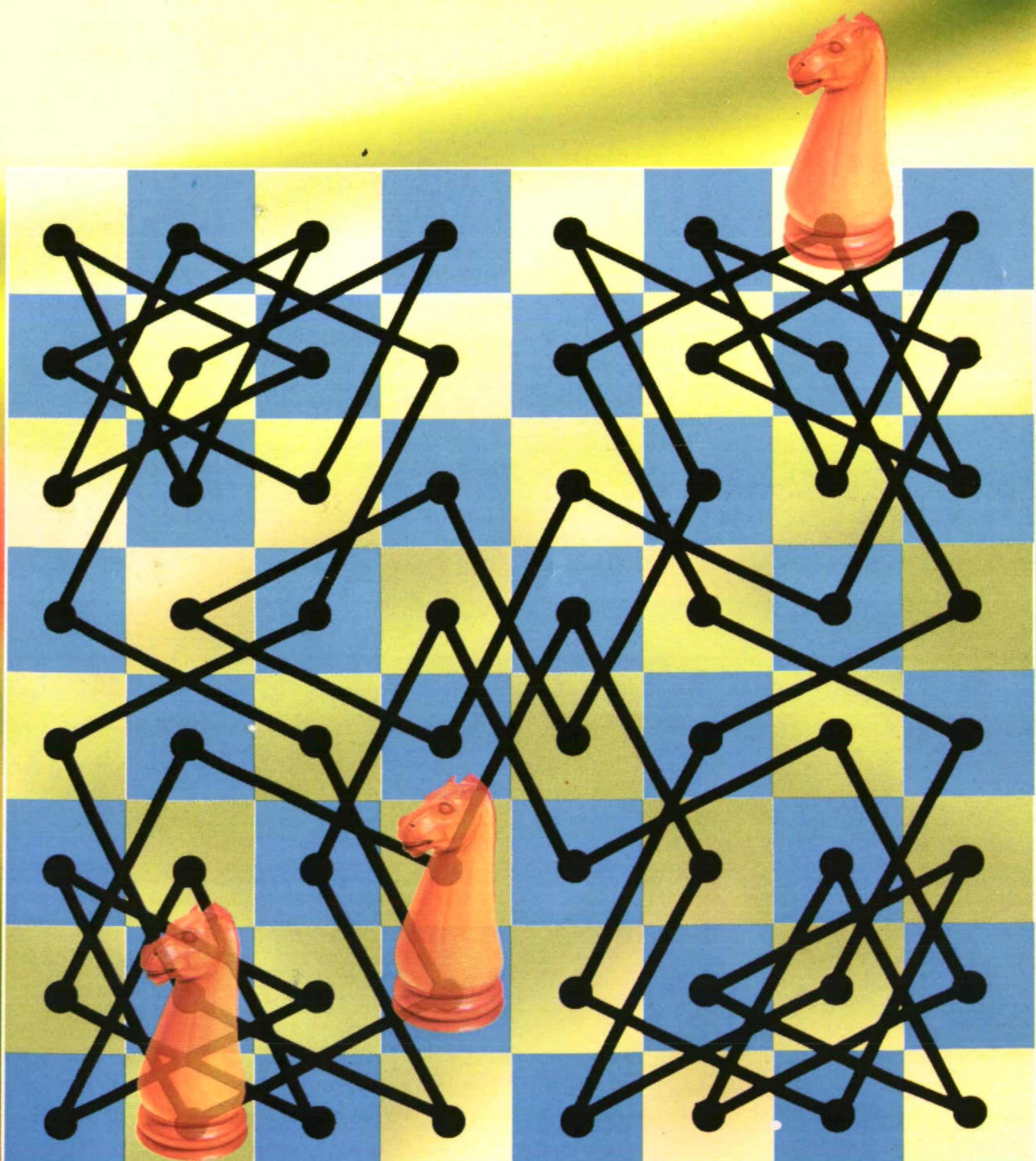
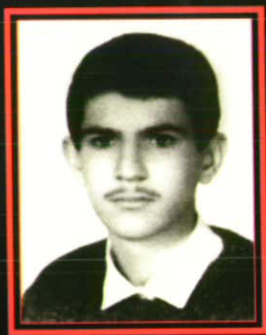
سال دوازدهم
شماره ۵۱
بهار ۱۳۷۷
۲۰۰ تومان

آموزش ریاضی

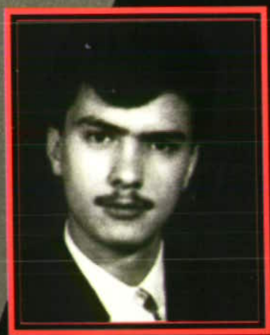


بیست و ششم اسفند هفتاد و شش هرگز فراموش نخواهد شد،
که جامعهٔ ریاضی داغدار فرزندانی شد که هریک ستاره‌ای بودند...
... یاد و نامشان همواره زنده خواهد بود.

مجتبی لطفعلی‌زاده مهرآبادی
متولد تهران، ۱۳۴۸
دانشجوی دورهٔ دکتری، دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف

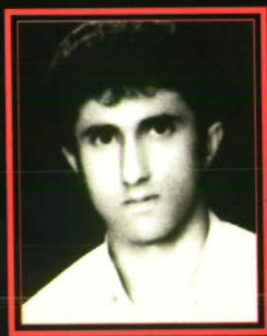


علی حیدری
متولد سنندج، ۱۳۵۶
دانشجوی کارشناسی، دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف



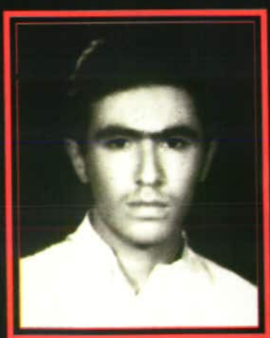
رضا صادقی
متولد مشهد، ۱۳۵۶
دانشجوی کارشناسی دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف

علیرضا سایبان
متولد بندر انزلی، ۱۳۵۷
دانشجوی کارشناسی، دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف



فرید کابلی کفشگیری
متولد گرگان، ۱۳۵۴
دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف

آرمان بهرامیان
متولد خرمشهر، ۱۳۵۷
دانشجوی کارشناسی، دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف



مرتضی رضایی کلج
متولد زنجان، ۱۳۵۷
دانشجوی کارشناسی علوم ریاضی محض دانشگاه تهران

آنان‌که شایستهٔ هزار سال زیستن بودند، دیگر در میان ما نیستند و ما که از هفت دروازهٔ اندوه گذشته‌ایم با نثار شکوفه‌های گیلاس و گل‌های شب‌بو به خاک، خود را تسکین می‌دهیم...

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد

آموزش ریاضی

در این شماره:

مجله رشد آموزش ریاضی نوشته‌ها و حاصل تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم و تربیت، بویژه آموزگاران، دبیران و مدرسان را، در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می‌پذیرد. مطالب باید یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود. شکل قرار گرفتن جدولها، نمودارها و تصاویر ضمیمه باید در حاشیهٔ مطلب نیز مشخص شود. نثر مقاله باید روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه‌های علمی و فنی دقت لازم مبذول گردد. مقاله‌های ترجمه شده باید با متن اصلی همخوانی داشته باشد و متن اصلی نیز ضمیمهٔ مقاله باشد. در متنهای ارسالی باید تا حد امکان از معادلهای فارسی واژه‌ها و اصطلاحات استفاده شود. زیرنویسها و منابع باید کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شماره صفحهٔ مورد استفاده باشد. مجله در رد، قبول، ویرایش و تلخیص مقاله‌های رسیده مختار است. آرای مندرج در مقاله‌ها، ضرورتاً مبین نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسؤولیت پاسخگویی به پرسشهای خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است. مجله از بازگرداندن مطالبی که برای چاپ مناسب تشخیص داده نمی‌شود، معذور است.

وزارت آموزش و پرورش

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

دفتر انتشارات کمک آموزشی

- شمارهٔ مسلسل، ۵۱
- سال تحصیلی ۷۷ ـ ۱۳۷۶
- بهار ۱۳۷۷

مدیر مسؤول، سیّدمحسن گلدانساز

- سردبیر، زهرا گویا
- مدیر داخلی،سهیلا غلام‌آزاد
- اعضای هیئت تحریریه،اسماعیل بابلیان، عین‌ا... پاشا،میرزا جلیلی،جواد حاجی بابایی، بیژن‌ظهوری‌زنگنه، سهیلا غلام‌آزاد و علیرضا مدقالچی
- طراح‌گرافیک،شاهرخ خره‌غانی
- نشانی دفتر مجله، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۱۵۸۸
- تلفن امور مشترکین، ۹ـ ۸۸۲۱۱۶۰ داخلی ۴۲۲
- تلفن دفتر مجله، ۸۲۵۲۷۹
- تلفن مرکز توزیع، ۷۲۲۵۱۱۰
- چاپ،افست(سهامی عام)

طرح جلد:

خره‌غانی

شرح جلد:

تصویر روی جلد مسیری را نشان می‌دهد که طی آن مهرهٔ اسب می‌تواند از هر خانهٔ شطرنج دقیقاً یکبار عبور کرده و در آخر به خانهٔ شروع حرکت خود بازگردد. اگر مربعهای صفحهٔ شطرنج را به عنوان رأسهای گراف در نظر بگیریم، مسیر ایجاد شده یک دور همیلتونی است)

یادداشت سردبیر

این روزها در مطبوعات ریاضی، عبارتهایی نظیر «در آستانهٔ سال جهانی ریاضیات»، «استقبال از سال جهانی ریاضیات» زیاد به چشم می‌خورند. در ایران نیز، ستادی به نام «ستاد ملّی سال جهانی ریاضیات» به ریاست جناب آقای خاتمی رئیس جمهور محترم ایران تشکیل شده است تا در سطح ملّی، برنامه‌هایی را به مناسبت «سال جهانی ریاضیات» تدارک ببیند. به همین مناسبت، مجلهٔ رشد آموزش ریاضی اطلاع‌رسانی در مورد پیدایش و اهداف «سال جهانی ریاضیات» را ضروری می‌داند.

در نوزدهمین مجمع عمومی «اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضی (IMU) که در آگوست ۱۹۹۰ در کوبه ژاپن تشکیل شد، به قطع نامهٔ زیر رأی داده شد:

«چون IMU آرزو دارد که شروع قرن جدید را به گونه‌ای بسازد تا متناسب با استانداردهایی باشد که دیوید هیلبرت در ۱۹۰۰ پایه گذاشت، مجمع عمومی از کمیتهٔ اجرائی می‌خواهد که تا سپتامبر ۱۹۹۱، چگونگی تحقّق این امر را به کمیته‌های جانبی گزارش دهد. در نتیجه، در ۱۹۹۴، مجمع می‌تواند راجع به راههای رسیدن به این امر بحث کرده و تصمیم‌گیری کند.»

به دنبال این قطع‌نامه، شورای اجرائی IMU، «کمیتهٔ قرن جدید»[1] را ایجاد کرد که ریاست آن را دبیر وقت IMU پروفسور ژاکوب پالیس جونیور[2] به عهده داشت و اعضای آن پروفسور آرنولد[3]، هیرز بروخ[4]، لوواز[5]، مازور[6]، میزوهاتا[7]، ترستون[8]، تیتس[9] و واردهان[10] بودند.

در ماه می ۱۹۹۲، IMU با همکاری یونسکو (به دبیری فدریکو مایور در آن زمان)، آکادمی علوم جهان سوم (مرحوم پروفسور عبدالسلام و طارموس چاگاس[11])، وزیر تحقیق و فضای فرانسه (پروفسور هربرت کورین[12])، مشاور رئیس جمهوری برزیل در امور علوم و تکنولوژی، آکادمی علوم برزیل و مشاور فدرال سوئیس، و برگزار کنندهٔ مجمع بین‌المللی ریاضیدانها (ICM ۹۶)[13] در زوریخ سال ۲۰۰۰ میلادی را «سال جهانی ریاضیات» (WMY) اعلام کرد و سندی که بعد از این نشست صادر شد «بیانیهٔ ریودوژانیرو برای ریاضیات» نامیده شد.

گزارش کار «کمیتهٔ قرن جدید» و برنامه‌های «سال جهانی ۲۰۰۰» در بیستمین مجمع عمومی IMU که در اول آگوست ۱۹۹۴ در موسرن سوئیس و درست قبل از شروع «کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانها» (ICM ۹۴) در زوریخ تشکیل شد، ارائه گردید. از جمله هدفهای عمدهٔ کمیتهٔ سال جهانی ریاضیات می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

ـ کمک به کشورهای کمتر توسعه‌یافته‌ای که عضو یونسکو هستند تا به عضویت IMU در آیند.

نتیجهٔ پیگیری این هدف، تلاش‌های قابل ملاحظه در حوزهٔ تعلیم و تربیت، آموزش و دسترسی به اصلاعات علمی است (هدف سند شمارهٔ ۲ بیانیهٔ ریو)

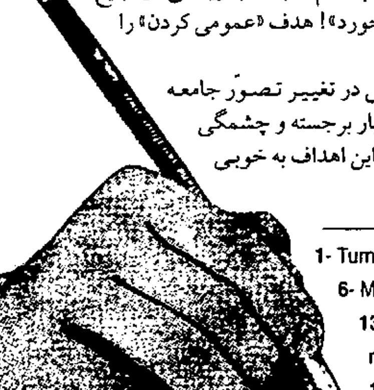
ـ ارتقای تصوّر جامعه از ریاضی: ریاضی باید به طور نظامدار در دنیای اطّلاعات علمی و از طریق مثالها و کاربردهایی که از نظر علمی دقیق هستند و قابل ارائه به جمع کثیری می‌باشند، ارائه گردد (هدف سند شمارهٔ ۳ بیانیهٔ ریو)

لازم به توضیح است که این اهداف همگی به تدریس ریاضی مربوط می‌شوند و «کمیسیون بین‌المللی تدریس ریاضی» (ICMI)[14]، «کمیسیون توسعه و تبادل» (CDE)[15] و «کمیسیون بین‌المللی برای تاریخ ریاضیات (ICHM)[16] باید نقشهای کلیدی را در رسیدن به اهداف بازی کنند.

پروفسور نیس[17]، دبیر ICMI، با تأکید بر این که هدف اصلی سال جهانی ریاضیات «مرئی ساختن ریاضیات و نقش آن در جامعه به طور عموم و در انظار عمومی به طور مشخص» است، خاطر نشان ساخت که «هدف ما نباید تبلیغ برای ریاضی به گونه‌ای باشد که جامعه نسبت به ریاضی مفتون و شگفت‌زده شود زیرا چنین تبلیغاتی نمی‌تواند کسانی را که ما انتظار داریم جذب کنیم را مخاطب قرار دهد. برعکس، چنین تبلیغاتی بیشتر حالت دافع دارند. ما باید طبیعت پنج گانه ریاضیات یعنی علم محض، علم کاربردی، نظامی از ابزارهای مختلف برای اعمال و تصمیم‌گیری‌ها، حوزهٔ زیبایی شناسی و بالاخره یکی از عمده‌ترین موضوعهای تدریس و یادگیری در عصر جدید آشکار کنیم. ما باید به جای ادّعا کردن، این خواص ریاضیات را نشان دهیم» (خبرنامهٔ سال جهانی ریاضیات: سال ۲۰۰۰ شمارهٔ ۳، سال ۱۹۹۵).

ریاضیات متکی به فعالیتهای انسانی است و دارای یک تاریخ اجتماعی و فرهنگی است. ریاضیات رابطه‌ای صمیمی با مباحث فلسفی، معرفت‌شناسی، علمی و عملی دارد. «ستاد ملی سال جهانی ریاضیات» باید به رابطهٔ بین ریاضیات در تمام جلوه‌هایش با دنیای واقعی توجّه کند و آنها را به جامعه بشناساند. «عمومی کردن» یا «همگانی کردن» ریاضیات که از اهداف «سال جهانی ریاضیات» است به همین معناست، وگرنه، وادار کرد همه به یادگیری ریاضی، آرزوی جذب تمام نخبگان به ریاضی، یا تبلیغ ریاضی در هر کوی و برزن و به همگان به زور قبولاندن این نکته که «ریاضی به درد همه می‌خورد»! هدف «عمومی کردن» را تأمین نمی‌کند.

همانطور که مامفورد[18]، رئیس IMU تأکید کرده است، تدریس و آموزش نقش اساسی در تغییر تصوّر جامعه نسبت به ریاضی دارد و نقش آموزش ریاضی و معلّمان ریاضی در رسیدن به این اهداف بسیار برجسته و چشمگیر است. امید است که جامعهٔ آموزش ریاضی ایران وظیفهٔ خطیر خود را در رسیدن به این اهداف به خوبی انجام دهد.



زیرنویس ها:

1- Turn of the century committee 2- Jacob Palis Jr. 3- Arnold 4- Hirzebruch 5- Lavasz 6- Mazur 7- Mizahato 8- Thurston 9- Tits 10- Varadhan 11- Chagas 12- Curien 13- International Congress of Mathematicions (ICM) 14- International Commisson for mathematical Instruction(ISCMI) 15- Commission for Development and Exchange (CDE) 16- International Commission for History of Mathematics (ICHM) 17- NLSS 18-Mumford

نویسنده:
دکتر غلامحسین شکوهی

نقدی بر روشهای آموزش مقدمات ریاضی

آقای دکتر غلامحسین شکوهی سخنران مدعو در جلسهٔ افتتاحیهٔ دومین کنفرانس آموزش ریاضی ایران بودند که از ۱ تا ۳ شهریور ۱۳۷۶ در کرمانشاه برگزار گردید.

هیأت تحریریهٔ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی با کسب اجازه از محضر جناب آقای دکتر شکوهی، تصمیم به چاپ این مقاله کرد تا مخاطبان وسیعتری از مقالهٔ ایشان بهره ببرند.

باتوجه به فرصتی که بدین منظور پیش‌بینی شده است مطالب خود را در سه قسمت به عرض خواهم رسانید: الف ـ وارسی وضع موجود. ب ـ ماهیّت اعمال ریاضی. ج ـ پیشنهادی چند برای اعادهٔ وضع مطلوب.

الف ـ هرچند که متأسفانه در کشور ما روشهای آموزش هیچیک از مواد درسی باروش علمی موردبررسی قرار نگرفته است، ولی قرائن موجود حکایت از آن دارد که روش تدریس ریاضیات مثلاً از روش تدریس زبان‌فارسی یاروش آموختن تاریخ، نظام‌یافته‌تر است. معذلک، به‌عقیدهٔ علاقه‌مندانِ به‌مسائل تعلیم و تربیت، نتایج تعلیم ریاضیّات درمجموع رضایتبخش نیست. نه‌تنها بازده تلاشهای مربوط به‌آموزش دراین حیطه ناچیز است، بلکه، برخلاف انتظار فراگیری ریاضیات به رشد فکری دانش‌آموزان کمک نمی‌کند. حتی، چنانکه بعداً خواهیم دید، گاهی آموختن ریاضیات درکار عقل سلیم هم اخلال می‌کند!

از سوی دیگر، شرکت در فعالیتهای مربوط به تعلیم ریاضیات برای اکثر دانش‌آموزان ناخوش‌آیند است و «ترس از اعداد» از بیماریهای شایع در سراسر جهان است.

موفقیّت عدهٔ انگشت‌شماری از دانش‌آموزان در المپیاد جهانی ریاضی کافی نیست. باید طرز فکرِ منطقی در عامهٔ مردم رواج یابد و میانگین معلوماتِ ریاضی ملّت افزایش یابد.

آنچه مایهٔ تأسف است تنها پائین بودن بازده تعلیم ریاضیات نیست، علاوه‌برآن، شکست افراد دردرک ریاضیات درشرایط امروز جهان که نسبت بین مهندسان کشور از سویی و جمعیت آن از سوی دیگر، شاخص قدرت علمی و صنعتی مردم آن است، از نظر روان‌شناسی اجتماعی پدیده‌ای زیان‌آور و از لحاظ فردی عارضه‌ای بیماری‌زا است.[1]

ترس از اعداد، مثل بسیاری از ترسهای دیگر، طبیعی نیست و در شرایط معینی بروز

می‌کند. با این همه، دانش‌آموزی که دچار چنین ترسی شده باشد، به قول پیاژه[۲]، دستخوش نوعی «بی‌استعداد نمایی» می‌شود که خود به خود درک روابط را دشوار ساخته مانع یادگیری می‌شود. بنابراین، به جاست اگر مبارزه علیه «ترس از اعداد» را که اکثریت دانش‌آموزان را یکباره از اشتغال به مباحث ریاضی روگردان می‌کند، از اهم وظایف مدرسه بدانیم.

ب ـ ماهیّت اعمال ریاضی

ماهیّت اعمال ریاضی چیست؛ و دشواری درک روابط ریاضی از چه جهت است؟

نظریهٔ جان دیوئی و به خصوص نظریهٔ ژان پیاژه در این باره بسیار آموزنده است. دیوئی مفهوم عدد را زائیدهٔ نیاز کودک به اندازه‌گیری می‌داند. تلاش ذهن برای ارزیابی کمیّتهای منفصل و اندازه‌گیری کمیّتهای متصل به پیدایش مفهوم واحد اندازه‌گیری می‌انجامد که مقدمهٔ لازم شمردن معنی‌دار است. به عقیدهٔ دیوئی شمار و اندازه‌گیری با یکدیگر بستگی کامل دارند و جدا کردن آنها در موقع تعلیم‌شان خطا است. وقتی می‌شماریم در حقیقت اندازه می‌گیریم و، به عکس، وقتی کمیّت مورد سنجش زیاد یا بزرگ باشد، شمردن لازمهٔ اندازه گرفتن است.

کوشش پیاژه نیز بر این است که طبیعت و حقیقتِ تصورات و اعمال منطقی ذهن و از جمله تصور عدد و اعمال ریاضی را آشکار کند. او از آزمایشهای چندین سالهٔ خود به این نتیجه رسیده است که تصوراتِ و اعمال منطقی ذهن و به طور کلی هوش انسان زائیدهٔ درونی شدن اعمال او است. به عقیدهٔ پیاژه، تشریح حقایق و مفاهیم ریاضی به صورتی که در روش تدریس زبانی[۳] معمول است برای کودک کافی نیست. مشاهدهٔ تصاویر و اشکال و مجموعه‌هایی که متضمن حقایق و

روابط ریاضی باشند نیز، چنانکه در روشهای مکاشفه‌ای معمول است، مفید فایده‌ای نیست. برای آنکه تصوراتِ حاصله دقیق و مفاهیم روشن باشند، دانش‌آموز باید شخصاً به تجربه و آزمایش بپردازد، اشیاء را از نزدیک دستکاری کند تا روابط بین کمیّتها را مستقیماً درک نماید.[۴]

دربارهٔ ماهیّت اعمال منطقی و ریاضی پیاژه معتقد است که: هوش زائیدهٔ تنظیم اعمال و درونی شدن آنها است. اعمال کودک ابتدا جنبهٔ حسّی ـ حرکتی دارد؛ بدین معنی که کودک در موقعیتهای مختلف در مقابل اشیاء اعمالی انجام می‌دهد بدون اینکه پیش یا پس از آن عمل انجام شده تصوری داشته باشد. با این همه، انجام هر عمل اثری از خود به جای می‌گذارد که پیاژه آن را «شم»[۵] می‌نامد. این آثار به تدریج متشکل شده شمهای دیگری به وجود می‌آورند که روی هم مواد اولیهٔ فکر را تشکیل می‌دهند.

در حدود دو سالگی ذهن قابلیت آن را کسب می‌کند که از اعمال انجام شده تصوری حفظ کند یا جریان اعمال ساده را قبل از انجام آن پیش‌بینی نماید. مقارن همین احوال کودک می‌تواند تصورات خود را نامگذاری نماید. از این مرحله به بعد، اعمال کم کم درونی می‌شود تا پس از مدتی نسبتاً طولانی به صورت اعمالِ منطقی و ریاضی درآید.

اعمالی که بدین ترتیب درونی شده‌اند، دارای خصائصی به قرار زیرند:

۱) این اعمال صورتِ درونی شدهٔ اعمال ابتدایی و واقعی کودک هستند؛

۲) اینها اصولاً قابلیّت آن را دارند که در دو جهت انجام شوند و درکِ عمل انجام شده در جهتی مستلزم درک عمل انجام شده در جهتِ عکسِ آن است؛

۳) این اعمال از آغاز بستگی تام با یکدیگر داشته جزء لاینفکِ یک نظام کلی می‌باشند. عمل منطقی و ریاضی نمی‌تواند منفرد باشد. بستگی آن با اعمال ذهنی دیگر و بویژه با عکس آن، شرط لازم وجود آن است. به عبارت دیگر، ماهیت و طبیعتِ یک عملِ منطقی و ریاضی منوط به قابلیتِ ترکیب آن با اعمال دیگر است.

پیاژه برای اثباتِ شباهتِ کامل اعمال هوش و اعمال ریاضی می‌نویسد:

ـ از ابتدایی‌ترین صفاتِ اعمالِ ذهنی این است که از ترکیب دو شم، شمِ جدیدی به وجود می‌آید که بر شمهای موجود در ذهن افزوده می‌شود. در اعمال ریاضی نیز همین پدیده یافته می‌شود؛ زیرا، حاصلضرب (یا مجموع) دو عدد خود عددی از جنس همان اعداد است.

ـ عمل هوشی (برخلاف عملی که از روی عادت انجام شود) می‌تواند در دو جهت

انجام شود. اعمال ریاضی نیز واجد همین صفتند: تفریق عکس جمع و تقسیم عکس ضرب است.

ـ درعمل هوشی بازگشت به مبدأ موجب می‌شود که آن را دست نخورده باز یابیم، و این نظیر آن است که اگر عددی برعدد دیگر افزوده و درعین حال از آن کاسته شود، درمقدار عدد تغییری حاصل نمی‌شود: $(0 = 1 - 1 +)$؛ یا اگر عددی را درعدد دیگر ضرب و برهمان عدد تقسیم کنیم تغییر نمی‌کند: $(1 = 5 : 5 \times)$.

ـ دراعمال هوشی رسیدن به یک هدف از راههای مختلف میسور است. و این نظیر آن است که درجمع یاضرب تقدیم و تأخیر عوامل درنتیجهٔ آن مؤثر نیست:

$$4 + 3 + 5 = 4 + (3 + 5) = (4 + 3) + 5$$

$$6 \times 5 \times 7 = (6 \times 5) \times 7 = 6 \times (5 \times 7)$$

بدین‌ترتیب، می‌توان گفت که اعمال ریاضی‌ترجمان بعضی‌از خواص اصلی اعمال هوشی‌اند.

اعمال ذهنی پس‌از اینکه بادرونی شدن صفات لازم را کسب کردند می‌توانند به‌طوری که درزبان ریاضی معمول است، به‌کمک علائم قراردادی نشان داده شوند. دریک جملهٔ جبری نظیر $x^2 + y = z - 7$، هرجزء نمایندهٔ عمل خاصی است [متغیرها مقید به اعداد صحیح هستند.]:

علامت (=) حاکی از آن است که طرفین تساوی می‌توانند جانشین یکدیگر شوند. علامت (+) نشانهٔ الحاق و علامت (-) نشانهٔ جدا کردن و تفکیک است. x^2 حاکی از این است که x، x بار تکرار شده و هر یک از مقادیر x, y, z و 7 نشانهٔ آن است که واحد به‌شمارهٔ معینی تکرار شده است.[6]

اگر همچون پیاژه هوش را زائیدهٔ درونی شدن اعمال بدانیم که درشرایط مساعد خودبه‌خود رشد می‌کند و اگر چون او فرمولهای ریاضی را روشی برای یادداشت کردن خواص اعمال هوشی قلمداد کنیم، این سؤال پیش می‌آید که تاچه حد اعمال ریاضی نیازمند آموزش است؛ و طبعاً این جواب متبادر به‌ذهن می‌شود که چنانچه فرایندهای مربوطه در شرایط مناسب ملکه شده باشد، آموزش ریاضیات چیزی جز آشنا کردن دانش‌آموز باقراردادهای مربوط به‌یادداشت کردن آنها یعنی فراگرفتن زبان ریاضی نیست، که آن هم نباید چندان دشوار باشد. پس، چرا یادگیری زبان ریاضی، برخلاف زبانهای دیگر، این‌همه دشوار است

پاسخ این پرسش احتمالاً این است که معمولاً درمؤسسات آموزشی زبان ریاضی پیش‌از اینکه مفاهیم مربوط بدان درک شده باشد تدریس می‌شود؛ و به‌طوری که می‌دانیم یادگیری زبان بدون توجه به‌معنای آن به‌عنایت دشوار است.

دیوئی مفهوم عدد را زائیدهٔ نیاز کودک به اندازه‌گیری می‌داند. تلاش ذهن برای ارزیابی کمیتهای منفصل و اندازه‌گیری کمیتهای متصل به‌پیدایش مفهوم واحد اندازه‌گیری می‌انجامد که مقدمهٔ لازم شمردن معنی‌دار است. به‌عقیدهٔ دیوئی شمار و اندازه‌گیری با یکدیگر بستگی کامل دارند و جدا کردن آنها در موقع تعلیم‌شان خطا است. وقتی می‌شماریم درحقیقت اندازه می‌گیریم و، به‌عکس، وقتی کمیت مورد سنجش زیاد یا بزرگ باشد، شمردن لازمهٔ اندازه‌گرفتن است.

شواهد موجود صحّتِ فرضیهٔ فوق را تأیید می‌کند. اولاً مؤسساتِ آموزشی تعلیم مقدماتِ ریاضی را باآموزش قراردادها آغاز می‌کنند. ثانیاً باعجله‌ای که درارائهٔ قراردادهای مربوط به‌روابط درک نشده نشان داده می‌شود، دیگر برای دانش‌آموز مجالی جهت درک مفاهیم باقی نمی‌ماند؛ و بدین‌ترتیب، هرچه تعلیم ریاضیات پیشتر می‌رود بردرجهٔ ابهام آن افزوده می‌شود تاآنجاکه برای دانش‌آموز به‌صورت مبحثی وحشتناک درمی‌آید. ثالثاً معلم ریاضی که فردی بزرگسال است و اعمال نزد او کاملاً درونی شده است، معمولاً درهنگام تدریس ریاضیات قیاس به‌نفس کرده اعمال را نزد دانش‌آموز هم‌درونی شده می‌پندارد و به‌همین جهت منظور خود را به‌کمک مفاهیم مجرد بیان می‌کند، غافل از اینکه دانش‌آموز دبستان، مثلاً، هنوز اعمال برایش کاملاً درونی نشده است و طبعاً بحث دربارهٔ مفاهیم درک نشده را نمی‌فهمد. بدیهی است که این موضوع به‌نسبتی که دانش‌آموز کوچکتر است بیشتر دربارهٔ او صدق می‌کند.

باتوجه به‌مراتب فوق‌الذکر می‌توان نکات زیر را جهت اعادهٔ وضع مطلوب پیشنهاد کرد:

۱) توجه داشته باشیم که معلم ولو ریاضی‌دان باشد نمی‌تواند ادّعا کند که روشی که درتدریس به‌کار می‌برد بهترین است؛ زیرا، ریاضی دانستن چیزی و ریاضی تدریس کردن چیزی دیگر است. اگر روشی بنابه‌منطق بزرگسالان بهتر به‌نظر آید، معلوم نیست برای دانش‌آموزان که هنوز فرایندهای منطقی نزد آنان درحال تحول است، مناسب یامناسبتر باشد. بنابراین، اولاً دربیان حقایق و ارائهٔ روابط و به‌خصوص درپیشنهاد راه‌حل مسائل به‌دانش‌آموزان از شتابزدگی بپرهیزیم؛ تا پیش‌از آنکه نسبت به‌راه‌حلهای پیشنهادی ما شرطی شده باشند از

عکس‌العمل منطقی آنان در مقابل موقعیتهای مختلف مطلع شویم. ثانیاً ضمن درگیری مستقیم کودکان با واقعیتها به مشاهدهٔ دقیق رفتارشان بپردازیم تا بتوانیم واکنشهای نادرستشان را تبیین کنیم.

اینکه بعضی از دانش‌آموزان با استفاده از فرصتهای مناسب توانسته‌اند برای مسائل طرح شده راه‌حل بدیعی پیدا کنند بسیار آموزنده و هشداردهنده است.

پروفسور ورتایمر[7] تفکر کودکان را مورد تحقیق قرار داد و آن را در کلاسهای مختلف مطالعه کرد. نتیجه‌ای که از مطالعات خود گرفت این بود که اغلب شیوهٔ تدریس کورکورانه است و در کودکان جمود فکری ایجاد می‌کند و تمرینهای تکراری و پاسخهای ماشینی که از کودکان توقع دارند انعطافی را که فکر سالم نیازمند آن است در کودکان ایجاد نمی‌کند. مبالغه در تکرار مطالب نیز می‌تواند زیان‌آور باشد. این نوع تربیت خطرناک است زیرا دانش‌آموزان را وادار می‌کند که چشم‌بسته چیزهایی بگویند یا کارهایی انجام دهند بدون اینکه فکر آنها را بکار بیندازد. ورتایمر داستان کودکی گاوس[8] ریاضی‌دان نامی را ذکر می‌کند تا نشان دهد که معلم نباید فعالیت ذهنی کودک را، با انداختن آن در شیار معینی، سرکوب کند.

وقتی گاوس شش ساله بود معلم به کودکان کلاس او این مسأله را داد که مجموع اعداد یک تا ده را حساب کنند:

$$۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰=?$$

و به آنها گفت «می‌خواهم ببینم کدامیک از شما زودتر این اعداد را جمع می‌کند. گاوس تا مسأله را دید گفت جواب را یافته است. معلم شگفت‌زده پرسید چطور مسأله را به این زودی حل کرده است. امروز می‌دانیم گاوس چه راهی را برای حل این مسأله یافته بود (روش او هسته کشف مهمی بود). اما نمی‌دانیم به معلم چه گفت.

> **کوشش پیاژه نیز براین است که طبیعت و حقیقت تصورات و اعمال منطقی ذهن و از جمله تصور عدد و اعمال ریاضی را آشکار کند. او از آزمایشهای چندین سالهٔ خود به این نتیجه رسیده است که تصورات و اعمال منطقی ذهن و به‌طورکلی هوش انسان زائیدهٔ درونی شدن اعمال او است.**

> **ورتایمر: اغلب شیوهٔ تدریس کورکورانه است و در کودکان جمود فکری ایجاد می‌کند و تمرینهای تکراری و پاسخهای ماشینی که از کودکان توقع دارند انعطافی را که فکر سالم نیازمند آن است در کودکان ایجاد نمی‌کند. مبالغه در تکرار مطالب نیز می‌تواند زیان‌آور باشد.**

ورتایمر معتقد است که گاوس با دیدن سلسلهٔ اعداد با خود گفت: ۱ و ۱۰ می‌شود ۱۱، ۲ و ۹ هم می‌شود ۱۱ و باز... مجموع هر دو عدد می‌شود یازده. پنج جفت عدد از این قبیل هست. پس، مجموع پنج بار یازده است یعنی پنجاه‌وپنج.» کشف گاوس با فرمول جبری چنین می‌شود:

$$\text{مجموع} = (N+1)\frac{N}{2}$$

چگونه می‌توان این خم‌پذیری را در فکر ایجاد کرد؟ در نوابغ این خاصیت به‌وفور موجود است و در بقیه، اگر تربیت درست باشد، بیش از آنچه به صورت عادت یافت می‌شود به وجود می‌آید. آزمایشهای مختلف نشان داده‌اند که ممکن است این خاصیت را در کودکان با تربیت صحیح پرورش داد.[9]

طرح مسأله و با پرسشهای مناسب کمک می‌کند به دانش‌آموز تا راه حل آن را پیدا کند، چنانکه در روش سقراطی معمول است، و نیز به دانش‌آموز می‌کند فرصت می‌دهد تا به تدریج جوابهای غلط خود را تصحیح نموده پاسخ درست را کشف کند. سقراط که معتقد بود علم برای انسان امری درونی است، برای اثبات دعوی خود از برده‌ای بنام منون می‌پرسد: اگر بخواهی مربعی بسازی که سطح آن دو برابر سطح مربعی به ضلع α باشد چه می‌کنی؟ منون پاسخ می‌دهد: مربعی به ضلع ۲α می‌سازم.

وقتی به اشارهٔ سقراط مربعی به ضلع ۲α می‌سازد به اشتباه خود پی می‌برد. سقراط با استفاده از خودآگاهی منون، او را به تلاشی دوباره تشویق می‌کند و این سؤال و جواب تا آنجا ادامه می‌یابد که منون راه‌حل مسأله را کشف می‌کند: برای ساختن مربعی که سطح آن دو برابر سطح مربع معلوم باشد، کافی است مربعی بسازیم که ضلع آن برابر وتر مربع معلوم باشد؛ زیرا، مربع وتر مساویست با مجموع مجذورات دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه:

در مربعی به ضلع α

مربع وتر[10] $= \alpha^2+\alpha^2=۲\alpha^2$

تجزیه و تحلیل پاسخهای نادرست کودک هم بسیار آموزنده است. به قول کلاپارد[11]، کار مهم معلم، چنانکه در میان معلمان مرسوم است، ارزیابی پاسخ دانش‌آموز و شمردن اشتباهاتش نیست، کار مهم معلم این است که بفهمد چگونه دانش‌آموز به جواب نادرست رسیده است.

یکی از اصول مسلّم تعلیم و تربیت این است که معلم باید در هریک از مراحل رشد توقعات خود را بر امکانات کودک منطبق کند. به قول یکی از متخصصان هرچیزی را در هرسنی می‌توان آموخت مشروط براینکه مطلب آموختنی را در قالبی متناسب با ساخت ذهنی خاص کودک در آن سن عرضه کنیم. مثال زیر نمونه خوبی برای اثبات این مدعا

است.

مثال ـ در حساب ابتدایی تقسیم بر کسر (مثلاً $? = \frac{۳}{۵} : ۱۸$) مبحثی است که آموزش آن به دشواری تدریس می شود: برای تقسیم عدد صحیح بر کسر، کسر مقسوم علیه رامعکوس و عمل ضرب انجام می دهیم. آزمایشهای دقیق نشان داده است که نه فقط دانش آموزان بلکه بسیاری از معلمان ممتاز هم نمی دانند چرا کسر مقسوم علیه را معکوس می کنیم.

تجزیه و تحلیل این فرایند نشان می دهد که برای دانش آموزانی که مفهوم کسر را به روش آزمایشی درک کرده باشند درک این مطلب بغایت آسان است:

دانش آموزی را در نظر بگیرید که مفهوم یک پنجم و به تبع آن مفهوم سه پنجم را می داند. چنین دانش آموزی می تواند به آسانی مثلاً سه پنجم ۳۰ را حساب کند:

$$۳۰ \times \frac{۳}{۵} = (۳۰:۵) \times ۳ = ۶ \times ۳ = ۱۸$$

این دانش آموز می داند که اگر حاصلضرب (۱۸) را بر یکی از عوامل ضرب ($\frac{۳}{۵}$) تقسیم کند عامل دیگر بدست می آید. برای او معنی $? = \frac{۳}{۵} : ۱۸$ این است که ۱۸ سه پنجم چه عددی است؟

اگر ۱۸ سه پنجم عددی باشد، ۶ (= ۳ : ۱۸) یک پنجم آن است. و برای یافتن آن عدد کافی است ۶ را پنج برابر کنیم

$$۶ \times ۵ = ۳۰$$

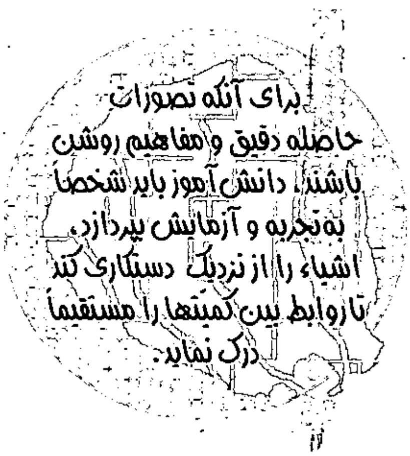
پس،

$$۱۸ : \frac{۳}{۵} = (۱۸:۳) \times ۵ = ۶ \times ۵ = ۳۰$$ [12]

ضمن آزمایش دقیق زیر ثابت شده است که اگر تقسیم عدد صحیح بر کسر در قالبی متناسب با ساخت ذهنی کودک عرضه شود، کودکان هشت ساله، بدون اینکه درین باره آموزشی دیده باشند، راه حل آن را بلدند.

آزمایش ـ به دخترک روستایی هشت ساله ای بنام خدیجه گفته شد که:

من خواستم برای قدردانی از حاضرخدمتی این کودکان (مهشید ـ هاجر ـ اکبر، مجید، رضا) قطعهٔ شکلاتی را به طور مساوی بین آنان تقسیم کنم. وقتی سهم مهشید و هاجر را جدا کرد. به آنها دادم، پسرها گفتند: سهم ما را یکجا بده! این (جای خط کش) (خط کشی به طول ۶ سانتیمتر) سهم پسرهاست. آیا می توانی بگویی شکلات من قبل آنکه تقسیم آن را شروع کرده باشم به چه بزرگی بوده است؟



خوانند توجه دارد که سؤالی که خدیجه با آن مواجه بود این بود که ۶ سانتی متر سه پنجم چند سانتی متر است؟

کودک ابتدا در میان خط کشهایی که در اختیار داشت خط کشی پیدا کرد که سه بار در خط کش شش سانتی متری می گنجید یعنی قطعه شکلات را به سه قسمت مساوی تقسیم کرد تا سهم یک پسر پیدا شود. آنگاه سهم یک پسر (خط کشی به طول دو سانتی متر) را پنج برابر کرد و به جواب رسید. می توان جریان فکر او را بدین صورت یادداشت کرد:

سؤال: ۶ سانتی متر سه پنجم چند سانتی متر است؟ $۶ \div \frac{۳}{۵} = ?$

اگر ۶ سانتی متر سه پنجم خط کش اصلی است، دو سانتی متر یک پنجم آن است.

$$۶ \div ۳ = ۲$$

و اگر دو سانتی متر یک پنجم خط کش اصلی است دو سانتی متر جواب سؤال است

$$۲ \times ۵ = ۱۰$$

$$۶ \div \frac{۳}{۵} = (۶:۳) \times ۵ = ۲ \times ۵ = ۱۰$$ [13]

مراجع

۱) اصول روان شناسی ـ مان، نرمان لسلی ـ ترجمهٔ دکتر محمود صناعی

۲) روش آموختن حساب و هندسه، تألیف دکتر غلامحسین شکوهی، چاپ سوم، چاپ پیروز، ۱۳۶۳

۳) مربیان بزرگ ـ شاتو و دیگران، ترجمهٔ دکتر شکوهی، انتشارات و چاپ دانشگاه تهران، ۱۳۶۹

۴) Arithmetic Teacher
March 1980, Number 7, Volume 27,

زیرنویس ها:

۱ـ متجاوز از پنجاه سال پیش، گاستون میالارهٔ فرانسوی علت بسیاری از ناسازگاریهای اجتماعی افراد را زائیدهٔ شکستشان در یادگیری مطالب آموختنی و از جمله ریاضیات قلمداد کرده است (رجوع کنید به روش آموختن حساب و هندسه، از دکتر غلامحسین شکوهی، صفحهٔ ۳).

۲ـ Jean Piaget (۱۹۸۰-۱۸۹۶) فیلسوف و روان شناس فقید سویسی.

۳ـ رجوع کنید به روش آموختن حساب و هندسه، صفحات ۵ به بعد،

۴ـ همان، صفحهٔ ۶۲ تا ۶۴

۵ـ Shéme sensori- moteur را «روان بنه» ترجمه کرده اند.

۶ـ روش آموختن حساب و هندسه، صفحات ۶۱ تا ۶۴.

۷ـ Werteimer

۸ـ Gauss

۹ـ اصول روان شناسی ـ مان، نرمان لسلی ـ ترجمه دکتر صناعی، صفحات ۲۷۴ـ۲۷۳

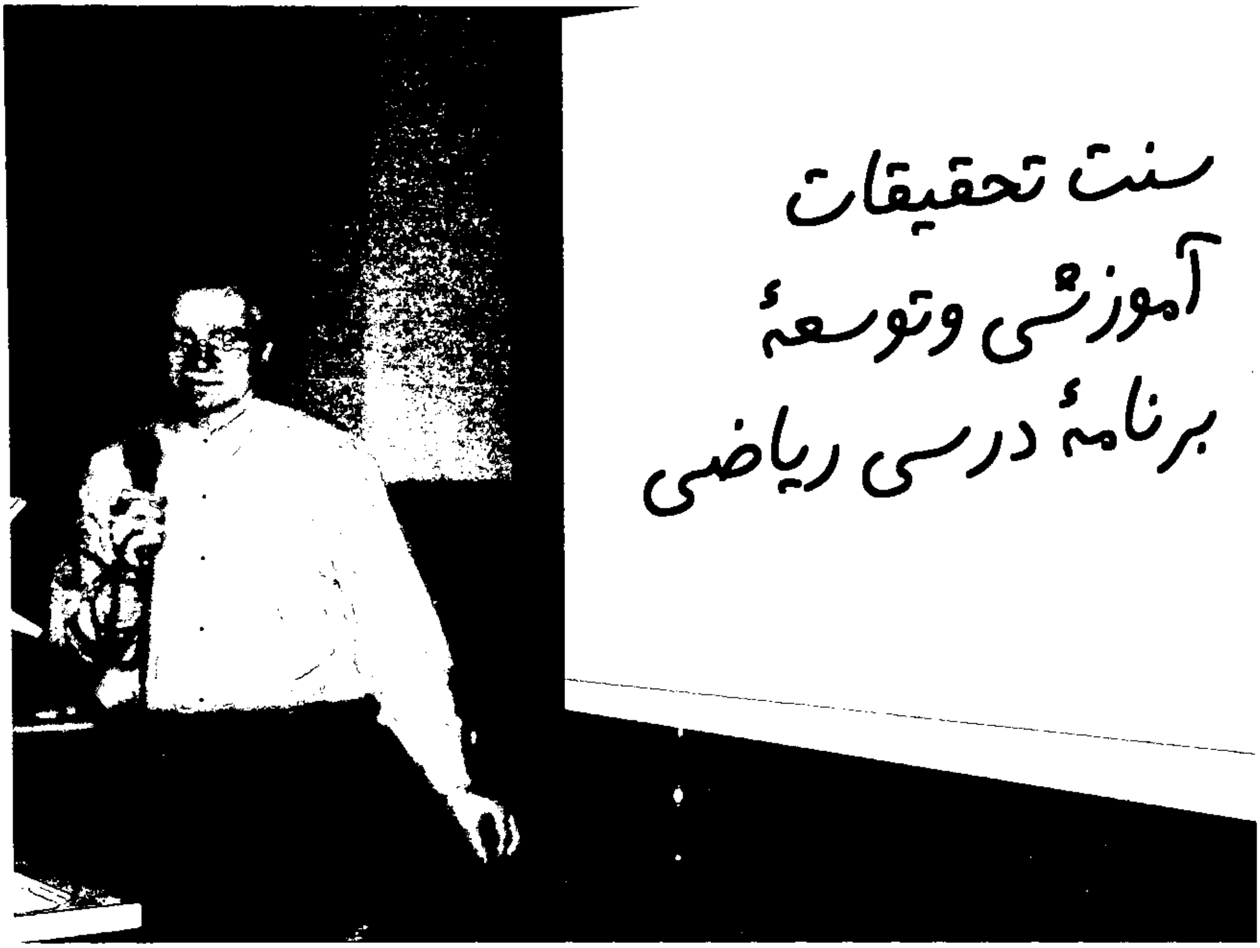
۱۰ـ مربیان بزرگ ـ ژان شاتو و دیگران ـ ترجمه دکتر شکوهی، صفحات ۲۱ و ۲۲

۱۱ـ Edouard Claparéde (۱۹۴۰-۱۸۷۳)، پزشک، روان شناس و عالم تعلیم و تربیت سویسی (مربیان بزرگ، صفحات ۲۸۱ تا ۲۹۶).

۱۲ـ برای توضیح بیشتر رجوع شود به کتاب روش آموختن حساب و هندسه، صفحهٔ ۱۵۶ بیعد.

۱۳ـ رجوع کنید به
Readiness of Eight - Year - Old Children to Understand the Division of Fractions. Aritmetic Teacher, volume 27, Number 7, March 1980

سخنران: پروفسور آلن بیشاب ـ دانشگاه موناش استرالیا
برگردان: سهیلا غلام‌آزاد



سنت تحقیقات آموزشی و توسعهٔ برنامهٔ درسی ریاضی

پروفسور آلن بیشاب به عنوان سخنران مدعو توسط کمیتهٔ علمی دومین کنفرانس آموزش ریاضی ایران که از تاریخ ۱ تا ۳ شهریور ۱۳۷۶ در کرمانشاه برگزار گردید، با کمک مالی وزارت آموزش و پرورش به ایران آمدند. ایشان پس از خاتمهٔ کنفرانس، یک سخنرانی در دفتر برنامه ریزی و تألیف کتابهای درسی در رابطه با سنّت های تحقیقی در آموزش ریاضی و چگونگی توسعهٔ برنامهٔ درسی ایراد کردند که هم زمان، توسط خانم زهرا گویا ترجمه گردید. کارشناسان محترم دفتر سؤالهای بسیاری مطرح کردند که پروفسور بیشاب با حوصله به آنها پاسخ دادند. در برگردان سخنرانی، به دلیل آنکه ایشان مجدداً سؤالها را مطرح کرده و بعد پاسخ دادند، ، از تکرار آنها خودداری شد تا متن یکنواخت شود و خواندن آن روانتر باشد. همچنین بعضی سؤالها ویژهٔ برنامه ریزی درسی ریاضی نبودند که آن سؤال و جوابها حذف گردیدند.

هیئت تحریریه مجلّه

خیلی ممنون هستم که من را دعوت کرده‌اید و خیلی خوشحالم از اینکه بین شما هستم.

در این جلسه راجع به بعضی از کارهای شخصی که در زمینهٔ آموزش ریاضی انجام می‌دهیم صحبت می کنم و در عین حال، سعی می کنم مثالهایم عمومی‌تر باشد تا در رابطه با قسمتهای مختلف دیگر هم کاربرد داشته باشد. قسمتی که من در کتاب «راهنمای بین‌المللی آموزش ریاضی»[1] نوشته‌ام راجع به دیدگاه جهانی نسبت به آموزش ریاضی است. این کتاب مرجع خیلی خوبی برای تحقیق در آموزش و یادگیری و تعلیم و تربیت به خصوص در رابطه با برنامهٔ درسی و آموزش معلّمان ریاضی است. وقتی این قسمت را می‌نوشتم، اوّل از همه سعی کردم سنّتهایی را که در تحقیقات آموزش ریاضی موجود است پیدا کنم و بشناسم و فکر کردم خیلی

ممکن است که شما قصد و ارادهٔ بسیار خوب و عزمی جزم برای انجام تحقیقات داشته باشید و شواهد بسیار زیادی هم جمع‌آوری کرده باشید ولی وقتی مبنای نظری نداشته باشید نمی‌دانید با آن مشاهدات چه کار کنید.

ضروری است که اوّل راجع به سنّت‌های پداگوژی[۲] صحبت کنم.

سنّت های پداگوژی[۳] این گونه بود که همیشه معلّمان نخبه را مورد مطالعه قرار می‌دادیم. این یک سنّت خیلی جا افتاده در جامعهٔ آموزشی بود که خیلی از آموزشگران معروف هم دنبالهٔ روی این سنّت بودند، بدین ترتیب که ما بهترین‌ها را شناسایی کنیم، با آنها آشنا شویم و مطمئن شویم که بقیهٔ معلّمان، پیروان خوبی برای این بهترین‌ها هستند. این سنّت هنوز در بعضی‌ها که دنبال این هستند که معلّمان خوب را مورد مطالعه قرار بدهند و ببینند آنها چگونه عمل می‌کنند، چگونه تدریس می‌کنند و چه کارهایی انجام می‌دهند تا بقیه دنبال روی آنها باشند، دیده می‌شود. اوّلین رویکرد اصلی به این نوع تحقیق، مشاهدهٔ کلاس درس است.

دومین سنّت آموزشی، **سنّت تحقیقات تجربی علمی، (روشهای علمی)**[۴] است. دیدگاه این سنّت این است که ما باید طوری تحقیقات آموزشی را انجام دهیم که انگار محققی در یک آزمایشگاه هستیم. بسیاری از تحقیقات آموزش ریاضی در رابطه با آموزش و یادگیری ریاضی این گونه انجام شده است. تصور کنید شما کُت سفید آزمایشگاهتان را پوشیده‌اید! وارد آزمایشگاه می‌شوید و دانش‌آموزان را با دقت زیر نظر می‌گیرید تا بعد بتوانید آنها را به طور دقیق مقایسه کنید. توسعهٔ خیلی از روشهای ارزیابی و روشهای کنترل دانش‌آموز در اثر این روشهای تحقیق علمی بوده است.

سومین سنّت، سنّت طلبه های فیلسوف[۵] است. این سنّت به خصوص در اروپای مرکزی و آلمان خیلی غالب است. واحد روش اصلی تحقیق، تجزیه و تحلیل است و تحقیقات، کتابخانه‌ای انجام می‌شود.

فکر می‌کنم این سه شاخه یا سه سنّت که اینجا گفتم، معرّف خوبی برای خلاصه کردن روشهای تحقیق در آموزش ریاضی است. ولی الان می‌خواهم برایتان توضیح بدهم که خودم چگونه تحقیق می‌کنم و فکر می‌کنم که چه روشی بهتر است.

خیلی کارها در تعلیم و تربیت انجام می‌دهیم که مردم خیال می‌کنند تحقیق است ولی تحقیق نیست! اولین هدف هر تحقیق یا جستجویی، باید **آگاهانه و عمدی**[۶] باشد. محقّق باید بداند چه کار می‌خواهد بکند و نباید تصادفی به تحقیق بپردازد. پس اول اینکه تحقیق باید عمدی باشد، یعنی آن چیزی که می‌خواهیم جستجو کنیم ارادی باشد و دوم اینکه برای تحقیقاتی که می‌خواهیم انجام دهیم باید شواهدی داشته باشیم. تعلیم و تربیت چیزی است که در دنیای واقعی اتفاق می‌افتد. پس باید با دنیای واقعی به راههای مختلف رابطه برقرار کند.

بهترین راه این ارتباط جمع‌آوری شواهد است. سومین جزء این تحقیقات به نظر من **نظریه** است. ممکن است که شما قصد و ارادهٔ بسیار خوب و عزمی جزم برای انجام تحقیقات داشته باشید و شواهد بسیار زیادی هم جمع‌آوری کرده باشید ولی وقتی مبنای نظری نداشته باشید نمی‌دانید با آن مشاهدات چه کار کنید.

وقتی از نظریه صحبت می‌کنم، الزاماً قصدم نظریه های بزرگ مثل نظریهٔ پیاژه نیست. در واقع بیشتر منظورم نظریه‌پردازی کردن است و این موضوعی است که با دانشجویانم بیشتر روی آن کار می‌کنیم که چگونه در مورد شواهدی که جمع‌آوری کرده‌ایم نظریه‌پردازی کنیم و خود نظریه بسازیم. ببینیم که این سه جزء، برای سنّت‌های آموزشی که گفتیم چگونه به نظر می‌آید و تفاوتشان در چیست؟

در سنّت پداگوژی، هدف مستقیم بهبود امر تدریس است. نقش شواهد و مدارک در سنّت پداگوژی این است که از رفتار بچه‌ها رفتارهای نوعی و انتخابی ارائه بدهیم. یک نفر سعی می‌کند این شواهد را جمع کند و با توجّه به رفتارِ نشان داده شده بگوید تدریس خوب چگونه باید باشد. در رابطه با نظریه می‌توان گفت که در واقع عقل سلیمِ معلّمان متخصص که قابل تقسیم کردن، قابل ارائه کردن و قابل تجمع است، مبنای نظری‌اش را تشکیل می‌دهد. یعنی معلّمان خبره تهیه کنندهٔ این مبنای نظری هستند و همینطور که مشاهده می‌کنید، این سنّت تابه‌حال تأثیر بسیار عمده‌ای بر آموزش معلّمان داشته است. خیلی وقتها آن کسانی که مسئول آموزش معلّمان هستند، فکر می‌کنند که معلّمان بی‌نظیر و خبره‌ای‌اند که باید این خبرگی را با دیگران در میان بگذارند.

حالا به سنّت دوم نگاه کنیم که همان سنّت روش تحقیق علمی است. فکر می‌کنید که هدف یک محقق علمی، تجربی چیست؟ هدف این دسته از محققان این است که واقعیت را توضیح بدهند. ممکن است که دغدغهٔ بهبود مستقیم وضعیت معلّمان را داشته باشیم و ممکن است نداشته باشیم یا ممکن است

تحقیقات اخیر، ما را به اینجا رسانده که برنامهٔ درسی را با استانداردها که در واقع ارزیابی برنامهٔ درسی است مرتبط کنیم.

که نسبت به آن موضوع عالمِ غیر علاقه‌مند باشیم ولی می‌خواهیم راجع به اتفاقی که می‌افتد توضیح بدهیم. مطمئناً شواهدی که جمع‌آوری می‌کنیم، یعنی داده‌هایی که جمع‌آوری می‌کنیم در تحقیق تجربی؛ حتماً داده‌های عینی هستند، دقیق‌اند و راجع به حقایقی صحبت می‌کنند که باید توضیح داده شوند و مطمئناً نظریه در این نوع سنّت، اکتشافی است و بعد آزمایش می‌شود. آزمون فرضیه در مورد داده‌هایی است که جمع‌آوری کردیم تا ببینیم تأئید می‌شود یا رد می‌شود.

حالا سومین سنّت که متعلق به طلبه‌های فیلسوف است را بررسی می‌کنیم، برای این سنّت، تحقیقات از نوع کتابخانه‌ای یا فلسفی است. در واقع راجع به دیدگاههای نظری که خیلی دقیق هستند محققان باید بحث و تجربه و تحلیل کنند و بعد آنها را تأئید کنند، یعنی تأئید دیدگاههای نظری دقیق. در رابطه با داده‌هایی که در این سنّت وجود دارد، فرض می‌کنیم که آنها شناخته شده هستند یا در غیر این صورت، آنها وجود دارند تا ما برویم و آنها را کشف کنیم و توسعه بدهیم. در رابطه با مبنای نظری‌اش، این دیدگاه موقعیت ایده‌الی است که واقعیت آموزشی باید به آن سمت برود. به سمتی که مبنای نظری‌اش یک موقعیت ایده‌ال و یک مدینهٔ فاضله را در نظر می‌گیرد و محققان متعلق به این سنّت می‌گویند واقعیت آموزشی باید به آن سمت برود و در واقع، هدف را از قبل مشخص می‌کنند. شاید بعضیها بخواهند در مورد این سه جزء یا سه مؤلفه که من به عنوان تعریفم از تحقیقات آموزشی معرفی کردم سؤال کنند. آن سه مؤلفه را مجدداً تأکید می‌کنم که یکی هدف[7] تحقیق است، دوّمی شواهد[8] یا داده‌هاست و سومی نظریه[9] است. یعنی وقتی می‌گویم تحقیق (یا پژوهش)، منظورم این سه مؤلفه است.

حالا اجازه بدهید بیشتر راجع به توسعهٔ برنامهٔ درسی صحبت کنم یعنی استفاده از این تحقیقات در برنامهٔ درسی. الگوی برنامهٔ درسی به نام «چارچوب برنامهٔ درسی و استانداردها» که الان خدمتتان ارائه دادم متعلق به ایالت ویکتوریای استرالیا است و این صفحه که تکثیر شده، آن فرآیند (الگو) را نشان می‌دهد[11]. برنامهٔ درسی در ویکتوریا حول هشت موضوع اصلی سازماندهی شده است و برای هر هشت موضوع افراد متخصصی در هر گروه نشسته‌اند، برنامه‌ریزی کرده‌اند و بعد مشخّص کرده‌اند که زیر شاخه‌های هر موضوع چه چیزهایی باید باشند. برنامهٔ درسی ما در استرالیا متأثر از برنامهٔ انگلستان است. ما هشت حوزهٔ یادگیری را به عنوان هشت موضوع درسی اصلی معرفی کرده‌ایم. این هشت موضوع برای برنامهٔ درسی دانش‌آموز در سطوح مختلف در نظر گرفته می‌شود. این برنامه از ابتدایی تا متوسطه در سطوح مختلف تهیه می‌شود. الان هر هشت موضوعی که اینجا مشاهده می‌کنید همه در برنامهٔ درسی ابتدایی وجود دارد که چالش بسیار بزرگی را برای معلّمان ابتدایی به وجود آورده است. این هشت موضوع عبارتند از زبان انگلیسی [زبان رسمی]، بهداشت و تربیت بدنی، زبانهای به غیر از زبان رسمی[12] ریاضی، علوم پایه، مطالعهٔ جامعه و محیط زیست و تکنولوژی که جدیداً به برنامهٔ ابتدایی اضافه شده است. پس ساختار برنامهٔ درسی ما در ویکتوریا در حال حاضر این است که شامل هشت موضوع مختلف و در سطح‌های مختلف از ابتدایی تا متوسطه است. این سند به اسم «چارچوب برنامهٔ درسی و استانداردها» معرفی شده است و ایده‌های راجع به محتوا را با ایده‌های راجع به استانداردها با هم تلفیق کرده است. قبل از اینکه وارد این اتاق شویم، بحث ما راجع به این بود که تعادل و رابطهٔ

از جمله موضوعهای خیلی مهم تحقیق این است که از کتاب های درسی برای تشخیص اینکه آیا می توانیم فقط به سمت توصیه های درسی حرکت کنیم یا نه ارزشیابی به عمل آید. همچنین، ارزیابی کتاب های درسی در کلاس درس واقعی برای اینکه بفهمیم معلمان چگونه از آن ها استفاده می کنند و دانش آموزان چگونه آن ها را می فهمند یک ضرورت است.

بین محتوا و پداگوژی در برنامهٔ درسی چیست؟ تحقیقات اخیر، ما را به اینجا رسانده که برنامهٔ درسی را با استانداردها که در واقع ارزیابی برنامهٔ درسی است مرتبط کنیم. با استفاده از نتایج تحقیقاتی که به دست آورده‌ایم، قادر شدیم که سطوح را تعریف کنیم. با این حال، این سطحی را که الان تعریف می‌کنیم، سطحی است که هنوز راجع به آن بحث و مناظره داریم. این [برنامه] هنجار مدار است و بر اساس همان هنجاری است که تعریف می‌کنیم. این کاری است که داریم تجربه می‌کنیم و ارزشیابی می‌کنیم و یک برنامهٔ قطعی یا حتمی نیست. پس اولین حلقهٔ اتصال این است که برنامهٔ درسی را به محتوا و محتوا را به ارزیابی متصل کنیم.

در واقع، در رابطه با سطوحی که از برنامهٔ درسی داریم باید گفت که یکی دغدغهٔ محتوا را داریم که محتوا چگونه توسط ارزیابی مشخص می‌شود و دیگری این که ارزیابی چگونه سطوح مختلف را تعیین می‌کند.

این در واقع یک سلسه مراتب است، به این معنا که سطوح مختلف چگونه توسط ارزیابی‌های مختلف تعیین می‌شوند و بعد این سطوح چگونه توالی محتوا را به ما نشان می‌دهند و کلاً هدف این سنّت این نیست که چگونگی رویّه‌های[14] تدریس را جزء شده مشخص کنیم، بلکه هدف این است که یک چارچوب ارائه بدهیم و سؤال اصلی این است که چگونه این چارچوب را در دنیای واقعی تفسیر کنیم.

مثلاً شما حتماً نمونه‌هایی از مطالعهٔ بین‌المللی تیمز را در مورد برنامه‌های درسی دیده‌اید. همه با برنامهٔ قصد شده[15]، اجرا شده[16] و کسب شده[17] آشنایی دارید. چارچوب برنامهٔ درسی در سطح برنامهٔ قصد شده است. برای چگونگی اجرای یک برنامهٔ درسی ما الان داریم مطالبی تهیه می‌کنیم به اسم «توصیه‌های آن درس» که آن توصیه‌های درسی در مورد فعالیت‌های تدریس، رویکردهای تدریس و ارزیابی‌های مرتبط صحبت می‌کند. هر دوی اینها توسط وزارتخانه تهیه می‌شود ولی هیچکدام کتاب درسی نیستند. در استرالیا ما وضعیت خیلی عجیب غریبی داریم. شاید مهاجران از بیش از صد کشور وارد استرالیا می‌شوند. در خیلی از مدارس شما حدود ۳۰ زبان اصلی مختلف پیدا می‌کنید. پس ما باید طوری معلّمان خود را آموزش بدهیم که بتوانند ایده‌ها را برای دانش‌آموزان با زبانهای مختلف، فرهنگ‌های مختلف و خواسته‌های مختلف تطبیق بدهند. پس وزارتخانه، هم چارچوب‌های برنامهٔ درسی و هم این توصیه‌های برنامهٔ درسی را که شامل توصیه‌های متنوعی جهت تدریس به معلّمان است را تهیّه می‌کند. برای معلّمان خوب و اغلب معلّمان باتجربه این دو کافی است. شاید این همان چیزی است که نیاز دارند و ما سعی می‌کنیم به معلّمان تأکید کنیم که معلّمان، مسئول انتخاب صحیح از بین اینها هستند. معلّمان باید انتخاب کنند که چه فعالیتهایی مناسب دانش‌آموزانشان است.

در یک انتهای طیف، شما کتابی به این شکل حاضر و آماده برای معلمان را دارید و در انتهای دیگر این طیف، توصیه های درس را دارید بدون اینکه تأکیدی بر کتاب درسی داشته باشید. این انتهای طیف دقیقاً به معلمان می گوید که چهکار بکنند و چه بگویند و در انتهای دیگر در واقع منابع غنی برای معلمان داریم و پیشنهادها و ایده هایی که به آنها می دهیم. دیدگاه من این است که هرقدر معلمان با مهارت تر و تواناتر باشند، بیشتر می توانیم به سمت انتهای دیگر طیف حرکت کنیم.
تصمیم گیری در مورد اینکه در کجای طیف قرار بگیریم یا قرار داریم، وابسته است به اینکه معلمان ما تا چه حد در حرفهٔ معلمی خود مهارت دارند و توانا هستند.

حالا داستان کتاب درسی را می‌گویم. در کشور من هر کسی می‌تواند کتاب درسی بنویسد و معلّمان و مدارس می‌توانند هر کتاب درسی را که دوست داشته باشند بخرند. ولی مطمئناً اگر کتاب درسی با چارچوبی که وزارتخانه داده جور نشود [هماهنگ نباشد] حتماً کسی آن را نمی‌خرد! ممکن است در کشور شما کتاب درسی خیلی مهم باشد ولی در وضعیت ما این چارچوب برنامهٔ درسی و پیشنهادهای درسی است که خیلی مهم است. پس ما هدف تحقیقاتمان را روی کتاب درسی نمی‌گذاریم، بلکه بیشتر هدف تحقیقاتمان را روی ارزیابی، پیدا کردن سطوح، توالی محتوا و رویکردهای تدریس، فعالیتها و غیره می‌گذاریم. وقتی که کنفرانس‌های پژوهشی داریم، بیشتر روی اینکه مثلاً فرض کنید توالی درست محتوا در سطوح مختلف چه باید باشد متمرکز می‌شویم نه اینکه روی خود کتاب درسی. ما واقعاً تحقیقات خیلی مشخصی در زمینهٔ کتاب درسی انجام نداده‌ایم. من فکر می‌کنم از نظر کتاب درسی، موقعیّت در استرالیا خیلی با آمریکا متفاوت است. چون تا آنجا که من می‌دانم، در آمریکا خیلی از نتایج تحقیق را در تهیهٔ کتاب درسی به کار می‌برند. یک سری کتاب

فکر می‌کنم هر نظام آموزشی به این چهار جزء یا مؤلفه نیازمند است و همیشه باید تعادل بین این چهار مؤلفه وجود داشته باشد. اولین مؤلفه، چارچوب برنامهٔ درسی است. دومی توصیه های درسی. سومی کتاب درسی و چهارمی توسعهٔ حرفه ای معلمان است. اگر این چهار مؤلفه از هم جدا باشند. فکر می‌کنم نظام آموزشی خوبی نخواهیم داشت.

درسی در آمریکا هستند که به اسم کتاب درسی «مقاوم در برابر معلّم»[18] معروف هستند، یعنی هرقدر که معلّم بد تدریس کند، کتاب درسی آنقدر خوب است که تدریس خوب اتفاق می‌افتد! حدود ۱۵ سال است که واژهٔ «کتاب درسی مقاوم در برابر معلّم» متداول شده است و ایده‌ال تحقیق را می‌توانیم در ایده‌ال این کتاب‌های درسی بیاوریم. این وضعی است که در آمریکا وجود دارد.

این کتابها حالت خودآموز ندارند بلکه کنایه است از اینکه کتاب آنقدر خوب تهیه شده که حتی اگر معلّم خوب نباشد، کتاب کار خودش را انجام می‌دهد و تدریس خوب انجام می‌شود! یک مثال بگویم که چه احساسی می‌کنید اگر یکی از این کتابها را داشته باشید! مثلاً به بچه‌ها می‌گوید «صبح بخیر، همگی صفحهٔ ۱۰۰ را باز کنید»! معلّم هم کتاب «راهنمای معلّم» را که همین صفحه را دارد باز می‌کند (صفحهٔ ۱۰۰ را). در این کتاب‌ها، دقیقاً به معلّمان می‌گوید چه بگوئید و چگونه باید بگوئید، آیا باید لبخند بزنید یا نزنید! حتی «فعالیتهای درمانی[19]» برای دانش‌آموزانی که مطلب را نفهمیده‌اند و «فعالیت‌های غنی شده[20]» برای دانش‌آموزانی که بیشتر می‌طلبند در این کتابها هست. اولین دفعه‌ای که دانشجو معلّمان این کتابها را می‌بینند، می‌گویند «عالی است! دیگر هیچ احتیاجی نیست که طراحی برای درسمان داشته باشیم» و بعضی از معلّمان می‌گویند «من دیگر هیچ کاری ندارم انجام دهم، کتاب همه چیز را گفته است!» ولی معلّمان خیلی زود درمی‌یابند که دانش‌آموزان در قالبی که کتاب گفته خوب قرار نمی‌گیرند. درست مثل این است که شما وارد یک مغازه بشوید و بخواهید لباس بخرید و آنجا فقط یک سایز لباس داشته باشند. متأسفانه هرکسی در اندازه‌های مختلف است و یک لباس برازندهٔ همه نیست! البته چیزی که من گفتم خیلی نقّادانه و بی‌انصافی بود! ولی این در واقع یک انتهای طیفی است که داریم. در یک انتهای طیف، شما کتابی به این شکل حاضر و آماده برای معلّمان را

من احساس می‌کنم توسعهٔ حرفه ای معلمان مؤلفه ای است که در ایران به اندازهٔ کافی توسعه پیدا نکرده و در نتیجه کتاب های درسی شما مجبور است که بیشتر به سمت این انتهای طیف [مقاوم در برابر معلم] متمایل باشد و اگر قرار باشد کتابهای درسی به سمت این انتهای طیف باشد. پس چارچوب برنامهٔ درسی باید خیلی قوی باشد. ولی همینطور که در حال توسعه هستید و پیشرفت می‌کنید. به طور طبیعی باید تأکید بیشتری روی توسعهٔ حرفه ای معلمان و توصیه های درسی داشته باشید تا بتوانید به سمت دیگر طیف حرکت کنید

دارید و در انتهای دیگر این طیف، توصیه‌های درس را دارید بدون اینکه تأکیدی بر کتاب درسی داشته باشید. این انتهای طیف دقیقاً به معلّمان می‌گوید که چه کار بکنند و چه بگویند و در انتهای دیگر در واقع منابع غنی برای معلّمان داریم و پیشنهادها و ایده‌هایی که به آنها می‌دهیم. دیدگاه من این است که هرقدر معلّمان با مهارت‌تر و تواناتر باشند، بیشتر می‌توانیم به سمت انتهای دیگر طیف حرکت کنیم. تصمیم‌گیری در مورد اینکه در کجای طیف قرار بگیریم یا قرار داریم، وابسته است به اینکه معلّمان ما تا چه حد در حرفهٔ معلّمی خود مهارت دارند و توانا هستند. پس از جمله موضوعهای خیلی مهم تحقیق این است که از کتاب‌های درسی برای تشخیص اینکه آیا می‌توانیم فقط به سمت توصیه‌های درسی حرکت کنیم یا نه ارزشیابی به عمل آید. همچنین، ارزیابی کتاب‌های درسی در کلاس درس واقعی برای اینکه بفهمیم معلّمان چگونه از آن‌ها استفاده می‌کنند و دانش‌آموزان چگونه آن‌ها را می‌فهمند یک ضرورت است. من می‌توانم بگویم که در واقع، اینها چهار مؤلفهٔ موقعیتی هستند و فکر می‌کنم هر نظام آموزشی به این چهار جزء یا مؤلفه نیازمند است و همیشه باید تعادل بین این چهار مؤلفه وجود داشته باشد. اوّلین مؤلفه، چارچوب برنامهٔ درسی است، دومی توصیه‌های درسی، سومی کتاب درسی و چهارمی توسعهٔ حرفه‌ای معلّمان است. اگر این چهار مؤلفه از هم جدا باشند، فکر می‌کنم نظام آموزش خوبی نخواهیم داشت. کشورهای مختلف به طور پیوسته و مستمر خودشان را ارزشیابی می‌کنند و در جهت چگونگی ایجاد تعادل بین این چهار مؤلفه و تغییر جایگاهشان بسته به شرایط کار می‌کنند.

اگر اجازه بدهید، گردنم را بالا بکشم و به قول معروف دزدکی نگاه کنم و دیدگاه خودم را نسبت به وضعیت فعلی در ایران بگویم، بعد شما بگوئید چقدر نادرست می‌گویم! من یک هفته در ایران بودم و حالا دیگر متخصص شده‌ام!؟ من احساس می‌کنم توسعهٔ حرفه‌ای معلّمان مؤلفه‌ای است که در ایران به اندازهٔ کافی توسعه پیدا نکرده و در نتیجه کتاب‌های درسی شما مجبور است که بیشتر به سمت

نگرانی من این است که اگر تأکید خیلی زیادی روی تهیهٔ کتاب درسی کنیم و به توسعهٔ بخشهای دیگر مثل چارچوب برنامهٔ درسی و این پیشنهادهای درسی و توسعهٔ حرفه ای معلم ها نپردازیم، معلمهای بسیار وابسته ای تربیت می‌کنیم که خیلی قدرت حرکت ندارند و فقط روی کتابهای درسی متمرکزند.

این انتهای طیف [مقاوم در برابر معلّم] متمایل باشد و اگر قرار باشد کتابهای درسی به سمت این انتهای طیف باشد، پس چارچوب برنامهٔ درسی باید خیلی قوی باشد. ولی همینطور که در حال توسعه هستید و پیشرفت می‌کنید، به طور طبیعی باید تأکید بیشتری روی توسعهٔ حرفه‌ای معلّمان و توصیه‌های درسی داشته باشید تا بتوانید به سمت دیگر طیف حرکت کنید و اگر این تأکیدی که خدمتتان گفتم یعنی تأکید روی مؤلفهٔ دوم و چهارم بیشتر شود، بعداً می‌توانیم معلّمانمان را به سمت انتهای دیگر طیف حرکت بدهیم. این توسعه و پیشرفت معنایش این است که شما به تحقیقات بیشتری در زمینهٔ فعالیتها، در زمینهٔ رویکردهای تدریس و در زمینهٔ ارزیابی احتیاج دارید. یکی از راههای خیلی خوبی که ما برای کمک به تحقیقات اصیل در این زمینه پیدا کرده‌ایم، همان «معلّم پژوهنده» یا «معلّم به عنوان محقق»[21] است، یعنی درگیر کردن بیشتر و فعّال‌تر کردن معلّم در امر تحقیق و اگر «معلّم به عنوان محقق» یا «معلّم پژوهنده» را بیشتر تقویت کنیم و روی توسعهٔ حرفه‌ای معلّمان بیشتر کار کنیم و در رابطه با فعالیت‌ها و رویکردهای مختلف تدریس و ارزیابی‌ها بیشتر تحقیق کنیم، به طور طبیعی معلّمان روزبه‌روز مستقل‌تر می‌شوند و می‌توانند بیشتر به سمت توصیه‌های درسی حرکت کنند.

حالا شما می‌توانید به من بگوئید که بعد از یک هفته دیدن و مشاهده کردن، توصیه‌های من تا چه اندازه دیوانه‌وار بود!!

ـ باید توجه داشت که توسعهٔ حرفه‌ای معلّمان به طرق مختلف اتفاق می‌افتد: این توسعه می‌تواند از طریق درسهای مختلف باشد یا از طریف تهیهٔ مواد مختلف و از همه مهمتر از طریق دیدن معلّمان دیگری که در حال تدریس هستند.

ـ لازم به ذکر است که یکی از نکات مهمّی که در تهیهٔ کتاب درسی لازم است به آن فکر کنیم این است که ببینیم چه کسی به کتاب درسی احتیاج دارد، معلّم یا دانش‌آموز یا هر دو. در خیلی از موقعیتها، دانش‌آموز به ایده‌ها و اطلاعات خیلی خاصّی نیاز دارد و معلّم به توصیه‌ها و اطلاعات دیگری نیاز دارد. به‌هرحال، این تجربهٔ من از خیلی کشورهای دیگر است که کتاب درسی برای دانش‌آموز نوشته می‌شود ولی راهنمای معلّم است که آن اطلاعاتی را که برای معلّم ضرورت دارد به او می‌دهد. مثلاً در کتاب درسی خیلی خوب است که فعالیتهای غنی آورده شود که یادگیری دانش‌آموز از طریق آنها انجام گیرد، همچنان که می‌آموزد چگونه جمع‌بندی کند و فعالیتهای انجام شده را به نتیجه برساند.

معمولاً دانش‌آموز از قبل نمی‌بیند چه چیزی می‌خواهد بیاید و معمولاً دوره نمی‌کند که چه اتفاقی افتاد. شاید در یک واحد درسی کوچک این مفید باشد که یک مقدمهٔ مختصر[22] راجع به مطلبی که می‌خواهد بیاید گفته شود، آنگاه فعالیت درسی توسعه پیدا کند و بعد از طریق یک دوباره‌نگری به آنچه که انجام شده آن واحد درسی جمع‌بندی شود.

البته باید توجه داشت که اگرچه این مقدمهٔ مختصر در کتاب دانش‌آموز است، ولی قطعاً معلّم است که این مقدمه را انجام می‌دهد. این مقدمه می‌تواند راجع به مطالب قبلی باشد یا در مورد یاد گرفتن چیزی راجع به تاریخ موضوع، به کار بردن موضوع و به‌هرحال چیزهای مختلفی که فکر می‌کنیم مفید است باشد.

در توصیه‌های درسی یا پیشنهادهای درسی، در واقع ما ارزیابیها و فعالیتهایی را پیش‌بینی کرده‌ایم که توسط معلّم در کلاس درس انجام می‌شود، نه توسط سازمانی خارج از مدرسه. خوب وقتی که معلّم ارزیابی می‌کند، در واقع فعالیتها را ارزیابی می‌کند و می‌بیند دانش‌آموز چه چیزهایی را بلد نیست و روی آنها تأکید می‌کند. نگرانی من این است که اگر تأکید خیلی زیادی روی تهیهٔ کتاب درسی کنیم و به توسعهٔ بخشهای دیگر مثل چارچوب برنامهٔ درسی و این پیشنهادهای درسی و توسعهٔ حرفه‌ای معلّم‌ها نپردازیم، معلّمهای بسیار وابسته‌ای تربیت می‌کنیم که خیلی قدرت حرکت ندارند و فقط روی کتابهای درسی متمرکزند.

[در مورد معلّم به عنوان محقّق توسط جمع توضیح خواسته شد]

ـ اگر معلّم فقط یک درس می‌دهد، خوب طبیعی است که راجع به آن درس دارد تحقیق می‌کند ولی معلّم نمی‌تواند معلّمهای دیگر را در حال تدریس ببیند، پس نمی‌تواند دربارهٔ تدریس به طور عمومی تحقیق انجام دهد. مثلاً افرادی مثل شما که این فرصت را دارید که معلّمهای بسیاری را در حال تدریس ببینید، این فرصت برای شما ایجاد می‌شود که تدریس را واقعاً با توجه به مشاهدات تبیین کنید. اولین حوزه‌ای که معلّم به عنوان محقق او می‌تواند راجع به آن تحقیق کند، یادگیرنده‌هایی‌اند که در مقابلش هستند. می‌تواند راجع به اشتباهاتشان تحقیق کند، راجع به فهم و درک مطلبشان، راجع به طرز تلقی‌شان

- امیدوارم که این حرفها قدری مفید بوده باشند. قطعاً توصیهٔ من این است که هیچ وقت از هیچ کشور دیگری کپی برداری نکنید. چون هر کشوری شرایط ویژهٔ خودش را دارد. ایده هایی که اینجا ارائه دادم از کشورهای مختلف جمع آوری کرده بودم که شاید در بخشهایی مفید باشد.

و راجع به انگیزه‌هایشان پژوهش کند.

چیزهای زیادی هست که شما می‌توانید راجع به تدریس خودتان پیدا کنید و گروه معلّمانِ محقق می‌توانند دانش خودشان را که از این موقعیتهای مختلف به دست آورده‌اند در هم ادغام کنند و از آن معنا بسازند و «تحقیق عمل»[23] یا «اقدام‌پژوهی» یکی از روشهای تحقیق است که معلّم به عنوان محقق می‌تواند به کار برد. در این روش، معلّم معمولاً درگیر بعضی از فعالیتهای تدریس است که در گروههای مختلف تجربه می‌کند، انجام می‌دهد و بعد نتایجش را جمع‌آوری می‌کند. این نتایج مربوط به فعالیتهای جدید، مواد جدید، کتابهای جدید و بعد ارزیابی دانش‌آموزان است، سپس معلّم بررسی می‌کند که این یافته‌ها چه تأثیری بر تدریس او داشته و همین جور این دور ادامه پیدا می‌کند.

- نتیجه‌ای که به آن رسیدیم، این است که به طور طبیعی معلّمی که آموزش ندیده است، نمی‌تواند برود بیرون و محقق بشود. پس اول از همه باید به او آموزش بدهیم و مطمئناً فقط یک عدهٔ منتخب از معلّمان این کار را می‌کنند و همه‌کس این کار را نمی‌تواند انجام بدهد. بعد باید معلّمها را در گروههای مختلف شکل بدهیم که به یکدیگر کمک کنند و باید توجّه داشت که معلّمها احتیاج به حمایت و پیشنهاد و توصیه از متخصصان دارند، یعنی نباید آنها را به امید خودشان رها کنیم. آنها باید هماهنگ بشوند نه اینکه به تنهایی به حال خودشان رها شوند، زیرا قبل از هر چیز آنها معلّم هستند. یعنی ما نمی‌خواهیم که با پیدا کردن دید تحقیقی، از معلّمی خودشان فاصله بگیرند بلکه می‌خواهیم معلّم تواناتری شوند.

به طور کلّی، ضابطه‌های مهمی که ما در انتخاب معلّم پیدا کردیم این است که با تجربه باشند، علاقه‌مند باشند و داوطلب باشند. در رابطه با آموزش معلّمان هم خیلی از کارها را با ضبطهای ویدئویی انجام می‌دهیم. به آنها نشان می‌دهیم که در کلاسهای درس دیگران چه اتّفاقاتی می‌افتد. مثالهای زیادی در مجله‌های علمی بین‌المللی در رابطه با ادبیات بین‌المللی در زمینهٔ موضوع وجود دارد که خیلی از آنها می‌توانند ترجمه بشوند و همیشه می‌توانید برای این آموزشها کارگاههای کوچک یا درسهای کوچک تهیه ببینید.

- امیدوارم که این حرفها قدری مفید بوده باشند. قطعاً توصیهٔ من این است که هیچ وقت از هیچ کشور دیگری کپی‌برداری نکنید، چون هر کشوری شرایط ویژهٔ خودش را دارد. ایده‌هایی که اینجا ارائه دادم از کشورهای مختلف جمع‌آوری کرده بودم که شاید در بخشهایی مفید باشد.

- در حال حاضر، روند تغییرات جهانی این است که خیلی از کشورها به سمت عدم تمرکز پیش می‌روند، به این معنا که معلّمانشان تواناتر شده‌اند. چون آموزشهای حرفه‌ای معلّمانشان غنی‌تر و قوی‌تر شده‌است، معلّمها تصمیم‌گیرنده‌های مستقل‌تری می‌شوند و در نتیجه انتخاب‌گران بهتری می‌شوند.

شما نیز می‌توانید از تمرکز کامل به سمت تمرکز منطقه‌ای حرکت کنید و همراهش توانایی‌های دیگر را هم ذرّه‌ذرّه توسعه بدهید. بهرحال همیشه نمی‌توان در یک نقطه ماند!

با تشکر

زیرنویس:

1. International Handbook of Mathematics Education
۲- برای واژهٔ Pedagogy معادل فارسی جامعی پیدا نکردیم.
3. Pedagogic Traditon
4. Empirical Scientist Tradition
5. Scholartic Philosopher
6. Intentional
7. Goal
8. Evidence
9. Theory
10. Curriclum Standards Framework
۱۱- ترجمهٔ این صفحه در پیوست ۱ آمده است.
12. Language Other Than English (LOTE)
13. Studies of Society and Environment (SOSE)
14. Procedure
15. Intended Curriculum
16. Implemented Curriculum
17. Attained Curriculum
18. Teacher Proof Textbook
19. Remedial activities
20. Enriched activities
21. Teacher as researcher
22. Preview
23. Action Research

هنر	انگلیسی[زبان رسمی]	بهداشت و تربیت بدنی	زبان دوم
شش بخش • رقص • تئاتر (دراما) • ارتباطات تصویری (از پایهٔ پنجم) • رسانه ها • موسیقی • هنرهای تجسّمی **زیر بخشها** ـ خلق کردن، ساختن و ارائه دادن ـ زیبائی شناسی و نقد هنری ـ قالبهای گذشته و حال	**چهار بخش** • متون • درک قالب مدار[1] • منظرها و ساختارهای زبان شناختی • استراتژی ها • صحبت کردن و گوش دادن • خواندن [قرائت] • نوشتن	**سه بخش برای پایه های ۱ تا ۳** • حرکات بدن: فعالیّت بدنی و اجتماعات • توسعهٔ انسانی، روابط انسانی، ایمنی • بهداشت افراد و جمعیّتها، مردم و غذا • **هفت بخش برای پایه های ۴ تا ۷** • حرکات بدن • فعالیّت های بدنی و اجتماعات • توسعهٔ انسانی • روابط انسانی • ایمنی • بهداشت افراد و جمعیّتها • مردم و غذا	**سه بخش** • گوش دادن و • خواندن • نوشتن **هماهنگ کننده** ـ زبان برای مقاصد شخصی و اجتماعی ـ زبان برای مقاصد اطلاع رسانی

1- Contextual understanding

ریاضیات	علوم	مطالعهٔ جامعه و محیط زیست	تکنولوژی
شش بخش • فضا • عدد • اندازه گیری • شانس و داده ها • جبر (از پایهٔ ۵) • ابزار و رویّه های ریاضی	**چهار بخش** • مواد طبیعی و پردازش شده • مواد، ساختار، خواص و استفاده ها • عکس العمل و تغییر • دنیای فیزیکی • الکتریسیته و مغناطیس • نور و صدا • نیرو و حرکت • زمین و فراتر از آن • زمین در حال تغییر • مکان ما در فضا • حیات و زندگی کردن • زندگی با یکدیگر • ساختار و کارکرد • پراکندگی زیستی، تغییر و تداوم	**سه بخش برای پایه های ۱ تا ۳** • زمان، تداوم و تغییر • مکان و فضا • فرهنگ • منابع • نظامهای طبیعی و اجتماعی **فعالیتهای جستجوگرانه** ـ جستجو و بررسی ـ ارتباطات ـ مشارکت	**سه بخش** • مواد • اطلاعات • نظامها (سیستمها) **مراحل** ـ جستجو و بررسی ـ طرّاحی ـ تولید ـ ارزشیابی

یکپارچگی شاخه‌های ریاضی

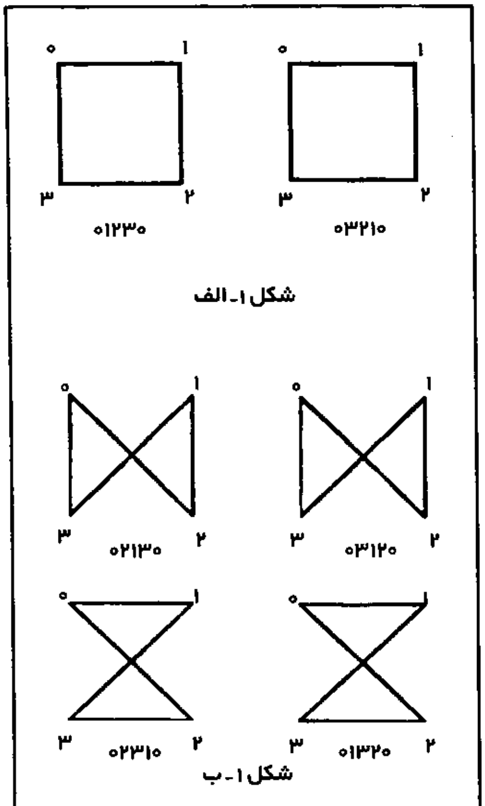
بسیاری از خوانندگان با مسألهٔ فروشنده دوره‌گرد آشنایی دارند:

یک فروشنده باید از شهر موطن خود شروع کرده، و از هر شهر روی نقشه دقیقاً یکبار گذر کند و سپس به‌خانهٔ خود بازگردد. این مسیر یک دور همیلتنی نامیده می‌شود. با این فرض که هر جفت از شهرها را جاده‌ای به‌هم وصل می‌کند، کوتاهترین مسیری که او می‌تواند طی کند چیست؟

ممکن است وقتی خوانندگان دریابند که این موقعیت برای کشف مفاهیم جایگشت، فاکتوریل، دوران، انعکاس و تقارن سودمند است مانند خود من و دانش‌آموزان کلاس نهم من متعجب شوند. استانداردهای برنامهٔ آموزشی و ارزشیابی برای ریاضیات دبیرستانی شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا (NCTM ،۱۹۸۹) بر افزایش تأکید روی این عناوین توصیه کرده است.

ایده‌های زیر از یک درس تحقیق ریاضی که در اوایل دههٔ ۱۹۹۰ تدریس می‌کردم نشأت گرفته است. این درس جهت آشنایی دانش‌آموزان با نوشتن مقالات تحقیقی ریاضی در مورد عناوینی که در برنامهٔ درسی ریاضی سنتی نبوده‌اند، طراحی شده بود. از آن پس من مشغول فعالیت‌های مربوط به‌درس اول سلسلهٔ ریاضی، که در ایالت نیویورک جایگزین درس جبر سنتی سال اول بود، شدم. در این مقاله، فعالیتهای کلاسی را که به‌کار برده‌ام شرح می‌دهم و سؤالات اضافی جهت تحقیقات توسط دانش‌آموزان را فهرست می‌کنم.

من اولین درس را با طرح مسأله فروشنده دوره‌گرد به‌شکل مرسوم خود شروع می‌کنم و سپس از دانش‌آموزان می‌خواهم تا هر موقعیتی را که در زندگی خود مجبور به طی مسیری همراه با چند توقف در چند محل بوده‌اند به صورت نوشته تشریح کنند. دانش‌آموزان نوعاً تحویل پیتزا یا روزنامه یا خرید رفتن را پیشنهاد کرده‌اند.



شکل ۱: شکلهایی برای شهرهای واقع در رئوس یک مربع

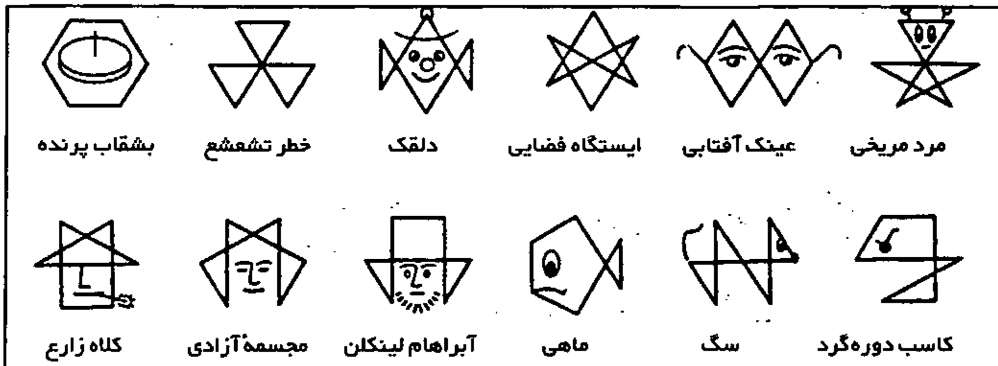
سپس شرح می‌دهم که قصد داریم مسأله را با دیدی جدید ارائه کنیم و ویژگیهای هندسی شکلهایی را تحقیق کنیم که از ترسیم دورهای همیلتونی وصل کننده رئوس یک چند ضلعی منتظم بدست می‌آیند. سپس به‌دانش‌آموزان ورقه‌ای با ده‌نقشه می‌دهم (حتی اگر تعداد دورهای کمتری ممکن باشد) که شامل چهار شهر واقع در رئوس یک مربع بوده و با شماره‌های ۰ ، ۱ ، ۲ و ۳ معین شده‌اند همچنان که درشکل ۱ نشان داده شده‌اند.

از دانش‌آموزان می‌خواهم که کارهای زیر را انجام دهند:

- تمامی دورهای همیلتونی را ترسیم کنید. برای هر

یک فروشنده باید از شهر موطن خود شروع کرده، و از هر شهر روی نقشه دقیقاً یکبار گذر کند و سپس به‌خانهٔ خود بازگردد. این مسیر یک دور همیلتنی نامیده می‌شود.

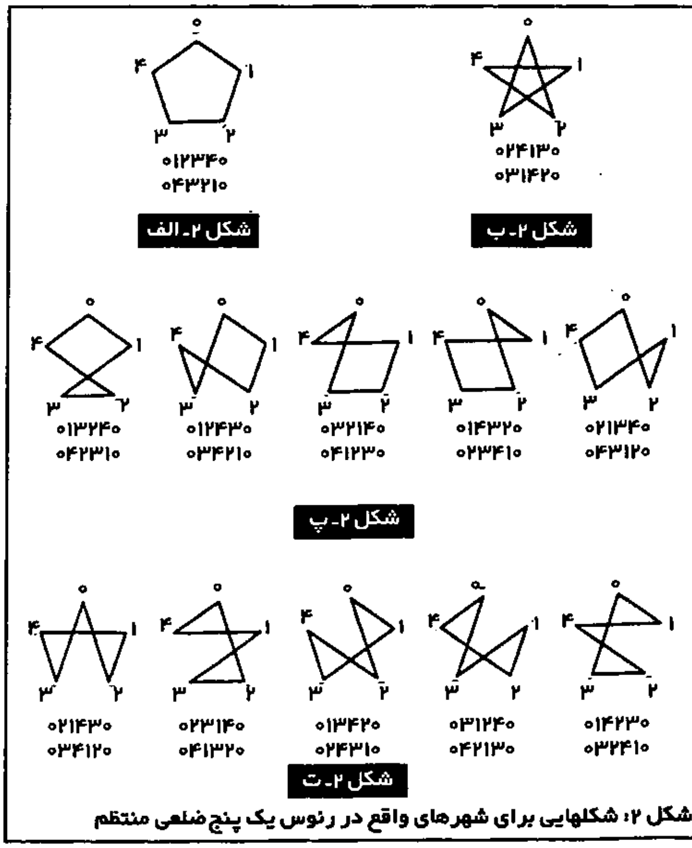
نویسنده: اندرو و. جانووسکی
مترجم: کریم احمدی دلیر
دانشگاه تربیت معلم تبریز
گروه ریاضی



شکل ۳: شکلها از شش شهر با نام آنها

دور نقشه‌ای جدید به کار برید.

● هر دور را بادنباله‌ای از شمارهٔ شهرها، که شروع و خاتمهٔ آنها با ۰ باشد، نمایش دهید.



شکل ۲: شکلهایی برای شهرهای واقع در رئوس یک پنج ضلعی منتظم

در کلاسهای قبلی دانش‌آموزانم به سرعت درمی‌یافتند که هر مسیر متناظر با جایگشتی از اعداد ۱، ۲ و ۳ است. شکل ۱ را ملاحظه کنید.

سپس، ورقه‌هایی با بیست‌وچهار نقشه شامل شهرهای واقع در رئوس یک پنج ضلعی منتظم را همانطور که در شکل ۲ نشان داده شده‌اند توزیع می‌کنم. از دانش‌آموزان می‌خواهم که کارهای زیر را انجام دهند.

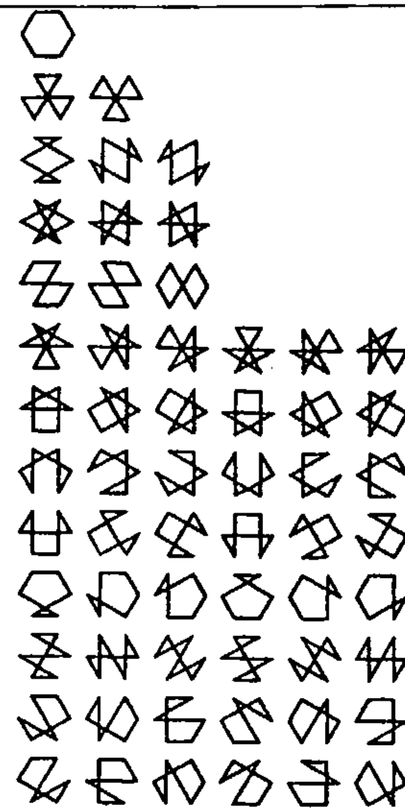
● همهٔ جایگشتهای اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ را فهرست کنید. از این جایگشتها برای ترسیم دورهای همیلتونی روی این نقشه‌ها استفاده کنید.

● نتایج را برمبنای ورقه‌های چهار شهری و پنج شهری بنویسید.

دانش‌آموزانم نتایج زیر را پیشنهاد کرده‌اند:

● اگر تعداد شهرها را با n نمایش دهیم تعداد دورهای

خانواده اشکال قابل انطباق تولید شده با دورانها و انعکاسها	تعداد خطوط تقارن	شمارهٔ شکل
	۶	۱
	۳	۲
	۲	۳
	۲	۴
	۲	۵
	۱	۶
	۱	۷
	۱	۸
	۱	۹
	۱	۱۰
	۰	۱۱
	۰	۱۲



شکل ۴ – شکلهایی برای شهرهای واقع در رئوس یک شش ضلعی منظم

همیلتونی ! (n-1) است. لازم است که ۱ را کم کنیم زیرا هر سفر در همان شهر «موطن» شروع و ختم می‌شود.

- هر وضعیت از هر یک از شکلها با دو جایگشت تولید می‌شود زیرا هر مسیر را می‌توان در دو جهت طی کرد.
- تعداد شکلهای غیر قابل انطباق کمتر از !(n-1) است زیرا برخی از شکلها انعکاسها یا دورانهای اشکال دیگر هستند.

شکل ۲ خلاصه‌ای از شکلهای پنج شهری را نمایش می‌دهد. شکلهای قابل انطباق با هم دسته‌بندی شده‌اند. جایگشتهایی که هر شکل را تولید می‌کنند اضافه شده‌اند.

سپس، ورقه‌هایی با بیست و چهار نقشه را که شامل شش شهر واقع در رئوس یک شش ضلعی منتظم هستند توزیع می‌کنم و از دانش‌آموزان می‌خواهم که هر چند تا دور همیلتونی غیر قابل انطباق که می‌توانند ترسیم کنند. در کلاسهای قبلی، شاگردانم همگی قادر به کشف تمامی دوازده مسیر غیر قابل انطباق بوده‌اند. آنها همچنین قادر به توصیف این مطلب به سایر دانش‌آموزان بودند که یک شکل ترسیم شده روی تخته سیاه انعکاس یا دورانی از شکل ترسیم شدهٔ قبلی است. دانش‌آموزان چهره‌ها و شکلهای به نمودارهایشان اضافه می‌کردند و از نامهای پیشنهادی خود برای شکلها لذت می‌بردند. شکل ۳ را ملاحظه کنید.

در این مرحله، از دانش‌آموزان می‌خواهم تا نشان دهند که تمامی شکلهای ممکن را با ترسیم همهٔ انعکاسها و تفاوتهای ممکن شکلها در شکل ۳ یافته‌اند. شصت شکلی که در شکل ۴ نمایش داده شده‌اند تمامی تبدیلات ممکن هستند. شکلها بر طبق تعداد خطوط تقارن دسته‌بندی شده‌اند. چون هر مسیر با ۲ جایگشت تولید می‌شود، این شصت شکل تمامی ۱۲۰ جایگشت از پنج شهر را به حساب می‌آورند.

سپس از دانش‌آموزان می‌خواهم تا جدولی ترسیم کنند که تعداد خطوط تقارن را با تعداد وضعیتهای هر شکل برای مربع، پنج ضلعی منتظم و شش ضلعی منتظم مقایسه کند. جدول ۱ را ملاحظه کنید.

از دانش‌آموزان می‌خواهم که این جدول را بیازمایند و سعی کنند تا دستوری را که تعداد وضعیتهای یک شکل را بر حسب تعداد شهرها و تعداد خطوط تقارن شکل بیان می‌کند کشف کنند. دانش‌آموزان مشاهده کرده‌اند که وقتی تعداد خطوط تقارن برابر با صفر نیست، تعداد شکلها برابر با n/s است که در آن n تعداد شهرها و s تعداد خطوط تقارن است. همچنین از دانش‌آموزان خواسته‌ام که اثباتی غیر رسمی برای این رابطه بنویسند.

برای دانش‌آموزان جالب توجه بود که ریاضیدانان برای کشف راههای بهتر کنترل جریان داده‌های روی شبکه‌های کامپیوتری مانند آنهایی که در اینترنت، دستگاههای ATM و نظامهای مدرسه‌ای به کار

می‌رود، روی دورهای همیلتونی شکلهای هندسی باابعاد بالاتر از دو مطالعه می‌کنند.

درس را بادعوت از دانش‌آموزان به طرح پرسشهای اضافی برای تحقیقات بیشتر به پایان می‌رسانم. دانش‌آموزان در فهرست زیر دو پرسش نخست را پیشنهاد کردند و بقیهٔ سؤالات از آن خودم است.

- چند شکل مختلف برای چند ضلعی های با بیش از شش رأس وجود دارد؟
- چگونه می‌توانیم سعی در کشف دستوری در مورد تعداد شهرهای واقع در رئوس یک چند ضلعی منتظم با تعداد شکلهای مختلف داشته باشیم؟
- چگونه می‌توانید با بررسی یک جایگشت تعداد خطوط تقارن شکل مربوط به آن جایگشت را تعیین کنید؟
- چگونه می‌توانید با بررسی یک جایگشت تعیین کنید که آیا یک شکل دارای تقارن مرکزی، یعنی دوران ۱۸۰ درجه است یا نه؟
- چگونه می‌توانید نرم‌افزارهای رایانه‌ای را برای تحلیل این مسأله یا ترسیم شکلها به کار برید؟
- چگونه افراز یک گروه جایگشتی ایجاد شده توسط دورهای همیلتونی با سایر افرازهای این گروه جایگشتی ارتباط دارد؟
- پیامدهای ناشی از این توصیف چگونه به گروههای تولید شده توسط تبدیلات هندسی مربوط می‌شوند؟
- چگونه نمایشهای ماتریسی دورهای همیلتونی برای کشف مفاهیم ارائه شده در این جا به کار برده می‌شوند؟
- چه تعداد دور همیلتونی متفاوت را می‌توان با متصل کردن رئوس چند وجهی های سه بعدی و با ابعاد بالاتر ترسیم کرد؟

با استفاده از یک برنامه به زبان BASIC برای تولید تمامی جایگشتهای یک نقشه با n شهر و سپس تقسیم این جایگشتها به زیر مجموعه هایی از جایگشتها که شکلهای قابل انطباق را تولید می‌کنند روی برخی از این پرسشها کار کرده‌ام. این برنامه تعداد زیر مجموعه ها را برای تعیین تعداد شکلهای غیر قابل انطباق نیز می‌شمارد. از سهیم کردن خوانندگان و دانش‌آموزانشان در نتایج خودم خوشحال خواهم شد.

جدول ۱

ارتباط بین تعداد شهرها، تعداد خطوط تقارن، و تعداد وضعیت های یک شکل

نام چند ضلعی	شمارهٔ شکل	تعداد شهرها	تعداد خطوط تقارن	تعداد وضعیتها
مربع	۱	۴	۴	۱
	۲	۴	۲	۲
پنج ضلعی منتظم	۱	۵	۵	۱
	۲	۵	۵	۱
	۳	۵	۱	۵
	۴	۵	۱	۵
شش ضلعی منتظم	۱	۶	۶	۱
	۲	۶	۳	۲
	۳	۶	۲	۳
	۴	۶	۲	۳
	۵	۶	۲	۳
	۶	۶	۱	۶
	۷	۶	۱	۶
	۸	۶	۱	۶
	۹	۶	۱	۶
	۱۰	۶	۱	۶
	۱۱	۶	۰	۶
	۱۲	۶	۰	۱۲

مرجع اصلی:

Andrew V. Janovsky. **Integrating Mathematical Strands**. Mathematics Teacher, Vol. 90, No.7, October 1997.

مراجع:

Cozzens, Margaret B., and Richard Porter. **Problem Solving Using Graphs, HiMap Module 6**. Arlington, Mass.: COMAP, 1991.

Herstein, I.N. **Topics in Algebra**, Waltham, Mass.: Xerox College Publishing, 1964.

Honsberger, Ross. **Mathematical Gems I**. Washington, D.C.: Mathematical Association of America, 1973.

Kenny, Margar J. **A Lesson in Mathematical Doodling**. Chestnut Hill, Mass.: Boston College Press, 1976.

Lipschutz, Seymour. **Discrete Mathematics**. Schaum's Outline Series. New York: McGraw- Hill, 1976.

Magnus, Wilhelm. Groups and Their Graphs. New York: Random House, 1964.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, Va.: NCTM, 1989.

Rotman, Joseph J. **The Theory of Groups: An Introduction**. Boston, Mass.: Allyn & Bacon, 1965

در اولین کنفرانس آموزش ریاضی در اصفهان، میزگردی در خصوص آموزش هندسه با شرکت آقایان: صفرعلی جمالی، علی رجالی (دبیر کمیتهٔ علمی کنفرانس) محمد هاشم رستمی، بیژن ظهوری زنگنه (هماهنگ کنندهٔ میزگرد)، حسین مشتاقیانپور، سیاوش میرشمس شهشهانی و خانم زهرا گویا برگزار شد. متن کامل این میزگرد در «گزارش اولین کنفرانس آموزش ریاضی ایران» چاپ شده است. این نوشته تلخیصی از آن متن است. هیأت تحریریهٔ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی لازم می‌داند تا از تهیه کنندگان گزارش اولین کنفرانس آموزش ریاضی ایران تشکر نماید.

جمالی: آن دانش‌آموزی که هندسه می‌خواند می‌فهمد که با یاد گرفتن هندسه واقعاً مطالب تازه‌ای را درک می‌کند و کارهای تازه‌ای را می‌تواند انجام بدهد و به این ترتیب، کاربرد هندسه در زندگی برای شخص آشکار می‌شود. یعنی آوردن کاربردها بسیار جالب است و انگیزه هندسه خواندن را بسیار تقویت می‌کند.

آقای زنگنه:

بسم‌الله‌الرحمن الرحیم

با تشکر از آقای دکتر رجالی و با تشکر از برگزار کنندگان کنفرانس که زحمات زیادی کشیدند و کنفرانسی به این منظمی و خوبی برگزار کردند، میزگرد آموزش هندسه را شروع می‌کنیم. برنامه‌ریزی این میزگرد به طریقی انجام گرفته که افراد با دیدگاههای مختلف در اینجا حضور داشته باشد. البتّه باید توضیح بدهم که دیدگاههای مختلف الزاماً به معنای دیدگاههای متضاد نیست، بلکه هر کدام از افراد شرکت کننده در این میزگرد از یک زاویه به مسألهٔ هندسه نگاه می‌کنند. آقای جمالی دبیر ریاضی و مدرس درس هندسه هستند که ۴۱ سال سابقهٔ تدریس دارند و از اصفهان هستند. آقای مشتاقیان پور دبیر هندسه هستند و ایشان نیز مدرس دورهٔ تربیت معلم بوده‌اند و در دورهٔ راهنمایی هم تدریس فرموده‌اند. آقای رستمی، دبیر ریاضی از تهران و مؤلف کتابهای درسی ریاضی ۵ تجربی و هندسهٔ ۲ هستند. آقای دکتر شهشهانی از دانشگاه صنعتی شریف هستند و در واقع، رشته تحصیلی و محور کارهای تحقیقی ایشان سیستمهای دینامیکی مختلط است که به نحوی با دیدگاه هندسی به این سیستمهای دینامیکی نگاه می‌کنند. همچنین، ایشان دروس مختلف هندسهٔ دانشگاهی را تدریس کرده‌اند و بنحوی یکی از بهترین نمایندگان هندسه‌دانان دانشگاهی ایران در این میزگرد هستند. خانم دکتر زهرا گویا از دانشگاه شهید بهشتی در این میزگرد شرکت کرده‌اند و با توجه به رشتهٔ تحصیلی ایشان که روانشناسی آموزش ریاضی و برنامه‌ریزی درسی است، از دیدگاه یک آموزشگر ریاضی به این مسأله نگاه می‌کنند.

من اولین سئوالی را که مطرح می‌کنم به سخنرانی آقای نجفی در مورد عمومی کردن ریاضیات برمی‌گردد، شعاری که باید تحقق پیدا کند! سئوالی که از شرکت‌کننده‌ها دارم در مورد نقش هندسه در عمومی کردن ریاضیات است. هر سخنران لطف کند و در این مورد بین ۳ تا پنج دقیقه صحبت کند. از آقای جمالی شروع می‌کنیم.

آقای جمالی:

برای رسیدن به این هدف که هندسه عاملی باشد برای عمومی کردن ریاضی، من معتقدم که مثل مطالبی که در هندسه ۱ (آن هندسه‌ای که جدیداً آمده و تدریس می‌شود) بعضی از کاربردهای قضایای هندسه را برای نمونه بیاورند. معمولاً دانش‌آموزان تشنه این هستند که بدانند این قضیه یا این مطلب چه کاربردی دارد. یک نمونه که من عرض می‌کنم و معلمینی که هندسه تدریس کرده‌اند حتماً می‌دانند، اندازه‌گیری ارتفاع یک ساختمان با استفاده از تشابه، قضیه تالس و امثال اینهاست و اگر چنین کاربردهایی به عنوان نمونه آورده شود، جاذبه این درس مسلماً بیشتر می‌شود. آن دانش‌آموزی که هندسه می‌خواند می‌فهمد که با یاد گرفتن هندسه واقعاً مطالب تازه‌ای را درک می‌کند و کارهای تازه‌ای را می‌تواند انجام بدهد و به این ترتیب، کاربرد هندسه در زندگی برای شخص آشکار می‌شود. یعنی آوردن کاربردها بسیار جالب است و انگیزه هندسه خواندن را بسیار تقویت می‌کند.

آقای مشتاقیانپور:

یکی از کاربردهای هندسه این است که انسان را با منطق آشنا می‌کند یعنی شاید تنها درس ریاضی که بیشترین میزان منطق در آن بکار رفته، هندسه است. ما شاید بردارهای جبری را در رشته‌های دیگر بکار می‌بریم ولی به آن اندازه استدلال که در هندسه هست در جاهای دیگر وجود ندارد. این است که اگر واقعاً ما بچه را خوب تربیت کنیم، می‌تواند هر مطلبی را با دلیل بپذیرد و هر مطلبی را با دلیل ارائه دهد یعنی در حقیقت هندسه او را با منطق آشنا می‌کند. بنابراین، هندسه‌های ما ممکن است در کتابهای راهنمایی یا کتابهای اول بعضی از مطالب را بدون دلیل به دانش‌آموز ارائه کند ولی او خودبه‌خود دنبال دلیل می‌گردد. یعنی هندسه تنها درسی است که اگر دلیل را هم برای بچه نگوئیم خودبخود دنبال دلیل می‌گردد و طالب منطق است. پس ما اگر بتوانیم هندسه را طوری برای بچه‌هایمان ارائه بدهیم که او را آماده کند تا دلایلی ارائه بدهد یا دلایلی را از ما بخواهد، خودبه‌خود هر چیزی را با دلیل می‌پذیرد و با دلیل می‌گوید. یعنی اگر در درس دیگری بخواهد مطلبی را ارائه کند هندسه او را آماده می‌کند که با دلیل مطلب را ارائه کند و هندسه بیشترین کاری که می‌تواند بکند این است که دانش‌آموز را با منطق و دلیل آشنا سازد.

آقای شهشهانی:

من سه دلیل برای تدریس در دبیرستان (مدرسه) می‌خواهم ذکر کنم:

اول اینکه هندسه بطور تاریخی علم فضاست و علم شکلهاست و تمام پدیده‌های طبیعی طبعاً در فضا صورت می‌گیرد. بنابراین، هندسه در واقع زمینهٔ همهٔ علوم طبیعی است. تمام فعل و انفعالات طبیعی در فضای هندسی صورت می‌گیرد و اشکال هندسی دارند. بنابراین هندسه به نوعی زبان همه علوم است.

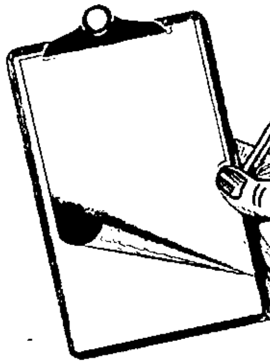
دوم اینکه بدنبال همین هندسه که در فضا شروع شده، اولین علم نظری هم هست. اولین علمی است که در آن یک سری نتایج بر اساس صرفاً تعقل و تفکر، از نتایج دیگر گرفته شده است. همهٔ حقایق تک‌به‌تک و بطور منفرد کشف نشده‌اند، بلکه با استنتاج از بعضی حقایق دیگر کشف شده‌اند که سابقه‌اش به ریاضیات باستان برمی‌گردد. من می‌خواهم مخصوصاً این ویژگی را از اصل موضوعی بودن ریاضیات (هندسه) تمیز بدهم. آن مطلب دیگری است و فکر نمی‌کنم که مطلب به این صورت اینجا مطرح باشد. من جنبهٔ اینکه تعقل در هندسه مهم است را بر «منطق» که گفتند ترجیح می‌دهم و با احتیاط بیشتری آن را بکار می‌برم. می‌خواهم تأکید کنم که حداقل از دیدگاه تعاریفی که در ذهن بنده هست، مسأله این نیست که هندسه منطق را قوی می‌کند، بلکه هندسه نمونه‌ای است از جریانی که در آن تعقل نقش مهمی برای دست یافتن به یک سری حقایق دارد.

نکتهٔ سوم اینکه هندسه زمینهٔ بسیار خوبی برای شناختن و تقویت تخیّل و خلاقیّت ریاضی و علمی کودکان و دانش‌آموزان است. کمتر زمینه‌ای هست که در آن دانش‌آموز بتواند آشنایی و احاطه به مفاهیم را در سطحی داشته باشد که بتواند تخیّلش را بکار اندازد و خودش به نتایجی برسد که از قبل برایش پیش‌بینی نشده است. مسألهٔ اثبات ارائه دادن در ریاضیات و مخصوصاً در هندسه بیش از اینکه مسألهٔ منطق مطرح باشد مسأله وسیله اکتشافی است. اگر به این صورت نگاه کنیم، واقعاً هندسه وسیله‌ای است برای تقویت تخیّل و خلاقیّت دانش‌آموز. بنابراین من این سه اصل را راهنمای تدریس هندسه در سطح دبیرستان و مدرسه می‌دانم.

آقای رستمی:

من سخنم را با این گفتهٔ گالیله شروع می‌کنم که «طبیعت با زبان ریاضی صحبت می‌کند. حروف این زبان عبارتست از دایره‌ها، مثلثها و سایر شکلهای هندسی». واقعیت این است که از کودکی، بچه با شکلهای هندسی سروکار دارد و در حقیقت، بستر اولیهٔ ریاضی و بطور خاص هندسه مشاهده است

شهشهانی: من جنبهٔ اینکه تعقل در هندسه مهم است را بر «منطق» که گفتند ترجیح می‌دهم و با احتیاط بیشتری آن را بکار می‌برم. می‌خواهم تأکید کنم که حداقل از دیدگاه تعاریفی که در ذهن بنده هست، مسأله این نیست که هندسه منطق را قوی می‌کند، بلکه هندسه نمونه‌ای است از جریانی که در آن تعقل نقش مهمی برای دست یافتن به یک سری حقایق دارد.



مشتاقیانپور: هندسه تنها درسی است که اگر دلیل را هم برای بچه نگوئیم خودبخود دنبال دلیل می‌گردد و طالب منطق است. پس ما اگر بتوانیم هندسه را طوری برای بچه‌هایمان ارائه بدهیم که او را آماده کند تا دلایلی ارائه بدهد یا دلایلی را از ما بخواهد، خودبه‌خود هر چیزی را با دلیل می‌پذیرد و با دلیل می‌گوید.

و مشاهده بوسیله اجسامی که در اختیار و در معرض دید دانش‌آموز قرار می گیرد، انجام می‌شود. موارد و مسائل عمده را فرمودند و من دیگر وقت شما را نمی گیرم. فقط نکتهٔ دیگری که می‌خواستم اضافه کنم این است که نه تنها ریاضی، بلکه دروس دیگر هم با هندسه کاملتر می‌شوند و درک بهتر مسائل هندسی باعث می‌شود که دانش‌آموز بتواند مسایل دیگر حتی مسایل فیزیک را بهتر درک و لمس کند و حل کند. در یکی از کتابها نوشته بود که اگر دانشمندان روش ارشمیدس را در مشاهده و تجربهٔ اشیاء انتخاب می‌کردند، شاید ۲۰۰۰ سال جلوتر قوانینی که بوسیله نیوتن و دیگران کشف شده بود کشف می‌شد و علم ۲۰۰۰ سال جلوتر بود. اما ارشمیدس چه کرد؟ او در حقیقت از هندسه استفاده کرد. شاید نام ارشمیدس برای بعضی بیشتر از نظر فیزیک و سایر کارهایی که انجام داده مشهور باشد. ولی واقعیت این است که بسیاری از کارهایی که ارشمیدس انجام داد زمینه هندسی داشت و به کمک هندسه انجام گرفت. کتابی در ۱۹۰۵ در مورد مکانیک از ارشمیدس کشف شد (یعنی ۱۲۱۲ سال قبل از میلاد خود ارشمیدس این کتاب را نوشته) او در این کتاب، تعبیرهای هندسی حرکتهای مکانیکی و فیزیکی را مطرح کرده است. (این کتاب ترجمه شده) بنابراین هندسه در زندگی بشر و در تاریخ علم نقش اساسی دارد و برای دانش‌آموزان هم از ابتدای زندگیشان نقش ویژه‌ای دارد.

خانم گویا:

شرکت‌کنندگان به نکته‌های بسیاری اشاره کردند که دیگر لزومی به تکرار آنها نیست. فقط یک بعد از آموزش هندسه که من فکر می‌کنم خیلی مهم است و جایگاه خاصی در تربیت یک شهروند مسئول و خلاق و متعهد و سازنده دارد بعد الگوسازی هندسه است که ما در آموزش، کمتر به آن پرداخته‌ایم. معمولاً با بخشی از توانایی استدلال منطقی که هندسه در دانش‌آموز ایجاد می‌کند، بطور سنتی و تاریخی آشنا شده‌ایم، ولی به بخشی که توانایی تحقیق به دانش‌آموز می‌دهد، حدس زدن و حدسیه‌سازی و فرضیه‌سازی و آزمایش را به دانش‌آموز یاد می‌دهد، کمتر توجه شده است. هندسه همچنان که یک بعد استنتاجی دارد که بسیار قوی و کارا و مؤثر است، بعد قویترش آنجایی است که به دانش‌آموز الگوسازی یاد می‌دهد. بقول استین، «الگوها کلید شناخت دنیای ما هستند» یعنی ما اگر پدیده‌های طبیعت را نتوانیم مدلسازی کنیم (که هندسه یک ابزار قوی برای این کار است) در واقع شاید به آن اندازه، همانطور که آقای جمالی فرمودند، به کاربردش بها نداده‌ایم و در سطح جامعه اشاعه‌اش نداده‌ایم. در حال حاضر، بحثی که در رابطه با آموزش هندسه مطرح است، هندسه از دیدگاههای مختلف است که تا چه اندازه ما می توانیم هر یک از دیدگاهها را به خدمت بگیریم. همانطور که آقای دکتر شهشهانی مطرح کردند، هندسه یک وسیلهٔ کشف و ایجادکنندهٔ خلاقیت است. واقعاً هندسه این توانایی را دارد که این کار را بکند و حیف است که از این همه توانایی هندسه در این جهت استفاده نکنیم. یکی از استانداردهای آموزش ریاضی در آستانهٔ ورود به قرن بیست و یکم از جمله ایجاد ارتباطات، ارتباط و اتصال بین ریاضی و سایر علوم، و همچنین برقرار کردن ارتباط بین مقوله‌های ریاضی است. هندسه می‌تواند در واقع پلی باشد برای ایجاد این ارتباط و هندسه می‌تواند این توانایی را ایجاد کند که دانش‌آموز برای ریاضی ارزش قائل شود و قدردان ریاضی به عنوان مدلساز پدیده‌های طبیعی باشد.

آقای زنگنه:

از مجموع بحثهایی که شد، چند سئوال مطرح می‌شود که یکی یکی آنها را مطرح می‌کنیم. آیا هندسه قدرت تفکر منطقی می‌دهد یا همانطور که آقای شهشهانی گفتند قدرت تعقل می‌دهد؟ (شاید وارد کردن کلمهٔ منطق با معنی حساب گزاره‌ها و سورها مشتبه شود که این واقعاً شاید منظور نباشد) آیا هندسه بیشتر قدرت تعقل و استدلال کردن را آموزش می‌دهد؟ من سئوالم اینست که آیا تابحال دانش‌آموزان ما که درس هندسه می‌گرفتند در دنیای واقعی‌شان وقتی که خارج از درس هندسه می‌شدند، می‌توانستند از این توانائی استدلال هندسی استفاده کنند؟ چطور می‌شود که این توانائی استدلال را به حیطه‌های دیگر ریاضی و علوم و زندگی واقعی تا آنجا که ممکن است منتقل کرد؟ این یک سئوال است که ممکن است همه نخواهند به آن پاسخ دهند. سئوال بعدی این است که گفته شده هندسه از دیدگاههای مختلف، بنابراین شاید در یک دیدگاه سنتی بحث بر سر این بوده که استفاده از جبر و بقیه ابزارها در آموزش هندسه کاری خلاف است. در این مورد، سئوال این است که از چه ابزارهایی می‌توانیم استفاده کنیم و چه نوع هندسه‌ای را تدریس کنیم؟ هندسه تبدیلی؟ هندسه فراکتال؟ هندسه تحلیلی و مختصاتی؟ هندسه ترکیبی و سنتی؟ آیا باید همه اینها را درس داد یا باید بعضی از اینها را درس داد یا باید بعضی از اینها را حذف کرد و فقط یکی را گفت؟ در این مورد خواهش می‌کنم شرکت‌کنندگان پاسخ دهند. از سمت چپ شروع می‌کنیم. آقای جمالی بفرمایند.

آقای جمالی:

به حضور حضّار محترم عرض می‌کنم که مطلبی نیست که بلافاصله ما بتوانیم در این مورد اظهارنظر کنیم. من شخصاً معتقدم همهٔ این هندسه ها هر کدام به نوبهٔ خودش خوب است و خواندنش مفید است. آنچه که به نظر من مهم است این است که ما بوسیلهٔ هندسه بتوانیم روح خلاقیت و آفریدن را در ذهن شاگردانمان تقویت بکنیم. کاری که چند سالهٔ اخیر روی هندسه شده است متأسفانه ابداً دارای این خاصیت نبوده یعنی هندسه هم به صورت بعضی از درسهای دیگر درآمده است. درس هندسه را نباید به صورتی که در کتابهای درسی است تدریس کنیم یعنی چند تا قضیه را ثابت کنیم چند تا مسأله را هم از توی کتاب بگوییم حل کنید. بعد هم در امتحان از همین مسایل استفاده کنیم یا اگر مسأله‌ای هم از مرکز می‌آید یا سئوالی از مرکز می‌آید همان مسایل کتاب باشد. در صورتی که من یادم است در گذشته مسایل هندسه که مطرح می‌شد اصلاً داخل کتاب نبود. یعنی بچه‌ها می‌دانستند که برای یاد گرفتن یا حل کردنش باید کار بیشتری انجام دهند. کتابهای دیگری مطالعه کنند. روی مسایلی که معلمشان تعیین می‌کند فکر بکنند نه اینکه بروند و حل فلان مسئله را حفظ کنند. همچنین تقویت انگیزهٔ خواندن درس هندسه مهم است. مثلاً من یادم است که یک بار در آخر سال، درس کره را می‌گفتم. از بچه‌ها پرسیدم بچه‌ها شما شنیده‌اید که کره زمین دارای چند حرکت است؟ یکی حرکت وضعی بدور خودش و یکی بدور خورشید، یکی هم محورش. الان ستارهٔ شمالی ما ستارهٔ جدی است شاید بعد از ۱۵۰ سال الی ۲۰۰ سال دیگر ستارهٔ دیگری باشد چون در هر ۲۵۶۰۰ سال یک مرتبه محور زمین جابجا می‌شود و حرکتش یک مخروط ایجاد می‌کند. یعنی محور زمین یک مخروط در فضا ایجاد می‌کند. گفتم بچه‌ها می‌دانید که این سرعت حرکت زمین به دور خورشید چقدر است؟ بعضی از حفظ بودند گفتند «می‌دانیم آقا ۳۰ کیلومتر در ثانیه» گفتم میتوانید چنین چیزی را باور کنید گفتند «نه، خیلی مشکل است ما اصلاً چیزی احساس نمی‌کنیم» گفتم می‌توانید این سرعت را حساب کنید؟ گفتند «می‌توانیم (بعضی)» گفتم خوب حالا بیایید فکر بکنید و ببینید می‌توانید حساب کنید، بعضی‌هایشان حول و حوش همین عدد را پیدا کردند یعنی گفتند زمین در مداری به شعاع تقریبی ۱۵۰ میلیون کیلومتری به دور خورشید در حرکت است و در عرض یک سال محیط این دایره را طی می‌کند. بعد محیط دایره‌ای به شعاع ۱۵۰ کیلومتر را پیدا کردند و گفتند که هر نقطه یا هر وضع زمین در هر لحظه، یک سال طول می‌کشد تا یک دور کامل را طی کند. خوب محیط این دایره را بر یک سال شمسی تقسیم می‌کنیم (۳۶۵ شبانه‌روز). آن را به ساعت و ثانیه تبدیل کردند عدد پیدا شد. چقدر خوشحال شدند گفتند «خوب آقا این موضوع حالا برای ما جالب است که فهمیدیم خود ما هم می‌توانیم چنین محاسباتی را انجام بدهیم». معلم در این کار نقش مهمی دارد.

هندسه و مهندس را ببینید چقدر به هم نزدیک هستند. کلمه مهندس هم از هندسه ساخته شده است. خوب مهندسین ما باید قوهٔ خلاقیت و ابتکار داشته باشند و این ابتکار ایجاد نمی‌شود با این کتابها و این روش کار. این ابتکار ایجاد نمی‌شود مگر اینکه معلم واقعاً ایجاد عشق و علاقه و انگیزه در دانش‌آموز کند. یعنی معلم علاوه بر کتاب درسی باید ببیند که به راستی کاربرد اینها کجاهاست؟ قدیم درسی می‌خواندیم بنام هیأت و نجوم. درس خیلی شیرینی بود ولی کتاب خیلی خوب و معتدلی نوشته نشده بود. مشکل بود، تدریس هم مشکل بود. ولی اگر در آینده جهت نوشتن یک کتاب هیأت و نجوم فکر شود و همین مقداری که در کتابهای جغرافیا و یا در کتابهای زیست‌شناسی است به صورت مدوّن و به یک شکل ساده و قابل فهم جمع‌آوری شود این هم یک وسیله‌ای می‌شود برای تقویت انگیزهٔ هندسه در محصلین.

آقای زنگنه:

من از آقای دکتر شهشهانی خواهش می‌کنم که در مورد همان دو سئوال اول که مطرح شد نظرشان را بفرمایند.

آقای شهشهانی:

من در مورد سئوال دوم کوتاه صحبت می‌کنم. در مورد اینکه چه نوع هندسه‌ای باید تدریس شود آیا باید سنتی یا به اصطلاح ترکیبی باشد یا هندسه های مختلف؟

ببینید من به عنوان یک ایدئولوژی همیشه مخالف این هستم که چیزی را محدود کنیم و بگوییم که فقط به دلیل اینکه انسی به یک روش داریم، باید فقط همین روش را تدریس کنیم و دلمان نمی‌خواهد که چیز شیرینی که داریم کنار بگذاریم و هندسهٔ سنتی هم طبعاً این خواص را دارد. من معتقدم که اگر هندسه نسبتاً زود وارد برنامه درسی شود، یعنی از همان دورهٔ راهنمایی، چاره‌ای نیست جز اینکه از روشهای ترکیبی استفاده کنیم و این خیلی خوب است چون جای بسیار مناسبی است. چون قدرت تفکّر و خلاقیت دانش‌آموز را برای کشف راههایی مناسب برای حل مسائل بکار می‌گیرد. تدریجاً وقتی جلوتر می‌رویم من برای

گویا: هندسه همچنان که یک بعد استنتاجی دارد که بسیار قوی و کارا و موثر است، بعد قویترش آنجایی است که به دانش‌آموز الگوسازی یاد می‌دهد. بقول استین، «الگوها کلید شناخت دنیای ما هستند» یعنی ما اگر پدیده‌های طبیعت را نتوانیم مدلسازی کنیم (که هندسه یک ابزار قوی برای این کار است) در واقع شاید به آن اندازه، همانطور که آقای جمالی فرمودند، به کاربردش بها نداده‌ایم و در سطح جامعه اشاعه‌اش نداده‌ایم.

زنگنه: آیا هندسه بیشتر قدرت تعقل و استدلال کردن را آموزش می‌دهد؟ من سئوالم اینست که آیا تابحال دانش‌آموزان ما که درس هندسه می‌گرفتند در دنیای واقعی‌شان وقتی که خارج از درس هندسه می‌شدند، می‌توانستند از این توانائی استدلال هندسی استفاده کنند؟ چطور می‌شود که این توانائی استدلال را به حیطه‌های دیگر ریاضی و علوم و زندگی واقعی تا آنجا که ممکن است منتقل کرد؟

اینکه روشهای تحلیلی را ـ اگر واقعاً بتواند موثر باشد ـ بکار بگیریم مانعی نمی‌بینم. این خیلی مشکل است که وقتی به یک روش عادت داریم و کارساز بوده، آن را کنار بگذاریم. در حالی که در مقابلش یک روش ماشینی که بعضی مسائل را که کلی ابتکار در آن بکار رفته سریعاً حل می‌کند.

ولی این خلاقیت را می‌توان جای دیگری بکار برد. تاریخ تحول علم نشان می‌دهد که نباید زیاد به یک موضوع دل‌بستگی پیدا کنیم. بنابراین اگر بخواهم جمع‌بندی کنم، نظر من این است که در سطح راهنمایی و اول دبیرستان هم شاید بهترین روش همان روش ترکیبی باشد. ولی بعدش هر چه میدان باز باشد و روشهای دیگری هم بتوانند کارساز باشند، هیچ ایرادی ندارد که بکار گرفته شوند.

آقای رستمی:

ببینید کجا هندسه پیشرفت داشت و کجا رکود داشت؟ هندسه قبل از اقلیدس پیشرفت داشت برای اینکه جنبهٔ شهودی و تجربی داشت. اقلیدس کار مهمی انجام داد. تنظیم مطالب، دانسته‌ها، مطالب هندسی‌ای که قبلاً کشف شده بودند. شاید اگر این تنظیم دیرتر انجام می‌گرفت، قضایای بیشتری کشف می‌شد. وقتی یک چیز آماده شد، در یک کاسه بنام هندسهٔ اقلیدسی برای ریاضی‌دانها قرار گرفت. هندسه از شهود و تجربه به تجرید رسید. متأسفانه ۲۰۰۰ سال حکومت کرد بدون آنکه کار خلاّقی در هندسه صورت بگیرد. چرا که علت واضح است. هندسهٔ مجرد و در مواردی، مخصوص طبقه خاص که طبقهٔ خاصی هندسه بخوانند و کار کنند، تا زمان دکارت که هندسه تحلیلی را بنیانگزاری کرد و بعد کم‌کم جستجوها باعث شد که هندسه نااقلیدسی پا به میدان بگذارد و یک مقدار تحولی در هندسه ایجاد شد. در حقیقت باز اگر دقت کنیم، در مرحله‌ای دیگر جنبهٔ تجرید کنار گذاشته شد. البته بعضی کشورها هندسه را حذف و بعضی‌ها اضافه کردند. آن چیزی که تأکید روی آن است، این است که باید روش مشاهده و روش فعال برای یادگیری باشد. پولیا برای یادگیری به سه مرحله اشاره می‌کند که من فقط سرفصلهایش را می‌گویم: یادگیری فعال، ایجاد بهترین انگیزه برای یادگیری و تسلسل مراحل یادگیری که به این ترتیب ما می‌توانیم هندسه‌ای ارائه بدهیم که دانش‌آموز خودش بتواند بهترین روش یاد گرفتن را کشف کند.

آقای زنگنه:

از آقای مشتاقیانپور خواهش می‌کنیم که در این مورد توضیح بفرمایند.

آقای مشتاقیانپور:

این بستگی دارد به این که هدف ما از هندسه چیست! یک وقت است که ما می‌خواهیم ببینیم آیا ساده‌ترین راه برای رسیدن به جواب یک مسأله چیست که البته راه تحلیلی را می‌رویم. ولی یک وقت است که می‌خواهیم خودمان را اغناء کنیم و از راههایی برویم که ببینیم چه چیزی پیدا کرده‌ایم. بارها شده که وقتی مسئله را به ما می‌دهند، دنبال یک نقطه می‌گردیم با یک خاصیت ویژه. برای اینکه ببینیم اصلاً این نقطه وجود دارد یا نه. اول از راه تحلیلی حل می‌کنیم، می‌بینیم که خیلی ساده است و وقتی این نقطه پیدا شد آن وقت بدنبال راه ترکیبی‌اش می‌گردیم و وقتی آن را پیدا کردیم، بیشتر اغناء می‌شویم. یادم می‌آید که چند وقت پیش مسأله‌ای دادم که روی محور xها دو نقطه A و B را داریم، یک نقطه مثل N روی محور yها پیدا کنید که زاویه $\widehat{ANB}$ حداقل باشد. خوب این مسأله را از راه تحلیلی خیلی زود می‌توان حل کرد. ولی از دیدگاه ترکیبی، می‌بینیم که ما باید دنبال یک دایره بگردیم که از این دو نقطهٔ A و B بگذرد و بر محور yها مماس باشد و آن نقطهٔ تماس، جواب ماست. یک وقت است که ما می‌خواهیم در دانشگاهایمان اینها را آماده کنیم که واقعاً مهندس بشوند و جواب چنین مسأله‌هایی را زود پیدا کنند. خوب از هر راهی که دلشان می‌خواهد، بروند و ساده‌ترین راه هم بهتر است. اما یک وقت است ما می‌خواهیم این فرد را تربیت کنیم که فقط هندسه بداند از راه تعقل، این فرق می‌کند. مثل کارهای هنری، یک وقت است که ما فرش می‌خواهیم، خوب فرش ماشینی راحتتر است. ولی یک وقت است که یک نفر سه سال با ظرافت کار می‌کند تا نیم متر از یک فرش را بیافد. خوب مسلم است که این برای بازار صرف نمی‌کند و برای آدمی که این کار را می‌کند روزی ۵ تومان مزد افتاده است. در صورتی که اگر دنبال فرش ماشینی برود، روزی ۵۰۰۰ تومان بدست می‌آورد. پس گاهی اوقات ما دنبال هدفی می‌گردیم که مسایل روزمان حل شود با صرفه اقتصادی. خوب بله در این مواقع راههای ساده را پیدا می‌کنیم. اما گاهی اوقات می‌خواهیم هندسه را به صورتی که هندسه‌دانها خوانده‌اند یاد بدهیم و تربیت کنیم که آن طور تعقل کنند و آن یک مسأله دیگری است و این بستگی دارد به اهدافی که آموزش و پرورش مملکت یا برنامهٔ یک مملکت معلوم می‌کند.

خانم گویا:

بدنبال صحبت آقای مشتاقیانپور، من فکر می‌کنم که در

کل برنامه ریزیهای درسی، ما اول باید ببینیم که چی می‌خواهیم تربیت کنیم. آیا آن انسان والایی که می‌خواهیم تربیت کنیم یعنی انسان آرمانی ما، انسانی خلاق، مولد، تصمیم گیرنده و مسئولیت پذیر باشد! یا هیچکدام اینها نباشد. باید ببینیم که چه می‌خواهیم تربیت کنیم و بعد متناسب با آن به دنبال محتوا بگردیم. یعنی همانطور که آقای دکتر شهشهانی فرمودند، تعصبی نیست روی اینکه این هندسه باشد یا آن هندسه. مهم اینست که از طریق آن به چه نتیجه‌ای می‌خواهیم برسیم. من فکر می‌کنم گاهی وقتها در بحثهای عمومی، این مطلب خدای ناکرده گم می‌شود، علاقه به بعضی قسمتها نباید ملاک انتخاب محتوا باشد. ممکن است یک ریاضیدان از یک مطلب کاملاً مجرد و غیر مفید برای بخش عظیمی از جامعه، بسیار لذت ببرد. هیچ اشکالی ندارد! مثل این که یک انسان به یک نقاشی سورآلیست نگاه می‌کند و ساعتها غرق در آن نقاشی می‌شود و لذت می‌برد. این علاقه دلیل بر این نیست که همهٔ جامعه از نقاشی سورآلیست خوششان بیاید. در حالی که نمی‌توان مانع از لذت بردن این فرد علاقه مند به نقاشی سورآلیست شد! یعنی واقعاً باید ببینیم که در آموزش عمومی، برای عموم چه باید باشد و در آموزش خواص، چه چیزهایی را باید رعایت کنیم. اینکه آقای جمالی راجع به قدیم فرمودند مسأله صحیحی است که ما در جوامع قدیم تنها درصد ناچیزی از افراد جامعه‌مان ریاضی‌خوان می‌شدند اصولاً درصد خیلی ناچیزی آموزش عمومی می‌دیدند و درصد خیلی قلیل‌تری از اینها به ریاضی روی می‌آوردند و باز درصد خیلی نازلتری از اینها به دنبال ریاضی می‌رفتند. طبیعی بود که این تعداد ناچیز، خود نوع ریاضی‌ای را که می‌خواستند به دنبالش بروند، انتخاب کنند. ولی الان بحث بر سر آموزش عمومی افراد جامعه است. خوب در یک چنین وضعی ما وقت این را نداریم که با آزمایش و خطا ببینیم که چه کسی از چه موضوعی خوشش می‌آید. مسأله این است که حداقل آنچه که لازم و مفید است را آموزش بدهیم و بعد به مسألهٔ ذوق فردی بپردازیم. من فقط در اینجا یک جمله از آدامارد می‌خوانم که در رابطه با همان بیانیه‌ای است که آقای نجفی فرمودند، چون ما مرتب در آموزش هندسه روی دقت خیلی تأکید می‌کنیم که هندسه دقت را زیاد می‌کند. این جمله از آدامارد خیلی جالب است که «هدف دقت ریاضی پذیرش و مشروعیت بخشیدن به یافته‌های حاصل از شهود است» و هرگز هدف دیگری برای آن متصوّر نشده است که البته سطح این شهود و دقت متفاوت است. یعنی مسأله سر این است که در آموزش عمومی چه نوع هندسه‌ای را آموزش دهیم. وقتی که دانش‌آموز خودش برای یادگیریش دلیل پیدا می‌کند و با شهودش زمینه سازی برای فهمیدن تجریدش می‌کند، بطور طبیعی خیلی عمیق‌تر یاد می‌گیرد بدلیل اینکه این یادگیری حاصل تلاش خود اوست. سؤال دیگر این است که در مورد هندسه فراکتال توضیح خواسته‌اند.

هندسه فراکتال برای مدلسازی خیلی از پدیده‌های طبیعی بکار برده می‌شود و خیلی از پدیده‌های طبیعی با آن تبیین می‌شوند. در صنعت کاربرد زیادی دارد و جای آن هست که در کتابهای درسی هندسه حضور پیدا کند. بحث اصلی که من داشتم این است که باید ببینیم چگونه انسانی می‌خواهیم تربیت کنیم و به چه هدفی هندسه را به دانش آموزان یاد بدهیم. ما نمی‌توانیم الان از مطالب درسی که ضرورتش در این زمان وجود دارد صرفنظر کنیم و بگوییم انشاءالله بیست سال دیگر آن را می‌گوئیم. بیست سال دیگر خیلی دیر است! الان زمانش است! اگر الان آن چیزهایی را که باید بگوئیم نگوئیم نمی‌توانیم بیست سال دیگر بگوییم. اگر حرف ناگفته را الان می‌گوییم فایده ندارد و بیست سال دیگر اصلاً نباید بگوییم! چون اگر خدای ناکرده حرف را بموقع و در جای خودش نزنیم، آنوقت فاصلهٔ بین ما و دنیایی که با شتاب در حال حرکت است روزبروز بیشتر می‌شود. و در دراز مدت کم کردن این فاصله تقریباً محال خواهد شد! بهرحال، این هندسهٔ فراکتال بخشی از ریاضی است که اخیراً همین چهار پنج سال اخیر در کتابهای درسی کشورهای دیگر وارد شده است. بدلیل استفاده‌ای که دارد و بدلیل ذوق‌آفرینی مشهود و زیبایی که به دانش‌آموز ارائه می‌دهد، برای دانش‌آموزان جذاب است.

آقای زنگنه:

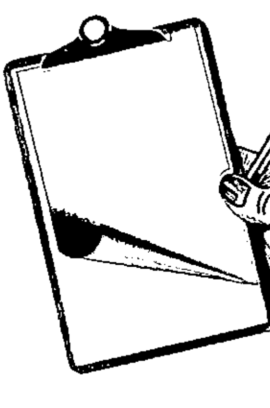
در بحث‌هایی که شد، در واقع با استفاده از سیستم منطقی و اصول موضوعی و آنچه که اقلیدس برای ما آورد، صحبت می‌شود و اینجا در این مورد ما می‌خواهیم بدانیم که هندسه دانها در مورد هندسهٔ اصول موضوعی چه دیدگاهی دارند یعنی هندسه دانهائی که در هندسهٔ دانشگاهی کار می‌کنند. من خواهش می‌کنم که آقای دکتر شهشهانی در این مورد اگر ممکن است توضیح بدهند.

آقای شهشهانی:

الان در سطح دانشگاه یا در سطح دبیرستان، هندسه به صورت اصل موضوعی مطرح نیست چون این روش، کارآمد نیست. برای برخورد به هندسه، وقتی راجع به اصل موضوعی

شهشهانی: من به عنوان یک ایدئولوژی همیشه مخالف این هستم که چیزی را محدود کنیم و بگوییم که فقط به دلیل اینکه انسی به یک روش داریم، باید فقط همین روش را تدریس کنیم و دلمان نمی‌خواهد که چیز شیرینی که داریم کنار بگذاریم و هندسهٔ سنتی هم طبعاً این خواص را دارد.

گویا: بحث اصلی که من داشتم این است که باید ببینیم چگونه انسانی می‌خواهیم تربیت کنیم و به چه هدفی هندسه را به دانش آموزان یاد بدهیم. ما نمی‌توانیم الان از مطالب درسی که ضرورتش در این زمان وجود دارد صرفنظر کنیم و بگوییم انشاءالله بیست سال دیگر آن را می‌گوئیم. بیست سال دیگر خیلی دیر است! الان زمانش است! اگر الان آن چیزهایی را که باید بگوئیم نگوئیم نمی‌توانیم بیست سال دیگر بگوییم.



صحبت می‌کنیم، باید بدانیم که اصل موضوعی به مفهوم امروزی اصلاً معنایش فرق دارد با اصل موضوعی که اقلیدس راجع به آن صحبت می‌کرد و اصل موضوعی به مفهوم اقلیدس چیزی است که ما امروز به آن علم نظری می‌گوییم. سطح اصل موضوعی بودن هندسهٔ زمان اقلیدس به اندازهٔ سطح ریاضی بودن فیزیک نظری امروز است نه به اندازهٔ اصول موضوعی بودن به مفهومی که منطق‌دانها امروزه راجع به آن صحبت می‌کنند. اگر ما بخواهیم به صورت اصل موضوعیِ امروزی به هندسه نگاه کنیم، اصلاً چیزی می‌شود که شما نمی‌توانید آن قدر جلو بروید که به نتایج جالب هندسی برسید. چون هندسهٔ اقلیدسی ما ساختار بسیار پیچیده‌ای دارد (ساختار خطی، ساختار متریک، ساختار پیوستگی) و این به این دلیل است که شما اگر به اصول موضوعی هیلبرت که در مورد تطبیق این اصول موضوعی است نگاه کنید می‌بینید که تعداد زیادی اصل هست. وقتی شما به این همه اصل موضوع برای اینکه موضوعی را بررسی کنید نیاز دارید، می‌توانید تقریباً مطمئن شوید که این روش کارآمدی برای بررسی آن موضوع نمی‌تواند باشد و حتماً یک روش بهتری باید وجود داشته باشد. روش بهتر هم این است (روش کارامدتر) از ساختار مجموعه اعداد حقیقی استفاده کنید و از تمام ساختارهایش بر اساس آنچه که می‌خواهید از هندسهٔ اقلیدسی بفهمید می‌توانید بفهمید. بنابراین من هندسه را برای مطرح کردن تدریس روش اصل موضوعی مناسب نمی‌بینیم خیلی چیزهای ساده‌تر هست. ظاهراً مجردتر ولی واقعاً ساده‌تر که می‌شود آنها را برای یاد دادن اصل موضوعی بکار برد. مثلاً فرضیه‌های متریک یا اصول توپولوژی عمومی خیلی برای تدریس اصل موضوعی مناسب‌تر هستند تا هندسهٔ اقلیدسی که واقعاً علم پیچیده‌ای است.

آقای زنگنه:

ـ سئوالی شده، من می‌خوانم و امیدوارم که همه شرکت‌کنندگان در این میزگرد در موردش صحبت کنند. «در حالِ حاضر عقیدهٔ اغلب برنامه‌ریزان این است که به طور کلی ریاضیات و بطور خاص هندسه همگانی و کاربردی شده. در این قسمت دو سئوال مطرح می‌شود که آیا با این شیوه احتمال نمی‌دهید گروهی از دانش‌آموزان به روش تجریدی یا هندسهٔ محض علاقه‌مند باشند و به هندسهٔ کاربردی علاقه‌مند نباشند. یعنی سئوال این است که اگر عده‌ای از دانش‌آموزان به هندسه محض و سنتی علاقه داشتند و به هندسه کاربردی علاقه نداشتند اینها وضعشان چه می‌شود؟ به اینها ظلم می‌شود یا نه؟ سئوال دوم این است که آیا احتمال نمی‌دهید در آینده ما از لحاظ اثباتها ضعیف شویم و به ریاضیاتِ همگی ما ضربه بخورد؟ من خواهش می‌کنم در این مورد پاسخ بدهید.

خانم گویا:

سئوال خیلی جالبی مطرح شده! چون اگر همیشه قرار باشد فقط به یکی از دو گروه مختلف با دو علاقهٔ مختلف خوراک داده شود، همیشه به آن دسته که خوراک داده نمی‌شود ظلم می‌شود! ولی گاهی اوقات آنهایی که خوراک نمی‌گیرند یک درصد از صد در صد هستند و گاهی اوقات ۹۹٪ هستند! به هر حال باید به این مسأله دقت کنیم. فرمودند که ممکن است به ذهنهایی که تجرید طلبند ظلم شود. من را ببخشید که از این بیانیه دوباره استفاده می‌کنم ولی چون این کنفرانس در مورد آموزش ریاضی است و این بیانیه به نوعی در جهت‌دهی به شاخهٔ آموزش ریاضی به عنوان یک حوزهٔ معرفتی تأثیر گذار بوده است، به این بیانیه ارجاع می‌دهم. این بیانیه را هفتاد و پنج تن از معروفترین ریاضیدانها که اغلب ریاضی کار تجریدی بوده‌اند امضا کرده‌اند. من فکر می‌کنم آنها بیش از همه برای تجرید ریاضی دل سوزانده‌اند چون تمام عمرشان را در این راه گذرانده‌اند! آنها در این زمینه می‌گویند: «معرفی مفاهیم جدید بدون داشتن زمینه قبلی کافی در خصوص حقیقتهای ملموس، معرفی مفاهیم مجرد در زمانی که هنوز تجربه‌ای از تجرید وجود ندارد یا عجله در معرفی مفاهیم بدون کاربردهای ملموسی که می‌توانند دانش‌آموزان را به تحرک فکری و فعالیت وادارند، بدتر از بی‌حاصل بودن آن است» و بعد تأکیدی که این عده دارند و به نظر من بسیار جالب است این است که این گونه تجرید نابهنگام و زودرس اتفاقاً با ذهنهای خلاق و نقّاد مواجه می‌شود، به دلیل اینکه ذهن خلاق و نقّاد است که دلیل می‌خواهد، و دنبال چراهای یک موضوع است. یک ذهن خلّاق اگر دنبال چرای یک موضوع نباشد نمی‌تواند تجریدپذیر و تجریدطلب باشد، مگر در کلام و این گروه در دنباله صحبتهایشان مطلبی دارند که خیلی جالب است: «اجبار و تحمیل نابهنگام سطح بسیار صوری و مجرد ریاضی ممکن است به دلسردی و تنفر از ریاضی مبدل گردد. به علاوه درک دقت ریاضی از طریق مواردی که در آنها اثبات، مشکلات واقعی را حل می‌کند بهتر از زمانی که به موشکافی و چنگ‌زنی نافرجام بر بدیهیات می‌پردازد میسر است.» بهرحال من فقط خواهشم این است که روی این موضوع کمی بیشتر فکر کنیم که تجرید را به چه کسی می‌خواهیم معرفی کنیم و چگونه می‌خواهیم معرفی کنیم و چه هدفی از تجرید

داریم. اگر این فرصت کافی برای پذیرش تجرید را از طریق محسوسات و ملموسات به عموم دانش‌آموزان ندهیم، ممکن است که فقط چند ریاضیدان با سلیقهٔ ویژهٔ تجریدی را تربیت کنیم و از تربیت جامعه دانش‌آموزی غافل بمانیم. بهرحال موضوع، قابل تعمق است.

آقای شهشهانی:

من اصلاً نمی‌دانم صحبت بر سر چیست؟ من تا آنجا که می‌دانم هیچ تمایزی بین هندسهٔ محض و هندسهٔ کاربردی وجود ندارد و ظاهراً این تمایز یک سوءتفاهم است. به همراه این سوءتفاهم گاهی این تصور ایجاد شده که در هندسه کاربردی اصلاً استدلال نمی‌شود و در هندسه محض استدلال می‌شود! اصلاً من چنین تمایزی را سراغ ندارم. بچه‌های دبیرستان یا هر کسی که سئوال می‌کند که آیا اینها کاربرد دارد یا نه باید به آنها بگوییم که این چیزهایی که در دبیرستان یاد می‌گیرید بسیار ابتدایی است و نه تنها همه اینها در زندگی کاربرد دارد، بلکه اصلاً جای بحث ندارد. حتی در سطح اوایل دانشگاه هم نمی‌توانند چنین چیزی را مطرح کنند چه برسد به دبیرستان.

بنابراین جواب این است که مقداری هندسه جزء معرفت ابتدایی هر کسی است و هر کس که می‌گوید من دیپلمه هستم باید اینها را بداند و نگذاریم این سئوالها را کش بدهند. شبیه این سئوالی شده بود که آیا هندسه نااقلیدسی در دبیرستان‌های کشورهای دیگر تدریس می‌شود و در مورد کاربرد آن توضیح بدهید؟

من در مورد دبیرستانهای سایر کشورها نمی‌دانم، ولی دیده بودم که کتابهای کمک‌آموزشی در هندسه هذلولوی در روسیه چاپ شده بود که فقط کافی است مفهوم لگاریتم را دانش‌آموز بداند تا هندسهٔ هذلولوی مطرح شود. در گذشته شاید در دانشگاهها هم این قدر بطور خاص هندسهٔ هذلولوی تدریس نمی‌شد و جزئی از هندسه دیفرانسیل بود. در هندسه دیفرانسیل شما انواع و اقسام هندسه‌ها را تدریس می‌کنید که خیلی از آنها بی‌شک در جاهای مختلف کاربرد دارند. مثلاً تمام فیزیک انرژی بر اساس هندسه‌های مختلف است. الان در دانشگاهها هم در خارج و هم در داخل بیشتر رسم شده که هندسهٔ هذلولوی به عنوان یک هندسهٔ مستقل مطرح شود آن هم بخاطر کاربردهای فراوانی که در داخل ریاضیات دارد.

آقای زنگنه:

سئوالی شده که از آقای مشتاقیانپور خواهش می‌کنم جواب بدهند.

آقای مشتاقیانپور:

«آیا می‌توان گفت که هندسه علم یا هنری است که در طراحی جدید معماری بکار می‌رود، نقطهٔ پیوند علم ریاضیات با هنر است و یا ابزاری است که ریاضیدان می‌تواند به وسیله آن احساسات هنری خود را بیان کند. اگر هندسه به صورت تلفیقی با هنر آموزش داده شود، قطعاً یادگیری بهتری دارد.»

پاسخ باز برمی‌گردد به این که ما چه هدفی داشته باشیم. در زمان قدیم که ابن‌سینا ریاضی می‌خواند دنبال این نبود که از این ریاضی استفاده‌ای ببرد واقعاً برای خودش می‌خواند که چیزی را بفهمد. ولی امروزه هدف این است که ما از این آموخته‌های خودمان نتایجی را بگیریم و بکار ببریم. ولی اگر ما هندسه بدانیم و نتوانیم بکار ببریم چه فایده، من این را می‌توانم بگویم که اگر هنرمندی هندسه بداند بهتر می‌تواند کار کند. اما اگر هندسه بداند و هنر نداند، نمی‌تواند هنر را بکار ببرد. پس ما اول باید انگیزه‌ای به اینها بدهیم تا بتوانند آنرا بکار ببرند. یعنی از هندسه به عنوان هنر یا کار استفاده کنند نه فقط مغز دانش‌آموزان را پُر کنیم از اندوخته‌ها. حالا بعضی‌ها هستند که همانطور که ایشان گفتند درصد ناچیزی از دانش‌آموزان هستند که هندسه را به عنوان یک علم مجرد می‌خواهند یاد بگیرند. خوب این افراد یاد بگیرند ولی ما فکر می‌کنیم امروزه دنیا به شکلی است که نمی‌پسندد که علمی را یاد بگیرید و به درد کسی نخورد، اگرچه سابق بسیاری از علمای ما اغلب درسهایی را که می‌خواندند حتی حاضر نبودند که در یک کتاب بنویسند تا نسل بعد از آن استفاده کند. خیلی‌ها علم خودشان را با خودشان بردند ولی امروزه این‌طور نیست، امروزه انسانها باید از هم استفاده کنند برای زندگی بهتر و بنابراین اگر بتوانند از هندسه استفاده کنند و هندسه را بکار ببرند، اگر هنرمند باشند بهتر است و یا اگر فقط هندسه می‌دانند به این تشویق شوند که بتوانند کاربردی برایش پیدا کنند. ما اگر امروزه بتوانیم به این شکل بچه‌ها را آماده کنیم که از این هندسه یا هر درس دیگر بتوانند استفاده کنند یا هنری به آن اضافه کنند و ارائه بدهند، مسلماً شیرینتر و بهتر و به نفع جامعه است.

آقای زنگنه:

سؤال شده «اینجانب دانشجوی ریاضی محض هستم و می‌خواهم بدانم چرا درس هندسه در دوران دانشگاه کم رونق می‌باشد و به آن صورتی که در دبیرستان وجود دارد در دانشگاه دنبال نمی‌شود؟»

من خواهشم اینست که آقای دکتر شهشهانی در این رابطه اگر ممکن است صحبت بفرمایند. شاید بهتر بود سؤال به این

رستمی: ببینید کجا هندسه پیشرفت داشت و کجا رکود داشت؟ هندسه قبل از اقلیدس پیشرفت داشت برای اینکه جنبهٔ شهودی و تجربی داشت. اقلیدس کار مهمی انجام داد. تنظیم مطالب، دانسته‌ها، مطالب هندسی‌ای که قبلاً کشف شده بودند. شاید اگر این تنظیم دیرتر انجام می‌گرفت، قضایای بیشتری کشف می‌شد. وقتی یک چیز آماده شد، در یک کاسه بنام هندسهٔ اقلیدسی برای ریاضیدانها قرار گرفت. هندسه از شهود و تجربه به تجرید رسید. متأسفانه ۲۰۰۰ سال حکومت کرد بدون آنکه کار خلاقی در هندسه صورت بگیرد.

شهشهانی: برای برخورد به هندسه، وقتی راجع به اصل موضوعی صحبت می‌کنیم، باید بدانیم که اصل موضوعی به مفهوم امروزی اصلاً معنایش فرق دارد با اصل موضوعی که اقلیدس راجع به آن صحبت می‌کرد و اصل موضوعی به مفهوم اقلیدس چیزی است که ما امروز به آن علم نظری می‌گوییم.

شکل مطرح می‌شد که وقتی کسی بعد از اینکه لیسانس ریاضی خود را گرفت و به دبیرستان بازگشت، بیشتر از معلومات دبیرستانی دوران دانش‌آموزی خود می‌تواند در تدریس هندسه استفاده کند و از هندسه‌هایی که در دانشگاه خوانده در دبیرستان استفاده‌ای نمی‌تواند بکند. یعنی ارتباطی بین هندسهٔ دانشگاه و هندسهٔ دبیرستان وجود ندارد. حال سئوال اینست که این مسأله را چطور می‌توان حل کرد؟

آقای شهشهانی:

من فکر می‌کنم در کشور ما، این یک تصادف خاصِ تاریخی در این مقطع است و احتمالاً از بین می‌رود. در این گذری که در سطح دانشگاهی در کشورمان در برنامه‌های ریاضیات انجام گرفته یک زمان ریاضی خیلی کلاسیک و قدیمی بوده بعد وقتی ما به ریاضیات جدید وارد شده‌ایم افراط و تفریطی صورت گرفته است و ما از موضوعات قرن نوزدهم به سوی موضوعات بسیار مجرد رفته‌ایم. می‌توان دقیقتر هم وارد شد و حتی از موضوعات اسم برد که از چه موضوعاتی به چه موضوعاتی رفته‌ایم و در این بین طول می‌کشد تا تعادلی ایجاد شود. رشته‌های مختلف هندسه رشته‌هایی هستند که از یک نظر، به مجردیِ بعضی رشته‌های ریاضی نیستند، چون جنبهٔ ملموسی دارند. در نتیجه طول می‌کشد تا جایشان را پیدا کنند. وقتی که تغییراتی در برنامه ایجاد شود، من تصورم اینست که هندسه تدریجاً جای خود را در دانشگاه باز می‌کند و این که این موضوع مدتی به فراموشی سپرده شده بود، امری است طبیعی. چون ما از دورانی که اصلاً موضوعات مجرد مطرح نبود به طرفی رفتیم که مجردات خیلی مقبول واقع شد و شاید هم در این مورد افراط شد. در نتیجه در این مجردسازی، چیزهایی مثل هندسه که ملموستر بودند کنار گذاشته شدند و حالا ما دوباره می‌خواهیم به یک حالت تعادل برگردیم.

آقای زنگنه:

با تشکر، سئوال بعدی این است که آیا هدف از تدریس هندسه در مقطع دبیرستان اثبات قضایا برای دانش‌آموزان و سپس حفظ کردن آنهاست یا در آموزش هندسه روش بهتری وجود دارد؟ اگر هست بیان کنید.

آقای مشتاقیانپور:

سئوالی اینجا مطرح بود من گفتم که اگر کسی هنرمند باشد و هندسه یاد بگیرد بهتر می‌تواند در هنرش این هندسه را پیاده کند. اما کسانی هم هستند که فقط هندسه می‌دانند، مثلاً ممکن است من هندسه بدانم ولی موارد کاربردش را ندانم. بارها دانش‌آموز سر کلاس می‌پرسد که قضیهٔ بطلمیوس به چکار می‌آید. من نمی‌توانم به او جواب بدهم که کاربردش چیست اما اگر هنرمند باشم فرض کنید قلم‌زن هستم و یاد گرفته‌ام که چند ضلعی‌های منتظم را چطور می‌توان بهتر کشید، خوب مسلم است که این را در هنر خاتم‌سازی، در هنر فرشبافی و در این گونه هنرها بهتر می‌توانم بکار ببرم. یعنی من فکر می‌کنم که اگر هنرمند هندسه را بداند بهتر است از کسی که هندسه را می‌داند ولی هیچ هنری ندارد تا هندسه را در آن بکار ببرد.

خانم گویا:

در اینجا از من سئوالی شده که من فکر می‌کنم جواب دادن به آن مستلزم وقت بسیار است. صحبتهای این میزگرد نیز در این رابطه بود که آیا هدف از تدریس هندسهٔ دبیرستان اثبات قضایا برای دانش‌آموزان و سپس حفظ کردن آنهاست یا در آموزش هندسه روش بهتری وجود دارد؟ اگر هست بیان کنید.

من فکر می‌کنم که قسمت اول را همگی به زبان دل گفتند که حتماً هدف فقط این نیست چرا که اگر تنها هدف یادگیری هندسه این باشد، بسیار کسالت‌بار می‌شود. اما اینکه آیا روش بهتری برای آموزش هندسه وجود دارد، تحقیقات زیادی در رابطه با آموزش هندسه انجام شده است که می‌توان به آنها مراجعه کرد. حاضران پرسیده بودند که آموزش ریاضی در رابطه با هندسهٔ مسطح کشورهای دیگر به چه صورت است؟ هندسه در همهٔ کشورها با مشکل مواجه بوده. یعنی در اواخر دههٔ هشتاد، میزان هندسه در برنامه درسی ریاضی در کشورهای آمریکا و کانادا به ۱۳ درصد رسیده بود. در واقع هندسه کم‌کم داشت از برنامه درسی حذف می‌شد! مقالات بسیار متعدد تحقیقاتی در این زمینه نوشته شده، از جمله یکی از آنها این بود که اصلاً چرا می‌خواهیم هندسه تدریس کنیم و اگر هندسه بناست به این سرنوشت برسد بهتر است، که اصلاً تدریس نشود. به همین منظور از اوایل شروع دههٔ نود میلادی تحقیقات وسیعی در رابطه با نوع هندسه و چگونگی تدریس هندسه در ریاضی مدرسه‌ای انجام شده است. از جمله تحقیقاتی که در این زمینه شد، این بود که دو سال قبل کنگره بین‌المللی تدریس ریاضی (ICMI) که یکی از بخشهای کنگرهٔ بین‌المللی ریاضی (IMU) است به کنگره بین‌المللی آموزش ریاضی (ICME) سفارش تحقیقی در رابطه با آموزش هندسه را داد. عنوان کار تحقیقاتی «دورنمای تدریس هندسه در قرن بیست و یکم بود.» امسال در اسپانیا این گروه کاری، کارشان را ارائه دادند و خوشبختانه نتیجه تحقیقات آنها به صورت یک کتاب هندسه در اواخر سال ۹۶ یا اول سال ۹۷

میلادی چاپ می‌شود. در این کتاب سعی کرده‌اند هندسه‌ای بنویسند که هم بقول دوستان عزیز سبک گرفته نشود! (البته معانی سبک و سنگین جای بحث دارد چون معانی، اعتباری هستند) هم اینکه ماده داشته باشد و به اندازه کافی جامعیت داشته باشد و هم اینکه شروع خوبی را تقویت کند و هم اینکه راهی برای پرورش تجرید بگذارد، از طریق ایجاد خلاقیت و بخصوص با پرداختن به کاربردهای هندسه.

آقای زنگنه:

یکی از سئوالها را می‌خوانم: «همانطور که فرمودید، هندسه درسی است که دانش‌آموز را با منطق آشنا می‌کند ولی متأسفانه اصول اولیه منطق در کتابهای ریاضی نظام جدید همانند نظام قدیم آورده نشده است. آیا برای شروع درس هندسه لازم نیست دانش‌آموز با اصول اولیه و ابتدایی منطق آشنا شود؟» این سئوالی است که هر کدام از شرکت‌کننده‌ها که مایل هستند می‌توانند پاسخ بدهند. از آقای جمالی شروع می‌کنیم.

آقای جمالی:

در قدیم در کتابهای ریاضیات جدید منطق آورده شده بود حالا در کتابهای هندسهٔ جدید نیست البته من معتقدم که اگر یک مقدار مختصری در یکی از کتب درسی آورده شود بسیار بجا و منطقی است.

آقای شهشهانی:

من فکر می‌کنم در کتاب هندسه قطعاً جایش نیست. با منطق به دو صورت می‌توان برخورد کرد: یکی علم منطق است که در واقع علم شناختن تفکر است، یکی منطق به عنوان ابزار کار است یعنی اینکه دقیق فکر کنیم و استدلالهایی ارایه کنیم که مورد قبول بقیه هم باشد و در واقع کسی را قانع کند. این جنبه دوم که در هندسه بکار می‌رود، احتیاجی به آموزش ندارد و لذا این را با علم منطق مخلوط نکنیم. علم منطق جایی در کتاب هندسه ندارد. منطقی که ما در هندسه لازم داریم منطق سنتی است، یعنی اینکه ما بتوانیم دقیق استدلال کنیم و دیگران را قانع کنیم و این هیچ ربطی به علم منطق ندارد.

آقای رستمی:

در مورد این مطلب به نظر من آنچه لازم است باید به دانش‌آموز داده شود. شاید یکی از علت‌های افت تحصیلی یا گریز از ریاضی همین نکته باشد که گاهی مطالبی که به درد دانش‌آموز نمی‌خورد گفته شده و در ذهن انباشته می‌شود و این حالت، زدگی ایجاد می‌کند.

آقای مشتاقیانپور:

تسلسل مطلب باید حفظ شود ولی مجبور نیستیم همهٔ مطالب را بیاوریم و آن مطالبی را که دانش‌آموز می‌پذیرد لازم نیست خیلی اصرار کنیم. مثلاً در یک مثلث همین که بگوییم یک ضلع کوچکتر از مجموع دو ضلع دیگر است و این را به عنوان اصل یا هر چیزی دیگر که بگوئیم، اگر دانش‌آموز پذیرفت زود از آن بگذریم و زیاد روی تعاریف و مطالب معطل نشویم. مثلاً ما نقطه و خط را بعنوان یک تعریف پذیرفته شده می‌گوییم و دانش‌آموز هم قبول می‌کند. مطالبی را که دانش‌آموز می‌پذیرد خیلی اصرار نداشته باشیم که اصولی برایش بگذاریم. البته تسلسل مراتب حفظ شود یعنی از توازی برسیم به کجا و کجا. یعنی قسمتهایی را حذف نکنیم و فقط آنهایی را که احتیاج داریم بگوییم، در اینجا می‌پذیریم. ولی مثلاً قانون بینیت را ما هیچ‌کجا در هندسهٔ سابق به کار نمی‌بردیم و دانش‌آموز هم فوراً قبول می‌کرد ولی در هندسه ۱ که ما زیاد می‌خواستیم با منطق این را بگوییم واقعاً دانش‌آموز و خودمان هر دو مانده بودیم و زیاد هم اگر بخواهیم منطق بقول آقای دکتر شهشهانی بکار ببریم سد راهمان می‌شود پس آنهایی را که دانش‌آموز می‌پذیرد، زود از آن مطالب بگذریم.

خانم گویا:

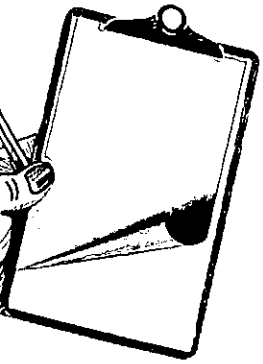
جوهرهٔ تفکر ریاضی را نمی‌توان بوسیله تکرارِ صِرف واژه‌های اختصاصی آن آموزش داد! این حرف را همان هفتاد و پنج نفر ریاضیدان معروف می‌گویند. در راستا و توافق با اصول، ما بسیار مایلیم پیش از معرفی اصطلاحات و مفاهیم جدید، بوسیله ملموسات و محسوسات کافی تمهید مقدمات انجام گرفته باشد و سپس بوسیلهٔ کاربردهای درگیر کنندهٔ واقعی و اصیل، نه به وسیله مواد کم‌مایه و بی‌نکته آن مفاهیم ارائه شود. اگر می‌خواهیم یک نوجوان باهوش را متقاعد کنیم تا آمادهٔ هضم و جذب مفاهیم باشد باید او را متقاعد کنیم که آن مفاهیم نیازمند توجه هستند.

آقای زنگنه:

سئوال شده که «آیا باید اصول همنهشتی را اثبات کنیم یا نباید اثبات کنیم و همین طوری بگوییم، یعنی اصول همنهشتی دو مثلث که به حالتهای مختلف با هم همنهشت هستند را گفته‌اند آیا ما باید این اصول را اثبات کنیم یا همین طوری بپذیریم؟»

آقای مشتاقیانپور:

من معتقدم برای درک این مطلب، دانش‌آموز قبول می‌کند که اگر یکی از سه حالت تساوی دو مثلث برقرار باشد یعنی مثلاً دو ضلع و زاویه بین یک مثلث با دو ضلع و زاویه بین مثلث دیگر



شهشهانی: سطح اصل موضوعی بودن هندسهٔ زمان اقلیدس به اندازهٔ سطح ریاضی بودن فیزیک نظری امروز است نه به اندازهٔ اصول موضوعی بودن به مفهومی که منطق‌دانها امروزه راجع به آن صحبت می‌کنند. اگر ما بخواهیم به صورت اصل موضوعی امروزی به هندسه نگاه کنیم، اصلاً چیزی می‌شود که شما نمی‌توانید آن قدر جلو بروید که به نتایج جالب هندسی برسید.

برابر باشد، این دو مثلث مساویند. این مطلب را بدون اثبات دانش‌آموز می‌پذیرد و اگر بخواهیم این مطلب را اثبات کنیم، همان راه اثبات، درک این مطلب است. یعنی می گوییم دو مثلث را بر هم منطبق کنید و عملاً هر دانش‌آموز خودش این کار را بلد است. من همیشه به دانش‌آموزان می گویم که بچه‌ها همان روشی را که در درس خوانده‌اید بکار ببرید و با عقلتان کار کنید. مثلاً اگر ظهر به منزل رفتید دو مداد را به یک بچهٔ سه ساله بدهید و بپرسید کدام بزرگتر است؟ ببینید که چکار می‌کند؟ فوراً دو مداد را پهلوی هم می‌گذارد و مقایسه می‌کند. هیچ کس هم به او نگفته که این کار را بکند، یاد گرفته است. مثلاً دست بچه را در دست پدرش می‌گذارید می‌گوید که دست پدر بزرگتر است، خودش عملاً اثبات می‌کند. بنابراین اگر این اصول همنهشتی را فقط بگویید هم قبول می‌کند. قبلاً هم گفتم مطالبی را که دانش‌آموز می‌پذیرد زیاد معطلش نکنید. چرا بچه‌های ما از هندسه خسته شده‌اند؟ چون در راهنمایی آنها را خسته می‌کنیم و ما معلمین هم آنها را خسته می‌کنیم و ما شنیده‌ایم که معلمینی هستند که اصلاً هندسهٔ راهنمایی را به دانش‌آموز درس نمی‌دهند. ما با این دانش‌آموزان در دبیرستان راحتتر برخورد می‌کنیم! زیرا وقتی دانش‌آموز به دبیرستان می‌آید، هندسه را به روشهایی به او یاد داده‌اند که ما می‌گوییم آن هندسه را کاملاً کنار بگذارید و دانش‌آموز می‌گوید اگر خوب بوده چرا به کار من نمی‌آید و اگر بد بوده اصلاً چرا به من یاد داده‌اند! بیایید واقعاً بچه‌ها را خسته نکنیم. او خیلی ساده قبول می‌کند که اگر دو ضلع و زاویه بین از یک مثلث با دو ضلع و زاویه بین از مثلث دیگر با هم برابر باشد دو مثلث برابرند و وقتی قبول کرد، فوراً از آن بگذریم.

آقای شهشهانی:

سئوال شده «در گذشته درسی بنام هندسه ترسیمی و درسی بنام رسم فنی تدریس می‌شد و شاهد بودیم کسانی که این درسها را می‌خواندند بعد از ورود به دانشگاه چقدر در درسهای تخیلی و مدلسازی به ویژه در روشهای فنی موفق بوده‌اند و پس از حذف این درسها شاهد ضعف دانشجویان در زمینهٔ مورد اشاره هستیم. به راستی چه به جایش گذاشته‌ایم؟ نظر شما چیست؟»

من فکر می‌کنم که چند فرض غلط اینجا هست. یکی اینکه دانشجویان هم‌اکنون در زمینه‌های تخیل و مدلسازی در روشهای فنی ضعیف‌ترند! من فکر می‌کنم که آنها الان خیلی قویترند. پس از نظر من سئوال مردود است.

دوم اینکه هندسهٔ ترسیمی به نظر من (من خودم در دوره‌ای بودم که این درس تدریس می‌شد، آقای بیرشک هم درس را تدریس می‌کردند و دیگر کسی بهتر از ایشان هم نمی‌توانست درس بدهد.) درس ملال‌آور و بیخودی بود. یعنی هیچی نبود! تنها چیزی که در آن جالب بود این که چند قرارداد را می‌بایست یاد می‌گرفتیم و خارج از آن یک سری ترسیمات را در هندسهٔ فضایی بلد بودیم یا بلد نبودیم. در واقع تکرار هندسهٔ فضایی کلاس ۱۱ بود و من خوشحالم که این درس حذف شد. فکر می‌کنم که هم‌اکنون دانشجویان دانشگاه، هم در رشته‌های فنی و هم در رشته‌های ریاضی خیلی بهتر از گذشته هستند.

شهشهانی: من تا آنجا که می‌دانم هیچ تمایزی بین هندسهٔ محض و هندسهٔ کاربردی وجود ندارد و ظاهراً این تمایز یک سوءتفاهم است. به همراه این سوءتفاهم گاهی این تصور ایجاد شده که در هندسه کاربردی اصلاً استدلال نمی‌شود و در هندسه محض استدلال می‌شود! اصلاً من چنین تمایزی را سراغ ندارم.

آقای زنگنه:

آقای جمالی هم اگر مطلبی دارند بفرمایند

آقای جمالی:

من نظرم دقیقاً مخالف نظر جناب دکتر (شهشهانی) است. چون مهندسین محترمی که در سالهای قبل، مثلاً سی و پنج سال قبل محصل من بودند وقتی همدیگر را ملاقات می‌کنیم، می‌گویند عجیب است که درس مهندس‌سازی را حذف کردند و چرا این کار را کردند. در این واقعاً شکی نیست که خواندن درس ترسیمی رقومی و رسم فنی تقویت خیلی مؤثری در قدرت تجسّم و تصورّ محصلین داشت و بنظر من یکی از علل حذف این درس نداشتن معلم ورزیده بود. البته درس مشکلی بود اما اگر محصلین قبلاً تدارک می‌دیدند و هندسهٔ مسطحه و فضایی را خیلی خوب یاد می‌گرفتند، یکی از کاربردهای هندسه مسطحه و هندسه فضایی همین هندسه رقومی است و من بسیار از حذف این درس متأسفم و امیدوارم که این درس دوباره متداول شود.

آقای مشتاقیانپور:

من هم مثل آقای جمالی مدت بیست سال هندسهٔ ترسیمی و رقومی را درس می‌دادم. درست است که بیشتر کاربرد هندسهٔ مسطحه و فضایی در هندسهٔ ترسیمی رقومی است، ولی امروزه با آمدن کامپیوتر و ساختن خود شکل در فضا، فکر می‌کنم احتیاجی به این درس نباشد. ما اگر محصلین سال چهارم ریاضی را تعدادشان را حساب کنیم درصد کمی از دانش‌آموزان سال چهارم ریاضی بودند که مهندس می‌شدند امّا همهٔ این دانش‌آموزان را درگیر این دو درس می‌کردیم. بنابراین امروزه آنهایی که به این درس احتیاج دارند، هر مدلی که بخواهند را کامپیوتر برایشان می‌سازد. ما این درسها را می‌خواندیم برای اینکه بتوانیم بکار ببریم. امروزه هر جسمی مثلاً تمام برشهایی را که شما بنظرتان نمی‌رسید را فوراً کامپیوتر می‌سازد. بنابراین من فکر می‌کنم که ما دانش‌آموزان را اذیت می‌کردیم و درصد کمی بودند که اینها بدردشان می‌خورد.

خانم گویا:

من هم بدنبال صحبتهای آقای مشتاقیانپور وقتی که صحبت از هندسه ترسیمی و رقومی شد یاد خط کش محاسبه افتادم. اگر خط کش محاسبه رابرمی‌داشتیم و هیچ چیزی به جایش نمی‌گذاشتیم بد بود و بالاخره باید چیزی را به جای آن می‌گذاشتیم. ولی الان با وجود ماشین حسابهای جدید دیگر نیازی به آن نیست. من نمی گویم که دست هر دانش‌آموز یکی از این ماشین حسابها بدهیم. بلکه من می گویم وقتی یک چنین وسیله‌هایی هست، آیا جایی دارد که ما یک درس یک‌واحدی برای آموزش خط کش محاسبه را بگذاریم؟ بنابراین، مسئله این است که ابزارهای بسیار قویتری هستند که کارآیی آنها چندین و چند برابر ترسیمی و رقومی قبلی است. به اضافه این که دانش‌آموز در محیط ماشین حساب و کامپیوتر فعال می شود یعنی یک تعامل دوطرفه بین ماشین و انسان برقرار است و رابطه یک طرفه نیست. این تعامل را حیف است در نظر نگیریم. مثلاً کار با کامپیوتر همان‌طور که آقای مشتاقیانپور فرمودند، علاوه بر اینکه تجسم فضایی را بسیار قوی می کند توانایی حدسیه‌سازی و فرضیه‌سازی و دیدن افق را به دانش‌آموز می‌دهد و اگر آن افق را نبینیم قدمی نمی‌توانیم برداریم! یعنی علاوه بر اینکه توانا می‌شویم تا قدم برداریم، می‌توانیم برنامه‌ریزی برای افقهای وسیعتر بکنیم. بهرحال با حضور تکنولوژی با این قدرت و سهولتی که در اختیار تمام جوامع بشری قرار گرفته، مطمئناً ما زمانی نداریم که به خاطر علاقه و زیبایی به هر موضوعی، به آن موضوع بپردازیم. مجبوریم بهینه‌سازی را پیش بگیریم و زمان و امکانات را بهینه کنیم و اگر این کار را نکنیم، می‌بازیم! هیچ تعارفی هم ندارد.

آقای زنگنه:

سئوال آخری که اینجا مطرح می‌شود این است: «ما خیلی از درسهایی را که در دبیرستان تدریس می‌کنیم به این دلیل است که اگر افراد به دانشگاه رفتند، پیش‌نیازهای لازم برای درسهای دانشگاهی را داشته باشند. آقای دکتر زارع نهندی اینجا تشریف دارند، ایشان هندسهٔ جبری درس می‌دهند. من از آقای دکتر شهشهانی خواهش می‌کنم که بفرمایند در دبیرستان چه مطالبی از هندسه تدریس شود که فهمیدن هندسهٔ دانشگاهی تسهیل شود.»

آقای شهشهانی:

من فکر می‌کنم که همین مطالبی که حالا تدریس می‌شود خوب است. همین هندسهٔ ترکیبی هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی، همه زمینهٔ خوبی است برای دانشگاه. ولی اجازه بدهید که من یک کلمه اضافه کنم راجع به سالهای قبل و آن اینکه تصوری هست که اشاره کرده‌اند فرش ماشینی. واقعاً اینطور نیست که ما مسائلی را که از نظر زیباشناختی خیلی بالا هستند را بخاطر اینکه کاربرد ندارند کنار بگذاریم. مسائل تازه‌ای هست که همانقدر زیبا و بلکه زیباتر هم هست که باید در جایش روی آنها کار شود. مضامینی که مطرح است دائماً عوض می‌شوند. خیلی مسائل هست که کشف شده و با آن‌ها انس گرفته‌ایم و مشکل است که آنها را کنار بگذاریم. ولی باور کنید که مسائلی هست که به همان اندازه و یا بیشتر زیباست و می‌تواند جایگزین شود، در ضمن اینکه پیشرفتی هم حاصل می‌شود. یادم هست که وقتی من دبستان یا حتی اوایل دبیرستان بودم، پدر من خیلی نارحت بود که چرا به این زودی جبر را به ما یاد می‌دهند. چون می گفت یاد دادن این جبر باعث می‌شود که شما قوهٔ استدلالتان را بکار نگیرید. در مسائل مدلسازی، این یک نگرانی کاملاً غلط و مردود است. همان‌طور کسانی که می‌گویند، ماشین حساب باعث می‌شود که بچه‌ها فکر نکنند اشتباه می‌کنند. ما فقط فکر را در جای مناسبتری بکار می‌اندازیم. این یک پدیدهٔ اجتناب‌ناپذیر پیشرفت است. وقتی پیشرفت حاصل می‌شود که خیلی از مسائلی که ما باید فکر زیادی را برایش مصرف کنیم، دیگر لازم نباشد وقت مصرف کنیم. این کار را ماشین انجام می‌دهد و ما فکرمان را جاهای بهتر بکار می‌اندازیم. خیلی ممنون.

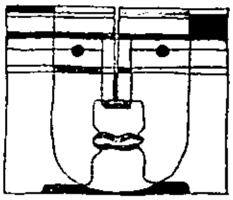
آقای رجالی:

سئوالی مطرح شده که «چنانچه می‌دانید در چند سال اخیر در المپیادهای ریاضی بین‌المللی در قسمت هندسه مقامهای اول یا دوم را بدست آورده‌ایم، چه لزومی دارد که کتابهای درسی دگرگون شود.» من یک مطلب کلی را می‌خواهم بگویم که نتایج المپیادهای ریاضی هیچ ربطی به بدنهٔ اصلی ریاضی یک کشور ندارد. آن یک مورد جدا است و بافت آموزش ریاضی کشور است که باید ارزیابی شود و نتیجه گیری کنیم که آیا بدنهٔ آموزش ریاضی کشور خوب است یا نه؟

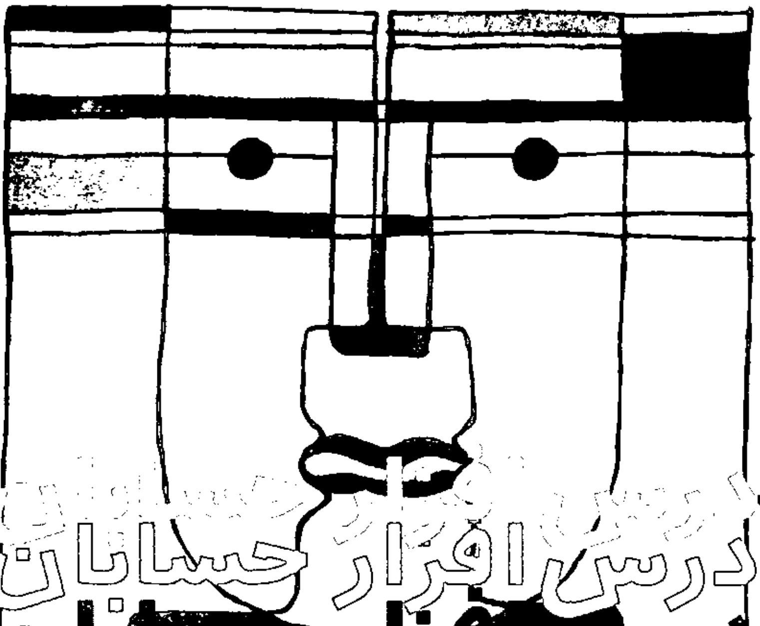
متأسفانه اخیراً احساسات غرورآمیزی در مورد مسابقات ریاضی در سطح جامعه مطرح است که این ما را به اشتباه می‌کشاند و فکر می‌کنیم که ما همهٔ کتابهایمان کامل است، چون حالا یک نفر یا دو نفر رتبه‌هایی را کسب کرده‌اند. این موضوع نباید هیچ‌وقت ما را اغفال کند و ما باید به بدنهٔ آموزش ریاضیمان بیشتر توجه کنیم. خیلی متشکرم از حضار محترم که حوصله کردند.

رجالی:

متأسفانه اخیراً احساسات غرورآمیزی در مورد مسابقات ریاضی در سطح جامعه مطرح است که این ما را به اشتباه می‌کشاند و فکر می‌کنیم که ما همهٔ کتابهایمان کامل است، چون حالا یک نفر یا دو نفر رتبه‌هایی را کسب کرده‌اند. این موضوع نباید هیچ‌وقت ما را اغفال کند و ما باید به بدنهٔ آموزش ریاضیمان بیشتر توجه کنیم.

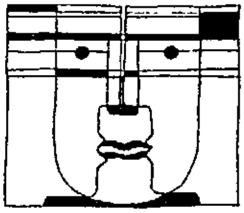


قسمت دوم



درس افزار حسابان

فرانک پهلوانی-یحیی تابش
دانشگاه صنعتی شریف



یادداشت

این درس‌افزار به مناسبت برگزاری دومین کنفرانس آموزش ریاضی ایران با مساعدت معاونت پژوهشی دانشگاه صنعتی شریف تهیه شد و در اختیار شرکت‌کنندگان در این کنفرانس قرار گرفت.

۱. حد توابع

از جمله مفاهیمی که با استفاده از عملکرد گرافیکی این نرم‌افزار به‌طور شهودی قابل بررسی است مفهوم حد می‌باشد. برای آشنایی با نحوهٔ کاربرد آن حدود زیر را به‌طور تقریبی محاسبه می‌کنیم.

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{7x}$

ب) $\lim\limits_{x\to 1}\sin\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$

ج) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$

حل الف)

با وارد کردن عبارت sin(3x) / (7x) در دستور Author و سپس انتخاب دستور Plot نمودار تابع به‌صورت زیر در صفحهٔ کامپیوتر ظاهر می‌شود.

کلید A

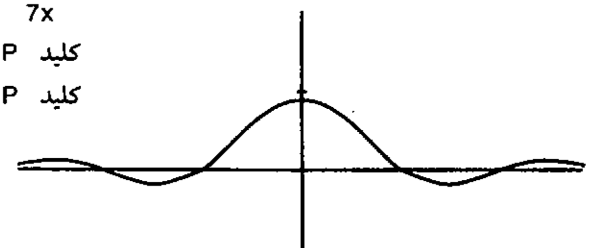
AUTHOR expression: sin (3x)/(7x)

کلید Enter

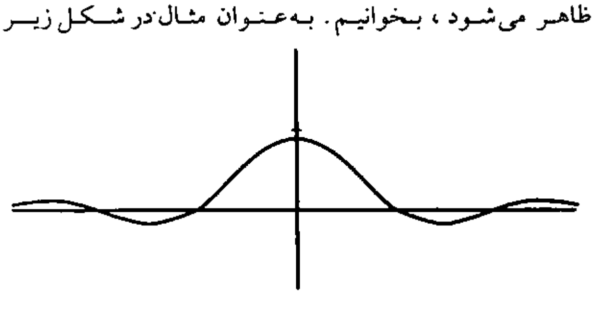
$\dfrac{\sin 3x}{7x}$

کلید P

کلید P



با توجه به اینکه به مقدار تابع در نزدیکی نقطهٔ $x = 0$ یعنی جائی که نمودار به محور yها نزدیک می‌شود، علاقه‌مندیم کافی است نشانگر کامپیوتر را به روی نمودار نزدیکی محور yها حرکت داده و مقدار تابع را که جلوی کلمهٔ Cross به ازای مقادیر کوچک x ظاهر می‌شود، بخوانیم. به‌عنوان مثال در شکل زیر



نشانگر کامپیوتر در محل فوق مقدار تابع را ۰٫۳۹۰۶ نشان می‌دهد. به همین ترتیب مقدار تابع به ازای مقادیر مثبت و منفی x که در جداول زیر می‌بینید.

x	-۰٫۵	-۰٫۴	-۰٫۳	-۰٫۲	-۰٫۱	-۰٫۰۱
f(x)	-۰٫۲۸	-۰٫۳۲	-۰٫۳۵	-۰٫۴	-۰٫۴۲	-۰٫۴۲۱۸

x	۰٫۵	۰٫۴	۰٫۳	۰٫۲	۰٫۱	۰٫۰۱
f(x)	۰٫۲۸	۰٫۳۲	۰٫۳۵	۰٫۴	۰٫۴۲	۰٫۴۲۱۸

نشان می‌دهند که حد تابع وقتی x به صفر نزدیک می‌شود به طور تقریبی ۰٫۴۲۱۸ می‌باشد. محاسبهٔ دقیق مقدار حد فوق را می‌توانید از طریق دستور Limit به نحوهٔ زیر نیز انجام دهید.

کلید A

AUTHOR expression: Lim(Sin(3x)/(7x), x, 0)

کلید Enter

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{7x}$$

کلید S

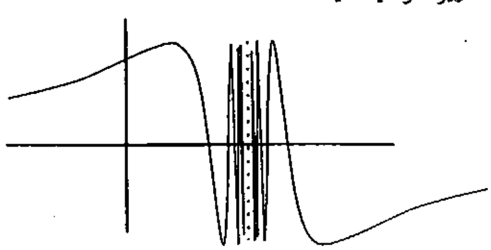
SIMPLIFY expression: #1

کلید Enter

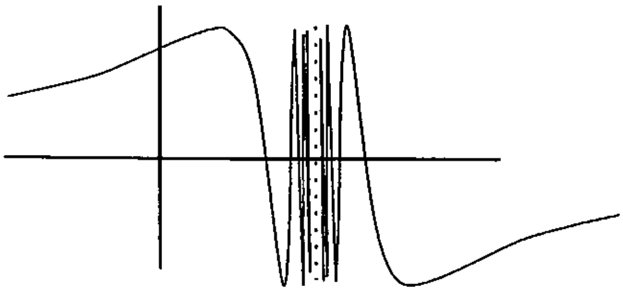
2: $\frac{3}{7}$

حل ب)

با Plot کردن عبارت sin (۱/(۱-x)) نمودار تابع فوق را به صورت زیر خواهید دید.



که با Zoom کردن نمودار فوق نسبت به هر دو محور برای بهتر دیدن رفتار تابع در نزدیکی نقطهٔ x = ۱ نمودار زیر را خواهیم داشت:



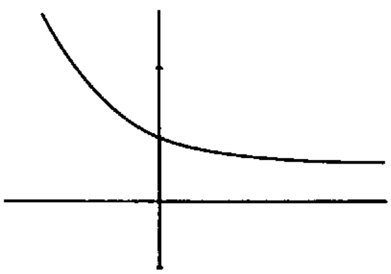
همانطور که در شکل ۴.۲ مشاهده می‌کنید به ازای xهای حول نقطهٔ x = ۱ مقدار تابع بین ۱ و ۱- در نوسان است که نشان دهندهٔ عدم وجود حد در نقطهٔ مزبور می‌باشد.

حل ج)

پس از Plot کردن عبارت

sqrt (x^2 + x + 1) − x ($\sqrt{x^2+x+1} - x$)

با توجه به این که رفتار تابع به ازای مقادیر بزرگ x موردنظر می‌باشد، می‌توانید با استفاده از زیر دستور Center قسمت سمت راست نمودار را ملاحظه کنید.



که با حرکت نشانگر کامپیوتر بر روی نمودار به ازای مقادیر بزرگ x در جدول زیر:

x	۰٫۵	۰٫۴	۰٫۳	۰٫۲	۰٫۱	۰٫۰۱
f(x)	۰٫۲۸	۰٫۳۲	۰٫۳۵	۰٫۴	۰٫۴۲	۰٫۴۲۱۸

به راحتی دیده می‌شود که مقدار تابع به سمت ۰٫۵ نزدیک شده و چنانچه از دستور Limit استفاده کنید مقدار حد فوق $\frac{۱}{۲}$ ظاهر می‌شود.

بررسی تعریف حد به کمک ε − δ

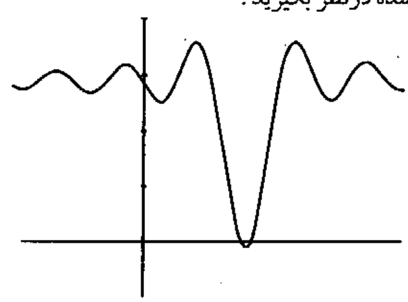
اگر $\lim_{x\to a} f(x) = l$ یعنی برای هر ε > ۰ باید بتوانیم δ > ۰ ای پیدا کنیم که $|f(x) - l| < \varepsilon$ برای $0 < |x-a| < \delta$ پیدا کردن δ برای هر ε

مفروض نیز به کمک Derive امکان‌پذیر است. در این رابطه به مثال زیر توجه کنید.

برای حد $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\pi-x}=3$ مقادیر δ را طوری تعیین می‌کنیم که

اگر $0<|x-\pi|<\delta$ آنگاه $\left|\frac{\sin 3x}{\pi-x}-3\right|<0/1$ باشد.

حل: نمودار تابع $\left|\frac{\sin 3x}{\pi-x}-3\right|-0/1$ که در زیر با استفاده از دستور Plot رسم شده درنظر بگیرید.



پیدا کردن مقادیر δ با استفاده از نمودار فوق به این معنی است که می‌خواهیم بزرگترین بازهٔ ممکن حول $x=\pi$ را پیدا کنیم. بطوریکه به ازای xهای واقع در آن، نمودار تابع فوق زیر محور xها قرار گیرد. لذا در این مسئله δ های کوچکتر از ۰/۱ برای ما کار خواهند کرد.

تمرین

۱ـ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}$

ب) $\lim\limits_{x\to 0}\left((x^3+x^2+1)^{\frac{1}{3}}-x\right)$

د) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{|x^2-1|}$

۲ـ مقادیر δ را طوری بیابید که اگر $0<|x+1|<\delta$ آنگاه $\left|\frac{2x^4-2x^3+x-1}{x^3+7x-8}-\frac{3}{10}\right|<0/1$ گردد.

۳ـ نامعادلهٔ $\left|\frac{3x^2+1}{x^2+2}-3\right|<0/1$ را حل کنید.

۱. مشتق و کاربردهای آن

در این قسمت با محاسبه مشتق کاربردهایش از طریق نرم‌افزار Derive آشنا می‌شویم. در مثال زیر طریقهٔ محاسبهٔ مشتق یک تابع در نقطه‌ای معین را با استفاده از تعریف به روشهای متفاوت می‌بینیم. برای این منظور مشتق تابع $f(x)=\cos x$ را در نقطهٔ $x=2$ به دو راه محاسبه می‌کنیم:

راه اول: مطابق تعریف مشتق

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(2+h)-\cos 2}{h}$$

پس با توجه به مطالبی که در قسمتهای پیش دیدیم چنانچه عبارت $(\cos(2+h)-\cos 2)/h$ را وارد دستور Author کنید با انتخاب زیر دستور Limit از دستور Calculus نسبت به متغیر h وقتی که به سمت صفر نزدیک می‌شود حد فوق که همان مقدار مشتق تابع در نقطهٔ $x=2$ می‌باشد برابر ۰/۹ـ حاصل می‌شود.

راه دوم: مشتق تابع فوق در نقطهٔ $x=2$ بطریق زیر نیز قابل محاسبه است:

کلید A

AUTHOR expression: cos x

کلید Enter

کلید C

کلید D

$1: \frac{d}{dx}\cos x$

کلید S

$2: -\sin x$

کلید A

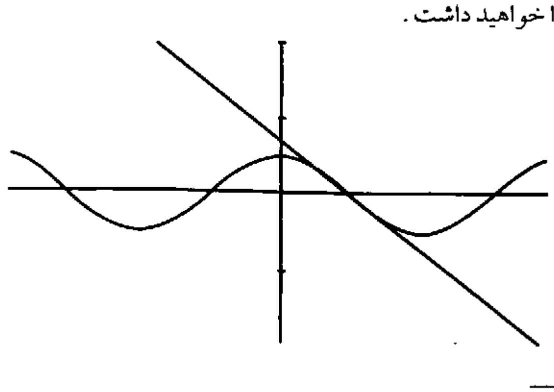
AUTHOR expression: -sin 2

کلید Enter

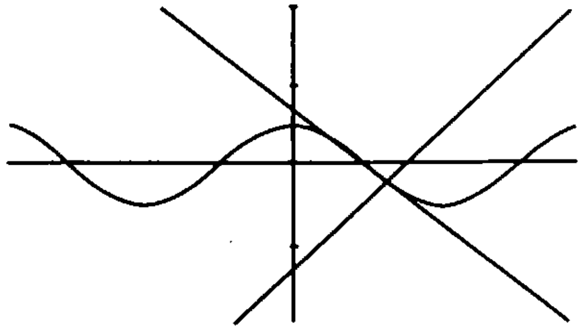
کلید S

3 : - 0.9

چنانچه مایل باشید مشتق تابع f در نقطهٔ $x=2$ را بعنوان شیب خط مماس بر این نقطه مشاهده کنید. کافی است نمودار cos x و خط $(2-x)\sin 2+\cos 2$ را در یک صفحه Plot کنید. به این ترتیب شکل زیر را خواهید داشت.



با Plot خط $\cos ۲ + (x-۲)\frac{۱}{\sin ۲}$ در همین صفحه خط قائم بر نمودار $\cos x$ در نقطهٔ $x = ۲$ را به صورت زیر ملاحظه می‌کنید.



کاربردهای مشتق در زمینهٔ تعیین فواصلی که تابع صعودی یا نزولی است، تعیین نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی، جهت تقعر و نقطهٔ عطف تابع می‌باشد که در این رابطه با حل مثالهای زیر طرز استفادهٔ نرم‌افزار Derive را در موارد فوق می‌بینید.

توابع زیر را درنظر می‌گیریم و موارد فوق را برای آنها بررسی می‌کنیم:

الف) $f(x) = ۲\sqrt{x^۴ + ۱} - ۲x^۲ + x$

ب) $f(x) = ۳x^۵ + x^۳$

حل الف)

محاسبهٔ مشتق مرتبهٔ اول تابع فوق همانطور که می‌دانید بطریق زیر انجام می‌گیرد.

C کلید

D کلید

CALCULUS DEFFERENTIATE expression:
2 sqrt(x^4 + 1) - 2x^2 + x

Enter کلید

CALCULUS DIFFERENTIATE variable: x

Enter کلید

CALCULUS DIFFERENTIATE: order:1

Enter کلید

$1: \frac{d}{dx}(2\sqrt{(x^4+1)} - 2x^2 + x)$

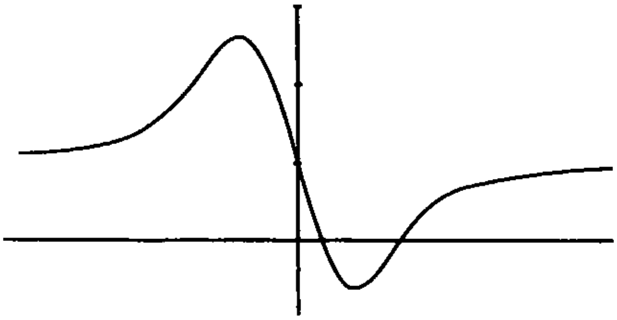
S کلید

SIMPLIFY expression: #1

Enter کلید

$2: \frac{(4x-1)\sqrt{(x^4+1)} - 4x^3}{\sqrt{(x^4+1)}}$

حال اگر عبارت Simplify شدهٔ مشتق را وارد دستور Author کرده و آن را Plot کنید شکل زیر را در صفحهٔ کامپیوتر خواهید دید.



به این ترتیب شکلی که پیش روی شماست نمودار مشتق تابع f می‌باشد. با توجه به این‌که تابع f در فواصلی که مشتق مثبت باشد صعودی است همانطور که در شکل دیده می‌شود نمودار فوق در فواصل $(-\infty, ۰/۲۸)$ و $(۱/۱, \infty)$ بالای محور xها واقع بوده و در نتیجه تابع f در این فواصل صعودی است. چنانچه به صفرهای نمودار فوق توجه کنید از آنجایی که در نقطهٔ $x = ۰/۲۸$ مشتق از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد پس f در این نقطه دارای ماکزیمم نسبی و در نقطهٔ $x = ۱/۱$ با توجه به این‌که مشتق از منفی به مثبت تغییر علامت می‌دهد دارای می‌نیمم نسبی می‌باشد.

حل ب)

برای تعیین جهت تقعر و نقطهٔ عطف تابع فوق با محاسبهٔ مشتق دوم به صورت زیر

A کلید

AUTHOR expression: Dif(3x^5 + x^3, x, 2)

Enter کلید

$1: \left[\frac{d}{dx}\right]^2 (3x^5 + x^3)$

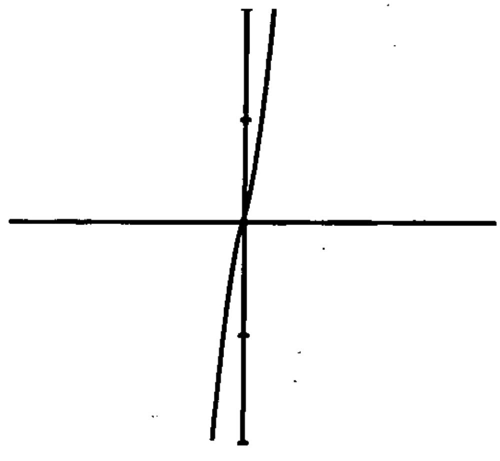
S کلید

SIMPLIFY exprssion: #1

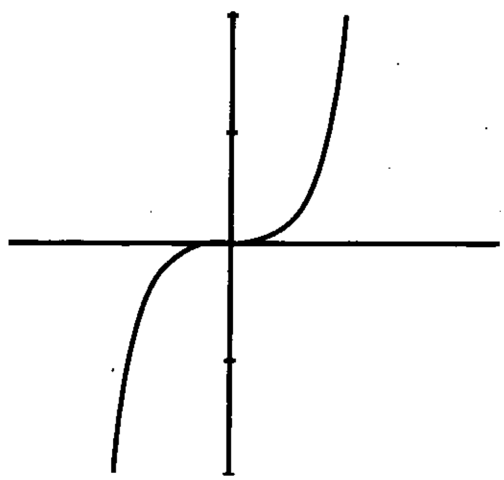
Enter کلید

$2: 60x^3 + 6x$

و سپس Plot آن شکل زیر حاصل می‌شود.



با توجه به این‌که در فاصلهٔ $(-\infty,0)$ مقدار مشتق دوم منفی است تابع تقعر روبه پائین و در فاصلهٔ $(0,+\infty)$ تقعر روبه بالا داشته و از آنجایی که در نقطهٔ $(0\,,\,0)$ مشتق دوم تغییر علامت می‌دهد نقطهٔ فوق، نقطهٔ عطف تابع می‌باشد. نتایج به‌دست آمده در مورد تابع فوق را می‌توانید با Plot آن در شکل زیر ملاحظه کنید.



تمرین

۱ ـ مشتق توابع زیر را در نقاط داده شده به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\sqrt{1+x^2} \qquad x=2$

ب) $g(x)=|x^2-\cos x|-x \qquad x=0$

ج) $h(x)=x^6-x^4 \qquad x=0$

۲ ـ نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی هریک از توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=x^3-x^2+1$

ب) $g(x)=x^3-\sin x$

ج) $h(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^4+x+1}$

۳ ـ بررسی کنید تابع $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$ در چه فواصلی صعودی و در چه فواصلی نزولی است.

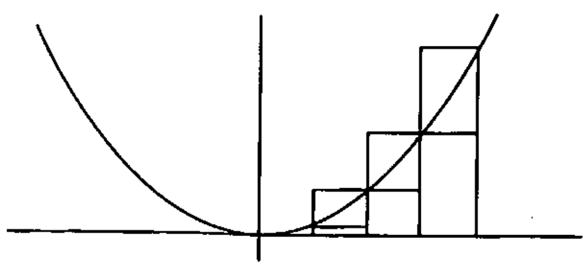
۴ ـ تعیین کنید توابع زیر در چه فواصلی تقعر روبه پائین و در چه فواصلی تقعر روبه بالا دارند.

الف) $f(x)=\sqrt{x}-\sin x$

ب) $g(x)=\dfrac{x}{1+x^6}$

۴. انتگرال و کاربردهای آن

در این قسمت ابتدا با مفهوم انتگرال و روش تخمین مقدار انتگرال معین توابع و سپس موارد کاربردی آن به کمک نرم‌افزار فوق آشنا می‌شویم. همانطور که می‌دانید منظور از انتگرال یک تابع $f(x)\geq 0$ در بازهٔ $[a,b]$ مساحت سطح زیر نمودار تابع در این بازه می‌باشد به طور طبیعی برای محاسبهٔ آن کافی است سطح را با مستطیلهایی بپوشانیم و مجموع مساحتهای این مستطیلها را حساب کنیم. بدیهی است که به این ترتیب مانند شکلهای زیر یا قسمتی از سطح باقی می‌ماند و یا مجبور می‌شویم سطح بیشتری را بپوشانی



در این روش در واقع بازهٔ $[a,b]$ را به بازه‌های $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},x_n]$ که در آن

$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$

تقسیم می‌کنیم و اگرچه لزومی ندارد که فاصله‌های x_i-x_{i-1} مساوی باشند ولی برای سادگی معمولاً آنها را مساوی می‌گیریم.

در این صورت برای هر $i=1,2,3,\ldots,n$ داریم:

$x_i - x_{i-1} = \Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ و مجموعهای زیر

$$f(a)\Delta x + f(a+\Delta x)\Delta x + \cdots + f(a+(n-1)\Delta x)\Delta x =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(a+i\Delta x)\Delta x$$

$$f(a+\Delta x)\Delta x + f(a+2\Delta x)\Delta x + \cdots + f(a+n\Delta x)\Delta x =$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(a+i\Delta x)\Delta x$$

مجموع مساحت مستطیلهایی که در شکلهای ۱.۴ مشاهده کردیم به ترتیب با تقریبهای نقصانی یا اضافی می‌باشند. بنابراین اگر تابع f در بازهٔ [a,b] صعودی باشد رابطهٔ

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(a+i\Delta x)\Delta x \le \int_a^b f(x)dx \le \sum_{i=1}^{n} f(a+i\Delta x)\Delta x$$

برقرار بوده و در صورتیکه f در بازهٔ [a,b] نزولی باشد عکس رابطهٔ فوق برقرار است و واضح است که با افزایش n مقدار مجموعها به هم نزدیک شده و به یک عدد میل کرده و تخمین بهتری برای مقدار انتگرال بدست می‌دهند. به عنوان مثال به ازای ۱۰ = n و ۱۰۰ = n حدود انتگرال $\int_1^3 \frac{1}{1+x^3}dx$ را تخمین می‌زنیم.

حل:

برای محاسبهٔ مجموعها به ازای ۱۰ = n از دستور Sum به طریق زیر استفاده می‌کنیم.

کلید A

AUTHOR expression:

Sum((1/(1+(1+0.2 i)^3))0.2, i, 0, 9)

کلید Enter

$$1:\sum_{i=0}^{9}\frac{1}{1+(1+0.2i)^3}0.2$$

کلید S

SIMPLIFY expression: #1

کلید Enter

0.367617

کلید A

AUTHOR expression:

Sum((1/(1+(1+0.2i)^3))0.2, i, 1, 10)

کلید Enter

$$1:\sum_{i=0}^{10}\frac{1}{1+(1+0.2i)^3}0.2$$

کلید S

SIMPLIFY expression: #1

کلید Enter

0.27476

با توجه به این که تابع $\frac{1}{1+x^3}$ در بازهٔ [۱,۳] نزولی است

$0.27476 \le \int_1^3 \frac{1}{1+x^3} \le 0.367617$ می‌باشد و چنانچه بطریق مشابه به ازای ۱۰۰ = n حدود انتگرال را محاسبه کنیم رابطهٔ

$0.314180 \le \int_1^3 \frac{1}{1+x^3} \le 0.323466$ را به‌دست می‌آوریم. که البته محاسبهٔ مقدار دقیق انتگرال از طریق زیر دستور Integrate دستور Calculus درستی روابط فوق را تصدیق می‌کند.

مقدار انتگرال فوق از طریق دستور Integrate که به صورت زیر محاسبه می‌شود.

کلید C

کلید I

CALCULUS INTEGRATE expression:

1/1+x^3

کلید Enter

CALCULUS INTEGRATE variable: x

کلید Enter

CALCULUS INTEGRATE: Lower Limit: 1 upper Limit: 3

کلید Enter

$$1:\int_1^3 \frac{1}{1+x^3}dx$$

کلید S

SIMPLIFY expression: #1

کلید Enter

2 : 0.318799

از آنجایی که $0.27476 < 0.318799 < 0.367617$ و $0.314180 < 0.318799 < 0.323466$ مؤید روابطی که دیدیم می‌باشد.

با توجه به این که وقتی $n \to \infty$ مجموعهای نقصانی و اضافی به یک مقدار مشترک میل می‌کنند می‌توان مقدار انتگرال را به صورت زیر نیز تعریف کرد:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(a+i\Delta x)\Delta x$$

یـا

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(a+i\Delta x)\Delta x$$

با استفاده از نرم‌افزار فوق می‌توان ویژگیهای انتگرال معین را نیز بررسی نـمود به‌عـنوان مثال در زیر نشـان می‌دهیم کـه اگـر $f(x) = x^2 + 1$ آنگاه

$$\int_0^1 k(x^2+1)dx = k\int_0^1 (x^2+1)dx$$

برای نشان دادن درستی رابطهٔ فوق به‌طور مستقیم از زیر دسـتـور Integrate استفاده می‌کنیم و با محاسبهٔ هر یک از انتگرالها تساوی آنها را نتیجه می‌گیریم. مقدار انتگرال طرف چپ تساوی را به‌ترتیب زیر داریم:

C کـلـیـد

I کلید

CALCULUS INTEGRATE expression: K(x^2+1)

Enter کلید

CALCULUS INTEGRATE variable: x

Enter کـلـیـد

CALCULUS INTEGRATE: Lower Limit: 0

upper Limit: 1

Enter کلید

$1: \int_0^1 (kx^2+1)dx$

S کـلـیـد

SIMPLIFY expression: #1

Enter کـلـیـد

$2: \dfrac{4k}{3}$

برای تعیین مقدار سمت راست ابتدا به طریق زیر مقدار انتگـرال را بدست می‌آوریم.

C کـلـیـد

I کلید

CALCULUS INTEGRATE expression: x^2+1

Enter کلید

CALCULUS INTEGRATE variable: x

Enter کـلـیـد

CALCULUS INTEGRATE: Lower Limit: 0

upper Limit: 1

Enter کلید

$1: \int_0^1 (x^2+1)dx$

S کـلـیـد

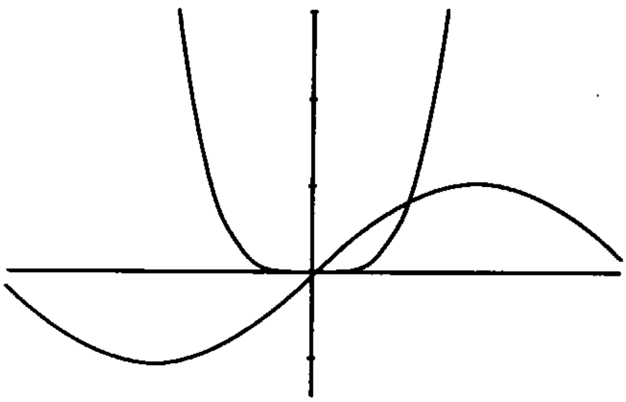
SIMPLIFY expression: #1

$2: \dfrac{4}{3}$

همانطور که می‌بینید مقدار به‌دست آمده مؤید درستی رابطهٔ موردنظر می‌باشد.

در ادامه کاربرد انتگرال را در محاسبهٔ سطح بین دو منحنی sinx و x^4 می‌بینیم.

چنانچه نمودارهای sinx و x^4 را در یک صفحه Plot کنید شکل زیر را در صفحهٔ کامپیوتر ملاحظه می‌کنید.



بـا قـرار دادن نـشـانگر کـامپیوتر در نـقـاطـی کـه نـمـودارهـا یـکـدیـگر را قطع نـموده‌اند مـخـتـصـات نـقـاط فوق بـه تـرتـیـب زیر مشخص می‌شوند.

(۰, ۰)،(۰٫۹۴, ۰/۸۱)

که با توجه به این‌که نـمودار تـابع sinx بالای نمـودار تـابـع x^4 قرار گرفته کافی است انتگرال $\int_0^{0.94}(\sin x - x^4)dx$ را محاسبه نمائید. که مقدار آن به‌ترتیب زیر مساوی ۰٫۲۶۳۴ بدست می‌آید.

A کـلـیـد

AUTHOR expression:

INT(sinx − x^4, x, 0, 0.94)

Enter کـلـیـد

$1: \int_0^{0.94} (\sin x - x^4)dx$

S کلید

SIMPLIFY expression: #1

Enter کلید

2 : 0.2634

تمرین

۱ ـ مقادیر انتگرالهای زیر را به ازای $n = ۱۰$ و $n = ۱۰۰$ تخمین بزنید.

الف) $\int_۰^۱ \sin(x^۲)\, dx$

ب) $\int_۰^۵ \frac{۱ + x^۲}{۱ + x} dx$

ج) $\int_۰^۲ (x^۴ - x^۳) dx$

۲ ـ اگر $f(x) = x^۲ - \cos x + ۱$ و $g(x) = x^۲$ نشان دهید.

الف) $\int_۰^۲ f(x)dx = \int_۰^۱ f(x)dx + \int_۱^۲ f(x)dx$

ب) $\int_۰^۱ g(x)dx \le \int_۰^۱ f(x)dx$

۳ ـ سطح بین منحنیهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $f(x) = -x^۲ + ۱ \quad , \quad g(x) = x$

ب) $f(x) = \sqrt{۱ + x^۴} \quad , \quad g(x) = ۲\cos x$

۵. توابع نمایی و لگاریتمی

در این قسمت با کمک نرم‌افزار Derive با تابع لگاریتم از طریق انتگرال آشنا می‌شویم سپس تابع نمایی را به‌عنوان معکوس تابع لگاریتم معرفی می‌کنیم.

چنانچه تابع لگاریتم $\ln x$ را به‌عنوان $\int_۱^x \frac{dt}{t}$ تعریف کنید می‌توانید برای مثال $\ln ۲ = \int_۱^۲ \frac{dt}{t}$ را بااستفاده‌از مطالبی که‌تاکنون دیده‌ایدمحاسبه نمائید.

اگر بازهٔ بستهٔ $[۱ , ۲]$ را به n بازهٔ $[x_۰, x_۱], [x_۱, x_۲], \dots, [x_{n-۱}, x_n]$ افراز کنیم. داریم:

$$x_۰ = ۱ < x_۱ = ۱ + \frac{۱}{n} < \cdots < x_i = ۱ + \frac{i}{n} < \cdots < x_n = ۲$$

پس:

$$\ln ۲ = \int_۱^۲ \frac{dt}{t} = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{۱ + \frac{i}{n}}$$

که با کمک نرم‌افزار Derive بطریق زیر مقدار آن مساوی ۰/۶۹۳۱۴۷ بدست می‌آید.

A کلید

AUTHOR expression:

\frac{1}{n} \Sum(1/(1+i/n), i, 1, n)

Enter کلید

$1: \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{1+\frac{i}{n}}$

C کلید

L کلید

CALCULUS LIMIT expression: #1

Enter کلید

CALCULUS LIMIT variable: n

Enter کلید

CALCULUS LIMIT Point: inf

Enter کلید

$2 : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{i}{n}}$

S کلید

SIMPLIFY expression: # 2

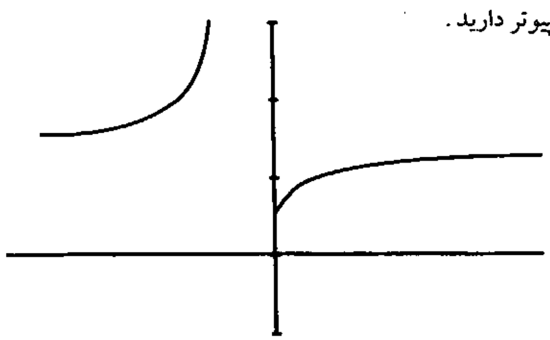
Enter کلید

2: 0.693147

حال به‌عنوان نکته‌ای دیگر نشان می‌دهیم که:

$$\lim_{n\to\infty} (۱ + \frac{۱}{n})^n = e$$

همانطور که در مبحث توابع دیدیم کافی است نمودار تابع $(۱ + \frac{۱}{n})^n$ را در صفحه Plot کنید. به این ترتیب نمودار زیر را در صفحه کامپیوتر دارید.

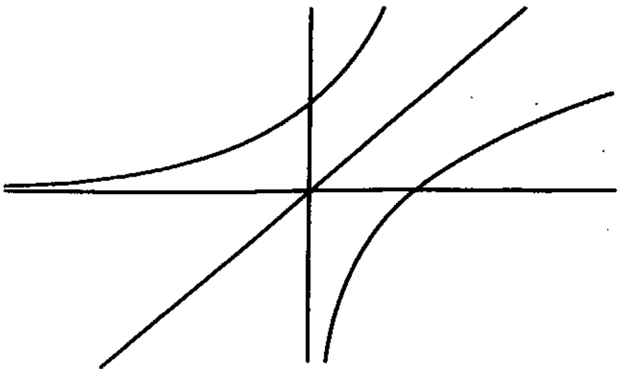


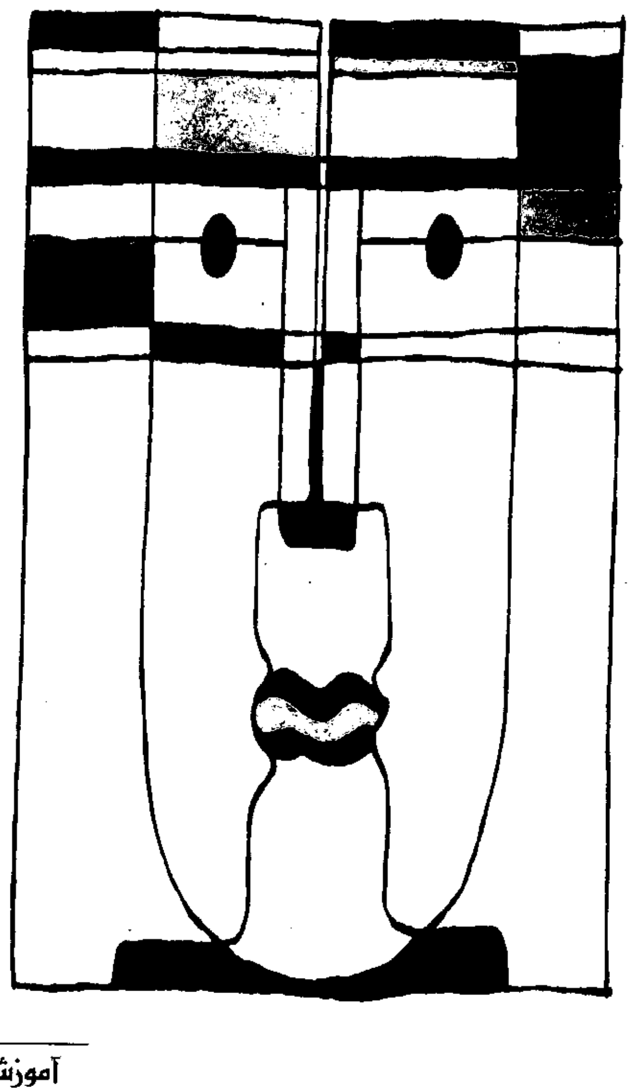
حال با حرکت نشانگر کامپیوتر بر روی نمودار تابع به ازای مقادیر مختلف n مقادیر تابع را که در جدول زیر تنظیم شده است، ملاحظه می‌کنید:

x	۳۰	۵۰	۱۰۰	۱۰۰۰
f(x)	۲٫۶۵۶	۲٫۶۵۶	۲٫۶۵۶	۲٫۶۵۶

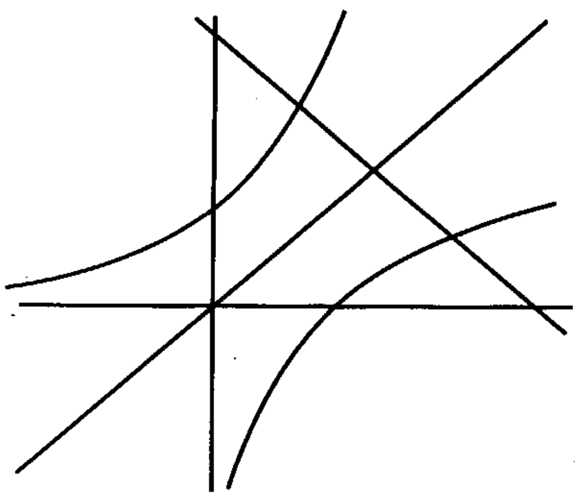
که مقدار تابع به عدد e نزدیک می‌شود.

در ادامه نشان می‌دهیم که دو تابع e^x و lnx وارون یکدیگرند. برای این منظور ابتدا دو تابع فوق را در یک صفحه Plot می‌کنیم و از آنجایی که نمودارهای دو تابع که وارون یکدیگرند نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه‌اند پس خط $y = x$ را نیز در همان صفحه رسم نموده و شکل زیر را خواهیم دید.





در هر نقطهٔ $(x_\circ, \ln x_\circ)$ بر روی نمودار تابع lnx چنانچه خط $-(x - x_\circ) + \ln x_\circ$ را ترسیم کنید خط فوق نمودار تابع e^x را در نقطهٔ $(\ln x_\circ, x_\circ)$ قطع می‌کند. برای مثال خط $-(x - 2) + \ln 2$ را که از نقطهٔ $(2, \ln 2)$ روی نمودار تابع lnx می‌گذرد در صفحه Plot کرده و شکل زیر را در مقابل خود خواهید داشت.

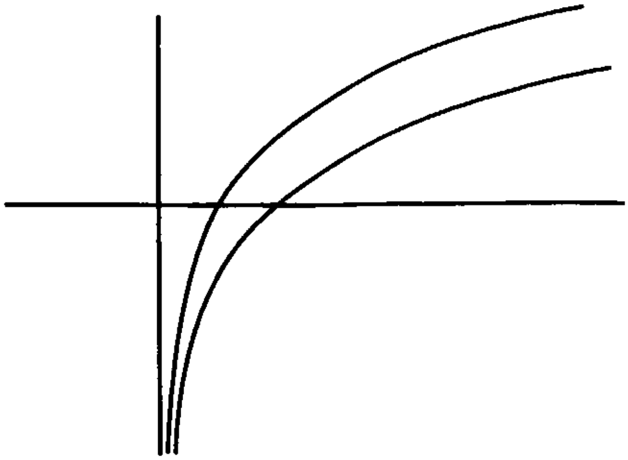


همانطور که می‌بینید مختصات نقطهٔ تقاطع خط فوق با نمودار تابع e^x عبارتست از $(0{,}6944 , 2)$ که با توجه به این‌که $\ln 2 = 0/6944$ قرینهٔ نقطهٔ $(2, \ln 2)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم می‌باشد.

به کمک نرم‌افزار فوق برخی از خواص توابع نمایی و لگاریتمی نیز قابل بررسی هستند. برای مثال نشان می‌دهیم

$$\ln(2x) = \ln x + \ln 2$$

حل: نمودارهای $\ln(2x)$ و lnx را در یک صفحه Plot کنید.



به ازای $x = 1$ با حرکت نشانگر کامپیوتر بر روی نمودارهای دو تابع می‌بینید که $\ln 2 = 0/69$ و $\ln 1 = 0$ می‌باشد. حال چنانچه تابع $\ln x + \ln 2$ را نیز در همین صفحه Plot کنید باز همان شکل ۴.۵ را در صفحهٔ کامپیوتر خواهید داشت که نشان می‌دهد نمودارهای دو تابع $\ln x + \ln 2$ و $\ln 2x$ بر هم منطبقند.

یکی از مسائلی که در آنها توابع لگاریتمی و نمائی ظاهر می‌شوند مسائل معروف به رشد و زوال هستند. در اینگونه مسائل با توجه به نام آنها اگر $f(t)$ نمایانگر میزان پارامتر رو به رشد یا زوال موردنظر در لحظهٔ t باشد، می‌دانیم که آهنگ تغییر پارامتر موردنظر در لحظهٔ t، $f'(t)$ بوده و عددی حقیقی چون k موجود است بطوریکه $f'(t) = kf(t)$ می‌باشد. حال اگر طرفین رابطه را بر $f(t)$ تقسیم کرده و انتگرال بگیریم، داریم: $\ln f(t) = kt + c$ (که با درنظر گرفتن $t = 0$) $c = \ln f(0)$ به‌دست می‌آید. پس می‌توان گفت $\ln f(t) - \ln f(0) = kt$ و یا $\ln \frac{f(t)}{f(0)} = kt$ که با اثر دادن تابع نمائی بر دو طرف رابطهٔ اخیر جواب معادلهٔ $f'(t) = kf(t)$ به‌صورت سادهٔ $f(t) - f(0)e^{kt}$ قابل نمایش می‌باشد. به‌عنوان مثال جمعیت یکی از پارامترهایی است که رشد یا زوال آن مورد توجه می‌باشد در سال ۱۳۵۵ و ۱۳۶۵ جمعیت ایران به ترتیب ۳۳۷۰۸۷۴۴ و ۴۹۴۴۵۰۱۰ نفر سرشماری شده است که با توجه به رابطهٔ $f(t) = f(0)e^{kt}$ چنانچه مبنای رشد جمعیت را از سال ۱۳۵۵ درنظر بگیرید برای به‌دست آوردن نرخ افزایش جمعیت کافی است معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$49445010 = 33708744e^{10k}$$

با حل معادلهٔ فوق با استفاده از نرم‌افزار Derive به طریق زیر نرخ افزایش جمعیت مساوی ۰/۰۳۸۳۱۰۳ به‌دست می‌آید.

کلید L

SOLVE expression:

33708744 exp(10k)=49445010

Enter کلید

SOLVE: Lower: -10 Upper: 10

Enter کلید

1: k = 0.0383103

تمرین

۱ ـ نشان دهید

$$\lim_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}} = e$$

۲ ـ حدهای زیر را پیدا کنید.

الف) $\lim_{x\to 0} \ln(x+1)$

ب) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$

ج) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

د) $\lim_{x\to \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^x$

۳ ـ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\ln(e^x + 2) = 7$

ب) $\ln(x+1) + \ln(x-2) = 1$

۴ ـ درستی روابط زیر را نشان دهید.

الف) $e^{x+1} = e \times e^x$

ب) $\ln(x^2) = 2\ln x$

ج) $\ln \frac{x}{2} = \ln x - \ln 2$

۵ ـ با توجه به این که نرخ افزایش رشد جمعیت ایران بر مبنای سال ۱۳۵۵ برابر ۰/۰۳۸ به‌دست آمد جمعیت ایران را در سالهای ۱۳۷۰ و ۱۳۷۵ تخمین بزنید.

روایت معلمان

به دلیل اهمیت نقش معلم، برنامه‌های آموزش معلمان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مجله درنظر دارد که این مهم را به‌عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطهٔ نزدیکتری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به‌وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلّم می‌جوشد، بپردازند. آنگاه نظریه‌ها به عمل درمی آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند همچنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایتهای خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیّت تجربه‌ای خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آنها بپردازند.

مهدی مدغم - دبیر ریاضی

نمی‌دانم چطور شد که از میان کاغذهای باطله ورقه‌ای توجّهم را جلب کرد. بارم و نمرهٔ ۱۱/۵ پای ورقه که با قرمز نوشته شده بود نشان می‌داد که ورقهٔ امتحانی است. ص ۳ بالای صفحه و شمارهٔ ۲۴ در مقابل آخرین سؤال نشان می‌داد که امتحان شامل ۲۴ سؤال بوده است که طی ۳ صفحه به دانش‌آموزان ارائه شده است. بررسی اجمالی کربنهای موجود در کاغذ حاکی بود که این امتحان در همین سالهای اخیر برگزار شده است! پاسخ دانش‌آموز به دو تا از این سؤالها مرا به یاد خاطره‌ای انداخت که بعد برایتان نقل می‌کنم. پرسشها، و عملیاتی که وی برای به دست آوردن پاسخ انجام داده است دقیقاً به صورت زیر است.

۱۹ـ پروانه ۹۷۰ ریال بابت خرید ۵ جلد کتاب پرداخت. او برای خرید ۳۴ جلد از همان کتاب چند ریال باید بپردازد؟

```
۹۷۰ |۵
۵    ۱۹
——
۴۷
۴۵
——
۰۲
۳۴×۲=۶۸
```

۲۳ـ وزن یک سطل با ماست ۳/۷۵۰ کیلوگرم است اگر وزن سطل خالی ۵۰۰ گرم باشد وزن ماست چند کیلوگرم است؟

```
  ۹ ۱   ۹ ۱
۵ ۰ ۰ / ۰ ۰ ۰
      ۳ / ۷ ۵ ۰
—————
۵ ۹ ۷ / ۲ ۵ ۰
```

پیش از داوری به یک خاطره از زمانی که در اصفهان آموزگار دبستان بودم توجه کنید.

تازه معلوم شده بود که در امتحانات متفرقه سال سوم دبیرستان (سیکل اول) موفق شده‌ام که مرا به آموزگاری کلاس دوم یک دبستان ملی پذیرفتند. چند روزی نگذشت که به آموزگاری کلاس چهارم ارتقا یافتم. این خاطره مربوط به تدریس حساب در این کلاس است.

روزی از یکی از دانش‌آموزان خواستم که پای تخته برود و مسأله‌ای را حل کند. صورت مسأله را دقیقاً به خاطر ندارم اما تقریباً شبیه بود به:

شخصی ۲/۷۵ متر پارچه خرید از قرار متری ۲۲ ریال و ۲/۶ متر پارچه از نوعی دیگر از قرار متری ۴۵ ریال. ۲۰۰ ریال به پارچه‌فروش داد. چقدر باید از او پس بگیرد؟

او ساکت ایستاده بود و به من نگاه می‌کرد. معلوم بود که این مسأله را نمی‌تواند حل کند. به ناچار از کل مسأله صرف‌نظر و تنها یک قسمت آن را مطرح کردم. «قیمت ۲/۶ متر پارچهٔ متری ۴۵ ریال چقدر می‌شود؟»

باز هم ساکت بود. به او گفتم بنشیند و این وظیفه را به دیگری محول کردم. به این ترتیب موضوع حلّ این مسأله در اینجا تمام شد. در حالی که با خود فکر می‌کردم که با این درس مشکل و این گونه دانش‌آموزان چه می‌توان کرد. چگونه به کسانی که مسأله‌ای به این سادگی را نمی‌توانند حل کنند، مسائل پیچیدهٔ حساب را می‌توان آموخت؟

یک روز از خیابان شیخ‌بهایی می‌گذشتم. همان دانش‌آموز را تنها پشت ترازوی یک مغازهٔ میوه‌فروشی دیدم. مغازهٔ دو دهنهٔ بزرگی بود. تعجب کردم که چطور مغازهٔ به این بزرگی را به این بچه که نمی‌تواند قیمت ۲/۶ متر پارچهٔ متری ۴۵ ریال را حساب کند سپرده‌اند.

یک یا دو روز بعد در دبستان او را صدا زدم و از او پرسیدم

ـ در مغازه میوه فروشی چه کار داشتی؟

ـ وقتی مدرسه تعطیل می‌شود می‌روم مغازهٔ پدرم

ـ چیزی هم می‌فروشی؟

ـ بله.

ـ اگر یک مشتری دو تا هندوانه بگذارد تو ترازو که از یک من و صد و پنجاه، پنج‌نار کم باشد چقدر باید بده؟ (این هم دقیقاً همان سؤالی نیست که آن زمان مطرح کردم.)

ـ شانزده ریال و نیم.

آن روزها برای وزن واحد «من» به کار می‌رفت و اجزای من. در اصفهان یک من تقریباً شش کیلو بود. یک چهارم من را صد درم، یک هشتم من را پنجاه، یک شانزدهمش را بیست و پنج و نصف بیست و پنج را ده نار می‌گفتند.

شاید کمی طول کشید تا من پیش خود حساب کردم و متوجه شدم جواب او درست است. محاسبه‌ای که او در ذهن انجام داد، اگر می‌خواست در ورقهٔ امتحانی بنویسد صرف‌نظر از تقسیمهای فرعی، جمع و تفریقی به صورت زیر بود.

۱۲ + ۳ + ۱/۵ − ۰/۱۸۷۵ =

۱۶/۳۱۲۵ ≃ ۱۶/۵

پس نه ریاضیات درس مشکلی است و نه دانش‌آموز بی‌استعداد و دیرفهم. او مسائلی را که در دنیای واقعی با آن روبه‌رو می‌شد به آسانی حل می‌کرد. تنها از حل مسائلی که در دنیای خیالی مطرح می‌شد ناتوان بود. من و این کلاس و این برنامه نتوانسته بودیم در ذهن وی ارتباطی بین این دو به وجود آوریم.

پس نه ریاضیات درس مشکلی است و نه دانش‌آموز بی‌استعداد و دیرفهم. او مسائلی را که در دنیای واقعی با آن روبه‌رو می‌شد به آسانی حل می‌کرد. تنها از حل مسائلی که در دنیای خیالی مطرح می‌شد ناتوان بود. من و این کلاس و این برنامه نتوانسته بودیم در ذهن وی ارتباطی بین این دو به وجود آوریم.

گاهی تلاش می‌کردم به نحوی این ارتباط را برقرار کنم اما خیلی زود متوجه می‌شدم که دارم از وظیفه‌ای که به عهده‌ام گذاشته‌اند دور می‌شوم. وظیفهٔ من آن است که دانش‌آموزان را برای امتحان آماده کنم! اگر کمی از این وظیفه عدول کنم دانش‌آموزان در امتحان بازده خوبی نخواهند داشت! سالها بعد که در دبیرستان تدریس می‌کردم و با دانش‌آموزانی سروکار داشتم که می‌توانستند حرفشان را بزنند، وقتی کمی به مسائل عملی و کاربردی می‌پرداختم، حتی بعضی از دانش‌آموزان خوب کلاس که در ردیفهای جلو نشسته بودند مؤدبانه می‌پرسیدند «آقا از این سؤالها توی امتحان میاد؟» و به این ترتیب مرا متوجه می‌ساختند که از گلیم خود پا را فراتر گذاشته‌ام! به ناچار باز می‌گشتم و به توضیح مسائلی می‌پرداختم که در امتحان می‌آید؟!

چرا در بیرون مدرسه فکر بچه‌ها به کار می‌افتد، با مسائلی که روبه‌رو می‌شوند می‌سنجند و اگر با عقلشان جور نیاید آن را رد می‌کنند ولی در درون مدرسه جوابهای هر چند نسنجیده را می‌پذیرند؟ مگر نه این است که دانش‌آموز باید در مدرسه اندیشیدن را بیاموزد؟

به مسألهٔ ماست با ظرف و بی‌ظرف توجه کنید. چرا دانش‌آموز فکر نمی‌کند که وقتی ماست با ظرف ۳/۷۵۰ کیلوگرم یعنی از ۴ کیلوگرم کمتر باشد وزن خود ماست باید از این مقدار کمتر باشد نه از ۵۰۰ کیلوگرم بیشتر!

پاسخ به حل مسألهٔ ۱۹ نیز نشان می‌دهد که حل‌کنندهٔ مسأله می‌دانسته (احتمالاً حفظ کرده) است که ابتدا بهای کتابها را باید در تعداد آنها تقسیم کرد تا بهای یک کتاب به دست آید و سپس حاصل این تقسیم را در تعداد کتابهایی که بعداً لازم بوده است ضرب کند، ولی نمی‌دانسته است که حاصل تقسیم یعنی خارج قسمت، نه باقیمانده. هر دو مسأله نشان می‌دهد که ممتَحن راه حل مسأله را حفظ کرده و درکی از کاری که انجام می‌دهد نداشته است. اینجا هم فکر نکرده است که بهای ۳۴ جلد کتاب از بهای ۵ جلد از همان کتاب باید بیشتر باشد نه کمتر.

تصور می‌کنم وضع ریاضیات در دبیرستان بهتر از این نباشد. یکی از سروران ارجمند در مقاله‌ای جالب و مستدل مشکلات تدریس هندسهٔ اقلیدسی را برشمرده‌اند و با توجه به واقعیتهایی که آمار نشان داده است دیودونه در سال ۱۹۵۹ همهٔ کاسه و کوزه‌ها را بر سر اقلیدس شکسته و نتیجه گرفت که اقلیدس باید برود! کشف و ادعای من این است که در هر جای این مقاله اگر کلمهٔ هندسه را پاک کنیم و به جای آن نام یک درس دیگر ریاضی (یا غیر ریاضی) را قرار دهیم با تغییری مختصر مقاله‌ای به دست می‌آید که به همان اندازه جالب و مستدل است. مثلاً ایشان نوشته‌اند.

... به طور خلاصه می‌توان مشکلات آموزش درس هندسه در صد سال اخیر در ایران را به این ترتیب برشمرد:

تأکید بر آموزش هندسه از یک دیدگاه

· عدم ارتباط هندسه با دنیای واقعی؛

عدم ارتباط هندسه با دیگر درسهای ریاضی؛

دیدگاه مجرد و سنتی در تدریس هندسه؛

قرار دادن نام درسهای دیگر به جای هندسه و تحقیق درستی این ادعا را به خواننده وامی گذارم.

اگر درستی این ادعا محقق شود و به علتهای بالا اقلیدس باید برود، فکر می کنم به همین علتها و یا به علتهایی مشابه خوارزمی و نیوتون و لایبنیتز و... هم باید بروند!

همان طور که ایشان اشاره فرموده‌اند مرسوم بود در هندسه هشت تا ده و گاه تا هفده نمره برای قضیه و تعریف در نظر می گرفتند و کل نمره‌ای که از هندسه عاید دانش‌آموز می شد به کمک حافظه به دست می آمد. مسائل امتحانی هندسه بسیار دشوار و پیچیده انتخاب می شد که حل آن کار هر کس نبود مگر آنکه حل آن را قبلاً در کتاب درسی یا جایی دیگر دیده باشد.

در حسابان بسیاری از دانش‌آموزان حد تابعهای پیچیده را حساب می کنند بدون آنکه بدانند حد چیست. از تابعهای چند طبقه مشتق و انتگرال می گیرند بی‌آنکه از مفاهیم آنها اطلاعی داشته باشند و یا بدانند از این دانسته‌ها در کجا و چگونه استفاده می شود. برای آنها هر یک از این واژه‌ها در درس ریاضی چیزی است و در فیزیک و مکانیک چیزی دیگر، بدون هیچگونه ارتباط. در ریاضیات هر یک از این مفاهیم برای او یک مشت فرمول و قاعده هستند که باید مقدار در آنها گذاشت و جواب را به دست آورد و نمره گرفت.

آیا دروس ریاضی مشکل هستند؟ آیا بیشتر افراد قدرت درک مطالب ریاضی را ندارند؟ آیا حل مسأله و کشف مجهول عملی است دشوار و گاه ناممکن؟ در پاسخ به این سؤالها باید گفت برای کسانی که فقط از حافظه کمک می گیرند بله و برای کسانی که به فکر خویشتن متکی هستند نه.

در بعضی جلسات امتحانی ناظر دانش‌آموزانی بوده‌ام دست زیر چانه یا بر پیشانی، غرق دریای فکر و اندیشه برای حل یکی از مسائل. پریدن دانش‌آموزی از روی صندلی و حرکات دست و سر وی که بی‌اختیار انجام می شد نشان می داد که کشف کرده یا به عبارت دیگر یافته است، همانند کشف ارشمیدس در حمّام! وی از کشف خود چنان به هیجان آمده است که بدون توجه به اینکه جلسهٔ امتحان است و کوچکترین حرکتی تقلّب محسوب می شود از جای پریده و سر و دست تکان داده است! ممکن است حل مسأله‌ای تا اندازه‌ای دشوار باشد ولی حل همین یک مسأله، حل‌کننده را چنان به وجد می‌آورد که شور و شعف حاصل از این موقعیت ممکن است تا مدتها برای حل مسائل دیگر علاقه در وی ایجاد کنند. بر این اساس فکر می کنم که نه تنها پرداختن به ریاضیات و حل مسائل ریاضی خسته‌کننده و ملال‌آور نیست بلکه برای درمان خستگی و ناراحتیهای فکری و ایجاد یا تقویت اعتماد به نفس می توان از ریاضیات و حل مسائل مناسب ریاضی کمک گرفت.

سالها بعد که در دبیرستان تدریس می کردم و با دانش‌آموزانی سروکار داشتم که می توانستند حرفشان را بزنند، وقتی کمی به مسائل عملی و کاربردی می پرداختم، حتی بعضی از دانش‌آموزان خوب کلاس که در ردیفهای جلو نشسته بودند مؤدبانه می پرسیدند «آقا از این سؤالها توی امتحان میاد؟» و به این ترتیب مرا متوجه می ساختند که از گلیم خود پا را فراتر گذاشته‌ام! به ناچار باز می گشتم و به توضیح مسائلی می پرداختم که در امتحان می آید؟!

خاطرهٔ دیگری که نقل می کنم مربوط به سالهای اول تدریس در دبیرستان است. طی دو سالی که آموزگار دبستان بودم در پایان سال اول در امتحانات کلاسهای چهارم و پنجم دبیرستان و سال بعد در امتحانات ششم ریاضی شرکت کردم. پس از موفقیت و به دنبال آن طی دورهٔ سه ساله تحصیل دانشگاهی در رشته ریاضی، به استخدام وزارت آموزش و پرورش درآمدم و در خرمشهر به تدریس ریاضیات دبیرستانی پرداختم.

صبح یک روز وقتی به اطاق رئیس دبیرستان که در عین حال اطاق دبیران هم بود وارد شدم هنوز چند دقیقه‌ای به زنگ اول مانده بود. در آن اطاق علاوه بر رئیس دبیرستان و دو سه نفر از همکاران یک افسر نیروی دریایی هم دیده می شد. رئیس دبیرستان ایشان را که ولی یکی از دانش‌آموزان بودند به من و مرا به ایشان معرفی کردند. پس از کمی صحبت زنگ خورد و من برای رفتن به کلاس از آن اطاق بیرون رفتم. ولی دانش‌آموز نیز به دنبال من بیرون آمدند و به من گفتند تقاضایی دارم. گفتم بفرمایید. گفتند تقاضا می کنم یکی از رسمهایی را که به عنوان تکلیف معین می فرمایید خودتان رسم کنید. گفتم چشم. ایشان این را گفتند و با کمال ادب خداحافظی کردند و رفتند من حدس زدم که منظور ایشان این است که کشیدن این رسمها مستلزم صرف وقت است. بنابراین برای اطلاع از میزان وقتی که صرف کشیدن یک رسم می شود تصمیم گرفتم که در اولین فرصت رسم آن هفته را خودم هم بکشم.

در کتاب هندسهٔ سوم دبیرستان چند نمونه رسم همراه با دستور

کشیدن آنها ارائه شده بود. هر هفته یکی از آنها را به عنوان تکلیف معین می‌کردم. بعضی از دانش‌آموزان واقعاً زحمت می‌کشیدند و رسمهای خوبی ارائه می‌دادند. رسم بعضیها هم خیلی چرند و مضحک بود. به هر حال نمرهٔ رسم با توجه به اشکالاتی که در هر رسم وجود داشت تعیین می‌شد: خطها باید راست و یکنواخت باشند. هاشورها به زاویهٔ $45°$ و به یک فاصله از یکدیگر، ورقه تمیز، ....

عصر آن روز چند ورق کاغذ رسم با وسایل رسم خریدم و در خانه به کشیدن رسم آن هفته مشغول شدم. اولی پس از چند ثانیه خراب شد زیرا لبهٔ خط کش که به مرکب آلوده شده بود به روی کاغذ کشیده شد. دومی و سومی و چهارمی هم کمابیش به همین علت یا به علتهای دیگر خراب شدند! پنجمی یا آخری پاسی از شب گذشته پایان یافت اما با بارمی که خود معین کرده بودم استحقاق نمره‌ای بین ۱۵ و ۱۶ داشت. در صورتی که دانش‌آموزانی بودند که با وجود سختگیری نمرهٔ ۱۸ تا ۱۹ می‌گرفتند.

رسم درس خوب و باارزشی بود. از آن پس سؤالهای امتحانی طرح یا انتخاب شده را خود حل می‌کردم. مدت زمانی را که خود صرف پاسخ به سؤالها کرده بودم ۲ برابر یا ۳ برابر می‌کردم. حاصل فرصتی بود که به دانش‌آموزان می‌دادم تا آن سؤالات امتحانی را حل کنند.

از آن پس در نظر داشتم که غلطهای موجود در مسائل کتاب را بیابم و به اطلاع دانش‌آموزان برسانم. تکلیف هر هفته را طوری انتخاب کنم که دانش‌آموزان متوسط به ازای هر یک ساعت درس کلاسی حدود یک ساعت هم تکلیف در خانه داشته باشند. درس یک سال را به ۲۰ تا ۲۵ قسمت برای ۲۰ تا ۲۵ هفته تقسیم کنم و برای هر قسمت مسائلی از کتاب و در صورت لزوم مسائل دیگری خارج از کتاب در نظر بگیرم که به حدّ مطلوب برسد و از آن هم تجاوز نکنند. چون حل تمام مسائل در کلاس ممکن نبود از دانش‌آموزان قویتر و مرتب‌تر بخواهم دفترهای خود را که شامل حل و جواب همهٔ مسائل آن سال بود در آخر سال به کتابخانهٔ دبیرستان تحویل دهند تا دانش‌آموزان سال بعد برای اطلاع از درستی کار خود از این دفاتر استفاده کنند. پیش از این، گاه با مواردی روبه‌رو شده بودم که مدتی به پایان سال تحصیلی، درس نزدیک به اتمام بود و یا به عکس مقداری از درس باقیمانده و سال تحصیلی نزدیک به اتمام بود. تمرینهای آخر فصل در کتاب گاه آن‌قدر زیاد بود که حلشان چند هفته ادامه می‌یافت و گاه آن‌قدر کم که وقت اضافی پیدا می‌کردم.

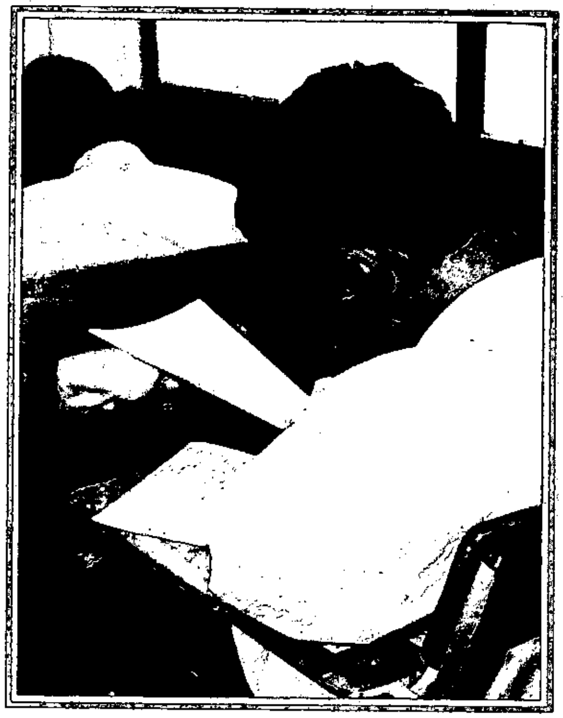
اما عقیده داشتم و اکنون هم بر همین عقیده‌ام که کتابهای درسی ریاضی در مقطع متوسطه می‌توانسته‌اند و می‌توانند نقشی بالاتر از آنچه داشته‌اند و حالا دارند داشته باشند. البته نمی‌توان نقش بیان معلم و تدریس در کلاس را نادیده گرفت. درست است که کتاب هرچقدر ممتاز باشد نمی‌تواند جایگزین معلم شود. اما عدم توجه کافی به کتابهای درسی به این امید که نقایص آنها را معلم و جزوه و کتابهای کمک درسی جبران کنند قابل قبول نیست. علاوه بر این برای کلاسهایی که به دلایلی برای مدتی معلم ندارند و برای دانش‌آموزانی که به دلایلی نمی‌توانند مدتی در کلاس حاضر شوند کتاب درسی می‌تواند حلال مشکل باشد و حتی اگر کسانی مثل بنده دسترسی به مدرسه و معلم نداشته باشند می‌توانند با کمی صرف وقت و حوصله، تنها از کتاب کمک بگیرند.

من خود مثل بسیاری دیگر دورهٔ متوسطه را بدون حضور در دبیرستان و آموزشگاه و بدون استفاده از معلم و فقط با خواندن کتاب گذرانده‌ام. روزها کار می‌کردم و شبها در خانه به مطالعهٔ کتاب مشغول می‌شدم و حتی دورهٔ شش سالهٔ دبیرستان را در سه سال طی کردم و هیچ شخص یا مرجعی هم در اطرافم وجود نداشته است که راهنمای حتی یک مسأله برای من باشد. تحصیلات ابتدایی من پیش از این دوره، و تحصیلات دانشگاهی من پس از این دوره، نشان داده‌اند که استعداد فوق‌العاده‌ای هم نداشته‌ام. شخصی بوده‌ام با استعدادی متوسط مثل دیگران، فقط شاید نسبت به بعضی حوصلهٔ بیشتری داشته‌ام. این نشان می‌دهد که دانش‌آموزان را می‌شود به مطالعه و آموختن ریاضیات ترغیب کرد. حتی اگر با کمبودهایی روبه‌رو باشند. می‌توان کاری کرد که دانش‌آموزان باور کنند که استعداد فراگیری دروس ریاضی را دارند و حتی می‌توانند به مشکلاتی که با آن روبه‌رو می‌شوند خود پاسخ گویند. البته بخش بزرگی از این وظیفه را کتابهای درسی می‌توانند بر عهده گیرند.

> **در حسابان بسیاری از دانش‌آموزان حد تابعهای پیچیده را حساب می‌کنند بدون آنکه بدانند حد چیست. از تابعهای چند طبقه مشتق و انتگرال می‌گیرند بی‌آنکه از مفاهیم آنها اطلاعی داشته باشند و یا بدانند از این دانسته‌ها در کجا و چگونه استفاده می‌شود. برای آنها هر یک از این واژه‌ها در درس ریاضی چیزی است و در فیزیک و مکانیک چیزی دیگر، بدون هیچگونه ارتباط. در ریاضیات هر یک از این مفاهیم برای او یک مشت فرمول و قاعده هستند که باید مقدار در آنها گذاشت و جواب را به دست آورد و نمره گرفت.**

مسابقات ریاضی دانش‌آموزی در ایران[1]

علی‌رجالی
دانشکدهٔ
علوم‌ریاضی
دانشگاه‌صنعتی
اصفهان



در سال ۱۳۶۲، اولین مسابقه ریاضی اصفهان توسط دانشگاه صنعتی اصفهان برگزار گردید و از فروردین ماه ۱۳۶۳، همزمان با پانزدهمین کنفرانس ریاضی کشور اولین المپیاد ریاضی ایران زیرنظر انجمن ریاضی ایران و با همکاری وزارت آموزش‌وپرورش و بخش ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان در دانشگاه شیراز برگزار شد.

از سال ۱۳۶۶ شورایی در دفتر تحقیقات وزارت آموزش وپرورش به این منظور تشکیل و همزمان تیمهای ایرانی به المپیاد بین‌المللی ریاضی راه یافته و موفقیتهای چشمگیری که حاصل تلاش دانش‌آموزان علاقمند، دبیران محترم ریاضی، مسئولان وزارت آموزش و پرورش و اعضای هیئت علمی ریاضی دانشگاهها و نیز دانشجویان المپیادی بود بدست آمد.

اثرات مثبت برگزاری این مسابقات در آموزش ریاضی ایران بسیار واضح است. در این مقاله نقاط ضعف، مسائل و مشکلات اجرایی مسابقات و تأثیرات منفی و راههای جلوگیری از اثرات نامفید این پدیده مهم فرهنگی مطرح و پیشنهاداتی جهت نظم بخشی بیشتر به این مسابقات و بررسی مشکلات و نتایج آماری آن در جهت اصلاح نظام آموزشی ارائه خواهد شد.

تاریخچه

انجمن ریاضی ایران از سال ۱۳۵۲ مسابقات دانشجویی خود را برگزار کرده است. اولین مسابقه دانش‌آموزی در سال ۱۳۶۲ بین دانش‌آموزان استان اصفهان در محل دانشگاه صنعتی اصفهان برگزار شد[۱]، و با حمایت دفتر تحقیقات آموزش و پرورش، در فروردین ماه ۱۳۶۳ انجمن ریاضی ایران با همکاری برخی از اعضاء و بطور خاص همکاران بخش ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان، نخستین مسابقه دانش‌آموزی ایران را همزمان با پانزدهمین کنفرانس ریاضی کشور در دانشگاه شیراز برگزار کرد.

پس از اوج گیری مسابقات و مشخص شدن اثرات مفید آن در جهت حل مشکل عدم علاقه دانش‌آموزان به ریاضی ([۲] و [۳])، شورایی مرکب از برخی از اعضای انجمن ریاضی ایران و کارشناسان و مسئولان و تعدادی از دبیران آموزش و پرورش از سال ۱۳۶۶، زیرنظر معاونت پژوهشی وزارت آموزش و پرورش در دفتر تحقیقات تشکیل و اولین گروه از دانش‌آموزان ایرانی در المپیاد جهانی ریاضی (IMO) شرکت کردند. بدنبال موفقیتهای تیمهای ایرانی در المپیادهای مختلف، کار این شورا به نحو دیگری تغییر یافت، تمهیداتی جهت ورود اعضای تیم به دانشگاهها بدون کنکور فراهم آمد و سرانجام پژوهشگاه جوان تأسیس شد. در سالهای مختلف نیز اردوهای کوتاه‌مدتی برای دانش‌آموزان موفق مسابقات ریاضی ایران جهت آمادگی برای شرکت در المپیادهای بین‌المللی در ایجاد تحرک ریاضی در مدارس، تقویت علاقه در یادگیری ریاضی، شناسایی و جذب دانش‌آموزان مستعد و جرأت یافتن دانش‌آموزان برای آماده‌سازی خود و ایجاد روحیهٔ لازم در آنان برای تقویت استعدادها، برخی از فواید برگزاری این مسابقات است که همگی بر آنها واقفند. [۳]

هدف از طرح مسأله، ذکر این نکات نیست، بلکه جلب توجه همگانی برای رفع مشکلات و نواقص و ارائه طرح ایجاد **بنیاد مسابقات ریاضی** است که در سال ۱۳۶۸ به آموزش و پرورش هم ارائه شد ولی مورد توجه قرار نگرفت! با تشکیل این بنیاد و بطور خاص ایجاد واحد بررسی و مطالعات، امکان این فراهم می آمد که ضمن بررسی روند کار در حین اجرا، مشکلات را برطرف و با انجام مطالعات پی گیری، آیندهٔ دانش آموزان المپیادی و تأثیر مسابقات بربدنهٔ کلی آموزش ریاضی کشور بهتر بررسی و تثبیت شوند! اما بهتر است نویسنده به عنوان یکی از پایه گزاران مسابقات ریاضی در ایران، اهداف برگزاری مسابقات را از دید خود برشمرده و در آن چارچوب مسائل و مشکلات را مطرح کند:

اهداف:

۱. ایجاد تحرک ریاضی در مدارس، درحالی که رکود کامل در آموزش ریاضی کشور وجود داشت.

۲. مبارزه با افت ریاضی و مشکل عدم علاقه دانش آموزان به رشتهٔ ریاضی درحالی که باتوجه به پیشرفت تکنولوژی نیاز جامعه و علاقمندان ریاضی روزبروز بیشتر می شد.

۳. شناسایی استعدادهای درخشان در زمینهٔ یادگیری ریاضی و ترغیب و راهنمایی آنان به ادامه تحصیل در این رشته و پی گیری آنها تا ثمردهی برای جامعه آینده.

۴. بوجود آوردن فرهنگ حل مسأله، مطالعهٔ بیشتر و عمق نگری به مفاهیم ریاضی در همهٔ دانش آموزان، که بدلیل وجود کنکور، جامعهٔ دانش آموزی ما از آن گریزان بود.

۵. ایجاد رقابت منطقی و سالم بین دانش آموزان از یک طرف و معلمان و جوامع آموزشی از طرف دیگر برای یادگیری و آموزش بهتر ریاضی.

۶. جرأت بخشیدن به دانش آموزان و معلمان ریاضی برای تلاشی بیشتر باآگاهی از توانهای بالقوه.

۷. کشف کمبودها و نقاط ضعف آموزش ریاضی در رده های مختلف جامعه (هر دانش آموز نسبت به سایرین، هر مدرسه و معلم نسبت به مدارس دیگر و همکاران آموزشی خود، هر شهرستان نسبت به شهرستانهای دیگر و هر استان نسبت به استانهای دیگر و سرانجام ایران نسبت به سایر کشورها در سطح جهانی)

برای رسیدن به اهداف فوق فعالیتهایی نیز درجریان بود که برخی از آنها را نویسنده در گزارشهای خود ارائه داده است ([۴]، [۵] و [۶]).

اشکالات[۲]

۱. عدم درگیری معلمان: معلمان به عنوان اساسی ترین عناصر در ایجاد هرگونه تغییرات [۷] باید در مسابقات هم

نقش داشته باشند. اگر آنها به مسابقات معتقد نشوند و از وجود مسابقات برای ایجاد رقابت صحیح بین خود و درنتیجه پیشرفت و تعالی استفاده نکنند، چگونه می‌توانند راهنمای دانش‌آموزان در این راستا باشند. از طرف دیگر باوجود امکانات محدود، باعث هدر رفتن انرژی است اگر از این امکان بوجود آمده در جهت ارتقاء سطح دانش معلمان استفاده نشود.

۲. دانش‌آموزان بسیاری از مسابقات دلسرد شده و احساس ناتوانی جهت ادامه راه خود را می‌کنند. برخی از آنها از سایرین عقب‌افتاده‌اند، بدلیل اینکه خود را برای یادگیری بهتر ریاضی آماده می‌کنند. ولی شکست آنها درکوتاه‌مدت باعث گیجی و سردرگمی می‌شود.

۳. مدارس عادی از دانش‌آموزان توانا تهی شده درنتیجه بدنهٔ آموزش ریاضی از برگزاری مسابقات لطمه دیده است، اگر چه انتشار کتب مختلف در زمینهٔ مسائل مسابقات برای دانش آموزان دیگر هم مفید بوده است، ولی بطورکلی باحذف دانش‌آموزان ردهٔ اول، مدارس دیگر میدان چالشها و رقابتهای صحیح آموزشی نیست[۳].

۴. آمدن مسائل المپیادی در آموزشهای عادی و امتحانات جاری مدارس باعث شده که متوسط دانش‌آموزان بیش‌ازپیش از مفاهیم ریاضی بترسند و باروبرو شدن با این گونه مسائل بدون آمادگی و استعداد لازم از یادگیری ریاضی گریزان شوند.

۵. برگزاری برخی از مسابقات حتی در مراحل اوّلیه که دانش‌آموزان بطور متوسط درآن شکست می‌خورند باعث دلسردی و ایجاد مشکلات روحی در آنان می‌شود. بد نیست اشاره‌ای به نتایج مرحله اول مسابقات سراسری دانش‌آموزی سال ۱۳۷۲ در اصفهان داشته باشیم:

خلاصه نتایج عبارت است از:

- ۵۵ درصد دانش‌آموزان شرکت‌کننده در استان اصفهان نمره کمتر از ۳ از ۴۲ داشته‌اند.
- ماکسیمم نمره، ۳۴ از ۴۲ بوده است.
- نفر دوم نمره ۲۰/۵ یعنی کمتر از نصف نمرهٔ ممکن را کسب کرده است.
- از یکی از سئوالات ۹۵ درصد نمره صفر داشته‌اند که این معیار، میزان سختی آن سؤال را به ماکسیمم می‌رساند.
- از میان ۴۷۰ نفر شرکت‌کننده فقط ۲ نفر بودند که هیچ نمره صفری نداشتند.

و نتایج در میان دانش‌آموزان سال دوم بسیار هشداردهنده‌تر بود:

- ۳۰ درصد نمرهٔ کامل صفر
- ۳ نفر بیشتر از ۱۷/۵ از ۴۲
- از ۳۰۹ نفر شرکت‌کننده از این گروه، فقط ۴ نفر بودند که برای هیچ‌یک از سئوالها نمره صفر نداشتند.

بسیاری از دانش‌آموزان و خانواده‌های آنها مخصوصاً دانش‌آموزان سال دوم با مشکلات روحی فراوانی روبرو بودند که با همّت و تلاش همکاران آموزش و پرورش اصفهان این مشکلات در اثر صحبت با آنان کم‌رنگتر شدند.

مشکل دلسرد شدن دانش‌آموزی که با ۰/۲۵ نمره آن هم در یک امتحان که بخوبی هم ارائه نشده است از دور رقابت حذف می‌شود نیز بارها مطرح بوده و مسایل و مشکلاتی را برای این گونه دانش‌آموزان بوجود آورده است.

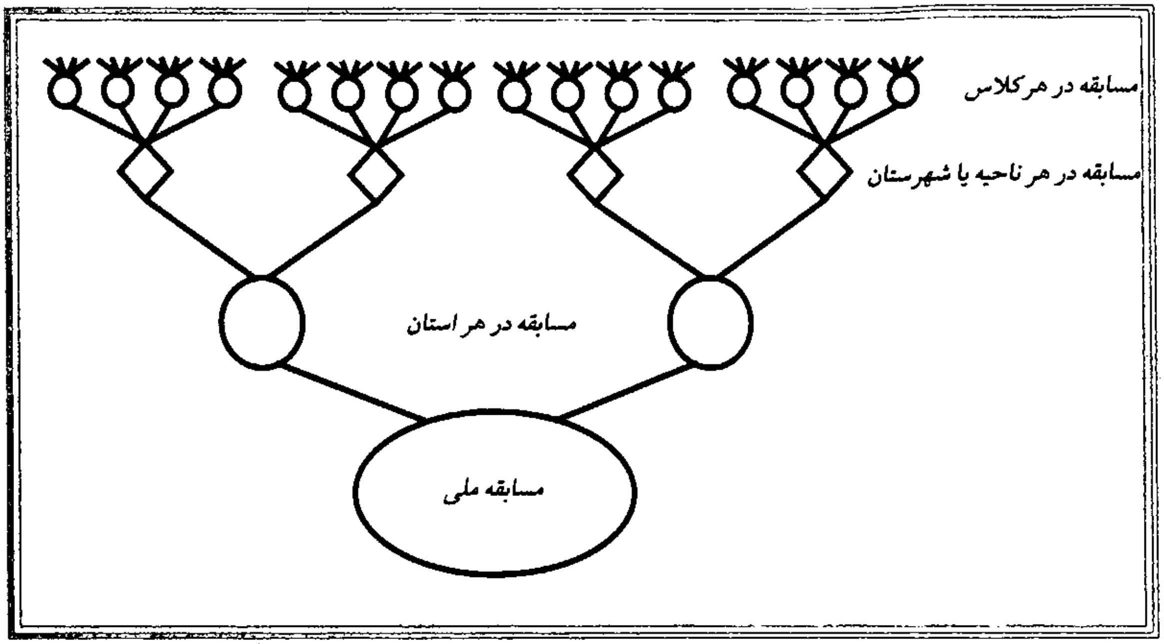
۶. عدم آگاهی دادن به دانش‌آموزان که تنها راه ریاضیدان شدن و موفقیت، گذران از مسیر مسابقات نیست. امیدواریم این مسئله توسط معلمان محترم تبلیغ شود که بسیار اندکند ریاضیدانانی که از طریق مسابقات شناسایی شده‌اند و بسیار دانشمندان و افراد مستعد هستند که باآموزش کلاسیک و بدون شرکت در مسابقات موفقیت کسب کرده‌اند.

۷. بدست آوردن غرور بیجا در بین دانش‌آموزان نیز مقوله دیگری است. زمانی ما باید به دانش‌آموزان می‌گفتیم که جرأت داشته باشند، ولی درحال حاضر برخی از کسانی که در مراحلی از مسابقات امتیاز کسب می‌کنند، بدلیل اینکه سیستمی هدایت‌کننده برای آنها وجود ندارد، غرور کاذب بدست آورده و از درس خواندن و مطالعهٔ کلاسیک دست برمی‌دارند که درنهایت به ضرر آنها خواهد بود. و این مسأله نیروهای کارآ را از بین می‌برد.

اینها برخی از مشکلات بود که خود مستقیماً باآن روبرو شده و یا دراثر بررسی و مطالعه مشاهده کرده بودم، ممکن است موارد دیگری هم باشند که همکاران عزیز تکمیل خواهند کرد. نظر خوانندگان را به موارد مطرح شده درسخنرانی کیو[۴] از چین در هشتمین کنگره بین‌المللی آموزش ریاضی جلب می‌کند [۸ و ۹]

پیشنهادات

اوّلین طرح نویسنده در رابطه با مسابقات ملی ریاضی به شرح زیر است [۵]:



بعضی از مزایای این طرح عبارتند از:

۱. بابرگزاری مسابقات ریاضی درچهار سطح، میزان فعالیت ریاضی درجامعه افزایش می‌یابد.

۲. باشناسایی چهره‌های موفق ریاضی درسطوح مختلف، می‌توان طیف وسیعی از دانش‌آموزان را زیر پوشش قرار داد و درنتیجه میزان علاقمندی دانش‌آموزی به‌ریاضی افزایش می‌یابد. حتی دانش‌آموزی که فقط بین همکلاسیهای خود رتبه اول می‌شود، احساس می‌کند توان ریاضی خواندن دارد و درنتیجه جرأت و انگیزه لازم را در مطالعهٔ ریاضی بدست می‌آورد.

۳. بابرگزاری مسابقات در این سطوح، حجم سؤالهای مسابقه‌ای افزایش یافته و یک فرهنگ مسابقات درجامعه در سطوح مختلف رایج می‌شود.

۴. از یک طرف رقابتی صحیح و اصولی بین دانش‌آموزان یک کلاس، کلاسهای مختلف یک دبیرستان، دبیرستانهای مختلف یک ناحیه یا شهرستان، نواحی و شهرستانهای مختلف استان و استانهای مختلف بوجود می‌آید و از طرف دیگر بین معلمان نیز درطرح سؤالات بهتر رقابتی منطقی و اصولی بوجود خواهد آمد.

۵. معلمان درگیر برگزاری مسابقات بوده و دراین راستا توجه آنها به‌مطالعهٔ بیشتر و تشویق و ترغیب دانش‌آموزان افزایش می‌یابد.

۶. داده‌های فراوان آماری برای ارزشیابی توانها و شناسایی نقاط ضعف تولید می‌شوند.

۷. بدنهٔ آموزش کشور همراه مسابقات به‌جلو رفته و بطور طبیعی تعدادی نخبه برای شرکت در المپیادهای بین‌المللی انتخاب می‌شوند.

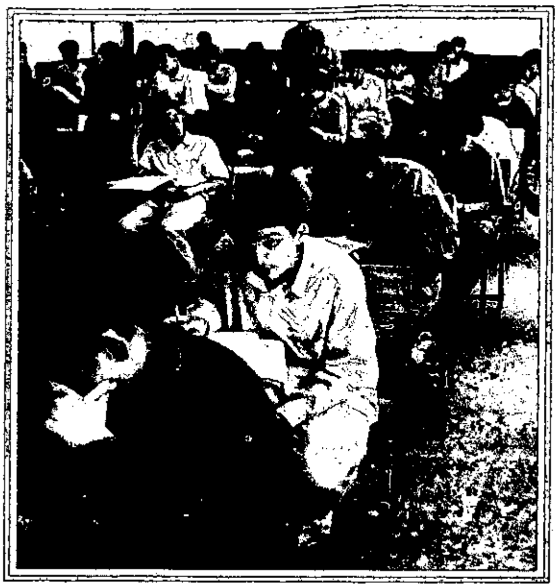
درحال حاضر افراد انتخاب شده معرف ریاضیات کشور ما نیستند و در برخی از موارد غرورهای بیجا در برنامه‌ریزان آموزشی بدلیل موفقیت تعدادی بسیار اندک پدید آمده است که لطمه‌های جبران‌ناپذیری را به‌آیندهٔ آموزش ریاضی ایران وارد خواهد کرد.

مورد دوم از پیشنهادات، شناسایی چهره‌های مستعد توسط معلمان و نیز استفاده از نتایج امتحانات داخلی و یا مسابقات در مدارس کشور و تهیهٔ جزوات و کتب برای آنان است. تمام دانش‌آموزان یک کلاس یا مدرسه بدین صورت به‌منابع اطلاعی مربوط به‌مسابقات دسترسی پیدا کرده و می‌توانند بامشارکت دانش‌آموزان انتخاب شده به‌تمرین ریاضی بپردازند. این مسأله که اکنون دربسیاری از کشورهای دنیا مرسوم است می‌تواند ضمن حفظ سطح علمی و وجود رقابت صحیح در تمام مدارس، دانش‌آموزانی را برای شرکت در المپیادهای جهانی آماده کند. این کار از سالهای اول دبیرستان امکانپذیر است و بدین طریق دانش‌آموزان بیشتری تربیت شده و تمام دانش‌آموزان و بطورکلی بدنهٔ دانش‌آموزی کشور بهره‌مند خواهد شد.

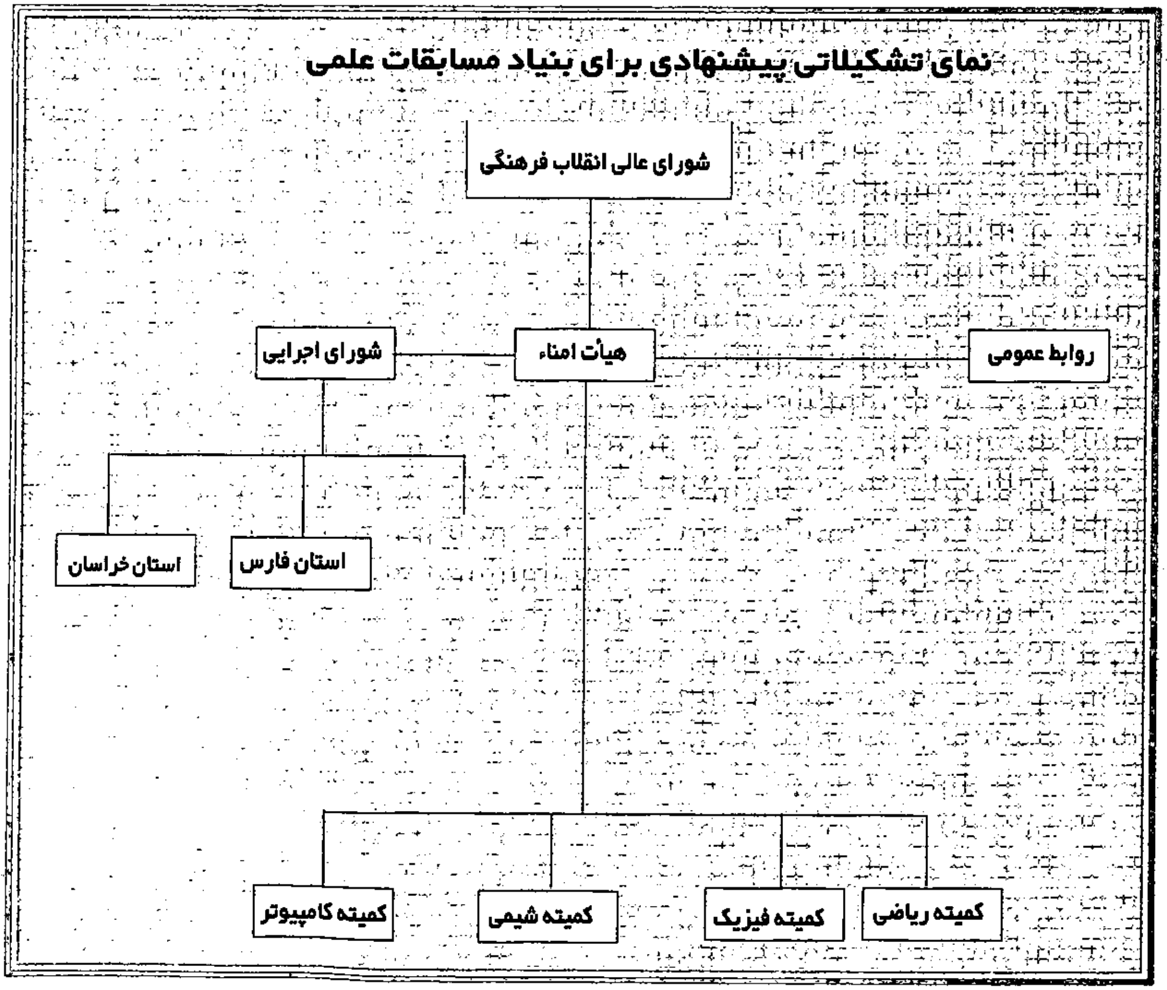
درضمن می‌توان درزمانهای متفاوت و استانهای مختلف

اردوهایی را برای این گونه دانش‌آموزان برگزار کرد، که حاصل کار اردوها هم به تمام دانش‌آموزان منتقل می‌شود.

مورد سوم از پیشنهادات، مربوط به تشکیل بنیاد مسابقات علمی است. درحال حاضر برگزاری مسابقات با مشکلات اجرایی فراوانی روبرو است و وقت بسیاری از مسئولین آموزش وپرورش و بودجه‌های اندک این وزارت دراختیار این پروژه کوچک قرار دارد. بدلیل شرکت ایران در المپیادهای ریاضی، فیزیک، شیمی و کامپیوتر و نیاز به برنامه‌ریزی صحیح و اصولی، انجام مطالعات لازم جهت پیشرفت مسابقات و استفاده درست از آنها، تشکیل این بنیاد ضروری است.



نمای تشکیلاتی این نهاد به صورت زیر می‌تواند باشد: [۵]



هیأت امناء متشکل از نمایندگان وزارتخانه های آموزش وپرورش، فرهنگ و آموزش عالی، فرهنگ و ارشاداسلامی، صدا و سیمای جمهوری اسلامی ایران، بنیاد جانبازان و مستضعفان، شرکتها و بانکهایی که امکان پرداخت کمک مالی به مسابقات را دارند، و یا از نظر علمی می توانند مسابقات را حمایت کنند.

کمیته های علمی شامل کمیته های مختلفی که مسابقات ملی دارند و یا در المپیادهای جهانی شرکت می کنند. بطور مثال کمیتهٔ علمی ریاضی می تواند شامل نمایندگان انجمن ریاضی ایران، چند نفر دبیر ریاضی (یا نماینده اتحادیه انجمنهای علمی ریاضی دبیران پس از تشکیل) و کارشناسان وزارت آموزش و پرورش در برنامه‌ریزی ریاضی و امتحانات باشد.

گروه مطالعات آماری بادسترسی سریع و آسان به مجموعهٔ اطلاعات آماری حاصل از برگزاری مسابقات، می تواند مسائل و مشکلات و نارسایيهای آموزشهای علمی را در سطوح مختلف بررسی و در اختیار کارشناسان برنامه‌ریزی قرار دهند. متأسفانه در حال حاضر بطور علمی این کار امکانپذیر نیست. [۶]

یکی از مسائل مهم، پی گیری آیندهٔ دانش‌آموزان المپیادی و راهنمایی آنان برای کسب موفقیتهای بیشتر و استفاده از آنان برای تربیت نیروهای متخصّص ریاضی است، در این رابطه وجود بنیاد و حمایت مالی و معنوی از آنان می توانست براحتی آنها را جذب و از یک سو از فرار مغزهای فعّال و مستعد و از سوی دیگر از هدر رفتن آنها جلوگیری کند.

امید است همکاران محترم با مطالعهٔ این موارد نسبت به تکمیل آن اقدام و مسئولین به موارد ذکر شده توجه کنند.

مراجع

[۱] مجله رشد آموزش ریاضی، شمارهٔ ۱ سال ۱۳۶۲.

[۲] رجالی، علی، عدم علاقه دانش‌آموزان به مطالعهٔ ریاضی، نامه‌ای کوتاه، خبرنامه انجمن ریاضی ایران ۳ و ۴ سال ۱۳۶۲ صفحات ۱ تا ۳.

[3] Rejali, A., Lack of interest of students for studying Mathematics, Unesco Document series no. 35 (Reports and papers presented in the fifth day special programme on" Mathematics Education and Society" at ICME-6), 1988 pp. 146-147.

ترجمه آن، مجله پیک ریاضی، جلد ۳ شماره ۲ سال ۱۳۶۷ صفحات ۲۲۱ تا ۲۲۴.

[4] Rejali, A., Statistical evaluation of the past mathematical competitions in Iran, Presented at ICME-6, Budapest, Hungary 1988.

[5] Rejali, A., Impact of Iran's participation in the IMO on mathematical education, and National Competitons, "A New proposal", presented at the first WFNMC conference, waterlo, Canada, 1990, Mathematics Competition vol. 4, No. 2. (1991) pp. 84-90

[6] Rejali, A, Data Bank for Iranian mathematics competitions, presented at ICME-7, Quebec, Canada, 1992.

[۷] رجالی، علی، عمومی کردن ریاضی، آئین فرزانگان، جلد ۳، سال ۱۳۷۴ صفحات ۱۲۳ تا ۱۳۸.

[۸] رجالی، علی، گزارشی از هشتمین کنگرهٔ بین‌المللی آموزش ریاضی، فرنود، نشریهٔ انجمن معلمان ریاضی استان اصفهان، شمارهٔ ۳، مرداد ۱۳۷۶، صفحات ۲ تا ۱۱.

[9] Qiu, Z. & Cheung P., Mathematics competitions, in China: success and deficiency, Mathematics Competitions, vol. 10, No. 1, 1997, pp. 44-60.

زیرنویس ها:

۱ـ قسمتی از این مقاله به صورت سخنرانی در بیست و پنجمین کنفرانس ریاضی کشور در فروردین ماه ۱۳۷۳ در دانشگاه صنعتی شریف تهران ارائه گردید.

۲ـ برخی از اشکالات در سالهای اخیر، رفع شده‌اند و امیدوارم بقیه هم باتغییرات لازم اصلاح گردند.

۳ـ مقوله مدارس تیزهوشان و نحوهٔ انتخاب دانش‌آموزان برای این مدارس هم مشکل دیگری است که امید می رود بتوان در مورد آن صحبت کرد. جایگزین این نوع مدارس برای انتخاب دانش‌آموزان المپیادی می تواند شناسایی دانش‌آموزان تیزهوش و علاقمند به مسابقات در مدارس مختلف به کمک معلمان باشد، که در کنار برنامه روزمرهٔ درسی، از جزوات و کتب مناسبی استفاده کرده و در ساعات فوق‌العاده در برنامه‌ها و اردوهای آمادگی شرکت کنند.

۴ـ Zonghu Qiu

۵ـ کمیته‌های استانها

ریشه‌های یک مسأله‌ی المپیاد جهانی ریاضی سال ۱۹۹۷

سید عبادالله محمودیان و محمد مهدیان – دانشگاه صنعتی شریف

چکیده

در آخرین المپیاد جهانی ریاضی یک مسأله پیشنهادی از ایران (مسألهٔ ۴ در IMO97) داده شده بود که از نوع ترکیبیاتی است. در این مقاله، ما ریشه‌های این مسأله و ارتباط آن را با سیر مسائل پژوهشی در «مجموعه‌های تعیین کننده» در رنگ آمیزی گراف‌ها و «مجموعه‌های بحرانی» در مربع‌های لاتین بررسی می‌کنیم. همچنین چند مسألهٔ حل نشده مطرح خواهیم کرد.

۱- مسأله

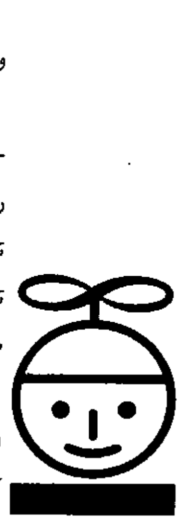
مسألهٔ چهارم المپیاد جهانی ریاضی (IMO97) به صورت زیر است [یک]:

مسأله: یک ماتریس $n\times n$ که درایه‌های آن از مجموعهٔ $S=\{1,2,\ldots,2n-1\}$ انتخاب شده‌اند، ماتریس نقره‌ای نامند اگر به‌ازای $i=1,\ldots,n$، سطر iام و ستون iام روی هم اعضای S را شامل شوند. نشان دهید:

(الف) هیچ ماتریس نقره‌ای برای $n=1997$ وجود ندارد.

(ب) ماتریس‌های نقره‌ای به ازای تعداد نامتناهی از n وجود دارد.

این مسأله از مسائل پیشنهادی ایران بود که در المپیاد جهانی ریاضی برای مسابقه برگزیده شد. در این‌جا دربارهٔ ریشه‌های این مسأله و ارتباط آن با بعضی از مفاهیم ترکیبیات و نظریهٔ گراف بحث خواهیم کرد و در پایان به تشریح چند مسألهٔ حل نشده می‌پردازیم. ولی ابتدا راه‌حل طراحان این مسأله را ببینیم:



حل. (الف) فرض کنید یک ماتریس نقره‌ای A از مرتبهٔ n $(n>1)$ وجود دارد. عضو x را یک عضو ثابت بگیرید که روی قطر A نیامده است. (چنین عضوی حتماً وجود دارد، چون تنها n درایه روی قطر A موجود است، ولی تعداد کل عضوها $2n-1$ است.) برای هر i، این x دقیقاً یک بار در R_iUC_i، اجتماع سطر iام و ستون iام، آمده است. در حقیقت اگر x در درایه (i,j) از A آمده باشد، در این صورت x دیگری در سطر iام و یا در ستون jام A وجود نخواهد داشت. بنابراین برای هر بار ظاهر شدن عنصر x در ماتریس A، دو درایه قطری (i,i) و (j,j) متناظر با آن وجود دارند که x در این دو مکان نیست. علاوه بر این، هر درایه قطری (i,i) با یک بار ظاهر شدن x متناظر است. بنابراین درایه‌های روی قطر A به مجموعه‌های ۲ عضوی (که هر مجموعه متناظر با یک بار ظاهر شدن x در A است) افراز می‌شوند. پس n یک عدد زوج است. ولی ۱۹۷۷ یک عدد فرد است.

(ب) برای $n=2$ ماتریس نقره‌ای $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ وجود دارد.

ساختار زیر نشان می‌دهد که اگر یک ماتریس نقره‌ای $n\times n$ مانند A وجود داشته باشد، می‌توانیم یک ماتریس $2n\times 2n$ به صورت زیر بسازیم:

$$\begin{bmatrix}A & B\\ C & A\end{bmatrix},$$

که در این‌جا B یک ماتریس $n\times n$ است که با اضافه کردن عدد $2n$ به هر یک از درایه‌های A به دست آمده است و C نیز ماتریسی است که با جایگزین کردن عدد $2n$ به جای همهٔ درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس B دست آمده است.

همان‌طور که در اثبات فوق دیدیم، هیچ ماتریس نقره‌ای از مرتبهٔ فرد بزرگتر از ۱ وجود ندارد. در بخش بعد خواهیم دید که برای هر عدد زوج n، یک ماتریس نقره‌ای از مرتبهٔ n وجود دارد.

۲ـ مجموعه‌های تعیین‌کننده در رنگ‌آمیزی گراف‌ها

برای تعریفهای مربوط به گراف که در این مقاله نیامده است، می‌توانید به مرجع [۱] مراجعه کنید. یک k-رنگ‌آمیزی از یک گراف G عبارت است از نسبت دادن k رنگ متفاوت به رئوس آن به طوری که هیچ دو رأس مجاور رنگ‌های یکسانی نگرفته باشند. عدد رنگ‌آمیزی (رأسی) گراف G که با $\chi(G)$ نشان داده می‌شود، کوچک‌ترین عدد k است که برای آن G یک k-رنگ‌آمیزی داشته باشد. در یک گراف داده شدهٔ g، یک مجموعهٔ S از رئوس با رنگهای متناظر با آنها، یک **مجموعهٔ تعیین کنندهٔ k-رنگ‌آمیزی** خوانده می‌شود اگر تنها به یک صورت بتوان رنگ‌های رئوس S را به یک k-رنگ‌آمیزی همهٔ رئوس G گسترش داد. یک مجموعهٔ تعیین‌کننده با کم‌ترین تعداد عناصر، یک **مجموعهٔ تعیین کنندهٔ کمینه**، و تعداد عناصر آن **عدد تعیین کنندهٔ G** نامیده می‌شود و با $d(G,k)$ نشان داده می‌شود.

برای مثال در مورد یک گراف دو بخشی همبند G، داریم $d(G,\chi(G))=1$ و برای گراف پیترسون P، داریم $d(P,3)=4$. نتایج متعددی در مورد عدد تعیین‌کنندهٔ گراف‌ها در مراجع [۵]، [۶]، [۷]، [۸]، [۹] وجود دارد.

مفهوم مجموعه‌های تعیین‌کننده قبلاً در مورد طرح‌های بلوکی مورد مطالعه قرار گرفته است (مرجع [۱۱] را ببینید.) و همچنین تحت عنوان «مجموعهٔ بحرانی» برای مربع‌های لاتین مورد بررسی قرار گرفته است. یک مربع لاتین یک ماتریس $n\times n$ از عددهای $1,2,\dots,n$ است به طوری که هر یک از این عددها دقیقاً یک بار در هر یک از سطرها و در هر یک از ستون‌های ماتریس آمده باشد. یک مجموعهٔ بحرانی در یک آرایهٔ $n\times n$، یک مجموعهٔ S از درایه‌ها است که با داشتن آنها فقط به یک صورت بتوان بقیهٔ درایه‌های ماتریس را پر کرد به گونه‌ای که ماتریس حاصل یک مربع لاتین شود. مقاله‌هایی در مورد مجموعه‌های بحرانی در مربع‌های لاتین وجود دارد. برای مثال می‌توانید [۳] و [۱۰] را ببینید. یکی از نویسندگان این مقاله، برای اولین بار مفهوم مجموعه‌های تعیین‌کننده را برای یک $\chi(G)$-رنگ‌آمیزی از گراف G مطرح کرد. پریتکین و مورل (مرجع [۸]) این مفهوم را برای k-رنگ‌آمیزی گراف‌ها برای $k \geq \chi(G)$ تعمیم دادند. کار ایشان همان طوری که در زیر خواهیم دید باعث ایجاد مسائل بسیار جالبی شده و راه را برای پژوهش بیشتر دربارهٔ این موضوع گشود. مفهوم مجموعه‌های بحرانی در مربع‌های لاتین، و در نتیجه مجموعه‌های تعیین‌کننده در رنگ‌آمیزی گرافها دارای کاربرد در مبحث رمزنگاری است. به مرجع [۴] رجوع شود.

حاصلضرب دکارتی دو گراف G و H که با علامت $G\times H$ نشان داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود: مجموعهٔ رئوس آن مجموعهٔ $V(G)\times V(H)$ است و دو رأس (U_1,V_1) و (U_2,V_2) به هم متصلند اگر و فقط اگر یا $U_1=U_2$ و V_1 و V_2 در H به هم متصل باشند و یا $V_1=V_2$ و U_1 و U_2 در G به هم متصل باشند. به عبارت دیگر $G\times H$ گرافی است که شامل $|V(H)|$ کپی «افقی» از G و $|V(G)|$ کپی «عمودی» از H است. کپی «افقی» iاُم و کپی «عمودی» jاُم دقیقاً در یک رأس با هم مشترکند که این رأس را (i,j) می‌نامیم.

حاصل ضرب دکارتی $K_n\times K_n$ برای ما جالب توجه است. یک رنگ‌آمیزی این گراف با n رنگ، چیزی نیست

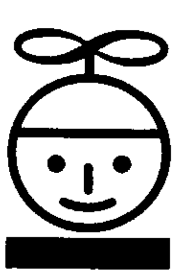
مگر یک مربع لاتین. بنابراین مسألهٔ پیدا کردن کوچک‌ترین مجموعهٔ بحرانی در یک مربع لاتین $n\times n$ همان مسألهٔ تعیین $d(K_n \times K_n, n)$ است.

به سادگی دیده می‌شود که برای هر $k < 2n-1$ داریم: $d(K_n \times K_n, k) = n^2$. ولی چنانچه در قضیهٔ زیر دیده می‌شود، تعیین $d(K_n \times K_n, 2n-1)$ مسألهٔ ساده‌ای نیست.

گزاره ۱. داریم $d(K_n \times K_n, 2n-1) \ge n^2 - n$.

اثبات. فرض کنید S یک مجموعهٔ تعیین کننده در $K_n \times K_n$ باشد. نشان می‌دهیم که $V(K_n \times K_n) \setminus S$ یک مجموعهٔ مستقل از رئوس است. فرض کنید این طور نباشد و u و v دو رأس در $V(K_n \times K_n) \setminus S$ باشند که به هم متصل‌اند. ادعا می‌کنیم که حتی اگر رنگ همهٔ رئوس به جز u و v معلوم باشد، نمی‌توانیم رنگ u و v را به طور یکتا مشخص کنیم. برای این موضوع، کافی است به این نکته توجه کنیم که در این صورت، برای هر کدام از دو رأس u و v لااقل دو رنگ باقی مانده است که در همسایگی آن ظاهر نشده است و بنابراین هر کدام از این رئوس می‌تواند با هر یک از این دو رنگ، رنگ‌آمیزی شود. حال اگر u را با هر کدام از این دو رنگ، رنگ کنیم، برای v هم لااقل یک امکان باقی می‌ماند. پس حداقل دو روش مختلف برای رنگ‌آمیزی u و v داریم. این تناقض نشان می‌دهد که $V(K_n \times K_n) \setminus S$ یک مجموعهٔ مستقل از رئوس است. ولی می‌دانیم که اندازهٔ هر مجموعهٔ مستقل در $K_n \times K_n$ حداکثر برابر با n است. بنابراین $|S| \ge n^2 - n$.

در این جا طبیعی است که بپرسیم: برای چه مقادیری از n، $d(K_n \times K_n, 2n-1) = n^2 - n$؟ در زیر نشان می‌دهیم که تنها در صورتی که n یک عدد زوج باشد این تساوی برقرار می‌شود.



قضیه ۱. فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد. در این صورت یک ماتریس نقره‌ای از مرتبهٔ n وجود دارد اگر و فقط اگر $d(K_n \times K_n, 2n-1) = n^2 - n$.

اثبات. اول فرض کنید که یک ماتریس نقره‌ای $L=[L_{ij}]$ از مرتبهٔ n وجود دارد. در این صورت رأس (i,j) در $K_n \times K_n$ را با رنگ L_{ij} رنگ کنید. حال S را مجموعهٔ همهٔ رئوس $K_n \times K_n$ به استثنای رئوس روی قطر می‌گیریم. با توجه به تعریف ماتریس نقره‌ای، رئوس مجموعهٔ S به همراه رنگی که به آن‌ها نسبت داده شده است، تشکیل یک مجموعهٔ تعیین کننده از اندازهٔ $n^2 - n$ برای $K_n \times K_n$ می‌دهد و بنا به گزارهٔ ۱ یک مجموعه تعیین کننده می‌نیمم است.

اکنون فرض کنید S یک مجموعهٔ تعیین کننده از اندازهٔ $n^2 - n$ برای $K_n \times K_n$ باشد. با توجه به اثبات گزارهٔ ۱ مجموعهٔ رئوسی که در S نیستند، یک مجموعهٔ مستقل از اندازهٔ n در $K_n \times K_n$ هستند. با جابه‌جا کردن کپی‌های افقی K_n در $K_n \times K_n$، می‌توانیم مجموعهٔ تعیین کنندهٔ دیگری از اندازهٔ $n^2 - n$ برای $K_n \times K_n$ بسازیم که شامل همهٔ رئوس $K_n \times K_n$ به جز رئوس قطری باشد. به سادگی می‌توان دید ماتریسی که با رنگ‌آمیزی مربوط به این مجموعهٔ تعیین کننده متناظر است، یک ماتریس نقره‌ای است.

قضیهٔ مشهوری است که برای هر عدد زوج n می‌توان یالهای گراف K_n را با n-1 رنگ، رنگ‌آمیزی کرد. چنین رنگ‌آمیزی را می‌توان از روی یک جدول زمان‌بندی برای یک تورنمنت با n تیم به دست آورد. راه‌حل این مسأله در اغلب کتاب‌های ترکیبیات (به عنوان مثال در مرجع [۲]) وجود دارد. در لم زیر، یک روش ساخت برای چنین رنگ‌آمیزی ارائه می‌دهیم و ثابت می‌کنیم که اگر $n \ne 4$ باشد، در این صورت یک **ترانس ورسال**[1] در رنگ‌آمیزی ساخته شده وجود دارد. منظور از یک ترانس‌ورسال، یک تطابق کامل (مجموعه‌ای فراگیر از یالهای مستقل) است که یالهای آن با رنگ‌های متفاوت رنگ‌آمیزی شده باشند. این لم در اثبات قضیهٔ ۳ و قضیهٔ ۲ کاربرد دارد.

لم ۱. فرض کنید n یک عدد زوج است. در این صورت $\chi'(K_n) = n-1$. علاوه بر این اگر $n \ne 4$، آنگاه

یک $(n-1)$- رنگ‌آمیزی یالی از K_n وجود دارد که دارای یک ترانس‌ورسال است.

اثبات. رأس‌های K_n را با عناصر مجموعهٔ $\{\infty, 0, 1, \ldots, n-2\}$ شماره‌گذاری می‌کنیم. یک رنگ‌آمیزی یالی از K_n با مجموعهٔ رنگ‌های $\{\infty, 0, 1, \ldots, n-2\}$ به این صورت معرفی می‌کنیم: یال‌های با رنگ i، $i = 0, 1, 2, \ldots, n-2$ ؛ عبارت‌اند از:

$$\left\{\{\infty, i\}, \{i-1, i+1\}, \{i-2, i+2\}, \ldots, \left\{i-\frac{n}{2}+1, i+\frac{n}{2}-1\right\}\right\}$$

(پیمانه $n-1$). حال نشان می‌دهیم که این رنگ‌آمیزی یک ترانس‌ورسال دارد. اگر $n \equiv 2$ (پیمانه ۴)، آنگاه مجموعهٔ یال‌های $\{\{\infty, 0\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \ldots, \{n-3, n-2\}\}$ تشکیل یک ترانس‌ورسال می‌دهند، اگر $n=8$، آنگاه مجموعهٔ $\{\{\infty, 0\}, \{1, 3\}, \{2, 6\}, \{4, 5\}\}$ یک ترانس‌ورسال است، و در نهایت اگر $n \equiv 0$ (پیمانه ۴) و $n>8$، آنگاه مجموعهٔ یال‌های

$$\{\{\infty, 0\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \ldots, \{n-3, n-2\}\} \setminus \left\{\left\{\frac{n}{2}-1, \frac{n}{2}\right\}, \left\{\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+2\right\}, \left\{\frac{n}{2}+3, \frac{n}{2}+4\right\}\right\} \cup \left\{\left\{\frac{n}{2}-1, \frac{n}{2}+1\right\}, \left\{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+4\right\}, \left\{\frac{n}{2}+2, \frac{n}{2}+3\right\}\right\}$$

یک ترانس‌ورسال است.

قضیه ۲. اگر n یک عدد زوج باشد، در این صورت $d(K_n \times K_n, 2n-1) = n^2 - n$.

اثبات. فرض کنید c یک $(n-1)$- رنگ‌آمیزی یالی از K_n باشد و رنگ یال $\{i,j\}$ در این رنگ‌آمیزی را با $c\{i,j\}$ نشان دهید. با استفاده از این رنگ‌آمیزی می‌توان یک ماتریس نقره‌ای $L=[L_{ij}]$ به صورت زیر ساخت:

$$L_{ij} = \begin{cases} c(i,j) & i<j \\ c(i,j)+n-1 & i>j \\ 2n-1 & i=j \end{cases}$$

به سادگی می‌توان تحقیق کرد که L یک ماتریس نقره‌ای است.

قضیه ۳. اگر n یک عدد فرد بزرگ‌تر از یک باشد، $d(K_n \times K_n, 2n-1) = n^2 - n + 1$.

اثبات. برای $n=5$ یک رنگ‌آمیزی خاص رأسی $K_5 \times K_5$ را می‌توان از ماتریس زیر به دست آورد:

$$\begin{bmatrix} 9 & 8 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 3 & 2 & 7 \\ 5 & 6 & 9 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 7 & 9 & 8 \\ 7 & 1 & 8 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

و این رنگ‌آمیزی نشان می‌دهد که $d(K_5 \times K_5, 9) = 21$. (رنگ رأس‌های (۱و۱)، (۲ و ۲)، (۳ و ۳)، و (۴ و ۴) را می‌توان، در صورتی که رنگ بقیهٔ رأس‌ها داده شده باشد، به صورت یکتا تعیین کرد.) حالا فرض کنید که $n \neq 5$ یک عدد فرد باشد. با استفاده از لم ۱ یک $(n-2)$- رنگ‌آمیزی یالی c برای K_{n-1} وجود دارد که یک ترانس‌ورسال هم داشته باشد. رأس‌های K_{n-1} را با عددهای $\{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$ طوری شماره‌گذاری می‌کنیم که یال‌های $\{1,2\}, \{3,4\}, \ldots$، و $\{n-2, n-1\}$ تشکیل یک ترانس‌ورسال بدهند و برای هر k که $1 \le k \le \frac{n-1}{2}$، داشته باشیم $c(2k-1, 2k) = k$. حال یک ماتریس $n \times n$ به نام L را به صورت زیر می‌سازیم: برای هر k که $1 \le k \le \frac{n-1}{2}$، قرار می‌دهیم $L_{2k-1\,2k} = 2n-3$، $L_{2k\,2k-1} = 2n-2$، $L_{2k-1\,n} = k$، $L_{n\,2k-1} = k+n-2$، $L_{2k\,n} = k+n-2$، و $L_{n\,2k} = k$. برای بقیهٔ درایه‌ها قرار می‌دهیم $L_{ij}=c(i,j)$ در صورتی که $i<j$ و $L_{ij}=c(i,j)+n-2$ در صورتی که $i>j$. همچنین برای هر $1 \le i \le n$ قرار می‌دهیم $L_{ii} = 2n-1$. به سادگی می‌توان تحقیق کرد که برای هر i $(1 \le i < n)$، اجتماع سطر iام ستون i ام L، شامل همهٔ عناصر مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ می‌شود. بنابراین اگر رأس‌های $K_n \times K_n$ را طبق ماتریس L رنگ کنیم، در این صورت یک رنگ‌آمیزی رأسی خاص از $K_n \times K_n$ خواهیم داشت که مجموعهٔ همهٔ رأس‌های $K_n \times K_n$ به جز رأس‌های مجموعهٔ $\{(i,i) \mid 1 \le i < n\}$ یک

مجموعهٔ تعیین‌کننده از اندازهٔ n^2-n+1 برای $K_n \times K_n$ خواهد بود.

۳ـ مسایلی دیگر

در این بخش چند مسأله باز که با مفهوم مجموعه‌های تعیین‌کننده ارتباط دارد می‌آوریم. در بخش قبلی مقدار $d(K_n \times K_n, 2n-1)$ را به طور دقیق پیدا کردیم. مسأله زیر یک سؤال طبیعی است:

مسأله ۱. مقدار $d(K_n \times K_n, k)$ را برای $n < k < 2n-1$ پیدا کنید:

در حالت $k=n$ به نظر می‌رسد که مسألهٔ دشواری است. حدس زیر به طور مستقل بیان شده است:

حدس. ([۵] و [۱۰]) $d(K_n \times K_n, n) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$.

ع. محمودیان مبلغ ۱،۰۰۰،۰۰۰ ریال برای پاسخ‌دهنده این حدس جایزه تعیین کرده است.

مانند اثبات گزارهٔ ۱ می‌توان نشان داد که: هرگاه S یک مجموعه تعیین‌کننده $(r+1)$- رنگ‌آمیزی برای یک گراف r- منتظم G باشد آنگاه $V(G) \setminus S$ مجموعه‌ای از رئوس مستقل خواهد بود. بنابراین برای این نوع گراف‌ها داریم: $d(G, r+1) \geq |V(G)| - \alpha(G)$. که در آن‌جا $\alpha(G)$ عدد استقلال گراف G است. حال سؤال زیر را مطرح می‌کنیم.

مسأله ۲. دسته گراف‌های r- منتظم G را تعیین کنید که برای آنها عدد تعیین‌کننده مینیمم $(r+1)$- رنگ‌آمیزی برابر $|V(G)| - \alpha(G)$ است.

مراجع

[یک] چهار مسأله، نشر ریاضی: مجلهٔ ریاضی مرکز نشر دانشگاهی، شمارهٔ پیاپی: ۱۶ مهر ۱۳۷۶ صفحه ۵۴

1. J. A. BONDY AND U. S. R. MURTY, Graph Theory with Applications, American Elsevier Publishing Co., INC., New York, 1976.
2. P. J. CAMERON, Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
3. J. COOPER, D. DONOVAN, AND J. SEBERRY, Latin squares and critical sets of minimal size, Australa. J. Combin., 4 (1991), 113-120
4. J. COOPER, D. DONOVAN, AND J. SEBERRY, Secret sharing schemes arising from latin squares, Bull. Inst. Comb. Appl. 12 (1994), 33-43.
5. E. S. MAHMOODIAN, Some problems in graph colorings, in Proc. 26th Annual Iranian Math. Conference, Mar. 1995, Iranian Math. Soc., University of Kerman, 215-218. Kerman, Iran
6. E. S. MAHMOODIAN AND E. MENDELSOHN, On defining numbers of verterx coloring of regular graphs, (submitted).
7. E. S. MAHMOODIAN, R. NASERASR, AND M. ZAKER, Defining sets of verterx coloring of graphs and latin rectangles, Discrete Mathematics, 167/168 (1997) 451-460.
8. T. MORRILL AND D. PRITIKIN, Defining sets and list-defining sets in Graphs, (preprint).
9. R. NASERASR, E. S. MAHMOODIAN, AND F. HARARY, Defining sets of vertex coloring of the cartesian product of a cycle with a complete graph, Proceedings of Eighth International Conference on Graph Theory, Combinatorics, Algorithms and Applications, Western Michigan University, Kalamazoo 1996 (to appear).
10. G. H. J. VAN REES AND J. A. BATE, The size of the smallest strong critical set in a latin square, Ars Combin., (submitted).
11. A. P. STREET, Defining sets for block designs: An update, in Combinatorics Advances, C. J. Colbourn and E. S. Mahmoodian, eds., Mathematics and Its Appli- cations, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Bostion, London, 1995, 307-320.

جُنگ

نامه هایی از خوانندگان عزیز به دفتر مجله می رسد که نه در قالب مقاله می گنجد و نه در قالب خبر . با این حال، حاوی مطالب بسیار جالب و خواندنی بوده و یکی از راههای خوب ارتباطی بین خوانندگان و مجله هستند . گاهی این نامه ها، در کمال بی پیرایگی و خلوص حرفهایی دارند که می تواند انگیزه بخش کارهای پژوهشی و اصیل باشند . به عنوان مثال، گاهی نظر یک دانش آموز برای معلمان و برنامه ریزان بازتاب عمیقی دارد و همه را با واقعیتهای زشت و زیبای کلاسهای درس بیشتر آشنا می کند .

هیأت تحریریهٔ مجله تصمیم گرفت که ستونی را با عنوان «جُنگ» به این نامه ها اختصاص دهد و از این راه، زمینه های ارتباطی بیشتری را با خوانندگان فراهم کنیم .

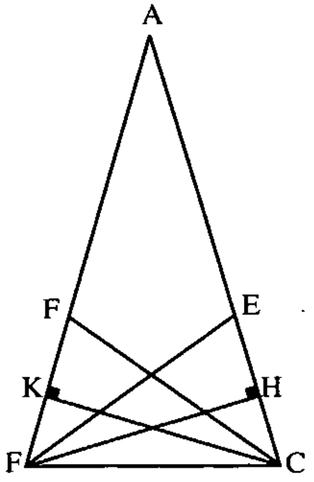
برهان بر قضیه لموس. اشتینر:

اگر دو نیمساز داخلی مثلثی با هم برابر باشند، آنگاه مثلث متساوی الساقین خواهد بود.

برهان :

مثلث مفروض ABC با دو نیمساز برابر BE و CF را در نظر می گیریم . ابتدا دو ارتفاع CK و BH را رسم می کنیم . فرض خلفی را بنا می کنیم مبنی بر اینکه مثلث مفروض متساوی الساقین نباشد پس $CK \neq BH$. حال فرض می کنیم $CK \rangle BH$ ، در دو مثلث قائم الزاویه BHE و CKF که دارای وتری یکسان هستند (BE=CF)، زاویه $K\hat{F}C \langle B\hat{E}H$ (✽)

حال در دو مثلث قائم الزاویه BKC و BHC وتر BC مشترک است و چون $CK \rangle BH$ است پس $\hat{C} \rangle \hat{B}$ در نتیجه $\frac{\hat{C}}{2} \rangle \frac{\hat{B}}{2}$ آنگاه داریم $F\hat{C}E \langle E\hat{B}F$ سپس خواهیم داشت $K\hat{F}C \rangle B\hat{E}H$ که مخالف نامساوی (✽) و فرض اختیاری ما است .

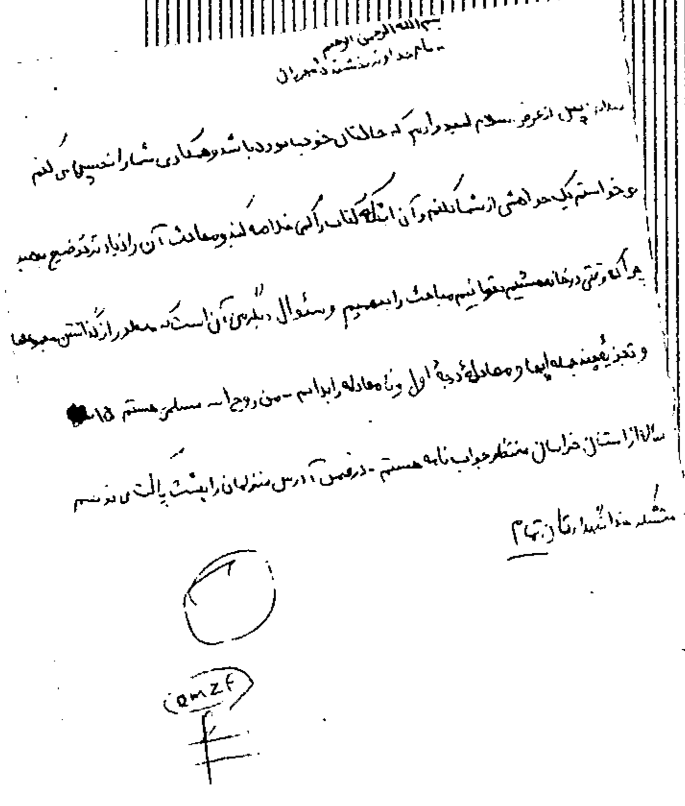


در حالت $BH \langle CK$ نیز مشابهاً دچار تناقض می شویم .

پس باید BH=CK و مثلث، متساوی الساقین باشد و هو المطلوب .

عباس کاری مجیدآباد

دبیرستان دکتر حسابی (ورامین



بسم الله الرحمن الرحیم

سلام، پس از عرض سلام امیدوارم که حالتان خوب بوده باشد و همکاری شما را تحسین می کنم و خواستم یک درخواستی از شما بکنم و آن این که کتاب را کمی خلاصه کنید و مباحث آن را زیادتر توضیح بدهید چرا که وقتی در خانه هستیم نتوانیم مباحث را بفهمیم و سؤال دیگر من آن است که منظور از نگاشتن مجموعه ها و تجزیه جمله ها و معادله درجه اول و یا معادله را ابراز — من روحا — مسلمان هستم ۱۵ ساله از استان خراسان منتظر جواب نامه هستم — در ضمن آدرس منزلمان را پشت پاکت می نویسم

مشهد خدا نگهدار تا ...

قضیه اعداد اول

(مقدار متوسط اعداد اول)

برگرفته از کتاب «ریاضیات چیست»
اثر ریچارد کورانت و هربرت رابینز
ترجمه: حسن صفاری

این جانب عبدالرسول کهندی دبیر و دانشجوی رشته ریاضی و یکی از خوانندگان مجله ریاضی می باشم. از این که می بینم عده‌ای همت خود را بر این قرار داده‌اند که مطالب تازه و جدید ریاضیات را در کشوری گسترش دهند که روزگاری پرچمدار تمام علوم و مخصوصاً ریاضیات بود احساس شوق می نمایم. امیدوارم این سعی و تلاش همچنان ادامه پیدا کند.

راجع به اعداد اول مطالب زیادی گفته و نوشته شده است از ساده‌ترین راه تعیین اعداد اول که همان غربال اراتستن که در دوره راهنمایی تدریس می گردد گرفته تا قضایای مشکل و حدس هایی که دانشمندان برای یافتن فرمولی برای تعیین اعداد اول به کار می برند همگی بر گستردگی و شگفتی این سری اعداد دلالت دارد.

مدتی بود که کتاب بسیار گرانمایه یعنی «ریاضیات چیست اثر کورانت و راینز» را مطالعه می کردم که به قضیه اعداد اول که در این کتاب عنوان شده بود برخورد نموده چون این مطالب را جالب دیدم آن را دوباره بازنویسی کرده و برای شما ارسال داشتم شاید که اگر منظور نظر افتاد از آن در مجله تان استفاده کنید.

دوباره از زحمات شما در تدوین و نشر مجله ریاضی کمال تشکر را دارم.

عبدالرسول کهندی
۷۵/۱۰/۱۴

درجستجوی قانونی که حاکم بر توزیع اعداد اول باشد مرحله قاطع هنگامی طی شد که ریاضیدانان کوششهای بیهوده برای یافتن دستور ریاضی که همه اعداد اول را بدست دهد کنار گذاشتند و از تعیین عده واقعی اعداد اولی که میان n عدد متوالی ابتدا بر واحد وجود دارد صرف‌نظر کردند و به‌جای آن وجه همت خود را متوجه به‌دست آوردن اطلاعاتی درباره میزان متوسط توزیع اعداد اول درمیان همه اعداد کردند.

به‌ازای هر n عدد صحیح A_n تعداد اعداد اول بین عددهای ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و... و n می‌باشد یعنی A_5 به‌معنی تعداد اعداد اول از ۱ تا ۵ است که برابر ۳ عدد اول است پس:

$$A_1=0 \quad A_2=1 \quad A_3=A_4=2 \quad A_5=A_6=3$$
$$A_7=A_8=A_9=4 \quad A_{11}=A_{12}=5$$
$$A_{13}=A_{14}=A_{15}=A_{16}=6 \quad A_{17}=A_{18}=7$$
$$A_{19}=8 \quad ,\ldots$$

اکنون مقادیر A_{10^n} آنها، یعنی A_{10} ، A_{10^2} ، A_{10^3} ، A_{10^4} نیز بدون تمایل به سمت حدی ترقی می‌کند. گواینکه این ترقی بااضافه شدن تدریجی n باکندی بیشتری حاصل می‌شود.

علت ترقی دنباله اخیر آن است که می‌دانیم تعداد اعداد اول نامحدود است و دراین صورت ناچار دیر یا زود A_n از هر عدد صحیح و دلخواه بزرگتر خواهد شد.

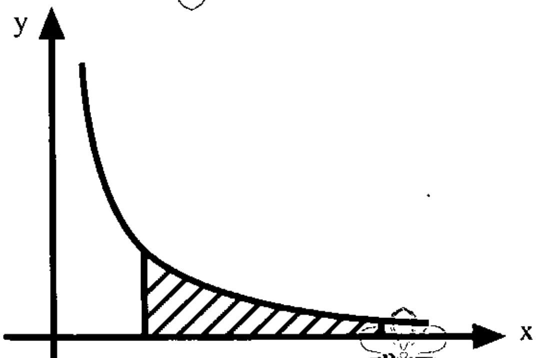
بنابه‌تعریف تراکم (یا چگالی) اعداد اول در میان اعداد صحیح از یک تا n عبارتست از $\frac{A_n}{n}$ و می‌توان بااستفاده از جدول اعداد اول مقادیر $\frac{A_n}{n}$ را به‌صورت تجربی برای مقادیر نسبتاً بزرگ n محاسبه کرد.

n	$\frac{A_n}{n}$
10^3	۰/۱۶۸
10^6	۰/۰۷۸۴۹۸
10^9	۰/۰۵۰۸۴۷۴۷۸

آخرین عدد طرف راست را می‌توان مساوی بااحتمال آن دانست که عددی که بطور اتفاقی مابین 10^9 عدد اولیه اختیار می‌شود عدد اول باشد زیرا درواقع به 10^9 طریق امکان انتخاب عدد وجود دارد و از میان آنها بقدر A_{10^9} عدد اول هستند.

توزیع اعداد اول به‌صورت انفرادی مابین همهٔ اعداد صحیح به‌صورت خارق‌العاده نامرتب است لیکن اگر ما توجه خود را به‌توزیع متوسط اعداد اول چنانکه از نسبت $\frac{A_n}{n}$ بدست می‌آید معطوف سازیم ملاحظه خواهد شد که عدم ترتیب فوق‌الذکر که به‌مقیاس کوچک وجود داشت ناپدید می‌گردد. قانون بسیار ساده‌ای که حاکم بر روش این نسبت می‌باشد یکی از برجسته‌ترین همهٔ اکتشافاتی است که تاامروز در ریاضیات انجام گرفته است.

برای اینکه بتوانیم «قضیهٔ اعداد اول» را شرح دهیم لازم است ابتدا «لگاریتم طبیعی» هر عدد صحیح n را تعریف کنیم. به‌این منظور دومحور عمود برهم در صفحه رسم می‌کنیم و سپس مکان هندسی نقاطی از صفحه را درنظر می‌گیریم که توسط معادله $y=\frac{1}{x}$ یا $xy=1$ که یک هذلولی متساوی‌القطرین است بیان می‌شود.



سطح ناحیهٔ هاشور زده در زیر هذلولی $\log n$ را مشخص می‌کند.

گاوس به‌وسیله ملاحظات تجربی که از مطالعات جداول اعداد اول حاصل می‌شود به‌این نتیجه رسید که نسبت $\frac{A_n}{n}$ تقریباً مساوی با $\frac{1}{\log n}$ است و هرقدر که n بزرگتر می‌شود این مقدار تقریبی

به واقعیت نزدیکتر می گردد . در جدول زیر نسبت $\left(\frac{\frac{A_n}{n}}{\frac{1}{\log n}}\right)$ به ازای $n=۱۰۰۰$ و $n=۱۰۰۰۰۰۰$ و $n=۱۰^۹$ آمده از این جدول معلوم می گردد که چگونه این تقریب به واقعیت نزدیک می گردد .

n	$\frac{A_n}{n}$	$\frac{1}{\log n}$	$\left(\frac{\frac{A_n}{n}}{\frac{1}{\log n}}\right)$
$۱۰^۳$	۰/۱۶۸	۰/۱۴۵	۱/۵۹
$۱۰^۶$	۰/۰۷۸۴۹۸	۰/۰۷۲۳۸۲	۱/۰۸۴
$۱۰^۹$	۰/۰۵۰۸۴۷۴۷۸	۰/۰۴۸۲۵۴۹۴۲	۱/۰۵۳

گاوس برمبنای این بدیهیات تجربی این حدس تاریخی را مطرح ساخت که نسبت $\frac{A_n}{n}$ «بطور مجانب مساوی» با $\frac{1}{\log n}$ است و مفهوم این اصطلاح آن است که اگر مانند گذشته به n دنباله‌ای از مق۳ می توانیم مقدار n را بقدر کافی بزرگ اختیار کنیم بطوری که تفاوت مابین مقدار عددی نسبت مزبور و واحد هر قدر که بخواهیم کوچک باشد .

چنین ارتباطی را به صورت خلاصه به جای علامت «~» علامت عادی «=» را قرار می دهیم و بنابراین رابطه $\frac{A_n}{n} \sim \frac{1}{\log n}$ چنین معنی می دهد که چون n بزرگ شود «$\left(\frac{\frac{A_n}{n}}{\frac{1}{\log n}}\right)$» به واحد میل می کند .

این موضوع که تغییرات میزان متوسط توزیع اعداد اول را می توان به وسیله یک تابع لگاریتمی نمایش داد اکتشاف بزرگ و قابل ملاحظه است زیرا این مسأله براستی حیرت انگیز است که دو مفهوم ریاضی که ظاهراً تااین اندازه بی ارتباط بنظر می رسند درواقع اینچنین مربوط باشد .

با وجود اینکه درک حُکمی که از حدس گاوس نتیجه می شود کار ساده‌ای است . استدلال دقیق و ریاضی این موضوع بکلی خارج از قدرت ریاضیات دوران گاوس بوده است . برای اثبات این حکم که اصولاً با مقدماتی ترین مفاهیم ریاضی سر و کار دارد باید قوی ترین روشهایی را که ریاضیات معاصر بوجود آورده است به کار برد .

تقریباً یک قرن طول کشید تاآنالیز ریاضی به آن درجه از قدرت برسد بطوری که «هادامار Hadamard» در پاریس و «دولا پوسن De La Poussin» و «لوون Louvain» توفیق آن یابند که دریک زمان استدلال کاملی از قضیه اعداد اول بدست دهند . «فن مانگولد Von Mangoldt» و «لانداو Landau» توانستند استدلال فوق الذکر را به صورت قابل ملاحظه ساده کنند . «ریمان Riemann» نیز طی اثری که شهرت جهانی یافت به استدلال استادانه و قاطعی پرداخته بود که روش حمله به این مسأله را بدست می داد . اخیراً ریاضیدان امریکایی «نوربرت وی ینر Norbert Wiener» توانست تغییراتی در این استدلال بدهد بطوریکه از به کار بردن توابع با متغیر مختلط درمرحله قاطعی از استدلال اجتناب کند .

پیشکسوت ریاضی در سنندج
جناب آقای صالح عطائی

سی وپنج سال پیش در تنها دبیرستان ریاضی شهر سنندج ، جوانی علاقمند به تدریس ریاضیات نام خود را با ریاضی قرین نمود و بی هراس و بی امان سراسر روزها را با استفاده از گچ و تخته به آموزش ریاضیات پرداخت و جوانان این منطقه را با مادر تمامی علوم آشنا کرد ، و مقاوم و استوار سالهای متمادی به تربیت افراد شایسته برای ادارهٔ اجتماع همت گماشت . در استان کردستان و بویژه در شهر سنندج هر وقت از ریاضی اسم می برند بلافاصله نام عطائی در کنارش آورده می شود . اکثر معلمان و مهندسین و پزشکان و کارمندان ادارات کردستان زمانی در محضر استاد عطائی به تلمذ ریاضی پرداخته اند . بدون استثناء همهٔ دبیران ریاضی منطقه شاگرد استاد بوده اند . آری ، یک عمر تلاش بی وقفه در پای تختهٔ کلاسهای درس بدون هیچگونه چشمداشتی از مهمترین عبادات و بزرگترین خدمت به اجتماع است .

استاد صالح عطائی در آبانماه سال ۱۳۱۴ در سنندج چشم به جهان گشود و تحصیلات ابتدائی (۶ سال) و سیکل اول دبیرستان نظام قدیم (۳ سال) را در سنندج به پایان رساند و سپس برای مشرف شدن به سنگر تعلیم و تربیت در کنکور دانشسرای مقدماتی تربیت معلم شرکت نمود و دو سال تمام مرتبهٔ اول کلاس را بخود اختصاص داد و برای گرفتن دیپلم ریاضی به دبیرستان دارالفنون تهران اعزام گردید و در سال ۱۳۳۵ در کنکور دانشسرایعالی تربیت معلم تهران قبول و پس از سه سال به اخذ لیسانس ریاضی نائل گردید و در مهر ماه ۱۳۳۸ دبیر ریاضی دبیرستان شد و تا کنون لحظه ای سنگر تدریس ریاضیات را ترک ننموده است و الآن در مراکز تربیت معلم سنندج بهمراهی چهار نفر مدرس ریاضی که از شاگردان ایشان بوده اند به تدریس ریاضی مشغول میباشد .

دانشجویان رشتهٔ ریاضی همواره از تلاش بی وقفه و حوصلهٔ سرشار استاد عطائی در سر کلاس حکایت می کنند . جا دارد بدین وسیله عمیقترین احساسات قلبی خودمان را به پاس آنهمه خدمت بی شائبه به پیشگاه استاد صالح عطائی تقدیم نموده و برای ایشان طول عمر و عزت فراوان آرزو کنیم .

فواد ابراهیمی

بسم الله الرحمن الرحیم

In The Name Of Allah

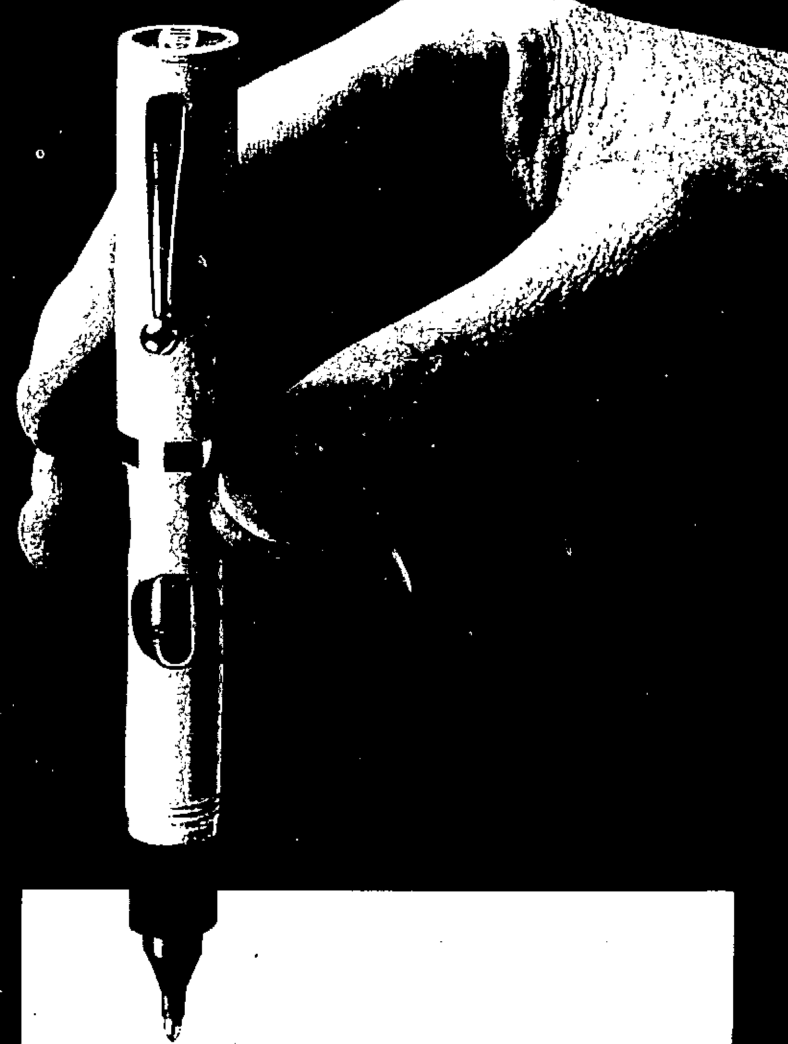
Roshd

Mathematics Education Journal

No. 51-1998

P. O. Bax 1587, Mathematic Department Iranshahr Shomali, Building No. 4

CONTENTS



فرم اشتراک مجلات آموزشی رشد

● نام و نام خانوادگی ....

● تاریخ تولد ....

● میزان تحصیلات .... ● تلفن: ....

● نشانی کامل: استان: .... شهرستان: ....

خیابان: .... کوچه: .... پلاک: ....

کدپستی: .... مبلغ واریز شده: ....

● شماره رسید بانکی: ....

● تاریخ رسید بانکی: ....

● مجلهٔ درخواستی: ....

امضاء: ....

شرایط اشتراک:

۱. واریز حداقل مبلغ ۱۰۰۰۰ ریال به عنوان علی الحساب به حساب شمارهٔ ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت شعبه سرخه حصار کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست و ارسال اصل رسید بانکی همراه با فرم تکمیل شده اشتراک به نشانی دفتر انتشارات کمک آموزشی.

۲. شروع اشتراک از زمان وصول فرم درخواست است. بدیهی است یک ماه قبل از اتمام مبلغ علی الحساب، به مشترک جهت تجدید اشتراک اطلاع داده خواهد شد.

درخواست ثبت نام

نام .... نام‌خانوادگی ....

آدرس کامل محل سکونت .... تلفن ....

آدرس کامل محل خدمت .... تلفن ....

آخرین مدرک تحصیلی .... محل تحصیل .... سال فراغت از تحصیل ....

سالهای خدمت در دبستان .... راهنمائی .... دبیرستان .... دانشگاه .... سایرین ....

مبلغ پرداختی : بابت خوابگاه .... بابت غذا .... بابت ثبت‌نام .... جمع کل ....

پ ـ کمیته اجرایی:

۱ـ عبدالله نجاتی (اداره کل آموزش و پرورش استان کرمان ـ دبیر کمیته)

۲ـ بتول باقری (دبیر ریاضی آموزش و پرورش استان کرمان)

۳ـ بهروز بهرامپور (اداره کل آموزش و پرورش استان تهران)

۴ـ سید محمد جهانشاهی (اداره کل آموزش و پرورش استان کرمان)

۵ـ محمد حسن زاده (اداره کل آموزش و پرورش استان کرمان)

۶ـ محمد رضا رستمی (کارشناس گروههای آموزشی)

۷ـ قدرت الله شمس الدینی (سرگروه آموزش ریاضی استان کرمان)

۸ـ غلامحسین کوشان (دانشکده فنی شهید چمران کرمان)

۹ـ سید ابوالقاسم گلسرخی (اداره کل آموزش و پرورش استان کرمان)

هزینه‌ها و ثبت نام:

الف ـ ثبت‌نام عادی	۲۰/۰۰۰ ریال
ب ـ اعضای انجمن‌های علمی و دانشجویان	۱۵/۰۰۰ ریال
ج ـ هزینه‌های غذا و اقامت در طول کنفرانس	
فقط ناهار	۲۵/۰۰۰ ریال
صبحانه ـ ناهار ـ شام	۵۵/۰۰۰ ریال
خوابگاه	۲۰/۰۰۰ ریال

خواهشمند است مبلغ تعیین شده را به حساب شماره ۱۱۱۸ نزد بانک ملی شعبه شهید مصطفی خمینی کرمان واریز و رسید آن را همراه با برگه درخواست ثبت‌نام حداکثر تا تاریخ ۷۷/۴/۲۵ به آدرس دبیرخانه ارسال نمائید.

تذکر: به علت محدود بودن امکانات، کمیته اجرائی از پذیرایی همراهان در سالن غذاخوری و خوابگاهها معذور است همراهان می‌توانند برای رزرو هتل به دبیرخانه کنفرانس تماس حاصل نمایند.

به نام خدا

اداره کل آموزش و پرورش استان کرمان

سومین کنفرانس آموزش ریاضی ایران

۴ تا ۶ شهریور ۱۳۷۷ کرمان

دبیرخانه کنفرانس:

کرمان ـ دانشکده فنی شهید چمران

صندوق پستی: ۴۶۶ ـ کدپستی: ۷۶۱۳۵

تلفن : ۲۶۱۱۲۳

نمابر : ۲۳۷۰۵۳

اداره کل آموزش و پرورش استان کرمان افتخار دارد با همکاری انجمن ریاضی ایران و دانشگاه شهید باهنر کرمان سومین کنفرانس آموزش ریاضی ایران را با اهداف زیر برگزار کند .

ـ ارتقای کیفیت آموزش ریاضی؛

ـ اعتلای دانش حرفه ای معلمان ریاضی؛

ـ پرورش استعدادهای ریاضی؛

ـ آشکار ساختن نقش ریاضی؛

ـ نوآوری در برنامه های درسی و روشهای تدریس ریاضی.

برنامه های علمی:

ـ ارائه مقالات عمومی و تخصصی

ـ ارائه پوستر

ـ برگزاری نمایشگاهها و کارگاهها

ـ میزگردها

ـ گردهمایی گروههای کاری

نحوهٔ تنظیم و ارسال مقاله

از علاقمندان به ارائه مقاله درخواست می شود مقاله کامل خود را که چکیده آن حداکثر در ۲۰ سطر در ابتدای مقاله آمده باشد، با خط خوانا (ترجیحاً تایپ شده) حداکثر تا تاریخ ۷۷/۴/۱۵ به نشانی دبیرخانه کنفرانس ارسال نمایند.

مقاله هایی که پس از داوری پذیرفته شوند، به صورت سخنرانی یا پوستر ارائه خواهد شد.

برگزار کنندگان:

الف ـ رئیس کنفرانس

محمد تقی زاده (مدیر کل آموزش و پرورش استان کرمان)

ب ـ کمیته علمی

۱ـ محمود محسنی مقدم (دانشگاه شهید باهنر کرمان ـ دبیر کمیته)

۲ـ اسفندیار اسلامی (دانشگاه شهید باهنر کرمان)

۳ـ اسماعیل بابلیان (دانشگاه تربیت معلم)

۴ـ عفت حاج اسماعیلی (دبیر ریاضی آموزش و پرورش کرمان)

۵ـ مهدی رجبعلی پور (معاونت پژوهشی دانشگاه شهید باهنر کرمان)

۶ـ اسدالله رضوی (دانشگاه شهید باهنر کرمان)

۷ـ بیژن ظهوری زنگنه (دانشگاه صنعتی شریف)

۸ـ سهیلا غلام آزاد (دفتر برنامه ریزی و تألیف کتب درسی وزارت آموزش و پرورش)

۹ـ محمد رضا فدایی (دانشگاه شهید باهنر کرمان)

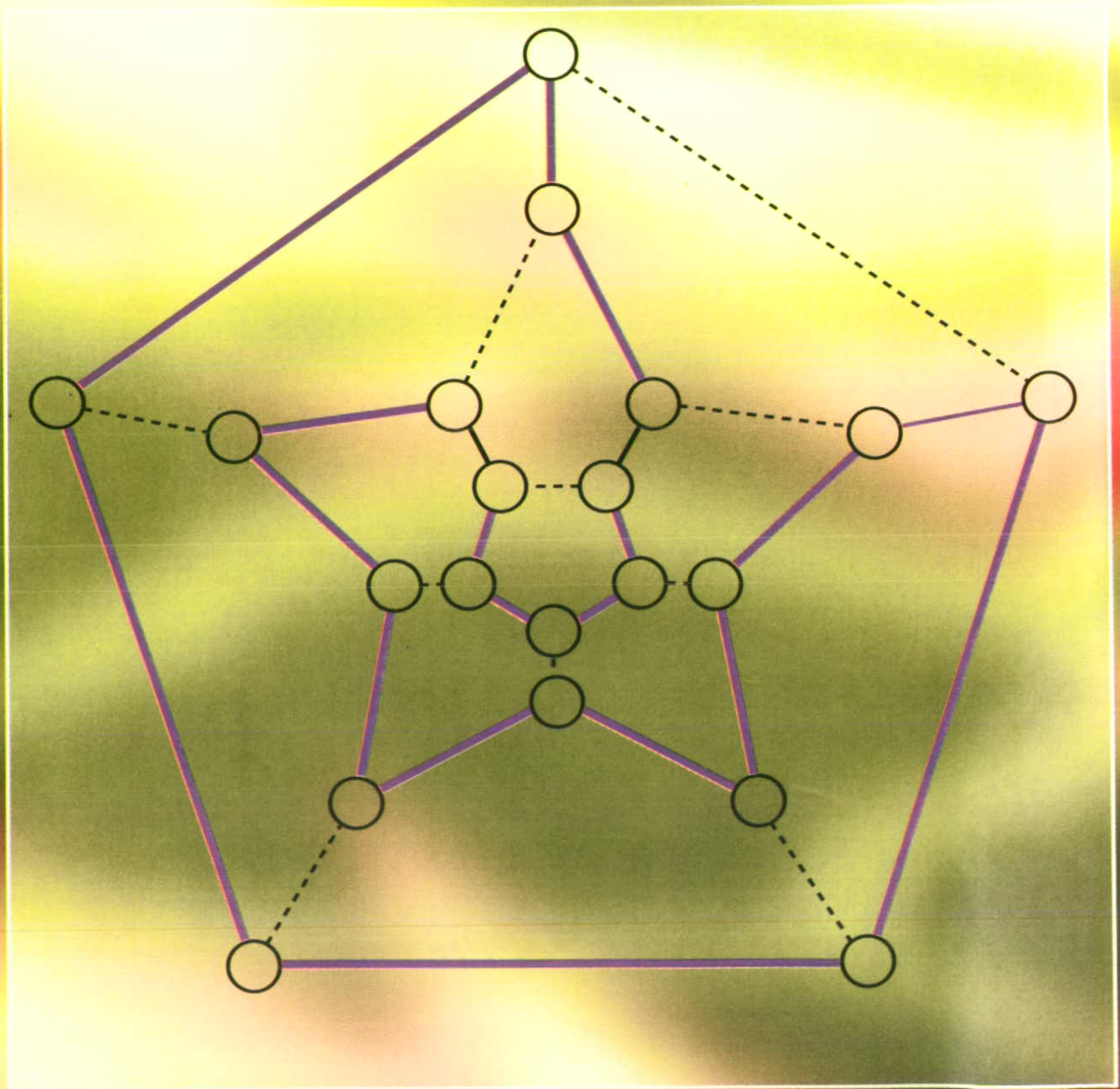
۱۰ـ نصراله گرامی (مرکز پژوهشی ریاضی ماهانی)

۱۱ـ زهرا گویا (دانشگاه شهید بهشتی)

۱۲ـ حسن ملکی (مدیرکل دفتر برنامه ریزی و تألیف کتب درسی وزارت آموزش و پرورش)

۱۳ـ عبدالحمید مؤمنایی (دبیر انجمن ریاضی استان کرمان)

۱۴ـ عبدالله نجاتی (اداره کل آموزش و پرورش استان کرمان)



یک ماتریس نقره‌ای

۴×۴

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۵ & ۶ \\ ۳ & ۱ & ۷ & ۵ \\ ۴ & ۶ & ۱ & ۲ \\ ۷ & ۴ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$