi}{3}-\frac{\pi}{12}$$

حل ۱۴ -

$$\cos^2 x-2\cos x=(\cos x-1)^2-1$$

ماگزیمم این عبارت وقتی است که قدر مطلق $\cos x-1$ بیشترین مقدار ممکن باشد و این درصورتی است که

$$\cos x=-1$$

باشد. پس حداکثر مقدار عبارت فوق برابر است با:

$$(-1-1)^2-1=3$$

وحداقل مقدار عبارت فوق وقتی است که

$$(\cos x-1)^2=0$$

باشد یعنی $\cos x=1$ پس کمترین مقدار عبارت فوق برابر است با:

$$0-1=-1$$

In the name of God

Borhān

Vol.I. No.2

April 1992

Executive Editor H.R. Amiri

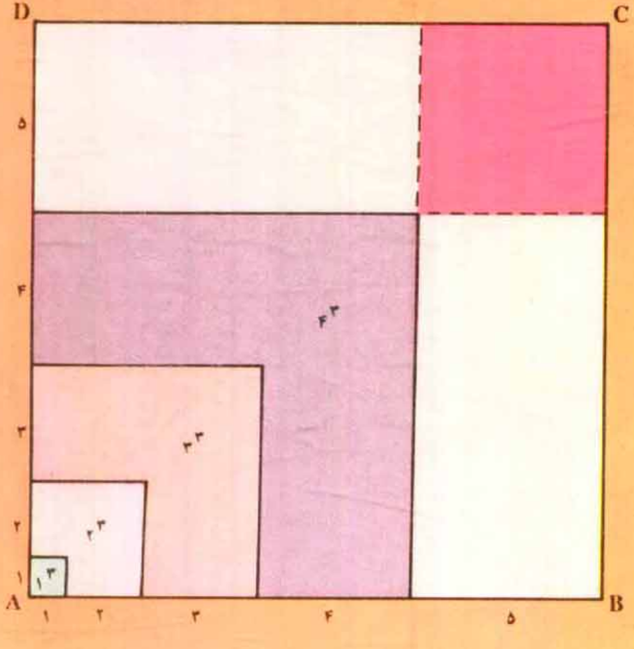
Borhān is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning high school education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:

Madrasse Publication- No. 268, Iranshahr-e-Shomali Ave. Tehran Iran Post code: 15875

Contents:

ابوبکر محمد کرجی، ریاضیدان ایرانی همعصر با بیرونی و رازی و ابن سینا



روش اثبات ابوبکر محمد کرجی برای دستور

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+...+n^۳=\frac{۱}{۴}n^۲(n+۱)^۲$$

(شکل مقابل، برای $n=۵$)

مربع ABCD را به ضلع $۱+۲+۳+...+n$ در نظر می‌گیریم (در شکل $n=۵$) و مساحت این مربع را به دو طریق محاسبه می‌کنیم:

۱) ضلع مربع برابر است با $\frac{۱}{۲}n(n+۱)$، پس $S_{ABCD}=\frac{۱}{۴}n^۲(n+۱)^۲$.

۲) مربع را به صورتی که در شکل دیده می‌شود، به نوارهای گونیایی تقسیم می‌کنیم و مثلاً نوار گونیایی nام را در نظر می‌گیریم. این نوار شامل یک مربع به ضلع برابر n و دو مستطیل، هر یک به طول $\frac{۱}{۲}n(n+۱)-n$ و به عرض n، می‌باشد، بنابراین مساحت آن چنین است:

$$\text{مساحت نوار گونیایی } n\text{ام} = n^۲+۲[\frac{۱}{۲}n(n+۱)-n]n=n^۳$$

بنابراین

$$S_{ABCD}=۱^۳+۲^۳+۳^۳+...+n^۳$$

با برابر قرار دادن دو مقداری که برای مساحت مربع به دست آوردیم، به دستور مورد نظر می‌رسیم.