وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

رشد برهان

فصل نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دورهٔ متوسطه

دورهٔ بیست‌ودوم ✦ زمستان ۱۳۹۱ ✦ شمارهٔ ۲

مجلهٔ رشد برهان متوسطه، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می کند:

● نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه) ● طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ● طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه و...

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می‌شود

● مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است. ● مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشد.
● مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.

بسم الله الرحمن الرحیم

◆مدیرمسئول:
محمد ناصری
◆سردبیر:
حمیدرضا امیری
◆مدیرداخلی:
هوشنگ شرقی
◆طراح گرافیک:
شاهرخ خره‌غانی
◆تصویرگر:
میثم موسوی
◆هیئت تحریریه:
حمیدرضا امیری،
محمد هاشم رستمی،
دکتر ابراهیم ریحانی
احمد قندهاری،
میرشهرام صدر،
هوشنگ شرقی،
سید محمدرضا هاشمی موسوی،
غلامرضا یاسی‌پور
و به یاد همکار عزیزمان
زنده‌یاد پرویز شهریاری
◆ویراستار ادبی:
بهروز راستانی
◆وبگاه:
www.roshdmag.ir
◆رایانامه:
Borhan@roshdmag.ir
◆پیام گیر نشریات رشد:
۰۲۱ ـ ۸۸۳۰۱۴۸۲
◆ نشانی دفترمجله:
تهران، صندوق‌پستی:
۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
☎تلفن دفتر مجله:
۰۲۱ ـ ۸۸۳۰۵۸۶۲
☎تلفن امور مشترکین:
۰۲۱ـ ۷۷۳۳۶۶۵۶
۰۲۱ـ ۷۷۳۳۶۶۵۵
◆شمارگان:
۱۰/۵۰۰ نسخه
◆چاپ:
شرکت افست (سهامی عام)

بهترین راه‌های یادگیری و فهم عمیق

یکی از بهترین راه‌های یادگیری و فهم عمیق مطالب و تثبیت مفاهیم علمی، بازگو کـردن آن برای دیگری، و یا به‌عبارت دیگر، تدریس آن به دیگری است. آیا تا به‌حال برای شـما پیش آمده است که بخواهید مسئله‌ای، قضیه‌ای یا مفهوم و معنی شعری را برای دیگری شرح دهید؟ بی‌شـک تجربه کرده‌اید که به همراه تشـریح آن برای شما جاافتاده و قطعاً مدت زمان بیشتری در ذهن شما باقی‌مانده است. یعنی این موضوع بسیار مهم است که انسان یافته‌های خود را در اختیار دیگران قرار دهد تا ضمن بهره‌رسانی به دیگران، خود نیز از آن بهره‌مند شود. از آنجا که «زکات علم، نشر آن است»، زکات علم خود را نیز داده باشد.

به همهٔ شما عزیزان دانش‌آموز توصیه می‌کنم:

- **آنچـه آموخته‌اید و منابعی که در اختیار دارید (اعم از جزوه، کتاب یا مجله) در طبق اخلاص بگذارید و در اختیار دوستان و علاقه‌مندان قرار دهید.**
- **روی مسـائل و مفاهیم علمی با دوستان و هم‌کلاسی‌های خود به بحـث و تبادل‌نظر بپردازید و از نظـرات یکدیگر بهره‌مند شوید.**
- **برای حل مسـائل علمی به دنبـال راه‌حل‌های بهتر و متنوع‌تر باشـید. فقط به راه‌حل کتاب یا معلم اکتفا نکنید و برای هر مطلب دلیل بخواهید و به دنبال علت باشید. والسلام.**

سردبیر

زنده‌یاد پرویز شهریاری

محمد کرجی

ریاضی‌دان ایرانی

کلیدواژه‌ها: محمد کرجی، جمشـید کاشـانی، ابوالوفای بوزجانی، خیام، مقدمات، اقلیدس، فرنتس وپکه، آدولف هوخهام، بسط دو جمله‌ای

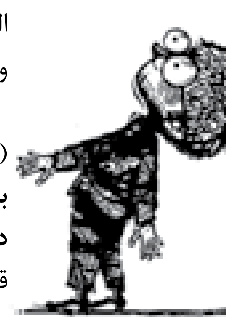
ریاضی‌دانـان ایرانـی، دوره‌ای از تاریـخ ریاضـی را دربرگرفته‌اند که از سـدهٔ سوم تا سـدهٔ نهم هجری ادامه داشته است که یک دورهٔ کامل از تکامل ریاضیات است و بیشتر دورهٔ کاربردی ریاضیـات بـود. بیشـتر ریاضی‌دانان ایرانی، از **محمد خوارزمی** تا **جمشید کاشـانی**، به ریاضیات محاسبه‌ای نظر داشتند تا بتوانند دشواری‌هایی را که در عمل پیـش می‌آید، برطرف کنند. آن‌ها حسـاب و روش‌های محاسبه را پیش بردند و عددنویسی هندی را که در آن از ۱۰ نماد اسـتفاده می‌شـد ـ به همین شیوهٔ امروزی در مبنای ۱۰ نوشـته می‌شد و «موضعی» بود؛ یعنی رقم‌ها بسـته به جای خود ارزشـیابی می‌شدند ـ قبول کردند.

جبـر در ایران و به‌وسـیلهٔ محمد خوارزمـی به‌وجـود آمـد و هنوز هم در سراسـر جهـان بـه همـان نامی شناخته می‌شـود که خوارزمی بر آن گذاشت. در ضمن خوارزمی نخستین الگوریتم‌هـا را برای جبر و در رابطه با حـل معادلهٔ درجه دوم آورده اسـت. **بیرونـی** و **ابوالوفای بوزجانی**، مثلثات را بـه دنبال قانون‌های نخسـتین آن (کـه باز هم کار ایرانی‌هـا بود)، یعنی رابطه‌های مثلثاتی را (چه روی صفحه و چـه روی سـطح کـره) آوردند که بیشـتر در اخترشناسی کاربرد داشت. سرانجام جمشید کاشانی با حل جبری یک معادلهٔ درجهٔ سـوم، سینوس یک درجـه را با دقت تا هر میزان دل‌خواه محاسـبه کـرد. خواجه نصیر توسـی نیز توانسـت براساس کار ریاضی‌دانان پیش از خود، نخستین کتاب مثلثات را به نام «کشف القناع...» بنویسد.

در واقع، ریاضی‌دانـان ایرانی زیر تأثیر «انگیزهٔ بیرونی» ریاضیات بودند، یعنی دشـواری‌هایی را که از «بیرون» در برابر ریاضیات گذاشته می‌شد، حل می‌کردنـد. البته، این وضـع را نباید بـه معنـای آن گرفت کـه از «انگیزهٔ درونـی» ریاضیات پرهیز می‌کردند. از جمله، **ابوالوفـای بوزجانی**، به‌صورت «نیمه‌آشکار» از معکب‌هایی که بیش از سه بعد داشته باشند، صحبت می‌کند. یـا **فضل نیریزی** و **خیـام**، «مقدمات» **اقلیدس** را به چالش می‌کشند.

ریاضی‌دانـان ایرانی در بحث‌های نظـری خود، عـدد را به عنـوان عدد حقیقـی تعریـف می‌کننـد و زمینه را بـرای پیدایش آنالیـز ریاضی مهیا می‌سـازند. ریاضیـات ایرانـی، بعد از ریاضیات یونانی و با اسـتفاده از همهٔ دستاوردهای ریاضیات نظری یونانی و ریاضیات کاربردی پیش از آن به‌وجود آمد و خود در مجموع، جنبهٔ کاربردی داشـت، ولی بسـیاری چیزها هم به ریاضیات نظری افزود.

در ایـن میان بـه ریاضی‌دانی به نـام **محمد کرجـی** (با کنیـهٔ ابوبکر) برمی‌خوریم که به قول **فرنتس وپکه**، خاورشـناس و ریاضـی‌دان آلمانـی، به‌راستی شگفت‌انگیز است. وُپکه یکی از کتاب‌های کرجی را به نام «الفخری فی الجبـر و مقابله» [کتاب فخری در جبر و مقابله] از روی نسخهٔ خطی که در پاریس موجود بود، در سال ۱۸۵۳ در ۲۶۵ صفحـه بـا شـرح و تفصیل منتشـر کرد. بـه دنبـال آن، **آدولف هوخهام** کتاب «الکافی فی الحسـاب» [بحثـی دربارهٔ حسـاب] کرجی را در



سه جلد در سال‌های ۱۸۷۸ و ۱۸۸۰ به آلمانی ترجمه و منتشر کرد. این دو کتاب سرآغاز آشنایی اروپاییان با این دانشمند بزرگ ایرانی بود. کتاب الکافی فی الحساب دارای ۷۰ بخش و دربارهٔ حساب، هندسه و جبر است.

کتاب فخری به نام **فخرالملک** (محمدبن علی بن خلف)، وزیر **بهاءالدولهٔ دیلمی** پسر **عضدالدولهٔ دیلمی** (که از ۴۰۱ تا ۴۰۷ هجری قمری بر عراق کنونی حکومت می‌کرد و در سال ۴۰۷ هجری قمری کشته شد) نوشته شده است. کتاب وُپکه به دلیل ارزش خود مورد توجه خاورشناسان قرار گرفت ولی در نسخه‌ای که مورد استفادهٔ وُپکه بود، نسخه‌نویس نام «کرجی» را «کرخی» آورده بود و وُپکه هم، کرجی را اهل کرخ (یکی از محله‌های بغداد) دانسته است.

انتساب کرجی به عراق کنونی نزدیک به ۵۰ سال بین مورخان ریاضیات رواج داشت تا این‌که در سال ۱۹۳۴، **لوی دولاویدا**، خاورشناس ایتالیایی ثابت کرد که کرخی اشتباه نسخه‌نویس بوده و در واقع، کرجی اهل ایران و از ناحیهٔ «کرج» در نزدیک شهرری (و تهران کنونی) است نه عراق. لوی دولاویدا به کتاب‌های خطی «البدیع فی الحساب» (در کتاب‌خانهٔ واتیکان) و کتابی از کرجی مربوط به جبر در کتاب‌خانهٔ آکسفورد و غیره، استناد می‌کند که همه‌جا نام «کرجی» با جیم نوشته شده است. علاوه بر این، **سموییل یحیا مغربی** که ۷۰ سال بعد از مرگ کرجی می‌زیسته و کتاب «الباهر فی العلم الحساب» را نوشته است و در کتاب خود بارها به نوشته‌های کرجی استناد می‌کند، همه‌جا او را کرجی می‌نامد و نه کرخی.

خود کرجی در پیش‌گفتار کتابش به نام «استخراج آب‌های معدنی» با ترجمهٔ زنده‌یاد **خدیو جم** می‌گوید:

«هنگامی که به عراق وارد شدم و دیدم که مردم آنجا از کوچک و بزرگ دانش‌دوست و قدرشناس علم هستند و دانشمندان را گرامی می‌دارند، کتاب‌هایی در حساب و هندسه تألیف کردم.» یعنی از جای دیگری به عراق آمده بوده است. خود دولاویدا کتاب‌های «البدیع» و «علل حساب الجبر و المقابله» را معرفی و به ایتالیایی ترجمه کرده است.

آنچه از زندگی کرجی می‌دانیم، چندان زیاد نیست. باید در زادگاه خود «کرج» مقدمه‌های دانش را فراگرفته و بعد به شهری که در آن زمان مرکز دانشمندان بوده و کتاب‌خانه‌ای مجهز داشته است، در جست‌وجوی کتاب‌های مورد علاقه‌اش رفته باشد. احتمالاً بعد به بغداد رفته و به خدمت فخرالملک مزبور، وزیر بهاءالدوله و پسرش **سلطان‌الدوله**، معروف به ابوشجاع، درآمده است. کرجی در سال ۴۰۳، بعد از کشته شدن بهاءالدوله عراق را ترک کرده و به زادگاه خود برگشته است. در بازگشت، به دستور **ابوغانیم** (معروف به محمد) کاتب و وزیر **منوچهر قابوس** که از ۴۰۳ تا ۴۲۰ هجری قمری حاکم طبرستان بوده، کتاب «استخراج آب‌های پنهانی» را نوشته است. کرجی در حدود سال ۴۲۰ هجری قمری (۱۰۲۹ میلادی) درگذشته است.

از نوشته‌های او (که تا ۸۰ اثر شمرده‌اند)، تعداد اندکی باقی مانده، ولی از همین کتاب‌های باقی مانده، می‌توان دربارهٔ کرجی و نوآوری‌های او داوری کرد. کرجی یکی از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان ایرانی است و تا آن‌جا که ما اطلاع داریم، بسیاری از دیدگاه‌های او تازه‌اند و به تکامل ریاضیات، به‌ویژه در زمینه جبر یاری فراوان رسانده‌اند.

کتاب‌هایی که از کرجی به‌دست ما رسیده، نشان می‌دهد که او روی حساب، جبر، معادله‌های سیّال، مسّاحی، اخترشناسی و آب‌های زیرزمینی کار می‌کرده است. او مجهول (x) را **شیء**، مربع آن (x^2) را **مال**، مکعب آن (x^3) را **کعب**، توان چهارم را **مال‌مال**، توان پنجم را **کعب مال**، و غیره می‌نامد. برای هر (x^n)، عکس آن را جست‌وجو می‌کند ($\frac{1}{x^n}$)؛ به‌نحوی که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر واحد شود.

او خود را از قید سطح و حجم (که یونانی‌ها و به تبعیت از آن‌ها، ایرانی‌ها برای x^2 و x^3 به‌کار می‌بردند) آزاد می‌کند و عبارت‌های جبری را مثل «مال‌مال و ۳ کعب منهای ۶» (x^4+3x^3-6) مورد بحث قرار می‌دهد. از این راه از قاعده‌های حساب برای جمع، تفریق، ضرب و تقسیم چندجمله‌ای‌ها استفاده می‌کند. او عدد منفی را «عدد ناقص» و عدد مثبت را «عدد زیادتی» یا عدد اضافی می‌نامد و از جمله از رابطهٔ

$$a-(-b)=a+b$$

آگاهی داشته است ولی نتوانسته است جبر چندجمله‌ای را پیدا کند، زیرا این کار مستلزم اطلاع از عمل‌هایی نظیر

$$-a-(-b)=-(a-b)$$

بوده که کرجی کشف نکرده بود؛ یعنی نمی‌توانست یک مقدار منفی را از مقدار منفی دیگری کم کند.

می‌بینیم که محمد کرجی هم در زمینهٔ ریاضیات کاربردی کار کرده است (مثل مساحی، اخترشناسی و استخراج آب‌های پنهانی) و هم در زمینهٔ ریاضیات نظری. او با دید تازه‌ای به چند جمله‌ای‌ها، به توان‌های بالای مجهول و به عددهای منفی نگاه می‌کرد؛ درست همان‌گونه که ما امروز فکر می‌کنیم.

کرجی و ضریب‌های بسط دوجمله‌ای

در سال ۱۹۴۸، **پائول تیولی**، مورخ ریاضی اهل آلمان، وجود دستور **نیوتون** را برای توان‌های درست و مثبت، در «مفتاح‌الحساب» **جمشید کاشانی**، مشهورترین ریاضی‌دان سدهٔ پانزدهم میلادی، کشف کرد. سپس احمداف، مورخ ریاضی اهل تاشکند، قانون تشکیل ضریب‌های دوجمله‌ای را در یکی از رساله‌های **خواجه نصیرتوسی**، ریاضی‌دان سده سیزدهم کشف کرد (این رساله دربارهٔ محاسبه به یاری تخته و شن بحث می‌کند). چه جمشید کاشانی و چه توسی این قاعده را ضمن بررسی قانون‌های مربوط به ریشهٔ عددها آورده‌اند.

هم‌چنین براساس آگاهی‌هایی که داریم، خیام، ریاضی‌دان، فیلسوف و شاعر ایرانی سده‌های یازدهم و دوازدهم میلادی، در رساله‌ای، از کتاب خود به نام «درستی روش هندی در جذر و کعب» نام می‌برد (این کتاب هنوز پیدا نشده است) که در آن به تعمیم قانون‌های هندی دربارهٔ جذر و کعب پرداخته است. بر همین اساس می‌توان معتقد بود که خیام هم در نیمهٔ دوم سدهٔ یازدهم میلادی از دستور نیوتون برای توان‌های مثبت و درست دو جمله‌ای اطلاع داشته است.

در سال ۱۹۷۲ میلادی، **صلاح احمد** و **رشدی راشد** (مورخان ریاضی)، رسالهٔ **ابونصر سموییل یحیا مغربی**، ریاضی‌دان و اخترشناس سدهٔ دوازدهم میلادی را به نام «الباهر فی علم‌الحساب» در دمشق چاپ کردند. مغربی موضوع‌هایی از رسالهٔ کرجی را و به‌ویژه بخشی را که مربوط به ضریب‌های بسط دوجمله‌ای است، نقل کرده است. این رسالهٔ کرجی تاکنون پیدا نشده است و مغربی هم نام آن را نمی‌آورد، ولی به ظاهر باید همان کتاب «فی حساب الهند» باشد که خود کرجی در کتاب «البدیع فی الحساب» خود از آن یاد کرده است.

سموییل مغربی در فصل چهارم از بخش دوم کتاب «الباهر فی علم الحساب» قاعدهٔ بسط $(a+b)^n$ را برای حالت‌هایی که n برابر ۲، ۳، ۴ و ۵ باشد بیان می‌کند. در اینجا ما برگردان آن را از کتاب صلاح احمد و رشدی راشد می‌آوریم:

«حالا قاعده‌هایی را می‌آوریم که به کمک آن‌ها می‌توان تعداد جمله‌ها را برای ضرب در جمله‌های دیگر، وقتی که

یک عدد به دو بخش تقسیم شده باشد، پیدا کرد. کرجی می‌گوید: اگر تو این را می‌خواهی، به عنوان اساس کار، واحد را زیر واحد بگذار. سپس واحد را به ستون بعد ببر. واحدی را که زیر واحد اول قرار دارد، به آن اضافه کن می‌شود دو. این دو را زیر واحد بگذار و بعد دوباره یک واحد زیر آن قرار بده، به‌دست می‌آوری: واحد، دو، واحد. این به تو نشان می‌دهد که مربع هر عدد، وقتی از مجموع دو عدد تشکیل شده باشد، چنین است که هر کدام از عددها را باید یک‌بار در خودش ضرب کنی. زیرا در هر دو طرف واحد و واحد داری و هر عدد را در عدد دیگر باید دو بار ضرب کنی، چون در وسط، دو داری. در مجموع، مربع این عدد را به‌دست می‌آوری.

«حالا دوباره واحد را به ستون بعد ببر. واحد را به دو برابر اضافه کن. سه به‌دست می‌آوری. آن را زیر واحد بنویس. دو را به واحد که زیر آن است اضافه کن. سه به‌دست می‌آوری. آن را به زیر سه بنویس. در ستون سوم به‌دست می‌آوری: واحد، سه، سه، واحد. از اینجا تو می‌دانی مکعب هر عدد، وقتی از دو عدد تشکیل شده باشد، چنین است: هر کدام از عددها را مکعب کن و هر عدد را در مربع دیگری سه بار ضرب کن.

«واحد ستون سوم را به ستون چهارم ببر. سپس واحد را به سه که زیر آن است، اضافه کن، شش به‌دست می‌آوری. آن را زیر چهار بنویس. بعد دومین سه را به واحد اضافه کن. چهار به‌دست می‌آوری. آن را زیر شش بنویس. در ستون چهارم به‌دست می‌آوری: واحد، چهار، شش، چهار، واحد. از اینجا تو می‌دانی که مربع مربع عدد، وقتی از مجموع دو عدد تشکیل شده باشد، چنین است: هر کدام از عددها را مربع مربع می‌کنی، زیرا در انتها واحد داری. سپس هر عدد را در مکعب دیگری چهار مرتبه ضرب می‌کنی، زیرا به دو انتها، یعنی واحد، چهار چسبیده است. سپس مربع یکی را در مربع دیگری شش بار ضرب می‌کنی، زیرا در وسط، شش داری.

به همین ترتیب $(a+b)^5$ داده می‌شود و مؤلف نتیجه می‌گیرد: «از این راه می‌توانیم مربع و مکعب و هر توان دیگری را که بخواهیم، معلوم کنیم.»

در پایان هم جدول ضریب‌های دو جمله‌ای $(a+b)^n$ را، برای $n=1$ تا $n=12$ می‌دهد (جدول را ببینید). به این ترتیب، طبق مدرک‌هایی که در اختیار داریم، محمد کرجی نخستین ریاضی‌دانی است که برای تعیین ضریب‌های بسط دوجمله‌ای راهی قانونمند پیدا کرد و جدولی در این‌باره تشکیل داد. البته ریاضی‌دانان هندی حتی در سدهٔ دوم پیش از میلاد، به صورتی کم و بیش مبهم، از ضریب‌های بسط دوجمله‌ای (با توان مثبت و درست) آگاه بودند، ولی نتوانستند اندیشه‌های خود را به‌طور منظم ارائه دهند. و بعد از جمشید کاشانی و در اروپای پیش از نیوتون، ضریب‌های بسط دوجمله‌ای را خیلی از ریاضی‌دانان کشف کرده بودند (و به احتمالی، بدون آگاهی از کارهای ریاضی‌دانان ایرانی). از جمله در کتاب «حساب مخفی» **میخاییل شتیفل** که در سدهٔ شانزدهم زندگی می‌کرد، و ریاضی‌دانی برجسته و آلمانی بود، می‌توان ردپای این دستور را یافت (کتاب شتیفل در سال ۱۵۴۴ چاپ شد).

شیء	مربع	مکعب	مربع-مربع	مربع-مکعب	مکعب-مکعب	مربع-مربع-مکعب	مربع-مکعب-مکعب	مکعب-مکعب-مکعب	مربع-مربع-مکعب-مکعب	مربع-مکعب-مکعب-مکعب	مکعب-مکعب-مکعب-مکعب
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
	۱	۳	۶	۱۰	۱۵	۲۱	۲۸	۳۶	۴۵	۵۵	۶۶
		۱	۴	۱۰	۲۰	۳۵	۵۶	۸۲	۱۲۰	۱۶۵	۲۲۰
			۱	۵	۱۵	۳۵	۷۰	۱۲۶	۲۱۰	۳۳۰	۴۹۵
				۱	۵	۲۱	۵۶	۱۲۶	۲۵۲	۴۶۲	۷۹۲
					۱	۷	۲۸	۸۴	۲۱۰	۴۶۲	۹۲۴
						۱	۸	۳۶	۱۲۰	۳۳۰	۷۹۲
							۱	۹	۴۵	۱۶۵	۴۹۵
								۱	۱۰	۵۵	۲۲۰
									۱	۱۱	۶۶
										۱	۱۲
											۱

سرانجام باید از **بلز پاسکال** (که کم و بیش با نیوتون هم‌عصر بود)، نام برد که جدولی تشکیل داد و ضریب‌های بسط دوجمله‌ای را در آن منظم کرد. این جدول که به صورت مثلثی تنظیم شده و امروز به نام «مثلث پاسکال» معروف است، ویژگی‌های بسیاری دارد و هر پژوهشگری ممکن است ویژگی‌های دیگری از آن را کشف کند.

بسط دوجمله‌ای امروز به نام «دوجمله‌ای نیوتون» مشهور است، زیرا او قانون بسط دوجمله‌ای را برای عددهای کسری و منفی هم به‌کار برد.

آموزشی
حمیدرضا امیری

پیشامدهای تصادفی و احتمال در فضاهای نمونهٔ گسسته و پیوسته

کلیدواژه‌ها: احتمال، پیشامدهای تصادفی، فضای نمونه، آندره کولموگروف، پیشامدهای مستقل، احتمال شرطی، احتمال دوجمله‌ای

مقدمات و تعریف‌های اولیه

آزمایش تصادفی یا پدیدهٔ تصادفی: هر آزمایش یا پدیده‌ای که قبل از وقوع، نتیجهٔ آن معلوم نباشد، ولی همهٔ حالت‌های ممکن در به وقوع پیوستن آن برای ما مشخص باشد، «آزمایش تصادفی» یا «پدیدهٔ تصادفی» نامیده می‌شود.

مثال: وقتی یک تاس را می‌ریزیم، تا وقتی ثابت نشده و در حال چرخش است، نمی‌توانیم به‌طور قطعی اعلام کنیم چه عددی رو خواهد شد، ولی از همهٔ حالت‌های ممکن باخبریم. یعنی می‌دانیم عدد ۱ یا ۲ یا ... یا ۶ ظاهر خواهد شد. پس این آزمایش، **تصادفی** است.

مثال: اگر روی هر شش وجه یک تاس عدد ۲ را حک کنیم و تاس را بریزیم، این پدیده تصادفی نیست. زیرا قبل از ثابت‌شدن تاس (قبل از وقوع) می‌دانیم و یقین داریم که عدد ۲ رو می‌شود. مثلاً اگر روی پنج وجه یک تاس، عددهای ۱ تا ۵ و روی یک وجه آن عددی طبیعی و بزرگ‌تر از ۳ حک کنیم و تاس را بریزیم، این پدیده تصادفی نیست. زیرا از همهٔ حالت‌های رخداد این پدیده اطلاع نداریم. (کدام عدد طبیعی روی وجه ششم حک شده است؟)

فضای نمونه‌ای: مجموعه‌ای شامل همهٔ حالت‌های ممکن، در به وقوع پیوستن یک آزمایش تصادفی را «فضای نمونه‌ای» می‌نامیم و معمولاً با «S» نشان می‌دهیم. به فضاهای نمونه‌ای که تعداد اعضای آنها متناهی یا قابل شمارش (هم‌ارز با N) باشند «فضاهای گسسته» می‌گوییم. در مثال‌های زیر سعی کرده‌ایم در حالت‌های متفاوت، فضای نمونه‌ای را برای آزمایش‌های تصادفی معرفی کنیم که در آینده و در حل مسائل و تست‌ها، این حالت‌ها مورد نیاز خواهند بود.

مثال: در هر یک از آزمایش‌های تصادفی زیر تعداد اعضای فضای نمونه‌ای را مشخص کنید.

I) کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز به صورت تصادفی.

جواب: $n(S)=n!$

II) کنار هم قرار گرفتن اشیای a و b و c و d و a و c.

جواب: $n(S)=\frac{6!}{2!\times 2!}$

III) انتخاب تصادفی k نفر از بین n نفر برای ساختن یک تیم k نفرهٔ ورزشی.

جواب: $n(S)=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

IV) انتخاب تصادفی k نفر از بین n نفر برای کنار هم قرار گرفتن آنها.

جواب: $n(S)=(n)_k=\frac{n!}{(n-k)!}$

V) انتخاب تصادفی k مهرهٔ رنگی از بین n مهره.

● **جواب:** $n(S)=\binom{n}{k}$

تذکر ۱: توجه داریم که در تمام مسائل احتمال مربوط به مهره‌هـــای رنگی، هر r مهره از یک رنگ با شـــماره‌های ۱ تا r شماره‌گذاری شده‌اند و در واقع، مهرهٔ آبی شمارهٔ ۱ با مهرهٔ آبی شمارهٔ ۲ فرق دارد.

تذکر ۲: اگر $S_۱$ و $S_۲$ فضاهای نمونه‌ای مربوط به دو پدیدهٔ تصادفی باشـــند و این دو پدیده با هم رخ دهند و یک پدیدهٔ تصادفی ایجاد کنند، و S فضای نمونه‌ای این پدیده باشد، داریم:

$$n(S)=n(S_۱)\times n(S_۲)$$

VI) ریختن یک تاس:

$$S=\{۱,۲,...,۶\}\to n(S)=۶$$

VII) پرتاب یک سکه: $S=\{H,T\}\to n(S)=۲$

IIX) ریختن دو تاس با هم، یا ریختن یک تاس دوبار:

$$n(S)=۶\times۶=۳۶$$

IX) پرتاب n سکه و k تاس با هم:

$$n(S)=(\underbrace{۲\times۲\times...\times۲}_{n})\times(\underbrace{۶\times۶\times...\times۶}_{k})=۲^n\times۶^k$$

تعریف پیشـــامدهای تصادفی: اگر S فضای نمونه‌ای یک پدیده تصادفی باشد، در این صورت هر زیرمجموعهٔ S مانند A را یک «پیشامد تصادفی از فضای S» می‌نامیم.

تذکـــر ۱: اگـــر S مجموعـــه‌ای n عضوی باشـــد، دارای ۲^n زیرمجموعه است. طبق تعریف فوق، هر $A\subseteq S$ یک پیشامد تصادفی است. پس روی S به تعداد ۲^n پیشامد تصادفی می‌توان تعریف کرد. $A_۱=\varnothing$ و $A_۲=S$ نیز پیشامدهای تصادفی از فضای S هســـتند و به ترتیب آنها را **پیشـــامد غیرممکن** و **پیشامد مطمئن** یا **حتمی** می‌نامیم.

تذکـــر ۲: اگر فضای نمونه‌ای، مجموعه‌ای n عضوی باشد، تعداد پیشـــامدهای تصادفی k عضوی کـــه می‌توان روی S تعریف کرد، برابر است با $\binom{n}{k}$.

مثال: تاســـی را می‌ریزیم، اولاً چند پیشامد تصادفی روی فضای نمونه‌ای حاصل می‌توان تعریف کـــرد؟ ثانیاً این آزمایش تصادفی چند پیشامد تصادفی ۴ عضوی دارد؟

$\to S=\{۱,۲,...,۶\}$: اولاً

تعداد پیشامدهای تصادفی $=۲^۶=۶۴$

ثانیاً: تعداد پیشامدهای ۴ عضوی $=\binom{۶}{۴}=۱۵$

تعریـــف: اگـــر S فضای نمونـــه‌ای یک پدیـــدهٔ تصادفی و $A\subseteq S$ پیشامدی در فضای S باشد، متمم پیشامد A را با A' یا A^C یا $\overline{A}$ نمایش می‌دهیم؛ به شرط آن‌که: $A\cap A'=\varnothing$ و $A\cup A'=S$.

تذکر ۳: اگر A' متمم پیشامد A از فضای S باشد، رخداد A به منزلهٔ عدم رخداد A' و رخداد A' به منزلهٔ عدم رخداد A است (A و A' نمی‌توانند با هم رخ بدهند).

تذکر ۴: در بعضی از مسئله‌ها و تست‌ها، تعداد عضوهای A در S زیاد و شمارش آنها سخت و یا وقت‌گیر است و ما از طریق محاســـبهٔ تعداد عضوهای A' و کم‌کردن آنها از کل عضوها، به تعداد عضوهای A پی می‌بریم.

تعریـــف: اگر $S=\{a_۱,a_۲,...,a_n\}$ فضـــای نمونه‌ای یک پدیدهٔ تصادفی باشد، در این صورت هر زیرمجموعهٔ تک‌عضوی مانند $A_i=\{a_i\}$ را یک **پیشامد ساده** در فضای S می‌نامیم.

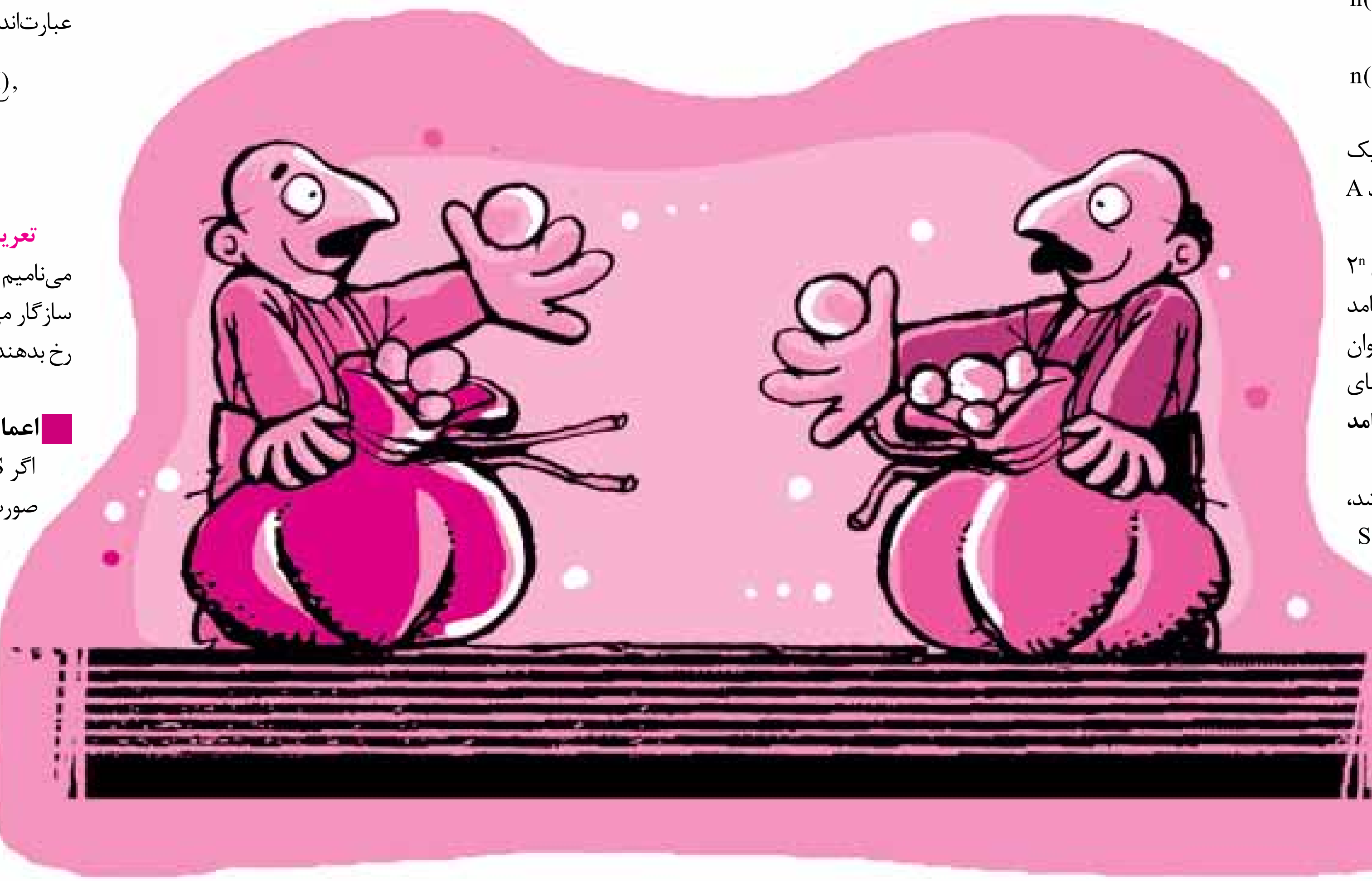
تذکر مهم:

اگـــر $S=\{a_۱,a_۲,...,a_n\}$ فضای نمونـــه‌ای یک پدیدهٔ تصادفی باشد و پیشامد ســـادهٔ $\{a_i\}$ رخ دهد، در این صورت هر پیشامد تصادفی مانند $A\subseteq S$ که شامل a_i باشد نیز رخ داده است.

مثال: اگر تاســـی را بریزیم و مشاهده کنیم که عدد ۲ رو شده است، در این صورت هر زیرمجموعهٔ $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ که شـــامل ۲ باشـــد، قطعـــاً رخ داده اســـت. مثلاً $A_۱=\{۲\}$، $A_۲=\{۱,۲\}$، $A_۳=\{۱,۲,۳\}$ و... و $A_{۳۲}=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ قطعاً رخ داده‌انـــد. (مجموعهٔ S دارای $۳۲=۲^{۶-۱}$ زیرمجموعه است که شامل عدد ۲ هستند.)

تذکر مهم:

تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ n عضوی A که همگی در k عضو مشخص مشترک باشند، برابر است با ۲^{n-k}.



مثال: ۱. از بین ۸ نفر ۴ نفر را به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر پیشامد A انتخاب حداقل یکی از دو نفر a و b بین این ۴ نفر باشد، در این صورت A چند عضو دارد؟

۱) ۱۵ ۲) ۴۵ ۳) ۵۰ ۴) ۵۵

● **حل:** گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا پیشامد A' آن است که هیچ‌کدام از این دو نفر a و b بین ۴ نفر نباشد؛ یعنی ۴ نفر از بین ۶ نفر غیر از a و b انتخاب شوند. پس: $n(A')=\binom{۶}{۴}$ و چون: $n(S)=\binom{۸}{۴}=۷۰$، پس:

$$n(A)=n(S)-n(A')=۷۰-۱۵=۵۵$$

۲. تاسی را می‌ریزیم. اگر زوج بیاید، تاس دیگری می‌ریزیم و اگر فرد بیاید دو ســـکه پرتاب می‌کنیم. اگر پیشامد A را رو شـــدن عدد اول بـــرای تاس اول تعریف کنیـــم، A چند عضو دارد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

● **حـــل:** گزینهٔ (۲) صحیح اســـت، زیرا اعـــداد اول ۱ تا ۶ عبارت‌اند از $\{۲,۳,۵\}$. بنابراین:

$$A=\{\underbrace{(۲,۱),(۲,۲),...,(۲,۶)}_{۶},\underbrace{(۳,T,T),...,(۳,H,H)}_{۴},$$
$$\underbrace{(۵,T,T),...(۵,H,H)}_{۴}\}\to|A|=۱۴$$

تعریف: دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S را **ناسازگار** می‌نامیم هـــرگاه: $A\cap B=\varnothing$ و اگر: $A\cap B\neq\varnothing$، آن‌ها را سازگار می‌نامیم. (اگر A و B ناسازگار باشند، نمی‌توانند با هم رخ بدهند.)

اعمال روی پیشامدها

اگر S فضای نمونه‌ای یک پدیدهٔ تصادفی باشـــد، در این صورت:

I) $(A\cap B)$ عبارت اســـت از پیشامد آنکه هر دو پیشامد A و B با هم رخ بدهند.

II) $(A\cup B)$ عبارت اســـت از پیشـــامد آنکه حداقل یکی از دو پیشامد A و B رخ بدهد.

III) $(A-B)$ عبارت اســـت از پیشامد آنکه پیشامد A رخ بدهد و B رخ ندهد.

IV) $(A\Delta B)$ عبارت اســـت از پیشامد آنکه دقیقـــاً A رخ بدهـــد یا دقیقـــاً B رخ بدهد؛ زیرا:

$$(A\Delta B)=(A-B)\cup(B-A)$$

تذکر مهم:
بـا توجه به قوانین مجموعه‌ها (جبر مجموعه‌ها) و تعاریف قبل، روابط زیر بین پیشامدها برقرار است:

$$۱)\ n(A)=n(S)-n(A')\ \text{و}\ n(A')=n(S)-n(A)$$

تذکـر: از ایـن به بعد به جای $n(A)$ از نماد $|A|$ اسـتفاده می‌کنیم.

$$۲)\ n(A\cup B)=|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$
$$۳)\ |A-B|=|A|-|A\cap B|$$
$$۴)\ |A'\cap B'|=|(A\cup B)'|=|S|-|A\cup B|$$
$$۵)\ |A\Delta B|=|(A-B)\cup(B-A)|=|A-B|+|B-A|$$
$$\xrightarrow{(۳)}|A\Delta B|=|A|+|B|-۲|A\cap B|$$

۳. دو تاس را با هم می‌ریزیم. اگر پیشامد A را مجموع دو تاس بزرگ‌تر از ۳ تعریف کنیم، در این صورت A چند عضوی است؟

۱) ۳۴ ۲) ۳۵ ۳) ۳۳ ۴) ۲۸

● **حل:** گزینهٔ (۳) صحیح است. مجموع دو تاس از ۲ تا ۱۲ می‌تواند باشد که در این صورت بهتر است A' را به‌دست آوریم:

$A'=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱)\}$ پیشامد آنکه مجموع دو تاس کوچک‌تر یا مساوی ۳ باشد

$$|A'|=۳\rightarrow|A|=|S|-|A'|=۳۶-۳=۳۳$$

۴. دو تاس را با هم می‌ریزیم و پیشامد A را چنین تعریف می‌کنیـم که مجموع دو تاس ۸ یا هر دو فرد باشـند. در این صورت $|A|$ کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۲ ۳) ۱۱ ۴) ۱۰

● **حل:** گزینهٔ (۲) صحیح اسـت. B را پیشامد مجموع ۸ و C را پیشـامد هر دو فرد تعریف می‌کنیم که در این صورت داریم:

$$|A|=|B\cup C|=|B|+|C|-|B\cap C|=۵+۹-۲=۱۲$$
$$B=\{(۳,۵),(۵,۳),(۲,۶),(۶,۲),(۴,۴)\}\rightarrow|B|=۵$$
$$C=\{۱,۳,۵\}\times\{۱,۳,۵\}\rightarrow|C|=۹$$
$$(B\cap C)=\{(۳,۵),(۵,۳)\}\rightarrow|B\cap C|=۲$$

۵. در جعبـه‌ای ۴ مهـرهٔ قرمز، ۵ مهرهٔ آبی و ۳ مهرهٔ سـبز وجود دارد. از این جعبه سـه مهره را با هم و به‌طور تصادفی خارج می‌کنیم. اگر پیشامد A را حداقـل ۱ مهرهٔ آبی تعریف کنیم، در این صورت $|A|$ کدام است؟

۱) ۲۱۰ ۲) ۱۰ ۳) ۳۵ ۴) ۱۸۵

● **حل:** گزینهٔ (۴) صحیح است. محاسبهٔ $|A'|$ ساده‌تر است و A' پیشـامد آن است که هیچ مهره‌ای آبی نباشد یا هر سه مهره غیرآبی باشند که در این صورت داریم:

$$|S|=\binom{۱۲}{۳}=۲۲۰\ \text{و}\ |A'|=\binom{۷}{۳}=۳۵$$
$$\rightarrow|A|=۲۲۰-۳۵=۱۸۵$$

تذکر مهم:
در تمام مسـئله‌ها و تسـت‌هایی که با مهره‌های رنگی سروکار داریم، همواره مهره‌هایی که از یک رنگ هستند، متمایزند.
برای مثال، ۴ مهرهٔ قرمز به صورت قرمز ۱، قرمز ۲، قرمز ۳ و قرمز ۴ مشـخص شده‌اند. همچنین، در انداختن دو تاس با هم، تاس‌ها را آبی و قرمز و متمایز فرض می‌کنیم، و فضای نمونه‌ای آزمایش انداختن دو تاس با هم، با فضـای نمونه‌ای آزمایش انداختن یک تاس در دو مرحله، برابر است.

فضاهای نمونه‌ای پیوسته

اگـر S فضای نمونـه‌ای یک آزمایش تصادفی باشـد، به گونه‌ای که S متناهی نباشـد و اعضای آن شـمارش‌پذیر نیز نباشند (S گسسته نباشد)، در این صورت فضای S را پیوسته می‌نامیم. (هر مجموعهٔ نامتناهی که با N هم‌ارز نباشد، یعنی در تناظر یک‌به‌یک نباشد، پیوسته نامیده می‌شود.)

به‌طور کلی، هر یک از کمیت‌های طولی، سطحی، حجمی، وزنی و زمانی، کمیت‌های پیوسته‌اند و فضاهای نمونه‌ای که از این کمیت‌ها تشکیل یافته باشند، فضاهای نمونه‌ای پیوسته نامیده می‌شوند.

مثال: در هر یک از حالت‌های زیر اندازهٔ فضای نمونه‌ای و اندازهٔ پیشامدهای تعریف شده را مشخص کنید.

I) از بین اعداد حقیقی بازهٔ $[-۶,۱۴)$ یک عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم و پیشـامد A را منفی‌بـودن این عدد و B را صحیح بودن عدد انتخابی تعریف می‌کنیم:

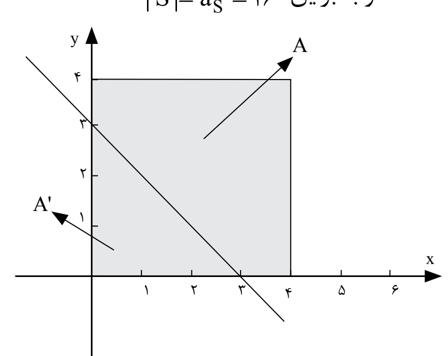
$$S=\{x\in R\,|\,-۶\le x<۱۴\}\rightarrow S\ \text{طول}=l_s=۲۰$$
$$A=\{x\in[-۶,۱۴)\,|\,x<۰\}\rightarrow l_A=۶$$
$$B=\{-۶,-۵,\dots,۱۲,۱۳\}\rightarrow l_B=۰$$

تذکر مهم:
اگر A مجموعه‌ای متناهی و یا شمارش‌پذیر باشد، همواره طول مجموعهٔ A صفر است. برای مثال، طول مجموعهٔ اعداد طبیعی، اعداد صحیح و حتی اعداد گویا صفر است، و نیز پاره‌خط یا خط دارای مساحت صفر است. همین‌طور هر صفحه حجمی برابر با صفر دارد.

II) دو عـدد حقیقی مانـند x و y از بازهٔ $[۰,۴]$ به تصادف انتخاب می‌کنیم و پیشامد A را مجموع دو عدد بزرگ‌تر از ۳ و پیشامد B را مجموع دو عدد مساوی با ۲ و پیشامد C را حداقل یکی از دو عدد بزرگ‌تر از ۱ تعریف می‌کنیم:

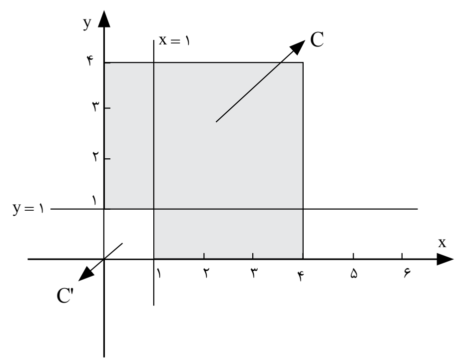
$$S=\{(x,y)\in R^۲\,|\,۰\le x\le۴,۰\le y\le۴\}=[۰,۴]\times[۰,۴]$$
$$\rightarrow a_S=۴^۲=۱۶$$
$$A=\{(x,y)\in S\,|\,x+y>۳\}$$

فضای S، سطح مربعی است در ناحیهٔ اول به طول ضلع ۴ و مساحت ۱۶ و بنابراین: $|S|=a_S=۱۶$.



$$a_A=a_S-a_{A'}=۱۶-\frac{۹}{۲}=\frac{۲۳}{۲}=۱۱/۵$$
$$B=\{(x,y)\in S\,|\,x+y=۲\}\rightarrow a_B=B\ \text{مساحت}=۰$$

($x+y=۲$ در S یک پاره‌خط اسـت و مساحت پاره‌خط صفر است.)



$$C=\{(x,y)\in S\,|\,x>۱\ \text{یا}\ y>۱\}$$
$$a_C=a_S-a_{C'}=۱۶-۱=۱۵$$

تذکر: همان‌طـور که در مثال قبل مشـاهده کردید، در فضاهای پیوسته ممکن است پیشامد A ناتهی باشد، ولی اندازهٔ A صفر باشد (در حالت (I) $B\neq\varnothing$، ولی $L_B=۰$ و در حالت (II) نیز $B\neq\varnothing$، ولی $a_B=۰$).

تذکر: برای مشـخص کردن مجموعه جواب‌های نامعادلهٔ $ax+by>c$ کافی اسـت خط $ax+by=c$ را رسم کنیم. سـپس یک نقطه از یکی از دو نیم صفحهٔ ایجاد شده توسط این خط، را به دل‌خواه برگزینیم و مختصات آن را در نامعادله قرار دهیم (نقطهٔ $O\left|\begin{smallmatrix}۰\\۰\end{smallmatrix}\right.$ مناسـب‌ترین انتخاب است). اگر صدق کرد، نیم‌صفحهٔ شامل همان نقطه، و اگر صدق نکرد، نیم‌صفحهٔ دیگر، مجموعهٔ جواب‌های نامعادله را تشـکیل می‌دهند. برای مثـال، مجموعه جواب‌های نامعادلهٔ $x+y>۳$ در مثال قبل قسمت (II) با جهت پیکان روی خط در شکل مربوطه مشخص شده است.

احتمال یا اندازه‌گیری شانس

۱. احتمال در فضای گسسـته: اگر S یک فضای نمونه‌ای گسسته، و $A\subseteq S$ یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه‌ای S باشد، در این صورت احتمال رخداد پیشامد A را با نماد $P(A)$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$P(A)=\frac{\text{تعداد اعضای }A}{\text{تعداد اعضای }S}\rightarrow P(A)=\frac{|A|}{|S|}$$

می‌توان تابعی چون P از مجموعهٔ زیرمجموعه‌های S (مجموعهٔ توانی S یا P(S)) به بازهٔ $[۰,۱]$ تعریف کرد که به آن تابع احتمال می‌گوییم.

$$P : P(S) \to [۰,۱]$$

$$A \to P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{|A|}{|S|}$$

این تابع دارای ویژگی‌های زیر است:

$۱)\ ۰ \le P(A) \le ۱$

زیرا:

$$A \subseteq S \to ۰ \le |A| \le |S| \to \frac{۰}{|S|} \le \frac{|A|}{|S|} \le \frac{|S|}{|S|} \to ۰ \le P(A) \le ۱$$

$۲)\ P(S) = ۱,\ P(\varnothing) = ۰$

زیرا: $P(S) = \frac{|S|}{|S|} = ۱,\ P(\varnothing) = \frac{|\varnothing|}{|S|} = \frac{۰}{|S|} = ۰$

$۳)\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

زیرا: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cup B|$

$$\xrightarrow{\text{طرفین بر |S| تقسیم شود}} \frac{|A \cup B|}{|S|} = \frac{|A|}{|S|} + \frac{|B|}{|S|} - \frac{|A \cap B|}{|S|}$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف احتمال}} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

۲. احتمال در فضای پیوسته: اگر S یک فضای نمونه‌ای پیوسته و $A \subseteq S$ پیشامدی تصادفی در فضای S باشد، برحسب اینکه فضای S از چه کمیت پیوسته‌ای تشکیل یافته باشد، احتمال رخداد پیشامد A به یکی از صورت‌های زیر تعریف می‌شود:

I) اگر فضای S کمیتی طولی باشد: $P(A) = \frac{l_A}{l_S}$

II) اگر فضای S کمیتی مساحتی باشد: $P(A) = \frac{a_A}{a_S}$

III) اگر فضای S کمیتی حجمی باشد: $P(A) = \frac{V_A}{V_S}$

IV) اگر فضای S کمیتی زمانی باشد: $P(A) = \frac{t_A}{t_S}$

اصول احتمال ـ قوانین و قضایای احتمال

آندره کولموگروف روسی در سال ۱۹۳۳ سه اصل زیر را به عنوان اصل موضوعهٔ علم احتمال مطرح ساخت و توسط این سه اصل قوانین و قضایای احتمال را ثابت کرد:

اصل اول: اگر A پیشامدی از فضای نمونه‌ای S باشد (S پیوسته یا گسسته)، در این‌صورت $۰ \le P(A) \le ۱$.

اصل دوم: اگر S فضای نمونه‌ای باشد، $P(S) = ۱$.

اصل سوم: اگر A و B دو پیشامد جدا از هم باشند (ناسازگار باشند)، یعنی $A \cap B = \varnothing$، در این صورت:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad P(A \quad B)$$

قضیهٔ ۱: اگر A و B و C پیشامدهایی دوبه‌دو ناسازگار از فضای S باشند، آن‌گاه:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

قضیهٔ ۲: اگر A و B دو پیشامد از فضای S باشند و $A \subseteq B$، آن‌گاه:

$I)\ P(A) \le P(B)$

$II)\ P(B - A) = P(B) - P(A) \quad A \quad B$

قضیهٔ ۳: اگر A و B دو پیشامد دل‌خواه از فضای S باشند، آن‌گاه: (S می‌تواند پیوسته یا گسسته باشد)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

قوانین احتمال

قوانین زیر همگی با استفاده از اصول و قضایای بیان شده قابل اثبات هستند:

$۱)\ P(\varnothing) = ۰$

$۲)\ P(A \cup A') = \underbrace{P(S)}_{۱} = P(A) + P(A')$

$$\to \begin{cases} P(A) = ۱ - P(A') \\ P(A') = ۱ - p(A) \end{cases}$$

$۳)\ P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

$۴)\ P(A \cup B) = P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A)$

$۵)\ P(A \cap B) \le P(A), \quad P(A \cap B) \le P(B)$

$۶)\ P(A - B) \le P(A)$

$۷)\ P(A \Delta B) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$

$= P(A - B) + P(B - A) = P(A) + P(B) - ۲P(A \cap B)$

$۸)\ P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

$- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

$۹)\ P(A) + P(B) > ۱ \Rightarrow \underbrace{(A \cap B) \ne \varnothing}_{\text{A و B سازگارند}}$

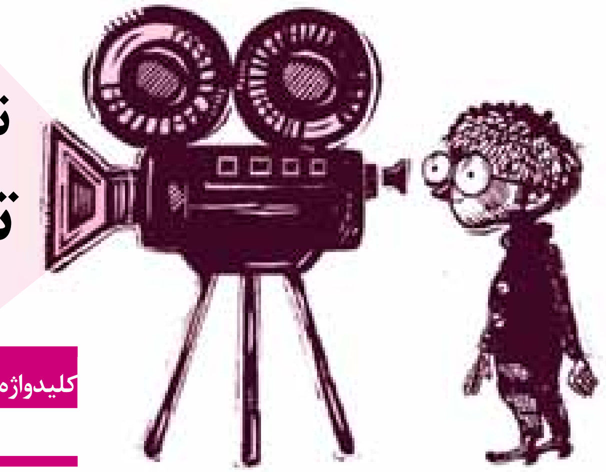
یا $P(A \cap B) \ne ۰$

$۱۰)\ P(A' \cap B') = ۱ - P(A \cup B)$

و $P(A' \cup B') = ۱ - P(A \cap B)$

احسان یارمحمدی

نگاهی به فیلم تاریخ مختصر زمان



کلیدواژه‌ها: تاریخ مختصر زمان، استفن هاوکینگ، کیهان‌شناسی، کوآنتم، گنجینهٔ کیهانی، آنتروپی

اسم فیلم: تاریخ مختصر زمان[۱] **کارگردان:** اِرول موریس[۲] **تهیه‌کنندگان:** دیوید هیکمن[۳]، گوردُن فِریدمَن[۴]، استیون اِسپیلبِرگ[۵] و کاتلین کِنِدی[۶] **نوشته شده براساس:** کتاب استفن هاوکینگ[۷] **هنرپیشه:** استفن هاوکینگ **موسیقی:** فیلیپ گلاس[۸] **فیلم‌برداری:** جان بایِلی[۹] **تاریخ اکران:** اکتبر ۱۹۹۱ در «سانتا مونیکا»[۱۰] کالیفرنیا و اکران عمومی در ۲۱ اوت ۱۹۹۲ **مدت فیلم:** ۸۰ دقیقه **زبان:** انگلیسی

فیلم مستند «تاریخ مختصر زمان» دربارهٔ فیزیک‌دان، ریاضی‌دان و کیهان‌شناس، **استفن هاوکینگ** است که به مدت ۳۰ سال کرسی ریاضیات «لوکاس» را داشت. وی به بیماری ALS یا «اسکلروز جانبی آمیوتروفیک» مبتلاست. اسم این فیلم از نام کتابی با همین عنوان، اثر استفن هاوکینگ گرفته شده است که به مدت ۲۳۷ هفته، رکورددار پرفروش‌ترین کتاب در بریتانیا بود.[۱۱] البته با این تفاوت که در کتاب «تاریخ مختصر زمان»، موضوع مورد بحث «کیهان‌شناسی» است، در حالی‌که موضوع اصلی فیلم «تاریخ مختصر زمان» زندگی استفن هاوکینگ است. این فیلم گوشه‌ای از زندگی وی را در ابعاد شخصی و علمی از طریق گفت‌وگو با پرستار دوران کودکی او، و همکارانش در عرصهٔ دانش، و نیز مصاحبه‌های اختصاصی با اعضای خانوادهٔ او به تصویر کشیده است.

از آثار تألیفی دیگر استفن هاوکینگ می‌توان به «طرح بزرگ»، «جهان در پوست گردو»، «دریچه‌ای به سوی کیهان» و «گنجینهٔ کیهانی» اشاره کرد. از آن‌جا که ابتلای استفن هاوکینگ به بیماری فوق باعث شده است تا پس از گذشت سال‌ها، وی گرفتار یک فلج کامل شود و تنها می‌تواند اندکی دو انگشت دست چپش را حرکت دهد، از اواخر دههٔ ۱۹۶۰ برای جابه‌جایی از صندلی چرخ‌دار استفاده می‌کند. برای او یک رایانهٔ شخصی بسیار پیشرفته طراحی و تهیه شده است که او تنها با تکان‌دادن آن دو انگشت قابل استفاده‌اش از آن استفاده می‌کند. آن رایانه به جای استفن هاوکینگ صحبت می‌کند و آن‌چه را که او مایل است برایش به محیط پیرامون انتقال می‌دهد. شما می‌توانید به تعداد دفعات زیاد این صحنه‌ها را در فیلم تاریخ مختصر زمان مشاهده کنید. در ادامهٔ فیلم می‌توانید به صحبت‌هایی که استفن هاوکینگ دربارهٔ کیهان‌شناسی، جاذبه، کوانتوم و دستاوردهایی که در زمینهٔ سیاه‌چاله‌ها و انفجار آن‌ها عرضه کرده است، گوش فرادهید.

جالب توجه‌ترین صحنهٔ این فیلم اشاره به فنجانی دارد که آن را رها می‌کنند، که پس از برخورد با سطح زمین تکه‌تکه می‌شود؛ و این امر بیانگر این نقطه‌نظر از استفن هاوکینگ است که می‌گوید: «تفاوت میان گذشته و آینده از کجا ناشی می‌شود؟ قوانین علم میان گذشته و آینده تمایزی قائل نمی‌شود، با این حال در زندگی عادی تفاوتی عظیم میان گذشته و آینده وجود دارد. ممکن است ببینید یک فنجان از روی میز به زمین بیفتد و تکه‌تکه شود، اما هرگز شاهد آن نخواهید بود که فنجان تکه‌های خود را جمع کند و به بالا بپرد و به روی میز برگردد. افزایش بی‌نظمی یا به اصطلاح آنتروپی، چیزی است که گذشته را از آینده متمایز می‌کند و به زمان جهت می‌دهد.»[۱۲]

پی‌نوشت

1. A Brief History of Time
2. Errol Morris
3. David Hickman
4. Gordon Freedman
5. Steven Spielberg
6. Kathleen Kennedy
7. Stephen Hawking
8. Philip Glass
9. John Bailey
10. Santa Monica

۱۱. یکی از جملات زیبا و پرمغزی که می‌توانید در کتاب پرفروش تاریخ مختصر زمان ملاحظه کنید، این جمله است: «اگر ما بتوانیم فرضیه‌های لازم برای توضیح هر پدیده و مادهٔ موجود در هستی را کشف کنیم، این کشف نوعی پیروزی نهایی برای خرد انسانی است، برای این‌که آن‌گاه ما می‌توانیم فکر خدا [سنّت‌های الهی] را بخوانیم.»

۱۲. استفن هاوکینگ زمانی عقیده داشت که گسترش جهان هستی متوقف و جهان دوباره جمع می‌شود. او بعدها گفت که اشتباه می‌کرده است.

هوشنگ شرقی

المپیاد ریاضی در اسپانیا

کلیدواژه‌ها: المپیاد ریاضی، اسپانیا، نقاط شبکه‌ای، سهمی، نقطهٔ ثابت، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک، مرکز ثقل مثلث

در کشور اسپانیا از سال ۱۹۶۴، المپیادهای ریاضی به‌طور مرتب و در دو نوبت برگزار می‌شوند. در سال‌های اول در هر نوبت به شرکت‌کنندگان هشت مسئله داده می‌شد، اما در سال‌های بعد، مانند المپیاد بین‌المللی ریاضی، شش سؤال در دو روز متوالی داده می‌شود. نخستین حضور اسپانیا در المپیادهای بین‌المللی ریاضی به سال ۱۹۸۳ برمی‌گردد که رتبهٔ بیست و سوم را به‌دست آورد. از آن سال تاکنون کشور اسپانیا مرتباً در این رقابت‌ها حضور داشته و بهترین مقامی که به‌دست آورده، در رقابت‌های ۱۹۸۷ کوبا بود که رتبهٔ بیست و دوم را کسب کرد. ولی در سال‌های بعد روندی به شدت نزولی داشت و تا رتبهٔ شصت و چهارم نیز سقوط کرد. به این ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که این کشور تنها مهد فوتبال و گاوبازی است!

نکتهٔ جالب توجه آن است که به‌رغم نزول مذکور، مسائل مطرح شده در المپیاد ریاضی این کشور مسائل قابل قبولی هستند و از سطح کیفی نسبتاً خوبی برخوردارند. این موضوع را می‌توان در متن سؤال‌ها که در پی می‌آیند، مشاهده کرد. البته در مقایسه با سؤال‌های مسابقات کشورهای صاحب نام در المپیاد ریاضی (مانند کشورهای اروپای شرقی، انگلستان، آمریکا، چین، هندوستان و ایران)، این سؤال‌ها بسیار سطح پایین‌تر هستند، اما گاهی هم سؤال‌های بسیار دشوار در میان مسائل آن‌ها دیده می‌شود. این کشور همچنین یک بار در سال ۲۰۰۸ میزبان المپیاد بین‌المللی ریاضی بوده است.

در این‌جا منتخبی از مسائل مطرح شده در المپیادهای سال‌های ۱۹۹۶ و ۱۹۹۷ این کشور را همراه با راه‌حل‌های آن‌ها آورده‌ایم.

صورت مسائل

۱. مجموع توان دوم ۱۰۰ جملهٔ نخست یک دنبالهٔ حسابی را حساب کنید، اگر مجموع ۱۰۰ جملهٔ نخست آن ۱، و مجموع دومین، چهارمین، و... صدمین جملهٔ آن نیز ۱ باشد.

۲. فرض کنید A یک مجموعهٔ ۱۶ عضوی از نقاط شبکه‌ای یک مربع ۴×۴ باشد. بیشترین تعداد اعضای A را بیابید، به‌طوری که هیچ سه تا از آن‌ها تشکیل مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ندهند.

۳. p یک عدد اول است. همهٔ اعداد $k \in Z$ را بیابید که $\sqrt{k^2 - pk}$ عددی صحیح باشد.

۴. همهٔ سهمی‌هایی را به معادلهٔ $y = x^2 + px + q$ که سه نقطهٔ برخورد با محورهای مختصات به‌وجود می‌آورند، در نظر بگیرید. دایرهٔ گذرنده از این سه نقطه را رسم می‌کنیم. ثابت کنید این دایره‌ها از یک نقطهٔ ثابت می‌گذرند.

۵. اعداد طبیعی a و b به صورتی هستند که $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ عددی صحیح است. نشان دهید بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a و b از $\sqrt{a+b}$ بزرگ‌تر نیست.

۶. فرض کنید G مرکز ثقل مثلث ABC باشد. ثابت کنید که اگر $AB + GC = AC + GB$ آن‌گاه مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

حل مسائل

۱. اگر قدرنسبت دنبالهٔ حسابی را d و جملهٔ اول آن را a_1 در نظر بگیریم، طبق فرض مسئله داریم:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100} = S_{100} = \frac{100}{2}[2a_1 + 99d] = 1$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 99d = \frac{1}{50} \Rightarrow 100a_1 + 4950d = 1$$

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{100} = 1$$

$$\Rightarrow a_1 + d + a_1 + 3d + \dots + a_1 + 99d = 1$$

$$\Rightarrow 50a_1 + (1 + 3 + 5 + \dots + 99)d = 1$$

$$\Rightarrow 50a_1 + \frac{50}{2}[2 + 49 \times 2]d = 1$$

$$\Rightarrow 50a_1 + 2500d = 1 \Rightarrow -\begin{cases} 100a_1 + 4950d = 1 \\ 100a_1 + 5000d = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d = \frac{1}{50},\ a_1 = -\frac{49}{50} \Rightarrow a_n = -\frac{49}{50} + (n-1)\frac{1}{50}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{50}n - 1$$

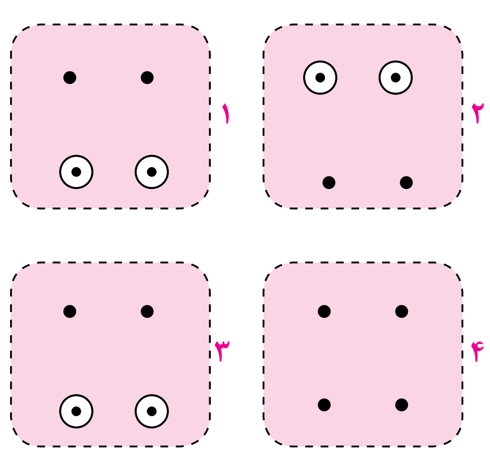
$$\sum_{i=1}^{100} a_i^2 = \sum_{i=1}^{100}(\frac{1}{50}i - 1)^2 = \sum_{i=1}^{100}(\frac{1}{2500}i^2 - \frac{2}{50}i + 1)$$

$$= \frac{1}{2500}\sum_{i=1}^{100} i^2 - \frac{2}{50}\sum_{i=1}^{100} i + 100$$

$$= \frac{1}{2500} \times \frac{100 \times 101 \times 201}{6} - \frac{1}{25} \times \frac{100 \times 101}{2} + 100$$

$$= \frac{6767}{50} - 102 = 33/34$$

۲. شبکهٔ نقاط را به صورت زیر طبقه‌بندی می‌کنیم. اگر در یکی از این طبقه‌ها سه نقطه را در نظر بگیریم، بدیهی است که این سه نقطه رئوس یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین خواهند بود. پس در هر طبقه می‌توانیم حداکثر دو نقطه را علامت بزنیم.



مطابق شکل، در سه طبقه از این طبقات، در هر یک دو نقطه را جدا کرده‌ایم. اکنون به‌راحتی می‌توان دید که هر یک از نقاط طبقهٔ چهارم را که علامت بزنیم، با دو نقطه از نقاط علامت زده یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین تشکیل

می‌دهد (آن‌ها را خودتان مشخص کنید). بنابراین حداکثر شش نقطه را می‌توان از مجموعهٔ A مشخص کرد که این ویژگی را داشته باشند. در حالت‌های دیگر هم می‌توان به همین صورت استدلال کرد.

۳. طبق فرض: $\sqrt{k^2-pk}\in Z$. بنابراین:

$$\sqrt{k^2-pk}=m\Rightarrow k^2-pk=m^2\Rightarrow k^2-pk-m^2=0$$
$$\Rightarrow \Delta=p^2+4m^2=t^2\Rightarrow t^2-4m^2=p^2$$
$$\Rightarrow (t-2m)(t+2m)=p^2$$

اکنون حالت‌های زیر را می‌توان در نظر گرفت:

$$\begin{cases}t-2m=p\\ t+2m=p\end{cases}\quad \begin{cases}t-2m=1\\ t+2m=p^2\end{cases}\quad \begin{cases}t-2m=p^2\\ t+2m=1\end{cases}$$

از دستگاه اول نتیجه می‌شود که $t=p$ و $m=0$ و از آنجا نتیجه‌ می‌شود:

$k^2-pk=0\Rightarrow k=0$ یا $k=p$

و از دستگاه دوم نتیجه می‌شود:

$m=\frac{p^2-1}{4}$ و $t=\frac{p^2+1}{2}$

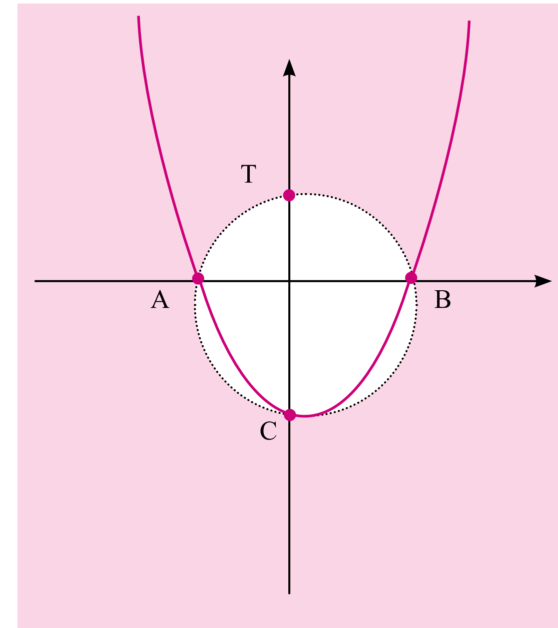
و از آنجا نتیجه می‌گیریم:

$$\Delta=p^2+4(\frac{p^2-1}{4})^2$$
$$=p^2+\frac{(p^2-1)^2}{4}=\frac{(p^2-1)^2+4p^2}{4}=(\frac{p^2+1}{2})^2$$
$$\Rightarrow k=\frac{p\pm\frac{p^2+1}{2}}{2}$$
$$\Rightarrow k_1=(\frac{p+1}{2})^2, k_2=-(\frac{p-1}{2})^2$$

از دستگاه سوم نیز همین جواب‌ها به‌دست می‌آیند. پس مجموعهٔ جواب‌های k عبارت‌اند از:

$$\{0,p,(\frac{p+1}{2})^2,-(\frac{p-1}{2})^2\}$$

۴. مطابق شکل، اگر سهمی مزبور محور xها را در نقاط A و B و محور yها را در نقطهٔ C قطع کند، مختصات نقاط A و B به صورت $A\begin{vmatrix}x_1\\0\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}x_2\\0\end{vmatrix}$ خواهد بود که x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2+px+q=0$ هستند. بنابراین $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-p$ و $x_1.x_2=\frac{c}{a}=q$ و مختصات C به



صورت $C\begin{vmatrix}0\\q\end{vmatrix}$ است.

اگر معادلهٔ دایرهٔ گذرنده از این سه نقطه به صورت $y^2+x^2+ax+by+c=0$ باشد، با جای‌گذاری مختصات A، B و C در این معادله خواهیم داشت:

$$\begin{cases}x_1^2+ax_1+c=0\\ x_2^2+ax_2+c=0\\ q^2+bq+c=0\end{cases}$$

از کم کردن دو طرف معادله‌های اول و دوم نتیجه می‌شود:

$$x_1^2-x_2^2+a(x_1-x_2)=0\Rightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2+a)=0$$

و چون: $x_1\neq x_2$ (چرا؟) پس:

$$a=-(x_1+x_2)=p$$
$$c=-x_1^2-ax_1=-x_1^2+x_1(x_1+x_2)=x_1x_2=q$$

و با جای‌گذاری c در معادلهٔ سوم نتیجه می‌شود:

$$b=-q-1$$

و از آنجا معادلهٔ دایره به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x^2+y^2+px-(q+1)y+q=0$$
$$\Rightarrow q(1-y)+px+(x^2+y^2-y)=0$$

حال اگر سه معادلهٔ $1-y=0$، $x=0$ و $x^2+y^2-y=0$ با هم برقرار باشند، معادلهٔ فوق به ازای جمیع مقادیر p و q برقرار است. اما مقادیر $x=0$ و $y=1$ هر سه معادله را برقرار می‌کنند، لذا نقطهٔ $T(0,1)$ که در شکل هم مشخص شده، نقطهٔ ثابتی است که این دایره به ازای همهٔ مقادیر p و q همواره از آن می‌گذرد.

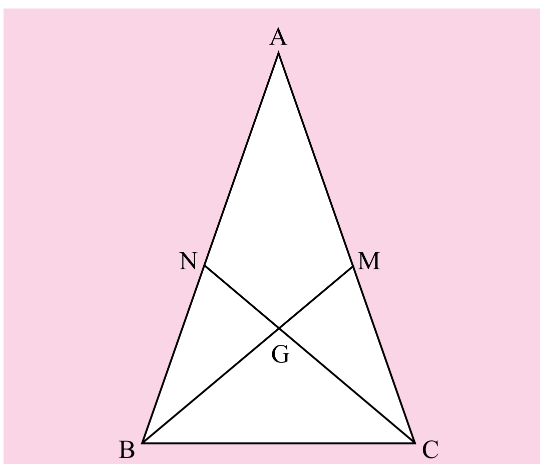
۵. فرض می‌کنیم: $(a,b)=d$. بنابراین: $a=dq$ و $b=dq'$ و در نتیجه:

$$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}=\frac{dq+1}{dq'}+\frac{dq'+1}{dq}$$
$$=\frac{dq^2+q+dq'^2+q'}{dqq'}\Rightarrow dqq'|dq^2+q+dq'^2+q'$$
$$\Rightarrow d|dq^2+dq'^2+q+q'\Rightarrow d|q+q'$$
$$\Rightarrow d^2|dq+dq'\Rightarrow d^2|a+b\Rightarrow d^2\leq a+b$$
$$\Rightarrow d\leq\sqrt{a+b}$$

۶. با توجه به قضیهٔ میانه‌ها داریم:

$$MB=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2},$$
$$NC=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}\ (AB=c, AC=b, BC=a)$$
$$\Rightarrow GB=\frac{2}{3}BM=\frac{1}{3}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2},$$
$$GC=\frac{2}{3}NC=\frac{1}{3}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{3}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}+c=\frac{1}{3}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}+b$$
$$\Rightarrow b-c=\frac{1}{3}(\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}-\sqrt{2a^2+2c^2-b^2})$$
$$\Rightarrow b-c=\frac{1}{3}\times\frac{(2a^2+2b^2-c^2)-(2a^2+2c^2-b^2)}{\underbrace{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}+\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}_{k}}$$
$$=\frac{3b^2-3c^2}{3k}\Rightarrow b-c=\frac{(b-c)(b+c)}{k}$$
$$\Rightarrow (b-c)[\frac{b+c}{k}-1]=0$$

می‌توان نشان داد که: $k\neq b+c$ (با برهان خلف ثابت کنید) و در نتیجه $b-c=0$ و از آنجا: $b=c$.



ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه اول: جدول ریاضی‌دانان ایرانی و خارجی

در جدولِ واژه‌های به‌هم ریختهٔ مقابل، نام‌های تعدادی از ریاضی‌دانان قدیم ایران و جهان آمده است. این نام‌ها ممکن است به صورت افقی، عمودی و مورب و از هر دو طرف نوشته شده باشند. همهٔ نام‌ها را به همین ترتیب از جدول خط بزنید. در پایان تعدادی حرف در جدول باقی می‌مانند. از ترکیب این حرف‌ها نام یکی از ریاضی‌دانان ایرانی معاصر به‌دست می‌آید. نام و زندگی نامهٔ مختصری از او را برای ما بفرستید و جایزه‌ای مناسب بگیرید!

ف	ر	م	ا	س	و	پ	ا	پ	ا	ف
ت	ی	ل	ر	و	ت	ن	ا	ک	ی	ا
ل	د	ل	ا	ا	ت	ن	ک	ب	ل	ر
ا	پ	ل	ت	گ	پ	ح	و	ر	گ	ا
ک	ی	ز	ی	ر	ی	ن	ر	ن	ا	ب
س	د	ی	ل	ق	ا	ا	ر	و	ت	ی
ا	هـ	م	ی	چ	ب	ک	ل	ل	ر	ر
پ	ی	ش	ی	ر	ن	ا	د	ی	ا	و
ک	ر	ج	ی	و	گ	س	ل	ا	ت	ن
ا	و	ل	ر	خ	و	ا	ر	ز	م	ی
ک	ف	ک	د	م	و	ر	گ	ا	ن	د

نام‌های ریاضی‌دانان:
اقلیدس، فارابی، نیریزی، فیبوناچی، برنولی، گالوا، تارتاگلیا، بیرونی، دکارت، خوارزمی، تالس، دمورگان، کرونکر، اولر، فوریه، کرجی، پاسکال، والیس، گاوس، کپلر، کانتور، نپر، پاپوس، فرما، تیلر.

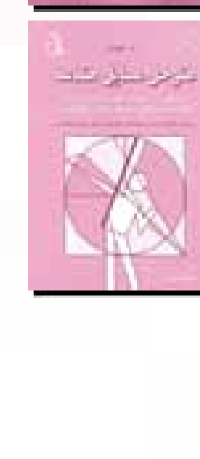
هوشنگ شرقی

پای صحبت ابراهیم دارابی، معلم و نویسندهٔ پیش‌کسوت ریاضی

اشاره

در روز معلم، مجلهٔ «رشـد برهان متوسطه» میزبان یکی از معلمان رشـتهٔ ریاضی بود که سال‌های مدیدی را با این رشته زیسته است. در این نشست کوشیدیم تجلیلی از استاد **ابراهیم دارابی** صورت گیرد و با او دربارهٔ همه‌چیز سخن گفته شود، چرا که دارابی چهره‌ای چندوجهی است و علاوه بر ریاضیات، در عرصهٔ شطرنج و تألیف و ترجمهٔ آثار ادبی هم ید طولایی دارد. همان‌طور که خواهید خواند، این مصاحبه با وجههٔ شطرنجی استاد آغاز می‌شود و بعد به عرصهٔ ریاضیات و زندگی شخصی و ادبی وی پرداخته می‌شود. آن روز، **حمیدرضا امیری**، سردبیر رشد برهان متوسطه، **میرشهرام صدر** و **هوشنگ شرقی**، مدیران داخلی سابق و فعلی مجله، به همراه **محمدهاشم رستمی** و **سیدمحمدرضا هاشمی موسوی** حضور داشتند.

اول سؤالات را برای خودم حل می‌کردم، بعد به کلاس می‌رفتم



در صفحهٔ شطرنج

شرقی: امروز سه‌شنبه ۱۲ اردیبهشت ۱۳۹۱، روز معلم، در خدمت استاد ابراهیم دارابی هسـتیم؛ همراه با اعضای هیئت تحریریهٔ مجلهٔ رشـد برهان متوسطه. ما ابراهیم دارابی را بـه عنوان دبیر ریاضی، مؤلف کتاب‌هـای ریاضی به‌ویـژه برای علاقه‌مندان رشـتهٔ ریاضـی و داوطلبان شـرکت در المپیادها، مترجم کتاب‌های ریاضـی و پیش‌کسـوت ایـن رشـته می‌شناسیم. اما از این‌ها مهم‌تر، شخصیت چندبعدی و چندوجهی ایشان است که من می‌خواهـم در این مصاحبه به یکی از آن‌ها اشـاره کنم. در بخشـی از کتاب شـاهنامه، میراث عظیـم فرهنگی ایران زمین و یادگار حکیم **ابوالقاسم فردوسی**، حکایتی هست در مورد کاروان هدایایی که از کشـور هند به ایران ارسال شده و هدیـهٔ ویـژه‌ای نیز در میان هدایاسـت. شاهنامه می‌آورد:

بیاورد پس نامه‌ای بر پرند
نبشته به نوشیروان رای هند
یکی تخت شطرنج کرده به رنج
تهی کرده از رنج شطرنج گنج
چنین داد پیغام، هندی ز رای
که تا چرخ باشد تو بادی به جای
کسی کو به دانش برد رنج بیش
بفرمای تا تخت شطرنج پیش
نهند و ز هر گونه رای آورند
که این نغز بازی به جای آورند
بدانند هر مهره‌ای را به نام
که چون بایدش راند و خانه کدام
پیاده بدانند و پیل و سپاه
رخ و اسب و رفتار فرزین و شاه
گر این نغز بازی برون آورند
به دانندگان بر فزون آورند

و در ادامـه حکایـت می‌کند که اگر ایرانیـان در این بازی نتوانند بر هندی‌ها غلبـه یابند، نباید از آنان تقاضای خراج و مالیات کنند. بعد از آنکه همهٔ درباریان در این بازی نمی‌توانند مهارت کسب کنند، **بزرگمهر حکیم**، وزیر شاه، بعد از یک روز تعمق در بازی موفق می‌شود در آن تبحر بیابـد و نمایندهٔ هندیـان را در این بازی مغلوب کند. در این منظومه، فردوسی از زبان فرسـتندهٔ هندوان شطرنج را دانش می‌خواند:

وگر نامداران ایران گروه
از این دانش آیند یکسر ستوه
چو با دانش ما ندارند تاو
نخواهند از این مرز و بوم باژ و ساو

اما بزرگمهر آن را رزم و جنگ می‌داند:

شهنشاه باید که بیند نخست
یکی رزمگاهست گویی درست

این مقدمه را مطرح کردم تا از آقای دارابی که علاوه بر ریاضیات در شـطرنج هـم آثار زیادی دارند و کتاب‌هایی تألیف و ترجمه کرده‌اند، بپرسم که از نظر شما شـطرنج دانش اسـت یا جنـگ؟ نقش شطرنج بیشتر جنگ‌آفرینی و کینه‌جویی دو رقیب است یا یک ورزش فکری است؟

دارابی: ابتدا از شما تشکر می‌کنم که در این روز، یادی از من کردید. من اولین کتاب شـطرنج برای کودکان پنج سـاله را که سـه نفر از مربیان بزرگ شـوروی نوشـته‌اند، ترجمه کردم. اسم این کتاب بود «نخستین گام‌ها در صحنهٔ شطرنج» که آقای **ایروانی**، مدیر «انتشارات دنیا» آن را چاپ کرد.

شرقی: چه سالی بود؟

دارابی: سال ۱۳۵۴. در مقدمهٔ کتاب، این داسـتان برای بچه‌ها گفته می‌شود: پادشـاهی می‌خواست به کشور همسایه حمله کند. همهٔ پیرمردها را صدا می‌کند و می‌پرسد: من چه کنم تا در این جنگ پیـروز شـوم؟ یکـی از پیرمردها تختهٔ شـطرنجی را به شـاه نشـان می‌دهد و می‌گوید: اگر می‌خواهید پیروز شوید، قبل از اینکه خون‌ریزی شـود، بیایید و با من شطرنج بازی کنید. اگر مرا مغلوب کردید، به جنگ بروید. شاه عصبانی می‌شود و با پا می‌زند تخته شطرنج را داغان می‌کند. بعد هم به جنگ می‌رود و شکست می‌خورد و برمی‌گردد. هنگام برگشتن باز هم با همان پیرمرد روبه‌رو می‌شـود. شـاه می‌گوید: پیرمرد دیدی چه شد؟! پیرمرد می‌گوید: من که اول به شما گفتم. شما برای این‌که در جنگ پیروز شوید، اول باید فرماندهی یک جنگ بدون خون‌ریزی را یاد بگیرید، و بعد اقدام کنید.

امـا از نظر من، شـطرنج بـا زندگی تقریباً یکی است. همان‌طور که اگر شما در زندگی اشـتباه کنید امکان برگشت نیسـت، در شـطرنج هم اگر مهره‌ای را حرکت دادید، دیگر نمی‌توانید برگردانید. بنابراین اگر ما بچه‌ها را عادت بدهیم که شطرنج یاد بگیرند، به نظر من زندگی را بهتر یاد می‌گیرند. از این نظر، شـطرنج بهترین آمـوزش زندگی بـرای کودکان است. در کشور ما گویا بچه‌های پنج ساله را آمـوزش نمی‌دهند، ولی در شـوروی (روسـیه فعلی) مـدارس شـطرنج بود. در آنجـا بچه‌ها براسـاس علائق خود، یا موسیقی می‌آموزند، یا شطرنج و یا...

شرقی: شـما به جز کتابی که به آن اشـاره کردید، دیگر چـه کتاب‌هایی در زمینهٔ شـطرنج تألیـف و ترجمه کرده‌اید؟

دارابـی: کتاب دیگـری که در زمینهٔ شـطرنج ترجمه کرده‌ام، اثر **کاکا بلانکا** و برای بزرگ‌سالان است. آخرین کتابم هم در این زمینه «مدرسهٔ شطرنج» است که «انتشارات مبتکران»، چاپ کرده است.

شرقی: شما خودتان هم شطرنج بازی می‌کنید؟

دارابـی: بله، علاقه دارم، ولی اسـتاد شطرنج نیستم (با خنده).

شرقی: ترویج فرهنگ شطرنج را برای تقویت دانش ریاضی جوانان و نوجوانان کشـورمان چقدر مؤثـر می‌دانید و در ایـن صورت چه توصیه‌ای برای ما دارید؟ آیا حاضرید در این زمینه کاری برای مجلهٔ برهان انجام دهید؟

دارابی: من در مورد قسمت اول سؤال شما گفتم که اگر واقعاً شطرنج در مدارس ما تدریس شود، برای دانش‌آموزان افق‌های جدیدی باز می‌کند و می‌توانند زندگی را بهتر ببینند و بشناسـند. امـا در زمینهٔ همـکاری مجله، اگر حـدود و زمینه‌اش مشخص شود، می‌شود کاری کرد.

شرقی: مثلاً رابطهٔ ریاضی و شطرنج را زمینهٔ خوبی می‌دانید؟

دارابی: بله، در معماها و مسائل ریاضی، می‌توان به این موضوع هم پرداخت.

امیری: من همین چند وقت پیش در کلاس درسم به موضوعی برخوردم. شما در ماتریس‌ها بخشـی دارید که در مورد ویژگی‌های دترمینان بدون بسـط است. من داشـتم این موضوع را درس می‌دادم و می‌گفتـم ما باید این سـه عدد را صفر کنیم. حالا اگر بخواهیم این را صفر کنیم، در مرحلهٔ بعدی آن یکی خراب می‌شود. پس ستونی عمل نمی‌کنیم. یکی از بچه‌ها گفت: چه‌قدر این کاری که شما می‌کنید شبیه شطرنج است. یعنی ما باید همیشه یکی دو حرکت جلوتر را حدس بزنیم. من هم گفتم دقیقاً حرف خوبی زدی. خیلی هم تشویقش کردم.

شـرقی: در شطرنج اصطلاح معروفی هسـت کـه می‌گویند بایـد تا هفت حرکت آینده را پیش‌بینی کنی. این تفکر، افق خلاقیت را خیلی باز می‌کند و با ریاضیات هم ارتباط نزدیکی دارد.

دارابی: معماهایی هم در زمینهٔ شطرنج وجود دارند؛ مثل حرکت با اسب در همهٔ خانه‌های صفحه شطرنج بدون اینکه اسب بیش از یک‌بار در هر خانه نشسته باشد.

ابراهیم دارابی

در باب ترجمه

شـرقی: حالا به یک جنبـهٔ دیگر از توانایی‌های آقـای دارابی می‌پردازیم. شما ترجمه‌های نسبتاً زیادی از زبان روسـی به زبان فارسـی دارید. زبان روسـی را از کجا آموختید؟ در مدتی که به ایـن کار مشـغول بودید، چه


حمیدرضا امیری

تجربه‌هایی از فرهنگ و دانش ریاضی شوروی سابق و روسیهٔ فعلی دارید؟ آیا به روسیه سفر کرده‌اید؟ همچنین دربارهٔ ترجمه‌هایتان از زبان روسی و باکویی بفرمایید.

دارابی: اولین تألیف من یک کتاب هندسهٔ فضایی بود همراه با آقای **فردادی** که الان در رشت هستند. من در دوره‌ای که دانشجو بودم، در «دبیرستان دهخدا» تدریس می‌کردم. همکاری هم داشتیم که در «دبیرستان باباطاهر» تدریس می‌کرد. او که با دانش‌آموزان اختلاف پیدا کرده بود برگشت به مدرسهٔ دهخدا و آقای **صدر**، رئیس مدرسهٔ باباطاهر مرا به آنجا برد. آنجا یک کلاس چهارم و یک پنجم ریاضی داشت. بچه‌هایش خیلی فعال بودند و دفترداری هم داشتند که خیلی به ریاضی علاقه داشت. او مسائلی را به بچه‌ها می‌داد تا به کلاس ببرند و معلمان را در آمپاس بگذارند. بچه‌ها مسئله‌ای را هم به من دادند که دیدم اصلاً با مسائل کتاب‌های ما جور درنمی‌آید. گفتم که حل می‌کنم و می‌آورم. رفتم خانه و خیلی کار کردم. بالاخره راه‌حلی پیدا کردم، ولی طولانی بود.

همزمان آقایان **فیض‌اللهی** و **توکل** در آموزش‌وپرورش برای دانشجویانی که خارج می‌رفتند، امتحاناتی برگزار می‌کردند. مرا با یک معلم دیگر دعوت کردند. سه سؤال من طرح کردم، سه سؤال هم او طرح کرد. گمان می‌کنم دانشجویان می‌خواستند به ژاپن بروند. فردای آن روز رفتم که برگه‌ها را تصحیح کنم. قبل از اینکه به آنجا بروم، خودم مسائل را حل کردم. برای مسئلهٔ لگاریتم راه‌حل من حدود یک صفحه بود. ولی وقتی ورقه‌ها را تصحیح می‌کردم، دیدم دانش‌آموزی در دو خط به جواب رسیده است. فکر کردم تقلب کرده است. ورقهٔ دیگر، ورقهٔ دیگر، دیدم نه، مسئله‌ای هست که من نمی‌دانم. ورقه‌ها را جمع کردم و تحویل دادم. گفتم فردا می‌آیم تصحیح می‌کنم.

نبش خیابان اکباتان یک کتاب‌فروشی بود. دیدم یک کتاب جلد آبی دارد از استاد شهریاری به نام کنکورهای شوروی. کتاب را خریدم و در راه که می‌رفتم ورق زدم و دیدم بله، همان مسئله آنجا هست. رفتم خانه و دیدم مسائلی هم که در مدرسه آن دفتردار به من می‌دهد، نظایر آن‌ها همه در این کتاب هست. آنجا من تصمیم گرفتم که زبان روسی را یاد بگیرم، چون می‌دانستم که استاد شهریاری هم در زندان زبان روسی را یاد گرفته است. رفتم انجمن ایران و شوروی اسم نوشتم.

■ **فرجی:** چه سالی بود این ماجرا؟

● **دارابی:** سال ۱۳۴۸. من اسم نوشتم و سه سال در آنجا زبان روسی خواندم. در «ساکو» که کتاب‌های روسی می‌آورد، کتاب کنکورهای شوروی که استاد شهریاری ترجمه کرده بود، به زبان روسی موجود بود. آن را خریدم. چند مجله هم به زبان آذربایجانی دربارهٔ ادبیات خریدم. آمدم و کتاب استاد شهریاری را گذاشتم در مقابل اصل روسی آن. صفحه‌ها را تطبیق کردم و آن واژه‌هایی را که در زبان ریاضیات به‌کار می‌روند، یاد گرفتم. جلد دوم کنکورهای شوروی را من ترجمه کردم و «انتشارات گوتنبرگ» چاپ کرد. برای این ناشر کتاب‌های «کاربرد ریاضیات» و «هندسهٔ پرگار» را هم ترجمه کردم. بعد فهمیدم استاد شهریاری هم هندسه پرگار را ترجمه کرده است. برای همین ناشر کتاب «الفبای شطرنج» را هم ترجمه کردم.

■ **شرقی:** شما خودتان هم به روسیه سفر کرده‌اید؟

● **دارابی:** من به روسیه نرفته‌ام، ولی باکو رفته‌ام.

■ **شرقی:** کتاب‌هایی که از زبان آذربایجانی ترجمه کرده‌اید، چگونه بوده‌اند؟ زبان آن‌ها با ترکی ما فرق می‌کند؟

دارابی: عیناً با ترکی ما یکی است، منتها اصطلاحات ریاضی را باید بلد باشیم.

■ **شرقی:** خطش سیریل است؟

● **دارابی:** بله، ولی حالا آن را عوض کرده‌اند.

دارابی در دنیای ادبیات

■ **شرقی:** یکی دیگر از جنبه‌های کاری آقای دارابی علاقه به ترجمهٔ رمان و داستان است. نخستین کتاب ادبی که ترجمه کردید چه نام داشت و چه سالی بود؟

● **دارابی:** بگذارید اول توضیحی بدهم. من دانشجو که بودم، آبونهٔ مجلهٔ ریاضیات در مدرسه به زبان روسی بودم. از این مجله هم برای ترجمه‌هایم استفاده کرده‌ام. اما در مورد کتاب ادبی، من اولین کتابی که خودم نوشتم «درخت سیب و پسرک فقیر» بود. کتاب کوچکی بود که دو داستان داشت. این کتاب را «انتشارات دنیا» چاپ کرد.

■ **شرقی:** چه سالی بود؟

● **دارابی:** حوالی سال ۱۳۵۰ بود. در مجلات آن موقع نوشتند که دارابی از صمد بهرنگی تبعیت می‌کند. این اولین کار من بود.

■ **شرقی:** قیمت کتاب چه‌قدر بود؟

● **دارابی:** شاید یک تومان.

■ **شرقی:** حق‌التألیف چه طور بود؟

● **دارابی:** عملاً حق‌التألیف نگرفتم. بنا بود به جایی کمک شود. من گفتم با این پول به آنجا کمک کنید.

■ **شرقی:** ترجمه‌هایتان را از کی شروع کردید؟

● **دارابی:** همان سال من ۱۶ کتاب کوچک برای کودکان و نوجوانان ترجمه کردم. مثل «شبی در میلاد» **ماکسیم گورکی**، «کشمش بازی» از **میرزا جلیل قلی‌زاده**. حالا تعدادی از این‌ها تحت عنوان «گنجشک ژولیده» در یک مجموعه چاپ شده‌اند. کتاب «دده قورقود» را هم ترجمه کردم. از **نریمان نریمانف** کتاب «درخت نظر کرده» را ترجمه کردم. یک کتاب هم در سال‌های منتهی به انقلاب ترجمه کردم به اسم «ایبیش» که آن را خمیر کردند و نگذاشتند چاپ شود. ولی بعد از انقلاب در شمارگان ۳۰ هزار نسخه چاپ شد.

■ **شرقی:** کتاب ایبیش برای خود من خاطرات بسیاری به همراه دارد. به یاد دارم اولین باری که این کتاب را خواندم، سال ۱۳۵۸ بود. یکی از دوستانم در مدرسهٔ راهنمایی این کتاب را به من داد. تأثیری که ایبیش روی من گذاشت، توصیف‌کردنی نیست. ترجمه‌ای بود از **سلیمان ولی‌اف**. داستانش هم دربارهٔ یک کارگر مستضعف و محروم در آذربایجان شوروی است و بچه کارگری که به خانواده‌اش کمک می‌کند. در عین حال هم خیلی مبارز است و دست آخر به دست یک بچه مالک کشته می‌شود. فوق‌العاده قشنگ و اثرگذار است. این کتاب چطور به دست شما رسید؟ چه شد که تصمیم به ترجمه‌اش گرفتید و ناشرش که بود؟

● **دارابی:** این کتاب را من از ساکو گرفتم. اسم اصلی‌اش «جوللوت گوشی» بود. هرچه ما در فرهنگ لغت گشتیم، معنای جوللوت را پیدا نکردیم (جوللوت نام یک پرنده است). این کتاب را آقای **فرنود** مدیر «انتشارات معلم» چاپ کرد. اول کتاب را به یک ناشر دیگر داده بودم که او می‌خواست کتاب را سانسور کند. آقای فرنود گفت بده به من که بدون سانسور چاپ کنم.

■ **امیری:** بالاخره فهمیدید جریان اسم آن پرنده چه بود؟

● **دارابی:** نخیر، هنوز هم نمی‌دانم. در باکو معادن نفتی بود و نفت به برکه‌های آب نشت می‌کرد. بچه‌ها می‌رفتند و پارچه‌ای را روی آب پهن می‌کردند. نفتش را پارچه جذب می‌کرد. بعد پارچه را می‌چلاندند و نفتی را که به‌دست می‌آمد، می‌فروختند. در این برکه پرنده‌ها هم بودند. ایبیش می‌رود برای خواهرش از برکه پرنده بگیرد که پسر مالک او را غرق می‌کند.

■ **شرقی:** شما نویسندهٔ این کتاب را دیدید؟

● **دارابی:** نخیر، ندیدم. رفتم آذربایجان ولی متأسفانه نتوانستم ایشان را ببینم.

■ **محسن فرجی:** شما در حوزهٔ داستان هم زمانی به اسم «اشک سبلان» دارید. این کتاب چه سالی منتشر شد؟

● **دارابی:** فکر می‌کنم تقریباً پنج سالی باشد که منتشر شده است. رمانی دوجلدی است.

● **شرقی:** در تابستان سال ۱۳۸۵ درآمده است.

■ **امیری:** اشک سبلان رمان تاریخی است؟

● **دارابی:** بله، رمان تاریخی است که از شکست فرقهٔ دموکرات در اردبیل شروع می‌شود و بعد می‌آید تهران و مسائل ۳۰ تیر، ۲۸ مرداد و انقلاب را تعریف می‌کند.

استاد دارابی و ریاضیات

■ **شرقی:** حالا می‌رسیم به ریاضیات که بحث اصلی ماست. یکی از فعالیت‌های ماندگار شما در زمینهٔ ریاضی، عضویت در هیئت تحریریهٔ «مجلهٔ رشد ریاضی» در دههٔ ۱۳۶۰ است. چه شد که برای عضویت در هیئت تحریریه انتخاب شدید؟

● **دارابی:** من با آقای **لطفی درآبادی** فامیل یا در واقع آشنای خیلی نزدیک هستم. «درآباد» روستای کوچکی است نزدیک اردبیل که به آن باکوی کوچک می‌گویند؛ به‌خاطر اینکه حدود ۸۰-۷۰ درصد از ساکنان آن مهاجرانی هستند که از باکو آمده‌اند. آقای لطفی که معاون دفتر برنامه‌ریزی و مؤلف کتاب‌های ریاضی بود مرا به این‌جا دعوت کرد.

■ **شرقی:** مجله رشد ریاضی آن زمان با مجلهٔ رشد ریاضی امروز چه تفاوت‌هایی دارد؟

● **دارابی:** وقتی مقایسه می‌کنم می‌بینم این مجلات رشد با دوره‌ای که ما کار می‌کردیم، خیلی فرق دارند. به‌نظر من آن موقع عمق ریاضیات بیشتر بود و الان دیگر بیشتر فرمول ریاضی نیست و گفتاری شده است؛ یعنی توصیفی است.

■ **امیری:** در واقع بحث آموزش ریاضی قوی‌تر شده است؟

● **دارابی:** بله.

■ **شرقی:** نخستین کتاب ریاضی که شما ترجمه یا تألیف کردید، چه کتابی بود؟

● **دارابی:** ترجمه، همین «کنکورهای شوروی» بود. تألیف هم کتاب درسی «ریاضیات بازرگانی» بود.

■ **شرقی:** چند کتاب ریاضی ترجمه و تألیف کرده‌اید؟

● **دارابی:** حدود ۳۵ کتاب.

■ **شرقی:** شما ناشران کمک‌آموزشی امروز را چه‌طور ارزیابی می‌کنید؟

● **دارابی:** بیشتر سوق پیدا کرده‌اند به تست که من مخالف آن بوده‌ام. تست، ابتکار و انسجام فکری دانش‌آموز را می‌گیرد.

● **امیری:** اگر تست را سر جلسهٔ کنکور به دانش‌آموز بدهند، همین که شما می‌گویید درست است. چون دانش‌آموز مجبور است در یک دقیقه و نیم مسئله‌ای را حل کند. اما تست به‌عنوان ابزار سنجش یک موضوع، فی‌نفسه بد نیست. مثلاً آزمون‌های مقدماتی یا مرحلهٔ اول المپیاد تست پنج گزینه‌ای هم دارد. به‌خاطر اینکه بحث احتمالی‌اش را کم کنند. زمانی هم که برای هر تست گذاشته‌اند، نزدیک به هفت دقیقه است. بنابراین اگر به تست به عنوان یک مسئله با راه‌حل کوتاه نگاه کنیم، بد هم نیست؛ اگر بشود از گزینه‌هایش خوب استفاده کرد. ولی اگر بحث کنکور باشد، من صددرصد با شما هم عقیده‌ام. چون خلاقیت و عمق را از دانش‌آموز می‌گیرد.

● **دارابی:** الان در روسیه تست هم رایج شده است، منتهی در مرحلهٔ اول. در مورد تست من دیده‌ام که معلمان سر کلاس فرمول‌هایی برای حل آن‌ها ارائه می‌دهند؛ بدون این‌که دانش‌آموز به عمق این فرمول‌ها واقف باشد. یعنی سلسله مراتب پیدایش فرمول در ذهن او وجود ندارد.

■ **امیری:** ما در آسانسور که داشتیم می‌آمدیم، فرمودید که قبلاً هم برای مجله مقاله داده‌اید. چرا دیگر مقاله


هوشنگ شرقی

ندادید؟

● **دارابی:** ارتباط من با آقای شرقی قطع شد و نشد که دیگر مقاله بدهم (با خنده).

■ **امیری:** پس همین‌جا از شما قول بگیریم که باز هم به ما مقاله بدهید و در خدمت شما باشیم.

■ **فرجی:** معمولاً درس ریاضی برای اکثر بچه‌ها دشوار است و برخی از دانش‌آموزان از این درس می‌گریزند. شما در کتاب‌هایی که تألیف کردید یا در شیوهٔ تدریستان چه روشی را پیش می‌گرفتید که ریاضی برای بچه‌ها به درسی شیرین و دوست‌داشتنی تبدیل بشود؟

● **دارابی:** من هر روز قبل از این‌که به کلاس بروم، شب قبل عنوان درس را نگاه می‌کردم. خودم کاغذ و قلم برمی‌داشتم و برای خودم مسائل درس را حل می‌کردم. یادم نمی‌آید که بدون این کار سر کلاس رفته باشم. این طوری که می‌رفتم سر کلاس، موفق هم بودم. یعنی بچه‌ها راضی بودند. من غالباً در جنوب شهر درس داده‌ام.

■ **امیری:** منطقهٔ چند بودید.

● **دارابی:** منطقهٔ ۱۴.

■ **امیری:** از همین منطقه هم بازنشسته شدید؟

● **دارابی:** بله، مدرسه ابوریحان.

■ **رستمی:** کدام خیابان بود؟

دارابی: نزدیک میدان خراسان.

■ **فرجی:** از شاگردان آن دوره کسی را به‌خاطر دارید یا کسانی هستند که هنوز با شما در تماس و ارتباط باشند؟

● **دارابی:** بله، هستند. می‌آیند سر می‌زنند. اتفاقاً هفتهٔ پیش یکی از دانش‌آموزانم از کانادا آمده بود و به من سر زد.

رستمی

زندگی شخصی همراه با تدریس

فرجی: در فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتاب «اشک سبلان»، سال تولد شما را ۱۳۱۰ نوشته‌اند. این درست است؟

● **دارابی:** نه متولد ۱۳۱۴ هستم. اشتباه نوشته‌اند.

■ **فرجی:** کجا متولد شدید؟

● **دارابی:** اردبیل.

■ **فرجی:** دربارهٔ اولین مواجهه خودتان با درس ریاضی و شطرنج بفرمایید.

● **دارابی:** خانوادهٔ ما یک خانواده فرهنگی بود. پدر و مادرم که ایرانی بودند و در باکو زندگی می‌کردند، سال ۱۳۰۴ به اردبیل برگشتند. آن‌ها با خودشان فرهنگ آنجا را هم آوردند: نقاشی، گرامافون، موسیقی و شعر بود. شطرنج آن موقع نبود. دایی من، هم نقاش بود هم مهندس راه و ساختمان. ما بیشتر تحت تأثیر دایی‌مان بودیم. مادرم هم همیشه برای ما شعر می‌خواند. شطرنج را من بعدها در دبیرستان از دوستی که الان در آلمان است، یاد گرفتم. در کلاس هفتم بودم و در «دبیرستان ابوریحان» درس می‌خواندم.

■ **فرجی:** یعنی تهران بودید؟

● **دارابی:** بله.

■ **فرجی:** چه سالی به تهران آمدید؟

● **دارابی:** وقتی دورهٔ ابتدایی را تمام کردم، در سال ۱۳۳۰ به تهران آمدیم. البته پنج ساله بودم که مادرم فوت کرد و ما تحت سرپرستی دایی‌ام بزرگ شدیم. البته پدرم هم بود، ولی چون مادرم با زن‌دایی‌ام خیلی نزدیک بود، زن‌دایی‌ام مثل یک مادر از ما پرستاری کرد.

■ **فرجی:** از سال‌های به تهران آمدن بگویید

● **دارابی:** من در تهران به دبیرستان ابوریحان رفتم که در خیابان دلگشا بود؛ پایین‌تر از نیروی هوایی. آقای **دیوسالار**، مدیر این مدرسه بود. برادری هم داشت به اسم **فرهنگ** که با پسردایی من در بانک سپه همکار بود. با معرفی ایشان در آنجا اسم نوشتم و تا کلاس دهم درس خواندم.

■ **فرجی:** استاد نگفتید که اولین مواجههٔ شما با درس ریاضی چگونه بود؟

● **دارابی:** همان‌طور که گفتم، دایی‌ام مهندس بود. یک پسردایی هم داشتم که شاید آقای **رستمی** بشناسد، **داوود بابایی**. ایشان مسائل ریاضی طرح می‌کرد و بین خانواده‌ها رد و بدل می‌شد. مثلاً سه مرد و سه زن می‌خواستند از رودخانه‌ای رد شوند و... من ۱۰-۹ ساله که بودم این مسائل را می‌شنیدم. روی این اصل به ریاضیات علاقه‌مند شدم.

■ **فرجی:** دبیرستان چه سالی تمام شد و ورودتان به دانشگاه کی بود؟

● **دارابی:** دبیرستان در سال ۱۳۳۷ تمام شد. دانش‌سرای عالی شبانه تازه در سیدخندان به راه افتاده بود. من به آنجا رفتم.

■ **فرجی:** از معلمان دوران دبیرستان کسی خاطرتان هست؟

● **دارابی:** بله، آقای **کهن** که معلم رسم و نقاشی ما بود. آقای **وطن‌شناس** بود که شیمی درس می‌داد. این‌ها بیشتر روی من اثر گذاشتند.

■ **فرجی:** ورود به دانش‌سرا چه سالی بود؟

● **دارابی:** فکر می‌کنم سال ۱۳۳۸ بود. من در رشته‌های فیزیک و ریاضی قبول شده بودم، ولی به ریاضی علاقه داشتم و به این رشته رفتم.

■ **فرجی:** خاطره‌ای از آن دوران دارید؟

● **دارابی:** استادان جالبی داشتیم. مثلاً استاد ریاضی داشتیم آنالیز را درس می‌داد و اگر در ورقه امتحان اشتباه می‌کردیم، به آن سؤال نمرهٔ منفی می‌داد. یا دکتر **هشترودی** بود که می‌گفتند شاید درسش را خوب درک نکنید، ولی از شخصیتش استفاده کنید. همه عاشق او بودیم. دکتر هشترودی هفته‌ای یک بار می‌آمد و بیشتر از پیشرفت‌هایی که در شوروی صورت گرفته بود، برای ما حرف می‌زد. مثلاً در آنجا پنبهٔ رنگی می‌کارند یا سیبی کاشته‌اند اندازهٔ یک هندوانه.

■ **میرشهرام صدر:** اگر آن موقع اینترنت بود و شما خودتان این اخبار را می‌گرفتید، دیگر دکتر هشترودی برای شما جذابیتی نداشت؟

● **دارابی:** چرا، خودش هم شخصیت جالبی داشت. مثلاً اگر آن استاد منفی دو می‌داد، ایشان نمرهٔ ۲۲ می‌داد! چنین روحیه‌ای داشت. یا سؤال را می‌داد و خودش می‌رفت. کسی را هم رد نمی‌کرد.

رستمی: دکتر هشترودی استاد ما هم بود. ایشان دو ویژگی داشت: یکی این‌که دستی هم در ادبیات داشت و می‌گفتند شعر هم می‌گوید. علاوه بر این، خودش در آنچه که تعریف می‌کرد، شرکت داشت. مثلاً می‌گفت محاسبات مربوط به مدار قمر مصنوعی شوروی را من و چند نفر دیگر در مسکو انجام دادیم. خود این موضوع به ما احساس لذت می‌داد که فردی از ایران در چنین جایگاهی قرار گرفته است.

■ **فرجی:** گفته شد که استاد هشترودی به ادبیات هم علاقه و توجه داشت. گرایش شما به ادبیات از همین‌جا و دوران دانش‌سرا آغاز شد؟

● **دارابی:** بیشترین تأثیر ادبی را مادرم بر من گذاشت که در دوران کودکی ما برایمان شعر می‌خواند. آن‌ها از باکو که آمده بودند دو صندوق کتاب ادبی و ریاضی آورده بودند. مثلاً اولین کتابی که تألیف کردم، یعنی «درخت سیب و پسرک فقیر» نام داشت. خود درخت سیب شعری بود که مادرم برای من می‌خواند. من این درخت سیب را در داستانم در یک شیب قرار دادم که اختلاف طبقاتی را نشان بدهد. سیب بالا بود و یک کاج پایین. من صحبت‌های این دو را کتاب کردم.

■ **فرجی:** اجازه بدهید که به دوران دانش‌سرا برگردیم. بعد از این‌که فارغ‌التحصیل شدید، چه کار کردید؟

● **دارابی:** سال اول را در دبیرستان باباطاهر بودم که برایتان تعریف کردم، دانش‌آموزان زرنگی داشت. سالی که من دانش‌سرا بودم، فقط دو سه نفر فارغ‌التحصیل داشت: از جمله یکی من بودم و یکی هم آقایی به اسم **علی بلندی** و آقای **رخشنده**. ما باید می‌رفتیم شهرستان. ولی من آن سال را تهران ماندم. بعد هم حکم مرا نوشتند و فرستادند رشت. یک سال و نیم رشت بودم، ولی وسط سال نماندم و به تهران آمدم.

■ **فرجی:** چرا؟

● **دارابی:** یکهو باران شدید می‌آمد؛ مثلاً ۲۱ روز. من دیدم که واقعاً نمی‌توانم بمانم. آمدم تهران و دیگر نرفتم. بعد از ۳۰-۲۰ روز، آمدند سراغم؛ چون گفته بودم مریض هستم. واقعاً هم مریض بودم. این بار مرا فرستادند قزوین. آقای **رجایی** را دستگیر کرده بودند و کلاس‌هایش خالی بود.

■ **فرجی:** این چه سالی بود؟

● **دارابی:** باید سال‌های ۴۴-۱۳۴۳ باشد. من آنجا در یک دبیرستان و یک هنرستان درس می‌دادم. به هر حال من یک سال در قزوین ماندم. بعد به تاکستان رفتم. آقایی بود به اسم **حاجی‌زاده** که آمد سراغ من و گفت که ما در تاکستان یک کلاس شش طبیعی داریم. یک نفر را می‌خواهیم که هم ریاضیات و هم فیزیکش را تدریس کند. قبول کردم، به شرطی که دو روز بروم و یک روز به جای من یک نفر دیگر تدریس کند و من حق‌التدریس او را بپردازم. با این شرط رفتم تاکستان و هفت سال آنجا تدریس کردم.

■ **فرجی:** در آن موقع ازدواج کرده بودید؟

● **دارابی:** من در سال ۱۳۴۹ ازدواج کردم. حالا یک پسر و یک دختر دارم، هر دو مهندس هستند.

■ **فرجی:** بعد از دورهٔ تاکستان چه اتفاقی افتاد؟

● **دارابی:** من در آنجا برای بچه‌ها کتاب می‌بردم. یک‌بار مرا به ساواک احضار کردند. البته این در قزوین بود. یک نفر آمد و خیلی مؤدب با من صحبت کرد. گفت ما شنیده‌ایم که در آنجا عده‌ای دارند شلوغ می‌کنند. شما به ما گزارش بدهید. گفتم من هفته‌ای دو روز می‌روم تاکستان و اصلاً کسی را آنجا نمی‌شناسم. طرف که دید چیزی از من درنمی‌آید، دیگر چیزی نگفت. من برگشتم تاکستان. تاکستانی‌ها دو طایفه هستند: **رحمانی** و **طاهرخانی**. آن‌ها یک ریش سفید داشتند که مرد قدبلندی بود. او مرا صدا کرد و گفت: پسرم، تا روزی که توی تاکستان هستی، نمی‌گذارم کسی دست به تو بزند. ولی این بچه‌ها آن‌طور هم که تو فکر می‌کنی، نیستند. تو با آن‌ها صحبت می‌کنی و می‌روند و یک حرف‌های دیگر می‌زنند. گفتم: پس من دیگر از تاکستان باید بروم. رفتم سر کلاس و گفتم می‌خواهم بروم. بچه‌ها ناراحت شدند.

■ **فرجی:** چه سالی این اتفاق افتاد؟

● **دارابی:** ۱۳۵۳ بود. به تهران و به دبیرستان ابوریحان برگشتم.

■ **امیری:** همان دبیرستانی که خودتان در آن درس خوانده بودید؟

● **دارابی:** بله، ولی جایش عوض شده بود.

■ **امیری:** کجا آمده بود؟

● **دارابی:** دورهٔ قدیم، خیابان دلگشا بود و دورهٔ جدید، نزدیک میدان خراسان.

■ **فرجی:** با خانواده کلاً برگشتید تهران؟

● **دارابی:** خانواده‌ام تهران بودند. من ساعت چهار صبح سوار اتوبوس می‌شدم و قبل از هشت به تاکستان می‌رسیدم. خود معلم‌ها دیرتر از من می‌آمدند. مدیری داشتم که به آن‌ها می‌گفت این دارابی از تهران آمده و الان سر کلاس است، شما هنوز نیامده‌اید. من بعدازظهرها هم ساعت ۴ برمی‌گشتم به تهران. البته هفته‌ای دو روز بود. بین راه هم زبان روسی مطالعه می‌کردم. بعد هم به کلاس زبان می‌رفتم.

■ **فرجی:** در تهران تعاملتان با دانش‌آموزان چگونه بود؟

● **دارابی:** بچه‌ها نمی‌دانستند که من کتاب هم نوشته‌ام و وقتی می‌فهمیدند، علاقه‌شان بیشتر می‌شد.

■ **فرجی:** چه سالی بازنشسته شدید؟

● **دارابی:** سال ۱۳۶۴ بود و به دفتر تألیف کتب درسی رفتم. ۱۱ سال هم این‌جا بودم.

■ **فرجی:** خیلی ممنون استاد. فکر می‌کنید این امکان وجود دارد که تجربیات ارزندهٔ خودتان را در حوزهٔ آموزش ریاضی به شکل کتاب یا در قالب مقالاتی برای مجلهٔ برهان ریاضی منتشر کنید؟

● **دارابی:** من یکی از انبوه معلمان هستم و استادان بزرگ‌تر از من هم وجود دارند. ولی در حدی که در مجلهٔ برهان جا داشته باشد، بله آماده‌ام که این کار را انجام دهم.

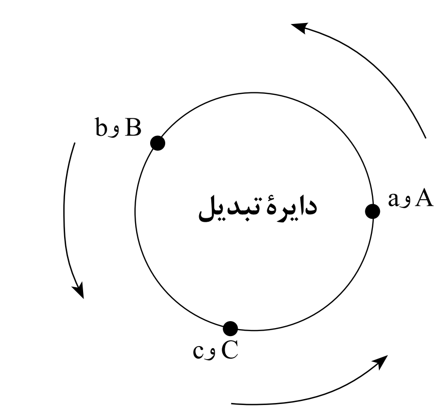
میرشهرام صدر

احمد قندهاری

دایرهٔ تبدیل و کاربرد آن در ساده‌کردن عبارت‌های جبری

کلیدواژه‌ها: دایرهٔ تبدیل، ساده کردن کسرها

اگر روی پیرامون یک دایره، سه نقطه به نام‌های a، b، c یا A، B و C مانند شکل ۱ در نظر بگیریم و در جهت دایرهٔ مثلثاتی روی پیرامون دایره حرکت کنیم، از a به b و از b به c و از c به a می‌رسیم.



از این خاصیت، هم در یادگیری فرمول‌های مربوط به مثلث در مثلثات و هندسه استفاده می‌کنیم و هم در ساده‌کردن کسرهای تبدیلی. برای مثال، در مثلث ABC به اضلاع a و b و c داریم:

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A$$

حال اگر در این فرمول به جای a، b و به جای b، c و به جای c، a قرار دهیم خواهیم داشت:

$$b^۲ = c^۲ + a^۲ - ۲ca\cos B$$

اینک اگر در این فرمول a را به b و b را به c و c را به a تبدیل کنیم، خواهیم داشت:

$$c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos C$$

تذکر: از این خاصیت در یادگیری فرمول‌های مربوط به مثلث، چه در هندسه و چه در مثلثات می‌توان استفاده کرد؛ مثل فرمول‌های سه ارتفاع و فرمول‌های سه میانه.

کاربرد دایرهٔ تبدیل در ساده‌کردن کسرها

مسئلهٔ ۱. حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$P = \frac{۲a^۲ + b^۲ + ۳ab - ac - bc}{a+b} + \frac{۲a^۲ + c^۲ + ۳bc - ba - ca}{b+c} + \frac{۲c^۲ + a^۲ + ۳ca - cb - ab}{c+a}$$

حل: اگر برای یافتن حاصل عبارت فوق مخرج مشترک بگیریم، عبارت صورت، خیلی مفصل، و احتمال اشتباه هم زیاد خواهد شد. وقت زیادی را هم خواهد گرفت. اگر توجه کنیم، کسر دومی تبدیل کسر اولی و کسر سومی تبدیل کسر دومی است. بنابراین فقط کسر اولی را ساده و جواب آن را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{کسر اول} = \frac{۲a^۲ + b^۲ + ۳ab - ac - bc}{a+b}$$
$$= \frac{۲a^۲ + ۲ab + b^۲ + ab - ac - bc}{a+b}$$
$$= \frac{۲a(a+b) + b(a+b) - c(a+b)}{a+b}$$
$$= \frac{(a+b)(۲a+b-c)}{a+b} = ۲a+b-c$$

چون کسر دومی تبدیل کسر اولی است، پس جواب کسر دومی هم تبدیل جواب کسر اولی است. به همین ترتیب، چون کسر سومی تبدیل کسر دومی است، در نتیجه جواب کسر سومی هم تبدیل جواب کسر دومی است.

$$\text{حاصل کسر اولی} = ۲a+b-c$$
$$\text{حاصل کسر دومی} = ۲b+c-a$$
$$\text{حاصل کسر سومی} = ۲c+a-b$$
$$\Rightarrow \text{مجموع سه کسر} = ۲a+۲b+۲c = ۲(a+b+c)$$

مسئلهٔ ۲. اگر: $a+b+c=۰$، ولی a، b و c مخالف صفر باشند، ثابت کنید:

$$\frac{b+c}{bc}(b^۲+c^۲-a^۲) + \frac{c+a}{c.a}(c^۲+a^۲-b^۲) + \frac{a+b}{a.b}(a^۲+b^۲-c^۲) = ۰$$

حل: با کمی دقت متوجه می‌شویم، عبارت دومی تبدیل عبارت اولی و عبارت سومی تبدیل کسر دومی است. پس ابتدا کسر اولی را ساده می‌کنیم:

$$\text{در فرض داریم } a+b+c=۰ \Rightarrow b+c=-a$$

$$\text{کسر اولی} = \frac{b+c}{bc}(\underbrace{b^۲+c^۲}-a^۲) = \frac{-a}{bc}((b+c)^۲ - ۲bc - a^۲)$$
$$= \frac{-a}{bc}((-a^۲) - ۲bc - a^۲) = \frac{-a}{bc}(a^۲ - ۲bc - a^۲)$$
$$= \frac{-a}{bc}(-۲bc) = ۲a$$

چون کسر دوم تبدیل یافتهٔ کسر اول است، پس جواب کسر دوم ۲b و جواب کسر سوم ۲c خواهد شد. بنابراین:

$$\text{عبارت مسئله} = ۲a+۲b+۲c = ۲(a+b+c) = ۲(۰) = ۰$$

مسئلهٔ ۳. اگر a، b و c مخالف صفر، و $a+b+c=۰$ باشد، آن‌گاه حاصل عبارت P را بیابید.

$$P = \frac{۱}{a^۲+b^۲-c^۲} + \frac{۱}{b^۲+c^۲-a^۲} + \frac{۱}{c^۲+a^۲-b^۲}$$

حل: در این مسئله هم کسر دوم تبدیل کسر اول و کسر سوم تبدیل کسر دوم است، پس:

$$\text{کسر اول} = \frac{۱}{a^۲+b^۲-c^۲},\ a+b+c=۰ \Rightarrow a+b=-c$$
$$\text{کسر اول} = \frac{۱}{(a+b)^۲ - ۲ab - c^۲} = \frac{۱}{(-c)^۲ - ۲ab - c^۲}$$
$$= \frac{۱}{c^۲ - ۲ab - c^۲} = \frac{۱}{-۲ab}$$
$$\text{کسر اول} = \frac{-۱}{۲ab}$$
$$\text{کسر دوم} = \frac{-۱}{۲bc}$$
$$\text{کسر سوم} = \frac{-۱}{۲ca}$$
$$\Rightarrow \text{مجموع سه کسر} = \frac{-۱}{۲ab} + \frac{-۱}{۲bc} + \frac{-۱}{۲ca} = \frac{-c-a-b}{۲abc}$$
$$= \frac{-\overbrace{(a+b+c)}^{۰}}{۲abc} = ۰$$

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه دوم: لطیفه‌های ریاضی

● این حکایــت را به **جان فن نویمــان** (۱۹۵۷-۱۹۰۳)، ریاضــی‌دان مشــهور و معاصر مجاری ـ کــه به تعبیری پدر علم سیبرنتیک محسوب می‌شــود ـ نسبت داده‌اند. می‌گوینــد روزی نویمان با ســرعت می‌رفت تا به کلاس درس خود در «دانشگاه ام‌آی‌تی» برسد. در راهروی منتهی به کلاس دانشجویی با شتاب خود را به او رساند و به او که با عجله می‌خواست وارد کلاس شود گفت: «استاد ببخشید یک سؤال کوچک داشتم!»

استاد با بی‌حوصلگی گفت: «ببینم چیست.»

دانشــجو ورقه‌ای را که در دســت داشــت و روی آن مسئله‌ای دربارهٔ محاسبهٔ یک انتگرال معین بود، به استاد داد. نویمــان با عجله نگاهی به آن انداخت و گفت: «خُب این‌که معلوم است، می‌شود $\frac{2\pi}{5}$.»

دانشجو گفت: «می‌دانم استاد، جواب زیر همین صفحه نوشته شده است. راه‌حل را می‌خواهم!»

استاد کمی فکر کرد و پس از قدری مکث گفت: «آره... آره خُب، بگذار ببینم ... بله بله، می‌شود $\frac{2\pi}{5}$!»

دانشــجو گفت: «بله اســتاد می‌دانم! ولی راه‌حل آن چیست؟»

و اســتاد گفت: «خُب من از دو راه متفاوت آن را حل کردم!»

● دو ریاضی‌دان برای صرف شــام با هم به یک رســتوران رفته بودند. یکی از آن‌ها به دیگری رو کرد و گفت: «بیا شرطی ببندیم که هر کس بازنده شد، پول شام را بدهد!»

دیگری گفت: «خُب چه شرطی؟»

اولی دوباره گفت: «فکر می‌کنی پیشــخدمتی که برای ما فهرست غذا را مــی‌آورد، حاصل $(a+b)^2$ را بداند؟!»

دیگری گفــت: «بعید می‌دانم!»

و دوستش ادامه داد: «خُب سر همین شرط می‌بندیم.»

وقتــی پیشــخدمت آمــد، بعــد از ســفارش غــذا، ریاضی‌دان‌ها از او پرسیدند: «آیا می‌دانی حاصل $(a+b)^2$ چه می‌شود؟»

او بی‌درنــگ جــواب داد: «معلــوم اســت: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$.»

و بعد از کمی مکث ادامه داد: «البته در صورتی که a و b ضدّ تعویض‌پذیر باشند!»

در مورد پاسخ پیشخدمت باید کمی توضیح بدهم تا ظرافت موضوع روشــن شود. در یک عمل دوتایی (مانند جمع، ضرب و...) بین دو متغیر a و b، عمل را تعویض‌پذیر گوییم هــرگاه: $a*b = b*a$. یعنی خاصیت جابه‌جایی داشته باشد. مثلاً عمل جمع تعویض‌پذیر است. در مقابل عمل را تعویض‌ناپذیر گوییم اگر چنین نباشد. اما عمل را «ضدّ تعویض‌پذیــر»[1] گوییم هرگاه $a*b$ و $b*a$ قرینهٔ هم باشند: $a*b = -b*a$. یعنی جمع آن‌ها مساوی صفر (یا عضو خنثای عمل) باشد. با این شرط می‌توان نوشت:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + \underbrace{ab+ba}_{0} + b^2 = a^2 + b^2$$

و می‌بینیم که پیشخدمت درست پاسخ داده است!

● این داستان واقعی است: در یک آزمون دبیرستانی در کشور انگلستان، پرسشی به‌صورت زیر آمده است:

سؤال: شــما چند بار می‌توانید عدد ۷ را از ۸۳ کم کنید، تا جواب مثبت بماند؟ نتیجهٔ نهایی چه خواهد بود؟

جواب یکی از دانش‌آموزان به این صورت بود: «من هر چند بار که بخواهم می‌توانم این عمل تفریق را انجام دهم و جواب همیشه مساوی ۷۶ خواهد بود!»

فلسفه، بازی با مفاهیم عینی است و نه قواعد. ریاضیات بازی با قواعد است و نه مفاهیم عینی.

«یان الیس»

پی‌نوشت ....

1. Anti commutative

آموزشی

دنبــاله‌ها

دنبـاله‌های حسابی و هندسی

هوشنگ شرقی

کلیدواژه‌ها: دنباله حســابی، دنبالهٔ هندســی، قانون دنباله، جملــهٔ عمومی، دنبالهٔ بازگشتی، قدرنسبت، واسطهٔ حسابی، واسطهٔ هندسی

دنبالهٔ هندسی

دنباله‌ای که هر جملهٔ آن از ضرب مقداری ثابت در جملهٔ ماقبل به‌دســت آید، «دنبالهٔ هندسی» نامیده می‌شود؛ یعنی: $a_n = a_{n-1}.q$.

مقدار ثابت (q) را قدرنسبت دنباله می‌نامیم. بدیهی است که اگر $q > 1$ باشــد، دنباله صعــودی و اگر $0 < q < 1$ دنباله نزولی است. اگر $q = 1$ باشد، دنباله ثابت است. اگر هم $q < 0$ باشــد، جمله‌ها یک در میان مثبت و منفی‌اند. دنباله‌های زیر مثال‌هایی از دنباله‌های هندسی هستند:

$2, 6, 18, 54, \ldots \quad (q = 3)$

$3, -6, 12, -24, \ldots \quad (q = -2)$

$4, 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots \quad (q = \frac{1}{2})$

$3, 3, 3, \ldots \quad (q = 1)$

$3, -1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \ldots \quad (q = -\frac{1}{3})$

شبیه روش استقرایی که در مورد دنبالهٔ حسابی دیدیم، در مورد دنبالهٔ هندسی نیز می‌توان نوشت:

$a_n = a_1.q^{n-1}$ (جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی)

مثال ۱. یک دنبالهٔ هندسی تشکیل دهید که جملهٔ پنجم آن ۸۰ و جملهٔ نهم آن ۱۲۸۰ باشــد. جملهٔ بیست و یکم این دنباله چیست؟

● **حل:**

$$\begin{cases} a_5 = a_1q^4 = 80 \\ a_9 = a_1q^8 = 1280 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_1q^8}{a_1q^4} = \frac{1280}{80} \Rightarrow q^4 = 16$$

$$\Rightarrow q = \pm 2 \Rightarrow a_1 = 5$$

پس دو دنباله با این ویژگی وجود دارد:

$$\begin{cases} 5, 10, 20, \ldots \\ 5, -10, 20, \ldots \end{cases}$$

و جملهٔ بیست و یکم این دنباله برابر است با:

$$a_{21} = a_1q^{20} = 5 \times 2^{20}$$

مثال ۲. ثابت کنید هیچ دنبالهٔ هندســی وجود ندارد که ۱۱، ۱۲ و ۱۳ جملاتی از آن باشند.

● **حل:** اگر چنین باشــد که ۱۱، ۱۲ و ۱۳ جملات mام، nام و pام یک دنبالهٔ هندسی باشند، داریم:

$$a_m = a_1q^{m-1} = 11, \; a_n = a_1q^{n-1} = 12, \; a_p = a_1q^{p-1} = 13$$

و از تقسیم دوبه‌دوی این تساوی‌ها نتیجه می‌شود:

$$\frac{a_m}{a_n} = q^{m-n} = \frac{11}{12}, \; \frac{a_n}{a_p} = q^{n-p} = \frac{12}{13}$$

$$\Rightarrow q = (\frac{11}{12})^{\frac{1}{m-n}} = (\frac{12}{13})^{\frac{1}{n-p}} \Rightarrow (\frac{11}{12})^{n-p} = (\frac{12}{13})^{m-n}$$

$$\Rightarrow 11^{n-p} \times 13^{m-n} = 12^{m-p}$$

و این تساوی غیرممکن است. (چرا؟)

شرط تشکیل دنبالهٔ هندسی

مشابه آن‌چه که در مورد دنبالهٔ حسابی دیدیم، اگر a، b و c جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، می‌توان نوشت:

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=q \Rightarrow b^2=ac$$

و این شـرط آن اسـت که سـه عـدد متوالـی a، b و c تشکیل دنبالهٔ هندسی بدهند. همچنین، $b=\sqrt{ac}$ را واسطهٔ (میانگین) هندسی a و c می‌نامند. مثلاً عدد ۶ واسطهٔ هندسی ۴ و ۹ است.

مثال ۳. m را طوری بیابید که سه عدد m، m + ۴ و 9m دنبالهٔ هندسی تشکیل دهند.

حل:

$$m(9m)=(m+4)^2 \Rightarrow 8m^2-8m-16=0$$

$$\Rightarrow m^2-m-2=0 \Rightarrow m=-1 \text{ یا } m=2$$

واسطه‌های هندسی بین دو عدد

مشـابه آن‌چـه که در مـورد دنبالهٔ حسـابی دیدیم، اگر بخواهیم بین دو عدد a و b، m عدد (واسـطهٔ هندسـی) قرار دهیم که با این دو عدد تشکیل دنبالهٔ هندسی دهند، از دستور $q=\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$ قدرنسبت را به‌دست می‌آوریم.

مثال ۴. بین دو عدد ۹ و ۷۲، دو واسـطهٔ هندسـی درج کنید

حل:

$$q=\sqrt[3]{\frac{72}{9}}=2 \Rightarrow 9,\underbrace{18,36}_{\text{واسطه‌های هندسی}},72$$

مجموع جملات دنبالهٔ هندسی

روشی که برای تعیین مجموع n جملهٔ نخست یک دنبالهٔ هندسـی وجود دارد آن اسـت که پس از نوشـتن S_n، qS_n را تشکیل دهیم و طرفین دو رابطه را از هم کم کنیم.

مثال ۵. مجموع n جملهٔ نخسـت دنبالهٔ زیر را به‌دسـت آورید:

$$2,4,8,16,\ldots$$

حل:

$$-\begin{cases} S_n=2+4+8+16+\ldots+2^n \\ 2S_n=4+8+16+\ldots+2^n+2^{n+1} \end{cases}$$
$$S_n=2^{n+1}-2$$

در حالت کلی با همین روش برای هر دنبالهٔ هندسـی با قدرنسبت q و جملهٔ نخست a_1 داریم:

$$S_n=a_1\frac{1-q^n}{1-q}$$

مثال ۶. مجموع ۱۰۰ جملهٔ نخست دنبالهٔ زیر را به‌دست آورید:

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\ldots$$

حداقـل چند جمله از دنبالهٔ فـوق را با هم جمع کنیم تا مجموع از ۱/۹۹۹ تجاوز کند؟

حل:

$$S_{100}=1\times\frac{1-(\frac{1}{2})^{100}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1-\frac{1}{2^{100}}}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{2^{100}-1}{2^{100}}}{\frac{1}{2}}=\frac{2^{100}-1}{2^{99}}$$

$$=2-\frac{1}{2^{99}}$$

$$S_n=1\times\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{2^n-1}{2^n}}{\frac{1}{2}}=\frac{2^n-1}{2^{n-1}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}>1/999$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^{n-1}}<\frac{1}{1000} \Rightarrow 2^{n-1}>1000 \Rightarrow \min(n-1)=10$$

$$\Rightarrow \min(n)=11$$ (باید حداقل ۱۱ جمله را با هم جمع کنیم.)

مثال ۷. یک دنبالهٔ هندسـی تشکیل دهید که مجموع هشت جملهٔ اول آن ۶۵۶۰ و مجموع چهار جملهٔ اول آن ۸۰ باشد.

حل:

$$\begin{cases} S_8=a_1\frac{1-q^8}{1-q}=6560 \\ S_4=a_1\frac{1-q^4}{1-q}=80 \end{cases} \Rightarrow \frac{S_8}{S_4}=\frac{1-q^8}{1-q^4}=\frac{6560}{80}=82$$

$$\Rightarrow \frac{(1-q^4)(1+q^4)}{(1-q^4)}=82 \Rightarrow q^4+1=82$$

$$\Rightarrow q^4=81,\ q=\pm 3 \Rightarrow (q=3,a_1=2) \text{ یا } (q=-3,a_1=-4)$$

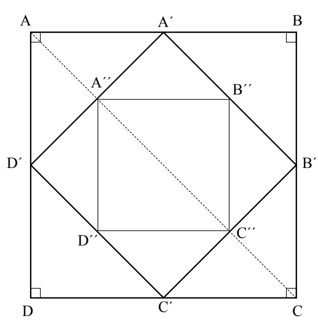
یعنی دو دنبالهٔ عددی بـا ویژگی‌های فوق به صورت زیر وجود دارد:

$$2,6,18,\ldots \text{ و } -4,12,-36,\ldots$$

مثال ۸. وسـط‌های اضلاع مربعی به ضلع واحد را به هم وصل می‌کنیم تا مربعی دیگر به‌دسـت آید. وسـط‌های اضلاع این مربع را نیز به یکدیگر وصل می‌کنیم و...

الف) اگر این عمل را ۱۰ بار تکرار کنیم، مجموع مساحت‌ها و مجموع محیط‌های این مربع‌ها را به‌دست آورید.

ب) این عمل را چند بار تکرار کنیم تا مجموع مساحت‌های مربع‌های داخلی از ۹۹ درصد مساحت مربع اصلی بیشتر شود؟



حل: الف) مطابق شـکل، مربع ABCD به ضلع واحد مفروض است. اگر وسـط‌های اضلاع این مربع را به هم وصل کنیم، مربع A′B′C′D′ به‌دست می‌آید که مطابق شکل، اضلاع آن موازی قطرهای مربع اصلی و طول آنها نصف طول قطر AC است. (چرا؟) بنابراین داریم:

$$AC^2=AB^2+BC^2=1^2+1^2=2 \Rightarrow AC=\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow A'B'=C'D'=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

یعنی طـول ضلع مربـع A′B′C′D′ مسـاوی $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و لذا مساحت آن $\frac{1}{2}$ اسـت. به همین ترتیب اگر وسط‌های اضلاع مربع A′B′C′D′ را به یکدیگر وصل کنیم، مربع A″B″C″D″ به‌دست می‌آید که طول ضلع آن مساوی $\frac{1}{2}$ و مساحت آن $\frac{1}{4}$ است. بنابراین مساحت‌ها به صورت زیر یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{2}$ تشکیل می‌دهند:

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\ldots$$

مجموع مساحت‌های ۱۰ مربع از این مربع‌ها برابر است با:

$$S_{10}=1\times\frac{1-(\frac{1}{2})^{10}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1-\frac{1}{1024}}{\frac{1}{2}}=\frac{1023}{512}$$

و محیط‌های مربع‌ها نیز یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $\frac{\sqrt{2}}{2}$ تشکیل می‌دهند:

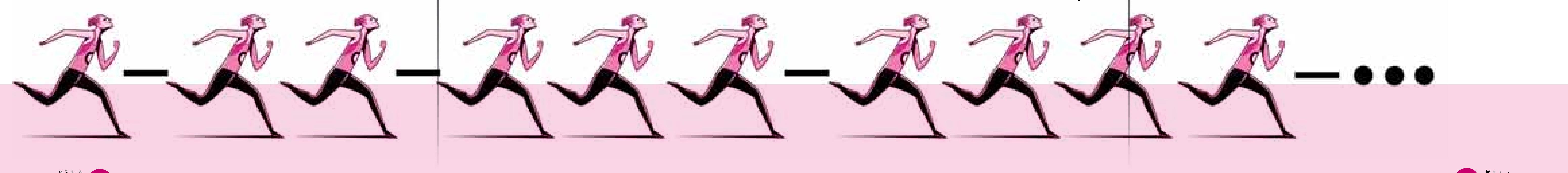
$$4,2\sqrt{2},2,\sqrt{2},\ldots$$

مجموع ۱۰ جملهٔ این دنباله برابر است با:

$$S_{10}=4\times\frac{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^{10}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{31(2+\sqrt{2})}{8}$$

ب) مسـاحت‌های مربع‌های داخلی، جملات یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{2}$ و جملهٔ نخست $\frac{1}{2}$ هستند:

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\ldots$$



برای آنکه مجموع آنها از ۹۹ درصد مساحت مربع اصلی بیشتر شود، باید داشته باشیم:

$$S_n=\frac{1}{2}\times\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}>0/99$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^n}<\frac{1}{100}\Rightarrow 2^n>100\Rightarrow \min(n)=7$$

مسائل ترکیبی از دنباله‌ها

۱. اگر $\frac{1}{a+b}$، $\frac{1}{a+c}$ و $\frac{1}{b+c}$ جملات متوالی از یک دنبالهٔ حسابی باشند، ثابت کنید a^2, b^2, c^2 نیز جملات متوالی یک دنبالهٔ حسابی هستند.

● **حل:** طبق فرض داریم: $\frac{2}{a+c}=\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}$. از این فرض و با عملیات جبری خواهیم داشت:

$$\frac{a+2b+c}{(a+b)(b+c)}=\frac{2}{a+c}$$

$$\Rightarrow 2(ab+ac+b^2+bc)=(a^2+2ab+ac+ac+2bc+c^2)$$

$$\Rightarrow 2ab+2ac+2b^2+2bc=a^2+2ab+2ac+2bc+c^2$$

$$\Rightarrow a^2+c^2=2b^2$$

و این نشان می‌دهد که a^2, b^2, c^2 دنبالهٔ حسابی تشکیل می‌دهند.

۲. هرگاه به چهار جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی به ترتیب اعداد ۵، ۶، ۹ و ۱۵ را اضافه کنیم، یک دنبالهٔ هندسی به‌دست می‌آید، دنبالهٔ حسابی را بنویسید.

● **حل:** اگر a، $a+d$، $a+2d$ و $a+3d$ جملات یک دنبالهٔ حسابی باشند، $a+5$، $a+d+6$، $a+2d+9$ و $a+3d+15$ جملات دنبالهٔ هندسی هستند. بنابراین داریم:

$$(a+2d+9)^2=(a+3d+15)(a+d+6)$$

و $(a+d+6)^2=(a+5)(a+2d+9)$

پس از ساده کردن روابط اخیر به دستگاه دومجهولی $\begin{cases}d^2+2d-2a=9\\ d^2-3a+3d=9\end{cases}$ می‌رسیم. با کم‌کردن رابطهٔ بالا از پایین نتیجه می‌شود: $-d+a=0\Rightarrow a=d$

با جای‌گذاری در رابطهٔ اول خواهیم داشت:

$$a^2+2a-2a=9\Rightarrow a=\pm 3$$

از آنجا داریم: $d=\pm 3$ و دو دسته جواب برای دنبالهٔ حسابی به‌دست می‌آید:

$3,6,9,12,\ldots$ و $-3,-6,-9,-12,\ldots$

۳. در یک دنبالهٔ هندسی مجموع $2n$ جملهٔ اول، سه برابر مجموع جملات ردیف فرد است. قدرنسبت دنباله را به‌دست آورید.

● **حل:** با توجه به فرض مسئله داریم (جملهٔ اول a و قدرنسبت q است):

$$3(a+aq^2+aq^4+\ldots+aq^{2n-2})=a+aq+aq^2+\ldots+aq^{2n-1}$$

$$\Rightarrow 3a\frac{q^{2n}-1}{q^2-1}=a\frac{q^{2n}-1}{q-1}\Rightarrow\frac{3}{q^2-1}=\frac{1}{q-1}$$

$$\Rightarrow\frac{3}{q+1}=1\Rightarrow q=2$$

۴. مجموع همهٔ اعداد سه رقمی را که باقی‌ماندهٔ تقسیم آنها بر ۵ مساوی ۲ می‌شود، به‌دست آورید.

حل: همهٔ این عددها به صورت ۵k+۲ هستند که اولین آنها ۲+۲۰×۵، یعنی ۱۰۲، و آخرین آنها ۲+۱۹۹×۵، یعنی ۹۹۷ است. عدهٔ این عددها هم مساوی ۱+۲۰-۱۹۹، یعنی ۱۸۰ عدد است. لذا مجموع آنها برابر است با:

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{180}{2}(102+997)=98910$$

۵. مجموع n جملهٔ نخست از دنبالهٔ زیر را به‌دست آورید:

$$1,11,111,1111,\ldots,\underbrace{1111\ldots1}_{\text{رقم } n}$$

● **حل:** می‌توان نوشت:

$$\underbrace{111\ldots1}_{\text{رقم } n}=1+10+100+\ldots+10^{n-1}$$

مجموع فوق، مجموع جملات یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت ۱۰ است. بنابراین:

$$\underbrace{111\ldots1}_{\text{رقم } n}=1\times\frac{10^n-1}{10-1}=\frac{10^n-1}{9}$$

و از آنجا مجموع n جملهٔ نخست دنبالهٔ اصلی به‌دست می‌آید:

$$1+11+111+\ldots+\underbrace{111\ldots1}_{\text{رقم } n}=\frac{10-1}{9}+\frac{10^2-1}{9}+\frac{10^3-1}{9}+\ldots+\frac{10^n-1}{9}$$

$$=\frac{10+10^2+10^3+\ldots+10^n-n}{9}=\frac{10\times\frac{10^n-1}{10-1}-n}{9}$$

$$=\frac{10^{n+1}-9n-10}{81}$$

۶. در دنباله‌های حسابی زیر چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد:

الف) $1,5,9,\ldots$ ب) $4,7,10,\ldots$

(امتحان نهایی حسابان ـ خرداد ۸۹)

● **حل:** دنباله‌های فوق دارای قدرنسبت ۳ و ۴ هستند و جمله‌های عمومی آنها به ترتیب $a_n=1+(n-1)4=4n-3$ و $a'_n=4+(n-1)3=3n+1$ است.

بنابراین از حل نامعادله‌های $a_n\geq 100$ و $a'_n\geq 100$ می‌توان اولین عدد سه رقمی دو دنباله را به‌دست آورد:

$$4n-3\geq 100\Rightarrow n\geq\frac{103}{4}\Rightarrow n\geq 26$$

$$3n+1\geq 100\Rightarrow n\geq\frac{99}{3}\Rightarrow n\geq 33$$

$$\begin{cases}a_n:101,105,109,113,\ldots\\ a'_n:100,103,106,109,\ldots\end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که اولین جملهٔ مشترک سه رقمی دو دنباله، ۱۰۹ است. چون ک.م.م قدرنسبت‌ها ۱۲ می‌شود، پس کافی است دنباله‌ای با شروع از ۱۰۹ و قدرنسبت ۱۲ بنویسیم که جملات آن همگی عددهای سه رقمی باشند:

$$109,121,\ldots\quad a''_n=109+(n-1)12=12n+97\leq 999$$

$$\Rightarrow n\leq 75$$

یعنی ۷۵ جملهٔ مشترک سه رقمی در دو دنباله وجود دارد.

۷. برای محافظت در برابر تابش مضر مواد پرتوزا، لایه‌های محافظتی ساخته شده‌اند که تابش پس از عبور از آنها نصف می‌شود. از چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش حداقل ۹۹ درصد کاهش یابد؟

(امتحان نهایی حسابان ـ خرداد ۸۹)

● **حل:** اگر میزان پرتوهای مضر را پس از عبور از اولین، دومین، سومین و... لایهٔ محافظ (به نسبت کل اشعه) بنویسیم، دنبالهٔ هندسی زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\ldots$$

که جملهٔ عمومی آن به صورت $a_n=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{1}{2^n}$ است. برای آنکه شدت تابش پرتوها، پس از عبور از n لایه، ۹۹ درصد کاهش یابد، باید میزان اشعه حداکثر ۱ درصد میزان اولیه باشد؛ یعنی داریم:

$$\frac{1}{2^n}\leq\frac{1}{100}\Rightarrow 2^n\geq 100\Rightarrow\min(n)=7$$

پس حداقل باید از هفت لایه استفاده کرد که در آن صورت میزان اشعهٔ عبور کرده مساوی $\frac{1}{128}$ مقدار اولیه می‌شود و بیشتر از ۹۹ درصد آن کاهش می‌یابد.

تمرین

۱. یک دنبالهٔ هندسی بنویسید که تفاضل جملهٔ سوم و اول آن ۹ و تفاضل جملهٔ پنجم و سوم آن ۲۶ باشد (جواب: $a_1=-3$ و $q=\pm 2$).

۲. جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ هندسی را بنویسید که مجموع ۶ جملهٔ اول آن ۲۵۲ و مجموع سه جملهٔ اول آن ۱۲۸ باشد (جواب: $a_n=2^{n+1}$).

۳. ثابت کنید $\sqrt{3}$، $\sqrt{5}$ و $\sqrt{7}$ نمی‌توانند جملاتی از یک دنبالهٔ حسابی یا هندسی باشند.

۴. بین دو عدد ۳ و ۱۹۶۸۳، هفت واسطهٔ هندسی درج کنید.

۵. وسط‌های اضلاع یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به هم وصل می‌کنیم تا مثلث متساوی‌الاضلاع دیگری حاصل شود. این کار را ادامه می‌دهیم. چند بار این عمل باید تکرار شود تا مجموع مساحت‌های مثلث‌های به‌دست آمده از ۱/۳۳۳ برابر مساحت مثلث اولیه بیشتر شود؟ (جواب: ۶ بار)

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه سوم: یک مسئله و دو جواب

در شمارهٔ قبل یک مسئله دربارهٔ چند معامله و سود و زیان حاصل از آن‌ها و سه جواب متفاوت دربارهٔ سود نهایی داشتیم که پاسخ و تحلیل آن را در این شماره و در انتهای این بخش آورده‌ایم. در این شماره می‌خواهیم یک مسئلهٔ دیگر از این دست مطرح کنیم:

مسئله: میمونی روی یک ستون ایستاده است. پسر بچهٔ بازیگوشی هم روبه‌روی او ایستاده است و چشم در چشم او دارد. ناگهان پسربچه تصمیم می‌گیرد که با میمون کمی شوخی کند! سپس شروع می‌کند به دور او چرخیدن. اما میمون بازیگوش نیز هم‌زمان با او شروع به چرخیدن به دور خودش (در همان بالای ستون) می‌کند. در همان حال به چشمان پسر بچه نگاه می‌کند! تا این‌که پسر بچه یک دور کامل دور ستون می‌زند. آیا پسر بچه دور میمون هم چرخیده است؟! روشن است که پاسخ آری یا نه (شاید هم بله یا خیر!) است، اما کدام یک پاسخ صحیح است؟ منتظر پاسخ شما و دلایل درستی آن‌ها هستیم.

در شمارهٔ ۷۸ پاسخ‌ها را بررسی و تحلیل می‌کنیم.

ریاضیات نوعی سوءاستفادهٔ قاعده‌مند از نام‌گذاری‌های پیشرفته برای رسیدن به اهداف معین است!

«پل ـ هنینگ کَمپ»

افسانهٔ پادشاه و ریاضی‌دان

غلامرضا یاسی‌پور

کلیدواژه‌ها: **شریل برگر، دکتر مهدی بهزاد، نغمهٔ ثمینی، اویلر، کونیگسبرگ، کلود برج، دکتر مهدی رجبعلی‌پور**

کتاب با تقریظ خانم پرفسور **شریل برگر**[1] خطاب به دکتر **مهدی بهزاد**[2] و دکتر **نغمهٔ ثمینی**[3]، نویسندگان کتاب، آغاز می‌شود. در این تقریظ چنین می‌خوانیم: «چقدر خوش‌حالم که به زودی نمایش‌نامهٔ افسانهٔ پادشاه و ریاضی‌دان منتشر می‌شود. چشم به راه ترجمهٔ آن به زبان انگلیسی هستم. این نمایش‌نامه معماهایی را مطرح می‌کند که هم بینندگانش را به چالش وامی‌دارند، هم سبب انبساط‌خاطر آنان می‌شوند.»

در قسمتی از نامهٔ آقای پروفسور **آلبرشت بویتلز پاخر**[4] هم می‌خوانیم: «ریاضیات نقشی اساسی در پیشبرد تمدن دارد و ضمن برخورداری از استقلال ذاتی، علمی کاربردی هم محسوب می‌شود. پروژهٔ استاد دکتر **مهدی بهزاد** نمونهٔ برجسته‌ای است از سبک جدید ترویج ریاضیات.»

آنگاه در قسمت «*آشنایی با نظریهٔ گراف‌ها*»، این رشتهٔ ریاضی چنین معرفی شده است: «تاریخ مکتوب نظریهٔ گراف به سال ۱۷۳۶ میلادی باز می‌گردد که **اویلر**[5] تکلیف معمای **کونیگسبرگ**[6] را رسماً مشخص کرد. رشد این حوزه برای مدت ۲۰۰ سال بسیار کند بود، تا این‌که **کونیگ**[7] در سال ۱۹۳۶ کتابی به زبان آلمانی نوشت و در آن نظریهٔ گراف‌ها را ساخت و پرداخت.

دومین کتاب را **کلود بِرج**[8] در سال ۱۹۵۷ به زبان فرانسوی نوشت. در سال ۱۹۶۲، پس از چاپ و انتشار کتاب او به زبان انگلیسی، این شیر خفته بیدار شد و راه تعالی را در پیش گرفت.

یکی از خصیصه‌های یکتای نظریهٔ گراف‌ها، برخورداری از مسائل سهل و ممتنع نظری و کاربردی فراوانی است که حل برخی ظرف ده‌ها سال گاهی رخ نموده و دل برده، اما به سادگی تسلیم نشده است.

یکی از برکات فرعی افسانهٔ پادشاه و ریاضی‌دان، طرح مسائل تازهٔ بسیاری است که احتمالاً حل بعضی، ذهن زیبای ریاضی‌دانان قَدَر را طلب خواهد کرد و نیازمند ده‌ها سال صرف وقت خواهد بود.»

اما اهمیت این کتاب تنها در معرفی نظریهٔ گراف‌ها و کاربرد آن نیست، بلکه از این جهت است که مطلب آن به صورت نمایش‌نامه‌ای شیرین تنظیم شده است تا هرچه دلنشین‌تر باشد، و به قول **سعدی** در «گلستان»: «داروی تلخ نصیحت به شهد ظرافت برآمیخته، تا طبع ملول ایشان از دولت قبول محروم نماند.» [کلیات سعدی، تصحیح محمدعلی فروغی]

مطالب آن، به شیوهٔ بحث سقراطی به صورت نمایش‌نامه‌ای درآمده است که خوانندهٔ جوان را گاهی تا آن سوی صحرای خدا[9] می‌برد و به قول استاد **شفیعی کدکنی** نقشی آورده که به کجاها که نمی‌بردش[10]. باز به قول سعدی در «بوستان»، معماهای مهم و مطرح ریاضی را:

«به پرویزن معرفت بیخته
به شهد ظرافت درآمیخته» [پیشین].

باری همان‌طور که گفتیم، کتاب به صورت نمایش‌نامه تنظیم شده است. ما در این مختصر نمی‌توانیم حق مطلب را ادا کنیم، اما به عنوان مشتی نمونهٔ خروار، پاره‌ای از آغاز و قسمتی از میان و در آخر هم، مطلب پایانی کتاب را همراه قسمت‌هایی از سه تفریظ از سه استاد ارجمند ریاضی در ستایش این اثر، می‌آوریم، و خواننده را به خود کتاب حوالت می‌دهیم و به خدایش می‌سپاریم.

اما آغاز نمایش‌نامه

دو جارچی با لباس‌های مضحک در حالی‌که یکی بر طبل می‌کوبد و دیگری بر سنج، دوسوی صحنه ایستاده‌اند.

جارچی اول: به هوش و به گوش!

جارچی دوم: به گوش و به هوش!

جارچی اول: ای جنبنده‌ها، خزنده‌ها، پرنده‌ها، چرنده‌ها...

جارچی دوم: ای دکان‌دارها، منصب‌دارها، زمین‌دارها، خانه‌دارها...

جارچی اول: ای گاری‌چی‌ها

جارچی دوم: ای کالسکه‌چی‌ها...

جارچی اول: ای درباری‌ها و ای رعیت‌ها...

جارچی دوم: همه به گوش و همه به هوش...

جارچی اول: که سلطان سلطان‌ها، پدر در پدر سلطان

جارچی دوم: پدر جد در پدر جد هم سلطان...

جارچی اول: خلاصه صد پشت آن طرف‌تر هم سلطان...

جارچی دوم: فخر زمین و آسمان...

جارچی اول: پرنورتر از خورشید تابان...

جارچی دوم: پرزورتر از **رستم** پهلوان...

جارچی اول: پادشاه قدر قدرت سرزمین پرشوکت ما...

جارچی دوم: محبوب همهٔ قلب‌ها...

جارچی اول: عزیز همهٔ جان‌ها...

جارچی دوم: بر لحاف منت گذارده و به خواب عمیق فرورفته ...

جارچی اول: پس مبادا که صدایی از کسی برخیزد و نفسی از کسی برآید.

جارچی دوم: مبادا سرفه یا عطسه...

جارچی اول: مبادا راه رفتن و جم زدن...

جارچی دوم: همه به کنج خانه‌ها، بی‌سروصدا...

جارچی اول: و زیر لبی دعا برای پادشاه که به خورشید رخصت غروب داده و به رعیت و درباری فرصت خواب...

جارچی دوم: آهای به هوش و به گوش!

جارچی اول: به گوش و به هوش!

و بعد تکه‌ای از میانه‌های اثر

پادشاه: خانهٔ علم دیگر چه‌جور جایی است؟ تو میدانی وزیر اعظم؟

وزیر اعظم: چند فقره سیاهچال دارد و خزانه دارد و...

پادشاه: این‌که می‌شود همین پایتخت خودمان. تو می‌دانی **زبیده خاتون**؟

زبیده خاتون: سرورم از خود **بحرالعلوم** بپرسید.

پادشاه: ما کسر شأنمان می‌شود چیزی از بحرالعلوم بپرسیم. شما بپرسید...

بحرالعلوم: خانهٔ علم جای بحث و فحص علمی است. نه برج دارد و نه بارو. چون دشمن ندارد که بخواهد حمله کند با هزار ترفند و نارو. پادشاه خانهٔ علم، علم است و ریاضیات و نجوم. پس جان مردمان دانش دوست، می‌شود بارگاهش. در چنین مکانی نیست حتی یک سیاهچال، زیرا که کسی توطئه نمی‌کند از برای علم و کمال. ثروت دانش است در دارالعلم که هرچه ببخشی بیشتر می‌شود. پس خزانه ندارد با چهل قفل و چهل رمز و چهل نگهبان! این است ای پادشاه، دارالعلمی که من می‌خواهم تا پس از دفع بلا، بسازیدش بی‌خلف وعده.

و این هم پایان کتاب (پس از طرح و حل معماها و بقیهٔ ماجراها):

میدان شهر. جشن و شادمانی برپاست. مردم پایکوبی می‌کنند و شعر می‌خوانند. زبیده و وزیر هم در میان آن‌ها هستند. ساززن‌ها ساز می‌زنند. جوان‌ها با حرکات نمایشی پیش می‌آیند و بحرالعلوم را با خود به میان جمع می‌برند. پادشاه عصبی در گوشه‌ای تنها نشسته است و فقط می‌خورد. روح پدربزرگ خندان پیش می‌آید و می‌رود به طرف بحرالعلوم.

بحرالعلوم: به جمع ما خوش آمدید شاه شاهان. اگر به خواب نوه‌تان نمی‌آمدید، ما در سیاهچال می‌مردیم. چه خبر از عالم غیب؟

روح پدربزرگ: من در عالم برزخم. کار حساب و کتابم تمام نشده هنوز نگران این نوهٔ ابلهم بودم که آن هم به خیر گذشت.

بحرالعلوم: شما مرا به فکر تعمیم و تجرید معمای

سه‌گاف[11] انداختید. حالا بی‌نهایت معما در آستین دارم.

روح پدربزرگ: چندتاش را هم بفرست ما در آن دنیا حل کنیم، بلکه زمان زودتر بگذرد.

بحرالعلــوم: قصد کرده‌ایم اســم محل جدیــد کارمان را بگذاریم دارالعلم پدربزرگ! بلکه گاهی به خواب من و اهل علم هم بیایید و ما را راهنمایی کنید.

روح پدربزرگ: اسم منو نگذارید هم، به خوابتون می‌یام. دیگر باید برگردم. خداحافظ.

بحرالعلوم: *(با صدای بلند)* بی‌کار شدید، معمای سه آدم و ســه آدم‌خوار و همچنین، معمای سه شوهر حسود را حل کنید. نمی‌گذارند حوصله‌تان سر برود.

روح پدربــزرگ می‌آید به جلوی صحنه و رو به جمعیت می‌ایستد.

روح پدربزرگ: قصهٔ ما عجالتاً همین‌جا به‌ســر رســید... باقی‌اش را می‌آیم به خوابتان، برایتان تعریف می‌کنم. شایدم با هم این معماهای پیشــنهادی بحرالعلوم را حل کردیم و... تعمیمشان هم دادیم... پس وعدهٔ ما تو خواب شما!

نوای شادمانی به اوج می‌رسد. **نور می‌رود.**

و اما قسمت‌هایی از سه تفریظ استادان ریاضی

۱. تقریظ دکتر امیدعلی شــهنی کرم‌زاده، اســتاد گروه ریاضی دانشگاه شهید چمران اهواز: «این اثر بی‌شک در نوع خود بی‌نظیر اســت؛ یک اثر نمایشی موزون با ماهیت ریاضی با یک بحث ریاضی با زبان نمایش. گامی اســت شــگفت در راســتای عمومی‌کردن ریاضی و همــه فهم‌کردن آن و حتی بهتر فهماندن آن به اهــل ریاضی. اولین نکتهٔ ظریف در این نمایش‌نامــه پی‌بردن به بی‌پیرایه‌بــودن دانش ریاضی و عدم وجود تبعیض در ماهیت آن اســت. بــه جنبه‌های کاربردی ریاضی پرداخته شده است. پیوند خوردن سرنوشت یک شکل چندوجهی با یک دانش یا یک دانشــمند به ســبکی زیبا به تصویر کشیده شده است.»

۲. تقریــظ دکتر رحیم زارع نهندی، اســتاد دانشــکدهٔ ریاضی، آمــار و علوم کامپیوتر دانشــگاه تهــران: «یکی از آرزوهــای ریاضی‌دانــان دســتیابی به روش‌هایی اســت که بتوانند مفاهیم ریاضی را به صورتی ملموس و قابل فهم برای مخاطبین عمومی و غیرمتخصص بیان کنند. بی‌سبب نیست که اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضی‌دانــان در پیام تاریخی خود به مناســبت ســال جهانی ریاضی، عمومی‌کردن ریاضیات را به عنوان یکی از وظایف کلیدی جامعهٔ جهانی ریاضی در ورود به هزارهٔ سوم میلادی اعلام کرد.

نمایش‌نامه با خواب پریشان پادشاهی مغرور و کم شعور و اطرافیانی که هر کدام در مدح و چاکری پادشاه گوی سبقت را از دیگری می‌رباید، شروع می‌شود. بلایی در راه است و باید بزرگان پایتخت به طرف دیگر رودخانهٔ مرزی شهر منتقل شوند. به توصیهٔ وزیر اعظم، پادشاه دستور می‌دهد سراغ دانشمندی بروند که در زندان اســت و از وی می‌خواهند چاره‌جویی کند و بــدون بیم تبانی قدرت‌مداران در غیبت پادشــاه، برای حل مسئلهٔ انتقال آن‌ها با کشتی، راه‌حلی ارائه کند. شرط دانشمند برای حل مشــکل، تأسیس دارالعلم اســت که پادشاه از روی ناچاری مجبور به قبول آن می‌شــود. دانشمند که بحرالعلوم نام دارد، بی‌درنگ پس از آزادی از زندان، شاگردانی دور خود جمع می‌کند و کلاس درســی برپا می‌کند و مســائل جالبی را در نظریهٔ گــراف مطرح می‌کند و شــاگردان خود را برای تفکر روی مسائل و تعمیم‌دادن آن‌ها و ارائهٔ راه‌حل، به چالش می‌کشد و به شکل استادانه‌ای آن‌ها را به سمت مسئله‌ای که معضل پادشــاه حالت خاصی از آن اســت، هدایت می‌کند و محفلی فرهیخته و شکوفا فراهم می‌سازد.»

۳. تقریــظ دکتر مهــدی رجبعلی‌پــور، اســتاد ریاضی دانشــگاه کرمان: «جنبهٔ ادبی کتاب با مشــاورت ویراســتار، نویســنده و مترجم توانایــی هم‌چون خانم **منیــژه جوادی،** همســر نویســندهٔ اول کتاب، عاری از نقص است و می‌تواند در میــان کتاب‌های ریاضی ـ ادبی ایران جاودانه بماند. جنبهٔ هنری کتاب نیز عالی است، وگرنه همکاری هنرشناس توانایی هم‌چون خانم دکتر ثمینی نقض غرض می‌بود. این دو جنبه، همراه با طنزی لطیف کــه زاییدهٔ همکاری یک ریاضی‌دان و یک هنرشناس بوده و بر سراسر کتاب حکم‌فرماست، معجون گوارایی فراهم آورده است که ساعت‌ها می‌تواند پیر و جوان را سرگرم و راضی نگه دارد.»

پی‌نوشت ....

۱. استاد ریاضیات و دانشمند سال ۲۰۰۹ میلادی ـ غرب استرالیا

۲. استاد ریاضیات و رئیس سابق انجمن ریاضی ایران

۳. عضو هیئت علمی پردیس هنرهای زیبا، دانشگاه تهران

4. Albrecht Beutelspacher (استاد ریاضیات و رئیس خانهٔ ریاضیات ـ آلمان)

5. Euler (ریاضی‌دان بزرگ سوئیسی)

6. Konigsberg

(شهری آلمانی که به واسطهٔ معمای مربوط به پل‌هایش معروف است)

7. Konig

8. Claude Berge

۹. تعبیر از اخوان ثالث است: تا خدا وان‌سوی صحرای خدا رفتم.

۱۰. به کجا می‌برد این نقش به دیوار مرا.

۱۱. معمای سه‌گاف همان معمای گرگ و گوسفند و گیاه است. رجوع کنید به متن کتاب.

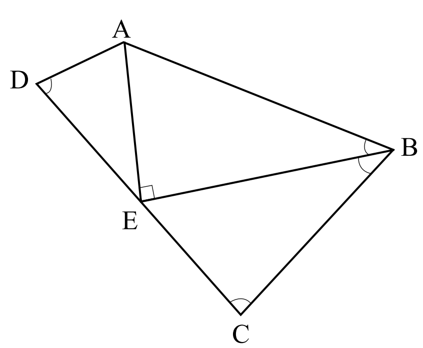
مسائل مسابقه‌ای رشد

۱. ثابت کنید اگر x، y و z چنان در نظر گرفته شوند که:
$\sin x + \sin y + \sin z \geq ۲$، آنگاه: $\cos x + \cos y + \cos z \leq \sqrt{۵}$.

۲. ثابت کنید هرگاه اندازه‌های زوایای یک n ضلعی محدب، جملاتی از یک دنبالهٔ حسابی باشند، آنگاه یا یکی از زوایا مقدار ثابتی دارد و یا همهٔ زوایا را می‌توان به صورت تعدادی جفت دسته‌بندی کرد؛ به‌طوری که مجموع همهٔ جفت‌ها مقدار ثابتی باشد. از آنجا نتیجه بگیرید که هرگاه اندازه‌های زوایای یک چهارضلعی محدب جملات یک دنبالهٔ حسابی باشند، چهارضلعی، محاطی است. آیا عکس این موضوع هم درست است؟

۳. در چهارضلعی محدب ABCD می‌دانیم: $\hat{D} = \hat{C}$ و نیم‌ســاز زاویهٔ B، CD را در نقطهٔ E قطع کرده اســت و $BE \perp AE$.

ثابت کنید: AB=BC+AD.



۴. قطار مســافری تهران ـ مشــهد، تهران را رأس ساعت x و y دقیقه ترک کرد و رأس ساعت y و z دقیقه وارد مشهد شد. این مسافرت z ساعت و x دقیقه طول کشید. همهٔ مقادیر ممکن برای x، y و z را به‌دست آورید.

پاسخ مسائل مسابقه‌ای رشد شمارهٔ ۷۵

۱. ثابت کنید برای هر عدد حقیقی x $(x \neq k\pi)$ حاصل این عبارت همواره مقداری ثابت است:

$$y = x - \pi[\frac{x}{\pi}] + tg^{-1}(\cot gx)$$

حل: با فرض $tg^{-1}(\cot gx) = \alpha$ نتیجه می‌شود: $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ و $tg\alpha = \cot gx$. از آنجا داریم:

$$tg\alpha = tg(\frac{\pi}{2} - x) \Rightarrow \alpha = k\pi + \frac{\pi}{2} - x$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} < k\pi + \frac{\pi}{2} - x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -k\pi - \pi < -x < -k\pi$$

$$\Rightarrow k\pi < x < (k+1)\pi \Rightarrow k < \frac{x}{\pi} < k+1 \Rightarrow [\frac{x}{\pi}] = k$$

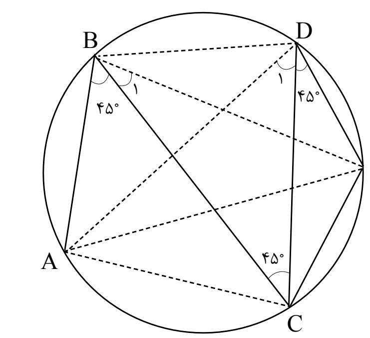
$$\Rightarrow y = x - k\pi + \alpha = x - k\pi + k\pi + \frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{2}$$

۲. در شکل زیر زاویهٔ بین وترهای متوالی مساوی $45°$ است:

$$\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = 45°$$

ثابت کنید:

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + DE^2$$



حل: مطابق شکل A را به D و A و B را به E وصل می‌کنیم:

با توجه به برابری زوایای محاطی مقابل به یک کمان داریم:

$$\hat{D}_1 = \hat{B} = 45°, \hat{B}_1 = \hat{D} = 45° \Rightarrow A\hat{B}E = A\hat{D}E = 90°$$

و از آنجا با توجه به قضیهٔ فیثاغورس نتیجه می‌شود:

$$AB^2 + BE^2 = AD^2 + DE^2 = AE^2 \ (*)$$

اما طبق این قضیه که کمان‌های محدود بین وترهای موازی، مساوی‌اند، خواهیم داشت:

$$A\hat{B}C = B\hat{C}D = 45° \Rightarrow AB \parallel CD$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD} \Rightarrow AC = BD$$

در نتیجه، ذوزنقهٔ $ABDC$ متساوی‌الساقین است و قطرهای آن با هم برابرند: $AD = BC$. به طریق مشابه نیز نتیجه می‌شود: $BE = CD$.

لذا با جای‌گذاری این دو مقدار در تساوی (*) خواهیم داشت:

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + DE^2$$

۳. مجموعهٔ S و عمل * روی آن را با قاعدهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

هر $a, b \in S : (a * b) * a = b$

ثابت کنید: $a * (b * a) = b$.

اثبات: با تعویض نقش a و b در رابطهٔ فرض خواهیم داشت:

$$(b * a) * b = a$$

و با جای‌گذاری عبارت سمت چپ تساوی اخیر به جای a در عبارت سمت چپ حکم نتیجه می‌شود:

$$a * (b * a) = [(\underbrace{b * a}_{m}) * b] * (\underbrace{b * a}_{m})$$

$$= (m * b) * m = b$$

(تساوی آخر نیز با توجه به فرض نتیجه شده است).

۴. در کشوری کوچک، همهٔ مردم، یا شوالیه هستند و همواره راست می‌گویند و یا سربازند و همواره دروغ می‌گویند. جاسوسی وارد این کشور می‌شود. جاسوس نه همواره راست می‌گوید و نه همواره دروغ می‌گوید (بسته به موقعیت دروغ یا راست می‌گوید). مأموران سه نفر را دستگیر کردند که می‌دانستند یکی از آن‌ها سرباز، یکی شوالیه و یکی جاسوس است. آن‌ها را A، B و C می‌نامیم.

در دادگاه قاضی از A پرسید:

آیا تو جاسوس هستی؟ A یا پاسخ داد بله و یا گفت خیر (نمی‌دانیم چه پاسخی داد). سپس قاضی از B پرسید: آیا A راست گفت؟ و B یا پاسخ داد بله و یا گفت خیر. در این لحظه A گفت: C جاسوس نیست و قاضی پاسخ داد: خودم این موضوع را می‌دانستم و حالا می‌دانم چه کسی جاسوس است! با ذکر دلیل، بگویید جاسوس کیست.

حل: ما نمی‌دانیم A و B چه جوابی دادند. چهار حالت ممکن را در نظر می‌گیریم:

۱. A و B هر دو گفتند بله.
۲. A گفت نه و B گفت بله.
۳. A گفت بله و B گفت نه.
۴. هر دو گفتند نه.

اکنون این حالت‌ها را تجزیه و تحلیل می‌کنیم:

حالت ۱. آن‌ها هر دو گفتند بله: چون A می‌گوید که او جاسوس است، پس او یا سرباز است و یا جاسوس (زیرا یک شوالیه هرگز به دروغ ادعای جاسوس بودن نمی‌کند). اگر A سرباز باشد، آنگاه او دروغ گفته است. پس B که گفته است A راست می‌گوید، دروغ گفته است. پس B شوالیه نیست و چون A سرباز است، پس B باید جاسوس باشد و در نتیجه C شوالیه است.

حال فرض کنید A جاسوس باشد. پس او درست جواب داده است، لذا B با درست شمردن جواب A، درست جواب داده است. یعنی B باید شوالیه باشد و در نتیجه C سرباز است. این دو حالت را در جدول زیر خلاصه کرده‌ایم:

	A	B	C
۱a	سرباز	جاسوس	شوالیه
۱b	جاسوس	شوالیه	سرباز

حالت ۲. A گفت نه و B گفت بله: اگر به همان صورت بحث کنیم، به جدول حالت‌های زیر می‌رسیم:

	A	B	C
۲a	شوالیه	جاسوس	سرباز
۲b	جاسوس	سرباز	شوالیه

حالت ۳. A گفت بله و B گفت نه:

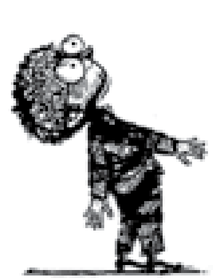
	A	B	C
۳a	سرباز	شوالیه	جاسوس
۳b	سرباز	جاسوس	شوالیه
۳c	جاسوس	سرباز	شوالیه

حالت ۴. A گفت نه و B گفت نه:

	A	B	C
۴a	شوالیه	سرباز	جاسوس
۴b	شوالیه	جاسوس	سرباز
۴c	جاسوس	شوالیه	سرباز

حال با توجه به این چهار جدول، به ما گفته شده که بعد از جواب‌های A و B به سؤال‌های قاضی، قاضی فهمید که C جاسوس نیست. اگر حالت ۳ اتفاق افتاده بود، آن‌گاه قاضی نمی‌توانست تشخیص دهد که C جاسوس یا شوالیه است. اگر حالت ۴ رخ داده بود، قاضی نمی‌توانست بفهمد که C جاسوس یا سرباز است. پس این دو حالت رخ نداده و در نتیجه یکی از حالت‌های ۱ یا ۲ اتفاق افتاده است. حالا قاضی می‌داند که A درست گفت (وقتی که گفت C جاسوس نیست)، پس او می‌داند که A سرباز نیست (در نتیجه شوالیه یا جاسوس است).

اگر حالت ۲ رخ داده بود، قاضی نمی‌توانست تشخیص دهد که A شوالیه است یا جاسوس. بنابراین او نمی‌توانست بفهمد که جاسوس کیست. پس حالت ۱ رخ داده است و قاضی می‌داند که A نمی‌تواند سرباز باشد (چون او یک جملهٔ درست گفته است). پس A باید جاسوس باشد.



آموزشی

تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران

غلامرضا یاسی‌پور

کلیدواژه‌ها: عبدالحسین مصحفی، مجلهٔ ریاضی یکان، نمودار ساقه و برگ، محسن هشترودی، حساب‌های تانسوری، نظریهٔ التصاق‌ها، ارشمیدس

در بیست و سومین شمارهٔ مجله، **میرشهرام صدر** به هیئت تحریریه آمده است.

در مقالهٔ «**شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید**» از **استاد شهریاری**، راهنمایی‌هایی برای حل مسئله‌ها آمده است. این مقاله چنین آغاز می‌شود: «برای حل یک مسئلهٔ ریاضی ـ اگر مضمونی تازه داشته باشد و در ردیف تمرین‌های سادهٔ پایان یک درس نباشد ـ نمی‌توان روش یا روش‌های کلی پیدا کرد. در زندگی روزانه و ضمن فعالیت‌های اجتماعی هم، غالباً به مسئله‌هایی برمی‌خوریم که برایمان تازگی دارند و برای انتخاب مسیر حرکت آیندهٔ خود، نمی‌توانیم بر «نمونه‌های» آزمایش شده تکیه کنیم. در این‌گونه موردها، اغلب به یاری دیگران هم نمی‌توانیم متکی باشیم، چرا که «دشواری» مربوط به خود ماست و تنها خودمان هستیم که از زیر و بم آن آگاهیم و دلیل‌های پیدایش آن را می‌شناسیم. بنابراین، چاره‌ای جز این نداریم که با تکیه بر تجربهٔ زندگی، آگاهی‌های علمی، مقایسه و تجزیه و تحلیل راه‌های گوناگون، و به‌کار گرفتن اندیشه، خرد و استعداد خود، راه و روش بهینه را بیابیم. برای حل مسئله‌های ریاضی هم، باید از همین راه رفت و نباید منتظر «دستورها» و «نسخه‌های شفابخش» بود. چنین دستورها و نسخه‌هایی که بتوان به یاری آن‌ها از عهدهٔ حل هر مسئله برآمد وجود ندارد (ص ۱۷۸).

«**در باغ تجربه‌ها**» مصاحبه‌ای است با یکی از دبیران ریاضی.

در مصاحبهٔ این شماره به سراغ **استاد عبدالحسین مصحفی** رفته‌اند. استاد در شرح حال خود چنین می‌گوید: «در اسفند ۱۳۰۳ در شهر کرمان، در خانه‌ای از محلهٔ **مسجد گنج** به دنیا آمده‌ام. در کودکی خواندن قرآن را آموختم و پس از تحصیلات رسمی (شش سال دورهٔ ابتدایی و سه سال سیکل اول متوسطه)، امتحان نهایی سیکل اول متوسطه را در سال ۱۳۲۰ گذراندم. در همان سال در همان مدرسهٔ ملی که از آن فارغ‌التحصیل شده بودم، به معلمی گمارده شدم. این مدرسهٔ ملی که **دبیرستان شهاب** نام داشت، از نخستین مدرسه‌هایی به‌شمار می‌آمد که برای آموزش به روش جدید در کرمان تأسیس شده بود و از یک دبستان شش کلاسی و از یک سیکل اول متوسطهٔ سه کلاسی تشکیل می‌شد. چند سالی را به تناوب با معلمی در آن مدرسه یا به شغل صحافی و کتاب‌فروشی گذراندم. در سال ۱۳۲۷ امتحان نهایی پنجم متوسطه را به صورت داوطلب گذراندم و با وجود تکفل خانواده، داوطلب خدمت نظام وظیفه شدم. شش ماه در دانشکدهٔ افسری تهران و یک سال با درجهٔ ستوان دوم توپخانه خدمت کردم. محل خدمتم بنا بر نمره‌هایی که آورده بودم، مشهد افتاد که آن را با «خاش» معاوضه کردم. ضمن خدمت افسری، درس‌های سال ششم ریاضی را نزد خودم آموختم و در سال ۱۳۳۰ امتحان نهایی دیپلم ریاضی را به صورت داوطلب در تهران گذراندم. در همان سال در امتحان ورودی رشتهٔ ریاضی دانشکده علوم دانشگاه تهران و رشتهٔ دبیری دانش‌سرای عالی ایران پذیرفته شدم. در سال ۱۳۳۳ گواهی‌نامهٔ لیسانس این دو مؤسسهٔ عالی را دریافت داشتم و برای خدمت دبیری، یزد را برگزیدم.

هشت سال در دبیرستان‌های شهرستان یزد و در دانش‌سرا و در کلاس‌های تربیت معلم آن‌جا به تدریس ریاضیات اشتغال داشتم. در سال ۱۳۴۱ به تهران منتقل شدم. سمت‌های رسمی که داشته‌ام چنین بوده‌اند:

- ۱۳۴۱ تا ۱۳۴۴: دبیر دبیرستان‌های ناحیهٔ چهار تهران.
- ۱۳۴۴ تا ۱۳۴۷: کارشناس ریاضی برنامه‌ها در ادارهٔ کل مطالعات و برنامه‌های وزارت آموزش‌وپرورش.
- ۱۳۴۷ تا ۱۳۵۲: نمایندهٔ وزارت آموزش‌وپرورش در شرکت چاپ و توزیع کتاب‌های درسی.
- ۱۳۵۲ تا بهمن ۱۳۵۷: کارشناس مسئول ریاضی در سازمان کتاب‌های درسی ایران.
- اسفند ۱۳۵۷ تا آبان ۱۳۵۸: مدیرکل سازمان کتاب‌های درسی ایران و سرپرست ادارهٔ کل تحقیقات و برنامه‌ریزی درسی.
- آبان ۱۳۵۸: بازنشسته بنا به درخواست شخصی.»

مصحفی در مورد تأسیس «مجلهٔ یکان» چنین می‌گوید: «در سال ۱۳۴۱ امتیاز انتشار مجله‌ای ریاضی را درخواست کردم. به دنبال آن در جلسهٔ آبان ۱۳۴۲ کمیسیون مطبوعات وزارت کشور با امتیاز **مجلهٔ ریاضی یکان** به نام من موافقت کرد. نخستین شمارهٔ این مجله در بهمن ماه ۱۳۴۲ منتشر شد که بیش از حد انتظار با استقبال روبه‌رو و سه بار تجدید چاپ شد. پس از آن هم این مجله به‌طور مرتب تا ۱۱۸ شمارهٔ ماهانه و هر سال همراه با شماره‌ای ویژهٔ امتحان‌های نهایی و کنکور و همراه با شماره‌ای برای دانش‌آموزان سال آخر سیکل اول متوسطه انتشار یافت. سرانجام در سال ۱۳۵۶ از ادامهٔ انتشار آن بازماندم. دربارهٔ این مجله و اثرش در گسترش ریاضیات در ایران و دربارهٔ تحولی که در آموزش ریاضی در ایران به‌وجود آورد، صاحب‌نظران بسیار سخن گفته‌اند و آن را در ترازوی سنجش قرار داده‌اند.

مجلهٔ یکان بدون هیچ وابستگی و بدون دریافت هرگونه کمک مادی منتشر می‌شد و هزینهٔ سنگین آن کلاً از راه تک‌فروشی و حق اشتراک تأمین می‌شد. دلیل توقف انتشار آن هم تنها این بود که دیگر توانایی ادامهٔ کار را نداشتم. پس از انقلاب به توصیهٔ مؤکد شهید **رجایی** و به تشویق بعضی از ریاضی‌دوستان، تقاضای تجدید امتیاز مجله را کردم که تصویب هم شد، اما باز هم توانایی لازم برای دنبال کردن کار را نداشته‌ام.»

در این شماره، مقاله‌ای داریم از **دکتر عین‌الله پاشا**، از دانشگاه تربیت معلم، با عنوان **ساقه و برگ**. در این مقاله آمده است: «نمودارها نقشی اساسی در درک مفاهیم دارند و فهم عمیق‌تر و روشن‌تری از شرایط موجود به ما می‌دهند. نمودارها و حالت کلی‌تر آن‌ها، یعنی شکل‌ها، در واقع نوعی زبان ابتدایی برای برقراری ارتباط و انتقال مفاهیم هستند. به همین سبب است که معمولاً ارائهٔ هر مفهومی با شکل و نمودار آغاز می‌شود و کم‌کم که مفاهیم جای خود را در ذهن باز کردند، مطالعه و تحقیق به صورت مجردتر ادامه می‌یابد. در مبحث آمار، برای روشن‌تر شدن ساختمان داده‌ها و در نهایت تجسم توزیع جامعه از نمودار استفاده می‌کنیم. هر یک از انواع نمودارها ویژگی‌هایی دارند و حتی برخی از آن‌ها برای موارد خاص مناسب‌ترند. در مباحث مقدماتی آمار با نمودارهایی از قبیل چند بر فراوانی، مستطیلی، میله‌ای و دایره‌ای آشنا شده‌ایم. این نمودارها در یک نگاه می‌توانند ایده‌هایی کلی دربارهٔ جامعه در اختیار بیننده بگذارند. رسالت بیشتر نمودارهای رایج در همین‌جا به پایان می‌رسد. اگر بخواهیم اطلاعات بیشتری دربارهٔ جامعه و یا نمونه به‌دست آوریم، لازم است محاسباتی روی داده‌ها و جدول فراوانی انجام دهیم. در این نوع نمودار سعی شده است که با حفظ رسالت‌های نمودارهای رایج (مثلاً میله‌ای) بتوان از نمودار استفاده‌های دیگری نیز برد. در واقع، در این نوع نمودار، داده‌ها کنار گذاشته نمی‌شوند، بلکه به نوعی سامان‌دهی می‌شوند که هم کار نمودارها را انجام می‌دهند و هم برای برخی محاسبات دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرند» (ص ۱۹۴).

در مقالهٔ «**تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران**» مطلبی می‌خوانیم دربارهٔ **کنگره‌های بین‌المللی ریاضی‌دانان** که در آن چنین آمده است: «مجلهٔ یکان مقالاتی دارد با عنوان **خاطراتی از کنگره‌های بین‌المللی ریاضی‌دانان** که نویسندهٔ آن‌ها دکتر **محسن هشترودی** است. در این شماره، مرحوم هشترودی یادی از کنگرهٔ مسکو در سال ۱۹۳۵ کرده است و طی آن می‌نویسد: این کنگره آخرین کنگرهٔ بین‌المللی ریاضی‌دانان قبل از جنگ جهانی دوم بود. شبی پس از پایان جلسهٔ رشتهٔ هندسهٔ دیفرانسیل و ووپولوژی، **کارتان** فقید (**الی کارتان** بزرگ) و **اسخوتن** (Schow-ten که هم اکنون رئیس مرکز ریاضی آمستردام است)، **هرمان وایل** (Hermann Weyl) و دسته‌ای از محققین در حساب‌های تانسوری و نظریهٔ التصاق‌ها گفت‌وگو می‌کردند. کوچه‌های مسکو در نزدیکی کرملین همگی تقریباً رو به کرملین ره می‌برند، گویی

متمرکزند. وایل فقید این سؤال را مطرح کرد که: آیا هندسهٔ مقیاسی وجود دارد که ژئودزیک‌های آن (اقصر فاصله، در این‌جا باید اشاره کرد که در تمام فضاهای مقیاسی ژئودزیک‌ها و خطوط مستقیم برهم منطبق نیستند، یعنی بین دو نقطه، یک خط مستقیم و یک منحنی اقصر فاصله وجود دارد که از هم متمایزند) همه متمرکز باشند؟»

آن شب، پس از جدا شدن این عده از هم، اسخوتن شبانه این التصاق را پیدا کرد که هم‌اکنون به نام او در روسیهٔ شوروی به التصاق اسخوتن معروف است. عجیب است که در ممالک غربی، گاهی این التصاق را به نام التصاق مسکو می‌نامند.

نویسندهٔ این سطور قریب ۱۵ سال پیش، خواص محرض این التصاق را تعیین کرد و مقارن همان زمان، **آندره لیشنروویچ**، استاد **کلژدوفرانس** نیز ثابت کرد که بین فضاهای نقطه‌ای (فضاهایی که با نقطه معرفی می‌شوند نه با نقطه و یک امتداد یا با نقطه و یک سطح)، تنها فضایی که به سیستم‌های غیرهلنوم مکانیک تحلیلی مرتبط است، همین التصاق نیمه متقارن اسخوتن است. این التصاق را نیمه‌متقارن می‌نامند، زیرا به پیچش فضا از روی یک حامل تنها و به کمک تانسور اصلی معین می‌شود. (بدیهی است که این فضا فضایی عادی نیست، یعنی دارای انحناست. پیچش فضا انحنای مربوط به انتقال مبدأ مختصات است.)

نظیر این امر در بسیاری از کنگره‌ها اتفاق افتاده است که مسئله‌ای در جلسه‌ای از رشته‌های کنگره یا حتی در خارج از جلسه مطرح شده و یکشبه توسط یکی از ریاضی‌دانان مقتدر حل شده است.»

مقالهٔ «**آموزش مفهوم حد در دبیرستان**» از **پرویز شهریاری** چنین آغاز شده است: «از زمانی که با محاسبهٔ محیط و مساحت دایره (جسم دوار)، مفهوم عددهای گنگ وارد برنامهٔ ریاضی دبیرستان شد، به ناچار به همراه آن‌ها، داوری دربارهٔ بی‌نهایت کوچک‌ها و روندهای بی‌پایانی که بی‌نهایت ادامه دارد، مطرح شد. در ضمن، در همین دوره روشن شد که درک مفهوم‌های دقیق دانش و استدلالی‌کردن آن‌ها، جز بر پایهٔ آنالیز ریاضی ممکن نیست. به همین مناسبت، مفهوم حد و روش‌های حدی، که تاریخچه‌ای دراز دارد و برای درک دقیق مفهوم‌های مربوط به آن دشواری‌هایی پدید می‌آید، خود را وارد کتاب‌های درسی دبیرستانی کرد.

ولی از دیرباز، به‌ویژه در رابطه با محاسبهٔ نسبت محیط دایره به قطر آن (یعنی محاسبهٔ عدد π) و محاسبهٔ سطح و حجم جسم‌های دوار، از مفهوم حد، بدون این‌که نامی از آن برده شود و بدون این‌که قضیه‌های وابسته به آن ثابت شود، استفاده می‌شده است. **ارشمیدس** که در سدهٔ سوم پیش از میلاد می‌زیست، به جای محیط دایره، محیط چند ضلعی‌های منتظم محاط در دایره و محیط بر دایره را در نظر گرفت و حد π را به تقریب برابر با $۳\frac{۱}{۴}$ به‌دست آورد. **جمشید کاشانی** هم در کتاب **رساله المحیطیه** همین راه را دنبال می‌کند! و $2^n\times3$ ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی را در نظر می‌گیرد و می‌گوید n را باید چنان گرفت که اگر شعاع دایره‌ای ۶۰۰۰۰ برابر شعاع کرهٔ زمین باشد، اختلاف بین محیط‌های چندضلعی‌های محاطی و محیطی، از قطر موی اسب کمتر شود. کاشانی برای این منظور n را برابر ۲۸ می‌گیرد. در این صورت تعداد ضلع‌های چند ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی برابر ۸۰۵۳۰۶۳۶۸ می‌شود و عدد π را تا ۱۷ رقم بعد از ممیز محاسبه می‌کند که تنها رقم هفدهم آن نادرست است.

در مقالهٔ «**تاریخچه و نقش مجله‌های آموزشی ریاضی**» که به قلم **حمیدرضا امیری** و **میرشهرام صدر** است، چنین آمده: «بنا به گفتهٔ پژوهشگر تاریخ ریاضیات، آقای پرویز شهریاری، قدیمی‌ترین نشریهٔ ریاضی **حل‌المسائل ریاضی** است که شامل حل مسائل شعب مختلفه علوم ریاضی بوده و با رهنمودهای آقای **ناصر هورفر** انتشار می‌یافته است. ناگفته نماند که ما قدیمی‌تر از این مجله را نیافته‌ایم. جلد اول این مجله در ۱۵ دی‌ماه ۱۳۰۶ شمسی، در مطبعهٔ **نهضت شرق تهران** به چاپ رسید و در اول و پانزدهم هر ماه منتشر می‌شد. در ضمن، در این مجله بعضی از مسائل امتحانات نهایی ایران و اروپا و... درج می‌شد. این مجله به قطع بزرگ و به خط نستعلیق و به خامهٔ **زرین خط** است. در این مجله با اسامی افراد معروفی نظیر، **تقی هورفر**، **محمدعلی مجتهدی**، **غلامحسین مصاحب**، **محمود مهران** و **محسن هشترودی** روبه‌رو می‌شویم.»

در «ادب ریاضی» این شماره مطلبی می‌خوانیم از **پی یر روسو** در کتاب «**تاریخ علوم**» وی، دربارهٔ **مونژ**. در بخشی از آن چنین آمده است: «کشور فرانسه هنگام انقلاب در خطر هجوم خارجی بود و مادر وطن با حالی خسته و مجروح فرزندان خود را به کمک می‌طلبید. فریاد برآمد که باید توپ ساخت! باید باروت تهیه کرد! باید شوره از زمین استخراج کرد! و در حالی‌که لازار کارنو مشغول تهیهٔ تشکیلات **فتح نظامی** بود، **گاسپار مونژ** فتح علمی را تدارک می‌دید. این مرد که فرزند فروشندهٔ دوره‌گردی بود و هندسهٔ ترسیمی را اختراع کرد، مانند وطن‌پرست پرشوری فعالیت کرد. وی طبق منویات کنوانسیون، درصدد تجهیز لشکری مرکب از ۳۰۰ هزار نفر برآمد و حال آن‌که تمام قورخانه‌ها خالی و انبارها از شوره تهی بود و این ماده را تا آن وقت از هندوستان وارد می‌کردند.

برنز لازم برای تهیهٔ توپ را از کجا باید تهیه کرد؟ مونژ فریاد برآورد: زنگ‌ها و ناقوس‌ها را آب کنید! شوره از کجا به‌دست آوریم؟ از زمین بکنید و آن وقت ما ظرف سه روز تمام توپ‌های شما را پر خواهیم کرد!

مونژ روزها اوقات خود را برای بازرسی قورخانه‌ها و توپ‌ریزی‌ها صرف می‌کرد و شب‌ها کتاب **فن تهیهٔ توپ** را می‌نوشت.»

در مقالهٔ «**مقالات کوتاه از مجله‌های ریاضی معتبر جهان**»، از **غلامرضا یاسی‌پور** دربارهٔ «هندسهٔ **آفین**» و چندضلعی‌ها چنین می‌خوانیم: «به‌خاطر بیاورید که هندسهٔ آفین با ویژگی‌های هندسی‌ای سروکار دارد که **ناوردای آفین** (affine invariant) هستند، که بدین معنی است که تحت تبدیل‌های آفین (یعنی، تبدیل‌های خطی ناتکین ترکیب شده با انتقال‌ها) ناوردا (یا تغییرناپذیر) هستند. از لحاظ هندسی، می‌توان این تبدیلات را به صورت دوران‌ها، تقارن‌ها، انتقال‌ها و برش‌ها، یا هر ترکیبی از این‌ها در نظر گرفت. نسبت‌های طول‌های واقع بر خطوط موازی و نسبت‌های سطح‌ها تحت تبدیلات آفین محفوظ می‌مانند و در نتیجه به هندسهٔ آفین تعلق دارند، در حالی‌که طول‌ها، زاویه‌ها و سطح‌ها چنین نیستند. همهٔ نتایج ما به هندسهٔ آفین متعلق‌اند، اما به‌طور واضح در هندسهٔ اقلیدسی محدودتر نیز درست باقی می‌مانند.»

بد نیست که بررسی این شماره را با قسمت «عبرت‌آموز» **ادب ریاضی** خاتمه دهیم. در این ادب ریاضی چنین آمده است: «آورده‌اند که وقتی در یکی از شهرهای آدمان، حاکمی می‌زیست که از لحاظ درستی ضرب‌المثل بود. دزدان و رهزنان از او ترس بسیار داشتند، و مردان شرافتمند به او صمیمانه احترام می‌گذاشتند. اما روزی اهالی شهر به رازی صاعقه‌آسا پی بردند از این قرار که: حاکم هر شب لباس مبدل می‌پوشد، طپانچه‌ای در جیب می‌گذارد، آهسته و بی‌سروصدا از خانه خارج می‌شود و مردم را لخت می‌کند! داستان ریاضی در اواخر قرن نوزدهم نیز چنین بود. از ۲۰ قرن پیش تا این زمان، مردم در مقابل ریاضیات سر تعظیم فرود می‌آوردند و به آن ایمان فوق‌العاده داشتند. اما ناگهان اصل **اقلیدس** ضعف گریه‌آوری از خود نشان داد و مفهوم قدیمی اتصال با سروصدای بسیار فرو ریخت و نابود شد. قلمرو آشنای اعداد معمولی توسط بهمنی از اعداد اصم و اندازه نگرفتنی خرد شد و بنایی که این‌قدر مورد احترام و پرستش بود، ترک‌ها و شکاف‌های بزرگ داشت. و اما فقط بنای معظم ریاضیات نبود که گرفتار خرابی ویرانی می‌شد، تمام قصر بزرگ علوم به این حال دچار بود.»

***

شمارهٔ ۲۴ مجلهٔ ریاضی برهان را ورق می‌زنیم. این شماره در سال هفتم آن، در بهار ۱۳۷۷، به مبلغ ۲۰۰۰ ریال انتشار یافته است. مجله، علاوه بر مقالات متعارف خود که دربارهٔ کتاب‌های دبیرستانی است، مقالات نظری و تاریخی و گفت‌وگو را نیز شامل می‌شود.

در مقالهٔ «**شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید**» از **پرویز شهریاری**، دربارهٔ **غیاث‌الدین جمشید کاشانی** چنین آمده است: غیاث‌الدین جمشید کاشانی یکی از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان و اخترشناسان ایرانی است که در زمان حکومت تیموریان می‌زیست و به خواست **الغ بیگ**، نوهٔ **تیمور**، به سمرقند رفت و با یاری چند ریاضی‌دان و اخترشناس دیگر، رصدخانهٔ بزرگ سمرقند را بنیان نهاد.

نوشته‌هایی از جمشید کاشانی، باقی مانده‌اند که توان بی‌اندازهٔ او را در حل مسئله‌های ریاضی به خوبی نشان می‌دهند. هم‌چنین، نامه‌ای از کاشانی به‌دست آمده که از سمرقند به پدرش در کاشان نوشته و یکی از پرارزش‌ترین اثرهای ماندگار در تاریخ دانش است. به ظاهر، پدر جمشید از **بدرالدین** نامی، به عنوان یکی از ریاضی‌دان‌ها یاد کرده که پسرش جمشید در پاسخ او چند سطری نوشته است. اگر سخن کاشانی را به زبان سادهٔ امروزی درآوریم، چنین گفته است: اگر کسی تنها برخی قضیه‌ها و دستورهای ریاضی را بداند و نتواند مسئله‌های تازهٔ ریاضیات و یا حالت‌های کاربردی آن را که در برابر او قرار می‌گیرد، حل کند، ریاضی‌دان نیست. ریاضی‌دان کسی است که از عهدهٔ حل مسئله‌های تازه برآید.»

مقالهٔ «**در باغ تجربه‌ها**» گفت‌وگویی دارد با آقای **میرزا جلیلی**، مؤلف و دبیر با سابقهٔ ریاضی. در این مقاله از قول استاد جلیلی چنین می‌خوانیم: «میرزا جلیلی هستم و در اول اردیبهشت‌ماه ۱۳۱۲ در بوشهر متولد شدم. تحصیلات ابتدایی را در دبستان فردوسی و متوسطه را در دبیرستان سعادت آن شهر به پایان رساندم. پس از گذراندن دورهٔ دانش‌سرای مقدماتی شیراز، از دانش‌سرای عالی تهران فارغ‌التحصیل شدم. ۲۰ سال در شهرستان کازرون تدریس کردم. یک دورهٔ یک‌سالهٔ آموزش ریاضی را در انستیتوی تربیتی دانشگاه لندن گذراندم و به دریافت دیپلم نائل آمدم که بعدها از طرف وزارت علوم فوق‌لیسانس شناخته شد. یک دورهٔ شش ماههٔ برنامه‌ریزی را هم در دانشگاه تکزاس در آستین گذراندم و پایان‌نامهٔ آن دوره را دریافت کردم.

از سال ۱۳۵۰، در دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی مشغول به کار هستم. با این همه، کار تدریس را هیچ‌گاه رها نکرده‌ام و با معلمان ریاضی کشور در تمام دوره‌های تحصیلی، مرتب در تماس بوده‌ام و با جوّ آموزش کشور کاملاً آشنا هستم.

برنامه‌ریزی چندین دوره تحصیلی را، از ابتدایی، راهنمایی

و دبیرستان تا دانش‌سرای مقدماتی، و مراکز تربیت معلم کارگردانی کرده‌ام و کتاب‌های درسی آن‌ها را به تألیف رسانده‌ام که همگی کتاب‌های موفق ریاضی در مدارس بوده‌اند. در دو برنامه‌ریزی دبیرستان (از ۱۳۶۲ تا ۱۳۶۴ و از ۱۳۶۸ تا ۱۳۷۰) شرکت کردم و از مؤلفان کتاب‌های ریاضیات جدید دبیرستان هستم که برای اولین بار در ایران با همکاری کارشناسان، مفاهیم جدید و به‌روز ریاضی جهان را در سطح فهم دبیرستان، با زبان ساده و دانش‌آموزی، وارد کتاب‌های ریاضی کردیم. هم‌چنین، در تألیف کتاب‌های ریاضی ۱ تا ۴ نظام جدید نیز همکاری داشته‌ام. سال‌ها مدیر داخلی مجله رشد آموزش ریاضی و جزو هیئت تحریریهٔ آن بوده‌ام.

در کنگرهٔ بین‌المللی آموزش ریاضی در استرالیا، هم‌چنین در دو کنفرانس ریاضی در زمینهٔ آموزش ریاضی در سوتمتون و هلند، حضور داشتم و در توکیو و مسکو پای صحبت کارشناسان و مؤلفان و برنامه‌ریزان ریاضی نشسته‌ام و از آن رهنمود برنامه‌ریزی گرفته‌ام.»

مجله مقاله‌ای دارد با عنوان «**رابطهٔ بین آموزش ریاضی و فرهنگ**» که در مقدمهٔ آن چنین آمده است: «یکی از موضوعات مهم در جوامع پیشرفته که آموزش آن مشکل به نظر می‌رسد، ریاضیات است. ریاضیات موضوعی است که خود را به شدت انتزاعی نشان می‌دهد، به‌طوری که کودکان هیچ‌گونه ارتباط منطقی بین آن با دنیای واقعی بیرون کلاس برقرار نمی‌کنند. به همین علت آن را بی‌معنا و بیهوده می‌پندارند. در نتیجه، کودکان در سراسر جهان، خود را در رشته‌های ریاضی مغلوب می‌دانند و حتی والدین آنان نیز ریاضیات را درک نمی‌کنند و معلمینشان ریاضیات را موضوعی سخت برای درک و فهم قلمداد می‌کنند.

اگر امروزه به مردم بگویم، من به آموزگاران کودکان شما ریاضی آموزش می‌دهم، آنان تصور بدی دربارهٔ من خواهند داشت و به من به مانند یک موجود عجیب نگاه خواهند کرد. اگر هم بگویم، من از ریاضیات لذت می‌برم، مردم فکر می‌کنند من دیوانه شده‌ام و اگر بگویم من آماده هستم آنان را به ریاضیات علاقه‌مند کنم، مردم به حرف‌های من گوش نخواهند کرد و حرف‌هایم را باور نمی‌کنند! نیمی از مردم از ریاضیات رنج می‌برند و آن را نوعی شکنجهٔ روحی می‌دانند! حتماً فکر خواهید کرد که آنان مایل هستند از برنامهٔ آموزشی ریاضیات خلاصی پیدا کنند، اما این‌طور نیست. آنان ریاضیات را خیلی مهم می‌دانند و همهٔ کودکان مدرسه‌ای باید آن را مطالعه کنند؛ حتی اگر از آن خوششان نیاید، چرا که ریاضیات برای آنان مفید است!»

همین مقاله مطلبی دارد دربارهٔ «اهمیت تاریخ ریاضیات در آموزش ریاضی» که در آن چنین می‌خوانیم: «دومین پژوهش در ریاضی بومی، از تحقیقات تاریخی حاصل می‌شود که بیش از اندازه به آن پرداخته شده است و آموزشگران به اندازهٔ کافی با آن آشنا هستند. در حال حاضر، اکنون **انجمن پژوهش تاریخی**، مسئول جمع‌آوری اسناد تاریخی مختلف دربارهٔ ریاضی در قسمت‌های گوناگون دنیاست. نمونه‌ای از تحلیل‌های جدید در کتاب **جوزف** (۱۹۹۱) «تاج رنگارنگ ریشه‌های غیراروپایی ریاضی» آمده است که به ذکر تنوع فرهنگ‌هایی که در اندوختهٔ جهانی اندیشه‌های ریاضی غنی سهم دارد، مربوط می‌شود. برای مثال، تاریخ فرهنگی ایران و جهان اسلام مملو از اندیشه‌های ریاضی است؛ گرچه اکثر این روایات به دانش‌پژوهان معروف اسلامی ایران مربوط می‌شود. ما از تاریخ ریاضیات مسلمانان موارد زیر را یاد گرفته‌ایم:

- قوانین وراثت؛
- طراحی مساجد و کاشی‌کاری آن‌ها؛
- تعیین قبله و تعیین حرکت مکه در قسمت‌های مختلف دنیا؛
- نجوم؛
- گسترش براهین هندسی برای قضایای جبری؛
- آثار ریاضی‌دانانی مانند **خوارزمی، ثابت بن قره، کاشانی** و **خیام**.

با وجود اختلافات مشهودی که در بعضی از موضوع‌های ریاضی، مانند دستگاه‌های شمار و روش‌های محاسبه‌ای مختلف ریاضی دیده می‌شود، پژوهش‌های تاریخی، شباهت‌های جالبی را مانند علاقه‌مندی انسان به اثبات قضیهٔ فیثاغورس نشان می‌دهد. این قضیه مشهور قبل از ریاضی‌دانان یونانی مورد علاقهٔ چینی‌ها (رونان، ۱۹۸۱) و آفریقایی‌ها (جروس، ۱۹۹۵) بوده است. هم‌چنین، **ثابت بن قره**، به قضیهٔ **فیثاغورس** پی برده بود.»

مقالات دیگر این شماره عبارت‌اند از:

- دنباله/ احمد قندهاری
- آموزش ترجمهٔ متون ریاضی/ حمیدرضا امیری
- تجزیهٔ چندجمله‌ای‌ها/ میرشهرام صدر
- مصاحبه با یک عدد/ کریم احمدی دلیر
- جزء صحیح/ علی حسن‌زاده ماکویی
- طرح و حل مسائل اساسی/ غلامرضا یاسی‌پور
- n یا n-1/ عین‌الله پاشا
- مقاله‌های کوتاه از مجله‌های ریاضی معتبر جهان/ غلامرضا یاسی‌پور
- در حاشیهٔ تابع/ حمیدرضا امیری
- مکان هندسی/ محمدهاشم رستمی
- اثبات اتحاد مزدوج/ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

با مخاطبان

باز هم نامه‌ها و رایانامه‌هایی از دوستان مجله داشته‌ایم که به بعضی از آن‌ها اشاره می‌کنیم:

- همکار گرامی، آقای **قاسم حسین قنبری**، از دانشگاه فرهنگیان شهرستان سمنان، با سپاس از مطالب ارسالی، از یکی از دو مقاله‌تان در این شماره استفاده کرده‌ایم. مطلب ارسالی‌تان در بحث تشابه مثلث‌ها، ساده، همه فهم و کاملاً به دردبخور بود. با تشکر از شما می‌خواهیم که ما را از مطالب خوبتان محروم نفرمایید.
- همکار گرامی، خانم **صدیقهٔ بابایی**، با تشکر از ایمیل ارسالی، منتظر کارهای دیگرتان هستیم.
- همکار گرامی، آقای **مصطفی دیداری**، مطلب ارسالی‌تان را در یکی از شماره‌های آتی به چاپ می‌رسانیم. باز هم با مجلهٔ خودتان در ارتباط باشید.
- همکار گرامی سرکار خانم **مریم شفیعی**، از پژوهش‌سرای رازی شهرری، از مطلبی که از کارهای گروهی دانش‌آموزان آن مجموعه برایمان فرستاده‌اید، تشکر می‌کنیم. ان‌شاءالله بتوانیم در آینده‌ای نزدیک گزارشی مستند از فعالیت‌هایتان تهیه و منعکس کنیم.
- آقای دکتر **سعید علیخانی**، از دانشکدهٔ علوم دانشگاه صنعتی شیراز، ضمن سپاس از مطلب ارسالی‌تان با عنوان «زندگی در بعد چهارم»، متذکر می‌شویم که: البته استفاده از چنین مطالبی در مجلهٔ ما (یا هر مجلهٔ ریاضی دیگر)، گهگاه لازم است (و در یکی از شماره‌های آینده به آن می‌پردازیم). ولی اگر بتوانید مطالبی درخور استفادهٔ مخاطبان اصلی مجله (دانش‌آموزان در درجهٔ نخست و سپس معلمان ریاضی) برای ما بفرستید، بهتر است و سپاس‌گزارتان خواهیم بود. با ما در ارتباط باشید.
- همکار گرامی جناب آقای **رحمان کیومرثی**، با تشکر فراوان از مقالهٔ ارسالی‌تان، از شما دعوت می‌کنیم که ضمن حفظ ارتباط خود با ما، در صورت امکان به مطالب پایه‌ای‌تر در ریاضیات توجه کنید و در ارتباط با آن‌ها برای ما مطلب بفرستید.
- همکار عزیز سرکار خانم **فاطمهٔ صاحبی**، از گروه ریاضی منطقهٔ ۱۱، مطلبی که فرستاده‌اید تکراری است و در بسیاری از منابع اصلی و کتاب‌های کمک درسی ریاضی گسسته آمده است. ضمن تشکر از توجهتان به مجلهٔ برهان، از شما می‌خواهیم مطالب مرتبط با تجربیات شخصی خودتان و نیز در صورت امکان مطالبی در ارتباط با ریاضیات پایه (و البته غیرتکراری!) برای ما بفرستید تا از آن‌ها استفاده کنیم.
- دوست دانش‌آموز آقای **علیرضا نمکی** از تهران، منطقهٔ ۱، کشف روابط عددی یکی از جنبه‌های زیبای ریاضیات (و شاخه‌ای به‌خصوص از آن به‌نام نظریهٔ عددها) است که از دیرباز مورد توجه انسان‌ها و به‌خصوص ریاضی‌دانان و علاقه‌مندان رشتهٔ ریاضی بوده است. تلاش شما البته قابل تقدیر است، ولی اولاً بیشتر این‌گونه روابط قبلاً کشف شده‌اند، ثانیاً سعی کنید نوشته‌هایتان مرتب و ساده باشند تا برای هر کس که برای نخستین بار آن‌ها را می‌خواند، به راحتی قابل درک باشند.

اثبات‌هایی کوتاه‌تر بر قضایای تشابه مثلث‌ها

قاسم حسین قنبری
دانشگاه فرهنگیان مرکز سمنان

کلیدواژه‌ها: تشابه، قضیهٔ تالس، مثلث‌های متشابه

مقدمه

قضایای تشابه در کتاب هندسهٔ (۱) بیان و اثبات شده‌اند. اما اثبات این قضایا کمی طولانی است و دانش‌آموزان معمولاً به آن روی خوش نشان نمی‌دهند. در این مختصر سعی شده است اثبات‌های کوتاه‌تری برای این قضایا ارائه شود. آنچه که در این شکل ارائهٔ قضایا بیشتر جلوه می‌کند، تکیهٔ بیشتر بر «قضیهٔ تالس» است.

تشابه دو مثلث در این کتاب به این صورت بیان شده است:

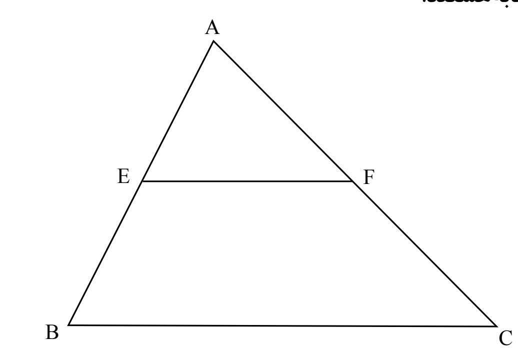
تعریف: دو مثلث را متشابه گویند، اگر زاویه‌های نظیر در آن‌ها برابر و ضلع‌های نظیر متناسب باشند.

اگر مثلث‌های متناظر را با نمادهای $A'B'C'$ و ABC نشان دهیم، دو مثلث در صورتی متشابه هستند که:

$$\begin{cases}\angle A=\angle A'\\ \angle B=\angle B'\\ \angle C=\angle C'\end{cases},\ \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$$

ابتدا لم زیر را ثابت می‌کنیم که نتیجه‌ای مهم از قضیه تالس است.

لم: در مثلث ABC، اگر F و E دو نقطه روی AC و AB باشند، به‌طوری‌که $EF \parallel BC$، آنگاه دو مثلث AEF و ABC متشابه‌هستند.



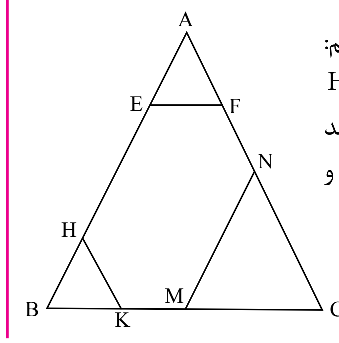
برهان:

$$EF \parallel BC \xRightarrow[\text{قضیهٔ خطوط}]{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BC}=\frac{AF}{AC} \quad (۱)$$

$$EF \parallel BC \xRightarrow{\text{موازی و مورب}} \angle E=\angle B,\ \angle F=\angle C,\ \angle A=\angle A \quad (۲)$$

$$(۱)\ ,\ (۲) \Rightarrow \Delta AEF \sim \Delta ABC$$

مثال: در مثلث ABC داریم: $MN \parallel AB$، $HK \parallel AC$ و $EF \parallel BC$. ثابت کنید مثلث‌های MNC، BHK و AEF با هم متشابه هستند



اثبات:

$$EF \parallel BC \xRightarrow{\text{لم}} \Delta ABC \sim \Delta AEF$$

$$MN \parallel AB \xRightarrow{\text{لم}} \Delta ABC \sim \Delta CMN$$

$$HK \parallel AC \xRightarrow{\text{لم}} \Delta ABC \sim \Delta BHK$$

بنابراین هر سه مثلث با مثلث ABC متشابه‌اند. در نتیجه هر سه با هم متشابه هستند.

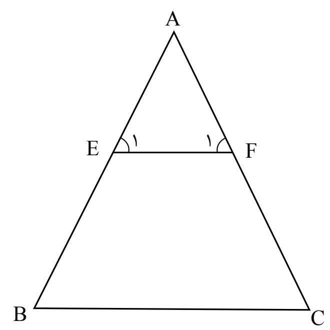
قضیهٔ ۱. اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگری برابر باشند، دو مثلث متشابه هستند.

اثبات: چون دو زاویه از یک مثلث با دو زاویه از مثلث دیگری برابر هستند، پس زاویهٔ سوم دو مثلث نیز با هم برابرند. یعنی در دو مثلث $A'B'C'$، ABC داریم:

$$\hat{B}=\hat{B}'\ ,\ \hat{C}=\hat{C}'$$
$$\Rightarrow \hat{A}=180^\circ-(\hat{B}+\hat{C})=180^\circ-(\hat{B}'+\hat{C}')=\hat{A}'$$

روی ضلع AB نقطهٔ E را طوری در نظر می‌گیریم که: $AE=A'B'$. از این نقطه خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AC را در نقطهٔ F قطع کند. با توجه به لم داریم:

$$\Delta AEF \sim \Delta ABC$$



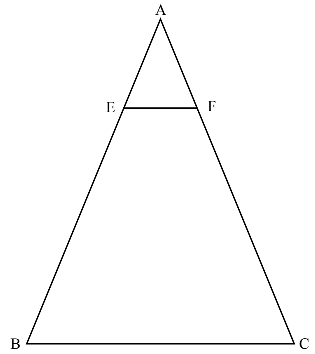
اگر ثابت کنیم مثلث‌های $A'B'C'$ و AEF هم‌نهشت‌اند، اثبات کامل می‌شود.

$$EF \parallel BC \Rightarrow \hat{E}_1=\hat{B},\ \hat{B}=\hat{B}' \Rightarrow \hat{E}_1=\hat{B}'$$
$$\hat{A}=\hat{A}'\ ,\ AE=A'B' \Rightarrow \Delta AEF \cong \Delta A'B'C' \quad \text{(زض‌ز)}$$
$$\Rightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$

قضیهٔ ۲. اگر یک زاویه از یک مثلث با یک زاویه از مثلث دیگری برابر و ضلع‌های نظیر این زاویه‌ها متناسب باشند، آنگاه آن دو مثلث متشابه‌اند.

فرض: $\angle A=\angle A',\ \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}$

اثبات: دو نقطهٔ F و E را روی AC و AB طوری انتخاب می‌کنیم که: $AF=A'C'$ و $AE=A'B'$. بنابراین دو مثلث $A'B'C'$ و AEF در حالت (ض‌زض) با هم هم‌نهشت هستند (۱).



اگر ثابت کنیم EF و BC موازی‌اند، اثبات کامل می‌شود. اما داریم:

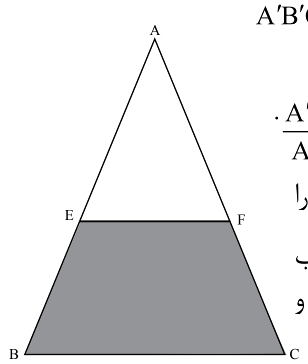
$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}\ ,\ \begin{matrix}A'B'=AE\\ A'C'=AF\end{matrix} \Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$$
$$\xRightarrow[\text{قضیهٔ تالس}]{\text{عکس}} EF \parallel BC \ (۲)$$

با توجه به (۱) و (۲)، دو مثلث $A'B'C'$ و ABC متشابه هستند. ■

قضیهٔ ۳. اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگری متناسب باشند، آنگاه دو مثلث متشابه هستند.

فرض: در مثلث‌های $A'B'C'$ و ABC داریم:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}.$$



اثبات: دو نقطهٔ F و E را روی AC و AB طوری انتخاب می‌کنیم که: $AF=A'C'$ و $AE=A'B'$ بنابراین داریم:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC} \Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC} \Rightarrow EF \parallel BC$$

اکنون اگر نشان دهیم دو مثلث $A'B'C'$ و AEF هم‌نهشت هستند، اثبات کامل می‌شود. به این منظور می‌نویسیم:

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}\ ,\ \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC},$$
$$A'B'=AE,\ A'C'=AF \Rightarrow B'C'=EF$$

پس دو مثلث $A'B'C'$ و AEF در حالت سه ضلع هم‌نهشت هستند و اثبات کامل است. ■

هر چند این‌ها، اثبات‌های کاملاً جدیدی نیستند، ولی به هر حال از روشی متفاوت برخوردارند که نسبت به روش کتاب درسی کوتاه‌تر است.

منبع

هندسهٔ ۱، زهرا گویا، سهیلا غلام آزاد و...، شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران، ۱۳۷۵.

عنایت‌الله راستی‌زاده
دبیر ریاضی دبیرستان‌های شیراز

کاربرد قدرمطلق در یک ضابطه‌ای کردن توابع

کلیدواژه‌ها: قدرمطلق، تابع چندضابطه‌ای

اشاره
اغلب دانش‌آموزان با تبدیل توابع قدرمطلقی به توابع چندضابطه‌ای آشنایی دارند. در اینجا قصد داریم با استفاده از مفهوم قدرمطلق به عکس این موضوع بپردازیم.

قضیه: اگر $a<b$، هر تابع چند ضابطه‌ای به صورت:

$$f(x)=\begin{cases}-2x+a+b & (x<a)\\ b-a & (a\le x\le b)\\ 2x-a-b & (x>b)\end{cases}$$

را می‌توان به صورت:

$$f(x)=\begin{cases}-(x-a)-(x-b) & (x<a)\\ (x-a)-(x-b) & (a\le x\le b)\\ (x-a)+(x-b) & (x>b)\end{cases}$$

نوشت که با استفاده از خواص قدرمطلق، تابع f به‌صورت زیر خواهد بود:

$$f(x)=|x-a|+|x-b|$$

حال به مثال زیر توجه کنید:

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}-2 & (x<-2)\\ x & (-2\le x\le 2)\\ 2 & (x>2)\end{cases}$ را در نظر بگیرید. ابتدا این تابع را به صورت زیر درآورده‌ایم:

$$f(x)=\begin{cases}-2=-\frac{1}{2}(x+2)+\frac{1}{2}(x-2) & (x<-2)\\ x=\frac{1}{2}(x+2)+\frac{1}{2}(x-2) & (-2\le x\le 2)\\ 2=\frac{1}{2}(x+2)-\frac{1}{2}(x-2) & (x>2)\end{cases}$$

حال به‌سادگی می‌توان دید که:

$$f(x)=\frac{1}{2}|x+2|-\frac{1}{2}|x-2|$$

تمرین: توابع زیر را به صورت یک ضابطه‌ای درآورید:

الف) $$y=\begin{cases}1 & (x<1)\\ -2x+3 & (1\le x\le 2)\\ -1 & (x>2)\end{cases}$$

ب) $$y=\begin{cases}-2x+2 & (x<1)\\ 4 & (-1\le x\le 2)\\ 2x-2 & (x>2)\end{cases}$$

بـه مثال دیگـری توجه کنیـد (این مسـئله از کتاب «قدرمطلق» اسـتاد پرویز شـهریاری و با راه‌حل متفاوت از منبع مذکور است):

مثال: تابع با ضابطه‌های زیر مفروض است.

$$y=\begin{cases}x^2+x-2 & (x\le -3)\\ 4-3x-x^2 & (-3\le x\le 1)\\ x^2+3x-4 & (x\ge 1)\end{cases}$$

با اسـتفاده از علامـت قدرمطلق، y را برحسـب x به کمک تنها یک رابطه نشان دهید.

حل: با توجه به این‌که تابع در $x=-3$ و $x=1$ تغییر ضابطه می‌دهد، هر ضابطه را می‌توان به صورت زیر تجزیه کرد و نوشت:

$$y=\begin{cases}x^2+x-2=(x-1)(x+2) & (x\le -3)\\ \quad =(x-1)(x+3-1) & \\ \quad =(x-1)(x+3)-(x-1) & \\ 4-3x-x^2=-(x-1)(x+4) & (-3\le x\le 1)\\ \quad =-(x-1)(x+3+1) & \\ \quad =-(x-1)(x+3)-(x-1) & \\ x^2+3x-4=(x-1)(x+4) & (x\ge 1)\\ \quad =(x-1)(x+3+1) & \\ \quad =(x-1)(x+3)+(x-1) & \end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$y=\begin{cases}(x^2+2x-3)-(x-1) & (x\le -3)\\ -(x^2+2x-3)-(x-1) & (-3\le x\le 1)\\ (x^2+2x-3)+(x-1) & (x\ge 1)\end{cases}$$

و با توجه به جدول تعیین علامت زیر:

x		-3		1	
x^2+2x-3	+		−		+
$x-1$	−		−		+

با اسـتفاده از مفهوم قدرمطلق، می‌تـوان تابع y را به صورت زیر نوشت:

$$y=|x^2+2x-3|+|x-1|$$

تمرین: تابع با ضابطه‌های زیر داده شده است:

$$y=\begin{cases}x^2-7x+10 & (x\le 2)\\ -10+7x-x^2 & (2\le x\le 4)\\ x^2-5x+6 & (x\ge 4)\end{cases}$$

ماننـد مثال فـوق عمل کنیـد و تابع را بـه تابع یک ضابطه‌ای تبدیل کنید.

مسائل ریاضی ۱

مصطفی دیداری

۱. جاهای خالی را با استفاده از اعداد گویای مناسب پر کنید.

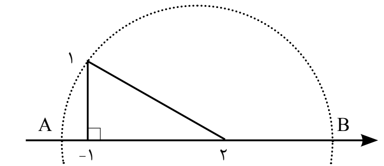
$-\frac{۴}{۵} < ... < ... < -\frac{۲}{۳}$

۲. درامد آقای خواجوی در هر ماه ۵۵۰/۰۰۰ تومان است. او $\frac{۱}{۵}$ این درامد را صرف پرداخت اجاره و $\frac{۷}{۱۱}$ باقی‌ماندهٔ آن را نیز صرف هزینه‌های جاری در ماه می‌کند.

الف) او در هر ماه چه مقدار می‌تواند پس‌انداز کند؟

ب) او بعد از چند ماه می‌تواند کالایی به قیمت ۴۰۰/۰۰۰ تومان بخرد؟

۳. در شکل زیر، دو نقطهٔ A و B نشان‌دهندهٔ چه اعدادی هستند؟



۴. مقدار تقریبی عبارت $\frac{\sqrt{۸/۹}+۳/۰۱۲}{\pi-\sqrt{۴/۱}}$ را به دست آورید.

۵. عبارت $|۱-\sqrt{۲}|+|\pi-۳|$ را بدون قدرمطلق‌بنویسید.

۶. عبارت «الف» را به ریاضی و عبارت «ب» را به فارسی بنویسید.

الف) اگر مربع هر عدد را با یک جمع کنیم، حاصل مثبت است.

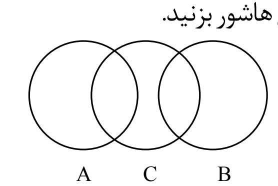
ب) اگر: $a<۰$، آنگاه: $a^۴>۰$.

۷. حاصل این عبارت را به‌دست آورید.

$-۲^۲+۰/۰۴\div۱\frac{۳}{۵}-(۳/۰۱-۰/۷)$

۸. اگر $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$، $B=\{-۱,۰,۲,۶\}$ و $C=\{-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲\}$، حاصل $(A\cup B)-(A\cap C)$ را به‌دست آورید.

۹. حاصل $(A\cup B)\cap C$ را روی شکل هاشور بزنید.



۱۰. برای عبارت $A\subset B\not\subset C$ یک شکل بکشید.

۱۱. عضوهای مجموعهٔ $A=\{۲x-۱|-۱<x^۲\le۴, x\in N\}$ را بنویسید.

۱۲. مجموعهٔ $\{۰/۲,۰/۰۲,۰/۰۰۲,...\}$ را به زبان ریاضی بنویسید.

۱۳. نماد علمی عدد $\frac{۱}{۴۰۰۰}$ را بنویسید.

۱۴. حاصل $\frac{(۳^۳)^۲\times۸^{-۳}\times۷^۰}{۱۸^{-۴}\times۲^{۳^۲}}$ را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

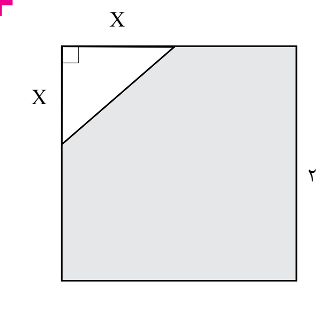
۱۵. اگر b و a دو عد مثبت باشند، عبارت $\sqrt{a^۲b^۳}\times\sqrt{۱۸a^۷b}$ را ساده کنید.

۱۶. حاصل $\frac{۱}{۵}\sqrt{۴۰}+\sqrt{۳^۲+۱}-۲\sqrt{۱۰}$ را به‌دست آورید.

۱۷. مخرج کسر $\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳a}}$ را گویا کنید.

۱۸. قرینهٔ معکوس کسر $\frac{-xz}{y}$ را بنویسید

۱۹. مساحت ناحیهٔ رنگی را با یک عبارت جبری نمایش دهید. ضریب عددی و درجهٔ عبارت جبری را مشخص کنید



۲۰. اگر $A=۱+x+x^۲$ و $B=۱-x^۲$ باشد، حاصل $AB-۲(A+B)$ را به‌دست آورید.

۲۱. حاصل عبارات الف و ب را با استفاده از اتحادها به‌دست آورید.

الف) $(۳x-\sqrt{۲})(۳x+\sqrt{۲})+(x^۲-۱)^۲$

ب) $(۲a-۳)^۲$

۲۲. جاهای خالی را با استفاده از اتحادها پر کنید.

الف) $(...+...)(...+۴)=۴x^۲-۲x+...$

ب) $(...+۲)(x^۴-...+...)=...+۸$

۲۳. تجزیه کنید.

الف) $x^۳-۶x^۲+۵x$

ب) $\frac{x^۲}{y^۴}-۱۶$

۲۴. معادله زیر را حل کنید.

$\frac{x-۱}{۳}-\frac{۲x+۱}{۴}=۵x$

۲۵. اگر دو معادلهٔ $x-۱=۲$ و $ax+۱=۳$ هم‌ارز باشند، a چیست؟

۲۶. شمعی با طول اولیهٔ ۳۰cm در حال سوختن است، به‌طوری که در هر دقیقه ۳cm از طول آن کاسته می‌شود.

الف) جدولی بکشید که طول شمع را در هر دقیقه ارائه کند و نمودار آن را رسم کنید.

ب) رابطهٔ بین زمان (x) و طول شمع (y) را بنویسید.

۲۷. فاصلهٔ دو نقطهٔ $A=\begin{bmatrix}-۱\\۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳\\-۱\end{bmatrix}$ را به‌دست آورید.

مسائل ریاضی ۲

مصطفی دیداری

۱. جملهٔ عمومی دنباله‌ای $a_n=\frac{۲n+۳}{n-۳}$ است:

الف) جملهٔ پنجم دنباله را به‌دست آورید.

ب) کدام جمله برابر با پنج است؟

۲. جاهای خالی را طوری پر کنید که اعداد به‌دست آمده دنبالهٔ حسابی تشکیل‌بدهند.

$\frac{۵}{۲},...,...,-۲,...$

۳. m را طوری بیابید که سه جملهٔ $m-۲$، $m+۴$ و $۵m+۲$ جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند (از چپ به راست). اگر دنباله کاهشی باشد، کدام m مورد قبول است؟

۴. دنبالهٔ تقریبات اعشاری $\frac{۵}{۱۱}$ را تا سه رقم اعشار بیابید. این جملات به چه عددی نزدیک می‌شوند؟ با تشکیل دنبالهٔ تفاضلات حدس خود را بیازمایید.

۵. عدد $\sqrt[۴]{۳\times\sqrt[۳]{۳^۴}}$ را با توان گویا بنویسید

۶. مقدار عبارت $\frac{(\sqrt[۴]{۳})^{۵-\sqrt{۵}}(\sqrt[۴]{۳})^{۵+\sqrt{۵}}}{\sqrt[۴]{۹}}$ را به‌دست آورید.

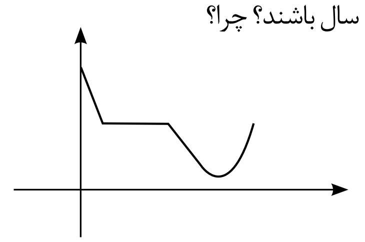
۷. a و b را به‌گونه‌ای بیابید که رابطهٔ

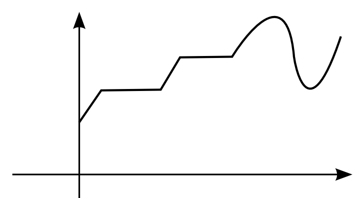
$R=\{(-۲,۱),(a+۱,۵),(a+۲,b+۱),(-۲,a+۵),(۱,-۲)\}$

تابع شود. دامنه و برد تابع را مشخص کنید

۸. تابعی بنویسید که ثابت و دارای دامنهٔ نامتناهی باشد.

۹. کدام یک از نمودارهای زیر می‌توانند نشان‌دهندهٔ میزان دما در یک سال باشند؟ چرا؟



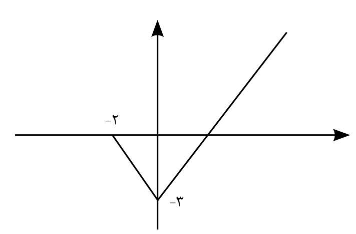


۱۰. ورودی یک شهربازی ۲۰۰۰ تومان و هزینهٔ استفاده از هر وسیله ۴۰۰ تومان است. تابعی بنویسید که هزینه را نسبت به تعداد وسایلی که هر فرد بازی کرده است، ارائه کند. دامنهٔ تابع چه مجموعه‌ای می‌تواند باشد؟

۱۱. در تابع خطی (f) داریم: $f(۱)=۳$ و $f(۲)=۶$. ضابطهٔ تابع را به‌دست آورید.

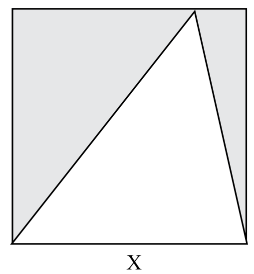
۱۲. ضابطهٔ معکوس تابع $۲x-۳y=۶$ را به‌دست آورید. نمودار تابع و معکوس آن نسبت به کدام خط قرینه‌اند.

۱۳. دامنه و برد تابع با نمودار زیر را با استفاده از بازه‌ها نمایش دهید.



۱۴. اگر داشته باشیم: $f(x)=\sqrt{۲x-۳}$ و $g(x)=\frac{۳x+۱}{x+۱}$، $g(f(۲))$ و $f(x+۱)$ را به‌دست آورید.

۱۵. مساحت قسمت رنگی در مربع را به‌صورت تابعی از ضلع آن بیان کنید. اگر مساحت ناحیهٔ رنگی ۸ باشد، طول ضلع چه‌قدر است؟



۱۶. نمودار تابع با ضابطهٔ $y=-(x-۱)^۲+۲$ را با استفاده از انتقال رسم کنید (مراحل آن جداگانه رسم شود).

۱۷. دامنهٔ توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $y=\frac{x+۱}{x^۲-۲x}+\frac{x}{x-۳}$

ب) $y=\sqrt{\frac{۴-x^۲}{|x|(x+۱)}}$

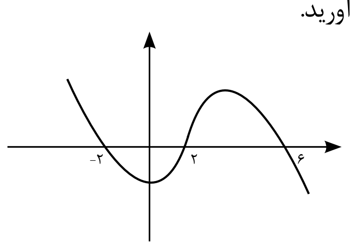
۱۸. نامعادلهٔ $\frac{x}{x-۱}\ge\frac{۱}{x+۲}$ را حل کنید.

۱۹. a را طوری بیابید تا $x^۲+ax+۱$ همواره مثبت باشد.

۲۰. اگر نمودار f به صورت زیر باشد،

الف) دامنهٔ تابع $y=\frac{۱}{f(x)}$ را به‌دست آورید.

ب) دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(x)}$ را به‌دست آورید.



۲۱. نمودار تابع $y=(\frac{۱}{۲})^x$ را رسم کنید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) مقدار تقریبی $(\frac{۱}{۲})^{-۰/۸}$ را با استفاده از نمودار به‌دست آورید.

ب) نمودار $y=(\frac{۱}{۲})^{x-۱}+۳$ را با انتقال رسم کنید.

مسائل هندسهٔ ۱

هوشنگ شرقی

۱. ثابت کنید نیم‌سازهای دو زاویهٔ متقابل به رأس در امتداد یکدیگرند.

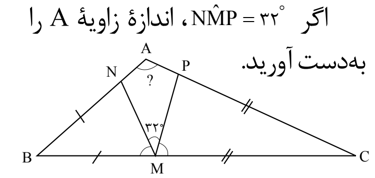
۲. نیم‌سازهای دو زاویهٔ مجاور، با یکدیگر زاویهٔ ۵۰° می‌سازند. اگر اندازهٔ یکی از دو زاویه سه برابر دیگری باشد، زاویهٔ کوچک‌تر چند درجه است؟

۳. خط d از وسط پاره‌خط AB می‌گذرد. ثابت کنید A و B از d به یک فاصله‌اند.

۴. ثابت کنید هر مثلثی که در آن یک نیم‌ساز و یک میانه برهم منطبق باشند، مثلث متساوی‌الساقین است.

۵. در مثلث متساوی‌الساقین $ABC (AB = AC)$، نیمساز زاویهٔ B، AC را در نقطهٔ D قطع می‌کند. اگر $AD = BD$ باشد، اندازه‌های زوایای مثلث ABC را به‌دست آورید.

۶. در شکل زیر داریم: $BN = BM$ و $CM = CP$.
اگر $N\hat{M}P = ۳۲^\circ$، اندازهٔ زاویهٔ A را به‌دست آورید.



۷. در متوازی‌الاضلاع ABCD، ضلع AB دو برابر ضلع AD است. از نقطهٔ M وسط ضلع AB به نقاط C و D وصل می‌کنیم. ثابت کنید MC و MD نیم‌سازهای دو زاویهٔ C و D هستند.

۸. در مثلث متساوی‌الساقین ABC داریم: $AB = AC = ۸$ و $BC = ۴$. طول ارتفاع BH را به‌دست آورید.

۹. مساحت ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی را به‌دست آورید که محیط آن ۳۲ سانتی‌متر، طول قاعدهٔ بزرگ آن ۶ سانتی‌متر بیشتر از طول قاعدهٔ کوچک آن و طول قطر آن $\sqrt{۱۳۷}$ باشد.

۱۰. در مثلث قائم‌الزاویه ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$، ارتفاع AH را رسم کرده‌ایم. ثابت کنید: $AH^{-۲} = AB^{-۲} + AC^{-۲}$.

۱۱. قطرهای ذوزنقه‌ای آن را به چهار مثلث تفکیک کرده‌اند. اگر مساحت دو مثلثی که دو ضلع موازی دارند، ۴ و ۹ واحد باشد، مساحت ذوزنقه را به‌دست آورید.

مسائل هندسهٔ ۲

هوشنگ شرقی

۱. در مثلث ABC نیم‌ساز زاویهٔ A، BC را در نقطهٔ D قطع کرده است. ثابت کنید: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$. سپس طول‌های BD و CD را برحسب طول‌های سه ضلع مثلث به‌دست آورید.

۲. اولاً ثابت کنید هر سه عدد طبیعی متوالی و مخالف ۱ می‌توانند طول‌های اضلاع مثلثی باشند. ثانیاً طول‌های اضلاع چنین مثلثی را بیابید؛ در صورتی که نیم‌ساز بزرگ‌ترین زاویهٔ آن، روی ضلع مقابل دو پاره‌خط ایجاد کند که پاره‌خط مجاور به کوچک‌ترین ضلع مثلث مساوی ۴/۲ سانتی‌متر باشد.

۳. طول قطرهای AC و BD از متوازی‌الاضلاع ABCD به ترتیب مساوی ۶cm و ۱۲cm است. اگر M وسط BC، $DM = ۹۰cm$ و نقطهٔ برخورد DM و AC نقطهٔ P و O مرکز متوازی‌الاضلاع باشد، محیط مثلث ODP چه‌قدر است؟

۴. در مثلث ABC می‌دانیم: $AB > AC$ و میانهٔ AM را رسم کرده‌ایم. ثابت کنید:

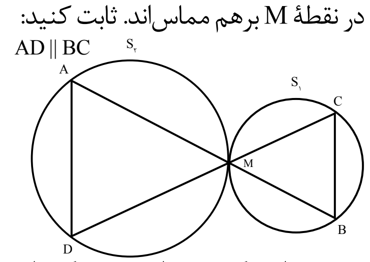
الف) $A\hat{M}C < ۹۰^\circ$

ب) $M\hat{A}B < \frac{\hat{A}}{۲}$

۵. ثابت کنید مکان هندسی مجموعه نقاطی از صفحه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله‌اند، عمودمنصف آن پاره‌خط است.

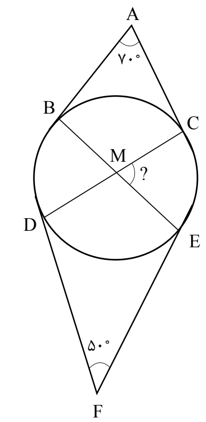
۶. مثلث ABC را با داشتن طول‌های $AB = c$ و $AC = b$ و میانهٔ $AM = m_a$ رسم کنید.

۷. در شکل زیر دایره‌های $S_۱$ و $S_۲$ در نقطهٔ M برهم مماس‌اند. ثابت کنید: $AD \parallel BC$



۸. ثابت کنید مماس مشترک‌های داخلی و خط‌المرکزین دو دایرهٔ متخارج در یک نقطه همرأس‌اند.

۹. مثلث ABC و دایرهٔ محاطی آن مفروض‌اند. اگر دایرهٔ فوق در نقطهٔ M بر AC مماس باشد، ثابت کنید: $AM = p - a$ (p نصف محیط مثلث و $CB = a$ است).



۱۰. در شکل بالا اندازهٔ زاویهٔ M را بیابید.

مسائل جبر و احتمال

معین کتابچی

۱. به کمک استقرای ریاضی ثابت کنید: $۱۷ \mid ۵^{۲n+۱} - ۳ \times ۸^{n+۲}$.

۲. اگر $\sqrt{۵}$ عددی گنگ باشد، ثابت کنید $۲\sqrt{۵} + ۳\sqrt{۷}$ عددی گنگ است.

۳. به کمک استدلال بازگشتی ثابت کنید: $(a, b \geq ۰)$ $a^۵ + b^۵ \geq a^۴b + ab^۴$.

۴. اگر m و n دو عدد طبیعی متوالی باشند، ثابت کنید $m^۲ + n^۲ + m^۲n^۲$ مربع کامل است.

۵. در یک نمایشگاه خودرو، ۳۳ دستگاه در سه مدل ب ام و، تندر و پژو در رنگ‌های قرمز، فیلی و زرد وجود دارند. حداقل چند خودروی یک رنگ و یک مدل وجود خواهد داشت؟

۶. آیا می‌توان یک جدول ۱۰×۱۰ را با اعداد ۱، ۰ و ۱- طوری پر کرد که مجموع اعداد هر سطر، هر ستون و هر دو قطر جدول همگی متمایز باشند؟

۷. هرگاه $A \cup B \subseteq A - B$ باشد، $P(P(P(B)))$ چند عضو دارد؟

۸. اگر تساوی روبه‌رو برقرار باشد، X را به‌دست آورید؟

$$[X \cap (B' \cap C')] \cup [X \cap (B \cup C)] = A$$

۹. درستی تساوی‌های زیر را اثبات کنید:

الف) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup (B - A) = B$

ب) $(A \cup B = A \cup C, A \cap B = A \cap C) \Rightarrow B = C$

ج) $B \subseteq A \Rightarrow A \cup B' = U$

۱۰. اگر داشته باشیم:
$A = \{x \in Z \mid \log_۲^{x^۲+۴} = ۳\}$،
و $B = \{m \in Z \mid -۲ \leq m, ۲^m \leq ۱\}$
$C = \{x \mid |x| \leq ۲\}$، نمودار $(B \times A) \cap (A \times C)$ را رسم کنید.

۱۱. نمودار رابطهٔ زیر را رسم کنید:

$$\begin{cases} R: Z \to Z \\ xRy \Leftrightarrow x^۲ + y^۲ \leq ۴, y \geq x^۲ \end{cases}$$

۱۲. اگر داشته باشیم $A = \{x \in R \mid x^۲ \leq ۱\}$ و $B = \{x \in R \mid x^۲ \leq ۴\}$، آنگاه $B^۲ - A^۲$ را رسم کنید.

۱۳. رابطهٔ R روی $R - \{۱\}$ به صورت زیر تعریف شده است. هم‌ارزی بودن R را بررسی کنید.

$$xRy \Leftrightarrow x + y - xy \leq ۱$$

مسائل حسابان

سیدعباس موسوی

۱. چه تعداد از جملات این تصاعد عددی را جمع کنیم تا حاصل عددی بین ۲۴۰ و ۱۰۸۰ شود؟

$-۳, ۳, ۹, \ldots$

۲. باقی‌ماندهٔ تقسیم $x^۹ + ۳x^۸ + x^۵ + x + ۱$ بر $(x-۲)(x+۲)(x^۲+۴)$ به‌صورت ax+b است. a+b را به‌دست آورید.

۳. در بسط $(\sqrt{x} + \frac{۱}{۲x})^۹$: الف) جملهٔ مستقل از x را به‌دست آورید؛ ب) تعداد جملات و مجموع ضرائب بسط را به‌دست آورید.

۴. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ + ۳x + ۱ = ۰$ باشند، معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش $\frac{۱}{\alpha^۳ + ۳\alpha^۲}$ و $\frac{۱}{\beta^۳ + ۳\beta^۲}$ باشند.

۵. آلیاژی از دو فلز به نسبت ۱ به ۲ و آلیاژ دیگر از همان فلزات با نسبت ۲ به ۳ ساخته شده است. با چه نسبتی این دو آلیاژ را با هم مخلوط کنیم تا آلیاژی از این فلزات به نسبت ۱۷ به ۲۷ به‌دست آید.

۶. معادلات زیر را حل کنید:

الف) $\frac{۱}{x^۲ + ۲x} - \frac{۱}{x^۲ + ۲x + ۱} = \frac{۱}{۱۲}$

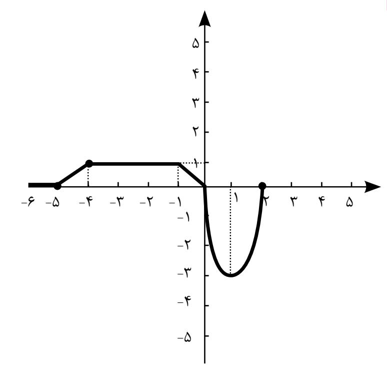
ب) $۴ + \sqrt{x - ۳} = \sqrt{۱۶ - \frac{۵}{\sqrt{x}}}$

۷. به روش هندسی تعداد و علامت ریشه‌های معادلهٔ $\sqrt{-x}e^{-x} = ۱$ را به‌دست آورید $(e \approx ۲/۷۱)$.

۸. نقاطی روی محور yها مشخص کنید که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه به عرض ۱- و ۲ روی محور yها، کمتر از ۳ نباشد.

۹. دامنه و برد تابع $f(x) = x + \sqrt{۴x - x^۲}$ را به‌دست آورید.

۱۰. اگر نمودار تابع f به‌صورت مقابل باشد،



الف) نمودار تابع با ضابطهٔ $-3f(2x+2)$ را رسم کنید.

ب) دامنه و برد تابع $-3f(2x+2)$ را به‌دست آورید.

۱۱. اگر داشته باشیم: $f(x)=\sqrt{x^2+x}$ و $g(x)=x^2$، دامنه و ضابطهٔ gof را به‌دست آورید.

۱۲. اگر داشته باشیم $f(x)=x-\frac{1}{x}$ و $(gof)_{(x)}=x^2+\frac{1}{x^2}$، ضابطهٔ $g(x)$ را به‌دست آورید.

۱۳. اگر نمودار $f(x)=\log(5x+\sqrt{1+ax^2})$ نسبت به مبدأ مختصات متقارن باشد، a و b را طوری به‌دست آورید که تابع $y=|x+a|+|x+b|$ زوج باشد.

۱۴. حدود b و a را طوری به‌دست آورید که تابع $f(x)=\begin{cases}ax^3+1 : x<1\\ x^2+b : x\ge 1\end{cases}$ معکوس‌پذیر باشد. سپس ضابطهٔ معکوس را برای $a=b=1$ به‌دست آورید.

۱۵. نمودار تابع مقابل را رسم کنید و موارد زیر را پاسخ دهید:

$$f(x)=\begin{cases}x\left[\frac{x}{2}\right] : & -2<x\le -1\\ \sqrt{-x} : & -1<x\le 0\\ \left[\frac{x}{2}\right] : & 0<x<2\\ \frac{1}{x} : & 2\le x<4\end{cases}$$

الف) تابع در چه فواصلی صعودی، نزولی، اکیداً صعودی، اکیداً نزولی، هم صعودی و هم نزولی است.

ب) برد تابع را بنویسید:

ج) آیا تابع معکوس‌پذیر است؟ چرا؟

د) تابع زوج است یا فرد؟

هـ) بازه‌ای بیان کنید که تابع در آن یکنوا نباشد.

۱۶. اگر f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب $T=5$ باشد و برای $0<x<1$ داشته باشیم: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$، حاصل $f(-19/84)$ را به‌دست آورید.

۱۷. ثابت کنید هر تابع دل‌خواه f(x) را می‌توان به‌صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشت. این عمل را برای تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ انجام دهید.

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه چهارم: چند معمای خواندنی!

● این معما را حتماً بخوانید! و در این صورت قول می‌دهم که آن را برای خیلی‌ها تعریف می‌کنید! با فرض درست بودن همهٔ تساوی‌ها، در سطر پنجم به جای علامت سؤال چه عددی باید قرار بگیرد؟

۱= ۵

۲= ۵۵

۳= ۵۵۵

۴= ۴۴۴۴

۵= ؟

جواب را در انتهای همین بخش ببینید

● این یکی هم جالب است: **کاوه** و **شهریار** را که یادتان هست؛ دو برادر دوقلو را می‌گویم! آن‌ها هر کدام یک ساعت شماطه‌دار داشتند که هر دوی آن‌ها، سر هر ساعت به تعداد آن ساعت، زنگ می‌زدند، ولی ساعت کاوه سریع‌تر زنگ می‌زد! به این صورت که در مدت زمانی که ساعت کاوه سه زنگ می‌زند، ساعت شهریار فقط دو زنگ می‌زند. یک روز سر ساعت معینی، هر دو ساعت هم‌زمان شروع کردند به زنگ‌زدن. بعد از آن‌که زنگ‌زدن ساعت کاوه تمام شد، ساعت شهریار دو زنگ دیگر هم زد. در چه زمانی این اتفاق افتاد؟ ساعت چند بود؟

نمادهای جبری هنگامی مورد استفاده قرار می‌گیرند که شما نمی‌دانید دربارهٔ چه چیزی باید صحبت کنید!

حل مسائل ریاضی ۱

۱.
$\frac{-4\times 3}{5\times 3}$, $\frac{-2\times 5}{3\times 5}$

$\frac{-12\times 2}{15\times 2}$, $\frac{-10\times 2}{15\times 2}$

$\frac{-24}{30}$, $\frac{-20}{30}$

$\Rightarrow \frac{-4}{5}<\frac{-23}{30}<\frac{-22}{30}<\frac{-20}{30}$

۲.

اجاره $\frac{1}{5}\times 550/000=110/000$

باقی‌مانده $550/000-110/000=440/000$

هزینه‌های جاری $\frac{7}{11}\times 440/000=280/000$

کل هزینه‌ها $110/000+280/000=390/000$

پس‌انداز $550/000-390/000=160/000$

ب) پس از سه ماه چون:

$3\times 160/000=480/000>400/000$

۳.
$A: 2-\sqrt{10}$

$B: 2+\sqrt{10}$

۴.
$\frac{\sqrt{8/9}+3/012}{\pi-\sqrt{4/1}}\approx\frac{\sqrt{9}+3}{3-\sqrt{4}}=\frac{3+3}{3-2}=6$

۵.
$\left|\underbrace{1-\sqrt{2}}_{-}\right|+\left|\underbrace{\pi-3}_{+}\right|$

$=-(1-\sqrt{2})+\pi-3=\sqrt{2}+\pi-4$

۶. الف) $a^2+1>0$

ب) اگر a عددی منفی باشد، توان چهارم آن مثبت است.

۷.
$3/01-0/7=2/31$

$-2^2=-4$

$0/04\div 1\frac{3}{5}=\frac{4}{100}\div\frac{8}{5}=\frac{4}{100}\times\frac{5}{8}=\frac{1}{40}$

حاصل $=-4+\frac{1}{40}-\frac{231}{100}=\frac{-800+5-462}{200}$

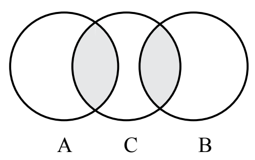
$=\frac{-1257}{200}$

۸.
$A\cup B=\{1,2,3,4,5,-1,0,6\}$

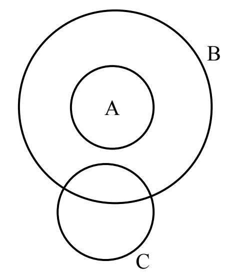
$A\cap C=\{1,2\}$

$(A\cup B)-(A\cap C)=\{3,4,5,-1,0,6\}$

۹.



۱۰.



۱۱.
$\left\{2x-1\,\middle|\,\underbrace{-1<x^2\le 4, x\in N}_{1,2}\right\}$

$=\{1,3\}$

۱۲.
$\left\{\frac{2}{10},\frac{2}{100},\frac{2}{1000},\dots\right\}=\left\{\frac{2}{10^n}\,\middle|\,n\in N\right\}$

۱۳.
$\frac{1}{4000}=\frac{1}{4\times 10^3}=\frac{1}{4}\times 10^{-3}$

$=0/25\times 10^{-3}$

$=2/5\times 10^{-1}\times 10^{-3}=2/5\times 10^{-4}$

۱۴.
$\frac{(3^3)^2\times 8^{-3}\times 7^0}{18^{-4}\times 2^{3^2}}=\frac{3^6\times(2^3)^{-3}\times 1}{(2\times 3^2)^{-4}\times 2^9}$

$=\frac{3^6\times 2^{-9}}{2^{-4}\times 3^{-8}\times 2^9}$

$=\frac{3^6\times 3^8}{2^5\times 2^9}=\frac{3^{14}}{2^{14}}=(\frac{3}{2})^{14}$

۱۵.
$\sqrt{a^2b^3}\times\sqrt{18a^7b}=\sqrt{18a^9b^4}$

$=\sqrt{2\times 9\times a^8\times a\times b^4}=3a^4b^2\sqrt{2a}$

۱۶.
$\frac{1}{5}\sqrt{40}+\sqrt{3^2+1}-2\sqrt{10}$

$=\frac{1}{5}\sqrt{4\times 10}+\sqrt{10}-2\sqrt{10}$

$=\frac{2}{5}\sqrt{10}+\sqrt{10}-2\sqrt{10}=(\frac{2}{5}+1-2)\sqrt{10}$

$x=-\frac{3}{5}\sqrt{10}$

۱۷.
$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3a}}\times\frac{\sqrt{3a}}{\sqrt{3a}}=\frac{\sqrt{6a}}{3a}$

۱۸.
$\frac{y}{xz}$

۱۹.

مساحت مربع $=(2x)^2=4x^2$

مساحت مثلث $=\frac{x.x}{2}=\frac{x^2}{2}$

مساحت هاشور $=4x^2-\frac{x^2}{2}=\frac{7}{2}x^2$

۲۰.
$AB=(1+x+x^2)(1-x^2)$

$=1-x^2+x-x^3+x^2-x^4$

$=1+x-x^3-x^4$

$A+B=1+x+x^2+1-x^2=2+x$

$AB-2(A+B)=1+x-x^3-x^4-4-2x$

$=-3-x-x^3-x^4$

۲۱.
الف) $(3x-\sqrt{2})(3x+\sqrt{2})+(x^2-1)^2$

$=9x^2-2+x^4-2x^2+1=7x^2+x^4-1$

ب) $(2a-3)^3=(2a)^3-3(2a)^2(3)+3(2a)(3)^2$

$-(3^3)=8a^3-36a^2+54a-27$

۲۲.
$(2x-5)(2x+4)=4x^2-2x-20$ (   )(

$(x^2+2)(x^4-2x^2+4)=x^6+8$ (   )(x

حل مسائل

۲۳.
$x^۳-۶x^۲+۵x=x(x^۲-۶x+۵)$
$=x(x-۱)(x-۵)$

$\frac{x^۲}{y^۴}-۱۶=(\frac{x}{y^۲}-۴)(\frac{x}{y^۲}+۴)$

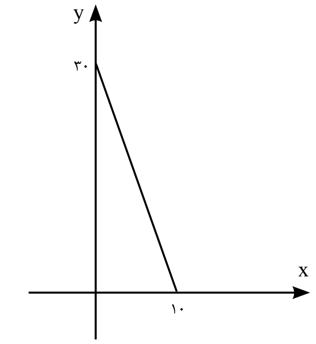
۲۴.
$\frac{x-۱}{۳}-\frac{۲x+۱}{۴}=۵x$
$\frac{۴(x-۱)-۳(۲x+۱)}{۱۲}=۵x$
$\Rightarrow ۴x-۴-۶x-۳=۶۰x$
$-۲x-۷=۶۰x \Rightarrow -۶۲x=۷$
$x=-\frac{۷}{۶۲}$

۲۵. هم‌ارز بودن دو معادله به معنی یکسان‌بودن جواب‌هاست.
بنابراین: $x-۱=۲$ و لذا $x=۳$.
پس $x=۳$ جواب معادلهٔ دیگر هم باید باشد. $۳a+۱=۳ \rightarrow ۳a=۲ \rightarrow a=\frac{۲}{۳}$

۲۶.

دقیقه (x)	۰	۱	۲	۳	...	۱۰
طول شمع (y)	۳۰	۲۷	۲۴	۲۱	...	۰

$y=۳۰-۳x$



۲۷.
$\sqrt{(۳-(-۱))^۲+(-۱-۲)^۲}$
$=\sqrt{۱۶+۹}=۵$

حل مسائل ریاضی ۲

۱.
الف) $a_۵=\frac{۲(۵)+۳}{۵-۳}=\frac{۱۳}{۲}$
ب) $\frac{۲n+۳}{n-۳}=۵ \Rightarrow ۲n+۳=۵n-۱۵$
$-۳n=-۱۸ \Rightarrow n=۶ \Rightarrow a_۶=۵$

۲.
$a_۲=-۲ \Rightarrow a_۱+d=-۲$
$a_۵=\frac{۵}{۲} \Rightarrow a_۱+۴d=\frac{۵}{۲}$
$۳d=\frac{۹}{۲}$
$d=\frac{۹}{۶}=\frac{۳}{۲}$
$\Rightarrow -\frac{۷}{۲},-۲,-\frac{۱}{۲},۱,\frac{۵}{۲}$

۳.
$(m+۴)^۲=(m-۲)(۵m+۲)$
$\Rightarrow m^۲-۴m-۵=۰$
$\Rightarrow \begin{cases} m=۵ \overset{\text{دنباله}}{\Rightarrow} ۲۷,۹,۳ \\ m=-۱ \Rightarrow -۳,۳,-۳ \end{cases}$
$m=۵$ قابل قبول است.

۴.
$$\begin{array}{r|l} ۵۰ & ۱۱ \\ \underline{۴۴} & ۰/۴۵۴ \\ ۶۰ & \\ \underline{۵۵} & \\ ۵۰ & \\ \underline{۴۴} & \\ ۶ & \end{array}$$

$۰/۴, ۰/۴۵, ۰/۴۵۴, ...$
$\frac{۵}{۱۱}-\frac{۴}{۱۰}=\frac{۵۰-۴۴}{۱۱۰}=\frac{۶}{۱۱۰}$
$\frac{۵}{۱۱}-\frac{۴۵}{۱۰۰}=\frac{۵۰۰-۴۹۵}{۱۱۰۰}=\frac{۵}{۱۱۰۰}$
$\frac{۵}{۱۱}-\frac{۴۵۴}{۱۰۰۰}=\frac{۵۰۰۰-۴۹۹۴}{۱۱۰۰۰}=\frac{۶}{۱۱۰۰۰}$

دنبالهٔ تفاضلات به سمت صفر و بنابراین دنباله تقریبات اعشاری به سمت $\frac{۵}{۱۱}$ می‌رود.

۵.
$\sqrt[۸]{۳\times ۳^{\frac{۴}{۳}}}=\sqrt[۸]{۳^{۱+\frac{۴}{۳}}}=\sqrt[۸]{۳^{\frac{۷}{۳}}}=۳^{\frac{\frac{۷}{۳}}{۸}}=۳^{\frac{۷}{۲۴}}$

۶.
$\frac{\sqrt[۴]{۳}^{۵-\sqrt{۵}}(\sqrt[۴]{۳})^{۵+\sqrt{۵}}}{\sqrt[۴]{۹}}=\frac{(\sqrt[۴]{۳})^{(۵-\sqrt{۵})+(۵+\sqrt{۵})}}{\sqrt[۴]{۳^۲}}$
$=\frac{(\sqrt[۴]{۳})^{۱۰}}{\sqrt[۴]{۳^۲}}=\frac{۳^{\frac{۵}{۲}}}{۳^{\frac{۲}{۴}}}=۳^{\frac{۵}{۲}-\frac{۱}{۲}}=۳^۲=۹$

۷.
$a+۵=۱ \Rightarrow a=-۴$
$\xrightarrow{\text{قرار می‌دهیم}} \{(-۲,۱),(-۳,۵),(-۲,b+۱),(-۲,۱),(۱,-۲)\}$
$\Rightarrow b+۱=۱ \Rightarrow b=۰$
دامنه $=\{-۲,-۳,۱\}$
برد $=\{۱,۵,-۲\}$

۸.
$\begin{cases} f:N\rightarrow N \\ f(n)=۱ \end{cases}$

۹. الف) با توجه به دما در چهار فصل سال.

۱۰.
$y=۲۰۰۰+۴۰۰x$
$D=\{۰,۱,۲,...\}$

۱۱.
$f(x)=ax+b$
$\Rightarrow \begin{cases} f(۱)=a+b=۳ \\ f(۲)=۲a+b=۶ \end{cases}$
$a=۳$
$b=۰$
$f(x)=۳x$

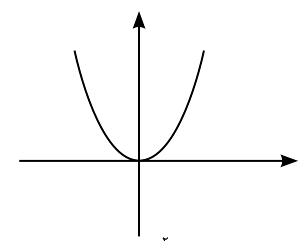
۱۲.
$۲x-۳y=۶ \Rightarrow ۲x=۳y+۶$
$\Rightarrow x=\frac{۳y+۶}{۲} \Rightarrow y=\frac{۳x+۶}{۲}$
نمودار تابع معکوس و اصلی نسبت به خط y=x قرینه‌اند.

۱۳.
$D=(-۲,+\infty)$
$R=[-۳,+\infty)$

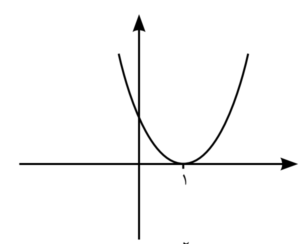
۱۴.
$f(۲)=\sqrt{۴-۳}=۱ \Rightarrow g(f(۲))$
$=g(۱)=\frac{۴}{۲}=۲$
$f(x+۱)=\sqrt{۲(x+۱)-۳}=\sqrt{۲x-۱}$

۱۵.
$S_{\text{مربع}}=x^۲$
$S_{\text{مثلث}}=\frac{x.x}{۲}=\frac{x^۲}{۲}$
$S_{\text{هاشور}}=x^۲-\frac{x^۲}{۲}=\frac{x^۲}{۲}$
$\frac{x^۲}{۲}=۸ \Rightarrow x^۲=۱۶ \Rightarrow x=۴$

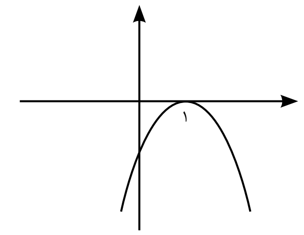
۱۶.



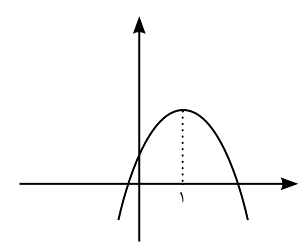
$y=x^۲$



$y=(x-۱)^۲$



$y=-(x-۱)^۲$



$y=-(x-۱)^۲+۲$

۱۷.
الف) $\begin{cases} x^۲-۲x=۰ \Rightarrow x(x-۲)=۰ \begin{cases} x=۰ \\ x=۲ \end{cases} \\ x-۳=۰ \Rightarrow x=۳ \end{cases}$
$D=R-\{۰,۲,۳\}$

ب) $۴-x^۲=۰ \Rightarrow x=\pm ۲$
$|x|=۰ \Rightarrow x=۰$
$(x+۱)=۰ \Rightarrow x=-۱$

x		-۲		-۱		۰		+۲	
$۴-x^۲$	−	۰	+		+		+	۰	−
$\|x\|$	+		+		+	۰	+		+
$x+۱$	−		−	۰	+		+		+
	+	۰	−	ت.ن	+	ت.ن	+	۰	−

$D=(-\infty,-۲]\cup(-۱,۰)\cup(۰,۲]$

۱۸.
$\frac{x}{x-۱}\geq\frac{۱}{x+۲} \Rightarrow \frac{x}{x-۱}-\frac{۱}{x+۲}\geq ۰$
$\frac{x(x+۲)-(x-۱)}{(x-۱)(x+۲)}=\frac{x^۲+x+۱}{(x-۱)(x+۲)}\geq ۰$

x		-۲		۱	
$x^۲+x+۱$	+		+		+
$x-۱$	−		−	۰	+
$x+۲$	−		+		+
	+	ت.ن	−	ت.ن	+

جواب: $(-\infty,-۲)\cup(۱,+\infty)$

۱۹.
$\begin{cases} \Delta<۰ \Rightarrow a^۲-۴<۰ \Rightarrow (a-۲)(a+۲)<۰ \\ ۱>۰ \end{cases}$

a		-۲		۱	
$a^۲-۴$	+	۰	−	۰	+

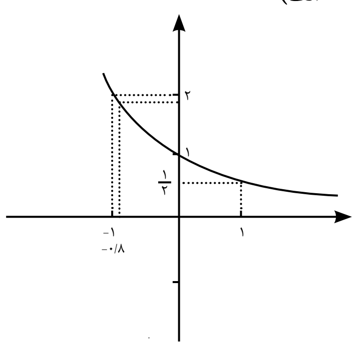
$a\in(-۲,۲)$

۲۰.
الف) $f(x)=۰ \Rightarrow x=-۲,۲,۶$
$\Rightarrow D=R-\{-۲,۲,۶\}$
ب) $\underbrace{f(x)\geq ۰}_{\text{بالای محور xها}} \Rightarrow D=(-\infty,-۲]\cup[۲,۶]$

۲۱.

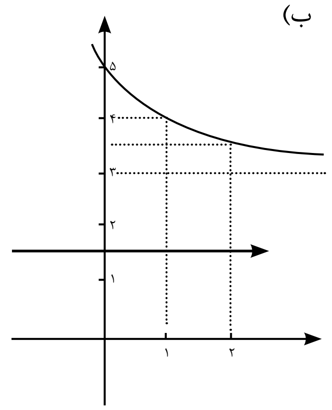
x	۰	۱	-۱	۲
y	۱	$\frac{۱}{۲}$	۲	$\frac{۱}{۴}$

الف)



$(\frac{۱}{۲})^{-۰/۸} \simeq ۱/۷$

ب)



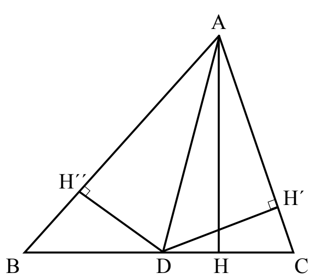
چهار نقطهٔ به‌دست آمده را یک واحد به راست و ۳ واحد به بالا می‌بریم.

حل مسائل هندسهٔ ۱

۱. مطابق شکل، زوایای متقابل به رأس xoy و zot را در نظر می‌گیریم. با توجه به برابری دو زاویه و ویژگی نیم‌سازها داریم (or و os نیم‌سازهای این دو زاویه هستند):

حل مسائل هندسهٔ ۲

۱. نیم‌ساز AD و ارتفاع AH را رسم کرده‌ایم. AH ارتفاع رأس A برای هر دو مثلث ABD و ADC است. مساحت‌های این دو مثلث را با این ارتفاع می‌نویسیم و برهم تقسیم می‌کنیم:



$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{\frac{۱}{۲}BD.AH}{\frac{۱}{۲}CD.AH}=\frac{BD}{CD}\ (I)$$

از طرف دیگر می‌دانیم که هر نقطه روی نیم‌ساز زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. پس: $DH''=DH'$.

بنابراین بار دیگر داریم:

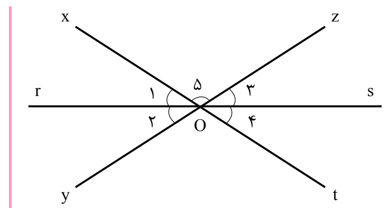
$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{\frac{۱}{۲}DH''.AB}{\frac{۱}{۲}DH'.AC}=\frac{AB}{AC}\ (II)$$

و از مقایسهٔ روابط I و II نتیجه می‌شود:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$$

از ترکیب تناسب فوق در صورت خواهیم داشت:

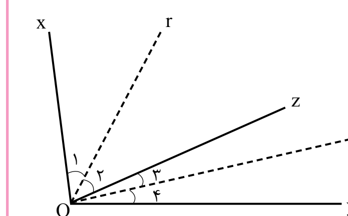
$$\frac{AB+AC}{AC}=\frac{BD+CD}{CD}=\frac{BC}{CD}$$
$$\Rightarrow CD=\frac{AC.BC}{AB+AC}$$
$$\Rightarrow BD=BC-CD=BC-\frac{AC.BC}{AB+AC}$$
$$\Rightarrow BD=\frac{AB.BC}{AB+AC}$$



$$\hat{o}_۱+\hat{o}_۲=\hat{o}_۳+\hat{o}_۴\Rightarrow ۲\hat{o}_۱+۲\hat{o}_۳$$
$$\Rightarrow \hat{o}_۱=\hat{o}_۳=\hat{o}_۲=\hat{o}_۴$$
$$\hat{o}_۵+\hat{o}_۳+\hat{o}_۴=۱۸۰^\circ\Rightarrow \hat{o}_۵+\hat{o}_۲+\hat{o}_۱=۱۸۰^\circ$$

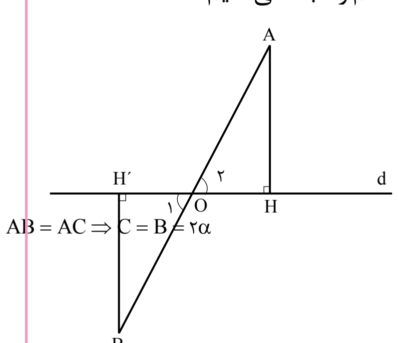
$r\hat{o}s=۱۸۰^\circ\Rightarrow$ or و os در یک امتدادند.

۲. طبق فرض مسئله داریم:



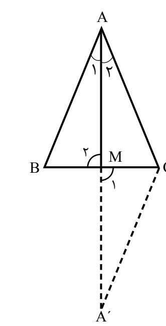
$$\hat{o}_۱=\hat{o}_۲,\ \hat{o}_۳=\hat{o}_۴,\ \hat{o}_۲+\hat{o}_۳=۵۰^\circ$$
$$\Rightarrow ۲\hat{o}_۲+۲\hat{o}_۳=۵۰\times ۲$$
$$\Rightarrow \hat{o}_۱+\hat{o}_۲+\hat{o}_۳+\hat{o}_۴=۱۰۰^\circ$$
$$\Rightarrow x\hat{o}y=۱۰۰^\circ\Rightarrow x\hat{o}z+z\hat{o}y=۱۰۰^\circ,$$
$$x\hat{o}z=۳z\hat{o}y$$
$$\Rightarrow ۴z\hat{o}y=۱۰۰^\circ\Rightarrow z\hat{o}y=۲۵^\circ,\ x\hat{o}z=۷۵^\circ$$

۳. خط d از وسط AB می‌گذرد $(OA=OB)$ و فاصلهٔ A و B از d طول عمودهایی است که از A و B بر d رسم می‌شود (AH و BH′). به کمک هم‌نهشتی مثلث‌های OAH و OBH′ حکم را ثابت می‌کنیم:



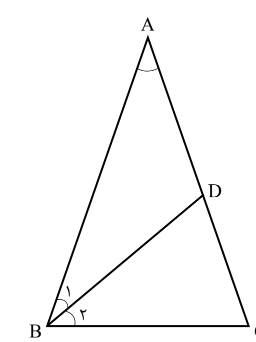
$$\left.\begin{array}{l}OA=OB\\ \hat{o}_۱=\hat{o}_۲\\ \hat{H}=\hat{H}'=۹۰^\circ\end{array}\right\}\overset{\text{(وتر و یک زاویه)}}{\Rightarrow}\Delta OAH\cong\Delta OBH'$$
$$\Rightarrow AH=BH'$$

۴. مطابق شکل، میانهٔ AM از مثلث ABC، نیم‌ساز زاویهٔ $\hat{A}$ هم هست؛ یعنی: $\hat{A}_۱=\hat{A}_۲$ و $BM=MC$. میانهٔ AM را به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ A′ امتداد می‌دهیم و A′ را به C وصل می‌کنیم.



$$\left.\begin{array}{l}AM=A'M\\ MB=MC\\ \hat{M}_۱=\hat{M}_۲\end{array}\right\}\overset{\text{(ض‌زض)}}{\Rightarrow}\Delta AMB\cong\Delta A'MC$$
$$\Rightarrow A'C=AB,\ \hat{A}'=\hat{A}_۱,\hat{A}_۱=\hat{A}_۲$$
$$\Rightarrow \hat{A}'=\hat{A}_۲$$
$$\Rightarrow A'C=AC\Rightarrow AB=AC$$

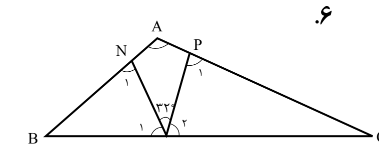
۵.



$$AD=BD\Rightarrow \hat{A}=\hat{B}_۱=\hat{B}_۲=\alpha$$
$$AB=AC\Rightarrow \hat{C}=\hat{B}=۲\alpha$$
$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ\Rightarrow \alpha+۲\alpha+۲\alpha=۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow ۵\alpha=۱۸۰^\circ\Rightarrow \alpha=۳۶^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{A}=۳۶^\circ,\hat{B}=\hat{C}=۷۲^\circ$$

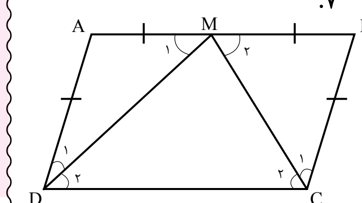
$$AB=AC\Rightarrow C=B=۲\alpha$$

۶.



$$BM=BN\Rightarrow \hat{M}_۱=\hat{N}_۱$$
$$\Rightarrow \Delta BNM:\hat{M}_۱=\frac{۱۸۰-\hat{B}}{۲}$$
$$CM=CP\Rightarrow \hat{M}_۲=\hat{P}_۱$$
$$\Rightarrow \Delta CMP:\hat{M}_۲=\frac{۱۸۰-\hat{C}}{۲}$$
$$\hat{M}_۱+\hat{M}_۲+۳۲^\circ=۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{M}_۱+\hat{M}_۲=۱۴۸^\circ$$
$$\Rightarrow \frac{۱۸۰-\hat{B}}{۲}+\frac{۱۸۰-\hat{C}}{۲}=۱۴۸^\circ$$
$$\Rightarrow ۱۸۰^\circ-\hat{B}+۱۸۰-\hat{C}=۲۹۶^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{B}+\hat{C}=۶۴^\circ\Rightarrow \hat{A}=۱۸۰^\circ-(\hat{B}+\hat{C})=۱۱۶^\circ$$

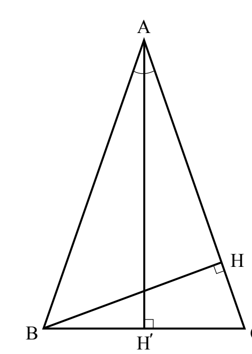
۷.



$$AB=۲AD,\ MA=MB$$
$$\Rightarrow MA=MB=AD=BC$$
$$MA=AD\Rightarrow \hat{M}_۱=\hat{D}_۱,\ AM\parallel CD,\ \text{مورب } MD$$
$$\Rightarrow \hat{M}_۱=\hat{D}_۲\Rightarrow \hat{D}_۱=\hat{D}_۲$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود که: $\hat{C}_۱=\hat{C}_۲$ و لذا MC و MD نیم‌سازهای زوایای C و D هستند.

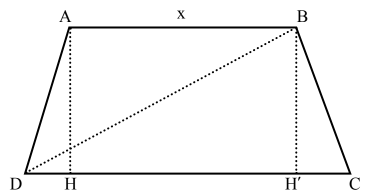
۸. ارتفاع AH′ را که میانه هم هست، رسم می‌کنیم. بنابراین داریم:



$$BH'=CH'=\frac{BC}{۲}=۲$$
$$\Delta AH'B: AH'^۲+BH'^۲=AB^۲$$
$$\Rightarrow AH'^۲=AB^۲-BH'^۲=۸^۲-۲^۲=۶۰$$
$$\Rightarrow AH'=\sqrt{۶۰}=۲\sqrt{۱۵},\ S_{ABC}=\frac{۱}{۲}BC.AH'$$
$$=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۲\sqrt{۱۵}=۴\sqrt{۱۵}$$

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}BH.AC=\frac{۱}{۲}BH\times ۸=۴\sqrt{۱۵}$$
$$\Rightarrow BH=\sqrt{۱۵}$$

۹. ارتفاع‌های ذوزنقه را رسم می‌کنیم. واضح است که مثلث‌های ADH و BCH′ هم‌نهشت‌اند و در نتیجه:



$$DH=CH',\ HH'=AB$$
$$\Rightarrow DH=CH'=\frac{CD-AB}{۲}$$

طبق فرض داریم:

$$AB=x,\ CD=y,\ AD=BC=z,$$
$$x+y+۲z=۳۲,$$
$$y-x=۶\Rightarrow DH=CH'=\frac{y-x}{۲}=۳$$
$$\Rightarrow DH'=x+۳$$
$$\Delta BDH': BD^۲=BH'^۲+DH'^۲$$
$$\Rightarrow ۱۳۷=(BC^۲-CH'^۲)+DH'^۲$$
$$\Rightarrow z^۲-۹+(x+۳)^۲=۱۳۷$$
$$\Rightarrow x^۲+۶x+۹-۹+z^۲=۱۳۷$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x^۲+z^۲+۶x=۱۳۷\\ x+y+۲z=۳۲\\ y-x=۶\end{cases}$$

از حل دستگاه معادلات بالا، به صورت زیر، x، y و z و از آنجا مساحت ذوزنقه را می‌یابیم. ابتدا طرفین دو معادلهٔ دوم و سوم را از هم کم می‌کنیم:

$$(x+y+۲z)-(y-x)=۲۶$$
$$\Rightarrow ۲x+۲z=۲۶\Rightarrow x+z=۱۳$$
$$\Rightarrow z=۱۳-x$$

سپس نتیجه را در معادلهٔ اول قرار می‌دهیم:

$$x^۲+(۱۳-x)^۲+۶x=۱۳۷$$
$$\Rightarrow ۲x^۲-۲۰x+۳۲=۰$$
$$\Rightarrow x^۲-۱۰x+۱۶=۰$$
$$\Rightarrow (x-۸)(x-۲)=۰\Rightarrow x=۸\ \text{یا}\ x=۲$$

با توجه به معادلات دیگر دو دسته جواب به صورت‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$(I)\ x=۸,\ y=۱۴,\ z=۵\quad \text{یا}$$
$$(II)\ x=۲,\ y=۸,\ z=۱۱$$

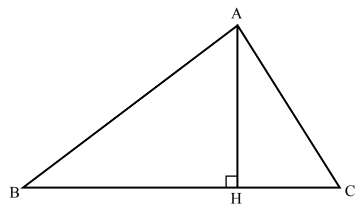
از جواب اول نتیجه می‌شود:

$$S=\frac{۸+۱۴}{۲}\times ۴=۴۴,\ AH=۴$$

و از جواب دوم:

$$S=\frac{۲+۸}{۲}\times\sqrt{۱۱۲}=۲۰\sqrt{۷},\ AH=\sqrt{۱۱۲}$$

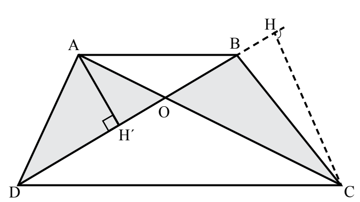
۱۰.



$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AH.BC=\frac{۱}{۲}AB.AC$$
$$\Rightarrow AH.BC=AB.AC$$
$$\Rightarrow AH^۲.BC^۲=AB^۲.AC^۲$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{AH^۲}=\frac{BC^۲}{AB^۲.AC^۲}=\frac{AB^۲+AC^۲}{AB^۲.AC^۲}$$
$$=\frac{۱}{AC^۲}+\frac{۱}{AB^۲}$$
$$\Rightarrow AH^{-۲}=AB^{-۲}+AC^{-۲}$$

۱۱. مطابق شکل داریم:

$S_{OAB}=۴,\ S_{CDO}=۹$.



ولی مثلث‌های ADC و BDC هم مساحت‌اند (چرا؟).

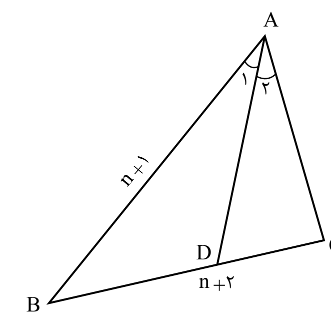
بنابراین: (چرا؟) $S_{AOD}=S_{BOC}$.

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}OD.AH'=\frac{۱}{۲}OB.CH=S$$
$$\Rightarrow S^۲=\frac{۱}{۴}OD.AH'.OB.CH$$
$$=(\frac{۱}{۲}OD.CH).(\frac{۱}{۲}OB.AH')$$
$$=S_{OCD}.S_{OAB}=۹\times ۴=۳۶$$
$$\Rightarrow S=۶\Rightarrow S_{ABCD}=۹+۴+۶+۶+۲۵$$

۲. اولاً، اگر این سه عدد را $a=n+2$ ، $b=n+1$ و $c=n$ در نظر بگیریم، کافی است ثابت کنیم که مجموع هر جفت از این عدد، از سومی بزرگ‌تر است (نامساوی مثلثی):

$$a+b=2n+3>n\ (n+3>0)\Rightarrow a+b>c$$
$$a+c=2n+2>n\ (n+2>0)\Rightarrow a+c>b$$
$$b+c=2n+1>n+2\ (n>1)\Rightarrow b+c>a$$

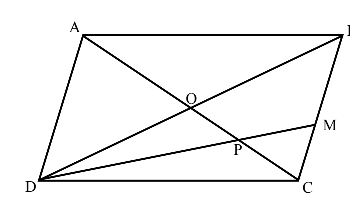
ثانیاً، مطابق شکل اگر AD نیم‌ساز وارد بر بزرگ‌ترین ضلع $(BC=n+2)$ باشد، طبق نتیجهٔ مسئلهٔ ۱ داریم:



$$CD=\frac{BC.AC}{AB+AC}=\frac{(n+2)n}{2n+1}=4/2$$
$$\Rightarrow n^2+2n=8/4n+4/2$$
$$\Rightarrow n^2-6/4n-4/2=0$$
$$\Rightarrow (n-7)(n+0/6)=0\Rightarrow n=7$$

یعنی طول‌های اضلاع این مثلث ۷، ۸ و ۹ سانتی‌متر هستند.

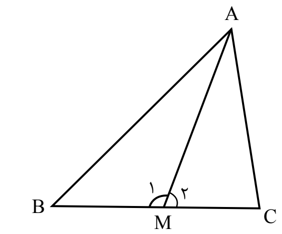
۳. در مثلث BDC، OC و DM دو میانهٔ مثلث هستند. پس P مرکز ثقل مثلث است و از آنجا داریم:



$$DP=\frac{2}{3}DM=\frac{2}{3}\times 9=6$$
$$OP=\frac{1}{3}OC=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AC=1\ ,\ OD=6$$
$$\Rightarrow \text{محیط}\ \Delta ODP=6+6+1=13$$

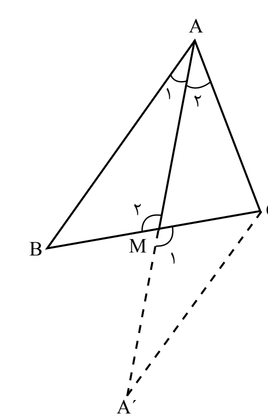
۴. الف)

$$\left.\begin{array}{l}AM=AM\\BM=CM\\AB>AC\end{array}\right\}\overset{\text{عکس قضیهٔ لولا}}{\Rightarrow}\hat{M}_1>\hat{M}_2$$
$$\Rightarrow \hat{M}_1>\hat{M}_2>2\hat{M}_2$$
$$\Rightarrow 2\hat{M}_2<180^\circ\Rightarrow \hat{M}_2<90^\circ$$



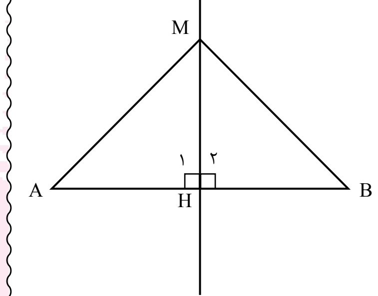
ب) میانهٔ AM را از طرف M به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ A' امتداد می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l}AM=A'M\\MB=MC\\\hat{M}_1=\hat{M}_2\end{array}\right\}\overset{\text{ض‌زض}}{\Rightarrow}\Delta AMB\cong\Delta A'MC$$
$$\Rightarrow AB=A'C\ ,\ \hat{A}_1=\hat{A}'$$
$$AB>AC\Rightarrow A'C>AC$$
$$\Delta AA'C: A'C>AC\Rightarrow \hat{A}_2>\hat{A}'\Rightarrow \hat{A}_2>\hat{A}_1$$
$$\Rightarrow \hat{A}_1+\hat{A}_2>2\hat{A}_1\Rightarrow 2\hat{A}_1<\hat{A}\Rightarrow \hat{A}_1<\frac{\hat{A}}{2}$$



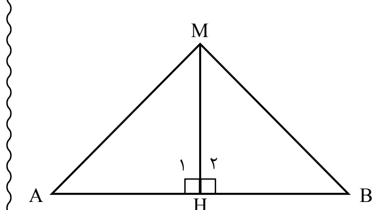
۵. اولاً ثابت می‌کنیم هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است. یعنی با فرض این‌که مطابق شکل خط d، عمودمنصف پاره‌خط AB و M نقطه‌ای دل‌خواه روی d است، ثابت می‌کنیم: MA = MB. می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l}MH=MH\\AH=BH\\H_1=H_2=90^\circ\end{array}\right\}\overset{\text{ض‌زض}}{\Rightarrow}\Delta MAH\cong\Delta MBH$$
$$\Rightarrow MA=MB$$



ثانیاً ثابت می‌کنیم اگر M از A و B به یک فاصله باشد، M روی عمودمنصف AB قرار دارد. از M به وسط AB وصل می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}MA=MB\\HA=HB\\MH=MH\end{array}\right\}\overset{\text{(ض‌ض‌ض)}}{\Rightarrow}\Delta MAH\cong\Delta MBH$$
$$\Rightarrow \hat{H}_1=\hat{H}_2\ ,\ \hat{H}_1+\hat{H}_2=180^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ\Rightarrow MH\perp AB$$

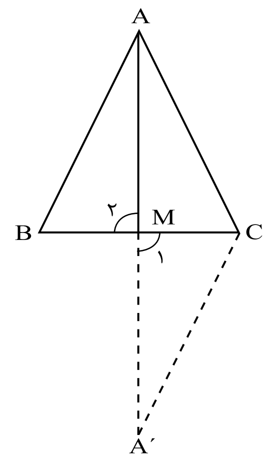


یعنی M روی عمودمنصف AB است.

۶. مسئله را حل شده فرض می‌کنیم. میانهٔ AM را به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ A' ادامه می‌دهیم و A' را به C وصل می‌کنیم. می‌توان نوشت:

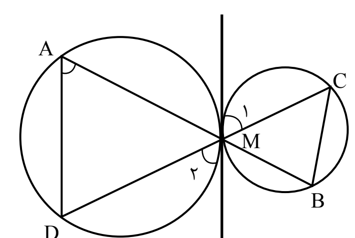
$$\left.\begin{array}{l}AM=A'M\\MB=MC\\\hat{M}_1=\hat{M}_2\end{array}\right\}\overset{\text{(ض‌ض‌ض)}}{\Rightarrow}\Delta AMB\cong\Delta A'MC$$
$$\Rightarrow A'C=AB\ ,\ AA'=2AM$$

پس مثلث ACA' با داشتن طول‌های سه ضلع آن ($AC=b$، $A'C=c$ و $AA'=2m_a$) قابل رسم است و از آنجا به سادگی می‌توان مثلث ABC را رسم کرد.



طریقهٔ رسم: ابتدا پاره‌خط AA' را به طول معلوم $2m_a$ رسم می‌کنیم. سپس به مرکز A و به شعاع b و به مرکز A' و به شعاع c، کمان‌هایی می‌زنیم. محل برخورد دو کمان نقطهٔ C است. از C به M (وسط AA') وصل می‌کنیم و به اندازهٔ CM از طرف M امتداد می‌دهیم تا به نقطهٔ B برسیم. A را به B و C وصل می‌کنیم تا مثلث ABC رسم شود.

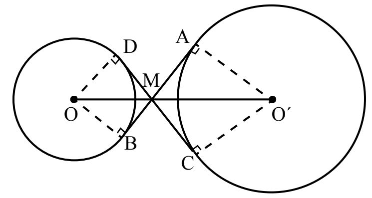
۷. مماس مشترک دو دایره را در نقطهٔ M رسم می‌کنیم. به کمک زوایای محاطی و ظلّی داریم:



$$\hat{M}_1=\frac{\overset{\frown}{MC}}{2},\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{MC}}{2}\Rightarrow \hat{M}_1=\hat{B}$$
$$\hat{M}_2=\frac{\overset{\frown}{MD}}{2},A=\frac{\overset{\frown}{MD}}{2}$$
$$\Rightarrow \hat{M}_2=\hat{A}\ ,\ \hat{M}_1=\hat{M}_2$$
$$\Rightarrow \hat{A}=\hat{B}\Rightarrow AD\parallel BC$$

(عکس قضیهٔ خطوط موازی و مورب)

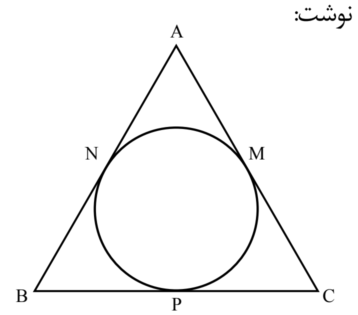
۸. مماس مشترک‌های داخلی دو دوایره به مراکز O و O' مطابق شکل در نقطهٔ M یکدیگر را قطع کرده‌اند. حال اگر از M به O و O' وصل کنیم، چون شعاع بر مماس عمود است، داریم:



$$OD=OB=R\ ,\ O'A=O'C=R$$

بنابراین O از MB و MD به یک فاصله است و در نتیجه روی نیم‌ساز زاویهٔ DMB قرار دارد. به همین ترتیب، O' هم روی نیم‌ساز زاویهٔ AMC واقع است. پس OM و $O'M$ نیم‌سازهای دو زاویهٔ متقابل به رأس AMC و DMB هستند و در یک راستا قرار دارند. یعنی OO' از M (نقطهٔ برخورد AB و CD) می‌گذرد.

۹. با توجه به برابری مماس‌های مرسوم از یک نقطه بر دایره، می‌توان نوشت:



$$AM=AN,\ CM=CP,\ BN=BP$$
$$\Rightarrow AM+AN=2P-(CM+CP+BP+BN)=2P-(2CP+2BP)$$
$$\Rightarrow 2AM=2P-2(CP+BP)$$
$$\Rightarrow 2AM=2P-2BC$$
$$\Rightarrow AM=P-BC=P-a$$

۱۰. با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BDEC}-\overset{\frown}{BC}}{2}=\frac{\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{EC}-\overset{\frown}{BC}}{2}=70^\circ$$
$$\Rightarrow \overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{EC}-\overset{\frown}{BC}=140^\circ\ (I)$$
$$\hat{F}=\frac{\overset{\frown}{DBCE}-\overset{\frown}{DE}}{2}=\frac{\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CE}-\overset{\frown}{DE}}{2}=50^\circ$$
$$\Rightarrow \overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CE}-\overset{\frown}{DE}=100^\circ\ (II)$$

و از جمع روابط (I) و (II) خواهیم داشت:

$$2\overset{\frown}{BD}+2\overset{\frown}{EC}=240^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{CE}=120^\circ$$
$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{CE}}{2}=\frac{120^\circ}{2}=60^\circ$$

حل مسائل جبر و احتمال

۱.

$$n=1\Rightarrow 5^3-3\times 8^3=17q\ (q=-83)$$
$$\text{فرض}: n=k\Rightarrow 5^{2k+1}-3\times 8^{k+2}=17q'$$
$$\text{حکم}: n=k+1\Rightarrow 5^{2k+3}-3\times 8^{k+3}=17q''$$

طرفین فرض را در 5^2 ضرب می‌کنیم:

$$5^{2k+3}-75\times 8^{k+2}=25\times 17q'$$
$$\Rightarrow 5^{2k+3}-(17+8)\times 3\times 8^{k+2}=25\times 17q'$$
$$\Rightarrow 5^{2k+3}-3\times 8^{k+3}=17\times 8^{k+2}\times 3+25\times 17q'=17(\underbrace{8^{k+2}\times 3+25q'}_{q''})$$

۲. اثبات (برهان خلف): فرض می‌کنیم $2\sqrt{5}+3\sqrt{7}$ عددی گویا باشد:

$$2\sqrt{5}+3\sqrt{7}=\frac{m}{n},\ m,n\in Z,n\neq 0$$
$$\Rightarrow 3\sqrt{7}=\frac{m}{n}-2\sqrt{5}$$
$$\Rightarrow (3\sqrt{7})^2=(\frac{m}{n}-2\sqrt{5})^2$$
$$63=\frac{m^2}{n^2}+20-\frac{4m}{n}\sqrt{5}$$
$$\Rightarrow \frac{4m}{n}\sqrt{5}=\frac{m^2}{n^2}-43$$
$$\Rightarrow \sqrt{5}=\frac{\frac{m^2-43n^2}{n^2}}{\frac{4m}{n}}$$
$$\Rightarrow \sqrt{5}=\frac{m^2-43n^2}{4mn}=\frac{m'}{n'},m',n'\in Z$$
$$\Rightarrow \sqrt{5}\in Q\ \text{(تناقض)}$$

۳.

$$a^۵ - a^۴b + b^۵ - ab^۴ \geq ۰$$
$$\Leftrightarrow a^۴(a-b) - b^۴(a-b) \geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (a-b)(a^۴ - b^۴) \geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^۲(a+b)(a^۲+b^۲) \geq ۰$$

که با توجه به مثبت‌بودن a و b درستی نابرابری آخر واضح است.

۴.

$$m = x,\ n = x+۱$$
$$\Rightarrow m^۲ + n^۲ + m^۲n^۲$$
$$= x^۲ + (x+۱)^۲ + x^۲(x+۱)^۲$$
$$= x^۴ + ۲x^۳ + ۳x^۲ + ۲x + ۱ = (x^۲+x+۱)^۲$$

۵. با توجه به اصل ضرب، ۳×۳=۹ نوع خودرو از نظر رنگ و مدل داریم. پس لااقل به اندازهٔ $\left[\frac{۳۳-۱}{۹}\right]+۱ = ۴$ خودرو از یک رنگ و یک مدل داریم.

۶. اگر همهٔ اعداد یک سطر یا ستون یا قطر ۱ باشند، مجموع آن‌ها مساوی ۱۰ و اگر همه ۱- باشند، مجموع آن‌ها ۱۰- خواهد بود. پس مجموع عددهای سطرها، ستون‌ها و قطرها یکی از اعداد مجموعهٔ $\{-۱۰, -۹, ..., ۹, ۱۰\}$ است و در نتیجه ۲۱ حالت متفاوت دارند. اما ده سطر، ده ستون و ده قطر، یعنی ۲۲ عدد در مجموع داریم. پس طبق «اصل لانهٔ کبوتر»، لااقل دوتا از این مجموع‌ها باید برابر باشند و پاسخ سؤال منفی است.

۷.

$$(A \cup B) \subseteq A \cap B'$$
$$\Rightarrow B \cap (A \cup B) \subseteq B \cap (A \cap B')$$
$$\Rightarrow B \subseteq (\underbrace{B \cap B'}_{\varnothing}) \cap A \Rightarrow B \subseteq \varnothing$$
$$\Rightarrow B = \varnothing$$

پس $P(B)$ یک عضو دارد و $P(P(B))$ دو عضو و $P(P(P(B)))$، $۲^۲=۴$ عضو دارد.

۸.

$$X \cap [(B' \cap C') \cup (B \cup C)] = A$$
$$\Rightarrow X \cap [(B \cup C)' \cup (B \cup C)] = A$$
$$\Rightarrow X \cap U = A \Rightarrow X = A$$

۹.

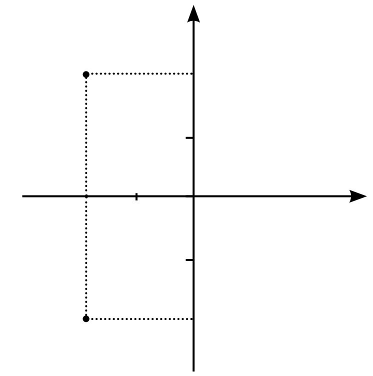
الف) $A \cup (B - A) = A \cup (B \cap A')$
$$= (A \cup B) \cap (\underbrace{A \cup A'}_{U}) = A \cup B = B$$

ب) $B = B \cap (A \cup B) = B \cap (A \cup C)$
$$= (B \cap A) \cup (B \cap C)$$
$$= (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$= (A \cup B) \cap C = C \cap (A \cup C) = C$$

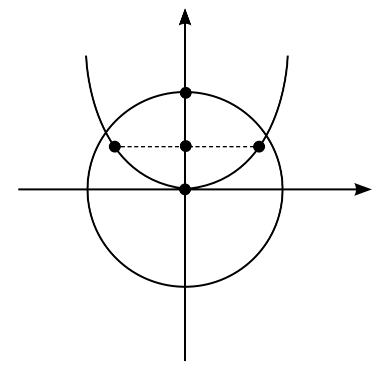
ج) $B \subseteq A \Rightarrow A \cup B = A$
$$\Rightarrow B' \cup (A \cup B) = B' \cup A$$
$$\Rightarrow (\underbrace{B' \cup B}_{U}) \cup A = B' \cup A$$
$$\Rightarrow B' \cup A = U$$

۱۰.

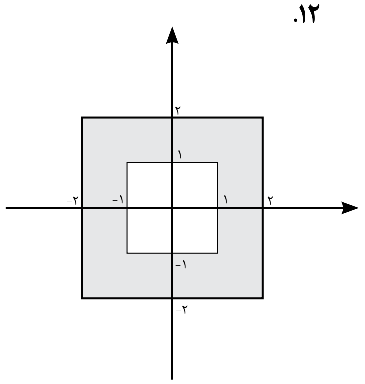
$$A : x^۲ + ۴ = ۲^۳ \Rightarrow x^۲ = ۴, x = \pm ۲$$
$$\Rightarrow A = \{-۲, ۲\}$$
$$B : \{-۲, -۱, ۰\},\ C = [-۲, ۲]$$
$$B \times A = \{(-۲,-۲), (-۲,۲), (-۱,-۲), (-۱,۲), (۰,-۲), (۰,۲)\}$$
$$A \times C = \{(-۲,\alpha), (۲,\beta) \mid -۲ \leq \alpha, \beta \leq ۲\}$$
$$\Rightarrow (B \times A) \cap (A \times C) = \{(-۲,-۲), (-۲,۲)\}$$



۱۱. فقط پنج نقطهٔ با مختصات صحیح که در شکل نشان داده شده‌اند، نمودار رابطه با مشخص می‌کنند.



۱۲.



$$A = [-۱, ۱]$$
$$B = [-۲, ۲]$$

۱۳.

$$xRx : x + x - x^۲ \leq ۱ \Leftrightarrow x^۲ - ۲x + ۱ \geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (x-۱)^۲ \geq ۰$$

خاصیت بازتابی وجود دارد.

$$xRy \Leftrightarrow yRx : x + y - xy \leq ۱$$
$$\Rightarrow y + x - yx \leq ۱$$

خاصیت تقارنی وجود دارد.

$$xRy, yRz \Rightarrow xRz$$
$$\begin{cases} x + y - xy \leq ۱ \\ y + z - yz \leq ۱ \end{cases} \Rightarrow x + z - xz \leq ۱$$
$$\begin{cases} x(۱-y) + y - ۱ \leq ۰ \\ y(۱-z) + z - ۱ \leq ۰ \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} (۱-y)(x-۱) \leq ۰ \\ (۱-z)(y-۱) \leq ۰ \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} (y-۱)(x-۱) \geq ۰ \\ (y-۱)(z-۱) \geq ۰ \end{cases}$$
$$\Rightarrow (y-۱)^۲(x-۱)(z-۱) \geq ۰$$
$$\Rightarrow (x-۱)(z-۱) \geq ۰ \Rightarrow xz - x - z + ۱ \geq ۰$$
$$\Rightarrow x + z - xz \leq ۱ \Rightarrow$$

خاصیت تعدّی وجود دارد

$\Rightarrow$ R هم ارزی است.

حل مسائل حسابان

۱.

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d)$$
$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{۲}(-۶ + (n-۱)۶) = ۳n(n-۲)$$
$$۲۴۰ < ۳n^۲ - ۶n < ۱۰۸۰$$
$$\Rightarrow ۸۰ < n^۲ - ۲n < ۳۶۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} n^۲ - ۲n - ۸۰ > ۰ \\ n^۲ - ۲n - ۳۶۰ < ۰ \end{cases}$$
$$\begin{cases} (n-۱۰)(n+۸) > ۰ \Rightarrow n > ۱۰ \text{ یا } n < -۸ \\ (n+۱۸)(n-۲۰) < ۰ \Rightarrow -۱۸ < n < ۲۰ \end{cases}$$
$$\Rightarrow ۱۰ < n < ۲۰ \Rightarrow n = ۱۱ \text{ یا } ۱۲ \text{ یا } ... \text{ یا } ۱۹$$

۲.

$$(x-۲)(x+۲)(x^۲+۴) = ۰$$
$$x^۴ - ۱۶ = ۰ \Rightarrow x^۴ = ۱۶$$
$$R(x) = x(۱۶)^۲ + ۳(۱۶)^۲ + x(۱۶) + x + ۱$$
$$= ۲۷۳x + ۷۶۹ \Rightarrow a = ۲۷۳, b = ۷۶۹$$
$$a + b = ۱۰۴۲$$

۳.

$$T_{k+۱} = \binom{۹}{k}(x^{\frac{۱}{۲}})^{۹-k}(\frac{۱}{۲}x^{-۱})^k$$
$$\Rightarrow \frac{۹-k}{۲} - k = ۰ \Rightarrow k = ۳$$

جملهٔ مستقل از x: $\binom{۹}{k} \times (\frac{۱}{۲})^۳$

جملهٔ دوم مستقل از x است.

بسط دارای ۱۰ جمله و مجموع ضرایب به ازای $x = ۱$ به‌دست می‌آید؛ یعنی: $(\frac{۳}{۲})^۹$.

۴. راه‌اول: چون α و β ریشه‌های معادله هستند، پس در معادله صدق می‌کنند. بنابراین: $\beta^۲ + ۳\beta + ۱ = ۰$ و با ضرب در β نتیجه می‌شود:

$$\beta^۳ + ۳\beta^۲ + \beta = ۰ \Rightarrow \beta^۳ + ۳\beta^۲ = -\beta$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{\beta^۳ + ۳\beta^۲} = \frac{۱}{-\beta}, \frac{۱}{\alpha^۳ + ۳\alpha^۲} = -\frac{۱}{\alpha}$$

$$S_{\text{جدید}} = x'_۱ + x'_۲ = -(\frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta}) = -\frac{S}{P} = \frac{۳}{۱} = ۳$$
$$P_{\text{جدید}} = x'_۱x'_۲ = \frac{-۱}{\alpha} \cdot \frac{-۱}{\beta} = +\frac{۱}{P} = \frac{۱}{۱}$$
$$\Rightarrow x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$$

راه دوم: ریشه‌های معادلهٔ جدید عکس قرینهٔ معادله قبل است. یعنی جای a و c عوض و ضریب x قرینه می‌شود: $x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$.

۵. اگر نسبت دو آلیاژ جدید $\frac{x}{y}$ باشد، از فلز اول $\frac{x}{۳} + \frac{۲}{۵}y$ و از فلز دوم $\frac{۲x}{۳} + \frac{۳y}{۵}$ در آن موجود است. لذا:

$$\frac{\frac{x}{۳} + \frac{۲y}{۵}}{۱۷} = \frac{\frac{۲x}{۳} + \frac{۳}{۵}y}{۲۷} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{۹}{۳۵}$$

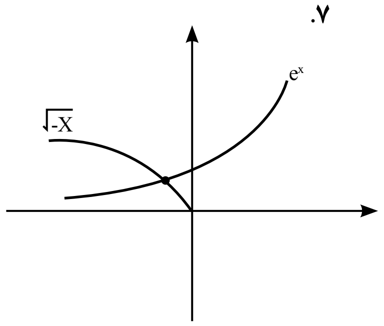
یعنی از آلیاژ اول ۹ و از آلیاژ دوم ۳۵ قسمت موجود باشد.

۶.

الف) $x^۲ + ۲x = a \Rightarrow \frac{۱}{a} - \frac{۱}{a+۱} = \frac{۱}{۱۲}$
$$\Rightarrow ۱۲a + ۱۲ - ۱۲a = a^۲ + a$$
$$a^۲ + a - ۱۲ = ۰ \quad (a-۳)(a+۴) = ۰$$
$$\begin{cases} a = ۳ \Rightarrow x^۲ + ۲x - ۳ = ۰ \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۳ \end{cases} \\ a = -۴ \Rightarrow x^۲ + ۲x + ۴ = ۰ \Rightarrow \Delta < ۰ \quad \text{فاقد ریشه} \end{cases}$$

ب) طرف راست کمتر از ۴ و طرف چپ بیشتر یا مساوی ۴ $\Leftarrow$ معادله ریشه ندارد

۷.



$$\sqrt{-x}e^{-x} = ۱ \Rightarrow \sqrt{-x} = \frac{۱}{e^{-x}} \Rightarrow \sqrt{-x} = e^x$$

یک ریشهٔ منفی دارد.

۸.

$$|y-۲| + |y+۱| \geq ۳ \Rightarrow$$

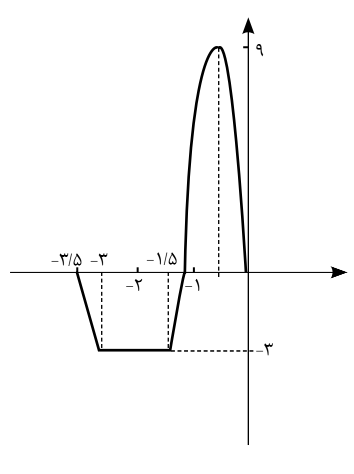
تمام نقاط دارای این خاصیت‌اند!
زیرا با توجه به نامساوی مثلثی داریم:

$$|y-۲| + |y+۱|$$
$$= |۲-y| + |y+۱| \geq |\underbrace{۲-y+y+۱}_{۳}|$$
$$\Rightarrow |y-۲| + |y+۱| \geq ۳$$

۹.

$$f(x) = x + \sqrt{۴x - x^۲} \Rightarrow ۴x - x^۲ \geq ۰$$
$$\Rightarrow ۰ \leq x \leq ۴ \Rightarrow D_f = [۰, ۴], y \geq x$$
$$y - x = \sqrt{۴x - x^۲}$$
$$\Rightarrow y^۲ + x^۲ - ۲xy + x^۲ - ۴x = ۰$$
$$\Rightarrow ۲x^۲ - (۲y + ۴)x + y^۲ = ۰$$
$$\Delta \geq ۰ \Rightarrow ۴y^۲ + ۱۶ + ۱۶y - ۸y^۲ \geq ۰$$
$$-۴y^۲ + ۱۶y + ۱۶ \geq ۰ \Rightarrow y^۲ - ۴y - ۴ \leq ۰$$
$$y_{۱,۲} = \frac{۴ \pm \sqrt{۱۶ + ۱۶}}{۲} = ۲ \pm ۲\sqrt{۲}$$
$$\xrightarrow[\text{شرط اولیه } y \geq x]{\text{با توجه به}} ۰ \leq y \leq ۲ + ۲\sqrt{۲}$$

۱۰. الف) ابتدا $f(۲x)$ را رسم می‌کنیم. یعنی تابع f را با نسبت $\frac{۱}{۲}$ منقبض و بعد تابع را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم و در انتها خروجی را (۳-) برابر می‌کنیم. حاصل چنین است:



ب)
$$D_f : -۶ \leq x \leq ۲ \Rightarrow -۶ \leq ۲x + ۲ \leq ۲$$
$$\Rightarrow -۸ \leq ۲x \leq ۰ \Rightarrow -۴ \leq x \leq ۰$$
$$R_f : -۳ \leq y \leq ۱ \Rightarrow -۳ \leq f(۲x + ۲) \leq ۱$$
$$\Rightarrow -۳ \leq -۳f(۲x + ۲) \geq ۹$$

۱۱.

$D_g = R$

$D_f = (-\infty,-۱]\cup[۰,+\infty)$

$gof = g(f(x)) = (\sqrt{x^۲+x})^۲ = x^۲+x$

$D_{gof} = \{x \mid x\in D_f , f(x)\in D_g\}$

$\Rightarrow (x\le -۱$ یا $x\ge ۰),\ \sqrt{x^۲+x}\in R$

$\Rightarrow D_{gof} = (-\infty,-۱]\cup[۰,+\infty)$

دقت: اگر دامنه را با تشکیل ضابطه محاسبه می‌کنیم، باید قبل از ساده‌سازی دامنه را بیابیم؛ یعنی زیر رادیکال $\sqrt{x^۲+x}$ را نامنفی قرار دهیم.

۱۲.

$$gof(x) = x^۲ + \frac{۱}{x^۲} = (x-\frac{۱}{x})^۲ + ۲$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = f^۲(x) - ۲ \Rightarrow g(x) = x^۲ - ۲$$

۱۳.

$f: f(-x)+f(x)=۰$ فرد است

$$\log(۵x+\sqrt{۱+ax^۲})+\log(-۵x+\sqrt{۱+ax^۲}) = ۰$$

$$\Rightarrow \log(۱+ax^۲-۲۵x^۲) = ۰$$

$$\Rightarrow ۱+ax^۲-۲۵x^۲ = ۱ \Rightarrow a = ۲۵$$

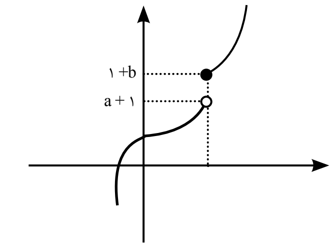
$$y = |x+۲۵|+|x+b|$$

$$\xrightarrow{\text{زوج}} f(-۲۵) = f(۲۵)$$

$$\Rightarrow ۰+|b-۲۵| = ۵۰+|b+۲۵| \Rightarrow b = -۲۵$$

۱۴. بدیهی است اگر $a<۰$ باشد، تابع یک‌به‌یک نخواهد بود و این با رسم شکل به خوبی مشخص می‌شود. هم‌چنین، باید $a+۱$ پایین‌تر از $۱+b$ واقع شود و یا مساوی آن باشد.

$$a+۱ \le b+۱ \Rightarrow ۰ < a \le b$$



$$\text{ب)}\ f(x) = \begin{cases} x^۳+۱ : x<۱ \Rightarrow x^۳<۱ \\ \qquad \Rightarrow x^۳+۱<۲ \\ x^۲+۱ : x\ge ۱ \Rightarrow x^۲\ge ۱ \\ \qquad \Rightarrow x^۲+۱\ge ۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^۳+۱ \Rightarrow x = \sqrt[۳]{y-۱} \\ y = x^۲+۱ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۱-y} \end{cases}$$

با توجه به دامنهٔ غیرقابل قبول است.

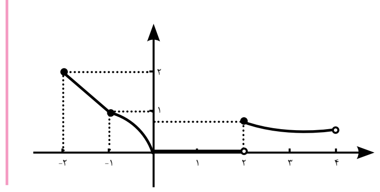
$$\Rightarrow f^{-۱}(x) = \begin{cases} \sqrt[۳]{x-۱} : x<۲ \\ \sqrt{۱-x} : x\ge ۲ \end{cases}$$

۱۵.

$$-۲<x<-۱ \Rightarrow -۱<\frac{x}{۲}<-\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{x}{۲}\right] = -۱ \Rightarrow x\left[\frac{x}{۲}\right] = -x$$

$$۰<x<۲ \Rightarrow ۰<\frac{x}{۲}<۱ \Rightarrow \left[\frac{x}{۲}\right] = ۰$$



الف)

$(-۲,۰] \leftarrow$ اکیداً نزولی

$(-۲,۲) \leftarrow$ نزولی

$[۲,۴) \leftarrow$ اکیداً نزولی

$[۰,۲) \leftarrow$ هم صعودی، هم نزولی (تابع ثابت)

ب) برد: $[۰,۲)$

ج) خیر زیرا یک به یک نیست.

د) نه زوج، نه فرد

هـ) $(۰,۴)$

۱۶.

$$f(-۱۹/۸۴) = f(-۲۰+۰/۱۶) = f(۰/۱۶)$$

$$= \frac{۱}{\sqrt{۰/۱۶}} = \frac{۱}{۰/۴} = ۲/۵$$

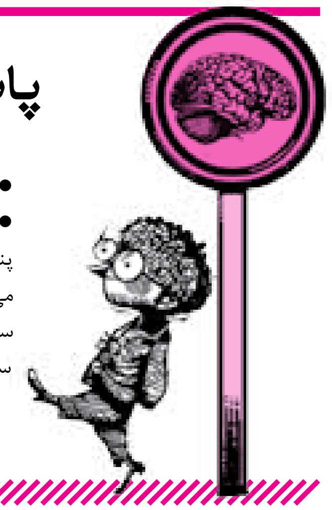
چون $T=۵$ دورهٔ تناوب است، پس هر مضربی از T در محاسبهٔ f بی‌تأثیر خواهد بود.

۱۷.

$$f(x) = \underbrace{\boxed{\frac{f(x)+f(-x)}{۲}}}_{\text{تابع زوج}} + \underbrace{\boxed{\frac{f(x)+f(-x)}{۲}}}_{\text{تابع فرد}}$$

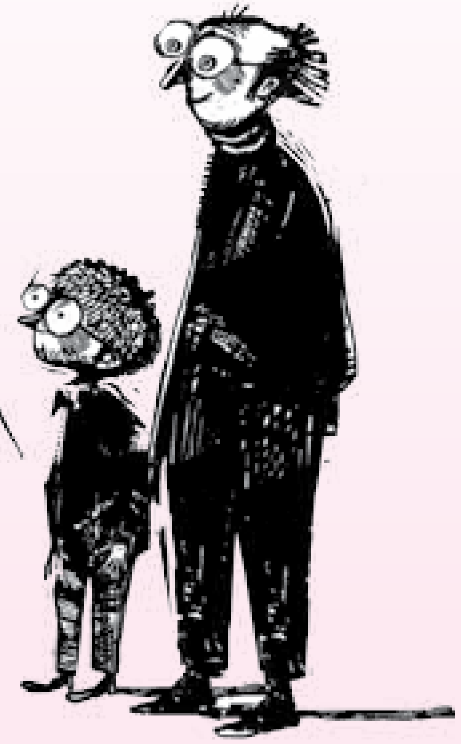
$$\sqrt[۳]{x} = \underbrace{\frac{\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{-x}}{۲}}_{\text{تابع زوج}} + \underbrace{\frac{\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{-x}}{۲}}_{\text{تابع فرد}}$$

پاسخ معماهای ایستگاه اندیشهٔ همین شماره



- **معمای اول:** هنوز دارید فکر می‌کنید؟! این‌که کاری ندارد! وقتی ۵=۱ باشد، خُب ۱=۵ است!!
- **معمای دوم:** یک پاسخ اشتباه که خیلی‌ها می‌دهند، ساعت شش است، اما جواب درست ساعت پنج است. در ساعت پنج نخستین زنگ ساعت کاوه با نخستین زنگ ساعت شهریار هم‌زمان می‌شود. دومین زنگ ساعت شهریار وقتی زده می‌شود که سومین زنگ ساعت کاوه زده شده است. سومین زنگ ساعت شهریار وقتی زده می‌شود که پنجمین زنگ ساعت کاوه زده شده است. پس ساعت شهریار دو زنگ دیگر هم بعد از آن می‌زند.

پاسخ‌های ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی برهان شمارهٔ ۷۵



ایستگاه اول: جدول مشاهیر ایرانی

پاسخ جدول **محمدبن حسن کرجی**، ریاضی‌دان بنام ایرانی بود. شرحی از زندگی او را به قلم زنده‌یاد استاد **پرویز شهریاری** در همین شماره آورده‌ایم.

ایستگاه سوم: یک مسئله و سه جواب

گفتیم که یک فروشندهٔ ابزارهای دست دوم و کار کرده، وسیلهٔ کار کرده‌ای را به قیمت ۱۰ هزار تومان به فروشندهٔ دیگری فروخت. کمی بعد فروشندهٔ دوم چون نیازی به آن نداشت، آن را به فروشندهٔ اول به قیمت هشت هزار تومان دوباره فروخت. سپس فروشندهٔ دیگری آمد و آن را از همان فروشنده به قیمت نه هزار تومان خرید. فروشندهٔ اول چه‌قدر سود برد؟

سه پاسخ متفاوت به این سؤال را مطرح کردیم که اولی می‌گفت سه هزار تومان، دومی می‌گفت هزار تومان و سومی می‌گفت دو هزار تومان! نظرات متفاوتی را از

شما دریافت کردیم، اما شاید پاسخ دقیق چنین باشد: ما نمی‌توانیم بگوییم سود فروشندهٔ اول چه‌قدر بوده، مگر آن‌که بدانیم ابتدا برای خرید آن چه‌قدر پول داده است! سود عبارت است از اختلاف بین مقداری که از فروش یک محصول دریافت می‌شود و مقداری که بابت آن پرداخت شده است. فروشندهٔ ما ۱۱ هزار تومان به‌دست آورده است: او نخست ۱۰ هزار تومان به‌دست آورده، سپس هشت هزار تومان داده، پس دو هزار تومان می‌ماند، آنگاه نه هزار تومان دیگر گرفته که در مجموع می‌شود یازده هزار تومان. ولی معلوم نیست ابتدا برای این جنس چه‌قدر پول داده است تا بتوان سود او را از مجموع این معاملات به‌دست آورد. پس هیچ‌یک از پاسخ‌ها درست نیست!

ایستگاه چهارم:
چند معمای خواندنی

معمای اول: هفت ایستگاه!

معمای دوم: از یکی از آن‌ها می‌پرسیم: «آیا کاوه دروغ‌گوست؟»

پاسخ به این سؤال در جدول زیر و در چهار حالت تجزیه و تحلیل شده است: سؤال‌شونده ممکن است کاوه باشد و راست‌گو، یا کاوه باشد و دروغ‌گو. شهریار باشد و راست‌گو یا شهریار باشد و دروغ‌گو (توجه داشته باشید که اگر کاوه راست‌گو باشد، شهریار دروغ‌گوست و برعکس).

سؤال‌شونده	شهریار ـ دروغ‌گو	شهریار ـ راستگو	کاوه ـ دروغ‌گو	کاوه ـ راستگو
پاسخ	بله	بله	نه	نه

پس در پاسخ به این سؤال، شهریار همواره پاسخ بله و کاوه همواره پاسخ نه می‌دهد و از آنجا به راحتی می‌توان کاوه را شناسایی کرد.

معمای سوم: چون برادر دوم گفته است که من کاوه هستم و کارت سیاه به همراه دارم، پس او نمی‌توانسته راست‌گو باشد (زیرا راست‌گو کارت سیاه به همراه ندارد). یعنی او دروغ‌گوست و لذا جملهٔ او نادرست است. پس او کاوه نیست یا این‌که کارت سیاه به همراه ندارد. ولی چون او دروغ گفته است، پس کارت سیاه دارد، لذا باید کاوه نباشد، پس او شهریار است.

سخن آخر: یک پارادوکس

سؤال: آیا پاسخ این سؤال نه است؟

منظور از این سؤال، همان سؤال است! اگر بگوییم آری، پس پاسخ سؤال نه است و در نتیجه نباید بگوییم آری!! اگر هم بگوییم نه، پس یعنی باید بگوییم آری!!

مربع‌های جادویی

دنیایی از رمز و راز اعداد

صدیقه بابایی
کارشناس ارشد ریاضی محض

چکیده

در این مقاله سعی شده است به‌طور خلاصه مربع‌های جادویی تشریع شوند. ابتدا تاریخچه‌ای دربارهٔ خواستگاه مربع‌های جادویی بیان شـده است. پس از تعریف اصلی مربـع جادویی و ثابـت جادویی، به معرفـی چند مربع جادویی شناخته شـده می‌پردازیم. در میان این مربع‌ها بیشتر مطالب به مربع وفقی و ویژگی‌های آن اختصاص داده شـده اسـت. آن‌چه اهمیت دارد آن است که بتوان به‌راحتی مربع وفقی تولید کرد. در ادامه، روشی کلی برای تولیـد مربع‌های وفقی مرتبهٔ فـرد و دو روش مجزا برای سـاخت مربع‌های وفقی مرتبهٔ ۷ آورده شـده است. در انتها ارتباط مربع وفقی با «فنگ‌شویی»، نظم بخشیدن به همه‌چیز، به‌طور خلاصه آمده است، زیرا جنبه‌های ریاضی آن در مربع وفقی بررسی شده است.

کلیدواژه‌ها: مربـع جادویی، مربع وفقی، سـودوکو، مربع لوشو، مربع لاتین، بازی ریاضی

مقدمه

بشـر از دیربـاز مجذوب نیروی شـگفت‌آور اعـداد بوده، به‌طوری که یکی از سـرگرمی‌های او بازی با اعداد بوده است. از میان اعداد، اعداد طبیعی بیشتر از سایر اعداد مورد بررسی قرار گرفته‌اند و سرگرمی‌های متفاوتی را تولید کرده‌اند. به مرور زمان اعداد از حالت بازی خارج شدند و جنبهٔ سحر و جادو به خود گرفتند. عده‌ای عوام فریب برای پیشـبرد اهداف خود از اعداد اسـتفاده می‌کردند. حتی برخی از شعرها و نویسندگان نامی جهان نیز در آثار بی‌نظیر خود از اعداد سـود جسته‌اند. از جمله **گوته**، شـاعر بزرگ آلمانی، در شاهکار فناناپذیر خود «فاوست»، صحنه‌ای را به ساختن اکسیر جوانی با فرمول مربع وفقی اختصاص داده اسـت. قدر مسـلم او با مربع‌های وفقی آشنایی داشت، زیرا بارها از تابلوی «افسردگی» نقاش بزرگ آلمانی، **آلبرشـت دیورر**[۱]، سخن گفته و به نکات علمی آن اشـاره کرده است.

با گذشت زمان و با پیشرفت‌هایی که در علم ریاضی صـورت گرفت، این بازی‌ها شـکلی کاملاً علمی به خود گرفتند و حتی در برخـی موارد به عنوان یک رشـتهٔ مجزا به آن پرداخته می‌شـود. در این زمینه می‌توان به مربع‌های لاتین اشاره کرد که با استفاده از مبحث ترکیبیات، می‌توان مطلبی را به صورت رمز درآورد.

در میـان انواع بازی‌ها با اعداد، مربع‌های جادویی همواره مقـام بالاتری داشـته‌اند. از آغـاز پیدایش هندسـه و جبر، ویژگی‌های ریاضی مربع‌های جادویی مورد توجه ریاضی‌دانان بوده اسـت. مربع‌های جادویی مربع‌هایی هستند که از اعداد طبیعی پر می‌شوند و هر یک ویژگی خاص خود را دارند که در این مقاله به معرفی تعدادی از آن‌ها را معرفی می‌کنیم. طبق اسناد و مدارک موجود، می‌باید کشور چین را زادگاه مربع‌های جادویی جهان دانسـت. زیـرا قدیمی‌ترین منبعی که از آن‌ها نام برده، کتابی اسـت چینی که حدود پنج هزار سال پیش از میلاد مسیح نوشته شده است. مربعی که در این کتاب مطرح شـده، مربعی ۹ خانه‌ای اسـت که در آن اعداد فرد به صورت دایره‌های سفید و اعداد زوج به صورت دایره‌های مشکی ترسیم شده‌اند. با جای‌گذاری اعداد زوج و فرد به جای رنگ‌های مورد نظر، خواص جالبی در مربع دیده می‌شود. اما قدیمی‌ترین مربع جادوی اروپا در تابلوی افسـردگی دیورر نقش بسته است که سال ترسیم آن ۱۵۱۴ میلادی است.

شکل ۱. مربع جادویی آلبرشت دیورر

مربـع جادویی آلبرشـت دیورر، حکاکی شـده در «ملن کولیا۱»[۲] به نظر اولین مربع جادویی در اروپاسـت که بسـیار شـبیه مربع جادویی **یانگ هوی**[۳] اسـت که ۲۵ سال قبل از دیورر در چین ساخته شده است. عدد جادویی این مربع برابر ۳۴ است. به این معنا حاصل جمع کلیه اعداد واقع بر سطرها و ستون‌ها و قطرها و همچنین مربع چهارتایی وسط و مربع‌های چهارتایی چهارگوشه همگی برابر ۳۴ هستند.

۱۶	۳	۲	۱۳
۵	۱۰	۱۱	۸
۹	۶	**۷**	**۱۲**
۴	۱۵	**۱۴**	**۱**

۱۶	۳	۲	۱۳
۵	۱۰	۱۱	۸
۹	**۶**	۷	۱۲
۴	**۱۵**	۱۴	۱

۱۶	**۳**	۲	۱۳
۵	**۱۰**	۱۱	۸
۹	۶	۷	۱۲
۴	۱۵	۱۴	۱

۱۶	۳	۲	۱۳
۵	**۱۰**	**۱۱**	۸
۹	**۶**	**۷**	۱۲
۴	۱۵	۱۴	۱

شکل ۲. مربع جادویی آلبرشت دیورر

از نکات قابل توجه این مربع دو عدد وسطی در سطر است که تاریخ کنده‌کاری را نشان می‌دهد و برابر ۱۵۱۴ است.

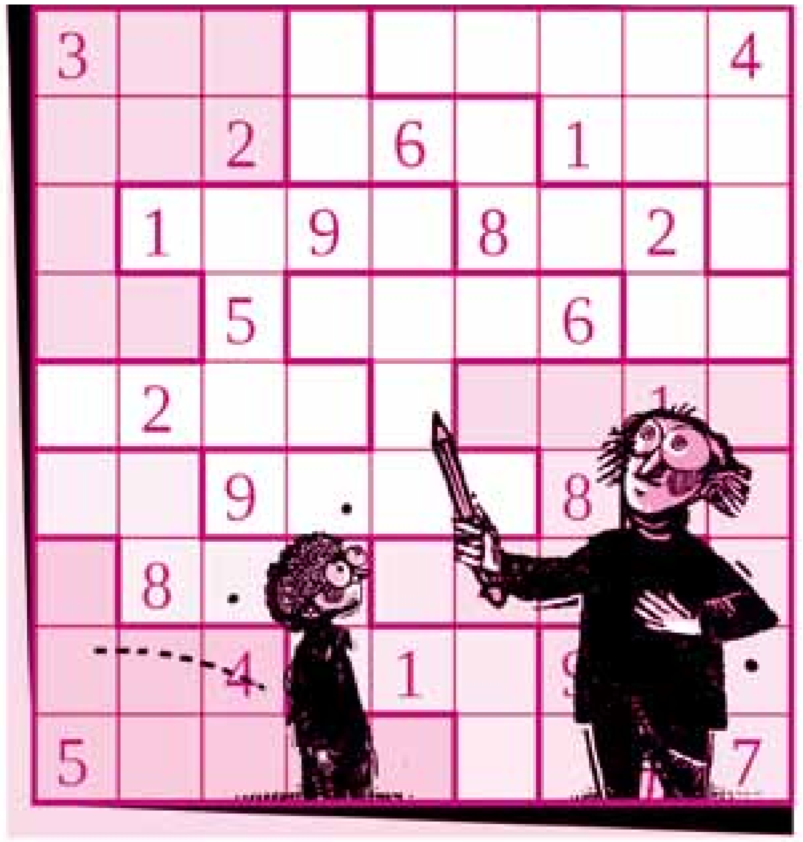
■ مربع جادویی چیست؟

مربع جادویی مرتبهٔ n، جدولی $n\times n$ است که خانه‌های آن را بـا اعداد (معمولاً ۱ تا n^2) پر می‌کنند؛ به‌صورتی که ویژگی خاصی داشته باشد. برای مثال، مجموع همهٔ سطرها یا ستون‌ها با هم برابر باشـند یا در هر سطر یا هر ستون از هر عدد به‌کار رفته، تنها یکی وجود داشـته باشد یا اعدادی که در کنار هم نوشته می‌شوند، برهم بخش‌پذیر نباشند و...

مربع‌های جادویی طی قرن‌ها برای انسان جذاب بوده‌اند و بیش از ۴۰۰۰ سال است که در فرهنگ‌های مختلف از جمله هند، اروپا و... دیده شده‌اند. این مربع بیشتر به صورت حکاکی شده روی سنگ یا فلز بوده‌اند و اکثر دانشمندان دوران باستان خصلت‌های سحرآمیزی را به آن‌ها نسبت می‌دادند.

■ تاریخچهٔ مربع‌های جادویی

مربع‌های جادویی پایه‌های نجومی و پیشگویی داشته‌اند و از آن‌هـا برای اندازه‌گیری طول عمر یا جلوگیری از بیماری استفاده می‌کردند. مثلاً یک مورد از آن‌ها در هندوستان، مربعی ۳×۳ به نام «کوبراکولام»[۴] است که آن را روی زمین به شکل ۳ می‌کشند و عدد جادویی آن ۷۲ است.



۲۳	۲۸	۲۱
۲۲	۲۴	۲۶
۲۷	۲۰	۲۵

شکل ۳. مربع جادویی کوبراکولام

یکی از ویژگی‌های این مربع جادویی آن اسـت که همان مربع جادویی درجهٔ ۳ شکل با عدد جادویی ۱۵ است که به هر یک از خانه‌های آن ۱۹ واحد اضافه شده است.

۴	۹	۲
۳	۵	۷
۸	۱	۶

شکل ۴. مربع جادویی با عدد جادویی ۱۵

یک مربع جادویی بسیار شناخته شدهٔ دیگر در هندوستان در معبـد «پارش راناس جین»[۵] وجـود دارد. عدد جادویی آن

برابر ۳۴ اســت و در قرن ۱۰ میــلادی بر دیوار معبد حکاکی شده است.

۷	۱۲	۱	۱۴
۲	۱۳	۸	۱۱
۱۶	۳	۱۰	۵
۹	۶	۱۵	۴

شکل ۵. مربع جادویی معبد پارش راناس جین

مربع‌های جادویی توســط اعراب بــه مغرب زمین انتقال یافتند. طی دوران رنسانس ـ دوران تحقیق وسیع ـ ریاضی‌دانی به نام **کارنلینوس آگریپــا** روی مربعات جادویی که رتبه‌های آن‌ها بالاتر از ۲ بود، تحقیق کرد. مربع با رتبهٔ ۱ بی‌معناســت و می‌تــوان ثابت کرد که مربع جادویی با مرتبهٔ ۲ وجود ندارد. آگریپا آن دسته از مربعات جادویی را تشکیل داد که رتبه‌های آن‌ها از ۳ تا ۹ بود و به آن‌ها مفهوم نجومی داد. آن‌ها را نمادی برای هفت جرم آســمانی (زحل، مشــتری، مریخ، خورشید، زهره، عطارد و ماه) که تا آن زمان شناخته شده بودند، در نظر گرفت. اشکال مربعات روی چوب و موارد دیگر حک شدند و در خدمت سحر و جادو قرار گرفتند. حتی امروزه نیز در بخشی از مشرق زمین به‌خاطر این مقاصد از مربع‌های جادویی استفاده می‌شــود. در قرن‌های ۱۶ و ۱۷ مردم بر این باور بودند که اگر مربع جادویی بر لوح نقره‌ای حک شــود، آن‌ها را از آفت و بلا محفوظ می‌دارد.

ریاضی‌دانان ایرانی نیز با مربع‌های جادویی در ابتدای قرن ۱۷ آشنا شدند؛ یعنی زمانی که مسلمانان با فرهنگ هندی و آسیای جنوبی آشنا شدند و ریاضیات هندی و بعضی چیزهای دیگر ترکیبیات و بخشی از نجوم را آموختند. البته این نظریه هــم وجود دارد که آن‌ها بــا مربع‌های جادویی از طریق چین آشــنا شــدند. اولین مربع جادویی از درجه‌های ۵ و ۶ در یک دایره‌المعارف بغدادی در حدود ســال ۹۸۳ میلادی توســط **رسائل اینکوان الصفا**[۶] آمده است و مربع‌های جادویی ساده‌تر قبل از آن توسط سایر ریاضی‌دانان ایرانی شناخته شده بودند. **امام محمد غزالی**، فیلسوف و دانشمند بزرگ ایرانی نیز در این باب رساله‌ای به زبان فارسی دارد.

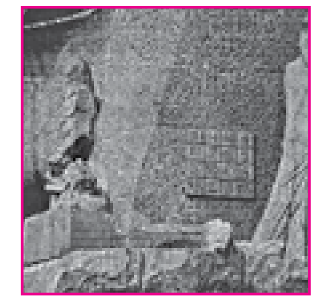
از دیگر مربع‌های جادویی شناخته شده می‌توان به مربع **جوزف ســابیراچز** اشاره کرد که مربعی از مرتبهٔ ۴ است، و در کلیسای «ساگرادا فامیلیا»[۷] کنده‌کاری شده و عدد جادویی آن ۳۳ است. در حقیقت بسیار شبیه مربع جادویی دیورر است، اما مقدار ۵ تا از خانه‌ها را یکی کاهش داده است.

۱	۱۴	۱۴	۴
۱۱	۷	۶	۹
۸	۱۰	۱۰	۵
۱۳	۲	۳	۱۵

شکل ۶. مربع سابیراچز

۱	۱۴	۱۵	۴
۱۲	۷	۶	۹
۸	۱۱	۱۰	۶
۱۳	۲	۳	۱۶

شکل ۷. مربع دیورر



شکل ۸. مربع جادویی سابیراچز در کلیسای فامیلیا

در ادامــه به معرفی چند مربع جادویی شــناخته شــده می‌پردازیم.

سودوکو

جدول اعدادی است که امروزه یکی از سرگرمی‌های رایج در کشورهای مختلف جهان به‌شمار می‌آید. سودوکو، مخفف عبارت ژاپنی «**سوجی وادوکوشین نی گ اگیرو**» است به معنی «ارقام باید تنها باشــند». یک سودوکوی مرتبهٔ n مربعی n×n است که با اعداد ۱ تا n به گونه‌ای پر می‌شود که در هر سطر و هر ســتون آن از اعداد ۱ تا n فقط یک بار استفاده می‌شود. در شــکل‌های ۹ و ۱۰ دو سودوکوی ۳ در ۳ و ۴ در ۴ نمایش داده شده‌اند.

۱	۳	۲	۴
۲	۴	۳	۱
۳	۱	۴	۲
۴	۲	۱	۳

شکل ۹. سودوکوی مرتبهٔ ۴

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

شکل ۱۰. سودوکوی مرتبهٔ ۳

هر چند این بازی برای اولین بار در یک مجلهٔ پازل آمریکایی در سال ۱۹۷۹ انتشــار یافت، ولی انتشار آن به‌طور مستمر و پی‌گیر برای نخســتین مرتبه به ژاپن در ۱۹۸۶ برمی‌گردد. از ســال ۲۰۰۵ این سرگرمی به محبوبیت جهانی دست یافت و نخستین مسابقهٔ ملی آن در سال ۲۰۰۸ در فیلادلفیای آمریکا برگزار شد. در ایران برای اولین بار «روزنامهٔ همشهری» در سال ۱۳۸۵ به چاپ سودوکو به صورت روزانه دست زد.

از این مربع جادویی در بســیاری از مجلات ســرگرمی و هوش استفاده می‌شود. نوع متداول سودوکو یک جدول ۹ در ۹ است که کل جدول هم به ۹ جدول کوچک‌تر ۳ در ۳ تقسیم شده است. در این جدول چند عدد به‌طور پیش فرض قرار داده شده‌اند که باید باقی اعداد را با رعایت سه قانون زیر یافت:

۵	۳			۷				
۶			۱	۹	۵			
	۹	۸					۶	
۸				۶				۳
۴			۸		۳			۱
۷				۲				۶
	۶					۲	۸	
			۴	۱	۹			۵
				۸			۷	۹

↓ **پس از حل**

۵	۳	۴	۶	۷	۸	۹	۱	۲
۶	۷	۲	۱	۹	۵	۳	۴	۸
۱	۹	۸	۳	۴	۲	۵	۶	۷
۸	۲	۶	۷	۵	۱	۴	۹	۳
۴	۵	۹	۸	۶	۳	۷	۲	۱
۷	۱	۳	۹	۲	۴	۸	۵	۶
۹	۶	۱	۵	۳	۷	۲	۸	۴
۲	۸	۷	۴	۱	۹	۶	۳	۵
۳	۴	۵	۲	۸	۶	۱	۷	۹

شکل ۱۱. سودوکوی ۹ در ۹ و حل آن

مربع وفقی

مربع وفقی مرتبهٔ n جدولی n×n است که خانه‌های آن با اعداد ۱ تا n^2 به ترتیبی پر می‌شوند که مجموع اعداد هر ردیف افقی و یا هر ستون عمودی و یا هر قطر آن، عددی ثابت شوند.

۴	۱۵	۶	۹
۵	۱۰	۳	۱۶
۱۱	۸	۳	۲
۱۴	۱	۱۲	۷

شکل ۱۲. مربع وفقی مرتبهٔ ۴

۱۵ ↑	۱۵ ↑	۱۵ ↑	
۲	۷	۶	→ ۱۵
۹	۵	۱	→ ۱۵
۴	۳	۸	→ ۱۵
↙ ۱۵		↘ ۱۵	

شکل ۱۳. مربع وفقی مرتبهٔ ۳

عــدد ثابت که بــه آن «ثابــت جادویی» می‌گوینــد، از فرمول $\frac{n(n^{۲}+۱)}{۲}$ به دست می‌آید. برای مثال، ثابت جادویی برای مربع‌های مرتبهٔ ۳، ۴، ۵ و ۶ به ترتیب برابر است با ۱۵، ۳۴، ۶۵ و ۱۱۱.

مربع وفقی مرتبهٔ ۳

یک نکتهٔ جالب در مربع وفقی مرتبهٔ ۳ وجود دارد: عددی کــه در مربع وســط جــدول ۳ در ۳ قرار دارد، عدد ۵ اســت. می‌دانیــم که ثابت جادویی در مربــع وفقی مرتبهٔ ۳ عدد ۱۵ اســت. اعداد موجود در دو قطر اصلی و فرعی و سطرهای اول و سوم یک مربع وفقی ۳ در ۳ را با حروف، مانند جدول شکل ۱۴ مشخص می‌کنیم.

a	b	c
	d	
e	f	g

شکل ۱۴

واضح است که: $\begin{cases} a+d+g=۱۵ \\ c+d+e=۱۵ \\ b+d+f=۱۵ \end{cases}$ از جمله این سه رابطه خواهیم داشــت: $a+b+c+۳d+e+f+g=۴۵$. از طرف دیگر داریم: $a+b+c=e+f+g=۱۵$. بنابراین: $۳d=۱۵$ و لذا $d=۵$.

نکتهٔ جالب دیگر در مورد مربع وفقی مرتبهٔ ۳ آن اســت کــه a، c، e و g زوج‌اند. اگر a عددی فرد باشــد، چون داریم: $a+d+g=۱۵$، لــذا: $a+g=۱۰$ یا $g=۱۰-a$. بنابراین g نیز عددی فرد است. بین اعداد ۱ تا ۹ بجز ۵ که وسط جدول قرار دارد، چهار عدد فرد ۱، ۷، ۳ و ۹ وجود دارند. لذا مکان‌های a و g یــا با ۱ و ۹ پر می‌شــوند یا با اعــداد ۳ و ۷. فرض کنیم a و g با ۳ و ۷ پر شــوند. بدون آن‌که به روند اثبات خللی وارد شــود، فرض کنیم $g=۷$ و $a=۳$ باشند. بنابراین شکل ۱۵ را خواهیم داشت.

۳		
	۵	
		۷

شکل ۱۵

اعداد ۱ و ۹ باید در ۶ مربع باقی‌مانده قرار گیرند. در سطر و ستونی که عدد ۳ قرار دارد، نمی‌توانیم از عدد ۹ استفاده کنیم؛ زیــرا: ۱۲=۹+۳. در نتیجه برای تولید عــدد ۱۵ باید از عدد ۳ دوبار استفاده کنیم که این با طریقهٔ ترسیم مربع وفقی تناقض

دارد. بنابرایـــن عدد ۹ در یکی از دو مربع رنگی باید قرار گیرد. در این صورت در سطر یا ستونی که ۷ روی آن قرار دارد، عدد ۹ نیز قرار می‌گیرد که جمع این دو عدد ۱۶ خواهد شـــد که با ثابت جادویی تناقض پیدا می‌کنـــد. پس g و a اعداد ۳ و ۷ نیستند. حال فرض کنیم g و a اعداد ۹ و ۱ باشند. باز هم بدون از دست رفتن کلیت مسئله فرض می‌کنیم: $g = ۹$ و $a = ۱$. مانند حالت قبل ۳ نمی‌تواند در سطر و ستونی که عدد ۹ جزئی از آن اســت، قرار بگیرد. پس ۳ در دو مربع رنگی که در شکل ۱۶ مشخص شده‌اند، قرار خواهد گرفت.

۱		
	۵	
		۹

شکل ۱۶

در این صورت اگر در سطر یا ستونی که یکی از سلول‌هایش رنگ شده، عدد ۳ را قرار دهیم، برای تولید عدد ۱۵ عدد سوم باید ۷ باشد. بنابراین ۷ درسطر یا ستونی قرار خواهد گرفت که ۹ یکی از عناصر آن اســت که حاصل این دو عدد ۱۶ خواهد بود که باز تناقض ایجاد می‌شود. از این بحث نتیجه می‌شود که اعداد g و a فرد نیستند، پس زوج‌اند. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که c و e نیز زوج‌اند.

بـــا اثبات این نکتهٔ ظریف می‌تـــوان همهٔ مربع‌های وفقی مرتبهٔ ۳ را نوشت. هشت مربع وفقی مرتبهٔ ۳ وجود دارند که

۴	۳	۸
۹	۵	۱
۲	۷	۶

۴	۹	۲
۳	۵	۷
۸	۱	۶

۸	۱	۶
۳	۵	۷
۴	۹	۲

۸	۳	۴
۱	۵	۹
۶	۷	۲

۲	۷	۶
۹	۵	۱
۴	۳	۸

۲	۹	۴
۷	۵	۳
۶	۱	۸

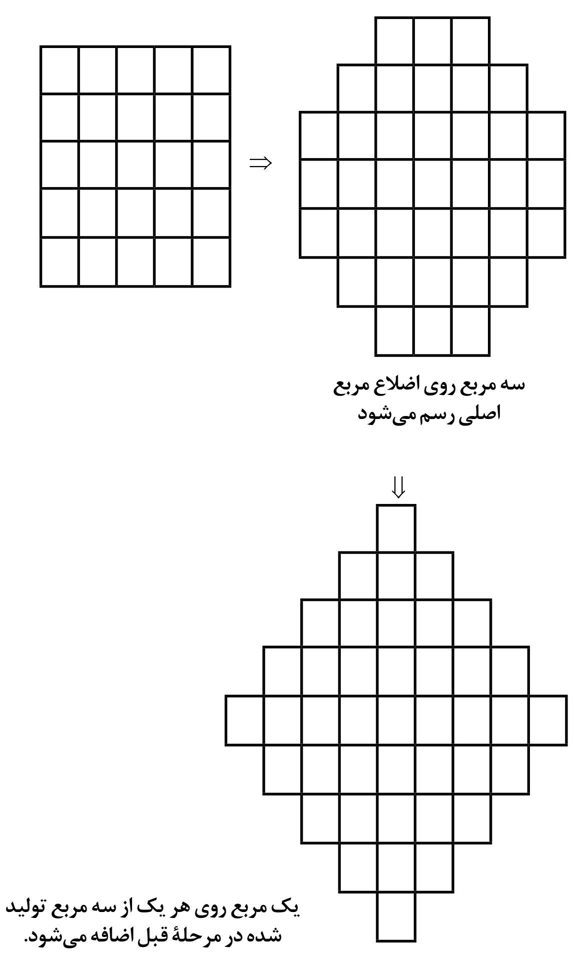
۶	۱	۸
۷	۵	۳
۲	۹	۴

۶	۷	۲
۱	۵	۹
۸	۳	۴

شکل ۱۷. مربع وفقی مرتبهٔ ۳

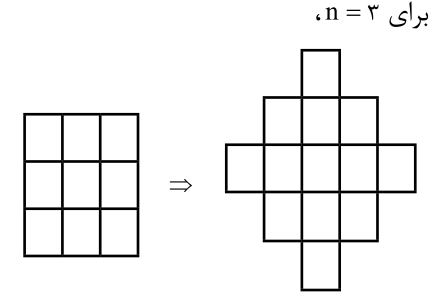
■ روشی کلی برای ساختن مربع‌های وفقی درجهٔ فرد

فرض کنیم n عددی فرد باشد. ابتدا یک جدول n×n رسم می‌کنیم. سپس روی ضلع مربع و از مربع میانی هر ضلع شروع می‌کنیم و به اندازهٔ $n - ۲$، مربع جدید روی مربع‌های هر ضلع، مربع اضافه می‌کنیم و این کار را ادامه می‌دهیم تا آخرین ضلع فقط یک مربع تولید کند. برای آن‌که بهتر متوجه شوید، فرض کنیم: $n = ۵$. مراحل زیر طریقهٔ ســاخت شــکل مورد نظر را نشان می‌دهد.



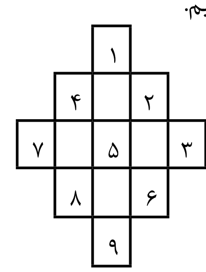
شکل ۱۸. روش ساختن مربع وفقی ۵×

یا برای $n = ۳$،



شکل ۱۹. روش ساختن مربع وفقی ۳×۳

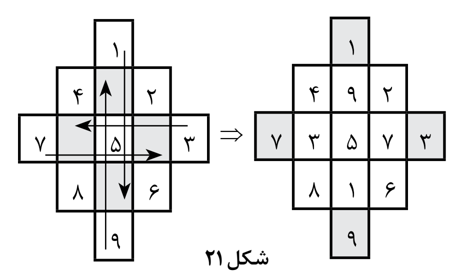
برای $n = ۳$ می‌خواهیم مربع را رسم کنیم. اعداد ۱ تا ۹ را از سمت راست به چپ، یک در میان در قطر اصلی و قطرهای موازی با قطر اصلی مربع‌ها به صورتی که در شکل نشان داده شده است، می‌نویسیم.



شکل ۲۰

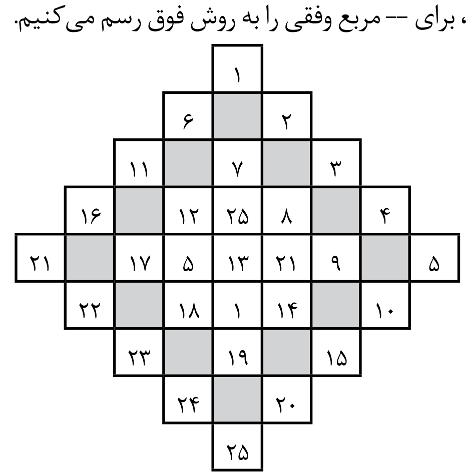
سپس اعدادی را که در خارج مربع n×n اصلی قرار دارند، روی سطر یا ستونی که قرار گرفته‌اند به تعداد مرتبهٔ مربع وفقی (در این مثال ۳) با ســه انتقال زیر مانند شــکل ۲۱، به داخل مربع n×n انتقال می‌دهیم.

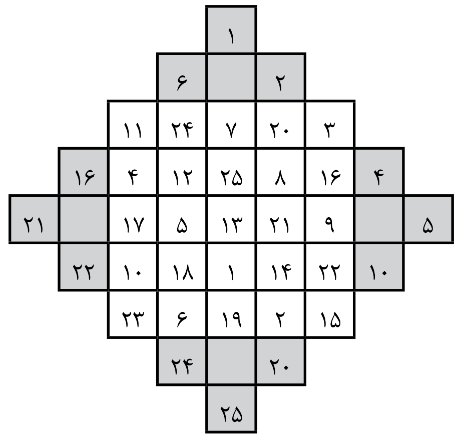
۱. انتقال سطری به اندازهٔ n خانه به چپ یا راست.
۲. انتقال ستونی به اندازهٔ n خانه به بالا یا پایین.
۳. ترکیب انتقال ۱ یا ۲ در صورتی که عددی با انتقال‌های ۱ یا ۲ به تنهایی وارد مربع نشود.



شکل ۲۱

در پایان مربع‌های اضافی را پاک می‌کنیم. به عنوان مثالی دیگر، برای -- مربع وفقی را به روش فوق رسم می‌کنیم.





شکل ۲۱

عدد جادویی مربع وفقی مرتبهٔ ۵ عدد ۶۵ است که در مربع بالا می‌توان به راحتی آن را بررسی کرد.

ملاحظه می‌شود که در مرکز این مربع عدد ۱۳ قرار دارد.

اکنون این ســؤال مطرح می‌شــود که: آیا در مربع‌های وفقی مرتبــهٔ ۵ مانند مربع‌های وفقی مرتبــهٔ ۳، عدد مرکزی ثابت اســت؟ با روش حرکت اسب شطرنج به راحتی به مربع وفقی شکل ۲۲ می‌رسیم که عدد مرکزی آن ۱۳ نیست.

۱۱	۳	۲۰	۷	۲۴
۱۷	۹	۲۱	۱۳	۵
۲۳	۱۵	۲	۱۹	۶
۴	۱۶	۸	۲۵	۱۲
۱۰	۲۲	۱۴	۱	۱۸

شکل ۲۲

■ روش هندی رسم مربع‌های وفقی مرتبهٔ ۷

علاوه بر روشی کلی که برای ترسیم مربع‌های وفقی مرتبهٔ فرد ذکر شد، از دو روش دیگر نیز می‌توان برای تولید مربع‌های وفقی مرتبهٔ ۷ اســتفاده کرد. در ایـــن روش، اعداد ۱ تا ۴۹ را به هفت دستهٔ هفت‌تایی تقسیم می‌کنیم. اولین عدد از اولین دســته (عدد ۱) را زیر خانهٔ مرکزی مربع، یعنی سطر پنجم و ســتون چارم، قرار می‌دهیم. اعداد هم دستهٔ آن به ترتیب در خانه‌های موازی با قطر اصلی مربع جای می‌گیرند. اعدادی که بیرون مربع واقع می‌شوند، با انتقال‌های سه‌گانه‌ای که در بالا شــرح دادیم، درون مربع جای می‌گیرند. قطر اصلی را با رنگ قرمز و قطر فرعی را با رنگ سبز نشان داده‌ایم.

						4
5						
	6					
		7				
			1			
				2		
					3	

شکل ۲۳

پس از اتمام اعداد یک دســته، اولین عدد دستهٔ بعد را دو خانه پایین‌تر از آخرین عدد نوشــته شده، قرار می‌دهیم. این خانه به موازات قطر فرعی درست در گوشهٔ پایین سمت چپ اولین عدد دستهٔ قبل قرار دارد. اعداد بعدی دسته نیز همانند دستهٔ قبل جای می‌گیرند.

				10		
5						
	6					12
13		7				
	14		1			
		8		2		
			9		3	

شکل ۲۴

با ادامهٔ این روند، مربع کامل می‌شود.

22	47	16	41	10	35	4
5	23	48	17	42	11	29
30	6	24	49	18	36	12
13	31	7	25	43	43	37
38	14	32	1	26	26	20
21	39	8	33	2	2	45
46	15	40	9	34	34	28

شکل ۲۵

روش سیامی رسم مربع‌های وفقی مرتبهٔ ۷

در این روش که به روش سیامی مشهور است، ابتدا اعداد را در دسته‌های ۷تایی دسته‌بندی می‌کنیم. عدد ۱ را در مرکز ردیف اول (سطر اول و ستون چهارم) قرار می‌دهیم. اعداد هم‌دستهٔ ۱ به ترتیب به موازات قطر فرعی مربع جای می‌گیرند. اگر عددی خارج از مربع قرار گیرد، با انتقال‌های ســه‌گانه که در مربعات مرتبهٔ ۵ توضیح داده شــد، وارد مربع می‌شود. پس از اتمام اعداد یک دســته، اولین عدد دستهٔ بعدی درست زیر آخرین عدد نوشته شده قرار می‌گیرد. با ادامهٔ این روند می‌توان مربع را کامل کرد.

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

شکل ۲۶

و این هم یک مربع وفقی مرتبهٔ ۲۵

شکل ۲۷ (صفحه مقابل)

مربع لاتین

مربع لاتین عبارت است از یک ماتریس n×n با درایه‌های ۱، ۲، ۳، ... و n به‌طوری که در هر سطر و در هر ستون درایه‌های تکراری نباشــند. برای هر n داده شــده می‌تــوان مربع لاتین ســاخت. از مربع‌های لاتین مرتبهٔ ۴ و ۵ که در زیر آمده است می‌توان به راحتی ایدهٔ کلی ساخت مربع لاتین را فراگرفت.

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

شکل ۲۸. مربع‌های لاتین مرتبهٔ ۴ و ۵

از ویژگی‌های این مربع می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

✓ ماتریسی متقارن است.

✓ همهٔ عناصر قطر فرعی برابر n است.

✓ همهٔ عناصر قطرهای موازی با قطر فرعی نیز یکسان هستند و از ۱ شروع و به $n-1$ ختم می‌شوند.

✓ اگر n زوج باشــد، در قطر اصلی فقط اعداد فرد ۱، ۳، ۵، ... و $n-1$ وجود دارند. برای $n \geq 6$ این اعداد تکرار می‌شوند.

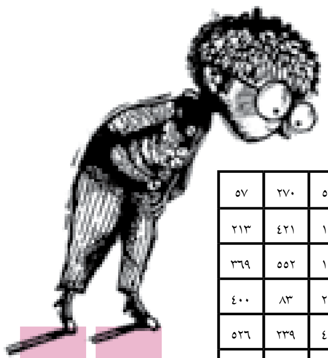
1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	1
3	4	5	6	1	2
4	5	6	1	2	3
5	6	1	2	3	4
6	1	2	3	4	5

شکل ۲۹. مربع لاتین مرتبهٔ ۶

✓ اگر n فرد باشد، در قطر اصلی ابتدا اعداد فرد ۱، ۳، ۵، ... و n و سپس اعداد زوج ۲، ۴، ... و $n-1$ نوشته می‌شوند. این نکته کاملاً در مربع لاتین مرتبهٔ ۵ که در بالا آمده، مشهود است.

✓ در هر مربع لاتین، تعداد از درایه‌های واقع در گوشهٔ چپ بالا و راست پایین (که پررنگ نوشته شده‌اند) کلید رمزگشایی آن هستند. فقط با داشتن این چند عدد، مربع به صورت منحصر به فرد نوشته خواهد شد. تعداد این اعداد مشخص شده برای $n = 2k$، معادل k^2 و برای $n = 2k+1$، معادل $k^2 + k$ است.

یکــی از کاربردهای مربع‌های لاتین در مبحث رمزنگاری اســت. درایه‌های یک مربع لاتین ممکن است اطلاعاتی باشد که می‌خواهیم برای کســی بفرســتیم. یک مربع لاتین $n \times n$ از n^2 اطلاع تشکیل می‌شــود. با توجه به آخرین ویژگی بیان شده در مربع لاتین، کافی است $\frac{1}{4}$ از اطلاعات را منتقل کنیم. شخصی که اطلاعات را دریافت کرده است، به صورت منحصر به فردی ســایر اعداد را در مربع می‌نویسد و به اطلاعات مورد نظر می‌رسد.



57	270	578	161	499	405	113	321	509	217	148	456	44	352	565	616	179	387	100	283	339	547	235	443	1
213	421	109	317	505	556	144	452	40	373	279	612	200	383	91	22	335	543	226	439	495	53	261	599	157
369	552	140	473	31	87	300	608	191	379	435	18	326	539	247	153	486	74	257	595	521	209	417	105	313
400	83	291	604	187	243	426	14	347	535	586	174	482	70	253	309	517	205	413	121	27	365	573	131	469
526	239	447	10	343	274	582	170	478	61	117	305	513	221	409	465	48	356	569	127	183	391	79	287	625
518	201	414	122	310	361	574	132	470	28	84	292	605	188	396	427	15	348	531	244	175	483	66	254	587
49	357	570	128	461	392	80	288	621	184	240	448	6	344	527	583	166	479	62	275	301	514	222	410	118
180	388	96	284	617	548	231	444	2	340	266	579	162	500	58	114	322	510	218	401	457	45	353	561	149
331	544	227	440	23	54	262	600	158	491	422	110	318	501	214	145	453	36	374	557	613	196	384	92	280
487	75	258	591	154	210	418	101	314	522	553	136	474	32	370	296	609	192	380	88	19	327	540	248	431
454	37	375	558	141	197	385	93	276	614	545	228	436	24	332	263	596	159	492	55	106	319	502	215	423
610	193	376	89	297	328	536	249	432	20	71	259	592	155	488	419	102	315	523	206	137	475	33	366	554
11	349	532	245	428	484	67	255	588	171	202	415	123	306	519	575	133	466	29	362	293	601	189	397	85
167	480	63	271	584	515	223	406	119	302	358	566	129	462	50	76	289	622	185	393	449	7	345	528	236
323	506	219	402	115	41	354	562	150	458	389	97	285	618	176	232	445	3	336	549	580	163	496	59	267
290	623	181	394	77	8	341	529	237	450	476	64	272	585	168	224	407	120	303	511	567	130	463	46	359
441	4	337	550	233	164	497	60	268	576	507	220	403	111	324	355	563	146	459	42	98	281	619	177	390
597	160	493	51	264	320	503	211	424	107	38	371	559	142	455	381	94	277	615	198	229	437	25	333	541
103	311	524	207	420	471	34	367	555	138	194	377	90	298	606	537	250	433	16	329	260	593	151	489	72
134	467	30	363	571	602	190	398	81	294	350	533	241	429	12	68	251	589	172	485	411	124	307	520	203
246	434	17	330	538	594	152	490	73	256	312	525	208	416	104	35	368	551	139	472	378	86	299	607	195
252	590	173	481	69	125	308	516	204	412	468	26	364	572	135	186	399	82	295	603	534	242	430	13	346
408	116	304	512	225	126	464	47	360	568	624	182	395	87	286	342	530	238	446	9	65	273	571	169	477
564	147	460	43	351	282	620	178	386	99	5	338	546	234	442	498	56	269	557	165	216	404	112	325	508
95	278	611	199	382	438	21	334	542	230	156	494	52	265	598	504	212	425	108	316	372	560	143	451	39

شکل ۲۷. مربع وفقی مرتبهٔ ۲۵

مربع لوشو[8]

همان مربع وفقی ۳ در ۳ اســت که احتمالاً باستانی‌ترین روش اســتفاده از «فنگ‌شویی» است. طبق افسانه‌های چینی، امپراتور «یو»، آن را بر لاک یک لاک‌پشت غول‌پیکر پیدا کرد! می‌توان چیدمان کل خانه یا ساختمان، اتاق، دفتر کار، میز و هر چیزی را براســاس مربع لوشــو و با در نظر گرفتن جدول عنصرها، جهت‌ها، رنگ‌ها و نمادها در فنگ‌شــویی قرار داد تا

بهترین نتیجه را بدهد. در این صورت، هر بخش از خانه به یک حوزهٔ زندگی انسان (مثلاً روابط، سلامتی، حرفه، ...) مربوط می‌شود.

۴	۹	۲
۳	۵	۷
۸	۱	۶

شکل ۲۹

فنگ‌شویی ترکیب واژهٔ چینی «فنگ»[9] به معنای «باد» است و «شویی»[10] به معنای «آب». این دو واژه با هم تداعیگر مفهوم شکل‌دهنده و حرکت آفرین باد و آب است و نیز بیانگر تضاد این دو در عین همراهی موزونشان. فنگ‌شویی تعالیم «تائو» است برای زیستن در عین هماهنگی با طبیعت و محیط اطراف، چینی‌ها قرن‌هاست که به خرد کاربردی نهفته در این تعالیم دل داده‌اند و در چیدمان خانه‌هایشان، انتخاب دفتر کارشان و... آن را به‌کار بسته‌اند تا زندگی را موزون‌تر سازند. هدف فنگ‌شویی برگرداندن نظم، ترتیب و توازن به تمام زمینه‌های زندگی است. از مربع لوشو به چند روش متفاوت می‌توان استفاده کرد: در روش رایج داریم: ۱= دورنمای کاری/شغلی، منزلت شما از دیدگاه خودتان؛ ۲=ارتباطات از هر نوع به خصوص ارتباط عاطفی، ازدواج، شراکت و همراهی طولانی مدت؛ ۳= روابط خانوادگی، گذشته، نیاکان شما؛ ۴= خوش‌بختی و سعادت؛ ۵= سلامتی جسمی؛ ۶= خدایان و ارواح، آن‌هایی که قادر به کمک به شما هستند؛ ۷= کودکان، باروری، خلقت، علائق و اوقات فراغت و هدیه‌های جالب؛ ۸= دانش و تحصیلات، نوآوری و خلاقیت؛ ۹= شهرت، نام نیک و احترام برای شما.

چگونگی چیدمان این اعداد در مربع نشان‌دهندهٔ برتری هر یک از اعداد بیان شده بر سایر اعداد است. هر محیطی را اعم از خانه، دفتر کار، کلاس، میز، خودرو و...، به ۹ قسمت تقسیم می‌کنند. این ۹ قسمت به همین صورتی است که در شکل بالا دیدید. عناصری را که در بالا ذکر شد در این مربع به ترتیب خاصی پخش می‌کنند.

از بین پنج عنصر آب، فلز، خاک، چوب و آتش، چوب و آتش هر کدام یک خانه دارند. چون این و عنصر پرقدرت هستند، برای حفظ تعادل هر کدام یک خانه دارند. آب شمال است (پایین جدول، مربع شمارهٔ ۱) و مظهر کوه‌های پربرف. آتش جنوب است (خانهٔ ۹). زمین عنصر مادر است و نیز از تمام عناصر ضعیف‌تر است، به همین خاطر ۳ خانه متعلق به زمین است (خانه‌های ۲، ۵ ۸). عناصر چوب و فلز از نظر قدرت متوسط هستند و هر کدام دو خانه دارند. خانه‌های ۳ و ۴ (شرق و جنوب شرقی) متعلق به چوب و خانه‌های ۶ و ۷ (غرب و شمال‌غربی) متعلق به فلز هستند. به ترتیب شمال‌غربی (خانهٔ ۶) جای افراد کمک‌کننده است. شمال (خانهٔ ۱) جایگاه شغل و حرفه است. شمال‌شرقی (خانهٔ ۸) محل دانش و تحصیلات است. شرق (خانهٔ ۳) مربوط به نیاکان و خانواده است. مرکز که بسیار مهم است (خانهٔ ۵)، مربوط به سلامتی است. غرب (خانهٔ ۷) مربوط به هر چیزی است که فرد به‌وجود می‌آورد. به همین خاطر خانهٔ شمارهٔ ۷ را جایگاه خلاقیت و فرزندان می‌دانند. جنوب‌شرقی (خانهٔ ۴) مربوط به پول و مسائل مالی است. جنوب (خانهٔ ۹) جایگاه موفقیت و اعتبار فرد است. و در آخر، جنوب‌غربی (خانهٔ ۲) مربوط به روابط دوگانه است که می‌تواند رابطهٔ زناشویی یا شراکت باشد.

اگر به دلیلی خانه به شکل مربع نباشد (مشکل اکثر خانه‌ها)، قسمتی از مربع لوشوی ما حذف می‌شود. مثلاً در شکل ۳۰، خانه‌های شمارهٔ ۶ و ۱ حذف شده‌اند و خانهٔ شماره ۴ کمبود دارد که نشان می‌دهد افراد ساکن این خانه در شغل و حرفهٔ خود مشکل دارند. هم‌چنین در زندگی کسی را ندارند که به خوبی آن‌ها را حمایت کند و در نتیجه، اوضاع مالی چشم‌گیری هم ندارند.

وقتی یک خانه یا هر محلی به هر ترتیب قسمتی را کم یا زیاد دارد، باعث به‌وجود آمدن عدم تعادل در آن محیط می‌شود. ما باید از تکنیک‌هایی استفاده کنیم و عدم تعادل انرژی را برطرف کنیم. باید اجازه دهیم انرژی به شکل صحیحی جریان پیدا کند. برای این کار می‌توان از نور، صورت، گیاه زنده، رنگ و چرخهٔ عناصر استفاده کرد.

چون جنبه‌های ریاضی مربع لوشو بسیار کم است، از توضیح بیشتر دربارهٔ آن خودداری می‌کنیم.

منابع

1. Jhon Lee. Folts, Magic square. (La. Sall, Illinois: open course, 1976).

2. Eric W. Weisstein, Magic square at Math world

3. Magic square museum, The first "Second Life museum about magic square" Volcano (89, 35, 25)

4. W.S.Androws, Magic square and cubes. (New York: Dover, 1960), originally printed in 1917

۵. شوارتز، گئورگیا. راهنمای علمی و کاربردی فنگ‌شویی. ترجمهٔ ملیندا اسکندری. انتشارات ققنوس. ۱۳۸۸.

۶. لائو، کوآن. فنگ‌شویی برای امروز. ترجمهٔ محمد قراچه‌داغی. انتشارات آسیم. [بی‌تا].

7. www.wikipedia.com

پی‌نوشت

1. Albrecht Dürer
2. Melencolia J
3. Yang Hui
4. Kubera - kolam
5. Parshanath Jain
6. Rasa'il Inkwan al-safa
7. sagrada Familia
8. Lo Shu Square
9. feng
10. shui

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه چهارم: چند معمای خواندنی!

- این معما را حتماً بخوانید! و در این صورت قول می‌دهم که آن را برای خیلی‌ها تعریف می‌کنید!

با فرض درست بودن همهٔ تساوی‌ها، در سطر پنجم به جای علامت سؤال چه عددی باید قرار بگیرد؟

۱= ۵

۲= ۵۵

۳= ۵۵۵

۴= ۴۴۴۴

۵= ؟

جواب را در انتهای همین بخش ببینید.

- این یکی هم جالب است: **کاوه** و **شهریار** را که یادتان هست؛ دو برادر دوقلو را می‌گویم! آن‌ها هر کدام یک ساعت شماطه‌دار داشتند که هر دوی آن‌ها، سر هر ساعت به تعداد آن ساعت، زنگ می‌زدند، ولی ساعت کاوه سریع‌تر زنگ می‌زد! به این صورت که در مدت زمانی که ساعت کاوه سه زنگ می‌زند، ساعت شهریار فقط دو زنگ می‌زند. یک روز سر ساعت معینی، هر دو ساعت هم‌زمان شروع کردند به زنگ‌زدن. بعد از آن‌که زنگ‌زدن ساعت کاوه تمام شد، ساعت شهریار دو زنگ دیگر هم زد. در چه زمانی این اتفاق افتاد؟ ساعت چند بود؟

- باز هم دوقلوها و باز هم شناسایی آن‌ها! یک بار دیگر در تشخیص دوقلوها از یکدیگر دچار مشکل شدم! این بار یکی از برادرها گفت: «ما دوتایی به آن اتاق می‌رویم و در آن‌جا چند کارت قرمز و سیاه داریم. سپس یکی از ما یک کارت در جیبش می‌گذارد و بیرون می‌آید و جمله‌ای به تو می‌گوید. از روی جملهٔ او، تو باید تشخیص بدهی که او کیست.»

بعد یکی از دو برادر از اتاق خارج شد و روبه‌روی من ایستاد و گفت: «اگر من شهریار باشم، آنگاه کارت قرمز به همراه ندارم.»

او چه کسی بود؟ به‌یاد داشته باشید که هر کس که کارت قرمز به همراه داشته باشد، همواره راست می‌گوید و کسی که کارت سیاه داشته باشد، همواره دروغ می‌گوید.

نمادهای جبری هنگامی مورد استفاده قرار می‌گیرند که شما نمی‌دانید دربارهٔ چه چیزی باید صحبت کنید!

پاسخ معماهای ایستگاه اندیشهٔ همین شماره

- **معمای اول:** هنوز دارید فکر می‌کنید؟! این‌که کاری ندارد! وقتی ۵=۱ باشد، خُب ۱=۵ است!!
- **معمای دوم:** یک پاسخ اشتباه که خیلی‌ها می‌دهند، ساعت شش است، اما جواب درست ساعت پنج است. در ساعت پنج نخستین زنگ ساعت کاوه با نخستین زنگ ساعت شهریار هم‌زمان می‌شود. دومین زنگ ساعت شهریار وقتی زده می‌شود که سومین زنگ ساعت کاوه زده شده است. سومین زنگ ساعت شهریار وقتی زده می‌شود که پنجمین زنگ ساعت کاوه زده شده است. پس ساعت شهریار دو زنگ دیگر هم بعد از آن می‌زند.
- **معمای سوم:** گوینده اذعان می‌کند که او شهریاری که کارت قرمز به همراه دارد، نیست. جملهٔ او باید درست باشد، زیرا اگر او شهریار بود و کارت قرمز به همراه داشت، باید راست می‌گفت و نمی‌توانست بگوید شهریاری که کارت قرمز دارد، نیست. پس این درست است که او شهریاری همراه با کارت قرمز نیست. چون جملهٔ او درست است، پس او باید در حقیقت کارت قرمز به همراه داشته باشد. پس او کاوه‌ای است که کارت قرمز همراه دارد.