

پیشروان علم



وزارت آموزش و پرورش  
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی  
دفتر انتشارات کمک آموزشی

شماره ۶۹  
مجله‌ی ریاضی  
دوره‌ی آموزش متوسطه

فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی  
دوره‌ی بیستم / شماره‌ی ۳ / بهار ۱۳۹۰

## سر مقاله / ۲

نظریه‌ی هفت فاجعه (۲) / پرویز شهریاری / ۳

مسیر، دور و هم‌بندی در گرافها / حمیدرضا امیری / ۷

چند رادیکال مسلسل / عباس روح‌الامینی / ۹

تاریخچه‌ی مجلات ریاضی ایران (۴) / غلامرضا یاسی‌پور / ۱۰

نامساوی مثلثی و روش برداری / میلاد محبی و سینا عبدالهی‌نژاد / ۱۵

اصل لانه کبوتری / میرشهرام صدر / ۱۶

المپیادهای ریاضی نینگراد (۲) / هوشنگ شرقی / ۲۲

هم‌نهبستی و کاربردهای آن ... (۱۲) / سید محمدرضا هاشمی موسوی / ۲۵

دنباله / احمد قندهاری / ۲۹

معرفی سایتهای ریاضی جهان / احسان یاراحمدی / ۳۳

آشنایی با بسته نرم‌افزاری مَتِمِیکا (۳) / دکتر محمدعلی فریبرز عراقی / ۳۴

رویکرد هندسی و رویکرد جبری در آموزش هندسه (۱۴) / محمد هاشم رستمی / ۴۰

ماشین‌های تورینگ / نویسنده: دکتر رابرت سالمون ۳ ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور / ۴۶

مسائل برای حل / ۴۷

حل تشریحی مسائل شماره قبل / ۵۳

● مدیر مسئول: محمد ناصری ● سردبیر: حمیدرضا امیری

● مدیر داخلی: میرشهرام صدر ● طراح گرافیک: جعفر وافی

● هیئت تحریریه: حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی،

احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی،

سید محمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور

و با تشکر از همکاری ارزنده‌ی استاد پرویز شهریاری

● ویراستار ادبی: مرتضی حاج‌علی‌فرد

● وبگاه: [www.roshdmag.ir](http://www.roshdmag.ir)

● رایانامه: [Borhanm@roshdmag.ir](mailto:Borhanm@roshdmag.ir)

● پیام‌گیر نشریات رشد: ۱۴۸۲-۸۸۳-۰۲۱

نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵

● تلفن دفتر مجله: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۸۶۲

● تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ - ۷۷۳۳۶۶۵۵ - ۰۲۱

● شمارگان: ۱۲۰۰۰ نسخه

● چاپ: شرکت افست (سهامی عام)

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می‌کند:

● نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)

● طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)

● طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)

● طرح معماهای ریاضی

● نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی

ریاضی دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش رایانه و...)

● رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می‌شود. ● مجله در حکم، اصلاح، حذف و اضافه‌ی مقاله‌ها آزاد است.

● مقاله‌های وارده، باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد. ● مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجله در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

# توقع ما از شما

## حرف اول

آیا تا به حال مقاله یا نوشته‌ای که برای چاپ در مجله مناسب باشد، نوشته‌اید؟ اصلاً به فکر نوشتن مقاله و ارسال آن برای چاپ در مجله افتاده‌اید؟ فکر می‌کنید یک مقاله‌ی خوب و

یا مسئله‌ای مناسب برای چاپ چه ویژگی‌هایی باید داشته باشد؟ چه زمانی را باید صرف کرد تا نوشته، قابل چاپ باشد؟ در این مجال می‌خواهم راجع به این موضوعات با هم چند دقیقه‌ای را سپری کنیم. اول این‌که بنده به عنوان سردبیر و هم‌هی دست‌اندرکاران و اعضای هیئت تحریریه مجله توقع داریم که شما به عنوان مخاطبین اصلی مجله دست به قلم برده و بنویسید و باور کنید هیچ موضوعی به اندازه این ما را خوشحال نمی‌کند که مشاهده کنیم مقاله‌ای را دانش‌آموزی نوشته و برای ما ارسال کرده است و ما حداکثر توان خود را به کار می‌بریم تا اگر احیاناً اشکالاتی در مقاله هست، برطرف کرده و مقاله به نام همان شخص به چاپ برسانیم - البته این امر بارها در مجله اتفاق افتاده است - اما متأسفانه این توقع ما از طرف شما برآورده نشده و ما همچنان چشم براه مقالات و نوشته‌های شما هستیم. دوم این‌که توقع ما از شما در حد شما بوده و فقط همین که وقت بگذارید و دست به قلم برده و نوشته‌ای را تهیه کرده و برای ما ارسال کنید، برای ما بسیار مهم بوده و ما را خوشحال خواهید کرد.

ولی در هر صورت برای نوشتن یک مقاله باید به نکات زیر توجه کنید و بعداً خواهید دید، آن‌طور هم که تصور می‌کردید کار بسیار سختی نیست.

۱. اولین شرط نوشتن، مطالعه و تحقیق است و این‌که باید راجع به موضوعی که در نظر دارید، حداقل یکی دو کتاب مطالعه کرده باشید و به آن موضوع باید احاطه داشته باشید.

۲. مقاله شما باید شامل مقدمه، متن اصلی و نتیجه‌گیری باشد - که البته گاهی اوقات متن اصلی و نتیجه‌گیری با هم ارائه می‌شوند - در مقدمه معمولاً اهداف مقاله و مخاطبین آن و این‌که موضوع ارائه شده در چه زمینه‌ای و مربوط به چه مبحث یا کتاب درسی است قید می‌شود مگر این‌که نام مقاله و عنوان آن گویای این مطالب باشد.

۳. شما باید در مقاله‌ی خود از اصطلاحات و واژه‌هایی استفاده کنید که مخاطبین شما با آن‌ها آشنا هستند و اگر مقاله یک موضوع درسی را شامل می‌شود حتی‌الامکان از نمادها و رسم‌الخط کتاب درسی استفاده شود.

۴. می‌توانید برای نگارش مقاله از دبیران محترم خود کمک گرفته و از ایشان بخواهید منابع خوب برای مطالعه به شما معرفی کنند.

شاید یکی از بهترین ساده‌ترین مقالاتی که می‌توانید برای ما ارسال کنید، خاطرات شما از کلاس‌های درس ریاضی و معلمین محترم ریاضی است. این خاطرات می‌تواند بسیار آموزنده و در عین حال سرگرم‌کننده باشد.

همین‌طور، بعضی وقت‌ها به یک مسئله جالب برمی‌خورید که راه‌حل بسیار جالبی برای آن می‌یابید، می‌توانید آن مسئله را همراه با راه‌حل آن برای ما ارسال کنید.

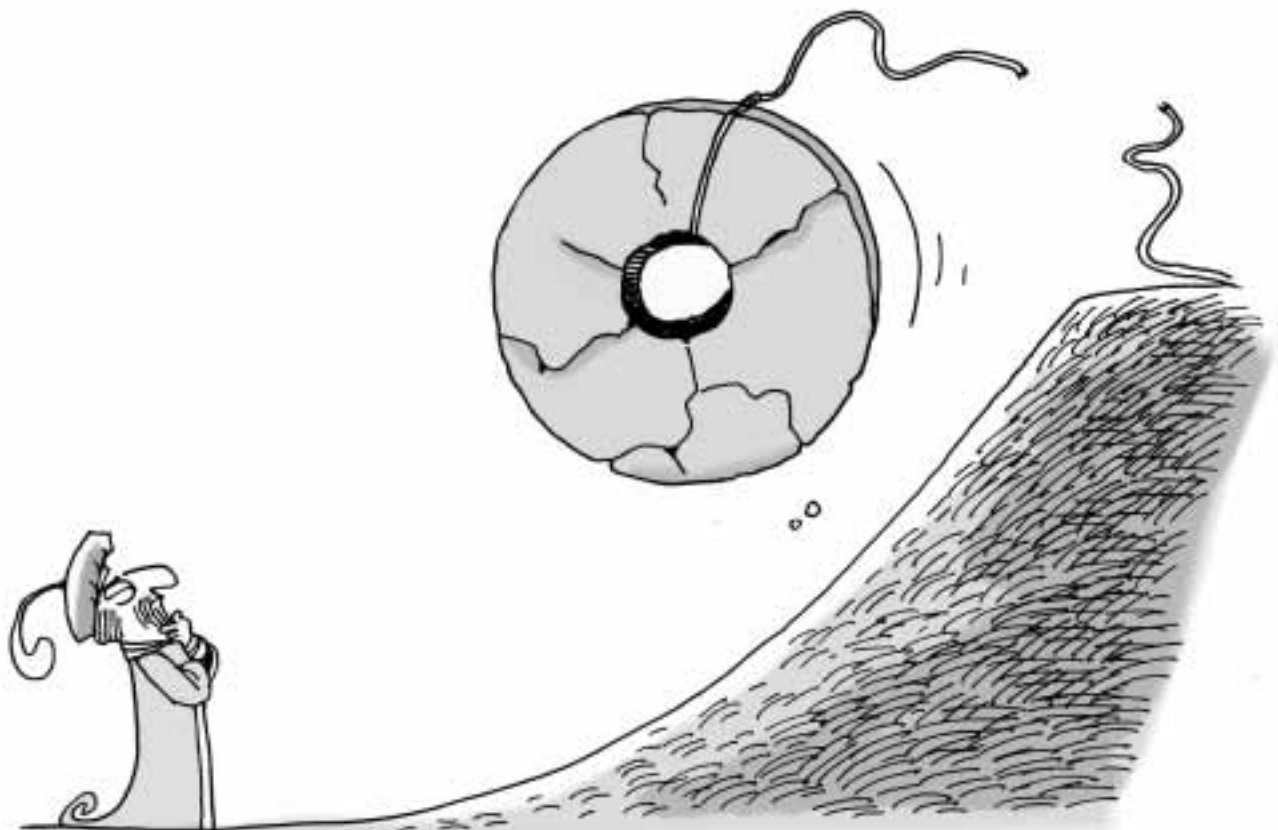
به هر صورت شروع کردن به نگارش، مهم‌ترین قسمت کار است و شما اگر علاقه دارید نوشته خودتان با نام خودتان در مجله چاپ شود شروع کنید!

به امید این‌که مقاله‌های شما و دبیران محترم شما همه‌ی صفحات مجله را شامل شود. و با آرزوی

موفقیت و شادکامی در سال جدید برای همه‌ی شما عزیزان، ان‌شاء... در پناه خداوند متعال و

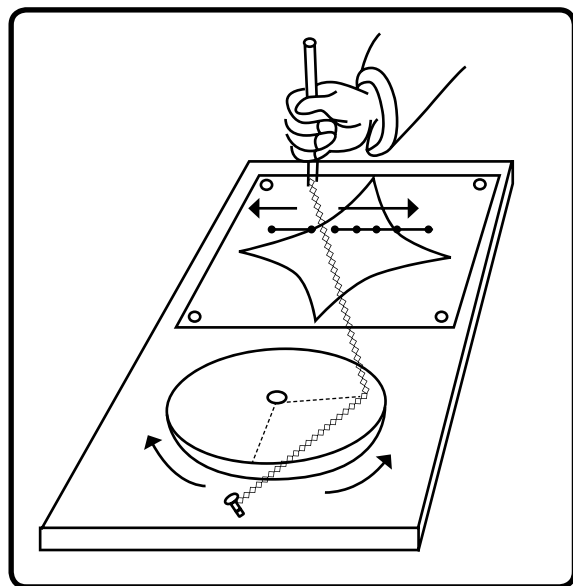
مورد تأییدات حضرت ولی‌عصر(ع) باشید.

سردبیر



## نظریه‌ی هفت فاجعه ۲

پرویز شهریاری



ماشین زیمان

نوک مداد را دوباره کمی حرکت می‌دهیم، قرص هم دوباره به‌اندازه‌ی زاویه‌ی کوچکی می‌چرخد. همه‌چیز مثل سابق است. مداد باز هم به حرکت خود ادامه می‌دهد... و یکبارہ قرص از

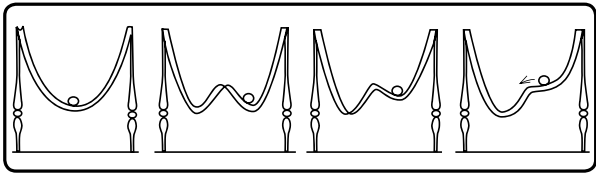
به کریستوفر زیمان توجه کنیم

آزمایشی را که می‌خواهیم مطرح کنیم به کریستوفر زیمان، شاگرد پروفیسور توم، تعلق دارد. ماشین زیمان برای نظریه‌ی فاجعه‌ها، همان نقش‌کنتری را برای روشن کردن روندهای ترمودینامیکی برعهده دارد.

این ماشین، ساختمان ساده‌ای دارد. صفحه‌ای قرص‌مانند را در نظر بگیرید با میله‌ای که در کنار قرص بر آن عمود باشد. محور قرص در مرکز میز قرار دارد. از میله، دو فنر به موازات سطح میز گذشته است. انتهای دیگر فنر اول را به میخی که روی میز کوبیده‌ایم، محکم می‌کنیم. انتهای آزاد فنر دوم را به چیزی شبیه مداد می‌بندیم که می‌تواند با دست روی میز حرکت داده شود.

میله‌ی مداد مانند را، که نوک آن روی میز قرار دارد، کمی حرکت می‌دهیم، قرص به اندازه‌ی زاویه‌ی کوچکی می‌چرخد و در حالت تازه‌ی خود به حالت تعادل قرار می‌گیرد. تا این‌جا همه‌چیز بر مدار طبیعی خود جریان دارد. اگر متغیر درونی را زاویه‌ی دوران قرص و مختصات نوک مداد را متغیرهای بیرونی بگیریم، هر تغییر کوچک متغیرهای بیرونی به تغییر کوچکی در متغیر درونی می‌انجامد.

گلوله را از جایی که آرمیده است اندکی تکان دهیم، کمی به این طرف و آن طرف می‌غلند و دوباره در نقطه‌ی مینیمم آرام می‌گیرد.

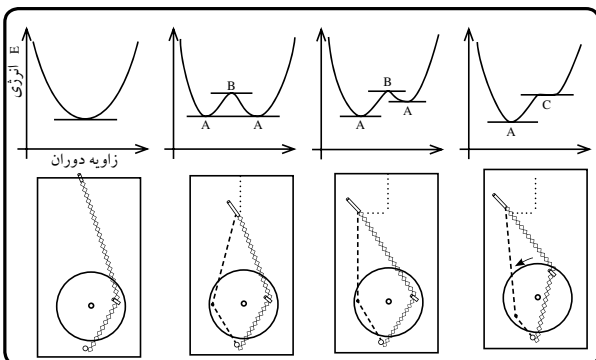


حالا ناودان را کمی دستکاری می‌کنیم و شکل آن را اندکی تغییر می‌دهیم. ته یکی از گودال‌ها (همان که گلوله‌ی ما در آنجا آرمیده است) را بالا می‌آوریم تا جایی که با رأس تپه در یک ارتفاع قرار گیرد. در این صورت، در یک ناودان خم‌شده، گلوله‌ای قرار می‌دهیم. اگر گلوله را به حال خود بگذاریم، در ته یکی از گودال‌ها- آنجا که مماس بر مسیر خطی افقی است- یعنی در نقطه‌ی مینیمم نسبی می‌ایستد. ولی در نقطه‌ی عطف، جایی که باز هم مماس بر منحنی افقی است، گلوله به حالت تعادل در نمی‌آید و به طرف پایین می‌غلند تا وقتی که به نزدیک‌ترین نقطه‌ی مینیمم نسبی برسد.

منحنی ما پیچیده‌تر می‌شود. روی این منحنی، نقطه‌ای وجود دارد که مماس در آن افقی است، ولی این نقطه نه نقطه‌ی ماکزیمم است و نه نقطه‌ی مینیمم، بلکه نقطه‌ی عطف است. در چنین نقطه‌ای، گلوله‌ی ما تعادل خود را به دست نمی‌آورد؛ از جای خود کنده می‌شود و به طرف گودال دیگر می‌غلند.

### به فنر خود برگردیم

ته، پایین‌ترین نقطه، مینیمم... همه‌ی این‌ها در بخش قبل به ارتفاع گلوله مربوط می‌شد. ولی ارتفاع گلوله، یعنی میزان انرژی پتانسیلی. خوب است یادآوری کنیم که همین گلوله‌ای که در قعر



گودال افتاده است، ماشین زیمان، بسته به محل قرار گرفتن مداد، می‌تواند در یک تا دو حالت به تعادل پایدار برسد (برای حالتی که دو تعادل پایدار داریم، روی تصویر ماشین، یکی از حالت‌ها را رسم

جا کنده می‌شود و با سرعت، نزدیک به ۱۸۰ درجه می‌چرخد! تغییر کوچکی در متغیرهای بیرونی، به تغییر تند و جهشی در متغیر درونی می‌انجامد!

این را هم می‌توان فاجعه نامید. نظریه‌ی فاجعه در این مورد چه می‌گوید؟ برای مثال، این پدیده‌ی شگفت را چگونه روشن می‌کند: مداد را روی یک منحنی حرکت می‌دهیم تا به نقطه‌ی جهشی برای قرص برسیم، این نقطه را روی سطح میز علامت می‌گذاریم. حالا مداد را روی همان منحنی و در جهت عکس حرکت می‌دهیم، با کمال شگفتی متوجه می‌شویم که لحظه‌ی جهش برای قرص، نه در همان نقطه‌ی قبلی، بلکه خیلی بعدتر پیش می‌آید!

به‌طور کلی، همه‌ی مسئله‌های مربوط به نظریه‌ی فاجعه‌ها را می‌توان به این صورت تنظیم و روشن کرد: طبیعت جهش‌ها چگونه است که ضمن گذار از یک حالت تعادلی به حالت دیگر، جنبه‌ی تدریجی تغییر را از دست می‌دهند؟

### با گالیله مشورت کنیم

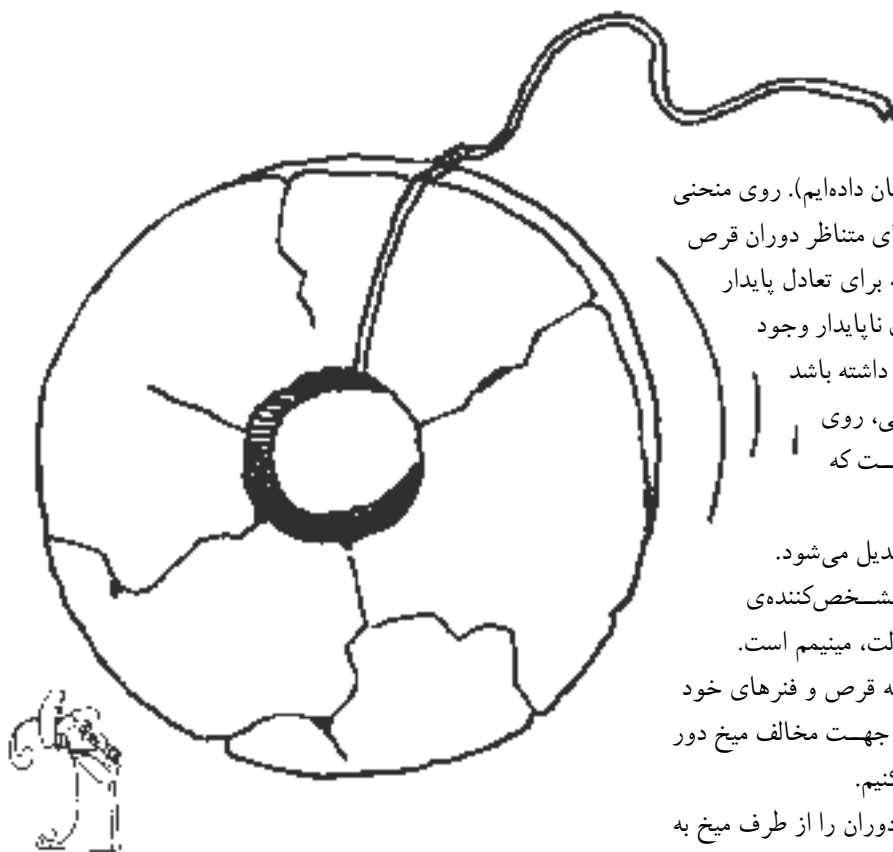
وسیله‌ی آزمایش تازه را از گالیله‌تو گالیله اقتباس می‌کنیم. این دانشمند، بسیاری از قانون‌های مکانیک را با غلتاندن یک گلوله روی مسیر ناودان‌مانندی پیدا کرد که شکلی نیم‌دایره داشت و تحذب آن به سمت پایین بود.

اگر گلوله را به حال خود بگذاریم، چه پیش می‌آید؟ به این طرف و آن طرف می‌غلند و سرآخر، در پایین‌ترین نقطه‌ی مسیر متوقف می‌شود. اگر مسیر را نمایش تغییرات یک تابع بگیریم، این پایین‌ترین نقطه، همان نقطه‌ی مینیمم منحنی است. یادآوری می‌کنیم که اگر مماس بر منحنی تابع را، در نقطه‌ی مینیمم آن رسم کنیم، یک خط راست افقی به دست می‌آید.

مسیر ناودانی را خم می‌کنیم تا در پایین آن، تپه‌ای که دو گودال در دو طرف خود دارد، به‌وجود آید. حالا، اگر گلوله را به حال خود بگذاریم، چه پیش می‌آید؟ گلوله در یکی از دو گودال- یکی از دو نقطه‌ی مینیممی که مماس بر منحنی مسیر در آنجا افقی است- تعادل پایدار پیدا می‌کند و متوقف می‌شود.

توجه به این نکته جالب است که روی این منحنی، نقطه‌ی دیگری هم وجود دارد که در آنجا، مماس بر منحنی به‌صورت افقی درمی‌آید. این نقطه، همان رأس تپه، یعنی نقطه‌ی ماکزیمم است. بنابر نشانه‌ی رسمی، یعنی افقی بودن مماس، این نقطه با نقطه‌ی تعادل خویشی دارد. جالب‌تر این است که این نقطه هم در واقع، یک نقطه‌ی تعادل است، منتهی تعادلی ناپایدار. وقتی که گلوله به رأس تپه رسید، بعد از یک توقف کوتاه، به طرف یکی از دو گودال فرو می‌غلند.

ته گودال، برعکس رأس تپه، نقطه‌ی تعادل پایدار است. اگر



کرده‌ایم و حالت دیگر را با خط چین نشان داده‌ایم). روی منحنی انرژی پتانسیلی فنرهای کشیده شده، زاویه‌های متناظر دوران قرص را با حرف A نشان داده‌ایم. اگر دو زاویه برای تعادل پایدار وجود داشته باشد، بین آن‌ها، زاویه‌ی تعادل ناپایدار وجود دارد (B). ممکن است موقعیتی از مداد وجود داشته باشد که به‌ازای آن، نقطه‌ی عطفی با مماس افقی، روی منحنی پیدا شود (C). در همین موارد است که قرص به حالت جهشی می‌رسد.

به نمونه‌ای از یک قانون مهم فیزیکی تبدیل می‌شود. حالت تعادل پایدار یک دستگاه فیزیکی، مشخص‌کننده‌ی این وضع است که انرژی دستگاه در این حالت، مینیمم است. با آگاهی از این موقعیت نظری، دوباره به قرص و فنرهای خود برمی‌گردیم. مداد را از محور قرص و در جهت مخالف میخ دور می‌کنیم و فعلاً آن را در همان‌جا محکم می‌کنیم. حالا قرص را می‌چرخانیم و زاویه‌ی دوران را از طرف میخ به حساب می‌آوریم. به‌ازای هر زاویه‌ی دوران، انرژی پتانسیل فنر کشیده شده را معین می‌کنیم.

دوران متناظر این نقطه‌ها را در قرص، زاویه‌های بحرانی گویند.

اگر منحنی نمایش تغییرات انرژی را نسبت به زاویه‌ی دوران رسم کنیم، شبیه همان نیم‌دایره‌ای که تحدیبی به طرف پایین دارد، به دست می‌آید.

قعر منحنی رسم شده، معرف مینیمم انرژی پتانسیل است. اگر قرص را به اندازه‌ی همین زاویه دوران دهیم، به حالت تعادل پایدار می‌رسد.

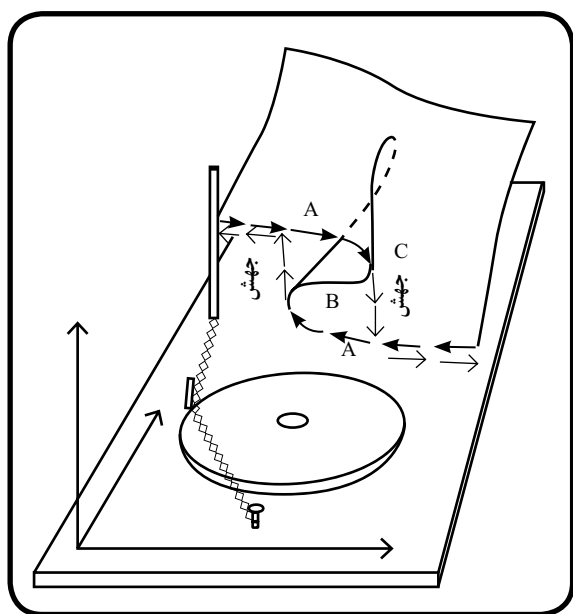
با جابه‌جا کردن محل مداد، می‌توان حالتی را پیدا کرد که در آن، منحنی انرژی پتانسیل تغییر شکل دهد و در پایین آن تپه‌ای ظاهر شود که در هر طرف آن یک گودال باشد. در این صورت، برای قرص، دو حالت تعادل پایدار وجود دارد.

سرانجام می‌توان استحاله‌ای را انجام داد که با آن از آزمایش آخر با ناودان گاليله آشنا هستیم. جای مداد را آن‌قدر تغییر می‌دهیم تا قعر یکی از گودال‌ها با رأس تپه در یک سطح قرار گیرد...  
... خطر! قرص با حرکتی تند و ناگهانی، خود را به حالت تعادل پایدار تازه‌ای می‌رساند.

و این چیزی است که باید همیشه به خاطر داشت: حالت تعادل پایدار و ناپایدار قرص و همچنین، موقعیت‌هایی که قرص با رسیدن به آن‌ها به حرکتی تند و ناگهانی می‌افتد، همه یک نشانه دارند؛ اگر این نقطه‌ها را روی منحنی متناظر انرژی آن در نظر بگیریم، در همه‌ی این موارد، مماس بر منحنی، خطی افقی است.

بسته به شکل منحنی‌ها (به منحنی انرژی دقیق‌تر توجه کنید!)، تعداد این گونه نقطه‌ها ممکن است یک، دو یا سه باشد. زاویه‌های

دوباره مقداری رسم می‌کنیم  
حالا دیگر می‌توانیم کمی به ریاضیات بپردازیم.  
روی سطح میز، دو محور مختصات را رسم می‌کنیم تا روی آن موضع نوک مداد را نشان دهیم. محور سوم را عمود بر سطح میز می‌گیریم. چند سطر بعد، هدف این کار را خواهیم فهمید.



مقدماتی» می‌تواند وجود داشته باشد.

هفت سطحی که به کمک آن‌ها می‌توان این «فاجعه‌ها» را به صورت عینی شرح داد، نام‌های ظریف و شاعرانه‌ای دارند: سطح پرچین، سطح شکن دار، سطح پرستویی، سطح دنباله‌دار، سطح پروانه‌ای، سطح بیضوی و سطح هذلولوی و سهموی. اگر تعداد متغیرهای درونی پنج باشد، یازده فاجعه می‌تواند وجود داشته باشد و اگر شش متغیر درونی یا بیشتر داشته باشیم، تعداد فاجعه‌ها بی‌نهایت می‌شود.

### هم گردباد، هم موج و هم تقسیم یاخته‌ها

به کمک نظریه‌ی فاجعه‌ها، می‌توان به خوبی از عهده‌ی توضیح پدیده‌های فیزیکی مربوط به گذارهای مرحله‌ای و جهشی (گذار از حالت جامد به مایع، از مایع به گاز و غیره) برآمد. مکانیک مایعات و پدیده‌های طوفانی آن را هم، می‌توان مثالی برای فاجعه دانست. موج‌های پرتلاطمی هم که نیروی خود را در صخره‌ها گم می‌کنند، مثالی از همین نوع است. زیست‌شناسی هم، که سرچشمه‌ی الهام نیرومندی برای پروفیسور توم است، نمایشگر مواردی از پدیده‌های فاجعه‌ای است. از این قبیل است تقسیم یاخته‌ها، تحریک عصبی، توزیع شکل و غیره.

ذکر همین چند نمونه نشان می‌دهد که دامنه‌ی کاربرد نظریه‌ی فاجعه‌ها، تا چه اندازه گسترده است. در ضمن این موضوع را نباید از یاد برد که در طبیعت کمتر به صورت خالص خود، با فاجعه‌های مقدماتی برخورد می‌کنیم، همان‌طور که خط راست واقعی هم، تنها در هندسه وجود دارد. این نظریه، مدل‌هایی را ارائه می‌دهد که در تقریب اول، می‌توانند معرف پدیده‌های موردنظر باشند، درست به همان ترتیب که دایره می‌تواند مدل خوبی برای خورشید - آن‌طور که ما می‌بینیم - باشد؛ ولی روشن است که خورشید واقعی با تصویری که ما در ظاهر از آن داریم، متفاوت است. مدلی برای ساده‌تر کردن کار است و کاربرد آن در محدوده‌ای است که به هدف آن، لطمه‌ای وارد نیآورد. مثلاً، برای این‌که وکیلی به فکر نجات موکل خود باشد - که به مفهوم عام خود، یک مورد فاجعه‌ای است - بعضی ملاحظه‌های کوچک روانی، خیلی بیشتر نتیجه‌بخش است تا استفاده از عامل‌های فوق‌العاده زیاد موضوع در کامپیوتر و به‌دست آوردن ترسیم پریچ و خم گنج‌کننده.



مداد را در جایی محکم می‌کنیم و زاویه‌های بحرانی دوران قرص را اگر برای هر وضع مداد، روی محوری که از نوک آن گذشته و بر صفحه‌ی میز عمود است، مقادیر زاویه‌های بحرانی را جدا کنیم (همان مقادیری که در شکل قبل با حرف‌های A, B, C مشخص شده بودند)، سطح عجیب و غریبی به دست می‌آید. مقطع این سطح، که روی شکل با علامت پیکان نشان داده شده است، به روشنی نشان می‌دهد که وقتی به لبه‌ی چین‌ها در سطح برسیم، حالت جهش ناگهانی پیش می‌آید.

در این وضع معین می‌کنیم. می‌دانیم که بسته به جای مداد، تعداد این زاویه‌ها ممکن است یک، دو یا سه باشد. همه‌ی این مقادیر را، هر چند تا که باشد، روی محور عمودی در دستگاه سه بعدی خود، که از نوک مداد گذشته باشد، جدا می‌کنیم.

مداد را در جاهای تازه‌ای قرار می‌دهیم و این روند را پشت سرهم تکرار می‌کنیم و همه‌ی نقطه‌های جدید را در دستگاه مختصات خود قرار می‌دهیم. سرانجام، این نقطه‌ها به هم متصل می‌شوند و سطحی را تشکیل می‌دهند.

به شکل نگاه کنید. آیا عجیب و غریب نیست؟ چنین سطحی را سطح چین‌دار می‌گویند.

به کمک این تصویر، می‌توان به سادگی همه‌ی آن‌چه را که مربوط به قرص - ضمن جابه‌جا شدن مداد - بود و از جمله جهش‌های ناگهانی آن را پیش خود تصور کرد. این جهش‌ها وقتی پیش می‌آید که به لبه‌های سطح چین‌دار برسیم.

این مطلب را هم می‌توان فهمید که چرا وقتی مداد را در یک مسیر ولی در دو جهت مختلف جابه‌جا می‌کنیم، حالت جهشی در نقطه‌ی یگانه‌ای از این مسیر پیش نمی‌آید. به خصوص، این پیشامد را با علامت پیکان روی شکل مشخص کرده‌ایم.

### هفت فاجعه

شانس آوردیم. در شرح آزمایش با قرص، تنها سه متغیر شرکت داشت: دو متغیر بیرونی (مختصات نوک مداد) و یک متغیر درونی (زاویه‌ی دوران قرص).

به همین دلیل بود که برای شرح پیشامدها به کمک شکل، یک دستگاه سه بعدی مختصات برای ما کفایت می‌کرد. روی همین دستگاه بود که ما توانستیم سطح پراز و رمز خود را بسازیم.

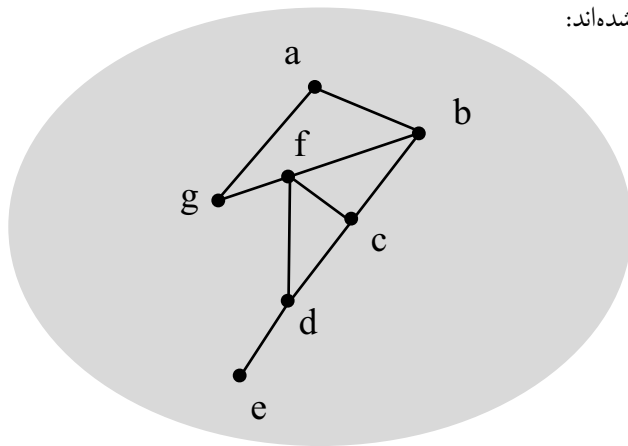
البته وقتی که متغیرهای درونی چهار تا باشد، با حالت بسیار جالب‌تری روبه‌رو هستیم. مگر نه این است که جهان ما چهار بعدی است (سه بعد فضایی به اضافه‌ی زمان). پروفیسور رنه توم ثابت کرده است که در چنین مواردی، بدون ارتباط با تعداد متغیرهای بیرونی، تنها هفت نوع جهش (و یا به بیان خود پروفیسور، هفت «فاجعه‌ی

# مسیر، دور و هم‌بندی در گراف‌ها

حمیدرضا امیری

در ادامه‌ی مقاله‌ی  
گراف‌های کامل در شماره‌ی  
۶۸ برهان، در این مقاله با تعریف  
مسیر و دور در یک گراف و تعریف گراف مکمل، سعی در  
تکمیل این بحث داریم.

تعریف مسیر: در یک گراف از مرتبه‌ی  $p$ ، مسیری به طول  $m$  از رأس  $a$  به  $b$  دنباله‌ای است شامل  $(m+1)$  رأس دوبه‌دو متمایز که با شروع و به  $b$  ختم شود.  
مثال: در گراف زیر، مسیری با طول‌های متفاوت مشخص شده‌اند:



تعداد مسیرهای از رأس  $a$  به  $b$  در  $k_p$  =  $[(p-2) \times e]$   
تذکر: اگر تعداد مسیرهای بین  $a$  و  $b$  (از  $a$  به  $b$  و از  $b$  به  $a$ ) در گراف  $k_p$  را بخواهیم، کافی است تعداد مسیرهای از  $a$  به  $b$  را دو برابر کنیم و اگر همه‌ی مسیرهای بین رأس‌های متمایز در گراف  $k_p$  را بخواهیم، کافی است آن را در  $\binom{p}{2}$  ضرب کنیم (هر دو نقطه از  $p$  تعداد مسیری را بین یکدیگر تعریف می‌کنند).

$$k_p \text{ در } e = 2 \times \binom{p}{2} \times [(p-2) \times e]$$

در رابطه‌ی اخیر  $e$  عدد اولر است که تقریباً برابر با  $2/72$  در نظر گرفته می‌شود و علامت [ ] نشان‌دهنده‌ی جزء صحیح است.  
تذکر: مسیر از رأس  $a$  به رأس  $a$  را مسیر به طول صفر تعریف می‌کنیم.

تعریف دور: یک دور به طول  $m$  روی رأسی چون  $a$  در گراف  $G$  از مرتبه‌ی  $p$  دنباله‌ای است شامل  $m$  رأس دوبه‌دو متمایز که با شروع و به  $a$  ختم شود.

تذکر: دورهایی که رأس‌های به‌کار رفته و یال‌های طی شده روی آن‌ها با هم برابر باشد، یک دور به حساب می‌آیند.  
مثال: در گراف زیر ( $k_p$ ) هر یک از ۶ دور  $abc$  و  $acb$  و  $bca$  و  $cab$  و  $cba$  یک دور به حساب می‌آیند، و دورهای  $abcd$  و  $abdc$  دو دور متفاوت با طول‌های ۴ هستند.

مسیر به طول ۱  $ab$   
مسیر به طول ۲  $abc$   
مسیر به طول ۴ از  $a$  به  $e$   $abcde$   
نکته: تعداد مسیرهای با طول‌های متفاوت از رأس  $a$  به  $b$  در گراف کامل  $k_p$  از دستوره‌ای زیر قابل محاسبه است:

$$k_p \text{ در } b \text{ به } a = \sum_{k=0}^{p-2} (p-2)_k \cdot ((n)_k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

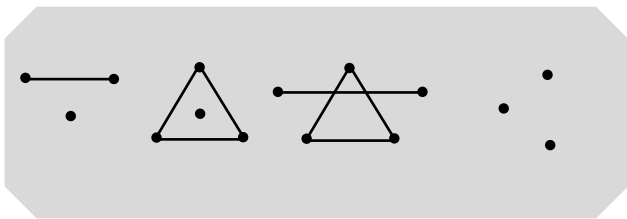


تعریف گراف همبند: گراف  $G$  از مرتبه  $p$  را همبند می‌نامیم، هرگاه بین هر دو رأس متمایز در  $G$  حداقل ۱ مسیر وجود داشته باشد.

تذکر: گراف  $k$  که فقط از یک رأس ایزوله تشکیل یافته، گرافی همبند است.

تذکر: هر گراف از مرتبه  $p \geq 2$  که رأس ایزوله نداشته باشد، همبند نیست.

مثال: گراف‌های زیر همگی ناهمبندند:



تذکر: هر گراف کامل همبند است.

نکته: اگر در گراف  $G$  از مرتبه  $p$  و اندازه  $q$  داشته باشیم  $q < p-1$ ، در این صورت  $G$  همبند نیست. به عبارت دیگر، اگر گراف  $G$  همبند باشد، همواره  $q \geq p-1$  است.

نکته: اگر در گراف  $G$  از مرتبه  $p$  و اندازه  $p$  داشته باشیم  $q \geq \binom{p-1}{2} + 1$ ، در این صورت  $G$  همبند است.

نکته: در هر گراف از مرتبه  $p$  که رأس ماکزیم (رأسی از درجه  $p-1$ ) داشته باشیم، آن گراف همبند است.

پرسش: کدام یک از دنباله‌های زیر مربوط به یک گراف همبند است؟

(۱) ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۲ و ۲ و ۳

(۲) ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۳ و ۳

(۳) ۱ و ۲ و ۳ و ۳

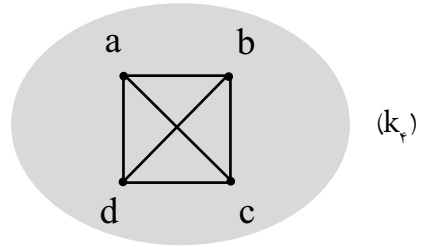
(۴) ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۲ و ۲ و ۴

حل: گزینه ۲، زیرا در گزینه ۱ داریم  $p=8$  و  $q=6$  و چون  $q < p-1$ ، پس گراف متناظر با آن همبند نیست. هم‌چنین در گزینه ۴ داریم  $p=9$  و  $q=7$  و  $q < p-1$  و گراف متناظر با آن همبند نیست. گزینه ۳ نیز معرف دنباله‌ای گرافیکال نیست.

پرسش: گراف  $G$  از مرتبه ۸ ناهمبند است. این گراف حداکثر چند یال دارد؟

(۱) ۲۰ (۲) ۱۹ (۳) ۲۱ (۴) ۲۲

حل: گزینه ۳ صحیح است، زیرا کافی است یک رأس را ایزوله

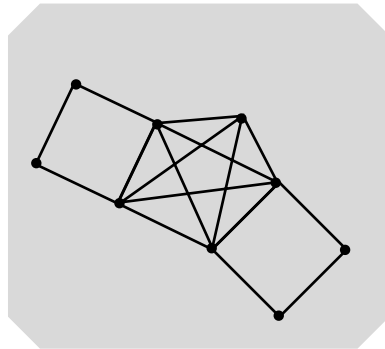


نکته: تعداد دورهای به طول  $k$  در گراف کامل  $K_p$  از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{1}{2} \binom{p}{k} \times (k-1)!$$

مثال: در گراف ساده‌ی  $G$  چند دور به طول ۴ وجود دارد؟

حل: هر ۴ ضلعی بدون قطر فقط یک دور به طول ۴ دارد. بنابراین می‌توان گفت:



$$+1 \text{ تعداد دورهای به طول } 4 \text{ در } K_8 = 1 + k_8 = 1 + 15 + 1 = 17$$

$$= \frac{1}{2} \binom{5}{4} \times 3! = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 = 15$$

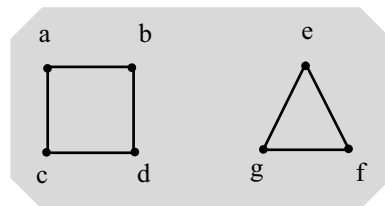
تذکر: تعداد کل دورهای موجود در گراف  $K_p$  (از دور به طول ۳ تا دور به طول  $p$ ) از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$k_p \text{ تعداد کل دورها در } K_p = \sum_{k=3}^p \frac{1}{2} \binom{p}{k} (k-1)!$$

نکته: رابطه‌ی وجود مسیر بین رؤوس یک گراف، یک رابطه‌ی هم‌ارزی است (خواص انعکاسی، تقارنی و تعدی را دارد) و اگر  $G$  یک گراف  $k$  بخشی باشد، دارای  $k$  کلاس هم‌ارزی است.

مثال: گراف دوبخشی  $G$  به صورت زیر دارای دو کلاس هم‌ارزی  $[a] = \{a, b, c, d\}$  و  $[e] = \{e, g, f\}$  است.

(بین  $a$  و  $b$  مسیری وجود داشته باشد  $aRb \Leftrightarrow$ )





# چند رادیکال مسلسل

فرستنده: عباس روح‌الامینی از سیرجان

اینجانب «عباس روح‌الامینی» تاکنون چند مقاله به دفتر مجله ارسال نموده‌ام و هنوز جوابی دریافت نکرده‌ام، چرا مجلات ایران به نامه‌های ارسالی بی‌توجهی می‌نمایند؟ سیرجان هیچ امکانات علمی و آموزشی ندارد، برای همین من به عضویت خانه ریاضیات کرمان درآمده‌ام و هر هفته به کرمان مسافرت می‌کنم تا از امکانات و کلاس‌های آن بهره‌مند شوم.

آرم سفر به کرمان، هر انتهای هفته چون خانه ریاضی از یاد من نرفته عشق ریاضی مرا درمی‌کشد ز سیرجان هر هفته آرد مرا در شهر خوب کرمان در خانه ریاضی باشد کتاب وافر عازم به کرمان شدم، گردیده‌ام مسافر من ترجمه کردن به زبان انگلیسی را خیلی خوب بلد نیستم ولی سردبیر مجله ریاضی اسپکتروم<sup>۱</sup> خودش نامه‌های من را ویرایش کرده، چاپ می‌کند و مجلات را هم مجانی برایم می‌فرستد، ولی مجلات ایران جواب نامه‌هایم را هم، نمی‌دهند؟!!

... بگذریم. در مجله ریاضی (Volume 43 Number 1) در صفحه ۳۳ شخصی به نام «یاسار آتس»<sup>۲</sup> دانشجوی رشته‌ی فیزیک در دانشگاه ماری‌کوری پاریس است، ده تا رادیکال مسلسل برای آن مجله ارسال نموده که من آن‌ها را جهت آشنایی دانش‌آموزان ارسال می‌نمایم. بنده آن‌ها را اثبات کرده‌ام، امیدوارم دانش‌آموزان بتوانند، این رادیکال‌های مسلسل را اثبات کنند.

بقیه در صفحه‌ی ۲۱

کنیم و با هفت رأس باقی‌مانده گراف  $K_p$  بسازیم.

$$q_{K_p} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

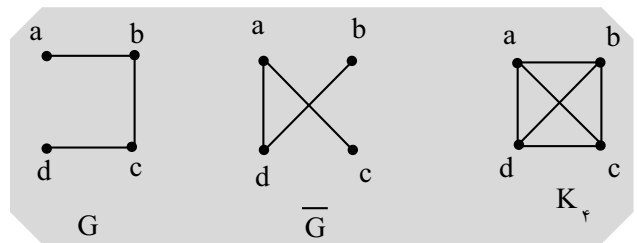
پرسش: گراف  $G$  از مرتبه‌ی ۹ مفروض است. این گراف حداقل چند یال باید داشته باشد تا مطمئن باشیم همبند است؟

$$21 \quad (1) \quad 26 \quad (2) \quad 28 \quad (3) \quad 29 \quad (4)$$

حل: گزینه‌ی ۴ صحیح است، زیرا:

$$\text{شرط همبندی} \rightarrow q \geq \binom{p-1}{2} + 1 \Rightarrow q \geq \binom{8}{2} + 1 = 29$$

مکمل یک گراف: مکمل گراف  $G$  از مرتبه‌ی  $p$  گرافی است چون  $\bar{G}$  از مرتبه‌ی  $p$  به طوری که این دو گراف روی هم، گراف کامل از مرتبه‌ی  $p$  را تشکیل می‌دهند. به مثال زیر توجه کنید:



تذکر: همواره مجموع یال‌های یک گراف و مکمل آن گراف برابر است با تعداد یال‌های گراف کامل هم‌مرتبه با آن گراف؛ یعنی:

$$q(G) + q(\bar{G}) = \frac{p(p-1)}{2}$$

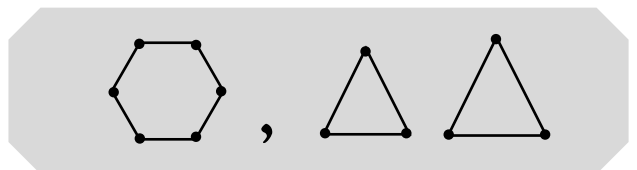
تذکر: اگر  $G$  گرافی از مرتبه‌ی  $p$  باشد و  $a$  رأسی در این گراف و  $\bar{a}$  رأس متناظر با آن در گراف  $\bar{G}$  باشد، همواره داریم:

$$\text{deg}a + \text{deg}\bar{a} = p - 1$$

تذکر: اگر  $G$  گرافی  $r_1$ -منتظم از مرتبه‌ی  $p$  باشد، مکمل  $G$  نیز گرافی  $r_2$ -منتظم است و همواره  $r_1 + r_2 = p - 1$  است.

مثال: چند گراف ۳-منتظم از مرتبه‌ی ۶ وجود دارد؟

حل: مکمل گراف ۳-منتظم از مرتبه‌ی ۶ گرافی است ۲-منتظم از مرتبه‌ی ۶ و چون تعداد گراف‌های ۲-منتظم از مرتبه‌ی ۶ همواره برابر است با ۲، یعنی دو گراف زیر را داریم، پس تعداد گراف‌های ۳-منتظم از مرتبه‌ی ۶ نیز ۲ است.



## تاریخچه‌ی

## مجلات ریاضی ایران ۴



$\alpha = 1; \sqrt{a} = \frac{9}{4}; \sqrt{b} = \frac{1}{4}$  و  $x^2 = \frac{5}{4}$   
و در حالت خاص  $\alpha = 10$  داریم:  
 $\sqrt{a} = 36$  و  $\sqrt{b} = 16$  و  $x^2 = 26$

در این شماره در مقاله‌ای با عنوان کارمند بازنشسته‌ی راه‌آهن به این داستان برخورد می‌کنیم که:

ترن‌هایی که از کنار یکدیگر می‌گذرند

چند روزی از ملاقات دکتر و جانسن گذشته بود که تلفن منزل جانسن زنگ زد. از آن طرف، دکتر از مکانیسیین تقاضا کرد که اگر ممکن است در بعدازظهر آن روز وی را در مطبش ملاقات کند. جانسن که بازنشسته بود و همیشه وقت داشت، دعوت دکتر را پذیرفت و عصر به دیدار وی رفت. در آن‌جا دکتر گفت با معمای تازه‌ای مواجه شده است و آن‌را برای جانسن چنین شرح داد:

- با یکی از بیمارانم راجع به آن‌چه برای تو پیش آمده بود، صحبت کردم و او در مقابل، مسئله‌ای مربوط به خودش را برای من بیان کرد: این شخص برای رفتن سر کارش از راهی باید بگذرد که یک رشته‌ی تنهای راه‌آهن را قطع می‌کند. این یک رشته‌ی راه‌آهن اغلب برای عبور ترن‌های تجاری استفاده می‌شود که هم از نظر طول و هم از این نظر که آهسته از شهرها می‌گذرد معروف است. بسیار رخ داده که شخص مزبور مجبور شده است پشت راه‌بند، خودرو خود را متوقف کند و پشت فرمان انتظار بکشد تا زمانی که ترن تجاری با دنباله‌ی دور و درازش آهسته بگذرد و راه برای خودرو وی باز شود. او به من گفت که ترجیح می‌دهد به جای یک رشته، دو رشته راه‌آهن وجود داشته باشد، زیرا گاهی پیش آمده که دو ترن در جهت‌های مخالف از آن راه می‌گذرند و این باعث می‌شود که زمان توقف اجباری وی دو برابر گردد.

آیا به عقیده‌ی شما این شخص درست پیش‌بینی می‌کند؟ یعنی اگر دو رشته راه‌آهن وجود داشته باشد، زمان توقف وی در حالت اخیر کمتر می‌شود؟

مکانیسیین بازنشسته اظهار داشت:

- کاملاً صحیح است. اگر تعداد کل ترن‌هایی که از دو رشته راه‌آهن

حل یک مسئله از مسائل

شیخ بهائی

در یکان شماره‌ی یکم به نقل از خلاصه‌ی الحساب شیخ بهائی با عنوان مسائل لاینحل هفت مسئله درج شده بود. آقای علی رضائی، دبیر دانشمند ریاضیات (فعالاً)

در پی بررسی «تاریخچه‌ی مجلات ریاضی ایران» به شماره‌های ۴۰، ۴۱ و ۴۲ مجله‌ی یکان می‌رسیم و به مسئله‌های جالبی برمی‌خوریم که در پاییز و زمستان سال ۱۳۴۶ به چاپ رسیده‌اند. در شماره‌ی مسلسل ۴۰ با این مسئله‌ی جالب مواجه می‌شویم:

بازنشسته) حل یکی از این مسائل را مرقوم داشته‌اند که در زیر چاپ می‌شود:

مطلوبست حل هر یک از دو معادله‌ی زیر:

$$x^2 - 10 = \sqrt{b} \quad \text{و} \quad x^2 + 10 = \sqrt{a}$$

معادلات را در حالت کلی زیر حل می‌کنیم:

$$(1) \quad x^2 + \alpha = \sqrt{a}$$

$$(1) \quad x^2 - \alpha = \sqrt{b}$$

معادله‌ی (۱) را چنین می‌نویسیم:

$$x^2 - \alpha = \sqrt{a} - 2\alpha$$

تساوی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\sqrt{a} - 2\alpha = (\sqrt{a} - \alpha)^2$$

که از آن نتیجه خواهد شد:

$$\sqrt{a} = \frac{(\alpha + 2)^2}{2}$$

و از معادله‌ی (۲) نیز حاصل می‌شود:

$$\sqrt{b} = \frac{(2 - \alpha)^2}{2}$$

چون این مقادیر را در معادلات (۱) و (۲) قرار دهیم نتیجه خواهد شد:

$$x^2 = \frac{\alpha^2 + 4}{4}$$

و در ازای مقادیر مختلف  $\alpha$  می‌توان مقادیر نظیر  $a$  و  $b$  و  $x$  را تعیین کرد. مثلاً:

$$\alpha = 0; \sqrt{a} = 1; \sqrt{b} = 1, x^2 = 1$$

بر حالتی که دو ترن پشت سرهم از معبر بگذرند و جاده را در تمام طول مدت بسته نگاه دارند، برتری دارد.

دکتر گفت:

- خوشحالم که موضوع را متوجه شدید. فعلاً به این نتیجه رسیده‌ایم که در حالت کلی که ترن‌ها از یکدیگر می‌گذرند، زمان توقف نصف می‌شود و در حالت خاصی که در عبور از گذرگاه لوکوموتیو یکی مقابل واگن انتهایی دیگری واقع می‌شود، زمان توقف دو برابر خواهد شد.

مکانیسمین اظهار داشت: حالتی را بررسی می‌کنید که ترن‌ها وقتی در محل تقاطع از یکدیگر می‌گذرند، لوکوموتیو یکی در نیمه‌ی طول دیگری واقع شده باشد؛ و دکتر چنین پاسخ داد:

- خیلی ساده است. چنین حالتی معادل است با وقتی که تعداد ترن‌ها نصف باشد، اما طول هر یک از آن‌ها یک برابر و نیم بزرگ‌تر



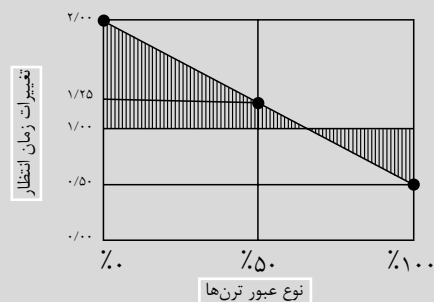
باشد. در چنین وضعی احتمال مربوط به این‌که وقتی به محل تقاطع برسیم که راه بسته باشد در  $\frac{1}{5}$  ضرب می‌شود و حد متوسط زمان انتظار برای باز شدن راه در  $\frac{2}{5}$  ضرب می‌شود. روی هم، اضافه شدن زمان متوسط انتظار برابر می‌شود با:

$$\frac{1/5}{2} \times 1/5 = 1/125$$

بنابراین زمان انتظار برای گذشتن نیم طول ترن‌ها،  $12/5$  درصد افزایش خواهد داشت:

مکانیسمین گفت که برای یک چنین وضعی، محاسبه ناچوار است و دکتر چنین توضیح داد:

- پاسخ آن هم قابل تأمل است. فعلاً نمودار سه حالت گفته شده را رسم می‌کنیم:



ملاحظه می‌شود که سطح کل متناظر با افزایش زمان متوسط به‌طور قابل ملاحظه‌ای از سطح متناظر با کاهش زمان متوسط بیش‌تر

استفاده می‌کنند با تعداد ترن‌هایی که روی یک رشته حرکت می‌کنند برابر باشد، در تقاطع آن‌ها زمان انتظار به حد وسط تقلیل خواهد یافت. اگر دو ترن با هم از آن‌جا بگذرند زمان توقف اجباری در راه بسته برای آن دو درست برابر است با زمان توقف برای یک ترن تنها.

دکتر پاسخ داد:

- این موضوع درست، اما برای وقتی که محل عبور ترن‌ها از یکدیگر درست محل تقاطع جاده با راه‌آهن باشد. در حالت‌هایی غیر از این، وضع فرق می‌کند. یک حالت هم که ممکن است پیش بیاید حالتی است که لوکوموتیو یکی از ترن‌ها هنگامی به معبر برسد که درست واگن انتهایی ترن دیگر در حال گذشتن باشد. راجع به این حالت چه می‌گویید؟

مکانیسمین پاسخ داد:

- بین این حالت و حالتی که دو ترن در آن محل هرگز به هم نرسند هیچ فرقی نیست.

دکتر اظهار داشت:

- در این مورد شما اشتباه می‌کنید. اجازه بدهید با محاسبات مقدماتی دلیل اشتباه شما را برایتان توضیح دهم. فرض می‌کنیم به‌طور متوسط در هر جهت یک ترن از راه‌آهن بگذرد و زمان عبور هر ترن از معبر محل تقاطع ۶ دقیقه باشد. با این پیش‌فرض‌ها زمان توقف پشت‌راه‌بند را حساب می‌کنیم؛ احتمال این‌که اتومبیل موقعی به محل تقاطع برسد که ترن از آن می‌گذرد یعنی راه بسته باشد برابر با یک برده است.

احتمال این‌که درست هنگامی برسد که ترن به معبر می‌رسد برابر است با احتمال آن‌که درست موقعی که ترن آنجا را ترک می‌کند. روی هم رفته، وی باید سه دقیقه انتظار بکشد تا ترن بگذرد. بنابراین، زمان متوسط توقف  $0/3$  دقیقه خواهد شد.

اکنون حالت فوق‌العاده‌ای را در نظر بگیریم که ترن‌ها در محل تقاطع به وضعی از یکدیگر بگذرند که لوکوموتیو یکی در مقابل واگن انتهایی دیگری واقع شده باشد. خیلی ساده است که اگر تعداد ترن‌ها را نصف بگیریم و در عوض، طول هر ترن را دو برابر در نظر بگیریم. در نتیجه فرقی حاصل نخواهد شد. احتمال مربوط به این‌که با راه بسته روبه‌رو شوید همان احتمال قبلی خواهد بود. اما اگر پشت‌راه‌بند توقف کرده باشید زمان انتظار شما دو برابر خواهد شد.

بنابراین، چنین دو ترنی برای اتومبیل سواری که مجبور به توقف شده وضعی دو مرتبه بدتر ایجاد می‌کند:

مکانیسمین در حالی که به موضوع فکر می‌کرد، گفت:

- واضح است که اگر بین عبور دو ترن از محل تقاطع چند دقیقه‌ای فاصله باشد، راننده‌ی خودرو می‌تواند از این مدت زمان استفاده کند و قبل از عبور ترن دیگر از راه‌آهن بگذرد و این حالت

است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که به‌طور متوسط، روبه‌رو شدن دو ترن در گذرگاه‌های مختلف باعث می‌شود که به مدتی بیش‌تر از وقتی که همان تعداد ترن بر یک رشته راه‌آهن می‌گذرند جاده بسته باشد.

در شماره‌ی ۴۱ باز هم تحت عنوان کارمند بازنشسته راه‌آهن به مسئله‌ی زنبور و راه‌حل آن می‌رسیم:

### مسئله‌ی زنبور

مکانیسمین پس از کمی مکث از دکتر خواهش کرد که معمای دیگری مطرح کند. دکتر گفت که یک معما را مطرح خواهد ساخت، اما بسیار ساده است و آن را چنین شرح داد:

دو ترن در یک لحظه از دو ایستگاه A و B به فاصله‌ی ۱۶۰ کیلومتر به طول یکدیگر حرکت می‌کنند. سرعت هر یک از آن‌ها ۸۰ کیلومتر در ساعت است. در همان لحظه‌ی حرکت ترن‌ها، زنبوری از A با سرعت ۱۰۰ کیلومتر در ساعت به طرف B پرواز می‌کند. این زنبور در لحظه‌ای که ترنی را که از B می‌آید ملاقات می‌کند جهت حرکت خود را تغییر می‌دهد و به طرف ترن اول برمی‌گردد. بعد از ملاقات با این ترن باز جهت حرکت خود را تغییر می‌دهد و به طرف ترن دوم پرواز می‌کند و این عمل را به همین ترتیب و با همان سرعت ثابت اولیه ادامه می‌دهد تا لحظه‌ای که دو ترن را با هم ملاقات کند. در این لحظه از ترس سقوط می‌کند و می‌میرد.

معلوم کنید که این زنبور در مجموع چند کیلومتر مسافت در حال پرواز بوده است؟



جانسن اظهار داشت:

خیلی ساده است. دو ترن با سرعت ۸۰ کیلومتر در ساعت به طرف یکدیگر حرکت می‌کنند. فاصله‌ی دو ایستگاه ۱۶۰ کیلومتر است. بنابراین آن‌ها درست در وسط راه در نقطه‌ای که از دو ایستگاه به یک فاصله است، یکدیگر را ملاقات می‌کنند. از ابتدای شروع حرکت ترن‌ها تا زمان ملاقات آن‌ها روی هم یک ساعت طول می‌کشد، بنابراین زنبور مدت یک ساعت در پرواز بوده است و چون

سرعت پرواز آن هم ۱۰۰ کیلومتر در ساعت است پس کل مسافتی که زنبور در حال پرواز بوده ۱۰۰ کیلومتر است. آیا درست است؟ دکتر پاسخ مکانیسمین را تأیید کرد و گفت:

کاملاً درست است. اما روشی که به کار بردید و جواب مسئله را به این سادگی به دست آوردید، نشان می‌دهد که شما ریاضی‌دان نیستید. یک ریاضی‌دان برای حل این مسئله از سری‌ها استفاده می‌کند، وی یک سری در نظر می‌گیرد که هر جمله‌ی آن یکی از فاصله‌های پیموده شده توسط زنبور است. اما این راه خیلی ساده هم نیست، زیرا تعیین فرمولی که هر یک از فاصله‌ها را بیان کند کار مشکلی است.

تعریف می‌کنند که وقتی این مسئله را برای جان ون نیومن ریاضی‌دان بزرگ معاصر مطرح کرده‌اند و از وی خواستند که ظرف چندین ثانیه جواب درست آن را پیدا کند، وی این کار را کرد. وقتی از او سؤال شد مسئله را از چه راهی حل کرده است، پاسخ داد که مجموع یک سری نامحدود را حساب کرده است. راجع به نیومن، حکایت می‌کنند که بعضی محاسبات پیچیده‌ی ریاضی را در ذهن خود با همان سرعت ماشین‌های محاسبه‌ی الکترونیکی انجام می‌داده است.

در این شماره با عنوان مسئله‌ی مسابقه، مسئله‌ی زیر از حساب استدلالی آورده شده است:

### با جایزه‌ی دو هزار ریال

از طرف: محمود کاشانی مؤلف جزوه‌های «مسائل نمونه از حساب استدلالی»

مسئله: دو عدد صحیح a و b را چنین تعیین کنید که عبارت  $(a^2 + b^2 + 1)$  بر  $(a + b)$  و عبارت  $(a^2 + b^2 - 1)$  بر  $(a - b)$  قابل قسمت باشد.

شرایط تعلق جایزه:

۱. مسئله باید با توجه به تعریف عدد صحیح در نظریه‌ی اعداد (عددهای صحیح مثبت، منفی یا صفر) حل شود.
۲. مسئله باید صددرصد کامل حل شود به‌طوری که شرح هیچ نکته‌ی مبهم یا حالت خاص از قلم نیفتاده باشد.
۳. پاسخ‌ها حداکثر تا روز آخر ماه دی به اداره‌ی مجله‌ی یکان رسیده باشد.
۴. پاسخ‌ها با خط خوانا نوشته شده باشد و روی ورقه‌ی مربوط، نام و نشانی کامل و مخصوصاً دبیرستان و پایه‌ی تحصیلی حل‌کننده ذکر شده باشد.

تذکر - مسئله‌ی فوق حالت خاصی از مسئله‌ی زیر است. می‌توانید آن‌را به صورت کلی حل کنید: به ازای چه مقادیر صحیح (مثبت، منفی یا صفر) از اعداد a و b عبارت

$$(a^2 + b^2 + 2ab + 1) \text{ بر } (a + b) \text{ و عبارت}$$

$$(a^2 + b^2 + 2ab - 1) \text{ بر } (a - b) \text{ بخش‌پذیر است.}$$

در شماره ۴۲، مجله به مقاله‌های جالب زیر می‌پردازد:

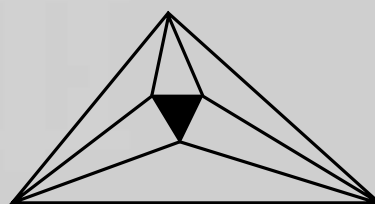
### خواص مثلث شبه قائمه

#### Pseudo rectangle triangle

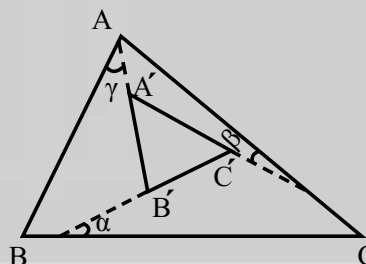
تهیه از: جعفر آقایی چاوشی

مثلثی که تفاضل دو زاویه‌ی آن یک قائمه باشد، مثلث شبه‌قائمه نامیده می‌شود. اگر مثلث ABC در رأس A شبه‌قائمه باشد، یعنی داشته باشیم:  $\hat{B} - \hat{C} = 90^\circ$ ، دارای خواص زیر است.

۱. ارتفاع AH واسطه‌ی هندسی است بین BH و CH.
۲. نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه‌ی A با یکدیگر برابرند.



شکل ۱



شکل ۲

۳. ارتفاع AH بر دایره‌ی محیطی مثلث مماس است.

۴. قرینه‌ی رأس A نسبت به ضلع BC بر نقطه‌ی تلاقی ارتفاعات واقع است.

۵. بین اندازه‌های ضلع‌ها و شعاع دایره‌ی محیطی روابط زیر برقرار است:

$$b^2 - c^2 = 2aR \quad \text{و} \quad b^2 + c^2 = 4R^2$$

۶. اگر ضلع BC از حیث اندازه و وضع ثابت بماند و رأس A

در صفحه‌ی مثلث تغییر مکان دهد تا همواره مثلث شبه‌قائمه باقی بماند، مکان A و همچنین مکان نقطه‌ی تلاقی ارتفاعات، یک هذلولی متساوی‌القطرین خواهد بود.

### قضیه‌ای درباره‌ی مثلث مورلی

از ماهنامه‌ی ریاضیات آمریکا

ترجمه: غلامحسین بهفرو

اگر هر یک از زاویه‌های مثلث غیر مشخص ABC را به سه قسمت متساوی تقسیم کنیم، از برخورد دوجه‌ی خطوط حاصل مثلثی به دست می‌آید که متساوی‌الاضلاع است (مجموعه‌ی علمی یکان

سال). این مثلث به نام مثلث مورلی معروف است (شکل ۱). مثلث ABC و یک مثلث دلخواه  $A'B'C'$  واقع در داخل آن را در نظر می‌گیریم. اگر  $\alpha, \beta, \gamma$  زاویه‌های بین اضلاع متناظر از این دو مثلث باشند (شکل ۲) روابط زیر برقرار خواهد بود:

$$A' = A + \beta - \gamma \quad \text{و} \quad B' = B + \gamma - \alpha \quad \text{و} \quad C' = C + \alpha - \beta$$

حال قضیه‌ی زیر را مطرح می‌کنیم:

قضیه - شرط لازم و کافی برای آن که اضلاع مثلث مورلی مربوط به مثلث ABC با اضلاع مثلث مورلی مربوط به مثلث  $A'B'C'$  نظیر به نظیر با هم موازی باشند، آن است که داشته باشیم:

$$\frac{B-C}{3} = \alpha + \frac{B'-C'}{3}$$

که با در نظر گرفتن جهت زاویه‌ها نتیجه خواهد شد:

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

به آسانی ثابت می‌شود که شرط فوق، وقتی که  $A'B'C'$  یکی از هشت مثلث زیر باشد، برقرار خواهد بود:

۱. مثلث میانه‌ای مثلث ABC؛
۲. مثلث ارتفاعیه‌ی مثلث ABC؛
۳. مثلثی که از وصل کردن مراکز دایره‌های محاطی خارجی به دست می‌آید؛
۴. مثلثی که از وصل کردن نقاط تماس اضلاع مثلث ABC با دایره‌ی محاطی داخلی به دست می‌آید؛
- ۵ و ۶. مثلث‌هایی که از وصل کردن نقاط تماس اضلاع مثلث ABC با دایره‌ی خارجی آن به دست می‌آید.
۷. مثلثی که از وصل کردن نقاط تماس اضلاع مثلث ABC در رأس‌های آن به دست می‌آید.

### کارمند بازنشسته‌ی راه‌آهن

کبوتران نامه‌بر

در ملاقات دیگری که بین جانسن مکانیسین بازنشسته‌ی راه‌آهن و دکتر پزشکی ناحیه روی داد، جانسن داستانی از یک مأموریت جالب که در زمان اشتغال به کار برای وی اتفاق افتاده بود برای دکتر شرح داد. او گفت: روزی از طرف هیأت نقل و انتقالات به وی مأموریت دادند تا به هنگام کار در یکی از ترن‌های عادی دو کبوتر نامه‌بر را با خود ببرد و آن‌ها را دقیقاً در فاصله‌ی ۸۰ کیلومتری یکدیگر و درست به فاصله‌ی یک ساعت از هم رها کند.

خوشبختانه قسمتی از مسیری که راه‌آهن از آن می‌گذشت کاملاً هموار بود. طول این خط آهن مستقیم ۱۶۰ کیلومتری به نحوی بود که ترن‌ها این فاصله را درست در مدت ۲ ساعت می‌پیموندند. در این



فاصله ایستگاه‌هایی وجود داشت و در آن‌ها ترن‌ها به نسبت تعداد مسافرانی که پیاده یا سوار می‌شدند توقف داشتند، اما با کم و زیاد کردن سرعت، این زمان‌های توقف جبران می‌شد و در نتیجه، فاصله‌ی ۱۶۰ کیلومتری درست در ۲ ساعت طی می‌شد.

اما از این که ما فاصله‌ی ۱۶۰ کیلومتری را در مدت ۲ ساعت طی می‌کردیم و سرعت متوسط ما ۸۰ کیلومتر در ساعت بود، نمی‌توان اطمینان داشت که یک فاصله‌ی زمانی یک ساعتی وجود داشته که در آن مسافت ۸۰ کیلومتر پیموده شده باشد.

دکتر اظهار داشت: «این چنین نیست. بدون در نظر گرفتن

تغییرات سرعت در فاصله‌ی ۲ ساعت به سادگی می‌توان ثابت کرد که در هر حال فاصله‌ای یک ساعتی وجود

یک فاصله‌ی یک ساعتی

مجزا در نظر می‌گیریم و آن را به

تدریج در طول مسیر (شکل در پایین

است) جا می‌دهیم به طوری که ابتدا یک

ساعت اول و بعد به تدریج یک ساعت دوم را دربر گرفته

باشد. در این یک ساعت مجزا که آن را در

طول مسیر پخش کردیم سرعت متوسط

همان سرعت مطلوب است. از آن‌جا که این

فاصله یک ساعت اول را دربر دارد، در ابتدای آن

سرعت متوسط کم‌تر از ۸۰ کیلومتر در ساعت می‌باشد

و چون یک ساعت دوم را هم دربر می‌گیرد، در پایان، سرعت

متوسط آن بیش‌تر از ۸۰ کیلومتر خواهد بود.

ملاحظه می‌کنیم که در طول یک ساعت متوسط

بین دو مقدار محصور می‌ماند، یکی کم‌تر از ۸۰ کیلومتر در

ساعت و دیگری بیش‌تر از آن. بنابراین، بخشی از مسیر وجود

دارد که ضمن آن در این فاصله‌ی یک ساعتی سرعت متوسط دقیقاً برابر

با ۸۰ کیلومتر در ساعت است و به این صورت حکم ثابت می‌شود.»

مکانیسم بازنشسته حق را به جانب دکتر داد و چنین اظهار داشت:

«آنچه گفتید به جای خود درست است، اما این موضوعی نبود که به کار

هیئت نقل و انتقالات بیاید. برای این‌که هیچ‌گاه من نمی‌توانستم شروع

این فاصله را تعیین کنم و در نتیجه نمی‌توانستم ساعت رها شدن کبوتران

را معلوم کنم. فعلاً هم چنانچه مایل باشید مسئله‌ی کوچکی که سراغ

دارم مطرح کنم، شاید برای شما جالب باشد.» قرار شد که این مسئله در

جلسه‌ی بعد مطرح شود.

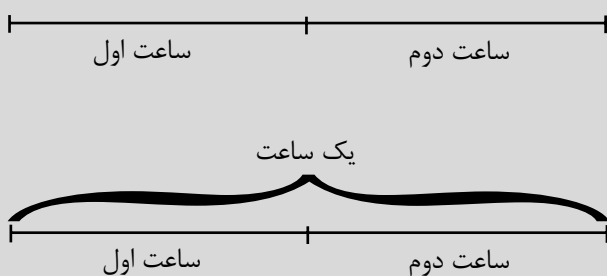
داشته است که طی آن مسافت ۸۰ کیلومتر پیموده می‌شده است. راه ساده‌ی اثبات این مطلب از این قرار است:

فاصله‌ی دو ساعتی را به دو فاصله‌ی یک ساعتی تقسیم می‌کنیم.

فرض می‌کنیم که نه در یک ساعت اول و نه در یک ساعت دوم دقیقاً مسافت ۸۰ کیلومتر را پیموده باشید، وگرنه مسئله خیلی ساده خواهد بود. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که در یک ساعت اول سرعت متوسط

شما کمتر از ۸۰ کیلومتر در ساعت و در دومین ساعت بیش‌تر از این مقدار بوده است. ملاحظه خواهید کرد که اگر به ترتیب عکس فرض

کنیم، اثبات فرق نخواهد کرد.



# نامساوی مثلثی و روش برداری

مؤلفان: میلاد محبی و سینا عبدالهی نژاد  
دانش آموزان دوره‌ی پیش‌دانشگاهی

اشاره  
در این مقاله قصد داریم شما را با روشی جالب برای اثبات نامساوی مثلثی آشنا کنیم. در این جا ابتدا نامساوی مثلثی را مطرح و سپس روش برداری را ارائه می‌کنیم. روش برداری از جمله روش‌های کاربردی در حل مسائل ریاضی است و از آن در همه‌ی شاخه‌های ریاضی استفاده می‌کنند. این روش بیش‌تر برای تعیین ماکزیمم و مینیمم و حل معادلات و اثبات نابرابری‌ها استفاده می‌شود.



اکنون خواهیم داشت:

$$\overline{AB}(-c, -d), \overline{AC}((b-c), -d)$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = |\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}| \cdot \cos \hat{\alpha} \Rightarrow \cos \hat{\alpha} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|}$$

می‌دانیم که در هر مثلث، کسینوس هیچ زاویه‌ای برابر ۱ و -۱ نیست<sup>۱</sup>. پس همواره:  $-1 < \cos \alpha < 1$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{(-c \times (b-c)) + (-d \times (-d))}{\sqrt{c^2 + d^2} \times \sqrt{(b-c)^2 + d^2}}$$

$$= \frac{c^2 - bc + d^2}{\sqrt{(c^2 + d^2)((b-c)^2 + d^2)}} > -1$$

$$\Rightarrow c^2 - bc + d^2 > -\sqrt{(c^2 + d^2)((b-c)^2 + d^2)}$$

$$\Rightarrow 2(c^2 - bc + d^2) > -2\sqrt{(c^2 + d^2)((b-c)^2 + d^2)}$$

$$\Rightarrow (c^2 + d^2) + (c^2 + d^2 - 2bc) + 2\sqrt{(c^2 + d^2)((b-c)^2 + d^2)} > 0$$

$$\Rightarrow (c^2 + d^2) + (d^2 + c^2 + b^2 - 2bc) + 2\sqrt{((b-c)^2 + d^2)(c^2 + d^2)} > b^2$$

$$\Rightarrow (\sqrt{c^2 + d^2})^2 + (\sqrt{(b-c)^2 + d^2})^2 + 2\sqrt{((b-c)^2 + d^2)(c^2 + d^2)} > b^2$$

$$(\sqrt{c^2 + d^2} + \sqrt{(b-c)^2 + d^2})^2 > b^2$$

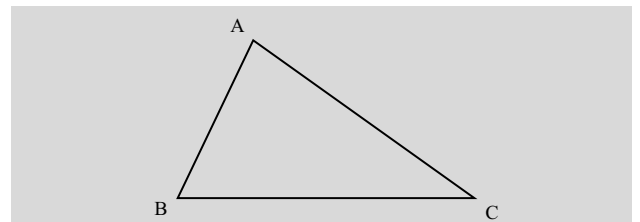
$$\Rightarrow \sqrt{c^2 + d^2} + \sqrt{(b-c)^2 + d^2} > b \Rightarrow AB + AC > BC$$

برای بقیه‌ی اضلاع یعنی  $BC + AC > AB$  و  $BC + AB > AC$  نیز به همین صورت حکم اثبات می‌شود.

پی‌نوشت

۱. زیرا در هیچ مثلثی، زاویه‌ای وجود ندارد که اندازه‌ی آن  $0^\circ$  یا  $180^\circ$  باشد.

قضیه‌ی نابرابری مثلثی: در هر مثلث، مجموع اندازه‌های هر دو ضلع از اندازه‌ی ضلع سوم بزرگ‌تر است. یعنی اگر  $A, B, C$  سه نقطه‌ی متمایز ناممخط باشند، آن‌گاه:  $AC + AB > BC$ .



حالا می‌خواهیم قضیه را اثبات کنیم، ولی ابتدا چند خاصیت از بردارها را بیان می‌کنیم:

بردارهای  $\vec{a}(x_1, y_1)$  و  $\vec{b}(x_2, y_2)$  را در نظر بگیرید. خواهیم داشت:

$$1) |\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad |\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

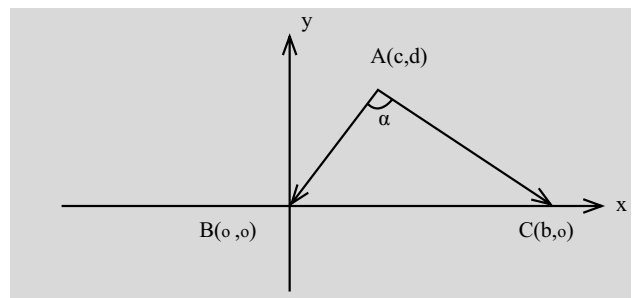
$$2) \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \hat{\alpha}; \quad (\hat{\alpha} \text{ زاویه‌ی بین دو بردار است})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

(منظور از  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ، ضرب داخلی دو بردار است.)

حالا ما مثلث  $\triangle ABC$  را به صورت زیر روی محورهای مختصات

قرار می‌دهیم.





# اصل لانه کبوتری

اشاره

میر شهرام صدر

یوهان پتر گوستاف لوژون دیریکله<sup>۱</sup> در ۱۳ فوریه سال ۱۸۰۵ میلادی در شهر دورن<sup>۲</sup> آلمان متولد شد و به ترتیب در برلین و برسلاو<sup>۳</sup> سمت استادی داشت. او از شاگردان بالاستعداد گاوس بود که با مرگ گاوس در سال ۱۸۵۵ به عنوان جانشین وی در دانشگاه گوتینگن<sup>۴</sup> منصوب شد که نشانه‌ای از شایستگی‌های او است. زمانی که او در گوتینگن بود، امید داشت آثار ناتمام گاوس را به پایان برساند، ولی مرگ زود هنگام او در سال ۱۸۵۹ مانع از آن شد. دلیل شهرت دیریکله در ریاضیات، تحقیقات مهم او در سری‌های فوریه و نظریه‌ی اعداد است. او در سال ۱۸۳۴ اصل «کشوی دیریکله» یا همان اصل «لانه کبوتری» را بیان کرد. این اصل بسیار ساده، کاربردهای فراوانی برای حل مسائل مربوط به مجموعه‌های متناهی در نظریه‌ی اعداد، ترکیبات و هندسه دارد، در ادامه، به بیان این اصل می‌پردازیم و کاربرد آن را با ارائه‌ی مسائل گوناگون بررسی می‌کنیم.



## اصل لانه کبوتری

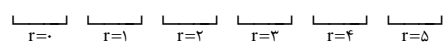
فرض کنید  $m$  و  $n$  دو عدد طبیعی باشند و داشته باشیم:  $m < n$ . اگر  $n$  شی را در  $m$  خانه قرار دهیم (به هر صورت، اعم از این که خانه‌ای خالی بماند یا نماند)، آن گاه حداقل یکی از این خانه‌ها شامل دو شی یا بیش تر خواهد بود.

اکنون اگر  $n$  را تعداد کبوترها و  $m$  را تعداد لانه‌ها تصور کنیم، اصل لانه کبوتری را خواهیم داشت.

با استفاده از این اصل ساده و بدیهی، می‌توان در مواقع حساس، مسائل مهم و مشکل را حل کرد. در واقع، بدون استفاده از این اصل، اثبات چنین مسائلی، کاری بسیار دشوار خواهد بود.

مثال ۱:  $A$  یک زیرمجموعه‌ی  $V$  عضوی از اعداد طبیعی است. اگر اعضای  $A$  را بر ۶ تقسیم کنیم، ثابت کنید که حداقل دو عضو از این مجموعه، دارای باقی‌مانده‌ی یکسان‌اند.

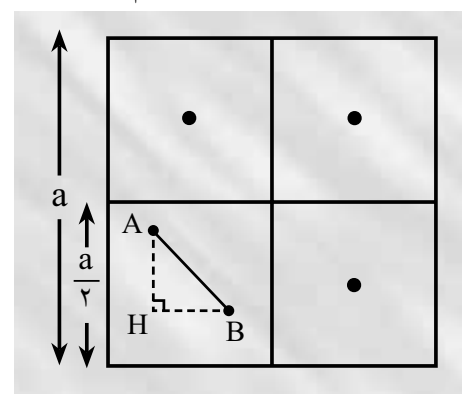
حل: اگر هر یک از اعضای مجموعه‌ی  $A$  را بر ۶ تقسیم کنیم، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم، یکی از عددهای مجموعه‌ی  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  است. حال اگر ۶ لانه به صورت زیر در نظر بگیریم:



و اعضای مجموعه‌ی  $A$  را به عنوان ۷ کبوتر تصور کنیم، اگر کبوترها داخل لانه‌ها قرار گیرند، آن‌گاه حداقل یک لانه وجود دارد که در آن دو یا بیش تر کبوتر است، یعنی حداقل دو عدد یافت می‌شوند که پس از تقسیم بر ۶، هم باقی‌مانده هستند.

مثال ۲: ۵ نقطه داخل مربعی به ضلع  $a$  مفروض‌اند. ثابت کنید که حداقل فاصله‌ی دو نقطه از این ۵ نقطه، کم‌تر از  $\frac{\sqrt{2}}{2}a$  است.

حل: ابتدا مربع را به چهار مربع برابر تقسیم می‌کنیم (شکل ۱)، سپس هر یک از آن‌ها را به عنوان یک لانه تصور می‌کنیم. اکنون اگر ۵ نقطه را ۵ کبوتر در نظر بگیریم که می‌خواهند لانه‌ها را اشغال کنند، آن‌گاه طبق اصل لانه کبوتری، حداقل یک لانه وجود دارد که در آن دو یا بیش تر کبوتر قرار دارند. بنابراین داریم:



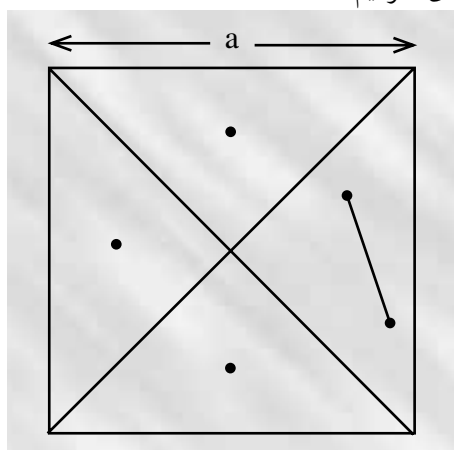
(شکل ۱)

$$\begin{cases} AH < \frac{a}{2} \Rightarrow AH^2 < \frac{a^2}{4} \\ BH < \frac{a}{2} \Rightarrow BH^2 < \frac{a^2}{4} \end{cases} \Rightarrow AH^2 + BH^2 < \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$$

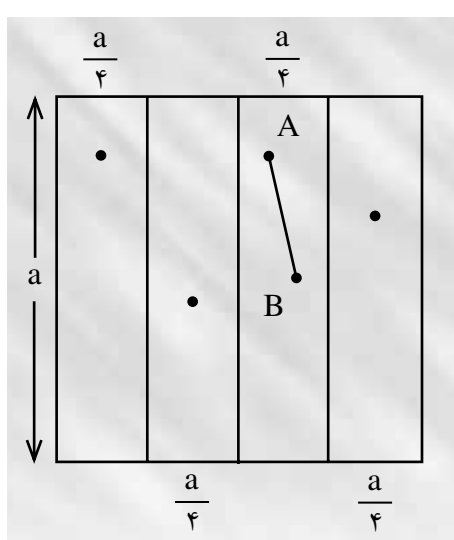
در مثلث  $\Delta ABH$  طبق قضیه‌ی فیثاغورس، داریم  $AB^2 = AH^2 + BH^2$ ؛ بنابراین:

$$AH^2 + BH^2 < \frac{2a^2}{4} \Rightarrow AB^2 < \frac{a^2}{2} \Rightarrow AB < \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

اکنون این سؤال پیش می‌آید که چرا مربع به ضلع  $a$  را به این صورت تقسیم‌بندی کردیم، و چرا این مربع را به صورت شکل‌های زیر تقسیم‌بندی نکردیم؟



(الف)



(ب)

پاسخ آن است که در حل یک مسئله، انتخاب روش‌های مجاز و منطقی با توجه به اصول و فرض‌های مسئله با ما است و هر راهی که به نظرمان می‌رسد، می‌توانیم انتخاب کنیم، اما با تقسیم‌بندی مانند شکل الف به حکم مسئله نمی‌رسیم. بدیهی است که با استفاده



از اصل لانه کبوتری، می‌توانیم نتیجه بگیریم که حداقل ۲ نقطه یا بیش‌تر داخل یکی از مثلث‌های قائم‌الزاویه شکل الف قرار خواهند داشت ولی در این صورت فاصله‌ی حداقل ۲ نقطه کمتر از عدد  $a$  می‌شود.

چون در مثلث قائم‌الزاویه فاصله‌ی بین هر دو نقطه از وتر کوچکتر است، پس  $AB < a$ . یعنی حداقل ۲ نقطه یا بیش‌تر وجود دارند که فاصله‌ی آن‌ها کمتر از  $a$  است و این نتیجه نیز صحیح است ولی معادل با حکم مثال ۲ نیست.

در تقسیم‌بندی شکل ب به این نتیجه می‌رسیم که حداقل ۲ نقطه یا بیش‌تر یافت می‌شوند که فاصله‌ی آن‌ها کمتر از قطر مستطیل است، یعنی  $AB < \frac{\sqrt{15}}{4}a$  و این نیز نتیجه‌ای صحیح است ولی معادل با حکم مثال ۲ نیست.

اگر سؤال این باشد که از کجا فهمیدیم باید مربع را به صورت شکل ۱ تقسیم‌بندی کنیم تا به حکم مسئله برسیم، در جواب می‌توان گفت که این بستگی به تجربه، خلاقیت و ابتکار فراوان در زمینه‌ی حل مسائل اصل لانه کبوتری دارد.

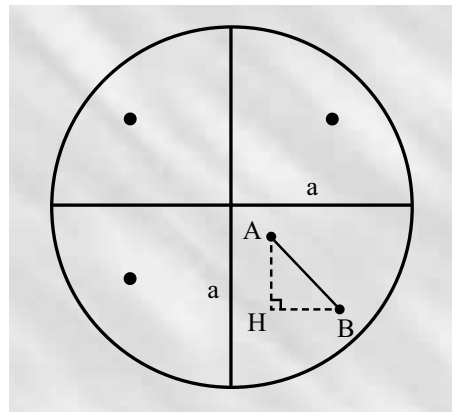
پرسش ۱: اگر ۵ نقطه را داخل مربعی به ضلع ۱۰ در نظر بگیریم، آن‌گاه حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله‌ی آن‌ها کم‌تر از یکی از عددهای زیر است؛ آن عدد کدام است؟

- (۱)  $5\sqrt{2}$  (۲)  $\frac{5\sqrt{2}}{2}$  (۳)  $10\sqrt{2}$  (۴)  $2\sqrt{5}$

حل: گزینه‌ی ۱ صحیح است، زیرا طبق مسئله‌ی قبل، با فرض  $a=10$  داریم:

$$AB < \frac{\sqrt{2}}{2}a, a=10 \Rightarrow AB < 5\sqrt{2}$$

مثال ۳: ۵ نقطه را داخل دایره‌ای به شعاع  $a$  در نظر می‌گیریم. ثابت کنید که حداقل فاصله‌ی دو نقطه، کم‌تر از  $a\sqrt{2}$  است.



حل: ابتدا دو قطر عمود برهم رسم می‌کنیم و دایره را به چهار قسمت برابر تقسیم می‌کنیم، سپس هر یک از این قسمت‌ها را به عنوان یک لانه تصور می‌کنیم. اکنون اگر ۵ نقطه را ۵ کبوتر در نظر بگیریم که می‌خواهند لانه‌ها را اشغال کنند، آن‌گاه طبق اصل لانه کبوتری، حداقل یک لانه وجود دارد که در آن دو یا بیش‌تر کبوتر قرار دارند. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} AH < a \Rightarrow AH^2 < a^2 \\ BH < a \Rightarrow BH^2 < a^2 \end{cases} \Rightarrow AH^2 + BH^2 < 2a^2 \Rightarrow AB^2 < 2a^2 \Rightarrow AB < a\sqrt{2}$$

پرسش ۲: ۵ نقطه را داخل دایره‌ای به قطر ۸ در نظر می‌گیریم، حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله‌ی آن‌ها کم‌تر از یکی از عددهای زیر است، آن عدد کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{2}$  (۲)  $2\sqrt{2}$  (۳)  $4\sqrt{2}$  (۴)  $8\sqrt{2}$

حل: گزینه‌ی ۳ صحیح است، زیرا شعاع دایره ۴ است و طبق مسئله‌ی قبل داریم:

$$AB < a\sqrt{2} \text{ و } a=4 \Rightarrow AB < 4\sqrt{2}$$

مثال ۴: داخل جعبه‌ای، ۷ مهره به رنگ‌های سبز، سفید و آبی وجود دارد. این مهره‌ها را در دو جعبه قرار می‌دهیم. ثابت کنید که یکی از این دو جعبه، حداقل دارای دو مهره‌ی هم‌رنگ است.

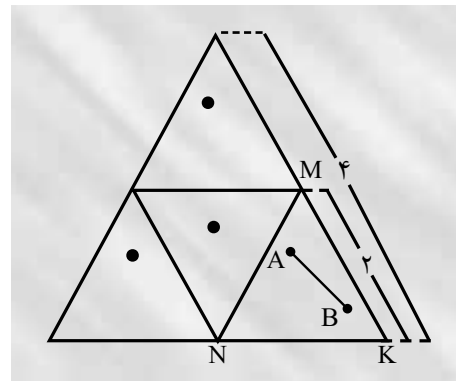
حل: طبق جدول ذیل، می‌توان مهره‌ها را داخل دو جعبه قرار داد. در صورتی که از مرحله‌ی اول تا مرحله‌ی سوم از اصل لانه کبوتری برای جعبه‌ی دوم استفاده کنیم و از مرحله‌ی چهارم تا مرحله‌ی آخر از اصل لانه کبوتری برای جعبه‌ی اول استفاده کنیم، حکم مسئله برقرار است.

در هر مرحله، سه رنگ را به عنوان ۳ لانه و تعداد مهره‌ها را به عنوان کبوترها در نظر می‌گیریم. برای مرحله‌ی اول، ۳ لانه و ۶ کبوتر در جعبه‌ی دوم داریم. اکنون اگر کبوترها داخل لانه‌ها قرار گیرند، حداقل یک لانه وجود دارد که در آن، بیش از یک کبوتر است؛ یعنی در جعبه‌ی دوم، حداقل دو مهره‌ی هم‌رنگ وجود دارد.

مرحله	جعبه‌ی اول	جعبه‌ی دوم
۱	۱	۶
۲	۲	۵
۳	۳	۴
۴	۴	۳
۵	۵	۲
۶	۶	۱

مثال ۵: ۵ نقطه داخل مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۴ در نظر بگیرید. ثابت کنید حداقل فاصله‌ی دو نقطه، کم‌تر از ۲ است.

حل: ابتدا مثلث را مانند شکل زیر به چهار قسمت برابر تقسیم می‌کنیم. سپس هر قسمت را به عنوان یک لانه در نظر می‌گیریم. اگر ۵ نقطه را به عنوان ۵ کبوتر تصور کنیم که لانه‌ها را اشغال می‌کنند، آن‌گاه طبق اصل لانه کبوتری، حداقل یک لانه وجود دارد که در آن، دو یا بیش‌تر کبوتر قرار دارد. فرض کنیم دو نقطه‌ی  $A$  و  $B$  داخل مثلث  $\Delta MNK$  قرار داشته باشد. چون در مثلث متساوی الاضلاع، فاصله‌ی بین هر دو نقطه کم‌تر از طول ضلع این مثلث است، پس  $AB < 2$ .



مثال ۶: اگر در یک مهمانی  $n$  نفر حضور داشته باشند، ثابت کنید حداقل دو نفر وجود دارند که تعداد دوستان آن‌ها با هم برابر است (اگر  $A$  با  $B$  دوست باشد،  $B$  هم با  $A$  دوست است).

حل: کسی که کم‌ترین دوست را دارد، تعداد دوستانش برابر صفر است و کسی که بیش‌ترین دوست را دارد، تعداد دوستانش برابر  $n-2$  است (زیرا او به‌جز خودش و کسی که دوست ندارد، با بقیه دوست است)؛ بنابراین، تعداد دوستان یک شخص، می‌تواند یکی از اعداد  $0, 1, 2, \dots, n-2$  باشد. اگر لانه‌ها را به‌صورت زیر در نظر بگیریم:  $F = \{0, 1, 2, \dots, n-2\}$  (به‌منظور تعداد دوست است).

ملاحظه می‌کنیم که  $n-1$  لانه و  $n$  کبوتر داریم. پس طبق اصل لانه‌ی کبوتری، حداقل یک لانه وجود دارد که با دو یا بیش‌تر کبوتر اشغال می‌شود، یعنی دو نفر وجود دارند که تعداد دوستان آن‌ها با هم برابر است.

مثال ۷: ثابت کنید که هر مجموعه‌ی  $n$  عضوی از اعداد طبیعی مانند  $A$ ، حداقل دارای یک زیرمجموعه است که حاصل جمع اعضا آن بر  $n$  بخش‌پذیر است.

اثبات با برهان خلف: اگر  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ، در این صورت فرض می‌کنیم هیچ‌یک از  $2^n$  زیرمجموعه‌ی  $A$  دارای خاصیت فوق نباشند، یعنی حاصل جمع اعضایشان بر  $n$  بخش‌پذیر نباشد، به‌ویژه

هر یک از مجموعه‌های:

$$A_1 = \{a_1\}, A_2 = \{a_1, a_2\}, A_3 = \{a_1, a_2, a_3\}, \dots, A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

نیز مجموع اعضایشان مضرب  $n$  نیست. پس اعداد زیر هیچ‌یک بر  $n$  بخش‌پذیر نیستند:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

از طرفی می‌دانیم که باقی‌مانده‌ی تقسیم این  $n$  عدد طبیعی بر یکی از اعداد ۱ تا  $n-1$  است (صفر جزء باقی‌مانده‌ها نیست، زیرا بر  $n$  بخش‌پذیر نیست). لذا چون  $n$  عدد موجود است و  $n-1$  باقی‌مانده داریم (از ۱ تا  $n-1$ ) طبق اصل لانه‌ی کبوتری، لاقلاً ۲ عدد از این  $n$  عدد باقی‌مانده‌ی تقسیمشان بر  $n$  با هم برابر می‌شود. فرض می‌کنیم  $S_i$  و  $S_j$  در تقسیم بر  $n$  هم باقی‌مانده باشند که  $i > j$  پس:

$$S_j - S_i = kn, S_j - S_i = a_{i+1} + \dots + a_j$$

و واضح است که  $a_{i+1}, \dots, a_j$  اعضای  $A$  هستند و اگر قرار دهیم  $B = \{a_{i+1}, \dots, a_j\}$  همواره  $B \subset A$  و دیدیم که مجموع اعضا  $B$  مضرب  $n$  است و این با فرض خلف تناقض دارد. پس حکم ثابت می‌شود.

پرسش ۳: ۵ نقطه‌ی متمایز از محیط دایره‌ی مثلثاتی مفروض‌اند. در این صورت کدام درست است؟

(۱) حداقل دو نقطه، دارای نسبت‌های مثلثاتی برابر هستند.

(ب) حداقل دو نقطه، تانژانت‌های برابر دارند.

(۳) حداقل دو نقطه، سینوس‌های برابر دارند.

(۴) حداقل دو نقطه، نسبت‌های مثلثاتی هم‌علامت دارند.

حل: گزینه‌ی ۴ صحیح است، زیرا اگر هر ربع دایره‌ی مثلثاتی را یک لانه در نظر بگیریم و هر یک از آن ۵ نقطه را کبوتر فرض کنیم، چون تعداد کبوترها از لانه‌ها بیش‌تر است، طبق اصل لانه‌ی کبوتری، حداقل ۲ نقطه از این ۵ نقطه در یک ربع دایره واقع می‌شوند. بنابراین، نسبت‌های مثلثاتی آن‌ها هم‌علامت خواهد بود.

مثال: نشان دهید که هر زیرمجموعه‌ی شش‌عضوی از مجموعه‌ی  $S = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$  حداقل دو عضو دارد که مجموع آن‌ها برابر ۱۰ است.

حل: هر لانه را برای دو عددی از مجموعه‌ی  $S$  در نظر می‌گیریم که مجموعشان برابر با ۱۰ است. بنابراین داریم:

$$\overbrace{1, 9} \quad \overbrace{2, 8} \quad \overbrace{3, 7} \quad \overbrace{4, 6} \quad \overbrace{5}$$

ملاحظه می‌کنیم که تعداد لانه‌ها ۵ تا است. هرگاه ۶ عضو زیرمجموعه‌ای از  $S$  را به‌عنوان ۶ کبوتر در نظر بگیریم و قرار باشد که کبوترها لانه‌ها را اشغال کنند، آن‌گاه طبق اصل لانه‌ی کبوتری، لانه‌ای باید باشد که در آن حداقل دو کبوتر قرار گیرد، پس در آن

لانه دو عدد وجود دارد که مجموعشان برابر با ۱۰ است.

### تعمیم یافته‌ی اصل لانه‌ی کبوتری

تا این جا معمولاً با مسائلی روبه‌رو شدیم که در آن‌ها تعداد کبوترها یکی بیش‌تر از تعداد لانه‌ها بود، یعنی  $k$  لانه و  $k+1$  کبوتر داشتیم که طبق اصل لانه‌ی کبوتری حداقل در یکی از لانه‌ها دو کبوتر یا بیش‌تر قرار دارد.

اما بدیهی است که اگر تعداد کبوترها از چند برابر تعداد لانه‌ها بیش‌تر باشد، آن‌گاه نتیجه بیش از این است که «حداقل دو کبوتر یا بیش‌تر در یکی از لانه‌ها وجود دارد». برای مثال، فرض کنید ۳ لانه و ۱۰ کبوتر داریم. اگر قرار باشد کبوترها لانه‌ها را اشغال کنند، درحالی‌که کبوترها در تمام لانه‌ها پخش باشند، به‌طور شهودی ملاحظه می‌کنیم که وقتی ۹ کبوتر لانه‌ها را اشغال کرده باشند، در هر لانه ۳ کبوتر قرار دارد. چنان‌چه کبوتر دهم در هر لانه قرار بگیرد، حداقل در یکی از لانه‌ها ۴ کبوتر یا بیش‌تر قرار خواهند داشت و این تعمیم یافته‌ی اصل لانه‌ی کبوتری است.

$$\underbrace{\quad \times \times \times \quad}_{\text{کبوتر ۱}} \quad \underbrace{\quad \times \times \times \times \quad}_{\text{کبوتر ۲}} \quad \underbrace{\quad \times \times \times \quad}_{\text{کبوتر ۳}}$$

می‌توان تعمیم یافته‌ی اصل لانه‌ی کبوتری را به این صورت بیان کرد:

هرگاه  $m$  کبوتر وارد  $n$  لانه شوند ( $m > n$ )، آن‌گاه حداقل  $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1$  کبوتر وارد یک لانه می‌شوند.

مثال ۹: در کلاسی ۲۵ نفر دانش‌آموز حضور دارند. ثابت کنید که

حداقل ۳ نفر آن‌ها در یک ماه از سال به دنیا آمده‌اند.

حل: ۱۲ ماه سال را به‌عنوان  $n=12$  لانه و  $m=25$  را تعداد

کبوترها در نظر می‌گیریم. در این صورت داریم:

$$\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{25-1}{12} \right\rfloor + 1 = 3$$

بنابراین حداقل ۳ نفر آن‌ها در یک ماه از سال به دنیا آمده‌اند.

مثال ۱۰: ۲۶ نفر از دانش‌آموزان یک مدرسه با ۷ خودرو به

سمت منزلشان حرکت می‌کنند. ثابت کنید که در هر خودرو حداقل ۴

نفر دانش‌آموز قرار دارند.

حل: ۷ خودرو را به‌عنوان  $n=7$  لانه و  $m=26$  نفر را به‌عنوان

کبوترها در نظر می‌گیریم، در این صورت داریم:

$$\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{26-1}{7} \right\rfloor + 1 = 4$$

بنابراین، حداقل ۴ دانش‌آموز در یک خودرو قرار دارند.

مثال ۱۱: در کشوی کمد لباس‌ها چند جفت جوراب قرمز، آبی و

سفید وجود دارد. چند لنگه جوراب (بدون آن‌که به رنگ آن‌ها نگاه کنیم) باید از کشو بیرون بیاوریم تا مطمئن شویم که حداقل ۳ جفت جوراب یک‌رنگ برداشته‌ایم؟

حل: هر رنگ را به‌عنوان یک لانه در نظر می‌گیریم، در این صورت

$n=3$ . از طرفی می‌خواهیم حداقل در یک لانه ۳ جفت جوراب هم‌رنگ

یا ۶ لنگه جوراب هم‌رنگ داشته باشیم. بنابراین داریم:

$$\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1 = 6 \text{ و } n=3 \Rightarrow \left\lfloor \frac{m-1}{3} \right\rfloor = 5$$

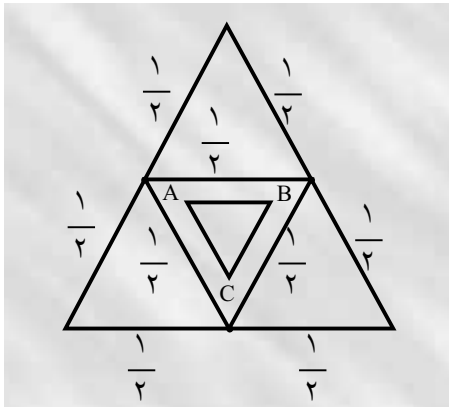
$$\Rightarrow 5 \leq \frac{m-1}{3} < 6 \Rightarrow 15 \leq m-1 < 18 \Rightarrow 16 \leq m < 19$$

در نتیجه، حداقل باید ۱۶ لنگه جوراب از کشو برداریم.

مثال ۱۲: در یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد، ۱۰ نقطه

به‌طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید سه تا از این نقاط، رؤوس

مثلثی با محیط کم‌تر از  $1/5$  واحد هستند.



حل: مطابق شکل، مثلث را به چهار لانه تفکیک می‌کنیم.

چنان‌چه ۱۰ نقطه، لانه‌ها را اشغال کنند، آن‌گاه در یک لانه حداقل

$\left\lfloor \frac{10-1}{4} \right\rfloor + 1 = 3$  نقطه وجود دارد. چنان‌چه این سه نقطه را به هم

وصل کنیم، مثلث  $ABC$  به‌وجود می‌آید که طول هر یک از اضلاع آن

کوچک‌تر از  $1/4$  است. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} AB < \frac{1}{4} \\ AC < \frac{1}{4} \Rightarrow AB + AC + BC < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ \Rightarrow P = AB + AC + BC < 1/5 \\ BC < \frac{1}{4} \end{cases}$$

مثال ۱۳: هرگاه  $S$  یک زیرمجموعه‌ی  $70$  عضوی از اعداد طبیعی

باشد، چنان‌چه اعضای  $S$  را بر  $20$  تقسیم کنیم، ثابت کنید حداقل ۴

عضو دارای باقی‌مانده‌ی یکسان هستند.

حل: در صورتی که هر عدد طبیعی را بر  $20$  تقسیم کنیم،

باقی‌مانده‌ی تقسیم آن عدد بر  $20$  یکی از عددهای زیر خواهند بود.



پی نوشت

1. Peter Gustav Lejeune Dirichle
2. Düren
3. Breslau
4. Gottingen

۱۹ و ... و ۲ و ۱ و ۰ خواهد بود.

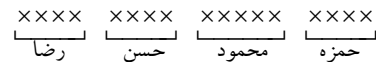
چنانچه این باقی مانده‌ها را، که تعدادشان  $n=20$  است، به عنوان لانه‌ها و  $m=70$  را تعداد کبوترها در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\left[ \frac{m-1}{n} \right] + 1 = \left[ \frac{70-1}{20} \right] + 1 = 4$$

در نتیجه، حداقل ۴ عدد در تقسیم بر ۲۰، باقی مانده‌های یکسان دارند.

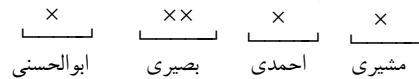
مثال ۱۴: هفده نفر با نام‌های حمزه، محمود، حسن و رضا و نام‌های خانوادگی مشیری، احمدی، بصیری و ابوالحسنی در جلسه‌ای حاضر شدند. نشان دهید که حداقل ۲ نفر وجود دارند که نام و نام خانوادگی آن‌ها باهم یکسان است.

راه حل اول: چنانچه ۱۷ نفر را به عنوان ۱۷ کبوتر و ۴ خانه با نام‌های زیر را به عنوان ۴ لانه در نظر بگیریم، خواهیم داشت:



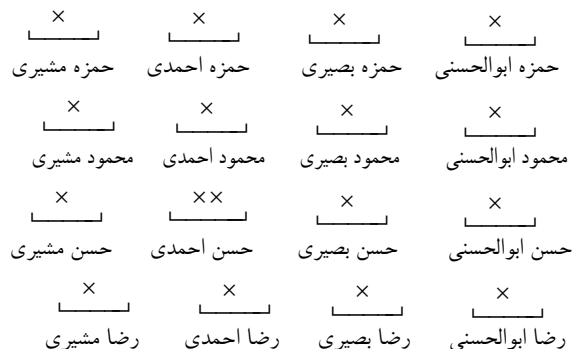
$$m=17 \text{ و } n=4 \Rightarrow \left[ \frac{m-1}{n} \right] + 1 = \left[ \frac{17-1}{4} \right] + 1 = 5$$

در نتیجه حداقل ۵ نفر وجود دارند که نام‌های آن‌ها یکسان است. اکنون چنانچه ۴ خانه با عنوان‌های زیر را به عنوان ۴ لانه در نظر بگیریم و قرار باشد حداقل ۵ نفر بالا آن‌ها را اشغال کنند، آن‌گاه طبق اصل لانه‌ی کبوتری داریم:



در نتیجه حداقل ۲ نفر یافت می‌شوند که یک خانه را پر کنند، یعنی حداقل دو نفر که نام‌های یکسان دارند، نام خانوادگی آن‌ها نیز یکسان خواهد شد.

راه حل دوم: می‌توان از ابتدا، ۱۶ لانه با عنوان‌های زیر در نظر گرفت، چنانچه ۱۷ نفر به عنوان ۱۷ کبوتر، بخواهند آن‌ها را اشغال کنند، آن‌گاه حداقل یک لانه وجود دارد که در آن حداقل ۲ کبوتر قرار خواهد داشت.



ادامه‌ی مطلب صفحه‌ی ۹

## چند رادیکال مسلسل

$$2 + \sqrt{2} = \sqrt{2 + 2\sqrt{2^2 + 2^2\sqrt{2^3 + 2^2\sqrt{2^4 + 2^2\sqrt{2^5 + \dots}}}}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} (3 + \sqrt{13}) = \sqrt{3 + 2\sqrt{3^2 + 3^2\sqrt{3^3 + 3^2\sqrt{3^4 + 3^2\sqrt{3^5 + \dots}}}}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{8} (1 + \sqrt{17}) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \dots}}}}}}$$

$$\frac{5}{4} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{4}\sqrt{1 + \frac{1}{8}\sqrt{1 + \frac{1}{16}\sqrt{1 + \dots}}}}}$$

$$\frac{5}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2 + \frac{1}{2}\sqrt{4 + \frac{1}{2}\sqrt{8 + \frac{1}{4}\sqrt{16 + \frac{1}{2}\sqrt{32 + \dots}}}}}$$

$$\frac{33}{256} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{64}\sqrt{\frac{1}{64} + \frac{1}{256}\sqrt{\frac{1}{256} + \dots}}}}$$

$$3 = \sqrt{4 + \sqrt{4^2 + \sqrt{4^3 + \sqrt{4^4 + \sqrt{4^5 + \dots}}}}}$$

$$24 = 2\sqrt{16 + 2^2\sqrt{16^2 + 2^3\sqrt{16^3 + 2^4\sqrt{16^4 + \dots}}}}$$

$$288 = 4\sqrt{64 + 4^2\sqrt{64^2 + 4^3\sqrt{64^3 + 4^4\sqrt{64^4 + \dots}}}}$$

$$4224 = 8\sqrt{256 + 8^2\sqrt{256^2 + 8^3\sqrt{256^3 + 8^4\sqrt{256^4 + \dots}}}}$$

پی نوشت

1. Math. Spectrum
2. Yasar Atas

# المپیادهای ریاضی

## لنینگراد ۲

هوشنگ شرقی

### مسائل

۱. آیا پنج عدد طبیعی مختلف وجود دارد به گونه‌ای که حاصل ضرب دو عدد بزرگ‌تر با مجموع هر پنج عدد برابر باشد؟

۲. عددی چهار رقمی را از وسط به دو عدد دو رقمی تفکیک کرده‌ایم. معلوم شد عدد چهار رقمی بر مجموع دو عدد دو رقمی بخش‌پذیر است. آیا ممکن است مجموع این اعداد برابر ۹۴ باشد؟

۳. نقطه‌ی  $M$  وسط ضلع  $BC$  چهارضلعی کوژ  $ABCD$  قرار دارد و می‌دانیم مقدار زاویه‌ی  $\widehat{AMD}$   $120^\circ$  درجه است. ثابت کنید:

$$AB + \frac{1}{2}BC + CD \geq DA$$

۴. نقطه‌های  $F, E, D$  را روی ضلع‌های  $AC$  و  $AB$  و  $BC$  از مثلث متساوی الساقین  $ABC$  ( $AB = BC$ ) طوری در نظر گرفته‌ایم که طول پاره‌خط‌های راست  $DE$  و  $DF$  و دو زاویه‌ی  $\widehat{BAC}$  و  $\widehat{FDE}$  برابر باشند. ثابت کنید:

$$AE + FC = AC$$

۵. نقطه‌های  $D$  و  $E$  و  $F$  را روی ضلع‌های  $AC$  و  $AB$  و  $BC$  از مثلث متساوی الساقین  $ABC$  ( $AB = BC$ ) طوری در نظر گرفته‌ایم که داشته باشیم:

$$AE + FC = AC \text{ و } DE = DF$$

ثابت کنید دو زاویه‌ی  $\widehat{BAC}$

و  $\widehat{FDE}$  برابرند.

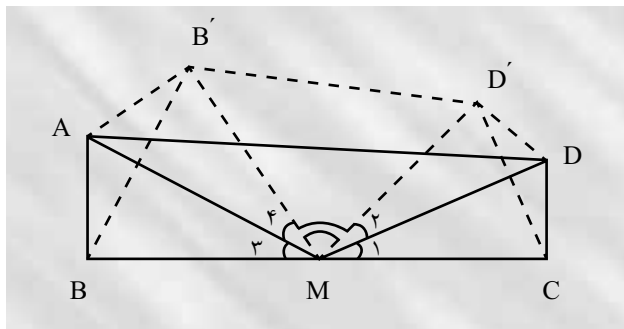


اشاره

در برهان شماره‌ی ۶۷ درباره‌ی تاریخچه‌ی المپیاد ریاضی لنینگراد و مسائل آن نوشتیم. در این جا سؤالات دیگری از این المپیادها را همراه با راه‌حل آن‌ها ارائه می‌دهیم. این مسائل از المپیاد سال ۱۹۹۳ انتخاب شده‌اند.

غیرممکن است.

۳. مطابق شکل، داریم.  $\hat{A}MD = 120^\circ$  بازتاب (قرینه‌ی) C نسبت به MD (C') و قرینه‌ی B نسبت به AM (B') را رسم و C' و B' را به A و D و M وصل می‌کنیم.



بدیهی است که مثلث‌های MCD و MC'D' با یکدیگر و مثلث‌های MAB و MAB' نیز با یکدیگر هم‌نهشت‌اند و در نتیجه:

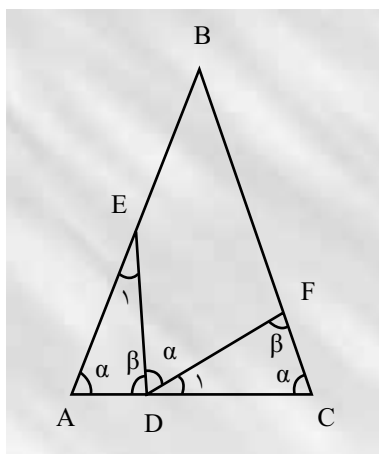
$$MC = MD' = MB = MB' = \frac{1}{2}BC, \hat{M}_1 = \hat{M}_2, \hat{M}_3 = \hat{M}_4 \\ \Rightarrow \hat{M}_1 + \hat{M}_3 = \hat{M}_2 + \hat{M}_4 = 60^\circ, \hat{B'MC'} = 60^\circ$$

بنابراین مثلث B'MD' متساوی‌الاضلاع است و  $B'D' = MB' = \frac{BC}{2}$  هم‌چنین مطابق اصل حمار می‌توان نوشت:

$$DD' + D'B' + AB' \geq AD \Rightarrow DC + \frac{BC}{2} + AB \geq AD$$

۴. مطابق شکل، چون  $AB=AC$  و  $\hat{B}AC = \hat{F}DE$ ، پس می‌توان فرض کرد که:

$$\hat{B}AC = \hat{B}CA = \hat{F}DE = \alpha$$



بنابراین:

$$\hat{F}DA = \hat{A}CF + \hat{D}FC$$

$$\Rightarrow \alpha + \hat{E}DA = \alpha + \hat{D}FC \Rightarrow \hat{E}DA = \hat{D}FC = \beta$$

و در نتیجه دو مثلث AED و DFC دو زاویه‌ی برابر دارند

۶. ثابت کنید تابع تعریف شده‌ی  $f(x)$  در بازه‌ی  $(0, +\infty)$  وجود دارد به نحوی که داشته باشیم:

$$f(f(\dots f(x)\dots)) = \frac{x}{x+1}$$

(از نماد  $f$ ، ۲۳۹ بار استفاده شده است).

۷. ثابت کنید تابع معین  $f(x)$  در بازه‌ی  $(0, +\infty)$  وجود دارد به گونه‌ای که داریم:

$$f(f(\dots f(x)\dots)) = 1+x+2\sqrt{x}$$

(از نماد  $f$ ، ۴۵ بار استفاده شده است).

### پاسخ‌ها

۱. عددهای مزبور را به ترتیب از بزرگ به کوچک،  $x_1$  و  $x_2$  و  $x_3$  و  $x_4$  فرض می‌کنیم و با توجه به فرض مسئله داریم:  $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$  بنابراین:

$$x_1 \geq x_2 + 1, x_2 \geq x_3 + 1, x_3 \geq x_4 + 1, x_4 \geq x_5 + 1$$

$$\text{حال اگر داشته باشیم: } x_1 x_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

نتیجه می‌شود:

$$x_1 x_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$\Rightarrow x_1 x_2 - x_1 - x_2 + 1 = 1 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$\Rightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 1 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) \geq x_3 x_4$$

و چون  $x_2 \geq x_3 + 1$  و  $x_1 \geq x_2 + 1$  پس:

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) \geq x_3 x_4$$

در نتیجه داریم:

$$1 + x_3 + x_4 + x_5 \geq x_3 x_4$$

$$\Rightarrow 1 + x_4 + x_5 \geq x_3(x_4 - 1), x_3 \geq x_4 + 1$$

$$\Rightarrow x_3(x_4 - 1) \geq x_3^2 \Rightarrow 1 + x_4 + x_5 \geq x_3^2 \geq (x_4 + 1)(x_5 + 2)$$

$$\Rightarrow 1 + x_4 + x_5 \geq x_4 x_5 + 2x_4 + x_5 + 2$$

$$\Rightarrow x_4 x_5 + x_4 + 1 \leq 0$$

که این نتیجه غیرممکن است.

۲. مطابق فرض مسئله داریم:  $\overline{ab} + \overline{cd} \mid \overline{abcd}$

و با فرض  $\overline{ab} = x$  و  $\overline{cd} = y$  خواهیم داشت:

$$\overline{abcd} = d + 10c + 100b + 1000a = (d + 10c) + 100(b + 10a)$$

$$= \overline{cd} + 100\overline{ab} = y + 100x \Rightarrow x + y \mid y + 100x$$

$$\Rightarrow (x + y) \mid (x + y) + 99x \Rightarrow x + y \mid 99x$$

و با فرض  $x + y = 94$  نتیجه می‌شود:  $94 \mid 99x$  و چون

$(94, 99) = 1$  پس  $94 \mid x$  و در نتیجه  $x = 94$  و  $y = 0$ ؛ که این نیز

$$f(f(f(x))) = f\left(\frac{ax}{a+2x}\right) = \frac{a \cdot \frac{ax}{a+2x}}{a + \frac{ax}{a+2x}} = \frac{a^2x}{a^2+2ax}$$

$$\Rightarrow f(f(f(x))) = \frac{ax}{a+3x}$$

و به صورت استقرایی می توان حدس زد:

$$f(\underbrace{f(f(\dots(f(x))\dots))}_n) = \frac{ax}{a+nx}$$

(درستی این حدس را به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی اثبات کنید.)

$$f(f(\dots f(x)\dots)) = \frac{x}{x+1} \quad \text{حال اگر داشته باشیم}$$

نتیجه می‌شود:

$$\frac{ax}{a+nx} = \frac{x}{x+1} \Rightarrow ax^2 + ax = ax + nx^2$$

$$\Rightarrow ax^2 = nx^2 \Rightarrow a = n$$

یعنی کافی است که  $a = n = 239$  فرض شود، یعنی:

$$f(x) = \frac{239x}{239+x}$$

$$f(\underbrace{f(\dots f(x)\dots)}_{239}) = \frac{x}{x+1}$$

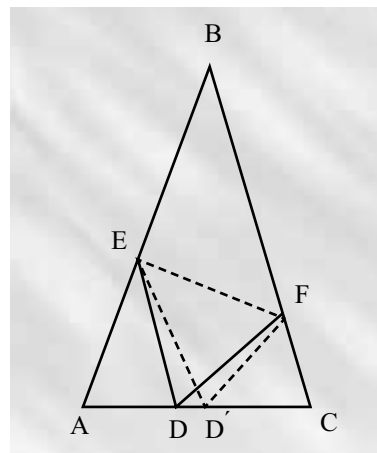
۷. این مسئله مشابه مسئله‌ی قبلی است که برای دانش‌آموزان پایه‌ای دیگر طرح شده بود. راه‌حل آن نیز مشابه مسئله‌ی قبلی است و به‌عنوان تمرین به دانش‌آموزان واگذار می‌شود. برای راهنمایی می‌گوییم که  $f(x) = (\sqrt{x} + \frac{1}{a})^2$  فرض شود.

و لذا زاویه‌ی سوم آن‌ها نیز برابر است، یعنی:  $\hat{D}_1 = \hat{E}_1$  و چون  $DF = DE$ ، پس دو مثلث  $DFC$  و  $ADE$  و به حالت دو زاویه و ضلع بین هم‌نهشت‌اند و از آن‌جا:

$$DC = AE, FC = AD$$

$$AD + DC = AE + FC \Rightarrow AC = AE + FC$$

۵. این مسئله در واقع عکس مسئله‌ی ۴ است، یعنی در همان شکل و این بار با فرض  $AE+FC=AC$  می‌خواهیم ثابت کنیم:  $\hat{BAC} = \hat{FDE}$ . برای این منظور، نقطه‌ی  $D'$  را روی  $AC$  طوری در نظر می‌گیریم که  $D'C = AE$  و با توجه به فرض  $AE+FC=AC=AD'+D'C$  نتیجه می‌شود که  $AD'=FC$  و چون  $\hat{A} = \hat{C}$ ، پس مثلث‌های  $D'AE$  و  $D'FC$  به حالت دو ضلع و زاویه‌ی بین هم‌نهشت‌اند.



پس  $D'F = D'E$ ، یعنی  $D'$  از  $E$  و  $F$  به یک فاصله است و بنابراین روی عمودمنصف  $EF$  است. پس  $D'$  نقطه‌ی برخورد عمود منصف  $EF$  و ضلع  $AC$  است و از آن‌جا که طبق فرض  $DE=DF$  پس با استدلالی مشابه،  $D$  نیز همین نقطه است، یعنی  $D$  و  $D'$  بر هم منطبق‌اند و  $DC=AE$  و  $AD=FC$ .

مثلث‌های  $ADE$  و  $CFD$  هم‌نهشت‌اند و  $\hat{ADE} = \hat{DFC}$  و

$$\hat{DEA} = \hat{FDC}$$

$$\hat{FDE} = 180^\circ - (\hat{FDC} + \hat{ADE})$$

$$= 180^\circ - (\hat{DEA} + \hat{DFC}) = 180^\circ - (\hat{DEA} + \hat{EDA}) = \hat{BAC}$$

۶. با فرض  $f(x) = \frac{ax}{a+x}$  نتیجه می‌شود:

$$f(f(x)) = \frac{\frac{ax}{a+x}}{a + \frac{ax}{a+x}} = \frac{a^2x}{a^2+2ax} = \frac{ax}{a+2x}$$

نیاید تصور کرد که یگانه عمل ریاضیات که آن را «خادم علوم» نامیده‌اند خدمت به علوم دیگر و تلاش در پیشرفت آن‌هاست؛ بر این دانش‌نام «ملکه‌ی علوم» نیز اطلاق شده است. اگر در مواردی می‌کند و انتظار خدماتی دارد، در عوض صاحب کبریا و مناعت عظیمی است و هرگز از هیچکس کمک و احسان دیگران نیست و آن‌چه را که دریافت می‌کند به‌طور افزون‌تر خواهد پرداخت.

اریک تمپلبل





۲	۱۴	Δ
۷	⊕	۱۷
۱	۴۱	⊗

## اشاره

در قسمت قبل با مقدمه‌ای از رمزنگاری‌های متعارف در قرون گذشته به صورت توصیفی آشنا شدید. در این قسمت و قسمت‌های بعدی با اصول رمزنگاری و رمزگشایی‌های «تک‌الفبایی حاصل از الفبای متعارف مستقیم»، «رمزهای تک‌الفبایی مبتنی بر تبدیل‌های خطی» و «سیستم‌های چندحرفی» و... آشنا خواهید شد. در این قسمت به رمزهای تک‌الفبایی حاصل از الفبای متعارف مستقیم (رمز جای گذاری) می‌پردازیم. در آخر نیز برای آزمودن یافته‌ها، چند تمرین خواهیم آورد.

# هم‌نهشتی و کاربردهای آن رمزنگاری و رمزگشایی (۱۲)

سید محمدرضا هاشمی موسوی  
hashemi\_moosavi@yahoo.com

کلیدواژه‌ها: پیام رمز، رمز جای گذاری، دنباله‌ی صریح، دنباله‌ی رمزی، رمزهای تک‌الفبایی، الفبای جای گذاری، عدد کلیدی، کلید رمز، فراوانی حروف.

رمزهای تک‌الفبایی حاصل از الفبای متعارف مستقیم  
(رمز جای گذاری)

رمز سزاری

یکی از قدیمی‌ترین سیستم‌های رمزنگاری که می‌شناسیم، سیستمی است که ژول سزار به کار برده و به همین مناسبت به

رمزنگاری سزازی موسوم است. در این روش رمزنگاری به جای هر حرف از پیام، حرف سوم بعد از آن از حروف الفبای معمولی قرار داده می‌شود. البته سزار الفبای رومی را به‌کار می‌برد، ولی ما شیوه‌ی او را با الفبای امروزی (انگلیسی) شرح خواهیم داد. فرض کنید بخواهیم پیام زیر را به رمز درآوریم:

«I CAME I SAW I CONQUERED»

ابتدا زیر هر حرف از پیام، حرفی را می‌نویسیم که در حرف‌های الفبا به ترتیب معمول، سه حرف پس از آن قرار گرفته است، یعنی به جای I حرف L قرار می‌گیرد، به جای C حرف F، به جای A حرف D و غیره. نتیجه‌ی کار چنین است:

متن اصلی :	I	C	A	M	E	I	S	A	W	I	C	O	N	Q	U	E	R	E	D
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
پیام رمزی :	L	F	D	P	H	L	V	D	Z	L	F	R	Q	T	X	H	U	H	G

بنابراین، پیام رمزی چنین است:

«L FDPH L VDZ L FRQTXHUHG»

نتیجه کاملاً نامفهوم به نظر می‌رسد. برای فردی که آن را بررسی می‌کند و از چگونگی تهیه‌ی آن اطلاعی ندارد، ممکن است تلاش برای کشف آن کاملاً بی‌ثمر باشد. از طرف دیگر برای کسی که رمز را می‌داند، معنای پیام به سرعت معلوم می‌شود. فقط کافی است به جای هر حرف از پیام رمزی، حرفی را که در حرف‌های الفبا به ترتیب معمولی سه حرف پیش از آن قرار گرفته است جایگزین کنیم تا مطلب اصلی فاش شود.

این مثالی از نوعی رمز به نام «رمز جای‌گذاری» است که در آن به جای هر حرف از پیام اصلی حرف دیگری گذاشته می‌شود. راهی مناسب برای نمایش دادن به این جای‌گذاری استفاده از «الفبای جای‌گذاری» است که نشان می‌دهد چه حرفی به جای چه حرف دیگر قرار می‌گیرد. روش ساختن الفبای جای‌گذاری در رمز سزازی، عبارت از نوشتن دنباله‌ی الفبای معمولی در یک سطر و سپس بازنویسی آن در سطر دوم، منتها با شروع از D به جای A است. وقتی که در سطر دوم به حرف آخر الفبا رسیدیم، بعد از حرف Z به ترتیب حرف‌های A، B و C را می‌نویسیم، در واقع دنباله‌ی الفبا را به صورت چرخه‌ای در نظر می‌گیریم که به‌طور متوالی تکرار می‌شود:

دنباله‌ی صریح ۱):	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	R	....	X	Y	Z
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
دنباله‌ی رمزی ۲):	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	....	A	B	C

سطر اول را دنباله‌ی صریح و سطر دوم را دنباله‌ی رمزی می‌خوانیم. به این ترتیب، عمل به رمز درآوردن را می‌توانیم به این صورت انجام دهیم که به جای هر حرف از پیام صریح، حرف زیرین آن در الفبای جای‌گذاری را قرار دهیم. برای رمزگشایی می‌توانیم به جای هر حرف از پیام رمزی، حرف بالایی آن در الفبای جای‌گذاری را بگذاریم (به بیان ریاضی می‌گوییم عمل از رمز درآوردن معکوس عمل به رمز درآوردن است). فرایند رمزنگاری در رمز سزازی را می‌توان به صورت عددی نیز انجام داد. فرض کنید به هر حرف، عددی اختصاص دهیم که مکان آن را در دنباله‌ی معمولی الفبا (شکل صریح) نشان دهد. در این صورت تناظر زیر را خواهیم داشت:

دنباله‌ی صریح :	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	....	X	Y	Z
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
دنباله‌ی رمزی :	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	....	۲۴	۲۵	۲۶

حال برای به رمز درآوردن پیام مورد نظر، به طریق زیر، مرحله به مرحله، عمل می‌کنیم:  
 ۱) به جای هر حرف، عدد متناظر با آن را قرار می‌دهیم.

۲) به هریک از این اعداد ۳ واحد اضافه می‌کنیم.  
 ۳) به جای اعداد حاصل، حروف متناظرشان را می‌گذاریم.

(مرحله ۱): I	C	A	M	E	I	S	A	W	I	C	O	N	Q	U	E	R	E	D
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
۹	۳	۱	۱۳	۵	۹	۱۹	۱	۲۳	۹	۳	۱۵	۱۴	۱۷	۲۱	۵	۱۸	۵	۴
(مرحله ۲): ۱۲	۶	۴	۱۶	۸	۱۲	۲۲	۴	۲۶	۱۲	۶	۱۸	۱۷	۲۰	۲۴	۸	۲۱	۸	۷
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
(مرحله ۳): L	F	D	P	H	L	V	D	Z	L	F	R	Q	T	X	H	U	H	G

همان‌طور که انتظار داشتیم، نتیجه همان پیام رمزی است که از پیش به‌دست آمده بود.  
 تمرین. پیام زیر را که با رمز سزاری به رمز درآمده است، از رمز درآورید.

۱. FRZDUGV GLH PDQB WLPHV EHIRUH WKHLU GHDWKV

### الفبای متعارف مستقیم

نمی‌دانیم چرا سزار عدد ۳ را به‌عنوان میزان انتقال دنباله‌ی رمزی نسبت به دنباله‌ی صریح انتخاب کرد. او می‌توانست هر عددی را برای این منظور به‌کار ببرد، فقط کافی بود که از پیش با طرف مکاتبه‌ی خود درباره‌ی چگونگی به رمز درآوردن، قراری گذاشته باشد. درواقع، به فرض یک قرارداد مناسب، میزان انتقال می‌تواند در هر پیام با پیام دیگر فرق داشته باشد. برای مثال، می‌توان قرار گذاشت که طبق طرحی، به هر پیام یک عدد نسبت داده شود و باقی‌مانده‌ی این عدد به یک عدد ثابت مانند ۲۶ (تعداد حروف الفبای لاتین)، میزان انتقال یعنی مقدار تغییر مکان گرفته شود. برای مثال، چنین عددی ممکن است به یکی از این ویژگی‌ها مختص شود: به تعداد کلمات هر پیام، شماره‌ی پیام و تاریخ ماهی که پیام فرستاده می‌شود، عددی که از یک فرایند به‌دست می‌آید که اصلاً ربطی به آن مکاتبه ندارد.

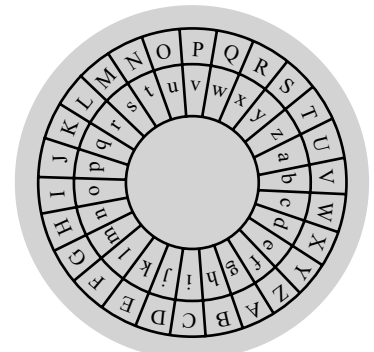
در هر صورت با داشتن این عدد، الفبای جایگزین می‌تواند ساخته شود و هم در به رمز درآوردن و هم در از رمز درآوردن به کار رود. یک الفبای جای‌گذاری که در آن هم دنباله‌ی صریح و هم دنباله‌ی رمزی از الفبای معمولی گرفته شده باشد (به این ترتیب که دنباله‌ی رمزی پس از مقدار مشخصی تغییر مکان به دست آمده باشد). «الفبای متعارف مستقیم» خوانده می‌شود.

در فرایند عددی معادل می‌توان گفت:  $C = P + K$ ؛ که در آن  $K$ ، مقدار تغییر مکان، عددی است که باید به  $P$ ، معادل عددی هر حرف زبان صریح، اضافه شود تا  $C$ ، جانشین رمزی آن، به‌دست آید. اگر مقدار تغییر مکان  $K$  باشد، آن‌گاه حرف  $A$  از دنباله‌ی صریح مقابل حرفی از دنباله‌ی رمزی واقع است که متناظر با  $(K+1)$  است.

با ابزاری ساده به سرعت می‌توان الفبای متعارف مستقیم را تشکیل داد. این ابزار از دو دایره‌ی هم‌مرکز ساخته می‌شود که در پیرامون هریک از آن‌ها، حرف‌های الفبا به‌ترتیب نوشته شده‌اند (مطابق شکل ۱).

حلقه‌ی بیرونی دنباله‌ی صریح و حلقه‌ی درونی که قابل چرخیدن است، دنباله‌ی رمزی است. اگر مقابل  $A$  از حلقه‌ی بیرونی، حرف متناظر  $(K+1)$  از حلقه‌ی درونی را قرار دهیم، الفبای جای‌گذاری را که میزان انتقال آن  $K$  باشد، خواهیم داشت (شکل ۱) برای حالت  $K=6$  رسم شده است. جالب توجه است که سال‌ها پیش، ارتش آمریکا ابزار مشابهی را به‌کار می‌برد. الفبایی که این ابزار تولید می‌کرد، با الفبای متعارف مستقیم این تفاوت را داشت که دنباله‌ی رمزی در آن به‌ترتیب وارونه نوشته شده بود. چنین دنباله‌ای «دنباله‌ی متعارف وارونه» و الفبایی که این دنباله با قرار گرفتن در مقابل دنباله‌ی صریح معمولی تولید می‌کند «الفبای متعارف وارونه» نامیده می‌شود.

اگر از دایره برای ساختن الفبای متعارف مستقیم استفاده کنیم، آن‌گاه انتخاب هریک از ۲۶



شکل ۱

طبق آن میزان انتقال معلوم شود چنین عددی به دست آید، باید در این قرار مشخص شده باشد که چه عددی جانشین آن شود. هر سیستم رمزنگاری دو اصل اساسی دارد: سیستم کلی و کلید ویژه.

«فرایند کلی مورد استفاده و جزئیات نحوه استفاده از آن فرایند کلی را سیستم کلی و مشخص کننده جزئیات نحوه استفاده از این فرایند را کلید ویژه می نامند.» برای مثال در رمزنگاری سزاری از یک الفبای متعارف مستقیم با کلید ویژه ۳ استفاده می شود. از آنجا که در این سیستم تنها یک الفبای جای گذاری به کار می رود، نتیجه را «رمز تک الفبایی» می نامند.

الفبای متعارف مستقیم با قرار دادن دایره‌ی درونی در وضع مناسب امکان پذیر می شود. چنین امکانی را «ویژنر» رمزنگار فرانسوی به طریقی دیگر فراهم آورد. او در یک مربع حرف های الفبا را نوشت، به این طریق که در بالاترین سطر، دنباله‌ی معمولی الفبا را نوشت و در هر سطر متعاقب آن، دنباله‌ی را نوشت که از انتقال دنباله‌ی قبلی به اندازه‌ی یک حرف به سمت چپ به دست می آمد. با قرار دادن الفبای معمولی به عنوان دنباله‌ی صریح در بالای مربع، هر الفبای متعارف مستقیم از ترکیب دنباله‌ی صریح با یک سطر مناسب در مربع، قابل حصول بود. هریک از این الفباها به راحتی با اولین حرف دنباله‌ی رمزی آن معین می شد (شکل ۲).

صریح A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A
C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C
E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D
F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E
G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F
H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G
I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H
J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I
K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y

توجه: این مربع اساس سیستم‌هایی است که هریک از آن‌ها را بیان خواهیم کرد.

درباره‌ی قرارگیری که برای تعیین میزان انتقال گذاشته می شود، نکته‌ای را باید متذکر شویم. واضح است که اگر طبق قرار ما عدد تعیین کننده‌ی کلید رمز پیام بتواند ضربی از ۲۶ باشد، مرتکب اشتباه شده ایم، زیرا چنین عددی در تقسیم بر ۲۶ باقی مانده‌ای برابر صفر خواهد داشت و در نتیجه پیام باید به زبان معمولی نوشته شود. بنابراین، قرار ما باید به گونه‌ای باشد که طبق آن نتوان عدد ۲۶ (یا هر ضربی از آن) را به عنوان میزان انتقال به کار برد؛ اگر از فرایندی که قرار است

### تمرین

۱) یک الفبای متعارف مستقیم با میزان انتقال ۷ بسازید و پیام زیر را به رمز در آورید:

THE FAULT DEAR BRUTUS IS NOT IN OUR STARS  
BUT IN OURSELVES.

۲) پیام رمزی زیر را با دانستن آن که الفبای متعارف مستقیم آن با میزان انتقال ۱۱ است، از رمز در آورید.

ESPCP TD L E T O P T Y E S P L Q L T C D Z Q X P Y H S T N S  
E L V P Y L E E S P Q W Z Z O W P L O D Z Y E Z Q Z C E F Y P.

### پاسخ‌ها

۱) AOL MHBSA KLHY IYBABZ PZ UVA PU VBY  
ZAHYZ IBA PU VBYZLSCLZ.

۲) THERE IS A TIDE IN THE AFFAIRS OF MEN  
WHICH TAKEN AT THE FLOOD LEADS ON THE  
FORTUNE.

پی نوشت

۱. Vigenère

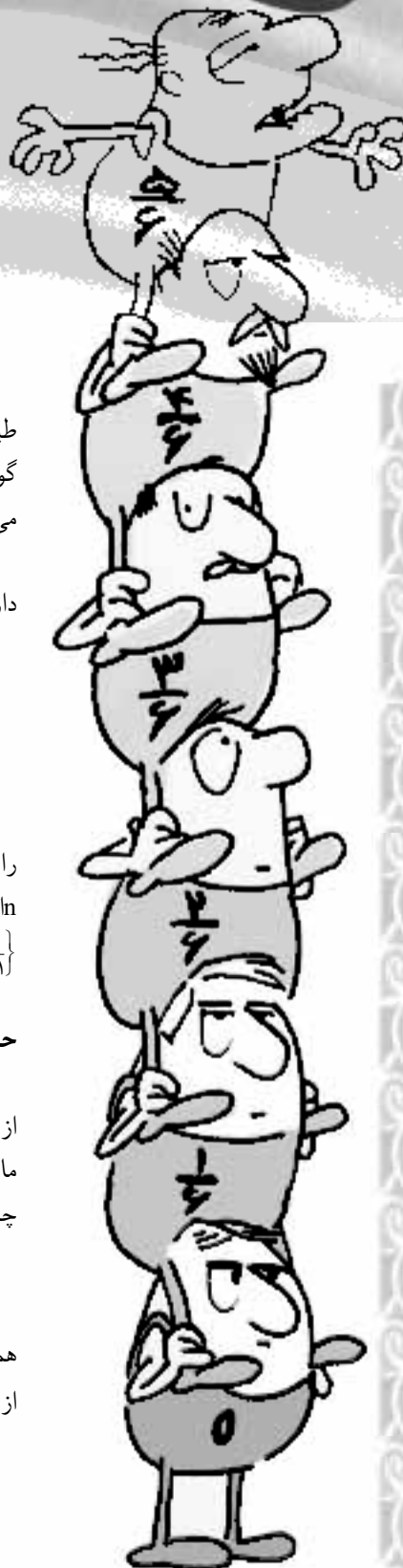
این چند سطر مربوط به انتهای مقاله‌ی قسمت (۱۱) در مجله‌ی رشد برهان شماره‌ی ۶۸ است که به علل اشکالات چایی، حذف شده بود:

«فارغ التحصیلان ریاضیات پیشرفته در ارتش‌ها و دستگاه‌های اطلاعاتی؛ کارطراحی سیستم‌های رمزی، و شکستن رمزهای حریف به کارگیری انواع دستگاه‌های رمزنگار رایانه‌ای، و طراحی سیستم‌های کدینگ مشغول‌اند. امروزه رمزهای دستی و قراردادی، جای خود را به سیستم‌های پیچیده‌ی دیجیتالی و نوآوری‌هایی در زمینه‌های رمزهای مخابراتی و ارتباطی داده‌اند.»

توسعه و اصلاح رمزها

# دنباله

احمد قندهاری



یک دنباله، تابعی است که دامنه‌ی آن مجموعه‌ی اعداد طبیعی باشد و به هر یک از مقادیر برد آن، یک جمله‌ی دنباله گویند. در واقع، مقادیر برد چنین تابعی، جمله‌های دنباله را تولید می‌کند.

برای مثال، تابع  $f(x) = \frac{n}{n+1}$  یک دنباله است. در این دنباله داریم:

$$f(1) = \frac{1}{2}, f(2) = \frac{2}{3}, f(3) = \frac{3}{4}, \dots, f(n) = \frac{n}{n+1}, \dots$$

پس جمله‌های این دنباله عبارت است از:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

جمله‌ی اول دنباله را با  $a_1$  و جمله‌ی دوم را با  $a_2$  و جمله‌ی سوم را با  $a_3$  و ... و جمله‌ی  $n$ ام دنباله‌دار را با  $a_n$  نشان می‌دهیم. به جمله‌ی  $n$ ام، جمله‌ی عمومی دنباله هم می‌گوییم. و خود دنباله‌ها را با  $\{a_n\}$  یا  $\{a_n = \frac{n}{n+1}\}$  یا  $\{\frac{n}{n+1}\}$  نشان می‌دهیم.

## حدّ دنباله و دنباله‌ی همگرا

می‌گوییم دنباله‌ی  $\{a_n\}$  دارای حدّ  $L$  است ( $L \in \mathbb{R}$ ) هرگاه به ازای هر  $\epsilon > 0$  عدد طبیعی  $M$  وجود داشته باشد، به طوری که از مرتبه‌ی  $n \geq M$  داشته باشیم  $|a_n - L| < \epsilon$ . این گفته را با نمادهای ریاضی چنین نشان می‌دهیم.

$$\forall \epsilon > 0 \cdot \exists M \in \mathbb{N} : n \geq M \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon$$

در این صورت می‌گوییم دنباله همگراست یا دنباله به عدد  $L$  همگراست و می‌نویسیم  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  برای یافتن عدد طبیعی  $M$ ، باید از نامساوی  $|a_n - L| < \epsilon$  شروع کرد تا به نامساوی  $n \geq M$  رسید. عمل

رسیدن از  $|a_n - L| < \epsilon$  به  $n \geq M$  یک جست‌وجو و بررسی است و پس از یافتن  $M$  باید بتوان از  $n \geq M$  به نامساوی  $|a_n - L| < \epsilon$  رسید. در واقع، روابط حل باید برگشت‌پذیر باشد. مسئله‌ی ۱: با استفاده از تعریف حد دنباله ثابت کنید که حد دنباله‌ی  $\left\{ \frac{n+2}{n} \right\}$  عدد ۱ است.

معنای نامساوی  $n < (L + \epsilon)^2 - 1$  این است که وقتی  $n \rightarrow \infty$  از عدد حقیقی  $(L + \epsilon)^2 - 1$  کوچک‌تر است، یعنی اعداد طبیعی از بالا کران‌دارند که غیر ممکن است. بنابراین، حد دنباله‌ی این مسئله نمی‌تواند عدد حقیقی  $L$  باشد، پس دنباله واگراست.

### اعمال اصلی روی دنباله‌ها

قضیه: اگر در دو دنباله‌ی  $\{a_n\}$  و  $\{b_n\}$  داشته باشیم  $\text{Lima}_n = L_1$  و  $\text{Lim} b_n = L_2$ ، آن‌گاه داریم:

$$1) \text{Lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = L_1 \pm L_2$$

$$2) \text{Lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = L_1 \cdot L_2$$

$$3) \text{Lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L_1}{L_2} \quad L_2 \neq 0$$

### دنباله‌ی کران‌دار

۱. دنباله  $\{a_n\}$  را از بالا کران‌دار گوئیم هرگاه عدد حقیقی  $M_1$  وجود داشته باشد به طوری که برای هر  $n \in \mathbb{N}$  داشته باشیم:

$$a_n \leq M_1$$

۲. دنباله‌ی  $\{a_n\}$  را از پایین کران‌دار گوئیم، هرگاه عدد حقیقی  $M_2$  وجود داشته باشد، به طوری که برای هر  $n \in \mathbb{N}$  داشته باشیم:

$$a_n \geq M_2$$

اگر دنباله‌ای هم کران بالا داشته باشد و هم کران پایین، دنباله را کران‌دار گوئیم. برای مثال دنباله‌ی  $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$  کران‌دار است، زیرا کران بالای آن ۱ و کران پایین آن صفر است. یا مثلاً دنباله‌ی  $\{\sin n + \cos n\}$  کران‌دار است، زیرا کران بالای آن  $\sqrt{2}$  و کران پایین آن  $-\sqrt{2}$  است.

### دنباله‌ی صعودی

اگر در دنباله‌ی  $\{a_n\}$  برای هر  $n \in \mathbb{N}$  داشته باشیم  $a_{n+1} \geq a_n$ ، دنباله را صعودی گوئیم. برای مثال دنباله‌ی  $\{\sqrt{n+2}\}$  صعودی است.

### دنباله‌ی نزولی

اگر در دنباله  $\{a_n\}$  برای هر  $n \in \mathbb{N}$  داشته باشیم  $a_{n+1} \leq a_n$ ، آن‌گاه دنباله را نزولی گوئیم، مانند دنباله‌ی  $\{-n+5\}$ .

مثال: نشان دهید که دنباله‌ی  $\left\{ \frac{n}{n+4} \right\}$  صعودی است.

حل: باید ثابت کنیم که برای هر  $n \in \mathbb{N}$  داریم:  $a_{n+1} \geq a_n$

$$a_{n+1} \geq a_n \Rightarrow \frac{n+1}{n+5} \geq \frac{n}{n+4}$$

دو طرف نامساوی را در مقدار مثبت  $(n+4)(n+5)$  ضرب می‌کنیم.

$$(n+4)(n+1) \geq n(n+5) \Rightarrow n^2 + 5n + 4 \geq n^2 + 5n \Rightarrow 4 \geq 0$$

همواره درست است.

یعنی:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n} = 1$$

حل: برای این کار باید ثابت کنیم:

$$\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N} : n \geq M \Rightarrow \left| \frac{n+2}{n} - 1 \right| < \epsilon$$

$$\left| \frac{n+2}{n} - 1 \right| < \epsilon \Rightarrow \left| \frac{n+2-n}{n} \right| < \epsilon \Rightarrow \left| \frac{2}{n} \right| < \epsilon \Rightarrow \frac{2}{n} < \epsilon \Rightarrow \frac{n}{2} < \frac{1}{\epsilon}$$

$$\Rightarrow n > \frac{2}{\epsilon}$$

چون  $\epsilon > 0$  عدد مثبتی است پس  $\frac{2}{\epsilon}$  هم مثبت است، ولی ممکن است  $\frac{2}{\epsilon}$  عدد طبیعی نباشد، در حالی که  $\left\lfloor \frac{2}{\epsilon} \right\rfloor$  حتماً عدد طبیعی است، اما ممکن است از  $\frac{2}{\epsilon}$  کمتر باشد، لذا  $M = \left\lfloor \frac{2}{\epsilon} \right\rfloor + 1$  را در نظر می‌گیریم.

حال که عدد طبیعی  $M$  را پیدا کردیم باید بتوانیم از  $n \geq M$  به نامساوی  $\left| \frac{n+2}{n} - 1 \right| < \epsilon$  برسیم. اگرچه این قسمت از حل ضروری نیست، ولی برای درک بهتر، آن را می‌نویسیم.

$$n \geq M = \left\lfloor \frac{2}{\epsilon} \right\rfloor + 1 \Rightarrow n \geq \left\lfloor \frac{2}{\epsilon} \right\rfloor + 1 \Rightarrow n > \frac{2}{\epsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{n} < \epsilon \Rightarrow \left| \frac{2}{n} \right| < \epsilon \Rightarrow \left| \frac{n+2-n}{n} \right| < \epsilon \Rightarrow \left| \frac{n+2}{n} - 1 \right| < \epsilon$$

این اعمال را برگشت‌پذیری می‌گوئیم. چنان‌چه در یافتن  $M$  درست عمل کنیم نیازی به حل برگشت‌پذیری وجود ندارد. قضیه: اگر دنباله‌ی  $\{a_n\}$  همگرا باشد، حد آن یکتاست.

### دنباله‌ی واگرا

اگر دنباله‌ی  $\{a_n\}$  به عدد حقیقی  $L$  همگرا نباشد، دنباله را واگرا گوئیم. مثلاً دنباله‌های  $\{(n-1)^n\}$  و  $\{\sqrt{n}\}$  و  $\{n^2\}$  و  $\{\sin n\}$  واگرا هستند. اگر بخواهیم ثابت کنیم یک دنباله واگراست، کافی است ثابت کنیم حد دنباله نمی‌تواند یک عدد حقیقی مانند  $L$  باشد.

مسئله‌ی ۲: ثابت کنید دنباله‌ی  $\{\sqrt{n+1}\}$  واگراست.

حل: فرض می‌کنیم این دنباله به عدد حقیقی  $L$  همگرا باشد، یعنی

$$\text{Lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} = L$$

باید بگوئیم:

$$\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N} : n \geq M \Rightarrow \left| \sqrt{n+1} - L \right| < \epsilon$$

$$\left| \sqrt{n+1} - L \right| < \epsilon \Rightarrow -\epsilon < \sqrt{n+1} - L < \epsilon \Rightarrow L - \epsilon < \sqrt{n+1} < L + \epsilon$$

$$\sqrt{n+1} < L + \epsilon \Rightarrow n + 1 < (L + \epsilon)^2 \Rightarrow n < (L + \epsilon)^2 - 1$$

قضیه: هر دنباله‌ی همگرا کران‌دار است، ولی عکس این قضیه همواره درست نیست.

قضیه: دنباله‌ی  $\{f(n)\}$  را در نظر می‌گیریم. اگر تابع با ضابطه‌ی  $f(x)$  به ازای  $x \geq 1$  مشتق پذیر باشد، در این صورت داریم:  
الف) اگر  $f'(x) \geq 0$ ، آن‌گاه دنباله‌ی  $\{f(a_n)\}$  صعودی است.  
ب) اگر  $f'(x) \leq 0$ ، آن‌گاه دنباله‌ی  $\{f(a_n)\}$  نزولی است.

مثال: نشان دهید که دنباله‌ی  $\left\{ \frac{-n+2}{2n+3} \right\}$  نزولی است.

حل:

$$x = n \geq 1, f(x) = \frac{-n+2}{2n+3} \Rightarrow f'(x) = \frac{-7}{(2n+3)^2} < 0$$

در نتیجه دنباله نزولی است.

### نکات دنباله

- اگر بخواهیم که بدانیم عدد  $m$  چندمین جمله‌ی دنباله‌ی  $\{a_n\}$  است، باید معادله‌ی  $a_n = m$  را با توجه به این که  $n \in \mathbb{N}$  است، حل کنیم.
- اگر بخواهیم که بدانیم دنباله‌ی  $\{a_n\}$  چند جمله‌ی منفی یا چند جمله‌ی مثبت دارد، باید نامعادله‌های  $a_n < 0$  یا  $a_n > 0$  را حل کنیم. با تعیین علامت، محدوده‌ی جواب با توجه به این که  $n \in \mathbb{N}$  است، به دست می‌آید.

مثال: دنباله‌ی  $\{n^2 - 6n - 187\}$  چند جمله‌ی منفی دارد؟

حل:

$$n^2 - 6n - 187 < 0, n^2 - 6n - 187 = 0 \Rightarrow n = 3 \pm \sqrt{9+187}$$

$$n = 3 \pm 14 \Rightarrow \begin{cases} n = -11 \\ n = 17 \end{cases} \xrightarrow{\text{با توجه به تعیین علامت}} -11 < n < 17, n \in \mathbb{N}$$

این دنباله ۱۶ جمله‌ی منفی دارد.  $\Rightarrow 1 \leq n \leq 16$

۳- قضیه‌ی فشار: اگر در سه دنباله‌ی  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$  برای  $n$  ای به بعد داشته باشیم  $a_n \leq c_n \leq b_n$  و  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$  آن‌گاه  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$

مسئله‌ی ۳: به کمک قضیه‌ی فشار، حدّ دنباله‌ای  $\left\{ \frac{2^n}{n!} \right\}$  را وقتی  $n \rightarrow \infty$  بیابید.

حل:

$$a_n = \frac{2^n}{n!} \quad n \in \mathbb{N}, a_n > 0$$

$$0 \leq a_n = \frac{2^n}{n!} = \frac{\overbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}^n}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n} \leq 2 \times 1 \times 1 \times \dots \times \frac{2}{n} = \frac{2}{n}$$

$$0 \leq a_n \leq \frac{2}{n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{n} \right) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

۴- اگر  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  و برای هر عدد صحیح مثبت  $x$  تابع  $f$  تعریف شده باشد، آن‌گاه  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = L$ .

۵- به کمک حدّ بعضی از توابع می‌توان حدّ بعضی از دنباله‌ها را پیدا کرد.

مسئله‌ی ۴: حدّ دنباله‌ی  $\left\{ \frac{2n^4 + n + 1}{2n^3 + n^4} \right\}$  را وقتی  $n \rightarrow \infty$  بیابید.

حل: اگر  $x \geq 1$  و  $f(x) = \frac{2x^4 + x + 1}{2x^3 + x^4}$  را در نظر بگیریم، وقتی  $x \rightarrow +\infty$  داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 + x + 1}{2x^3 + x^4} \sim \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4}{x^4} = 2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 + n + 1}{2n^3 + n^4} = 2$$

نکته:

$$n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}: \log n < n < n^p < k^n < n! < n^n, p > 0, k > 1$$

مثال:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{2^n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

آزمون ۱: دنباله‌ی  $\left\{ \sqrt[3]{2n - n^2} \right\}$  کدام ویژگی را دارد؟

- نزولی و همگراست (۲) صعودی و همگراست
  - صعودی و واگراست (۴) نزولی و واگراست
- حل: گزینه‌ی ۴.

زیرا:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2n - n^2} = -\infty, a_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq 1$$

آزمون ۲: کدام یک از دنباله‌های زیر یکنوا و بی‌کران است؟

$$\left\{ \cos \frac{n\pi}{2} \right\} \quad (2) \quad \left\{ \sin n + \cos n \right\} \quad (1)$$

$$\left\{ \sqrt[5]{n^5 + 5n} \right\} \quad (3) \quad \left\{ \sqrt[4]{n^3 - 27n} \right\} \quad (4)$$

حل: گزینه‌ی ۳؛ گزینه‌های ۱ و ۲ کران دارند. گزینه‌ی ۱ یکنوا نیست.

دنباله یکنوا است.

$$x = n \geq 1, f(x) = \sqrt[5]{x^5 + 5x} \Rightarrow f'(x) = \frac{5x^4 + 5}{5 \sqrt[5]{(x^5 + 5x)^4}} > 0$$

آزمون ۷: در دنباله‌ی  $a_n$  داریم  $a_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots}{4 + 2 + 1 + \dots}$  ، کدام است  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  ؟

(۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳) ۱ (۴) ۴

حل: گزینه‌ی ۲: صورت و مخرج هر دو تصاعد هندسی با قدر نسبت  $r = \frac{1}{2}$  هستند.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

آزمون ۸: دنباله‌ی همگرای  $a_n$  به صورت  $a_n = 2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{3+\dots}}}$  است. این دنباله همگرا به کدام عدد است؟

(۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۳

حل: گزینه‌ی ۱؛ فرض می‌کنیم  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  ، در این صورت می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2\sqrt{3+a_n} = 2\sqrt{3+\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} \\ \Rightarrow L &= 2\sqrt{3+L} \Rightarrow L^2 = 4(3+L) \Rightarrow L^2 - 4L - 12 = 0 \\ (L-6)(L+2) &= 0 \Rightarrow L-6=0 \Rightarrow L=6 \end{aligned}$$

آزمون ۹: چند جمله از دنباله‌ی  $\left\{ \frac{2n-1}{n} \right\}$  در خارج بازه‌ی  $\left( 2 - \frac{1}{10}, 2 + \frac{1}{10} \right)$  قرار دارد؟  
 حل: گزینه‌ی ۳:

$$\begin{aligned} \left| \frac{2n-1}{n} - 2 \right| &\geq \frac{1}{10} \Rightarrow \left| \frac{2n-1-2n}{n} \right| \geq \frac{1}{10} \\ \Rightarrow \left| \frac{-1}{n} \right| &\geq \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{1}{10} \Rightarrow n \leq 10 \end{aligned}$$

آزمون ۱۰: برای دنباله‌ی  $\left\{ \frac{2n}{n-1} \right\}$  داریم: برای هر  $\varepsilon > 0$  ، وجود دارد  $M \in \mathbb{N}$  که:  $n \geq M \Rightarrow \left| \frac{2n}{n-1} - 2 \right| < \varepsilon$  در این صورت مقدار  $M$  کدام است؟

(۱)  $\left| \frac{2}{\varepsilon} \right| + 2$  (۲)  $\left| \frac{2}{\varepsilon} \right| + 1$   
 (۳)  $\left| \frac{2}{\varepsilon} \right|$  (۴)  $\frac{2}{\varepsilon} - 1$

حل: گزینه‌ی ۱:

$$\begin{aligned} \left| \frac{2n}{n-1} - 2 \right| < \varepsilon &\Rightarrow \left| \frac{2n-2n+2}{n-1} \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{2}{n-1} \right| < \varepsilon, n > 1 \\ \Rightarrow \frac{2}{n-1} < \varepsilon &\Rightarrow \frac{n-1}{2} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n-1 > \frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} + 1 \\ \Rightarrow M &= \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil + 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{\Delta} + \Delta n} = \infty$$

دنباله بی‌کران است.

آزمون ۳: چندمین دنباله‌ی  $\{n^3 + n\}$  برابر ۲۲۲ است؟

- (۱) جمله‌ی نهم (۲) جمله‌ی هشتم  
 (۳) جمله‌ی هفتم (۴) جمله‌ی ششم  
 حل: گزینه‌ی ۴:

$$\begin{aligned} n^3 + n &= 222 \Rightarrow n^3 + n - 222 = 0 \Rightarrow \underbrace{n^3 - 216}_{(n-6)(n^2+6n+36)} + n - 6 = 0 \\ (n-6)(n^2+6n+36) &+ (n-6) = 0 \Rightarrow (n-6)(n^2+6n+37) = 0 \\ \Delta < 0, a > 0 \\ n-6 &= 0 \Rightarrow n = 6 \end{aligned}$$

آزمون ۴: دنباله‌ی  $\left\{ \sqrt{n^2-n} + \sqrt{n^2-1} - 2n + \frac{\Delta}{4} \right\}$  همگرا به کدام عدد است؟

(۱) ۲ (۲)  $\frac{5}{4}$  (۳) ۳ (۴)  $\frac{7}{4}$

حل: گزینه‌ی ۱:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2-n} + \sqrt{n^2-1} - 2n + \frac{\Delta}{4}) &\sim \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \frac{1}{2} + n - 2n + \frac{\Delta}{4}) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\Delta}{4} = 2 \end{aligned}$$

آزمون ۵:  $t_1 = 1$  و  $t_3 = 3$  و  $t_{n+2} = t_n + t_{n+1}$  مفروض است.

کدام است  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{t_{n+1}}$  ؟

(۱)  $\sqrt{2} + 1$  (۲)  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$   
 (۳)  $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$  (۴)  $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

حل: گزینه‌ی ۲:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{t_{n+1}} = k \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{1}{k}, k > 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_{n+2}}{t_{n+1}} &= \frac{1}{k} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_{n+1} + t_n}{t_{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{t_n}{t_{n+1}} \right) = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{t_{n+1}} \\ = 1 + k &= \frac{1}{k} \Rightarrow k^2 + k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

آزمون ۶: دنباله‌ی  $\left\{ \cot(n \sin \frac{\pi}{2n}) \right\}$  همگرا به کدام عدد است؟

(۱) ۰ (۲)  $\frac{\pi}{3}$  (۳)  $\frac{\pi}{2}$  (۴)  $\pi$

حل: گزینه‌ی ۱:

$$\begin{aligned} n \rightarrow \infty &\Rightarrow \sin \frac{\pi}{2n} \sim \frac{\pi}{2n} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \cot(n \sin \frac{\pi}{2n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \cot(n \times \frac{\pi}{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cot \frac{\pi}{2} = 0 \end{aligned}$$



# معرفی سایت‌های ریاضی جهان

احسان یارمحمدی



نشانی پایگاه اینترنتی: [bymath.com](http://bymath.com)

صفحه اصلی سایت شامل عنوان‌های زیر است. هر یک از این عنوان‌ها دربرگیرنده‌ی زیرعنوان‌هایی است که به تفصیل موضوع‌های ریاضی را شرح داده‌اند.

نشانی پایگاه اینترنتی: [ilovemaths.com](http://ilovemaths.com)

سایت I Love Maths برای دانش‌آموزان دوره‌های راهنمایی و متوسطه شامل لطیفه‌ها، معماها و مقالات ریاضی است. صفحه اصلی این سایت موتور جست‌وجوگری دارد که به کاربر امکان می‌دهد تا بتواند مطلب موردنظر خود را در شبکه‌ی اینترنت یا در این سایت مورد بررسی قرار دهد. در ضمن، صفحه اصلی این سایت دربرگیرنده‌ی عنوان‌های زیر است که هر یک از آن‌ها حاوی موضوعات متنوعی است.

■ باشگاه ریاضی (Math Clubs)

در این باشگاه ریاضی به زیرعنوان:

(Test your Math Quetient)

برمی‌خوریم که شامل یک پرسش‌نامه‌ی کوچک برای سنجش و آزمایش دانش ریاضی شماست. به یاد داشته باشید که اگر در پاسخ‌گویی به این پرسش‌نامه شکست خوردید، مأیوس و ناامید نشوید.

■ کلاس‌ها (Classes)

■ پروفیسور تتا (Prof. Theta)

■ تماس با ما (Contact Us)

■ کتاب‌های APC (APC Books)

■ کتاب‌های تألیفی ام.ال. آگاروال (Books by M.L.)

(Aggarwal)

■ برنامه‌ی دروس (Program of Lessons)

○ دروس (Lessons)

■ راهنمای مطالعه (Study Guide)

○ حساب (Arithmetic)

○ جبر (Algebra)

○ هندسه (Geometry)

○ مثلثات (Trigonometry)

○ توابع و نمودارها (Functions & Graph)

○ اصول آنالیز (Principles of Analysis)

○ مجموعه‌ها (Sets)

○ احتمال (Probability)

○ هندسه‌ی تحلیلی (Analytic Geometry)

■ مسائل (Problems)

○ دروس (Select Topic)

■ آزمون و امتحانات (Test & Exams)

○ دروس (Select Test)

■ پرداخت شهریه (Tuition Payment)

○ قواعد (Rules)

○ لیست قیمت (Price list)

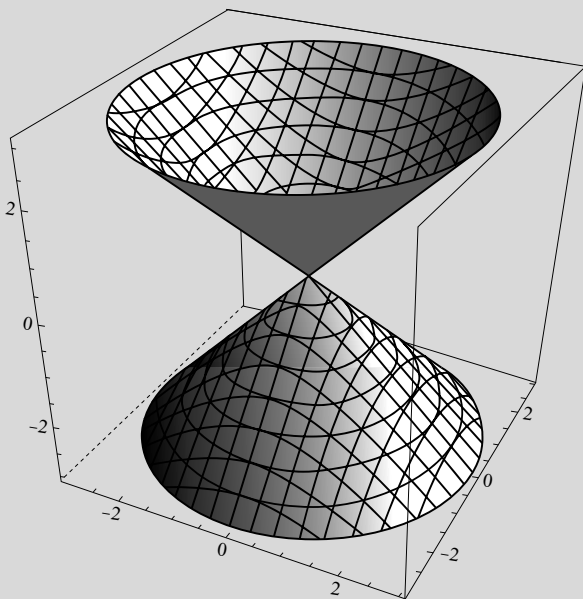
○ ثبت‌نام (Registration)



## آشنایی با بسته‌ی نرم‌افزاری مَتَمَتیکا ۳

# Mathematica

دکتر محمدعلی فریبرزى عراقى  
عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه  
آزاد اسلامی، واحد تهران مرکزی



### مقدمه

یکی از مباحث مهم در درس ریاضیات دوره‌ی دبیرستان، موضوع توابع، اعمال روی توابع و رسم نمودار آنهاست. بسته‌ی نرم‌افزاری مَتَمَتیکا این قابلیت را دارد که به راحتی محاسبات روی توابع را انجام دهد و منحنی یک تابع در یک بازه‌ی مفروض را رسم کند. در این قسمت چگونگی تعریف یک تابع و تعدادی از دستورالعمل‌های رایج برای رسم یک تابع در محیط بسته‌ی نرم‌افزاری مَتَمَتیکا با ارائه‌ی مثال‌های مختلف معرفی می‌شوند. باز هم یادآوری می‌کنیم برای اجرای هر یک از دستورالعمل‌ها باید دکمه‌های Shift+Enter به‌طور هم‌زمان فشار داده شوند.

## معرفی توابع در متمتیکا

فرض کنیم  $f$  تابعی بر حسب متغیر  $x$  باشد. به منظور تعریف ضابطه‌ی این تابع در متمتیکا یکی از دو صورت کلی زیر استفاده می‌شود:

$$f[x_]=\dots \text{ یا } f[x_]=\dots$$

در طرف دوم تعریفی باید مطرح شود که مطابق آن مقدار تابع  $f$  در مقدار مفروض  $x$  محاسبه می‌شود. گفتنی است که  $x$  یک متغیر ظاهری است و می‌تواند با هر متغیر یا عبارت دیگری جایگزین شود.

مثال ۱: در این مثال دو تابع  $f$  و  $g$  با ضابطه‌های  $f(x)=x^2$  و  $g(x)=2x^2$  در محیط متمتیکا تعریف و مقادیر  $f(3)$ ،  $f(-3)$  و  $f(1)+g(-2)$  محاسبه شده‌اند. همچنین تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(a)=3a^2+2a-5$  تعریف و مقدار  $f(2)+f(-2)$  به دست آمده است.

$$f[x_]=x^2$$

$$f[3]$$

$$9$$

$$g[x_]=2x^2$$

$$g[-3]$$

$$-54$$

$$f[1] + g[-2]$$

$$-15$$

$$f[a_]=3a^2+2a-5$$

$$f[2] + f[-2]$$

$$-10$$

مثال ۲: در این مثال ابتدا تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(x)=x^2+x^3$  تعریف شده است و به دنبال آن  $f(2)$ ،  $f(2x)$ ،  $f(e^x)$  و  $f(\lambda)$  مشخص شده‌اند. توجه کنید که  $\text{Exp}[x]$  به معنای  $e^x$  است.

$$f[x_]=x^2+x^3;$$

$$f[2]$$

$$12$$

$$f[2x]$$

$$4x^2+8x^3$$

$$f[\text{Exp}[x]]$$

$$e^{2x}+e^{3x}$$

$$f[\lambda]$$

$$\lambda^2+\lambda^3$$

توابع چندضابطه‌ای نیز در متمتیکا قابل تعریف‌اند. برای این کار ضابطه‌ی تابع را به همراه شرط مورد نظر به صورت زیر منظور می‌کنیم:

$$f[x_]= \text{عبارت} ; \text{ شرط}$$

در این حالت حتماً باید از نماد  $=$  استفاده کرد و پس از معرفی

ضابطه‌ی تابع، شرط مورد نظر را بعد از نماد  $;$  قرار داد. مثال ۳: در زیر تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(x)=\begin{cases} x^2 & x \leq 2 \\ 8-2x & x > 2 \end{cases}$  تعریف شده است:

$$f[x_]=x^2;x \leq 2$$

$$f[x_]=8-2x;x > 2$$

$$f[-4]$$

$$16$$

$$f[4]$$

$$0$$

ملاحظه می‌شود که مقدار  $f(-4)$  از ضابطه‌ی اول و مقدار  $f(4)$  از ضابطه‌ی دوم به ترتیب ۱۶ و ۰ به دست آمده‌اند.

## اعمال روی توابع

اگر  $f$  و  $g$  دو تابع مفروض باشند، اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم این توابع در محیط متمتیکا قابل انجام است. می‌دانیم این اعمال بین  $f$  و  $g$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), x \in D$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in D$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x), x \in D - \{x | g(x) = 0\}$$

که در آن‌ها  $D_f \cap D_g = D$ .

مثال ۴: در زیر چهار عمل اصلی روی توابع  $f$  و  $g$  با ضابطه‌های  $f(x) = \sqrt{x}$  و  $g(x) = x^2 + 2x + 3$  محاسبه شده‌اند:

$$f[x_]=\sqrt{x};$$

$$g[x_]=x^2+2x+3;$$

$$h1[x_]=f[x_]+g[x_]$$

$$3 + \sqrt{x} + 2x + x^2$$

$$h2[x_]=f[x_]-g[x_]$$

$$-3 + \sqrt{x} - 2x - x^2$$

$$h3[x_]=f[x_] \cdot g[x_]$$

$$\sqrt{x}(3 + 2x + x^2)$$

$$h4[x_]=f[x_]/g[x_]$$

$$\frac{\sqrt{x}}{3 + 2x + x^2}$$

مثال ۵: فرض کنیم  $f(x) = x^2 - 1$  و  $g(x) = 3x^2 + 4x - 7$ . در این صورت  $f+g$ ،  $f-g$ ،  $f \times g$  و  $f/g$  به صورت زیر قابل محاسبه‌اند. در این حالت از دستورهای Factor و Simplify نیز استفاده شده است.

$$f[x_]=x^2-1$$

$$g[x_]=3x^2+4x-7$$

Nest List [f, عبارت , n]

دستور Nest، n بار متوالی تابع f را تحت ضابطه‌ی مشخص شده در عبارت داخل گروه با خودش ترکیب می‌کند. دستور Nest List همین کار را انجام می‌دهد، ولی تمام محاسبات میانی را از ابتدا تا بار nم فهرست می‌کند.

مثال ۸: در زیر تابع f با ضابطه‌ی  $f(x)=x^2$ ، ۵ بار با خودش ترکیب شده است.

$$f[x_]:=x^2;$$

Nest[f,x,۵]

$$x^{32}$$

Nest List[f,x,۵]

$$\{x, x^2, x^4, x^8, x^{16}, x^{32}\}$$

مثال ۹: در زیر تابع f با ضابطه‌ی  $f(x)=\sqrt{x+1}$  تعریف شده و حاصل fofofof (یعنی ترکیب f با خودش تا ۵ بار) به دست آمده است. با مقدار دهی به x می‌توان مقدار این ترکیب را به ازای آن مقدار خاص پیدا کرد.

$$f[x_]=\sqrt{1+x};$$

Nest[f,x,۵]

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}}}$$

رسم نمودار توابع در متمتیکا

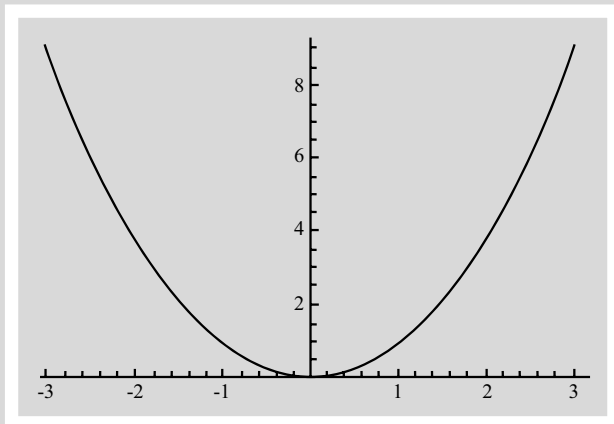
در ادامه، دستورالعمل رسم منحنی یک تابع در محیط متمتیکا معرفی می‌شود. دستور اصلی برای رسم نمودار یک تابع مفروض Plot است که به شکل کلی زیر تعریف می‌شود:

Plot [f[x], {x, x<sub>min</sub>, x<sub>max</sub>}]

دستور فوق برای رسم نمودار دو بعدی تابع f در بازه‌ی  $x \in [x_{min}, x_{max}]$  به کار می‌رود.

مثال ۱۰: دستور زیر نمودار تابع f با ضابطه‌ی  $f(x)=x^2$  را در  $[-3, 3]$  رسم می‌کند.

Plot [x<sup>2</sup>, {x, -۳, ۳}]



$$f[x]+g[x]$$

$$f[x]-g[x]$$

Factor[f[x]\*g[x]]

Simplify[f[x]/g[x]]

$$-8+4x+4x^2$$

$$6-4x-2x^2$$

$$(-1+x)^2(1+x)(7+3x)$$

$$\frac{1+x}{7+3x}$$

هم‌چنین می‌توان ترکیب دو تابع مفروض f و g را نیز در متمتیکا محاسبه کرد. می‌دانیم اگر x عددی در دامنه‌ی g و g(x) مقداری در دامنه‌ی f باشد، آن‌گاه داریم:

$$(fog)_{(x)}=f(g(x))$$

مثال ۶: در مثال ۴، ترکیب دو تابع f و g به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$h5[x]=f[g[x]]$$

$$\sqrt{3+2x+x^2}$$

$$h6[x]=g[f[x]]$$

$$3+2\sqrt{x}+x$$

به منظور محاسبه‌ی ترکیب دو تابع f و g می‌توان از دستور Com-position به صورت زیر استفاده کرد.

I) Composition[f,g]

II) Composition[g,f]

دستور اول همان fog و دستور دوم همان gof را مشخص می‌کند.

مثال ۷: در دستورالعمل‌های زیر دو تابع f و g با ضابطه‌های  $f(x)=\sqrt{x}$  و  $g(x)=x^2+2x+3$  تعریف شده و سپس fog و gof با به‌کارگیری دستور Composition به دست آمده‌اند.

$$f[x_]=\sqrt{x};$$

$$g[x]=x^2+2x+3;$$

h۱=Composition[f,g];

h۱[x]

$$\sqrt{3+2x+x^2}$$

h۲=Composition[g,f];

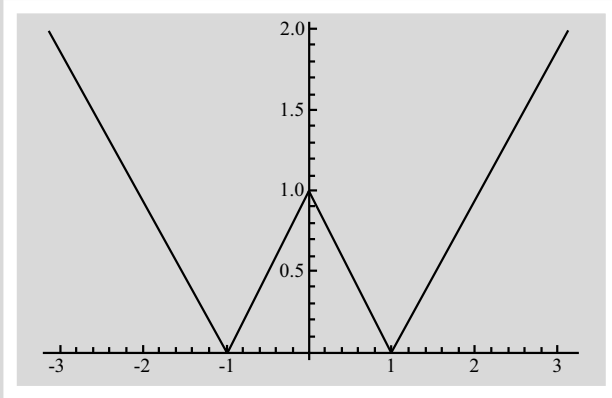
h۲[x]

$$3+2\sqrt{x}+x$$

با استفاده از دستور ترکیب توابع می‌توان ترکیب یک تابع با خودش را به هر تعداد بار که مورد نظر باشد محاسبه کرد. برای این کار از دستورالعمل Nest یا Nest List به صورت زیر استفاده می‌شود:

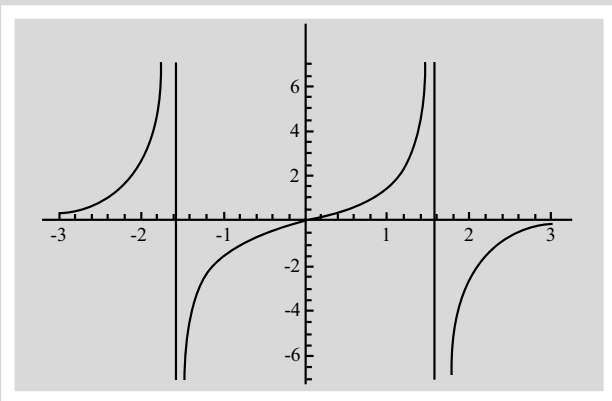
Nest [f, عبارت , n]

Plot [Abs [Abs[x] - ۱], {x, -۳, ۳}]



مثال ۱۳: به منظور رسم نمودار تابع با ضابطه‌ی  $y = \tan x$  به ازای  $-3 \leq x \leq 3$  دستور زیر را اجرا می‌کنیم:

Plot [Tan[x], {x, -۳, ۳}]



می‌توان نمودار دو تابع را به‌طور هم‌زمان در صفحه‌ی مختصات با رنگ‌های متفاوت رسم کرد. به این منظور از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

Plot [{f[x], g[x]}, {x, x\_min, x\_max}]

این دستور نمودارهای توابع  $f$  و  $g$  را در محدوده‌ی  $x_{\min}$  تا  $x_{\max}$  در یک صفحه‌ی مختصات رسم می‌کنیم. این دستور قابل تعمیم برای رسم سه یا بیش از سه تابع به صورت کلی زیر است:

Plot [{f, f\_p, ...}, {x, x\_min, x\_max}]

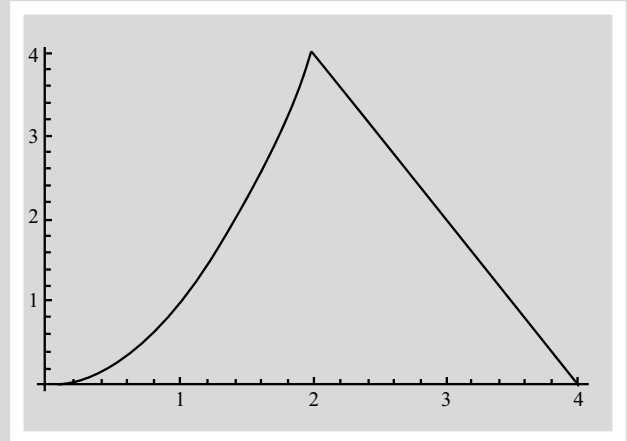
مثال ۱۴: به منظور رسم هم‌زمان نمودارهای دو تابع  $f$  و  $g$  با ضابطه‌های  $f(x) = x^2$  و  $g(x) = 2x + 7$  در  $[-5, 5]$  به صورت زیر عمل می‌کنیم:

مثال ۱۱: دستور زیر نمودار تابع مثال ۳ را رسم می‌کند:

$$f[x_] := x^2; x \leq 2$$

$$f[x_] := 8 - 2x; x > 2$$

Plot [f[x], {x, ۰, ۴}]



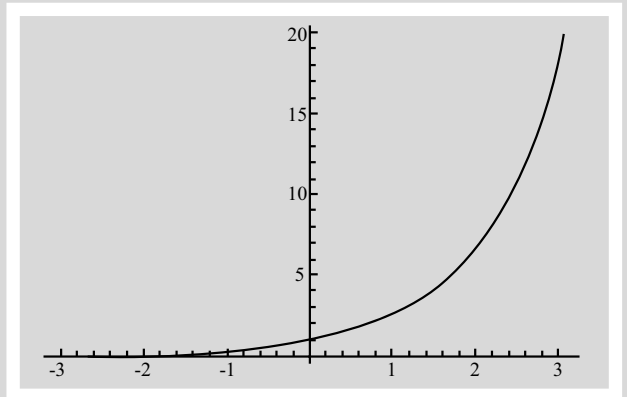
مثال ۱۲: دستورهایی زیر نمودارهای توابع با ضابطه‌های  $y = e^x$  در

بازه‌ی  $[-3, 3]$ ،  $y = |x|$ ، در بازه‌ی  $[-4, 4]$  و  $y = ||x| - 1|$  در بازه‌ی  $[-3, 3]$

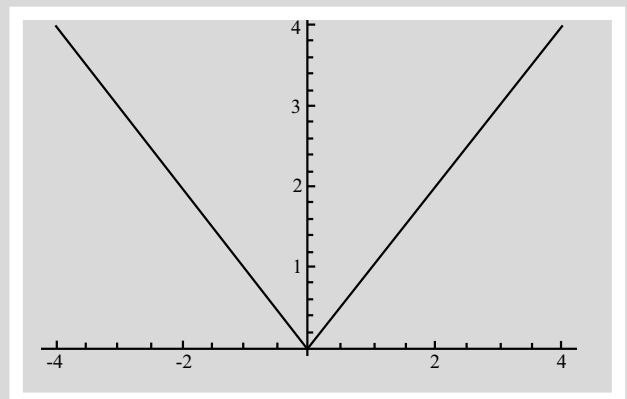
رسم می‌کند. توجه شود که  $Abs[x]$  به معنای قدرمطلق  $x$  است.

$$f[x_] = Exp[x];$$

Plot [f[x], {x, -۳, ۳}]

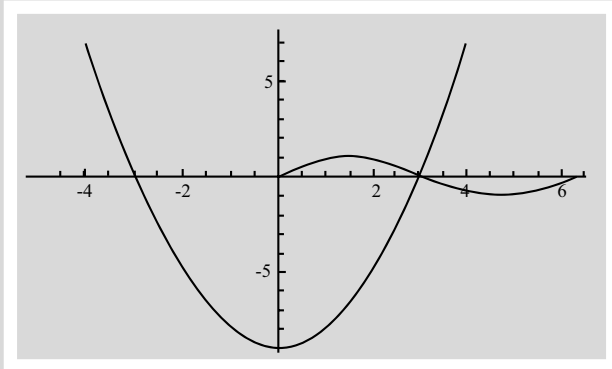


Plot [Abs[x], {x, -۴, ۴}]

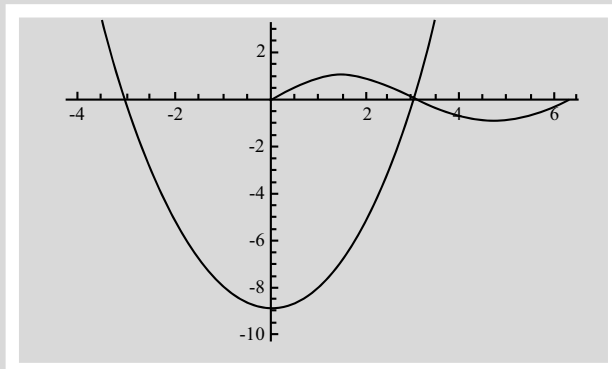


در یک صفحه‌ی مختصات با به‌کارگیری PlotRange رسم می‌کنیم.

```
g۱ = Plot[x۲ - ۹, {x, -۴, ۴}];
g۲ = Plot[sin[x], {x, ۰, ۲π}];
Show [g۱, g۲, PlotRange → All]
```



```
Show [g۱, g۲, PlotRange → {-۱۰, ۳}]
```

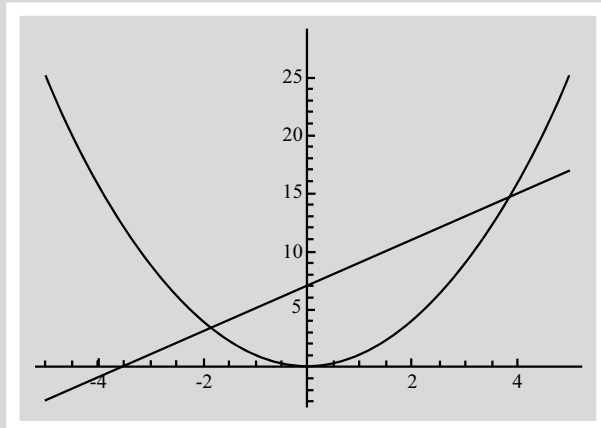


زمانی که چند نمودار به‌طور هم‌زمان رسم می‌شوند، متمتیکا قابلیت را دارد که برای تشخیص نمودارها آن‌ها را با رنگ‌ها و اندازه‌های مختلف یا با برجسب‌گذاری و به‌کارگیری خط‌چین‌های گوناگون رسم کند. برای مثال می‌توان با به‌کارگیری دستور PlotStyle نوع ترسیم موردنظر را اعلام کرد. یکی از انواع رایج GrayLevel[x] است که در آن x عددی بین صفر و یک است. هر قدر x به یک نزدیک‌تر باشد شکل پررنگ‌تر و هر قدر به صفر نزدیک‌تر باشد کم‌رنگ‌تر رسم می‌شود. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱۶: دستور زیر سه منحنی  $y = \sin^3 x$  و  $y = \sin^2 x$  و  $y = \sin x$  را به ازای  $-\pi \leq x \leq \pi$  با سه سطح رنگ مختلف رسم می‌کند.

```
Plot [{sin[x], sin [2x], sin [3x]}, {x, -Pi, Pi}]
PlotStyle → {GrayLevel [۰/۲], GrayLevel [۰/۵], GrayLevel [۰/۸]}
```

```
Plot [{x۲, ۲x+۷}, {x, -۵, ۵}]
```



به‌منظور رسم هم‌زمان نمودار چند تابع در یک صفحه‌ی مختصات از دستور Show نیز می‌توان استفاده کرد. در این حالت چون دامنه‌های توابع متفاوت‌اند، با به‌کارگیری یکی از موارد زیر، کاربر می‌تواند تنظیمات موردنظر برای رسم این نمودارها را تغییر دهد. برای تایپ کاراکترهایی چون → می‌توانیم روی گزینه‌ی Insert کلیک و پس از انتخاب special character گزینه‌ی → را در صفحه درج کنیم یا این کاراکتر را از پنجره‌ی Basic Math Input برگزینیم.

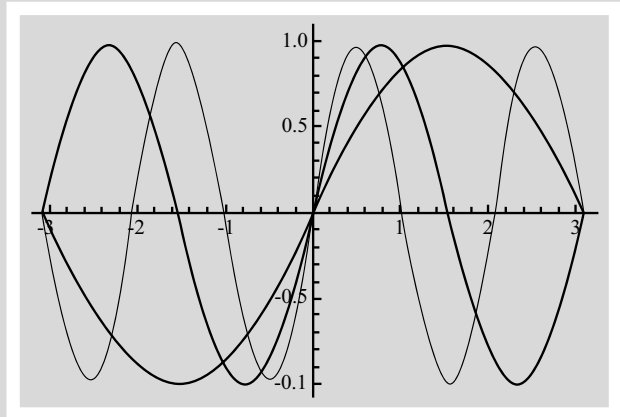
- ۱) PlotRange → Automatic
- ۲) PlotRange → All
- ۳) PlotRange → {y<sub>min</sub>, y<sub>max</sub>}
- ۴) PlotRange → {{x<sub>min</sub>, x<sub>max</sub>}, {y<sub>min</sub>, y<sub>max</sub>}}

با در نظر گرفتن دستور انتخابی ۱، خود متمتیکا به صورت خودکار تنظیمات مبنایی را برای رسم توابع برمی‌گزیند و آن دسته از نقاطی را که مختص عمودی آن‌ها خیلی بزرگ باشد، در نمودارها حذف می‌کند. دستور ۲ متمتیکا را وادار می‌کند که تمام نقاط نمودارها را در محدوده‌های وارد شده رسم کند. دستور ۳ تنها نقاطی از نمودارها را رسم می‌کند که مختص عمودی آن‌ها در محدوده‌ی بین y<sub>min</sub> و y<sub>max</sub> باشد. دستور ۴ نیز تنها نقاطی از نمودارها را رسم می‌کند که مختص افقی آن‌ها بین x<sub>min</sub> و x<sub>max</sub> و مختص عمودی آن‌ها بین y<sub>min</sub> و y<sub>max</sub> باشند. به این ترتیب از دستور Show به شکل کلی زیر برای رسم هم‌زمان چند تابع می‌توان استفاده کرد.

```
Show [g۱, g۲, ..., PlotRange → ...]
```

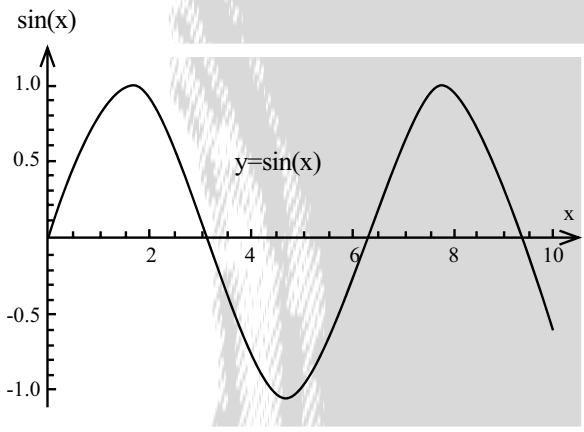
مثال ۱۵: در مثال ذیل، دو تابع با ضابطه‌های  $y = \sin x$  و  $y = x^2 - 9$  رسم شده‌اند. با استفاده از دستور Show به دو صورت زیر آن‌ها را

\* گفتنی است که اگر نوع رنگ‌ها مشخص نشود، خود نرم‌افزار به شکل خودکار رنگ‌های مختلفی را انتخاب می‌کند. هم‌چنین می‌توان با برجسب‌گذاری روی نمودار تابع یا محورهای مختصات، اطلاعات موردنظر را روی شکل منظور کرد. برای این کار از دستور `PlotLabel` برای برجسب‌گذاری نمودار تابع و `AxesLabel` برای برجسب‌گذاری محورهای مختصات استفاده می‌کنیم. به مثال زیر توجه کنید.



مثال ۱۸: در دستور زیر منحنی تابع با ضابطه  $y = \sin x$  در بازه‌ی  $[0, 10]$  با برجسب `y=sin(x)` برای منحنی تابع و برجسب‌های `x` و `sin(x)` برای محورهای مختصات رسم شده‌اند.

`Plot[sin[x], {x, 0, 10}, PlotLabel -> y==sin[x], AxesLabel -> {x, sin [x]}`

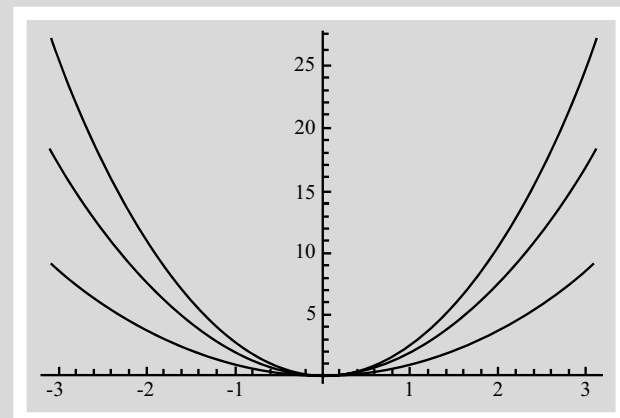


در قسمت بعد دستورات عمل‌های دیگری از بسته‌ی نرم‌افزاری `متمتیکا` معرفی خواهند شد.

هم‌چنین می‌توان نام رنگ انتخابی برای رسم هر یک از نمودارها را اعلام کرد. به مثال زیر توجه کنید:

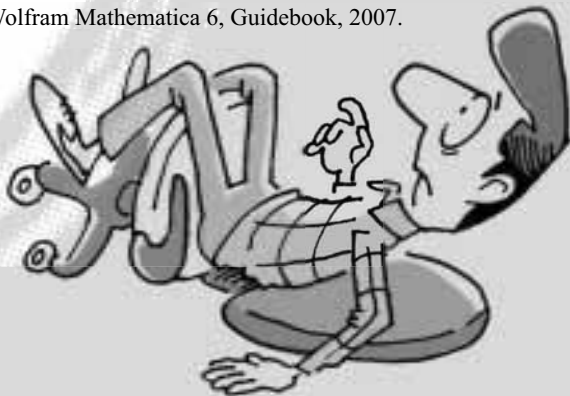
مثال ۱۷: دستور زیر منحنی توابع  $y = x^2$ ،  $y = 2x^2$  و  $y = 3x^2$  را به ازای  $-3 \leq x \leq 3$ ، به ترتیب با نوع ترسیم قرمز، سبز و آبی رسم می‌کند. شما در مانیتور رایانه‌ی خود می‌توانید نمودارها را با این رنگ‌ها مشاهده کنید. البته رنگ‌های دیگری چون `Pink`، `Gray`، `Brown`، `Yellow` و... را نیز می‌توان انتخاب کرد. دوباره متذکر می‌شویم که حرف اول نام هر یک از دستورات عمل‌ها و انتخاب‌ها در `متمتیکا` باید بزرگ و سایر حروف باید کوچک تایپ شوند. البته این قانون برای دستورات عمل‌های دو کلمه‌ای نیز باید رعایت شود. برای مثال در واژه‌ی `PlotStyle` باید حروف `S` و `P` بزرگ و سایر حروف کوچک تایپ شوند. یا برای مثال اگر بخواهیم رنگ یک منحنی قرمز کم‌رنگ باشد باید تایپ کنیم: `Light Red` برای انتخاب ساده‌ی رنگ‌ها در صفحه‌ی اصلی `متمتیکا` روی `Insert` کلیک و گزینه‌ی `Color` را انتخاب می‌کنیم، سپس در صفحه‌ی رنگ‌ها رنگ موردنظر را برمی‌گزینیم.

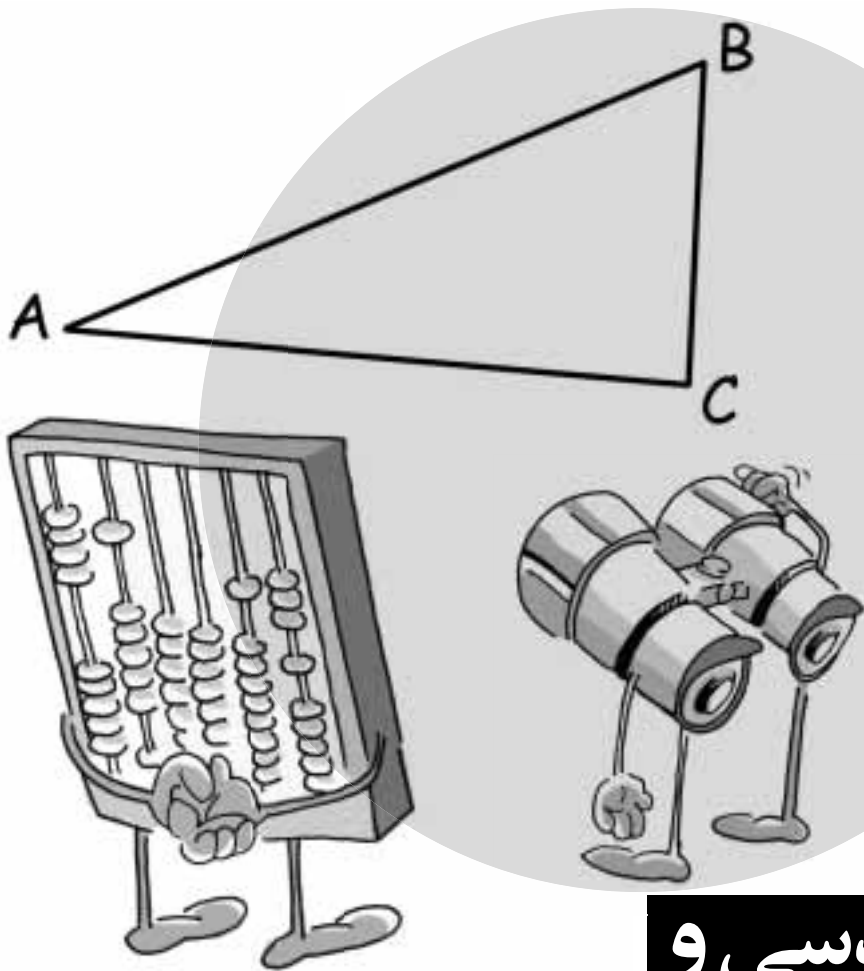
`Plot[{x^2, 2x^2, 3x^2}, {x, -3, 3}, PlotStyle -> {Red, Green, Blue}]`



#### منابع

1. Mathematica, Eugene Don, Schaum's outline series, second edition, McGraw Hill Companies, 2009.
2. Wolfram Mathematica 6, Guidebook, 2007.

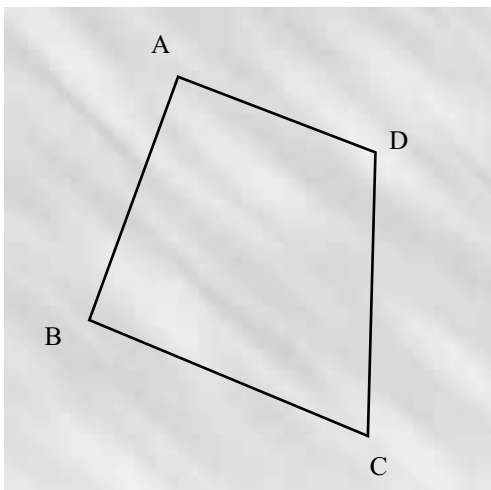




اشاره  
به منظور استفاده  
بیشتر دانش آموزان  
از این مقاله، از چند  
شماره‌ی قبل به حل  
مسئله‌های هندسه در صفحه  
(هندسه‌ی مسطحه) پرداختیم.  
در این شماره ادامه‌ی این مطالب را  
پی می‌گیریم.

# رویکرد هندسی و رویکرد جبری در آموزش هندسه ۱۴

محمد هاشم رستمی



مسئله‌ی ۷. چهار نقطه‌ی غیرهمخط  $A, B, C, D$  در یک صفحه داده شده‌اند. آیا نقطه‌ای در صفحه‌ی گذرنده بر این چهار نقطه وجود دارد که از این چهار نقطه به یک فاصله باشد؟ در صورتی که چنین نقطه‌ای وجود دارد، شرط وجودش چیست؟

الف) حل به روش هندسی  
پاره‌خط‌های  $AB, BC, CD, DA$  را رسم می‌کنیم، یعنی در واقع چهار ضلعی  $ABCD$  را می‌سازیم. عمود منصف‌های پاره‌خط‌های  $AB, BC, CD, DA$  را رسم می‌کنیم و به ترتیب  $d_1, d_2, d_3, d_4$  می‌نامیم.



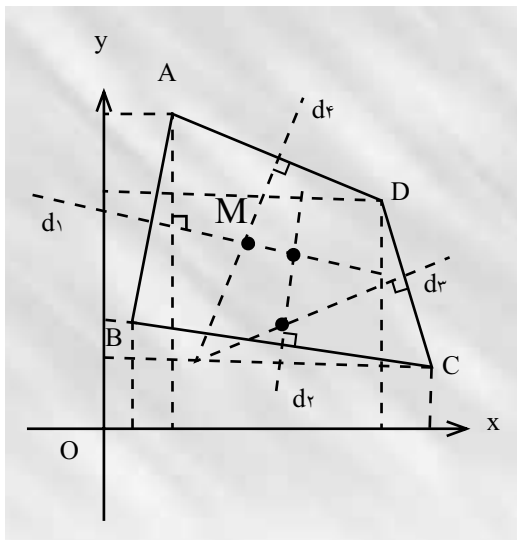
عکس قضیه: هر چهارضلعی که مجموع دو زاویه‌ی روبه‌روی آن  $180^\circ$  باشد، محاطی است، یعنی دایره‌ای وجود دارد که از چهار رأس آن می‌گذرد. مرکز این دایره همان نقطه‌ی  $M$ ، یعنی محل برخورد (نقطه‌ی هم‌رسی) خط‌های  $d_1, d_2, d_3, d_4$  است.

اثبات این دو قضیه به روش هندسی در کتاب هندسه‌ی ۲ آمده است، بنابراین از اثبات آن صرف‌نظر می‌کنیم. پس می‌توانیم بگوییم شرط لازم و کافی برای آن که چهارضلعی  $ABCD$  محاطی باشد، یا به عبارت دیگر نقطه‌ای مانند  $M$  وجود داشته باشد که از چهار نقطه‌ی  $A, B, C, D$  به یک فاصله باشد ( $MA=MB=MC=MD$ ) آن است که مجموع هر دو زاویه‌ی روبه‌روی آن  $180^\circ$  باشد، یا به بیان دیگر، هر دو زاویه‌ی روبه‌روی آن مکمل یکدیگر باشند.

مربع، مستطیل و دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین از چهارضلعی‌های خاصی هستند که این ویژگی را دارند، یعنی بر چهار رأس آن‌ها یک دایره می‌گذرد. چرا؟ اما متوازی‌الاضلاع و لوزی از چهار ضلعی‌های خاصی هستند که این ویژگی را ندارند، یعنی بر چهار رأس آن‌ها یک دایره نمی‌گذرد. چرا؟

### ب) اثبات به روش جبری - مختصاتی

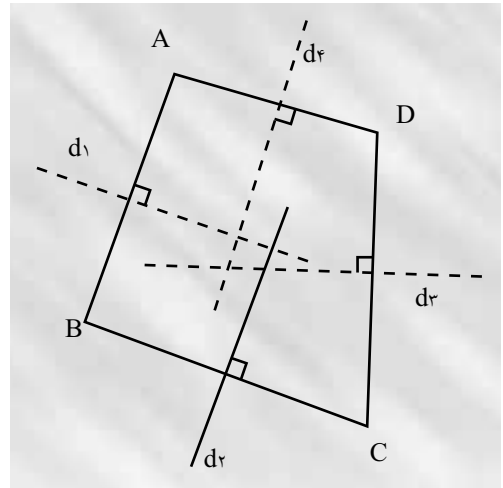
دستگاه مختصات قائم  $xOy$  را در صفحه‌ی گذرنده بر چهار نقطه‌ی  $A, B, C, D$  در نظر می‌گیریم و مختصات این نقطه‌ها در این دستگاه مختصات در حالت کلی را  $A=(x_1, y_1), B=(x_2, y_2), C=(x_3, y_3), D=(x_4, y_4)$  می‌نامیم. پاره‌خط‌های  $AB, BC, CD, DA$  را رسم می‌کنیم (در واقع چهارضلعی  $ABCD$



را می‌سازیم) و عمود منصف‌های این پاره‌خط‌ها را به ترتیب  $d_1, d_2, d_3, d_4$  می‌نامیم. معادله‌ی این عمودمنصف‌ها را می‌نویسیم و هم‌رسی

در صورتی که این چهارخط هم‌رس باشند، نقطه‌ی هم‌رسی آن‌ها که آن را  $M$  می‌نامیم از چهار نقطه‌ی  $A, B, C, D$  به یک فاصله است، یعنی داریم:

$$MA=MB=MC=MD$$

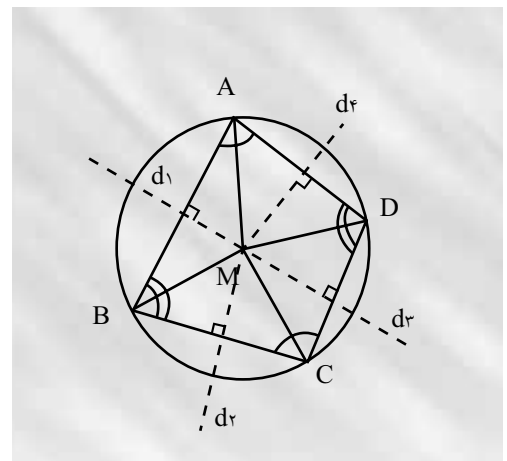


اما در چه صورتی خط‌های  $d_1, d_2, d_3, d_4$  هم‌رس‌اند؟ در هندسه‌ی ۲، کتاب درسی سال سوم دبیرستان رشته‌ی ریاضی و فیزیک داریم:

قضیه: در هر چهارضلعی محاطی مجموع هر دو زاویه‌ی روبه‌رو  $180^\circ$  است:

$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$

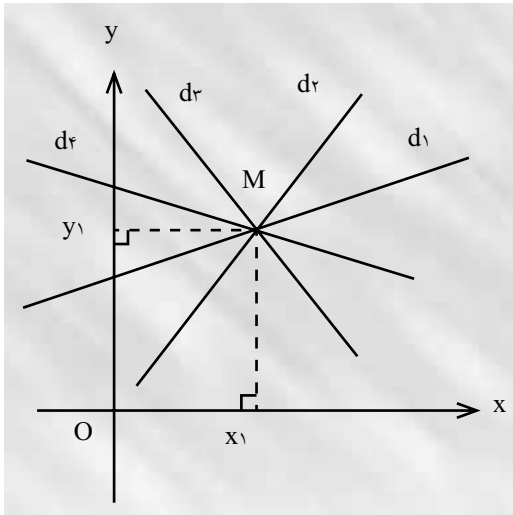
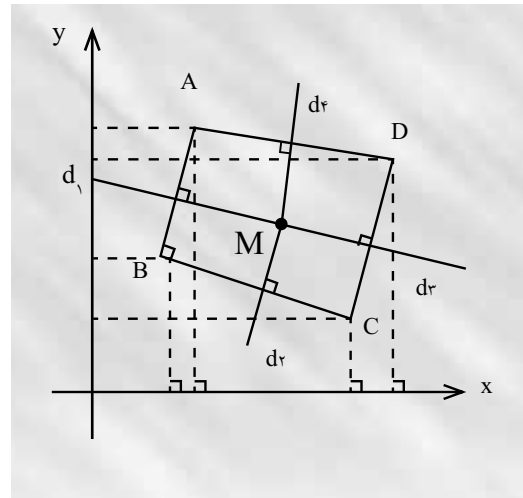
نکته: چهار ضلعی را محاطی می‌نامند در صورتی که بر چهار



رأس آن یک دایره بگذرد، یعنی نقطه‌ای مانند  $M$  وجود داشته باشد که از چهار رأس آن چهارضلعی به یک فاصله باشد (این نقطه را مرکز دایره‌ی محیطی چهارضلعی می‌نامند و آن را با  $M$  یا  $O$  یا هر حرف دیگری نشان می‌دهند).

بودن یا نبودن آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

از این خط‌ها را به دست می‌آوریم و آن‌گاه مختصات این نقطه را در معادله‌ی خط‌های دیگر قرار می‌دهیم. اگر مختصات این نقطه در معادله‌ی خط‌های دیگر صدق کند، این خط‌ها هم‌رسند و اگر صدق نکند، هم‌رس نیستند.



در صورتی که این چهار خط هم‌رس باشند، نقطه‌ای مانند M وجود دارد که از چهار نقطه‌ی A, B, C و D به یک فاصله است، یا به عبارت دیگر، چهارضلعی ABCD محاطی است و در صورتی که چهار خط  $d_1, d_2, d_3, d_4$  هم‌رس نباشند، نقطه‌ای در صفحه‌ی گذرنده بر چهار نقطه‌ی A, B, C و D وجود ندارد که از این چهار نقطه به یک فاصله باشد یا به بیانی دیگر، چهارضلعی ABCD محاطی نیست.

از این ویژگی برای بررسی محاطی بودن یا نبودن یک چندضلعی می‌توانیم استفاده کنیم، بدین ترتیب که معادله‌ی عمودمنصف‌های ضلع‌های آن را بنویسیم و هم‌رس بودن یا نبودن آن‌ها را بررسی کنیم. اگر این عمودمنصف‌ها هم‌رس باشند، چندضلعی محاطی است و اگر هم‌رس نباشند، چندضلعی محاطی نیست. محاطی بودن چندضلعی به معنای آن است که در صفحه‌ی آن چندضلعی، نقطه‌ای وجود دارد که از تمام رأس‌های آن چندضلعی به یک فاصله است و محاطی نبودن چندضلعی به معنای بودن چنین نقطه‌ای است.

برای این‌که هم‌رس بودن یا نبودن خط‌های  $d_1, d_2, d_3, d_4$  را بررسی کنیم، نخست معادله‌ی این خط‌ها را می‌نویسیم، سپس مختصات نقطه‌ی برخورد دو خط از این چهار خط را به دست می‌آوریم (با حل یک دستگاه دو معادله‌ی دو مجهولی)؛ آن‌گاه مختصات این نقطه‌ی برخورد را در معادله‌ی دو خط دیگر قرار می‌دهیم. اگر مختصات این نقطه در معادله‌ی دو خط دیگر صدق کند، بدان معناست که دو خط دیگر هم از این نقطه می‌گذرند، یعنی چهارخط هم‌رس‌اند و نقطه‌ی هم‌رسی آن‌ها که آن را M می‌نامیم، جواب مسئله است، یعنی از چهار نقطه‌ی A, B, C و D به یک فاصله است یا به عبارت دیگر، چهارضلعی ABCD محاطی است.

مثال ۱: ثابت کنید که در صفحه‌ی هر مستطیل نقطه‌ای وجود دارد که از چهار رأس آن به یک فاصله است. به عبارت دیگر، دایره‌ای وجود دارد که بر چهار رأس یک مستطیل می‌گذرد یا به بیان دیگر، هر مستطیلی می‌تواند در یک دایره محاط شود.

در صورتی که مختصات این نقطه در معادله‌ی دو خط دیگر صدق نکند مسئله جواب ندارد، یعنی نقطه‌ای در صفحه‌ی گذرنده بر این چهار نقطه وجود ندارد که از چهار نقطه‌ی A, B, C و D به یک فاصله باشد یا به بیان دیگر، چهارضلعی ABCD محاطی نیست.

الف) اثبات به روش هندسی

روش اول - مسئله را حل شده در نظر می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم نقطه‌ی M جواب مسئله باشد، یعنی نقطه‌ای باشد که از چهار نقطه‌ی A, B, C و D به یک فاصله است، یعنی داشته باشیم:

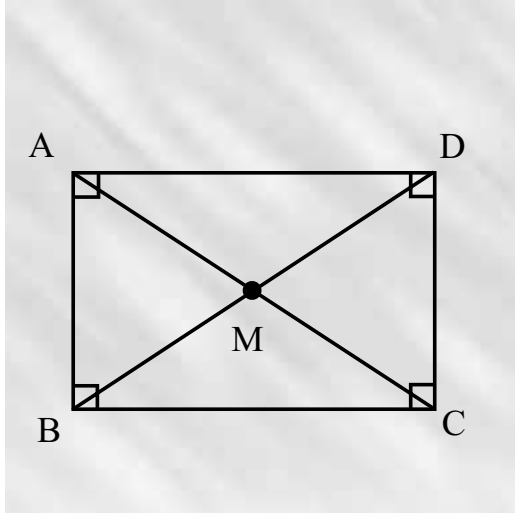
$$MA = MB = MC = MD$$

با توجه به این‌که  $AB = CD$  و  $BC = AD$  و  $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$

است، دو مثلث MAB و MCD و همچنین دو مثلث MBC و MAD هم‌نهشت‌اند (به حالت ض ض ض) زیرا:

نکته‌ی مهم: برای بررسی هم‌رس بودن یا نبودن هر چندخط (۳ خط، ۴ خط، ۵ خط، ۶ خط یا بیشتر) می‌توانیم از روش بالا استفاده کنیم، یعنی با داشتن معادله‌ی آن‌ها، مختصات نقطه‌ی برخورد دو خط

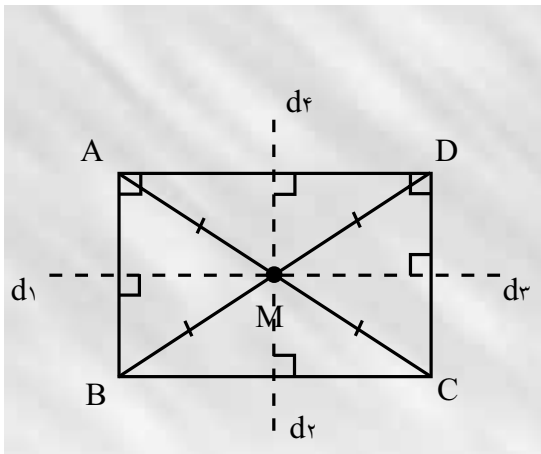
روش سوم - قطرهای AC و BD از مستطیل ABCD را رسم می‌کنیم و نقطه‌ی برخورد آن‌ها را M می‌نامیم. چون قطرهای مستطیل با هم مساوی‌اند و یکدیگر را نصف می‌کنند، پس داریم:  $MA=MB=MC=MD$



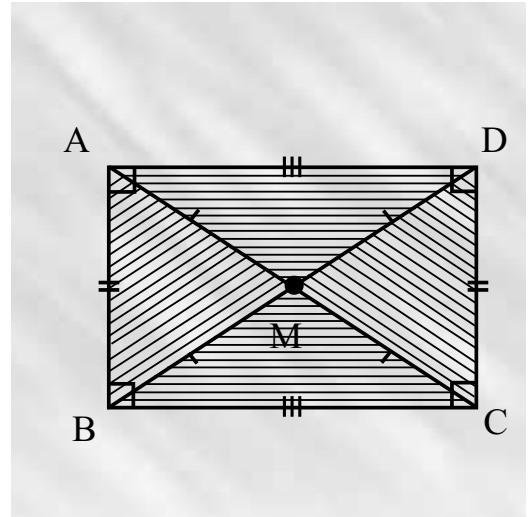
بنابراین، نقطه‌ی M محل برخورد قطرهای مستطیل ABCD جواب مسئله است.

روش چهارم - عمودمنصف‌های ضلع‌های مستطیل، یعنی عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AB، BC، CD و DA را رسم می‌کنیم و به ترتیب  $d_1, d_2, d_3, d_4$  می‌نامیم.  $d_1$  و  $d_2$  بر هم منطبق‌اند، زیرا در واقع خطی که وسط‌های ضلع‌های AB و CD از این مستطیل را به هم وصل می‌کند بر هر دو ضلع AB و CD عمود است، یعنی هم عمودمنصف AB است و هم عمودمنصف CD؛ چرا؟ هم‌چنین خط‌های  $d_3$  و  $d_4$  نیز بر هم منطبق‌اند. اگر نقطه‌ی برخورد  $d_1$  و  $d_2$  با خط‌های  $d_3$  و  $d_4$  را M بنامیم، این نقطه جواب مسئله است، یعنی داریم:

$$MA=MB=MC=MD$$

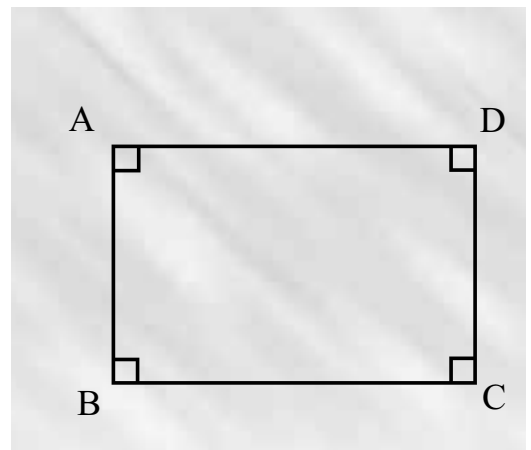


$MA=MB=MC=MD$  و  $AB=CD \Rightarrow \Delta MAB \cong \Delta MCD$   
 $MA=MB=MC=MD$  و  $BC=AD \Rightarrow \Delta MBC \cong \Delta MAD$   
 از هم‌نهشتی این مثلث‌ها نتیجه می‌شود که  $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$  و  $\hat{M}_3 = \hat{M}_4$ ، اما  $2\hat{M}_1 + 2\hat{M}_3 = 360^\circ$  پس  $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 + \hat{M}_3 + \hat{M}_4 = 360^\circ$  است.



در نتیجه  $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 180^\circ$  و  $\hat{M}_3 + \hat{M}_4 = 180^\circ$ . پس AMC و BMD خط‌های راست هستند، یعنی BMD و AMC قطرهای مستطیل ABCD هستند. بنابراین نقطه‌ی M وجود دارد و این نقطه محل برخورد قطرهای AC و BC از مستطیل ABCD است.

روش دوم - چون در مستطیل ABCD  $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$  است، پس  $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$  و  $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$ ، یعنی هر دو زاویه‌ی روبه‌روی آن مکمل یکدیگرند، بنابراین مستطیل ABCD محاطی است، یعنی بر چهار رأس آن یک دایره می‌گذرد. اگر مرکز این دایره را M بنامیم، جواب مسئله است، یعنی نقطه‌ای است که از چهار رأس این مستطیل یک فاصله است، یعنی داریم  $MA=MB=MC=MD$  (این دایره به قطر AC یا BD است).



زیرا:

$$M \in d_1 \Rightarrow MA = MB, M \in d_2 \Rightarrow MC = MD$$

$$M \in d_2 \Rightarrow MB = MC, M \in d_1 \Rightarrow MA = MD$$

$$\Rightarrow MA = MB = MC = MD$$

نکته: از این که M هم روی  $d_1$  و هم روی  $d_2$  است، به طور مستقیم

می توان نتیجه گرفت که  $MA = MB = MC = MD$  است، زیرا:

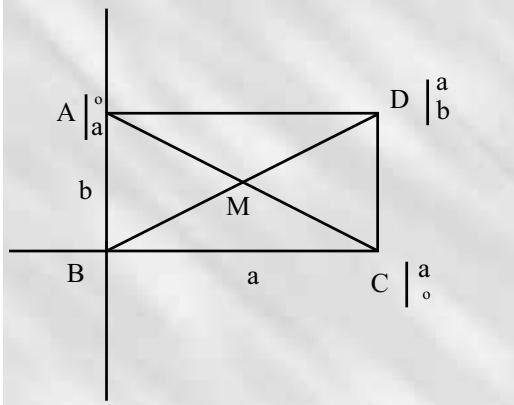
$$M \in d_1 \Rightarrow MA = MB, M \in d_2 \Rightarrow MC = MD$$

$$\Rightarrow MA = MB = MC = MD$$

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{0 + a}{2} = \frac{a}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{b + 0}{2} = \frac{b}{2} \end{cases}$$

اکنون فاصله‌ی نقطه‌ی M تا چهار رأس مستطیل را به دست

می آوریم.



$$MA = \sqrt{\left(0 - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$MB = \sqrt{\left(0 - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$MC = \sqrt{\left(a - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$MD = \sqrt{\left(a - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

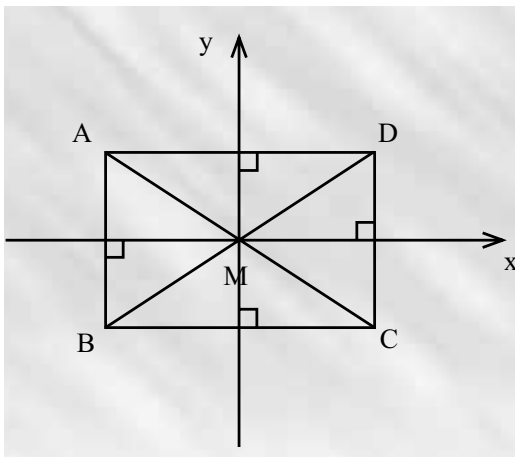
$$\Rightarrow MA = MB = MC = MD = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

پس نقطه‌ی M جواب مسئله است. این نقطه مرکز تقارن مستطیل

نیز هست که همان نقطه‌ی برخورد قطرهای مستطیل است.

روش دوم - طول ضلع‌های مستطیل را a و b در نظر می گیریم.

قطرهای آن را رسم می کنیم و نقطه‌ی برخورد آن‌ها را M می نامیم.



پاسخ چرا در حل مسئله: اگر وسط ضلع AB را E و

وسط ضلع CD را F بنامیم و از E به F وصل کنیم، خط

EF بر دو ضلع AB و CD عمود است، زیرا اگر از F به A و

B وصل کنیم دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ADF و BCF به دلیل

برابری ضلع‌های مجاور به زاویه‌های قائمه نشان هم‌نهشت‌اند

( $\hat{D} = \hat{C} = 90^\circ$  و  $FC = FD$  و  $AD = BC$ ) بنابراین  $FA = FB$

است، یعنی نقطه‌ی F روی عمودمنصف پاره‌خط AB است و چون

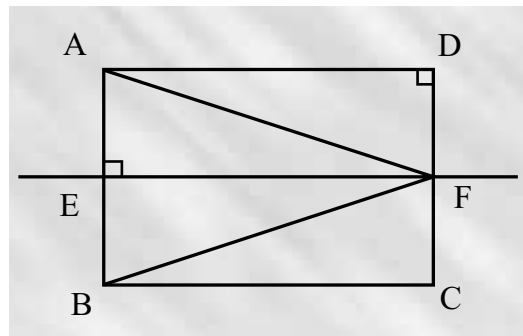
پای این عمودمنصف نقطه‌ی E است، پس EF هم عمودمنصف

پاره‌خط AB و هم عمودمنصف پاره‌خط CD است، یعنی

$d_1$  و  $d_2$  برهم منطبق‌اند. به دلیل مشابه، خط‌های  $d_1$  و  $d_2$  که به

ترتیب عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های BC و AD هستند. نیز، برهم

منطبق‌اند.



(ب) اثبات به روش جبری - مختصاتی

روش اول - اندازه‌ی ضلع‌های مستطیل ABCD را a و b در نظر

می گیریم، یعنی فرض می کنیم  $AB = CD = a$  و  $BC = AD = b$ .

دستگاه مختصات قائم xoy را چنان اختیار می کنیم که محور x

ها روی BC و محور yها روی BA باشد. رأس B را مبدأ مختصات

در نظر می گیریم، یعنی  $B = (0, 0)$ .

در این دستگاه مختصات  $A = (0, b)$ ،  $D = (a, b)$  و  $C = (a, 0)$

است. وسط قطر AC که آن را M می نامیم، محل برخورد قطرهای

آن است و داریم:

$$= \frac{a^2}{4} + \alpha^2 + a\alpha + \frac{b^2}{4} + \beta^2 + b\beta$$

$$\Rightarrow 2b\beta = 0, b \neq 0 \Rightarrow \beta = 0 \quad (1)$$

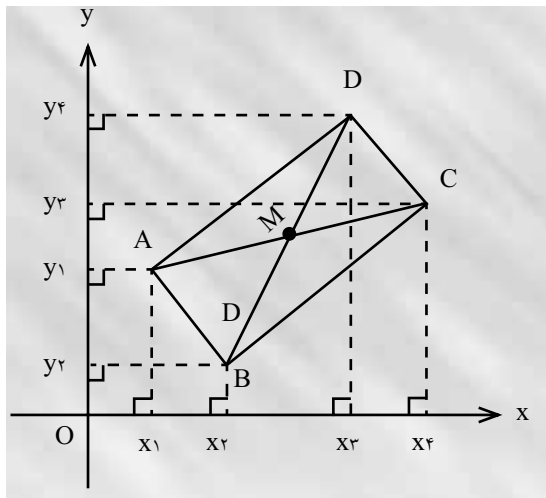
$$\left(\frac{a}{2} - \alpha\right)^2 + \left(\frac{-b}{2} - \beta\right)^2 = \left(\frac{a}{2} - \alpha\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - \beta\right)^2$$

$$\Rightarrow 2a\alpha = 0, a \neq 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 0 \quad (2)$$

از (1) و (2) نتیجه می‌شود  $M(0,0)$ . پس جواب مسئله، نقطه‌ی  $M$ ، محل برخورد قطرهای مستطیل است که در این دستگاه مختصات به عنوان مبدأ مختصات انتخاب شده است.

روش سوم - اگر دستگاه مختصات قائم  $xOy$  را به صورت دلخواه انتخاب کنیم، مختصات رأس‌های مستطیل  $A = (x_1, y_1)$ ،  $B = (x_2, y_2)$ ،  $C = (x_3, y_3)$  و  $D = (x_4, y_4)$  خواهد بود. در این صورت نیز می‌توانیم مختصات نقطه‌ی  $M$  جواب مسئله را همانند روش ارائه شده در قسمت قبل به دست آوریم، یعنی فرض کنیم  $M = (\alpha, \beta)$  جواب این مسئله است و از رابطه‌های  $MA = MB = MC = MD$  اندازه‌های  $\alpha$  و  $\beta$  را به دست آوریم. نتیجه‌ی کار چنین خواهد بود:



$$M = \left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2}\right) \text{ یا } M = \left(\frac{x_2 + x_4}{2}, \frac{y_2 + y_4}{2}\right)$$

که این نقطه، محل برخورد قطرهای مستطیل است.

نکته: چون نقطه‌ی  $M$  وسط قطر  $AC$  و وسط قطر  $BD$  نیز هست، پس تساوی‌های  $\frac{x_1 + x_3}{2} = \frac{x_2 + x_4}{2}$  و  $\frac{y_1 + y_3}{2} = \frac{y_2 + y_4}{2}$  برقرارند.

توجه: چگونگی تعیین  $\alpha$  و  $\beta$  برحسب مختصات رأس‌های مستطیل را برای ما بنویسید و به نشانی مجله ارسال کنید. به بهترین پاسخ‌ها جوایزی اهدا خواهد شد.

ادامه دارد

دستگاه مختصات قائم  $xMy$  را چنان اختیار می‌کنیم که  $M$  مبدأ مختصات، محور  $x$ ها موازی راستای  $AB$  و محور  $y$ ها موازی راستای  $BC$  باشد. در این دستگاه مختصات رأس‌های مستطیل  $A = \left(\frac{-a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ ،  $B = \left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}\right)$ ،  $C = \left(\frac{a}{2}, \frac{-b}{2}\right)$  و  $D = \left(\frac{+a}{2}, \frac{+b}{2}\right)$  است. فاصله‌ی نقطه‌ی  $M$  مبدأ مختصات و محل برخورد قطرهای مستطیل از چهار نقطه‌ی  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  را به دست می‌آوریم. داریم:

$$MA = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$MB = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{-b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$MC = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{-b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$MD = \sqrt{\left(\frac{+a}{2}\right)^2 + \left(\frac{+b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow MA = MB = MC = MD = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

بنابراین، نقطه‌ی  $M$  محل برخورد قطرهای مستطیل و جواب مسئله است، یعنی نقطه‌ای است که از چهار رأس مستطیل به یک فاصله خواهد بود.

نکته‌ی مهم: این سؤال پیش می‌آید که چرا در راه‌حل‌های جبری - مختصاتی ارائه شده، حدس زدیم که نقطه‌ی برخورد قطرهای مستطیل جواب مسئله است و سپس درست بودن این حدس را ثابت کردیم. این حدس زدن می‌تواند از راه‌حل هندسی مسئله نشأت بگیرد، اما بدون حدس زدن، مستقیماً می‌توانیم مختصات نقطه‌ی جواب مسئله را پیدا کنیم و متوجه شویم که این نقطه همان محل برخورد قطرهای مستطیل است. برای مثال در روش آخر راه‌حل جبری - مختصاتی که مختصات رأس‌های مستطیل  $ABCD$  به صورت  $A = \left(\frac{-a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ ،  $B = \left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}\right)$ ،  $C = \left(\frac{a}{2}, \frac{-b}{2}\right)$  و  $D = \left(\frac{+a}{2}, \frac{+b}{2}\right)$  است، فرض می‌کنیم جواب مسئله نقطه‌ی  $M = (\alpha, \beta)$  باشد. یعنی  $M$  نقطه‌ای باشد که از چهار رأس مستطیل به یک فاصله است. در این صورت داریم:

$$MA = \sqrt{\left(-\frac{a}{2} - \alpha\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - \beta\right)^2}$$

$$MB = \sqrt{\left(-\frac{a}{2} - \alpha\right)^2 + \left(\frac{-b}{2} - \beta\right)^2}$$

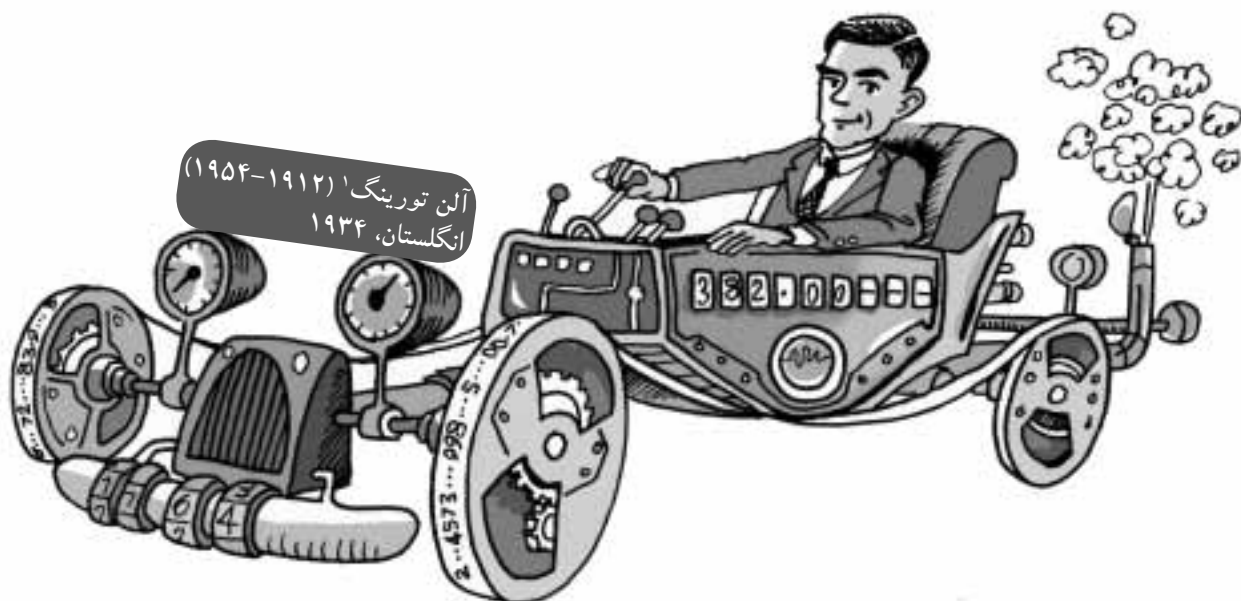
$$MC = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - \alpha\right)^2 + \left(\frac{-b}{2} - \beta\right)^2}$$

$$MD = \sqrt{\left(\frac{+a}{2} - \alpha\right)^2 + \left(\frac{+b}{2} - \beta\right)^2}$$

$$MA = MB = MC = MD \Rightarrow MA^2 = MB^2 = MC^2 = MD^2$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{a}{2} - \alpha\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - \beta\right)^2 = \left(\frac{-a}{2} - \alpha\right)^2 + \left(\frac{-b}{2} - \beta\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{4} + \alpha^2 + a\alpha + \frac{b^2}{4} + \beta^2 - b\beta$$



# ماشین های تورینگ

دکتر رابرت سالمون<sup>۲</sup>  
ترجمه: غلامرضا یاسی پور

محاسبه می‌تواند با ماشین تورینگ انجام گیرد. به نظر می‌رسد که باید برای هر عمل، ماشین تورینگی جداگانه موجود باشد. اما در اقدامی شگفت‌انگیز، تورینگ نشان داد که برای هر عمل، به ماشینی جداگانه نیاز نداریم. در عوض، یک ماشین تورینگ عمومی موجود است که می‌تواند مانند هر ماشین تورینگ دیگر عمل کند. پس این ماشین عمومی می‌تواند هر عمل محاسبه‌پذیر را به انجام برساند. این مطلب به کمال تورینگی موسوم است. دستاورد مهم دیگر، مسئله‌ی ایست است. با در دست داشتن یک ماشین تورینگ، همواره نمی‌توان تشخیص داد که توقف می‌کند یا محاسبه را تا ابد ادامه می‌دهد. این موضوع، محاسبه‌ای هم‌ارز قضیه‌ی گودل است (در شماره‌ی آینده مجله، قضیه گودل را ملاحظه خواهید کرد.) در دوران جنگ جهانی دوم، آلن تورینگ، کارهای پرارزشی در حوزه‌ی رمزگشایی انجام داد.

آلن تورینگ، ماشین‌هایی را توصیف کرد که بیان می‌کنند برحسب محاسبه، چه چیز ممکن است و چه چیز ناممکن است.

ماشین‌های تورینگ<sup>۳</sup>، رایانه‌ای است که غیر از لوازم اصلی، عاری از ملزومات دیگر است. وسیله‌ای است که به جای فلز و پلاستیک بودن، ایده‌ای مجرد از یک ماشین است. کار این ماشین بررسی نواری با طول نامتناهی است که با 0S و 1S علامت‌گذاری شده است. این نوار، از زیر هدی می‌گذرد که عدد موردنظر را می‌خواند، و آن‌گاه دو کار انجام می‌دهد: یکی روی عدد مورد بحث و دیگری روی نوار: ۱- ۱ را به ۰ یا ۰ را به ۱ تغییر می‌دهد، یا عدد را دست‌نخورده باقی می‌گذارد.

۲- نوار را یک مرحله جلو می‌برد، یک مرحله عقب می‌برد یا دست‌نخورده باقی می‌گذارد.

ماشین تورینگ را می‌توان طوری طراحی کرد که جمع، تفریق یا هر عمل اساسی حساب را انجام دهد. در واقع می‌تواند هر عمل حسابی پیچیده را انجام دهد. با یک مرحله جلوتر رفتن، هر عمل

## پی‌نوشت

1. Alan Turing
2. Dr. Robert Solomon
3. Turing Machines

# مسائل برای حل



## ریاضیات ۱

فرخ فرشیان

۱. حاصل عبارت

$$\frac{3^5 + 3^7 + \dots + 3^{17} + 3^{19}}{3^{21} - 3^5}$$

را به دست آورید.

۲. اگر  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$  باشد، ثابت کنید

$$\sqrt{\frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{ac}{b}} + \sqrt{\frac{bc}{a}} = \sqrt{abc}$$

۳. درجه‌ی چندجمله‌ای

$$x(x+x^2)(2x^2+2x^3)(3x^3+3x^4) \dots (10 \cdot x^{10} + 10 \cdot x^{11})$$

را به دست آورید.

۴. حاصل را به کمک اتحاد به دست

آورید.

$$\text{الف) } (\sqrt{y} + \sqrt{z})(9 - \sqrt{14})(\sqrt{y}\sqrt{z} - 2\sqrt{z})$$

$$\text{ب) } \frac{x^n(x^2 - x^2)(x^{2n} + x^{2n+1})}{(x^2 + x^2)^{15n-2n}}$$

۵. عبارات زیر را تجزیه کنید.

$$\text{الف) } x^{16} - 14x^8 + 49x^4 - 36$$

$$\text{ب) } (x+a)(x+b) - (y+a)(y+b)$$

۶. نقاط  $C = (-1, 0)$  و  $B = (0, 1)$  رأس‌های

مثلث متساوی‌الساقین به رأس  $A$  هستند.

در صورتی که طول ساق مثلث  $\sqrt{5}$  باشد،

مختصات رأس  $A$  را به دست آورید. مسئله چند جواب دارد؟

۷. علی ۵۰۰ تومان پس‌انداز دارد و هر

روز ۲۰۰ تومان به آن اضافه می‌کند. حسن

۲۰۰۰ تومان پس‌انداز دارد و هر روز ۲۰۰

تومان آن را خرج می‌کند.

الف) اگر  $x$  تعداد روزهای گذشته و  $y$

پس‌انداز علی باشد، رابطه‌ی بین  $x$  و  $y$  را

به دست آورید.

ب) اگر  $x$  تعداد روزهای گذشته و  $z$

پولی باشد که حسن خرج می‌کند، رابطه‌ی

بین  $x$  و  $z$  را به دست آورید.

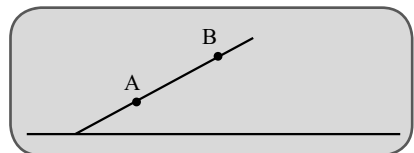
۸. در یک جاده‌ی شیب‌دار، اگر ۵۰۰ متر

حرکت کنیم از  $A$  به  $B$  می‌رسیم. اگر ارتفاع

دو نقطه‌ی  $A$  و  $B$  از سطح دریا به ترتیب

۱۰۰۰ و ۱۳۰۰ متر باشد، شیب این جاده را

به دست آورید.



سطح دریا

۹. اگر  $x - 2y = 0$  و  $x - 2y = -15$

معادلات دو ضلع یک مستطیل و  $7x + y = 15$

معادله‌ی یکی از قطرهای مستطیل باشد،

مختصات رأس‌های مستطیل را تعیین کنید.

۱۰. حاصل عبارت

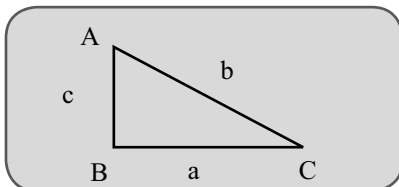
$$\frac{\sin^2 20 + \sin^2 70}{\sin 26} + \frac{\sin 28}{\cos^2 - \tan 45} + \frac{\sin 28}{\cos 64} + \frac{\sin 28}{\cos 62}$$

را به دست آورید.

۱۱. در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$

اندازه‌ی ضلع  $C$  و  $\tan C = \frac{3}{\sqrt{3}}$  و  $b = 4$  است.

را به دست آورید.



۱۲. حاصل عبارت زیر را به دست

آورید.

$$\text{الف) } \left( \frac{x+3}{2x-9} - \frac{x-3}{2x+9} - \frac{12}{x^2-9} \right) \div \left( \frac{2x+3}{x+3} - 1 \right)$$

$$\text{ب) } \frac{1}{1+x^{a-b} + x^{a-c}} + \frac{1}{1+x^{b-c} + x^{b-a}} + \frac{1}{1+x^{c-a} + x^{c-b}}$$

۱۳.  $a$  و  $b$  و  $c$  را طوری تعیین کنید

که باقی‌مانده‌ی تقسیم  $x^4 + ax^2 + b + x$  بر

عبارت  $3x^2 - 4x + 1$  برابر  $x^2 + 2x^2 - 4x + 1$

باشد.

۱۴. مخرج کسر  $\frac{8\sqrt{21}}{2\sqrt{3} + \sqrt{19} + \sqrt{7}}$  را

گویا کنید.

۱۵. خط زیر دارای معادله‌ی  $y = ax + b$

۵ چند عدد چهاررقمی می‌توان ساخت؛ به شرطی که تکرار مجاز نباشد و عدد حاصل از ۴۰۰۰ بزرگ‌تر باشد.

۱۷. به چند طریق می‌توان از بین ۱۰ نفر دانش‌آموز که ۳ نفر آن‌ها عضو تیم فوتبال مدرسه هستند، هیأتی سه‌نفری انتخاب کرد، به شرط آن‌که:

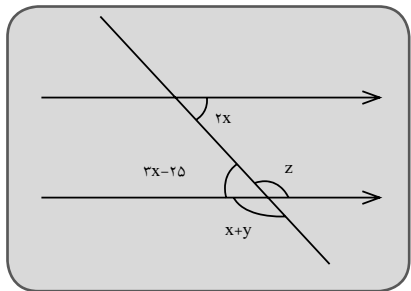
(الف) رئیس هیأت عضو تیم فوتبال باشد.

(ب) یک نفر آن‌ها عضو تیم فوتبال و ۲ نفر دیگر عضو تیم فوتبال نباشند.

## هندسه ۱

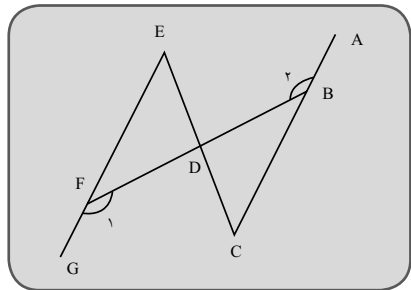
محمد هاشم رستمی

۱. با توجه به شکل، اندازه‌ی  $x$ ،  $y$  و  $z$  را تعیین کنید. خط‌های موازی، با پیکان‌های هم‌جهت مشخص شده‌اند.



۲. در شکل روبه‌رو:

(الف) اگر  $\hat{A} = 4^\circ$  و  $CE$  پاره‌خط  $BF$  را نصف کرده باشد، ثابت کنید که  $\hat{C} = \hat{E}$ .



(ب) اگر  $BF$  و  $CE$  یکدیگر را نصف کرده باشند، ثابت کنید:

$$BC = EF$$

۳. با استفاده از چهار پاره‌خط، خمی

$$s(x^2) - s(x)$$

$$s(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

۶. دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی زیر را

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x+1} - \frac{2-x}{1-x}}$$

۷. الف) اگر  $a > 0$  ثابت کنید  $a + \frac{1}{a} \geq 2$ .

ب) بیشترین مقدار کسر  $A = \frac{x}{1+x^2}$  را برای هر عدد حقیقی  $x > 0$  پیدا کنید.

۸. حدود  $m$  را چنان تعیین کنید که نابرابری زیر همواره برقرار باشد.

$$(m^2 + m - 2)x^2 + 2(m - 1)x - 2 < 0$$

۹. با استفاده از تعریف لگاریتم، دستگاه

زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 2^{3x-y} = 32 \\ 3^{x+2y} = 3 \end{cases}$$

۱۰. بدون استفاده از ماشین حساب،

حاصل عبارت زیر را محاسبه کنید.

$$A = \frac{\log_2^{14}}{\log_2^{16}} - \frac{\log_2^{192}}{\log_2^{17}}$$

۱۱. معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$1 + \log_7^{(x-1)} = \log_7^x$$

۱۲. بیشترین و کمترین مقدار عددی

عبارت زیر را محاسبه کنید.

$$A = \sin^2 x - 2 \sin x + 5$$

۱۳. مقدار عددی عبارت زیر را محاسبه

کنید.

$$A = \frac{\sin \frac{2\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{4\pi}{3} \cos \frac{4\pi}{3}}{\cos \frac{5\pi}{3} \cos \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{5\pi}{4} \sin \frac{7\pi}{4}}$$

۱۴. جواب‌های معادله‌ی زیر را بیابید.

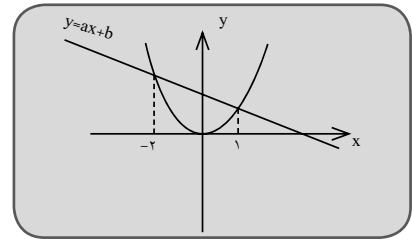
$$\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix} = 0$$

۱۵. اگر  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$  در این صورت

حاصل  $(A - 2A^{-1})$  را پیدا کنید.

۱۶. با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و

است. مقادیر  $a$  و  $b$  را با توجه به شکل به‌دست آورید.



۱۶. معادلات زیر را حل کنید.

(الف)  $x^2 - (3\sqrt{2} + 1)x + 4 + \sqrt{2} = 0$

(ب)  $x^2 + \frac{1}{x^2} - 4x - \frac{4}{x} = -6$

۱۷. مجموع ارقام یک عدد دو رقمی ۱۰

است. رقم دهگان آن ۲ واحد کم‌تر از مربع رقم یکان آن است. این عدد را پیدا کنید.

۱۸. مجموعه جواب نامعادله‌ی

$$x + 8 + a > \frac{4-x}{16} \text{ به صورت } x > -\frac{16}{3} \text{ است. مقدار } a \text{ را به‌دست آورید.}$$

## ریاضیات ۲

میرشهرام صدر

۱. نشان دهید که اگر زاویه‌های یک

مثلث را از کوچک به بزرگ (یا از بزرگ به کوچک) مرتب کنیم و تشکیل یک دنباله‌ی حسابی بدهند، آن‌گاه همواره زاویه‌ی وسطی برابر با  $60^\circ$  خواهد بود.

۲. اگر اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای

دنباله‌ی هندسی بسازند، قدر نسبت این دنباله را بیابید.

۳. اگر نمودار تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = x^2 - kx + k$  بر محور  $x$  مماس باشد، مقدار  $k$  را محاسبه کنید.

۴. تابع با ضابطه‌ی زیر مفروض است، در این صورت مقدار عددی  $f(f(f(1)))$  را بیابید.

۴. تابع با ضابطه‌ی زیر مفروض است،

در این صورت مقدار عددی  $f(f(f(1)))$  را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x > 0 \\ -2x^3 & x \leq 0 \end{cases}$$

۵. تابع با ضابطه‌ی زیر به نام تابع علامت

معروف است. مطلوب است محاسبه‌ی



رسم کنید که:

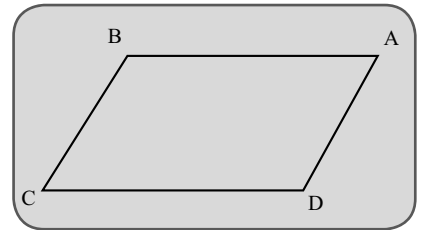
(الف) ساده و بسته باشد.

(ب) ساده باشد ولی بسته نباشد.

۴. چهارضلعی ABCD متوازی الاضلاع

است. (اندازه‌ی x و y را در هر یک از

حالت‌های زیر تعیین کنید:



(الف)  $CD=y$ ,  $AB=2x$ ,  $AD=5x$

و محیط متوازی الاضلاع مساوی ۸۴.

(ب)  $BC=3y+8$ ,  $AB=2x$

$AD=5y-10$  و  $CD=7x-25$

(پ)  $\hat{D}=x$  و  $\hat{C}=2y$ ,  $\hat{A}=4y-60$

(ت)  $\hat{A}=3x$ ,  $\hat{B}=10x-15$  و

$\hat{C}=y$

۵. چهارضلعی ABCD مستطیل است.

نقطه‌های E و F روی ضلع‌های BC و

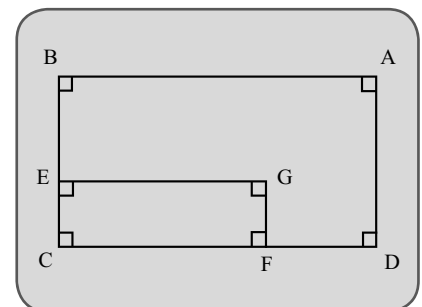
CD چنان اختیار شده‌اند که  $CE = \frac{5}{14}BC$

و  $\frac{CF}{CD} = \frac{7}{10}$  است. مستطیل CEGF را

می‌سازیم. اگر مساحت مستطیل CEGF

مساوی ۷۰ سانتی‌متر مربع باشد، اندازه‌ی

مساحت مستطیل ABCD را تعیین کنید.



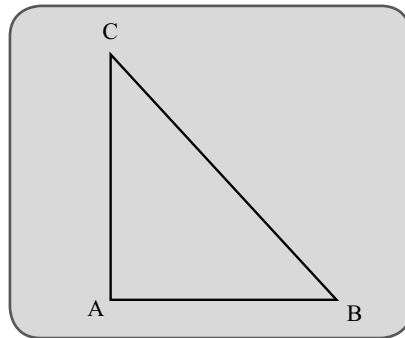
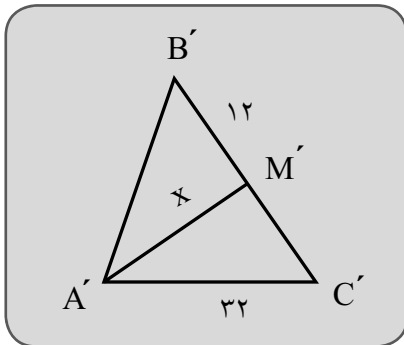
۶. اندازه‌ی مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ی

متساوی‌الساقین ABC ( $\hat{A}=90$ ,  $AB=AC$ )

۳۲ سانتی‌متر مربع است. اندازه‌ی وتر و

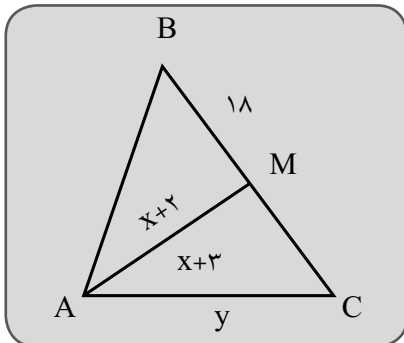
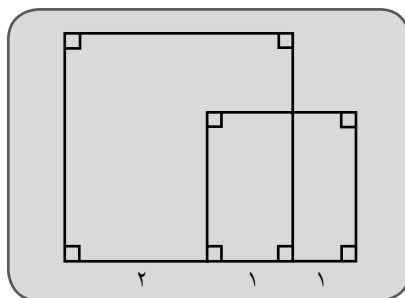
ساق‌های این مثلث را تعیین کنید.

مثلث‌اند. اندازه‌ی x و y را به دست آورید.



۷. با توجه به شکل، مساحت قسمت

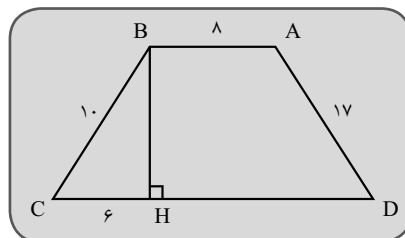
مشترک دو مربع را به دست آورید.



۸. چهارضلعی ABCD دوزنقه است. با

توجه به شکل، اندازه‌ی مساحت این دوزنقه

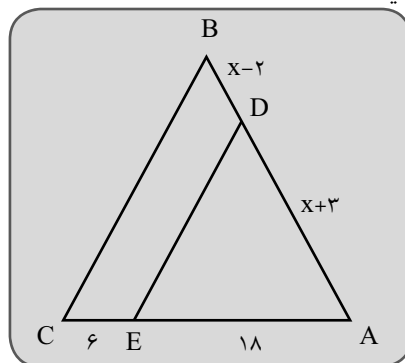
را تعیین کنید.



۹. در مثلث ABC، DE موازی BC

است. با توجه به شکل، اندازه‌ی x را تعیین

کنید.



۱۰. دو مثلث ABC و A'B'C' متشابه

و AM و A'M' میانه‌های نظیر از این دو

۱۱. در شکل AH ارتفاع نظیر رأس A

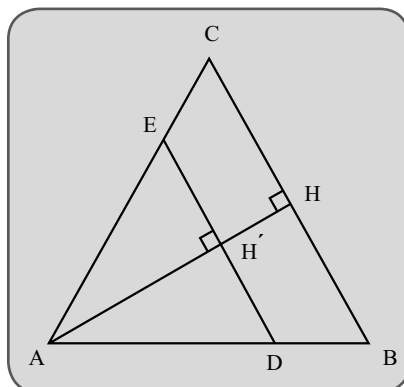
از مثلث ABC و DE موازی ضلع BC است

که ارتفاع AH را در H' قطع کرده است.

اگر  $AH=40$  و  $H'H=12$  باشد، نسبت

مساحت‌های دو مثلث ABC و ADE را

به دست آورید.



۱۲. منشور منتظم شش‌پهلوی

ABCDEF و A'B'C'D'E' به ضلع قاعده‌ی

۱۲ سانتی‌متر و ارتفاع ۳۰ سانتی‌متر داده

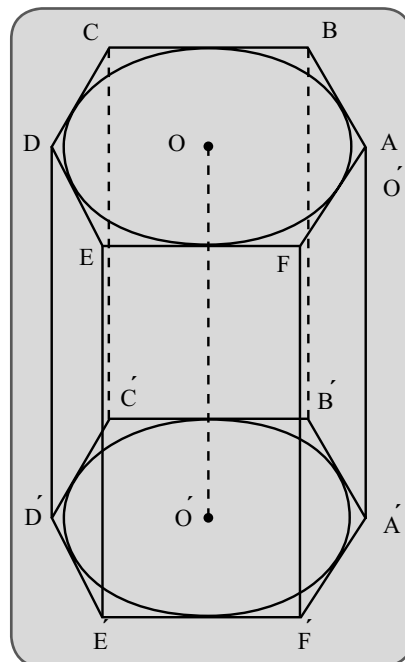
شده است. استوانه‌ای را که قاعده‌هایش

محاط در قاعده‌های این منشور هستند در

نظر می‌گیریم.

الف) آیا این کره به طور کامل درون این مخروط جای می‌گیرد؟ بحث کنید.

ب) در صورتی که کره به طور کامل درون مخروط قرار بگیرد، حجم فضای بین مخروط و کره را تعیین کنید.

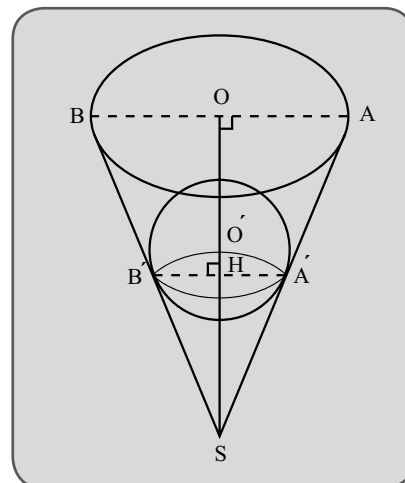


الف) حجم منشور منتظم داده شده را تعیین کنید.

ب) حجم فضای بین منشور منتظم و استوانه را به دست آورید.

۱۳. مکعب مستطیلی به قطر  $10\sqrt{29}$  سانتی‌متر را در نظر بگیرید که ابعاد آن متناسب با عددهای ۲ و ۳ و ۴ است. حجم این مکعب مستطیل را بیابید.

۱۴. مخروطی به شعاع قاعده‌ی ۸ سانتی‌متر و ارتفاع ۲۱ سانتی‌متر داده شده است (شکل). کره‌ای به سطح کل  $36\pi$  سانتی‌متر مربع را درون این مخروط قرار می‌دهیم. تعیین کنید:



پ) چند تابع ثابت موجود است؟  
ت) چند تابع موجود است که  $f(a_1) \neq b_1$  باشد؟

۷. اگر دو تابع با ضابطه‌های

$$f(x) = \frac{1}{3x + \sqrt{9x^2 + 1}}$$

و

$$g(x) = \sqrt{ax^2 + 1} - bx^2$$

برابر باشند، a و b را تعیین کنید.

۸. چند تابع  $f: W \rightarrow W$  وجود دارد که برای هر  $x$  متعلق به اعداد حسابی داشته باشیم:

$$f(f(n)) + f(n) = 2n + 3$$

۹. فرض کنید  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  دارای

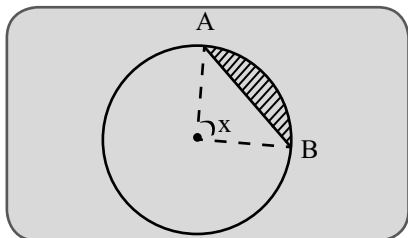
این خاصیت است که  $f(x) - 3x$  و  $f(x) - x^2$  صعودی هستند. نشان دهید که  $f(x) - x^2 - x$  نیز صعودی است.

۱۰. نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی  $15^\circ$  را به دست آورید.

۱۱. معادله‌ی  $\frac{\sin 3x - \sin x}{\sin 3x} = 2$  را حل کنید.

۱۲. وتر AB مطابق شکل مقابل به سمت مرکز دایره در حال حرکت است.

الف) تابعی بسازید که مساحت قطاع دایره را برحسب زاویه‌ی  $x$  نمایش دهد.  
ب) تابع تغییرات وتر برحسب  $x$  را بسازید.  
پ) تابع تغییر  $x$  برحسب وتر را بیابید.



۱۳. مجموعه جواب نامعادله‌ی زیر را به صورت یک همسایگی محذوف بنویسید.

$$\frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x^2 - x + 1}} < 0$$

۱۴. a را طوری بیابید که

## حسابان

### مجتبی رفیعی

۱. محیط یک دایره به شعاع «۱» را به شش قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و با نقاط به دست آمده یک شش ضلعی منتظم می‌سازیم. سپس وسط‌های این شش ضلعی را به هم وصل می‌کنیم و یک شش ضلعی دیگر می‌سازیم و این کار را تا بی‌نهایت مرحله ادامه می‌دهیم. حد مجموع مساحت‌ها و محیط‌های این شش ضلعی‌ها را بیابید.

۲. معادله‌ی زیر چند جواب حقیقی دارد؟

$$(x+1)^{1382} + (x+1)^{1381}(x-2) + (x+1)^{1380}(x-2)^2 + \dots + (x+1)(x-2)^{1381} + (x-2)^{1382} = 0$$

۳. در بسط  $(x+2y)^4$  مطلوب است:  
الف) تعداد جملات  
ب) مجموع ضرایب  
پ) جمله‌ی پنجم بسط

۴. به چند صورت می‌توان یک چند جمله‌ای از درجه‌ی پنج ساخت که ضرایب آن با ترتیبی دلخواه، اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ... و ۶ و بر چند جمله‌ای  $1+x+x^2$  بخش پذیر باشد.

۵. تعداد ریشه‌های معادله‌ی  $\sin x = \frac{2x}{5\pi}$  را به روش هندسی به دست آورید.

۶. اگر دو مجموعه‌ی  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  و  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  را داشته باشیم و  $f: A \rightarrow B$ ، آن‌گاه:

الف) به طور کلی چند تابع  $f$  موجود است؟

ب) چند تابع  $f$  موجود است که در آن‌ها

که احتمال وقوع هر عدد اول در پرتاب آن ۳ برابر احتمال وقوع عدد غیر اول است. اگر در یک بار پرتاب این تاس، A پیشامد وقوع عددی کوچک‌تر از ۴ باشد، P(A) را به دست آورید.

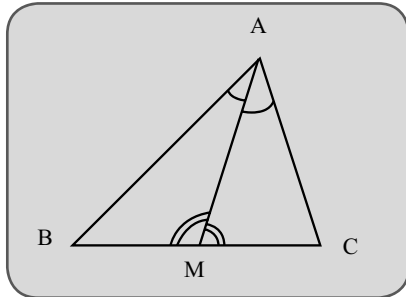
۱۲. از بین مستطیل‌هایی که ابعاد آن‌ها کوچک‌تر از ۴ واحد است، یکی را به تصادف انتخاب کرده‌ایم. احتمال انتخاب مستطیل‌هایی با محیط بزرگ‌تر از ۶ را به دست آورید.

۱۳. احتمال قبولی نرگس و مردودی مژده در امتحان جبر و احتمال ۰/۳ است، ولی شانس قبولی یکی از آن‌ها در این امتحان ۰/۷ است. احتمال قبولی مژده در این امتحان را به دست آورید.

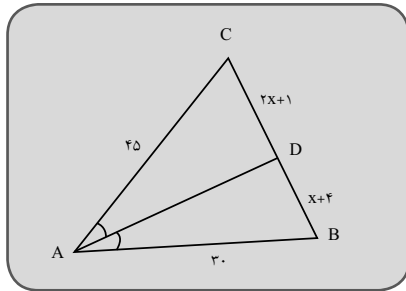
## مسائل هندسه‌ی ۲

محمد هاشم رستمی

۱. در مثلث ABC میانه‌ی AM را رسم کرده‌ایم. اگر  $AB > AC$  باشد، ثابت کنید:  
الف)  $\widehat{MAB} < \widehat{MAC}$   
ب)  $\widehat{AMB} < \widehat{AMC}$



۲. در شکل، AD نیمساز زاویه‌ی درونی A از مثلث ABC است. اندازه‌ی ضلع BC را تعیین کنید.



۳. می‌دانیم  $\sqrt{5}$  عددی گنگ است. ثابت کنید  $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$  نیز عددی گنگ است.

۴. برای هر دو عدد حقیقی x و y ثابت کنید:  
 $1+x^2+2y^2 \geq 2y(x+1)$

۵. در یک فروشگاه لباس، لباس‌های بچه‌گانه، زنانه و مردانه در سه اندازه‌ی کوچک و بزرگ و متوسط فروخته می‌شود. شخصی از این فروشگاه ده دست لباس خرید. ثابت کنید دست کم دو تا از لباس‌های او از یک نوع و یک اندازه بوده‌اند.

۶. با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subset A$

۷. اگر  $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |2x-1| \leq 2\}$  و  $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, n \leq \sqrt{x}\}$  مجموعه‌ی  $A' - A \times B$  را تشکیل دهید.

۸. رابطه‌ی زیر روی  $\mathbb{R} - \{-1\}$  به صورت زیر تعریف شده است:  
 $(x, y)R(z, t) \Leftrightarrow x+t+xt = y+z+yz$   
ثابت کنید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است و سپس کلاس هم‌ارزی (-۲) و (۱) را به دست آورید.

۹. تاسی را پرتاب می‌کنیم. اگر زوج بیاید، یک سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر فرد بیاید، سکه را دو بار پرتاب می‌کنیم. مطلوب است:  
الف) فضای نمونه‌ی این پیشامد.  
ب) پیشامد A که در آن سکه دست کم یک بار پشت بیاید.  
ج) پیشامد B که در آن تاس مضرب ۳ بیاید.  
د) پیشامد  $A \cap B'$ .

۱۰. در یک کیسه شامل ۵ مهره‌ی قرمز و ۳ مهره‌ی سفید و تعدادی مهره‌ی آبی دو مهره به تصادف خارج می‌کنیم. اگر احتمال هم‌رنگ بودن دو مهره مساوی  $\frac{14}{45}$  باشد، تعداد مهره‌های آبی را به دست آورید.

۱۱. تاسی به گونه‌ای ساخته شده است

$$f(x) = \begin{cases} ax[\frac{1}{x}] & x \geq \frac{1}{2} \\ \cos \frac{\pi}{2}x & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

در  $x = \frac{1}{2}$  حد داشته باشد.  
۱۵. حاصل حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - \cos 2x}{x \tan x}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1-2\cos x}{2x-\pi}$

۱۶. تانژانت زاویه‌ی بین دو نیم‌مماس تابع  $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{\cos ax}}$  در مبدأ مختصات برابر  $\frac{4}{3}$  است. چند مقدار برای a وجود دارد؟

۱۷. برای تصفیه‌ی یک محلول از یک ظرف مخروطی که در رأس آن سوراخ بسیار ریزی تعبیه شده است، استفاده می‌کنیم. با فرض این که ارتفاع مخروط ۱۶cm و شعاع آن ۴cm باشد و محلول با سرعت ثابت  $\frac{2}{5} \text{ cm}^3/\text{s}$  از ظرف خارج شود، هنگامی که ارتفاع محلول ۸cm است، سرعت کاهش ارتفاع محلول در ظرف چه قدر است؟

۱۸. مشتق تابع زیر را بگیرید.

$$\frac{x+8}{16} + a > \frac{4-x}{8}$$

۱۹. تابع  $x > -\frac{16}{3}$  را در نظر بگیرید. اگر از هر نقطه‌ی روی تابع خطی به مبدأ مختصات وصل کنیم و شیب آن را m بنامیم، تغییرات زاویه‌ی خط با محور xها ( $\alpha$ ) را نسبت به تغییرات x به دست آورید.

## جبر و احتمال

هوشنگ شرقی

۱. با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید:  
 $(1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\dots(1+\frac{1}{n}) = n+1$

۲. به کمک استدلال استنتاجی ثابت کنید که مکعب هر عدد فرد، عددی فرد است.

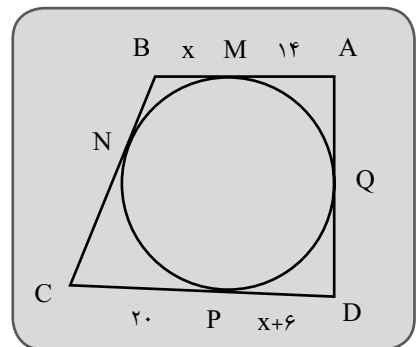
۳. مثلث ABC به ضلع‌های  $AB=AC=10$  و  $BC=12$  داده شده است. اگر M نقطه‌ای واقع بر قاعده BC از این مثلث باشد، مجموع فاصله‌ی آن از دو ضلع AB و AC را تعیین کنید.

۴. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع  $R'$  را بیابید که بر دایره‌ی ثابت  $C(O, R)$  مماس برون باشند.

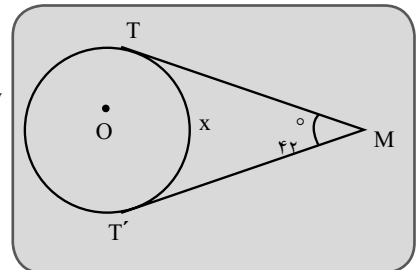
۵. مثلث ABC را با معلوم بودن ضلع  $BC=a$ ، زاویه‌ی  $\hat{A} = \alpha$  و ارتفاع  $AH=h_a$  رسم کنید.

۶. در دایره‌ی  $C(O, 10)$ ، مکان هندسی وسط وترهایی از این دایره را تعیین کنید که طولشان مساوی ۱۶ باشد.

۷. چهارضلعی ABCD در نقطه‌های M، N، P، Q بر دایره‌ای به مرکز O مماس است. اگر محیط این چهارضلعی محیطی ۱۲۰ باشد، اندازه‌ی x را تعیین کنید.



۸. اندازه‌ی x و y را با توجه به شکل داده شده تعیین کنید. MT و MT' در نقطه‌های T و T' بر دایره مماس‌اند.

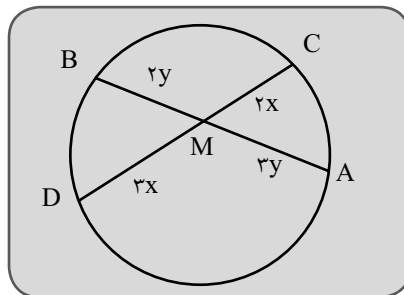


۹. کمان درخور زاویه‌ی  $60^\circ$  روبه‌رو به پاره‌خط AB به طول  $4\sqrt{3}$  را رسم کرده‌ایم.

الف) اندازه‌ی شعاع دایره‌ای را که این کمان درخور بخشی از آن است، بیابید.

ب) فاصله‌ی مرکز این دایره از وتر AB را تعیین کنید.

۱۰. AB و CD دو وتر از دایره‌ی (C) هستند که در نقطه‌ی M یکدیگر را قطع کرده‌اند. با توجه به شکل، اندازه‌ی وترهای AB و CD را به دست آورید، در صورتی که  $AB=2CD-10$  باشد.



۱۱. در تبدیل  $T(x, y) = (2x+5, y-3)$ ، نقطه‌ی  $M' = (3, 1)$  تصویر چه نقطه‌ای است؟

۱۲. تحت یک بازتاب محوری، تصویر خط  $D: 3x-4y-1=0$  خط

این بازتاب را تعیین کنید.  $D': 4x+3y+7=0$  است. معادله‌ی محور

۱۳. تصاویر نقطه‌های  $A = (2, 0)$ ،  $B = (0, 4)$  و  $C = (4, 5)$  تحت تبدیل  $T(x, y) = (2x, 2y)$  را به ترتیب  $A'$ ،  $B'$  و  $C'$  می‌نامیم.

الف) مختصات نقطه‌های  $A'$ ،  $B'$  و  $C'$  را به دست آورید.

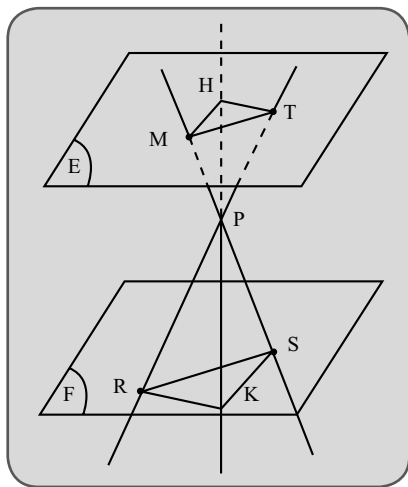
ب) شیب خط‌های AB، BC، CA،  $A'B'$ ،  $B'C'$  و  $C'A'$  را به دست آورید و شیب خط‌های متناظر را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

پ) طول ضلع‌های دو مثلث ABC و  $A'B'C'$  را محاسبه و ضلع‌های متناظر آن‌ها را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ این تبدیل چیست؟

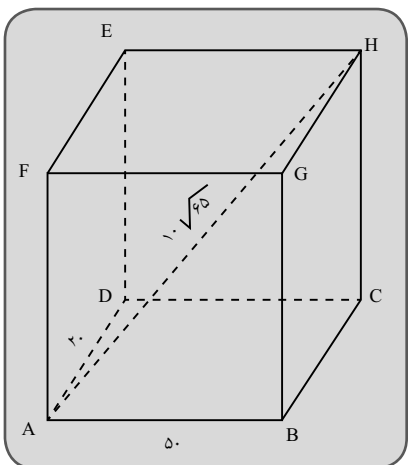
۱۴. دو خط متمایز d و d' با خط  $\delta$  از صفحه‌ی P موازی‌اند. صفحه‌ی P' را بر دو خط d و d' می‌گذرانیم. در وضع این صفحه

با صفحه‌ی P بحث کنید.

۱۵. دو صفحه‌ی (E) و (F) با هم موازی‌اند. از نقطه‌ی P غیر واقع بر این دو صفحه، سه خط هم‌رس در نقطه‌ی P رسم می‌کنیم تا دو صفحه‌ی (E) و (F) را در نقطه‌های P، K، S، M، T و H قطع کنند. مثلث‌های RKS و MHT را رسم می‌کنیم. آیا این دو مثلث با هم متشابه‌اند؟ دلیل بیاورید.



۱۶. مکعب مستطیل ABCDEFGH داده شده است. اگر  $AB=50$ ،  $AD=20$  و قطر  $AH=10\sqrt{65}$  باشد:



الف) اندازه‌ی ضلع AF از این مکعب مستطیل را تعیین کنید.

ب) طول عمود مشترک دو خط متناظر EF و BG را تعیین کنید.

# حل تشریحی مسائل شماره‌ی قبل



$$\begin{aligned} &= \frac{|\sqrt{3}|}{|2-2\sqrt{3}|+2} = \frac{\sqrt{3}}{-(2-2\sqrt{3})+2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{-2+2\sqrt{3}+2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

۵.

$$\text{الف) } A = \left\{ \frac{2^x+1}{2^x-1} \mid x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x < 0 \right\}$$

مقادیر  $x$  را مشخص و در عبارت  $\frac{2^x+1}{2^x-1}$  به جای آن می‌گذاریم. اکنون داریم:

$$-3 \leq x < 0, x \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = -3, -2, -1$$

$$x = -3 \Rightarrow \frac{2^{-3}+1}{2^{-3}-1} = \frac{\frac{1}{8}+1}{\frac{1}{8}-1}$$

$$= \frac{\frac{1}{8}+1}{\frac{1}{8}-1} = \frac{\frac{9}{8}}{\frac{-7}{8}} = \frac{-9}{7}$$

$$x = -2 \Rightarrow \frac{2^{-2}+1}{2^{-2}-1} = \frac{\frac{1}{4}+1}{\frac{1}{4}-1}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}+1}{\frac{1}{4}-1} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{-3}{4}} = -\frac{5}{3}$$

$$x = -1 \Rightarrow \frac{2^{-1}+1}{2^{-1}-1} = \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-1}$$

۹ واحد اضافه کنیم برابر  $\frac{1010}{1001}$  می‌شود که

از مقدار اولیه‌ی کسر بزرگ‌تر است؛ یعنی:

$$\frac{1001}{1001} < \frac{1010}{10010} = \frac{101}{1001} \times \frac{10}{10}$$

$$\frac{1001}{1001} < \frac{101}{1001} \quad \text{پس:}$$

۳. صورت و مخرج هر دو کسر را ۱۰۱

برابر می‌کنیم.

$$\frac{41}{43} \times \frac{101}{101} = \frac{4141}{4343}$$

$$\frac{42}{43} \times \frac{101}{101} = \frac{4242}{4343}$$

بین دو عدد ۴۱۴۱ و ۴۲۴۲ صد عدد

صحیح وجود دارد.

$$\frac{4142}{4343}, \frac{4143}{4343}, \dots, \frac{4240}{4343}, \frac{4241}{4343}$$

$$\begin{aligned} |\sqrt{3}-\sqrt{5}| &= -(\sqrt{3}-\sqrt{5}) \\ &= -\sqrt{3}+\sqrt{5} \end{aligned} \quad ۴.$$

$$|\sqrt{5}-2| = \sqrt{5}-2$$

$$|-2 \times (3-4)| = |-2 \times (-1)| = |2| = 2$$

$$|\sqrt{3}-2| = -(\sqrt{3}-2) = -\sqrt{3}+2$$

$$|-\sqrt{3}| = -(-\sqrt{3}) = \sqrt{3}$$

$$\left| \frac{|\sqrt{3}-\sqrt{5}| - |\sqrt{5}-2| - |-2 \times (3-4)|}{|\sqrt{3}-2| - |-\sqrt{3}| + 2} \right|$$

$$= \frac{|-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{5}+2-2|}{|-\sqrt{3}+2-\sqrt{3}|+2}$$

## حل مسائل ریاضی سال اول

فرخ فرشیان

۱. دو ضلع زاویه‌ی قائمه را  $a$  و  $b$  می‌گیریم. پس  $a^2 + b^2 = (5\sqrt{2})^2 = 50$ .

چون  $a, b \in \mathbb{N}$  فرض شده‌اند

جواب‌های ممکن این معادله  $\begin{cases} a=5 \\ b=5 \end{cases}$ ،  $\begin{cases} a=7 \\ b=1 \end{cases}$ ،  $\begin{cases} a=1 \\ b=7 \end{cases}$  هستند که در حالت

محیط مثلث کمتر است.  $\begin{cases} a=7 \\ b=1 \end{cases}$ ،  $\begin{cases} a=1 \\ b=7 \end{cases}$

۲. اگر کسری کوچک‌تر از واحد باشد،

وقتی عددی را هم به صورت و هم به مخرج اضافه کنیم کسر بزرگ‌تر می‌شود، یعنی:

$$\left(\frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+k}{b+k} < \frac{c}{d} < 1\right)$$

اثبات: می‌دانیم اگر  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  باشد خواهیم

$$\text{داشت } \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} \quad \text{بنابراین:}$$

$$\frac{a}{b} < 1 = \frac{k}{k} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+k}{b+k} < \frac{k}{k} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+k}{b+k} < 1$$

اگر به صورت و مخرج کسر  $\frac{1001}{1001}$



$$= \left(\frac{-1}{49}\right)^1 = \frac{-1}{49}$$

۱۰. می‌دانیم که زیر رادیکال باید همواره عددی مثبت باشد.

$$-xy^2 \geq 0 \xrightarrow{y^2 \geq 0} -x \geq 0$$

$$\Rightarrow x \leq 0 \Rightarrow |x| = -x$$

$$-x^2y \geq 0 \xrightarrow{x^2 \geq 0} -y \geq 0$$

$$\Rightarrow y \leq 0 \Rightarrow |y| = -y$$

$$-\sqrt{-xy^2} - \sqrt{-yx^2}$$

$$= -\sqrt{-x} \times \sqrt{y^2} - \sqrt{-y} \times \sqrt{x^2}$$

$$= -\sqrt{-x} \times |y| - \sqrt{-y} \times |x|$$

$$= -\sqrt{-x}(-y) - \sqrt{-y}(-x)$$

$$= y\sqrt{-x} + x\sqrt{-y}$$

۱۱.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3^4 \times 5} + \sqrt[4]{5^2} + \sqrt[5]{5^4} - 16\sqrt[4]{5}}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[4]{5} + 18\sqrt[4]{5} + 7\sqrt[4]{5} - 16\sqrt[4]{5}}$$

$$= \frac{1}{2^4\sqrt[4]{5}} = \frac{1}{2^4\sqrt[4]{5}} \times \frac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5^3}} = \frac{\sqrt[4]{125}}{10}$$

۱۲.

$$-x \{ -x[-3x + x^2 - 2] - 5 \}$$

$$+ 1 - x^4 + 3x^2 + 2x^2$$

$$= -x \{ 3x^2 - x^2 + 2x - 5 \}$$

$$+ 1 - x^4 + 3x^2 + 2x^2$$

$$= -3x^3 + x^4 - 2x^2 + 5x + 1$$

$$-x^4 + 3x^2 + 2x^2 = 5x + 1$$

۱۳.

$$A = 4x^2 + 12 - (2x - 4)(2x - 3)$$

$$= 4x^2 + 12 - [(2x)(2x) + (-4)(-2)(2x) + (-4)(-3)]$$

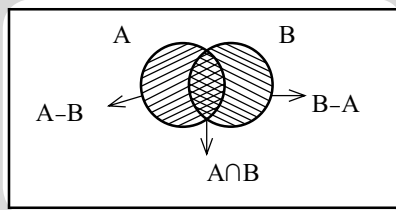
$$= 4x^2 + 12 - (4x^2 - 14x + 12)$$

$$= 4x^2 + 12 - 4x^2 + 14x - 12 = 14x$$

$$B = 2 \times 7(2x - \frac{1}{7})(7x + \frac{1}{7})$$

$$= (14x - 1)(14x + 1)$$

$$= (14x^2) - (1)^2 = 196x^2 - 1$$



۷. در رابطه‌ی  $\{3\} \subset X \subset \{1, 2, 3\}$

مجموعه‌ی  $X$  باید عضو مجموعه‌ی  $\{3\}$

را شامل باشد. همین‌طور  $X$  می‌تواند اعضای

مجموعه‌ی  $\{1, 2, 3\}$  را اختیار کند، یعنی

$X_1 = \{3\}$  و  $X_2 = \{3, 1\}$  و  $X_3 = \{3, 2\}$

و  $X_4 = \{3, 2, 1\}$ . بنابراین، همان‌طور که

مشاهده می‌شود، تعداد مجموعه‌هایی مانند

$X$  که در رابطه‌ی مذکور صدق می‌کنند برابر

تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی  $\{1, 2\}$

خواهد بود که در آن  $2^2 = 4$  است.

۸. با فرض  $n^n = a$  داریم:

$$n^{n^{n+1}} = n^{n^n \times n} \xrightarrow{n^n = a} n^{a \times n}$$

$$= n^{n \times a} = (n^n)^a = a^a$$

۹.

$$\underbrace{11^{12} + 11^{13} + \dots + 11^{17}}_{\text{الف تا ۱۱}}$$

$$+ \underbrace{11^{14} + 11^{15} + \dots + 11^{18}}_{\text{تا ۱۲۰}}$$

$$+ \underbrace{11^{19} + 11^{20} + \dots + 11^{24}}_{\text{تا ۱۳۲۰}}$$

$$= 11 \times 11^{12} + 120 \times 11^{14} + 1320 \times 11^{15}$$

$$= 11^{14} + 120 \times 11^{14} + 1320 \times 11^{15}$$

$$= 121 \times 11^{14} + 1320 \times 11^{15}$$

$$= 11^2 \times 11^{14} + 11 \times 120 \times 11^{15}$$

$$= 11^{16} + 120 \times 11^{16} = 121 \times 11^{16}$$

$$= 11^2 \times 11^{16} = 11^{18}$$

$$\text{ب) } \left[ \left(\frac{1}{\sqrt[3]{V}}\right)^{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{V}}\right)} \times \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{V}}\right)^{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{V}}\right)} \right]^{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{V}}\right)^{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{V}}\right)}}$$

$$\left[ \left(\frac{-1}{49}\right)^{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{49}}\right)^{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{49}}\right)}} \right]^{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{49}}\right)^{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{49}}\right)}} = \left(\frac{-1}{49}\right)^{\left[\left(\frac{1}{\sqrt[3]{49}}\right)^{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{49}}\right)} \times \left(\frac{1}{\sqrt[3]{49}}\right)^{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{49}}\right)}\right]}$$

$$= \left(\frac{-1}{49}\right)^{\left[\left(\frac{1}{\sqrt[3]{49}}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{49}} + \frac{1}{\sqrt[3]{49}}}\right]} = \left(\frac{-1}{49}\right)^{\left(\frac{1}{49}\right)}$$

$$\frac{3}{\frac{2}{-1}} = -3$$

$$A = \left\{ \frac{-9}{7}, \frac{-5}{3}, -3 \right\}$$

$$\text{ب) } B = \{2^x - 3^y \mid x, y \in Z, xy = 4\}$$

در این جا عبارت جبری داده شده

شامل دو متغیر  $x$  و  $y$  است. به دنبال دو

عدد صحیح هستیم که حاصل ضرب آن‌ها ۴

شود. بنابراین حالت‌های زیر اتفاق می‌افتد.

$$\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \quad 2^x - 3^y = 2 - 3^4$$

$$= 2 - 81 = -79$$

$$\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases} \quad 2^x - 3^y = 2^4 - 3$$

$$= 16 - 3 = 13$$

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=-4 \end{cases} \quad 2^x - 3^y = 2^{-1} - 3^{-4}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{81} = \frac{729}{162}$$

$$\begin{cases} x=-4 \\ y=-1 \end{cases} \quad 2^x - 3^y = 2^{-4} - 3^{-1} = \frac{1}{2^4} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{16} - \frac{1}{3} = \frac{-13}{48}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \quad 2^x - 3^y = 2^2 - 3^2$$

$$= 4 - 9 = -5$$

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases} \quad 2^x - 3^y = 2^{-2} - 3^{-2}$$

$$= \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{5}{36}$$

$$B = \left\{ -79, 13, \frac{729}{162}, -\frac{13}{48}, -5, \frac{5}{36} \right\}$$

۶. با استفاده از نمودار مجموعه‌ای (ون)

داریم:

$$(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$$

در این صورت:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\Rightarrow b^2 + 2bd + d^2$$

$$= b^2 + b^2 - 2bd + d^2$$

$$\Rightarrow b^2 = 4b \Rightarrow db = 4d$$

۲. فرض کنیم  $a$  و  $d$  به ترتیب جمله‌ی اول و قدر نسبت دنباله‌های حسابی باشند، در این صورت دنباله‌های هندسی به صورت زیر است:

$$a + 3d, a + 5d, a + 11d \quad (1)$$

در دنباله‌های هندسی، مربع جمله‌ی وسط برابر با حاصل ضرب دو جمله‌ی دیگر است. در نتیجه داریم:

$$(a + 5d)^2 = (a + 3d)(a + 11d)$$

$$\Rightarrow a^2 + 25d^2 + 10ad$$

$$= a^2 + 14ad + 33d^2 \Rightarrow 4ad + 8d^2 = 0$$

$$\Rightarrow 4d(a + 2d) = 0 \xrightarrow{d \neq 0} a = -2d$$

با قرار دادن  $a = -2d$  در دنباله‌ی (۱) ملاحظه می‌کنیم که:

$$d, 3d, 9d$$

و این یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت ۳ است.

۳. چون  $f=g$  و دو زوج مرتب  $(1, a+3b)$  و  $(1, 2a+b)$  مؤلفه‌های اول برابر دارند، پس مؤلفه‌های دوم آن‌ها با هم برابرند، یعنی داریم:

$$a + 3b = 2a + b \Rightarrow a = 2b$$

اکنون باید زوج‌های باقی‌مانده از  $f$  و  $g$  با یکدیگر برابر باشند، پس داریم:

$$(2, 4b+c) = (a, 3) \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 4b+c = 3 \end{cases}$$

بنابراین:

$$a = 2, a = 2b \Rightarrow 2 = 2b \Rightarrow b = 1$$

$$4b + c = 3 \Rightarrow 4 + c = 3 \Rightarrow c = -1$$

در نتیجه:

$$5a + 2b + c = 5(2) + 2(1) + (-1) = 11$$

۴.

$$x_A = y_B \Rightarrow 2n + 2m = \frac{n}{3} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{5}{3}n + 2m = 1 \Rightarrow 5n + 6m = 3$$

$$(x+y-1)(x+y-1) = (x+y-1)^2$$

$$\begin{aligned} \text{د) } 3x^2 - 3x^2 - 4x^2 + 4 \\ = 3x^2(x-1) - 4(x^2-1) \\ = 3x^2(x-1) - 4(x-1)(x+1) \\ = (x-1)(3x^2 - 4x - 4) \\ = (x-1)(x-2)(3x+2) \end{aligned}$$

باید  $3x^2 - 4x - 4$  را تجزیه کنیم:

$$A = 3x^2 - 4x - 4$$

$$3A = (3x)^2 - 4(3x) - 12$$

$$3A = (3x-6)(3x+2)$$

$$3A = 3(x-2)(3x+2)$$

$$A = (x-2)(3x+2)$$

۱۷. اگر فاصله‌ی دو شهر را  $x$  بگیریم،

خواهیم داشت:

$$x = 10 + \frac{1}{3}x \Rightarrow x - \frac{1}{3}x = 10$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}x = 10 \Rightarrow 2x = 30 \Rightarrow x = 15$$

۱۸. هر نقطه مانند  $A$  روی محور طول‌ها،

عرضش صفر است، یعنی  $A(\alpha, 0)$

$$AB = AC \Rightarrow \sqrt{(\alpha-4)^2 + (0-1)^2}$$

$$= \sqrt{(\alpha-2)^2 + (0-1)^2}$$

$$\Rightarrow (\alpha-4)^2 + 1 = (\alpha-2)^2 + 1$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 8\alpha + 16 + 1 = \alpha^2 - 4\alpha + 4 + 1$$

$$\Rightarrow -4\alpha = -12 \Rightarrow \alpha = 3$$

بنابراین مختصات  $A(3, 0)$  است.

## حل مسائل ریاضی سال دوم

میرشهرام صدر

۱. فرض کنیم  $b$  ضلع وسطی و  $d$  قدر

نسبت این تصاعد باشد، بنابراین داریم:

$$c, b, a$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$b-d, b, b+d$$

از طرفی طبق رابطه‌ی فیثاغورس داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\Rightarrow (b+d)^2 = b^2 + (b-d)^2$$

$$(B-A^2)^{2010} = (196x^2 - 1 - 196x^2)^{2010}$$

$$= (-1)^{2010} = 1$$

۱۴.

$$\text{الف) } [a \underbrace{(b-1)(b+1)}_{b^2-1} (b^2+1) \times \frac{1}{a}]^2$$

$$= [(b^2-1)(b^2+1)]^2 = (b^4-1)^2$$

$$= b^8 - 2b^4 + 1$$

$$\text{ب) } 1 \times (19^2 + 19 \times 18 + 18^2) + 18^2$$

$$(19-18)(19^2 + 19 \times 18 + 18^2) + 18^2$$

$$\xrightarrow{(a-b)(a^2+ab+b^2)} (19-18)(19^2+19 \times 18+18^2)$$

$$19^2 - 18^2 + 18^2 = 19^2$$

$$x + \frac{1}{x} = 3 \Rightarrow \frac{x^2+1}{x} = 3 \quad 15$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 = 3x \text{ یا } x^2 - 3x = -1 \quad (1)$$

$$\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)^2 - 2(x^2-3x)$$

$$\xrightarrow{(1)} \left(\frac{3x}{2x}\right)^2 - 2(-1)$$

$$= \frac{9}{4} + 2 = \frac{17}{4}$$

۱۶.

$$\text{الف) } x^2(a^6 - 729x^6)$$

$$= x^2(a^2 - 27x^2)(a^2 + 27x^2)$$

$$= x^2(a-3x)(a^2 + 3ax + 9x^2)$$

$$\times (a+3x)(a^2 - 3ax + 9x^2)$$

$$\text{ب) } \left(\frac{a+b}{A}\right)^2 - 2\left(\frac{a+b}{A}\right) + 1$$

$$\xrightarrow{a+b=A} A^2 - 2A + 1 = (A-1)^2$$

$$\xrightarrow{a+b=A} (a+b-1)^2$$

$$\text{ج) } x^2 + x(2y-2) + y^2 - 2y + 1$$

$$= x^2 + x \underbrace{(2y-2)}_+ + \underbrace{(y-1)^2}_x$$

در اینجا  $x$  یک جمله‌ی مشترک است

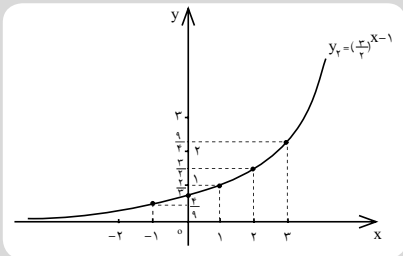
که باید ضرب دو جمله‌ی غیرمشترک

آن  $(y-1)^2$  و جمع آن‌ها  $2y-2$  باشد.

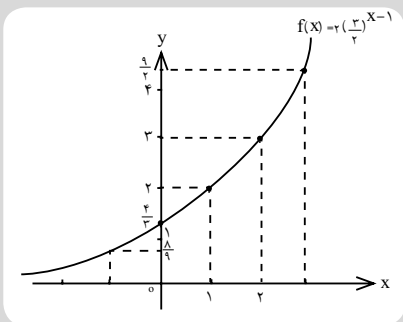
بنابراین:



اکنون با انتقال نمودار  $y_1 = (\frac{3}{2})^x$  به اندازه‌ی یک واحد به سمت راست، نمودار تابع با ضابطه‌ی  $y_2 = (\frac{3}{2})^{x-1}$  را خواهیم داشت.



در مرحله‌ی آخر با دو برابر کردن عرض هر نقطه روی نمودار تابع  $y_2 = (\frac{3}{2})^{x-1}$ ، نمودار تابع  $f(x)$  را به صورت زیر رسم می‌کنیم.



## حل مسائل هندسه‌ی ۱

محمد هاشم موسوی

۱. سه پاره خط  $a$ ،  $b$  و  $c$  روی یک خط

راست هستند.

۲. یک زاویه را  $\alpha$  درجه فرض می‌کنیم.

زاویه‌ی دیگر  $3\alpha - 6^\circ$  خواهد بود و چون این

دو زاویه متمم یکدیگرند، پس داریم:

$$\alpha + (3\alpha - 6^\circ) = 90^\circ \Rightarrow 4\alpha - 6^\circ = 90^\circ$$

$$\Rightarrow 4\alpha = 96^\circ \Rightarrow \alpha = 24^\circ$$

$$\Rightarrow 3\alpha - 6^\circ = 72^\circ - 6^\circ = 66^\circ$$

پس دو زاویه یکی  $24^\circ$  و دیگری  $66^\circ$

است.

۳. الف) مثلث‌های I و III به حالت

«ضرض» یعنی برابری دو زاویه‌ی متناظر و

تساوی ضلع بین این دو زاویه، هم‌نهشت‌اند

چون  $\Delta < 0$  و  $a = 2 > 0$ ، پس سه جمله‌ای  $2x^2 + 3x + 2$  به ازای جميع مقادیر  $x$  مثبت است. بنابراین مخرج کسر همواره مثبت است، پس برای این که کسر مثبت باشد باید صورت کسر همواره مثبت باشد، یعنی باید داشته باشیم:

$$ax^2 + 2x + (a-2) > 0$$

برای این منظور باید دستگاه نامعادله‌های

$$\begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases} \text{ را حل کنیم.}$$

$$\begin{cases} \Delta = (2)^2 - 4(a)(a-2) < 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4a^2 + 8a + 4 < 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a < 1 - \sqrt{2}, a > 1 + \sqrt{2} \\ a > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a > 1 + \sqrt{2}$$

۹. این تابع وقتی با معناست که دو شرط

زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} (1) 16 - x^2 \geq 0 \\ (2) -x^2 - x + 30 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 \leq 16 \\ x^2 + x - 30 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \Rightarrow D_1 = [-4, 4] \\ (x+6)(x-5) < 0 \Rightarrow D_2 = (-6, 5) \end{cases}$$

$$D = D_1 \cap D_2 = [-4, 4] \cap (-6, 5) = [-4, 4]$$

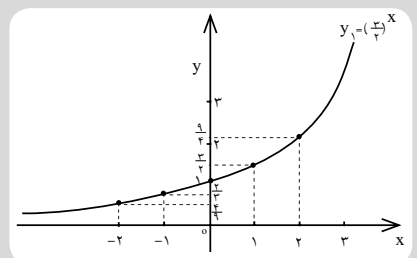
۱۰. ابتدا به کمک نقطه‌یابی نمودار، تابع

با ضابطه‌ی  $y_1 = (\frac{3}{2})^x$  را رسم می‌کنیم،

سپس با انتقال، نمودار تابع  $f(x)$  را رسم

خواهیم کرد.

$x$	-2	-1	0	1	2
$y$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$



$$y_A = x_B \Rightarrow n - m = 2n - 1$$

$$\Rightarrow n + m = 1$$

$$\begin{cases} \Delta n + 6m = 3 \\ -5 \times \begin{cases} n + m = 1 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta n + 6m = 3 \\ -\Delta n - 5m = -5 \end{cases}$$

$$m = -2$$

$$n + (-2) = 1 \Rightarrow n = 3$$

۵. با توجه به تابع  $f$  داریم:

$$f(1) = -3$$

$$f(f(1)) = f(-3) = 2$$

$$f(f(f(1))) = f(2) = 5$$

۶. حجم مخروط به شعاع قاعده‌ی ۵ و

ارتفاع  $h$  برابر با  $\frac{1}{3}$  حجم استوانه به همان

شعاع قاعده و ارتفاع است. در صورتی که

حجم استوانه را  $V$  در نظر بگیریم، حجم هر

یک از مخروط‌ها  $\frac{1}{3}V$  و در نتیجه حجم

منبع و حجم استوانه برابر است با:

$$V = \frac{1}{3}V + V + \frac{1}{3}V = \frac{5}{3}V$$

$$V = \pi r^2 h = 25\pi h$$

در نتیجه داریم:

$$V = \frac{5}{3}V = \frac{5}{3} \times 25\pi h$$

$$= \frac{125}{3}\pi h$$

۷. برای محاسبه‌ی  $f(k-1)$  کافی است

در تابع  $f(x)$  به جای  $x$  قرار دهیم  $(k-1)$ ،

در این صورت:

$$f(k-1) = \begin{cases} 2(k-1) & k-1 > 2 \\ 4 & k-1 = 2 \\ (k-1)^2 + 1 & k-1 < 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(k-1) = \begin{cases} 2k-2 & k > 3 \\ 4 & k = 3 \\ k^2 - 2k + 2 & k < 3 \end{cases}$$

۸.

$$p = 2x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$\Delta = 9 - 16 = -7 < 0$$



$$\Rightarrow 576 = 24 \times h_a \Rightarrow h_a = 24$$

$$S = 480, \frac{h_a}{a} = \frac{5}{6}, S = a \cdot h_a$$

$$\Rightarrow a = \frac{h_a}{\frac{5}{6}} = \frac{6}{5} h_a$$

$$\Rightarrow 480 = \frac{6}{5} h_a \times h_a$$

$$\Rightarrow 480 = \frac{6}{5} \times h_a^2 \Rightarrow h_a^2 = 400 \Rightarrow h_a = 20$$

ب)  $S = 117, a = h_a + 4, S = a \cdot h_a$

$$\Rightarrow 117 = (h_a + 4)h_a$$

$$\Rightarrow 117 = h_a^2 + 4h_a$$

$$\Rightarrow h_a^2 + 4h_a - 117 = 0$$

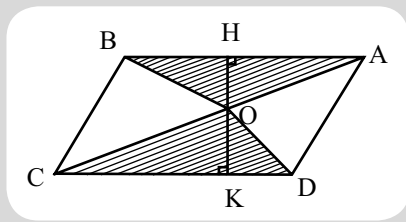
$$\Rightarrow h_a = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 117}}{1}$$

$$= -2 \pm 11 \Rightarrow h_a = -13, h_a = 9$$

پس جواب قابل قبول  $h_a = 9$  است.

۹. از O خطی عمود بر ضلع‌های AB

و CD رسم می‌کنیم تا این دو ضلع را به ترتیب در H و K قطع کند. ارتفاع OH رأس O از مثلث OAB و OK ارتفاع رأس O از مثلث OCD و  $HO + OK = HK$  ارتفاع متوازی الاضلاع است. با توجه به این که  $AB = CD$  است، داریم:



$$S_{OAB} = \frac{1}{2} OH \cdot AB$$

$$S_{OCD} = \frac{1}{2} OK \cdot CD = \frac{1}{2} OK \cdot AB$$

$$\Rightarrow S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{1}{2} OH \cdot AB$$

$$+ \frac{1}{2} OK \cdot AB - \frac{1}{2} AB(OH + OK)$$

$$\Rightarrow S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{1}{2} AB(HK)$$

$$\Rightarrow S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

$$AP = \frac{2}{3} AO = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} AC = \frac{1}{3} AC,$$

$$OP = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} AC = \frac{1}{6} AC$$

$$CQ = \frac{2}{3} CO = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} AC = \frac{1}{3} AC,$$

$$OQ = \frac{1}{3} OC = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} AC = \frac{1}{6} AC$$

$$PQ = OP + OQ = \frac{1}{6} AC + \frac{1}{6} AC$$

$$= \frac{1}{3} AC \Rightarrow AP = PQ = QC = \frac{1}{3} AC$$

پس حکم مسئله ثابت شد.

۷. الف) مساحت مستطیل را S، محیط

آن را ۲P، قطر آن را d و دو ضلع آن را a و b

می‌نامیم. بنابر داده‌های مسئله داریم:

$$\begin{cases} 2P = 2(a+b) = 68 \\ \frac{b}{a} = \frac{8}{9} \end{cases} \text{ الف)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b = 34 \\ b = \frac{8}{9}a \Rightarrow a + \frac{8}{9}a = 34 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{17a}{9} = 34 \Rightarrow a = 18$$

$$\Rightarrow b = \frac{8}{9} \times 18 = 16$$

پس طول و عرض یا در واقع دو ضلع

مجاور این مستطیل ۱۸ و ۱۶ است.

ب) اگر نقطه‌ی برخورد قطرهای مستطیل

را O بنامیم، مثلث‌های AOD و BCO

متساوی الاضلاع هستند، زیرا مثلث‌های

متساوی الساقینی هستند که زاویه‌ی رأس

آن‌ها  $60^\circ$  است، پس داریم:

$$\begin{cases} d = \sqrt{a^2 + b^2} \\ b = \frac{d}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 50 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ b = \frac{50}{2} = 25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 50 = \sqrt{a^2 + 625} \Rightarrow 2500 = a^2 + 625$$

$$\Rightarrow a^2 = 1875 \Rightarrow a = 25\sqrt{3}$$

۸. مساحت متوازی الاضلاع را S و ضلع

و ارتفاع نظیر آن از این متوازی الاضلاع را

به ترتیب a و  $h_a$  می‌نامیم. داریم:

$$S = 576, a = 24, S = a \cdot h_a$$

(زاویه‌ی سوم این دو مثلث  $70^\circ$  است).

ب) مثلث‌های II و III به حالت

«ضرض»، یعنی برابری دو ضلع متناظر

هم نهشت‌اند.

پ) مثلث‌های II و III به حالت

«ضرض»، یعنی برابری دو ضلع نظیر و

زاویه‌ی بین این دو ضلع هم نهشت‌اند.

ت) مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی I و III به

دلیل برابری وتر و یک ضلع هم نهشت‌اند.

۴. این سه مثلث به حالت «ضرض»

هم نهشتند، زیرا داریم:

$$AB = BC = AC,$$

$$\hat{A}BF = \hat{B}CD = \hat{C}AE,$$

$$\hat{B}AF = \hat{C}BD = \hat{A}CE$$

$$= 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

۵. تعداد قطرهای ۱۷ ضلعی محدب را

به دست می‌آوریم. داریم:

$$\text{تعداد قطرهای } n \text{ ضلعی محدب} = \frac{n(n-3)}{2},$$

$$n = 17$$

$$\text{تعداد قطرها} = \frac{17(17-3)}{2} = 119$$

در نتیجه اختلاف تعداد قطرها و تعداد

ضلع‌های ۱۷ ضلعی محدب برابر است با:

$$119 - 17 = 102$$

۶. قطر BD از متوازی الاضلاع را رسم

می‌کنیم و نقطه‌ی برخورد آن با قطر AC

را O می‌نامیم. می‌دانیم که قطرهای AC و

BD یکدیگر را نصف کرده‌اند، بنابراین با

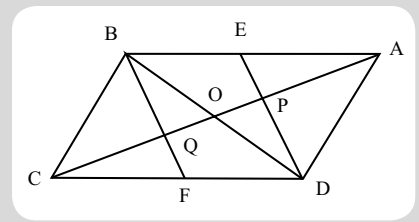
توجه به این که E وسط AB و F وسط CD

است، نقطه‌ی P محل برخورد میانه‌های مثلث

ABD و نقطه‌ی Q محل برخورد میانه‌های

مثلث BCD است. پس در مثلث‌های ABD و

BCD داریم:





$$R = f(-a) = (-a)^n - a^n = \begin{cases} \cdot & n \text{ زوج} \\ -2a^n & n \text{ فرد} \end{cases}$$

الف)  $n=2k$ :

$$x^n - a^n = (x+a)Q(x) + \cdot$$

$$\Rightarrow Q(x) = \frac{x^{2k} - a^{2k}}{x+a}$$

$$= (x-a)(x^{n-2} + a^2x^{n-4} + \dots + a^{n-2})$$

(مانند ب در حالت دوم)

ب)  $n=2k+1$ :

$$x^n - a^n = (x+a)Q(x) - 2a^n$$

$$\Rightarrow Q(x) = \frac{x^n + a^n}{x+a}$$

$$= x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots + a^{n-1}$$

حالت چهارم)  $x^A - a^A$  بر  $x-a$ :

$$R = f(a) = a^n + a^n = 2a^n$$

$$x^n + a^n = (x-a)Q(x) + 2a^n$$

$$\Rightarrow Q(x) = \frac{x^n - a^n}{x-a}$$

$$= x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + a^{n-1}$$

۴. یادآوری: در بسط  $(a+b)^n$  اگر  $n$  زوج،

جمله  $\frac{n}{2} + 1$  و اگر  $n$  فرد باشد، جملات

$\frac{n+1}{2}$  و  $\frac{n+1}{2} + 1$  دارای بیشترین ضریب

هستند. پس:

$$\text{باشد زوج } 3m+1 \Rightarrow \frac{3m+1}{2} + 1 = 9$$

$$\Rightarrow 3m+1 = 16 \Rightarrow m = 5$$

۵.

$$3(x_1^5 + x_2^5) = 11(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\Rightarrow 3(x_1 + x_2)(x_1^4 - x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 - x_1x_2^3 + x_2^4)$$

$$- x_1x_2^4 + x_2^5)$$

$$= 11(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \dots \rightarrow x_1x_2 = \frac{-5}{2} \\ 3((x_1 + x_2)^2 - x_1^2x_2^2 - x_1x_2(x_1^2 + x_2^2)) \\ = 11(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2) \end{cases}$$

$$(b-c)^2 = (aq-aq^2)^2 \\ = a^2q(1-q)^2$$

سمت راست:  $ac+bd-2ad$

$$= a(aq^2) + (aq)(aq^2) - 2a(aq^2)$$

$$= a^2q^2 + a^2q^2 - 2a^2q^2$$

$$= a^2q(1+q^2-2q)$$

سمت چپ:  $a^2q(1-q)^2$

۳. این مسئله چهار حالت دارد که

بررسی می‌کنیم:

حالت اول) تقسیم  $x^n - a^n$  بر  $x-a$ :

$$R = f(a) = a^n - a^n = \cdot$$

در نتیجه  $x^n - a^n$  همواره بر  $x-a$  بخش پذیر

است.

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-1})$$

$$+ \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$

$$\Rightarrow Q(x) = x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-1}$$

حالت دوم) تقسیم  $x^n + a^n$  بر  $x+a$ :

$$P = f(-a) = (-a)^n + a^n = \begin{cases} \cdot & n \text{ زوج} \\ -2a^n & n \text{ فرد} \end{cases}$$

یعنی  $x^n + a^n$  وقتی بر  $x+a$  بخش پذیر

است که  $n$  فرد باشد. حال خارج قسمت را

در هر حالت تعیین می‌کنیم:

الف)  $n=2k+1$ :

$$x^n + a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + \dots - a^{n-2}x + a^{n-1})$$

خارج قسمت

ب)  $n=2k$ :

$$x^n + a^n = (x+a)Q(x) + 2a^n$$

$$\Rightarrow Q(x) = \frac{x^n - a^n}{x+a} = \frac{x^{2k} - a^{2k}}{x+a}$$

$$= \frac{(x^2)^k - (a^2)^k}{x+a}$$

$$= \frac{(x^2 - a^2)(x^{2k-2} + a^2x^{2k-4} + \dots + a^{2k-2})}{x+a}$$

$$= (x-a)(x^{n-2} + a^2x^{n-4} + \dots + a^{n-2})$$

حالت سوم)  $x^n - a^n$  بر  $x+a$ :

۱۰. داریم:

$$\frac{3\sqrt{3}a^2}{2} = 54\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$$

اندازه‌ی ضلع شش ضلعی منتظم

$$= \text{سه‌م شش ضلعی منتظم} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

۱۱. داریم:

$$AO = \frac{AC}{2} = \frac{12}{2} = 6,$$

$$DO = \frac{DB}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$\Rightarrow AD = \sqrt{AO^2 + DO^2}$$

$$\Rightarrow AD = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

از طرفی می‌دانیم که:

$$\text{مساحت لوزی} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = AD \cdot CE$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 12 \times 16 = 10 \times CE$$

$$\Rightarrow CE = CF = 9/6$$

$$AC^2 = CE^2 + AE^2$$

$$\Rightarrow 12^2 = 9/6^2 + AE^2$$

$$\Rightarrow AE = 7/2$$

$$S_{ACE} = \frac{1}{2}AE \cdot EC = \frac{1}{2} \times 7/2 \times 9/6 = 34/56$$

$$S_{CEAF} = 2S_{ACE}$$

$$\Rightarrow S_{CEAF} = 2 \times 34/56 = 69/12$$

## حل مسائل حسابان

مجتبی رفیعی

۱. دوند، مرتبه‌ی اول ۴ متر، مرتبه‌ی

دوم ۸ متر، مرتبه‌ی سوم ۱۲ متر و ... را

طی می‌کنند. مجموع جملات تصاعد

... ۱۲، ۸، ۴ برابر ۴۸۰ است. پس:

$$480 = \frac{n}{2}(2 \times 4 + (n-1) \times 4)$$

$$= n(2 + 2n) \Rightarrow n^2 + n - 240 = 0$$

$$\Rightarrow n = 15$$

۲. فرض کنید  $q = \frac{b}{a}$  پس  $b = aq$

$c = aq^2$  و  $d = aq^3$

$$\Rightarrow k=0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0$$

$\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$  یک به یک است.

$$y = x + [x]$$

$$\Rightarrow [y] = [x + [x]] = 2[x]$$

$$\Rightarrow [x] = \frac{[y]}{2}$$

$$\begin{cases} y = x + [x] \\ [y] = 2[x] \end{cases} \Rightarrow y - [y] = x - [x]$$

$$\Rightarrow x - [x] = y - [y]$$

$$\Rightarrow (x - [x]) + [x] = y - [y] + \frac{[y]}{2}$$

$$\Rightarrow x = y - \frac{[y]}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = x - \frac{[x]}{2}$$

۱۳.

$$0 \leq x \leq 10 \Rightarrow 0 \leq [x] \leq 10$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{[x]+1}{3} \leq \frac{11}{3}$$

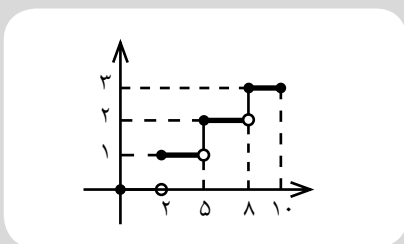
$$\Rightarrow \left[ \frac{[x]+1}{3} \right] \in \{1, 2, 3\}$$

$$\left[ \frac{[x]+1}{3} \right] = 0 \Rightarrow 0 \leq x < 2$$

$$\left[ \frac{[x]+1}{3} \right] = 1 \Rightarrow 2 \leq x < 5$$

$$\left[ \frac{[x]+1}{3} \right] = 2 \Rightarrow 5 \leq x < 8$$

$$\left[ \frac{[x]+1}{3} \right] = 3 \Rightarrow 8 \leq x < 10$$



۱۴.

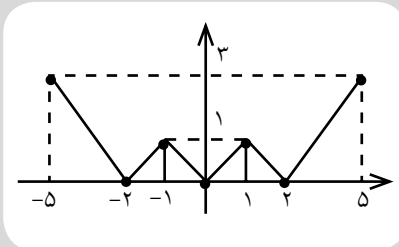
$$\left[ \sin^2 x \right] = \begin{cases} 1 & x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \\ 0 & x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$t+1 \geq \frac{-5}{4} \Rightarrow (t+1)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (t+1)^2 - 1 \geq -1$$

$$\Rightarrow R_f = [-1, +\infty)$$

۹.



چون نمودار نسبت به محور عرضها

متقارن است، پس تابع زوج است.

(ب) بله. برای مثال

$$\forall x_2 \text{ و } x_1 \in D_{f+g} : x_2 > x_1 \quad 10$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x_2) > f(x_1) \\ g(x_2) > g(x_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x_2) + g(x_2) > f(x_1) + g(x_1)$$

$$\Rightarrow (f+g)(x_2) > (f+g)(x_1)$$

در نتیجه  $f+g$  اکیداً صعودی است.

(ب) بله. برای مثال  $g(x) = 3x$  و

$f(x) = 2x$ ، پس:  $f(x) - g(x) = -x$  اکیداً نزولی

است.

۱۱.

$$y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y)$$

$$\text{فرد } f \Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = -y \Rightarrow f^{-1}(-y) = -x$$

$$= -f^{-1}(y) \Rightarrow \text{فرد است } f^{-1}$$

۱۲.

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Rightarrow x_1 + [x_1] = x_2 + [x_2]$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = [x_2] - [x_1]$$

با فرض  $[x_2] - [x_1] = k \in \mathbb{Z}$  داریم:

$$x_1 = x_2 + k$$

$$\Rightarrow x_2 + k + [x_2 + k] = x_2 + [x_2]$$

$$\Rightarrow x_2 + [x_2] + 2k = x_2 + [x_2]$$

$$\frac{x_1 + x_2 = t}{\rightarrow 3(25 - t^2 - 5t)}$$

$$= 11(5 - t) \Rightarrow 3t^2 + 4t - 20 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 2 \Rightarrow x_1, x_2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = -3 \end{cases} \\ t = \frac{-1}{3} \Rightarrow x_1, x_2 = \frac{-1}{3} \text{ غقیق} \end{cases}$$

(زیرا فرض  $x_1^2 + x_2^2 = 5$  را نقض می‌کند)

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases} \text{ دو جواب دیگر.}$$

۶.

$$\frac{b+c+a}{a(b+c)} \times \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{(2bc)(b+c-a)}$$

$$\times \frac{2bc}{a+b+c} = \frac{b+c+a}{b+c-a} \times \frac{(b+c)^2 - a^2}{a+b+c}$$

$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{b+c-a} = b+c+a$$

۷.

$$D_f : x \geq \frac{-1}{5} \Rightarrow (2x+3) + (5x+1)$$

$$+ 2\sqrt{(2x+3)(5x+1)} = 12x + 13$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{(2x+3)(5x+1)} = 5x + 9$$

$$\Rightarrow D_f : (x \geq \frac{-1}{5}) \cup (x \leq \frac{-3}{2})$$

$$\Rightarrow D_f \text{ نهایی : } x \geq \frac{-1}{5}$$

$$\Rightarrow 4(2x+3)(5x+1) = 25x^2 + 90x + 81$$

$$\Rightarrow 15x^2 - 22x - 69 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = 3 \\ x'' = \frac{-22}{15} \end{cases}$$

۸.

$$f(x) = (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2)$$

$$x^2 + 3x = t \Rightarrow y = t(t+2)$$

$$\Rightarrow y = t^2 + 2t = (t+1)^2 - 1,$$

$$t \geq \frac{-9}{4}$$

به یک نسبت تقسیم می‌کنند.

۲. الف) درست است.

ب) نادرست است، زیرا  $BC=9 > AC=8$

نتیجه می‌شود که  $\hat{A} > \hat{C}$  است.

پ) همواره درست نیست، زیرا اگر

ضلع‌های مثلث متساوی‌الساقین  $ABC$

( $AB=AC$ ) را امتداد دهیم، چهار زاویه

حاده و چهار زاویه منفرجه‌ی مساوی

ایجاد می‌شود، اما  $AB$  و  $AC$  موازی نیستند.

در واقع خط  $BC$  دو خط  $AB$  و  $AC$  را قطع

کرده است به قسمی که چهار زاویه حاده‌ی

مساوی چهار زاویه منفرجه‌ی مساوی به

وجود می‌آید، اما دو خط  $AB$  و  $AC$  موازی

نیستند.

۳. داریم:

$$\text{محیط مثلث} = x + (x-1) + (2x-3)$$

$$= 4x - 4$$

$$\Rightarrow 40 = 4x - 4 \Rightarrow x = 11$$

$$x-1 = 11-1 = 10,$$

$$2x-3 = 22-3 = 19$$

پس اندازه‌ی ضلع‌های این مثلث ۱۱،

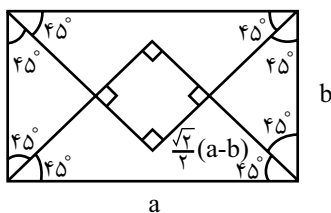
۱۰ و ۱۹ است.

۴. می‌دانیم که اندازه‌ی ضلع مربعی که

از برخورد نیمسازهای زاویه‌های درونی

مستطیلی به ابعاد  $a$  و  $b$  ( $a > b$ ) پدید می‌آید،

برابر  $\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)$  است. بنابراین داریم:



$$\begin{cases} a = 2b \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(a-b) = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2b \\ a-b = 8\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2b - b = 8\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow b = 8\sqrt{2} \text{ اندازه‌ی عرض مستطیل}$$

$$\Rightarrow a = 2b = 16\sqrt{2} \text{ اندازه‌ی طول مستطیل}$$

## حل مسائل هندسه‌ی ۲

محمد هاشم رستمی

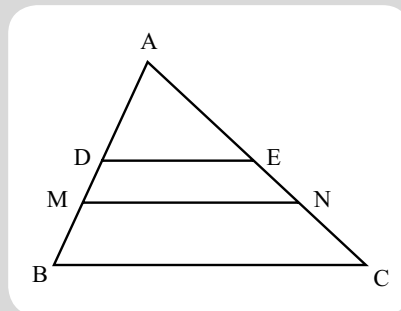
۱. الف) پاره‌خط‌های  $AD$ ،  $DB$ ،  $AE$  و

$EC$  را با دقت به کمک خط‌کش مدرج اندازه

می‌گیریم. داریم:

$$AD = 1/5, DB = 1/7,$$

$$AE = 2/1, EC = 2/4$$



ب) نسبت‌های  $\frac{AE}{EC}$  و  $\frac{AD}{DB}$  را محاسبه

می‌کنیم. داریم:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{1/5}{1/7} = 0/8, \frac{AE}{EC} = \frac{2/1}{2/4} = 0/8$$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = 0/8$$

پ) پاره‌خط‌های  $AM$ ،  $MB$ ،  $AN$  و

$NC$  را با دقت به کمک خط‌کش اندازه

می‌گیریم. داریم:

$$AM = 2/1, MB = 1, AN = 3,$$

$$NC = 1/4$$

ت) نسبت‌های  $\frac{AM}{MB}$  و  $\frac{AN}{NC}$  را به

دست می‌آوریم. داریم:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{2/1}{1} = 2/1, \frac{AN}{NC} = \frac{3}{1/4} = 12/1$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

ث) از انجام مراحل بالا به این حدس

می‌رسیم که اگر در مثلثی یک خط موازی

یک ضلع رسم شود، دو ضلع دیگر مثلث را

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow 1 + \left[\frac{x}{2}\right] = -1$$

$$\Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = -2$$

$$\Rightarrow -2 \leq \frac{x}{2} < -1 \Rightarrow -4 \leq x < -2 \left. \vphantom{\frac{x}{2}} \right\} x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow D = \emptyset$$

$$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 + \left[\frac{x}{2}\right] = -1$$

$$\Rightarrow -1 \leq \frac{x}{2} < 0 \Rightarrow -2 \leq x < 0 \left. \vphantom{\frac{x}{2}} \right\} x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x \in [-2, 0) - \left\{ \frac{-\pi}{2} \right\}$$

۱۵

$$2 \sin x \cos x - 2 \cos x - \sqrt{3} \sin x + \sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cos x (\sin x - 1) - \sqrt{3} (\sin x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (\sin x - 1)(2 \cos x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

۱۶

$$\operatorname{tg}(2 \operatorname{Arctg} \frac{1}{2}) = \frac{2(\frac{1}{2})}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

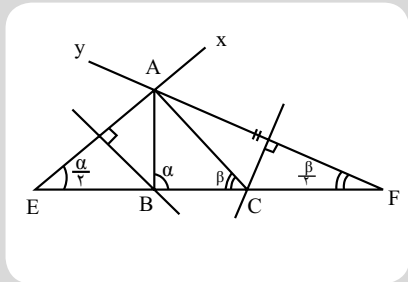
$$\alpha = 2 \operatorname{Arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctg} \frac{1}{3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg}(2 \operatorname{Arctg} \frac{1}{2}) + \operatorname{tg}(\operatorname{Arctg} \frac{1}{3})}{1 - \operatorname{tg}(2 \operatorname{Arctg} \frac{1}{2}) \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{Arctg} \frac{1}{3})}$$

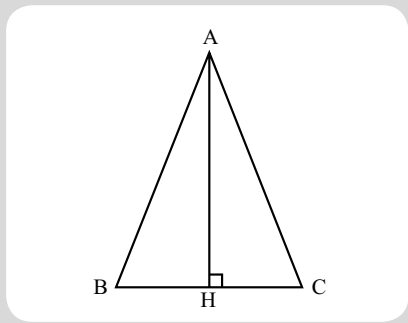
$$= \frac{\frac{4}{3} + \frac{1}{3}}{1 - (\frac{4}{3})(\frac{1}{3})} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{9}} = 3 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 3$$

$$\Rightarrow \alpha = \operatorname{Arctg} 3$$

با معلوم بودن  $ER=2P$ ,  $\hat{E} = \frac{\alpha}{2}$  و  $\hat{F} = \frac{\beta}{2}$  رسم می‌کنیم (پاره خط EF را به طول  $2P$  رسم می‌کنیم. از E خطی چنان رسم می‌کنیم که با EF زاویه‌ی  $\hat{E} = \frac{\alpha}{2}$  را بسازد (خط Ex) و از F خطی چنان رسم می‌کنیم که با EF زاویه‌ی  $\hat{F} = \frac{\beta}{2}$  را بسازد (خط Fy). این دو خط در یک طرف EF واقعند. نقطه‌ی برخورد Ex و Fy رأس A از مثلث ABC است. عمودمنصف ضلع AE را رسم می‌کنیم تا EF را در نقطه‌ی B قطع کند و عمود منصف ضلع AF را نیز رسم می‌کنیم تا EF را در نقطه‌ی C قطع کند از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسئله است.



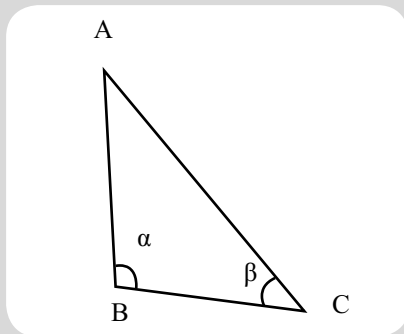
نکته: چون مثلث‌های AEB و AFC در رأس‌های B و C متساوی‌الساقین‌اند، یعنی  $AB=BE$  و  $AC=CF$  است، پس عمودمنصف‌های قاعده‌های AE و AF به ترتیب از B و C می‌گذرند، زیرا می‌دانیم که در هر مثلث متساوی‌الساقین عمود منصف قاعده‌ی مثلث از رأس آن مثلث می‌گذرد. در شکل، مثلث ABC در رأس A متساوی‌الساقین است ( $AB=AC$ ) و عمودمنصف قاعده‌ی BC از رأس A می‌گذرد.



۶. فرض می‌کنیم مسئله حل شده و مثلث ABC جواب آن است، یعنی مثلثی باشد که محیط آن مساوی  $2P$ ، اندازه‌ی زاویه‌های  $\hat{B}$  و  $\hat{C}$  از آن به ترتیب مساوی  $\alpha$  و  $\beta$  باشند ( $\hat{C} = B$  و  $\hat{B} = \alpha$ ). ضلع BC از این مثلث را از طرف B به اندازه‌ی  $BE=AB$  و از طرف C به اندازه‌ی  $CF=AC$  امتداد می‌دهیم و از A به E و F وصل می‌کنیم. اولاً  $EF=2P$ ، یعنی برابر محیط مثلث است، زیرا داریم:

$$EF = EB + BC + CF = AB + BC + AC = 2P$$

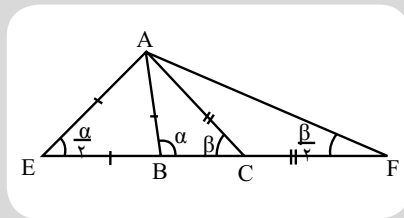
محیط مثلث



ثانیاً زاویه‌های  $\hat{AEB} = \frac{\alpha}{2}$  و  $\hat{AFC} = \frac{\beta}{2}$  است، زیرا مثلث‌های AEB و AFC متساوی‌الساقین‌اند و زاویه‌های تماس‌های B و C در این دو مثلث‌اند، یعنی

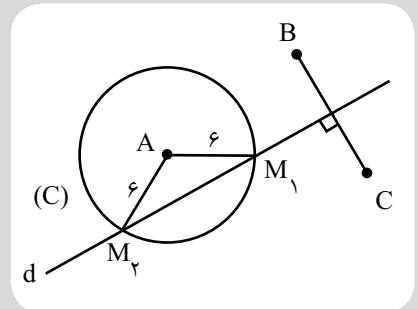
$$\hat{B} = 2\hat{E} \Rightarrow \alpha = 2\hat{E} \Rightarrow \hat{E} = \frac{\alpha}{2}$$

$$\hat{C} = 2\hat{F} \Rightarrow \beta = 2\hat{F} \Rightarrow \hat{F} = \frac{\beta}{2}$$

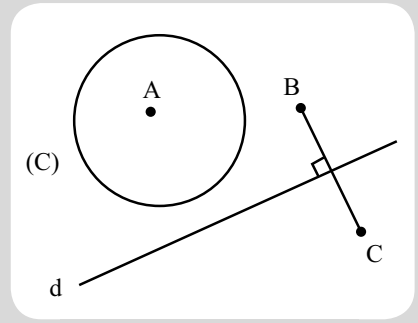
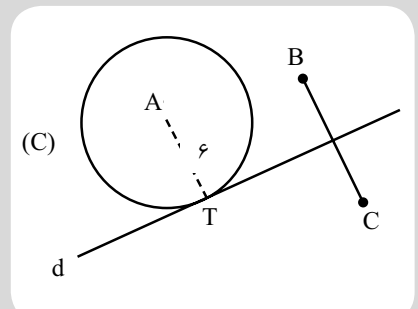


در نتیجه، مثلث AEF معلوم بودن ضلع  $EF=2P$  و زاویه‌های  $\hat{E} = \frac{\alpha}{2}$  و  $\hat{F} = \frac{\beta}{2}$  قابل رسم است. بنابراین برای رسم مثلث ABC، نخست مثلث AEF را

۵. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که از صفحه‌ی گذرنده بر سه نقطه‌ی A، B و C که از دو نقطه‌ی B و C به یک فاصله باشد، عمود منصف پاره خط BC است. این عمود منصف را رسم می‌کنیم و خط d می‌نامیم. از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه‌ی ABC که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۶ قرار دارد دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۶ است. این دایره را نیز رسم می‌کنیم و آن را دایره‌ی (C) می‌نامیم.



نقطه‌ی برخورد خط d و دایره‌ی (C) جواب مسئله است و به تعداد نقطه‌های برخورد، مسئله دارای جواب است، به این معنی اگر خط d دایره‌ی (C) را در دو نقطه قطع کند مسئله دو جواب دارد (نقطه‌های  $M_1$  و  $M_2$ ) و اگر خط d بر دایره‌ی (C) مماس باشد، نقطه‌ی تماس T جواب مسئله خواهد بود و اگر خط d دایره‌ی (C) را قطع نکند مسئله جواب ندارد.



$$= 675 - \frac{675}{4} = \frac{2025}{4} \Rightarrow MH = \frac{45}{2}$$

ب) در مثلث قائم الزاویه OMT، TH ارتفاع وارد بر وتر OM است. پس داریم:

$$TH^2 = OH.MH, TH = 15,$$

$$OH = OM - MH = 30 - MH$$

$$\Rightarrow 15^2 = (30 - MH).MH$$

$$\Rightarrow 225 = 30.MH - MH^2$$

$$\Rightarrow MH^2 - 30.MH + 225 = 0$$

$$\Rightarrow MH = 15$$

$$OH = OM - MH = 30 - 15$$

$$TT' = 2TH = 2 \times 15 = 30$$

$$MT = \sqrt{MH^2 + TH^2} = \sqrt{15^2 + 15^2} = 15\sqrt{2}$$

$$OT = \sqrt{OM^2 - MT^2}$$

$$= \sqrt{30^2 - (15\sqrt{2})^2} = \sqrt{450} = 15\sqrt{2}$$

## حل مسائل جبر و احتمال

هوشنگ شرقی

۱.

$$n = 1: \frac{1}{1^2} \leq 2 - \frac{1}{1} \Rightarrow 1 \leq 1$$

فرض استقرا:

$$n = k: \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{k}$$

حکم استقرا:

$$n = k + 1: \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{k^2}$$

$$+ \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{k+1}$$

به طرفین فرض،  $\frac{1}{(k+1)^2}$  را اضافه می‌کنیم:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{k^2}$$

$$+ \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}$$

و از آنجا داریم:  $AB + CD = AD + BC$

$$= 2(AB + CD)$$

$$= 2(BT + AT + DM + MC),$$

$$AT = AS$$

$$\Rightarrow \text{محیط چهارضلعی} = 2(BT + AS + DM + MC)$$

$$\Rightarrow 120 = 2(x + 1 + x + 16 + 13)$$

$$\Rightarrow 60 = 2x + 30 \Rightarrow 2x = 30$$

$$\Rightarrow x = 15$$

نکته. طول مماس‌های رسم شده از هر

نقطه واقع در خارج یک دایره به آن دایره

با هم برابر است و به همین دلیل  $AT = AS$

است. همچنین  $BT = BN$ ،  $CN = CM$  و  $CM = DS$  است.

۱۰. الف) چون OM نیمساز

زاویه  $\widehat{TMT'}$  است، پس

در  $\widehat{OMT} = \widehat{OMT'} = \frac{60}{2} = 30^\circ$

مثلث قائم الزاویه OMT:  $\widehat{OTM} = 90^\circ$

و TH ارتفاع وارد بر وتر است، زیرا OM

عمود منصف وتر  $TT'$  است. از طرفی

می‌دانیم که ضلع مقابل به زاویه  $30^\circ$  در

مثلث قائم الزاویه نصف وتر مثلث است، پس

داریم:

$$OT = \frac{OM}{2} \Rightarrow 15 = \frac{OM}{2}$$

فاصله M از مرکز دایره  $OM = 30$

$$\Rightarrow MT = \sqrt{OM^2 - OT^2} = \sqrt{30^2 - 15^2} = \sqrt{675} = 15\sqrt{3}$$

از طرفی داریم:

$$TH.OM = OT.MT = 2S_{OMT}$$

$$\Rightarrow TH \times 30 = 15 \times 15\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow TH = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

برای محاسبه MH در مثلث

قائم الزاویه MTH،  $\widehat{H} = 90^\circ$  داریم:

$$MH^2 = MT^2 - TH^2 = (15\sqrt{3})^2 - \left(\frac{15\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

۷. با توجه به این که اندازه‌ی هر زاویه‌ی

مرکزی دایره مساوی مقدار کمان روبه‌روی

آن و AOB قطر دایره است، یعنی محیط

دایره را به دو کمان مساوی  $180^\circ$  تقسیم

می‌کند، داریم:

$$x = \widehat{AD} = 40^\circ$$

$$\widehat{BD} = z = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$$

$$\Rightarrow y = z = 140^\circ$$

۸. می‌دانیم که d فاصله‌ی وتری به طول

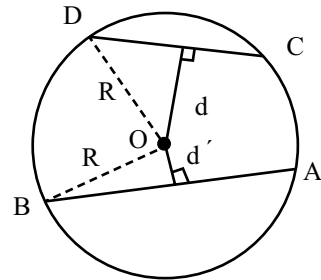
L در دایره‌ای به شعاع R از مرکز آن دایره

از دستور  $d = \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}$  محاسبه می‌شود. با

توجه به این مطلب، فاصله‌ی وترهای AB

و CD از مرکز دایره را به ترتیب d و d'

می‌نامیم. برای محاسبه‌ی d و d' داریم:



$$R = 10, AB = 12, AC = 16$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{10^2 - \frac{12^2}{4}} = 8$$

$$d' = \sqrt{10^2 - \frac{16^2}{4}} = \sqrt{36} = 6$$

$$\Rightarrow d = 8 > d' = 6$$

بنابراین، وتر CD به مرکز دایره نزدیک‌تر

است.

این مسئله مصداقی برای این قضیه است

که:

در یک دایره (یا دو دایره‌ی مساوی) از

دو وتر، آن که بزرگ‌تر است، به مرکز دایره

نزدیک‌تر است.

۹. می‌دانیم که در هر چهارضلعی

محیطی مجموع دو ضلع روبه‌رو با هم

برابرند، یعنی در چهارضلعی ABCD داریم:



دفتر انتشارات کمک آموزشی

### با مجله‌های رشد آشنا شوید

مجله‌های رشد توسط دفتر انتشارات کمک آموزشی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وابسته به وزارت آموزش و پرورش تهیه و منتشر می‌شوند:

#### مجله‌های دانش‌آموزی

(به صورت ماهنامه و ۸ شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند):

- رشد دانش‌آموزان** (برای دانش‌آموزان آمادگی و پایه‌ی اول دوره‌ی دبستان)
- رشد دانش‌آموزان دوم و سوم** (برای دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دوره‌ی دبستان)
- رشد دانش‌آموزان چهارم و پنجم** (برای دانش‌آموزان پایه‌های چهارم و پنجم دوره‌ی دبستان)
- رشد دانش‌آموزان دوره‌ی راهنمایی** (برای دانش‌آموزان دوره‌ی راهنمایی تحصیلی)
- رشد دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه‌ی پیش‌دانشگاهی** (برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه‌ی پیش‌دانشگاهی)

#### مجله‌های بزرگسال عمومی

(به صورت ماهنامه و ۴ شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند):

- رشد آموزش ابتدایی • رشد آموزش راهنمایی تحصیلی • رشد تکنولوژی آموزشی • رشد مدرسه فردا • رشد مدیریت مدرسه • رشد معلم

#### مجله‌های بزرگسال و دانش‌آموزی اختصاصی

(به صورت فصلنامه و ۴ شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند):

- رشد برهان راهنمایی (مجله ریاضی برای دانش‌آموزان دوره‌ی راهنمایی تحصیلی) • رشد برهان متوسطه (مجله ریاضی برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه) • رشد آموزش قرآن • رشد آموزش معارف اسلامی • رشد آموزش زبان و ادب فارسی • رشد آموزش هنر • رشد مشاور مدرسه • رشد آموزش تربیت‌بدنی • رشد آموزش علوم اجتماعی • رشد آموزش تاریخ • رشد آموزش جغرافیا • رشد آموزش زبان • رشد آموزش ریاضی • رشد آموزش فیزیک • رشد آموزش شیمی • رشد آموزش زیست‌شناسی • رشد آموزش زمین‌شناسی • رشد آموزش فن‌وحرفه‌ای • رشد آموزش پیش‌دبستانی

مجله‌های رشد عمومی و اختصاصی برای آموزگاران، معلمان، مدیران و کارکنان اجرایی مدارس، دانشجویان مراکز تربیت‌معلم و رشته‌های دبیری دانشگاه‌ها و کارشناسان تعلیم و تربیت تهیه و منتشر می‌شوند.

نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره‌ی ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۶، دفتر انتشارات کمک آموزشی.

تلفن و نمابر: ۰۲۱ - ۸۸۳۰۱۳۷۸

$$\Rightarrow 2 = 5\sqrt{5} - 15\frac{a^2}{b^2} + 3\sqrt{5}\frac{a^2}{b^2} - \frac{a^6}{b^6}$$

$$\Rightarrow 2b^6 = 5\sqrt{5}b^6 - 15a^2b^4 + 3\sqrt{5}a^2b^2 - a^6$$

$$\Rightarrow 2b^6 + 15a^2b^4 + a^6 = \sqrt{5}(5a^6 + 3a^2b^2)$$

$$\Rightarrow \sqrt{5} = \frac{2b^6 + 15a^2b^4 + a^6}{5a^6 + 3a^2b^2} = \frac{m}{n}$$

و چون  $a, b \in \mathbb{Z}$  پس  $m, n \in \mathbb{Z}$  لذا  $\sqrt{5}$  مساوی عددی گویاست و این خلاف فرض‌ها خواهد بود ( $\sqrt{5}$  عددی گنگ است).

۴.

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{ab} \geq a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 \geq a^2b + ab^2$$

$$\Rightarrow a^2 - a^2b + b^2 - ab^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow a^2(a-b) - b^2(a-b) \geq 0$$

$$\Rightarrow (a-b)(a^2 - b^2) \geq 0$$

$$\Rightarrow (a-b)(a-b)(a^2 + ab + b^2) \geq 0$$

$$\Rightarrow (a-b)^2(a^2 + ab + b^2) \geq 0$$

و درستی نابرابری فوق واضح است، زیرا  $(a-b)^2 \geq 0$  و چون  $a$  و  $b$  مثبت هستند پس  $a^2 + ab + b^2 \geq 0$ ، همه‌ی مراحل نیز برگشت پذیرند.

۵. الف نادرست است. مثال نقض:  $\sqrt{5}$  عددی گنگ و  $5 = (\sqrt{5})^2$  نیز عددی گویا است.

ب) نادرست است زیرا (مثال نقض)  $\sqrt{5}$  عددی گنگ و  $5 = (\sqrt{5})^2$  نیز عددی گنگ است.

ج) درست است. اثبات:

$$a = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{p^2}{q^2} = \frac{p'}{q}, p' = p^2 \in \mathbb{Z}$$

$$q' = q^2 \in \mathbb{Z}, q \neq 0$$

$$\Rightarrow q^2 = q' \neq 0 \Rightarrow a^2 \in \mathbb{Q}$$

و از مقایسه‌ی نتیجه‌ی اخیر با حکم استقرا، نتیجه می‌گیریم که برای اثبات حکم، کافی است ثابت کنیم:

$$2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{k+1}$$

و به کمک استدلال بازگشتی داریم:

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)}$$

$$= \frac{1}{k(k+1)} \Rightarrow \frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow (k+1)^2 \geq k \Rightarrow k^2 + 2k + 1 \geq k$$

$$\Rightarrow k^2 + k + 1 \geq 0$$

که درستی نابرابری اخیر به ازای هر عدد طبیعی  $k$  واضح است و چون همه‌ی مراحل برگشت پذیرند، پس درستی حکم استقرا اثبات می‌شود.

۲. می‌دانیم هر عدد طبیعی در تقسیم بر ۳ یکی از باقی‌مانده‌های ۰، ۱، ۲ را دارد، یعنی به یکی از سه فرم  $3k+1$ ،  $3k$  یا  $3k+2$  است. بنابراین اگر عددی طبیعی بر سه بخش پذیر نباشد، به یکی از صورت‌های  $3k+1$  یا  $3k+2$  است و در این حالت‌ها داریم:

$$a = 3k+1 \Rightarrow a^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(\underbrace{3k^2 + 2k}_k) + 1 = 3k' + 1$$

$$a = 3k+2 \Rightarrow a^2 = 9k^2 + 12k + 4$$

$$= 3(\underbrace{3k^2 + 4k + 1}_{k''}) + 1 = 3k'' + 1$$

پس در هر دو حالت، باقی‌مانده‌ی  $a^2$  بر ۳ مساوی ۱ است.

۳. فرض می‌کنیم این عدد گنگ نباشد، پس گویاست:

$$\sqrt{5} - \sqrt{2} = \frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{5} - \sqrt{2} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} = -\frac{a^2}{b^2} + \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow 2 = (\sqrt{5} - \frac{a^2}{b^2})^2$$

$$\Rightarrow A - B = \{-1\}, B - A = \{3, 4\}$$

$$\Rightarrow A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

$$= \{-1, 3, 4\}$$

۸.

$$A = \left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} \mid x \in \mathbb{N} \right\}$$

$$B = x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow S = x_1 + x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10}$$

$$p = x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{7}{10}x + \frac{1}{10} = 0$$

$$\Rightarrow 10x^2 - 7x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow B = \left\{ x \mid 10x^2 - 7x + 1 = 0 \right\}$$

$$A - (B - C) \quad (\text{الف})$$

$$= A - (B \cap C') = A \cap (B \cap C)'$$

$$= A \cap (B' \cup C) = (A \cap B') \cup (A \cap C)$$

$$= (A - B) \cup (A \cap C)$$

$$\left. \begin{aligned} A \subset B &\Rightarrow A \cup B = B \\ A' \subset B &\Rightarrow A' \cup B = B \end{aligned} \right\} \quad (\text{ب})$$

$$\Rightarrow (A \cup B) \cup (A' \cup B) = B \cup B$$

$$\Rightarrow (A \cup A') \cup (B \cup B) = B$$

$$\Rightarrow U \cup B = B \Rightarrow B = U$$

$$A - B = A \quad (\text{ج})$$

$$\Rightarrow A \cap B' = A \Rightarrow (A \cap B')' = A'$$

$$\Rightarrow A' \cup B = A'$$

$$\Rightarrow B \cap (A' \cup B) = B \cap A'$$

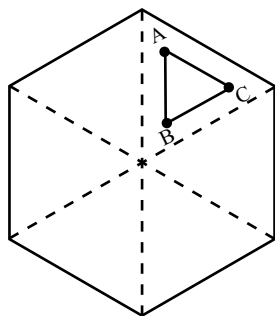
جذب

$$\Rightarrow B = B \cap A'$$

$$\Rightarrow B = B - A$$



۶. به صورت زیر، با وصل کردن رئوس شش ضلعی به مرکز آن، شش ضلعی را به شش مثلث متساوی الاضلاع به ضلع واحد تقسیم می‌کنیم (توجه کنید که هر زاویه‌ی داخلی شش ضلعی منتظم مساوی  $120^\circ$  است و لذا هر یک از زاویه‌های داخلی این مثلث‌ها مساوی  $60^\circ$  و در نتیجه همگی آن‌ها متساوی الاضلاع و همنهشت‌اند). حال چون پانزده نقطه درون شش ضلعی در نظر گرفته‌ایم، بنابراین طبق تعمیم یافته‌ی اصل لانه کیبوتری، دست‌کم سه نقطه از آن‌ها در یک مثلث قرار می‌گیرند (مانند نقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  در شکل). پس مساحت مثلث  $ABC$  از مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع  $a$  از دستور  $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$  به دست می‌آید. پس خواهیم داشت:



$$S_{ABC} < \frac{\sqrt{3}}{4}(1)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

۷. برای تشکیل  $A$ ، ابتدا نامعادله‌ی

$$x(x-1) \leq 2$$

$$x^2 - x \leq 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+1) \leq 0$$

$$\Rightarrow -1 \leq x \leq 2$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ یا } 0 \text{ یا } 1 \text{ یا } 2$$

$$\Rightarrow A = \{-1, 0, 1, 2\}$$

و درباره‌ی  $B$  نیز روشن است که ده‌های حسابی که فاکتوریل آن‌ها کم‌تر یا مساوی ۳۰ است، ۴، ۳، ۲، ۱، ۰ هستند.

$$B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$



## برگ اشتراک مجله‌های رشد

شرایط:

۱. پرداخت مبلغ ۷۵/۰۰۰ ریال به ازای یک دوره یک‌ساله مجله‌ی درخواستی، به صورت علی‌الحساب به حساب شماره‌ی ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت شعبه‌ی سه راه آزمایش (سرخه‌حصار) کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست.
۲. ارسال اصل فیش بانکی به همراه برگ تکمیل شده‌ی اشتراک باپست‌سفارشی. (کپی فیش رانز خودنگه دارید.)

♦ نام مجله‌های درخواستی:

.....

♦ نام و نام خانوادگی:

.....

♦ تاریخ تولد:

.....

♦ میزان تحصیلات:

.....

♦ تلفن:

.....

♦ نشانی کامل پستی:

.....

استان: شهرستان:

.....

خیابان:

.....

پلاک:

.....

شماره‌ی پستی:

.....

♦ در صورتی که قبلاً مشترک مجله بوده‌اید، شماره‌ی اشتراک خود را بنویسید:

.....

کاشتراک:

.....

امضا:

۱۵۸۷۵/۶۵۶۷

• صندوق پستی مرکز بررسی آثار:

۱۶۵۹۵/۱۱۱

• صندوق پستی امور مشترکین:

www.roshdmag.ir

• نشانی اینترنتی:

۰۲۱-۷۷۳۳۶۶۵۶-۷۷۳۳۵۱۱۰

• امور مشترکین:

۰۲۱-۸۸۳۰۱۴۸۲

• پیام‌گیر مجله‌های رشد:

یادآوری:

♦ هزینه‌ی برگشت مجله در صورت خوانا و کامل نبودن نشانی و عدم حضور

گیرنده، برعهده‌ی مشترک است.

♦ مبنای شروع اشتراک مجله از زمان دریافت برگ اشتراک خواهد بود.

