

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



وزارت آموزش و پرورش  
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی  
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد  
مجله‌ی ریاضی  
دوره‌ی آموزش متوسطه

فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی  
دوره بیستم / شماره ۴ / تابستان ۱۳۹۰

## سال جهاد اقتصادی گرامی باد

### سرمقاله / ۲

خیاط در کوزه / غلامرضا یاسی پور / ۳

مسئله‌های باز کردن گاو صندوق / هوشنگ شرقی / ۱۲

حل معادله  $f(x) = 0$  / احمد قندهاری / ۱۶

مسئله چیست؟ / محمد هاشم رستمی / ۱۹

۱۹ روش برای حل معادله درجه دوم و کاربردهای آن‌ها / سید محمدرضا هاشمی موسوی / ۲۶

اعمال بین مجموعه‌ها - جبر مجموعه‌ها / حمیدرضا امیری / ۳۲

«صفر» از دنیای باستان تا امروز / احمد سعیدی / ۳۸

تعداد توابع یک‌به‌یک و پوشا / میرشهرام صدر / ۴۳

حسابان / ترجمه: غلامرضا یاسی پور / ۴۸

بیست سال حرکت و تلاش / هیئت تحریریه / ۵۲

محاسبه  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)}$  / احسان یارمحمدی / ۶۳

نکاتی درباره‌ی محاسبه‌ی حدود توابع جزء صحیح / سعید چتر آنوس / ۶۸

رویکرد هندسی و رویکرد جبری در آموزش هندسه ۱۳ / محمد هاشم رستمی / ۷۱

آشنایی با بسته نرم‌افزار متمتیکا (۳) / دکتر محمدعلی فریبرزوی عراقی / ۷۷

قضیه گودل / ترجمه: غلامرضا یاسی پور / ۸۱

روش تعیین عرض‌های اکسترمم‌های نسبی توابع بدون استفاده از مشتق / احمد قندهاری / ۸۲

اثبات یک سری ریاضی / فرهاد جعفری یقین / ۸۵

حل تشریحی مسائل شماره قبل / ۸۶

نمایه مقاله‌های برهان متوسطه / ۱۰۱

● مدیر مسئول: محمد ناصری ● سردبیر: حمیدرضا امیری

● مدیر داخلی: میرشهرام صدر ● طراح گرافیک: جعفر وافی

● هیئت تحریریه: حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی،

احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی،

سید محمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی پور

و با تشکر از همکاری ارزنده‌ی استاد پرویز شهریاری

● ویراستار ادبی: مرتضی حاج‌علی فرد

● وبگاه: [www.roshdmag.ir](http://www.roshdmag.ir)

● رایانامه: [borhanm@roshdmag.ir](mailto:borhanm@roshdmag.ir)

● پیام‌گیر نشریات رشد: ۱۴۸۲ - ۸۸۳ - ۰۲۱

نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵

● تلفن دفتر مجله: ۰۲۱ - ۸۸۳۰۵۸۶۲

● تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ - ۷۷۳۳۶۶۵۵ - ۰۲۱

● شمارگان: ۱۰۵۰۰ نسخه

● چاپ: شرکت افست (سهامی عام)

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در

زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می‌کند:

● نگارش مقاله‌های کمک‌درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات

میحت درسی کتاب‌های ریاضی دوره متوسطه و پیش‌دانشگاهی)

● طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)

● طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)

● طرح معماهای ریاضی

● نگارش یا ترجمه مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه علمی و اجتماعی

ریاضی دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش رایانه و...)

● رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می‌شود. ● مجله در حک، اصلاح، حذف و اضافه مقاله‌ها آزاد است.

● مقاله‌های وارده، باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد. ● مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجله در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

## حرف اول

شاید وقتی برای اولین شماره مجله ریاضی برهان به دنبال یک اسم بامعنا می‌گشتیم به هفتادمین شماره و بیستمین سالگرد تولد این مجله فکر نمی‌کردیم. در آن زمان (سال ۱۳۶۹) فقط یک مجله ریاضی به همت استاد شهریاری چاپ می‌شد و در سرتاسر این کشور پهناور، مجله ریاضی برهان

برای دانش‌آموزان منحصر به فرد بود.

هنگامی که چاپ یک مجله ریاضی را به آقای عبدالعظیم فریدون (مدیر عامل وقت انتشارات مدرسه) پیشنهاد دادم و ایشان پس از مشورت با مدیرکل وقت دفتر کمک‌آموزشی، جناب مهندس محسن چینی‌فروشان از اینجانب خواستند تا با آقای چینی‌فروشان نشست داشته باشیم. مهندس چینی‌فروشان که تحصیلات دبیرستانی خود را در رشته ریاضی به پایان رسانده بودند و به ریاضیات علاقه داشتند، در کمال اطمینان و با دلگرمی فراوان قول مساعدت دادند و از اولین مشوقان من در تولید و انتشار این مجله بودند.

فروختگان و بزرگواران بسیاری از آغاز راه تاکنون در تولید، چاپ و انتشار این مجله نقش مؤثر داشته‌اند و دارند که ذکر نام آن عزیزان از حوصله این چند سطر خارج است و بنده به‌عنوان عضو کوچکی از مجموعه دست‌اندرکاران مجله به نیابت از شما خوبان از یکایک ایشان قدردانی و تشکر می‌کنم. در این میان تلاش، ایثار، صداقت، عشق و علاقه فراوان اعضای محترم هیئت تحریریه مجله، بیش‌ترین تأثیر در رشد و تعالی مجله و دلگرمی من در ادامه راه را به همراه داشته است.

بیستمین سالگرد تولد برهان، بهانه و فرصتی است مناسب تا از محبت‌ها، جدیت‌ها و زحمات ارزنده ایشان و تمامی دست‌اندرکاران، مسئولان و مجموعه عوامل مؤثر در تولید، چاپ و انتشار مجله در دفتر کمک‌آموزشی، به‌ویژه مدیرکل دفتر و مدیر مسئول مجله ریاضی رشد برهان، جناب آقای محمد ناصری تشکر و قدردانی کنم.

ان‌شاءالله شما دانش‌آموزان و دوستان مجله برهان که در مدت این بیست سال با ارسال نامه‌ها، مقالات و پیشنهادهای خود ما را در ارتقای کیفی مقالات و نوشته‌ها یاری کرده‌اید، همچنان با ما همراه باشید و همان‌گونه که بسیاری از همکاران فعلی، مؤلفان و اساتید محترم که با ما همراه هستند در گذشته جزء دانش‌آموزان و خوانندگان مجله برهان بوده‌اند، شما نیز در آینده گوشه‌ای از این رسالت آموزشی در توسعه، نشر و آموزش ریاضی را به دوش بکشید و همراه شوید.

سردبیر

# خیاط در کوزه



## تاریخچه مجله ریاضی برهان قسمت اول

غلامرضا یاسی پور

گرفته که در آن هشت بار، کلمه «برهان» با مشتقات آن آمده است.

از طرفی مجله به قول سردبیر، مجله‌ای دانش‌آموزی است و برای دانش‌آموزان انتشار یافته تا کمک حال و همدم ماه و سالشان باشد. اولین مقاله آن مبحث تقارن از محمد عابدی است.

در مقاله شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید از پرویز شهریاری چنین می‌خوانیم:

ریاضیات تکیه بر اندیشه و عقل آدمی دارد و سروکارش با استدلال منطقی است و هر انسانی، ولو با استعدادی نه چندان درخشان، می‌تواند با یاری جستن از اندیشه، عقل و استعداد خود به ریاضیات دست یابد و آن را فراگیرد.

از مقالات نظریه اعداد و کامپیوتر ترجمه غلامرضا یاسی پور و سیدحسین موسوی، و لگاریتم نوشته احمد قندهاری که بگذریم، به تاریخچه مختصر پیدایش هندسه نوشته محمد هاشم رستمی می‌رسیم و در آن، به این سخن افلاطون در کتاب جمهوری او برمی‌خوریم که می‌گوید: «مطالعه ریاضیات دستگاهی ذهنی را توسعه می‌دهد و به کار می‌اندازد که ارزش آن از هزار چشم بیشتر

ای ایاز از عشق تو گشتم چو موی  
ماندم از قصه تو قصه من بگوی  
بس فسانه عشق تو خواندم به جان  
تو مرا کافسانه گشتستم، بخوان

این بار موقتاً دست از مجلات ریاضی ایران برداشته‌ایم و به مناسبت بیست سالگی مجله ریاضی برهان، به مروری در شماره‌های بیست‌گانه این مجله پرداخته‌ایم و اشاراتی مختصر به پاره‌هایی از مقالات آن داریم و به این ترتیب، همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، خیاط در کوزه افتاده است.

اولین شماره این مجله در زمستان ۱۳۷۰ به بهای ۳۰۰ ریال به دست دانش‌آموزان دبیرستان و دبیران ریاضی رسید.

اعضای هیئت تحریریه مجله عبارت بودند از:

محمد هاشم رستمی، غلامرضا یاسی پور، سیدحسین سیدموسوی، سیدمحمد رضا هاشمی موسوی، حمیدرضا امیری، با همکاری پرویز شهریاری و محمد عابدی به سردبیری حمیدرضا امیری.

مجله، بنا به گفته سردبیر در سرمقاله نام خود را از قرآن مجید



است، زیرا درک حقیقت فقط از راه ریاضی میسر است.»

مقاله بعدی این شماره، **منطق قدیم و ریاضیات از غلامرضا یاسی پور** است. در این مقاله از قول **خواجه نصیر طوسی** در کتاب **اساس الاقتباس**، با عنوان **ابتدای سخن در منطق** چنین آمده است: و نه هر که کاری کند داند که چه می کند یا چه می باید کرد. بلکه بسیار کسان باشند که در کارها شروع کنند بر سبیل خبط. و هم چنین باشد حکم کسانی که طلب علوم کنند و بر صنعت منطق واقف نباشند. پس علم منطق، شناختن معنی‌هایی است که از آن معانی رسیدن به انواع علوم مکتسب ممکن باشد، و آنک از هر معنی به کدام علم توان رسید.

مقاله بعدی این شماره، عنوان **گروه، پیدایش و کاربرد نظریه گروه‌ها** را دارد و نوشته سردبیر مجله، یعنی حمیدرضا امیری است که در آن چنین می‌خوانیم:

یکی از این مفاهیم که امروزه در علمی چون فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، نجوم و... کاربردهای باارزشی دارد، مفهوم گروه است. این مفهوم در عصر ما تا حد زیادی پیشرفت کرده و اکنون به شکل یکی از شاخه‌های اصلی علم جبر درآمده است. از پایه‌گذاران جبر مجرد و به‌ویژه نظریه گروه‌ها شخصی است به نام **اواربست گالوا** که نظریه خود را در ۱۹ سالگی به تقریر درآورد.

**بخش پذیری چند جمله‌ای‌ها** نوشته **سیدمحمدرضا هاشمی موسوی** مقاله دیگری از این شماره است. این مقاله به مطالبی پرداخته که قابل استفاده دانش‌آموزان سال سوم ریاضی بوده است.

در این شماره، مطالب متنوعی با عنوان **تفریح اندیشه و ادب ریاضی** آمده است که در نوع خود خواندنی هستند. برای مثال در **تفریح اندیشه این معما آمده است:**

احمد، بهرام و کریم سوار دوچرخه‌اند. هر یک سوار دوچرخه دوستش شده و کلاه دوست دیگرش را بر سر نهاده است.

آن‌که کلاه کریم را بر سر دارد دوچرخه بهرام را می‌راند. چه کسی بر دوچرخه احمد سوار است؟

**مسئله مسابقه‌ای** این شماره در مورد هندسه و نوشته **محمدهاشم رستمی** است.

پایان بخش مجله، **مسائل برای حل** است که برای دانش‌آموزان سال‌های اول تا چهارم دبیرستان قابل استفاده خواهد بود.

\*\*\*

اکنون به سراغ شماره دوم این مجله می‌رویم.

در مقاله **شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید** از استاد **پرویز شهریاری** درباره فواید **خاطره‌نویسی** چنین می‌خوانیم:

**خاطره‌نویسی**، علاوه بر آن که ما را وامی‌دارد تا ذهنی کنجکاو و نکته‌سنج و چشمی تیزبین و دقیق داشته باشیم، درباره معنای واقعی هر واژه بیندیشیم، توجه خود را نه به ظاهر پیشامدها و پدیده‌های طبیعی و اجتماعی، بلکه به رابطه متقابل آن‌ها و به ماهیت درونی آن‌ها معطوف کنیم و به ریشه‌ابی استدلالی آن‌ها، به جای روایت ساده و بی‌مضمون بپردازیم و... می‌تواند وظیفه‌ای تاریخی، اجتماعی و میهنی هم به حساب آید.

و در مورد نخستین وظیفه ریاضی‌دان، چنین آمده است که: نخستین وظیفه ریاضی‌دان، ساختن و تحویل دادن چیزی است که شاید امروز کم‌تر کسی طالب آن باشد، یعنی «انسان»؛ انسانی که می‌اندیشد، انسانی که می‌تواند درست را از نادرست تشخیص دهد، انسانی که برایش شناخت و انتشار حقیقت بر خیلی چیزها و مثلاً بر یک تلویزیون دوبعدی برتری دارد؛ انسانی آزاد نه آدم‌واره‌ای آهنی.

در این شماره، مقاله‌ای به نام **تاریخچه مجلات ریاضی در ایران** آمده که نوشته **غلامرضا یاسی پور** است. در این مقاله، این جمله را در مزیت ریاضی و هندسه بر علوم دیگر می‌خوانیم:

چنان که پاسکال می‌گوید «ما بین افکار متساویه آن که استعداد هندسه دارد مطالب را بهتر درک می‌کند.» به همین جهت حکما و فلاسفه قدیم همواره مردم را به آموختن هندسه تحریض و ترغیب می‌کرده‌اند، زیرا می‌دانستند اساس و بنیان هر علم وقتی محکم و محقق می‌شود که مبتنی بر تعاریف و موضوع‌های منطقی باشد و هندسه تنها علمی بوده که در آن زمان به این عنوان شناخته می‌شده است.

در مقاله **منطق جدید و ریاضیات از غلامرضا یاسی پور**، نقل قول زیر از آلونزورچ، منطقی معاصر، آمده است:

به خاطر اجتناب از عدم کفایت‌های زبان‌های طبیعی در اهداف تحلیل منطقی، لازم است زبان طبیعی به نمادی دقیق‌تر ترجمه شود.

مقاله **اتحادهای مثلثاتی، نامساوی‌های مثلثاتی از حمیدرضا امیری**، به ذکر موارد مهم این دو مبحث مثلثاتی پرداخته است. مطالب دیگر در این شماره درباره مسائل برای دانش‌آموزان و حل آن‌هاست.

\*\*\*

در شماره سوم، در مقاله **شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید** از استاد **پرویز شهریاری**، درباره روش **استقرای منطقی** چنین آمده است:

آزمایش و روش استقرایی در دانش‌های تجربی، نقش بزرگی برعهده دارد، ولی در ریاضیات، تنها می‌تواند وسیله‌ای برای حدس

و گمان باشد. برای این که به درستی حکمی قانع شویم، باید با استدلال به آن برسیم. کارهای فرما، اوپلر و دیگران نشان داد که در ریاضیات، نمی توان روش استقرایی را به همان صورت عادی خود، مورد استفاده قرار داد. لازم بود تغییری در این روش داده شود تا بتواند در ریاضیات هم کاربرد داشته باشد. ما امروزه، این روش را می شناسیم: روش استقرای ریاضی. کسانی که بیش از همه برای یافتن این روش تلاش کردند، **بلز پاسکال** (۱۶۲۳-۱۶۶۲)، **رنه دکارت** (۱۵۹۶-۱۶۵۰) و **ژاکوب برنولی** (۱۶۵۴-۱۷۰۵) بودند.

در ادب ریاضی از قول **دکتر غلامحسین مصاحب** از زبان م.ه. نیومن به این مطلب مهم درباره ریاضیات اشاره شده است که: زبان ریاضیات دشوار ولی فناپذیر است. من گمان نمی کنم هیچ یک از محققین کنونی در ادب یونانی بتواند لطایف نهفته در دیالوگ های افلاطون یا طنزهای **آریستوفانس** را بدان تمامی و کمال که یک ریاضی دان هر معنا و مقصودی را در کارهای **ارشمیدس** می فهمد، درک کند.

مقاله **هندسه تحلیلی** این شماره از **محمد عابدی** است و مقاله **تاریخچه مجلات ریاضی ایران** به **مجله ریاضیات دکتر مصاحب** پرداخته که به سال ۱۳۰۹ در تهران به چاپ رسیده است.

مقاله **تصادف هندسی** این شماره از **احمد قندهاری** است. در ادب ریاضی این شماره، تحت عنوان **از سرگذشت هابز چنین** می خوانیم:

پیش از آن که نگاهی به هندسه بیفکنند، که به تصادف اتفاق افتاد، چهل ساله بود. مقدمات اقلیدس بود و در کتابخانه آقایان؛ و در صفحه باز آن قضیه ای را خواند و گفت: قسم به خدا (گه گاه سوگندان غلیظی به طریق تأکید بر زبان می آورد) که غیرممکن است! و برهان آن را، که به قضیه دیگری ارجاعش می داد و آن را هم خواند... تا سرانجام به برهان، حقیقت مطلب را پذیرفت، و به این ترتیب به محبت هندسه گرفتار شد.

در مقاله **قواعد استنتاج** این شماره در باب **تصور و تصدیق** چنین آمده است که:

دو باب اصلی منطق یکی باب تصور است و دیگری باب تصدیق. تصور همان تعریف و تعریف همان قول شارح است و تصدیق همان قضیه و قضیه همان قول جازم یا لفظ مرکب تام خبری، که در منطق ریاضی آن را گزاره می نامند و کل این دو را علم می گویند، چنان که گفته اند:

علم، در صورتی که اقرار به نسبت (بین دو چیز) باشد، تصدیق و گرنه تصور است.

و هر یک را به بدیهی و نظری تقسیم می کنند، چنان که

فرموده اند:

و به ضرورت به دو قسم بدیهی و نظری تقسیم می شود و نظری ملاحظه معلوم برای حصول به مجهول است.

از مقالات دیگر این شماره، مقاله **محاسبه نسبت های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه** از سردبیر مجله است.

در این شماره به دو مقاله با عنوان **مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان و طرح و حل مسائل اساسی ریاضی** به روش های **مقدماتی** از **غلامرضا یاسی پور** برمی خوریم.

**معرفی کتاب های ریاضی** از مطالب تازه و ارزنده این شماره است که در آن به معرفی کتاب های بسیار مفید زیر پرداخته است:

**ورزیدگی در ریاضیات**، ترجمه عبدالحسین مصحفی؛

**نظریه اعداد**، ترجمه اکبر حسنی؛

**ریاضیات مقدماتی**، ترجمه غلامرضا یاسی پور؛

**نابرابری های هندسی**، ترجمه محمد حسن بیژن زاده؛

**همه چیز درباره سه جمله ای درجه دوم**، ترجمه پرویز شهریاری؛

شهریاری؛

**ماشین امیل پست**، ترجمه پرویز شهریاری؛

**مسائل مسابقه ای** این شماره از **سید حسین سید موسوی** است که عبارت اند از:

**ثابت کنید از میان هر ۵ عدد متوالی، عددی وجود دارد که نسبت به چهار عدد دیگر اول است.**

ثابت کنید وارون هر ماتریس بالامتثالی (در صورت وجود) ماتریسی بالامتثالی است.

\*\*\*

در شماره چهارم آقای **سیدحسین سید موسوی** به علت گرفتاری های شخصی از هیئت تحریریه جدا می شود و به جای ایشان، آقای **احمد قندهاری** به هیئت تحریریه می پیوندد.

در این شماره، در ادب ریاضی از قول **برتراند راسل**، منطقی معاصر، درباره **هندسه اقلیدسی** این مطلب جذاب را می خوانیم:

در سن یازده سالگی، اقلیدس را آغاز کردم... این یکی از مهم ترین حادثه های زندگی ام، به خیره کنندگی مهر نخستین بود. تصور نمی کردم که در دنیا چیزی این همه لذت بخش وجود داشته باشد.

در مقاله **تاریخچه مجلات ریاضی ایران**، در بررسی مجله ریاضیات **دکتر مصاحب**، این سخن حکیمانه را از زبان **سعیدی شیرازی** می شنویم:

زمانی درس علم و بحث تنزیل

که باشد نفس انسان را کمالی

زمانی شعر و شطرنج و حکایات



که خاطر را بود دفع ملالی

**اتحادهای مهم جبری** این شماره به قلم **احمد قندهاری** است که در آن به بررسی این میحث مهم ریاضیات مقدماتی پرداخته است. در این شماره مصاحبه‌ای داریم با مرحوم **موسی آذرنوش**، دبیر ارجمند ریاضی. در این مصاحبه از قول استاد آذرنوش چنین آمده است:

در تمام مدت ۴۴ سال تدریس به یاد ندارم یک دقیقه، با صراحت می‌گویم، یک دقیقه تأخیر ورود به کلاس داشته باشم و هیچ‌وقت شاگردان را در زنگ تفریح به دلیل کمبود وقت در کلاس نگه نمی‌داشتم. همواره مطالب را طوری شروع می‌کردم که در اواخر وقت کلاس مطالب درسی نیز پایان می‌یافت و این موضوع مورد تأیید همکاران من نیز بود. به محض این که زنگ کلاس نواخته می‌شد اولین نفری بودم که به کلاس می‌رفتم.

استاد، در پاسخ این سؤال که ریاضی‌دان غیر از ریاضیات باید از چه علمی آگاهی داشته باشد، می‌فرماید:

**تصور می‌کنم یک ریاضی‌دان قبل از تبحر در ریاضیات قطعاً با منطق و فلسفه و ادبیات، خود را آماده درک مطالب ریاضی نموده است.** برای یک ریاضی‌دان دانستن ادبیات برای بیان و تفهیم مطالب ریاضی حتماً ضروری است. مثلاً آقای دکتر مصاحب ریاضی‌دان بود، به دلیل این که در ادبیات نیز دستی قوی داشت بیان و قلمش خیلی نافذ بود و هم‌چنین آقای دکتر هشترودی نیز همین وضع را داشت.

در مقاله **تابع و بررسی خاصیت یک به یکی در انواع توابع از حمیدرضا امیری** چنین می‌خوانیم:

صحبت از تابع است، مفهومی ریاضی که ریاضیات بدون آن هیچ است! مفهومی که حد و پیوستگی آن، مشتق و انتگرال‌گیری از آن کتاب‌های ما را اشباع کرده و ریاضی‌دانان بسیاری را به خود مشغول داشته است؛ مفهومی که توانسته در علوم دیگر همچون فیزیک، مکانیک و کلیه رشته‌های فنی نقش‌های مهم ایفا کند.

در مقاله **مثال‌های هندسی برای تابع‌های گسسته از دکتر احمد شرف‌الدین** به این نکته مهم می‌رسیم که می‌گوید: مثال‌های هندسی در بعضی موارد احکام ریاضی را ملموس و فهم آن‌ها را آسان می‌کنند.

در **ادب ریاضی** این شماره، در مقاله **مدل‌سازی ریاضی چیست؟** این مطلب را می‌خوانیم:

مدل‌سازی ریاضی عبارت از کاربرد مهارت‌های ریاضی در به‌دست آوردن پاسخ‌های مفید به مسائل واقعی است.

یادگیری به کاربردن مهارت‌های ریاضی بسی مشکل‌تر از یادگیری خود ریاضیات است.

مدل‌ها در حوزه بسیار وسیعی از کاربردها به کار می‌روند، به‌طوری که بعضی از آن‌ها در ابتدا نشان نمی‌دهند که طبیعتی ریاضی دارند.

مدل‌ها غالباً سنجش سریع و آسان موارد مختلف را میسر می‌کنند و به جواب‌های بهینه‌ای می‌انجامند که در غیر این صورت واضح نیستند.

در مورد مدل‌سازی ریاضی نه قواعد دقیق و نه پاسخ‌های صحیح، هیچ‌یک موجود نیست.

مدل‌سازی را تنها از راه انجام دادن می‌توان آموخت.

**مقاله اثبات نادرستی و ناتمامی قواعد استنتاج از غلامرضا یاسی‌پور** درباره اثبات نادرستی چنین می‌گوید:

در صورتی که بتوانیم نشان دهیم که تخصیصی از ارزش‌های راستی چنان موجود است که به ازای آن جمیع مقدمات استدلالی راست و نتیجه آن دروغ است، ثابت کرده‌ایم که استدلال مورد بحث نادرست است. این کار را در حالت کلی با استفاده از رسم جدول ارزش انجام می‌دهیم، اما این طریق به‌خصوص در مواردی که تعداد متغیرهای گزاره‌ای موجود در استدلال زیاد باشد، طریقی طولانی و پرهزمت است. در این صورت، اولی چنان است که طریق زیر را، که بسیار ساده‌تر است اما به اندکی تمرکز حواس نیاز دارد، انتخاب کنیم.

در این طریق ابتدا از نتیجه آغاز می‌کنیم و به متغیرهای گزاره‌ای واقع در آن ارزش‌هایی را چنان تخصیص می‌دهیم که آن را دروغ کنند. سپس به سراغ مقدمات می‌رویم و با رعایت ارزش‌های قبلاً داده شده ارزش‌هایی به متغیرهای گزاره‌ای باقی‌مانده چنان تخصیص می‌دهیم که مقدمات را راست کنند. اگر چنین عملی امکان‌پذیر باشد، استدلالمان نادرست است و در غیر این صورت، استدلالمان درست است.

در **مقاله طرح و حل مسائل اساسی ریاضی** به دو مسئله، یکی فرعی و دیگری اصلی، برمی‌خوریم. مسئله فرعی این است: چند جواب درست و مثبت معادله:

$$x+y+z=n$$

در نامساوی  $z \leq x+y$ ،  $y \leq x+z$ ،  $x \leq y+z$  صدق می‌کنند؟

حل این قضیه و صورت مسئله اصلی و حل آن را در همین شماره بخوانید.

**مسئله مسابقه‌ای** این شماره از **محمد هاشم رستمی**، به قرار زیر است:

روی اضلاع مثلث  $ABC$  و در خارج آن سه مثلث متساوی‌الاضلاع می‌سازیم و رأس غیرمشترک هر یک از این مثلث‌ها را به رأس مقابل آن از مثلث  $ABC$  وصل می‌کنیم. ثابت کنید سه خط حاصل متقاربانند.

بررسی تقارن محوری و مرکزی در تابع‌های  $\sin x$  و  $\cos x$ : علی

حسن زاده ماکوئی؛

بسط دوجمله‌ای خیام- نیوتن و تعمیم آن: سید محمدرضا

هاشمی موسوی؛

طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روش‌های مقدماتی؛

مقالاتی از خوانندگان؛

معرفی کتاب‌های ریاضی.

در مقاله در باغ تجربه‌ها، مصاحبه‌ای با آقای یعقوب فرجامی

آمده است. بعضی از فرازهای این مصاحبه به عبارت زیر است:

من، یعقوب فرجامی، متولد ۱۳۴۸ شمسی، اهل یکی از

روستاهای تبریزم. پدرم سواد قرآنی دارد و مادرم اصلاً سواد ندارد.

فرجامی در پاسخ به سؤال «در چه زمانی به ریاضیات علاقه‌مند

شدید؟» می‌گوید:

نمی‌توانم بگویم از چه موقعی به ریاضیات علاقه‌مند شدم، ولی

می‌توانم بگویم در سال اول و دوم نظری ریاضیاتم خیلی بد بود.

از کسینوس فاکتور می‌گرفتم و اصلاً نمی‌دانستم «تعیین علامت»

یعنی چه.

### خصوصیات دبیر ریاضی

۱. آگاهی دبیر از موضوع تدریس باید بسیار بالا باشد.

۲. صبور و با صلاحیت باشد.

بقیه این مصاحبه جالب را می‌توانید در همین شماره برهان

مطالعه کنید.

در مقاله تاریخچه مجلات ریاضی ایران، که در این شماره به

مجله آشتی با ریاضیات پرداخته، در مطلبی با عنوان تعمیم ریاضی

چنین می‌خوانیم:

ریاضی‌دانان داستانی ساخته‌اند، درباره منطق علمی.

ریاضی‌دان می‌گوید: یک فیزیک‌دان یقین می‌کند ۶۰ بر تمامی

عددها بخش‌پذیر است. متوجه می‌شود فرضیه‌اش برای عددهای ۱،

۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ درست است. چند عدد دیگر مانند ۱۰، ۱۵، ۲۰،

۳۰ را که تصادفی انتخاب کرده است، تجربه می‌کند. چون ۶۰ بر

این اعداد هم بخش‌پذیر است، نتیجه می‌گیرد که داده‌های تجربی

کافی است تا فرضیه‌اش ثابت شود.

فیزیک‌دان می‌گوید: پس درباره مهندسان چه می‌گویید؟ یک

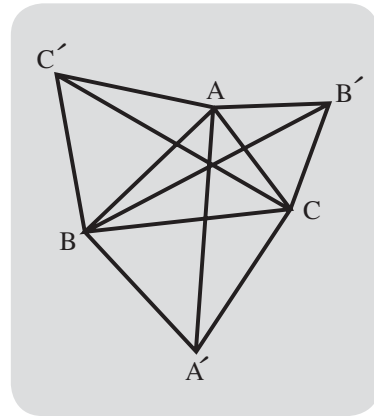
مهندس فکر می‌کند تمام عددهای فرد عدد اول هم هستند. بعد

نوبت ۹ می‌رسد که متأسفانه ۹ عدد اول نیست، ولی ۱۱ و ۱۳ که

بعد می‌آیند باز عددهای اول‌اند. تصمیم می‌گیرد، دوباره به سراغ ۹

برود. کلنجار می‌رود و عاقبت به این نتیجه می‌رسد که ۹ یک اشتباه

آزمایشی است. مهندس می‌گوید: پس پزشکان چی؟ یک پزشک



این مطلب را نیز در ادب ریاضی این شماره، از قول ژرژ پولیا

می‌خوانیم:

فون نویمان تنها شاگردی است که تا به حال مرا تهدید کرده

است. او آدم بسیار سریع‌الانتقالی بود. زمانی در زوریخ برای شاگردان

زده سمیناری برپا شده بود که من در آن درس می‌دادم و فون

نویمان هم در آن شرکت می‌کرد. من قضیه خاصی را بیان کردم و بعد

گفتم که این قضیه تا به حال ثابت نشده و ممکن است اثباتش خیلی

مشکل باشد. فون نویمان چیزی نگفت، اما پنج دقیقه بعد دستش را

بالا برد. وقتی به او اجازه صحبت دادم پای تخته سیاه آمد و اثبات

قضیه را نوشت. از آن موقع به بعد من از فون نویمان می‌ترسیدم.

\*\*\*

دومین سال انتشار مجله برهان با زمستان ۱۳۷۱ آغاز

می‌شود.

در مقاله شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید از

استاد پرویز شهریاری، درباره فایده تاریخ ریاضیات، به این سخنان

برمی‌خوریم:

تاریخ ریاضیات چه فایده‌ای دارد؟ تاریخ ریاضیات به ما می‌آموزد

که ریاضیات، دانشی زنده و پویاست و بدون این که گذشته خود را

نفی کند، همیشه به سمت دقت و کارایی بیشتر پیش رفته است.

مقالات دیگر این شماره عبارت‌اند از:

نکاتی درباره توابع متناوب یا توابع دوره‌ای: احمد قندهاری؛

آموزش ترجمه متون ریاضی: غلامرضا یاسی‌پور؛

در حاشیه مجموعه‌ها: حمیدرضا امیری؛

قانون اثبات شرطی: غلامرضا یاسی‌پور؛

تاریخچه مجلات ریاضی ایران: غلامرضا یاسی‌پور؛

مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان؛

در باغ تجربه‌ها: مصاحبه با یعقوب فرجامی، دانشجوی

فوق لیسانس رشته ریاضی؛

یادی از استاد ضیاء هشترودی: دکتر احمد شرف‌الدین؛

برای بیماری که مسمومیت خونی دارد و هیچ امیدی به نجاتش نیست شورا تجویز می‌کند. بیمار تصادفی شورا می‌خورد و معالجه می‌شود. پزشک می‌نشیند یک کتاب علمی می‌نویسد و در آن اعلام می‌کند شورا مسمومیت خونی را رفع می‌کند. بعد یک بیمار دیگر باز مسمومیت خونی دارد، پیشش می‌آید و پزشک ما باز شورا تجویز می‌کند. بیمار شورا می‌خورد و می‌میرد. آن وقت پزشک کتابش را تصحیح می‌کند و این طور می‌نویسد که شورا فقط در ۵۰ درصد موارد مسمومیت خونی را برطرف می‌کند.

پزشک می‌گوید: پس خود ریاضی‌دان چه طور؟ وقتی از او بپرسید: چه طور می‌شود یک شیر را در بیابان به دام انداخت؟ می‌گوید: «به دام انداختن یعنی چه؟ بنابر تعریف، اصولاً شیر باید پشت میله‌های قفس باشد. پس کافی است شکارچی این طرف میله‌ها باشد تا شیر در قفس بماند.»

\*\*\*

در شماره ۶ مطلبی می‌خوانیم از **عین‌القضات همدانی** در باب وظیفه انسان راستین که همان جست‌وجوی حقیقت است: «... چندین هزار جنازه که به گورستان برند، یکی از اینان به شک نرسیده بود؛ و از چندین هزار به شک رسیده، یکی را گرفتاری طلب نبود؛ و چندین هزار را درد طلب بگیرد و یکی به راه راست نیفتد...»

باز در ادامه این مقاله از این موضوع آگاه می‌شویم که: اگر «شک» نبود، ریاضیات در همان مرحله‌های نخستین خود منجمد می‌شد و البته، نه تنها ریاضیات، که معرفت و فرهنگ آدمی رشد نمی‌کرد و در همان شرایط ابتدایی خود باقی می‌ماند. در مقاله **برهان خلف** این شماره در تعریف این برهان، چنین آمده است:

روش اثبات غیرمستقیم که آن را برهان خلف نیز می‌نامند برای جمیع کسانی که هندسه مقدماتی خوانده‌اند آشناست. اقلیدس در استخراج قضایایش، غالباً کار را با فرض مقابل چیزی که می‌خواهد آن را ثابت کند، آغاز می‌کند؛ در این صورت اگر فرض مزبور به کاذبی منجر شود، باید دروغ باشد و بنابراین نقیض آن، یعنی قضیه مورد اثبات باید راست باشد.

اثبات غیرمستقیم، درستی استدلالی مفروض را، با فرض نقیض نتیجه‌اش، به‌عنوان مقدمه‌ای اضافی و بعد استخراج کاذبی آشکار از مجموعه فزوده مقدمات مزبور، بنا می‌کند.

این شماره مقاله **تاریخچه مجلات ریاضی ایران** را نیز دارد. در این مقاله، مطلبی درباره تقلید آمده است که خواندنی است: بیرونی، تقلید را در مسائل علمی ابداً جایز نمی‌داند و از این که **ابن سینا** با وجود نبوغ ذاتی و هوش سرشاری که دارد، یکسره و

دریست در اختیار ارسطو قرار گرفته است و کلمات او را [بلا تشبیه] به‌عنوان وحی منزل تلقی می‌کند، سخت ناراحت است. وی ارسطو را دانایی می‌داند که افکار و اندیشه‌های بشری را از جولان بازمی‌دارد، دهنه می‌زند و کنترل می‌کند. آن چه هست تثبیت می‌کند و برای وضع موجود حصار و قلعه استوار می‌سازد و این همان قلعه‌ای است که ابن‌سینا خواسته یا ناخواسته در آن واقع می‌شود و عنکبوت‌آسا به دور خود می‌تند. لاجرم حقایق را آن طور که هست در نمی‌یابد.

در **ادب ریاضی** این شماره، قولی می‌خوانیم از **فلیکس بلوخ** درباره **هایزبرگ**:

... یک روز داشتیم با هایزبرگ قدم می‌زدیم که صحبت‌هایمان به مفهوم فضا کشیده شد. من که همان روزها تازه کتاب «فضا، زمان، ماده» اثر ویل را خوانده بودم بادی به غبغب انداختم و کاملاً تحت تأثیر این کتاب با تبختر گفتم: «فضا میدان عملگردهای خطی است.»

هایزبرگ با خونسردی گفت: «چرند می‌گویی: فضا آبی است و پرندگان در آن پرواز می‌کنند.»

این شماره مقاله‌ای دارد از **سید حسین سید موسوی** درباره استفاده از تست‌های کنکور. قسمتی از این مقاله به صورت زیر است:

انبوه داوطلبان ورود به دانشگاه‌ها و از سوی دیگر اضطراب آن‌ها، گروه‌های مختلفی را وسوسه کرده که از این خوان گسترده بهره‌ای ببرند. از جمله، کسانی تست‌های کنکور سال‌های پیش را با جواب در جزواتی تحت عناوین ۲۰ سال کنکور و نظایر آن با کیفیتی بسیار نازل و با چاپی از نوع پلی‌کپی در اختیار داوطلبان می‌گذاشتند که اغلب نه تنها پاسخ‌سؤالات، بلکه خود سؤالات نیز اشتباه بود، که جز گمراهی خوانندگان چیزی نصیب آن‌ها نمی‌کرد.

پاره‌ای از مقاله‌های دیگر این شماره چنین‌اند: **توابع پوشا: حمیدرضا امیری؛**

**مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان: نغمه شریک‌زاده؛**

**مسائل برای حل دانش‌آموزان: دکتر احمد شرف‌الدین؛**  
**طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روش‌های مقدماتی: غلامرضا یاسی‌پور؛**

**تناقض‌ها در ریاضیات و علوم: حسن نصیرنیا؛**  
**مقاله معرفی کتاب این شماره به معرفی فصل‌نامه مجموعه پرداخته و در ضمن معرفی آورده است که:**

**مجموعه**، همان طور که از نام آن برمی‌آید، مجموعه‌ای از مقالات و مسائل ریاضی است. در این شماره مقالات زیر را می‌خوانیم: **نظریه بازی‌ها؛ ابن‌هیثم، ریاضی‌دان مسلمان؛ اثبات نامساوی‌ها، نیوتون و اندیشه ریاضی زمان ما؛ توابع و نمودارهای آن‌ها؛ تکمیل**



مطالب کتاب‌های درسی؛ منطق و زبان؛ مثلثات؛ معرفی کتاب من ریاضی دانم (سرگذشت سبیر نیک)؛ نظریه گراف‌ها؛ مسائل؛ فرهنگ ریاضیات؛ هندسه تصویری؛ هندسه فضایی؛ مصاحبه با استاد پرویز شهریاری.

\*\*\*

به شماره ۷ مجله رسیده‌ایم. در این شماره نیز مقاله شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید هم‌چنان برقرار است. در این مقاله درباره شک و تردید چنین آمده است:

شک نسبت به درستی عمل و داوری خود، به این معنا است که وقتی قضیه‌ای را ثابت می‌کنیم یا وقتی مسئله‌ای را حل می‌کنیم، دائماً از خود بپرسیم: «آیا عمل‌ها را درست انجام داده‌ایم؟»، «آیا با استدلالی منطقی و قانع‌کننده پیش رفته‌ایم؟»، «آیا تعریف، مفهوم یا قضیه‌ای که مورد استفاده قرار داده‌ایم، به‌واقع در این جا کاربرد دارد؟»، «آیا همه فرض‌های مسئله را در نظر گرفته‌ایم؟»، «بر کدام قضیه‌ها یا فرمول‌ها تکیه کرده‌ایم، آیا اثبات ریاضی آن‌ها را می‌دانیم؟»، «آیا شکل، ما را فریب نداده است؟»؛ و در یک کلام، همه عمل‌ها و داوری‌های خود را جزء به جزء بشکافیم و دست‌کم، خودمان، نسبت به درستی آن‌ها و درستی مفهوم‌ها و قضیه‌های مورد استنادمان، قانع شویم.

در ادب ریاضی این شماره از قول کانت، فیلسوف آلمانی، به این نکته مهم اشاره شده است.

کانت می‌گوید که هیچ چیز در حقیقت فضایی نیست و ظاهر فضایی اشیاء فقط چیزی است که در مغز ما نمایان می‌شود. اما علم وظیفه دارد جهان را به صورتی که برای ما ظاهر می‌شود

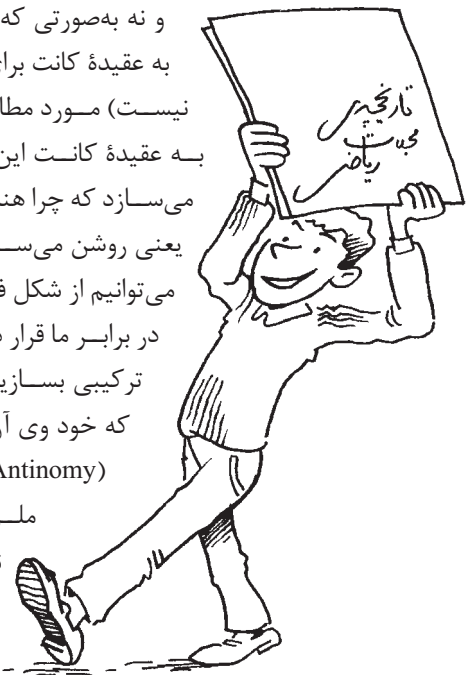
و نه به صورتی که حقیقت دارد (و به عقیده کانت برای ما شناختنی نیست) مورد مطالعه قرار دهد. به عقیده کانت این فرضیه روشن می‌سازد که چرا هندسه علم است، یعنی روشن می‌سازد که چگونه ما می‌توانیم از شکل فضایی جهانی که در برابر ما قرار دارد، یک معرفت ترکیبی بسازیم. برخی تضادها که خود وی آن‌ها را آنتی‌نومی (Antinomy) می‌نامد او را

ملزم به قبول این

نتایج می‌سازد.

مقاله دیگر

این شماره در



مورد اثبات شرطی است. در مقاله تاریخچه مجلات ریاضی ایران این شماره، که درباره مجله آستی با ریاضیات به سردبیری استاد پرویز شهریاری است، مطلبی می‌خوانیم در مورد تدریس ریاضیات و تلاش برای بهتر کردن آن:

معلم باید پیش از آغاز کلاس‌ها به محتوای درس فکر کند و آن را با مطالبی اضافی از کتاب‌های جنبی و مرجع و نکات تاریخی و کاربردهای جالب بیاراید.

باید در جلسه اول عنوان و موضوع درس را اعلام و یادآوری کند که برای یاد گرفتن آن درس به چه آگاهی‌هایی نیاز است. روی تخته سیاه نام خود و ساعتی را که در دفتر خواهد بود، بنویسد.

روش خود را در مورد تکلیف شب، امتحانات و نمره دادن توضیح دهد.

هدف‌های کلاس را تشریح کند و راجع به یادداشت برداشتن و اندازه آن و زمان‌های مناسب آن توضیح دهد. جای شاگردان را بداند و تکلیف شب آن‌ها را شخصاً و یکی یکی به آن‌ها بازگرداند. هنگامی که مطلبی برای کلاس آماده می‌کند به چند بخش بعدی هم نگاهی بیندازد و کوشش داشته باشد که هر کلاس را با مطالبی شروع کند که دانشجویان با آن‌ها آشنایی دارند و یک‌مرتبه داخل مطالب تازه نشود.

زیاد بپرسد و از دانشجویان مختلف بپرسد و حتی الامکان از سخنرانی‌های طولانی خودداری کند. به موقع سر کلاس بیاید، در کلاس به چشم دانشجویان نگاه کند و برای در و دیوار درس ندهد. روشن و شمرده و با صدای بلند صحبت کند. صدایش یکنواخت نباشد و در ضمن صحبت مواظب تغییر چهره دانشجویان باشد. به دانشجو فرصت فکر کردن بدهد، به عبارت دیگر تمام وقت کلاس را با گفتن و شنیدن نگذراند. دانشجو را تشویق به پرسیدن کند. چون سؤالی مطرح شود ابتدا اطمینان حاصل کند که همه آن را شنیده‌اند و بعد به جواب آن بپردازد. حدس زدن را تشویق کند و سؤال‌های بد و جواب‌های نادرست را به مسخره نگیرد.

در این شماره، راه حل مسئله مالغاتی ارائه شده است. صورت این مسئله چنین است: رسم سه دایره در مثلثی معلوم، چنان که هریک از آن‌ها به دو دایره دیگر و دو ضلع مثلث مماس باشد.

مسائل مسابقه‌ای این شماره از آقای محمد هاشم رستمی است. صورت یکی از این مسائل به ترتیب زیر است:

مرکز دایره‌ای بر ضلع AB از چهار ضلعی محاطی ABCD قرار دارد. سه ضلع دیگر چهار ضلعی بر این دایره مماس‌اند. ثابت کنید که:

$$AD+BC=AB$$

خودخواه و مستبد بود.

پدرم با کار زراعت به کلی بیگانه بود. کوره سوادى داشت، آن قدر که بتواند بخواند و بنویسد. با وساطت تنى چند از خویشاوندان متنفد، به خصوص پدر بزرگم، توانست در دایره «مياه» وابسته به دارایی سنگسر (یا دوشنبه بازار، بازار روز دهات اطراف) استخدام شود. کارش توزیع آب به شالیزارهای حوالی یکی از شاخه‌های سفیدرود (از امامزاده هاشم تا آستانه اشرفیه) بود.

در آن سال‌هایی که آب سفیدرود نقصان پیدا کرده بود و شالیزارها با خطر کم‌آبی مواجه بودند، دهقانان بر سر تقسیم آب با داس و بیل به جان هم می‌افتادند و خون‌ها می‌ریختند. در یکی از این دعوها، پدرم از اسب سقوط کرد و استخوان پایش شکست. مدت‌ها قادر به حرکت نبود و خانه‌نشین شد. هر چند روز یک‌بار، برای پانسمان (خروج چرک) و مداوای جراحات، فتیله می‌گذاشتند. چون رفت و آمد شکسته‌بند از رشت به جوبنه مستلزم پرداخت مخارج گزافی بود، با تقاضای پدرم مبنی بر انتقال به رشت موافقت شد و ما به رشت کوچ کردیم.

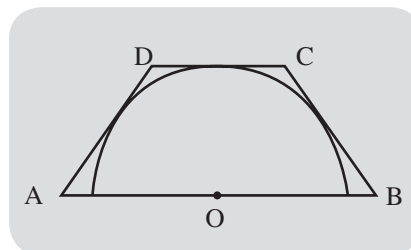
مادر، دو خواهر دیگر را به مکتب (ملاخانه)‌ای که در جوار خانه ما بود فرستاد و خواهرانم، مرا هم با خود به ملاخانه می‌بردند. به این ترتیب از سن چهار سالگی پایم به مکتب‌خانه باز و گوشم با آیات قرآن آشنا شد. کلماتی را می‌شنیدم که بر اثر تکرار، ناخواسته در ذهنم نقش می‌بست. «ملا ربابه» مدیره مکتب، شخصاً عهده‌دار تدریس من شد و در اندک مدتی خواندن و نوشتن را به من آموخت.

در آن زمان، غرض از باسواد کردن فرزندان در درجه اول، آشنایی آن‌ها با قرائت قرآن بود تا شب‌های جمعه برای آموزش روح اموات، چند سوره‌ای بخوانند و فاتحه بدهند.

در مکتب، دیوان اشعار جودی، محزون و جوهری را که در رثای ائمه بود، می‌خواندیم و از روی آن می‌نوشتیم، ولی از حساب، حتی عددنویسی، مطلقاً خبری نبود.

اواسط بهار ۱۳۰۷ شمسی، پدرم دست مرا گرفت و به «مدرسه مبارکه اسلامی» برد مدیر مدرسه شخصاً از من امتحانی به عمل آورد و نامم را در کلاس اول دبستان ثبت کرد. یکی دو هفته بعد، امتحانات آخر سال فرارسید. با شاگردان کلاس امتحان دادم و به کلاس بالاتر رفتم.

به جز درس حساب، من در سایر دروسم موفق بودم. درحالی‌که بچه‌ها به سهولت اعداد را جمع و تفریق می‌کردند، من اعداد را نمی‌شناختم. بالاخره شد، آن‌چه انتظارش را می‌کشیدم و از آن وحشت داشتم. آموزگار کلاس در منتهای ناباوری وقتی یقین حاصل کرد که من قادر به نوشتن اعداد نیستم، با همان چوب



بعضی از مقالات دیگر این شماره عبارت‌اند از:

دیفرانسیل و انتگرال: احمد قندهاری؛

آموزش ترجمه متون ریاضی: حمیدرضا امیری؛

تعیین دامنه و برد توابع: سید محمدرضا هاشمی موسوی؛

مفهوم‌های اصلی و اصل موضوع‌ها در هندسه فضایی: پرویز

شهریاری؛

عمود مشترک دو خط متناظر: محمد ابراهیم گیتی‌زاده.

\*\*\*

شماره ۸ این مجله مربوط به پاییز ۱۳۷۲ است. بهای این

شماره ۱۰۰۰ ریال تعیین شده است.

در این شماره نیز مقاله شما هم می‌توانید در درس ریاضی

خود موفق باشید هم‌چنان حضور دارد. در این مقاله به نکات جالبی از جمله نکته زیر اشاره شده است:

۱. حقیقت این است که همه چیز را نمی‌توان در کتاب درسی یا کتاب‌های دیگر پیدا کرد. گذشته از این، ضمن پرسش‌های دانش‌آموزان یا بیان‌های درست و نادرستی که از زبان دانش‌آموزان مختلف جاری می‌شود، خیلی چیزها می‌توان آموخت.

۲. هنوز عادت نشده است که معلمان و نویسندگان کتاب‌های درسی یا کمک‌درسی، سعی کنند همه تجربه‌های دوران طولانی کار خود را روی کاغذ بیاورند و در اختیار ما بگذارند.

در مقاله در باغ تجربه‌های این شماره مصاحبه‌ای آمده با استاد بهنیا، دبیر ریاضی برجسته ایران.

در این مصاحبه آقای بهنیا می‌گوید:

زادگاهم «جوئنه»، دهی است در ۱۵ کیلومتری شهر رشت. در یک روز سرد زمستان سال ۱۲۹۹ هجری شمسی که برف، ده را سفیدپوش کرده بود، در یک کلبه روستایی به دنیا آمدم. مادرم، که گویا از قبل اندیشیده بود، در همان لحظه‌های اولیه حیاتم، نامم را «غلامرضا» به معنای واقعی کلمه (غلام رضا) گذاشت تا امام هشتم مرا از جمیع بلاها حفظ کند. پدر بزرگ (پدری‌ام) دهقان مرفه‌الحالی بود، به طوری که هر چند سال یک‌بار، پس از برداشت محصول به زیارت مشهد می‌رفت. مادربزرگم شیرزنی بود کاردان، که نه تنها بر جمیع کارهای خانه، بلکه به امور زراعتی هم نظارت می‌کرد.

روش برهان خلف: غلامرضا یاسی پور؛  
پارادوکس وصیت شگفت‌انگیز: حسن نصیرنیا؛  
تحقیقی پیرامون عدد  $\pi$ : احسان رضایی.

\* \* \*

در این شماره (شماره ۹) نیز مقاله شما هم می‌توانید در  
درس ریاضی خود موفق باشید، هم‌چنان در آغاز راه است و شما  
می‌توانید به خود آن مقاله مراجعه کنید.

مقاله مکان هندسی محمدهاشم رستمی نیز خواندنی است.

در این مقاله در مورد اهمیت مکان هندسی چنین آمده است:

مکان‌های هندسی علاوه بر آن که خود شامل قضایا و مسائل  
جالبی هستند، در دیگر بخش‌های هندسه نیز کاربردهای فراوانی  
دارند؛ از جمله، مکان‌های هندسی از ابزارهای مفید و مؤثر برای  
حل مسئله‌های ترسیم هندسی یا ساختمان‌های هندسی است.

عده‌ای ساختمان‌های هندسی یا ترسیم‌های هندسی را عنصر  
اصلی آموزش ریاضی و وسیله‌ای نیرومند و قوی برای پرورش  
استعدادها در زمینه هندسه و به‌طور کلی ریاضی می‌دانند، که این  
مطلب خود، اهمیت مکان‌های هندسی را بیش‌تر نمایان می‌کند.

**تاریخچه مجلات ریاضی در ایران** را در این شماره ملاحظه  
می‌کنیم. در این مقاله به مقاله‌ای از مجله آشنتی با ریاضیات  
اشاره شده که با عنوان **ریاضیات مرز سودمند بودن را**  
**مشخص می‌کند**، مطرح شده است. قسمتی از این مقاله را با هم  
می‌خوانیم:

هندسه دبیرستان حتی از ساده‌ترین چیزها، مثل مثلث و دایره،  
چنان شبکه به‌هم‌بافته‌ای از قضیه‌ها ایجاد می‌کند که به سختی



می‌توانید از آن خلاص شوید و این  
بیش‌تر به خاطر آن است که شما  
بدانید با چه موضوعی سروکار دارید  
و این را فایده آن می‌دانند. ولی در  
مورد «سودمند بودن» چه می‌توان  
گفت؟ «سودمندی» مفهومی کاملاً  
انتزاعی است و راه‌حلی را می‌پذیرد  
که کشش به سمت حداکثر  
رضایت را به‌وجود آورد.

کذایی چنان ضربه‌ای به پشت‌م زد که بی‌هوش نقش زمین شدم و  
وقتی به اطلاع ایشان رسید که من شاگرد تازه‌واردم، از کرده خود  
پشیمان شد و پس از استمالت و دلجویی، از من خواست که به پدر  
و مادرم چیزی نگویم. ضمناً به پرویز، هم‌کلاسی‌ام، دستور داد که  
در ساعات تفریح عددنویسی و جمع و تفریق اعداد را به من بیاموزد  
و خود هر روز بر کار ما نظارت می‌کرد. این همکاری دو سه هفته  
ادامه یافت و من به کلاس رسیدم.

مابقی این مصاحبه جالب را می‌توانید در همین شماره  
بخوانید.

این شماره نیز مقاله **تاریخچه مجلات ریاضی ایران** را  
دربردارد. یکی از مطالب جالب این مقاله، مطلبی است که درباره  
الگوریتم آمده و قسمتی از آن به صورت زیر است:

الگوریتم، یکی از اساسی‌ترین مفهومی‌های ریاضیات است که  
با کمک مفهوم‌های ساده‌تر از خودش تعریف رسمی ندارد. به‌طور  
کلی، الگوریتم به هر دستور دقیق و روشنی گفته می‌شود که  
یک روند محاسبه‌ای را (که در این حالت، روند الگوریتمی نامیده  
می‌شود)، بر مبنای داده‌های اولیه، در پی داشته باشد (و البته این  
داده‌های اولیه، باید برای الگوریتم مورد نظر، ممکن باشد) و سپس  
ما را به نتیجه کاملاً معینی برساند. در این مورد، محتوای هر دستور  
به‌جز دستورالعملی که برای مشخص کردن روند الگوریتمی به‌همراه  
دارد، باید دارای این ویژگی‌ها هم باشد: ۱) مجموعه ممکن را برای  
داده‌های اولیه نشان دهد و ۲) شامل قانونی باشد که بنابر آن، روند  
کار به‌صورت به‌دست آوردن نتیجه به پایان برسد.

باز، در ادب ریاضی این شماره از قول نیوتن از کتاب  
**ریاضی‌دانان نامی** چنین آمده است:

من نمی‌دانم به چه صورتی ممکن است در نظر جهانیان  
جلوه‌گر شوم، اما به نظر خودم چنین می‌آید که همچون  
کودک خردسالی هستم که در ساحل زیبای دریا به بازی  
مشغولم و گاه‌وبی‌گاه سنگ‌ریزه‌ای صاف‌تر از سنگ‌های  
دیگر یا صدفی زیباتر از صدف‌های دیگر به دست می‌آورم،  
در حالی که اقیانوس عظیم حقیقت در مقابل من گسترده  
است و مرا بر آن آگاهی نیست.

**مسائل مسابقه‌ای** این شماره از سید محمدرضا هاشمی  
**موسوی** است. یکی از مسائل به‌صورت زیر است:

ثابت کنید اگر به حاصل‌ضرب هر چهار عدد که به‌صورت تصاعد  
حسابی با قدر نسبت  $d$  هستند مقدار  $d^4$  را اضافه کنیم، حاصل  
همواره یک مربع کامل می‌شود.

بعضی مقالات دیگر این شماره عبارت است از:

فاصله یک نقطه از یک مجموعه نقاط: دکتر احمد شرف‌الدین؛



# مسئله‌های باز کردن گاوصندوق

ترجمه و تألیف: هوشنگ شرقی

می‌چرخانید، همهٔ کلیدهایی که در سطر یا ستون این کلید قرار داشته باشند، می‌چرخند و تغییر حالت می‌دهند و شما می‌توانید یک کلید را هر چند بار که بخواهید بچرخانید.

الف) اگر وضعیت شکل ۱ در زیر برای این کلیدها داده شده باشد، حداقل تعداد کلیدهایی که برای باز شدن گاوصندوق باید

چرخانده شوند چندتا است؟ چه کلیدهایی باید بچرخند؟

ب) اگر شما مجاز به چرخاندن حداکثر ۲۰۰۲ بار کلید باشید، بزرگ‌ترین صفحه کلید  $2n \times 2n$  یک گاوصندوق که همیشه می‌توانید آن را باز کنید، کدام است؟

برای آن که به‌طور کامل رعایت امانت‌داری را کرده باشیم، ابتدا یادآور می‌شوم که منبع اصلی این مقاله، مسئله‌ای است که نخستین بار در مسابقهٔ ریاضی نیومکزیکو (دور نهایی سال ۲۰۰۲) برای دانش‌آموزان دبیرستان طرح شده بود. صورت این مسئله بسیار زیبا و شگفت‌انگیز چنین است:

یک گاوصندوق با یک قفل شامل یک جدول  $4 \times 4$  از کلیدها داده شده است. هریک از این ۱۶ کلید می‌توانند در یکی از دو وضع (حالت) افقی یا قائم باشند. برای باز شدن گاوصندوق، همهٔ کلیدها باید در وضعیت قائم (عمودی) قرار بگیرند. وقتی شما یک کلید را



مسئله این راه حل همیشه جوابگو نیست و باید راه حلی کلی برای این مسئله پیدا کنیم. هدف از پاسخ گویی به این مسئله خاص، همان گونه که ذکر شد، ورود به مسئله است.

\*\*\*

روشن است که اگر یک کلید را دو بار در جای خود بچرخانیم به وضع اولیه خود بازمی گردد. بنابراین چرخاندن یک کلید به تعداد زوج بار معادل با نچرخاندن آن است و چرخاندن آن به تعداد فرد بار، معادل یک بار چرخاندن آن است. هم چنین بدیهی است که ترتیب چرخاندن کلیدها در یک رشته چرخش کلیدها به دنبال هم بی تأثیر است.

(یعنی برای مثال در این مورد، چرخش bk و چرخش kb یک نتیجه می دهند یا چرخش های abc و cba و bac و ... یک نتیجه دارد).

حال به مسئله خودمان برگردیم. اگر می توانستیم یک کلید را بچرخانیم و این چرخش هیچ یک از کلیدهای دیگر سطر و ستون آن کلید را (به جز خودش) تغییر حالت ندهند، کار تمام بود، یعنی همه کلیدهای افقی را عمودی می کردیم و کار تمام می شد!

اما مسئله ما همین است. چه مکانیزمی وجود دارد که براساس آن بتوان فقط یک کلید را تغییر حالت داد؟ راه حل مسئله این است که همه کلیدهای موجود در آن ردیف و ستون را بچرخانیم. چرا چنین است؟ به همان صفحه کلید 4x4 خودمان نگاه کنیم. اگر کلیدهای مربوط به سطر و ستون a را بچرخانیم، کلید a هفت بار می چرخد (یک بار با لمس دست و شش بار دیگر به طور خودکار و هنگام چرخش شش کلید موجود در سطر و ستون آن). کلیدهای دیگر این رشته چه طور؟

روشن است که هریک از آن ها چهار بار می چرخند (یک بار با لمس دست و سه بار دیگر با چرخش سه کلید دیگر که در سطر یک ستون مربوط به آن ها می چرخند).

اما بقیه 9 کلید که در این رشته کلیدها (abcdeim) جای ندارند چه طور؟ هریک از آن ها در تقاطع یک سطر و یک ستون از کلیدهای این رشته قرار دارند. (برای مثال، کلید j در تقاطع سطر کلید i و ستون کلید ما است) پس با چرخش این دو کلید آن ها هم دو بار می چرخند، پس هریک از این 9 کلید در این فرایند دو بار

—	—		—
	—	—	
—		—	—
	—	—	

شکل ۱

سعی کنید پیش از حل مسئله به شرایط گفته شده خوب فکر کنید و به ویژه به این موضوع توجه کنید که با چرخش هر کلید، شش کلید دیگر بدون این که به آن ها دست بزنید، می چرخند و تغییر حالت می دهند و هر کلید فقط در یکی از دو وضع عمودی یا افقی می تواند قرار بگیرد. به این صفحه کلید به مانند یک ماتریس مربعی 4x4 نگاه کنید. برای مثال اگر کلید واقع در سطر دوم و ستون سوم را بچرخانید و از حالت افقی، آن را به حالت عمودی تغییر حالت دهید، همه سه کلید دیگر در سطر دوم و نیز کلیدهای ستون سوم، تغییر حالت می دهند و از افقی به قائم یا برعکس تغییر می کنند. پس با این توضیح می بینید که کار ما قدری مشکل می شود و عمودی کردن همه کلیدها کاری آسان نیست. قدری فکر کنید.

\*\*\*

برای شروع چه طور است پاسخ مسئله را بدهیم؟ (دیگر چه چیزی باقی می ماند؟! البته این را محض شوخی گفتیم. حتماً می دانید که یک دانش پژوه و دانش دوست واقعی پیش از آن که به دنبال پاسخ مسئله یا حتی راه حل آن باشد، به دنبال ایده مسئله است تا اگر صورت مسئله تغییر کرد باز هم بتواند آن را حل کند و به پاسخ برسد. علاوه بر آن، قسمت «ب» مسئله هم هست و پاسخ به آن نیازمند کشف ایده کامل مسئله است. در واقع می خواهیم با دادن پاسخ مسئله وارد مسئله شویم

مطابق دیاگرام زیر کلیدها را نام گذاری می کنیم: a و b و c و ... و p. جواب مسئله را می توانید در زیر ببینید. کافی است دو کلید b و k را به دنبال هم بچرخانیم.

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

b →

		—	
		—	
—	—	—	—
		—	

k →


شکل ۲



البته نوشتن آن کار دشواری نیست، ولی بدون آن هم می‌توانیم پاسخ این سؤال را بدهیم. کافی است توجه کنیم که مثلاً کلید a در سطر یا ستون چند کلید افقی قرار دارد (و برای تغییر حالت آن‌ها باید چرخانده شود). با کمی دقت درمی‌یابیم که برای تغییر حالت کلیدهای افقی a و b و d و i، باید کلید a چرخانده شود، پس در رشته فوق کلید a، ۴ بار ظاهر می‌شود و به همین ترتیب کلید b، ۵ بار و کلید c ۶ بار و کلید d، ۴ بار و... به شکل‌های زیر توجه کنید:

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

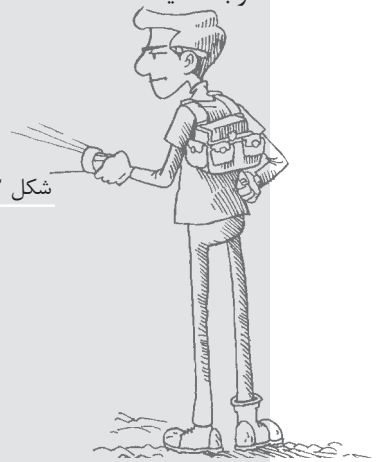
—	—		—
	—	—	
—		—	—
	—	—	

۴	۵	۶	۴
۴	۴	۴	۴
۴	۶	۵	۴
۴	۴	۴	۴

شکل ۵

عددهای داخل هر مربع جدول بالا معرف تعداد چرخش‌های هریک از کلیدها و مجموع این عددها مساوی ۷۰ است. با توجه به عددهای فوق، بدیهی است که چرخش‌های زوج بی‌تأثیرند و چرخش‌های فرد نیز معادل یک‌بار چرخش‌اند. پس کلیدهای a، c، d، e، f، g، h، i، j، k، m، n، o و p هیچ نقشی در فرایند باز شدن گاو صندوق ندارند و لذا فقط کافی است کلیدهای b و k را بچرخانیم تا همین نتیجه عاید ما شود! (زیرا کلیدهای b و k هریک پنج‌بار چرخیده‌اند که معادل با یک‌بار چرخش آن‌هاست). پس با این فرایند همه کلیدهای افقی به کلیدهای عمودی تغییر حالت می‌دهند و کار تمام است. بنابراین، ایده

می‌چرخند. به شکل‌های زیر توجه کنید:



a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

شکل ۳

۷	۴	۴	۴
۴	۲	۲	۲
۴	۲	۲	۲
۴	۲	۲	۲

شکل ۴

بنابراین، مطابق آن چه گفته شد، همه کلیدها (به‌غیر از a) که زوج‌بار می‌چرخند به وضع اولیه خود برمی‌گردند و فقط کلید a تغییر حالت می‌دهد. اکنون یک راه‌حل ساده پیدا شده است. برای چرخاندن هر کلید بدون آن که کلیدهای دیگر بچرخند، کافی است همه کلیدهای موجود در سطر و ستون آن کلید و خود آن کلید (یعنی هفت کلید) را به‌دنبال هم (به ترتیب دلخواه) چرخاند. نتیجه نهایی این فرایند، چرخش همان یک کلید از حالت عمودی به افقی (یا برعکس) است و سایر کلیدها تغییر وضع نمی‌دهند. پس کافی است همه کلیدهای افقی را به این ترتیب تغییر حالت دهیم و کار تمام می‌شود. اما در این روش برای حل مسئله «الف»، نیاز به هفتاد بار چرخاندن کلیدها داریم! (برای تغییر حالت هر کلید افقی نیاز به چرخاندن هفت کلید داریم و چون ده کلید افقی داریم، پس به هفتاد بار چرخش کلید نیاز داریم).

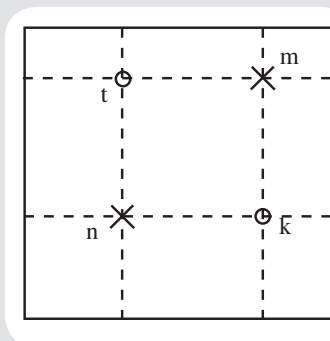
ولی به‌هرحال مسئله ما را حل می‌کند. اما چگونه می‌توانیم تعداد چرخش‌های کلیدها را تقلیل دهیم؟

بیاییم یک‌بار دیگر به مسئله اصلی خودمان نگاه کنیم. دیدیم که برای تغییر حالت ده کلید افقی، باید هفتاد بار کلیدها را با لمس بچرخانیم. (توجه کنید که این غیر از چرخش‌های خودبه‌خود کلیدها در اثر چرخش کلیدهای دیگر است) رشته شامل ای هفتاد بار چرخش را در نظر بگیرید. مثلاً برای تغییر حالت کلید a، رشته abcdeim را باید بچرخانیم و... این دنباله هفتاد جمله‌ای شامل چند حرف a است؟ چند حرف b؟ و...

آیا برای پاسخ به این سؤال باید همه این هفتاد جمله را نوشت؟

در هیچ سطر و هیچ ستون مربوط به کلید اصلی نباشد، یک سطر و یک ستون دیگر را عوض می‌کند. محل تقاطع این سطر و ستون را با سطر و ستون کلید اصلی در نظر بگیرید که دو کلید است (شکل ۶ را ببینید). هر دو این کلیدها تغییر حالت پیدا می‌کنند، پس یا دو کلید از سطر و ستون کلید اصلی افقی می‌شوند، یا هر دو عمودی خواهند شد یا این که یکی از افقی‌ها عمودی می‌شود و دیگری از عمودی به افقی تغییر حالت می‌دهد. پس در هر صورت، زوجیت  $H$  عوض نمی‌شود.

(با چرخاندن کلید  $k$ ، کلیدهای  $m$  و  $n$  از سطر و ستون مربوط به کلید  $t$  تغییر حالت می‌دهند و بنابراین زوجیت  $H$  مربوط به کلید  $t$  عوض نمی‌شود).



شکل ۶

نتیجه این بحث نسبتاً طولانی آن است که اگر یک صفحه کلید  $2n \times 2n$  داشته باشیم، حداکثر چرخش‌های لازم برای تغییر حالت همه کلیدها به حالت عمودی آن است که ناچار به تغییر حالت همه کلیدها شویم (و این در صورتی است که  $H$  برای همه کلیدها فرد باشد) و اگر ناچار به حداکثر ۲۰۰۲ بار چرخش کلیدها باشیم، نتیجه می‌گیریم که:

$$4n^2 \leq 2002 \Rightarrow 2n \leq 44$$

یعنی بزرگ‌ترین صفحه کلید گاوصندوقی که همواره بازشدنی است، یک صفحه کلید  $44 \times 44$  است.

تا این جا بحث تمام است، اما می‌خواهیم کمی دیگر حوصله کنید! و به دو سؤال دیگر من هم فکر کنید.

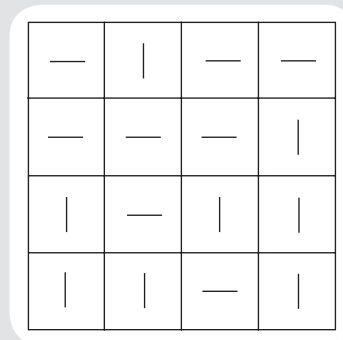
سؤال اول این که این بحث به کدام یک از شاخه‌های دانشی (ریاضی که تا به حال شناخته‌اید مربوط می‌شود؟ در حل آن به کدام یک از اصول و قضایای ریاضی که قبلاً دیده‌اید اتکا شده است؟)

و سؤال دوم که با خود بحث بیش تر ارتباط دارد، این است که در تمام این بحث فرض ما بر این بود که تعداد سطرها و ستون‌های این صفحه کلید عددی زوج است. آیا این نتایج وقتی که تعداد سطرها و ستون‌ها عددی فرد باشد، باز هم صادق‌اند؟ مثال بزنید و نتیجه‌گیری کنید. اگر این نتایج در آن جا برقرار نیستند، راه حل مسئله در آن حال چیست؟ اگر صفحه کلید مربعی نباشد، چه‌طور؟ به این موضوع فکر کنید و اگر نتایج قابل عرضه‌ای به دست آوردید ما را هم باخبر کنید. همین حالا شروع کنید! مطمئن باشید تلاش بیهوده‌ای نیست.

کلی زیر می‌تواند به حل مسئله در حالت کلی بینجامد:

«برای هر کلید، عدد  $H$ ، یعنی مجموع تعداد کلیدهای افقی موجود در سطر و ستون آن کلید را (با احتساب خود آن) محاسبه می‌کنیم، اگر  $H$  فرد باشد، کلید را می‌چرخانیم و اگر  $H$  زوج باشد، بدون چرخش از آن کلید عبور می‌کنیم.» با نگاهی به شکل ۵ درمی‌یابیم که باید (و کافی است) کلیدهای  $b$  و  $k$  چرخانده شوند تا گاوصندوق باز شود.

حال به عنوان تمرین بگویید برای باز کردن گاوصندوقی که صفحه کلید آن به صورت زیر است، حداقل چند کلید (و کدام کلیدها) را باید چرخاند و سپس فرایند باز شدن گاوصندوق را نیز با رسم شکل نشان دهید:



\*\*\*

اکنون نوبت پاسخ‌گویی به قسمت دوم مسئله است. برای این منظور اندکی نظریه‌سازی لازم است. فرض کنید  $H$  تعداد کلیدهای افقی موجود در سطر و ستون هر کلید باشد. دو اصل زیر را در نظر بگیرید:

۱. برای باز شدن گاوصندوق باید  $H$  برای هر کلید عمودی زوج باشد (و در نهایت به صفر برسد).

۲. تنها راه برای تغییر زوجیت  $H$  (یعنی زوج یا فرد بودن  $H$ ) برای هر کلید، چرخاندن همان کلید است و چرخاندن کلیدهای دیگر هیچ تأثیری در زوجیت  $H$  کلید مزبور ندارد.

گمان می‌کنم درستی گزاره اول را به آسانی می‌پذیرید، اما در مورد گزاره دوم کمی توضیح می‌دهیم. مفهوم این گزاره آن است که چرخاندن هر یک از کلیدها به غیر از کلید اصلی، زوج یا فرد بودن تعداد کلیدهای افقی و سطر و ستون آن کلید را تغییر نمی‌دهد. برای اثبات این موضوع دو حالت را در نظر می‌گیریم. یکی این که کلید چرخانده شده متعلق به سطر یا ستون همان کلید باشد و دیگر این که در این سطر و ستون نباشد. در حالت اول واضح است که اگر صفحه کلیدها  $2n \times 2n$  باشد، چرخاندن این کلید وضع همه کلیدهای موجود در سطر (یا ستون) کلید اصلی را عوض می‌کند، پس هر کلیدی را که افقی باشد، عمودی و هر کلید عمودی را افقی می‌کند. لذا اگر یک کلید افقی را کم کند، در مقابل یک کلید عمودی را نیز افقی می‌کند، پس زوجیت  $H$  را عوض نمی‌کند. اما اگر این کلید

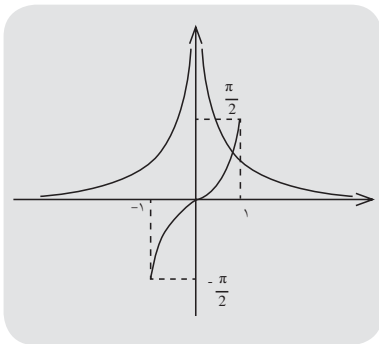
# حل معادله

$$f(x) = \text{apple}$$



احمد قندهاری

حال فرض می‌کنیم  $g(x) = \text{Arc tan } x$  و  $h(x) = \frac{1}{x^2}$  باشند. نمودارهای دو تابع  $g$  و  $h$  را رسم می‌کنیم.



به طوری که ملاحظه می‌شود نمودارهای دو تابع  $g$  و  $h$  در یک نقطه متقاطع‌اند، پس معادله  $x^2 \text{Arc tan } x - 1 = 0$  یک ریشه حقیقی دارد.

**مثال ۲:** تعداد ریشه‌های معادله  $x^2 + x - 1 = 0$  را بیابید و ریشه مثبت آن را با تقریب محاسبه کنید.

**حل:**

$$f(x) = x^2 + x - 1 = x^2 - (1 - x) = 0$$

حال  $g(x) = x^2$  و  $h(x) = 1 - x$  پس  $f(x) = g(x) - h(x)$

معادله  $f(x) = 0$  در حالت کلی و برای هر عبارت از  $f(x)$  قابل حل نیست و فقط در حالت‌های خاص می‌توان آن را حل کرد، ولی راه‌هایی وجود دارد که مقدار تقریبی ریشه‌ها را مشخص می‌کند و معمولاً به ماشین حساب نیاز داریم. قبل از ورود به این مبحث، قضیه زیر را یادآور می‌شویم.

## قضیه بولتزانو

اگر تابع  $f$  در بازه  $[a, b]$  پیوسته و  $f(a)$  و  $f(b)$  مختلف علامه باشند، آن‌گاه معادله  $f(x) = 0$  در بازه  $(a, b)$  یک ریشه حقیقی دارد. حال به ادامه بحث می‌پردازیم:

**روش اول:** تعیین تعداد ریشه‌های معادله  $f(x) = 0$  به کمک نمودار عبارت  $f(x)$  را به صورت  $f(x) = g(x) - h(x)$  می‌نویسیم، سپس نمودارهای دو تابع  $g$  و  $h$  را رسم می‌کنیم. تعداد نقاط تقاطع دو منحنی  $g$  و  $h$  برابر تعداد ریشه‌های معادله  $f(x) = 0$  است.

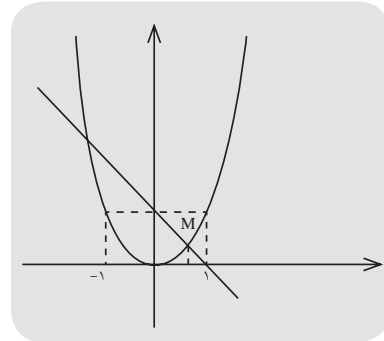
**مثال ۱:** تعداد ریشه‌های معادله  $x^2 \text{Arc tan } x - 1 = 0$  را بیابید.

**حل:** فرض می‌کنیم  $f(x) = x^2 \text{Arc tan } x - 1$  مسلماً در

معادله  $x^2 \text{Arc tan } x - 1 = 0$ ،  $x \neq 0$ ، دو طرف تساوی را بر  $x^2$  تقسیم می‌کنیم

$$x^2 \text{Arc tan } x - 1 = 0 \Rightarrow \text{Arc tan } x - \frac{1}{x^2} = 0$$

نمودارهای  $g$  و  $h$  را رسم می‌کنیم.



به‌طوری که نمودار نشان می‌دهد، معادله  $x^2 + x - 1 = 0$  دو ریشه حقیقی مختلف‌العلامه دارد.

به نظر می‌آید که ریشه مثبت معادله  $f(x) = 0$  یعنی  $x_M$  حدود  $0/6$  باشد.

$$\begin{cases} f(0/6) = -0/184 \\ f(0/7) = 0/043 \end{cases} \Rightarrow f(0/6).f(0/7)$$

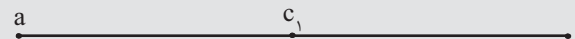
بنا به قضیه بولتزانو معادله  $f(x) = 0$  یک ریشه بین  $0/6$  و  $0/7$  دارد، یعنی  $0/6 < x_M < 0/7$ .

### روش دوم. روش نصف کردن

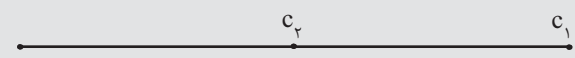
فرض کنید می‌خواهیم ریشه حقیقی معادله  $f(x) = 0$  را که در بازه  $[a, b]$  قرار دارد، بیابیم. با فرض این که  $f$  در بازه  $[a, b]$  پیوسته باشد بنا به قضیه بولتزانو داریم:

$$f(a).f(b) < 0 \Rightarrow \text{ریشه معادله } f(x) = 0 \text{ بین } a \text{ و } b \text{ هست}$$

حال  $\frac{a+b}{2}$  را  $c_1$  فرض می‌کنیم



الف) اگر  $f(a).f(c_1) < 0$ ، آن‌گاه ریشه معادله بین  $a$  و  $c_1$  است.  
 ب) اگر  $f(c_1).f(b) < 0$ ، آن‌گاه ریشه معادله بین  $c_1$  و  $b$  است.  
 برای ادامه کار فرض می‌کنیم حالت «الف» درست باشد، یعنی ریشه معادله  $f(x) = 0$  بین  $a$  و  $c_1$  است. حال  $\frac{a+c_1}{2}$  را  $c_2$  می‌نامیم.



ج) اگر  $f(a).f(c_2) < 0$ ، آن‌گاه ریشه معادله بین  $a$  و  $c_2$  است.  
 د) اگر  $f(c_2).f(c_1) < 0$ ، آن‌گاه ریشه معادله بین  $c_2$  و  $c_1$  است.

و عمل را به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. با توجه به گرد کردن عدد، به ریشه معادله نزدیک می‌شویم.

مثال: ریشه معادله  $x^3 + x - 1 = 0$  را که بین  $(0, 1)$  قرار دارد، بیابید.

حل: فرض می‌کنیم  $f(x) = x^3 + x - 1$

$$\begin{cases} f(0) = -1 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(0).f(1) < 0 \Rightarrow 0 < x < 1$$

حال وسط بازه  $(0, 1)$  را در نظر می‌گیریم:  $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - 1 = -0/375, f(1) = 1$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right).f(1) < 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < x < 1$$

حال وسط بازه  $(\frac{1}{2}, 1)$  را در نظر می‌گیریم:  $\frac{\frac{1}{2}+1}{2} = \frac{3}{4}$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{64} + \frac{3}{4} - 1 = 0/172, f\left(\frac{1}{2}\right) = -0/375$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right).f\left(\frac{3}{4}\right) < 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}$$

اینک وسط بازه  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$  را در نظر می‌گیریم:  $\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{2} = \frac{5}{8}$

$$f\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{125}{512} + \frac{5}{8} - 1 = -0/13, f\left(\frac{3}{4}\right) = 0/172$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{3}{4}\right).f\left(\frac{5}{8}\right) < 0 \Rightarrow \frac{3}{4} < x < \frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow 0/62 < x < 0/75 \xrightarrow{\text{با توجه به گرد کردن اعداد}} 0/6 < x < 0/7$$

### روش سوم: روش نیوتن

این دانشمند بزرگ حدود ۴۰۰ سال پیش، روش بسیار کارایی برای حل معادله  $f(x) = 0$  ارائه داده است.

فرض کنید می‌خواهیم معادله  $f(x) = 0$  را حل کنیم. ابتدا تابع  $f$  با ضابطه  $y = f(x)$  را رسم می‌کنیم. فرض می‌کنیم نمودار تابع  $f$  محور  $x$ ها را در نقطه  $M$  قطع کرده است. می‌خواهیم طول نقطه  $M$  را بیابیم.

در نزدیکی‌های نقطه  $M$  روی محور  $x$ ها،  $x_1$  را در نظر می‌گیریم. به وسیله رابطه موازی محور  $y$ ها به نقطه  $A$  روی منحنی  $f$  می‌رسیم. در نقطه  $A$  مماس بر منحنی  $f$  را رسم می‌کنیم.



حقیقی متمایز دارد.

حل: فرض می‌کنیم  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

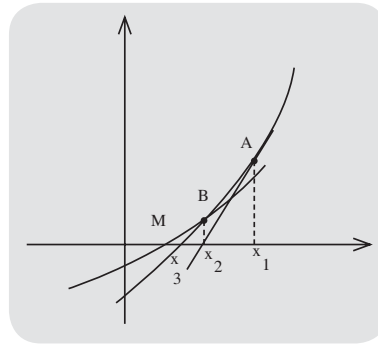
$f(0) = 1, f(1) = -1, f(-1) = -3, f(2) = -3, f(3) = 1$

$f(-1).f(0) < 0 \Rightarrow -1 < x_1 < 0$

$f(0).f(1) < 0 \Rightarrow 0 < x_2 < 1$

$f(2).f(3) < 0 \Rightarrow 2 < x_3 < 3$

پس معادله  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$  سه ریشه حقیقی متمایز دارد.



معادله این خط مماس چنین است

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

حال طول نقطه تقاطع این خط مماس بر محور xها را  $x_p$

می‌نامیم:

$$y = 0 \Rightarrow 0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_p - x_1) \Rightarrow x_p = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

حال از  $x_p$  رابطی موازی محور yها رسم می‌کنیم تا نمودار تابع

f را در نقطه B قطع کند. معادله خط مماس بر منحنی تابع f را

در نقطه B به طول  $x_p$  می‌نویسیم. فرض می‌کنیم این خط مماس

محور xها را در نقطه‌ای به طول  $x_p$  قطع کند. این عمل را هر چند

بار که لازم باشد می‌توان ادامه داد. ریشه معادله  $f(x) = 0$  یعنی

طول نقطه M با تقریب بسیار قابل قبولی محاسبه می‌شود.

فرمول کلی روش نیوتن چنین است:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

مثال: می‌خواهیم ریشه مثبت معادله  $x^2 - 7 = 0$  را محاسبه

کنیم (در واقع می‌خواهیم مقدار  $\sqrt{7}$  را محاسبه کنیم).

حل:  $f(x) = x^2 - 7$  و  $f'(x) = 2x$

$x_1$  را ۲ فرض می‌کنیم؛ داریم:  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$$x_1 = 2; x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{-3}{4} = 2/75 = x_2$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 2/75 - \frac{f(2/75)}{f'(2/75)} = 2/75 - \frac{-0.5625}{0.5} = 2/647 = x_3$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 2/647 - \frac{f(2/647)}{f'(2/647)} = 2/64575$$

اگر با ماشین حساب  $\sqrt{7}$  را محاسبه کنیم، خواهیم داشت:

$$\sqrt{7} = 2/645751311$$

مقدار واقعی نزدیک است.

مسئله: نشان دهید که معادله  $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$  سه ریشه

تفریح اندیشه



## گفت‌وگوی دو مسافر

در کشورهایی از خاورمیانه، دو نفر هر چند ناآشنا باشند و برای نخستین بار باشد که به هم رسیده‌اند، پرس‌وجو کردن آن‌ها از کار و بار یکدیگر و از تعداد فرزندان که دارند و از کارهای آن‌ها، یک امر عادی است.

دو تن، که آن‌ها را الف و ب می‌نامیم، در یک مسافرت با اتوبوس کنار هم جای گرفته بودند. پس از احوالپرسی و خوش و بش کردن، الف از ب می‌پرسد که چند فرزند دارد. ب پاسخ می‌دهد که سه فرزند، به نام‌های رضا، احمد و حمید، که یکی از آن‌ها ۲۰ سال، دیگری بیشتر از ۲۰ سال و آن دیگری کمتر از ۲۰ سال دارد. ب می‌گوید: لابد رضا پسر بزرگتر و حمید پسر کوچکتر است؟

الف پاسخ می‌دهد:

نه. اگر فرض کنید رضا ۲۰ ساله است، نتیجه‌اش آن خواهد شد که احمد پسر بزرگتر است. اگر فرض کنید رضا پسر بزرگتر است، نتیجه‌اش آن خواهد شد که احمد پسر کوچکتر است، اگر فرض کنید احمد ۲۰ ساله نیست، نتیجه‌اش آن خواهد شد که حمید پسر بزرگتر است. این سه فرض را که با هم بسنجید، می‌توانید دریابید از فرزندانم کدام پسر بزرگتر، کدام پسر کوچکتر و کدام ۲۰ ساله است!

پاسخ در صفحه ۳۷

برگرفته از کتاب داستان‌واره‌های ریاضی / ترجمه عبدالحسین

مصحفی / انتشارات مدرسه





# مسئله

## چيست؟

### و چگونه می توان مسئله را حل کرد؟

محمد هاشم رستمی

متساوی الساقین، نصف حاصل ضرب قاعده آن در یکی از ساق‌ها را به دست می‌آوردند. درصد اشتباه آن‌ها را برای حالتی که قاعده مثلث برابر ۴ و ساق آن برابر ۱۰ باشد، پیدا کنید.

و اینک، یک مسئله از پاپیروس مسکو که به سال ۱۸۵۰ قبل از میلاد یعنی حدود ۳۸۶۰ سال پیش نوشته شده است، توجه کنید.

**مسئله.** حجم هرم ناقصی را پیدا کنید که ارتفاع آن برابر ۶، ضلع مربع قاعده پایین آن برابر ۴ و ضلع مربع قاعده بالای آن برابر ۲ باشد.

یک مسئله از بابلی‌ها (حدود ۳۰۰ سال پیش)

**مسئله.** زاویه قائمه را به سه قسمت برابر تقسیم کنید.

یک مسئله از اقلیدس (سده سوم پیش از میلاد)

**مسئله.** متوازی‌الاضلاعی بسازید که زاویه بین دو ضلع آن

انسان‌ها همواره با مسئله‌های مختلفی، سروکار داشته‌اند و برای حل آن‌ها پیوسته کوشیده‌اند. این راه‌حل‌ها در بسیاری از موارد متفاوت‌اند. به عنوان مثال برای اثبات قضیه فیثاغورس تاکنون حدود ۴۰۰ راه‌حل متفاوت ارائه شده است. نوع مسئله‌ها و آسانی، یا دشواری راه‌حل آن‌ها در زمان‌های مختلف متفاوت بوده‌اند. به مسئله‌هایی از پاپیروس رایند که حدود ۱۸۰۰ تا ۲۰۰۰ سال قبل از میلاد یعنی تقریباً حدود ۴۰۰۰ سال پیش نوشته شده است توجه کنید:

**مسئله ۱.** هفت نفر هر کدام هفت گربه دارند. هر گربه می‌تواند هفت موش را بگیرد. هر موش می‌تواند هفت خوشه جو را بجود و هر خوشه جو، هفت دانه جو دارد. بزرگ‌ترین عدد این ردیف و مجموع آن‌ها کدام است؟

**مسئله ۲.** مصری‌ها برای محاسبه مساحت مثلث



معلوم و مساحت آن

برابر مساحت یک

مثلث مفروض باشد.

یک مسئله از

ارشמידس (۲۸۸-

۲۱۲ قبل از میلاد)

مسئله. مساحت

قطاع کروی برابر است

با مساحت دایره‌ای که شعاع آن

برابر باشد با پاره‌خطی که رأس قطاع را به یکی

از نقطه‌های قاعده آن وصل می‌کند.

یک مسئله از بطلمیوس (سده دوم قبل از میلاد)

مسئله. ثابت کنید در هر چهار ضلعی محاطی،

حاصل ضرب دو قطر برابر است با مجموع حاصل ضرب‌های

دوبه‌روی ضلع‌های روبه‌رو.

یک مسئله از ابن‌سینا، دانشمند ایرانی (۱۰۳۷-۹۸۰

میلادی).

مسئله. اگر عددی در تقسیم بر ۹ به باقی‌مانده ۱ یا ۸ برسد،

مجذور آن عدد در تقسیم بر ۹ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ خواهد

داشت.

یک مسئله از کرجی (سده یازدهم میلادی)

مسئله. این دستگاه را حل کنید.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ xz = y^2 \\ xy = 10 \end{cases}$$

شبهه این مسئله‌ها را که برخی از آن‌ها حتی به ده هزار سال

قبل تعلق دارند، در آثار به جای مانده از تمدن‌های عهد باستان،

مانند تمدن‌های ایرانی، بابلی، مصری، هندی، چینی و... به وفور

می‌توان یافت. از آن جمله است آثار به دست آمده در لوحه‌های

شوش از ایران، پاپیروس‌های مصر، کتاب‌های مختلف یونان

باستان، رساله‌های باهشالی و... هندی، رساله‌های «نه فصل از هنر

محاسبه» و «ریاضیات در نه کتاب» چینی.

بنابراین مسئله و حل مسئله ریشه در تاریخ بشر دارد. اما

مسئله چیست و چگونه می‌توان آن را حل کرد؟

مسئله، موضوع بغرنج و پیچیده‌ای نیست. ما در زندگی خود

همواره با انواع مسئله‌ها سروکار داریم و بیش‌تر ما آن‌ها را حل

می‌کنیم. پس نباید از مسئله بترسیم. و آن را غولی رام‌نشدنی

تصور کنیم.

- رفتن از خانه به مدرسه؛

- خریدن نان از نانوايي؛

- رفتن به مسافرت؛

- انجام تکالیف داده شده در مدرسه به دست یک دانش‌آموز؛

- چگونگی کاشت، داشت و برداشت یک محصول برای گرفتن

بهترین بازده؛

- تعمیر یک ماشین که نقص فنی دارد؛

- باز کردن یک قفل بسته شده؛

...

و هزاران مورد مشابه دیگر، هر کدام یک مسئله‌اند.

پس مسئله را نباید تنها مسئله‌های مربوط به ریاضیات، فیزیک،

شیمی و دیگر علوم بدانیم.

به نظر شما در هر یک از مسئله‌های بالا، چه عواملی دخالت

دارند؟

در یک مسئله هندسه چه عواملی دخالت دارند؟ در یک مسئله

فیزیک چه عواملی می‌توان یافت؟

همه مسئله‌ها از جمله مسئله‌های بالا، عامل‌های مشترکی

دارند، یا به بیان دیگر؛ ساختاری یکسان دارند. بیایید مطلب را

بیش‌تر بررسی کنیم.

در مسئله رفتن دانش‌آموز از خانه به مدرسه، یک عامل مهم،

خواستۀ مسئله، یعنی حرکت کردن دانش‌آموز از خانه و رسیدن

او به مدرسه است. اما ببینیم چه چیزهایی باید مشخص و معلوم

باشد؛ از جمله:

(۱) فاصله خانه تا مدرسه چه قدر است؟

(۲) چند مسیر برای رسیدن از خانه به مدرسه وجود دارد؟

(۳) چگونه این مسیر باید پیموده شود؟ با پای پیاده، با دوچرخه،

با موتورسیکلت، با ماشین یا با وسیله‌ای دیگر؟

(۴) سرعت پیمایش مسیر در هر یک از موارد بالا چه قدر

است؟

(۵) ...

با معلوم بودن این موارد، دانش‌آموز یا والدین او می‌توانند

طوری برنامه‌ریزی کنند که در حداقل زمان ممکن و با استفاده از

ایمن‌ترین راه، دانش‌آموز به مدرسه برسد.

بنابراین معلومات یا داده‌های مسئله یک عامل مهم و

تعیین‌کننده دیگر در مسئله و هم‌چنین، حل آن خواهند بود.

آیا فکر می‌کنید حل این مسئله همواره امکان‌پذیر است؟ آیا

شرط یا شرط‌هایی برای تحقق این مسئله وجود ندارد؟

پاسخ مثبت است. شما خود برخی از آن‌ها را بیابید و برای

ما بنویسید. به جامع‌ترین و جالب‌ترین پاسخ‌ها چند جلد از

دایره‌المعارف هندسه اهدا خواهد شد.

به یک مسئله دیگر از موارد یاد شده می‌پردازیم.

**مسئله.** تلویزیون شما چند اشکال فنی پیدا کرده است و می‌خواهید آن را تعمیر کنید. مثلاً تصویر برفکی دارد، صدای آن قطع و وصل می‌شود، پس از چند دقیقه روشن بودن، ناگهان خاموش می‌شود و... همه وسایل لازم برای تعمیر یک تلویزیون هم در اختیار شماست. آیا می‌توانید آن را تعمیر کنید؟ پاسختان چیست؟ فکر کنید. در ضمن شما تعمیرکار تلویزیون هم نیستید. روشن است که شما دلیل به وجود آمدن نقص‌های ایجاد شده را نمی‌دانید. به عبارت دیگر مجهول‌های مسئله را نمی‌شناسید. به علاوه ساختار و روش استفاده از ابزاری را که برای تعمیر در اختیار شماست نمی‌شناسید. یعنی به معلومات و داده‌هایی که در اختیار شماست اشراف ندارید. بنابراین واضح است که قادر به حل مسئله یعنی برطرف کردن نقص فنی تلویزیون خود نخواهید بود. اما یک سرویس‌کار تلویزیون چه‌طور؟

سرویس‌کار تلویزیون، تمام ساختمان تلویزیون را می‌شناسد، می‌داند که وقتی تصویر برفکی است اشکال در کدام قطعه از تلویزیون مربوط است یا قطع و وصل شدن صدا به کدام قطعه مربوط است و...؛ یعنی مجهولات مسئله را می‌شناسد. به علاوه ساختمان تمام ابزار لازم برای تعمیر تلویزیون و چگونگی استفاده از آن‌ها را نیز کاملاً می‌شناسد. به بیان دیگر به معلومات مسئله کاملاً آگاه است. پس به راحتی تلویزیون شما را تعمیر می‌کند و نقص‌های آن را برطرف می‌سازد.

در این مسئله نیز دیدید که شناخت کامل از مجهولات مسئله و همچنین شناخت کامل از معلومات یا داده‌های مسئله هم‌چنین شرط سرویس‌کار بودن شما برای حل مسئله الزامی است.

ساختار مسئله‌های ریاضی، فیزیک، شیمی و... را نیز می‌شناسید. برای مثال، در مسئله زیر:

**مسئله.** مثلثی رسم کنید که اندازه ضلع‌های آن  $a$ ،  $b$  و  $c$  باشند.

خواسته یا مجهول مسئله، رسم یک مثلث است.

داده‌های آن اندازه سه ضلع آن، یعنی  $a$ ،  $b$  و  $c$  است.

شرط آن امکان وجود مثلثی با ضلع‌های  $a$ ،  $b$  و  $c$  یعنی  $a + b > c$ ،  $a + c > b$  و  $b + c > a$  است. به‌طور کلی با بررسی هر مسئله‌ای می‌بینید که:

مسئله، مجموعه‌ای از مجهول‌ها یا خواسته‌ها، معلوم‌ها یا داده‌ها و شرط یا شرط‌های امکان وجود مسئله است.

به بیان دیگر، هر مسئله سه بخش مهم به شرح زیر دارد:

(۱) مجهول‌ها یا خواسته‌های مسئله؛

(۲) معلومات یا داده‌های مسئله؛

(۳) شرط یا شرط‌های ممکن بودن مسئله.

اما منظور از حل مسئله چیست؟

**حل مسئله؛** یعنی پیدا کردن مجهول‌ها یا رسیدن به خواسته‌های مسئله، با استفاده از معلوم‌ها (یا داده‌های مسئله) به شرط امکان وجود مسئله.

درباره شرط وجود مسئله تأکید زیادی داشتیم. با یک مثال عددی از رسم مثلثی با معلوم بودن طول سه ضلع آن، مطلب را روشن‌تر بیان می‌کنیم.

**مسئله.** مثلثی رسم کنید که اندازه‌های سه ضلع آن ۱۰، ۱۵ و ۲۰ باشند.

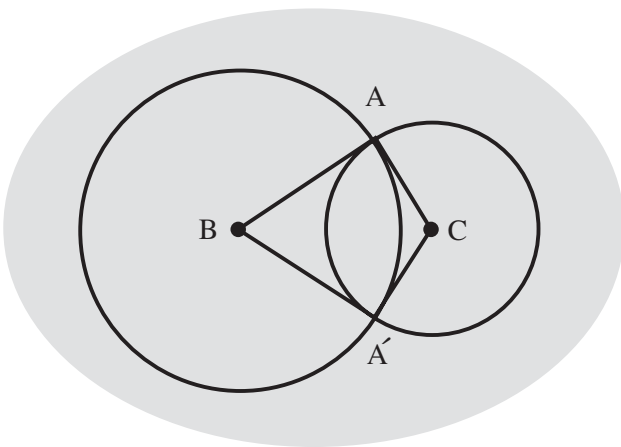
**حل.** چون اندازه هر ضلع از مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر کوچک‌تر است، یعنی

$$15 < 30 \text{ یا } 15 < 20 + 10$$

$$10 < 35 \text{ یا } 10 < 20 + 15$$

$$20 < 25 \text{ یا } 20 < 15 + 10$$

پس مثلثی با طول ضلع‌های ۱۵، ۱۰ و ۲۰ وجود دارد. برای رسم این مثلث پاره‌خطی به طول یکی از ضلع‌ها، مثلاً پاره‌خط BC به طول ۲۰ رسم می‌کنیم، سپس به مرکز B و به شعاع ۱۵ یک دایره و به مرکز C و به شعاع ۱۰ دایره دیگری رسم می‌کنیم. نقطه‌های تقاطع این دو دایره، یعنی A و A' رأس سوم مثلث‌های هم‌نهشت ABC و A'BC هستند. اکنون به مسئله زیر توجه کنید.



**مسئله.** مثلثی رسم کنید که اندازه‌های سه ضلع آن ۱۲، ۷ و ۱۲ باشد.

**حل.** شرط وجود مثلث را می‌نویسیم.

$$12 < 19 \Rightarrow 3 < 12 + 7 \text{ برقرار است درست است}$$

$$12 < 10 \Rightarrow 12 < 3 + 7 \text{ درست نیست}$$

$$7 < 15 \Rightarrow 7 < 3 + 12 \text{ درست است}$$

به طوری که دیده می‌شود یکی از شرط‌ها برقرار نیست، زیرا ۱۲ از  $3 + 7 = 10$  کوچک‌تر نیست، بنابراین مثلثی با طول ضلع‌های

۳، ۱۲ و ۷ وجود ندارد. به بیان دیگر، شرط وجود مثلث با عددهای داده شده برقرار نیست. بنابراین، چنین مثلثی وجود ندارد. پس حل آن هم منتفی است.

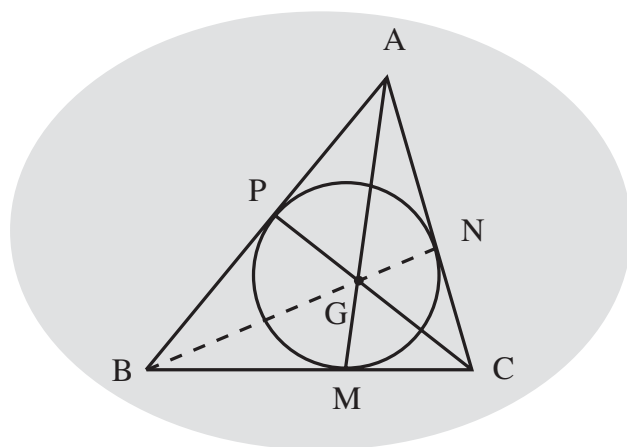
اکنون به بحث:

چگونه می‌توانیم مسئله را حل کنیم؟  
می‌پردازیم.

برای پاسخ‌دادن به این سؤال روش‌های مختلفی را می‌توان بیان کرد که یکی از مهم‌ترین آن‌ها روش حل مسئله جورج پولیا (۱۸۹۰-۱۹۸۸)، آموزشگر بزرگ ریاضی، است که این روش را در کتاب «چگونه مسئله را حل کنیم؟» آورده است. در این جا کلیاتی از این روش را خواهیم دید. اما قبل از ارائه روش حل مسئله پولیا، با بررسی مطالبی که تاکنون درباره ساختار مسئله و چگونگی حل آن بیان کردیم، یک نکته بسیار اساسی مشخص می‌شود و آن این است که: مجهول‌ها یا خواسته‌های مسئله، معلوم‌ها یا داده‌های مسئله و شرط یا شرط‌های مسئله را کاملاً بشناسیم (مفاهیم اولیه مرتبط با هر کدام را بشناسیم، تعریف‌ها و ویژگی‌های هر یک از عوامل بالا را بدانیم، قضیه یا قضیه‌های مرتبط یا به‌طور کلی مفهوم‌های مرتبط با این عوامل را بدانیم و پیوندهای ارتباطی بین این مفاهیم را بشناسیم. نداشتن شناخت کافی درباره هر یک از مفاهیم ارائه شده در هر یک از سه بخش مهم مسئله، یعنی (۱) مجهول‌ها، (۲) معلوم‌ها، (۳) شرط مسئله، موجب خواهد شد که برای حل کردن مسئله با دشواری روبه‌رو شویم.

با ذکر یک مثال، مطلب را روشن‌تر بیان می‌کنیم.

مثال. ثابت کنید خط‌هایی که رأس‌های یک مثلث را به نقطه تماس دایره محاطی مثلث با ضلع روبه‌رو وصل می‌کنند، هم‌مس‌اند (این مسئله به مسئله ژرگون، ریاضی‌دان فرانسوی، مشهور است و این نقطه هم‌رسی را نقطه ژرگون مثلث می‌نامند).



در این مسئله، مجهول یا خواسته مسئله، اثبات هم‌مس بودن سه خط است. اگر تعریف هم‌مس بودن خط‌ها را ندانیم، بدیهی است که

قادر به حل مسئله نخواهیم بود، زیرا در این صورت نمی‌دانیم چه چیزی را می‌خواهیم ثابت کنیم، هم‌چنین داده‌های مسئله را باید کاملاً بشناسیم. مثلث چه‌گونه شکلی است؟ دایره محاطی مثلث چیست و چه ویژگی‌هایی دارد؟ آیا همواره مسئله امکان‌پذیر است؟ شرط هم‌مس بودن چند خط چیست؟ با چه روش‌هایی می‌توان ثابت کرد که چند خط هم‌مس‌اند؟ چه قضیه‌هایی درباره هم‌مس بودن خط‌ها در مثلث وجود دارد؟ خط‌های هم‌مس در مثلث کدام‌اند؟ آیا خط‌های داده شده در این مسئله جزء خط‌های مهم هم‌مس در مثلث (ارتفاع‌های مثلث، میانه‌های مثلث، نیم‌سازهای زاویه‌های درونی مثلث، نیم‌ساز یک زاویه درونی و دو نیم‌ساز دو زاویه برون‌ی مثلث) هستند یا خیر؟ «قضیه سوا» و «عکس قضیه سوا» چیست؟ و چندین مورد دیگر.

جورج پولیا، آموزشگر ریاضی، مسئله‌ها را به دو بخش تقسیم می‌کند:

(الف) مسئله‌های یافتنی؛

(ب) مسئله‌های ثابت‌کردنی.

نمونه‌هایی از مسئله‌های یافتنی:

۱. مثلثی رسم کنید که سه ضلع آن ۶، ۸ و ۹ سانتی‌متر باشند.

۲. مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه را بیابید که مجموع مربعات فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B مقدار ثابتی برابر  $K^2$  باشد.

۳. عددی بیابید که مجذور آن به علاوه دو برابرش مساوی ۱۵ باشد.

۴. حجم هرم منتظم مربع‌القاعده منتظمی را به دست آورید که طول ضلع قاعده‌اش برابر ۱۲ و سهم هرم مساوی ۱۰ باشد.

۵. با ۶ رقم ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ چند عدد ۳ رقمی می‌توان ساخت؟

نمونه‌هایی از مسئله‌های ثابت‌کردنی:

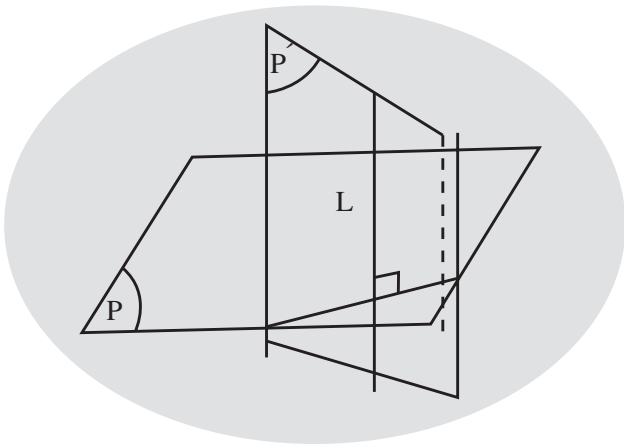
۱. ثابت کنید که ارتفاع‌های هر مثلث هم‌مس‌اند.

۲. ثابت کنید مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B برابر عدد ثابت  $K > 0$  باشد، یک دایره است که قطرش، آن پاره‌خط را به نسبت K تقسیم می‌کند.

۳. ثابت کنید هر خطی که موازی یک ضلع مثلث رسم شود، دو ضلع دیگر مثلث را به یک نسبت تقسیم می‌کند (قضیه تالس در صفحه).

۴. ثابت کنید هرگاه سه ضلع از یک مثلث با سه ضلع نظیرشان از مثلث دیگر متناسب باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.

۵. حاصل ضرب اندازه‌های دو قطعه وتری که از یک نقطه واقع در درون یک دایره رسم می‌شوند، با هم برابر است



۹. ...

جورج پولیا برای حل هر دو نوع مسئله یافتنی و ثابت کردنی چهار مرحله زیر را پیشنهاد می‌کند.

مرحله اول: فهمیدن مسئله؛

مرحله دوم: طرح نقشه؛

مرحله سوم: اجرای نقشه؛

مرحله چهارم: نگاه به عقب یا بازنگری.

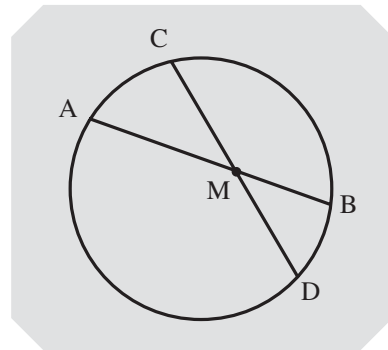
اینک به شرح بیش‌تر این چهار مرحله می‌پردازیم:

نکته مهم و در خور توجه آن است که احمدبن محمدبن عبدالجلیل سجزی، ریاضی‌دان ایرانی در قرن چهارم هجری، یعنی حدود هزار سال پیش در رساله‌ای به نام «رساله سجزی در روش‌های حل مسائل هندسی» روش‌هایی را برای حل مسئله‌های هندسی بیان می‌کند که با روش حل مسئله پولیا مشابهت‌های بسیار دارد. دکتر یان پ. هوخندایک استاد دانشگاه اورتریخت هلند، «رساله سجزی در روش‌های حل مسائل هندسی» به زبان عربی را به انگلیسی ترجمه کرده و در سال ۱۳۷۵ آقای محمد باقری از انگلیسی به فارسی برگردانده و انتشارات فاطمی آن را چاپ و منتشر کرده است.

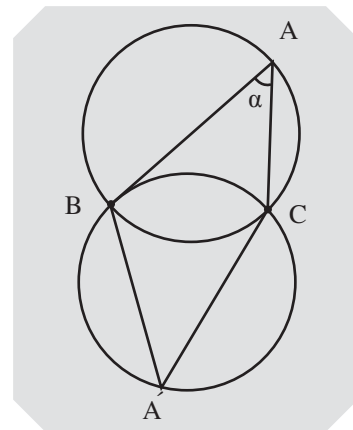
بررسی رساله سجزی نشان می‌دهد که یک ریاضی‌دان ایرانی حدود هزار سال پیش روش‌هایی را برای حل مسئله‌های ریاضی و از جمله هندسه بیان کرده که مشابه آن‌ها را جورج پولیا در قرن بیستم ارائه داده است. برای آشنایی بیش‌تر با رساله سجزی بخشی از آن را که به معرفی سجزی و ارائه روش‌های کلی حل مسائل هندسی و مقایسه این روش‌ها با روش‌های حل مسئله جورج پولیا می‌پردازد، در زیر می‌آوریم.

پیشگفتار مترجم رساله سجزی به انگلیسی (دکتر یان پ. هوخندایک)

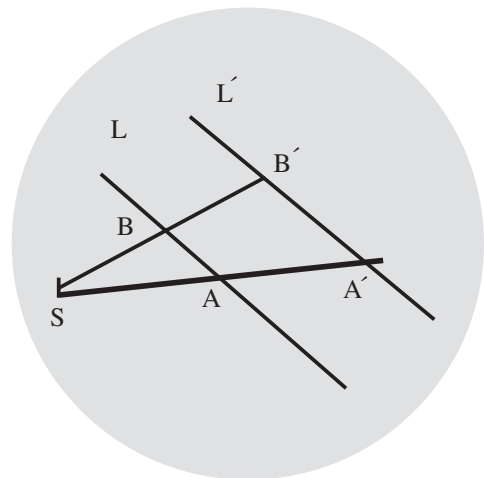
$$(MA \cdot MB = MC \cdot MD)$$



۶. مکان هندسی رأس زاویه‌ای مساوی  $\alpha$  که از دو نقطه ثابت  $A$  و  $B$  می‌گذرد و در یک طرف خط  $AB$  قرار دارد، بخشی از دو دایره است که از دو نقطه  $A$  و  $B$  می‌گذرند و زاویه مرکزی روبه‌رو به وتر مشترک آن‌ها برابر  $2\alpha$  است.



۷. مجانس هر خط راست، یک خط راست است.



۸. هرگاه خطی بر یک صفحه عمود باشد، هر صفحه‌ای که بر آن خط بگذرد بر آن صفحه عمود است.



که در انقلاب‌های زمستانی ۳۵۹ و ۳۶۰ هجری در شیراز انجام شد، حضور داشته است.

نسخه خطی موجود در کتابخانه ملی پاریس، مجموعه دست‌نوشته‌های عربی، شماره ۲۴۵۷، از این لحاظ قابل توجه است، زیرا بسیاری از تاریخ‌نگاران برآن‌اند که این نسخه به دست سجزی در دوره فوق نوشته شده است. نسخه مذکور شامل حدود پنجاه رساله ریاضی و نجومی از مؤلفان مختلف از جمله خود سجزی است و طبق آنچه در خاتمه نسخه آمده، بین سال‌های ۳۵۸ تا ۳۶۱ هجری به وسیله «احمدبن محمدبن عبدالجلیل» یعنی خود سجزی نوشته شده است. اما برخی پژوهشگران معتقدند که نسخه پاریس در قرن هفتم هجری از روی نسخه‌ای به خط سجزی رونویسی شده است. بنا به دو دلیلی که در این جا ذکر می‌کنم، به نظر من نسخه پاریس نمی‌تواند به خط خود سجزی باشد. اولاً غلط‌های زیادی در متن و در شکل‌ها وجود دارد به طوری که نمی‌توان پذیرفت این نسخه را یک ریاضی‌دان در سطحی که سجزی بین سال‌های ۳۵۸ تا ۳۶۱ به آن رسیده بود، نوشته باشد. ثانیاً این نسخه شامل رساله‌ای است با عنوان کتاب احمدبن محمدبن عبدالجلیل در اندازه‌گیری کره‌ها با کره‌ها، که در پایان آن چنین آمده است: «این پایان چیزی است که او (تأکید از من است) از این کتاب نوشته است.»

سجزی در سال ۳۴۰ یزدگردی (۳۶۰ هجری) رساله‌ای درباره گنبد‌های سهموی و هذلولوی خطاب به پدرش ابوالحسین محمدبن عبدالجلیل نوشته است. سجزی هم‌چنین در اثری به نام درباره مسائل برگزیده‌ای که مورد بحث او و هندسه‌دانانی از شیراز و خراسان قرار گرفت و تعلیقات او از راه‌حلی‌هایی که پدرش برای مسئله‌هایی مربوط به تقسیم مثلث‌ها و متوازی‌الاضلاع‌ها عرضه کرده است، صحبت می‌کند. پس پدر سجزی باید در هندسه کاربردی فعال بوده باشد.

از سجزی حدود ۴۰ رساله هندسی موجود و شناخته شده است. سجزی در آثاری که از وی برجا مانده، دست‌کم به ۲۰ رساله دیگر اشاره می‌کند که تألیف کرده، ولی به دست ما نرسیده است. حدود ۲۰ رساله از سجزی در نجوم و احکام نجوم موجود است. تنها بخش اندکی از آثار سجزی تاکنون انتشار یافته است.

تاریخ تقریبی تدوین رساله در آسان کردن راه‌های به دست آوردن شکل‌های هندسی را براساس آنچه در پی می‌آید می‌توان تعیین کرد. سجزی از این اثر در رساله‌ای درباره هذلولی و مجانب‌ها نام می‌برد (نگاه کنید به نقل قول ۳ در پیوست). این رساله در سال ۳۴۹ یزدگردی (۳۶۹ هجری) نوشته شده است. کم‌تر از دو سال قبل از آن، در ذی‌الحجه ۳۶۸ هجری، سجزی المدخل

نوشتار حاضر حاوی ترجمه و شرح اثری از سجزی است به نام رساله در آسان کردن راه‌های به دست آوردن شکل‌های هندسی. ویرایش بدون نقد متن عربی آن را سعیدان در سال ۱۹۸۳ میلادی به صورت پیوست ۳، در مجموعه‌ای که از آثار ابراهیم‌بن‌سنان (۲۹۶-۳۳۵ ه.ق) منتشر کرده، آورده است، ولی این متن تاکنون ویرایش همراه با نقد نشده و به هیچ زبان دیگری برگردانده نشده است. از این متن به‌ظاهر تنها یک نسخه خطی عربی موجود است که در کتابخانه خصوصی نبی‌خان در لاهور (پاکستان) نگهداری می‌شود.

تا آنجا که اطلاع داریم، این متن تنها رساله هندسه‌دانی از دوره اسلامی در شیوه‌های حل مسئله به‌طور کلی است. رساله‌هایی از دیگر ریاضی‌دانان دوره اسلامی، مثل ابراهیم‌بن‌سنان درباره روش تحلیل یونانیان باستان وجود دارد. ولی سجزی به مراتب مطالب پیش‌تری عرضه می‌کند. بنابراین، رساله سجزی شباهت‌هایی با کتاب معروف چگونه مسئله را حل کنیم جورج پولیا دارد، هر چند که این دو اثر در زمان‌های مختلف برای مخاطب‌های مختلف و با سبک‌های ریاضی مختلف نگاشته شده‌اند. در بخش ۲ از نوشتار حاضر، اطلاعات تازه‌ای درباره سجزی و زمان تقریبی رساله در آسان کردن راه‌های به دست آوردن شکل‌های هندسی آورده شده است. در بخش ۳ درباره جمع‌بندی خود سجزی از این متن بحث کرده‌ام و به مقایسه این متن با کتاب پولیا پرداخته‌ام.

ابوسعید احمدبن محمدبن عبدالجلیل سجزی، یکی از پرکارترین هندسه‌دانان قرن چهارم هجری بود. از زندگی او اطلاعات اندکی در دست است. اولین تاریخ ذکر شده از زندگی سجزی، ربیع‌الآخر ۳۵۲ هجری است که او نسخه‌ای از ترجمه عربی مقدمه بر مکانیک پاپوس اسکندرانی را رونویسی کرده است. سجزی در آغاز محرم سال ۳۸۹ هجری هنوز فعال بود و در این سال اثری به نام رساله فی شکل القطع را نوشته است.

نام سجزی حاکی از انتساب وی به سجستان یا همان سیستان امروزی در جنوب شرقی ایران است. شواهدی در دست است که سجزی بخشی از عمر خود را در این ناحیه گذراند. بیرونی در الآثار الباقیه نام ماه‌های تقویم سیستان را که سجزی به او گفته بود، نقل کرده است. سجزی در رساله المدخل فی علم الهندسه می‌گوید: «در سیستان ابزار عظیم و مهمی ساختم؛ مدلی از کل عالم، متشکل از افلاک، جرم‌های آسمانی، مدارهای حرکت آن‌ها و اندازه‌هایشان، مقدار فاصله‌ها و حجم‌های آن‌ها و شکل زمین، جای‌ها، شهرها، کوه‌ها، دریاها و بیابان‌ها، درون کره‌ای توخالی و مشبک؛ آن را هیئت کل، نامیده‌ام.» سجزی در رصدهای نجومی

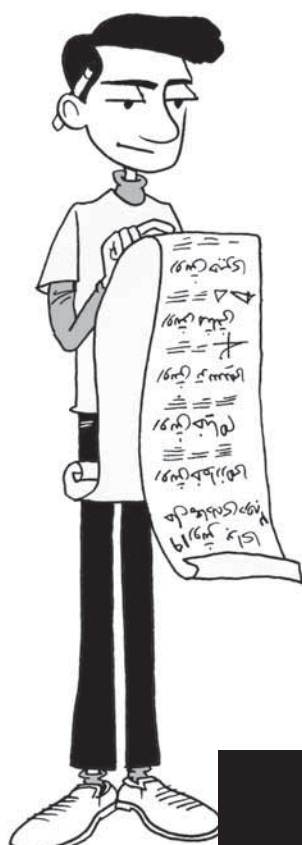
راه‌های به دست آوردن شکل‌های هندسی را اندکی بعد از المدخل فی علم الهندسه نوشته است. پس تاریخ تألیف رساله آسان کردن راه‌های به دست آوردن شکل‌های هندسی را می‌توان حدود ۳۷۰ هجری دانست. بر این اساس، رساله مذکور ثمره حادقل پانزده سال تجربه شخصی سجزی در حل مسئله‌های هندسی است.

فی علم الهندسه را (که هنوز انتشار نیافته) به پایان رسانده است. در این اثر، سجزی بسیاری قضایا را که به‌طور مشروح در رساله در آسان کردن راه‌های به دست آوردن شکل‌های هندسی آورده، ذکر می‌کند، اما از خود رساله نامی نمی‌برد، هر چند که بسیاری آثار دیگر خود را ذکر می‌کند. پس احتمالاً رساله در آسان کردن

<p>فهمیدن مسئله</p> <p>مجهول چیست؟ داده‌ها کدام است؟ شرط چیست؟ آیا تحقق یافتن شرط مسئله امکان‌پذیر است؟ آیا شرط مسئله برای تعیین مجهول کفایت می‌کند؟ یا کافی نیست؟ یا حشو و زاید است؟ یا متناقض است؟ شکلی رسم کنید. علامت‌های مناسب را به کار ببرید. قسمت‌های مختلف شرط را از هم جدا کنید. آیا می‌توانید آن‌ها را روی کاغذ بیاورید؟</p>	<p>اول: باید مسئله را بفهمید.</p>
<p>طرح نقشه</p> <p>آیا آن را پیش‌تر دیده بودید؟ آیا همین مسئله را به صورت دیگر دیده‌اید؟ آیا از مسئله‌ای وابسته آگاهی دارید؟ آیا از قضیه‌ای که بتواند سودمند واقع شود آگاهی دارید؟ به مجهول نگاه کنید و بکشید تا درباره مسئله‌ای بیندیشید که همین مجهول یا شبیه آن را داشته باشد. در این جا مسئله‌ای وابسته به مسئله شما وجود دارد که پیش‌تر حل شده است. آیا می‌توانید آن را به کار ببرید؟ آیا می‌توانید روش آن را به کار ببرید؟ آیا باید یک عنصر کمکی را وارد کنید تا به کار بردن آن را ممکن سازد؟ آیا می‌توانید صورت مسئله را دوباره بیان کنید؟ آیا می‌توانید آن را به صورتی دیگر بیان کنید؟ به تعریف‌ها رجوع کنید. اگر نمی‌توانید مسئله طرح شده را حل کنید، نخست به حل کردن مسئله‌ای وابسته به آن بپردازید. آیا می‌توانید مسئله وابسته‌ای را که بیش‌تر در دسترس باشد تخیل کنید؟ یا یک مسئله کلی‌تر؟ یا یک مسئله خاص‌تر؟ یا یک مسئله مشابه؟ آیا می‌توانید یک قسمت از مسئله را حل کنید؟ تنها یک جزء از شرط را نگاه دارید و باقی آن را کنار بگذارید؛ در این صورت مجهول تا چه اندازه معلوم می‌شود و چگونه تغییر می‌کند؟ آیا می‌توانید از داده‌ها چیز سودمندی استخراج کنید؟ آیا داده‌های دیگری به فکر شما می‌رسد که بتواند برای به دست آوردن مجهول سودمند باشد؟ آیا می‌توانید مجهول یا داده‌ها را در صورت لزوم هر دو را چنان تغییر دهید که مجهول تازه و داده‌های تازه به یکدیگر نزدیک‌تر باشند؟ آیا همه داده‌ها را به کار بردید؟ آیا همه شرط را به کار بردید؟ آیا همه مفاهیم اصلی مندرج در مسئله را به کار بردید؟</p>	<p>دوم: ارتباط میان داده‌ها و مجهول را پیدا کنید. ممکن است مجبور شوید که در صورت یافت نشدن ارتباط مستقیم میان داده‌ها و مجهول، مسئله‌های کمکی در نظر بگیرید. باید سرانجام یک نقشه برای حل مسئله طرح کنید.</p>
<p>اجرای نقشه</p> <p>در ضمن اجرای نقشه حل مسئله، هر گام را که برمی‌دارید واری و امتحان کنید. آیا می‌توانید آشکارا ببینید که گام برداشته شده درست بوده است؟ آیا می‌توانید درست بودن آن را ثابت کنید؟</p>	<p>سوم: اجرای نقشه</p>
<p>به عقب نگاه کردن</p> <p>آیا می‌توانید نتیجه را واری کنید؟ آیا می‌توانید نتیجه را از راهی دیگر به دست آورید؟ آیا می‌توانید نتیجه یا روش را در مسئله‌ای دیگر به کار ببرید؟</p>	<p>چهارم: امتحان کردن جواب به دست آمده.</p>

اشاره

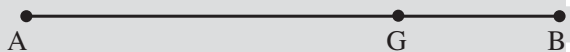
از آنجا که هر روش، در واقع یک یا چند ایده جدید را القا می‌کند، در این مختصر به ارائه روش‌های عمومی آزمون و خطا، عددی (تکرار)، هندسی (تحلیلی، ترسیمی، تعبیری)، جبری، آنالیزی، مثلثاتی، ماتریسی (برداری)، ترکیبی (تلفیقی از چند روش) پرداخته‌ایم که هر یک از روش‌ها علاوه بر القای ایده، نوآوری و خلاقیت، کاربردهایی را نیز دربردارند که به آن‌ها اشاره شده و ممکن است کاربردهای عملی یا نظری بسیار دیگری نیز داشته باشند که به تفصیل در شماره‌های آینده به نتایج آن‌ها خواهیم پرداخت.



## ۲۹ روش برای حل معادله

### درجه دوم و کاربردهای آن‌ها ۱

هندسی است که تحت شرایط مسئله به مقادیر معلوم ارتباط پیدا می‌کند. مثالی از این نوع، قضیه دوم مقاله دوم اصول اقلیدس راجع به تقسیم قطعه خطی مفروض مانند  $AB$  به دو قطعه  $AG$  و  $GB$  است به طوری که مساحت مستطیلی با اضلاع  $AB$  و  $GB$  با مساحت مربعی به ضلع  $AG$  برابر باشد:



در این جا یک مقدار معلوم  $(AB)$  و یک قطعه خط مجهول  $(AG$  یا  $GB)$  وجود دارد، زیرا:  $GB = AB - AG$  و با شرط  $AB \cdot GB = AG^2$ .

در واقع این کار، تقسیم یک پاره خط به بخش طلایی است. در این جا اگر یک مجهول را به طور دلخواه بین دو رابطه حذف کنیم و برای سهولت مقدار  $AB$  را به  $a$  و مقدار مجهول را به  $x$  نشان دهیم:  $x^2 + ax = a^2$  و  $AG = x$  و  $AB = a$  ملاحظه می‌شود که مسئله مربوط به تقسیم یک پاره خط به بخش طلایی در واقع به یک معادله درجه دوم منجر می‌شود که این معادله را می‌توان ساده‌ترین نوع

$$ax^2 + bx + c = 0$$

سیدمحمد رضا هاشمی موسوی  
hashemi-moosavi@yahoo.com

مسئله مسابقه‌ای

به مناسبت بیستمین سال مجله (شماره ۷۰)  
مسابقه ویژه ۷۰ (بیستمین سالگرد مجله)

\* توجه: روش‌های ارائه شده با ذکر منبع، به نام مؤلف مقاله در شماره‌های آتی به چاپ می‌رسد.

روش‌های دیگری را که به نظر شما (غیر از ۲۹ روش دیگر که ارائه خواهد شد) برای حل معادله درجه دوم می‌توان ارائه داد، برای ما ارسال کنید (به نفرات اول تا بیستم جوایزی نفیس اهدا خواهد شد).

مقدمه

در بسیاری از آثار ریاضی قدیمی مسائلی دیده می‌شود که خواهان کشف کمیتی مجهول‌اند. گاهی این مجهول، کمیتی

## چگونگی تلفیق رهیافت عددی و هندسی برای یک علم

### جدید

### جبر خوارزمی

از درون این میراث دوگانه حل مسائل، که خواستار یافتن مجهولات عددی و هندسی بودند، تمدن اسلامی علمی را ابداع کردند که نام جبر را بر آن نهاد. منشأ خود این کلمه در واقع کلمه عربی «الجبر» است که در عنوان بسیاری از آثار عربی به عنوان بخشی از عبارت «الجبر و المقابله» دیده می‌شود. یک معنای «جبر»، «به جای خود برگرداندن» یا «جبران» است. برای مثال، قراردادن  $7x+3=4$  به جای  $4-3x=4x+3$  مثالی از جبر است. «و» همان واو عطف است و جبر را به کلمه «مقابله» الحاق می‌کند؛ «مقابله» خود، در این مضمون به معنای گذاشتن تفاضل دو جمله هم‌جنس که در دو طرف معادله‌ای قرار دارند، در طرفی است که مقدار بزرگ‌تر در آن قرار دارد. برای مثال، قرار دادن  $3x=4$  به جای برابری  $3x+1=5$  مثالی از «مقابله» است. به وضوح، با این دو عمل، هر معادله جبری به معادله‌ای تبدیل خواهد شد که در آن مجموعی از جملات مثبت در یک طرف برابر است با صفر یا مجموعی از جملات مثبت که متضمن توان‌های مختلف  $x$  اند. به‌ویژه، هر معادله درجه دوم با یک ریشه مثبت به یکی از سه صورت استانده زیر قابل تحویل است:

$$px^2 + qx = r; px^2 + r = qx; px^2 = qx + r$$

که در این معادله‌ها  $p$ ،  $q$  و  $r$  هر سه مثبت‌اند و این شرطی است که در سراسر ریاضیات اسلامی دوره میانی اعمال می‌شود. این شرط را مجدداً در اثر «عمر خیام» هم می‌بینیم. این قاعده تا اوایل سده شانزدهم در ریاضیات غربی نیز حکم فرماست.

### نتیجه بحث

علم «جبر و مقابله» در آغاز خود، علم تبدیل معادلات متضمن یک یا چند مجهول به یکی از صورت‌های استانده سه‌گانه فوق و سپس حل معادله در این صورت بود. البته ریاضی‌دانان دیگری مثل ثابت بن قره، ابوکامل (ملقب به حاسب مصری با گام‌هایی فراتر از خوارزمی)، ابوبکر کرجی و غیره روی حل معادله‌ها به‌ویژه معادله‌های درجه دوم کار کرده‌اند که باید تقدیر شوند.

### انواع روش‌های حل معادله درجه دوم

می‌دانیم برای یک مسئله ممکن است روش‌های حل گوناگونی وجود داشته باشد که با ابتکار، خلاقیت و نوآوری بتوان به تعدادی از آن‌ها دست یافت. البته برخی از مسائل را ممکن است با هر یک از روش‌های زیر حل کرد و حتی ممکن است برای هر نوع، چندین

معادله درجه دوم برای حل یک مسئله هندسی دانست.

البته ۱۸۰۰ سال پیش از میلاد، کاتبان بابلی قادر به حل مسائلی بودند که به معادله‌های درجه دوم می‌انجامید و اگرچه بابلی‌ها به جای « $x^2+6x=27$ » می‌گفتند «مساحت مربعم را به شش برابر ضلع آن اضافه کرده‌ام و حاصل ۲۷ شده است»؛ ولی روشی را برای حل این مسئله به کار می‌بردند که پایه و اساس آن، همان چیزی است که امروزه به کار می‌بندیم. البته در ترد بسیاری از نویسندگان یونانی، نحوه پرداختن به مسئله یافتن مجهولات، هندسی بوده است. برای مثال، اقلیدس در تقسیم قطعه خط به بخش طلایی به صورت هندسی با مسئله حل معادله درجه دوم سروکار دارد، زیرا هرگاه با فرض  $AB=a$  و  $AG=x$  شرط  $AG=AB \cdot GB$  (به  $a(a-x)=x^2$ ) تبدیل شود، نتیجه می‌شود که  $a^2=ax+x^2$ ؛ و این مستلزم آن است که با مفروض بودن قطعه خطی به طول  $a$  قطعه خطی به طول  $x$  بسازیم به طوری که  $x^2+ax=a^2$ . اما اقلیدس به مفهوم عددی «طول یک قطعه خط» نمی‌اندیشد، بلکه به جای آن وی به  $x^2+ax=x(x+a)$  به عنوان مستطیلی که دارای اضلاع  $x$  و  $x+a$  است، می‌نگرد. او وقتی قضیه ۶ مقاله دوم اصول خود را به کار می‌برد، در عمل «مربع را کامل می‌کند»، به این معنا که اگر مربعی به ضلع  $\frac{a}{2}$  به این مستطیل یعنی  $x(x+a)$  اضافه کنیم، نتیجه آن مساحت مربعی به ضلع  $(x+\frac{a}{2})$  خواهد بود که در این صورت،  $x$  مساوی با ضلع این مربع منهای مقدار معلوم  $\frac{a}{4}$  است:

$$x(x+a) + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\Delta a^2}{4};$$

$$x + \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{\Delta}}{2}; x = \frac{a\sqrt{\Delta}}{2} - \frac{a}{2}; x = \left(\frac{\sqrt{\Delta}-1}{2}\right)a$$

### نتیجه تاریخی

بخش طلایی، تنها یکی از نمونه‌های مسائل هندسی است که هندسه‌دانان یونانی دوران کلاسیک چگونه توانستند به روابط درجه دوم مانند  $x^2+ax=a^2$  به عنوان احکامی درباره مساحت‌ها بنگرند. آن‌ها برای بررسی این احکام، مجموعه‌ای از قضایا، مانند قضایای مقاله دوم اصول را در اختیار داشتند که به آن‌ها اجازه می‌داد این مساحت‌ها را کامل و مربع‌های معلومی ایجاد کنند که اضلاع آن‌ها قطعه خط‌های مطلوب را به دست دهند. به اعتقاد بسیاری از محققان، دلیل تاریخی تأکید یونانیان بر هندسه این است که در حل معادله‌های درجه دوم اعداد گنگی از قبیل  $\sqrt{2}$ ،  $\sqrt{3}$ ،  $\sqrt{5}$  و... ناگزیر پیش می‌آیند. چون یونانیان حتی تعریفی برای این اعداد نداشتند و قادر هم نبودند به‌طور دقیق به آن‌ها بپردازند، در نتیجه هر موقع که طالب استدلال‌های دقیق بودند، خود کمیت‌های هندسی را به کار می‌بردند.

را به صورت  $x=g(x)$  نشان داد، قابل اجراست. برای نشان دادن روش عمل، به حل معادلهٔ درجهٔ دوم  $x^2 + x - 1 = 0$  می‌پردازیم.

ابتدا معادلهٔ مورد نظر را به صورت  $x = \frac{1}{x+1}$  می‌نویسیم و برابری بازگشتی زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n + 1}$$

پس، می‌توان عمل تکرار را به صورت زیر انجام داد:

$$n=1: x_1 = \frac{1}{x_0 + 1}, x_0 = 0; x_1 = \frac{1}{0+1} = 1$$

$$n=2: x_2 = \frac{1}{x_1 + 1}, x_1 = 1; x_2 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$n=3: x_3 = \frac{1}{x_2 + 1}, x_2 = \frac{1}{2}; x_3 = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3} \approx 0.667$$

با تکرار این عمل به تعداد دلخواه به تقریب دلخواه خواهیم رسید. در این مثال، پس از تکرار پی‌درپی عمل، به یک ریشهٔ مثبت معادله دست می‌یابیم:

$$(x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}) x \approx 0.6180 \text{ (ریشهٔ واقعی معادله)}$$

و از ۷ مرتبه تکرار:

$$(n=7) x_7 \approx 0.6180 \text{ (ریشهٔ تقریبی معادله)}$$

کاربرد: این روش برای حل معادله‌هایی است که ضرایب عددی دارند و آن‌ها را می‌توان به صورت  $x=g(x)$  نوشت.

### ● روش‌های هندسی

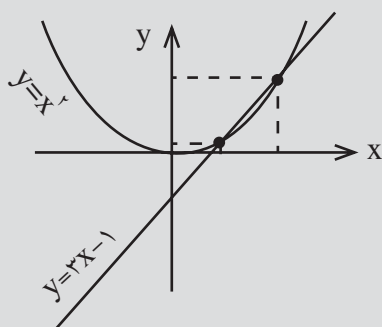
#### (۳) روش تحلیلی - ترسیمی

می‌خواهیم معادلهٔ  $x^2 - 3x + 1 = 0$  را به روش تحلیلی-ترسیمی حل کنیم. برای حل این معادله ابتدا معادله را به دو ضابطهٔ تابع خطی و تابع منحنی (سه‌می) به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(x^2 = 3x - 1)$$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$$

واضح است که محل تلاقی دو نمودار و اندازه‌گیری طول نقطه‌های تقاطع به‌طور تقریبی جواب‌های معادلهٔ مورد نظر هستند.



طریق مختلف وجود داشته باشد که ما در این جا به تعدادی از آن‌ها اشاره می‌کنیم:

(۱) آزمون و خطا، (۲) عددی (تکرار)، (۳) هندسی (تحلیلی، ترسیمی، تعبیری)، (۴) جبری، (۵) آنالیزی، (۶) مثلثاتی، (۷) ماتریسی (بردار)، (۸) ترکیبی (تلفیقی از چند روش)

\* توجه: روش‌های دیگری نیز با ابزارهای دیگر شاخه‌های ریاضیات وجود دارند که در این مقاله مختصر نمی‌توانیم به آن‌ها بپردازیم.

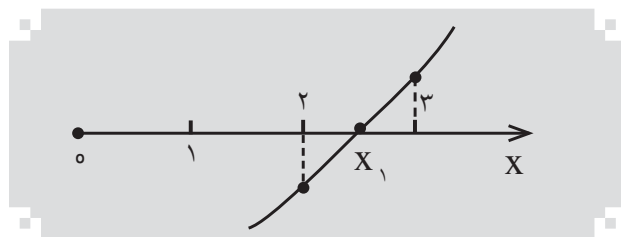
در این جا برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم (۱) از هر یک از شیوه‌های بالا استفاده می‌کنیم و به صورتی کاملاً متنوع و خلاق و همراه با نوآوری به ارائهٔ طریق می‌پردازیم.

#### (۱) روش آزمون و خطا

این روش یکی از ساده‌ترین روش‌های حل برای معادلهٔ درجهٔ دوم است که در واقع یک جواب تقریبی به دست می‌دهد. این روش را برای هر معادلهٔ پیچیده‌تر نیز می‌توان به کار برد. البته این روش عددی برای معادله‌هایی با ضرایب معلوم به کار می‌رود. برای مثال، معادلهٔ درجهٔ دوم  $x^2 - 3x + 1 = 0$  را با این روش حل می‌کنیم. در این روش در مرحلهٔ اول جدول زیر را تکمیل می‌کنیم:

x	-1	0	1	2	3	...
$x^2 - 3x + 1$	5	1	-1	-1	1	...

چون مقدار عبارت « $y = x^2 - 3x + 1$ » به ازای  $x=0$  مثبت و به ازای  $x=1$  منفی است (با توجه به نمودار منحنی  $y = x^2 - 3x + 1$  ثابت می‌شود) یک جواب معادله بین ۰ و ۱ و با همین استدلال جواب دیگر معادله بین ۲ و ۳ خواهد بود (با توجه به رسم نمودار منحنی



بدیهی است) با تکرار این عمل و در فاصله‌های کوچک‌تر به جواب‌های معادله با هر دقت و تقریب دلخواه می‌توان دست یافت. کاربرد: این روش برای حل هر معادلهٔ جبری، مثلثاتی و... با ضرایب عددی قابل اجراست.

#### (۲) روش عددی (تکرار)

این روش نیز مانند روش اول (آزمون و خطا) به سهولت برای حل تقریبی معادلهٔ درجهٔ دوم و هر معادلهٔ پیچیدهٔ دیگر که بتوان آن



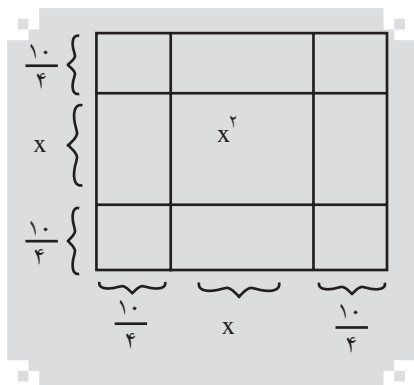
به زبان امروزی چنین است:

$$x^2 + 10x = 39 \quad (1) \quad (x = \text{ده جذر} = 10x)$$

خیام امتداد اضلاع مربع به ضلع  $x$  را از چهار گوشه مانند شکل

$$S_T = x^2 + 4\left(\frac{1}{4}x\right) + 4\left(\frac{1}{4}\right)^2 = (x+5)^2 \quad \text{زیر انجام می دهد:}$$

$$(x+5)^2 = 39 + 25 = 64; \quad x+5 = 8; \quad x = 3$$



**کاربرد:** کاربردی را که برای روش خوارزمی ذکر شد، برای این

روش نیز می توان یادآور شد.

**توجه:** روش ششم که به نام روش مثلثی یا خط کش و نقاله

نام گذاری شده، روش ابداعی مؤلف است.

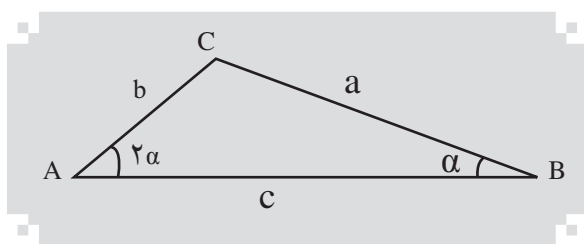
### (۶) روش مثلثی (خط کش و نقاله)

برای القای ایده این روش، مسئله زیر را یادآوری می کنیم:

هرگاه یک زاویه از مثلثی دو برابر زاویه ای دیگر در آن مثلث

باشد، رابطه مستقل بین اضلاع به صورت زیر است:

$$a^2 - b^2 = bc \quad (1)$$



برای اثبات رابطه (۱) کافی است در شکل زیر رابطه تشابه را

بنویسیم:

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b+c} \quad (2)$$

**توضیح:** ابتدا ضلع  $AB$  را (از سمت چپ) به اندازه  $b$  امتداد

می دهیم و با توجه به  $AB'=b$ ، رأس  $C$  را به  $B'$  وصل می کنیم. از

تشابه دو مثلث  $AB'C$  و  $BB'C$  رابطه (۲) یا (۱) نتیجه

می شود.

**کاربرد:** این روش برای حل بسیاری از معادله هایی که از چند

نوع تابع جبری، مثلثاتی، لگاریتمی و... تشکیل یافته اند و هم چنین

معادله هایی از درجه های بالاتر، به ویژه معادله درجه دوم به کار

می رود که خیام با این روش حل کرده است.

### (۴) روش خوارزمی (تعبیری)

خوارزمی برای حل معادله های درجه دوم، شش حالت خاص

را مورد بررسی قرار می دهد. از میان این حالت ها به اختصار

فقط یکی از آن ها را توضیح می دهیم. معادله  $x^2 + 4x - 21 = 0$

را در نظر می گیریم. در روش خوارزمی، جمله های دارای

مجهول را در یک طرف برابری نگه می داریم و عدد ثابت را به

طرف دیگر می بریم. بنابراین، معادله را به صورت  $x^2 + 4x = 21$

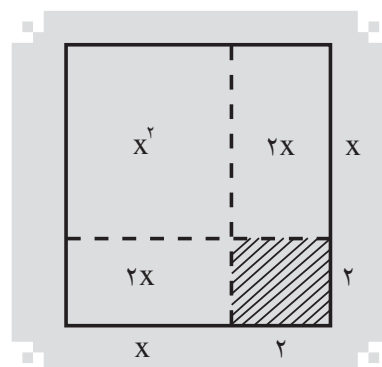
می نویسیم. نصف ضریب  $x$  را حساب می کنیم (در این جا عدد

۲ است). مساحت مربعی با ضلع  $x+2$  را می توان حساب کرد.

در شکل ۳ مساحت مربع هاشورخورده برابر  $2 \times 2$  است و بقیه

مربع، مساحتی برابر  $x^2 + 2(2x) = x^2 + 4x$  دارد که آن هم برابر

۲۱ است.



بنابراین، مساحت کل مربع بزرگ برابر  $21 + 4 = 25$  است. پس،

$$\text{طول ضلع مربع بزرگ برابر } x+2 = \sqrt{25} = 5 \quad \text{و در نتیجه } x=3.$$

**کاربرد:** این روش برای تحلیل ریشه های معادله های درجه زوج

بسیار مناسب است. با تعمیم این روش برای حل هندسه معادله

درجه سوم می توان منحصر بودن جواب را در حالت  $\Delta > 0$  (مبین

معادله درجه سوم) به اثبات رساند. (برای اطلاع بیشتر رجوع

کنید به شماره ۲۲ رشد آموزش ریاضی، مقاله مؤلف با عنوان «حل

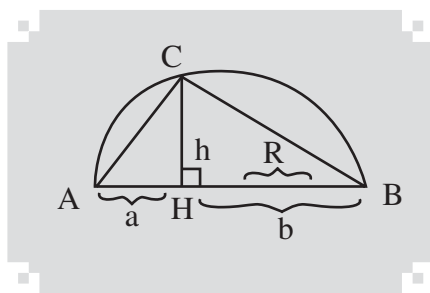
هندسی معادله درجه سوم»؛ مشابه روش خوارزمی مکعبی جدید

با امتداد اضلاع مکعب روی مکعب اولیه به ضلع  $z$  بنا می شود).

### (۵) روش خیام

خیام و خوارزمی روش مشابهی را برای اثبات جواب معادله

«مالی و ده جذر معادل سی و نه درهم» به کار برده اند. این معادله



اکنون اگر  $a$  و  $b$  را ریشه‌های معادله درجه دوم  $x^2 - 2Rx - h^2 = 0$  در نظر بگیریم، از مقایسه این معادله با معادله درجه دوم عمومی زیر:

$$x^2 - px - q = 0 \quad (1)$$

می‌توان نوشت:

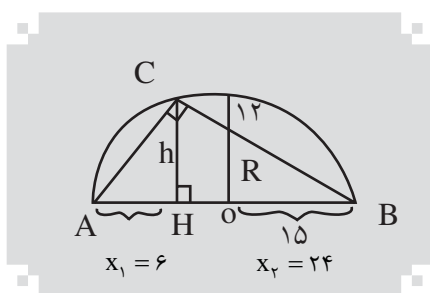
$$\begin{cases} -2R = -p \\ -h^2 = -q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = \frac{p}{2} \\ h = \sqrt{q} \end{cases}$$

بنابراین، در عمل برای یافتن ریشه‌های مثبت معادله (1) کافی است در نیم‌دایره‌ای به شعاع  $\frac{p}{2}$  مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ارتفاع وارد بر وتر  $AB$  به طول  $\sqrt{q}$  محاط کنیم. برای مثال، ریشه‌های مثبت معادله (2)  $x^2 - 30x - 144 = 0$  را به روش دایره‌ای (خط‌کش و پرگار) تعیین می‌کنیم.

در این مثال، داریم  $R = \frac{30}{2} = 15$  و  $h = \sqrt{q} = \sqrt{144} = 12$  پس کافی است مثلثی با ارتفاع وارد بر وتر به طول  $h=12$  را در نیم‌دایره‌ای به شعاع  $R=15$  محاط کرد.

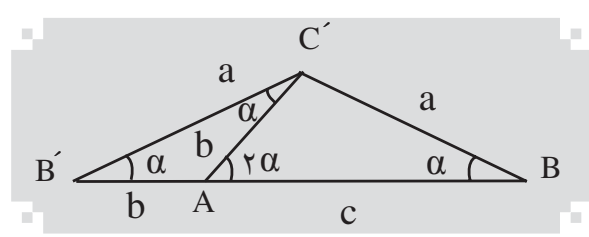
در این صورت قطعات جدا شده روی وتر مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  ریشه‌های معادله (2) خواهند بود.

$$\begin{cases} AH = x_1 = 6 \\ BH = x_2 = 24 \end{cases}$$



**توجه:** این روش حل با خط‌کش و پرگار است. یعنی ریشه‌ها با اندازه‌گیری با خط‌کش تعیین می‌شوند.

**کاربرد:** این روش مخصوص حالتی از معادله درجه دوم است که در معادله عمومی  $x^2 + mx + n = 0$  مقادیر  $m$  و  $n$  اعدادی منفی باشند، زیرا در حالت  $m < 0$  با روش‌های هندسی خوارزمی - خیام یا مثلثی قابل تعبیر نیست. با استفاده از این روش می‌توان به هر دو جواب مثبت معادله دست یافت (قطعات جدا شده روی وتر مثلث).



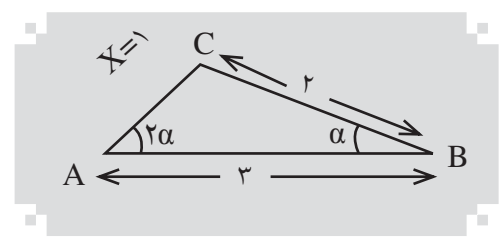
اکنون اگر در رابطه (1)، مقدار  $c$  را به  $p$  و مقدار  $b$  را به  $x$  و مقدار  $a$  را به  $q$  نشان دهیم، معادله درجه دوم زیر حاصل می‌شود:

$$x^2 + px = q \quad (3)$$

با توجه به برابری‌های  $c=p$  و  $a=\sqrt{q}$ ، واضح است که ریشه مثبت معادله (3) یعنی مقدار  $x$ ، در واقع ضلع سوم مثلث  $ABC$  است. برای مثال، ریشه مثبت معادله  $x^2 + 3x - 4 = 0$  را به روش مثلثی تعیین می‌کنیم.

در این مثال داریم  $AB = c = p = 3$  و  $BC = a = \sqrt{q} = 2$ . بنابراین، با رسم مثلث  $ABC$  ضلع  $AC$  ریشه مثبت معادله است:  $AC = x = 1$

(ریشه مثبت معادله  $x^2 + 3x - 4 = 0$  برابر  $x=1$  است)



**توجه:** این روش حل با خط‌کش و نقاله انجام می‌شود. **کاربرد:** با تعمیم این روش، یعنی مثلثی با زاویه‌های  $\alpha$  و  $n\alpha$  معادله‌های درجه  $n$ ام ( $n=3, 4$ ) نیز قابل حل‌اند.

**توجه:** روش هفتم به نام روش دایره‌ای یا خط‌کش و پرگار نام‌گذاری شده که با تحلیل کردن روابط بین ریشه‌ها و ضرایب، روش ابداعی مؤلف است.

### (7) روش دایره‌ای (خط‌کش و پرگار)

برای القای ایده این روش، مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  را محاط در نیم‌دایره‌ای به شعاع  $R$  در نظر می‌گیریم:

در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  می‌توان نوشت:  $a.b = h^2$  پس:

$$\begin{cases} a + b = 2R \\ a.b = h^2 \end{cases}$$

## ● روش‌های جبری

### ۸ روش مربع کامل

این روش در عمل همان روش خواری است با این تفاوت که جبری است و نیازی به تعبیر هندسی ندارد و به همین دلیل در حالت عمومی می‌توان از آن استفاده کرد.

سعی بر این است که روش خواری را به کار ببریم. برای مثال معادله

$$x^2 - 10x + 16 = 0 \quad (1)$$

را در نظر می‌گیریم. ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^2 - 10x = -16 \quad (2)$$

مربع نصف ضریب  $x$  را به دو طرف اضافه می‌کنیم (تا طرف اول معادله مربع کامل شود)

$$x^2 - 10x + (-5)^2 = -16 + (-5)^2 \quad (3)$$

معادله (۳) را به صورت مختصر می‌نویسیم:

$$(x - 5)^2 = 9 \quad (4)$$

از دو طرف معادله (۴) جذر می‌گیریم و مقدار  $x$  را بدون محدودیت‌های هندسی به دست می‌آوریم (پس از جذرگیری از دو طرف، علامت‌های  $\pm$  را می‌گذاریم):

$$x - 5 = \pm 3 \quad (5)$$

از معادله (۵) جواب‌های معادله (۱) تعیین می‌شوند:

$$x = 5 \pm 3; x_1 = 2, x_2 = 8$$

کاربرد: این روش برای حل عمومی معادله درجه دوم به کار می‌رود. در این جا با این روش، معادله درجه دوم (۱) را حل می‌کنیم:

$$ax^2 + b + c = 0 \quad (1)$$

با فرض  $a \neq 0$  معادله (۱) را بر  $a$  تقسیم می‌کنیم و عدد ثابت  $\frac{c}{a}$  را با تعویض علامت به طرف دوم می‌بریم و برای مربع‌سازی طرف اول، عبارت  $(\frac{b}{2a})^2$  (در واقع مربع نصف ضریب  $x$ ) را به دو طرف اضافه می‌کنیم:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}; x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 = (\frac{b}{2a})^2 - \frac{c}{a} \quad (2)$$

معادله (۲) را به صورت مختصر می‌نویسیم:

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a^2} \quad (3)$$

با فرض  $\Delta \geq 0$  از دو طرف معادله (۳) جذر می‌گیریم (علامت‌های  $\pm$  هر دو مورد قبول است):

$$\text{ریشه‌های معادله (۱)} \quad \Delta \geq 0: x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{\Delta}}{2a}; x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (1)$$

(معادله)

### ۹ روش تجزیه

در برخی موارد، معادله درجه دوم به صورت ضرب دو چند جمله‌ای درجه اول برابر صفر است. برای مثال:

$$x^2 - 3x = 0; x(x - 3) = 0 \quad (1)$$

و همچنین:

$$x^2 - 3x + 2 = 0; (x - 1)(x - 2) = 0 \quad (2)$$

با توجه به یکی از خاصیت‌های اساسی اعداد:

\* برای این که ضرب دو عدد صفر شود لاقبل یکی از آن دو عدد صفر است.

$$a \cdot b = 0; a = 0 \text{ یا } b = 0$$

پس، معادله (۱) وقتی برقرار است که  $x = 0$  یا  $x - 3 = 0$  و هم‌چنین معادله (۲) وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$x - 1 = 0 \text{ یا } x - 2 = 0 \quad (3)$$

در واقع جواب‌های معادله‌های (۳) همان جواب‌های معادله زیر است:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

بنابراین، با استفاده از تجزیه عبارت درجه دوم (طرف اول) توانستیم به جواب‌های معادله دست یابیم:  $x_1 = 1; x_2 = 2$

کاربرد: در صورتی که بتوانیم چند جمله‌ای طرف اول معادله را تجزیه کنیم به راحتی می‌توانیم به جواب‌های معادله مورد نظر دست یابیم.

### ۱۰ روش مربع‌سازی معادله عمومی

$$\text{برای مربع‌سازی معادله عمومی} \quad (1) \quad ax^2 + bx + c = 0$$

کافی است معادله را در (۴a) ضرب و عبارت  $b^2$  را به دو طرف اضافه کنیم:

$$4a(ax^2 + bx + c) = 0; 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0;$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac = \Delta; (2ax + b)^2 = \Delta$$

با فرض  $\Delta \geq 0$ ، پس از جذرگیری از دو طرف معادله:

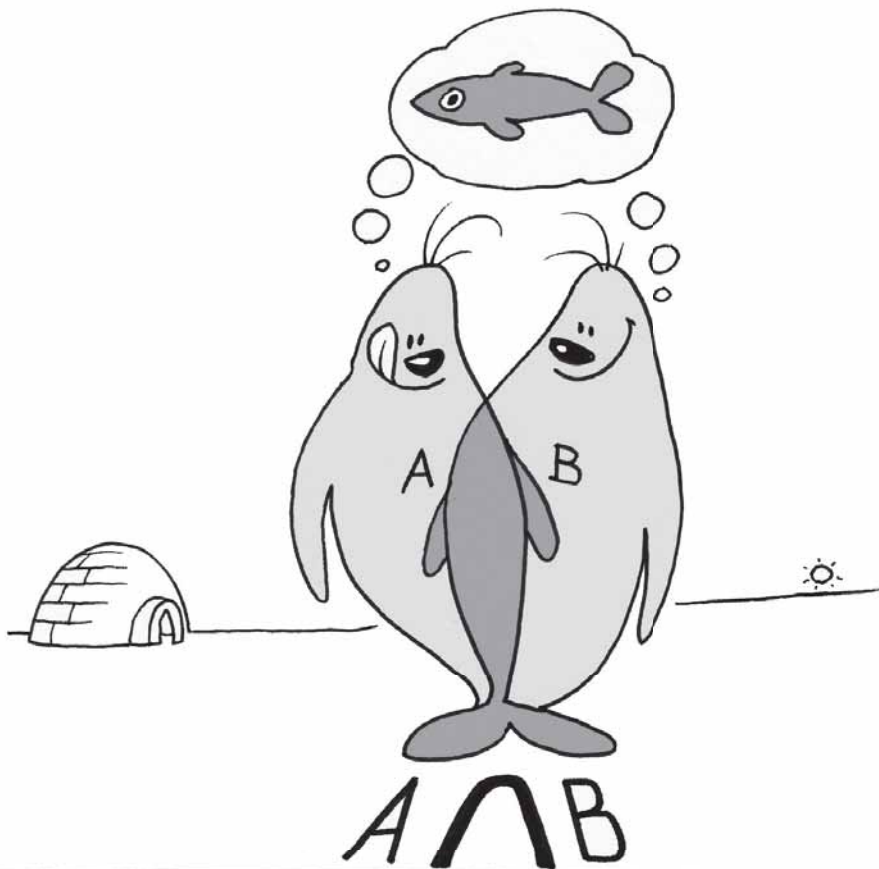
$$2ax + b = \pm\sqrt{\Delta}$$

بنابراین داریم:

$$\text{جواب‌های معادله (۱)} \quad a \neq 0, \Delta \geq 0; x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

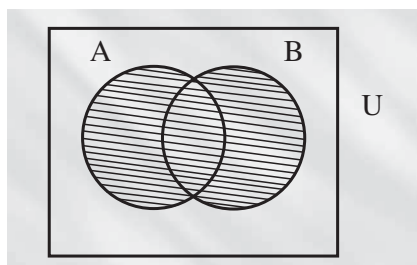
کاربرد: این روش برای حل عمومی معادله درجه دوم (۱) بسیار مناسب و به سادگی و سهولت خاصی انجام می‌شود (به‌ویژه برای حل معادله‌های پارامتری مانند:  $x^2 + 2mx + m + 1 = 0$  بسیار مناسب است و با سهولت انجام خواهد گرفت).

ادامه دارد...



## اعمال بین مجموعه‌ها جبر مجموعه‌ها

حمیدرضا امیری



**تذکر:** بلافاصله از تعریف اجتماع، این نتیجه‌های مهم به دست می‌آیند که «هر مجموعه زیرمجموعه اجتماع خودش با هر مجموعه دیگر است» و «اجتماع هر مجموعه با خودش، مساوی با خودش است».

$$I) \begin{cases} A \subseteq (A \cup B) \\ B \subseteq (A \cup B) \end{cases} \quad II) A \cup A = A$$

**قضیه ۱:** اگر  $A \subseteq B$  و  $C \subseteq D$  آن‌گاه  $(A \cup C) \subseteq (B \cup D)$   
اثبات: (قضیه‌های اولیه و مقدماتی را ناچاریم به روش عضوگیری

در این مقاله سعی داریم به ارتباط بین اعمال مجموعه‌ها پردازیم و مسائلی در مجموعه‌ها حل کنیم که در حل آن‌ها فقط از قوانین بین مجموعه‌ها، قضیه‌ها و تعاریف استفاده شود.

تعاریف و قضیه‌ها به گونه‌ای بیان می‌شوند که هر کدام پیش‌نیاز بعدی و درنهایت مسائل برای حل وابسته به این تعاریف و قضیه‌ها خواهند بود.

بین مجموعه‌ها ۴ عمل اجتماع، اشتراک، تفاضل و تقاضل متقارن تعریف می‌شود که البته دو عمل تفاضل و تقاضل متقارن اعمال مستقلی نیستند و بیان تعریف این دو عمل با استفاده از اعمال قبل از خود ممکن است.

۱. **عمل اجتماع:**  $(A \cup B)$  مجموعه‌ای است که به صورت زیر

تعریف می‌شود:

$$(A \cup B) = \{x \in U \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

$$\begin{cases} x \in (A \cup B) \Leftrightarrow x \in A \text{ یا } x \in B \\ x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow x \notin A \text{ و } x \notin B \end{cases}$$



دلخواه ثابت کنیم).

$$(3) C \subseteq (A \cup B) \cup C \text{ می دانیم}$$

$$(4) (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C \Rightarrow \text{نتیجه قضیه ۱ و (۳) و (۲)}$$

$$(1) \text{ و (۴) و (۳) } \Rightarrow A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$$

به طریق مشابه ثابت می شود که  $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$ .

در نتیجه تساوی به اثبات می رسد و حکم به دست می آید.

قضیه ۴: برای هر دو مجموعه دلخواه مانند  $A$  و  $B$  داریم:

(خاصیت جابه جایی)

$$(A \cup B) = (B \cup A)$$

$$(1) (B \cup A) \subseteq (A \cup B) \Rightarrow \text{نتیجه قضیه ۱} \quad B \subseteq (A \cup B) \text{ می دانیم. اثبات}$$

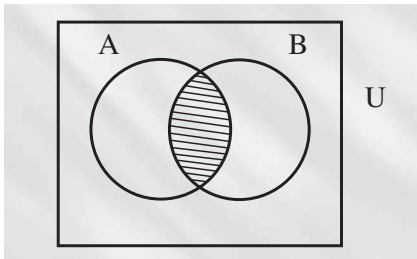
$$(2) (A \cup B) \subseteq (B \cup A) \Rightarrow \text{نتیجه قضیه ۱} \quad A \subseteq (B \cup A)$$

تعریف تساوی

$$(1), (2) \Rightarrow (A \cup B) = (B \cup A)$$

۲. عمل اشتراک:  $(A \cap B)$  مجموعه ای است که به صورت زیر

تعریف می شود:



$$(A \cap B) = \{x \in U \mid x \in A \text{ و } x \in B\}$$

$$\begin{cases} x \in (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \text{ و } x \in B \\ x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A \text{ یا } x \notin B \end{cases}$$

تذکر: با توجه به تعریف اشتراک واضح است که  $I$  اشتراک

دو مجموعه همواره زیرمجموعه هر یک از آن دو مجموعه است (II)

اشتراک هر مجموعه با خودش مساوی با خود آن مجموعه است.

$$I) \begin{cases} (A \cap B) \subseteq A \\ (A \cap B) \subseteq B \end{cases}, II) A \cap A = A$$

قضیه ۱: اگر  $A \subseteq B$  و  $C \subseteq D$  آن گاه  $(A \cap C) \subseteq (B \cap D)$

اثبات: شبیه به اثبات قضیه ۱ در عمل اجتماعی و با عضوگیری

انجام می شود.

نتیجه: اگر  $A \subseteq B$  و  $A \subseteq C$  آن گاه  $A \subseteq (B \cap C)$

اثبات:

$$A \subseteq C \xrightarrow{\text{قضیه ۱}} (A \cap A) \subseteq (B \cap C) \Rightarrow A \subseteq (B \cap C) \\ A \subseteq B$$

$$\text{یا } x \in B \Leftrightarrow x \in C \xrightarrow{A \subseteq B} x \in A \text{ یا } x \in C \Leftrightarrow x \in (A \cup C) \text{ فرض کنیم} \\ x \in D \Leftrightarrow x \in (B \cup D) \Rightarrow (A \cup C) = (B \cup D)$$

نتیجه: از قضیه ۱ نتیجه زیر را می توان به دست آورد:

$$A \subseteq C, B \subseteq C \Rightarrow (A \cup B) \subseteq C$$

اثبات:

$$A \subseteq C, B \subseteq C \Rightarrow (A \cup B) \subseteq \underbrace{(C \cup C)}_C \Rightarrow (A \cup B) \subseteq C$$

قضیه ۲: شرط لازم و کافی برای آن که  $A \subseteq B$ ، آن است که

$$(A \cup B) = B \text{ به عبارت دیگر:}$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (A \cup B) = B$$

اثبات: ابتدا فرض می کنیم  $A \subseteq B$  و ثابت می کنیم

$(A \cup B) = B$ . (برای اثبات تساوی بین دو مجموعه باید ثابت

کنیم هر کدام زیرمجموعه دیگری است).

$$(1) B \subseteq (A \cup B) \text{ طبق تعریف داریم}$$

$$\text{نتیجه قضیه ۱} \quad A \subseteq B \left. \begin{array}{l} \text{طبق فرض} \\ \text{می دانیم} \end{array} \right\} \Rightarrow (A \cup B) \subseteq B \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow (A \cup B) = B$$

حال فرض می کنیم  $(A \cup B) = B$  و ثابت می کنیم

$$A \subseteq B$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{می دانیم} \\ \text{طبق فرض} \end{array} \right\} A \subseteq (A \cup B) \Rightarrow A \subseteq B$$

ا به جای  $(A \cup B)$  در رابطه بالا طبق فرض قرار دادیم  $B$ .

نتیجه های حاصل از قضیه ۲:

$$\text{قضیه ۲} \quad I) \emptyset \subseteq A \Rightarrow A \cup \emptyset = A$$

$$\text{قضیه ۲} \quad II) A \subseteq U \Rightarrow A \cup U = U$$

قضیه ۳: برای هر سه مجموعه دلخواه  $A$  و  $B$  و  $C$  داریم

(خاصیت شرکت پذیری):

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

اثبات:

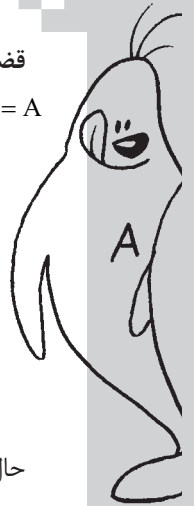
$$\text{می دانیم } A \subseteq (A \cup B), (A \cup B) \subseteq (A \cup B) \cup C$$

$$\text{نتیجه قضیه ۱} \Rightarrow A \subseteq (A \cup B) \cup C \quad (1)$$

$$\text{می دانیم } B \subseteq (A \cup B), (A \cup B) \subseteq (A \cup B) \cup C$$

$$\Rightarrow B \subseteq (A \cup B) \cup C \quad (2)$$





قضیه ۲: شرط لازم و کافی برای آن که  $A \subseteq B$ ، آن است که  $(A \cap B) = A$ .

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (A \cap B) = A$$

اثبات: ابتدا فرض می‌کنیم  $A \subseteq B$  و ثابت می‌کنیم  $(A \cap B) = A$ .

$$(1) \quad (A \cap B) \subseteq A \quad \text{می‌دانیم}$$

$$\left. \begin{array}{l} A \subseteq B \\ A \subseteq A \end{array} \right\} \Rightarrow A \subseteq (A \cap B) \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow (A \cap B) = A$$

حال فرض می‌کنیم  $(A \cap B) = A$  و ثابت می‌کنیم  $A \subseteq B$ .

$$\left. \begin{array}{l} (A \cap B) \subseteq B \\ (A \cap B) = A \end{array} \right\} \Rightarrow A \subseteq B$$

(به جای  $A$  در رابطه بالایی طبق فرض قرار داده‌ایم  $A$ ).

تذکر: دو خاصیت شرکت‌پذیری و جابه‌جایی در اشتراک مشابه

این خواص در اجتماع قابل اثبات است و داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\ (A \cap B) = (B \cap A) \end{array} \right.$$

دو نتیجه مهم از قضیه ۲:

$$I) \quad \emptyset \subseteq A \Rightarrow A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$II) \quad A \subseteq U \Rightarrow A \cap U = A$$

تذکر: با توجه به تعاریف اجتماع و اشتراک و مجموعه‌های

مرجع، تهی و تعریف متمم یک مجموعه داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \cup A' = U \\ A \cap A' = \emptyset \end{array} \right.$$

نتیجه مهم: اگر  $A \subseteq B$  آن‌گاه  $A \cap B' = \emptyset$  و برعکس

$$\text{اثبات: } \left\{ \begin{array}{l} A \subseteq B \\ B' \subseteq B' \end{array} \right. \xrightarrow{\text{قضیه ۱}} (A \cap B') \subseteq (B \cap B') \Rightarrow (A \cap B') \subseteq \emptyset$$

چون همواره  $\emptyset \subseteq (A \cap B')$  پس  $A \cap B' = \emptyset$

اثبات عکس مطلب بدیهی است و به عنوان تمرین برعهده

شما گذاشته می‌شود. یعنی با استفاده از  $A \cap B' = \emptyset$  ثابت کنید

$$A \subseteq B$$

۳. عمل تفاضل: تفاضل  $B$  از  $A$  یعنی  $(A - B)$  مجموعه‌ای

است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(A - B) = \{x \in U \mid x \in A \text{ و } x \notin B\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in (A - B) \Leftrightarrow x \in A \text{ و } x \notin B \\ x \notin (A - B) \Leftrightarrow x \notin A \text{ یا } x \in B \end{array} \right.$$

تذکر: با توجه به تعریف تفاضل، واضح است که همواره  $A \subseteq (A - B)$ .

نتیجه مهم: رابطه بین تفاضل و اشتراک

با توجه به تعریف تفاضل و اشتراک رابطه زیر به سادگی نتیجه می‌شود و از این رابطه برای تبدیل تفاضل به اشتراک یا اشتراک به تفاضل استفاده می‌کنیم:

$$(A - B) = (A \cap B')$$

$$(A - B) = \{x \in U \mid x \in A, x \notin B\} = \{x \in U \mid x \in A, x \in B'\}$$

تعریف متمم

$$\stackrel{\text{تعریف اشتراک}}{=} (A \cap B')$$

قضیه ۱: شرط لازم و کافی برای آن که  $A \subseteq B$ ، آن است که  $A - B = \emptyset$ .

اثبات:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (A \cap B') = \emptyset \Leftrightarrow A - B = \emptyset$$

چند تساوی مهم: (در اثبات تساوی‌های زیر کافی است تفاضل را به اشتراک تبدیل کنیم).

$$I) A - A = \emptyset, \quad II) A - \emptyset = A, \quad III) A - U = \emptyset$$

$$IV) U - A = A', \quad V) A - A' = A, \quad VI) \emptyset - A = \emptyset$$

قضیه: (قانون‌های دمورگان)

$$\left\{ \begin{array}{l} I) (A \cup B)' = (A' \cap B') \\ II) (A \cap B)' = (A' \cup B') \end{array} \right.$$

اثبات (I) به روش عضوگیری دلخواه ثابت می‌کنیم:

$$x \in (A \cup B)' \Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow x \notin A \text{ و } x \notin B$$

$$\stackrel{\text{تعریف اشتراک}}{\Leftrightarrow} x \in A' \text{ و } x \in B' \stackrel{\text{تعریف متمم}}{\Leftrightarrow} x \in (A' \cap B')$$

$$\Rightarrow (A \cup B)' = (A' \cap B')$$

در (I) ثابت شد که می‌توانیم متمم اجتماع را حساب و به اشتراک تبدیل کنیم.

$$(A' \cup B')' = ((A')' \cap (B')') = (A \cap B)$$

$$\Rightarrow [(A' \cup B')']' = (A \cap B)' \Rightarrow (A' \cup B') = (A \cap B)'$$

نتیجه: اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه دلخواه باشند، داریم:

$$(A - B)' = (A' \cup B)$$

اثبات:

$$(A - B)' = (A \cap B)' = (A' \cup B)$$

تذکر: عمل تفاضل خاصیت جابه‌جایی ندارد.

$$\text{مسئله ۱: ثابت کنید } (A - B) = (B' - A')$$

حل:

### فرمول دیگری برای تفاضل متقارن

با اثبات مسئله زیر، یک فرمول دیگر برای تفاضل متقارن (برحسب اجتماع و اشتراک) به دست می‌آید.

مسئله: ثابت کنید:

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

اثبات:

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cap B') \cup (B \cap A')$$

$$\stackrel{\text{پخشی}}{=} [(A \cap B') \cup B] \cap [(A \cap B') \cup A']$$

$$\stackrel{\text{پخشی}}{=} [(A \cup B) \cap (B' \cup B)] \cap [(A \cup A') \cap (B' \cup A')]$$

$$= [(A \cup B) \cap U] \cap [U \cap (B' \cup A')] = (A \cup B) \cap (A' \cup B')$$

$$= (A \cup B) - (A' \cup B')' = (A \cup B) - (A \cap B)$$

### متمم تفاضل متقارن

اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه دلخواه باشند، همواره داریم:

$$(A \Delta B)' = (A' \Delta B) = (A \Delta B')$$

برای اثبات تساوی فوق از تعریف تفاضل متقارن و مسئله قبل

استفاده می‌کنیم:

$$(A \Delta B)' = [(A - B) \cup (B - A)]' = [(A - B)' \cap (B - A)']$$

$$= (A \cap B')' \cap (B \cap A')' = (A' \cup B) \cap (B' \cup A) \quad (1)$$

$$\stackrel{\text{مسئله قبل}}{=} (A' \cup B) - (A \cup B)' = (A' \cup B) - (A' \cap B) = (A' \Delta B)$$

و به همین ترتیب با جابه‌جایی مجموعه‌ها در رابطه (1) تساوی

دوم ثابت می‌شود:

$$(A \Delta B)' = (A' \cup B) \cap (B' \cup A) = (B' \cup A) \cap (A' \cup B)$$

$$\stackrel{\text{مسئله قبل}}{=} (A \cup B') - (A' \cup B)' = (A \cup B') - (A \cap B') = (A \Delta B')$$

### مسائل مهم

در حل کلیه مسائل زیر فقط از جبر مجموعه‌ها شامل تعاریف، قضیه‌ها و مسائل حل شده، استفاده خواهد شد.

با استفاده از جبر مجموعه‌ها هر یک از تساوی‌های زیر یا درستی گزاره‌های زیر را ثابت کنید:

$$I) \begin{cases} A \cup (A \cap B) = A & (1) \\ A \cap (A \cup B) = A & (2) \end{cases} \text{ قوانین جذب}$$

(اگر مجموعه‌ای با دو عمل  $\cup$  و  $\cap$  دوبار ظاهر شود، هر مجموعه دیگری جذب آن می‌شود و حاصل خود آن مجموعه خواهد شد)

$$(A - B) = (A \cap B') = (B' \cap A) = (B' - A')$$

مسئله ۲: ثابت کنید اگر  $A - B = A$  آن‌گاه  $(A \cap B) = \emptyset$

و برعکس:

حل:

$$A - B = A \Rightarrow (A \cap B') = A \Leftrightarrow A \subseteq B'$$

$$\Leftrightarrow (A \cap B) = \emptyset$$

نتیجه: اگر  $A - B = A$  آن‌گاه  $B - A = B$  و برعکس:

اثبات:

$$A - B = A \Leftrightarrow (A \cap B) = \emptyset \Leftrightarrow (B \cap A) = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow B - A = B$$

تذکر مهم: قوانین توزیع پذیری یا پخشی اجتماع نسبت به

اشتراک و اشتراک نسبت به اجتماع برقرارند، یعنی:

$$I) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$II) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(توجه دارید که برای رسیدن از سمت چپ هر یک از تساوی‌های

فوق به سمت راست باید از  $A \cup$  یا  $A \cap$  فاکتور بگیریم).

مثال: حاصل عبارت زیر را به دست آورید:

$$(A \cup B) \cap (A \cup B')$$

حل:

$$(A \cup B) \cap (A \cup B') = A \cup (B \cap B') = A \cup \emptyset = A$$

۴. عمل تفاضل متقارن: تفاضل متقارن دو مجموعه، مجموعه‌ای

است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(A \Delta B) = (A - B) \cup (B - A)$$

تذکر: عمل  $\Delta$  خاصیت جابه‌جایی دارد، یعنی:

$$(A \Delta B) = (A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B) = B \Delta A$$

چند تساوی مهم:

$$I) A \Delta A = \emptyset$$

$$(A \Delta A) = (A - A) \cup (A - A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

$$II) A \Delta A' = U$$

$$(A \Delta A') = (A - A') \cup (A' - A) = A \cup A' = U$$

$$III) U \Delta A = A'$$

$$(U \Delta A) = (U - A) \cup (A - U) = A' \cup \emptyset = A'$$

$$IV) A \Delta \emptyset = A$$

$$(A \Delta \emptyset) = (A - \emptyset) \cup (\emptyset - A) = A \cup \emptyset = A$$

قضیه: عمل تفاضل متقارن، خاصیت شرکت پذیری دارد،

یعنی:

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$$

(اثبات این قضیه به عنوان تمرین برعهده شماست).

**اثبات: روش اول**

$$(A \cup B)^{A=B} = (A \cup A) = A = (A \cap A)^{A=B} = (A \cap B)$$

حال فرض می‌کنیم  $(A \cup B) = (A \cap B)$  و ثابت می‌کنیم

$$A=B$$

$$A = A \cap (A \cup B) = A \cap (A \cap B) = (A \cap B) \Rightarrow A \subseteq B \quad (1)$$

$$A = A \cup (A \cap B) = A \cup (A \cup B) = (A \cup B) \Rightarrow B \subseteq A \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow A = B$$

$$VII) A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

$$\text{اثبات: } (A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)'$$

$$= (A \cap B) \cap (A' \cup C')$$

$$= [(A \cap B) \cap A'] \cup [(A \cap B) \cap C']$$

جابه‌جایی و شرکت‌پذیری

$$= [B \cap (A \cap A')] \cup [(A \cap B) \cap C']$$

$$= (B \cap \emptyset) \cup [A \cap (B \cap C')] = A \cap (B - C)$$

(چون اشتراک خاصیت جابه‌جایی دارد، لذا عمل اشتراک از راست نیز در تفاضل توزیع پذیر است).

$$IIIX) \begin{cases} \text{الف) } A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C) \\ \text{ب) } A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C) \end{cases}$$

در توزیع‌پذیری تفاضل در اجتماع و اشتراک از سمت چپ این دو عمل به یکدیگر تبدیل می‌شوند.

**اثبات الف:**

$$(A - B) \cap (A - C) = (A \cap B') \cap (A \cap C')$$

$$= [(A \cap B') \cap A] \cap C'$$

جابه‌جایی و شرکت‌پذیری

$$= \underbrace{[(A \cap A) \cap B']}_A \cap C' = (A \cap B') \cap C' = A \cap (B' \cap C')$$

$$= A - (B' \cap C')' = A - (B \cup C)$$

**اثبات ب:**

$$(A - B) \cup (A - C) = (A \cap B') \cup (A \cap C') =$$

$$A \cap (B' \cup C') = A - (B' \cup C')' = A - (B \cap C)$$

$$IX) \begin{cases} A \subseteq B \\ A' \subseteq B \end{cases} \Rightarrow B = U$$

**اثبات:**

$$A \subseteq B, A' \subseteq B \Rightarrow (A \cup A') \subseteq (B \cup B) \Rightarrow U \subseteq B$$

و چون همواره  $B \subseteq U$  پس  $B = U$

$$A \cup (A \cap B) = (A \cap U) \cup (A \cap B) = A \cap (U \cup B)$$

$$= A \cap U = A$$

**روش دوم:** (استفاده از قضیه اجتماع و اشتراک)

$$(A \cap B) \subseteq A \Rightarrow A \cup (A \cap B) = A$$

تساوی (۲) با استفاده از (۱) به راحتی نتیجه می‌شود:

$$(1) \quad (A \cap B) \subseteq A \Rightarrow A \cup (A \cap B) = A$$

II قانون حذف برای هر یک از دو عمل  $\cup$  و  $\cap$  به تنهایی

برقرار نیست، یعنی برای مثال از  $A \cup \bar{B} = A \cup C$  در حالت کلی

نمی‌توان نتیجه گرفت که  $B=C$ ، ولی داریم:

$$\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \Rightarrow B = C$$

**اثبات:**

$$B = B \cap (A \cup B) = B \cap (A \cup C) = (B \cap A) \cup (B \cap C)$$

$$= (A \cap B) \cup (B \cap C) = (A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$= (A \cup C) \cap C = C$$

$$III) A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$$

**اثبات:**

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (A \cup B) = B \Leftrightarrow (A \cup B)' = B'$$

$$\Leftrightarrow (A' \cap B') = B' \Leftrightarrow B' \subseteq A'$$

$$IV) A \subseteq B \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup C)$$

**اثبات:**

$$\underbrace{(A \cup C)}_E \cap \underbrace{(B \cup C)}_D = (A \cap B) \cup C \stackrel{A \subseteq B}{=} \underbrace{(A \cup C)}_E$$

$$\Rightarrow \underbrace{(A \cup C)}_E \subseteq \underbrace{(B \cup C)}_D$$

(هرگاه ثابت شود اشتراک دو مجموعه E و D یکی از آن دو

مجموعه مثلاً E باشد، طبق قضیه باید  $E \subseteq D$ ).

$$V) A \subseteq B \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap C)$$

**اثبات:**

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \stackrel{A \subseteq B}{=} (B \cap C)$$

$$\Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap C)$$

$$VI) A = B \Leftrightarrow (A \cup B) = (A \cap B)$$

**اثبات:** فرض کنیم  $A=B$  در این صورت داریم:



اثبات ج:

$$(A - C) - (B - C) = (A \cap C') - (B \cap C')$$

مسئله VII

$$= (A - B) \cap C' = (A - B) - C$$

اثبات د:

$$(A \Delta B) - C = [(A - B) \cup (B - A)] - C$$

قسمت اول

$$= [(A - B) - C] \cup [(B - A) - C]$$

قسمت ج

$$= \left[ \underbrace{(A - C)}_D - \underbrace{(B - C)}_E \right] \cup \left[ \underbrace{(B - C)}_E - \underbrace{(A - C)}_D \right] = (D \Delta E)$$

$$= (A - C) \Delta (B - C)$$

$$XV) A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$$

اثبات:

$$A \cap (B - C) = A \cap (B \cap C') = (A \cap B) \cap C' = (A \cap B) - C$$

$$X) \begin{cases} A \subseteq B \\ A \subseteq B' \end{cases} \Rightarrow A = \emptyset$$

اثبات:

$$A \subseteq B, A \subseteq B' \Rightarrow (A \cap A) \subseteq (B \cap B')$$

$$\Rightarrow A \subseteq \emptyset$$

و چون همواره  $\emptyset \subseteq A$  پس  $A = \emptyset$ .

$$XI) (A \Delta B) = (A' \Delta B')$$

اثبات:

$$(A \Delta B) = (A - B) \cup (B - A) = (B' - A') \Delta (A' - B')$$

$$= (B' \Delta A') = (A' \Delta B')$$

جابه‌جایی

(قبلاً ثابت کردیم که،  $A - B = B' - A'$ ).

$$XII) A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$

اثبات:

$$A \cap (B \Delta C) = A \cap [(B - C) \cup (C - B)]$$

بخشی

$$= [A \cap (B - C)] \cup [A \cap (C - B)] =$$

مسئله VII

$$= \left[ \underbrace{(A \cap B)}_D - \underbrace{(A \cap C)}_E \right] \cup \left[ \underbrace{(A \cap C)}_E - \underbrace{(A \cap B)}_D \right] = D \Delta E$$

$$= (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$

$$XIII) A \subseteq B \Rightarrow (A' \cup B) = U$$

اثبات:

$$A \subseteq B \Rightarrow (A \cap B) = A \Rightarrow A' \cup (A \cap B) = (A' \cup A)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(A' \cup A)}_U \cap (A' \cup B) = U \Rightarrow U \cap (A' \cup B) = U$$

$$\Rightarrow (A' \cup B) = U$$

(IX) عمل تفاضل از سمت راست روی هر چهار عمل اشتراک،

اجتماع، تفاضل و تفاضل متقارن توزیع‌پذیر است:

$$\text{الف) } (A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$$

$$\text{ب) } (A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$$

$$\text{ج) } (A - B) - C = (A - C) - (B - C)$$

$$\text{د) } (A \Delta B) - C = (A - C) \Delta (B - C)$$

اثبات الف:

بخشی

$$(A \cup B) - C = (A \cup B) \cap C' = (A \cap C') \cup (B \cap C')$$

$$= (A - C) \cup (B - C)$$

اثبات ب:

جابه‌جایی و شرکت‌پذیری

$$(A - C) \cap (B - C) = (A \cap C') \cap (B \cap C') =$$

$$(A \cap B) \cap (C' \cap C') = (A \cap B) \cap C' = (A \cap B) - C$$

## پاسخ گفت‌وگوی دو مسافر

اگر رضا ۲۰ سال داشته باشد، بنا بر فرض (۱) بایستی احمد پسر بزرگتر باشد و ۲۰ ساله نباشد. در این صورت بنا بر فرض (۳) نتیجه می‌شود که حمید پسر بزرگتر است؛ اما احمد و حمید هر دو نمی‌توانند پسر بزرگتر باشند و فرض ۲۰ ساله بودن رضا نادرست است.

اگر رضا پسر بزرگتر باشد، بنا بر فرض (۲) بایستی احمد پسر کوچکتر باشد و ۲۰ سال نداشته باشد. در این صورت بنا بر فرض (۳) نتیجه می‌شود که حمید پسر بزرگتر باشد. حمید و رضا هر دو نمی‌توانند پسر بزرگتر باشند و فرض پسر بزرگتر بودن رضا نیز نادرست است.

رضا که نه ۲۰ ساله و نه پسر بزرگتر می‌تواند باشد، پسر کوچکتر است. احمد هم اگر پسر بزرگتر باشد، با فرض (۳) سازگار نیست، زیرا احمد و حمید هر دو نمی‌توانند پسر بزرگتر باشند. بنا بر این، احمد ۲۰ ساله و حمید پسر بزرگتر است.



و توسط شخص خاصی ابداع شد و دیگران از آن زمان به بعد از آن استفاده کردند.

اولین نکته‌ای که در مورد صفر گفته می‌شود، این است که دو کاربرد بی‌نهایت مهم اما تا حدی متفاوت دارد اولین کاربردش این است که به عنوان نماینده جای خالی در سیستم ارزش مکانی اعداد عمل می‌کند. به این دلیل، در عددی مانند ۳۵۰۷ صفر به کار برده شده است تا موقعیت ۳ و ۵ درست باشد. در واقع، ما در این عدد، ۷ تا یکی و ۵ تا صدتایی و ۳ تا هزارتایی داریم. تفاوت این عدد با ۳۵۷ چه خواهد بود؟ ۳۵۷ یعنی ۷ تا یکی و ۵ تا ده‌تایی و ۳ تا صدتایی. دومین کاربرد صفر این است که خودش به عنوان یک عدد به کار می‌رود که ما به شکل صفر از آن استفاده می‌کنیم. همچنین زوایای متفاوتی از صفر در این دو کاربرد یافت می‌شود. (همان‌طور که در لغت‌نامه دهخدا آمده است، واژه «Zero» از کلمه «Cipher» «Sfir» صفر گرفته شده است.)

هیچ کدام از کاربردهای بالا، تاریخچه توضیح داده شده

این سؤالات که صفر چه معنی می‌دهد و چه کسی یا چه کسانی صفر را کشف کرده‌اند؟ از معمول‌ترین سؤالات ما هستند. در «لغت‌نامه دهخدا» درباره صفر چنین آمده است: «صفر: خالی، ترجمه سانسکریت صونیا (Sunya) در ریاضی هندی و عربی. معادل زرو (Zero) در فرانسه و در عین حال، ریشه کلمات غربی سیفرا (Cifra)، تزيفر (Ziffer) و مشتقات آن‌هاست. رجوع به سیفر (Cipher)، شیفر (Chiffre) و دایره‌المعارف اسلامی (صفر) شود.»  
 قدما علامت صفر یعنی نماینده «هیچ» نداشتند. این علامت را هندیان اختراع کردند، به نام «صوفیا»، یعنی تهی و ایرانیان که کتب ریاضی هندی را به عربی ترجمه و نقل کرده‌اند، آن را به صفر عربی که به معنی تهی است، ترجمه کردند و چون ترجمه آنان به لاتینی برگشت، صفر عربی را در لاتینی تغییر دادند و از آن زرو (Zero) ساختند. علامت صفر «۰» است.

به دنبال جواب این سؤال نیستیم که «چه کسی صفر را کشف یا ابداع کرد؟» به دنبال این نیستیم که بگوییم صفر در زمان خاصی



واضحی ندارند. این طور نبوده است که اختراع این مفاهیم ناگهانی رخ داده باشد و بعد از آن هم شروع کرده باشند با استفاده از آن‌ها. در گذشته، مسائل ریاضی بیشتر به عنوان مسائل واقعی و کاربردی مطرح بوده‌اند تا مسائل مجرد و انتزاعی. اعداد در زمان‌های تاریخی دور، بیشتر اشیای واقعی پنداشته می‌شدند تا مفاهیمی مجرد (برعکس امروز). تفاوت ذهنی عظیمی بین ۵ اسب و ۵ «چیز» و مفهوم مجرد ۵ وجود دارد که امروزه از آن به عنوان عدد اصلی یاد می‌شود. اگر مردم در گذشته مسئله‌ای را در مورد این که یک کشاورز به چند اسب نیاز دارد حل می‌کردند، به هیچ عنوان مسئله به داشتن ۰ یا ۱۳- اسب ختم نمی‌شد.

ممکن است تصور شود که ابتدا یک سیستم ارزش مکانی اعداد پدید آمد و بعداً به عنوان نماینده جای خالی، ایده‌ای اجتناب‌ناپذیر محسوب شد. در حالی که بابلی‌ها از یک سیستم ارزش مکانی اعداد بدون این ویژگی (استفاده از ۰)، برای بیش از ۱۰۰۰ سال استفاده کردند.

هیچ مدرکی هم وجود ندارد که بابلی‌ها دربارهٔ ابهام موجود، مشکلی احساس کرده باشند.

از عصر ریاضیات بابلی‌ها متونی به جای مانده است که روی لوحه‌هایی از گل پخته نشده و با خط میخی<sup>۱</sup> نوشته شده‌اند. لوحه‌های زیادی از حدود ۱۷۰۰ ق.م به جای مانده‌اند که قابل خواندن هستند. البته سیستم عددی آن‌ها با سیستمی که امروزه استفاده می‌کنیم، کاملاً فرق دارد.<sup>۲</sup> اما با ترجمه سیستم علامت گذاری آن‌ها به سیستم دهگانی، متوجه می‌شویم که آن‌ها نیز بین ۳۵۰۷ و ۳۵۷ تفاوتی قائل نبوده‌اند و فقط از فحوای متن متوجه می‌شدند که واقعاً کدام یک مدنظر بوده است. تا سال ۴۰۰ ق.م، بابلی‌ها علامت را در مکانی که ما صفر قرار می‌دهیم قرار می‌دادند تا نشان دهند منظور ۳۵۷ است یا ۳۵۰۷. در واقع، آن‌ها ۳۵۰۷ را به صورت ۳۵<sup>۷</sup> می‌نوشتند.

علامت<sup>۳</sup> تنها علامت مورد استفاده برای این منظور نبوده است. بر یک لوح پیدا شده در «کیش»<sup>۳</sup>، نماد دیگری به کار برده شده است. در این لوح که تاریخ آن حدود سال ۷۰۰ ق.م تخمین زده شده، از سه قلاب برای مشخص کردن مکان خالی در سیستم ارزش مکانی استفاده شده است. در لوحه‌های دیگری که در حوالی همان زمان تاریخ گذاری شده‌اند نیز یک قلاب تنها برای جای خالی به کار رفته است.

یک جنبهٔ مشترک برای این موضوع، کاربرد علامت‌های متفاوت برای مشخص کردن موقعیت خالی است. درست است که جای خالی هرگز در پایان ارقام اتفاق نمی‌افتد، اما همیشه بین دو رقم وجود داشته است. بنابراین، ما با ۳۵<sup>۷</sup> روبه‌رو می‌شویم، اما هیچ‌گاه به ۳۵۷<sup>۳</sup> بر نمی‌خوریم و این را که کدام یک مدنظر بوده

است، باید از متن متوجه شد.

ما امروز نیز از این قرائن برای تفسیر معنای برخی اعداد استفاده می‌کنیم. اگر سوار یک اتوبوس بین شهری شوید و مبلغ کرایه را شش و پانصد بگویند، شما آن را به معنای ۶۵۰۰ تومان تفسیر می‌کنید و اگر بخواهید یک اتومبیل بخرید و قیمت آن را شش و پانصد بگویند، شما آن را ۶/۵۰۰/۰۰۰ تومان تفسیر خواهید کرد. از این مثال می‌توانیم دریابیم که کاربرد اولیه صفر برای مشخص کردن مکان خالی، هرگز به معنی استفاده از آن به عنوان یک عدد نبوده، بلکه صرفاً به عنوان نوعی علامت گذاری بوده است؛ به این منظور که تفسیر درستی از اعداد ارائه شود.

یونانیان باستان سهم خود را در ریاضیات حدوداً زمانی آغاز کردند که صفر به عنوان نشانگر مکان خالی در ریاضیات بابلی‌ها به کار برده می‌شد. به هر حال، یونانیان یک دستگاه ارزش مکانی را نپذیرفتند. سؤال خوبی مطرح است که این واقعیت دقیقاً به چه معناست؟ جواب حقیقی به این سؤال، از پاسخ ساده‌ای که ما می‌دهیم، دقیق‌تر است. اساساً دستاوردهای ریاضیات یونانی بر هندسه مبتنی بود. گرچه موضوع کتاب «اصول» اقلیدس «نظریهٔ اعداد» بود، ولی مبنای هندسی داشت. به عبارت دیگر، از آن جا که ریاضی دانان یونان با عدد به عنوان طول پاره خط‌ها کار می‌کردند، نیازی به نام گذاری اعداد نداشتند.

در آن چه بیان کردیم، استثنائاتی هست. استثنا، ریاضی دانانی بودند که در ثبت اطلاعات نجومی کار می‌کردند. اولین کاربرد علامتی که امروزه برای نمایش صفر در نظر می‌گیریم، در این حوزه مشاهده شد و برای منجمان یونانی، شروع استفاده از علامت 0 بود. البته نظریات زیادی در این باب وجود دارند که چرا از این علامت استفاده شد. برخی مورخان ذکر کرده‌اند که آن Omicron است؛ اولین حرف یونانی کلمه «هیچ» (ouden). نیوگبار<sup>۴</sup> این بیان را رد می‌کند، زیرا یونانیان از Omicron به عنوان عدد استفاده می‌کردند.<sup>۵</sup> بیان‌های دیگری هم مطرح شده‌اند. از جمله می‌گوید. این علامت «obol» را نمایش می‌دهد (سکه‌ای بدون ارزش) و زمانی به وجود می‌آمد که از شمارنده‌ها برای حساب روی تخته ای شنی استفاده می‌شد. در این جا وقتی شمارنده برای جاخالی گذاشتن یک ستون برداشته می‌شد، یک تورفتگی روی شن برجای می‌گذاشت که به شکل 0 به نظر می‌رسید.

بطلمیوس در «المجسطی»<sup>۶</sup> که حدود ۱۳۰ م نوشته شده است، دستگاه شصتگانی بابلی‌ها را همراه با نگه‌دارنده جای خالی به کار برده است. در این زمان، بطلمیوس این علامت را، هم بین اعداد و هم در پایان آن‌ها به کار برده است و این ایده تقویت می‌شود که صفر حداقل به عنوان نماینده‌ی مکان خالی به کار



می‌رفته است. این نظر، هم‌چنان دور از واقعیت است. فقط تعداد قلیلی منجم از این نماد استفاده کرده‌اند. (قطعاً بطلمیوس آن را به‌عنوان عدد نمی‌پنداشت، بلکه آن را علامت نقطه‌گذاری می‌دانست.) ایده‌ی جایگاه صفر بعداً خود را در ریاضیات هندی نشان داد.

اکنون صحنه به هندوستان منتقل می‌شود. جایی که سزوار است گفته شود اعداد و دستگاه اعداد متولد شدند و به‌سوی موجودات بسیار پیشرفته‌ای که امروز می‌بینیم، رشد کردند. البته مراد این نیست که بگوییم دستگاه هندی به دستگاه‌های ماقبل خود چیزی مدیون نیست. مهم این است که حدود سال ۶۵۰ م، کاربرد صفر به‌عنوان یک عدد، در ریاضیات هند وارد شده است. هندی‌ها هم‌چنین سیستم ارزش مکانی را به‌کار می‌بردند و صفر برای مشخص کردن یک مکان خالی به‌کار برده می‌شد. در واقع، شواهدی از یک جایگاه خالی در سیستم مکانی، از حدود ۲۰۰ م در هند وجود دارد، هرچند هنوز برای آن نمادی نبوده است.

در حدود سال ۵۰۰ م، آریاباتا<sup>۱</sup> دستگاهی عددی به‌جا گذاشت که یک دستگاه ارزش مکانی بدون صفر بود. او واژه‌ی «Kha» را برای جایگاه به‌کار برد که می‌توانست بعداً به‌عنوان نماد صفر به‌کار برده شود.

شاهدی وجود دارد که نشان می‌دهد، از نقطه در نوشته‌های اولیه‌ی هندی، به‌منظور نمایش مکان خالی در سیستم عددی استفاده شده است؛ جالب است که در اسناد مشابه، گاهی اوقات از نقطه برای مجهول استفاده شده است؛ همان  $x$  که امروزه به‌کار می‌بریم. سپس ریاضی‌دانان هندی در دستگاه ارزش مکانی نام‌هایی برای صفر گذاشتند، در حالی که هنوز علامتی برای آن نداشتند. اولین تاریخی که استفاده‌ی هندیان از صفر ثبت شده است، ۸۷۶ م بوده است.

اکنون به بررسی اولین باری که صفر به‌عنوان عدد به‌کار برده‌شد، می‌پردازیم. از دیرباز، اعداد واژگانی بودند که به مجموعه‌ای از اشیا اشاره می‌کردند. قطعاً ایده‌ی اعداد به‌مرور مجردتر شده است. سپس این تجرد، توجه به صفر و اعداد منفی را که به‌عنوان ویژگی مجموعه‌ای از اشیا مطرح نیست، ممکن می‌سازد. البته مشکل هنگامی بروز می‌کند که سعی شود صفر و منفی به‌عنوان عدد مطرح شوند و این که آن‌ها نسبت به اعمال حسابی، جمع، تفریق، ضرب و تقسیم چگونه عمل می‌کنند. ریاضی‌دانان هندی، براهماگوپتا<sup>۲</sup>، ماهاویرا<sup>۳</sup> و باسکارا<sup>۴</sup>، در سه کتاب مهم کوشیدند به این سؤالات پاسخ دهند.

براهماگوپتا در قرن هفتم سعی می‌کند قوانینی برای حساب ارائه دهد که صفر و اعداد منفی را نیز دربرگیرد. او توضیح داد،

اگر یک عدد را از خودش تفریق کنید، صفر به‌دست می‌آید. براهماگوپتا قانون زیر را برای جمع ارائه کرد که شامل صفر هم می‌شود: «حاصل جمع صفر و یک عدد منفی، یک عدد منفی است. حاصل جمع یک عدد مثبت و صفر عددی مثبت است. صفر به‌علاوه صفر، صفر می‌شود.»

در مورد تفریق کمی سخت‌تر است: «اگر عددی منفی را از صفر کم کنیم، عددی مثبت به‌دست می‌آوریم. اگر یک عدد مثبت را از صفر کم کنیم، حاصل عددی منفی است. اگر صفر را از یک عدد منفی کم کنیم، جواب عدد مثبت است. اگر صفر را از صفر کم کنیم، حاصل صفر است.»

براهماگوپتا سپس بیان می‌کند که حاصل ضرب هر عدد در صفر، صفر می‌شود، اما هنگامی که به تقسیم می‌رسد، تقلا می‌کند: «یک عدد مثبت یا منفی هنگامی که بر صفر تقسیم می‌شود، کسری با مخرج صفر است. صفر تقسیم بر یک عدد مثبت یا منفی، همان صفر است یا به‌طور خاص یک کسر است با صورت صفر و مقدار متناهی در مخرج. صفر تقسیم بر صفر، صفر می‌شود.»

در حقیقت، براهماگوپتا وقتی پیشنهاد می‌دهد  $n$  تقسیم بر صفر برابر  $\frac{n}{0}$  است، توجیه چندانی نمی‌آورد. او در این‌جا به وضوح در تقلاست. زمانی که می‌گوید صفر تقسیم بر صفر برابر صفر است، قطعاً اشتباه می‌کند. به هر حال، او به‌عنوان اولین فردی که تلاش کرد قوانین حساب را به اعداد صفر و منفی تعمیم دهد، تلاش درخشانی کرد.

در سال ۸۳۰ م، حدود ۲۰۰ سال بعد از شاهکار براهماگوپتا، ماهاویرا کتاب «Ganita Sara Samgraha» را نوشت که به‌روزشده‌ی کتاب براهماگوپتا بود. او به درستی بیان می‌کند: «یک عدد ضرب در صفر، صفر می‌شود. هنگامی که صفر از یک عدد تفریق شود، آن عدد تغییری نمی‌کند.»

با این حال، تلاش‌های او برای بهبود اظهارات براهماگوپتا در تقسیم بر صفر، به اشتباه انجامید. وی می‌نویسد: «هنگامی که عددی بر صفر تقسیم شود بدون تغییر باقی می‌ماند.»

باسکارا کتاب خود را ۵۰۰ سال بعد از براهماگوپتا نوشت. با وجود گذر زمان، او هنوز برای توضیح تقسیم بر صفر می‌کوشید. او می‌نویسد: «کمیتی که بر صفر تقسیم شود، کسری با مخرج صفر خواهد بود. این تقسیم، اصطلاحاً کمیتی بی‌نهایت است. در این کمیت، شامل آن چه در مخرج صفر دارد، تغییری وجود ندارد؛ گرچه ممکن است بسیاری درج یا اقتباس شده باشد. همان‌گونه که اگر جهان خلق یا خراب شود، هیچ تغییری در خدای بی‌نهایت و تغییرناپذیر رخ نمی‌دهد؛ گرچه نظم بسیاری از هستی، جذب یا منتشر شود.»

بنابراین، باسکارا کوشید مسئله را به وسیله نوشتن  $\frac{n}{0} = \infty$

حل کند. در نگاه اول ممکن است وسوسه شویم و بیندیشیم گفته باسکارا درست است. اما قطعاً غلط است، زیرا در این صورت ...  $n = 1 = 2 = \infty \times \infty$  یعنی  $\infty \times \infty$  با هر عددی برابر است. بنابراین، همه اعداد باهم مساوی خواهند بود!! ریاضی دانان هندی نتوانستند بپذیرند یک برصفر تقسیم پذیر نیست. باسکارا سایر ویژگی‌های صفر را درست بیان کرد: مانند  $0 = 0^2$  و  $0 = \sqrt{0}$ .

کار درخشان ریاضی دانان هندی، به ریاضی دانان مسلمان بیش از غربی‌ها منتقل شد. این فرصتی برای خوارزمی بود که کتاب «خوارزمی در هنر محاسبه هندوها» را بنویسد و سیستم ارزش مکانی هندیان را که بر مبنای اعداد ۱ تا ۹ و ۰ بود، توضیح دهد. این کار در ایران امروزی اولین کار برای استفاده از صفر به عنوان جانگه‌دار در نمادگذاری مکانی بود. ابن‌ازرا در قرن ۱۲ میلادی، سه مقاله بر اعداد نوشت که سبب توجه اروپاییان به نمادهای هندی و ایده‌های اعشاری (دهدهی - دهگانی) شد. «کتاب اعداد» دستگاه اعشاری برای اعداد صحیح با ارزش مکانی چپ به راست را توضیح می‌دهد. ابن‌ازرا در این کار صفر را به کار می‌برد و آن را گالگال<sup>۱۱</sup> (به معنی چرخ یا دایره) می‌نامد. اندکی بعد در قرن ۱۲ میلادی، السماول چنین می‌نویسد: «اگر از صفر یک عدد مثبت را کم کنیم، همان عدد به صورت منفی باقی می‌ماند. اگر عددی منفی را از صفر کم کنیم، همان عدد به صورت مثبت باقی می‌ماند.»

ایده‌های هندوها همان‌طور که در شرق تا چین گسترش یافت، در غرب هم تا کشورهای اسلامی گسترش پیدا کرد. در سال ۱۲۴۷م، ریاضی‌دان چینی، چین‌چیوشاو<sup>۱۲</sup> مقاله «ریاضی در نه بخش» را نوشت که علامت ۰ را برای صفر به کار برد. اندکی بعد در سال ۱۳۰۳م، ژوشی جی «بازتاب بی‌معنی از چهار عنصر» را نوشت و مجدداً از علامت ۰ برای صفر استفاده کرد.

فیبوناچی یکی از اصلی‌ترین افرادی بود که این ایده‌های جدید سیستم اعداد را به اروپا وارد کرد. آن‌گونه که ایفرا<sup>۱۳</sup> می‌نویسد: «یک رابط مهم بین دستگاه عددی هندو - عربی و ریاضیات اروپا، ریاضی‌دان ایتالیایی، فیبوناچی است.»

وی در «لیبرآباسی»<sup>۱۴</sup> در حدود سال ۱۲۰۰م، ۹ نماد هندی را به همراه علامت برای اروپاییان توضیح می‌دهد. اما تا مدت‌ها بعد از او استفاده چندانی از صفر نشد. مشخص است که فیبوناچی آن قدر جسور نبود که با صفر همان‌طور رفتار کند که با اعداد رفتار می‌کرد. زیرا وی از صفر به عنوان علامت و از سایر اعداد به عنوان نماد یاد می‌کرد. گرچه آوردن اعداد هندی به اروپا اهمیت زیادی داشت، ولی در رفتار با صفر، وی نه به مهارت هندیانی چون براهماگوپتا، ماهاویرا و باسکارا رسید و نه به مسلمانانی چون السماول.

ممکن است گمان شود که پیشرفت دستگاه‌های اعداد و به‌خصوص صفر، به‌طور مستمر از این زمان به بعد بوده است؛ گرچه این دور از بحث است. کاردان<sup>۱۶</sup> معادلات درجه ۳ و درجه ۴ را بدون استفاده از صفر حل کرد. او این کار را در سال ۱۵۰۰م خیلی آسان‌تر از حالتی که صفر را در اختیار داشته باشد، انجام داد. در سال ۱۶۰۰م صفر کاربرد گسترده خود را آغاز کرد؛ البته بعد از مواجهه با مقاومت‌های زیاد اما هنوز نشانه‌هایی از مشکلاتی که مسبب آن‌ها صفر بود، وجود داشت.

اخیراً بیشتر مردم جهان، هزاره جدید را در اول ژانویه ۲۰۰۰ جشن گرفتند. البته از آن‌جا که در تقویم تنظیم شده، سال صفر به هیچ زمانی اختصاص داده نشده است، آن‌ها فقط گذر ۱۹۹۹ سال را جشن گرفتند.

هرچند آن خطای اصولی را می‌توان بخشید، ولی کمی شگفت‌آور است که به‌نظر می‌رسد، بیشتر مردم قادر به درک این نیستند که چرا هزاره سوم و قرن بیست و یکم، در اول ژانویه ۲۰۰۱ شروع می‌شود!

### قوانین صفر در جبر

بارها هنگام تدریس دروس ریاضی با کمال تعجب دیده‌ام، برخی دانشجویان گمان می‌کنند  $\frac{n}{0}$  برابر است با  $\infty$ . در حالی که این نظر به وضوح غلط است و عبارات و نظراتی از این دست نگران‌کننده‌اند. شاید لازم باشد در این‌جا، خلاصه‌ای از ویژگی‌ها و قوانین مربوط به صفر را بیاوریم:

(۱) صفر کوچک‌ترین عدد صحیح نامنفی است. عدد طبیعی تالی صفر عدد ۱ است و عدد طبیعی قبل از صفر وجود ندارد. صفر هم عددی گویا و هم حقیقی و همین‌طور عددی جبری است<sup>۱۷</sup>. صفر نه مثبت است نه منفی. نه اول است نه مرکب. فرد نیست، ولی زوج است<sup>۱۸</sup>.

صفر نسبت به جمع خنثاست  $x + 0 = 0 + x = x$  جمع (۲)

$x - 0 = x$  ,  $0 - x = -x$  تفریق (۳)

$x \cdot 0 = 0$  ,  $0 \cdot x = 0$  ضرب (۴)

برای  $x$  ناصفر  $\frac{0}{x} = 0$  تقسیم (۵)

برای  $x$  ناصفر،  $\frac{0}{0}$  و  $\frac{x}{0}$  تعریف نشده است.

برهان: عبارت  $\frac{x}{0}$  تعریف نشده است، زیرا وارون ضربی<sup>۱۹</sup> ندارد. از آن‌جا که طبق قانون ضرب  $0 \cdot x = 0$ ، بنابراین هیچ عنصری نیست که حاصل ضرب آن در ۰ برابر ۱ شود. درواقع هیچ عنصری نیست و تعریف نشده است. اما اگر در مخرج کسری عبارتی به صفر هم‌گرا شود (بحثی که در آنالیز ریاضی مطرح می‌شود)، داریم:

امروزه در علم آنالیز عددی، نه فقط عنصر صفر، بلکه مجموعه‌ای از اعداد صفر محسوب می‌شود. به عبارت دیگر، صفر منحصر به فرد نیست. همه اعداد بین  $\varepsilon$ ،  $\varepsilon -$  صفر محسوب می‌شوند.

این تعریف جدید از صفر قوانین خاص خود را دارد که به صورت زیر است:

$$\frac{1}{-0} = -\infty, \frac{1}{+0} = +\infty$$

و در این شرایط فقط  $\frac{\pm 0}{\pm 0}$  تعریف نشده است. مفهوم صفر منفی هم‌چنین کاربردهایی در مکانیک آماری و سایر حوزه‌ها دارد.

### پی‌نوشت

1. علائم روی لوحه‌های گل رس با لبه‌ی شیب‌دار قلمی فولادی حک شده‌اند. هم‌چنین، ظاهری گوه شکل داشته‌اند. به همین دلیل، این خط خط میخی نامیده شده است.
2. بر مبنای سیستم شصتگانی (sexadecimal) می‌نوشته‌اند و ما بر مبنای سیستم دهگانی (decimal).
3. شهری در بین‌النهرین قدیم، واقع در شرق بابل که جنوب مرکزی عراق امروزی است.

4. Neugebauer

5. Omicron  $\nu$  را نمایش می‌دهد. دستگاه اعداد یونانیان بر مبنای حروف آن‌هاست.

6. Almajest

7. Aryabhata

8. Brahmagupta

9. Mahavira

10. Bhaskara

11. galgal

12. Ch>in Ciu-Shao

13. Zhu Shijie

14. Ifrah

15. Liber Abaci

16. Cardan

17. عدد جبری عددی است که ریشه‌ی یک چندجمله‌ای با ضرایب گویا باشد.

18. عدد زوج عددی است که مضربی صحیح از یک عدد صحیح باشد. از آن‌جا که  $2 \times 0 = 0$ ، بنابراین  $0$  عددی زوج است.

19. گوییم عنصر  $a$  وارون ضربی دارد. اگر  $a \times \frac{1}{a} = 1$ ، در این صورت  $a^{-1} = \frac{1}{a}$  وارون ضربی  $a$  نام دارد.

20. Signed Zero

21. Floating point

$$x > 0: \lim_{y \rightarrow +0} \frac{x}{y} = +\infty$$

$$x < 0: \lim_{y \rightarrow -0} \frac{x}{y} = -\infty$$

به استثنای حالتی که  $x=0$  باشد.  $x^0 = \frac{x}{x} = 1$  توان  $x^0$  (۶) تذکر: هم‌چنین  $0^x = 0$  برای هر  $x$  (طبق قانون ضرب، عدد هر چند بار در خودش ضرب شود، برابر صفر می‌شود).

هم‌چنین  $0^0$  تعریف نشده است. اما اگر به صورت حدی باشد (بحثی که در آنالیز ریاضی مطرح می‌شود)، جزء حالات مبهم است و باید رفع ابهام شود.

(۷) مجموع  $0$  عدد صفر برابر است.

(۸) حاصل ضرب  $0$  عدد برابر صفر است. به عبارت دیگر، اگر  $x$  عدد حقیقی باشد:  $x \cdot 0 = 0$ .

اثبات:  $x \cdot 0 = x \cdot (0+0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$ . بنابراین طبق قانون حذف می‌توان نوشت:  $0 = x \cdot 0$ .

(۹) هرگاه  $x \neq 0$  و  $y \neq 0$ ، آن‌گاه:  $xy \neq 0$ .

اثبات: فرض کنیم  $x \neq 0$  و  $y \neq 0$  ولی  $xy = 0$ . در این صورت بند (۸) نتیجه می‌دهد.

$$1 = \left(\frac{1}{y}\right) \left(\frac{1}{x}\right) xy = \left(\frac{1}{y}\right) \left(\frac{1}{x}\right) 0 = 0$$

که یک تناقض است. پس (۹) برقرار است.

(۱۰) صفر فاکتوریل برابر ۱ است:  $0! = 1$ .

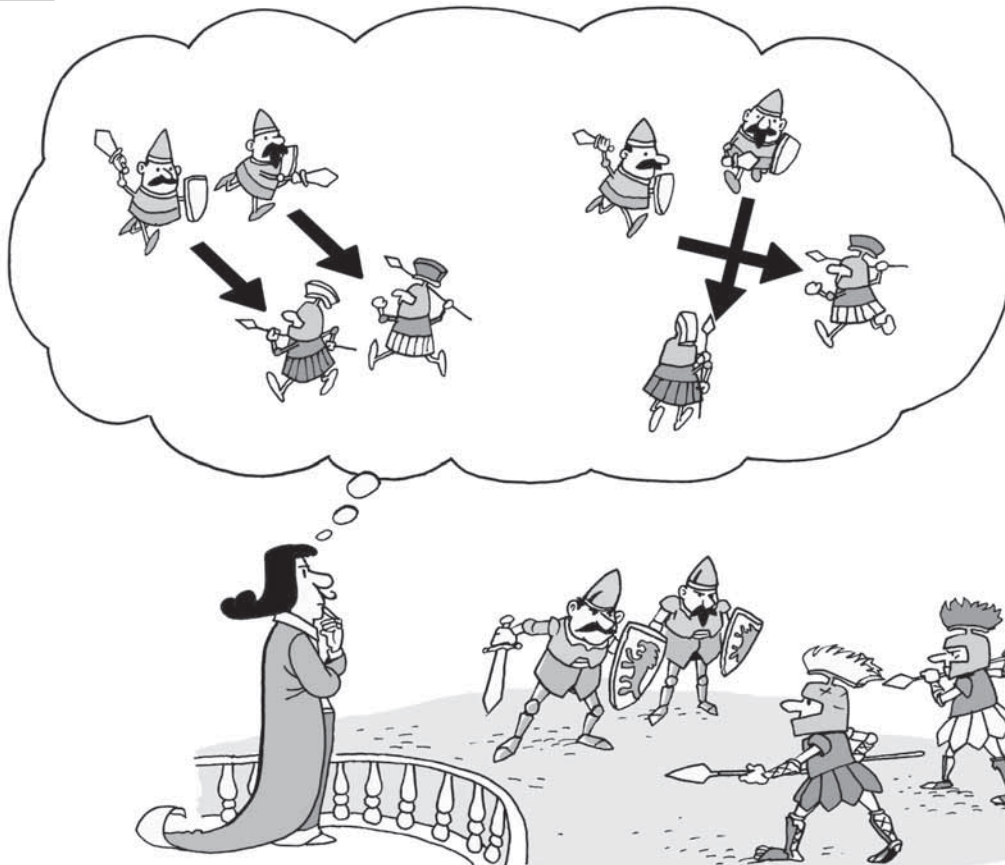
(۱۱) تعریف صفر تابع  $f$ : نقطه‌ای مانند  $x$  را صفر تابع  $f$  گویند اگر  $f(x) = 0$ . مثلاً  $x = 2$  صفر تابع  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  است، زیرا:  $f(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 2 = 0$ .

تذکر: در ریاضیات داریم:  $0 = +0 = -0$  به عبارت دیگر،  $0$  و  $+0$  باهم برابرند.

### اما صفر علامت‌دار چیست؟

در استانداردهای مختلف نمایش شناور<sup>۲۱</sup> اعداد می‌دانیم که بسته به نوع استاندارد، بعضی از اعداد با وجود این که برابر صفر نیستند، ولی هنگام نمایش با رایانه صفر محسوب می‌شوند. به عبارت دیگر، اگر کوچک‌ترین عدد قابل نمایش در آن سیستم خاص  $\varepsilon$  باشد و عددی مانند  $x$  طوری باشد که:  $0 < x < \varepsilon$ ، رایانه و سیستم نمایش اعداد آن را  $0$  محسوب می‌کند و چون مثبت است، آن را  $+0$  نمایش می‌دهد.

همین‌طور است در مورد صفر منفی: اگر کوچک‌ترین عدد قابل نمایش در آن سیستم خاص  $\varepsilon$  باشد و عددی مانند  $x$  طوری باشد که  $-\varepsilon < x < 0$ ، رایانه و سیستم نمایش اعداد آن را  $0$  محسوب می‌کند و چون منفی است، آن را  $-0$  نمایش می‌دهد.



# تعداد توابع یک به یک و پوشا

اشاره

در کتاب حسابان جدید  
(سال تحصیلی ۹۰-۸۹)

(برای دانش آموزان سال سوم ریاضی و پیش‌دانشگاهی)

میرشهرام صدر

تعریف تابع  $f: A \rightarrow B$ : چنین آمده است:

«تابع از مجموعه  $A$  به مجموعه  $B$  رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که به هر عضو  $A$  دقیقاً یک عضو از  $B$  را نسبت می‌دهد.»  
از این تعریف نتیجه می‌شود که در نمایش تابع  $f$  با نمودار ون خواهیم داشت:

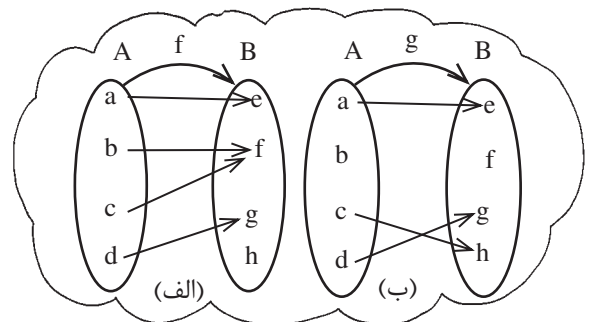
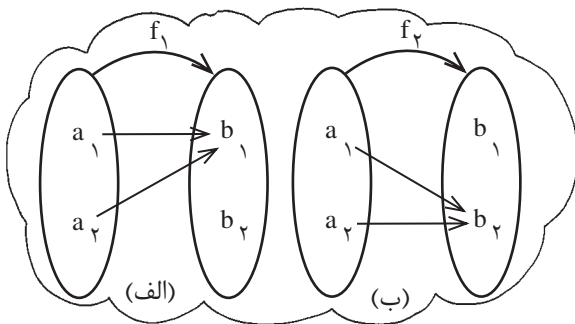
(الف) از هر عضو  $A$  باید دقیقاً یک پیکان خارج شود.  
(ب) لازم نیست که به هر عضو  $B$  دقیقاً یک پیکان وارد شود و ممکن است به یک عضو  $B$  یک پیکان یا بیش از یک پیکان وارد شود یا آن که اصلاً پیکانی وارد نشود.

برای مثال در زیر دو رابطه از مجموعه  $A = \{a, b, c, d\}$  به مجموعه  $B = \{e, f, g, h\}$  تعریف شده است:

الف)  $f(a)=e, f(b)=f, f(c)=f, f(d)=g$

ب)  $g(a)=e, g(c)=h, g(d)=g, g(b)=?$

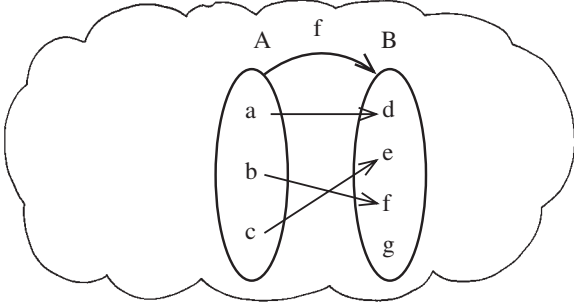
با توجه به تعریف تابع، بدیهی است که  $f: A \rightarrow B$  تابع است، زیرا از هر عضو  $A$  دقیقاً یک پیکان خارج شده است. اما  $g: A \rightarrow B$  تابع نیست، زیرا از عضو  $b \in A$  پیکانی خارج نشده است، یعنی رابطه  $g$  روی همهٔ عضوهای  $A$  اثر نکرده است.  
اگر فرض کنیم  $A = \{a, a_1\}$  و  $B = \{b, b_1\}$  در این صورت چهار تابع مختلف از  $A$  به  $B$  به صورت زیر وجود دارد.





## تعداد توابع یک به یک

تابع زیر را از مجموعه  $A = \{a, b, c\}$  به مجموعه  $B = \{d, e, f, h\}$  در نظر بگیرید.



همان طور که ملاحظه می کنید،  $f: A \rightarrow B$  تابعی یک به یک است، یعنی اگر تابع  $f$  را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسیم، آن گاه مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب آن با یکدیگر متمایزند.

$$f = \{(a, d), (b, e), (c, f)\}$$

تذکر. اگر  $A$  یک مجموعه  $n$  عضوی و  $B$  یک مجموعه  $m$  عضوی باشد و در این صورت از  $A$  به  $B$  تابع یک به یک نمی‌توان تعریف کرد. بنابراین برای این که از مجموعه  $n$  عضوی  $A$  به مجموعه  $m$  عضوی  $B$  بتوان تابع یک به یک تعریف کرد، باید داشته باشیم  $n \leq m$ .

فرض کنید  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  و  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  و  $n \leq m$  می‌خواهیم تعداد توابع یک به یک  $f: A \rightarrow B$  را محاسبه کنیم، برای این منظور ابتدا تابع  $f$  را روی  $a_1$  اثر می‌دهیم.  $f(a_1)$  می‌تواند برابر  $b_1$  یا  $b_2$  یا  $\dots$  یا  $b_m$  باشد، یعنی برای  $f(a_1)$   $m$  انتخاب داریم. فرض کنیم  $f(a_1) = b_j$  که  $1 \leq j \leq m$ . در مرحله بعد  $f$  را روی  $a_2$  اثر می‌دهیم، برای این که تابع  $f$  یک به یک باشد، باید  $f(a_2) \neq b_j$ ، یعنی برای  $f(a_2)$   $(m-1)$  انتخاب داریم. به همین ترتیب برای  $f(a_3)$ ،  $(m-2)$  انتخاب و  $\dots$  و برای  $f(a_n)$ ،  $(m-n+1)$  انتخاب داریم. بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

$$f(a_1) \quad f(a_2) \quad f(a_3) \quad \dots \quad f(a_n)$$

$$\boxed{m} \quad \boxed{m-1} \quad \boxed{m-2} \quad \dots \quad \boxed{m-n+1}$$

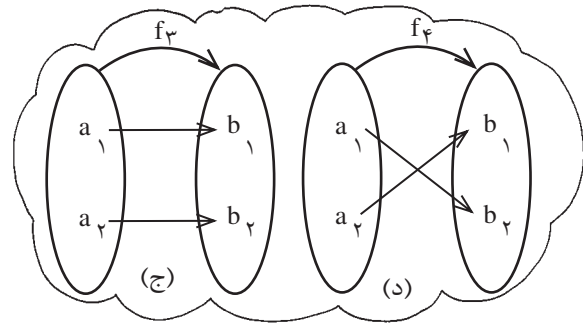
$$B \text{ به } A \text{ تعداد توابع یک به یک از } = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)$$

$$= P(m, n) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

مثال. از مجموعه دو عضوی  $A$  به مجموعه هفت عضوی  $B$  چند تابع یک به یک می‌توان تعریف کرد؟  
حل.

$$P(7, 2) = \frac{7!}{(7-2)!}$$

$$= \frac{7!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5!} = 42$$



اکنون با توجه به تعریف تابع واصل ضرب می‌خواهیم تعداد توابع از مجموعه  $n$  عضوی  $A$  به مجموعه  $m$  عضوی  $B$  را محاسبه کنیم. برای این منظور فرض کنیم که:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}; \quad B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$$

هم چنین فرض می‌کنیم که  $f$  از  $A$  به  $B$  یک تابع باشد، در این صورت تابع  $f$  باید روی همه عضوهای  $A$  اثر کند. برای مثال وقتی  $f$  روی  $a_1$  اثر می‌کند،  $f(a_1)$  می‌تواند برابر با  $b_1$  یا  $b_2$  یا  $\dots$  یا  $b_m$  باشد، یعنی برای  $f(a_1)$  تعداد  $m$  انتخاب داریم که عبارتند از:

$$f(a_1) = b_1 \quad \text{یا} \quad f(a_1) = b_2 \quad \text{یا} \quad \dots \quad \text{یا} \quad f(a_1) = b_m$$

به همین ترتیب برای  $f(a_2)$ ،  $\dots$ ،  $f(a_n)$  هر کدام  $m$  انتخاب داریم. بنابراین خواهیم داشت:

$$f(a_1) \quad f(a_2) \quad \dots \quad f(a_n)$$

$$\boxed{m} \quad \boxed{m} \quad \dots \quad \boxed{m}$$

مرتبه  $n$

در نتیجه، طبق اصل ضرب داریم:

$$B \text{ به } A \text{ تعداد توابع } f \text{ از } = \underbrace{m \times m \times \dots \times m}_n = m^n$$

مثال. تعداد توابعی که از یک مجموعه سه عضوی به یک مجموعه چهار عضوی می‌توان تعریف کرد، چندتاست؟

حل. فرض کنیم  $f$  یک تابع از  $A = \{a_1, a_2, a_3\}$  به  $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$  باشد، در این صورت برای هر یک از مقادیر  $f(a_1)$ ،  $f(a_2)$  و  $f(a_3)$  چهار انتخاب داریم. لذا طبق اصل ضرب خواهیم داشت:

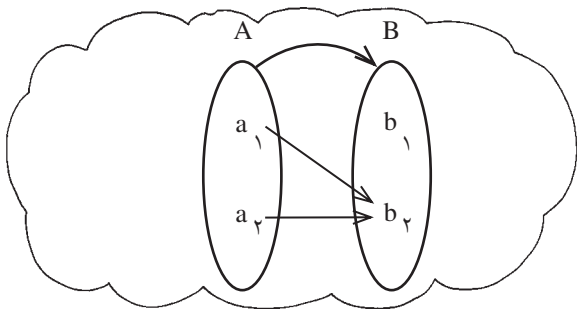
$$f(a_1) \quad f(a_2) \quad f(a_3)$$

$$\boxed{4} \quad \boxed{4} \quad \boxed{4}$$

$$B \text{ به } A \text{ تعداد توابع } f \text{ از } = 4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$$

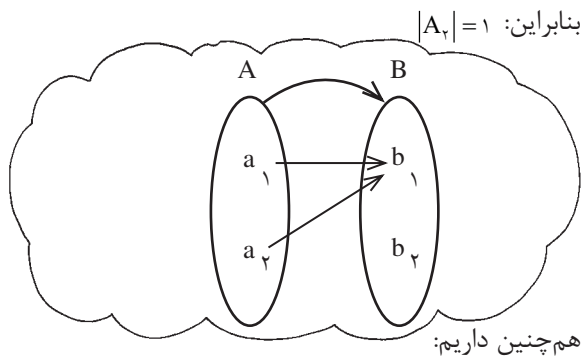
در ادامه مقاله، تعداد توابع یک به یک و سپس تعداد توابع پوشای  $f$  از  $A$  به  $B$  را محاسبه خواهیم کرد.

در نتیجه طبق اصل داریم:  $f(a_1) = f(a_2)$ ;  $|A_1| = |1 \times 1| = 1$



از طرفی برای محاسبه  $|A_2|$ ، چون برای هر  $x \in A$  داریم:  $f(x) \neq b_2$ ، بنابراین خواهیم داشت:

$$f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_1$$



$$A_1 \cap A_2 = \{f \in S : f(x) \neq b_1, b_2\} = \emptyset \Rightarrow |A_1 \cap A_2| = 0$$

اکنون  $|A_1 \cup A_2|$  تعداد کل توابع غیر پوشا از A به B را نشان

می‌دهد که اگر این مقدار را از  $|S|$  کم کنیم، تعداد توابع پوشا از A به B به دست می‌آید. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} |\overline{A_1 \cup A_2}| &= |S| - |A_1 \cup A_2| \\ &= |S| - (|A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|) = 4 - (1 + 1 - 0) = 2 \end{aligned}$$

مثال. تعداد توابع پوشا از مجموعه  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  به

مجموعه  $B = \{b_1, b_2, b_3\}$  چندتا است؟

حل. هرگاه S مجموعه همه توابع  $f: A \rightarrow B$  باشد، آن گاه  $|S| = 3^4 = 81$ .

اکنون تعداد توابع غیر پوشای  $f: A \rightarrow B$  را محاسبه می‌کنیم،

سپس با کم کردن این مقدار از  $|S|$ ، تعداد توابع پوشا را به دست

می‌آوریم. برای این منظور، مجموعه‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

$$A_1 = \{f \in S : f(x) \neq b_1\}; A_2 = \{f \in S : f(x) \neq b_2\};$$

$$A_3 = \{f \in S : f(x) \neq b_3\}$$

برای محاسبه  $|A_1|$ ؛ چون برای هر  $x \in A$  داریم  $f(x) \neq b_1$ ،

بنابراین  $f(x)$  می‌تواند  $b_2$  یا  $b_3$  باشد، یعنی برای  $f(x)$  دو حالت

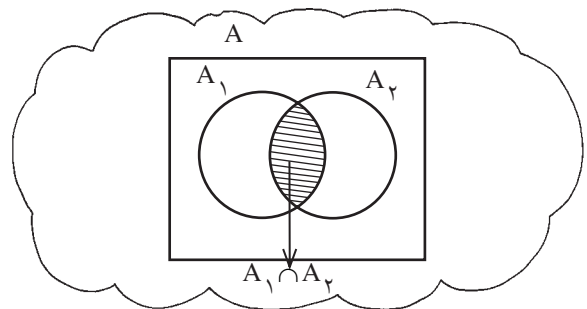
وجود دارد. بنابراین، طبق اصل ضرب داریم:

برای محاسبه تعداد توابع پوشا، نیاز به استفاده از اصل شمول و عدم شمول داریم، برای این منظور، این اصل را بیان می‌کنیم.

## اصل شمول و عدم شمول

فرض کنیم  $A_1$  و  $A_2$  دو مجموعه از زیرمجموعه‌های مجموعه متناهی A باشند، تعداد عضوهایی که حداقل به یکی از این دو مجموعه تعلق دارند، را با نماد  $|A_1 \cup A_2|$  نمایش می‌دهیم و مقدار آن را از رابطه زیر معروف به اصل شمول و عدم شمول محاسبه می‌کنیم.

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$



تعمیم اصل شمول و عدم شمول

فرض کنیم A یک مجموعه متناهی و  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  زیرمجموعه‌هایی از A باشند، در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n| &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| \\ &+ \dots + (-1)^{n-1} \left| \bigcap_{i=1}^n A_i \right| \end{aligned}$$

## تعداد توابع پوشا

فرض کنیم A و B مجموعه‌های دو عضوی باشند. می‌خواهیم

تعداد توابع پوشا از A به B را به دست آوریم، برای این منظور،

فرض کنیم S مجموعه همه توابع  $f: A \rightarrow B$  باشد. ابتدا تعداد کل

توابع از A به B را محاسبه می‌کنیم. می‌دانیم که اگر A یک

مجموعه n عضوی و B یک مجموعه m عضوی باشد، آن گاه تعداد

کل توابع  $f: A \rightarrow B$  برابر با  $m^n$  است؛ بنابراین داریم:

$$|S| = 2^2 = 4$$

سپس با فرض این که  $A = \{a_1, a_2\}$  و  $B = \{b_1, b_2\}$ ، دو مجموعه

$A_1$  و  $A_2$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_1 = \{f \in S : f(x) \neq b_1\}; A_2 = \{f \in S : f(x) \neq b_2\}$$

برای محاسبه  $|A_1|$ ، چون برای هر  $x \in A$  داریم:  $f(x) \neq b_1$ ،

بنابراین خواهیم داشت:

$$f(a_1) = b_2, f(a_2) = b_2$$

$$|A_1| = (m-1)^n$$

از طرفی تعداد مجموعه‌هایی به شکل  $A_i$  برابر با  $\binom{m}{1}$  است، زیرا تعداد مجموعه‌های به شکل  $A_i$  برابر با تعداد زیرمجموعه‌های یک‌عضوی مجموعه  $A$  است. بنابراین داریم:

$$\sum_{i=1}^m |A_i| = \binom{m}{1} (m-1)^n$$

چون  $(\bigcup_{i=1}^m A_i)$  تعداد توابع غیرپوشا را نشان می‌دهد، بنابراین نیاز به محاسبه  $|A_i \cap A_j|$  برای  $1 \leq i < j \leq m$  و برای  $1 \leq i < j < k \leq m$  و ... و  $|A_i \cap A_j \cap \dots \cap A_l|$  برای  $1 \leq i < j < \dots < l \leq m$  داریم:

$$A_i \cap A_j = \{f \in S : f(x) \neq b_i, b_j\}; 1 \leq i < j \leq m$$

برای محاسبه  $|A_i \cap A_j|$  برای  $1 \leq i < j \leq m$ ، چون برای هر  $x \in A$  داریم  $f(x) \neq b_i, b_j$ ، بنابراین برای  $f(x)$  همواره  $(m-2)$  حالت وجود دارد. پس طبق اصل ضرب داریم:

$$\begin{array}{cccc} \boxed{(m-2)} & \boxed{(m-2)} & \boxed{(m-2)} & \dots & \boxed{(m-2)} \\ f(a_1) & f(a_2) & f(a_3) & & f(a_n) \end{array}$$

$$|A_i \cap A_j| = (m-2)^n$$

تعداد مجموعه‌هایی به شکل  $A_i \cap A_j$  برای  $1 \leq i < j \leq m$  برابر با  $\binom{m}{2}$  است، زیرا تعداد مجموعه‌هایی به این شکل برابر با تعداد زیرمجموعه‌های دو‌عضوی مجموعه  $A$  است. بنابراین داریم:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq m} |A_i \cap A_j| = \binom{m}{2} (m-2)^n$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} |A_i \cap A_j \cap A_k| &= \binom{m}{3} (m-3)^n \\ &\vdots \\ \sum_{\substack{1 \leq i < j < \dots < l \leq m \\ \text{اندیس } (m-1)}} |A_i \cap A_j \cap \dots \cap A_l| &= \binom{m}{m-1} (m - (m-1))^n \\ &= \binom{m}{m-1} \times 1^n \end{aligned}$$

و بالاخره داریم:

$$\left| \bigcap_{i=1}^m A_i \right| = 0$$

مقدار  $(\bigcup_{i=1}^m A_i)$  تعداد توابع پوشاست، بنابراین داریم:

$$\left| \bigcup_{i=1}^m A_i \right| = |S| - \left| \bigcap_{i=1}^m A_i \right|$$

$$= m^n - \left( \sum_{i=1}^m |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq m} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} |A_i \cap A_j \cap A_k| \right)$$

$$\begin{array}{cccc} \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{2} \\ f(a_1) & f(a_2) & f(a_3) & f(a_4) \end{array}; |A_1| = 2^4 = 16$$

به همین ترتیب  $|A_2| = |A_3| = |A_4| = 16$ .

چون  $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$  تعداد توابع غیرپوشا را نشان می‌دهد، بنابراین نیاز به محاسبه  $|A_1 \cap A_2|$  و  $|A_2 \cap A_3|$  و  $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$  داریم:

$$A_1 \cap A_2 = \{f \in S : f(x) \neq b_1, b_2\}$$

برای محاسبه  $|A_1 \cap A_2|$ ؛ چون برای هر  $x \in A$  داریم  $f(x) \neq b_1, b_2$ ، پس  $f(x) = b_3$ ، یعنی تابع ثابت داریم. بنابراین برای  $f(x)$  همواره یک حالت وجود دارد. پس طبق اصل ضرب داریم:

$$\begin{array}{cccc} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ f(a_1) & f(a_2) & f(a_3) & f(a_4) \end{array}; |A_1 \cap A_2| = 1^4 = 1$$

به همین ترتیب  $|A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_3| = 1$ .

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{f \in S : f(x) \neq b_1, b_2, b_3\} = \emptyset$$

$$\Rightarrow |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

مقدار  $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$  تعداد توابع پوشاست، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= |S| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ &= 81 - (16 + 16 + 16 - 1 - 1 - 1 + 0) = 26 \end{aligned}$$

**قضیه.** فرض کنید  $A$  یک مجموعه  $n$  عضوی و  $B$  یک مجموعه  $m$  عضوی با شرط  $n \geq m$  باشند. ثابت کنید تعداد توابع پوشای  $f: A \rightarrow B$  برابر است با:

$$\begin{aligned} m^n - \binom{m}{1} (m-1)^n + \binom{m}{2} (m-2)^n - \binom{m}{3} (m-3)^n \\ + \dots + (-1)^{m-1} \binom{m}{m-1} \times 1^n \end{aligned}$$

**برهان.** فرض کنیم  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  و  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  در صورتی که  $S$  مجموعه همه توابع  $f: A \rightarrow B$  باشند، آن‌گاه  $|S| = m^n$ .

در صورتی که تعداد توابع غیرپوشای  $f: A \rightarrow B$  را محاسبه کنیم، با کم کردن این مقدار از  $|S|$ ، تعداد توابع پوشا را به دست می‌آوریم. برای این منظور مجموعه زیر را تعریف می‌کنیم.

$$A_i = \{f \in S \mid f(x) \neq b_i\}; 1 \leq i \leq m$$

برای محاسبه  $|A_1|$ ؛ چون برای هر  $x \in A$  داریم  $f(x) \neq b_1$ ، بنابراین  $f(x)$  می‌تواند  $b_2$  یا  $b_3$  یا  $b_4$  یا  $b_{i+1}$  یا  $b_{i-1}$  یا  $b_m$  باشد، یعنی برای  $f(x)$ ،  $(m-1)$  حالت وجود دارد. بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

$$\begin{array}{cccccc} \boxed{(m-1)} & \boxed{(m-1)} & \boxed{(m-1)} & \boxed{(m-1)} & \dots & \boxed{(m-1)} \\ f(a_1) & f(a_2) & f(a_3) & f(a_4) & & f(a_n) \end{array}$$

با  $r_k$  راه مختلف انجام پذیرد. در این صورت این عمل می‌تواند به‌طور کلی با  $r_1 \times r_2 \times \dots \times r_k$  راه مختلف انجام گیرد.



**معرفی وبگاه‌های ریاضی جهان**

اسم وبگاه: Calculus Applet  
نشانی وبگاه: <http://www.calculusapplet.com>  
احسان یارمحمدی

صفحه اصلی سایت Calculus Applet شامل عنوان‌های گوناگون زیر است که هر یک از این عناوین حاوی مطالب ارزنده و مفیدی درباره موضوعات ریاضی است.

- پیوستگی و حدود (Continuity and Limits)
- نمای غیررسمی و نموداری از پیوستگی (An Informal, Graphical View of Continuity)
- قضیه مقدار میانی (Intermediate Value Theorem)
- نمای غیررسمی از حدود (Informal View of Limits)
- حدود یک‌طرفه و دوطرفه و مواردی که حدود وجود ندارد (One-and Two-Sided Limits and When Limits Fail to Exist)
- حد در بی‌نهایت (Limits and Infinity)
- نمای جدولی از حدود (Table View of Limits)
- تعریف رسمی از حدود (Formal Definition of Limits)
- تعریف پیوستگی با استفاده از حدود (Definition of Continuity Using Limits)
- مقدمه‌ای بر مشتق (Introduction to the Derivative)
- میان‌برهای مشتق‌گیری (Differentiation Short Cuts)
- کاربردهای مشتق (Applications of Differentiation)
- ساخت پادمشتق (Constructing Anti-derivatives)

بقیه در صفحه ۶۷

$$\dots + (-1)^m \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq m \\ \text{اندیس (m-1)}}} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}| + (-1)^{m-1} \left| \bigcap_{i=1}^m A_i \right|$$

$$\overline{\left( \bigcup_{i=1}^m A_i \right)} = m^n - \binom{m}{1} (m-1)^n + \binom{m}{2} (m-2)^n - \binom{m}{3} (m-3)^n + \dots + (-1)^{m-1} \binom{m}{m-1} \times 1^n$$

مثال. تعداد توابع پوشا از مجموعه پنج‌عضوی A به مجموعه چهارعضوی B چندتا است؟

حل.

$$|A| = n = 5, |B| = m = 4$$

با توجه به فرمول تعداد توابع پوشا از مجموعه n عضوی A به مجموعه m عضوی B با شرط (n ≤ m) داریم:

$$\overline{\left( \bigcup_{i=1}^4 A_i \right)} = 4^5 - \binom{4}{1} (4-1)^5 + \binom{4}{2} (4-2)^5 - \binom{4}{3} (4-3)^5 = 1024 - 972 + 192 - 4 = 240$$

### یک مسئله کاربردی از تعداد توابع پوشا

**مسئله.** گروه ریاضی یک انتشاراتی، شش طرح مختلف مربوط به تألیف کتاب‌های کمک‌آموزشی دارد که پنج گروه تألیف، متقاضی اجرای قسمت‌های مختلف هر طرح هستند. برای تقویت بنیه علمی کتاب‌ها، بهتر است هر پنج گروه روی قسمت‌های مختلف هر طرح کار کنند. به چند راه می‌توان با این پنج گروه قرارداد منعقد کرد به‌طوری که برای انجام هر طرح، هر گروه قرارداد جداگانه‌ای داشته باشد.

**حل.** تعداد قراردادهایی که می‌توان با این پنج گروه طبق شرایط مسئله منعقد کرد برابر با تعداد توابع پوشا از مجموعه شش‌عضوی A به مجموعه پنج‌عضوی B است. بنابراین با فرض این که  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$  و  $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ ، تعداد توابع پوشا از A به B را پیدا می‌کنیم:

$$\overline{\left( \bigcup_{i=1}^5 A_i \right)} = 5^6 - \binom{5}{1} (5-1)^6 + \binom{5}{2} (5-2)^6 - \binom{5}{3} (5-3)^6 + \binom{5}{4} (5-4)^6 = 15625 - 20480 + 7290 - 640 + 5 = 1800$$

### پی‌نوشت‌ها

۱. این تعریف از تابع در کتاب ریاضی گسسته پیش‌دانشگاهی تحت عنوان «نگاشت» آمده است.
۲. اصل ضرب: فرض کنیم عملی در k مرحله متوالی انجام می‌گیرد به‌طوری که در مرحله اول با  $r_1$  راه مختلف، در مرحله دوم با  $r_2$  راه مختلف و... و در مرحله

# حسابان

نویننده: تونی کریلی  
ترجمه: غلامرضا یاسی پور

حساب یا حسابان<sup>۲</sup> روشی در محاسبه است. ریاضی‌دان‌ها گاهی درباره «حساب منطق»<sup>۳</sup>، «حساب احتمال»<sup>۴</sup> و غیره سخن می‌گویند. اما همه توافق دارند که در واقع یک حسابان محض و ساده، وجود دارد، که لاتین آن با حرف بزرگ C<sup>۵</sup> املا می‌شود.

پرشکوه این دو گوهر واقع در تاج حسابان، از این‌روست که دو روی یک سکه‌اند، یعنی دیفرانسیل‌گیری و انتگرال‌گیری عکس یکدیگرند. در واقع، حسابان یک موضوع و آن، نیاز به دانستن هر دو طرف آن است. تعجب‌آور نیست که «نمونه واقعی سرلشکر مدرن» گیلبرت<sup>۱۲</sup> و سولیوان<sup>۱۳</sup> در دزدان دریایی پن‌زانس<sup>۱۴</sup> با غرور، هر دو آن‌ها را اعلام می‌کند:

با توجه به حقایق شاد بسیاری در مورد مربع وتر، من در حسابان انتگرال و دیفرانسیل مسلطام.

## دیفرانسیل‌گیری

دانشمندان، شیفته مطرح کردن «آزمایش‌های ذهنی» اند، به‌ویژه اینشتین آن‌ها را دوست داشت. فرض کنید روی پلی بالای دره تنگی ایستاده‌ایم و می‌خواهیم سنگی را بیندازیم. در این صورت، چه اتفاقی می‌افتد؟ امتیاز آزمایش ذهنی در این است که لازم نیست عملاً در آن‌جا باشیم. در این مورد، می‌توانیم کارهای غیرممکنی، مانند متوقف کردن سنگ در هوا یا ملاحظه حرکت آهسته آن در فاصله کوتاهی از زمان را نیز انجام دهیم.

طبق نظریه جاذبه<sup>۱۵</sup> نیوتن، سنگ می‌افتد و هیچ واقعه تعجب‌آوری در این کار نیست. سنگ به‌طرف زمین می‌آید و در حالی که دسته کرومترمان به جلو می‌رود، سریع‌تر و سریع‌تر

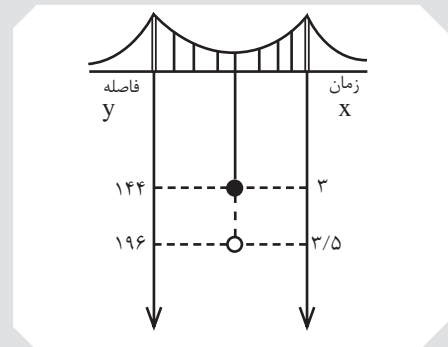
حسابان، محور اصلی ریاضیات است. کم پیش می‌آید که امروزه، دانشمندان، مهندسان یا اقتصاددانانی که با کمیت‌ها سروکار دارند، با حسابان، با آن همه کاربردهای وسیعش، روبه‌رو نشده باشند. از لحاظ تاریخی این دانش با ایزاک نیوتن<sup>۶</sup> و گاتفرید لایبنیتس<sup>۷</sup> وابسته است که راه‌گشای آن در قرن هفدهم بودند؛ دانشمندی که نظریه‌های مشابهشان به نزاعی حق تقدمی در این مورد کشیده شد که کدامشان کاشف حسابان بوده است. در واقع، هر دو آن‌ها مستقلاً به محاسباتشان رسیده بودند، گرچه روش‌های آنان کاملاً متفاوت بود.

از آن زمان به بعد، حسابان به موضوعی گسترده بدل شد. هر نسل به پر و پای روش‌هایی می‌پیچید که به تصور او باید نسل جوان‌تر آن را بیاموزد. این روزها کتاب‌های درسی که بالغ بر هزار صفحه شده، شامل مطالب فوق‌العاده بسیاری در این باره هستند. اما در مورد این اضافه‌شده‌ها، آن‌چه مطلقاً اساسی است دیفرانسیل‌گیری<sup>۸</sup> و انتگرال‌گیری<sup>۹</sup> دوقلوهای واقع در رأس حسابان، مطابق با تقریر نیوتن و لایبنیتس‌اند. این کلمات از differentialis (تفاضل گرفتن یا جدا کردن) و integralis (مجموع اجزا یا به هم آوردن) لایبنیتس گرفته شده‌اند.

در اصطلاح فنی، دیفرانسیل‌گیری با اندازه‌گیری تغییر<sup>۱۰</sup> و انتگرال‌گیری با اندازه‌گیری سطح<sup>۱۱</sup> سروکار دارد، اما درخشش



می‌افتد. امتیاز دیگر آزمایش ذهنی در این است که در آن می‌توان از عوامل پیچیده‌ای مانند مقاومت هوا صرف‌نظر کرد. اکنون، سرعت سنگمان در لحظه‌ای مفروض از زمان، مثلاً هنگامی که کروномتر دقیقاً سه ثانیه بعد از زمان رها شدنش را می‌خواند، چه قدر است؟ چگونه می‌توان این مقدار را به دست آورد؟ محققاً می‌توان سرعت متوسط<sup>۱۶</sup> را اندازه بگیریم، اما مسئله ما اندازه‌گیری سرعت لحظه‌ای<sup>۱۷</sup> است. از آن‌جا که این آزمایش، آزمایشی ذهنی است، چرا سنگمان را در هوا متوقف نکنیم، و سپس اجازه دهیم با در نظر گرفتن کسری از ثانیه، فاصله کوتاه دیگری به طرف پایین حرکت کند؟ در این صورت، اگر این فاصله اضافی را بر زمان اضافی مان تقسیم کنیم، سرعت متوسط را در فاصله‌های زمانی کوتاه‌تر و کوتاه‌تر، سرعت متوسط در مکانی که در آن سنگ را متوقف کرده‌ایم، نزدیک‌تر و نزدیک‌تر به سرعت لحظه‌ای می‌شود. فرایند حدی مزبور، ایده مبنایی نهفته در پس پرده حسابان است.



ممکن است وسوسه شویم زمان اضافی کوتاهی برابر با صفر را در نظر بگیریم. اما در آزمایش ذهنی مان، سنگ اصلاً حرکت نکرده است. سنگ فاصله‌ای را نیپیموده و زمانی برای انجام آن نگرفته است! این کار سرعت متوسط را به ما می‌دهد که اسقف بر کلی<sup>۱۸</sup>، فیلسوف ایرلندی، آن را به‌عنوان «ارواح کمیت‌های مرحوم» مشهور کرده است. این عبارت را نمی‌توان معین کرد، زیرا در عمل بی‌معنا<sup>۱۹</sup> به نظر می‌رسد، زیرا با در پیش گرفتن این مسیر به ورطه‌ای عددی رهنمون می‌شویم.

برای پیشرفت بیش‌تر به نمادهای بیش‌تری نیازمندیم. فرمول دقیق پیونددهنده  $y$ ، فاصله سقوط و  $x$ ، زمان رسیدن به آن‌جا را گالیله استخراج کرده است:

$$y = 16x^2$$

عامل «۱۶» به این علت ظاهر شده است که واحدهای اندازه‌گیری انتخاب‌شده فوت و ثانیه‌اند. اگر مثلاً بخواهیم بدانیم سنگ در ۳ ثانیه تا چه فاصله‌ای سقوط کرده است، خیلی ساده،

$x=3$  را در فرمول فوق قرار می‌دهیم و پاسخ را محاسبه می‌کنیم. فوت  $y = 16 \times 3^2 = 144$

اما چگونه می‌توانیم سرعت سنگ را در زمان  $x=3$  محاسبه کنیم. اجازه دهید  $0/5$  ثانیه دیگر را در نظر بگیریم و ملاحظه کنیم سنگ مورد نظر بین ۳ و  $3/5$  ثانیه چه قدر حرکت کرده است. سنگ در  $3/5$  ثانیه به اندازه

$$y = 16 \times 3/5^2 = 196$$

حرکت می‌کند، بنابراین بین ۳ و  $3/5$  ثانیه،  $x$  « $144 - 196$ »، یعنی ۵۲ فوت سقوط کرده است. از آن‌جا که سرعت برابر تقسیم فاصله بر زمان است، سرعت متوسط در این فاصله زمانی عبارت است از: متر بر ثانیه  $52 / 0/5 = 104$

این مقدار نزدیک به سرعت ثانیه‌ای در  $x=3$  است، اما می‌توان گفت  $0/5$  ثانیه اندازه‌ای به قدر کافی کوچک نیست. این استدلال را با فاصله زمانی کوچک‌تری، مثلاً  $0/05$  ثانیه، تکرار و ملاحظه می‌کنیم که فاصله سقوط عبارت است از:

$$\text{متر } 148/84 - 144 = 4/84$$

که سرعت متوسط زیر را به دست می‌دهد:

$$4/84 / 0/05 = 96/8$$

درواقع، این مقدار به سرعت لحظه‌ای سنگ در ۳ ثانیه (هنگامی که  $x=3$ ) نزدیک‌تر است.

اکنون باید خطر کنیم و مسئله محاسبه سرعت متوسط سنگ را بین  $x$  ثانیه و کمی بعد در  $x+h$  ثانیه اندازه بگیریم. در این صورت، پس از اندکی کلنجار رفتن با نماد، درمی‌یابیم که این مقدار عبارت است از:

$$16 \times (2x) + 16 \times h$$

هنگامی که  $h$  را کوچک‌تر و کوچک‌تر کنیم، مثل زمانی که در رفتن از  $0/5$  به  $0/05$  کردیم، ملاحظه می‌کنیم که جمله اول عبارت، بی‌تغییر باقی می‌ماند (زیرا شامل  $h$  نیست) و جمله دوم آن کوچک‌تر و کوچک‌تر می‌شود. در این صورت نتیجه می‌گیریم:

$$v = 16 \times (2x)$$

که در آن  $v$  سرعت لحظه‌ای<sup>۲۰</sup> سنگ در زمان  $x$  است. برای مثال، سرعت لحظه‌ای سنگ پس از ۱ ثانیه (زمانی که  $x=1$ ) برابر است با:

$$\text{فوت بر ثانیه } 16 \times (2 \times 1) = 32$$

و پس از ۳ ثانیه عبارت است از  $16 \times (2 \times 3)$  که ۹۶ فوت بر ثانیه را به دست می‌دهد.

در صورتی که فرمول فاصله گالیله، یعنی  $y = 16 \times x^2$  را با فرمول سرعت، یعنی  $v = 16 \times (2x)$  مقایسه کنیم، تفاوت اساسی، تغییر  $x^2$  به  $2x$  است. این تغییر، تأثیر دیفرانسیل‌گیری، یعنی گذشتن از

در صورتی که خم ما عبارت از  $u=x^2$  باشد، سطح مورد نظر با ترسیم نوارهای مستطیل شکل باریک در زیر خم، جمع آن‌ها برای محاسبه سطح تقریبی و به کار بردن فرایند حدی در مورد پهنای آن‌ها برای به دست آوردن سطح دقیق، یافت می‌شود. این پاسخ، سطح زیر را به دست می‌دهد:

$$A = \frac{x^3}{3}$$

u	$\int u dx$
$x^2$	$x^3/3$
$x^3$	$x^4/4$
$x^4$	$x^5/5$
$x^5$	$x^6/6$
...	...
$x^n$	$x^{n+1}/(n+1)$

در مورد خم‌های متفاوت (و بنابراین عبارات دیگر برای u) هم‌چنان می‌توان انتگرال را محاسبه کرد. مشابه مشتق، برای انتگرال توان‌های x نیز الگویی منظم وجود دارد. انتگرال مورد بحث از تقسیم بر «توان پیشین به اضافه ۱» و افزودن ۱ برای به دست آوردن توان جدید حاصل می‌شود.

### دستاورد درخشان

در صورتی که از انتگرال  $A = \frac{x^3}{3}$  دیفرانسیل‌گیری کنیم  $u=x^2$  اولیه را به دست می‌آوریم و در صورت انتگرال‌گیری از مشتق  $\frac{du}{dx} = 2x$  نیز به  $u=x^2$  اولیه می‌رسیم. یعنی دیفرانسیل‌گیری عکس انتگرال‌گیری است؛ موضوعی که به‌عنوان قضیه اساسی حسابان شناخته می‌شود و یکی از مهم‌ترین قضایای سراسر ریاضیات است.

بدون حسابان، هیچ ماهواره‌ای در مدار قرار نمی‌گرفت و هیچ نظریه‌ای در اقتصاد به سامان نمی‌رسید. هم‌چنین آمار به‌صورت بسیار متفاوتی مطرح می‌شد، زیرا هر جا که با تغییر سروکار داریم، حسابان را خواهیم یافت.

### پی‌نوشت

1. Tony Crilly
2. calculus
3. calculus of logic
4. calculus of probability
5. Calculus
6. Isaac Newton

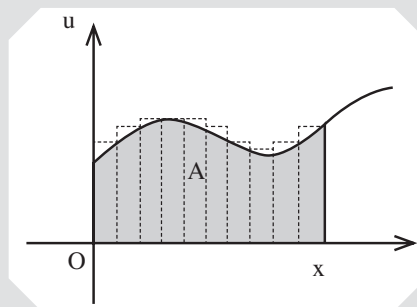
$u=x^2$  به مشتق  $\dot{u} = 2x$  است. نیوتن  $\dot{u} = 2x$  را جریان  $^{22}$  و متغیر x را جاری  $^{23}$  می‌نامید، زیرا برحسب کمیت‌های جاری شونده می‌اندیشید. امروزه، اغلب  $u=x^2$  و مشتق آن را به صورت  $\frac{du}{dx} = 2x$  می‌نویسیم. تداوم کاربرد این نمادنویسی، که ابتدا لایبنیتس آن را معرفی کرد، موفقیت «d» گرای لایبنیتس را بر کلهی گرای  $^{24}$  نیوتن نشان می‌دهد.

u	du/dx
$x^2$	$2x$
$x^3$	$3x^2$
$x^4$	$4x^3$
$x^5$	$5x^4$
...	...
$x^n$	$nx^{n-1}$

سنگ سقوط‌کننده یک مثال بود، اما در صورتی که عبارات دیگری داشته باشیم که u به جای آن‌ها قرار گیرد، می‌توانیم هم‌چنان مشتق آن‌ها را محاسبه کنیم، کاری که می‌تواند در سایر زمینه‌ها سودمند باشد. در این مورد الگویی موجود است: مشتق یک جمله از ضرب توان آن در آن جمله با توان یک واحد کم‌تر به دست می‌آید.

### انتگرال‌گیری

اولین کاربرد انتگرال‌گیری در اندازه‌گیری سطح بود. اندازه‌گیری سطح زیر یک خم، با تقسیم آن به نوارهای مستطیل شکل تقریبی، هریک با پهنای dx، انجام می‌گیرد. در این صورت، با اندازه‌گیری سطح هر یک از آن‌ها و جمعشان با هم، «مجموع» و در نتیجه، سطح کل را به دست می‌آوریم. لایبنیتس نماد S، را که به جای مجموع قرار می‌گیرد، به‌صورت بزرگ‌شده  $\int$  معرفی کرده است. سطح هریک از نوارهای مستطیل شکل برابر  $u dx$  است، بنابراین A، سطح زیر خم، از ۰ تا x، برابر است با  $A = \int_0^x u dx$ .




18. Bishop Berkeley
19. meaningless
20. instantaneous velocity
21. derivative
22. fluxion
23. fluent
24. dotage
25. Zeno
26. Cauchy
27. Riemann
28. Lebesgue

7. Gottfried Leibnitz
8. differentiation
9. integration
10. change
11. area
12. Gilbert
13. Sullivan
14. The Pirates of Penzance
15. theory of gravity
16. average speed
17. instantaneous speed


## چند تاریخچه



دهه ۱۸۲۰ میلادی:  
کوشی<sup>۲۶</sup> نظریه مورد بحث  
را به گونه‌ای دقیق تنظیم  
می‌کند.




حدود ۴۵۰ قبل از میلاد: زنون<sup>۲۵</sup>  
با پارادوکسی، بی‌نهایت کوچک‌ها  
را دست می‌اندازد.



۱۸۵۴ میلادی: ریمان<sup>۲۷</sup>  
انتگرال ریمان را معرفی  
می‌کند.

دهه ۱۶۶۰- دهه ۱۶۷۰ میلادی: نیوتن و لایب‌نیتس،  
اولین قدم‌ها را به سوی حسابان برمی‌دارند.

۱۷۳۴ میلادی: برکلی به ضعف‌های اساسی  
توجه می‌دهد.



۱۹۰۲ میلادی: لُبک<sup>۲۸</sup>  
نظریه انتگرال لُبک را  
پایه‌گذاری می‌کند.



# بیست سال حرکت و تلاش

میزگرد بیستمین سالگرد مجله برهان



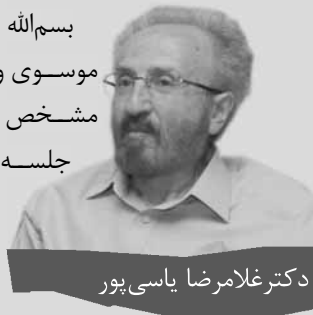
## اشاره

بیست سال گذشت، زمانی طولانی، به روایتی ثلث عمر آدمی. ایامی از مهمترین دوران زندگی ما، ما چند نفر که بیست سال پیش دور هم نشستیم و مجله برهان را پایه گذاری کردیم. مجله‌ای که مقالاتش، برهان بیست سال از بهترین دوران زندگی ماست.

در این نشست، به درد دل با خوانندگان مجله پرداخته‌ایم. آن چه گفته‌ایم صمیمانه ادا کرده‌ایم. خواستیم از استاد پرویز شهریاری تجلیل به عمل آوریم. به آقای امیری بگوییم قدر زحماتان را می‌دانیم، به آقای صدر خاطر نشان کنیم دوستشان داریم. از آقای رستمی قدردانی کنیم، به آقای قندهاری دست‌مریزاد بگوییم، آقایان هاشمی و شرقی را تحسین کنیم، از آن‌ها که با ما بودند و اکنون نیستند یادی کنیم، از خاطراتمان بگوییم، و خلاصه هرچه دل تنگمان می‌خواهد به زبان آوریم و بالاخره، شکر خداوندرا، به خاطر این توفیق که نصیب‌مان کرده به‌جا آوریم، و اینک این شما و این حاصل نشست صمیمانه ما.



بسم الله الرحمن الرحيم و به نستعين. نزدیک بیست سال پیش، آقای امیری، سردبیر مجله برهان با آقای سید موسوی و بنده و آقای رستمی جلسه‌ای گذاشتند تا مجله‌ای به نام مجله ریاضی (زیرا آن زمان هنوز اسمش مشخص نبود) را منتشر کنند. آقای امیری پیشنهاد کردند که از آقای استاد شهریاری هم دعوت به عمل بیاید. جلسه بعد ایشان تشریف آوردند و به پیشنهاد آقای استاد شهریاری، کلمه برهان را برای نام مجله انتخاب کردند. البته متوجه شدیم که این کلمه در قرآن هم آمده است. «قُلْ هَاتُوا بُرْهَانَكُمْ»، یعنی اگر این جا حرفی دارید با استدلال وارد شوید. افراد دیگری در جلسات بعد اضافه شدند، از جمله آقای قندهاری و آقای هاشمی موسوی، آقای قمصری و آقای عابدی هم با مجله همکاری داشتند. بعد هم آقای صدر



دکتر غلامرضا یاسی پور

و سپس آقای شرقی آمدند. همکاران جدید یکی از یکی بهتر بودند، یعنی باعث خوشحالی بودند. بنده اگر بخواهم یک خاطره از مجله برهان بگویم، یک خاطره‌ای می‌گویم که مربوط به همه است، یعنی همه ما آن را یک خاطره خوب می‌دانیم. از زبان همه صحبت می‌کنم. یک خاطره همکاری مداوم استاد شهریاری است که در هر موقعیتی ارتباطش را با مجله برهان و جلسات ما قطع نکردند و برای همه ما افتخار بزرگی است. خاطره دیگر، ادب و محبت آقای امیری سردبیر مجله است که این جمع را تا به حال در کنار هم نگه داشته است؛ جمعی که از حدود بیست سال پیش تاکنون دور هم جمع می‌شوند و برای مقالات مجله تصمیم می‌گیرند و به کار مشغول‌اند. با این مقدمه، رشته سخن را به خود آقای امیری می‌دهم.



حمیدرضا امیری

من دلم می‌خواست آخرین نفری باشم که صحبت می‌کنم و بیش تر از صحبت‌های اساتید محترم استفاده ببرم. خاطر هست وقتی که با حاج آقا برادری (معاونت انتشارات مدرسه) راجع به اعضای هیئت تحریریه صحبت کردیم، به این نتیجه رسیدیم از کسانی استفاده کنیم که بیایند و به جمع ما، به این مجله و به ناشر این مجله اعتبار بدهند، نه اینکه خدای نکرده بیایند و اعتباری بگیرند. اولین گزینه‌ای که به ذهنمان رسید استاد شهریاری بودند. وقتی اولین بار با ایشان صحبت کردم (که همیشه در ذهنم باقی مانده و باقی خواهد ماند) که تلفنی هم صحبت کردم، به ایشان گفتم مجله‌ای ریاضی مانند یکان می‌خواهیم منتشر کنیم. ایشان گفتند یعنی یک چیزی شبیه یکان؟ گفتم: بله. گفتند: خیلی خوب است، من هم موافقم. اگر خاطرتان باشد، جلسه‌ای با ایشان گذاشتیم که فکر می‌کنم آقای رستمی هم در آن جلسه تشریف داشتند، شما هم تشریف داشتید، آقای سید موسوی هم بودند. بهتر است، آقای شهریاری خودشان بگویند که آن موقع چه فکر می‌کردند؟ آیا فکر می‌کردند بیست سال بعد این‌طور بشود؟ یا انگیزه‌شان از ورود به این عرصه و جمع ما (جمعی که نمی‌شناختند) چه بود، زیرا بیش تر افراد این جمع را نمی‌شناختند.

شود، مثل الآن که دلمان نمی‌خواهد این ساعتی که این جا هستیم تمام شود. حالا من دلم می‌خواهد اگر شما هم چیزی در ذهنتان هست یا خاطراتی دارید، نقل کنید؟  
استاد شهریاری: شما قسمتی از آن را فرمودید دیگر احتیاجی به من نیست. به نظر من اگر دیگران صحبت کنند، کافی است.  
آقای امیری: شما همه شماره‌های مجله آشنایی با ریاضیات را دارید؟ یادتان هست که تعطیل شد؟  
آقای شهریاری: یادم نیست. همه شماره‌ها را به صورت یک دوره صحافی شده دارم.  
آقای امیری: از کسانی که آن دوره با شما همکاری می‌کردند و مقاله می‌دادند، هنوز هم کسانی هستند که با شما ارتباط داشته باشند؟ البته مثل اینکه بیش تر مقالات را خود شما می‌نوشتید...  
آقای یاسی پور: فکر راه‌اندازی مجله برهان از چه کسی بود؟  
آقای امیری: مال خودم بود، من اول به آقای فریدون<sup>۱</sup> پیشنهاد

چیزی که برای من اهمیت داشت این بود که بعد از چاپ پنج یا شش شماره از مجله استاد مجله خودشان به نام آشنایی با ریاضیات (البته اول آشتی با ریاضیات بود، بعد تبدیل به آشنایی با ریاضیات شد) را به حالت تعطیل درآوردند. وقتی من علت را از ایشان سؤال کردم، گفتند که من هر چه توان دارم در برهان صرف می‌کنم و بهتر است در این جا متمرکزتر باشیم. یعنی یک چیزی بالاتر از همکاری مستمر ایشان با مجله؛ چون به خاطر همکاری و ارزشی که برای این مجله قائل بودند، مجله خودشان را به دلایلی که گفتند (شاید موازی کاری یا تمرکز بیش تر روی برهان) تعطیل کردند. به هر صورت، استاد، از همان روزهای اول که شما وارد جمع ما شدید، همیشه برای آن لحظاتی که می‌خواستیم در هیئت تحریریه با شما بنشینیم لحظه‌شماری می‌کردیم و منتظر بودیم آن تاریخ و آن ساعت و آن روز برسد و بعد هم دلمان نمی‌خواست آن ساعت‌ها تمام





### استاد دکتر پرویز شهریاری

من بیش تر می‌نوشتم و دیگران هم بودند. منتها با هر دو نام «آشتی با ریاضیات» و «آشنایی با ریاضیات» روی هم هفتاد شماره چاپ شد.



به من ارجاع شد که من نظر بدهم و الحق والانصاف کتاب بسیار با ارزش و خیلی پرمحتوایی بود و در آن دوره نظیر نداشت. بعد از آن از ایشان خواستم که در این زمینه به من کمک کنند. آن موقع فکر نمی‌کردم تخصص ایشان در هندسه بیش تر از جبر باشد، ولی با همان یک کتاب متوجه شدم که قلم و کارشان با دیگران فرق دارد. با آقای سید موسوی در مدرسه تیزهوشان ارتباط داشتم، و با هم در مدرسه علامه حلی درس می‌دادیم. آن موقع ما خدمت استاد یاسی پور درس منطق ریاضی را فرا می‌گرفتیم. من بودم و آقای سید موسوی و آقای نوذری. ما آن جا به آقای سید موسوی گفتیم، شما هم بیا، قرار است آقای شهریاری هم بیایند.

در اولین جلسه هیأت تحریریه گفتیم که اسم مجله را چه بگذاریم. اگر خاطرتان باشد خودم کلمه «مبین» را پیشنهاد کردم. آقای شهریاری پیشنهاد کردند اسم مجله را بگذاریم «برهان». وقتی کلمه برهان به کار رفت و از دهان ایشان بیرون آمد، همه نام‌های پیشنهادی‌شان را فراموش کردند و گفتند بهترین اسم ممکن همین است. اسم باید یک کمی هم ژورنالیستی باشد، مثل یکان که در ذهن بماند. قرار شد نام مجله را برهان بگذاریم. من آن موقع از یکی دو نفر از دوستان دفتر تألیف هم خواهش کردم به جمع ما بیوندند تا از آن‌ها مقاله بگیریم، که مقاله‌ای ندادند و شاید که کمی محافظه‌کارانه عمل کردند. شاید فکر نمی‌کردند که

کردم، آقای فریدون مخالفت کردند. بعد گفتم حالا اگر می‌شود با آقای چینی‌فروشان مطرح کنید. من روحیات ایشان را نمی‌شناختم، ولی چون فکر می‌کردم آخرین تیر است، دیگر گفتم شما مطرح کنید، ایشان هم فکر نمی‌کرد آقای چینی‌فروشان بپذیرند یا این طور مُصر باشند. در جلسه‌ای گفت، فلانی هم پیشنهاد چاپ مجله دارد. ایشان گفتند چه مجله‌ای؟ گفتم مجله ریاضی در مایه‌های یکان. آقای چینی‌فروشان هم که به دلیل تحصیل در رشته ریاضی در دبیرستان و مهندسی در دانشگاه از خواننده‌های مجله یکان بودند، بلافاصله مرا به دفترشان صدا کردند و گفتند: من هر جور بخواهی پشتیبانی‌ات می‌کنم، اصلاً نترس و مجله را راه بینداز و به حاج‌آقا فریدون هم گفتم که مقدمات کار را برایت فراهم کند.

من برای شروع کار به دنبال اعضای هیئت‌تحریریه بودم. آن زمان در آموزشگاه علامه تدریس می‌کردم و در زمان دانش‌آموزی‌ام کتاب جبر و آنالیز آقای قندهاری را خوانده بودم، بعد فهمیدم ایشان آن جا درس می‌دهند و در یک روز با هم درس می‌دادیم. رفتم پیش آقای قندهاری و از ایشان خواهش کردم که به جمع ما بپیوندند. ایشان گفت: روی این قضیه فکر می‌کنم، تلفنشان را دادند و من زنگ زدم و بعد گفتند باشد.

آقای رستمی یک کتابی را برای چاپ به انتشارات مدرسه آورده بود؛ «کتاب جبر پایه». چون من آن جا مسئول گروه ریاضی بودم،

مجله به این سرعت و به این خوبی پا بگیرد. آقای سید موسوی بعد از دو سه جلسه از جمع ما گریخت، چون خیلی روحیه کار جمعی نداشت و عذرخواهی کرد و از جمع ما رفت و آقای هاشمی به جمع ما اضافه شدند. ایشان هم به بهانه دادن یک کتاب یا یک جزوه (شاید در مورد دترمینان) به دفتر آمده بودند. با ایشان هم صحبت کردیم، دیدیم که خیلی علاقه‌مند به ریاضیات‌اند و از طرفی روحیاتشان هم با روحیات ما می‌خواند.

فکر می‌کنم پس از چاپ چهارده یا پانزده مجله بود که احساس کردیم مجله باید یک سازمان مستقل پیدا کند و فکر می‌کنم از آغاز ورود آقای صدر، دیگر وضعیت مجله ما دگرگون شد. ایشان مجله ما را به یک مجله خیلی وزین تبدیل کردند. خیلی کارها که برای من سخت بود ایشان انجام می‌دادند.

آقای یاسی‌پور: آقای شرقی کی تشریف آوردند؟

آقای امیری: زمان ورود ایشان کمی بعد از آقای صدر بود. آقای شرقی به واسطه المپیادها وارد مجله شد.

آقای شرقی: ما از خیلی پیش‌تر از آن هم ارتباط داشتیم. سال ۷۴ بود و شما یک کتابی را به من دادید و فرمودید آقای رستمی نوشته‌اند. فکر می‌کنم از شماره ۲۵ به‌طور رسمی وارد جلسات شما شدم.

آقای صدر: من فکر می‌کنم از شماره ۲۰ بود که به جمع هیئت تحریریه پیوستم. قبل از آن آقای هاشمی موسوی یک سال مدیر داخلی مجله بود.

آقای امیری: آقای شهریار، مطلبی که من فکر می‌کنم دوستان راجع به آن صحبت کنند، تأثیراتی است که این مجله در جامعه داشته و دارد.

آقای شهریار: به هر حال این را شما باید بگویید که بیش‌تر ارتباطات دارید؛ شما یا آقای صدر.

آقای امیری: در طی این سال‌ها، خیلی وقت‌ها کتاب درسی عوض می‌شد و ما می‌دیدیم که یک مقاله یا یک موضوع در آن است که حالا به دلیل محدودیت‌هایی که در تألیف کتاب‌های درسی وجود دارد، باید خیلی بیش‌تر باز شود و مجله در این‌گونه موارد نقش خودش را خیلی

خوب بازی می‌کرد. ما کسانی را داشتیم که به ما مقاله می‌دادند، مثل همین آقای صدر که برای من یک مقاله نوشت و همان مقاله آغاز آشنایی ایشان با ما بود. مقاله ایشان درباره شکل‌های توپولوژیکی بود که در فضای متریک معمولی یک شکل دارد و در فضای دیگر، این معادله به شکل دیگری ظاهر می‌شود و بحث‌های توپولوژی دیگر، من دیدم که این مقاله برای بچه‌های دبیرستانی کمی سنگین است. با ایشان ارتباط برقرار کردم و گفتم این مقاله کمی سنگین است، شما قلمت خوب است و کاری که می‌کنی با ارزش است، به این کارت ادامه بده و یک مقاله دیگر در این زمینه‌ها برایمان بنویس. بعد ایشان یک مقاله دیگر به نام «هم‌ارزی مجموعه‌ها» برایمان نوشت. آن مقاله اشکالاتی داشت و این‌گونه مقالات در هیئت تحریریه مطرح می‌شد. بعد مقاله را به ایشان برگرداندیم و گفتیم چکش کاری کند. خلاصه چهار، پنج دفعه ما ایشان را بردیم و آوردیم تا بالاخره مقاله ایشان در شماره ۱۵ که خودم هم یک ستون به آن اضافه کردم و چاپ شد. خوب ایشان از یک مقاله شروع کرد که یک ستونش را هم من نوشتم، ولی الآن از خود بنده خیلی بهتر می‌نویسد، یعنی این مجله باعث و بانی این امر شد. مثال ایشان افراد زیادی بودند. الآن در چندتا از شماره‌های مجله، افراد ثابتی مثل آقای عنایت‌الله راستی، یا خانم اکبری‌زاده مقاله دارند که دبیران ریاضی خیلی خوبی هستند. آقای احسان یارمحمدی از اراک با یک مقاله شروع کرد و الآن چندین مقاله‌اش در برهان چاپ شده و بچه‌ها از آن استفاده می‌کنند. به هر حال تأثیرات این مجله در جامعه خیلی خوب بوده است.

حالا در خدمت استاد رستمی هم هستیم. خوشحال می‌شویم از صحبت‌های شیرینشان استفاده کنیم. می‌توانیم بگوییم، ایشان از پایه‌گذاران اصلی مجله هستند. همیشه زحمت بخش هندسه مجله، با ایشان بوده است. من و همه دوستان از رهنمودهای ایشان خیلی استفاده کردیم، و همکاری ایشان باعث افتخار همه ماست. من در یک جمع دیگری هم که از بزرگان و دست‌اندرکاران ریاضی بودند، عرض کردم که در زمینه هندسه در عصر معاصر، زحمتی که ایشان در دایرةالمعارف هندسه کشیدند واقعاً کم‌نظیر بلکه بی‌نظیر است.

بسیاری از مطالب را آقای امیری، سردبیر محترم مجله رشد ریاضی برهان، فرمودند. من تشکر می‌کنم. بنده همیشه شاگردی بودم در جمع دوستان. واقعیت این است که از نظر تک‌تک دوستانی که در این جمع بودند، استفاده کردم، به خصوص استاد شهریار که از قبل، چه زمان تحصیل و چه زمان دبیری‌ام از کتاب‌های ایشان استفاده می‌کردم که راهنمای ما بود و بعد هم، از شروع مجله برهان که در خدمت ایشان بودیم فیض بردن ما از نظرات و راهنمایی‌های ایشان به‌مراتب بیشتر شد و هنوز هم ادامه دارد.

من موقعی که معلم بودم با مجله یکان آشنایی داشتم و از کسانی بودم که مجله یکان را هم مشترک بودم و هم به شاگردانم توصیه می‌کردم که حتماً بگیرند. با خود استاد مصحفی هم ملاقات‌هایی داشتم. دفتری داشتند در خیابان لاله‌زارنو تهران، که چندبار من در آنجا پیش ایشان رفتم. هم مقاله می‌دادیم



محمد هاشم رستمی

برای چاپ در مجله و هم از مقالات ارزشمند یکان استفاده می‌کردیم. در آن زمان همکارهای مجله یکان اساتید بزرگی بودند، از جمله استاد شهریاری، دکتر هشترودی و دیگر دوستان که همکاری می‌کردند. بعدها متأسفانه این مجله تعطیل شد و جای خالی آن احساس می‌شد. زمانی که جناب امیری پیشنهاد تأسیس یک مجله ریاضی را دادند، من بسیار خوشحال شدم، زیرا این خلأ را کاملاً حس می‌کردم. به همین علت در حد بضاعتی که داشتم، گفتم در خدمت شما هستم. در اوایل تعداد افراد کمتر بود. یادم هست که مسئولیت جبر رشته ریاضی، مثلثات رشته‌های تجربی و ریاضی و هندسه و جبر رشته تجربی و تهیه مقالاتش با من بود؛ تا بعد که دیگر دوستان مثل آقای قندهاری آمدند و بخش جبر به ایشان داده شد. بعد با آمدن دوستان دیگر از جمله جناب صدر و جناب شرقی و جناب هاشمی، مسئولیت بنده محدود به هندسه شد. برنامه‌ریزی آقای امیری برای مجله برهان از ابتدا با هدف رفع کمبودهای کتاب درسی و تکامل و دانش‌افزایی دانش‌آموزان، جایگاه خاصی داشت که باید بگویم هم برنامه‌ریزی‌ای که ابداع‌کننده‌اش جناب امیری بود و هم برنامه‌ریزی در هیئت‌تحریریه این مجله باعث شد الحمدلله تاکنون مجله نقشش ادامه پیدا کند و همیشه هم سعی بر این بوده است که در جهت تکامل و بهبود و پیشرفت قدم برداشته شود.

من در آخرین قسمت از صحبت‌های من خواهم باز تشکر کنم به‌ویژه از جمع حاضر در این جلسه در درجه اول از استاد شهریاری که مایه افتخار این کشور و از چهره‌های ماندگار هستند و واقعاً نهایت محبت و لطف را داشتند. خود من هم همیشه از راهنمایی‌های ایشان استفاده کردم. بعد هم از مدیریت خوب مجله، برادر عزیزمان جناب آقای امیری و آقای صدر تشکر می‌کنم که با ایجاد جو صمیمی در هیئت‌تحریریه مجله برهان آن را به شکل یک خانواده درآوردند. هم‌چنین از استاد یاسی‌پور که ایشان هم همیشه از ابتدا آن‌چه در توان داشتند دریغ نکردند و همیشه محبت داشتند و بنده خودم از راهنمایی‌های ایشان خیلی استفاده کردم. همین‌طور از آقای هاشمی موسوی، آقای شرقی و آقای قندهاری و دوستانی که به‌طور مقطعی کار کردند. امیدوارم همیشه در زندگی‌شان موفق باشند و دانش‌آموزان این مملکت و به‌طور کلی اهل فرهنگ بتوانند بهره‌بیش‌تری از وجود این عزیزان ببرند.

آقای امیری: حالا که استاد فرمودند، یادم افتاد نقش آقای

شهریاری در جمع ما همیشه یک نقش محوری بوده است، یعنی همیشه ایشان شمع بودند که ما به دور ایشان می‌چرخیدیم و می‌انداختیم. یک خاطره‌ای دارم که چند جا نقل کرده‌ام و الآن هم نقل می‌کنم. هیچ‌وقت فراموش نمی‌کنم که ایشان یک‌بار از کانادا تشریف آورده بودند، فکر می‌کنم ۹ یا ۱۰ سال پیش بود. طبق معمول ایشان به جلسه هیئت‌تحریریه می‌آمدند که در دفتر مجله تشکیل می‌شد. ایشان گفتند که دانشگاه شهر ونکوور از ایشان خواسته بودند که تدریس تاریخ ریاضی یا قسمتی از ریاضی را برعهده بگیرند، با حقوق خیلی خوب و قول اینکه مترجم در اختیارشان بگذارند. ایشان سنگ انداخته بودند که من کتاب‌هایم همراهم نیست. بعد من از ایشان پرسیدم که استاد چرا نماندید، آنجا که شغل خوب، حقوق خوب، همه امکانات، اعضای خانواده‌تان هم که آن طرفاند و تنها نیستید، چرا قبول نکردید؟ ایشان خیلی بزرگووارانه فرمودند، اگر من آن‌جا مانده بودم الآن این جمع هیئت‌تحریریه را نداشتم. این حرف برای من خیلی ارزش داشت و مرا بر آن داشت تا با تلاش هرچه بیشتر سعی کنم این جمع را حفظ کنم. وقتی شخصیتی مثل آقای شهریاری آن همه امکانات رفاهی را رها می‌کند و می‌گوید دوست دارم در این جمع باشم، این برای من خیلی ارزشمند است.

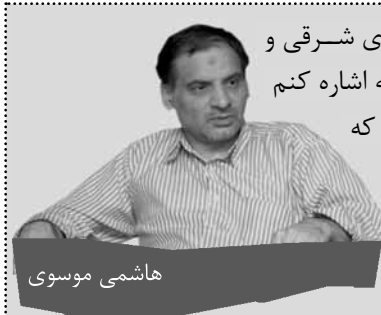
کردید، من یاد آن بیت افتادم که می‌گوید:  
شهریارا تو بمان بر سر این خیل یتیم  
پدرا! یارا! اندوه‌گسار! تو بمان

آقای رستمی: حال تا وقت است من خاطره‌ای از آقای شهریاری بگویم. مطلبی یادم افتاد در مورد کتاب مکان هندسی. من قبل از اینکه بخواهم کتاب مکان هندسی را به‌صورت مستقل بنویسم، در مجله یک‌سری مقاله در مورد مکان هندسی می‌نوشتم. بعد به این فکر افتادیم که بیاییم آن‌ها را به‌صورت یک مجموعه دربیابیم. دسته‌بندی مکان‌های هندسی کار مشکلی است و تا آن‌جا که من اطلاع دارم در زمینه مکان هندسی به‌صورت مستقل کتابی نوشته نشده است. من در این مسئله ماندم که ما چگونه این مکان‌ها را تقسیم‌بندی کنیم؟

یکی از بخش‌های چالش‌آفرین در هندسه، هم برای دانش‌آموزان و هم برای دبیران، مکان هندسی است. به همین دلیل با ایشان مطرح کردیم که اگر بخواهیم چنین چیزی تنظیم کنیم چه کار باید کنیم؟ بعد آمدیم مکان‌ها را با آن عوامل ثابتی که در آن‌ها وجود دارد تقسیم‌بندی کردیم. در یکی از جلسات هیئت‌تحریریه بود که وقت استاد شهریاری را گرفتیم و از ایشان نظر خواستیم که ایشان لطف کردند و در ابتدای کتاب، یک تقسیم‌بندی برای مکان‌ها نوشته شد که حاصل راهنمایی‌های استاد شهریاری است. آقای یاسی‌پور: به این قسمتی که آقای رستمی گفتند، می‌خواستم یک

چیزی در مورد آقای امیری و آقای صدر اضافه کنم. آقای امیری که خودش خیلی آدم خوبی است، یک آدم خوب دیگر هم مثل خودش پیدا کرده و این خیلی جالب است. من یاد این مصراع حافظ افتادم که می‌گوید:  
ادب و شرم تو را خسرو مه‌رویان کرد

یعنی واقعاً این‌طور است. هر دو زحمت می‌کنند، محبت دارند و ادب به خرج می‌دهند. آقای صدر هم مثل آقای امیری است. این زوجی که عهده‌دار کارهای اصلی مجله‌اند، به‌عنوان سردبیر و مدیر داخلی، هر دو خیلی باهم جور شده‌اند. از هر دو تشکر می‌کنم.



هاشمی موسوی

ابتدا از هیئت تحریریه به‌ویژه آقای امیری و آقای صدر، آقای رستمی، آقای یاسی‌پور، آقای شرقی و استاد بزرگمان آقای شهریاری و بالاخره آقای قندهاری تشکر می‌کنم. قبل از اینکه به چند نکته اشاره کنم به محتوای خود مجله یک مقدار اشاره می‌کنم و یک توصیه‌هایی برای شماره‌های بعدی دارم که ان‌شاءالله بتوانیم آن‌ها را عملی کنیم.

در مورد خود مجله بگویم که بسیار جای خرسندی و تشکر است که این جمع تا به حال ماندنی شده و همه زحمت می‌کشند، مقاله می‌دهند و خوشحال‌اند که برای شماره بعدی یک مقاله جدید بدهند. من بسیاری از مجلات مثل آشنایی با ریاضیات، آشتی با ریاضیات را که ۱۰ تا

۱۵ مقاله خودم در آن چاپ شده بود، مطالعه می‌کردم. وقتی که آشنایی با ریاضیات چاپ نشد، خیلی ناراحت شدم، اما یکی دیگر به نام برهان ریاضی جانشینش شد و باعث خوشحالی بود. اما تعداد کم مجلات ریاضی در ایران نگران‌کننده است. یعنی اگر ده مجله دیگر در کنار برهان با اهداف دیگر و به‌صورت‌های دیگر چاپ شود بسیار عالی است. وقتی اینترنت را جست‌وجو می‌کنیم، به هشتاد مجله ریاضی آمریکایی با عناوین مختلف برمی‌خوریم. یک‌سری از آن‌ها حذف شده و چندتای دیگر فعال است. مجلات دیگری از انگلیس مانند اکسپکتروم که خود من الآن ارتباط دارم و به آن‌ها مقاله داده‌ام، ولی اعتنا نمی‌کنند، یعنی آن‌ها به صورت فردی نگاه می‌کنند و وقتی می‌بینند ایرانی است، با نگاه دیگری به آن می‌نگرند. از یک مقاله فقط یک مسئله درمی‌آورند و جوابش را می‌زنند و این بسیار جای نگرانی است. الآن بدتر شده و روزبه‌روز بدتر می‌شود، یعنی وقتی شما یک مقاله می‌فرستید، می‌گویند اگر شما می‌خواهید به‌صورت یک مسئله چاپ می‌کنیم. همین چند وقت پیش من یک مقاله کامل به آمریکن مونتلی با یک نفر دیگر به صورت مشترک دادم، بعد گفتند این را به صورت problem solution بفرستید به بخش problem solution. ما فرستادیم آن‌جا. این‌ها چیزهایی است که نگرانی‌های ما را بیش‌تر می‌کند. این درحالی است که در این‌جا دایره باز است. مجله رشد برهان انصافاً باز برخورد می‌کند و کسی مقاله‌اش خوب باشد چاپ می‌شود. من در هیچ‌جا ندیدم، من با ۱۰ تا ۱۵ مجله با خارج در ارتباطم، می‌بینم این مجله چه‌قدر باز است و چه جای خرسندی است برای خودمان که این مجله جایگاه بسیار خوبی دارد.

توصیه می‌کنم که ما این مجله را با یک ترندهایی میان بچه‌ها ببریم. می‌توان با تعیین جایزه این کار را کرد. اگر یک دانش‌آموزی در یک مقطع تحصیلی صورت مسئله‌اش در مجله بیاید، شوق پیدا می‌کند. پس یک مجله می‌تواند چه‌قدر راهگشا باشد و کل جامعه را تکان بدهد؛ دبیران را، دانش‌آموزان را، همه را؛ و به جایی برساند که همه آن‌ها مقاله بدهند. چرا همیشه چند نفر انگشت‌شمار باید مقاله دهند. همین، ما را نگران می‌کند. همین باعث می‌شود که کارهایی بکنیم، مجله را به درون دبیرستان‌ها ببریم حالا یا به‌صورت مسابقه یا مقاله یا با راهکارهای دیگر و در همین حد نمایم.

پیشنهاد دیگرم این است که در هر جلسه یک معلم از یک منطقه بیاید و با استفاده از بحث‌های همکاران، مجله را به دانش‌آموزان منطقه خود بشناساند. من معتقدم باید دعوتی از یک یا دو معلم به عمل آورد که خیلی با سابقه هستند، بیایند این‌جا تا هم ما معرفی کنیم، هم آن‌ها بشناسند و این کار در روند همه‌چیز مجله تحول ایجاد کند.



هوشنگ شرقی

من می‌خواهم خاطراتم و احساسات شخصی‌ام را بگویم. همیشه خیلی قبل از ورود به هیئت تحریریه مجله برای من افتخار بزرگی بوده است در کنار اشخاصی چون آقای قندهاری، آقای رستمی، آقای یاسی‌پور و آقای امیری باشم. این‌ها اسم‌های خیلی بزرگی برای من بودند و فکر نمی‌کردم که روزی در کنار آن‌ها همکاری کنم. آقای شهریاری هم که حسابش از همه جداست و برای من یک اسم ماندگار است. من خودم اولین باری که با اسم آقای شهریاری آشنا شدم فکر می‌کنم کلاس پنجم ابتدایی بود که عضو کتابخانه کانون فکری کودکان و نوجوانان بودم. من در آن‌جا یک سری کتاب‌ها را به صورت دوره‌ای می‌خواندم و می‌رفتم جلو، یک خانم کتابداری آن‌جا بود، به من گفت: چرا کتاب‌های بهتر نمی‌خوانی؟ گفتم مثل چه کتابی؟ گفت خوب

مثل این؛ و رفت یک کتابی را از قفسه آورد بیرون، «یک روز زندگی پسرک قبطی». من این کتاب را بردم و خواندم و خیلی لذت بردم و گفتم مترجم این کتاب آقای پرویز شهریاری باید استاد تاریخ باشد که کتابی در ارتباط با مصر نوشته است. چند سالی از این قضیه گذشت و من کلاس سوم ریاضی دبیرستان در یک مدرسه عادی منطقه ۱۰ بودم. کتاب جبر سوم ریاضی را که می خواندیم مسئله‌هایی درباره مشتق و مسئله‌های ترکیبی درباره مشتق اول و دوم داشت. دبیر ما که این مسئله‌ها را حل می‌کرد. من پیش خود می‌گفتم معلم چطوری فهمیده شکل این تابع را باید این‌طوری عوض کند و بعد مشتق بگیرد؟ ما هر چه فکر کردیم به ذهنمان نرسید؟! در کتابخانه همان مدرسه من کتاب روش‌های جبر را دیدم. همان مسئله‌ها را در این کتاب دیدم و راه‌حلش هم به همین شکل آمده بود. ... بعد با خود گفتم این پرویز شهریاری همان پرویز شهریاری است؟ یعنی با خود گفتم نباید او باشد، باید دو نفر باشند. بعد چند سالی گذشت. آشتی با ریاضیات و آشنایی با ریاضیات را دیدم. آن روش‌های جبر هم در تمام دوران دانشجویی‌ام به دردم خورد و مسئله‌هایش را حل می‌کردم تا سال ۷۰-۷۱ یک کتاب خاطرات سیاسی خواندم. آن‌جا از یک آقای که اسم معروفی هم دارد پرسیده بودند، نظر شما راجع به پرویز شهریاری چیست و ایشان گفته بود «پرویز شهریاری یکی از تمیزترین (اصطلاحی که آن شخص به‌کار برده بود) آدم‌هایی است که در عمرم دیدم. من آن‌جا با خودم گفتم این باید همان پرویز شهریاری باشد و بعد گفتم حتماً باید ایشان را بشناسم و ببینم. بعد رفتم یک تحقیق مفصل درباره استاد کردم و اشتیاقم برای دیدن ایشان بیش‌تر شد. وقتی برهان را دیدم متوجه شدم که آقای امیری و آقای شهریاری هم در این مجله هستند. گفتم این فرصت خوبی است و حتماً از این‌جا به پرویز شهریاری می‌رسم!

آن‌جا جبر سوم ریاضی می‌گویم و من پرسیدم چرا سوم، چرا چهارم را نمی‌گویید؟ ایشان گفتند: «سال چهارمی‌ها از دست رفته‌اند، نمی‌شود با آن‌ها ارتباط برقرار کرد. ما می‌خواهیم چهار کلام حرف حسابی بزنی، یک تاریخ ریاضی بگوئیم، آن وقت دانش‌آموزان چپ‌چپ نگاهمان می‌کنند و می‌گویند آقا به درد کنکور می‌خورد؟ چه بگوئیم؟ من فقط سوم درس می‌دهم.» که آن‌جا ما یک کلاس مشترک داشتیم، جبر سوم را استاد می‌گفت، ریاضیات جدید سوم را من می‌گفتم، ریاضیات جدید چهارمشان را هم من می‌گفتم. روزهایی که ایشان کلاس داشتند، یک جلسه کلاس من بعد از کلاس ایشان و خیلی سخت بود. باور کنید بعد از کلاس ایشان، رفتن سر آن کلاسی که ایشان در آن درس داده بود و می‌خواستیم ریاضیات جدید بگوئیم بسیار کار مشکلی بود. بچه‌ها هنوز تا نیم ساعت اول کلاس هنوز محو صحبت‌های ایشان بودند و فکر می‌کردند من آقای شهریاری هستم که آن‌جا درس می‌دهم. آن‌جا این رابطه بین بچه‌ها و استاد را به خوبی درک کردم. فکر می‌کنم آن سال‌ها، سال‌های آخر تدریس ایشان بود و دیگر بعد از آن در مدرسه‌ای درس ندادند.

آقای یاسی‌پور: بله این که فرمودید سال سوم درس می‌گفتند، در یک مدرسه‌ای که من خدمت خود آقای شهریاری بودم و مثلثات می‌گفتم، ایشان می‌گفتند که من پنجم ریاضی را می‌گویم، شما برو مثلثات ششم ریاضی را بگو. من به ایشان گفتم آخر من چه‌طور در مقابل شما بروم ششم؟ گفتند نه من با پنجم باید کار کنم. همین حرفی که شما گفتید.

آقای امیری: آقای مهدی قمصری یک مدت در جمع ما بودند، ایشان معلم جبر و آنالیز سال چهارم خودم بودند. آقای عابدی هم از اولین شماره به ما مقاله می‌دادند. ایشان هم سال چهارم معلم ریاضیات جدید ما بودند. الان یادم افتاد که از این دو بزرگوار هم یادی کنیم، به‌ویژه آقای عابدی که بعدها هم خیلی با ما همکاری داشت. دو تا از کتاب‌های کوچک ریاضی از ایشان است. الان هم مثل اینکه مریض هستند. همین‌جا پیشنهاد می‌کنم یک جلسه خدمت ایشان برسیم.

آقای یاسی‌پور: یک نکته‌ای را در ادامه صحبت آقای شرقی عرض کنم. ما در سال ۱۳۳۹ یعنی ۵۰ سال پیش‌تر، شاگرد آقای شهریاری بودیم. ایشان در یک مدرسه دولتی در خیابان نادری (به نظر اسم مدرسه‌اش تمدن بود) مثلثات درس می‌دادند. جا هم نداشتیم، ما متفرقه بودیم و شبانه می‌رفتیم، جا هم نبود و ایشان در آبدارخانه روزانه برای چند نفر بزرگسال کلاس گذاشته بودند. فقط من بودم که سنم کمتر از بقیه بود. آن‌ها همه عاشق آقای شهریاری بودند. با صحبت آقای شرقی من به یاد عشق آن‌ها افتادم، واقعاً عاشق بودند.

آقای امیری: این رابطه دانش‌آموز و استاد را که شما می‌فرمایید من یک جای دیگری در سال ۷۱-۷۲ به چشم دیدم. اگر آقای شهریاری یادشان باشد، به من لطف کردند و فرمودند که در مدرسه «فیروز بهرام» احتیاج به همکار دارند. من هم به دیده منت پذیرفتم و ایشان آن‌جا جبر سوم ریاضی را می‌گفتند. من پرسیدم شما خودتان آن‌جا درس می‌دهید؟ گفتند بلی، من



از این که هر جلسه می‌توانم در جمع هیئت تحریریه قرار بگیرم احساس خیلی خوبی دارم، چون همیشه تجربه کسب می‌کنم و خوشبختانه در انتقال این تجربه به دیگران هم کوتاهی نکرده‌ام. یعنی هرچه در هر جلسه یاد می‌گیرم سعی می‌کنم به دوستان مختلفی که گوشه و کنار با ایشان برخورد دارم، یاد بدهم. اگر هم فکر می‌کنید که بنده در مقام شاگردی شما درس پس می‌دهم، از شما یاد گرفتم، ادب و احترام و... را از تک‌تک شما بزرگان یاد گرفته‌ام. من امسال در مدرسه‌ای مشغول تدریس شدم و بنا به دلایلی پس از ۱۵ سال مدرسه‌ام را عوض کرده‌ام. بعد از یک ماه که در این مدرسه جدید می‌روم هنوز معلم‌ها مرا به گرمی پذیرا نیستند ولی شما بزرگان از همان روز اول مرا تحویل گرفتید.



میرشهرام صدر

یادم می‌آید در سن ۲۶ سالگی به جمع هیئت تحریریه مجله برهان دعوت شدم. تازه معلم شده بودم، البته در زمان تحصیل در دانشگاه، درس هم می‌دادم. به نوشتن علاقه داشتم و روی برد دانشگاه مقالاتی با عنوان «آیا می‌دانید که؟» می‌نوشتم. یک روز که سال آخر دانشگاه بودم، یعنی سال ۷۲-۱۳۷۱، آمدم انتشارات مدرسه یک سری از کتاب‌های انتشارات مدرسه را بگیرم، دیدم یک مجله‌ای به نام برهان درآمده و چه مطالب قابل توجه‌ای در آن است. چون از قبل هم علاقه به نوشتن مقاله و تحقیق داشتم، گفتم مطالبی بدهم که بشود در مجله هم چاپ کرد. با آقای امیری ارتباط برقرار کردیم و مقاله دادیم و ایشان جریان را تعریف کردند. این داستان گذشت و روزی آقای امیری به من پیشنهاد کرد که برنامه‌ات چیست؟ کجا کار می‌کنی؟ وقت داری یا نداری؟... اگر می‌شود با ما همکاری کن. (این همانست که تا چاپ مقاله در مجله، چهار مرتبه مقاله را بردم و نوشتم و آوردم و بردم و...) خیلی احساساتی شدم. یادم هست که وقتی آقای امیری این پیشنهاد را به من دادند، در مسیری که داشتم به خانه می‌رفتم تا به پدر و مادرم بگویم چنین اتفاقی افتاده، انگار روی زمین راه نمی‌رفتم. یعنی فکر می‌کردم دارم پرواز می‌کنم. دو جا این احساس به من دست داد: یکی هنگام طواف دور خانه خدا در مکه مکرمه و یکبار هم وقتی که به عنوان عضو کوچکی در هیئت تحریریه دعوت شدم و بزرگان این جمع با سعه صدر با من برخورد کردند. همان جلسه آقای امیری مرا معرفی کردند و گفتند ایشان در مورد برهان یک سری نظرات دارند و همه نشستند و حرف‌های مرا گوش کردند، البته من چند کلمه‌ای بیشتر صحبت نکردم، زیرا در جلسه اصلاً جای صحبت کردن من نبود، من کوچک‌تر از آن بودم که بخواهم حرفی بزنم. در ابتدا که آمدم، استاد یاسی پور چند جلسه‌ای نبودند، بعد از آن آمدند و ما در خدمتشان بودیم. ایشان خیلی صمیمی و گرم با من برخورد کرد که احساس کردم در یک جمع صمیمی خانوادگی قرار دارم.

من گاهی برای گرفتن متون از آقای شهریار خدمت ایشان می‌رسیدم و گاهی خودم کاری را خدمت ایشان می‌آوردم. یادم هست یک روز که در مورد یک مقاله ریاضی تحقیق می‌کردم، خدمت ایشان رسیدم و بعد از آن که جواب سؤالاتم را گرفتم، کمی خدمت استاد درد دل کردم. آن موقع داشتم به انتشارات مدرسه منتقل می‌شدم، و این مسئله خیلی طولانی شده بود؛ به استاد شهریار گفتم، استاد موضوع این است و من کار مجله را دوست دارم، ولی کارهایم زیاد شده است و می‌خواهم یک‌جا متمرکز باشم، چه کار کنم؟ گفتند «از میدان در نرو». دوباره از ایشان سؤال کردم، یعنی چه کار کنم؟ ایشان در جمله‌ای کوتاه فرمودند: «من نمی‌دانم، فقط از میدان در نرو». این جمله در نظر من شامل دریایی از معرفت بود و برای من مایه دلگرمی بود. من هم از میدان درنرفتم و ماندم. همین چند وقت پیش، وقتی ایشان را از منزل آقای قندهاری به منزل خودشان می‌بردم، گفتم: آقای شهریار، من از میدان درنرفتم و در دفتر مجله انجام وظیفه می‌کنم، شما استاد ما هستید، تجربه دارید، یک نصیحتی به ما کنید که چه کنیم که در کارمان موفق‌تر باشیم؟ ایشان فرمودند: «بی‌سروصدا داری کارت را انجام می‌دهی.»

در این‌جا از همه اساتید خودم تشکر می‌کنم که مرا به جمع خودتان پذیرفتید. من همیشه خود را شاگرد کوچکی در جمع شما می‌دانم.

دارم. به‌جز در مقطع دکترا، هم در تهران درس خوانده و هم درس داده‌ام، البته به‌صورت حق‌التدریس. من از همان موقع دنبال مجله بودم و کتاب آقای یاسی پور «مقدمه‌ای بر استدلال ریاضی» را آمدم از انتشارات مدرسه خریدم. جلوی دانشگاه می‌رفتم ببینم چه کتابی آمده که بتوان استفاده کرد و من قبل از آن یادم نمی‌آید، فقط می‌دانم که مجله یکان بود. ولی مجله برهان که آمد من خوشحال شدم که منبعی

آقای امیری: ما هم تشکر می‌کنیم که شما وقت گذاشتید، انرژی گذاشتید، جوانی‌تان را گذاشتید و دارید می‌گذارید و به واقع بیش‌تر زحمات‌های مجله بر گردن شماست. من خدا را شاکرم که همکار و برادر خوبی مثل شما دارم.

**دکتر ریحانی:** ارتباط من با مجله در سال‌های اول معلمی من بود و دانشجو بودم. مجموعه اولیه آن را که سال ۷۰ چاپ شد هنوز

مجله را می‌خوانم، لذت می‌برم و احساس می‌کنم که هم قلبی و هم فکری در کنارشان هستم. من معتقدم که باید برای این مجله از بالا امکاناتی بدهند. خوب اگر امکاناتی باشد من از خدا می‌خواهم مقاله بدهم. برای مثال مقالات از مجلات خارجی که اگر از بالا امکاناتی فراهم شود بهتر می‌شود. من وقت زیادی می‌گذارم و یک مقاله می‌دهم بعد یکی می‌آید آن را ویراستاری می‌کند و تمام مقاله مرا با خط قرمز مخدوش می‌کند و نمی‌شود آن را درست خواند!

آقای یاسی‌پور: اصلاً در متون دوگانگی ایجاد شده است، چون بعضی را عوض می‌کنند و بعضی را عوض نمی‌کنند (طبق عادت)، بعد می‌بینید که دوگانگی و حتی سه‌گانگی ایجاد شده است. خوب نوشته هر کس شناسنامه آن شخص است. نوشته را نباید تغییر داد، به هیچ‌وجه من الوجوه نباید در آن دست برد، دلیلی ندارد که نوشته را تغییر بدهند. مثل این که شعر حافظ را شما تغییر دهید، خوب حافظ دلش خواسته این‌جوری بگوید. البته به زبان امروزی می‌شود عوض کرد و بگوییم این به زبان امروز نزدیک‌تر است، ولی نمی‌شود اصل مطلب را تغییر داد!

دکتر شرف‌الدین: من یک بار مقاله‌ای دادم که خیلی بعد رنجیده شدم، چون اسم مقاله را که داستان معروفی هم بود عوض کرده بودند. داستانی بود از کتاب ادبیاتمان که آن کتاب را ملک‌الشعراى بهار، بهمینار، بدیع‌الزمان نوشته بودند. یکی از داستان‌هایش را، که ذکر آن در این‌جا مناسبتی ندارد، من به برهان داده بودم و آن‌جا اسم داستان را عوض کرده بودند. من خیلی ناراحت شدم.

آقای یاسی‌پور: اگر اسم این داستان را عوض کنید خراب می‌شود، مگر این‌که کل داستان را اصلاً نمی‌نوشتید. چون این ارزش و اهمیتش فقط در آن عنوانش است. چون ما در ادبیات، اصطلاحی به نام «براعت استهلال» داریم که در علم بدیع مطرح می‌شود، یعنی وقتی داستانی را می‌خواهی تعریف کنی حتی نام فیلم‌ها و تیتراژشان نشان می‌دهد که این فیلم راجع به چه چیزی صحبت می‌کند و هر داستانی در ادبیات وقتی کسی شعر یا ادبیاتی می‌خواهد بگوید باید طوری تنظیم کند که همان بیت‌های اول مشخص کند که چه می‌خواهد بگوید. مثلاً در شاهنامه فردوسی وقتی می‌خواهد راجع به جنگ رستم و سهراب صحبت کند، براعت استهلالش این‌طور است:

کنون رزم سهراب و رستم شنو  
دگرها شنیدستی این هم شنو  
یکی داستانی است پر آب چشم  
دل نازک از رستم آید به خشم

از این‌جا مشخص می‌شود یک داستان تراژدی گریه‌آور است که رستم یک خطای بزرگی مرتکب شده که طرف را عصبانی می‌کند. بعد داستان را تعریف می‌کند. من منظورم این است که عنوان آن

برای معلمان و دانش‌آموزان وجود دارد و آن موقع همه شماره‌هایش را هم معرفی می‌کردم و هم می‌خریدم. تا ۴ یا ۵ سال پیش هم خیلی مرتب می‌خریدم، ولی الآن اگر بتوانم تهیه می‌کنم.

به هر حال این استمرار و پشتکار خیلی مهم است که شما این کار را ۲۰ سال توانسته‌اید انجام دهید. در نبود منبعی به این صورت، خودش خیلی ارزش دارد. مخاطبان خیلی مناسبی داشته است، و با این حال خیلی بهتر از این هم می‌توانست باشد. یعنی اگر معلمان بتوانند ارتباط بیشتر با مجله برقرار کنند خیلی مؤثرتر خواهند بود و اگر بشود هر ۳ یا ۴ سال یک بار یک بازسازی، نوسازی، بهینه‌سازی و به‌روز آوری شود خیلی فرق می‌کند. اگر مجله با سبک کارهای جدید و مجلات جدید دنیا هماهنگ باشد و متناسب با نیازها، تغییرات آموزشی و برنامه‌های درسی و همگام با آن‌ها حرکت کند، مخاطبان بیشتری خواهد داشت.

به نظر می‌رسد که کار ارزیابی هم باید انجام شود، یعنی شما ارزیابی‌هایی را تهیه کنید تا یک برآوردی از بیست سال کار خود داشته باشید. شاید مناسب باشد که یک پرسشنامه یا طرحی تهیه کنید و ببینید که در بین مخاطبان چه جایگاهی دارید، الآن چه جایگاهی دارد، مشکلاتش چیست، چه جاهایی مورد استقبال است، که با این دیدگاه هم بتوانید آن را ارتقا دهید. در هر حال کار بسیار خوب و پسندیده‌ای بوده است. من حتی برهان راهنمایی را هم تهیه می‌کردم. امیدوارم بتوانید کارتان را توسعه دهید.

آقای امیری: آقای دکتر شرف‌الدین که از مفاخر ایران هستند و تاکنون دو نسل از مقالات ایشان استفاده کرده‌اند. وقتی که ایشان دبیر و دانشجو بودند و تدریس می‌کردند، کتاب‌هایی داشتند که آن کتاب‌ها خیلی معروف بود و تا حالا چند تا کتاب ارزشمند و تحقیقی از ایشان در انتشارات مدرسه چاپ شده است. مقالاتشان در مجله برهان همیشه جزو مقالات بی‌نظیر بوده‌اند که جایی تکرار نمی‌شوند. همیشه یک حرف نو در مقالات ایشان هست. من چندجا صحبت کرده‌ام و گفته‌ام کتاب‌هایی که ایشان دارند شاید جزو معدود کتاب‌هایی هستند که می‌شود اسم تألیف رویش گذاشت، یعنی گردآوری و جمع‌آوری و تدوین نیست و واقعاً تألیف شده است. این است که افتخار داریم در خدمت ایشان باشیم.

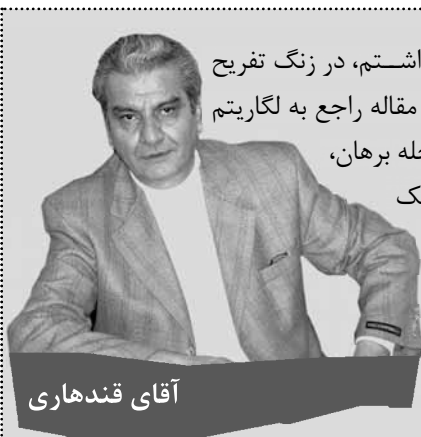
دکتر شرف‌الدین: اولین شماره‌ای که درآمد به خاطر نیست، ولی وقتی این مجله به دستم رسید خیلی خوشحال شدم، چون مجله یکان دیگر چاپ نمی‌شد. واقعاً انسان متأثر می‌شود که یک مجله که سال‌ها چاپ می‌شده است، به یک‌باره دیگر چاپ نشود. وقتی کنار نویسندگان برهان هستم خیلی خوش‌حال می‌شوم، وقتی هم که کنارشان نیستم باز هم حس می‌کنم در کنارشان هستم، چون

مطلب بسیار مهم است. یک ظرافت‌هایی هم در این ماجرا هست که باید رعایت شود.

آقای امیری: آقای دکتر شرفالدین، قبل از این که شما همکاری‌تان را با مجله ما شروع کنید با کدام مجلات دیگر همکاری داشتید؟  
دکتر شرفالدین: من در مجله یکان، مجله مدرسه عالی اراک، مجله وزارت علوم و فرهنگ و بینش مقاله می‌دادم و همکاری داشتم. دکتر شرفالدین: خاطراتی از آقای شهریاری بگویم. یکی این که میلیون‌ها ایرانی کتاب‌های آقای شهریاری را خوانده‌اند، خود این برای ما بهترین خاطره است. من یک کتابی نوشته‌ام که اگر کتاب آقای شهریاری را نمی‌خواندم نمی‌توانستم آن را بنویسم.

آقای یاسی‌پور: یکی از ریاضی‌دانان ایرانی و اسلامی بوزجانی است. بوزجانی در کتاب اعمال هندسه‌اش اول قضایای هندسی را مطرح کرده و از راه هندسه آن‌ها را حل کرده است. بعد می‌بیند راه‌حل‌هایش به درد صنعتگر نمی‌خورد. آن وقت راه عملی‌اش را هم یاد داده و در دو قسمت آورده است. یک قسمت هندسه محض آورده و یک قسمت هندسه عملی که چگونه انجام دهیم. ما بین ریاضی‌دانان ایرانی اسلامی خودمان بوزجانی را داریم که چنین کاری را مفصل کرده انجام داده است؛ هم در حساب، هم در هندسه: کتاب اعمال هندسی و اعمال حسابی. در حساب، ابتدا قضایای حساب را گفته، بعد گفته حسابدار اگر بخواهد کار کند، باید این کار را انجام دهد.

دکتر شرفالدین: بله من از استاد شهریاری خاطرات خیلی خوبی دارم. ایشان خیلی عاقل و مدبر است و با بزرگواری اظهار نظر می‌کند. آقای یاسی‌پور: درباره بزرگواری آقای شهریاری می‌خواهم نکته‌ای بگویم که ما هر موقع از آقای شهریاری برای برنامه‌ای تقاضا کردیم تشریف بیاورند، بلافاصله قبول کردند. ما دو تا برنامه داشتیم، یکی در رادیو فرهنگ بود به نام «در جهان ریاضی» و یک برنامه دیگر داشتیم در تلویزیون به نام «جهان ریاضی» به مناسبت سال جهانی ریاضیات. در هر جلسه‌ای که از ایشان دعوت می‌کردیم ایشان برای میزگرد یا صحبت می‌آمد. با مشکلات هم مبارزه می‌کرد و کنار می‌آمد. مثلاً ایشان یک بار خودشان خاطره‌ای تعریف کردند و گفتند: «من یک مرتبه آمدم صدا و سیما، نزدیک محمودیه»، خوب قبلاً باید آفیش شود که وقتی شخص می‌آید او را راه دهند. ما هم قبلاً گفته بودیم آقای شهریاری می‌آیند. بعد ایشان آمده بودند، ولی جلوی ایشان را گرفته بودند و گفته بودند کجا می‌روی. «گفتم من شهریاری هستم و برای رادیو برنامه دارم.» گفتند: «اسم شما این‌جا نیست.» گفتم: «نمی‌شود آخر، مرا آفیش کرده‌اند اسم من باید این‌جا باشد. گفتم بگذار خودم لیست را ببینم اسمم هست یا نه؛ و دیدم اسم مرا به صورت پرویز شهریاری آن‌جا نوشته بودند. گفتم این مگر اسم من نیست؟» او گفت: «این «پرویز شهریاری» است!» خوب، ایشان با این دردسرها کنار می‌آمدند.



آقای قندهاری

درباره آشنایی با مجله برهان باید بگویم یک روز که من در آموزشگاه علامه درس داشتم، در زنگ تفریح بود که جناب امیری را برای اولین بار ملاقات کردم و ایشان گفتند: آقای قندهاری ما یک مقاله راجع به لگاریتم می‌خواهیم. گفتم برای چه؟ گفتند: ما می‌خواهیم مجله‌ای ریاضی منتشر کنیم به نام مجله برهان، برای عضو هیئت تحریریه گرفتن تقریباً یک حالت خاصی دارد، ما به چند نفر گفتیم یک مقاله لگاریتم برایمان بنویسند. این‌ها را بررسی کنیم، بعداً انتخاب می‌کنیم. من هم معمولاً نوشتنم عین تدریس سر کلاس بود. یعنی هر چه سر کلاس می‌گویم همان را می‌نویسم. خیلی آرام درس می‌دهم، خیلی تمیز می‌نویسم، با بچه‌ها شوخی می‌کنم، یعنی این‌طور نیست که خشک و خالی درس بدهم، مقالات را هم همان‌طور با ملایمت نوشتم و پس از یک ماه دیدم که آقای امیری تلفن کردند که شما بیاید و عضو هیئت تحریریه شوید و از آن تاریخ، افتخارم این است که در خدمت این جامعه هیئت‌تحریریه هستم.

استاد شهریاری روی من اثر خاصی داشت به این علت که شما از استاد شهریاری اگر چیزی پرسید، زود جدول ضربی جوابتان را نمی‌دهد، فکر می‌کند جواب می‌دهد، و این واقعاً مهم است که وقتی شما از ایشان پرسشی می‌کنید ایشان با تفکر و با متانت جواب می‌دهند و این خیلی اهمیت دارد، بخصوص ما که ریاضی خوانده‌ایم خیلی باید در گفتار، در تعریف و در بیان مطالب دقت کنیم. به هر جهت از آن تاریخ من جزو افتخارات زندگی‌ام است که در خدمت این مجله بودم و صمیمیتی که بین اعضا برقرار بود واقعاً زبانزد است. یکی از نویسندگان که در سوئیس زندگی می‌کند می‌گوید: سه نفر ایرانی که دور هم جمع می‌شوند چهار تا عقیده مختلف دارند. ما واقعاً در مجله برهان اصلاً چنین حالتی نداشتیم. من مثلاً اولین کتابی که برای انتشارات مدرسه نوشتم از آقای امیری خواهش کردم ویراستارش بشود. یعنی رابطه حالا بین من و آقای امیری رابطه پدر و فرزندی برقرار است ولی واقعاً رابطه‌ها صمیمی است. من یادم

هزار نفر این مقالات را می‌خوانند، این باعث شده که خداوند به این جمع‌شدن‌ها و نشست‌ها برکت بدهد.

آقای قندهاری: این توفیق تک‌تک‌مان بود، و توفیق گروه بود. بدون این که بخواهیم، این گروه را حفظ کردیم. هیچ‌وقت هم صحبت تندی هم بین ما پیش نیامد و خداوند این توفیق را به من داد که در این راه بیافتم. خوب می‌توانستم به خیلی جاها کشیده شوم و بیش از ظرفیتم خدا به من لطف کرده است.

آقای امیری: ما از زحمات بیست ساله شما قدردانی می‌کنیم هر چند که باید بگویم زبان ما قاصر است.

آقای یاسی‌پور: با آرزوی توفیق برای همه خوانندگان مجله برهان، آنان را به خداوند متعال می‌سپاریم.

#### پی‌نوشت

۱. مدیرعامل وقت انتشارات مدرسه

۲. مدیرکل وقت دفتر انتشارات کمک‌آموزشی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

## سه چهره دوده‌آلود

تفریح‌اندیشه

آنان که مدتی را در انگلستان گذرانده باشند، می‌دانند که مردم این کشور به هنگام سفر با قطار دوست دارند پنجره‌ها را باز بگذارند تا از هوای آزاد برخوردار شوند. روزگاری که قطارهای انگلستان هنوز برقی نشده بود و لکوموتیوهای آن‌ها با زغال‌سنگ کار می‌کردند، در کوپه‌ای از یک قطار، سه انگلیسی مبادی آداب همسفر شده بودند. هر کدام، بدون توجه به وجود دیگران، راست و محکم در جای خود نشسته و به خواندن کتاب مشغول بودند. گذشتن قطار از یک تونل و پیش آمدن یک تاریکی زودگذر سه همسفر را بر آن داشت تا لحظه‌ای سر از روی کتاب بردارند و نگاهی به یکدیگر اندازند. ناگهان هر سه نفر متانت خود را از دست داده، با صدای بلند خنده سر دادند؛ زیرا هر کدام با چهره دوده‌آلود و مضحک دو نفر دیگر روبه‌رو شده بود، اما این وضع زیاد طول نکشید، پس از لحظه‌ای هر سه نفر سکوت کردند، سر را به زیر انداختند، دستمال‌های خود را بیرون آورده و چهره‌های خود را پاک کردند. چه شد که هر کدام از آنان، بدون آن که چهره خود را ببینند، با استنتاجی منطقی دریافت که چهره خودش نیز دوده‌آلود است.

پاسخ در صفحه ۷۰

برگرفته از کتاب داستان‌های ریاضی / ترجمه عبدالحسین مصحفی /

انتشارات مدرسه

است یک وقتی آقای صدر یک مقاله فرستاد، مقاله‌های مربوط به جبر را آقای امیری لطف می‌کردند و برای کارشناسی به من می‌دادند، در کار هم بحث تعارف نبود دیگر بحث مقاله علمی بود، خیلی با دقت این را تصحیح کردم و ایراد گرفتم و خیلی پرخاش کردم که شما اگر می‌خواهی این را بنویسی باید این خصوصیات را داشته باشی، تعاریف باید جامع و مانع باشد، کامل باشد، برای هر تعریفی که می‌آوری باید مثال بیاوری، گرچه آن زمان آقای صدر ظاهراً ناراحت شد ولی مثل این که بعداً راضی شد. من واقعاً از جلسات برهان بهره بردم، از وجود آقای شهریار، از وجود جناب آقای یاسی‌پور و از بقیه دوستان. از استاد رستمی بگویم، ایشان کاری که در هندسه کرده واقعاً کارستونه. ایشان واقعاً از افتخارات ماست. جوان‌ترها بعداً به ما اضافه شدند، آقای شرقی، آقای هاشمی موسوی و آقای صدر که خیلی هم ظرفیتش بالاست، آقای امیری که جای خود دارد که من واقعاً به ایشان علاقمندم. بعضی از آدم‌ها ظرفیت خاصی دارند، مثل یک ظرف چهار لیتری می‌مانند، شما دو میلیون لیتر در او آب بریز، آخر سر همان چهار لیتر را می‌گیرید ولی آقای امیری این‌طور نبود و ظرفیتش بالا بود، هر چه می‌گفتم، قبول می‌کرد و می‌پذیرفت. درباره استاد شهریار باید بگویم که من هفته‌ای یک‌بار خدمتشان می‌رسیدم. چون خانه‌شان نزدیک ما بود، وقت می‌گرفتم و خدمتشان می‌رفتم مقالاتی را که برای مجله‌های چیستا یا مجله دانش و مردم، نوشته بودم برایشان می‌خواندم. چون یک مقدار خواندن برایشان مشکل بود و من برایشان می‌خواندم. تقریباً هر چه که می‌خواندم می‌گفتند بده برای چاپ، من واقعاً از استاد شهریار خیلی بهره گرفتم. بخصوص در رفتار ایشان منطبق موج می‌زند. ایشان خیلی متین، موقر و با دقت صحبت می‌کند و انسان واقعاً لذت می‌برد. الان خواندن برایشان سخت است، با عینک و با ذره‌بین می‌خوانند، نوشتن هم برایشان سخت است، معذالک همین الان هم کتاب ترجمه می‌کنند.

آقای امیری: اولین مقاله شما چه بود که در برهان چاپ شد؟  
آقای قندهاری: اولین مقاله‌ام لگاریتم بود که چاپ شد و واقعاً هم خوشحال شدم. فکر می‌کنم که سال ۶۱ بود، اولین کتابم چاپ شد و انتشاراتی دو جلد از آن را برای من فرستاد. ما رفتیم سر کلاس کنکور، هر مسئله‌ای که نوشتیم، غلط حل کردیم؛ بچه‌ها گفتند چه شده؟ گفتم هیچی! امروز کمی حواسم پرت است و واقعاً خوشحال‌کننده بود. خداوند به این گروهی که دست‌اندر کار نوشتن هستیم نعمتی داده. آقای امیری: به لطف خدا یک برکت خاصی به این گروه داده شده، یعنی وقتی شما می‌نویسید و انگیزه مادی ندارید و بیست



# محاسبهٔ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$

تقریباً ده

سال پیش بود که

برای ملاقات و گفت‌وگو

پیرامون تألیف و چاپ کتابی درباره دنباله‌ها<sup>۱</sup> و

سری‌ها<sup>۲</sup> با آقای امیری به دفتر گروه ریاضی انتشارات

مدرسه مراجعه کردم. هنگام ورود به اتاق گروه ریاضی متوجه شدم

آقای امیری حضور ندارند. بعد از عرض سلام و ادب به فرد حاضر در

اتاق و معرفی خویش، جوپای آقای امیری شدم، که وی در پاسخ

گفت: آقای امیری به سفر حج رفته‌اند و تا چند هفته دیگر نمی‌آیند.

من صدر هستم و در خدمت شما، اگر فرمایشی دارید بفرمایید. من

هم موضوع را با ایشان مطرح کردم و به این ترتیب وارد گفت‌وگو

شدیم. مشغول گفت‌وگو بودیم که تلفن زنگ زد. آقای صدر تلفن را

پاسخ داد. در آن سوی خط یک دبیر ریاضی از استان لرستان برای

راهنمایی گرفتن درباره حل یک حد شیبه یکی از موارد  $\lim_{x \rightarrow +} x^{\sin x}$

یا  $\lim_{x \rightarrow +} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$  از آقای قندهاری سراغ گرفت. آقای صدر به او گفت

که آقای قندهاری امروز تشریف ندارند و ایشان فقط سه‌شنبه‌ها

در دفتر گروه حضور دارند. شما می‌توانید برای گرفتن پاسخ یا

راهنمایی درباره سؤال مورد نظرتان در آن روز تماس بگیرید. در

همین هنگام به آقای صدر گفتم به آن دبیر ریاضی بگویند که

جواب این حد، فلان عدد است. آقای صدر هنگامی که این حرف را

احسان یارمحمدی

از من شنید،

رو به من کرد و

گفت شما اطمینان دارید

که پاسخ سؤال، فلان عدد است. من هم جواب

دادم: بله. سپس آقای صدر به آن دبیر گفتند که شما

ده دقیقه دیگر تماس بگیرید و جواب سؤال خود را دریافت

کنید. بعد هم آقای صدر رو به من کرد و گفت ده دقیقه دیگر

ایشان تماس می‌گیرند و شما جواب را به همراه راه‌حل به ایشان

بدهید. من توانستم پاسخ و راه‌حل مناسبی را برای سؤال آن دبیر

ارائه کنم. در پایان صحبت‌ها و گفت‌وگوها، آقای صدر یک جلد از

مجله برهان دوره متوسطه، شماره ۳۶ را به من هدیه داد و گفت،

شما می‌توانید در صورت تمایل برای مجله برهان مقاله بفرستید.

این ملاقات، آغاز همکاری من با مجله برهان از آن تاریخ تاکنون

است.

چندی پیش در ملاقاتی، آقای صدر از انتشار ویژه‌نامه‌ای به

مناسبت بیستمین سال تولد مجله برهان و اعلام فراخوان برای

ارائه مطلب با عنوان یاد و خاطره از مجله برهان از سوی دبیران،

مدرسان، دانش‌آموزان و علاقه‌مندان به مجله و همکاران و مرتبطان

با مجله در طی این سال‌ها خبر دادند. من هم به همین بهانه یاد

آموزشی خود را با ارائه مقاله‌ای پیرامون محاسبه حد توابع نمایی



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\sin x + \tan^2 x)$$

### حالت اول:

فرض کنید برای محاسبه حد  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)}$  به حالت ابهام آمیز  $1^\infty$  برمی خوریم. بنابراین  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$  و  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$  داریم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} (1 + (f(x) - 1))^{\frac{1}{f(x) - 1} \times (f(x) - 1)g(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \left( (1 + (f(x) - 1))^{\frac{1}{f(x) - 1}} \right)^{g(x) \times (f(x) - 1)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \times (f(x) - 1)}$$

و بنابر پیوستگی تابع نمایی ۹ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \times (f(x) - 1)}$$

مثال ۱. حاصل حد  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$  را تعیین کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = (\cos \cdot)^{\frac{1}{\sin^2 \cdot}} = 1^\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} (\cos x - 1)}$$

اکنون به محاسبه حد  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} (\cos x - 1)$  می پردازیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} (\cos x - 1) = 0 \times \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} (\cos x - 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{1 - \cos^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(1 - \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{1 + \cos x} = -\frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

مثال ۲. حاصل حد  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$  را تعیین کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = 1^\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{\tan x}{x} - 1\right)}$$

اکنون به محاسبه حد  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{\tan x}{x} - 1\right)$  می پردازیم.

که سرآغاز آن در همان ملاقات نخست من با آقای صدر در پی تماس تلفنی آن دبیر اهل استان لرستان درباره محاسبه  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)}$  رقم خورد، ارائه می کنم.

فرض کنید که شما مباحث حد ۳ و پیوستگی ۴ دروس حسابان و حساب دیفرانسیل و انتگرال ۵ را به خوبی فرا گرفته اید و دبیر شما به عنوان کار در منزل، تمرین زیر را به شما می دهد و اعلام می کند که هر دانش آموز کلاس که بتواند پاسخ و راه حل صحیح برای این تمرین مزبور ارائه کند، دو نمره از نمره آخر ترم خود را دریافت خواهد کرد.

● حاصل هریک از حدود زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (\sin x)^{\tan^2 x} \quad (۲) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} \quad (۱)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^{2x})^{\frac{1}{x}} \quad (۴) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\frac{1}{\ln x}} \quad (۳)$$

با بررسی حدود بالا و مواردی نظیر آن ها درمی یابیم که هنگام برخورد با این گونه حدود، حالت های ابهام آمیز  $0^\infty$  و  $\infty \cdot 0$  به وجود می آید که شما ریاضی آموز گرامی باید برای رفع ابهام هریک از این حدود، آشنایی لازم و کافی را با روش های محاسبه و رفع ابهام حدود اعم از رفع ابهام از حالت های  $0^\infty$ ،  $\infty \cdot 0$  و... و استفاده از قاعده هویتال، هم ارزی های مثلثاتی، اتحاد های مثلثاتی ۷، محاسبه مشتق توابع و... داشته باشید.

برای ورود به این مقاله، قضیه ای را بدون ارائه برهان ۸ آن برای درک بهتر مقاله بیان می کنیم.

● اگر  $p$ ،  $q$  و  $x$  اعدادی حقیقی باشند، داریم:

$$(e = 2/718281828459045)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{p}{x}\right)^{qx} = e^{pq} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad (\text{پ})$$

اکنون با توجه به قضیه بالا به بررسی و محاسبه حد

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)}$$

می پردازیم.



مثال ۳. حاصل حد  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{\cos x}$  را تعیین کنید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{\cos x} = \left(\tan \frac{\pi}{2}\right)^{\cos \frac{\pi}{2}} = \infty^0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{\cos x} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x \ln(\tan x)}$$

اکنون به محاسبه حد  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x \ln(\tan x)$  می پردازیم.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x \ln(\tan x) = 0 \times \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x \ln(\tan x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{\cos x}} = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1 + \tan^2 x}{\tan x}}{-\frac{\sin x}{\cos^2 x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \tan^2 x) \cos^2 x}{-\sin x \tan x} = - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} = 0$$

بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{\cos x} = e^0 = 1$$

مثال ۴. حاصل حد  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$  را تعیین کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = \infty^0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln\left(\frac{1}{x}\right)}$$

اکنون به محاسبه حد  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln\left(\frac{1}{x}\right)$  می پردازیم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{\frac{1}{\sin x}}} (\frac{\tan x}{\tan x} - 1) &= 0 \times \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{\frac{1}{\sin x}}} \left(\frac{\tan x}{x} - 1\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x^{\frac{1}{\sin x}}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x^{\frac{1}{\sin x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x - x}{x^{\frac{1}{\sin x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 + \tan^2 x) - 1}{3x^{\frac{1}{\sin x}}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan^2 x}{3x^{\frac{1}{\sin x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{3} \tan x (1 + \tan^2 x)}{6x} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$$

### حالت دوم:

فرض کنید برای محاسبه حد  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)}$  به حالت ابهام آمیز  $1^\infty$  یا  $\infty^0$  یا  $0 \cdot \infty$  برمی خوریم. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0^+ & \text{یا} & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \end{cases} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 & \text{یا} & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty \end{cases} \end{cases}$$

پس هر یک از موارد بالا را می توانیم با کمک ویژگی های لگاریتم به حالت ابهام آمیز  $0 \times \infty$  تبدیل کنیم و سپس این حالت مبهم را به حالت های ابهام آمیز  $\frac{0}{0}$  یا  $\frac{\infty}{\infty}$  تغییر دهیم.

اگر فرض کنیم  $P = f(x)^{g(x)}$  و  $f(x) > 0$  بنابراین:

$$\ln P = \ln f(x)^{g(x)} \Rightarrow \ln P = g(x) \ln f(x)$$

$$\Rightarrow \ln P = \frac{g(x)}{1} = \frac{\ln f(x)}{g(x)}$$

یا

اگر فرض کنیم  $P = f(x)^{g(x)}$  و  $f(x) > 0$  داریم:

$$P = f(x)^{g(x)} \Rightarrow P = e^{\ln f(x)^{g(x)}} \Rightarrow P = e^{g(x) \ln f(x)}$$

بنابراین، بنا بر پیوستگی تابع نمایی خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ln f(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = 1^\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln(\cos \sqrt{x})}$$

اکنون به محاسبه حد  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln(\cos \sqrt{x})$  می پردازیم.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln(\cos \sqrt{x}) = 0 \times \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln(\cos \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\cos \sqrt{x})}{x} = \frac{0}{\infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\cos \sqrt{x})}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{\sqrt{x}} \sin \sqrt{x}}{\cos \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{\sqrt{x}} \sin \sqrt{x}}{\cos \sqrt{x}}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \tan \sqrt{x} = -\frac{1}{\sqrt{x}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{\sqrt{x}}$$

بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\cot x)^{\tan x} = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

**مثال ۷.** حاصل حد  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{X+1}\right)^{\csc x}$  را تعیین کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{X+1}\right)^{\csc x} = 1^\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{X+1}\right)^{\csc x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\csc x \ln\left(\frac{1}{X+1}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \csc x \ln\left(\frac{1}{X+1}\right)}$$

اکنون به محاسبه حد  $\lim_{x \rightarrow 0} \csc x \ln\left(\frac{1}{X+1}\right)$  می پردازیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \csc x \ln\left(\frac{1}{X+1}\right) = 0 \times \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \csc x \ln\left(\frac{1}{X+1}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{1}{X+1}\right)}{\frac{1}{\csc x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{1}{X+1}\right)}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{1}{X+1}\right)}{\frac{1}{\sin x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{1}{X+1}\right)}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{X+1}}{\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln\left(\frac{1}{X^r}\right) = 0 \times \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln\left(\frac{1}{X^r}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(\frac{1}{X^r}\right)}{\frac{1}{\sin x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(\frac{1}{X^r}\right)}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-r X^{r-1}}{X^r}}{\frac{1}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-r X^r \sin^r x}{\cos x} = 0$$

بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{X^r}\right)^{\sin x} = e^0 = 1$$

**مثال ۵.** حاصل حد  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\tan x}$  را تعیین کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\tan x} = \infty^0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\tan x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \ln(\cot x)}$$

اکنون به محاسبه حد  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \ln(\cot x)$  می پردازیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \ln(\cot x) = 0 \times \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \ln(\cot x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\cot x)}{\frac{1}{\tan x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\cot x)}{\frac{1}{\tan x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1 + \cot^2 x}{\cot x}}{\frac{1 + \tan^2 x}{\tan^2 x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 + \cot^2 x) \tan^2 x}{(1 + \tan^2 x) \cot x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sin^2 x} \times \tan^2 x}{\frac{1}{\cos^2 x} \times \cot x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x = 0$$

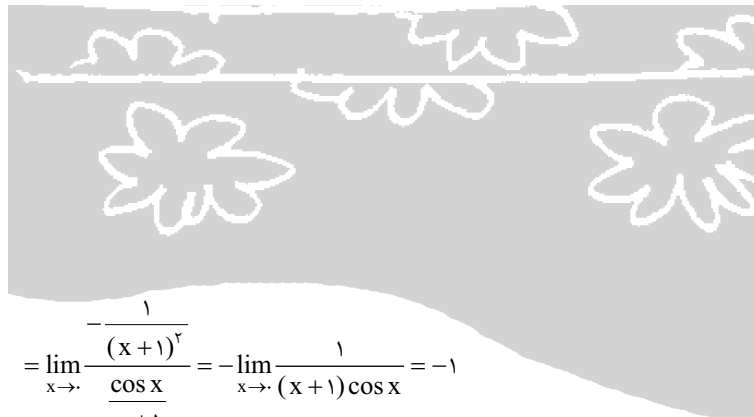
بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\tan x} = e^0 = 1$$

**مثال ۶.** حاصل حد  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$  را تعیین کنید.



- روش‌های انتگرال‌گیری (Integration Techniques)
- جانشینی (Substitution)
- نقطه میانی و مجموع ریمان ذوزنقه‌ای (Midpoint and Trapezoid Riemann Sums)
- انتگرال‌های ناسره (Improper Integrals)
- کاربردهای انتگرال (Applications of Integration)
- مساحت به وسیله افزایش کردن (Areas by Slicing)
- حجم‌های دورانی (Volumes of Revolution)
- حجم سطوح متقاطع مشهور (Volumes of Known Cross Section)
- طول قوس (Arc Length)
- مساحت منحنی قطبی (Area of Polar Curve)
- معادلات دیفرانسیل (Differential Equations)
- دنباله‌ها و سری‌ها (Sequences and Series)
- دنباله‌ها (Sequences)
- سری‌ها (Series)
- آزمون انتگرال (Integral Test)
- آزمون مقایسه (Comparison Test)
- آزمون مقایسه حدی (Limit Comparison Test)
- آزمون نسبت (Ratio Test)
- سری‌های متناوب و همگرایی مطلق (Alternating Series and Absolute Convergence)
- سری‌های توانی و فاصله همگرایی (Power Series & Interval of Convergence)
- سری تیلور و چندجمله‌ای‌ها (Taylor Series & Polynomials)
- باقی‌مانده لاگرانژ (Lagrange Remainder)
- مقدمه‌ای بر انتگرال معین (Introduction to the Definite Integral)



بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x+1}\right)^{\csc x} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

● **تمرین:** حاصل هر یک از حدود زیر را تعیین کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^x \tan x)^{x \sin^x x} \quad (۲) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\tan x)^{\frac{1}{\ln x}} \quad (۱)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{\tan x}} \quad (۴) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)^x \quad (۳)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} \quad (۶) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2} \quad (۵)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x \sin x}\right)^{\sqrt{x}} \quad (۸) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan^2 x} \quad (۷)$$

پی‌نوشت

1. Sequences
2. Series
3. Limit
4. Continuity
5. Calculus
7. Trigonometric Identities
8. Proof
9. Exponential Function

۶. شما مخاطبان گرامی نیز می‌توانید تمرین بالا را انجام دهید.

**منابع**

۱. حسابان (رشته ریاضی و فیزیک). مؤلفان: بهمن اصلاح‌پذیر، ناصر بروجردیان، ابراهیم ریحانی، محمد تقی طاهری تنجانی و وحید عالمیان. ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۸۹.
۲. ریاضیات ۲ (رشته علوم تجربی - ریاضی و فیزیک). مؤلفان: علی ایرانمنش، محسن جمالی، حمیدرضا ربیعی، ابراهیم ریحانی، احمد شاهورانی و وحید عالمیان. ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۸۹.

# نکاتی درباره محاسبه حدود توابع جزء صحیح

سعید چترآبنوس

## تعریف حد

اگر تابع  $y=f(x)$  در یک بازه باز شامل نقطه  $x=a$  تعریف شده باشد (در یک همسایگی محذوف از نقطه  $a$  تعریف شده باشد) و با نزدیک شدن مقدار  $x$  به عدد  $a$ ، مقدار  $y$  هم به عدد  $L$  نزدیک شود، می‌گوییم حد تابع  $f$  در نقطه  $a$  برابر با  $L$  است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

بنابراین با توجه به تعریف حد، برای این که بتوانیم حد یک تابع را در نقطه‌ای مثل  $x=a$  حساب کنیم اولین شرط این است که تابع در اطراف آن نقطه تعریف شده باشد و لزومی ندارد که تابع در خود نقطه  $x=a$  تعریف شده باشد. یعنی کافی است که تابع در یک همسایگی محذوف از عدد  $a$  تعریف شده باشد. پس در محاسبه حد یک تابع در یک نقطه، ابتدا باید به دامنه تابع توجه داشته باشیم. هم‌چنین اگر در یک تابع مثل  $f$  مقدار  $x$  از عدد  $a$  بیش‌تر باشد و با مقادیر بیش‌تر از  $a$  به عدد  $a$  نزدیک شود و مقدار  $y$  به عددی مثل  $L_1$  نزدیک شود، می‌گوییم حد راست تابع  $f$  در نقطه  $a$  برابر با  $L_1$  است و اگر مقدار  $x$  از  $a$  کم‌تر باشد و به  $a$  نزدیک شود و مقدار  $y$  هم به عدد  $L_2$  نزدیک شود، می‌گوییم حد چپ تابع  $f$  در نقطه  $a$  برابر با  $L_2$  است و شرط وجود حد تابع در نقطه  $a$  این است که حد چپ و حد راست تابع در نقطه  $a$  با هم برابر باشند.

## وجود صفر در مخرج کسر

در محاسبه حد یک تابع کسری اگر با نزدیک شدن مقدار  $x$  به عدد  $a$  مخرج کسر کاملاً صفر شود، یعنی صفر مطلق شود، حد تابع در نقطه  $x=a$  تعریف نمی‌شود و می‌گوییم حد تابع در نقطه  $a$  وجود ندارد، زیرا به عبارت «—» می‌رسیم که تعریف نشده است، ولی اگر مخرج کسر کاملاً صفر نشود ولی به صفر نزدیک شود، یعنی مخرج کسر صفر حدی باشد و صورت کسر به عدد غیر صفر نزدیک شود، جواب حد  $+\infty$  یا  $-\infty$  است.

مثال ۱: حد داشتن تابع  $f(x) = \frac{x-2}{[x]-2}$  را در نقطه  $x=2$

بررسی کنید.

حل: اگر  $x \rightarrow 2^+$  آن‌گاه  $2 < x$  پس  $[x]=2$  و  $[x]-2=0$ ، یعنی

## اشاره

یک نمونه از توابعی که در محاسبه حد آن‌ها باید دقت و توجه لازم را داشته باشیم، توابع جزء صحیح هستند که از اهمیت قابل توجهی برخوردارند. در این مقاله به بیان نکاتی درباره محاسبه حدود این توابع همراه با حل مسائلی در این زمینه می‌پردازیم.

مخرج کسر کاملاً صفر می‌شود (مخرج کسر صفر مطلق می‌شود). پس حد راست تابع در نقطه  $x=2$  وجود ندارد، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{[x]-2} = \frac{0^+}{\text{مطلق}} \Rightarrow \text{حد وجود ندارد}$$

اگر  $x \rightarrow 2^-$  آن‌گاه:

$$1 < x < 2 \Rightarrow [x]=1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{[x]-2} = \frac{0^-}{1-2} = \frac{0^-}{-1} = 0$$

یعنی حد چپ تابع در نقطه  $x=2$  برابر با صفر است.

مثال ۲: مطلوب است محاسبه  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x^2]-9}{x^2-9}$

حل: با توجه به این که  $x \rightarrow 3^+$ ، داریم:

$$3 < x \Rightarrow 9 < x^2 \Rightarrow [x^2]=9 \Rightarrow [x^2]-9=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x^2]-9}{x^2-9} = \frac{\text{مطلق}}{0^+} = \infty$$





### محاسبهٔ حدود توابع جزء صحیح

در محاسبهٔ حد توابع جزء صحیح، وقتی که  $x \rightarrow a$  اگر عبارت داخل جزء صحیح به عدد غیر صحیح نزدیک شود، حاصل حد تابع برابر با جزء صحیح آن عدد غیر صحیح است. به عبارت دیگر، می‌توانیم عدد  $a$  را در تابع جای‌گذاری کنیم و حاصل را به‌دست آوریم، ولی اگر عبارت داخل جزء صحیح به عددی صحیح نزدیک شود، دیگر نمی‌توانیم این کار را انجام دهیم و باید مشخص کنیم که عبارت داخل جزء صحیح از طرف راست یا از طرف چپ به عدد صحیح نزدیک می‌شود. برای این کار می‌توانیم با توجه به حدود  $x$  عبارت داخل جزء صحیح را بسازیم یا از صعودی یا نزولی بودن تابع داخل جزء صحیح در اطراف نقطهٔ  $a$  استفاده کنیم.

مثال ۱: مطلوب است محاسبهٔ  $\lim_{x \rightarrow -2^+} ([-3x] + [2x^2])$

حل: (روش اول) با توجه به این که  $x \rightarrow -2^+$ ، عبارات  $-3x$  و



$$-2 < x \Rightarrow f(-2) > f(x) \Rightarrow 8 > 2x^2 \Rightarrow [2x^2] = 7$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^+} ([-3x] + [2x^2]) = 12$$

مثال ۲: مطلوب است محاسبهٔ  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\Delta x^2 - 3x + 2)[x]}{x-1}$

حل: چون  $x \rightarrow 1^-$  پس  $0 < x < 1$ . بنابراین  $[x] = 0$  و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\Delta x^2 - 3x + 2)[x]}{x-1} = \frac{4 \times (\text{مطلق})}{\cdot} = \frac{\text{مطلق}}{\cdot} = \cdot$$

مثال ۳: مطلوب است محاسبهٔ حدهای زیر:

الف)  $\lim_{x \rightarrow -1^-} [x^3 - 3x]$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} [x^2 - 3x]$

حل: وقتی که  $x \rightarrow -1^-$  عبارت  $f(x) = x^3 - 3x$  به عدد  $2 = (-1)$  نزدیک می‌شود. حال باید مشخص کنیم که عبارت  $f(x)$  از طرف راست به عدد ۲ نزدیک می‌شود یا از طرف چپ. برای این کار صعودی یا نزولی بودن تابع  $f$  را با استفاده از مشتق بررسی می‌کنیم.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow$$

$x$		-۱		۱		
$f'(x)$		+	○	-	○	+
$f(x)$			↖		↘	
			۲		-۲	



$2x^2$  را به‌وجود می‌آوریم:

$$x \rightarrow -2^+ \Rightarrow x > -2 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow 2x^2 < 8 \Rightarrow [2x^2] = 7$$

$$x \rightarrow -2^+ \Rightarrow x > -2 \Rightarrow -3x < 6 \Rightarrow 5 < -3x < 6 \Rightarrow [-3x] = 5$$

بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} ([-3x] + [2x^2]) = 5 + 7 = 12$$

(روش دوم) تابع  $y = -3x$ ، یک تابع اکیداً نزولی است که وقتی

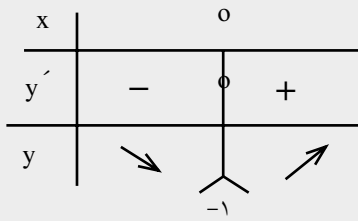
$x \rightarrow -2^+$ ، داریم:

$$x > -2 \Rightarrow f(x) < f(-2) \Rightarrow -3x < 6 \Rightarrow [-3x] = 5$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^+} [-3x] = 5$$

و تابع  $f(x) = 2x^2$  در همسایگی نقطهٔ  $x = -2$  اکیداً نزولی است،

پس داریم:



بنابراین با توجه به جدول معلوم می‌شود که:  
اگر  $x \rightarrow 0^+$ ، داریم:

$$x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} > -1 \Rightarrow \left[ \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right] = -1$$

و اگر  $x \rightarrow 0^-$ ، داریم:

$$x < 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} > -1 \Rightarrow \left[ \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right] = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right] = -1$$

حال با توجه به جدول داریم:

$$x \rightarrow -1^- \Rightarrow x < -1 \Rightarrow f(x) < f(-1) \Rightarrow f(x) < 2$$

$$\Rightarrow [f(x)] = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} [x^2 - 3x] = 1$$

و برای جواب قسمت «ب» داریم:

$$x \rightarrow 3^+ \Rightarrow x > 3 \Rightarrow f(x) > f(3) \Rightarrow x^2 - 3x > 18$$

$$\Rightarrow [x^2 - 3x] = 18 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} [x^2 - 3x] = 18$$

**مثال ۴:** مطلوب است محاسبه  $\lim_{x \rightarrow 2} \left[ \frac{2x+1}{x-2} \right]$ .

**حل:** داریم:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+1}{x-2} = 7$ . حال باید بررسی کنیم که عبارت  $\frac{2x+1}{x-2}$  از طرف راست به ۷ نزدیک می‌شود یا از طرف چپ. برای این کار صعودی یا نزولی بودن تابع  $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$  را با استفاده از مشتق بررسی می‌کنیم:

تابع در بازه‌های  $(-\infty, 2)$  و  $(2, +\infty)$  اکیداً نزولی است  $\Rightarrow f'(x) = \frac{-5}{(x-2)^2} < 0$ .

حال اگر  $x \rightarrow 3^+$ ، داریم:

$$x > 3 \Rightarrow f(x) < f(3) \Rightarrow \frac{2x+1}{x-2} < 7 \Rightarrow \left[ \frac{2x+1}{x-2} \right] = 6$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} \left[ \frac{2x+1}{x-2} \right] = 6$$

و اگر  $x \rightarrow 3^-$ ، داریم:

$$x < 3 \Rightarrow f(x) > f(3) \Rightarrow \frac{2x+1}{x-2} > 7 \Rightarrow \left[ \frac{2x+1}{x-2} \right] = 7$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} \left[ \frac{2x+1}{x-2} \right] = 7$$

پس حد وجود ندارد.

**مثال ۵:** حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right]$  را در صورت وجود به دست آورید.

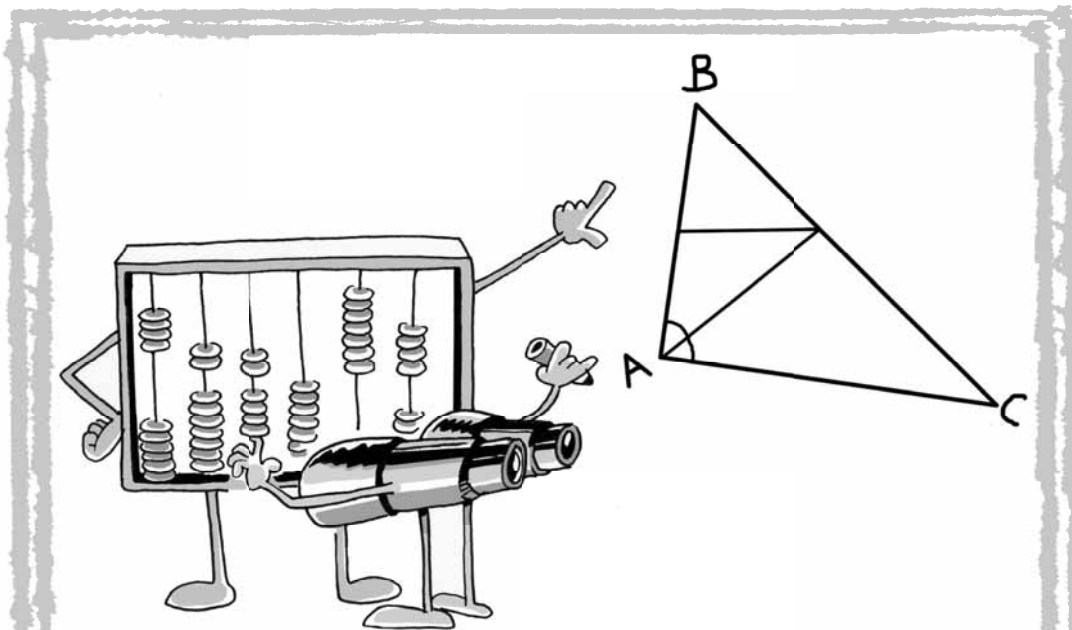
**حل:** با نزدیک شدن  $x$  به عدد صفر، عبارت  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$  به عدد  $-1$  نزدیک می‌شود. اکنون با مشتق‌گیری از تابع و تعیین علامت مشتق، صعودی یا نزولی بودن تابع را بررسی می‌کنیم.

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

تفریح اندیشه

## پاسخ سه چهره دودآلود

هر یک از سه همسفر با خود چنین استدلال می‌کند: «اگر چهره من پاک بود، هر یک از دو نفر دیگر - که هر یک از آنها نیز چهره خود را پاک تصور می‌نمود -، از خنده دیگری دچار تعجب می‌شد؛ زیرا برای این شخص که دو چهره پاک را می‌دید، دلیلی برای خنده وجود نداشت؛ اما هیچ کدام از آن دو نفر از خنده دیگری اظهار تعجب نکرد؛ پس چهره من نیز دوده آلود است.»



## رویکرد هندسی و

محمد هاشم رستمی

# رویکرد جبری در آموزش هندسه (۱۳)

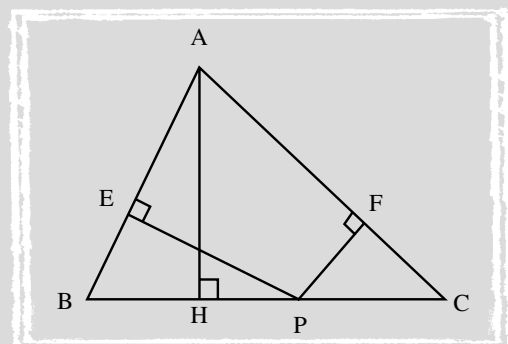
مسئله: مثلث  $ABC$  و نقطه دلخواه  $P$  را روی ضلع  $BC$  از آن در نظر می‌گیریم، تصویر نقطه  $P$  روی ضلع‌های  $AB$  و  $AC$  را به ترتیب  $E$  و  $F$ ، و پای ارتفاع نظیر رأس  $A$  را  $H$  می‌نامیم. ثابت کنید که پنج نقطه  $A, E, H, P, F$  روی یک دایره قرار دارند.

دایره قرار دارند. از  $A$  به  $P$  نیز وصل می‌کنیم. چهارضلعی  $AEPF$  محاطی است، زیرا مجموع دو زاویه روبه‌روی آن  $180^\circ$  است و داریم:  $\hat{E} = 90^\circ, \hat{F} = 90^\circ \Rightarrow \hat{E} + \hat{F} = 180^\circ$

بنابراین، چهار نقطه  $A, E, H, P$  روی یک دایره قرار دارند که آن را دایره  $(C)$  می‌نامیم. هم‌چنین چهارضلعی  $AEPF$  محاطی است، زیرا  $\hat{AEP} = \hat{AHP} = 90^\circ$  است، یعنی دایره به قطر  $AP$  از دو نقطه  $E$  و  $H$  می‌گذرد. بنابراین، چهار نقطه  $A, E, H, P$  نیز روی یک دایره قرار دارند که آن را دایره  $(C')$  می‌نامیم. دو دایره  $(C)$  و  $(C')$  برهم منطبق‌اند، زیرا هر دو دایره شامل سه نقطه غیر هم‌خط  $A, E, P$  هستند و بر سه نقطه غیر هم‌خط تنها یک دایره می‌گذرد. بنابراین دایره‌ای که بر سه نقطه  $A, E, P$  می‌گذرد یکتاست و این دایره از نقطه‌های  $H$  و  $F$  نیز می‌گذرد؛ پس پنج‌ضلعی  $AEPHF$  محاطی است.

به بیان دیگر، نقطه‌ای در صفحه مثلث  $ABC$  وجود دارد که از پنج نقطه  $A, E, H, P, F$  به یک فاصله است.

به بیان دیگر، ثابت کنید عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های  $AE, EH, HP, PF$  و  $FA$  از یک نقطه می‌گذرند.



محاطی بودن پنج‌ضلعی  $AEPHF$  به معنای آن است که نقطه‌ای مانند  $M$  در صفحه این پنج‌ضلعی وجود دارد که از پنج نقطه  $A, E, H, P, F$  به یک فاصله است. اگر این نقطه را  $M$  بنامیم، داریم:

$$MA = ME = MH = MP = MF$$

موجود بودن نقطه  $M$  به قسمتی که  $MA = ME = MH = MP = MF$  باشد، بدان معناست که عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های  $AE, EH, HP, PF$  و  $FA$  از یک نقطه می‌گذرند. پس حکم مسئله ثابت است.

به بیان دیگر، نقطه‌ای در صفحه مثلث  $ABC$  وجود دارد که از پنج نقطه  $A, E, H, P, F$  به یک فاصله است.

به بیان دیگر، ثابت کنید عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های  $AE, EH, HP, PF$  و  $FA$  از یک نقطه می‌گذرند.

### الف) حل به روش هندسی

روش اول: پاره‌خط  $EH$  را وصل می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که پنج‌ضلعی  $AEPHF$  محاطی است، یعنی رأس‌های آن روی یک

دستگاه مختصات قائم  $xOy$  را چنان اختیار می‌کنیم که محور  $x$ ها روی  $BC$  و محور  $y$ ها روی ارتفاع  $AH$  باشد.  $O$  مبدأ مختصات بر نقطه  $H$  پای ارتفاع  $AH$  منطبق است. مختصات نقطه‌های  $A, B, C, P$  را به صورت  $A = (0, y_1), B = (x_r, 0), C = (x_r, 0), P = (x_f, 0)$  اختیار می‌کنیم و مختصات نقطه‌های  $E$  و  $F$  را بر حسب مختصات چهار نقطه  $A, B, C, P$  به دست می‌آوریم. آن‌گاه با استفاده از معادله دایره ثابت می‌کنیم که پنج نقطه  $A, E, H, P, F$  بر سه نقطه از این پنج نقطه را می‌نویسیم و ثابت می‌کنیم که دو نقطه دیگر نیز روی این دایره قرار دارند، یعنی مختصاتشان در معادله این دایره صدق می‌کند. بنابراین داریم:

$$A = (0, y_1), B = (x_r, 0), C = (x_r, 0), P = (x_f, 0)$$

$$AB: \frac{x}{x_r} + \frac{y}{y_1} = 1, AC: \frac{x}{x_r} + \frac{y}{y_1} = 1$$

$$m/AB = \frac{-1}{\frac{1}{x_r}} = -\frac{x_r}{y_1} \Rightarrow m/PE = \frac{x_r}{y_1}, P = (x_f, 0)$$

$$y - 0 = \frac{x_r}{y_1}(x - x_f) \Rightarrow PE: y = \frac{x_r}{y_1}x - \frac{x_r x_f}{y_1} \quad \text{معادله PE}$$

$$AB: \begin{cases} \frac{x}{x_r} + \frac{y}{y_1} = 1 \\ PE: y = \frac{x_r}{y_1}x - \frac{x_r x_f}{y_1} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{x_r} + \frac{1}{y_1}(\frac{x_r}{y_1}x - \frac{x_r x_f}{y_1}) = 1$$

$$x(\frac{1}{x_r} + \frac{x_r}{y_1^2}) = \frac{x_r x_f}{y_1} + 1 \Rightarrow x = \frac{\frac{x_r x_f + y_1^2}{y_1^2}}{\frac{y_1^2 + x_r^2}{x_r y_1^2}}$$

$$\Rightarrow x_E = \frac{x_r^2 x_f + x_r y_1^2}{y_1^2 + x_r^2} \Rightarrow y_E = \frac{x_r}{y_1}(\frac{x_r^2 x_f + x_r y_1^2}{y_1^2 + x_r^2}) - \frac{x_r x_f}{y_1}$$

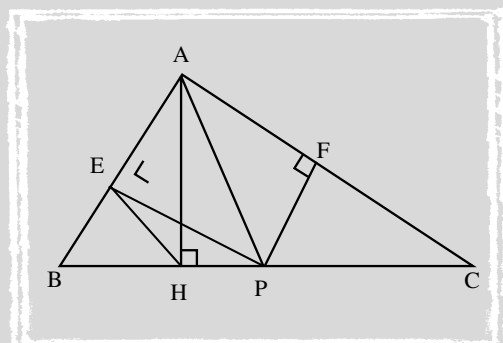
$$\Rightarrow y_E = \frac{x_r^2 x_f + x_r^2 y_1^2}{y_1(y_1^2 + x_r^2)} - \frac{x_r x_f}{y_1}$$

$$= \frac{x_r^2 x_f + x_r^2 y_1^2 - y_1^2 x_r x_f - x_r^3 x_f}{y_1(y_1^2 + x_r^2)}$$

$$\Rightarrow y_E = \frac{y_1^2(x_r^2 - x_r x_f)}{y_1(y_1^2 + x_r^2)} = \frac{y_1 x_r(x_r - x_f)}{y_1^2 + x_r^2}$$

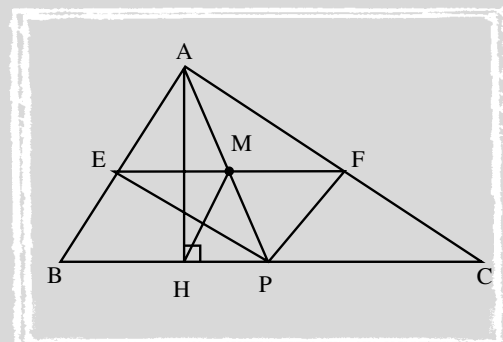
$$\Rightarrow E = (\frac{x_r^2 x_f + x_r y_1^2}{y_1^2 + x_r^2}, \frac{x_r x_r(x_r - x_f)}{y_1^2 + x_r^2})$$

$$m/AC = \frac{-1}{\frac{1}{x_r}} = -\frac{y_1}{x_r}, PF \perp AC \Rightarrow m/PF = \frac{x_r}{y_1}, P = (x_f, 0)$$



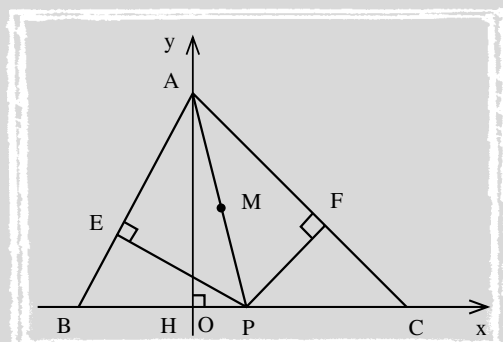
روش دوم- از  $A$  به  $P$  وصل می‌کنیم و وسط پاره خط  $AP$  را  $M$  می‌نامیم. از  $M$  به  $E, H, F$  نیز وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه  $AEP$ ،  $EM$  میانه وارد بر وتر است، پس مساوی نصف وتر این مثلث خواهد بود، یعنی (۱)  $ME = \frac{AP}{2} = AM = MP$  در مثلث قائم‌الزاویه  $AFP$ ،  $FM$  میانه نظیر وتر  $AP$  است، پس مساوی نصف این وتر است، یعنی (۲)  $MF = \frac{AP}{2} = MA = MB$  در مثلث قائم‌الزاویه  $AHP$ ،  $FM$  میانه نظیر وتر  $AP$  است، پس مساوی نصف این وتر است، یعنی (۳)  $MH = \frac{AP}{2} = MA = MB$  از رابطه‌های (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که:

$$ME = MF = MH = MA = MB$$



یعنی نقطه  $M$  از پنج نقطه  $A, E, H, P, F$  به یک فاصله است. پس پنج ضلعی  $AEHPF$  محاطی است و این بدان معناست که عمود منصف‌های پاره‌خط‌های  $AE, EH, HP, PF, FA$  از یک نقطه می‌گذرند. پس حکم مسئله ثابت است.

(ب) حل به روش جبری- مختصاتی



استفاده از ویژگی هندسی آن می توان ثابت کرد که این نقطه ها نیز روی این دایره اند. توجه کنید:

$$P = (x_f, 0) \xrightarrow{\text{در معادله دایره}} (x_f - \frac{x_f}{2})^2 + (0 - \frac{y_1}{2})^2 = \frac{x_f^2 + y_1^2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{x_f^2 + y_1^2}{4} = \frac{x_f^2 + y_1^2}{4} \Rightarrow \text{نقطه } P \text{ روی دایره است}$$

$$E = (\frac{x_r x_f + x_r y_1}{y_1^2 + x_r^2}, \frac{y_1 x_r (x_r - x_f)}{y_1^2 + x_r^2}) \xrightarrow{\text{در معادله دایره}}$$

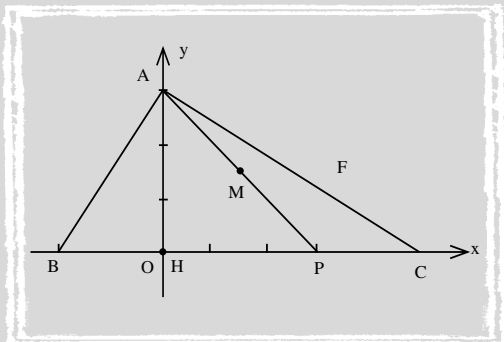
$$(\frac{x_r x_f + x_r y_1}{y_1^2 + x_r^2} - \frac{x_f}{2})^2 + (\frac{y_1 x_r (x_r - x_f)}{y_1^2 + x_r^2} - \frac{y_1}{2})^2 = \frac{x_f^2 + y_1^2}{4}$$

$$(\frac{2x_r x_f + 2x_r y_1 - x_f y_1 - x_f x_r}{2(y_1^2 + x_r^2)})^2 + (\frac{2y_1 x_r x_r - 2y_1 x_r x_f - y_1^2 - y_1 x_r^2}{2(y_1^2 + x_r^2)})^2 = \frac{x_f^2 + y_1^2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{(x_r x_f + x_r y_1 - x_f y_1)^2 + (y_1 x_r (x_r - x_f) - y_1^2)^2}{4(y_1^2 + x_r^2)^2} = \frac{x_f^2 + y_1^2}{4}$$

$$\Rightarrow \dots + \dots \Rightarrow \frac{x_f^2 + y_1^2}{4} = \frac{x_f^2 + y_1^2}{4}$$

**نکته ۲:** در مثال عددی، محاسبه ها بسیار ساده تر خواهد بود. فرض کنید  $A = (0, 4)$ ,  $B = (-2, 0)$ ,  $C = (5, 0)$  و  $P = (3, 0)$  باشد. تصاویر نقطه  $P$  روی  $AB$  و  $AC$  را به ترتیب  $E$  و  $F$  می نامیم و مختصات این نقطه ها را به دست می آوریم.



داریم:

$$AB: \frac{x}{-2} + \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow y - 2x = 4$$

$$m/AB = 2 \Rightarrow m/PE = -\frac{1}{2}, P = (3, 0)$$

$$\Rightarrow PE: y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$AB: \begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow 2x + 4 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{5}{2}x = -\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow PF: y - 0 = \frac{x_r}{y_1}(x - x_f) \Rightarrow PF: y = \frac{x_r}{y_1}x - \frac{x_r x_f}{y_1}$$

$$AC: \begin{cases} \frac{x}{x_r} + \frac{y}{y_1} = 1 \\ y = \frac{x_r}{y_1}x - \frac{x_r x_f}{y_1} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{x_r} + \frac{1}{y_1}(\frac{x_r}{y_1}x - \frac{x_r x_f}{y_1}) = 1$$

$$\Rightarrow x(\frac{1}{x_r} + \frac{x_r}{y_1^2}) = \frac{x_r x_f}{y_1} + 1 \Rightarrow x = \frac{\frac{x_r x_f}{y_1} + 1}{\frac{1}{x_r} + \frac{x_r}{y_1^2}}$$

$$\Rightarrow x_f = \frac{x_r x_f + x_r y_1}{y_1^2 + x_r^2} \Rightarrow y_f = \frac{x_r}{y_1} \times \frac{x_r(x_r x_f + y_1)}{y_1^2 + x_r^2} - \frac{x_r x_f}{y_1}$$

$$\Rightarrow y_f = \frac{x_r x_f + x_r y_1 - x_r x_f y_1 - x_r^2 x_f}{y_1(y_1^2 + x_r^2)} = \frac{x_r y_1 (x_r - x_f)}{y_1^2 + x_r^2}$$

$$\Rightarrow F = (\frac{x_r x_f + x_r y_1}{y_1^2 + x_r^2}, \frac{x_r y_1 (x_r - x_f)}{y_1^2 + x_r^2})$$

دایره گذرنده بر سه نقطه  $A, E, P$  است، زیرا زاویه  $\widehat{AEP} = 90^\circ$  است. این دایره از نقطه  $F$  نیز می گذرد. مرکز این دایره را  $M$  می نامیم. مختصات  $M$  و شعاع دایره را به دست می آوریم و معادله آن را می نویسیم. داریم:

$$M \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_P}{2} = \frac{0 + x_f}{2} = \frac{x_f}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_P}{2} = \frac{y_1 + 0}{2} = \frac{y_1}{2} \end{cases}$$

$$R = AM = \sqrt{(\frac{x_f}{2} - 0)^2 + (\frac{y_1}{2} - y_1)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{x_f^2 + y_1^2}$$

$$\Rightarrow \text{معادله دایره: } (x - \frac{x_f}{2})^2 + (y - \frac{y_1}{2})^2 = \frac{x_f^2 + y_1^2}{4}$$

مختصات نقطه  $H$  را در این معادله قرار می دهیم. داریم:

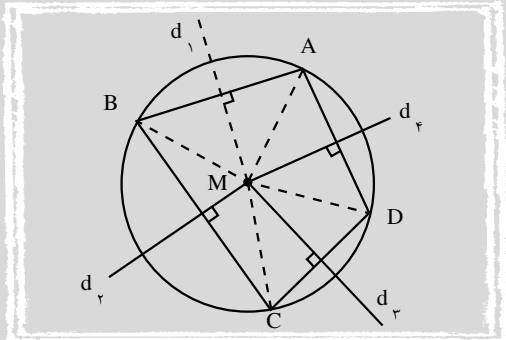
$$H = O = (0, 0) \xrightarrow{\text{در معادله دایره}} (0 - \frac{x_f}{2})^2 + (0 - \frac{y_1}{2})^2 = \frac{x_f^2 + y_1^2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{x_f^2 + y_1^2}{4} = \frac{x_f^2 + y_1^2}{4} \Rightarrow \text{نقطه } H \text{ روی این دایره است}$$

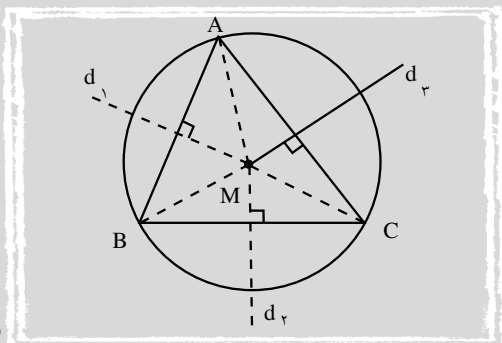
بنابراین دایره به دست آمده بر پنج نقطه  $A, E, P, H, F$  می گذرد، یعنی پنج ضلعی  $AEHPF$  محاطی است. پس حکم مسئله درست است.

**نکته ۱:** اگر مختصات نقطه های  $P, E, F$  را نیز در معادله دایره به دست آمده قرار دهیم، در این معادله صدق می کنند، یعنی بدون

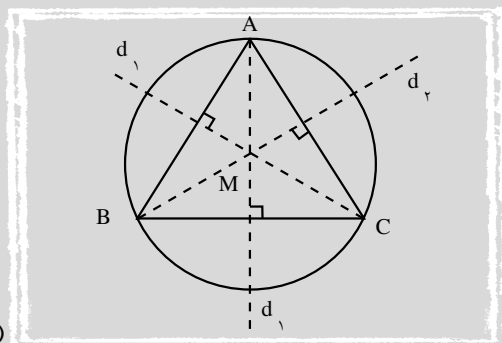
همان طور که قبلاً دیدیم سه سؤال بالا هم‌ارز هستند، یعنی موجود بودن هر کدام از آن‌ها موجب موجود بودن دو تای دیگر است؛ یعنی اگر یک چندضلعی محاطی باشد، در صفحه آن نقطه‌ای وجود دارد که از رأس‌های آن به یک فاصله است و این بدان معناست که عمودمنصف‌های ضلع‌های آن هم‌رس‌اند.



(۱) از سه ضلعی یا مثلث شروع می‌کنیم. همان طور که دیدیم هر مثلثی قابل محاط شدن در یک دایره است، زیرا به روش‌های هندسی و جبری-مختصاتی ثابت می‌شود که عمودمنصف‌های ضلع‌های آن هم‌رس‌اند. با توجه به این نکته، عمودمنصف‌های مثلث متساوی‌الساقین، هر مثلث قائم‌الزاویه هم‌رس خواهند بود. در مثلث قائم‌الزاویه، مرکز دایره محاطی روی وتر مثلث است، در مثلث با زاویه‌های حاده این نقطه درون مثلث است و در مثلث با زاویه منفرجه این نقطه بیرون مثلث قرار دارد. شکل‌ها را ببینید.



(الف)



(ب)

$$\Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow E = (-1, 2)$$

$$AC: \frac{x}{y} + \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow 4x + 5y = 20, m_{AB} = -\frac{4}{5} \Rightarrow m_{PF} = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow PF: y - 0 = \frac{5}{4}(x - 3) \Rightarrow PF: y = \frac{5}{4}x - \frac{15}{4}$$

$$\begin{cases} 4x + 5y = 20 \\ y = \frac{5}{4}x - \frac{15}{4} \end{cases} \Rightarrow F = C$$

AP وسط پاره خط M

معادله دایره

$$\Rightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \Rightarrow (x - \frac{3}{2})^2 + (y - 2)^2 = \frac{25}{4}$$

$$H = (0, 0) \xrightarrow{\text{در معادله دایره}} (\frac{3}{2})^2 + (0 - 2)^2 = \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4} + 4 = \frac{25}{4} \Rightarrow \frac{25}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow \text{روی دایره است}$$

$$E = (-1, 2) \xrightarrow{\text{در معادله دایره}} (-1 - \frac{3}{2})^2 + (2 - 2)^2 = \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{25}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow \text{روی دایره است}$$

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که F نیز روی این دایره است و در نتیجه پنج‌ضلعی AEHPF محاطی است.

یک سؤال و بحث درباره آن

کدام چندضلعی محاطی است؟

به بیان دیگر:

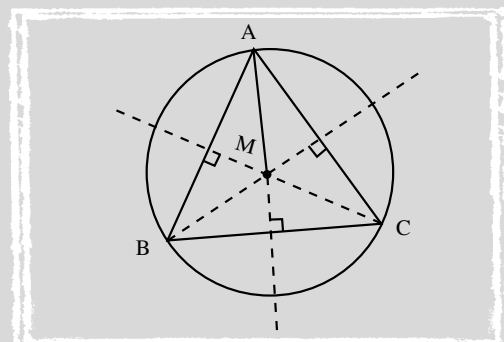
در صفحه کدام چندضلعی نقطه‌ای یافت می‌شود که از رأس‌های

آن به یک فاصله باشد؟

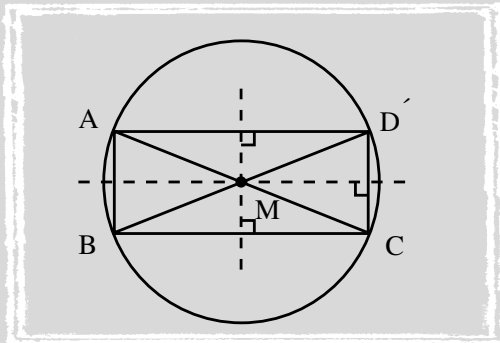
و به بیانی دیگر:

کدام چندضلعی است که عمودمنصف‌های ضلع‌های آن از یک

نقطه می‌گذرند؟

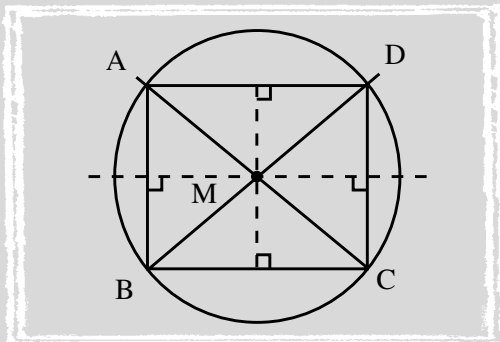






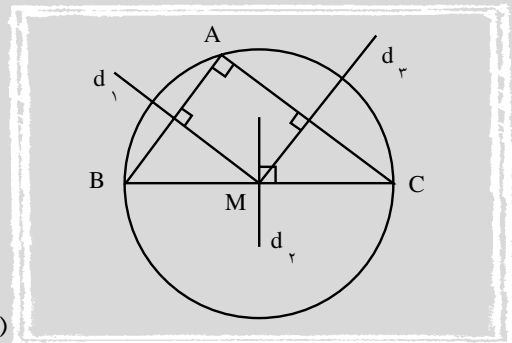
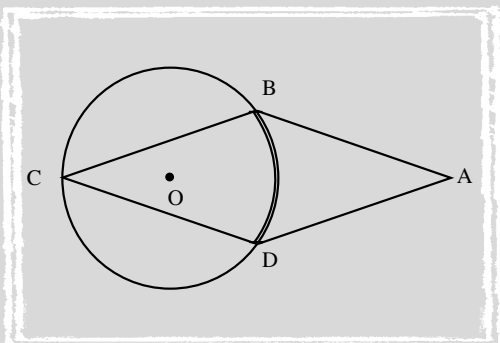
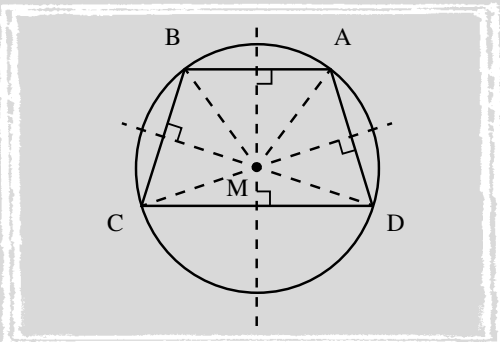
۲) هر مربع قابل محاط شدن در یک دایره است، زیرا مجموع هر دو زاویه روبه‌روی آن  $180^\circ$  است.

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 90^\circ$$

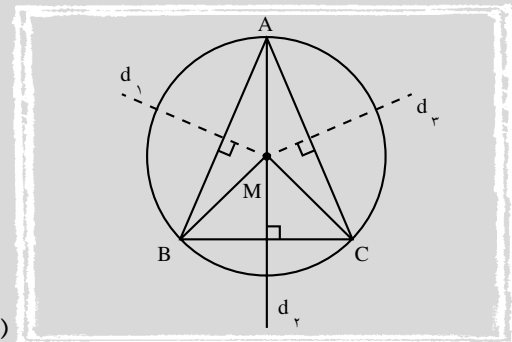


۳) هر دوزنقه متساوی الساقین قابل محاط شدن در یک دایره است، زیرا در دوزنقه متساوی الساقین  $AB \parallel CD$  و  $AD = BC$  داریم:

$$\hat{A} = \hat{B}, \hat{C} = \hat{D}, \hat{A} + \hat{D} = \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$



(پ)



(ت)

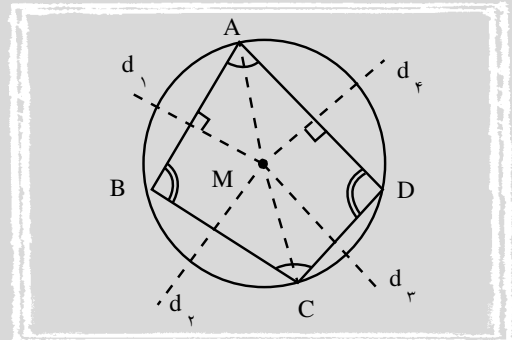
(الف) مثلث غیر مشخص

(ب) مثلث متساوی الاضلاع

(پ) مثلث قائم الزاویه

(ت) مثلث متساوی الساقین

و اینک چهارضلعی‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

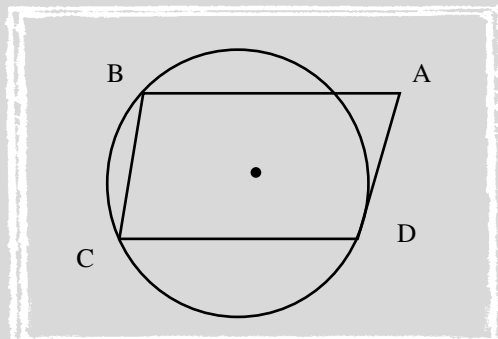


همان‌طور که دیدیم یک چهارضلعی در صورتی محاطی است که مجموع هر دو زاویه روبه‌روی آن مساوی  $180^\circ$  باشد. به بیان دیگر: شرط لازم و کافی برای محاطی بودن یک چهارضلعی آن است که هر دو زاویه روبه‌روی آن مکمل یکدیگر باشند. اثبات این مطلب را به روش هندسی و به روش جبری-مختصاتی مورد بررسی قرار دادیم. با توجه به این مطلب می‌توان گفت که:

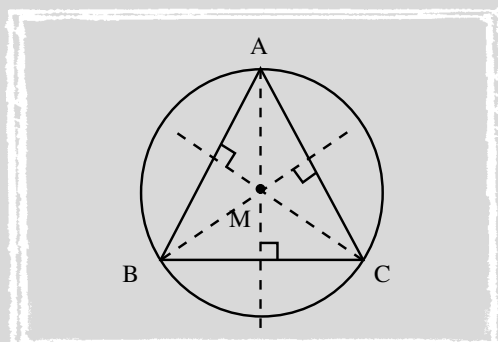
(۱) هر مستطیل قابل محاط شدن در یک دایره است، زیرا هر دو زاویه روبه‌روی آن مکمل یکدیگرند.

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$

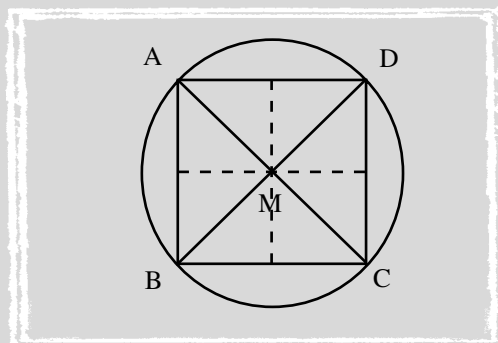
۴) متوازی الاضلاع و لوزی از چهارضلعی‌های خاص هستند که قابل محاط شدن در یک دایره نیستند، یعنی بر چهار رأس آن‌ها یک دایره نمی‌گذرد.



و اینک به پنج‌ضلعی‌ها می‌پردازیم: یک پنج‌ضلعی در صورتی محاطی است که عمودمنصف‌های ضلع‌های آن از یک نقطه بگذرند. بنابراین می‌توانیم بگوییم که: هر پنج‌ضلعی دلخواهی محاطی نیست، اما پنج‌ضلعی منتظم محاطی است. یعنی دایره‌ای وجود دارد که بر رأس‌های یک پنج‌ضلعی منتظم می‌گذرد. به‌طور کلی می‌توان ثابت کرد که هر  $n$  ضلعی منتظم قابل محاط شدن در یک دایره است. اثبات کنید این مطلب درباره سه‌ضلعی منتظم یا مثلث متساوی الاضلاع را دیدیم (شکل).



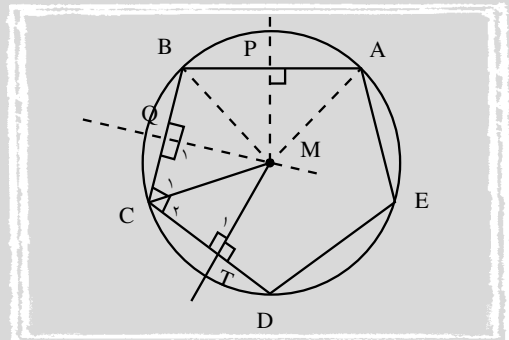
هر چهارضلعی منتظم یا مربع نیز قابل محاط شدن در یک دایره است (شکل).



بنابراین کافی است اثبات مطلب را برای پنج‌ضلعی منتظم ببینیم، یعنی قضیه زیر را ثابت کنیم:

**قضیه:** هر پنج‌ضلعی منتظم قابل محاط شدن در یک دایره است؛ یعنی بر پنج رأس آن یک دایره می‌گذرد.

**نکته:** چندضلعی را منتظم گوییم که همه ضلع‌های آن با هم مساوی و تمام زاویه‌های آن نیز با هم مساوی باشند. برای اثبات به روش هندسی، پنج‌ضلعی منتظم ABCDE را در نظر می‌گیریم. عمودمنصف‌های ضلع‌های AB, BC, CD, DE, EA را رسم می‌کنیم و به ترتیب آن‌ها را  $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$  می‌نامیم و ثابت می‌کنیم که این عمودمنصف‌ها از یک نقطه می‌گذرند.



برای اثبات، نقطه برخورد عمودمنصف‌های ضلع‌های AB و BC یعنی نقطه تقاطع  $d_1$  و  $d_2$  را M می‌نامیم. ثابت می‌کنیم که عمودمنصف ضلع CD یعنی خط  $d_3$  هم از همین نقطه M می‌گذرد. برای اثبات از M عمود MT را بر CD رسم می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که MT عمودمنصف CD است. دو مثلث قائم‌الزاویه MQC و MCT هم‌نهشت‌اند، زیرا:

$$\hat{C}_1 = \hat{C}_2 = \frac{\hat{C}}{2} = \frac{108^\circ}{2} = 54^\circ, MC = MC$$

$$\hat{Q}_1 = \hat{T}_1 = 90^\circ$$

در نتیجه:  $CT=CQ$  اما  $CQ = \frac{BC}{2}$  و  $BC=CD$  است، پس

$$CT = \frac{CD}{2}$$

یعنی نقطه T وسط ضلع CD است. بنابراین MT عمودمنصف ضلع CD، یعنی همان خط  $d_3$  است، پس عمودمنصف ضلع CD نیز از M می‌گذرد. به همین ترتیب ثابت می‌شود که عمودمنصف‌های ضلع‌های DE و EA نیز از نقطه M می‌گذرند. پس نقطه M نقطه هم‌رسی خط‌های  $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$  است. بنابراین از پنج نقطه A, B, C, D, E به یک فاصله است، یعنی  $MA=MB=MC=MD=ME$  و در نتیجه پنج‌ضلعی منتظم ABCDE محاطی است.

سؤال ۱: چرا  $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$  است؟ از این که M محل برخورد عمودمنصف‌های ضلع‌های AB و BC است چه استفاده‌ای می‌توان کرد؟ سؤال ۲: چگونه می‌توان ثابت کرد که هر  $n$  ضلعی منتظم قابل محاط شدن در یک دایره است؟

تمرین. قضیه را به روش جبری-مختصاتی ثابت کنید.



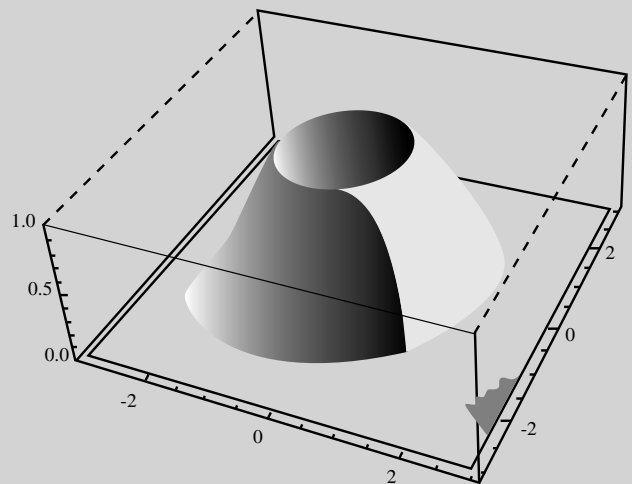
# آشنایی با بسته‌ی نرم‌افزاری مَتَمَتیکا (۴)

## Mathematica

دکتر محمدعلی فریبرزى عراقى  
عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه  
آزاد اسلامی، واحد تهران مرکزی

### اشاره

در کتاب ریاضیات ۲ دورهٔ دبیرستان، مباحثی دربارهٔ ماتریس‌ها و مثلثات مطرح شده است. در فصل ماتریس‌ها روی اعمال در ماتریس‌ها بحث می‌شود و در فصل مثلثات به معرفی نسبت‌های مثلثاتی و فرمول‌های مربوط به آن‌ها می‌پردازند. با استفاده از بستهٔ نرم‌افزاری مَتَمَتیکا می‌توان اعمال ماتریسی و محاسبات مثلثاتی را به راحتی انجام داد. در این قسمت به معرفی دستورالعمل‌های مربوط به ماتریس‌ها و نسبت‌های مثلثاتی می‌پردازیم:



## الف) ایجاد یک ماتریس در ممتیکا

برای معرفی یک ماتریس در صفحه اصلی ممتیکا روی گزینه Insert کلیک می‌کنیم و سپس در پنجره حاصل روی گزینه Table/Matrix قرار می‌گیریم و با باز شدن پنجره بعدی گزینه New را برمی‌گزینیم. با این کار پنجره‌ای برای ایجاد یک ماتریس باز می‌شود. در این پنجره گزینه Matrix را انتخاب می‌کنیم و تعداد سطرها<sup>۱</sup> و تعداد ستون‌ها<sup>۲</sup> را پر می‌کنیم. برای مثال اگر بخواهیم یک ماتریس ۳×۳ ایجاد کنیم، جلوی هر دو آن‌ها عدد ۳ را تایپ می‌کنیم و اگر بخواهیم ماتریسی ۳×۵ بسازیم به ترتیب ۳ را در خانه تعداد سطرها و ۵ را در خانه تعداد ستون‌ها تایپ می‌کنیم. در نهایت، روی OK کلیک می‌کنیم تا ماتریس مورد نظر روی صفحه نمایش داده شود. در حالتی که ماتریس ۳×۳ مورد نظر باشد، جدول زیر در صفحه نمایش نمایان می‌شود.

$$\begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

حال باید درایه‌های ماتریس را در خانه‌های خالی تایپ کنیم. با کلیک کردن روی هر خانه، می‌توان عدد یا حرف مورد نظر را در آن تایپ کرد. با استفاده از دکمه Tab هم می‌توان به خانه بعدی رفت و آن را پر کرد. در صورتی که خانه‌ای را به اشتباه پر کرده باشیم، می‌توانیم روی همان خانه قرار بگیریم و با دکمه روی ماوس، آن خانه را انتخاب کنیم و کلید Delete را فشار دهیم و دوباره در خانه خالی مربوطه درایه صحیح را تایپ کنیم. در ممتیکا از دو راه می‌توان یک ماتریس را نمایش داد: یکی به شکل جدول مرسوم با m سطر و n ستون؛ و دیگری به شکل مجموعه‌ای که درایه‌های هر سطر ماتریس در مجموعه‌هایی جدا از هم، اعضای این مجموعه را تشکیل می‌دهند.

مثال:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 8 & 10 \\ -5 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

$\{\{1, 0, -2\}, \{4, 8, 10\}, \{-5, 6, -1\}\}$

اگر بخواهیم دوباره ماتریسی با همان ابعاد ماتریس قبلی را در صفحه نمایش ایجاد کنیم می‌توانیم سلول مورد نظر را که حاوی ماتریس قبلی است کپی کنیم و در صفحه نمایش قرار دهیم. برای این کار با استفاده از ماوس روی گوشه سلول مورد نظر راست کلیک می‌کنیم و گزینه Copy را برمی‌گزینیم و سپس در محل مورد نظر در صفحه نمایش، آن سلول را Paste می‌کنیم.

برای نمایش یک ماتریس یا یک جدول، دو دستور MatrixForm و TableForm نیز استفاده می‌شود. در حالت اول، ماتریس به صورت یک نمایش مستطیلی نمایان می‌شود که

درایه‌ها داخل پرانتز قرار دارند و در حالت دوم نیز همان نمایش بدون پرانتزی که درایه‌ها را دربر گرفته باشد، نمایان می‌شود. برای استفاده از این دو دستور، ابتدا با استفاده از دستور العمل List سطرهای ماتریس را به‌طور مجزا در مجموعه‌هایی جداگانه معرفی و پس از تایپ، در انتهای List از این دستورها استفاده می‌کنیم. دستور List/MatrixForm نیز همان عمل ایجاد ماتریس به شکل جدول مستطیلی را انجام می‌دهد.

مثال:

$$\text{List} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8\}, \{9, 10, 11, 12\}\}$$

MatrixForm[List]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

List/MatrixForm

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

TableForm[List]

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{array}$$

## ب) دو ماتریس خاص

a) ماتریس واحد: برای نمایش یک ماتریس واحد  $n \times n$  از دستور زیر استفاده می‌شود:

IdentityMatrix[n]

با به‌کارگیری این دستور، ماتریسی با درایه‌های قطری یک و درایه‌های غیرقطری صفر نمایان می‌شود.

IdentityMatrix[3]

$$\{\{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}\}$$

MatrixForm[IdentityMatrix[3]]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) ماتریس قطری: برای نمایش یک ماتریس قطری با درایه‌های قطری مفروض از دستور زیر استفاده می‌شود:

DiagonalMatrix[List]

که در آن List فهرست درایه‌های قطری ماتریس است.

مثال:

$$\text{MatrixForm}[\text{DiagonalMatrix}[\{-1, 5, 8, -6\}]]$$

$$\begin{bmatrix} -31 & 34 & -34 \\ -58 & -5 & -34 \\ -47 & 13 & 22 \end{bmatrix}$$

توجه شود اگر دو ماتریس قابل ضرب در یکدیگر نباشند، پس از اجرای دستور ضرب، پیغام خطا در صفحه نمایان می‌شود. در زیر حاصل ضرب یک ماتریس  $2 \times 3$  در یک ماتریس  $3 \times 2$  مشخص شده است.

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\{\{3, -4, 1\}, \{0, 2, -9\}\}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 9 & 11 \\ -8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\{\{0, -4\}, \{9, 11\}, \{-8, 3\}\}$$

MatrixForm[A.B]

$$\begin{bmatrix} -44 & -53 \\ 90 & -5 \end{bmatrix}$$

### د) اعمال مثلثاتی

هریک از نسبت‌های مثلثاتی سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت در متمتیکا به راحتی قابل محاسبه هستند. در مثال زیر، چند محاسبه با هر یک از نسبت‌های مثلثاتی انجام شده است. توجه داشته باشید که اگر داخل کروش فقط کمان مورد نظر تایپ شود، آن کمان با واحد رادیان در نظر گرفته می‌شود و اگر حالت درجه مورد نظر باشد واژه Degree بعد از کمان باید تایپ شود.

مثال: ۱) در زیر حاصل  $\tan 24^\circ$ ،  $\cos \frac{3\pi}{4}$ ،  $\sin 45^\circ$ ،  $\sin \frac{\pi}{3}$  به دست آمده‌اند. توجه داشته باشید که حرف اول هر یک از نسبت‌های مثلثاتی باید بزرگ تایپ شود.

Sin[pi/3]

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sin [45 Degree]

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \left[ \frac{3\pi}{4} \right]$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Tan [24. Degree]

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

### ج) اعمال روی ماتریس‌ها

اعمال جمع، تفریق و ضرب در ماتریس‌ها به راحتی پس از معرفی آن‌ها و اختصاص نامی برای هر ماتریس انجام می‌شود. در مثال زیر دو ماتریس

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 \\ -6 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 10 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -3 \\ -4 & 9 & 0 \\ -1 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

معرفی و اعمال  $A.B$ ،  $A-B$ ،  $A+B$ ،  $3A$  روی آن‌ها اجرا و نتایج مشخص شده‌اند. توجه شود که برای نام‌گذاری یک ماتریس، ابتدا نام موردنظر مثلاً A را تایپ و پس از تایپ علامت تساوی از طریق گزینه Insert به همان صورتی که در بالا توضیح داده شد، ماتریس را ایجاد و درایه‌ها را داخل خانه‌های خالی وارد می‌کنیم. برای عمل ضرب دو ماتریس از علامت استفاده می‌شود.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -3 \\ -4 & 9 & 0 \\ -1 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\{\{2, 6, -3\}, \{-4, 9, 0\}, \{-1, 7, 4\}\}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 \\ -6 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\{\{1, 8, 4\}, \{-6, 3, -2\}, \{-1, 0, 10\}\}$$

MatrixForm[3A]

$$\begin{bmatrix} 6 & 18 & -9 \\ -12 & 27 & 0 \\ -3 & 21 & 12 \end{bmatrix}$$

MatrixForm[A+B]

$$\begin{bmatrix} 3 & 14 & 1 \\ -10 & 12 & -2 \\ -2 & 7 & 14 \end{bmatrix}$$

MatrixForm[A-B]

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & -6 \end{bmatrix}$$

MatrixForm[A.B]

$$c[1] \in \text{Integers} \ \& \ x = \frac{\pi}{4} + \pi c[1]$$

**مثال:** در این مثال، معادله مثلثاتی  $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$  حل می‌شود. جواب‌های کلی این معادله عبارت‌اند از:  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$  و  $x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$  که در آن‌ها  $k$  عددی صحیح است. در صفحه نمایش متمتیکا به جای  $k$  نماد  $c[1]$  نمایان می‌شود.

$$\text{Reduce} \left[ 2\sin^2[x] - 3\sin[x] + 1 = 0, x \right]$$

$$c[1] \in \text{Integers} \ \& \ \left( x = \frac{\pi}{2} + 2\pi c[1] \mid x = \frac{\pi}{6} + 2\pi c[1] \mid x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi c[1] \right)$$

### و) محاسبه معکوس نسبت‌های مثلثاتی

در متمتیکا با به‌کارگیری دستوره‌های ArcSin، ArcCos، ArcTan و ArcCot می‌توان معکوس هر یک از نسبت‌های مثلثاتی را محاسبه کرد.

**مثال:** در مثال‌های زیر، حاصل ArcTan1، ArcSin  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  و ArcCos  $\left(\frac{-1}{2}\right)$  به دست آمده‌اند.

$$\text{ArcTan}[1]$$

$$\frac{\pi}{4}$$

$$\text{ArcSin} \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

$$\frac{\pi}{4}$$

$$\text{ArcCos} \left[ -\frac{1}{2} \right]$$

$$\frac{2\pi}{3}$$

**مثال:** در مثال زیر، حاصل عبارت  $\text{ArcTan}(\sqrt{3}) + \text{ArcCot}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  به دست آمده است.

$$\text{ArcTan} \left[ \sqrt{3} \right] + \text{ArcCot} \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$$

$$\frac{2\pi}{3}$$

1. Number of rows
2. Number of columns

### منابع

1. کتاب درسی ریاضیات ۲، سال دوم آموزش متوسطه، ۱۳۸۹.
2. Mathematica, Second edition, Eugene Don, Schaums outlines series, Mc Graw Hill, 2009.

$$\sqrt{3}$$

$$\text{Cot}[\pi/12]$$

$$2 + \sqrt{3}$$

(۲) در زیر، حاصل  $\frac{\sin 12^\circ \cos(-30^\circ) - \cos 12^\circ \sin 135^\circ \cos(-45^\circ)}{\sin 135^\circ \cos(-45^\circ)}$  مشخص شده است. یادآوری می‌شود که برای ورود این کسر می‌توان در پنجره Basic Math Input گزینه  $\frac{\square}{\square}$  را انتخاب و صورت و مخرج را در خانه‌های خالی تایپ و با فشار هم‌زمان Shift-Enter، سلول حاصل را اجرا کرد.

$$\frac{\text{Sin}[12\text{Degree}]\text{Cos}[-30\text{Degree}] - \text{Cos}[12\text{Degree}]\text{Sin}[135\text{Degree}]\text{Cos}[-45\text{Degree}]}{\text{Sin}[135\text{Degree}]\text{Cos}[-45\text{Degree}]}$$

$$\frac{5}{2}$$

(۳) در زیر، حاصل  $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$  به دست آمده است.

$$\text{Sin} \left[ x - \frac{\pi}{6} \right] + \text{Cos} \left[ x + \frac{\pi}{3} \right]$$

$$0$$

با استفاده از دستور Simplify می‌توان یک عبارت مثلثاتی را تا حد امکان ساده کرد. در مثال‌های زیر، هر یک از عبارت‌های مثلثاتی  $\frac{1 + \cos 2a}{1 - \cos 2a}$ ،  $\cos(a-b) + \cos(a+b)$  و  $\tan(a - \delta\pi)\text{Cot}(a + \gamma\pi) - \cos(6\pi - a)\cos(a - 6\pi)$  ساده شده‌اند. نتایج به‌ترتیب عبارت‌اند از:  $\text{Cot}^2 a$ ،  $2\cos a \cos b$  و  $\sin^2 a$ .

$$\text{Simplify} \left[ \frac{1 + \text{Cos}[2a]}{1 - \text{Cos}[2a]} \right]$$

$$\text{Cot}[a]^2$$

$$\text{Simplify} [\text{Cos}[a-b] + \text{Cos}[a+b]]$$

$$2 \text{Cos}[a] \text{Cos}[b]$$

$$\text{Simplify} [\text{Tan}[a - \delta\text{Pi}]\text{Cot}[a + \gamma\pi] - \text{Cos}[6\pi - a]\text{Cos}[a - 6\text{Pi}]]$$

$$\text{Sin}[a]^2$$

### ه) حل معادلات مثلثاتی

با استفاده از دستور Reduce می‌توان یک معادله مثلثاتی را حل و جواب‌های عمومی آن را مشخص کرد. صورت کلی این دستور عبارت است از:

$$\text{Reduce} [\text{معادله}, \text{متغیر}]$$

**مثال:** در این مثال، معادله مثلثاتی  $\tan x = 1$  حل می‌شود. جواب‌های کلی این معادله به صورت  $x = K\pi + \frac{\pi}{4}$  است که  $K \in \mathbb{Z}$ . در متمتیکا این جواب به صورت  $x = \frac{\pi}{4} + \pi c[1]$  نمایان می‌شود که نماد  $c[1]$  به معنای یک مقدار صحیح است.

$$\text{Reduce} [\text{Tan}[x] = 1, x]$$



قضیه‌ای در حساب موجود است که به کمک اصول موضوعه حساب نمی‌توان آن را اثبات کرد.

حساب ناکامل است، یعنی هر چند اصولی داشته باشد، همواره قضیه‌ای در آن موجود است که از آن اصول موضوعه استنتاج نمی‌شود.

راسل و وایتهد بر آن بودند تا نشان دهند که ریاضیات شاخه‌ای از منطق است، بدین معنا که هر قضیه ریاضیات، نتیجه صرفاً منطقی اصول موضوعه دستگاہ آن است. به سال ۱۹۳۱، گودل، با به دست دادن قضیه‌ای از حساب که اثبات آن

با استفاده از اصول موضوعه حساب ممکن

نبود، به گونه‌ای شگفت‌انگیز به اثبات

رساند که در اشتباه بوده‌اند و

به این ترتیب نشان داد که

حساب (و بخش‌های دیگر

ریاضیات) چیزی بیش از

شاخه‌ای از منطق‌اند.

گودل این کار را با

تخصیص اعداد رمزی به

جمیع نمادها و گزاره‌های

حساب انجام داد و به این

ترتیب، گزاره‌ای به دست

آورد که بیان می‌کند:

گزاره با عدد رمزی  $g$  نمی‌تواند

اثبات شود.

عدد رمزی این گزاره، خود  $g$  است.

بنابراین، این گزاره ارجاع به خود دارد.

فرض می‌کنیم این گزاره دروغ باشد. در این صورت گزاره با عدد رمزی  $g$  را می‌توان اثبات کرد

و در نتیجه راست است. اما این گزاره، گزاره‌ای با عدد رمزی  $g$  است! یعنی، گزاره راست است، اما

با وجود این، اثبات‌نشده‌ی است.

با این کار، گودل؛ نه تنها منطق‌گرایی راسل و وایتهد را نابود کرد، بلکه پیش‌بینی لایبنیتس

را نیز، در مورد امکان انجام هر استدلال با استفاده از یک محاسبه مکانیکی، از بین برد.

چنین نیست که قضایای بسیاری در بهبود حیات اثر داشته باشند، اما این قضیه یکی از

آن‌هاست. این قضیه نشان می‌دهد که شخص نمی‌تواند رایانه‌ای را چنان برنامه‌ریزی کند که

جمیع گزاره‌های راست ممکن را بیرون دهد. یعنی در این مورد همواره به هوش بشری نیاز

است.

پی‌نوشت

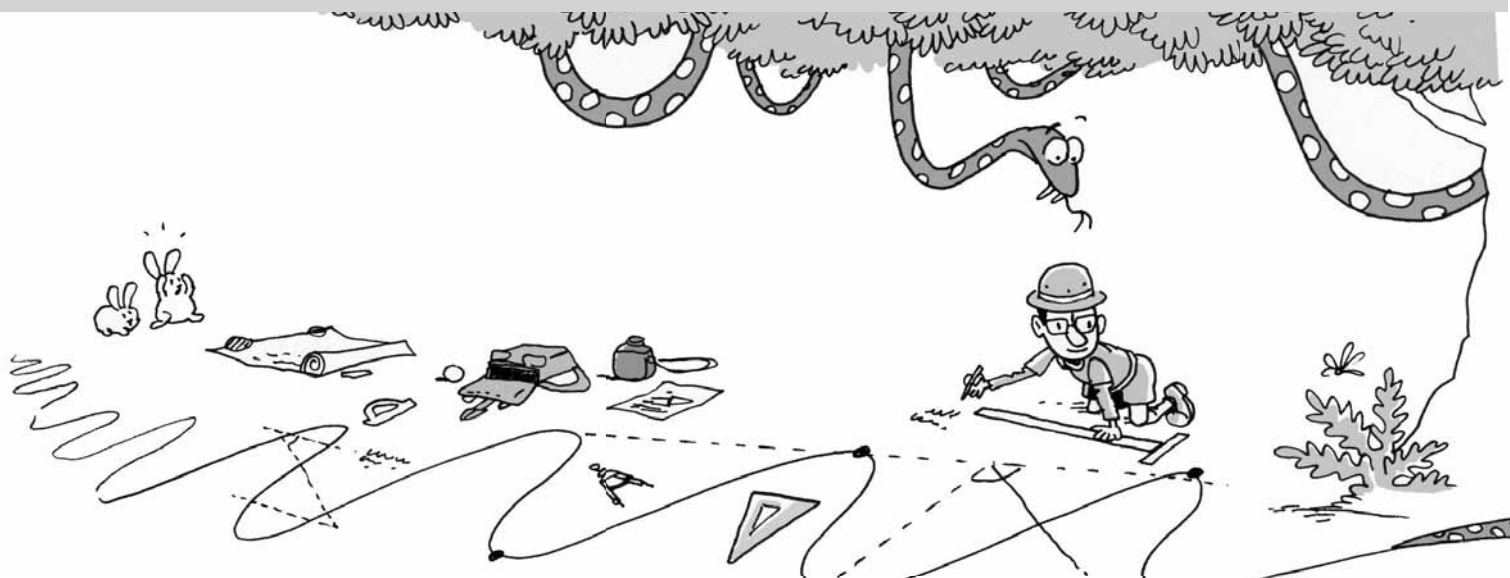
1. Gödel's Theorem
2. Kurt Gödel
3. Dr. Robert Solomon



کورت گودل<sup>۲</sup> (۱۹۰۶-۱۹۷۸)  
آلمان، ۱۹۳۱

# قضیه گودل

نویسنده: دکتر رابرت سالمون<sup>۳</sup>  
ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور



# روش تعیین عرض‌های اکسترمم نسبی تابع بدون استفاده از مشتق

احمد قندهاری

حذف؛ سپس شرط برقراری ریشه مضاعف را می‌نویسیم.

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ y = k \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = k \Rightarrow x^2 - 2x - (k+3) = 0$$

$$\Delta' = b'^2 - ac = 0 \Rightarrow 1 + k + 3 = 0 \Rightarrow k = -4$$

عرض مینیمم نسبی تابع  $k = -4$  را  
تذکر: به جای خط به معادله  $y=k$ ، خط به معادله  $y=y$  را  
با معادله منحنی تقاطع می‌دهیم. درواقع همان معادله منحنی  
را برحسب  $x$  مرتب می‌کنیم و شرط برقراری ریشه مضاعف را  
می‌نویسیم، یعنی:

$$y = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow x^2 - 2x - (y+3) = 0$$

$$\Delta' = 1 + y + 3 = 0 \Rightarrow y = -4$$

عرض اکسترمم نسبی تابع  $y = -4$   
مثال ۱: عرض‌های اکسترمم نسبی تابع با ضابطه  $y = \frac{4x}{x^2+1}$   
را بیابید.

حل. از روش دوم استفاده می‌کنیم:

$$y = \frac{4x}{x^2+1} \Rightarrow yx^2 + y = 4x$$

$$yx^2 - 4x + y = 0 \Rightarrow \Delta' = 4 - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$$

چون نمودار تابع فوق‌مجانب قائم ندارد،  $y$  بزرگ‌تر عرض  
ماکزیمم نسبی و  $y$  کوچک‌تر عرض مینیمم نسبی است، پس  
داریم:

$$y_{\text{Min}} = -2 \text{ و } y_{\text{Max}} = 2$$

تابع با ضابطه  $y = x^2 - 2x - 3$  را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم  
عرض مینیمم نسبی این تابع را بیابیم. می‌دانیم طول مینیمم  
نسبی هر تابع ریشه‌های ساده معادله  $y'_x = 0$  است.

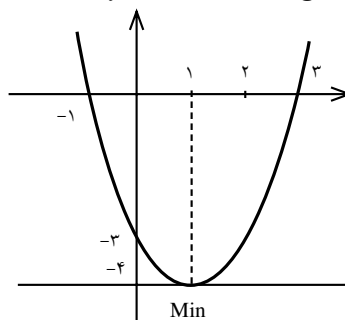
## روش اول

عرض مینیمم نسبی این تابع را به کمک مشتق محاسبه  
می‌کنیم.

$$y'_x = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 1 - 2 - 3 = -4$$

نمودار تابع چنین است.



خط  $y = -4$  بر نمودار تابع مماس است.

## روش دوم

خط به معادله  $y=k$  را با معادله منحنی تقاطع می‌دهیم ( $y$ )

**مثال ۴:** در تابع با ضابطه زیر، مجموع عرض‌های اکسترمم نسبی تابع برابر (-۴) است. m را بیابید.

$$y = \frac{x^2 - 4x + m}{x - \frac{m}{4}}$$

$$y_1 + y_2 = \frac{-2(2ac' - 2a'c - bb')}{b'^2 - 4a'c'} \Rightarrow -4 = \frac{-2(-\frac{m}{4} + 0 + 4)}{1}$$

$$\Rightarrow 2 = -\frac{m}{4} + 4 \Rightarrow \frac{m}{4} = 2 \Rightarrow m = 4$$

**مثال ۵:** در تابع با ضابطه  $y = \frac{x-1}{x^2 + mx}$ ، اگر حاصل ضرب عرض‌های اکسترمم نسبی تابع برابر  $\frac{1}{4}$  باشد، مقدار m را بیابید.

$$y_1 \cdot y_2 = \frac{b^2 - 4ac}{b'^2 - 4a'c'} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{m^2} \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2$$

**مثال ۶:** تابع به معادله  $y = \frac{x^2 + 4ax + 12}{x^2 - ax - 3}$  مفروض است. ثابت کنید به ازای جميع مقادير a، یکی از مقادير اکسترمم نسبی تابع مقدار ثابتی است. هم‌چنین a را چنان بیابید تا مقدار دیگر اکسترمم نسبی تابع برابر  $(-\frac{1}{4})$  باشد.

$$y = \frac{x^2 + 4ax + 12}{x^2 - ax - 3} \Rightarrow yx^2 - ayx - 3y = x^2 + 4ax + 12$$

$$(y-1)x^2 - a(y+4)x - 3(y+4) = 0$$

$$\Delta = a^2(y+4)^2 + 12(y-1)(y+4) = 0$$

$$(y+4)[a^2(y+4) + 12(y-1)] = 0, y+4=0 \Rightarrow y=-4$$

$y=-4$  یکی از مقادير اکسترمم نسبی است که مقدارش به بستگی ندارد.

$$a^2(y+4) + 12(y-1) = 0 \text{ و } y = -\frac{1}{4}$$

$$a^2(-\frac{1}{4} + 4) + 12(-\frac{1}{4} - 1) = 0 \Rightarrow \frac{15a^2}{4} = 12(\frac{5}{4}) \Rightarrow 15a^2 = 12(5)$$

$$3a^2 = 12 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$$

**مثال ۷:** تابع با ضابطه  $y = \frac{x+2m}{x^2 - mx - 2}$  مفروض است. m را چنان بیابید تا عرض مینیمم نسبی تابع (۹) برابر عرض ماکزیمم نسبی تابع باشد.

$$y = \frac{x+2m}{x^2 - mx - 2} \Rightarrow yx^2 - myx - 2y = x + 2m$$

**مثال ۲:** عرض‌های اکسترمم نسبی تابع با ضابطه  $y = \frac{x^2 + 5}{x}$  را بیابید.

حل. از روش دوم استفاده می‌کنیم

$$y = \frac{x^2 + 5}{x} \Rightarrow x^2 + 5 = yx \Rightarrow x^2 - yx + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = y^2 - 20 \Rightarrow y^2 = 20 \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{5}$$

چون نمودار این تابع مجانب قائم دارد، y بزرگ‌تر عرض مینیمم نسبی و y کوچک‌تر عرض ماکزیمم نسبی است، پس داریم:

$$y_{\text{Min}} = 2\sqrt{5} \text{ و } y_{\text{Max}} = -2\sqrt{5}$$

**مثال ۳:** عرض‌های اکسترمم نسبی تابع به معادله  $y = \frac{x^2}{x^2 - 5x + 4}$  را بدون استفاده از مشتق بیابید.

حل:

$$y = \frac{x}{x^2 - 5x + 4} \Rightarrow yx^2 - 5yx + 4y = x$$

$$\Rightarrow yx^2 - (5y+1)x + 4y = 0, \Delta = (5y+1)^2 - 16y^2 = 0$$

$$\Rightarrow (5y+1)^2 = 16y^2$$

$$5y+1 = \pm 4y \Rightarrow \begin{cases} 5y+1 = 4y \Rightarrow y = -1 \\ 5y+1 = -4y \Rightarrow y = -\frac{1}{9} \end{cases}$$

چون نمودار تابع مجانب قائم دارد، پس داریم:  $y_{\text{Min}} = -\frac{1}{9}$  و  $y_{\text{Max}} = -1$

توجه: تابع با ضابطه  $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$  (حداقل a یا a' مخالف صفر است) را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم عرض‌های اکسترمم تابع را بیابیم.

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} \Rightarrow ax^2 + bx + c = a'yx^2 + b'yx + c'y$$

$$(a - a'y)x^2 + (b - b'y)x + (c - c'y) = 0$$

$$\Delta = (b - b'y)^2 - 4(a - a'y)(c - c'y) = 0$$

$$\Rightarrow (b'^2 - 4a'c')y^2 + 2(2ac' + 2a'c - bb')y + (b^2 - 4ac) = 0$$

ریشه‌های این معادله، عرض‌های اکسترمم نسبی تابع فوق است.

$$y_1 \cdot y_2 = \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{b'^2 - 4a'c'}$$

$$y_1 + y_2 = -\frac{b}{a} = \frac{-2(2ac' + 2a'c - bb')}{b'^2 - 4a'c'}$$

## مقدمه

در ریاضیات، سری اغلب به عنوان مجموع یک دنباله از گزاره‌ها معرفی می‌شود. یک سری می‌تواند

متناهی یا نامتناهی باشد. سری‌های

متناهی را می‌توان با جبر مقدماتی بررسی کرد. اما سری‌های نامتناهی ممکن است نیازمند استفاده از آنالیز ریاضی باشند. سری‌ها به دلیل اهمیت در ریاضیات انواع مختلفی دارند که عبارت‌اند از: سری‌های حسابی، هندسی، توانی و غیره. سری‌ها در پیشرفت علوم دیگر به ویژه علوم مهندسی تأثیرات ویژه‌ای داشته‌اند. برای نمونه، سری فوریه که برگرفته از نظریه سری‌های مثلثاتی است و به نام فوریه نام‌گذاری شده، تأثیرات فراوانی در علوم دیگر داشته است. برای مثال، سری فوریه برای بررسی حرکات تناوبی در آکوستیک یا صوت‌شناسی، الکتروپنایمیک، اپتیک یا نورشناسی، ترمودینامیک و... به کار رفته است. در مهندسی برق و الکترونیک، مسائلی چون رفتار بسامدی و انتقال ضربه‌ها را می‌توان به کمک سری فوریه حل کرد. پس با توضیحات بالا در مورد سری‌ها ملاحظه می‌کنیم که سری‌ها کاربردهای فراوانی دارند. موضوع مقاله‌ای که در زیر به آن اشاره خواهیم کرد نیز درباره سری خواهد بود.

## سری ریاضی

$$\sum_{k=0}^n (a+k)^r = (a)^r + (a+1)^r + (a+2)^r + \dots + (a+n)^r$$

$$= ((a+n)(a+n+1))^{\frac{r-1}{2}} - \frac{(n+1)(2a+n)}{2} + \frac{(n+1)(2a+n)}{2}; (a \in \mathbb{N})$$

اثبات به روش استدلال استقرایی

**توضیح ۱:** ابتدا، برای جمله اول با  $n=0$  استقرا را به کار خواهیم برد، زیرا طبق رابطه زیر:

«جمله اول - جمله آخر»

(که در توضیح ۳ به شرح این رابطه خواهیم پرداخت) خواهیم

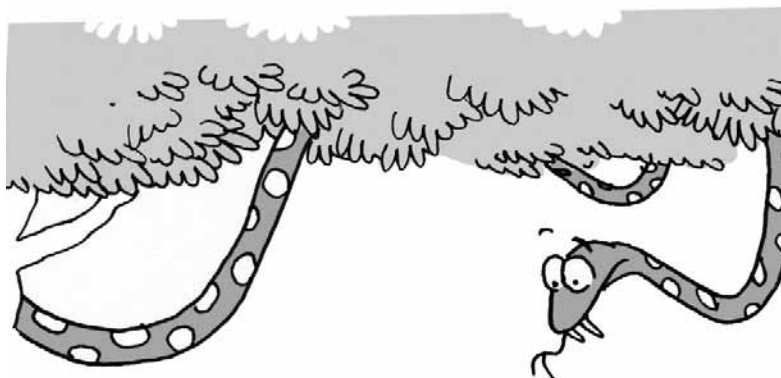
داشت:

$$n = a - a = 0 \rightarrow n = 0$$

$$n = 0 \rightarrow p(n) = p(0) = ((a)(a+1) - \frac{1}{2}(2a)) \frac{1}{2}(2a) = (a^2 + a - a)(a)$$

$$= a^2 = a^2$$

$$n = k \rightarrow p(n) = p(k) = (a)^r + (a+1)^r + (a+2)^r + \dots + (a+k)^r$$



$$yx^r - (my+1)x - (2y+2m) = 0$$

$$\Delta = (my+1)^2 + 4y(2y+2m) = 0$$

$$m^2 y^2 + 2my + 1 + 8y^2 + 8my = 0 \Rightarrow (m^2 + 8)y^2 + 10my + 1 = 0$$

تذکره: اگر در معادله درجه دوم  $ax^2+bx+c=0$  یک ریشه  $(k)$  برابر ریشه دیگر باشد، داریم:

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$$

پس خواهیم داشت:

$$(m^2 + 8)y^2 + 10my + 1 = 0$$

$$y_1 = 9y_2 \Rightarrow \frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k} \Rightarrow \frac{10 \cdot m^2}{m^2 + 8} = \frac{(9+1)^2}{9}$$

$$\frac{10 \cdot m^2}{m^2 + 8} = \frac{100}{9} \Rightarrow 9m^2 = m^2 + 8 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

**مثال ۸:** در تابع با ضابطه  $y = \frac{x-2a}{x^2-a}$  ( $a \neq 0$ )، نشان دهید که حاصل جمع اکستریم نسبی تابع برابر مقدار ثابت ۲ است.

حل:

$$y = \frac{x-2a}{x^2-a}$$

$$yx^r - ay = x - 2a \Rightarrow yx^r - x + a(2-y) = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4ay(2-y) = 0 \Rightarrow 1 - 8ay + 4ay^2 = 0$$

$$4ay^2 - 8ay + 1 = 0$$

$$y_1 + y_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-8a}{4a} = 2 \Rightarrow y_1 + y_2 = 2$$

**مثال ۹:** مقادیر  $m$  را چنان بیابید که نمودار تابع با ضابطه  $y = (x-1)(x^2 + 2x + m)$  بر محور  $x$  مماس باشد.

حل: باید معادله  $(x-1)(x^2 + 2x + m) = 0$ ، دو ریشه مساوی داشته باشد.

الف)  $x^2 + 2x + m = 0 \Rightarrow \Delta' = b'^2 - ac = 0 \Rightarrow 1 - m = 0 \Rightarrow m = 1$

ب)  $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ ,

در پرانتز دوم  $x = 1 \rightarrow 1 + 2 + m = 0 \Rightarrow m = -3$

# اثبات یک سری ریاضی

فرهاد جعفری یقین

دانش آموز دوره پیش دانشگاهی شهرستان مهاباد

$((a+n)(a+n+1))$  جمله  $n$ ام سری را بدون در نظر گرفتن توان

۳ (که در سری به صورت  $(a+n)$  مشخص شده است) در جمله

$(n+1)$ ام سری بدون در نظر گرفتن توان ۳ ضرب کنیم، یعنی:

جمله  $n$ ام سری بدون در نظر گرفتن توان  $A = 3$

جمله  $(n+1)$ ام سری بدون در نظر گرفتن توان  $B = 3$

$$(A)(B) - \frac{(n+1)}{2}(2a+n) \times \frac{(n+1)}{2}(2a+n)$$

**توضیح ۳:** با توجه به توضیح ۲، مشخص کردن  $n$  برای

عبارت‌های  $(a+n)$  و  $(a+n+1)$  ضرورتی ندارد، ولی در عبارت

$\frac{(n+1)}{2}(2a+n)$  برای تعیین  $n$  از رابطه زیر استفاده خواهیم کرد:

جمله اول بدون در نظر گرفتن توان ۳ - جمله آخر بدون در نظر گرفتن توان  $n=3$

**اثبات:** خواهیم داشت (جمله آخر  $a+n$ ) و (جمله اول  $a$ ) پس

طبق رابطه بالا داریم:

$$a + n - a = n \rightarrow n = n$$

## مثال‌ها

جمله اول - جمله آخر  $n = 6^3 + 5^3 + 4^3 + 3^3$  ۱)

$$= 6 - 3 = 3 \rightarrow n = 3$$

$$((6)(7) - \frac{4}{2}(9)) - \frac{4}{2}(9) = 432$$

$$2) 17^3 + 18^3 + 19^3 + 20^3 + 21^3;$$

$$n = 21 - 17 = 4 \rightarrow n = 4$$

$$((21)(22) - \frac{5}{2}(34+4)) - \frac{5}{2}(34+4) = 34865$$

$$3) (44)^3 + (45)^3 + (46)^3 + (47)^3 + (48)^3 + (49)^3;$$

$$n = 49 - 44 = 5 \rightarrow n = 5$$

$$((49)(50) - \frac{6}{2}(88+5)) - \frac{6}{2}(88+5) = 605709$$

$$4) (60)^3 + (61)^3; n = \text{جمله آخر} - \text{جمله اول}$$

$$= 61 - 60 = 1 \rightarrow n = 1$$

$$((61)(62) - \frac{1}{2}(120+1)) - \frac{1}{2}(120+1) = 442981$$

$$5) (100)^3; n = \text{جمله اول} - \text{جمله آخر}$$

$$= 100 - 100 = 0 \rightarrow n = 0$$

$$((100)(101) - \frac{1}{2}(200)) - \frac{1}{2}(200) = 1000000$$

$$= ((a+k)(a+k+1) - \frac{(k+1)}{2}(2a+k)) - \frac{(k+1)}{2}(2a+k)$$

$$= (a^2 + ak + \frac{k}{2} + \frac{k^2}{2}) - (a^2 + ak + \frac{k}{2} + \frac{k^2}{2}) = a^2 + a^2k + \frac{ak}{2} + \frac{ak^2}{2}$$

$$+ a^2k + a^2k^2 + \frac{ak^2}{2} + \frac{ak^2}{2} + \frac{a^2k}{2} + \frac{ak^2}{2} + \frac{k^2}{4} + \frac{k^2}{4} + \frac{a^2k^2}{2}$$

$$+ \frac{ak^2}{2} + \frac{k^2}{4} + \frac{k^2}{4} = a^2 + a^2k + \frac{3}{2}a^2k + \frac{3}{2}a^2k^2 + \frac{ak}{2} + \frac{3}{2}ak^2 + ak^2$$

$$+ \frac{k^2}{4} + \frac{k^2}{2} + \frac{k^2}{4}$$

$$n = k + 1 \rightarrow p(n) = p(k+1) = (a)^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + \dots$$

$$+ (a+k)^2 + (a+k+1)^2$$

$$= ((a+k+1)(a+k+2) - \frac{(k+2)}{2}(2a+k+1)) - \frac{(k+2)}{2}(2a+k+1)$$

۱. طرف چپ سری:

$$a^2 + a^2k + \frac{3}{2}a^2k + \frac{3}{2}a^2k^2 + \frac{ak}{2} + \frac{3}{2}ak^2 + ak^2 + \frac{k^2}{4} + \frac{k^2}{2} + \frac{k^2}{4}$$

$$+ (a+k+1)^2 = a^2 + a^2k + \frac{3}{2}a^2k + \frac{3}{2}a^2k^2 + \frac{ak}{2} + \frac{3}{2}ak^2 + ak^2$$

$$+ \frac{k^2}{4} + \frac{k^2}{2} + \frac{k^2}{4} + a^2 + 2a^2k + 2a^2 + 2ak^2 + 6ak + 2a + k^2$$

$$+ 2k^2 + 2k + 1 = 2a^2 + a^2k + 2a^2 + \frac{9}{2}a^2k + \frac{3}{2}a^2k^2 + 2a + \frac{13}{2}ak$$

$$+ \frac{9}{2}ak^2 + ak^2 + 2k + \frac{13}{4}k^2 + \frac{3}{2}k^2 + \frac{k^2}{4} + 1$$

۲. طرف راست سری:

$$(a^2 + ak + 2a + ak + k^2 + 2k + a + k + 2 - ak - \frac{k^2}{2} - \frac{k}{2} - 2a - k - 1)$$

$$\times (ak + \frac{k^2}{2} + \frac{k}{2} + 2a + k + 1)$$

$$= (a^2 + a + ak + \frac{3}{2}k + \frac{k^2}{2} + 1)(2a + ak + k + \frac{k}{2} + \frac{k^2}{2} + 1)$$

$$= 2a^2 + a^2k + 2a^2 + \frac{9}{2}a^2k + \frac{3}{2}a^2k^2 + 2a + \frac{13}{2}ak + \frac{9}{2}ak^2$$

$$+ ak^2 + 2k + \frac{13}{4}k^2 + \frac{3}{2}k^2 + \frac{k^2}{4} + 1$$

**توضیح ۲:** برای سهولت و تسریع در به دست آوردن جواب

سری می‌توانیم به جای قرار دادن مقدار  $a$  و  $n$  در عبارت‌های



# حلّ تشریحی مسائل شماره قبل

بنابراین، درجه عبارت برابر با ۵۱۵۱ است.  
۴.

الف)

$$(\sqrt{v} + \sqrt{2})(v + 2 - \sqrt{14})(v\sqrt{v} - 2\sqrt{2})$$

دو پرانتز اول را با استفاده از اتحاد

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

به صورت

$$(\sqrt{v} + \sqrt{2})(v + 2 - \sqrt{14}) = (\sqrt{v})^3 + (\sqrt{2})^3$$

می‌نویسیم. بنابراین داریم:

$$[(\sqrt{v}^3) + (\sqrt{2}^3)](v\sqrt{v} - 2\sqrt{2})$$

$$= (\sqrt{v^2 \times v} + \sqrt{2^2 \times 2})(v\sqrt{v} - 2\sqrt{2})$$

به کمک اتحاد مزدوج  $\Rightarrow$

$$= (v\sqrt{v} + 2\sqrt{2})(v\sqrt{v} - 2\sqrt{2})$$

$$(v\sqrt{v})^2 - (2\sqrt{2})^2 = 343 - 8 = 335$$

ب)

$$x^n (x^{\frac{5n}{2}} - x^{\frac{n}{2}})(x^{2n} + x^{2n} + 1)$$

$$\frac{15n}{2} \quad \frac{3n}{2}$$

$$(x^{\frac{5n}{2}} + x^{\frac{3n}{2}})$$

ابتدا  $x^n$  را در  $x^{2n} + x^{2n} + 1$  ضرب می‌کنیم:

$$(x^{\frac{5n}{2}} - x^{\frac{n}{2}})(x^{2n} + x^{2n} + x^n)$$

$$\frac{15n}{2} \quad \frac{3n}{2}$$

$$(x^{\frac{5n}{2}} + x^{\frac{3n}{2}})$$

دو پرانتز اول را به کمک اتحاد

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

به صورت

۲. از سمت چپ شروع می‌کنیم تا به سمت راست برسیم. در جمله اول  $c$  و در جمله دوم  $b$  و در جمله سوم  $a$  را ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\sqrt{\frac{ab}{c^3}} + \sqrt{\frac{ac}{b^3}} + \sqrt{\frac{bc}{a^3}} = \sqrt{\frac{abc}{c^3}} + \sqrt{\frac{abc}{b^3}} + \sqrt{\frac{abc}{a^3}}$$

$$= \frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{c^3}} + \frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{b^3}} + \frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{a^3}}$$

$$= \frac{\sqrt{abc}}{c} + \frac{\sqrt{abc}}{b} + \frac{\sqrt{abc}}{a}$$

طبق فرض  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$

$$= \sqrt{abc} \left( \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) \Rightarrow \sqrt{abc}(1) = \sqrt{abc}$$

۳. ابتدا در هر پرانتز بزرگ‌ترین درجه را به همراه جمله‌اش می‌نویسیم و سپس یکدیگر ضرب می‌کنیم:

$$(x)(x+x^2)(2x^2+2x^3)\dots(10x^{100}+10x^{101})$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$x \times x^2 \times x^2 \times \dots \times x^{101}$$

$$= x^{1+2+2+\dots+101}$$

می‌دانیم:  $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$  است، بنابراین

$$1+2+\dots+101 = \frac{101 \times 102}{2} = 5151$$

$$x^{1+2+\dots+101} = x^{5151}$$

پس:

## پاسخ سوالات ریاضی

### سال اول

فرخ فرشیان

۱. صورت کسر را مساوی  $A$  قرار می‌دهیم و دو طرف تساوی را در  $3^2$  ضرب می‌کنیم.

$$A = 3^0 + 3^7 + \dots + 3^{17} + 3^{19}$$

$$3^2 A = 3^2(3^0 + 3^7 + \dots + 3^{17} + 3^{19})$$

$$9A = 3^7 + 3^9 + \dots + 3^{19} + 3^{21}$$

باید کاری کنیم که در طرف راست تساوی مقدار  $A$  به وجود آید. پس  $3^5$  را در طرف راست تساوی اضافه و کم می‌کنیم.

$$9A = \underbrace{3^0 + 3^7 + 3^9 + \dots + 3^{19}}_A + 3^{21} - 3^5$$

بنابراین  $9A = A + 3^{21} - 3^5$  و از آنجا  $9A - A = 3^{21} - 3^5$  و در نتیجه داریم:

$$8A = 3^{21} - 3^5 \Rightarrow A = \frac{3^{21} - 3^5}{8}$$

و سرانجام خواهیم داشت:

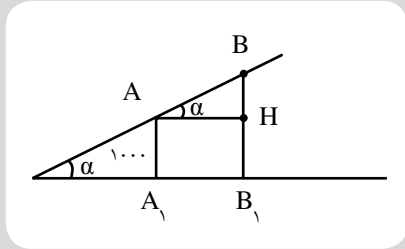
$$\frac{3^0 + 3^7 + \dots + 3^{17} + 3^{19}}{3^{21} - 3^5} = \frac{3^{21} - 3^5}{8}$$

$$\frac{3^{21} - 3^5}{8} = \frac{3^{21} - 3^5}{8} \div \frac{3^{21} - 3^5}{8}$$

$$= \frac{3^{21} - 3^5}{8} \times \frac{1}{3^{21} - 3^5} = \frac{1}{8}$$



می دانیم شیب خط برابر  $\tan \alpha$  در جهت مثبت محور طول هاست. پس در مثلث قائم الزاویه ABH داریم:



$$m = \tan \alpha = \frac{BH}{AH}$$

که اندازه AH را از رابطه فیثاغورث به دست می آوریم:

$$AH^2 = AB^2 - BH^2$$

$$AH^2 = (500)^2 - (300)^2$$

پس:

$$AH^2 = 250000 - 90000 = 160000$$

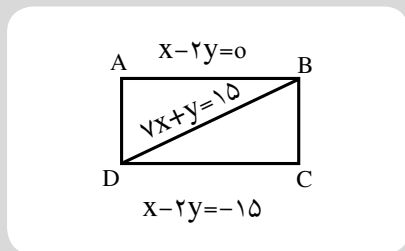
و  $AH = 400$  خواهد شد. بنابراین شیب

خط به صورت زیر به دست می آید:

$$m = \tan \alpha = \frac{BH}{AH} = \frac{300}{400} = \frac{3}{4}$$

۹. از آن جا که شیب دو خط  $x - 2y = 0$

و  $x - 2y = -15$  با یکدیگر برابر است  $(m = \frac{1}{2})$  پس این دو خط با یکدیگر موازی هستند و مطابق شکل با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول AB و DB مختصات نقطه B به دست می آید.



$$AB: \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - 2y = -15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 14x + 2y = 30 \end{cases}$$

$$15x = 30$$

$$\Rightarrow x = 2$$

$$x - 2y = 0, x = 2 \Rightarrow 2 - 2y = 0$$

$$\Rightarrow -2y = -2 \Rightarrow y = 1$$

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\beta + 1} = \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha + 1 + \beta^2}$$

دو طرف را به توان ۲ می رسانیم:

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\beta + 1 = \alpha^2 + 2\alpha + 1 + \beta^2$$

بنابراین  $-2\beta = 2\alpha$  پس  $\beta = -\alpha$

است. بنابراین مختصات نقطه A به صورت

$A = (\alpha, -\alpha)$  به دست می آید که قرار

$$AB = \sqrt{5} \text{ می دهیم}$$

$$AB = \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (-\alpha - 1)^2} = \sqrt{5}$$

دو طرف را به توان ۲ می رسانیم.

$$\alpha^2 + \alpha^2 + 2\alpha + 1 = 5$$

$$2\alpha^2 + 2\alpha - 4 = 0$$

تقسیم می کنیم پس

$$\alpha^2 + \alpha - 2 = 0 \Rightarrow (\alpha - 1)(\alpha + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - 1 = 0 \\ \alpha + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = -2 \end{cases}$$

در نتیجه  $A(1, -1)$  و  $A'(-2, 2)$  به دست

می آید و مسئله دو جواب دارد.

۷. الف) اگر x تعداد روزهای گذشته و

y پس انداز علی باشد، جدول زیر را تشکیل

می دهیم.

x	۰	۱	۲	x
y	۵۰۰	۵۰۰+۲۰۰	۵۰۰+۲×۲۰۰	۵۰۰+۲۰۰x

$$y = 200x + 500 \text{ پس}$$

ب) اگر x تعداد روزهای گذشته و z

پولی باشد که حسن خرج می کند، جدول

زیر را تشکیل می دهیم:

x	۰	۱	۲	x
z	۲۰۰۰	۲۰۰۰-۲۰۰	۲۰۰۰-۲×۲۰۰	۲۰۰۰-۲۰۰x

پس خواهیم داشت:

$$z = -200x + 2000$$

۸. طبق فرض مسئله  $AA_1 = 1000$  و

$BB_1 = 1300$  است.

از A به  $BB_1$  عمود می کنیم تا H

به دست آید.

اندازه BH برابر است با:

$$BH = BB_1 - HB_1$$

$$\text{پس } BH = 1300 - 1000 = 300$$

$$\frac{\frac{5n}{x^2} - \frac{n}{x^2}}{(x^2 - x^2)}(x^{5n} + x^{2n} + x^n)$$

$$= (x^{\frac{5n}{2}} - x^{\frac{n}{2}})^2$$

می نویسیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$[(x^{\frac{5n}{2}})^2 - (x^{\frac{n}{2}})^2](x^{\frac{15n}{2}} + x^{\frac{7n}{2}}) =$$

$$(x^{\frac{15n}{2}} - x^{\frac{7n}{2}})(x^{\frac{15n}{2}} + x^{\frac{7n}{2}})$$

به کمک اتحاد

$\Rightarrow$

مزدوج

$$(x^{\frac{15n}{2}})^2 - (x^{\frac{7n}{2}})^2 = x^{15n} - x^{7n}$$

۵

$$\text{الف) } x^3 - 14x^2 + 49x - 36$$

$$= (x^2 - 7x)^2 - 36 = (x^2 - 7x - 6)(x^2 - 7x + 6)$$

$$(x^2 - 7x + 6)$$

$$= (x^2 - x - 6)(x^2 - x - 6)$$

$$= [x(x-1) - 6(x+1)][x(x-1) - 6(x-1)]$$

$$= [x(x-1)(x+1) - 6(x+1)]$$

$$[x(x-1)(x+1) - 6(x-1)]$$

$$= (x+1)(x^2 - x - 6)(x-1)(x^2 + x - 6)$$

$$= (x+1)(x-3)(x+2)(x-1)(x+2)(x-2)$$

ب)

$$(x+a)(x+b) - (y+a)(y+b)$$

به کمک اتحاد

$$\Rightarrow x^2 + (a+b)x + ab$$

یک جمله مشترک

$$-[y^2 + (a+b)y + ab]$$

$$= x^2 + (a+b)x + ab - y^2 - (a+b)y - ab$$

$$= x^2 - y^2 + (a+b)x - (a+b)y$$

$$= (x-y)(x+y) + (a+b)(x-y)$$

$$= (x-y)(x+y+a+b)$$

۶. اگر مختصات A را  $(\alpha, \beta)$  در نظر

بگیریم، چون مثلث متساوی الساقین است،

داریم:

$$AB = AC = \sqrt{5}$$

بنابراین طول AB و AC را به دست

می آوریم و مساوی هم قرار می دهیم.

$$B = (1, 1) \quad C = (-1, 0)$$

$$AB = \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (\beta - 1)^2}$$

$$AC = \sqrt{(\alpha + 1)^2 + (\beta - 0)^2}$$



$$b^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow 4^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$\Rightarrow 16 = a^2 + \frac{9a^2}{3} \Rightarrow 16 = a^2 + 3a^2$$

$$\Rightarrow 16 = 4a^2 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$$

پس:

$$c = \frac{3a^{a=2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow c = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

۱۲

الف)  $\left[ \frac{x+3}{2(x-2)} - \frac{x-3}{2(x+2)} - \frac{12}{(x-2)(x+2)} \right]$

$$\div \left( \frac{2x+3-x-3}{x+3} \right)$$

$$= \left[ \frac{(x+3)^2 - (x-3)^2 - 36}{2(x-2)(x+2)} \right] \div \left( \frac{x}{x+3} \right)$$

$$= \frac{x^2 + 6x + 9 - (x^2 - 6x + 9) - 36}{2(x-2)(x+2)} \times \frac{x+3}{x}$$

$$= \frac{x^2 + 6x + 9 - x^2 + 6x - 9 - 36}{2(x-2)(x+2)} \times \frac{x+3}{x}$$

$$= \frac{12x - 36}{2(x-2)(x+2)} \times \frac{x+3}{x}$$

$$= \frac{12(x-3)}{2(x-2)(x+2)} \times \frac{x+3}{x} = \frac{4}{x}$$

ب)

$$\frac{1}{1 + \frac{x^a}{x^b} + \frac{x^a}{x^c}} + \frac{1}{1 + \frac{x^b}{x^c} + \frac{x^b}{x^a}} + \frac{1}{1 + \frac{x^c}{x^a} + \frac{x^c}{x^b}}$$

$$= \frac{1}{\frac{x^b x^c + x^a x^c + x^a x^b}{x^b x^c}} + \frac{1}{\frac{x^c x^a + x^b x^a + x^b x^c}{x^c x^a}}$$

$$+ \frac{1}{\frac{x^a x^b + x^c x^b + x^a x^c}{x^a x^b}} = \frac{x^{b+c}}{x^{b+c} + x^{a+c} + x^{a+b}}$$

$$+ \frac{x^{a+c}}{x^{a+c} + x^{a+b} + x^{b+c}} + \frac{x^{a+b}}{x^{a+b} + x^{b+c} + x^{a+c}}$$

$$= \frac{x^{b+c} + x^{a+c} + x^{a+b}}{x^{b+c} + x^{a+c} + x^{a+b}} = 1$$

۱۳

$$x^f + ax^f + bx + c \mid \frac{x^f + 3x^f - 4x + 1}{x^2}$$

$$\frac{\pm x^f \pm 3x^f \mp 4x^f \pm x}{-2x^f + (a+4)x^f + (b-1)x + c}$$

$\Rightarrow y - 8 = -2x + 2$   
 معادله ضلع AD:  $\Rightarrow y = -2x + 10$   
 از حل دستگاه دو معادله و دو مجهول AB و AD داریم:

$$AD: \begin{cases} -2x - y = -10 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y = -10 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$-5y = -10$$

$\Rightarrow y = 2$   
 از  $x - 2y = 0$  و با جای گذاری  $y = 2$  داریم:

$x - 2(2) = 0 \Rightarrow x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$   
 مختصات رأس A، (۴ و ۲) خواهد بود.

۱۰. اگر دو زاویه متمم باشند، سینوس یک زاویه با کسینوس متمم آن زاویه مساوی است. هم‌چنین کسینوس یک زاویه با سینوس متمم آن زاویه مساوی است، بنابراین:  $\sin 70^\circ = \cos 20^\circ$  و  $\cos 64^\circ = \sin 26^\circ$  و  $\cos 62^\circ = \sin 28^\circ$  از آن جا نتیجه می‌شود:

$$\frac{\sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ}{\frac{\sin 26^\circ}{\sin 26^\circ} + \frac{\sin 28^\circ}{\sin 28^\circ}} + \frac{\frac{1}{2} - 1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1}$$

می‌دانیم که:  $\sin^2 O + \cos^2 O = 1$

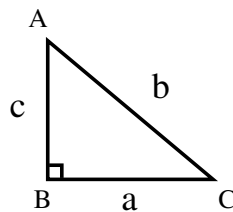
$$\sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ = 1$$

$$\frac{1}{1+1} + \frac{-1}{\frac{3}{4}-1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{-1} = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

۱۱

$$\tan C = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{c}{a} \Rightarrow c = \frac{3a}{\sqrt{3}}$$

در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:



پس مختصات نقطه B (۲، ۱) خواهد بود و با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول DC و DB مختصات رأس D به دست می‌آید.

$$DC: \begin{cases} x - 2y = -15 \\ 7x + y = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = -15 \\ 14x + 2y = 30 \end{cases}$$

$$15x = 15$$

$$\Rightarrow x = 1$$

از طرفی  $x - 2y = -15$  است که با جای گذاری  $x = 1$  نتیجه می‌شود:

$$1 - 2y = -15 \Rightarrow -2y = -16 \Rightarrow y = 8$$

پس مختصات رأس D، (۱ و ۸) خواهد بود. برای به دست آوردن مختصات رأس C باید معادله ضلع BC را به دست آوریم. چون ضلع AB عمود بر BC است، پس شیب خط BC به دست می‌آید.

$$m_{AB} \times m_{BC} = -1 \Rightarrow \frac{1}{2} \times m_{BC} = -1$$

$$\Rightarrow m_{BC} = -2$$

و با داشتن مختصات نقطه B (۲، ۱) معادله ضلع BC به دست می‌آید.

$$y - 1 = -2(x - 2) \Rightarrow y - 1 = -2x + 4$$

$$\Rightarrow y = -2x + 5$$

از حل دستگاه دو معادله و دو مجهول BC و DC مختصات رأس C نیز به دست می‌آید.

$$BC: \begin{cases} -2x - y = -5 \\ x - 2y = -15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y = -5 \\ 2x - 4y = -30 \end{cases}$$

$$-5y = -35$$

$$\Rightarrow y = 7$$

از  $x - 2y = -15$  و با جای گذاری  $y = 7$  مقدار x به دست می‌آید.

$$x - 2(7) = -15 \Rightarrow x = -15 + 14 \Rightarrow x = -1$$

مختصات رأس C = (-۱، ۷).

مانند کاری که برای پیدا کردن مختصات رأس C کردیم برای A نیز به همین ترتیب عمل می‌کنیم و معادله خط AD را به دست می‌آوریم.

$$m_{AD} = -2, D(1, 8) \Rightarrow y - 8 = -2(x - 1)$$

$$\Rightarrow y^2 + y - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (y-3)(y+4) = 0$$

$$\Rightarrow y-3=0$$

$$\Rightarrow y+4=0$$

$$\Rightarrow y=3 \quad x=y^2-2 \quad x=9-2=7$$

$$\Rightarrow y=-4 < 0 \quad x=y^2-2 \quad x=16-2=14$$

۱۸

$$\frac{x+8}{16} + a > \frac{4-x}{8} \quad \begin{array}{l} \text{در ۱۶ ضرب} \\ \Rightarrow \\ \text{می‌کنیم} \end{array}$$

$$x+8+16a > 2(4-x)$$

$$\Rightarrow x+8+16a > 8-2x$$

$$\Rightarrow 3x > -16a \Rightarrow x > \frac{-16}{3}$$

که اگر با مجموعه جواب داده شده مسئله  $x > \frac{-16}{3}$  مقایسه کنیم، خواهیم داشت:

$$x > \frac{-16a}{3} \Rightarrow \frac{-16a}{3} = \frac{-16}{3} \Rightarrow a=1$$

$$x > \frac{-16}{3}$$

## حل مسائل ریاضی سال دوم

میرشهرام صدر

۱. فرض کنیم  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  زوایای یک

مثلث باشند، با این شرط که:

$$\alpha < \beta < \gamma$$

چنان این سه عدد تشکیل یک دنباله

حسابی دهند، طبق تعریف قدرنسبت

$$\beta - \alpha = \gamma - \beta \quad \text{داریم:}$$

$$\Rightarrow 2\beta = \alpha + \gamma$$

از طرفی داریم  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ ؛

بنابراین:

$$\begin{cases} 2\beta = \alpha + \gamma \\ \alpha + \beta + \gamma = 180 \end{cases} \Rightarrow 2\beta + \beta = 180$$

$$\Rightarrow \beta = 60^\circ$$

۲. فرض کنیم  $a, aq, aq^2$  ( $a > 0$ ) و

$q > 1$ ) سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه باشند،

$$+1^2 - 16 - 4\sqrt{2}$$

$$\Delta = 18 + 6\sqrt{2} + 1 - 16 - 4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \Delta = 2 + 2\sqrt{2} = 2 + 1 + 2(1)(\sqrt{2})$$

$$= (\sqrt{2} + 1)^2$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3\sqrt{2} + 1 + \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2}}{2(1)}$$

$$= \frac{3\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} + 1}{2} = \frac{4\sqrt{2} + 2}{2} = \frac{2(2\sqrt{2} + 1)}{2}$$

$$= 2\sqrt{2} + 1$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3\sqrt{2} + 1 - \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2}}{2(1)}$$

$$= \frac{3\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} - 1}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

پس ریشه‌های معادله  $\sqrt{2}$  و  $2\sqrt{2} + 1$

است.

$$\text{ب) } x^2 + \frac{1}{x^2} - 4x - \frac{4}{x} = -6$$

به کمک اتحاد فرعی

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

عبارة  $x^2 + \frac{1}{x^2}$  را به صورت

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x\right)\left(\frac{1}{x}\right)$$

یا

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

می‌نویسیم. بنابراین:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) = -6$$

$$x + \frac{1}{x} = A \Rightarrow A^2 - 4A + 4 =$$

$$\Rightarrow (A-2)^2 = 0 \Rightarrow A-2=0$$

$$\Rightarrow A=2$$

اگر  $x + \frac{1}{x} = 2$  قرار دهیم، داریم:

$$x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = 2 \Rightarrow x^2 + 1 = 2x$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x=1$$

۱۷. اگر  $\overline{xy}$  را آن عدد در نظر بگیریم

خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x+y=10 \\ x=y^2-2 \end{cases} \Rightarrow y^2-2+y=10$$

$$\pm 3x^2 \mp 9x^2 \pm 12x \mp 3$$

$$\text{باقی مانده } (a+13)x^2 + (b-13)x + c + 3 = 3x^2 - 4x - 1$$

$$\begin{cases} a+13=3 \\ b-13=-4 \\ c+3=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-10 \\ b=9 \\ c=-4 \end{cases}$$

۱۴

$$\frac{8\sqrt{21}}{(2\sqrt{3} + \sqrt{7}) + \sqrt{19}} \times \frac{(2\sqrt{3} + \sqrt{7}) - \sqrt{19}}{(2\sqrt{3} + \sqrt{7}) - \sqrt{19}}$$

$$= \frac{8\sqrt{21}(2\sqrt{3} + \sqrt{7} - \sqrt{19})}{(2\sqrt{3} + \sqrt{7})^2 - (\sqrt{19})^2}$$

$$= \frac{8\sqrt{21}(2\sqrt{3} + \sqrt{7} - \sqrt{19})}{(2\sqrt{3})^2 + 2(2\sqrt{3})(\sqrt{7}) + (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{19})^2}$$

$$= \frac{8\sqrt{21}(2\sqrt{3} + \sqrt{7} - \sqrt{19})}{12 + 4\sqrt{42} + 7 - 19}$$

$$= \frac{8\sqrt{21}(2\sqrt{3} + \sqrt{7} - \sqrt{19})}{4\sqrt{21}}$$

$$= 2(2\sqrt{3} + \sqrt{7} - \sqrt{19})$$

۱۵. از آن جا که خط  $y=ax+b$  و سهمی

$y=x^2$  همدیگر را در نقاطی به طول‌های ۱

و ۲- قطع کردند، پس طول‌های آن در

معادله  $x^2=ax+b$  صدق می‌کنند و داریم:

$$x=1 \Rightarrow 1^2 = a(1) + b$$

$$x=-2 \Rightarrow (-2)^2 = a(-2) + b$$

$$\Rightarrow 2 \times \begin{cases} a+b=1 \\ -2a+b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+2b=2 \\ -2a+b=4 \end{cases}$$

$$\overline{3b=6} \Rightarrow b=2$$

اگر  $b=2$  را در  $a+b=1$  قرار دهیم،

مقدار  $a$  به دست می‌آید:

$$a+2=1 \Rightarrow a=-1$$

۱۶

(الف)

$$x^2 - (3\sqrt{2}+1)x + 4 + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-(3\sqrt{2}+1) \\ c=4+\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = [-(3\sqrt{2}+1)]^2 - 4(1)$$

$$\times (4+\sqrt{2}) = (3\sqrt{2})^2 + 2(3\sqrt{2})(1)$$



$$A = \frac{\frac{x}{x}}{\frac{1+x^2}{x}} = \frac{1}{\frac{1+x^2}{x}} = \frac{1}{x + \frac{1}{x}}$$

چون طبق قسمت الف مسأله برای  $x > 0$  داریم:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{1}{x + \frac{1}{x}} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow A \leq \frac{1}{2}$$

چون  $A \leq \frac{1}{2}$ ، پس بیشترین مقدار  $A$  برابر با  $\frac{1}{2}$  است.

۸. برای این که عبارت درجه دوم  $ax^2 + bx + cx$  همواره منفی باشد، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} \text{I) } \Delta < 0 \\ \text{II) } a < 0 \end{cases}$$

با اعمال دو شرط بالا، حدود  $m$  را می‌یابیم:

$$\begin{aligned} \text{I) } \Delta < 0 &\Rightarrow (2(m-1))^2 - 4(m^2 + m - 2)(-2) < 0 \\ &\Rightarrow 4m^2 - 8m + 4 + 8m^2 + 8m - 16 < 0 \\ &\Rightarrow 12m^2 - 12 < 0 \Rightarrow m^2 < 1 \\ &\Rightarrow m < -1 \text{ یا } m > 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II) } a < 0 &\Rightarrow m^2 + m - 2 < 0 \\ &\Rightarrow (m+2)(m-1) < 0 \\ &\Rightarrow -2 < m < 1 \end{aligned}$$

با اشتراک جواب‌های نامعادله‌های I و II داریم:

$$m \in (-2, -1)$$

$$2^{3x-y} = 32 \Rightarrow 3x - y = \log_2 32 \quad 9.$$

$$\Rightarrow 3x - y = \log_2 32 = 5 \log_2 2$$

$$\Rightarrow \boxed{3x - y = 5}$$

$$3^{x+2y} = 3 \Rightarrow x + 2y = \log_3 3 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{x + 2y = 1}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = 5 \\ -3x - 6y = -3 \end{cases}$$

$$-7y = 2 \Rightarrow y = -\frac{2}{7}$$

۶. دامنه تابع با ضابطه  $y = \sqrt{f(x)}$  از حل نامعادله  $f(x) \geq 0$  به دست می‌آید، بنابراین داریم:

$$\frac{x+2}{x+1} - \frac{2-x}{1-x} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x+2)(1-x) - (x+1)(2-x)}{(x+1)(1-x)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2x}{(x+1)(1-x)} \geq 0$$

برای حل نامعادله اخیر عبارت  $P = \frac{-2x}{(x+1)(1-x)}$  را تعیین علامت می‌کنیم.

$$-2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$(x+1)(1-x) = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ یا } x = 1$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$-2x$		+	+	-	-
$(x+1)(1-x)$		-	+	+	-
$P$		-	+	-	+

تعریف نشده

$$D_f = (-1, 0] \cup (1, +\infty)$$

۷. الف) برای اثبات این حکم، سعی می‌کنیم با عملیات جبری و خواص نابرابری‌ها حکم را ساده کنیم تا به یک نابرابری همیشه درست برسیم:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Rightarrow \frac{a^2 + 1}{a} \geq 2$$

$$\stackrel{a > 0}{\Rightarrow} a \times \left(\frac{a^2 + 1}{a}\right) \geq a \times 2 \Rightarrow a^2 + 1 \geq 2a$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Rightarrow (a-1)^2 \geq 0$$

چون نابرابری اخیر همواره درست است، پس با برگشت عملیات انجام شده، درستی حکم ثابت می‌شود.

ب) با تقسیم صورت و مخرج کسر  $A$  بر  $x > 0$  داریم:

از آنجا که وتر از دو ضلع دیگر بزرگ‌تر است، بنابراین  $aq^2$  اندازه وتر و  $a$  و  $aq$  اندازه ضلع‌های قائمه هستند. با توجه به رابطه فیثاغورس داریم:

$$(aq^2)^2 = a^2 + (aq)^2 \Rightarrow a^2 q^4 = a^2 + a^2 q^2$$

با تقسیم رابطه اخیر بر  $a^2 \neq 0$  داریم:

$$q^4 - q^2 - 1 = 0 \Rightarrow q^2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

چون  $q^2 > 0$  بنابراین:

$$q^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow q = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$

۳. تابع در صورتی بر محور  $x$  مماس است که در نقطه  $A(x, 0)$  بر محور  $x$  مماس باشد و این در شرایطی است که معادله  $x^2 - 3x + k = 0$  دارای ریشه مضاعف باشد، بنابراین داریم:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (-3)^2 - 4(1)(k) = 0 \Rightarrow k = \frac{9}{4}$$

$$1 > 0 \Rightarrow f(1) = -(1)^2 = -1 \quad 4.$$

$$f(f(1)) = f(-1)$$

$$-1 < 0 \Rightarrow f(-1) = -2(-1)^2 = 2$$

$$\Rightarrow f(f(1)) = 2$$

$$f(f(f(1))) = f(2)$$

$$2 > 0 \Rightarrow f(2) = -(2)^2 = -4$$

$$\Rightarrow f(f(f(1))) = -4$$

۵. چون برای هر  $x \in \mathbb{R}$  داریم:  $x^2 \geq 0$ :

$$S(x^2) = \begin{cases} 1 & x^2 > 0 \\ 0 & x^2 = 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

$$S(x^2) - S(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases} - \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1-1 & x > 0 \\ 0-1 & x = 0 \\ 1-(-1) & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ -1 & x = 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S(x^2) - S(x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ -1 & x = 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$$

$$A - 2A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -14 & 6 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ 21 & -1 \end{bmatrix}$$

۱۶. برای آن که عدد چهاررقمی حاصل از ۴۰۰۰ بزرگتر باشد، باید رقم اول آن ۴ یا ۵ باشند، بنابراین داریم:

④ یا ⑤

② ⑤ ④ ③ ;  $2 \times 5 \times 4 \times 3 = 120$

۱۷.

$$\binom{3}{1} \times \binom{9}{2} = 3 \times \frac{9!}{2! \times 7!} = 108 \quad \text{(الف)}$$

$$\binom{3}{1} \times \binom{7}{2} = 3 \times \frac{7!}{2! \times 5!} = 63 \quad \text{(ب)}$$

## حل مسئله‌های هندسه ۱

محمد هاشم رستمی

۱. با توجه به شکل داریم:

$$\begin{aligned} 3x - 25^\circ = 2x &\Rightarrow 3x - 2x = 25^\circ \\ \Rightarrow x = 25^\circ, 2x - 25^\circ + x + y = 180^\circ \\ \Rightarrow 4x + y = 205^\circ, x = 25^\circ \Rightarrow 100^\circ + y = 205^\circ \\ \Rightarrow y = 205^\circ - 100^\circ = 105^\circ, z = x + y \\ \Rightarrow z = 25^\circ + 105^\circ = 130^\circ \end{aligned}$$

۲. الف) از  $\hat{A} = \hat{C}$  نتیجه می‌شود که

$D\hat{F}E = D\hat{B}C$ ، زیرا وقتی دو زاویه مساوی باشند مکمل‌های آن‌ها نیز مساوی‌اند. در نتیجه دو مثلث DFE و DEC به حالت (ض ز) هم‌نهشت هستند، زیرا:

$$F\hat{D}E = E\hat{D}C, D\hat{F}E = D\hat{B}C, DF = DB$$

در نتیجه  $\hat{C} = \hat{E}$  است.

روش دیگر حل الف): از برابری  $\hat{A} = \hat{C}$  نتیجه می‌شود که دو خط GE و AC با هم موازی‌اند. در نتیجه بنا به توازی این دو خط و قاطع بودن EC نتیجه می‌شود که  $\hat{C} = \hat{E}$  است.

ب) چون دو پاره خط EC و BF یکدیگر

پرانتز صفر باشد، آن‌گاه A کمترین مقدار را خواهد گرفت، یعنی:  $\min A = 4$

از طرفی بیشترین مقدار  $(\sin x - 1)^2$  برای  $\sin x = -1$  به دست می‌آید، که در این حالت داریم:

$$A = (-1 - 1)^2 + 4 \Rightarrow \max A = 8$$

۱۳. ابتدا کمان‌های داده شده را به

صورت  $(\pi \pm \alpha)$  یا  $(2\pi \pm \alpha)$  می‌نویسیم.

$$\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} \quad ; \quad \frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3} \quad ; \quad \frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4} \quad ; \quad \frac{7\pi}{4} = 2\pi - \frac{\pi}{4}$$

اکنون کمان‌های داده شده را به صورت

بالا در عبارت A جایگزین می‌کنیم:

$$A = \frac{\sin(\pi - \frac{\pi}{3})\cos(\pi - \frac{\pi}{3}) + \sin(\pi + \frac{\pi}{3})\cos(\pi + \frac{\pi}{3})}{\cos(2\pi - \frac{\pi}{3})\cos(\pi - \frac{\pi}{3}) + \sin(\pi + \frac{\pi}{3})\sin(2\pi - \frac{\pi}{3})}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin \frac{\pi}{3}(-\cos \frac{\pi}{3}) - \sin \frac{\pi}{3}(-\cos \frac{\pi}{3})}{\cos \frac{\pi}{3}(-\cos \frac{\pi}{3}) - \sin \frac{\pi}{3}(-\sin \frac{\pi}{3})} \\ &= \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})(-\frac{1}{2}) - \frac{\sqrt{3}}{2}(-\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2}) - \frac{\sqrt{3}}{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{0}{-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}} = 0 \end{aligned}$$

۱۴.

$$\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix}_{1 \times 2} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} -x+2 & 3 \end{bmatrix}_{1 \times 2}$$

$$\begin{bmatrix} -x+2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (-x+2)x + 3(2x) = 0$$

$$\Rightarrow -x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x(-x+8) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 8$$

۱۵.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{15-14} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$x + 2y = 1 \Rightarrow x = 1 - 2y = 1 - 2\left(\frac{-2}{y}\right) = \frac{5}{y}$$

۱۰. می‌دانیم که:  $\frac{1}{\log_b^a} = \log_a^b$  بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} A &= \log_7^{2^3 \times 3} \times \frac{1}{\log_{3^2}^7} - \log_7^{2^3 \times 3} \times \frac{1}{\log_{12}^7} \\ &= (\log_7^7 + \log_7^3) \log_7^{2^3 \times 3} - (\log_7^7 + \log_7^3) \log_7^{2^3 \times 3} \\ &= (3 \log_7^7 + \log_7^3) (\log_7^{2^3} + \log_7^3) \\ &= (6 \log_7^7 + \log_7^3) (\log_7^2 + \log_7^3) \\ &= (6 + \log_7^3) (2 \log_7^7 + \log_7^3) \\ &= (6 + \log_7^3) (2 \log_7^7 + \log_7^3) \end{aligned}$$

با فرض این که  $a = \log_7^3$  خواهیم داشت:

$$A = (3+a)(5+a) - (6+a)(2+a)$$

$$= 15 + 8a + a^2 - 12 - 8a - a^2 = 3$$

۱۱. ابتدا دامنهٔ جواب معادلهٔ لگاریتمی

را می‌یابیم:

$$\begin{cases} x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ x-1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow D = (1, 2) \cup (2, +\infty)$$

با توجه به دستور  $\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$  معادله را حل می‌کنیم:

$$1 + \log_7^{(x-1)} = \frac{\log_7^4}{\log_7^{(x-1)}}$$

$$\Rightarrow 1 + \log_7^{(x-1)} = 2 \times \frac{1}{\log_7^{(x-1)}}$$

$$\Rightarrow 1 + \log_7^{(x-1)} = 2 \log_7^{(x-1)}$$

$$\Rightarrow \log_7^{(x-1)} = 1 \Rightarrow x-1 = 2$$

$$\Rightarrow x = 3 \in D \quad \text{قابل قبول}$$

۱۲. برای حل این مسئله از تبدیل

به مربع کامل استفاده می‌کنیم. لازم به یادآوری است که عبارتهای درجه دوم به شکل  $x^2 + bx + c$  را با اضافه و کم کردن  $\frac{b^2}{4}$  می‌توان به مربع کامل تبدیل کرد.

$$A = \sin^2 x - 2 \sin x + \frac{(-2)^2}{4} - \frac{(-2)^2}{4} + 5$$

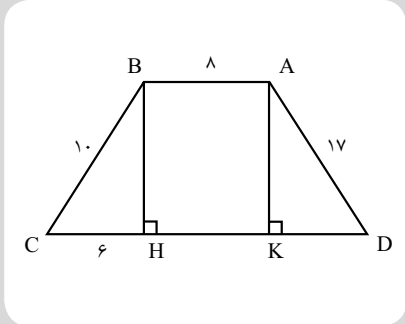
$$= (\sin^2 x - 2 \sin x + 1) + 4$$

$$\Rightarrow A = (\sin x - 1)^2 + 4$$

اکنون واضح است که اگر مقدار داخل



نکته: به روش‌های دیگر نیز می‌توان مساحت قسمت مشترک را محاسبه کرد.  
۸. ارتفاع AK از دوزنقه را رسم می‌کنیم.



چهارضلعی ABHK مستطیل و مثلث AKD قائم‌الزاویه است و بنا به داده‌های مسئله داریم:

$$BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

$$\Rightarrow AK = AH = 8, AD = 17$$

$$\Rightarrow KD = \sqrt{AD^2 - AK^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$$

$$HK = AB = 8 \Rightarrow CD = CH + HK + KD = 6 + 8 + 15 = 39$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD)BH$$

$$= \frac{1}{2}(8 + 39) \cdot 8 = 148 \text{ واحد سطح}$$

۹. بنا به قضیه تالس در مثلث داریم:

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{x+3}{x-2} = \frac{18}{6} = 3$$

$$\Rightarrow 3x - 6 = x + 3 \Rightarrow 2x = 9 \Rightarrow x = 4.5$$

۱۰. مثلث‌های  $A'M'B'$  و  $AMB$ ، هم‌چنین مثلث‌های  $A'M'C'$  و  $AMC$  متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{A'M'}{AM} = \frac{B'M'}{BM} \Rightarrow \frac{x}{x+9} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3x = 2x + 18 \Rightarrow x = 18$$

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{M'C'}{MC} \Rightarrow \frac{22}{AC} = \frac{12}{18} \Rightarrow \frac{22}{AC} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow y = 33$$

۱۱. دو مثلث ABC و ADE متشابه‌اند، پس داریم:

ت)  $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \Rightarrow 3x + 10x - 15^\circ = 180^\circ$   
 $\Rightarrow 13x = 195^\circ \Rightarrow x = 15^\circ$   
 $\hat{A} = \hat{C} \Rightarrow 3x = y, x = 15^\circ \Rightarrow y = 45^\circ$   
 ۵. داریم:

$$CG = \frac{5}{14} BC, CF = \frac{7}{10} CD$$

$$\Rightarrow CG \cdot CF = \frac{1}{4} BC \cdot CD$$

اما  $CE \cdot CF = S_{CEGF}$  و  $CB \cdot CD = S_{ABCD}$  داریم:

$$S_{CEGF} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$$

$$S_{CEGF} = 70 \Rightarrow 70 = \frac{1}{4} S_{ABCD}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = 280 \text{ cm}^2$$

۶. اگر اندازه ساق مثلث متساوی‌الساقین  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ, AB = AC$ ) را  $b$  و اندازه وتر آن را  $a$  فرض کنیم، می‌دانیم که:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} b \cdot b = \frac{1}{2} b^2$$

و چون:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + b^2$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{2} b \Rightarrow b = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

پس خواهیم داشت:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{4} a^2$$

از آن‌جا اندازه ساق‌های مثلث را خواهیم داشت:

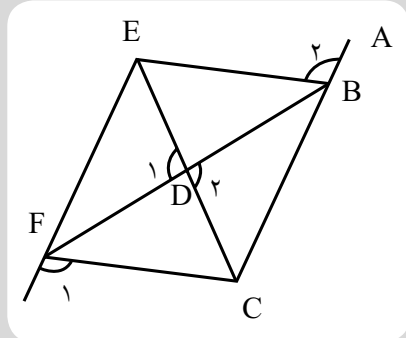
$$32 = \frac{1}{4} b^2 \Rightarrow b^2 = 64 \Rightarrow b = 8$$

و اندازه وتر مثلث برابر است با:

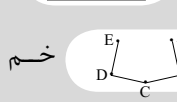
$$a = b\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \Rightarrow a = 8\sqrt{2}$$

۷. مربع بزرگ به ضلع ۳ و مربع کوچک  $1+1=2$  است. قسمت مشترک مستطیلی به عرض ۱ و طول ۲ است. پس مساحت آن مساوی  $1 \times 2 = 2$  واحد سطح است.

را نصف کرده‌اند، پس چهارضلعی BCFE متوازی‌الاضلاع است، زیرا می‌دانیم هرگاه قطرهای یک چهارضلعی یکدیگر را نصف کنند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است و در نتیجه ضلع‌های رو به روی آن با هم مساوی‌اند، بنابراین  $BC = EF$  است.



روش دیگر حل ب): دو مثلث DBC و DEF به حالت (ض ز ض) هم‌نهشت‌اند، زیرا بنا به فرض  $DB = DF$  و  $DE = DC$  و  $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$  است.  $BC = EF$  بنابراین است. ۳. الف) چهارضلعی محدب ABCD خم ساده بسته است.



ب) شکل خم ساده غیر بسته است. ۴. با توجه به ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع داریم:

الف)  $AB = CD \Rightarrow 2x = y$  (۱)

ب)  $AB = CD \Rightarrow 2x = 7x - 25$   
 $\Rightarrow x = 5$

پ)  $AD = BC \Rightarrow 5y - 10^\circ = 3y + 8 \Rightarrow y = 9$

الف)  $\hat{A} = \hat{C} \Rightarrow 4y - 60^\circ = 2y \Rightarrow y = 30^\circ$   
 $\hat{D} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow x + 2y = 180^\circ$   
 $\Rightarrow x + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 120^\circ$



۲.  
 $a = 2k + 1 \Rightarrow a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$   
 $+ 6k + 1 = 2(2k^2 + 3k + 1) = 2k'^2 + 1$   
 ۳. برهان خلف: فرض می‌کنیم این عدد گویا باشد، بنابراین:

$$\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, a, b \neq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{5} - \sqrt{2} = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \sqrt{2} = \sqrt{5} - \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 2 = 5 - \frac{2a^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2a^2}{b^2} = 3 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5} = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{a'}{b'}$$

$a', b' \in \mathbb{Z}, b' \neq 0$

بنابراین  $\sqrt{5}$  مساوی یک کسر گویاست و این خلاف فرض مسئله است.

۴. از استدلال بازگشتی کمک می‌گیریم:

$$x^2 + 2y^2 + 1 \geq 2yx + 2y \Rightarrow x^2 + 2y^2 + 1 - 2xy - 2y \geq 0 \Rightarrow (x^2 + y^2 - 2xy) + (y^2 - 2y + 1) \geq 0 \Rightarrow (x - y)^2 + (y - 1)^2 \geq 0$$

و نابرابری فوق همواره درست است، زیرا مربع‌های کامل همواره نامنفی‌اند. همهٔ مراحل نیز بازگشت پذیرند.

۵. لباس‌ها در سه نوع و سه اندازه هستند، پس طبق اصل ضرب،  $3 \times 3 = 9$  و  $9$  گونهٔ مختلف از لباس (از نظر اندازه و نوع) داریم. چون ده دست لباس خریداری شده، پس طبق اصل لانهٔ کبوتر دست‌کم دو تای آن‌ها از یک گونه‌اند، یعنی اندازه و نوع آن‌ها مثل هم است.

۶. دو طرف حکم را که یک قضیهٔ دو شرطی است اثبات می‌کنیم. اگر  $C \subseteq A$  باشد،  $A \cap C = C$  و  $A \cup C = A$  بنابراین به کمک خاصیت توزیع پذیری می‌توان نوشت:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) = A \cap (B \cup C)$$

اما برعکس اگر داشته باشیم:

سطح کرهٔ به شعاع R  
 $= 4\pi R^2 \Rightarrow 36\pi = 4\pi R^2 \Rightarrow R^2 = 9$   
 $\Rightarrow R = 3 \text{ cm}$   
 حجم کره  
 $= \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 3^3 = 36\pi \text{ cm}^3$

الف) شعاع قاعدهٔ مخروط ۸ سانتی‌متر است. پس قطر قاعدهٔ آن ۱۶ سانتی‌متر و شعاع کره ۳ سانتی‌متر است. پس قطر دایرهٔ عظیمهٔ آن ۶ سانتی‌متر خواهد بود. بدیهی است که این کره به‌طور کامل درون مخروط قرار می‌گیرد. می‌توان مشخص کرد که کره در چه موقعیتی نسبت به ارتفاع مخروط قرار می‌گیرد.

در صورتی که می‌توانید این مطلب را مشخص کنید، راه‌حل خود را به نشانی مجله بفرستید. بهترین راه‌حل جایزه خواهد داشت.

ب) داریم:  
 حجم کره - حجم مخروط = حجم باقی‌مانده  
 $= 36\pi \text{ cm}^3 - 48\pi = 48\pi \text{ cm}^3$

## پاسخ سؤالات جبر و احتمال هوشنگ شرقی

۱.  
 $n = 1 : (1 + \frac{1}{1}) = 1 + 1 = 2 = 2$   
 فرض:  
 $n = k : (1 + \frac{1}{1})(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{3}) \dots (1 + \frac{1}{k})$   
 $= k + 1$   
 حکم:  
 $n = k + 1 : (1 + \frac{1}{1})(1 + \frac{1}{2}) \dots (1 + \frac{1}{k})(1 + \frac{1}{k+1})$   
 $= k + 2$   
 دو طرف فرض استقرا را در  $1 + \frac{1}{k+1}$  ضرب می‌کنیم:  
 $(1 + \frac{1}{1})(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{3}) \dots (1 + \frac{1}{k}) \dots (1 + \frac{1}{k+1})$   
 $(1 + \frac{1}{k+1}) = (k+1)(1 + \frac{1}{k+1})$   
 $= k + 1 + 1 = k + 2$

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AH'}{AH}\right)^2, AH = AH' + H'H$$

$$= 40 = AH' + 12 \Rightarrow AH' = 28$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{28}{40}\right)^2 = \left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{49}{100}$$

۱۲. الف) حجم منشور مساوی

حاصل ضرب سطح قاعده در ارتفاع آن است. اما قاعدهٔ این منشور شش‌ضلعی منتظمی به ضلع ۱۲ سانتی‌متر و ارتفاع آن ۳۰ سانتی‌متر است. با توجه به این که مساحت شش‌ضلعی منتظم به ضلع a

مساوی  $\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$  است، داریم:  
 $\frac{3\sqrt{3} \times 12^2}{2} = 216\sqrt{3} \text{ cm}^2$   
 مساحت قاعده

ارتفاع  $\times$  مساحت قاعده = حجم منشور  
 $= 216\sqrt{3} \times 30 = 6480\sqrt{3} \text{ cm}^3$   
 پ) نخست حجم استوانه را به دست می‌آوریم. می‌دانیم که شعاع دایرهٔ محاط در شش‌ضلعی منتظم به ضلع a مساوی  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$  است. بنابراین:

$$\frac{12 \times \sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

ارتفاع  $\times$  مساحت قاعده = حجم استوانه و  
 $\Rightarrow \text{حجم استوانه} = \pi R^2 \cdot h$   
 $= \pi (6\sqrt{3})^2 \cdot 30 = 3240\pi \text{ cm}^3$   
 $\Rightarrow$  حجم فضای بین منشور و استوانه =  
 حجم استوانه - حجم منشور منتظم =  
 حجم فضای بین منشور و استوانه  
 $= 6480\sqrt{3} - 3240\pi = 1036 / 8 \text{ cm}^3$

۱۳. داریم:  
 حجم مخروط  
 $= \frac{1}{3} \times \pi R^2 \cdot h$   
 $= \frac{1}{3} \times \pi \times 8^2 \times 21 = 448\pi \text{ cm}^3$

(۱, پ, ۱), (۲, پ, ۲), (۳, پ, ۳), (۴, پ, ۴), (۵, پ, ۵), (۱, ر, ۱), (۲, ر, ۲), (۳, ر, ۳), (۴, ر, ۴), (۵, ر, ۵)

۱۰. فرض می‌کنیم  $n$  مهره آبی در ظرف باشد. احتمال هم‌رنگ بودن دو مهره خروجی (هر دو قرمز یا هر دو سفید یا هر دو آبی) را به دست می‌آوریم و مساوی  $\frac{14}{45}$  قرار می‌دهیم:

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2} + \binom{3}{2} + \binom{n}{2}}{\binom{n+8}{2}} = \frac{14}{45}$$

$$\Rightarrow \frac{10 + 3 + \frac{n(n-1)}{2}}{(n+8)(n+7)} = \frac{14}{45}$$

$$\Rightarrow \frac{26 + n^2 - n}{n^2 + 15n + 56} = \frac{14}{45}$$

$$\Rightarrow 14n^2 + 210n + 784 = 45n^2 + 1170n - 45n$$

$$\Rightarrow 31n^2 - 255n + 386 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = (225)^2 - 4 \times 31 \times 386$$

$$\Rightarrow \Delta = 65025 - 47864 = 17161$$

$$\Rightarrow n = \frac{255 \pm 131}{62}$$

$$\Rightarrow n = 2 \text{ یا } n = \frac{193}{31}$$

یعنی دو مهره آبی وجود دارد.

۱۱

$$P(2) = P(3) = P(5) = 2P(1)$$

$$= 2P(4) = 2P(6) \quad \text{و}$$

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

$$\Rightarrow 12P(1) = 1 \Rightarrow P(1) = P(4) = P(6) = \frac{1}{12}$$

$$P(2) = P(3) = P(5) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow P(x \leq 3) = P(1) + P(2) + P(3)$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

۱۲. اگر طول و عرض مستطیل‌ها را  $x$  و  $y$  بگیریم، فضای نمونه این پیشامد عبارت است از:

$$S = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, 0 < x, y < 4\}$$

و پیشامد مطلوب عبارت است از:

$$(x, y)R(z, t), (z, t)R(r, s) \Rightarrow (x, y)R(r, s)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + t + tx = y + z + yz \\ z + s + sz = t + r + tr \end{cases}$$

حال به دو طرف هریک از تساوی‌های بالا، یک واحد اضافه می‌کنیم:

$$\begin{cases} x + t + tx + 1 = y + z + yz + 1 \\ z + s + sz + 1 = t + r + tr + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (t+1)(x+1) = (y+1)(z+1) \\ (z+1)(s+1) = (t+1)(r+1) \end{cases}$$

حال دو طرف دو تساوی فوق را در هم ضرب می‌کنیم:

$$(t+1)(x+1)(z+1)(s+1)$$

$$= (y+1)(z+1)(t+1)(r+1)$$

$$\Rightarrow (x+1)(s+1) = (y+1)(r+1)$$

$$\Rightarrow xs + x + s + 1 = yr + y + r + 1$$

$$\Rightarrow x + s + xs = y + r + yr$$

خاصیت تعدی  $(x, y)R(r, s)$

در نتیجه  $R$  یک رابطه هم‌ارزی است.

$$(x, y)R(1, -2) \Rightarrow x - 2 - 2x = y + 1 + y$$

$$\Rightarrow 2y = -x - 3y \Rightarrow Y = \frac{-x-3}{2}$$

$$\Rightarrow [(1, -2)] = \left\{ (x, y) \mid y = \frac{-x-3}{2} \right\}$$

۹. الف

$$S = \{(1, پ, 1), (2, پ, 2), (3, پ, 3), (4, پ, 4), (5, پ, 5), (1, ر, 1), (2, ر, 2), (3, ر, 3), (4, ر, 4), (5, ر, 5), (1, پ, 2), (2, پ, 3), (3, پ, 4), (4, پ, 5), (1, ر, 2), (2, ر, 3), (3, ر, 4), (4, ر, 5), (1, پ, 3), (2, پ, 4), (3, پ, 5), (1, ر, 3), (2, ر, 4), (3, ر, 5), (1, پ, 4), (2, پ, 5), (1, ر, 4), (1, پ, 5), (1, ر, 5)\}$$

ب

$$A = \{(1, پ, 1), (1, ر, 1), (2, پ, 2), (2, ر, 2), (3, پ, 3), (3, ر, 3), (4, پ, 4), (4, ر, 4), (5, پ, 5), (5, ر, 5), (1, پ, 2), (1, ر, 2), (1, پ, 3), (1, ر, 3), (1, پ, 4), (1, ر, 4), (1, پ, 5), (1, ر, 5)\}$$

ج

$$B = \{(3, پ, 3), (3, ر, 3), (3, پ, 4), (3, ر, 4), (3, پ, 5), (3, ر, 5)\}$$

د

$$A \cap B' = A - B = \{(1, پ, 1), (1, ر, 1), (2, پ, 2), (2, ر, 2), (4, پ, 4), (4, ر, 4), (5, پ, 5), (5, ر, 5), (1, پ, 3), (1, ر, 3), (1, پ, 4), (1, ر, 4), (1, پ, 5), (1, ر, 5)\}$$

می‌توان نوشت:  $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$

$$(A \cup C) \cap (B \cup C) = A \cap (B \cup C)$$

اما می‌دانیم که:

$$(A \cup C) \cap (B \cup C) = A \cup (B \cup C)$$

(چرا؟)

حال با فرض  $A \cup C = Y$  و  $B \cup C = X$  و  $A = Z$  و تساوی‌های بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} Y \cap X = Z \cap X \\ Y \cup X = Z \cup X \end{cases}$$

و از این دو رابطه به صورت زیر نتیجه می‌گیریم که  $Y = Z$ :

$$Y = Y \cup (Y \cap X) = Y \cup (Z \cap X)$$

$$= (Y \cup Z) \cap (Y \cup X) = (Y \cup Z) \cap (Z \cup X)$$

$$= Z \cup (Y \cap X) = Z \cup (Z \cap X) = Z$$

گفتنی است که در اثبات بالا به غیر از فرض مسئله از قانون موسوم به قانون جذب نیز استفاده شده است که اثبات آن به عنوان تمرین به دانش‌آموزان واگذار می‌شود:

$$(A = A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B))$$

حال از تساوی  $Y = Z$  نتیجه می‌شود:

$$A \cup C = A \Rightarrow C \subseteq A$$

۷

$$|2x-1| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq 2x-1 \leq 2 \Rightarrow -1 \leq 2x \leq 3$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow x = 0, 1 \Rightarrow A = \{0, 1\}$$

$$x \leq \sqrt{x} \Rightarrow x^2 \leq x \Rightarrow x^2 - x \leq 0$$

$$\Rightarrow x(x-1) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ یا } 1 \Rightarrow B = \{0, 1\}$$

$$A^c = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

$$A \times B = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

$$\Rightarrow A^c - A \times B = \emptyset$$

۸. خاصیت بازتابی:

$$(x, y)R(x, y) \Rightarrow x + y + xy = y + x + yx$$

خاصیت تقارنی:

$$(x, y)R(z, t) \Leftrightarrow (z, t)R(x, y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + t + xt = y + z + yz \\ z + y + zy = t + x + tx \end{cases}$$

خاصیت تعدی:

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

پس جمله پنجم بسط  $(x+2y)^4$  برابر

$$\binom{4}{4} x^{4-4} (2y)^4 = \binom{4}{4} x^0 \times 2^4 y^4 = \frac{4!}{4!4!} \times 16 x^0 y^4 = 112 \cdot x^0 y^4$$

است با:

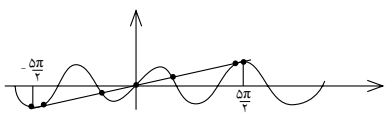
$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + ex + f$$

$$\Rightarrow P(x) = x^2(ax^2 + bx + c) + (dx^2 + ex + f)$$

از آن جا که  $P(x)$  باید برابر صفر شود، لذا باید ضرایب پرانتز اول و دوم با هم برابر باشند تا با فاکتورگیری از آن ها به  $x^2 + x + 1$  برسیم که برابر صفر است. بنابراین به جای اعداد مساوی  $a, b$  و  $c$  شش رقم و به جای اعداد مساوی  $d, e$  و  $f$  نیز شش رقم می توانیم جای گذاری کنیم که طبق اصل ضرب  $36$  عدد به جای ضرایب می توان جایگزین کرد.

۵. معادله هفت ریشه دارد.

$$\sin x = \frac{2x}{\Delta\pi}$$



۶. الف  $f(a_n)$  می تواند هر کدام از اعداد  $b_1, b_2, \dots, b_m$  باشد. پس برای  $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_m)$  حالت موجود است. نیز به هر یک از  $b_1, b_2, \dots, b_m$  نظیر می شود. پس آن هم  $m$  حالت دارد و  $\dots$  و  $f(a_m)$  نیز  $m$  حالت دارد. بنابراین، طبق اصل ضرب  $m \times m \times m \times \dots \times m = m^n$  تابع موجود است.

$$\frac{DC}{AB} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

CD مربوط به شش ضلعی سوم و AB

مربوط به شش ضلعی اول است، نسبت اضلاع آن ها برابر  $q^2$  خواهد بود. پس  $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$S_\infty = \frac{6}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\text{محیط اولیه}}{\text{قدر نسبت} - 1}$$

و برای یافتن حد مجموع مساحت ها با توجه به فرمول مساحت شش ضلعی که برابر  $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$  است، داریم:

$$S_\infty = \frac{6 \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)}{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{1 - \frac{3}{4}} = 6\sqrt{3}$$

نکته: هرگاه وسط های اضلاع یک  $n$  ضلعی منتظم را به هم وصل کنیم، مساحت های آن ها با محیط و مساحت های  $n$  ضلعی اولیه دنباله هندسه نزولی تشکیل می دهند و قدرنسبت محیط های آن ها  $\cos \frac{\pi}{n}$  و قدرنسبت مساحت های آن ها  $\cos \frac{2\pi}{n}$  است.

۲. با توجه به اتحاد

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

داریم:

$$(x+1)^{1384} - (x-2)^{1384} = 0$$

$$\Rightarrow x+1 = \pm(x-2) \Rightarrow \begin{cases} x+1 = x-2 \\ x+1 = -(x-2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

۳. الف تعداد جملات این بسط برابر

$(n+1)$  یعنی ۹ است.

ب) برای یافتن مجموع ضرایب داریم:

$$x = y = 1 \Rightarrow (x+2y)^n = (1+2)^n = 3^n$$

پ) جمله  $(k+1)$  ام بسط  $(a+b)^n$  عبارت

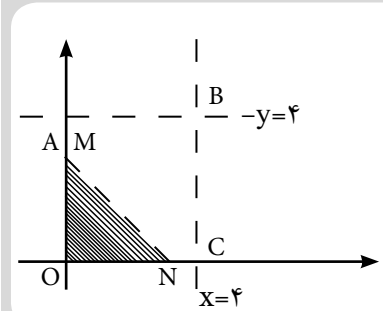
است از:

$$A = \{(x, y) | (x, y) \in S, x + y > 3\}$$

و به روش هندسی، احتمال مطلوب

برابر است با:

$$P(A) = \frac{S_{OMN}}{S_{OABC}} = \frac{\frac{3 \times 3}{2}}{\frac{4 \times 4}{2}} = \frac{9}{32}$$



۱۳. اگر پیشامد قبولی نرگس را  $A$  و پیشامد قبولی مژده را  $B$  بنامیم، طبق فرض مسئله داریم:

$$\begin{cases} P(A - B) = 0/3 \\ P(A \cup B) = 0/7 \end{cases}$$

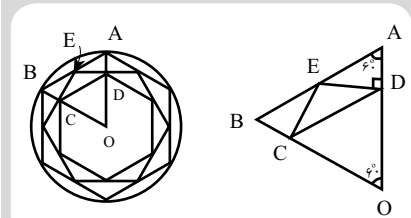
$$\Rightarrow \begin{cases} P(A) - P(A \cap B) = 0/3 \\ P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0/3 + P(B) = 0/7 \Rightarrow P(B) = 0/4$$

## پاسخ مسائل حسابان مجربی رفیعی

۱. در مثلث OAB داریم:

$$\frac{DC}{AB} = \frac{OD}{OA}, OD = OE \cdot \cos 30^\circ$$



با توجه به این که OE ارتفاع مثلث OAB، ضلع مقابل به زاویه  $60^\circ$  برابر  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  و تر است پس:

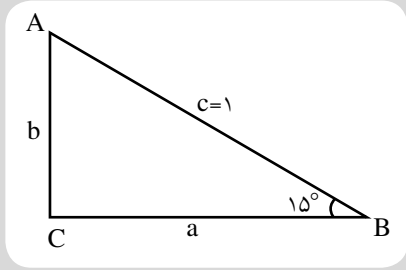
$$\begin{cases} \tan 15^\circ = \frac{b}{a} = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow b = a(2 - \sqrt{3}) \\ a^r + b^r = c^r \Rightarrow a^r + a^r(2 - \sqrt{3})^r = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^r = \frac{1}{2(2 - \sqrt{3})} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

$$\Rightarrow b = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} (2 - \sqrt{3})$$

$$\Rightarrow \sin 15^\circ = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad \text{و}$$

$$\cos 15^\circ = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$



$$\frac{\sin 3x - \sin x}{\sin 2x} = 2 \Rightarrow \frac{2 \sin 2x \cdot \cos 2x}{\sin 2x} = 2$$

$$\Rightarrow \cos 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

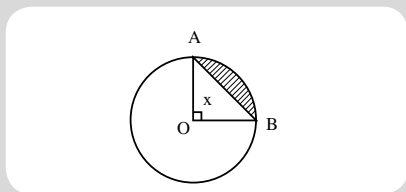
ولی با توجه به دامنه تابع که  $\sin 2x \neq 0$  یعنی  $2x \neq k\pi \Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$  در نتیجه جواب نهایی عبارت است از:

$$\left. \begin{aligned} x = \frac{k\pi}{2} &\Leftrightarrow \text{Unit Circle} \\ x = \frac{k\pi}{3} &\Rightarrow \text{Unit Circle} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ x = \frac{k\pi}{2} \right\}$$

$$-\left\{ x = \frac{k\pi}{3} \right\} = k\pi + \frac{\pi}{3} \quad \text{Unit Circle}$$

$$= \frac{x}{2\pi} \times \pi r^2 = \frac{x r^2}{2} \quad \text{(الف) ۱۲}$$

مساحت دایره  $\times$  کمان  $\div$  مساحت  $\triangle OAB$



$$\begin{aligned} & ۹ \\ & \text{فرض} \begin{cases} x_r > x_1 \Rightarrow f(x_r) - 3x_r > f(x_1) - 3x_1 \\ \Rightarrow f(x_r) - f(x_1) > 3x_r - 3x_1 \quad (۱) \\ x_r > x_1 \Rightarrow f(x_r) - x_r^r > f(x_1) - x_1^r \\ \Rightarrow f(x_r) - f(x_1) > x_r^r - x_1^r \quad (۲) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{حکم } x_r > x_1 &\Rightarrow f(x_r) - x_r^r - x_r > f(x_1) - x_1^r - x_1 \\ &\Rightarrow f(x_r) - f(x_1) > x_r^r - x_1^r + x_r - x_1 \quad (۳) \end{aligned}$$

حال کافی است ثابت کنیم:

$$x_r^r - x_1^r \geq x_r^r - x_1^r + x_r - x_1$$

یا

$$3x_r - 3x_1 \geq x_r^r - x_1^r + x_r - x_1$$

که به روش برهان خلف آن را اثبات می‌کنیم.

فرض خلف:

$$3x_r - 3x_1 < x_r^r - x_1^r + x_r - x_1$$

و

$$x_r^r - x_1^r < x_r^r - x_1^r + x_r - x_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_r^r - x_1^r + x_r - x_1 > 3x_r - 3x_1 \\ x_r^r - x_1^r + x_r - x_1 > x_r^r - x_1^r \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x_r - x_1)(x_r + x_1 + 1) > 2(x_r - x_1) \\ (x_r - x_1)(x_r + x_1 + 1) > (x_r - x_1)(x_r^r + x_1 x_r + x_1^r) \end{cases}$$

با فرض  $x_r + x_1 = S$  و  $x_1 x_r = P$

و این که می‌دانیم  $S^2 - 2P \geq 2P$ ، یعنی  $S^2 \geq 4P$

$$\begin{cases} S > 2 \\ S + 1 > S^r - P \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S > 2 \\ S + P + 1 > S^r > 4 \\ \Rightarrow S + \frac{S^r}{4} + 1 > S + P + 1 > S^r \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3S^r - 4S - 4 < 0 \xrightarrow{S < 2} \text{تناقض}$$

۱۰. با توجه به این که  $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$  داریم:

$$\tan 15^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

ب)  $f(a_n)$  یک حالت دارد، زیرا فقط می‌تواند  $b_1$  باشد، ولی  $f(a_1), \dots, f(a_n)$  محدود نیستند و هر کدام  $m$  حالت دارند،

$$\underbrace{m \times m \times \dots \times m}_{n-1 \text{ حالت}} = m^{n-1}$$

پ) توابع ثابت عبارت‌اند از  $f(x) = b_1$  و  $f(x) = b_2$  و  $\dots$  و  $f(x) = b_m$  پس  $m$  تا هستند.

ت)  $f(a_1) \neq b_1$  پس  $f(a_1)$  حالت  $m-1$  دارد و بقیه  $f(a_2), \dots$  و  $f(a_n)$  هر کدام  $m$  حالت دارند. پس:

$$(m-1)(m)(m)\dots(m) = m^{n-1} \times (m-1) = m^n - m^{n-1}$$

۷.

$$\begin{aligned} g(x) = f(x) &\Rightarrow \sqrt{ax^r + 1} - bx^r \\ &= \frac{1}{3x + \sqrt{9x^r + 1}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt{ax^r + 1} - bx^r = \frac{1}{3x + \sqrt{9x^r + 1}} \times \frac{3x - \sqrt{9x^r + 1}}{3x - \sqrt{9x^r + 1}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{ax^r + 1} - bx^r = \frac{3x - \sqrt{9x^r + 1}}{9x^r - 9x^r - 1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{ax^r + 1} - bx^r = \sqrt{9x^r + 1} - 3x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = 3 \end{cases}$$

۸. از آن جا که  $f(f(n))$  به علاوه  $f(n)$  درجه یک شده است، پس  $f(n)$  باید درجه یک باشد، پس آن را  $f(n) = an + b$  در نظر می‌گیریم.

$$f(f(n)) + f(n) = 2n + 3$$

$$\Rightarrow f(an + b) + an + b$$

$$= a(an + b) + b + an + b$$

$$\Rightarrow f(an + b) + an + b$$

$$= (a^2 + a)n + (ab + 2b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + a = 2 \\ a = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ab + 2b = 3 \\ a = 1 \Rightarrow b = 1 \\ a = -2 \Rightarrow 0 = 3 \text{ غلط} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{\left| \frac{a - (-a)}{r} \right|}{\left| 1 + \frac{a}{r} \left( -\frac{a}{r} \right) \right|} = \frac{r}{3} \Rightarrow \frac{a}{1 - \frac{a^2}{r^2}} = \frac{r}{3}$$

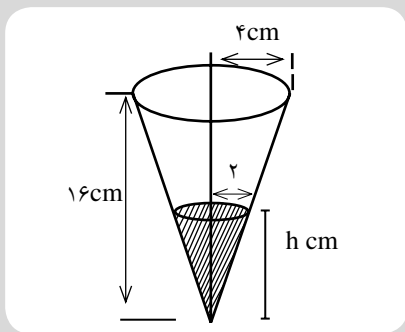
$$\Rightarrow r|a| = |r - a^2|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r - a^2 = ra \Rightarrow a^2 + ra - r = 0 \\ r - a^2 = -ra \Rightarrow a^2 - ra - r = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -r \end{cases} \Rightarrow \text{چهار مقدار برای } a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = r \end{cases} \Rightarrow \text{وجود دارد } a$$

۱۷



$$\frac{h}{r} = \frac{r}{l} \Rightarrow r = \frac{h}{l}$$

$$v = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \left( \frac{h}{l} \right)^2 h = \frac{\pi h^3}{3l^2}$$

$$v'_t = \frac{r \pi h^2 h'_t}{3l^2} \Rightarrow -r = \frac{r \pi (l)^2 h'_t}{3l^2}$$

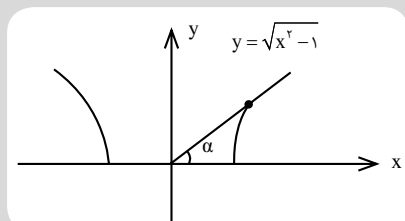
$$\Rightarrow h'_t = \frac{-r}{r \pi} = \frac{-1}{\pi} \text{ cm}$$

۱۸

$$f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{\cos x^{-1} x^r}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{r x}{\sqrt{1-x^r}}}{r \sqrt{1 + \sqrt{\cos^{-1}(x^r)}}}$$

۱۹



$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-r \sin(-x) \sin r x}{x \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r \sin x \sin r x}{x \tan x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} r \frac{\sin x}{x} \frac{\sin r x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} r \times 1 \times \frac{r \sin x \cos x}{\sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} r \cos^r x = r \times 1 = r$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}} \frac{1 - r \cos x}{r x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}} \frac{r \left( \frac{1}{r} - \cos x \right)}{r \left( x - \frac{\pi}{r} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}} \frac{r (\cos \frac{\pi}{r} - \cos x)}{r \left( x - \frac{\pi}{r} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}} \frac{r \left( -\sin \frac{\pi - x}{r} \cdot \sin \frac{\pi + x}{r} \right)}{r \left( x - \frac{\pi}{r} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}} -r \frac{\sin \frac{\pi - x}{r}}{r \left( x - \frac{\pi}{r} \right)} \cdot \sin \frac{\pi + x}{r}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}} \frac{r}{r} \sin \frac{\pi + x}{r} = \frac{r}{r} \times \sin \frac{\pi}{r} = \frac{\sqrt{r}}{r}$$

۱۶

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{\cos ax}}$$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \sqrt{\cos ax}} - 0}{x}$$

$$\times \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\cos ax}}}{\sqrt{1 + \sqrt{\cos ax}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos ax}}{x \sqrt{1 + \sqrt{\cos ax}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos ax}}{x \sqrt{1 + \sqrt{\cos ax}}} \times \frac{\sqrt{1 + \cos ax}}{\sqrt{1 + \cos ax}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 ax}}{x (\sqrt{1 + \sqrt{\cos ax}}) (\sqrt{1 + \cos ax})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin ax|}{x (\sqrt{1 + \sqrt{\cos ax}}) (\sqrt{1 + \cos ax})}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin ax}{x (\sqrt{1 + \sqrt{\cos ax}}) (\sqrt{1 + \cos ax})} &= \frac{a}{r} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin ax}{x (\sqrt{1 + \sqrt{\cos ax}}) (\sqrt{1 + \cos ax})} &= -\frac{a}{r} \end{aligned} \right.$$

زاویه بین دو خط با شیب‌های  $m$  و  $m'$  برابر است با:

$$\tan \alpha = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right|$$

$$\text{OAB مساحت} = \frac{1}{2} r r / \sin x = \frac{1}{2} r^2 \sin x$$

$$\text{مساحت قطاع} = \frac{r x^r}{r} - \frac{1}{2} r^2 \sin x = \frac{1}{2} r^2 (x - \sin x)$$

(ب)

$$AB^r = OA^r + OB^r - r OA \cdot OB \cos x$$

$$\Rightarrow AB^r = r^r + r^r - r^2 \cos x$$

$$\Rightarrow AB^r = 2r^r - r^2 \cos x = r^r (2 - \cos x)$$

$$\Rightarrow AB^r = r^r (r \sin^2 \frac{x}{r}) = r^r \sin^2 \frac{x}{r}$$

$$\Rightarrow AB = r \sin \frac{x}{r}$$

(ت)

$$AB = r \sin \frac{x}{r} \Rightarrow \frac{AB}{r} = \sin \frac{x}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{r} = \sin^{-1} \frac{AB}{r} \Rightarrow x = r \sin^{-1} \frac{AB}{r}$$

۱۳

$$\frac{x^r - rx}{\sqrt{x^r - rx + 1}} < 0 \Rightarrow \frac{x^r - rx}{\sqrt{(x-1)^r}} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^r - rx}{|x-1|} < 0 \Rightarrow \begin{cases} x^r - rx < 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 < x < r$$

$$\Rightarrow \{0 < x < r\} - \{1\} = (0, 1) \cup (1, r)$$

$$\Rightarrow 0 < |x-1| < r$$

۱۴

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{r}\right)^+} \left[ \frac{1}{x} \right] = a \left(\frac{1}{r}\right)^+ + \left[ \frac{1}{\left(\frac{1}{r}\right)^+} \right]$$

$$= a \left(\frac{1}{r}\right)^+ + \frac{a}{r}$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{r}\right)^-} \cos \frac{\pi x}{r} = \cos \frac{\pi}{r} = \frac{\sqrt{r}}{r}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{r}\right)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{r}\right)^+} f(x) \Rightarrow \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{r}}{r}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{r}$$

۱۵

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos r x}{x \tan x} \text{ تبدیل به ضرب}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-r \sin \frac{x - r x}{r} \cdot \sin \frac{x + r x}{r}}{x \tan x}$$

$$\Rightarrow AA' = \sqrt{AB^2 - BA'^2}$$

$$\Rightarrow AA' = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

$$\Rightarrow 12 \times 8 = 10 \times CC' \Rightarrow CC' = 9.6$$

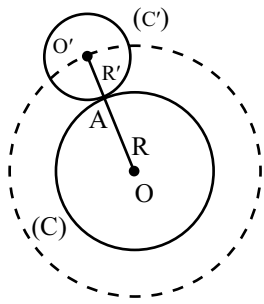
در نتیجه جواب مسئله

$$\Rightarrow MH + MH' = CC' = h_c = 9.6$$

۴. مکان هندسی جواب مسئله، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع  $R + R'$  است، زیرا اگر دایره  $C'(O', R')$  یکی از دایره‌های مکان هندسی مورد نظر باشد، یعنی دایره‌ای به شعاع  $R'$  و مرکز  $O'$  باشد که بر دایره  $C(O, R)$  مماس است، داریم:

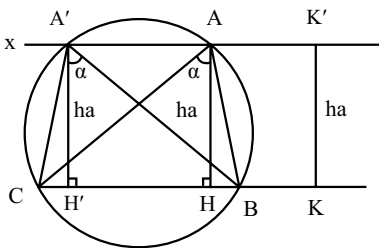
$$O'O = O'A + AO = R' + R =$$

مقدار ثابت



و چون O نقطه ثابتی است، پس مکان هندسی نقطه  $O'$  دایره‌ای به مرکز O و به شعاع  $R + R'$  است.

۵. پاره‌خط BC به طول a را رسم می‌کنیم، سپس کمان در خور زاویه  $\hat{A} = \alpha$  رو به رو پاره‌خط BC را رسم می‌کنیم. از نقطه دلخواه K واقع بر خط عمود BC عمود به  $KK'$



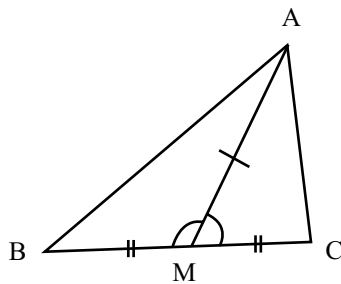
طول  $h_a$  را خارج می‌کنیم (در همان طرفی

$$\triangle ABC, AB > AC, MB = MC$$

$$\Rightarrow \hat{MAB} < \hat{MAC}$$

(ب) برای حل این قسمت از مسئله، دو مثلث MAB و MAC را با هم مقایسه می‌کنیم. داریم:

$$MA = MA, MB = MC, AB > AC$$



پس بنا به عکس قضیه لولا، داریم:

$$\hat{BMA} > \hat{CMA}$$

۲. بنا به ویژگی نیمساز زاویه درونی مثلث داریم:

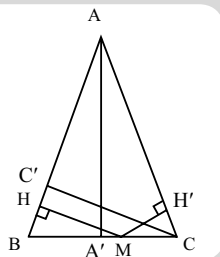
$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{x+4}{2x+1} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 4x+2 = 2x+12 \Rightarrow x = 10$$

$$\Rightarrow DB = 14, DC = 21$$

$$\Rightarrow BC = 14+21 = 35$$

۳. می‌دانیم که مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع بر قاعده یک مثلث متساوی الساقین از دو ساق آن، مساوی اندازه ارتفاع وارد بر ساق مثلث است. بنابراین اگر ارتفاع وارد بر قاعده مثلث را  $AA'$  و ارتفاع وارد بر ساق مثلث را  $CC'$  بنامیم، برای پیدا کردن جواب مسئله باید اندازه  $CC'$  را به دست آوریم. با توجه به این که  $\hat{A} = \alpha$ ،  $A'A' = AB, CC'$  است، داریم:



$$BA' = A'C = \frac{BC}{2} = \frac{12}{2} = 6, AB = 10$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

$$\Rightarrow \alpha'(1 + \tan^2 \alpha) = \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} + \sqrt{x^2-1}}{x^2}$$

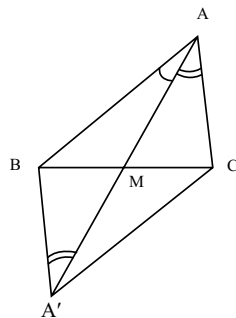
$$\Rightarrow \alpha' = \frac{\frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2(1 + (\frac{\sqrt{x^2-1}}{x})^2)} = \frac{\frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2(\frac{2x^2-1}{x^2})}$$

$$\Rightarrow \alpha' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

## حل مسئله‌های هندسه ۲

محمد هاشم رستمی

۱. الف) میانه AM را از طرف M به اندازه خودش امتداد می‌دهیم تا نقطه  $M'$  به دست آید.  $(MA' = MA)$ . از  $A'$  به C وصل می‌کنیم، چهارضلعی  $ABA'C$  که قطرهاش یکدیگر را نصف کرده‌اند متوازی الاضلاع است، پس  $\hat{BAM} = \hat{M'AC}$  و  $A'B = AC$  به فرض  $AB > AC$  است، پس  $AB > A'B$  است. بنابراین در مثلث  $ABB'$ ، چون  $\hat{BA'A} > \hat{MAB}$  است،  $AB > A'B$  اما  $\hat{BA'A} = \hat{MAC}$  است، پس داریم  $\hat{MAC} > \hat{MAB}$  یا  $\hat{MAC} < \hat{MAB}$  که در نتیجه حکم مسئله ثابت شده است.



با استفاده از این مسئله می‌توان گفت: اگر دو ضلع مثلثی نابرابر باشند، میانه وارد بر ضلع سوم مثلث با ضلع بزرگ‌تر، زاویه‌ای می‌سازد که کوچک‌تر از زاویه‌اش با ضلع کوچک‌تر است، یعنی:

D :  $a'x + b'y + c' = 0, Dx + by = cx = 0$   
 به صورت  $\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm \frac{a'x + b'y + c'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$

است. بنابراین داریم:

$$\frac{3x - 4y - 1}{\sqrt{9 + 16}} = \pm \frac{4x + 3y + 7}{\sqrt{9 + 16}} = \pm \frac{4x + 3y + 7}{5}$$

$$\Rightarrow 3x - 4y - 1 = \pm(4x + 3y + 7)$$

معادله محور بازتاب دیگر =  
 $7x - y + 6 =$

و معادله یک محور بازتاب:

$$\Rightarrow x + 7y + 8$$

۱۳. داریم:

الف)  $T(x, y) = (2x, 2y), A = (2, 0)$

$$\Rightarrow A' = T(2, 0) \Rightarrow A' = (4, 0)$$

$$B = (0, 4) \Rightarrow B' = T(0, 4)$$

$$\Rightarrow B' = (0, 8), C = (4, 5) \Rightarrow C' = T(4, 5)$$

$$\Rightarrow C' = (8, 10)$$

$$m/AB = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 0}{0 - 2} = -2,$$

$$m/A'B' = \frac{8 - 0}{0 - 4} = -2, m/AB = m/A'B' = -2$$

$$m/BC = \frac{5 - 4}{4 - 0} = \frac{1}{4}, m/B'C' = \frac{10 - 8}{8 - 0} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow m/BC = m/B'C' = \frac{1}{4}$$

$$m/AC = \frac{5 - 0}{4 - 2} = \frac{5}{2}, m/A'C' = \frac{10 - 0}{8 - 4} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow m/AC = m/A'C' = \frac{5}{2}$$

بنابراین  $A'B'$  موازی  $AB$ ,  $B'C'$  موازی  $BC$  و  $A'C'$  موازی  $AC$  است، یعنی پاره‌خطهای نظیر موازی‌اند.

$$AB = \sqrt{(0 - 2)^2 + (4 - 0)^2} = 2\sqrt{5},$$

$$A'B' = \sqrt{(0 - 4)^2 + (8 - 0)^2} = 4\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow A'B' = 2AB, AC = \sqrt{(4 - 2)^2 + (5 - 0)^2}$$

$$= \sqrt{2^2 + 25} = \sqrt{29}, A'C' = \sqrt{(8 - 4)^2 + (10 - 0)^2} = 2\sqrt{29}$$

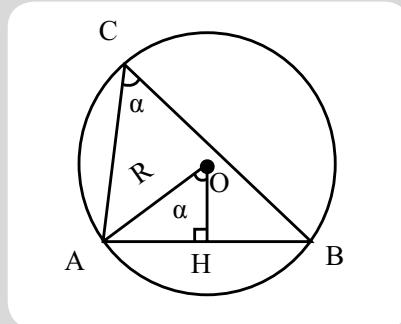
$$\Rightarrow A'C' = 2AC$$

$$BC = \sqrt{(4 - 0)^2 + (5 - 4)^2} = \sqrt{17},$$

$$B'C' = \sqrt{(8 - 0)^2 + (10 - 8)^2} = 2\sqrt{17}$$

$$\Rightarrow B'C' = 2BC$$

$a$  بخشی از آن است و  $OH$  فاصله مرکز این دایره از وتر  $AB$  باشد، داریم:



الف)  $R = \frac{AB}{2 \sin \alpha} = \frac{4\sqrt{3}}{2 \sin 60^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = 4 \Rightarrow R = 4$

ب)  $OH = R \cos \alpha = 4\sqrt{3} \times \cos 60^\circ = 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow OH = 2\sqrt{3}$

۱۰. بنا به رابطه‌های متریک در دایره داریم:

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

$$\Rightarrow 3y \cdot 2y = 2x \cdot 3x \Rightarrow 6y^2 = 6x^2$$

$$\Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = y, x = -y$$

از طرفی داریم:

$$AB = 2CD - 10$$

$$\Rightarrow 3y + 2y = 6x + 4x - 10$$

$$\Rightarrow 5y = 10x - 10$$

از آن جا خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x = y \\ 5y = 10x - 10 \Rightarrow 5x = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2$$

$$\Rightarrow AB = 5y = 5 \times 2 = 10,$$

$$CD = 5x = 5 \times 2 = 10$$

۱۱. داریم:

$$\begin{cases} 2x + 5 = 3 \\ y - 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow M = (-1, 4)$$

۱۲. محور این بازتاب، نیمسازهای

زاویه‌های بین این دو خط‌اند. از طرفی

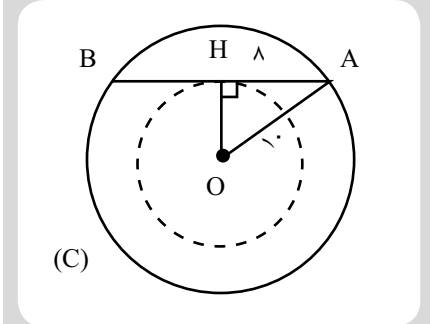
می‌دانیم که معادله نیمسازهای زاویه‌های

بین دو خط به معادله‌های:

که کمان در خور قرار دارد) از نقطه  $K'$  خطی موازی  $BC$  رسم می‌کنیم و نقطه برخورد آن با کمان در خور را  $A'$  و  $A'$  می‌نامیم و از  $A'$  و  $C$  به  $B$  وصل می‌کنیم. مثلث‌های  $ABC$  و  $A'B'C$  جواب مسئله‌اند.

بحث: به تعداد نقاط برخورد، خط  $K'x$  که از  $K'$  موازی  $BC$  رسم می‌شود. با کمان در خور زاویه  $A$ ، مسئله دارای جواب است.

۶. دایره  $(O, 10)$  و وتر  $AB$  به طول ۱۶ از این دایره را در نظر می‌گیریم. از  $O$  عمود  $OH$  را بر  $AB$  فرود می‌آوریم و از  $O$  به  $A$  وصل می‌کنیم. داریم:



$$OA = R = 10, AH = \frac{AB}{2} = \frac{16}{2} = 8,$$

$$OH = \sqrt{10^2 - 8^2}$$

$$\Rightarrow OH = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 = \text{مقدار ثابت}$$

پس مکان هندسی نقطه  $H$  وسط وتر  $AB$ ، دایره‌ای به مرکز  $O$  و به شعاع ۶ است.

۷. داریم:

$$\text{محیط چهارضلعی} = 2(AB + CD)$$

$$\Rightarrow 120 = 2(14 + x + x + 6 + 20)$$

$$\Rightarrow 60 = 2x + 40 \Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow x = 10$$

۸. داریم:

$$\begin{cases} x + y = 36^\circ \\ 42 = \frac{y - x}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 36^\circ \\ y - x = 84^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2y = 444 \Rightarrow y = 222^\circ$$

$$\Rightarrow x = 36^\circ - 222^\circ = 138^\circ$$

۹. اگر شعاع دایره‌ای باشد که کمان

در خور زاویه  $\alpha$  رو به پاره‌خط  $AB$  به طول





$$\frac{RK}{HT} = \frac{PK}{PH} = \frac{PR}{PT} \quad (2)$$

هم‌چنین  $RS \parallel MT$  است، پس:

$$\frac{RS}{MT} = \frac{PR}{PT} = \frac{PS}{PM} \quad (3)$$

از مقایسهٔ رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳)

نتیجه می‌شود که:

$$\frac{SK}{MH} = \frac{RK}{HT} = \frac{RS}{MT}$$

بنابراین، دو مثلث RKS و MHT

متشابه‌اند.

۱۶. در مکعب مستطیل به ضلع‌های b

a، و c و قطر d داریم:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

از آن‌جا با توجه به این‌که

$$d = AH = 10\sqrt{65}, AD = b = 20,$$

$$AB = a = 50$$

با فرض  $AF=c$  داریم:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad (\text{الف})$$

در نتیجه ضلع سوم مکعب مستطیل

$$10\sqrt{65} = \sqrt{50^2 + 20^2 + c^2}$$

$$6500 = 2500 + 1600 + c^2$$

$$\Rightarrow c^2 = 2400 \Rightarrow c = 20\sqrt{6}$$

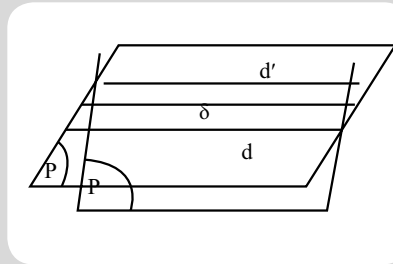
(ب) عمود مشترک دو خط متناظر EF و

BG پاره خط FG است، زیرا FG هم بر EF

( $\widehat{FGB} = 90^\circ$ ) و هم بر BG ( $\widehat{GFE} = 90^\circ$ )

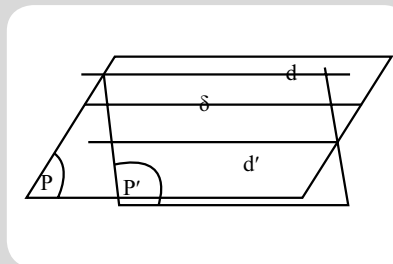
عمود است. بنابراین طول این عمود مشترک

مساوی طول ضلع AB یعنی ۵۰ است.



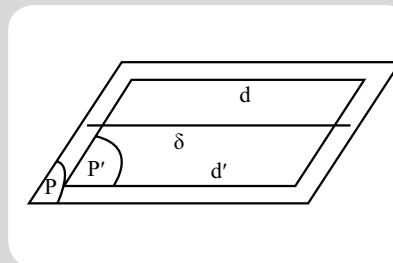
(۴) اگر  $h \neq 0$  و  $h' = 0$  باشد، صفحهٔ

$P'$  با صفحهٔ  $P$  در خط  $d'$  متقاطع است.



(۵) اگر  $h = h' = 0$  باشد، صفحهٔ  $P'$  بر

صفحهٔ  $P$  منطبق است.



۱۵. می‌دانیم که اگر صفحه‌ای دو صفحهٔ

موازی را قطع کند، فصل مشترک‌های

ایجاد شده با هم موازی‌اند. با توجه به این

نکته، KS و MH که فصل مشترک‌های

صفحهٔ گذرنده بر دو خط KH و SM با

هم موازی‌اند. پس دو مثلث PKM و PMS

متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{SK}{MH} = \frac{PS}{PM} = \frac{PK}{PH} \quad (1)$$

هم‌چنین  $RK \parallel HT$  است، پس:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = 2$$

بنابراین ۲ است، یعنی پاره خط‌های متناظر متناسب‌اند و نسبت آن‌ها برابر ۲ است.

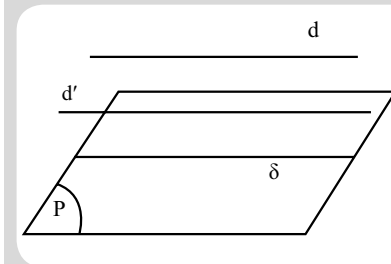
این تبدیل تجانس‌ی به مرکز O، مبدأ

مختصات و نسبت تجانس  $k=2$  است.

۱۴. دو خط  $d'$  و  $d$  موازی صفحهٔ  $P$

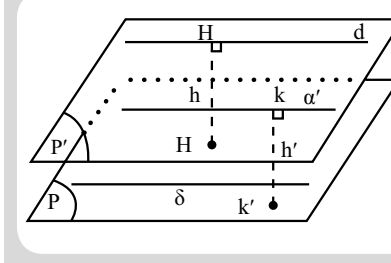
هستند. فاصلهٔ دو خط  $d'$  و  $d$  از صفحهٔ  $P$

را به ترتیب  $h'$  و  $h$  می‌نامیم.



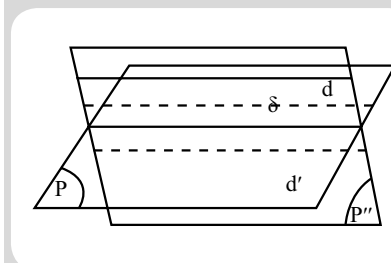
(۱) اگر  $h = h' \neq 0$  باشد، صفحهٔ  $P'$  با

صفحهٔ  $P$  موازی است.



(۲) اگر  $h \neq h'$  باشد، صفحهٔ  $P'$  با صفحهٔ

$P$  متقاطع است.



(۳) اگر  $h=0$  و  $h' \neq 0$  باشد، صفحهٔ  $P'$

با صفحهٔ  $P$  در خط  $d$  متقاطع است.



# نمایه مقاله‌های ۶۹ شماره‌ی برهان متوسطه

ب	اتحاد و معادله (جبر) / ۵۱، ۵۲، ۵۳ و ۵۶	۱	اتحادهای مثلثاتی، نامساوی‌های مثلثاتی (مثلثات) / برهان ۲
بخش‌پذیری در چندجمله‌ای‌ها (جبر) / ۱	استدلال‌های ریاضی (منطق) / ۵۵ و ۵۶		اثبات‌های مهم جبری (جبر) / برهان ۴
بسط دوجمله‌ای خیام-نیوتن و تعمیم آن (جبر) / ۵	ارثیهٔ مرد عرب (منطق) / ۵۶		اثبات نادرستی و ناتمامی قواعد استنتاج (منطق) / برهان ۴
برهان خلف (استدلال) / ۶	احتمال شرطی در فضاهای هم‌شانس و غیر هم‌شانس (احتمال) / ۵۶		اثبات شرطی (منطق) / برهان ۷
بردارها (جبر) / ۱۲ الی ۱۵	اثبات اصل لانهٔ کبوتری در حالت کلی (آنالیز ترکیبی) / ۵۶		اصل حجره‌ها یا لانهٔ کبوتری (آنالیز ترکیبی) / ۹
بی‌نهایت (جبر) / ۱۹	انتخاب یک دسته گل (آنالیز ترکیبی) / ۵۸		استفاده از کامپیوتر در حل معادلات غیرخطی (کامپیوتر) / ۱۰
بررسی وضعیت دو دایره نسبت به هم (هندسه تحلیلی) / ۲۰	اثبات دیگری بر قضیهٔ هرون (هندسه) / ۵۸		اثبات درستی قوانین مقدماتی تسویر (منطق) / ۱۱ و ۱۳
بررسی قضیه‌های مشتق و کاربردهای آن (دیفرانسیل) / ۲۷ و ۲۸	انتگرال مرزدار و بی‌مرز (انتگرال) / ۵۹		اثبات نادرستی (منطق) / ۱۲ و ۱۳
برنامه‌نویسی به زبان پاسکال (کامپیوتر) / ۳۳	اعداد جالب ریاضی (حساب) / ۵۹		انتگرال معین (دیفرانسیل) / ۱۲
بحث در وجود و تعداد جواب‌های معادله سیاله تحت فضای محدود (جبر) / ۳۵	اتحادهای مثلثاتی (مثلثات) / ۶۳		اثبات نامساوی‌ها (جبر) / ۱۷
بخش‌پذیری (جبر) / ۳۰ و ۵۶	انتگرال‌گیری جدولی (دیفرانسیل) / ۶۳		اصل رد و شمول (آنالیز ترکیبی) / ۲۰
بحثی در حل معماهای فکری و منطقی (سرگرمی ریاضی) / ۴۳	اتحاد و تجزیه (جبر) / ۶۶		اثبات اتحاد (جبر) / ۲۳
بحث پیرامون مقاطع مخروطی (هندسه تحلیلی) / ۴۳	اتحادی دیگر (جبر) / ۶۶		اثبات اتحاد مزدوج (جبر) / ۲۴
برد تابع (جبر) / ۴۴	اثبات بازگشتی (استدلال ریاضی) / ۶۷		اثبات یکتا بودن جواب در حل یک مسأله (هندسه) / ۲۵
با چشم بسته وارد دنیای ریاضیات نشوید (عمومی) / ۴۴	اعداد موهومی (عمومی) / ۶۷		انتگرال کسرهای گویا (دیفرانسیل) / ۲۵ و ۲۶
بازتابندگی مقاطع مخروطی (هندسه تحلیلی) / ۴۶	اعداد اول (عمومی) / ۶۸	آ	از تاریخ بیاموزیم (عمومی) / ۲۹ الی ۴۷
بزرگ‌ترین توان $m$ در $n!$ (نظریهٔ اعداد) / ۵۰	اثبات یک فرمول کاربردی در دیفرانسیل (دیفرانسیل) / ۶۸	آموزش ترجمه و متون ریاضی (آموزش ترجمه متون) / ۵ الی ۲۸	اتحادهای جبری (جبر) / ۳۱
بحث وجود و علامت ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم پارامتری ۱ (جبر) / ۵۱ و ۵۲		آشنایی با مشاهیر ریاضی جهان (عمومی) / ۹	اثبات چند قضیهٔ هندسه از راه‌های تازه و ساده (هندسه) / ۳۸
با راهیان المپیاد ریاضی (المپیاد) / ۴۷ تا ۶۸		آیا تابعی جبری وجود دارد که متناوب باشد (جبر) / ۱۰	اصول شمول و عدم شمول و کاربردهای آن (آنالیز ترکیبی) / ۳۹
بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم (جبر) / ۵۳ الی ۵۵		آشنایی با اعداد مختلط (جبر) / ۱۳	اثبات اتحادها به کمک هندسه (جبر) / ۴۰ و ۴۱
بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه‌های مشترک (نظریهٔ اعداد) / ۵۸		آموزش ریاضی با تأکید بر کاربردها (عمومی) / ۲۱	استقرای ریاضی (نظریهٔ اعداد) / ۴۰ و ۴۱
بلندای خوپس (هندسه) / ۶۰		آموزش برنامه‌نویسی پاسکال (کامپیوتر) / ۲۱، ۲۲ و ۳۱	اثبات قضیهٔ فیثاغورس (هندسه) / ۴۳
برتراندراسل (عمومی) / ۶۲		آیا قاعدهٔ هویتال همیشه کارآمد است؟! (دیفرانسیل) / ۳۹ و ۴۰	اعداد فیبوناتچی (جبر) / ۴۰ الی ۴۴
بی‌نهایت (عمومی) / ۶۶		آیا استدلال تمثیلی یک استدلال ریاضی است (منطق) / ۳۳	اتحادها و معادله‌ها (جبر) / ۴۳
بخش‌پذیری (جبر) / ۶۶		آهنگ تغییر (دیفرانسیل یا حسابان) / ۳۵	اصل لانهٔ کبوتری (آنالیز ترکیبی) / ۴۳ و ۶۹
پ		آشنایی با بستهٔ نرم‌افزاری ممتیکا (کامپیوتر) / ۶۷ الی ۶۹	احتمال شرطی، پیشامدهای مستقل و وابسته (احتمال) / ۴۳ و ۴۴
پارادوکس وصیت شگفت‌انگیز (سرگرمی،			اعداد اول (نظریهٔ اعداد) / ۴۹
			اثبات دو قضیهٔ تقارن به کمک نگاشت‌ها (جبر) / ۴۴

چند حکم بسیار ساده با نتیجه‌های بسیار جالب (هندسه)/ ۶۳	تحقیقی درباره نقش تاریخ ریاضیات در آموزش ریاضی (تاریخ ریاضیات)/ ۲۸	پارامتری جبری متجانس (جبر)/ ۹
چند مسئله در جبر، هندسه و هندسه تحلیلی (هندسه)/ ۶۴	تابع معکوس (جبر)/ ۳۷	پارادوکس‌های ریاضیات و علوم (سرگرمی، ریاضی)/ ۳۱ و ۳۹
چند نکته درباره اعداد اول (نظریه اعداد)/ ۶۵	تعیین علامت عبارت‌های جبری (جبر)/ ۲۹ و ۳۰	پارادوکس شیپور گابریل (جبر)/ ۳۵
چند مسئله پیکار جو (المیاد)/ ۶۸	تعیین تعداد روابط (ترکیبیات)/ ۳۱	پیشامد نامنتظر در قضیه وارون (حسابان)/ ۴۰
چند رادیکال مسلسل (جبر)/ ۶۹	توزیع‌های گسسته (احتمال)/ ۳۵	پنج روش برای محاسبه $S_p(n) = \sum_{i=1}^n i^p$ (دیفرانسیل)/ ۶۱
ح	تابع نمایی و تابع لگاریتمی (جبر)/ ۳۷ و ۳۹	ت
حرف اول (یادداشت سردبیر)/ ۱ تا ۶۹	تبدیل در صفحه (جبر خطی)/ ۳۹	تقارن (هندسه)/ ۱ و ۱۵
حلقه و میدان (جبر)/ ۸	تابع‌های متناوب و روش‌های محاسبه دوره تناوب آن‌ها (جبر)/ ۳۹	تاریخچه مختصر پیدایش هندسه (هندسه)/ ۱
حد (تعریف حد)، (دیفرانسیل)/ ۱۳، ۱۴، ۱۶ و ۱۷	تابع‌های توانی و مدل‌های ریاضی (جبر)/ ۳۹	تاریخچه مجلات ریاضی در ایران (عمومی)/ ۲۷ و ۶۶ الی ۶۹
حل یک مسئله به روش‌های جبری، هندسی و... (هندسه و جبر)/ ۱۳	تعمیم قضیه فیثاغورس (هندسه)/ ۴۰	تصادد هندسی (جبر)/ ۳
حل یک مسئله جالب هندسه به کمک تابع همنگار (هندسه)/ ۱۴	تابع‌های متناوب (جبر)/ ۴۰	تابع و بررسی خاصیت یک به یکی در انواع توابع (جبر)/ ۴
حل یک مسئله آنالیز با هندسه (هندسه)/ ۱۹	تعمیم یافته اصل لانه کبوتر (ترکیبیات)/ ۴۱	تقارن محوری و مرکزی در تابع‌های $\sin x$ و $\cos x$ (جبر)/ ۵
حجم یک مخروط (هندسه تحلیلی)/ ۳۴	تقریب ریشه سوم یک عدد (جبر)/ ۴۲	توابع پوشا و بررسی خاصیت پوشایی در انواع توابع (جبر)/ ۶
حل معادله هم‌نهشتی (نظریه اعداد)/ ۳۵	تابع حسابی فی‌اویلر (نظریه اعداد)/ ۴۲	تابع معکوس تابع‌های مثلثاتی (جبر)/ ۶ الی ۸
حد تابع (دیفرانسیل)/ ۳۹	تصادد عددی (جبر)/ ۴۵	تعیین دامنه و برد توابع (جبر)/ ۶ و ۷
حل معادله‌های مثلثاتی (مثلثات)/ ۲۹ الی ۴۳	تعیین وضع نقطه و صفحه به هم (هندسه تحلیلی)/ ۴۶	تناقض‌ها در ریاضیات و علوم (منطق)/ ۶
حد پیوستگی و مشتق‌پذیری... (دیفرانسیل)/ ۴۱	تعیین نوع مقطع مخروطی (هندسه تحلیلی)/ ۵۲	تحقیقی پیرامون عدد $\pi$ (جبر)/ ۸
حل یک مسئله هندسه به کمک ترسیم (هندسه)/ ۴۲	تابع جزء صحیح (جبر)/ ۵۳ و ۵۴	توابع گزاره‌ای و سورها (منطق)/ ۹ و ۱۰
حل نامعادله‌های جبری به روش هندسی (جبر و هندسه)/ ۴۲	ترکیبیات/ ۳۴، ۳۵، ۵۴ و ۵۵	تعیین علامت عبارت‌های جبری و حل نامعادلات و دستگاه توأم (جبر)/ ۱۱
حل معادله‌های غیر ساده مثلثاتی (مثلثات)/ ۴۵، ۴۸ و ۵۰	تابع (جبر)/ ۵۵	توان (حساب)/ ۱۶ و ۱۷
حل معادله‌های کلاسیک مثلثاتی (مثلثات)/ ۴۹	تجزیه (حساب)/ ۵۹	تبدیل-تبدیلات خطی (نگاشت‌های خطی)، (جبر خطی)/ ۱۷
حل هندسه چند معادله (هندسه تحلیلی)/ ۵۸	تولد یک مجله (مصاحبه)/ ۵۹ و ۶۰	تجزیه چندجمله‌ای‌ها از طریق ریشه‌یابی (جبر)/ ۱۸
حد تابع در یک نقطه (دیفرانسیل)/ ۶۰ و ۶۱	تعمیم قضیه مربع ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه (هندسه)/ ۶۲	در حاشیه تابع (جبر)/ ۱۹ و ۲۳
خ	تعداد افزای‌های یک مجموعه $\Pi$ عضوی (مجموعه‌ها)/ ۶۳	تغییرات و انتقال منحنی‌ها (جبر)/ ۲۰
خطوط مجانب‌ها (دیفرانسیل)/ ۱۰	تابع چندجمله‌ای (توابع)/ ۶۴ و ۶۵	ترکیبیات (آنالیز ترکیبی)/ ۲۱
خط‌های راست و صفحه‌های عمودبرهم در فضا (هندسه تحلیلی)/ ۱۵ و ۱۷	تابع رونسکی (ماتریس)/ ۶۵	تفوری زوج خط (هندسه تحلیلی)/ ۲۲
خم پروانه (هندسه)/ ۲۸	تئوری پروانه (هندسه)/ ۶۶	تجزیه یک عدد به عوامل اول (نظریه اعداد)/ ۲۲
د	تعیین دامنه توابع با استفاده از رسم نمودار (جبر)/ ۶۷	تابع (چند نکته درباره $f(x)$ ها)، (جبر)/ ۲۲
در باغ تجربه‌ها (عمومی)/ ۴، ۵، ۸، ۲۱، ۲۳ الی ۲۵ و ۲۸	تابع توانی (جبر)/ ۶۸	تثلیث زاویه (هندسه)/ ۲۳ و ۲۵
در حاشیه مجموعه‌ها (مجموعه‌ها)/ ۵	ج	تجزیه چندجمله‌ای‌ها (جبر)/ ۲۴
	جزء صحیح (حساب)/ ۲۴، ۳۰، ۲۹، ۳۱ و ۳۸	توابع مولد (گسسته)/ ۲۵
	جدول ریاضی (عمومی)/ ۴۰، ۶۱ و ۶۲	تربیت خلاقیت ریاضی (عمومی)/ ۲۵
	جمع چیست؟ (تابع)/ ۵۹	تفکر الگوریتمی و هنر برنامه‌نویسی (کامپیوتر)/ ۲۸
	چ	
	چند برهان برای قضیه هم‌رسی سه ارتفاع مثلث (هندسه)/ ۵۵	

روشی دیگر برای محاسبه ماتریس وارون (ماتریس) / ۶۷	رابطه هم‌نهشتی - خواص و کاربردهای آن در Z (نظریه اعداد) / ۱۴	دیفرانسیل و انتگرال / ۶ و ۷
ریاضیات و تصمیم‌گیری جمعی (عمومی) / ۶۸	ریاضیات کاربردی (عمومی) / ۱۶	دوران در هندسه تحلیلی (هندسه تحلیلی) / ۹
رابطه بین مجذور اعداد و مجذور مقلوب آن‌ها (عمومی) / ۶۸	رادیکال (حساب) / ۱۷ الی ۲۱، ۳۰ و ۳۱	دستگاه محورهای مختصات (هندسه تحلیلی) / ۱۲
س	رسم نمودار تابع f از روی نمودار تابع f (دیفرانسیل) / ۱۸ و ۶۴	درباره مسائل ساختمانی در هندسه فضایی (هندسه تحلیلی) / ۱۳
سرگرمی برای اندیشه‌ورزی (منطق) / ۲۰، ۲۲ و ۶۷	ریاضیات و کاربردهای آن (عمومی) / ۱۸	در پیرامون منظومه شمسی (عمومی) / ۱۴ و ۱۵
سهمی (هندسه تحلیلی) / ۲۷	رسم نمودار تابع $\frac{1}{f}$ از روی نمودار تابع f (دیفرانسیل) / ۲۱	داستان شیر و موش در هندسه (عمومی) / ۱۷
سلسله درس‌هایی از ریاضیات گسسته / ۴۵ و ۵۱	رسم منحنی‌های توابع سینوسی و کسینوسی به روش نقطه‌یابی و انتقال (مثلثات) / ۲۲	در اظهار نظر اشتباه نکنیم (عمومی) / ۱۸
سری (دیفرانسیل) / ۴۶	روش‌های عددی برای محاسبه مقدار تقریبی انتگرال‌های معین (دیفرانسیل) / ۲۲ و ۶۶	دسته خط (هندسه تحلیلی) / ۱۹
سری هندسی مثلثاتی (سری‌ها) / ۶۸	رابطه آموزش ریاضی و فرهنگ (عمومی) / ۲۴	در کشویی (هندسه) / ۲۲
ش	رشد و زوال (دیفرانسیل) / ۲۹	دنباله (دیفرانسیل) / ۲، ۲۳، ۴۵ و ۶۹
شگفتی‌های ریاضی (عمومی) / ۵	ریاضیات ترکیبیاتی (ترکیبیات) / ۲۷	دنباله و تصاعدهای عددی و هندسی (جبر) / ۲۹
شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (عمومی) / ۱۱ الی ۲۶	روش‌های محاسبه سریع (حساب) / ۳۴ و ۳۷	در حاشیه تابع (جبر) / ۲۴
شهود ریاضی و استدلال شهودی (منطق) / ۴۷	روش تعیین عرض‌های اکسترمم (دیفرانسیل) / ۳۴	در حاشیه مشتق و مشتق‌پذیری (دیفرانسیل) / ۲۵
شرایط تدریس ریاضی (منطق) / ۴۸	ریاضیات تفریحی از منظر تکامل (عمومی) / ۳۸ و ۳۹	درباره سال ۲۰۰۰، سال جهانی ریاضیات (عمومی) / ۲۵
شرط عمود بودن و مماس بودن یک خط بر مقاطع مخروطی (هندسه تحلیلی) / ۱۴	روشی برای اثبات $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (دیفرانسیل) / ۳۸	دو روش در ترسیم نیمساز (هندسه) / ۲۶
ص	رسم نمودار fog از روی نمودارهای f و g (دیفرانسیل) / ۴۰ و ۶۳	دیفرانسیل خطی‌سازی و خط / ۲۷
صورت قطبی (مثلثاتی) و هندسی اعداد مختلط (جبر و مثلثات) / ۱۵	ریشه‌های معادله درجه دوم (جبر) / ۴۱	دفاعیه ریاضی‌دان (عمومی) / ۳۱
صفر (عمومی) / ۶۲	ریاضیات و نقش آن در زندگی روزمره (عمومی) / ۴۱	در آینه (عمومی) / ۳۱
ض	راه‌حل‌های کوتاه برای مسائل شناخته شده ریاضی (عمومی) / ۴۳	در حاشیه مثلثات / ۲۹ الی ۳۱
ضرب خارجی و برخی ویژگی‌های آن (هندسه تحلیلی) / ۴۵	روش ارشمیدس برای محاسبه عدد $\pi$ (جبر) / ۴۶	درباره یک مسئله بوزجانی (هندسه) / ۳۰
ضرب ماتریس‌ها و خواص عملی ضرب ماتریس (ماتریس) / ۵۰	روش مگسی در حل مسائل ریاضی (عمومی) / ۵۰	دترمینان (ماتریس) / ۴۰ و ۴۱
ط	رسم نمودار تابع بدون مشتق (دیفرانسیل) / ۵۵ و ۵۴	در حاشیه گراف‌های ساده (گراف) / ۴۱
طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روش‌های مقدماتی (جبر) / ۳ الی ۲۴	رویکرد هندسی - رویکرد جبری (هندسه و جبر) / ۵۶ تا ۶۹	دنباله، حد دنباله (دیفرانسیل) / ۴۱ و ۴۲
طرح یک مسئله جالب درباره قوطی‌ها (عمومی) / ۷	ریاضیات در ایران (عمومی) / ۵۹ تا ۶۷	درباره اتحاد و معادله (جبر) / ۴۱ و ۴۲
طول تسمه (عمومی) / ۵۵	روش یافتن جمله عمومی یک دنباله خاص با ... (حساب) / ۵۹	در حاشیه هندسه تحلیلی، صفحه نیمساز در فضا (هندسه تحلیلی) / ۴۳
طراحی با رابطه‌های ریاضی (رسم نمودار رابطه) / ۶۳	رسم نمودار تابع (جبر) / ۵۹	دایره‌های محاط در بیضی (هندسه تحلیلی) / ۵۱
	ریشه دکارت (عمومی) / ۶۱	دنباله‌های عددی (جبر) / ۵۲
	ریاضی‌دان و شاعر خطه‌ی خراسان (عمومی) / ۶۶	درخت چیست؟ (گراف) / ۵۳
	ریشه خارجی معادله (جبر) / ۶۶	دستگاه شمار (نظریه اعداد) / ۶۳
		درباره یکی از نظرهای هوشمندانه ابوالوفای بوزجانی (هندسه) / ۶۷
		ر
		روش برهان خلف (منطق) / ۸
		ریاضیات گسسته / ۱۰، ۱۶ و ۱۸ الی ۲۴
		رابطه - خواص رابطه (مجموعه‌ها) / ۱۲
		رابطه‌های هم‌ارزی و کلاس‌های هم‌ارزی (مجموعه‌ها) / ۱۳، ۴۵ و ۶۸

ع	عمود مشترک دو خط متناظر (هندسه تحلیلی) / ۷	کشف یک عدد با بازی ریاضی (عمومی) / ۶۷	منطق خود را بیازماید (منطق) / ۲۱
ح	عدد جادویی هفت (پیش‌گویی) (حساب) / ۱۳	گ	میانگین همساز (جبر) / ۲۲
خ	عمل حاصل ضرب دکارتی بین مجموعه‌ها (مجموعه‌ها) / ۱۱	گروه پیدایش و کاربرد نظریه گروه‌ها (جبر نوین) / ۱	مجموع $K$ عدد طبیعی اولیه (نظریه اعداد) / ۲۳
غ	عبارت‌های جبری گویا و اعمال بر روی آن‌ها (جبر) / ۴۴	گراف (گراف) / ۱۷ و ۱۸	مفهوم حد (دیفرانسیل) / ۲۳
۴۲	عدم وجود حد (دیفرانسیل) / ۳۳	گراف اولبری (گراف) / ۵۱	مصاحبه با یک عدد (عمومی) / ۲۴
ف	عدد پی (نظریه اعداد) / ۶۴	گراف همپلتنی (گراف) / ۵۲	مبهم یا تعریف شده (دیفرانسیل) / ۲۵
۱۰	عدد $e$ (نظریه اعداد) / ۶۵	گشت‌وگذاری در ریاضیات معاصر (عمومی) / ۲۹ الی ۳۳	مسئله حل مسئله‌های ریاضی (عمومی) / ۲۵
۱۴	فاصله یک نقطه از یک مجموعه نقاط (هندسه تحلیلی) / ۸	گراف تورنمنت (گراف) / ۵۸	الی ۳۰
۵۲	فیثاغورس و هوش آزمایشی فرزندان (عمومی) / ۱۰	گراف‌های منتظم و کامل (گراف) / ۶۷	معرفی ریاضی‌دانان دوره اسلامی (تاریخ ریاضیات) / ۲۶
۴۵	فاصله نقطه از خط در فضا (هندسه تحلیلی) / ۱۴	ل	معمایایی با ماهیت ریاضی (منطق و سرگرمی) / ۲۷ و ۲۸
	فضای برداری (جبر خطی) / ۱۵ و ۱۶	لگاریتم (حساب) / ۱ و ۵۸	مربع‌های فوق جادویی (منطق و سرگرمی) / ۲۸
	فرمولی در اعداد اول و نتایج آن (نظریه اعداد) / ۵۲	م	مقاطع مخروطی (هندسه تحلیلی) / ۳۱ و ۳۷
	فرمانروای هوشمند (عمومی) / ۵۹	منطق قدیم و ریاضیات (منطق) / ۱	معادله خط (هندسه تحلیلی) / ۳۷
	ق	معادلات (جبر) / ۲	ماتریس‌ها، تبدیل و کاربردهای آن‌ها (جبر خطی) / ۳۸
	قضیه رول و قضیه مقدار میانگین (دیفرانسیل) / ۴۵	منطق جدید و ریاضیات (منطق) / ۲	مدل‌سازی مقدماتی ریاضی (عمومی) / ۳۸
	قرینه‌یابی در فضا (هندسه تحلیلی) / ۵۱	محاسبه نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه (مثلثات) / ۳	مکان‌های هندسی دو نقطه‌ای (هندسه) / ۴۰
	قضیه مقدار میانگین (دیفرانسیل) / ۲۹ و ۳۰	مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (عمومی) / ۳ تا ۲۸	مبحثی در هم‌گرایی چند سری خاص (دیفرانسیل) / ۴۲
	قضیه کوتاه‌ترین راه (هندسه) / ۳۴	مثال‌های هندسی برای تابع‌های گسسته (هندسه و جبر) / ۴	مجان‌ها (دیفرانسیل) / ۴۲
	قضیه نیم‌ساز مثلث و کاربردهایی از آن (هندسه) / ۶۰	مفهوم‌های اصلی و اصل موضوع‌ها در هندسه فضایی (هندسه تحلیلی) / ۷ الی ۱۰	مشق‌پذیری (دیفرانسیل) / ۸
	قضیه تقسیم و کاربردهای آن در $Z$ (نظریه اعداد) / ۶۱ تا ۶۴	مرکز یاب دایره (هندسه تحلیلی) / ۷	میدان (جبر نوین) / ۸
	ک	مشق‌پذیری (دیفرانسیل) / ۸	معادله درجه سوم (جبر) / ۹
	کانون یاب بیضی (هندسه تحلیلی) / ۱۰	مشتق‌پذیری (دیفرانسیل) / ۸	مکان هندسی (هندسه) / ۹ الی ۳۷
	کاربردهایی از تابع هم‌نگار (جبر) / ۱۲	میدان (جبر نوین) / ۸	مثلث ارتفاعیه (هندسه) / ۱۰ و ۱۱
	کاربرد دترمینان (جبر خطی) / ۱۷ و ۱۸	معادله درجه دوم (جبر) / ۱۱، ۱۱، ۴۸ الی ۵۱	معادله درجه دوم (جبر) / ۱۱، ۱۱، ۴۸ الی ۵۱
	کاربرد ریاضی در شیمی (عمومی) / ۲۱	مبانی کامپیوتر و برنامه‌نویسی (کامپیوتر) / ۱۲	مبانی کامپیوتر و برنامه‌نویسی (کامپیوتر) / ۱۲
	کامپیوتر و شغل آینده (کامپیوتر) / ۲۲	الی ۲۰	مشاهیر ریاضی جهان (تاریخ ریاضی) / ۱۷، ۱۸
	کاربردهایی از قضیه لاگرانژ (جبر) / ۵۸	و ۲۰ تا ۲۲	مشاهیر ریاضی جهان (تاریخ ریاضی) / ۱۷، ۱۸
		محاسبه همزمان سری‌های $\sum_{k=1}^n \sin k\theta$ و $\sum_{k=1}^n \cos k\theta$ به کمک اعداد مختلط (دیفرانسیل) / ۱۷	مشاهیر ریاضی جهان (تاریخ ریاضی) / ۱۷، ۱۸
		معرفی یک اتحاد مثلثاتی و کاربردهایی از آن (مثلثات) / ۱۸	مشاهیر ریاضی جهان (تاریخ ریاضی) / ۱۷، ۱۸
		ماکزیمم و مینیمم (جبر) / ۱۹	مشاهیر ریاضی جهان (تاریخ ریاضی) / ۱۷، ۱۸
		محاسبه مساحت دایره (هندسه تحلیلی) / ۲۰	مشاهیر ریاضی جهان (تاریخ ریاضی) / ۱۷، ۱۸