www.roshdmag.ir

دورهٔ بیست و سوم
شمارهٔ ۲ ■ زمستان ۱۳۹۲
۶۴ صفحه ■ ۸۰۰۰ ریال

ISSN: 1735-4951
وزارت‌آموزش‌وپرورش
سازمان‌پژوهش‌وبرنامه‌ریزی‌آموزشی
دفتر‌انتشارات و تکنولوژی‌آموزشی

رشد

۸۰

برهان ریاضی

برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

فصل‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی

- گراف‌های قطبی
- اصل لانه کبوتری گام‌به‌گام
- پای صحبت استاد دکتر مهدی بهزاد
- ویژگی‌های ریاضی ستاره‌های مرتبهٔ nاُم
- ایرانی‌ها در زمینه‌های متفاوت پیشرفت کرده‌اند

استاد ابوالقاسم قربانی
(۱۲۹۰-۱۳۸۰)

استاد ابوالقاسم قربانی در سال ۱۲۹۰ شمسی در یکی از محلات جنوب بازار تهران زاده شد. وی در شش سالگی تحصیل را در مکتبخانه آغاز کرد، ولی از آنجا که پدرش با تحصیل او مخالف بود، پس از سه سال تحصیل را رها کرد.

شش سال بعد، یعنی در سال ۱۳۰۵ به همت مادربزرگش برای ادامهٔ تحصیل به مدرسهٔ ابتدایی «مولوی» در خیابان «قنات‌آباد» رفت و در سال ۱۳۰۶ دورهٔ ابتدایی را به پایان رساند. سپس تحصیلات متوسطه را در «مدرسهٔ سن‌لویی» در خیابان لاله‌زار ادامه داد و در سال ۱۳۱۲ با رتبهٔ اول از آن مدرسه فارغ‌التحصیل شد. بلافاصله تدریس حساب سال اول متوسطه و هندسهٔ سال سوم متوسطه را در همان مدرسه به عهده گرفت.

وی هم‌زمان در دانش‌سرای عالی به تحصیل مشغول شد و در آنجا از درس‌های دکتر غلامحسین مصاحب، پروفسور تقی فاطمی و پروفسور هشترودی بهره گرفت. سرانجام از دانش‌سرای عالی لیسانس ریاضی دریافت کرد و در دانش‌سرای مقدماتی به تدریس ریاضیات مشغول شد. استاد از سال ۱۳۴۱ تا ۱۳۴۵ سرپرست دانشجویان ایرانی در سوئیس بود و در این سال‌ها به کمک منابع کتابخانه‌های اروپا، در زمینهٔ تاریخ ریاضیات به تحقیق مشغول بود. پس از بازگشت به ایران مدت ۱۲ سال به‌عنوان استاد «مدرسهٔ عالی دختران» (دانشگاه الزهرای فعلی) به تدریس پرداخت.

استاد ابوالقاسم قربانی در زمینهٔ تاریخ ریاضیات کارهای سترگی انجام داد که معروف‌ترین آن‌ها کتاب‌های «ریاضی‌دانان ایرانی، از خوارزمی تا ابن‌سینا»، «زندگی‌نامهٔ ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی»، «کاشانی‌نامه»، «بوزجانی‌نامه»، «نسوی‌نامه» و «بیرونی‌نامه» هستند.

به‌جز این‌ها، استاد ابوالقاسم قربانی در زمینهٔ تألیف کتاب‌های کمک درسی ریاضیات و نجوم نیز سابقهٔ طولانی دارد. ایشان این کتاب‌ها را با همکاری مرحوم استاد حسن صفاری تألیف کردند. شهرت کتاب‌های مزبور چنان بود که هنوز هم بسیاری از پیشکسوتان رشتهٔ ریاضی از آن‌ها به‌عنوان کتاب‌های «صفاری ــ قربانی» به نیکی یاد می‌کنند. استاد مقالات متعددی هم در مجلات علمی و ریاضی، مانند مجلات آشتی با ریاضی، آشنایی با ریاضی، سخن علمی و... به‌چاپ رساند.

زنده‌یاد ابوالقاسم قربانی در آذرماه ۱۳۸۰، در حالی‌که چند کار پژوهشی ناتمام را در دست انجام داشت، دارفانی را وداع گفت. یادش همواره گرامی باد.

منبع

www.daneshnameh.jazirehdanesh.com

بسم‌الله‌الرحمن‌الرحیم

رشد
وزارت آموزش‌وپرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

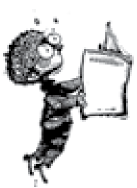
۸۰

برهان ریاضی

برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

فصل نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

وبگاه: www.roshdmag.ir **پیام‌نگار:** Borhanm@roshdmag.ir
پیام‌گیر نشریات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲ ـ ۰۲۱ **نشانی دفترمجله:** تهران، صندوق‌پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله: ۸۸۳۰۵۸۶۲ ـ ۰۲۱
تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ ـ ۰۲۱ ۷۷۳۳۶۶۵۵ ـ ۰۲۱
شمارگان: ۱۱۰۰۰ نسخه
چاپ: شرکت افست (سهامی عام)



مجلهٔ رشـد برهان متوسـطه۲، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:
● نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسـط و رفع مشکلات مباحـث کتاب‌هـای ریاضـی دورهٔ متوسـطه) ● طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ● طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه و...

● مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد اسـت. ● مقاله‌هـای دریافتی، بـاید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشـد. ● مقاله‌های رسـیده، مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجلّـه در کتاب‌هـا یـا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد. ● مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارسـال می‌نمائید به‌صورت فایل pdf ارسـال کنید. ● در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام‌خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

حرف اول

باید راهت را بشناسی

وقتی به امتحانات پایان نیم‌سال اول می‌رسی، تقریباً نیمی از سال تحصیلی گذشته و در نتیجه نیمی از مطالب کتاب‌های درسی نیز تدریس شده است. حتماً تو هم به نقاط قوت خود در درس‌ها پی برده‌ای. این موضوع بسیار مهمی است که بتوانی نقاط قوت خودت را مشخص و دلایل موفقیت در این درس‌ها را تجزیه و تحلیل کنی و آن‌ها را به درس‌های دیگری که احیاناً در آن‌ها هنوز به قوت پایدار نرسیده‌ای، تعمیم دهی. یعنی مثلاً اگر درس ریاضی را خوب فهمیده‌ای و در امتحانات کلاسی موفق بوده‌ای، چه دلیلی داشته است؟ آیا سر کلاس خوب تمرکز داشته‌ای؟ آیا بعد از کلاس تمرین کرده‌ای و تکالیف را به موقع انجام داده‌ای؟ یا هر دلیلی دیگر. باید بتوانی از این نقاط قوت استفاده کنی و در هر درس دیگری که هنوز فکر می‌کنی مشکل داری، از این راهکارها که باعث موفقیت تو شده‌اند، استفاده کنی.

باید در طول مسیر و سال تحصیلی در همهٔ ابعاد به نوعی وضوح و شفافیت دست پیدا کنی. باید راهت را خیلی روشن بشناسی و همهٔ کارها و تصمیمات خود را با یک برنامه‌ریزی براساس شناختِ واضح و شفاف از اهداف، محیط آموزشی و خودت به انجام برسانی. در این صورت مطمئن باش با توکل به خداوند موفق خواهی بود و رشد می‌کنی، اِن‌شاءالله.

سردبیر

خوارزمی

کلیدواژه: خوارزمی، الگوریتم، جبر و مقابله، مجسطی، بطلمیوس

ابوجعفر محمد، فرزند **موسی خوارزمی**، یکی از نخستین و بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان و اخترشناسانی است که در بغداد کار می‌کرد. از زندگی و خانوادهٔ او چیزی نمی‌دانیم، جز اینکه همچنان که از نامش پیداست، در خوارزم و در نیمهٔ دوم سدهٔ دوم هجری قمری (نیمهٔ دوم سدهٔ هشتم میلادی) به‌دنیا آمد و در حدود ۲۳۲ هـ.ق درگذشت. از عنوان «المجوسی» که برخی از تاریخ‌نویسان به‌دنبال نام او آورده‌اند، معلوم می‌شود که در خانواده‌ای بافرهنگ از زرتشتیان خوارزم زاده شـده و به‌همین مناسـبت، به احتمالی، به نوشـته‌های علمی ایرانی پیش از حملهٔ عرب دسترسی داشته است.

زنده‌یاد پرویز شهریاری

اخترشناسی و جغرافی

نخسـتین اثری کـه خوارزمی در بغـداد به‌وجـود آورد، تنظیم جدول سینوس‌ها بود. خوارزمی این اثر خود را، بـا توجه به کارهـای **بطلمیوس** و جدول‌هـای دانشـمندان هندی (در کتاب مشـهور به «سیدهانتا») تنظیم کرد. ولی خـود، آن‌ها را مورد تحقیق قـرار داد و مقابلـه کـرد و در نتیجه، جدول‌هـای او به‌مراتـب دقیق‌تـر از جدول‌های یونانی و هندی است.

در واقع، سـه اثر خوارزمی (کتاب الزیـج الاول ـ کتـاب الزیـج الثانی ـ السِـند هند الصغیر) به رصدهایی که در زمـان **مأمون** صـورت گرفت و به «سـید هانتا»[1] مربوط می‌شـود. زیرا «سید هند»[2] همان «سـید هانتا»ی هندی است.

«سید هانتا» یک دسته کتاب‌های اخترشناسی و ریاضی است که در هند تنظیم شده‌اند و قدیمی‌ترین آن‌ها را مربوط به نیمهٔ نخسـت سـدهٔ پنجم میلادی می‌دانند. یکی از این کتاب‌ها، در زمان **منصور**، خلیفهٔ دوم عباسـی، به بغداد آورده شـد. **ابراهیـم**، فرزند **حبیب فـزاری**، به یاری مانـکا (یا به روایتی لانکا)، سفیر هند در بغداد، آن را به عربی ترجمه کرد. اخترشناسـان و ریاضی‌دانـان حوزهٔ خلافـت بغداد، به‌وسـیلهٔ این کتاب برای نخستین‌بار بـا دانش ریاضی و اخترشناسـی هند آشـنا شـدند. برخی از آنان، کارها و محاسـبه‌های اخترشناسی خود را بر مبنـای روش‌های هندی قـرار دادند. ترجمـهٔ فـزاری تـا روزگار خوارزمی مبنـای کار اخترشناسـان بـود، ولی بعـد از آنکه خوارزمـی دوزیج خود را ارائه کـرد، مرجـع مطمئن‌تری برای اخترشناسـان پدید آمد. خوارزمی در تنظیـم این دوزیج بـه احتمال قوی، روش تلفیقـی خـود را با اسـتناد به دانش‌هـای یونانـی، هنـدی و ایرانی به‌کار برده است.

هندی‌ها در ابتدا تمام وتر و بعدها نیم‌وتـر (که طـول آن برابر اسـت با سـینوس کمان تمام وتـر) را «جیا» می‌نامیدنـد. در ترجمهٔ فـزاری برای مفهـوم سـینوس واژهٔ «جیب» به‌کار رفته اسـت که دو دیدگاه در این‌باره وجود دارد:

دیـدگاه اول می‌گویـد: فزاری در ترجمهٔ خـود، واژهٔ «جیـا» را به واژهٔ «جیـب» تبدیل کرد. ایـن کار او دو دلیل داشـت: یکی اینکه جیا به‌معنی وتر بود و به‌کار بردن آن برای سینوس (نیم‌وتـر) جایز نبود. دوم اینکه فزاری می‌خواست واژه‌های عربی به‌کار برد و در عین حال، پاس نام‌گذاری هندی‌ها را نگه داشته باشد.

دیـدگاه دوم می‌گوید فـزاری از واژهٔ «جیپ» فارسـی (به‌معنی تیرک و شـاخص) بـرای مفهوم سـینوس اسـتفاده کـرده اسـت کـه در طول زمان، و به‌وسـیلهٔ کاتبـان (که حرف پ فارسـی برایشـان نامأنـوس بود) به «جیب» تبدیل شـد. در هر حال، جیـب کـه از لحاظ معنـای خود در زبـان عربی، هیـچ ربطی بـه مفهوم سـینوس (یا نیم‌وتر) نداشـت، بعدها

از طریق ترجمهٔ کتاب‌های عربی در اروپای غربی، سینوس نامیده شد. که همان معنای واژهٔ عربی جیب را در زبان فرانسوی دارد (جیب در زبان عربی به‌معنای «گریبان» است، در سدهٔ چهاردهم میلادی، جرارد کرموسیس، مترجم معروف ایتالیایی، واژهٔ لاتین سینوس را برای نخستین‌بار به‌جای جیب به‌کار برد).

خوارزمی از راه ترجمهٔ «سیدهانتا» با مکتب ریاضی و اخترشناسی هند و از راه ترجمهٔ «مجسطی» بطلمیوس (اول‌بار به‌وسیلهٔ سهل طبری و بعد به‌وسیلهٔ حجاج فرزند یوسف) و ترجمه‌هایی که از نوشته‌های **ارسطو** و **اقلیدس** (نخستین ترجمهٔ ادب «مقدمات» اقلیدس به زبان عربی، نیمهٔ دوم سده هشتم میلادی و به‌وسیله حجاج فرزند یوسف استحکام گرفت) و دیگران شده بود، با مکتب یونانی آشنا شد. علاوه بر آن، او به‌خاطر بستگی‌هایی که با پاسداران فرهنگ ایرانی داشت، کم‌وبیش از دانش نیاکان خود باخبر بود. رساله‌های زیج اول و زیج‌الثانی خوارزمی، به احتمال زیاد براساس دو رصدی که اولی در بغداد (۲۱۴ هـ .ق) و دومی در دمشق (۲۱۷ هـ .ق) انجام گرفت، نوشته شده‌اند.

نوشته‌های خوارزمی در زمینهٔ اخترشناسی و جغرافیای ریاضی، اثر زیادی در کارهای دانشمندان بعدی (چه در شرق و چه در غرب) داشت. در واقع، **مسلمهٔ مجریطی** (در حدود سال ۳۵۸ هـ .ق)، صورت تازه‌ای از جدول‌های فلکی را براساس کارهای خوارزمی تنظیم کرد. همین جدول‌های مجریطی است که اساس کار اخترشناسان اروپای غربی قرار گرفت.

کتاب «صورت‌الارض» خوارزمی را باید نخستین اثر علمی در دوران تازهٔ شکوفایی دانش در زمینهٔ جغرافیا دانست. خوارزمی واژهٔ «صورت‌الارض» را به‌همان معنایی به‌کار برده است که ما امروز واژهٔ «جغرافی» را می‌فهمیم. گرچه این کتاب براساس جغرافیای بطلمیوس تنظیم شده است، ولی به‌هیچ‌وجه نمی‌توان آن را ترجمه‌ای از جغرافیای او دانست. خوارزمی در این کتاب تقسیم‌بندی مطالب را به‌صورتی غیر از جغرافیای بطلمیوس انجام داده است و تحت تأثیر فرهنگ ایرانی، به تقسیم‌بندی اقلیم‌های هفت‌گانه گرایش دارد (در حالی‌که بطلمیوس، از بیست‌ویک ناحیه نام می‌برد). با وجود همهٔ این‌ها باید گفت که خوارزمی برای نوشتن کتاب «صورت‌الارض» خود، کتاب جغرافیای بطلمیوس را پیش روی خود داشته است.

حساب و جبر

کارهای ریاضی خوارزمی (در زمینهٔ حساب و جبر)، در تاریخ ریاضیات و از دیدگاه مسیر تکاملی ریاضیات، اهمیت بسیار زیادی دارد.

تألیف خوارزمی دربارهٔ حساب (کتاب «حساب‌الهند») تنها از طریق ترجمهٔ لاتین آن به ما رسیده است. نسخهٔ منحصربه‌فرد این ترجمه، به زبان لاتین و با عنوان «Algorithmi de numero Indorum» در کتابخانهٔ دانشگاه کمبریج نگهداری می‌شود.

این کتاب، در پیشرفت بعدی ریاضیات در اروپای غربی، نقش بسیار داشته است، زیرا اروپایی‌ها به‌وسیلهٔ آن با «روش هندی عددنویسی»، یعنی نمادهای ده‌گانهٔ هندی، با به‌کار بردن صفر و استفاده از نظام موضعی بودن رقم‌ها، آشنا شدند. از آنجا که ساکنان اروپای غربی، این شکل عددنویسی را از کتابی یاد گرفتند که به زبان عربی نوشته شده بود و نویسندهٔ آن هم در کشورهای عربی‌زبان زندگی می‌کرد، رقم‌های هندی دستگاه عددنویسی دهدهی را به اشتباه «رقم‌های عربی» نامیدند. (امروز هم این اصطلاح نادرست را در برخی از کتاب‌ها و فرهنگ‌ها به‌کار می‌برند.)

خوارزمی، مسئله‌هایی را که به معادله‌های درجهٔ اول منجر شود، از راه حساب و با روش‌های «یک فرضی» و «دوفرضی» حل می‌کند.

روش یک‌فرضی همان روشی است که هنوز هم به‌نام «راه‌حل

فرضی» مورد استفاده قرار می‌گیرد و خوارزمی آن را از هندی‌ها گرفته است.

روش دوم، یعنـی روش دوفرضی، بـه این ترتیب بود که با فرض دو عدد دلخواه بـرای مجهول، هربـار میزان اشـتباه نتیجه را به‌دست می‌آورد و به کمک آن‌ها، مقـدار واقعی مجهول را پیدا می‌کند.

اگـر به زبـان نمادهـای امروزی جبـر صحبت کنیـم، روش دوفرضی را می‌توان بـه این ترتیب توضیح داد: فرض کنید $f(x)=p$ کـه در آن، $f(x)$ تابعی خطی نسبت به x، و p مقداری ثابت باشـد. ابتدا x را مساوی a و بعد x را مسـاوی b در نظـر می‌گیریم و به‌دست می‌آوریم:

$$f(a)=A,\ f(b)=B$$

$p-A$ را E و $p-B$ را k می‌نامیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$\text{و} = \frac{\text{قع} - \text{پع}}{\text{ق} - \text{پ}}$$

البته به گمان خوارزمی، رابطه‌ای که در اینجا به‌دست می‌آید و به کمک آن می‌توان مقدار مجهول را پیدا کرد، تصادفی است.

کتـاب جبـر خوارزمـی (کتـاب المختصر فی حسـاب‌الجبر و المقابله) نقشـی بسـیار اساسـی در تاریـخ ریاضیات داشـته و نمونۀ مشـخصی اسـت از پژوهش‌هـای ریاضی‌دانـان ایرانـی، در دورۀ مهم تکامل ریاضیات که سمت‌گیری کاربردی داشته است. این کتاب بعدها به زبان لاتین ترجمه شـد و برای مدتی طولانی تنها کتاب درسـی ریاضی در اروپـای غربی بود. برخی از مطالب ایـن کتاب، کارهای **دیوفانت** و دانشـمندان هنـدی را به‌خاطـر می‌آورد. به‌همین مناسـبت بعضی‌ها گمان می‌برند که خوارزمی از این سرچشمه‌ها استفاده کرده است. درسـت اسـت، بعضـی از روش‌هایی کـه خوارزمی بـرای حـل معادله‌ها بـه‌کار می‌بـرد، ما را به یـاد دیوفانت می‌اندازد، ولی خوارزمی به‌هیچ‌وجه از کوتاه‌نویسـی که خاص جبر دیوفانت است، استفاده نمی‌کند و اصطلاح‌های او را بـه‌کار نمی‌بـرد. علاوه بـر این، بررسـی‌های تاریخی نشان داده‌اند که آشنایی دانشمندان دربار خلیفۀ عربی بـا کارهـای دیوفانت، بعـد از تنظیم کتاب خوارزمی بوده اسـت. به‌همین ترتیب، به‌علـت اختلاف‌هایی که بین روش‌هـای خوارزمـی بـا روش‌های دانشـمندان هندی در حل معادله‌ها وجـود دارد، می‌توان نتیجه گرفت که او در کتاب «جبـر و مقابله» خود، از روش‌های هندی هم اسـتفاده نکرده است.

خوارزمـی در مقدمـۀ کتـاب «جبـر و مقابلـۀ» خـود می‌گویـد: «... مـن بر سـر شـوق آمـدم. برای روشن سـاختن مسـئله‌های مبهم و آسان کردن دشـواری‌های علمی به‌پا خاسـتم و کتابی در تعریف حسـاب جبـر و مقابلـه تألیـف کـردم...» در آغـاز کتاب هم می‌نویسـد: «چون به دشـواری‌ها و نیازمندی‌هـای مردم و علم حساب نگریستم، دریافتم...» این واژۀ «دریافتم» که بسیاری از جاهای کتاب تکرار می‌شود و این را می‌رساند کـه بیشـتر مطالـب کتـاب «جبر و مقابله» از خود خوارزمی است.

جبر خوارزمی، حتی از دیدگاهی که دنبـال می‌کند، ارتباطـی با جبر یونانـی نـدارد. یونانی‌هـا در بخـش عمده‌ای از کارهای خود هیچ ضرورتی نمی‌دیدنـد که به کاربـرد مفهوم‌های عملـی توجـه کننـد (یونانی‌هـا در بحث‌هـای ریاضی خود سـمت‌گیری نظری داشتند). در حالی‌که خوارزمی درست برعکس عمل می‌کرد و تلاش او در ایـن جهـت بود که علـم را به خدمـت زندگی بگمـارد و هدف‌های عملی آن را بشناسد و بشناساند. جبر خوارزمـی بخش‌های ویـژه‌ای دربارۀ تجـارت و تقسـیم ارث دارد. برخلاف یونانی‌هـا که همه چیز را به هندسـه منجـر می‌کردنـد، خوارزمـی برخی از مسـئله‌های هندسـی را به کمک معادلـه حل می‌کند (مانند محاسـبۀ ارتفاع مثلث برحسب ضلع‌های آن).

ارزش عملی کار خوارزمی در این است که کتاب او تنها رساله‌ای دربارۀ حل مسـئله نیسـت (آن‌گونه که در نوشـته‌های ریاضی‌دانان هندی دیده می‌شود)، بلکه خوارزمی الگوریتم حل معادله‌ها را مطرح می‌کند، کاربرد آن را شرح می‌دهد و هرجا لازم می‌بیند، از روش‌هـای هندسـی هم اسـتفاده می‌کند.

کتاب خوارزمی در اساس به روش حـل معادله‌ها مربوط اسـت و به این ترتیـب، مسـیر اصلی شـاخۀ تازه‌ای از ریاضیات (یعنی جبر) را مشـخص می‌کند. می‌دانیم کـه مضمون اصلی جبر، دست‌کم تا سدۀ نوزدهم میلادی، عبـارت از حل همین معادله‌هاسـت: «تعمیم و تکمیل این علم [یعنی علم حسـاب] بـا این همه شـرف و تمیز، موقوف اسـت به معرفـت علم جبر و مقابله و اسـتخراج مجهولات از روی حل معادله‌هـا، به طریقـی که مورد مقرر است» (اصول علم جبر و مقابله، آقـای خـان مهندس، چـاپ ۱۳۰۵ هـ.ق).

خود واژۀ «الجبـر»، که خوارزمی بـرای نامیدن ایـن شـاخه از دانش ریاضـی انتخاب کرد، معرف درسـتی اسـت که او در کتاب خود به‌کار برده

کتاب «صورت‌الارض» خوارزمی را باید نخستین اثر علمی در دوران تازۀ شکوفایی دانش در زمینۀ جغرافیا دانست

اســت. خوارزمی «جبــر» را به‌معنای «جبران کــردن» می‌گرفت (که جبر خاطر مســکین بلا بگرداند ـ سعدی) که به زبان امــروزی، به‌معنای انتقال یک عدد منفی، از یک طرف به طرف دیگر معادله است، که این عدد منفی را به عددی مثبت تبدیل می‌کند.

در کنار واژهٔ جبر به واژهٔ «مقابله» برمی‌خوریم که معــرف عمل دیگری در حل معادله اســت: مقابل قراردادن دو عبارت برابر در «دو طرف معادله».

بهاءالدین آملی، معروف به **شیخ بهایی**، ریاضی‌دان آغاز ســدهٔ یازدهم هـ.ق (سدهٔ شانزدهم میلادی)، خیلی خــوب دو واژهٔ جبر و مقابله را تعریف کرده اســت. شــیخ بهایــی می‌گوید: «قســمتی از معادلــه را کــه شــامل مقداری منفی است، نمی‌توان حذف کرد و باید به طرف دیگر معادله اضافه کرد. این عمل **جبر** نامیده می‌شــود. جمله‌های متشــابه را می‌تــوان از دو طرف معادلــه حذف کرد. این عمل را هم **مقابله** گویند.»

اگر علامت‌هــا و نمادهای امروزی را در نظــر بگیریــم، ایــن دو عمل را می‌تــوان روی نمونهٔ زیر روشــن کرد. این معادله را در نظر می‌گیریم.

$۵x-۱۲=۴x-۹$

اگر به دو طــرفِ برابری، ۱۲ و ۹ را اضافــه کنیــم، عمل جبــر را انجام داده‌ایــم، زیــرا عددهــای منفــی را به‌صورت عددهای مثبت درآورده‌ایم:

$۵x+۹=۴x+۱۲$

و اگــر از دو طرف برابری $۴x$ و ۹ را حــذف کنیم، عمــل مقابله را انجام داده‌ایم، که در نتیجه، به‌دست می‌آید:

$x=۳$

بــه این ترتیــب، عمل‌های جبر و مقابلــه به زبان امــروزی عبارت‌اند از: انتقــال جمله‌ای از یک طرف به طرف دیگر معادله، و جمع جبری جمله‌های متشابه.

نامی که خوارزمی بر کتاب خود گذاشت، امروز در همهٔ زبان‌های زندهٔ دنیا باقی‌مانده است: در زبان فرانسوی «Algebre» در زبان‌انگلیسی «algebra» در زبان روسی «آلگبر» و غیره

در کتــاب جبــر خوارزمی راه‌حل معادله‌هــای درجــهٔ اول و درجهٔ دوم شرح داده شده است.

درســت اســت که خوارزمی برای حــل معادله‌های درجــهٔ دوم به ظاهر راه‌حل کلی ارائه نمی‌دهد و با تقسیم معادله‌هــای درجــهٔ دوم بــه پنج نوع متفاوت، برای هر نوع راه‌حلی جداگانه ارائــه می‌کند، ولی ضمــن نمونه‌های عددی غالباً همان دســتوری را دنبال می‌کند کــه امروز برای حــل معادلهٔ درجهٔ دوم می‌شناسیم.

به‌عنوان نمونه، مسئلهٔ ۲۸ از باب هفتــم (باب مســئله‌های گوناگون) و راه‌حــل خوارزمی را از ترجمهٔ زنده‌یاد **حســین خدیوجم** می‌آوریم و آن را با دستور امروزی حل معادلهٔ درجهٔ دوم مقایسه می‌کنیم.

ابتــدا یــادآوری می‌کنیــم کــه خوارزمی جملــهٔ درجه دوم را «مال» می‌نامد و همه‌جــا ضریب آن را واحد می‌گیرد. بنابرایــن معادلهٔ کلی درجهٔ دوم از دیــدگاه خوارزمــی چنیــن می‌شود:

$$x^{۲}+bx = c \qquad (۱)$$

که دستور محاسبهٔ ریشه‌های آن بــا نمادهــای امروزی بــه این صورت است:

$$\text{و} = \frac{-\text{ع} \pm \sqrt{\text{ع}^{۲} + ۴\text{ه}}}{۲}$$

این دســتور را می‌تــوان این‌طور نوشت:

$$\text{و} = -\frac{\text{ع}}{۲} \pm \sqrt{\frac{\text{ع}^{۲}}{۴} + \text{ه}}$$

در ضمن، خوارزمی به ریشهٔ منفی معادله توجهی ندارد و برای محاســبهٔ ریشــهٔ مثبت از این دســتور استفاده می‌کند.

$$\text{و} = -\frac{\text{ع}}{۲} + \sqrt{\frac{\text{ع}^{۲}}{۴} + \text{ه}} \qquad (۲)$$

اکنون مســئلهٔ موردنظر و راه‌حل خوارزمی را (ضمن مقایســه با دستور (۲)) می‌آوریم.

مســئلهٔ ۲۸ از باب هفتم کتاب جبر و مقابلهٔ خوارزمی:

اگر کســی بگوید یک درهم را بر چند مرد تقســیم کردم. بــه هر یک چیزی رسید. سپس یک مرد به گروه آنــان افزودم و بــار دیگر یک درهم را میان آنان تقســیم کردم. سهم هریک در مرتبــهٔ دوم بــه اندازهٔ یک ششــم درهم از مقدار قســمت اول کمتر شد. (خوارزمی می‌خواهــد تعداد مردان را در نوبت اول پیدا کند.)

در راه‌حــل خوارزمی که در ادامه می‌آوریم، «شــیء» به معنای مجهول (یعنــی x و در ایــن مســئله تعــداد مــردان در نوبــت اول)، «جــذر» به معنای توان اول مجهول (x) و «مال» به معنای توان دوم مجهول ($x^{۲}$) است. ضمن راه‌حــل خوارزمی، جابه‌جا و در داخل کروشــه، توضیح لازم را با زبان نمادهای امروزی جبر آورده‌ایم.

راه‌حــل خوارزمی: تعــداد مردان نوبت اول را، که عبارت اســت از شیء [x]، در نقصانی کــه میان آنان ایجاد شــده $\text{ص}^{۱}_{۶}$ ضــرب می‌کنــی. آن‌گاه حاصل‌ضــرب را در تعــداد مــردان نوبــت دوم [x+۱] ضــرب می‌کنــی $\text{ض}(۱+\text{و})\text{و}\text{ص}^{۱}_{۶}$. دارایی تقسیم شده [یک درهم] به‌دست می‌آید.

$$\text{ن}۱ = (۱+\text{و})\text{و}\text{ص}^{۱}_{۶} \quad ^{(۳)}$$

پــس از آن، تعداد مــردان نوبت اول را، که عبارت اســت از شیء [x]، در یک ششــم، که میان آنان اختلاف

بود، ضرب می‌کنی. می‌شود یک ششم جذر $\frac{1}{6}$. سپس آن را در تعداد مردان نوبت دوم، یعنی شیء به اضافهٔ یک [x+۱] ضرب می‌کنی. در نتیجه چنین می‌شود: یک ششم مال به اضافهٔ یک ششم جذر:

$$\frac{1}{6}x(x+1)=\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}x$$

که برابر است با یک درهم:

$$\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}x=1$$

دارایی را که در اختیار داری، تکمیل می‌کنی، یعنی آن را در شش ضرب می‌کنی. می‌شود مال به اضافهٔ جذر $[x^2+x]$. پس یک درهم را در شش ضرب می‌کنی، می‌شود شش درهم و حاصل آن یک مال و یک جذر است که برابر با شش درهم است $[x^2+x=6]$. آن‌گاه، تعداد جذر [یعنی ضریب x] را پس از نصف‌کردن، در مانند خودش ضرب کن. می‌شود یک چهارم $[(\frac{1}{2})^2$ یا $\frac{1}{4}]$. آن را بر شش بیفزا $6+(\frac{1}{2})^2$ و جذر حاصل جمع را بگیر $\sqrt{6+(\frac{1}{2})^2}$ و نصف تعداد جذری را که در مانند خودش ضرب کرده بودی و عبارت بود از نصف $\frac{1}{2}$، از آن کم کن:

$$\sqrt{6+(\frac{1}{2})^2}-\frac{1}{2}$$

باقی‌مانده عبارت است از تعداد مردان نوبت اول که در این مسئله دو مرد است.

می‌بینیم که خوارزمی مسئله را به حل معادلهٔ درجهٔ دوم

$x^2+x=6$

منجر می‌کند؛ یعنی معادله‌ای به‌صورت معادله (۱). سپس، برای پیدا کردن ریشهٔ مثبت آن، گام‌به‌گام از دستور (۲) استفاده می‌کند.

خوارزمی شش نوع معادلهٔ درجه دوم را مورد بررسی قرار می‌دهد و برای هر کدام راه‌حل خاصی ارائه می‌کند. این شش نوع معادله را به زبان نمادهای امروزی می‌توان این‌طور نوشت:

۱) $x^2=x$

۲) $x^2=b$

۳) $ax=b$

۴) $x^2+ax=b$

۵) $x^2+b=ax$

۶) $ax+b=x^2$

(و اگر در جایی ضریب درجهٔ دوم، برابر واحد نباشد، ابتدا آن را به معادله‌ای تبدیل می‌کند که در آن ضریب درجهٔ دوم واحد باشد.)

در واقع، در حالت سوم با معادله‌ای درجهٔ اول سروکار داریم، ولی خوارزمی در تقسیم کلی خود، به این روش عمل می‌کند: در معادلهٔ درجه دوم، سه جمله وجود دارد (جملهٔ درجهٔ دوم، جملهٔ درجهٔ اول و مقدار ثابت). در ترکیب معادله، ممکن است یکی از سه جمله وجود نداشته باشد و تنها با دو جمله سروکار داشته باشیم (حالت‌های ۱، ۲ و ۳) و یا هر سه جمله (حالت‌های ۴، ۵ و ۶) وجود داشته باشند. در ضمن، وقتی هر سه جمله وجود دارند، ممکن است جمله‌های درجهٔ اول و درجهٔ دوم در یک طرف و مقدار ثابت در طرف دیگر باشد (حالت ۴). یا جملهٔ درجهٔ دوم و مقدار ثابت در یک طرف و جملهٔ درجهٔ اول در طرف دیگر باشد (حالت ۵) و یا سرانجام جملهٔ درجهٔ اول و مقدار ثابت در یک طرف و جملهٔ درجهٔ دوم در طرف دیگر باشد (حالت ۶).

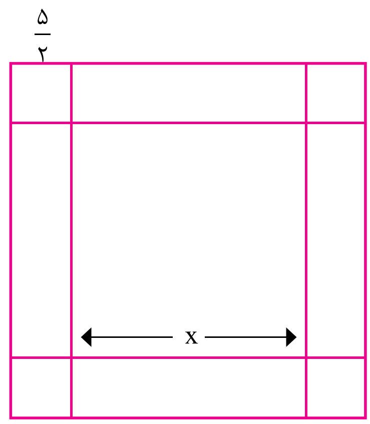
همان‌گونه که ضمن راه‌حل مسئلهٔ نمونه دیدیم، خوارزمی برای حل معادله نه از فرمول و نماد، بلکه از بیان توصیفی استفاده می‌کند. در ضمن، در حالت‌هایی که دو ریشهٔ معادله مثبت باشند، هر دو ریشه را به‌دست می‌آورد و از این بابت بر جبر دیوفانتی برتری دارد.

خوارزمی برای حل معادله‌ها از روش‌های هندسی هم استفاده می‌کند. برای نمونه در باب دوم کتاب خود (باب جذر و مال عدد)، زیر عنوان «استدلال دربارهٔ یک مال و ده جذر برابر با سی‌ونه درهم می‌شود»، یعنی برای حل معادلهٔ

$x^2+10x=39$

ابتدا راه‌حل جبری و سپس، دو راه‌حل هندسی می‌آورد که در اینجا، یکی از راه‌حل‌های هندسی او را می‌آوریم:

مربعی به ضلع x می‌سازیم. سپس روی ضلع‌های آن، مستطیل‌هایی به ضلع‌های x و $\frac{۵}{۲}$ اضافه می‌کنیم. بعد تمام شکل را به‌صورت یک مربع کامل درمی‌آوریم.



روی شکل دیده می‌شود که، مساحت مربع بزرگ برابر است با مساحت مربع به ضلع x به اضافهٔ مساحت چهار مستطیل به ضلع‌های x و $\frac{۵}{۲}$ و سرانجام، مساحت چهار مربع به ضلع برابر $\frac{۵}{۲}$. بنابراین، مساحت مربع بزرگ برابر است با:

$x^{۲}+۱۰x+۲۵$

و چون $x^{۲}+۱۰x$ برابر ۳۹ بود، بنابراین مساحت مربع بزرگ برابر ۳۹+۲۵، یعنی ۶۴ می‌شود. به این ترتیب ضلع این مربع برابر ۸ و در نتیجه ضلع مربع کوچک‌تر، یعنی مقدار مجهول x، برابر ۵-۸ یعنی ۳ می‌شود.

پایان بحث

«دانشمندان روزگاران گذشته و خردمندان ملت‌های پیشین، پیوسته سرگرم نگارش و تصنیف بوده‌اند. آنان به اندازهٔ توانایی و بینش خود برای مردم پس از خود، در انواع دانش و گزیده‌های حکمت و فلسفه، کتاب‌ها تألیف و تصنیف کرده‌اند، بدان امید که در دیگر سرایْ پاداشی یابند و در این جهان از آنان نام نیک برجای بماند؛ نام نیکی که همهٔ ثروت‌ها و پیرایه‌های مادی ـ که با رنج بسیار به‌دست می‌آیند ـ در برابرش ناچیز است و به شوق رسیدن به آن، رنج کشف رازهای دانش و زحمت حل دشواری‌های علمی آسان می‌نماید.

[دانشور به سه‌گونه است.]

یا مردی است که برای نخستین‌بار، دانشی ناشناخته را می‌شناسد و می‌شناساند و آیندگان را میراث‌خوار علمی خود می‌سازد.

یا مردی است که آثار برجای ماندهٔ پیشینیان را شرح و تفسیر می‌کند و مطالب مبهم و پیچیدهٔ کتاب‌ها را روشن می‌سازد، برای بیان مطلب راه ساده‌تری نشان می‌دهد و نتیجه‌گیری را آسان می‌کند.

یا مردی است که در برخی از کتاب‌ها به نادرستی و آشفتگی برمی‌خورد، و نادرستی را اصلاح می‌کند و آشفتگی‌ها را سامان می‌بخشد. با خوش‌بینی به‌کار مؤلف می‌نگرد، بر او خرده نمی‌گیرد و از اینکه متوجه خطا و اشتباه دیگران شده، بر خود نمی‌بالد...»

از مقدمهٔ خوارزمی بر کتاب جبر و مقابله

نام خوارزمی، ابتدا با ترجمهٔ کتاب «حساب‌الهند» او به اروپا رفت و به‌صورت لاتینی شدهٔ خوارزمی، «الگوریتموس» درآمد. به‌تدریج در تمامی اروپای غربی با نام «الگوریتموس» و بعدها «اَلگوریتم» از طریق عددنویسی هندی (یعنی عددنویسی به‌همین صورت امروزی) آشنا شدند. ولی به‌تدریج این اصطلاح (یعنی الگوریتم) به هر دستگاه یا دنباله‌ای از محاسبه داده شد (مانند اَلگوریتم ضرب که روش ضرب عددهای چندرقمی در یکدیگر را به‌صورت ستونی توضیح می‌دهد؛ الگوریتم اقلیدس برای پیداکردن بزرگ‌ترین مقسومٌ‌علیه مشترک دو یا چند عدد؛ الگوریتم حل معادلهٔ درجهٔ دوم؛ و غیره).

(به این مطلب توجه کنیم که واژهٔ لگاریتم هیچ ربطی به واژهٔ الگوریتم و در نتیجه با نام خوارزمی ندارد.)

به‌جز این، نامی که خوارزمی بر کتاب خود گذاشت، امروز در همهٔ زبان‌های زندهٔ دنیا باقی‌مانده است: در زبان فرانسوی «Algebre» در زبان انگلیسی «algebra» در زبان روسی «آلگبر» و غیره. می‌بینیم که حتی حرف تعریف «اَل» هم از ابتدای آن حذف نشده است: «الجبر» (تا نیم سدهٔ پیش در ایران کتاب‌های درسی و غیردرسی جبر را زیرعنوان «جبر و مقابله» می‌نوشتند).

در واقع، یکی از کارهای پرارزش خوارزمی پیداکردن واژه‌ها و اصطلاح‌های مناسب بود. برای نمونه، برای «مجهول» از واژهٔ «شیء» استفاده می‌کرد و آن را درست به‌همان مفهومی که امروز از x استفاده می‌کنیم، به‌کار می‌برد. انتقال این واژه به اروپا و نوشتن آن به‌صورت xi، ابتدا نماد x و سپس سایر نمادها را برای بیان مقدارهای مجهول به‌وجود آورد.

از کتاب‌های خوارزمی تنها کتاب جبر و مقابلهٔ او به‌همت زنده‌یاد حسین خدیوجم به فارسی ترجمه شده است.

از کتاب‌های خوارزمی تنها کتاب جبر و مقابلهٔ او به‌همت زنده‌یاد حسین خدیوجم به فارسی ترجمه شده است

پی‌نوشت‌ها.............

1. Sidhanta

2. Sidhend

۳. این معادله از این طریق هم به‌دست می‌آید: اگر تعداد مردان نوبت اول برابر x و در نتیجه، تعداد مردان نوبت دوم x+۱ باشد، سهم هر مرد در نوبت اول برابر $\frac{۱}{و}$ و در نوبت دوم برابر $\frac{۱}{و+۱}$ خواهد شد و بنابر صورت مسئله باید داشته باشیم: $\frac{۱}{و}-\frac{۱}{و+۱}=\frac{۱}{۶}$ که به سادگی به همان معادلهٔ متن منجر می‌شود: $\frac{۱}{۶}و(و+۱)=۱$.

اصل لانه کبوتری
گام به گام

آموزشی

کلیدواژه اصل لانه کبوتر، اصل دیریکله، پلاک‌گذاری، باقی‌ماندهٔ مطلق

اشاره

اصل لانه کبوتری که با عنوان‌های دیگری همچون اصل لانه کبوتر، اصل حجره‌ها، اصل جعبهٔ کفش و اصل دیریکله نیز بیان می‌شود، از جمله اصول کاربردی در حل بسیاری از مسائل ریاضی است. این اصل در عین سادگی و بدیهی بودن می‌تواند راه‌گشای حل برخی مسائل پیچیدهٔ ریاضی باشد.

در این مقاله برآنیم که با ذکر مسائل متعدد و از ساده به مشکل، چگونگی استفاده از این اصل را در حل مسائل گوناگون ببینیم.

گام نخست

ساده‌ترین شـکل بیان اصل لانه کبوتری به این صورت اسـت: اگـر m کبوتر، n لانهٔ کبوتر را اشـغال کنند و تعداد کبوترها بیشـتر از تعداد لانه‌ها باشـد، یعنـی $m>n$، آن‌گاه حداقل یک لانهٔ کبوتر وجود خواهد داشـت که دست‌کم دو کبوتر در آن قرار گیرند.

مثال ۱. اگر ۹ نفر در یک مهمانی حضور داشـته باشند، طبـق اصل لانه کبوتری روزی از هفته می‌توان یافت که در آن روز حداقل دو نفر آن‌ها متولد شده باشند.

ابتدا بیایید با همین مثال سـاده کمی بیشـتر دست و پنجه نـرم کنیم! آیا این مثال بیان می‌کنـد که در هر روز هفته چند نفر از مهمانان متولد شـده‌اند؟ یـا در کدام روز تعداد بیشتری متولد شده‌اند؟ پاسخ هر دو مورد منفی است. ممکن اسـت تمام مهمانان متولد روز جمعه باشند و ممکن اسـت هیچ‌کدام از آن‌ها جمعه متولد نشده باشند! اما به‌هر حال روزی هسـت که در آن روز دسـت‌کم دو نفر از آن‌ها به‌دنیا آمده باشـند. به‌وجود دو حداقل در لابه‌لای جملات نتیجـه دقت کنیـد. (حداقل یک روز در هفته هسـت که حداقل دو نفر در آن روز به‌دنیا آمده باشند.)

مثال ۲. در مثال قبل، فرض کنیم تعداد مهمانان ۱۵ نفر باشد. آن‌گاه چه؟

در این صورت، روزی از هفته را می‌توان یافت که در آن روز حداقل سـه نفر از آن‌ها متولد شده باشند. در این مثال ۱۵ مهمـان را به‌عنوان کبوتر و هفـت روز هفته را به‌عنوان هفت لانه در نظر بگیرید. بگذارید کمی بیشـتر مسـئله را بشکافیم! فرض کنیم مهمان نخست روز شنبه و دومی روز یکشـنبه و... هفتمی روز جمعه متولد شـده باشند و دوباره روز از نو روزی از نو! مهمان شـمارهٔ ۸ روز شـنبه و مهمان شـمارهٔ ۹ روز یکشنبه و... مهمان شـمارهٔ ۱۴ روز جمعه... بالاخره پانزدهمین مهمـان در یکی از روزهای هفته به‌دنیا آمده است. پس روزی پیدا شد که در آن روز سه نفر متولد شـده‌اند. توجه کنید که این حالت، وضعیت حداقلی است! یعنـی قناعت بـه حداقل‌های ممکـن! والا ممکن بود همهٔ ۱۵ مهمـان به‌طور نمونه در روز جمعه به‌دنیا آمده باشـند! و یا سـایر حالت‌های دیگر. به‌هر صورت روزی از هفته پیدا می‌شـود که در آن روز حداقل سـه نفر متولد شده باشند. می‌توان نوشت: $۱۵=۷(۲)+۱$

الگویابی

قصـد داریم به یک الگو دسـت پیدا کنیم. تعداد لانه را همان ۷ می‌گیریم (هفـت روز هفته)، اما به مهمانان اضافه

عنایت‌اله راستی‌زاده*
دبیر ریاضی دبیرستان‌های شیراز

می‌کنیم؛ ۱۶ مهمان، ۱۷ مهمان و بیشتر:

لانه‌ای با حداقل ۳ کبوتر → ۲+(۲)۷=۱۶
لانه‌ای با حداقل ۳ کبوتر → ۳+(۲)۷=۱۷
لانه‌ای با حداقل ۳ کبوتر → ۴+(۲)۷=۱۸
لانه‌ای با حداقل ۳ کبوتر → ۵+(۲)۷=۱۹
لانه‌ای با حداقل ۳ کبوتر → ۶+(۲)۷=۲۰
؟؟؟ =۲۱

اما سطر آخر جدول قبل شایستهٔ اندکی توجه است. اگر قرار بود عدد ۲۱ را بر هفت تقسیم کنیم، داشتیم: ۲۱=(۳)۷. اما این‌گونه نوشتن اندکی غلط‌انداز است یا لااقل در بحث‌ها باعث خلل در ساختن الگوی مناسب می‌شود! پس چگونه بنویسیم؟ می‌نویسیم: ۷+(۲)۷=۲۱. به‌عبارت دیگر علاقه‌مندیم خارج‌قسمت ۲ حفظ شود! این یعنی ۷ کبوتر باقی‌مانده راهی ۷ لانه شوند و باز هم می‌توان گفت لانه‌ای هست که در آن لانه حداقل ۳ کبوتر (۱+۲) قرار دارند. به‌عبارت دیگر، اگر تعداد مهمانان تا ۲۱ مهمان جلو برود، تضمین نمی‌شود که روزی از هفته است که در آن روز دست‌کم ۴ نفر متولد شده باشند! اما مطمئناً روزی از هفته است که در آن روز دست‌کم ۳ نفر متولد شده باشند! این ایدهٔ خوبی است تا کمی جدی‌تر کار را دنبال کنیم. در موضوع لانه کبوتر قضیه زیر را داریم:

قضیه: اگر m کبوتر در n لانه قرار گیرند $(m>n)$ و:

$m=nk+r\ ,\ r=1,2,3,\ldots,n$

آن‌گاه دست‌کم در یک لانه حداقل $k+1$ کبوتر وجود دارد.

مثال ۳. اگر ۳۸ نفر در یک مهمانی حضور داشته باشند، طبق اصل لانهٔ کبوتر (و قضیهٔ فوق) ماهی از سال را می‌توان یافت که در آن ماه حداقل ۴ نفر آن‌ها متولد شده باشند؛ زیرا: ۲+(۳)۱۲=۳۸.

در این مثال، ۳۸ مهمان به‌عنوان ۳۸ کبوتر و ۱۲ ماه سال به‌عنوان ۱۲ لانه در نظر گرفته شده‌اند.

مثال ۴. برای آنکه مطمئن باشیم ماهی از سال را می‌توان یافت که در آن ماه حداقل ۴ نفر متولد شده باشند، حداقل چند نفر باید در مهمانی حضور داشته باشند؟

حل:

۴-۱=۳ ⟹ ۳×۱۲=۳۶ ⟹ ۳۶+۱=۳۷

پاسخ: حداقل ۳۷ نفر؛ زیرا: ۱+(۳)۱۲=۳۷.

مثال ۵. شهرداری اصفهان قصد دارد دانش‌آموزان بعضی از مدارس را به‌طور رایگان به باغ پرندگان ببرد، اما یک شرط دارد؛ شرط آن است که حداقل در یکی از روزهای هفته دست‌کم ۵۸ دانش‌آموز آن مدرسه متولد شده باشند. این مدارس باید دست‌کم چند دانش‌آموز داشته باشند؟

پاسخ: دانش‌آموزان سوم ریاضی به کمک آمدند و راه چاره را به مدیران نشان دادند! خدا را شکر وگرنه لازم بود ساعت‌ها دفترداران و معاونین و مدیران پروندهٔ بچه‌ها را زیرورو کنند تا بفهمند هرکسی چه روزی به‌دنیا آمده و آن روز، شنبه بوده، یکشنبه یا...

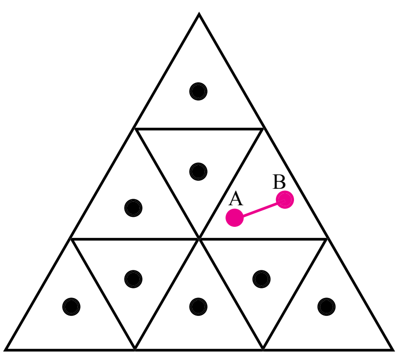
از ۵۸ یکی کم می‌کنیم و ۵۷ را در ۷ ضرب می‌کنیم و ۳۹۹ به‌دست می‌آید. پاسخ عدد ۴۰۰ خواهد بود. زیرا:

۴۰۰=۷(۵۷)+۱

مدارس با حداقل ۴۰۰ دانش‌آموز بفرمایند باغ پرندگان به دعوت آقای شهردار!

مثال ۶. سال ۲۰۰۰ میلادی سال جهانی ریاضی نام داشت. از آن سال تاکنون جمعی از اهالی ریاضی شیراز به‌دنبال تأسیس خانهٔ ریاضیات بوده‌اند! داخل یکی از آرم‌های پیشنهادی برای این مؤسسه، مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۱ سانتی‌متر طراحی شده است. که ده نقطه داخل آن است. نشان دهید حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصلهٔ آن‌ها کمتر از $\frac{1}{3}$ است.

حل: پاسخ این مسئله بسیار ساده است! اضلاع مثلث را مطابق شکل زیر به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و نقاط تقسیم را به‌هم وصل می‌کنیم.



در این صورت ۹ مثلث کوچک پدید می‌آید که آن‌ها را ۹ لانه و ۱۰ نقطه را ۱۰ کبوتر فرض می‌کنیم که می‌خواهند داخل لانه‌ها جای گیرند. در ضمن، نقاط روی مرز را متعلق به هر دو مثلث می‌گیریم. بنابر اصل لانه کبوتری، حداقل دوتا از نقاط به یکی از مثلث‌های کوچک تعلق دارند. چون ضلع مثلث بزرگ برابر ۱ سانتی‌متر است، در نتیجه طول

اضلاع مثلث‌های کوچک‌تر $\frac{۱}{۳}$ خواهد بود. هنگامی این دو نقطه بیشترین فاصله را دارند که روی دو رأس مثلث باشـند که آن هم امکان نـدارد (زیرا نقاط داخل مثلث بزرگ واقع‌اند). لذا در هر صورت بیشترین فاصلهٔ هر دو نقطه همچون A و B (که در یک مثلث کوچک قرار گیرند) از یکدیگر کمتر از $\frac{۱}{۳}$ خواهد بود. ($AB < \frac{۱}{۳}$)

■ گام دوم: پلاک‌گذاری

در بعضـی مسـائل لانـه کبوتـری، با لانه‌هایی مواجه می‌شـویم که: اولاً، با توجه به‌صورت سـؤال پدیـد آورده‌ایـم. ثانیاً، ظرفیت لانه‌ها محدود (معمولاً ۲ کبوتر) است. دوسـت دارم این نوع سؤالات لانه کبوتـری را، لانه‌های پلاک‌گذاری شـده (شـماره‌گذاری شـده) بنامـم. در ایـن مسائل، کبوترها به سراغ لانهٔ هم‌شمارهٔ خود می‌روند! ببینید:

مثـال ۷. (تمرینی از کتاب درسـی)
نشان دهید هر زیرمجموعه از مجموعهٔ S={۱,۲,۳,...,۹} کـه دارای ۶ عضـو باشـد، حداقل دو عضو دارد که مجموع آن‌ها برابر ۱۰ است.

حـل: لانه‌ها را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم (گویا لانه‌ها شماره‌گذاری شده‌اند):

۵ | ۴و۶ | ۳و۷ | ۲و۸ | ۱و۹

در ۴ لانـه از ۵ لانه، عددها را چنان انتخاب کرده‌ایم که می‌خواهیم! چـه می‌خواهیم؟ می‌خواهیم مجموع آن‌ها ۱۰ باشـد. هر زیرمجموعهٔ ۶ عضوی از S حکم ۶ کبوتر خواهد داشـت که راهی این لانه‌ها می‌شـوند. در میان این ۶ عدد، یا ۵ هسـت یا نیست! اگر یکی از آن‌ها عدد ۵ باشد، عدد ۵ راهی لانهٔ هم شماره‌اش می‌شود. پنج عدد دیگر می‌مانند و چهار لانهٔ

۴و۶ | ۳و۷ | ۲و۸ | ۱و۹

طبق اصل لانهٔ کبوتـری، چون تعداد عددها (کبوترها) بیش از تعداد لانه‌هاست، دست‌کم در یک لانه دو کبوتر جا می‌گیرنـد (و فقط دو کبوتر). اشـغال حداقل یکی از لانه‌ها توسـط دو کبوتر، یعنی وجود حداقل دو عدد که جمعشان ۱۰ می‌شود و این مطلوب ماست!

و اگـر در میـان ۶ عدد انتخابـی از مجموعهٔ S، عدد ۵ نباشد، آن‌گاه ۶ عدد داریم و چهار لانه:

۴و۶ | ۳و۷ | ۲و۸ | ۱و۹

بـاز هم به‌دلیل زیادتـر بودن کبوترهـا از لانه‌ها، حکم بدیهی است.

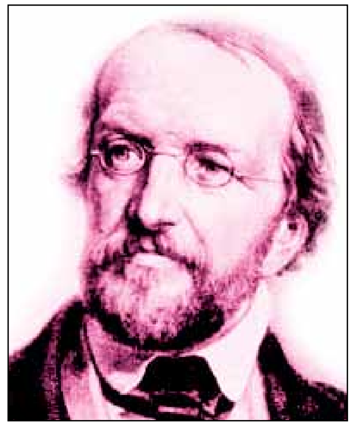
حتی در اینجا به‌دلیل ظرفیت محدود لانه‌ها دسـت‌کم دو زوج عدد پیدا می‌شود که مجموعی برابر ۱۰ دارند.

مثال ۸. از مجموعهٔ S={۱,۲,۳,...,۱۴,۱۵} حداقل چند عدد انتخاب کنیم که مطمئن باشیم حداقل دو عضو از این اعضای انتخابی جمعشان ۱۱ می‌شود؟

پاسخ: اعدادی را که جمعشان ۱۱ می‌شود عبارت‌اند از:

۵و۶ | ۴و۷ | ۳و۸ | ۲و۹ | ۱و۱۰

این می‌شـود ۵ لانه (بـا ظرفیت ۲ کبوتـر). همچنین



لوژون دیریکله، ریاضی‌دان آلمانی قرن نوزدهم، مبدع اصل لانه کبوتری

لانه‌هایی به‌صورت:

$\boxed{15}\ \boxed{14}\ \boxed{13}\ \boxed{12}\ \boxed{11}$

نیز خواهیم داشت (۵ لانه با ظرفیت یک کبوتر). پس جمعاً ۱۰ لانه داریم. لذا لازم است حداقل ۱۱ عدد از مجموعه S انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم دست‌کم یکی از لانه‌های دو کبوتری پر و پیمان می‌شود! یعنی دو عضو جمعشان ۱۱ می‌شود.)

در کلاس درس: یکی پرسید: اگر ۵ عضو هم انتخاب کنیم، جمعشان ممکن است ۱۱ شود؟ مانند مجموعهٔ $A=\{1,9,4,6,7\}$

(جمع ۴ و ۷ برابر یازده می‌شود.)

پاسخ این دانش‌آموز در خود پرسش او نهفته است؟ زیرا کلمهٔ **ممکن است** به‌کار برده! می‌توانستیم مجموعهٔ $B=\{1,2,8,7,6,11,12,13,14,15\}$ را انتخاب کنیم که ۱۰ عضو دارد و هیچ دوعضوی از اعضای B جمعشان ۱۱ نمی‌شود! آن‌گاه چه‌طور؟ پس ناچارید برای اطمینان، حداقل اعضای زیرمجموعهٔ S را ۱۱ عضو بگیرید.

مثال ۹. از بین اعداد ۱، ۲، ...، ۲n حداقل چند عدد انتخاب کنیم به‌طوری که همواره حداقل دوتا از آن‌ها نسبت به‌هم اول باشند؟

پاسخ: لانه‌هایی (حجره‌هایی) به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$\boxed{1,2}\ \boxed{3,4}\dots\boxed{2k-1,2k}\dots\boxed{2n-1,2n}$

حال n لانه داریم. اگر حداقل n+۱ عدد انتخاب کنیم، حداقل دوتا از آن‌ها نسبت به‌هم اول‌اند. یعنی دست‌کم دو عدد متوالی پیدا می‌شود و دو عدد متوالی همواره نسبت به‌هم اول‌اند.

گام سوم: مثال‌های ویژه

در این گام سعی داریم مثال‌های ویژه‌ای را بررسی کنیم که بدون ممارست کافی، ممکن است اندکی پیچیده به‌نظر برسند.

مثال ۱۰. ۱۰ عدد طبیعی متمایز و کوچک‌تر از ۱۰۷ مفروض‌اند. نشان دهید که دو زیرمجموعهٔ متمایز و غیرتهی از این ۱۰ عدد یافت می‌شود که مجموع اعضایشان یکسان است.

حل: ابتدا توجه کنیم که اگر مجموعه‌ای از ۱۰ عدد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۷ انتخاب کنیم، این مجموعه دارای $2^{10}-1=1023$ زیرمجموعه غیرتهی است. (۱۰۲۳ کبوتر!) لذا این زیرمجموعه‌ها دارای یک عضو، دوعضو، ... تا ده‌عضو هستند. مجموع اعضای این زیرمجموعه‌ها در کمترین حالت برابر ۱ است. و بزرگ‌ترین ده‌عددی که می‌توانیم داشته باشیم، اعداد ۹۷، ۹۸، ...، ۱۰۶ هستند که:

$97+98+\dots+106=1015$

لذا شماره‌گذاری لانه‌ها را براساس حاصل جمع‌های ممکن تنظیم می‌کنیم؛ به‌صورت زیر:

$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\dots\boxed{1015}$

حال مجموع اعداد هر زیرمجموعه را روی یک برگه می‌نویسیم (به‌عنوان یک کبوتر!) و داخل لانهٔ هم شماره با آن مجموعه قرار می‌دهیم. بنابراین باید ۱۰۲۳ برگه را در ۱۰۱۵ مکان جای دهیم. تعداد برگه‌ها (کبوترها) از تعداد جاها (لانه‌ها) بیشتر است. پس طبق اصل لانه کبوتری، حداقل لانه‌ای یافت می‌شود که در آن لانه، حداقل دو کبوتر (یا بیشتر) جا می‌گیرند. این یعنی حداقل دو زیرمجموعهٔ متمایز و غیرتهی یافت شده است که مجموع اعضایشان یکسان است.

مثال ۱۱. در یک مهمانی بعضی از مهمانان با هم دست می‌دهند. اگر کسی با خودش دست ندهد! و دو نفر هم پیش از یک‌بار با هم دست ندهند، ثابت کنید دو نفر یافت می‌شوند که تعداد دفعاتی که دست داده‌اند، یکسان است.

توضیح: این مسئله از مسائل معروف اصل لانه کبوتری است و در منابع گوناگون با اندکی تغییر دیده می‌شود.

حل: فرض کنیم n مهمان وجود داشته باشند. هر مهمان یا به هیچ‌کس دست نمی‌دهد یا به یک نفر دست می‌دهد یا به دو نفر و... و یا اینکه در نهایت به همه دست می‌دهد. (یعنی به n-۱ نفر دست می‌دهد.) بنابراین، n لانه پلاک شده به‌صورت زیر خواهیم داشت:

$\boxed{0}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\dots\boxed{n-1}$

اگر هر فرد تعداد افرادی را که به آن‌ها دست داده است، روی کاغذی بنویسد و در لانهٔ هم شماره با عدد نوشته شده قرار دهد، خواهیم دید که لانه‌ای هست که حداقل شامل دو تکه کاغذ است. ابتدا شاید به‌نظر برسد که در این سؤال تعداد لانه و تعداد کبوتر یکسان است. اما با کمی دقت معلوم می‌شود که از دو لانهٔ ۰ و n-۱ همواره یکی از لانه‌ها خالی می‌ماند! چرا؟ زیرا اگر فردی باشد که n-۱ بار دست داده باشد، پس به همه دست داده است و در این صورت فردی یافت نمی‌شود که به هیچ‌کس دست نداده باشد و لانه ۰

خالی می‌ماند. برعکس اگر لانهٔ با پلاک صفر پر شود، یعنی فردی هست که به هیچ‌کس دست نداده است و به این ترتیب لانه به شمارهٔ n-1 خالی خواهد ماند. بنابراین، از لانه‌های شمارهٔ صفر و n-1 حداقل یکی خالی است. پس n تکه کاغذ در n-1 (یا کمتر) لانه قرار گرفته‌اند. لذا (حداقل) یک لانه شامل دست‌کم دو تکه کاغذ است. این یعنی حداقل دو نفر با تعدادی مساوی از مهمانان دست داده‌اند.

آخرین مسئلهٔ این قسمت از مقاله، سؤالی است که براساس مفهوم **باقی‌مانده‌های مطلق** حل می‌شود:

فرض کنید a یک عدد صحیح دلخواه باشد. اگر a را بر ۱۰۰ تقسیم کنیم، داریم:

ع=۱۰۰**ل**+**لا** **ل**∈**ﻬ** , **لا**=۰,۱,۲,۳,...,۹۹

یعنی: **ع**=۱۰۰**ل**+**لا**, ۰≤**لا**≤۹۹

r را باقی‌مانده گویند. (باقی‌مانده نامنفی است.)

باقی‌ماندهٔ مطلق چیست؟ در مثال قبل می‌توان نوشت:

ع=۱۰۰**ق**+**م**, ۰≤|**ﻢ**|≤۵۰

|**ﻢ**| را باقی‌ماندهٔ مطلق می‌نامیم.

اکنون به تشریح بیشتر مفهوم بالا می‌پردازیم. وقتی می‌نویسیم: **ع**=۱۰۰**ل**+**لا**؛

لا=۱,۲,۳,...,۵۰ ـــ ...۵۱,۵۲,۵۳,...,۹۹

فرض کنیم باقی‌مانده (r) یکی از عددهای بیشتر از ۵۰ باشد؛ مثلاً r =۵۱. می‌توان نوشت:

ع=۱۰۰**ل**+۵۱=۱۰۰**ل**+۱۰۰−۴۹=۱۰۰(**ل**+۱)+(−۴۹)

یعنی می‌توانیم باقی‌مانده را ۵۱ و یا ۴۹- بگیریم. یا اگر r =۹۹ باشد، می‌توان نوشت:

ع=۱۰۰**ل**+۹۹=۱۰۰**ل**+۱۰۰−۱=۱۰۰(**ل**+۱)+(−۱)

یعنی می‌توانیم باقی‌مانده را ۹۹ یا ۱- بنامیم. به بیان دیگر:

ع=۱۰۰**ل**+**ﻻ** **ﻻ**=۰,۱,۲,...,۵۰

ع=۱۰۰(**ل**+۱)+**ﻻ** **ﻻ**=−۴۹,−۴۸,...,−۱

و یا به‌صورت خلاصه: **ع**=۱۰۰**ق**+**م**، به قسمی که k∈z و ۰≤|**ﻢ**|≤۵۰ را باقی‌ماندهٔ مطلق می‌نامیم.

مثال ۱۲. نشان دهید که اگر ۵۲ عدد صحیح دلخواه داشته باشیم، دو تا از آن‌ها یافت می‌شود که مجموع یا تفاضل آن‌ها بر ۱۰۰ بخش‌پذیر باشد.

حل: اگر عدد صحیح a را بر ۱۰۰ تقسیم کنیم، عددهای صحیح k و t یافت می‌شوند که:

ع=۱۰۰**ق**+**م** ۰≤|**ﻢ**|≤۵۰

|**ﻢ**| باقی‌ماندهٔ مطلق است. مقادیری که |**ﻢ**| می‌گیرد عبارت‌اند از: ۰ و ۱ و ۲ و... و ۵۰ که نقش ۵۱ لانه را دارند. ۵۲ عدد صحیح دلخواه نیز نقش ۵۲ کبوتر را دارند، چون: ۵۱>۵۲. پس طبق اصل لانه کبوتری؛ لانه‌ای هست که در آن لانه دست‌کم دو کبوتر یافت می‌شود. یعنی دست‌کم دو تا از این ۵۲ عدد صحیح در تقسیم بر ۱۰۰ دارای یک باقی‌ماندهٔ مطلق خواهند شد.

فرض کنیم آن دو عدد m و n باشند؛ یعنی:

ک=۱۰۰**ق**+**م** ۰≤|**ﻢ**|≤۵۰

ک=۱۰۰**ق**′+**م**′ ۰≤|**ﻢ**|≤۵۰

و اگر |**ﻢ**|=|**م**′|، دو حالت پیش می‌آید:

حالت اول اینکه **م**′=**م**، در این صورت: ۱۰۰(**ق**′−**ق**)=**ک**−**ک**. پس: ۱۰۰**ل**=**ک**−**ک**.

حالت دوم اینکه **م**′=−**م**، در این صورت: ۱۰۰(**ق**′+**ق**)=**ک**+**ک**. پس: ۱۰۰**ل**′=**ک**+**ک**.

حکم ثابت شد، یعنی لااقل دو عدد صحیح چون m و n یافت شد که مجموع یا تفاضل آن‌ها بر ۱۰۰ بخش‌پذیر است.

■ گام چهارم: مثال‌های دوره‌ای و تکمیلی

هدف ما در این گام، دوره و تکمیل مبحث اصل لانهٔ کبوتری است. سعی شده است مسائلی از همهٔ سطوح ساده؛ متوسط و مشکل و در چند قالب از جمله چندگزینه‌ای، درست ـ غلط و تشریحی طرح شود.

الف) سؤالات درست ـ غلط

معلوم کنید کدام درست و کدام غلط است؟

۱. از ۳۶۸ نفر حداقل دو نفر در یک روز سال متولد شده‌اند.

۲. از ۸ نفر حداقل دو نفر در یک روز هفته به‌دنیا آمده‌اند.

۳. اگر ۳۹ نفر در یک مهمانی حاضر باشند، ماهی از سال را می‌توان یافت که در آن ماه حداقل ۵ نفر متولد شده‌اند.

۴. فرض کنید T یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد باشد. اگر پنج نقطه در T انتخاب شود، حداقل دوتا از این نقاط فاصله‌ای مساوی یا کمتر از $\frac{1}{2}$ دارند.

پاسخ‌ها: ۱. درست؛ ۲. درست؛ ۳. نادرست؛ ۴. درست.

ب) سؤالات چندگزینه‌ای

۱. ۶۵ کبوتر در حداکثر چند لانه قرار بگیرند تا حداقل در یک لانه بیش از دو کبوتر قرار داشته باشد (سراسری ۸۱)

۱) ۳۱ ۲) ۳۲ ۳) ۳۳ ۴) ۳۴

۲. در یک گروه ۵۵ نفری دســت‌کم چند نفر دارای ماه تولد یکسان هستند؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۳. تاس ســالمی را دســت‌کم چندبار پرتــاب کنیم تا مطمئــن شــویم از یک عدد (نه مشــخص) حداقل ۴ مرتبه ظاهر شده است؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۱ ۳) ۲۵ ۴) ۱۹

پاسخ‌ها: ۱. گزینهٔ ۲؛ ۲. گزینهٔ ۳، ۳. گزینهٔ ۴.

ج) سؤالات تشریحی (سطح متوسط)

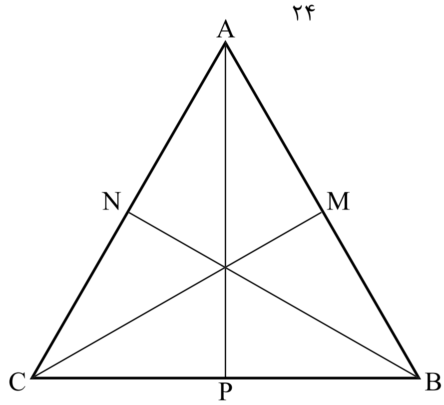
۱. مدرســه‌ای ۱۲ کلاس دارد. اگــر بخواهیــم مطمئن باشــیم در یکی از کلاس‌ها، حداقــل ۴ میز قرار دارد، تعداد میزها حداقل، باید چه عددی باشد؟

جواب: ۳۷

۲. کمتریــن تعداد افــرادی را که حداقل دو نفر از آن‌ها در یک ماه از سال و یک روز هفته متولد شده باشند، به‌دســت آورید. (این ســؤال در قالــب ۴ گزینه‌ای در کنکور سراسری ۸۲ مطرح شده بود.)

جواب: ۸۵

۳. درون مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد، ۱۳ نقطه انتخــاب می‌کنیم. ثابت کنید حداقــل ۳ نقطه وجود دارند که مســاحت مثلث پدید آمده به‌وسیلهٔ آن سه نقطه کمتر از $\frac{\sqrt{۳}}{۲۴}$ است.



حل: می‌دانیم مســاحت مثلث متســاوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۱ برابر اســت با: $S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$. میانه‌های مثلث را رسم می‌کنیم. شش مثلث هم‌نهشت پدید می‌آید که مساحت هر کدام $\frac{۱}{۶}$ مســاحت مثلث ABC، یعنی $\frac{\sqrt{۳}}{۲۴}$ است. حال اگر ۱۳ نقطه (۱۳ کبوتر) را بین ۶ مثلث (۶ لانه) تقسیم کنیم، حداقل در یکی از مثلث‌ها، دست‌کم ۳ نقطه قرار می‌گیرد و مســاحت مثلث پدید آمده توسط آن ۳ نقطه کمتر از $\frac{\sqrt{۳}}{۲۴}$ است.

د) سؤال تشریحی (سطح عالی)

این مقاله را با مســئلهٔ زیر و راه‌حــل کامل آن به پایان می‌بریم. صورت این مســئله در اغلــب کتاب‌های ریاضیات گسســته یافت می‌شــود، اما راه‌حل بدیع و آموزشی آن به مؤلف مقاله تعلق دارد.

مســئله: ثابت کنید از هر مجموعه شامل n عدد طبیعی، می‌تــوان زیرمجموعــه‌ای غیرتهی چنان یافــت که مجموع اعضای آن بر n بخش‌پذیر باشد.

حل: فرض کنیم $A=\{a_۱,a_۲,...,a_n\}$ یک مجموعه شامل n عدد طبیعی باشد. اگر یکی از اعضای مجموعه بر n بخش‌پذیر باشد که حکم ثابت است. پس فرض کنیم هیچ‌کدام از a_iها بر n بخش‌پذیر نباشند. حال تعریف می‌کنیم:

$$S_۱ = a_۱ ,\ S_۲ = a_۱ + a_۲ ,\ \dots ,\ S_k = a_۱ + a_۲ + \dots + a_k ,$$
$$S_n = a_۱ + a_۲ + \dots + a_n$$

اگر یکــی از S_iها بر n بخش‌پذیر باشــد که حکم ثابت اســت. پس فرض می‌کنیم S_iها بر n بخش‌پذیر نباشند. در این صورت می‌توان نوشت:

$$S_i = nq_i + r_i ,\ r_i = ۱,۲,\dots,n-۱ ,\ q_i \in \mathbb{N}$$

(**توجه:** r_i نمی‌تواند صفر باشد، چون فرض کرده‌ایم S_iها بر n بخش‌پذیر نباشند.)

n−۱ لانه را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$\boxed{۱}\ \boxed{۲}\ \boxed{۳}\dots\boxed{n-۱}$

اگــر $S_۱$ تا S_n را به‌عنــوان n کبوتر در نظر بگیریم، چون n>n−۱، پــس طبق اصل لانه کبوتری حداقل لانه‌ای یافت می‌شــود که در آن لانه دســت‌کم دو کبوتر جای می‌گیرد. یعنی دست‌کم S_k و S_j یافت می‌شود که در تقسیم بر n هم باقی‌مانده باشند (فرض کنیم k>j). پس: $n \mid S_k - S_j$ و:

$$S_j = a_۱ + a_۲ + \dots + a_j$$
$$S_k = \underbrace{a_۱ + a_۲ + \dots + a_j}_{S_j} + a_{j+۱} + \dots + a_k$$
$$\Rightarrow S_k - S_j = a_{j+۱} + \dots + a_k \Rightarrow n \mid a_{j+۱} + \dots + a_k$$

پس زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ A یافت شد که مجموع اعضای آن بر n بخش‌پذیر باشد.

* erastizadeh@yahoo.com

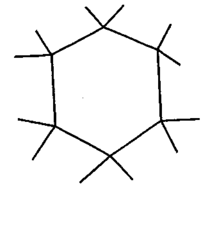
گراف‌های قطبی

کلیدواژه
گراف قطبی، لئونارد اویلر، ماتریس مجاورت

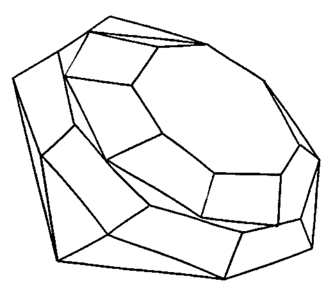
مقدمه

در ریاضیات «گراف‌ها» ابزاری برای بیان ارتباط بین عناصر یا نقاط هستند. هرچند که تئوری گراف‌ها اولین‌بار در سال ۱۷۳۶ توسط **لئونارد اویلر**، ریاضی‌دان سوئیسی برای حل مسئلهٔ «پل‌های کونیگسبرگ» طرح شد، ولی امروزه این شاخهٔ ریاضی در علوم رایانه، علوم پایه، مدیریت حمل‌ونقل و تحقیق در عملیات به‌کار گرفته می‌شود. از طرف دیگر، در گراف‌ها نقاط به‌صورت فرضی در صفحه یا فضا در نظر گرفته می‌شوند و این موضوع باعث شده است گراف‌ها شکل واحدی نداشته باشند. در این مقاله تلاش شده است با تعریف مختصات قطبی هر نقطه، نقاط به‌صورت ثابت یا مجموعه نقاطی که حرکت آن‌ها دارای اصول خاصی است، در نظر گرفته شود.

با معرفی مختصات رئوس و ثابت فرض کردن آن‌ها می‌توان گراف‌ها را به کمک رایانه ترسیم کرد و در بعضی زمینه‌ها مانند ترسیم فرمول‌های مواد آلی در شیمی و محاسبهٔ زاویهٔ پیوند به‌کار برد. همچنین، برای رسم اشکال منتظم در محیط‌های برنامه‌نویسی نیز می‌توان از این روش استفاده کرد. برای مثال، با استفاده از این روش می‌توان شکل‌های ۱ و ۲ را رسم کرد و یک توصیف ریاضی برای آن‌ها نوشت.



شکل ۱



شکل ۲

در واقع در نظریهٔ گراف‌ها، با توجه به ماتریس مجاورت یک گراف، می‌توانیم نموداری از این گراف رسم کنیم، اما با این اطلاعات نمی‌توان مکان هر رأس را تعیین کرد. بنابراین قصد داریم با استفاده از مختصات قطبی، ابتدا مکان هر رأس را مشخص سازیم و سپس با استفاده از ماتریس مجاورت، یال‌های مرتبط با آن رأس را تعیین کنیم.

مختصات قطبی

دستگاه مختصات قطبی، یک دستگاه مختصات دوبعدی است که در آن مکان هر نقطه، با فاصلهٔ آن تا مرکز مختصات (r) و زاویهٔ بین خط رسم شده از مرکز به آن نقطه و محور طول (θ) مشخص می‌شود. این دستگاه در فضای سه‌بعدی به دستگاه مختصات استوانه‌ای و دستگاه مختصات کروی تبدیل می‌شود. اولین استفاده‌های مشابه که به ایجاد کنونی این دستگاه انجامیده است، توسط **ابوریحان بیرونی** انجام شد.

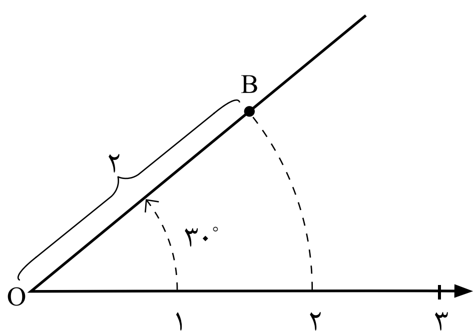
نمایش نقاط

اگر O مبدأ مختصات باشد، نقطهٔ A را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم (معادلهٔ ۱):

معادلهٔ ۱: $A: (X, \theta^\circ)$

این یعنی نقطهٔ A، X واحد به سمت راست و به اندازهٔ θ درجه که با محور تشکیل زاویه داده است، از محور طول‌ها فاصله بگیرد.

مثال: مختصات قطبی نقطهٔ B با توجه به شکل ۳ به این صورت است: معادلهٔ ۲: $B: (۲, ۳۰^\circ)$



شکل ۳

مختصات قطبی هر نقطه از دو عدد تشکیل می‌شود که یکی فاصله و دیگری زاویه است. برای آنکه دچار ابهام نشویم، قرار می‌گذاریم زاویه‌ای را در نظر بگیریم که ضلع دوم آن با چرخش از روی ضلع اول برخلاف جهت گردش عقربه‌های ساعت به‌دست آمده است.

سیداحسان حسینی
دانش‌آموز سال سوم رشته ریاضی،
دبیرستان باقرالعلوم
شهرستان دره‌شهر (ایلام)

نظریهٔ گراف

نظریهٔ گراف شاخه‌ای از ریاضیات است که دربارهٔ گراف‌ها بحث می‌کند. این مبحث در واقع شاخه‌ای از توپولوژی است که با جبر و نظریهٔ ماتریس‌ها پیوند مستحکم و تنگاتنگی دارد. نظریهٔ گراف برخلاف شاخه‌های دیگر ریاضیات نقطهٔ آغاز مشخصی دارد و آن انتشار مقاله‌ای از لئونارد اویلر، ریاضی‌دان سوئیسی، برای حل مسئلهٔ پل‌های کونیگسبرگ در سال ۱۷۳۶ است.

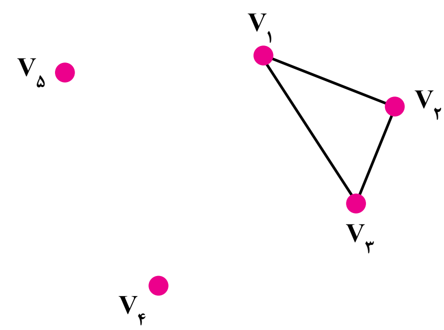
تعریف: گراف (ساده) G زوجی مرتب به‌صورت (V, E) است که در آن V مجموعهٔ متناهی و ناتهی است و E زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های دوعضوی مجموعهٔ V است.

رسم نمودار گراف: هر گراف را می‌توان با یک نمودار موسوم به «نمودار گراف» نمایش داد. برای این کار به ازای هر رأس G یک نقطه در صفحه در نظر گرفته می‌شود و دو نقطهٔ متمایز به‌وسیلهٔ یک پاره‌خط یا کمانی به‌هم وصل می‌شوند؛ به شرط آنکه مجموعهٔ متشکل از دو رأس، عضو مجموعهٔ E (یال‌ها) باشد.

مثال ۱. رسم نمودار گراف G با اطلاعات معادله‌های ۳ و ۴ به‌صورت شکل ۴ است.

$V(G)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ معادلهٔ ۳

$E(G)=\{v_1v_2, v_2v_3, v_1v_3\}$ معادلهٔ ۴



شکل ۴

به رأس‌های v_4 و v_5 **رأس‌های تنها** گفته می‌شود. همچنین رأس‌های v_2 و v_3 مجاورند، چون بین آن‌ها رابطه وجود دارد. روابط میان رأس‌های یک گراف را می‌توان با کمک ماتریس بیان کرد. ما در این مقاله از ماتریسی موسوم به ماتریس مجاورت استفاده می‌کنیم.

ماتریس مجاورت: اگر G = (V,E) گرافی با $V=\{v_1,\dots,v_n\}$ و $E=\{e_1,e_2,\dots,e_m\}$ باشد، ماتریس مجاورت G عبارت است از یک ماتریس n×n مانند: $A=(a_{ij})$ که در آن:

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{اگر یالی بین رئوس } v_j \text{ و } v_i \text{ موجود باشد:}\\ 0 & \text{در غیر این صورت:}\end{cases}$$

برای مثال، ماتریس مجاورت گراف صفحهٔ قبل به‌صورت زیر است:

$$\begin{array}{c|ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ v_3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ v_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}$$

گراف قطبی

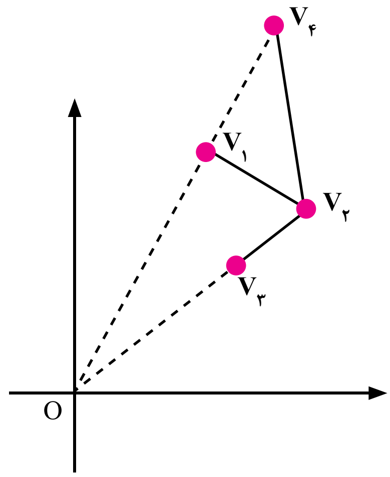
در نظریهٔ گراف‌ها مکان یک رأس تعیین نمی‌شود، لذا در رسم نمودار یک گراف تنها رعایت مجاوربودن یا نبودن رأس‌ها کافی است و مکان هندسی رأس‌ها در صفحه مشخص نمی‌شود. به‌همین دلیل، با استفاده از مختصات قطبی می‌توان ابتدا مکان هر رأس را مشخص کرد و سپس به کمک ماتریس مجاورت یا زوج‌های مرتب، یال‌های بین این نقاط را رسم کرد.

مثال ۱:

$v_1: (15cm, 60^\circ)$, $v_2: (15cm, 30^\circ)$, $v_3: (10cm, 30^\circ)$

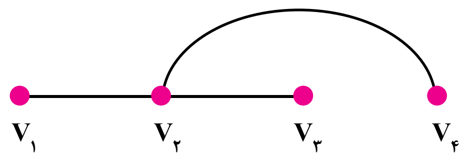
$v_4: (20cm, 60^\circ)$

$$\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 1\\ v_3 & 0 & 1 & 0 & 0\\ v_4 & 0 & 1 & 0 & 0\end{array}$$

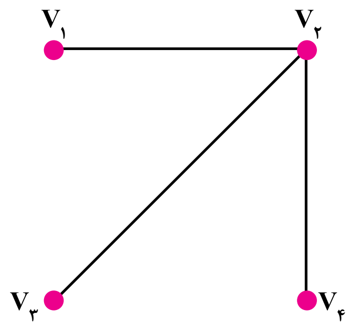


شکل ۵

گراف شکل ۵ را بدون استفاده از مختصات قطبی و تنها با ماتریس مجاورت می‌توان به‌صورت شکل‌های ۶، ۷ ترسیم کرد.



شکل ۶



شکل ۷

مثال ۲:

$v_{۱}$: (۱cm, ۸۵°), $v_{۲}$: (۲cm, ۳۰°), $v_{۳}$: (۸cm, ۰°)

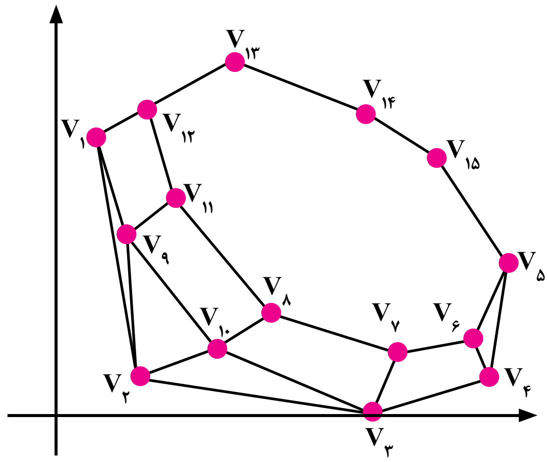
$v_{۴}$: (۱۲cm, ۵°), $v_{۵}$: (۱۳cm, ۲۰°), $v_{۶}$: (۱۱cm, ۱۰°)

$v_{۷}$: (۸/۲۵cm, ۱۰°), $v_{۸}$: (۵cm, ۳۰°), $v_{۹}$: (۲cm, ۷۰°)

$v_{۱۰}$: (۴cm, ۳۰°), $v_{۱۱}$: (۳cm, ۶۵°), $v_{۱۲}$: (۲/۷۵cm, ۸۰°)

$v_{۱۳}$: (۵cm, ۶۵°), $v_{۱۴}$: (۷cm, ۵۰°), $v_{۱۵}$: (۹cm, ۳۵°)

	ن۱	ن۲	ن۳	ن۴	ن۵	ن۶	ن۷	ن۸	ن۹	ن۱۰	ن۱۱	ن۱۲	ن۱۳	ن۱۴	ن۱۵
ن۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۰
ن۲	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۰	۰
ن۳	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰
ن۴	۰	۰	۱	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
ن۵	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱
ن۶	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
ن۷	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
ن۸	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۰
ن۹	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۰
ن۱۰	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰
ن۱۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۰
ن۱۲	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۰
ن۱۳	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰
ن۱۴	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱
ن۱۵	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰



شکل ۸

نتیجه‌گیری

از گراف قطبی می‌توان در کنترل مجموعهٔ ماهواره‌های مخابراتی، تعیین ایستگاه‌های آتش‌نشانی، تعیین پایگاه‌های امدادی اورژانس، ساخت بازی‌های رایانه‌ای، تدارک سرگرمی‌های علمی، تعیین ساختارهای مولکولی، تعیین تعداد ایزومرهای ترکیبات آلی، آموزش ریاضیات کاربردی و... استفاده کرد.

اثبات

نویسنده:
تونی کریلی
ترجمه:
غلامرضا یاسی‌پور

کلیدواژه
مثال نقض؛ استقرای ریاضی؛ روش مستقیم؛ روش غیرمستقیم

اشاره

ریاضی‌دانان می‌کوشند ادعایشان را با اثبات توجیه کنند. تحقیق در مورد قالب‌گیری استدلال‌های منطقی پولادین، نیروی پیش‌برندهٔ «ریاضیات مجرد[1]» است. سلسلهٔ استنتاجات صحیح از آنچه مشخص شده است یا فرض کرده‌ایم، ریاضیدانان را به نتیجه‌ای دلالت می‌کند که بعداً وارد مخزن ریاضیات تثبیت شده می‌شود.

مقدمه

اثبات‌ها به آسانی به‌دست نمی‌آیند، بلکه غالباً در پایان مقدار معتنابهی پژوهش و جست‌وجو در مسیرهای خطا ظاهر می‌شوند. کوشش در به‌دست آوردن آن‌ها زمینهٔ اصلی حیات ریاضی‌دانان را اشغال می‌کند. هر اثبات موفقیت‌آمیز که نشان اعتبار ریاضی‌دان را همراه دارد، قضیهٔ تثبیت‌شده‌ای را از حدس، ایدهٔ درخشان یا گمان اولیه، جدا می‌کند.

کیفیت‌های لازم در هر اثبات عبارت‌اند از دقت، وضوح، و به‌همین اندازه، ظرافت.

به این سه، بینش را نیز اضافه کنید. اثبات خوب «اثباتی است که خردمندترمان کند». همچنین بهتر است که اثباتی داشته باشیم، تا اصلاً نداشته باشیم. پیشرفت بر مبنای مطالب اثبات نشده، این خطر را امکان‌پذیر می‌کند که نظریه‌ها بر ریاضیاتی واقع بر باد هوا بنا شوند.

این‌طور نیست که هر اثباتی تا ابد ثابت بماند، زیرا ممکن است در سایهٔ گسترش‌های مفاهیمی که مرتبط با آن است، به جرح و تعدیل نیاز داشته باشد.

اثبات چیست؟

آیا زمانی که در مورد دستاوردی ریاضی چیزی می‌خوانید یا می‌شنوید، آن را باور می‌کنید؟ چه‌چیز وادارتان می‌کند که باور کنید؟ پاسخ می‌تواند چنین باشد: استدلالی منطقاً درست است، که از ایده‌هایی که پذیرفته‌ایم به گزاره‌ای که در موردش در تردیدیم، پیش برود. این پدیده را ریاضی‌دانان در صورت معمولی‌اش که آمیخته‌ای از زبان روزمره و منطق دقیق است، اثبات می‌نامند. به این ترتیب، بسته به کیفیت اثبات، قانع می‌شویم یا منکر می‌مانیم.

انواع اصلی اثبات به‌کار رفته در ریاضیات عبارت‌اند از: روش مثال نقض[2]؛ روش مستقیم[3]؛ روش غیرمستقیم[4]؛ روش استقرای ریاضی[5].

مثال نقض

اجازه دهید کارمان را با منکربودن آغاز کنیم؛ این روش اثبات ناصحیح بودن یک گزاره است. در این مورد برای مثال، گزاره‌ای معین در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم این ادعا را می‌شنویم که نتیجهٔ ضرب هر عدد در خودش، عددی زوج است. آیا آن را می‌پذیرید؟ پیش از پاسخ دادن، باید چند مثال را آزمایش کنیم. اگر عددی داشته باشیم، مثلاً ۶، و آن را در خودش ضرب کنیم، ۳۶=۶×۶ را به‌دست آوریم. درمی‌یابیم که ۳۶ در واقع عددی زوج است.

اما با یک گل بهار نمی‌شود. ادعای مذکور در مورد هر عدد بود، و بی‌نهایت عدد داریم. برای اینکه مظّنهٔ بیشتری در مورد مسئله به‌دست آوریم، باید مثال‌های بیشتری را بررسی کنیم.

با بررسی مثلاً ۹، درمی‌یابیم که: ۸۱=۹×۹. اما ۸۱ عددی فرد است. یعنی گزارهٔ مذکور که *تمام* اعداد چون در خودشان ضرب شوند عددی زوج به‌دست می‌دهند، دروغ است. مثالی چنین به نقض ادعای اولیه می‌انجامد و به مثال نقض موسوم است. به‌عنوان نمونه، یک مثال نقض در مورد این ادعا که «تمام قوها سفیدند»، دیدن یک قوی سیاه است. بخشی از لذات ریاضیات، جست‌وجوی مثالی نقض برای کنارزدن قضایای ادعایی است.

ممکن است در صورت شکست خوردن در یافتن یک مثال نقض، این احساس را داشته باشیم که گزارهٔ مورد بحث درست است. در این صورت، ریاضی‌دان مجبور به انجام بازی دیگری است. یعنی باید اثباتی بسازد و در این مورد، سر راست‌ترین نوع اثبات، روش اثبات مستقیم است.

روش مستقیم

در روش مستقیم، با استدلال منطقی از آنچه قبلاً اثبات‌شده یا فرض شده به‌سوی نتیجه حرکت می‌کنیم. اگر بتوانیم این کار را انجام دهیم، یک «قضیه»[6] داریم. در مورد ا دعای پیشین، نمی‌توانیم اثبات کنیم که ضرب هر عدد در خودش به‌عددی زوج می‌انجامد، زیرا قبلاً آن را رد کرده‌ایم. اما ممکن است بتوانیم مطلبی به‌دست آوریم. تفاوت بین اولین مثالمان، یعنی ۶، و مثال نقضمان، یعنی ۹، در این است که عدد اول زوج و مثال نقض، فرد است. در این مورد، تغییر «فرض»[7] کاری است که می‌توان انجام داد. بنابراین، گزارهٔ جدیدمان چنین است: «اگر عدد *زوجی* را در خودش ضرب کنیم، نتیجه عددی زوج است.»

ابتدا، چند مثال عددی دیگر را بررسی می‌کنیم و درمی‌یابیم که این گزاره هر بار محقق می‌شود و نمی‌توان مثال نقضی به‌دست آورد. با تغییر مسیر، سعی در اثبات آن می‌کنیم، اما چگونه کارمان را شروع کنیم؟ می‌توانیم با عدد زوج عمومی n آغاز کنیم، ولی از آنجا که این کار کمی مجرد به‌نظر می‌رسد، ملاحظه می‌کنیم که اثبات با بررسی یک عدد واقعی، مثلاً ۶، چگونه پیش می‌رود. همان‌طور که می‌دانیم، عدد زوج عددی است که مضربی از ۲ است؛ یعنی ۶=۳×۲. از آنجا که ۶+۶+۶+۶+۶+۶=۶×۶ یا به‌صورت دیگر:

۶×۶=۲×۳+۲×۳+۲×۳+۲×۳+۲×۳+۲×۳

یا با بازنویسی آن، با استفاده از پرانتز:

۶×۶=۲×(۳+۳+۳+۳+۳+۳)

که نشان می‌دهد ۶×۶ مضربی از ۲ است و چون چنین است، عددی زوج است. اما در این استدلال، مطلب خاصی در مورد ۶ وجود ندارد و می‌توانستیم کارمان را با n=۲×k شروع کنیم، $n\times n=2\times(k+k+...+k)$ را به‌دست آوریم و نتیجه بگیریم که n×n زوج است. اینک اثباتمان کامل است.

در ترجمهٔ «مقدمات اقلیدس»[8] ریاضی‌دانان متجدد در پایان اثبات، برای بیان این موضوع که کار پایان‌یافته، «QED» می‌نوشتند که مختصر عبارت لاتینی «quod erat demonstrandum» است (به معنیِ: باید به اثبات می‌رسید یا فهوالمطلوب). امروزه از یک مربع پر، یعنی ■ استفاده می‌کنند. این مربع، به نام **پل هالموس**[9]، معرف آن، به «هالموس» مرسوم است.

روش غیرمستقیم

در این روش وانمود می‌کنیم نتیجه دروغ است و با استفاده از استدلالی منطقی، مبرهن می‌کنیم که این فرض نقیض فرض مسئله است. اجازه دهید نتیجهٔ پیشین را با این روش اثبات کنیم.

فرضمان این است که n زوج است و وانمود می‌کنیم n×n فرد است. می‌توانیم بنویسیم: $n\times n=n+n+...+n$. در این جمع n بار n داریم و به این معنی است که n نمی‌تواند زوج باشد (زیرا اگر چنین باشد n×n زوج می‌شود). بنابراین n فرد است که نقیض فرضمان است. ■

در واقع این روش، صورت معتدل روش غیرمستقیم است. روش غیرمستقیم نیرومند، به‌عنوان «برهان خلف»[10] (تحویل به مهمل) شناخته می‌شود که یونانیان علاقهٔ بسیاری به آن داشتند. در آکادمی آتن، **سقراط**[11] و **افلاطون**[12] علاقه داشتند که موضوع مورد بحث را با پیچیدن خصم در شبکه‌ای از تناقضات، اثبات کنند که بیرون از آن، موضوعی بود که سعی در اثباتش داشتند. اثبات کلاسیک این موضوع که ریشهٔ دوم ۲ عددی گنگ است، یکی از این موارد محسوب می‌شود که در آن کار را با این فرض آغاز می‌کنیم که ریشهٔ دوم ۲ عددی گویاست و آن‌گاه به استخراج نقیض این فرض می‌پردازیم.

روش استقرای ریاضی

استقرای ریاضی روشی نیرومند در اثبات این موضوع است که دنباله‌ای از گزاره‌های P_1، P_2، P_3، ... جمیعاً راست‌اند. این روش، در دههٔ ۱۸۳۰، توسط **آگوستون دومورگان**[13] مطرح شد. او توانست آنچه را که صدها سال پیش شناخته بودند، فرمول‌بندی کند. این تکنیک خاص (که نباید با «استقرای علمی»[14] اشتباه شود) به‌گونه‌ای وسیع در اثبات گزاره‌های شامل «اعداد درست»[15] به‌کار می‌رود. روش مورد بحث، به‌خصوص، در «نظریهٔ گراف‌ها»[16]، «نظریهٔ اعداد»[17] و «علوم رایانه»[18] عموماً سودمند است.

به‌عنوان مسئله‌ای تمرینی به مسئلهٔ جمع اعداد فرد

انواع اصلی اثبات به‌کار رفته در ریاضیات عبارت‌اند از: روش مثال نقض؛ روش مستقیم؛ روش غیرمستقیم؛ روش استقرای ریاضی

می‌پردازیم. برای مثال، جمع سه عدد فرد اولیه، یعنی ۵+۳+۱ برابر ۹ است، در حالی که مجموع چهار عدد فرد اولیه، یعنی: ۷+۵+۳+۱ برابر ۱۶ است. اما ۹ برابر است با: $۳^۲$=۳×۳ و ۱۶ برابر است با: $۴^۲$=۴×۴. بنابراین آیا می‌شود جمع n عدد فرد اولیه برابر n^2 باشد؟ در صورتی که مقدار به تصادف انتخاب شده‌ای از n، مثلاً n=۷، را بررسی کنیم، درمی‌یابیم که در واقع مجموع ۷ عدد فرد اولیه، یعنی:

۱+۳+۵+۷+۹+۱۱+۱۳=۴۹

برابر $۷^۲$ است. ولی آیا این نمونه در مورد جمیع مقادیر n صادق است؟ چگونه می‌توان مطمئن بود؟ در این مورد با مشکل مواجه هستیم، زیرا نمی‌توان امیدوار بود که بتوانیم بی‌نهایت حالت را یکی‌یکی مورد بررسی قرار دهیم.

این مرحله‌ای است که استقرای ریاضی قدم به میدان می‌گذارد. به‌طور غیررسمی، این روش، «روش دومینویی»[19] اثبات است. این استعاره در مورد ردیفی از دومینوها به‌کار می‌رود که بر انتهایشان ایستاده‌اند. اگر یک دومینو بیفتد، پهلویی خود را می‌اندازد. این مطلب واضح است. پس تنها چیزی که برای انداختن همه‌*شان* نیاز داریم، افتادن اولی است.

می‌توان این تفکر را در مورد مسئلهٔ اعداد فرد هم به‌کار برد. گزارهٔ P_n بر این است که مجموع n عدد فرد اولیه به n^2 سر می‌زند. در این صورت، استقرای ریاضی زنجیره‌ای از واکنش‌ها برقرار می‌کند که با توجه به آن‌ها جمیع موارد P_1، P_2، P_3، ... صادق خواهند بود. گزارهٔ P_1 بداهتاً راست است، زیرا: $۱^۲$=۱. سپس P_2 راست است، زیرا: $۲^۲$=$۱^۲$+۳=۱+۳ و P_3 راست است، زیرا: $۳^۲$=$۲^۲$+۵=۱+۳+۵. P_4 نیز راست است، زیرا: $۴^۲$=$۳^۲$+۴=۷+۵+۳+۱. به این ترتیب، دستاورد هر مرحله را برای جهش به مرحلهٔ بعدی به‌کار می‌بریم. این فرایند را می‌توان برای قالب‌بندی روش استقرای ریاضی فرمول‌بندی کرد.

مشکلات اثبات

اثبات‌ها به انواع و اقسام سبک‌ها و اندازه‌ها ظاهر می‌شوند. بعضی کوتاه و مرتب و منظم‌اند؛ به‌خصوص آن‌ها که در کتاب‌های درسی یافت می‌شوند. پاره‌ای دیگر با به تفصیل آوردن آخرین تحقیقات، سر به هزاران صفحه می‌زنند؛ به‌طوری که اشخاص معدودی از کل استدلال این حالت سردرمی‌آورند.

اثبات‌ها به انواع و اقسام سبک‌ها و اندازه‌ها ظاهر می‌شوند. بعضی کوتاه و مرتب و منظم‌اند؛ به‌خصوص آن‌ها که در کتاب‌های درسی یافت می‌شوند. پاره‌ای دیگر با به تفصیل آوردن آخرین تحقیقات، سر به هزاران صفحه می‌زنند؛ به‌طوری که اشخاص معدودی از کل استدلال این حالت سردرمی‌آورند

در این مورد بحث‌هایی اساسی نیز مطرح هستند. به‌عنوان نمونه، تعداد اندکی از ریاضی‌دانان، از روش برهان خلف (اثبات غیرمستقیم)، آنجا که به‌وجود می‌پردازد، ناخشنودند. آیا اگر این فرض که جواب یک معادله وجود ندارد، به نقیض بینجامد، در اثبات این موضوع کفایت می‌کند که جوابی وجود دارد؟ مخالفان این روش اثبات ادعا می‌کنند که منطق صرفاً یک ترفند است و نمی‌گوید که چگونه جوابی واقعی را به‌دست آوریم. این افراد را «ساختارگرا»[20] (با تفاوت‌های جزیی) می‌نامند؛ افرادی که عقیده دارند روش‌های اثبات از به‌دست دادن «مفهوم عددی»[21] عاجزند. آنان ریاضی‌دانان کلاسیکی را که روش برهان خلف را به‌عنوان سلاحی بنیانی در زرادخانهٔ ریاضی در نظر می‌گیرد، تحقیر می‌کنند.

از طرف دیگر، ریاضی‌دانان سنتی‌تر خواهند گفت که غیرقانونی اعلام کردن این نوع استدلال، به معنی کار با یک دست در حالی است که دست دیگر بسته باشد. از این گذشته، انکار دستاوردهای بسیاری که با استفاده از روش غیرمستقیم اثبات شده‌اند، فرشینهٔ ریاضیات را نخ‌نما به‌نظر می‌رساند!

تاریخچه

- حدود ۳۰۰ قبل از میلاد: «مقدمات **اقلیدس**» مدل اثبات ریاضی «methematical proof» را به‌دست می‌دهد.
- ۱۶۳۷ میلادی: **دکارت** در کتاب خود به‌نام «*گفتار در روش*»، دقت ریاضی را به‌عنوان یک مدل بنیان می‌گذارد.
- ۱۸۳۸ میلادی: **دومورگان** اصطلاح «استقرای ریاضی» را معرفی می‌کند.
- ۱۹۶۷ میلادی: **بیشاب** نتایجی را منحصراً با روش‌های سازنده (constructive methods) اثبات می‌کند.
- ۱۹۷۶ میلادی: **ایمره لاکاتوس** کتاب مؤثر «اثبات‌ها و ابطال‌ها» را منتشر می‌کند.

پی‌نوشت‌ها

1. pure mathematics
2. method of the counterexample
3. direct method
4. indirect method
5. method of mathematical induction
6. theorem
7. hypothesis
8. Euclid's *Elements*
9. Paul Halmos
10. reductio ad absurdam
11. Socrates
12. Plato
13. Augustus De Morgan
14. scientific indction
15. whole numbers
16. graph theory
17. number theory
18. computer science
19. domino method
20. Constructivist
21. numerical meaning

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

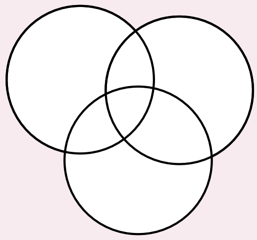
ایستگاه اول:

جورچین‌های عددی

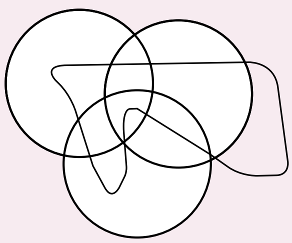
■ **جورچین اول:** حتماً با مربع‌های جادویی (وفقی) آشنایی دارید. می‌دانید که معمولاً در یک مربع جادویی n×n، اعداد طبیعی متوالی ۱، ۲، ۳، ... و n^2 را باید طوری در خانه‌های جدول n×n قرار داد که مجموع عددهای همهٔ n سطر و n ستون و دو قطر مربع مساوی هم باشد. دربارهٔ این مربع‌ها و ویژگی‌های آن‌ها در منابع متعددی می‌توانید مطالبی بیابید. اما در اینجا می‌خواهیم از یک مربع جادویی استثنایی و کم‌نظیر صحبت کنیم؛ مربعی که (به‌جای مجموع) حاصل‌ضرب عددهای سطرها و ستون‌ها و قطرهای آن با هم برابر باشد! با عملیات جبری نسبتاً ساده‌ای می‌توان ثابت کرد که این کار برای عددهای طبیعی متوالی امکان‌پذیر نیست. آیا می‌توانید نشان دهید که برای عددهای متوالی ۱، ۲، ... و ۹، امکان ایجاد یک مربع جادویی ۳×۳ با ویژگی گفته شده وجود ندارد؟

اما حالا بحث ما این نیست. ما از شما می‌خواهیم که ۹ عدد طبیعی ۴، ۶، ۸، ۹، ۱۲، ۱۶، ۱۸، ۲۴ و ۳۶ را در خانه‌های جدول (مربع) ۳×۳ طوری بچینید که حاصل‌ضرب عددهای هر سه سطر و هر سه ستون و هر دو قطر با هم برابر باشند.

■ **جورچین دوم:** آیا می‌توانید عددهای طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ را در هفت ناحیهٔ شکل زیر، طوری قرار دهید که هر دو عددی که در دو ناحیهٔ مجاور (دو ناحیه‌ای که دارای مرز مشترک هستند) واقع‌اند، نسبت به یکدیگر اول باشند؟ (یعنی عامل مشترکی غیر از ۱ نداشته باشند.)



■ **جورچین سوم:** این یکی کمی دشوارتر است! آیا می‌توانید اعداد طبیعی متوالی ۱، ۲، ۳، ... و ۱۵ را در پانزده ناحیهٔ شکل زیر طوری قرار دهید که هر دو عدد واقع در دو ناحیهٔ مجاور نسبت به یکدیگر اول باشند؟



پای تخته

محرم نژاد ایردموسی*

اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «فصل‌نامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی مسئله‌ها و راه‌حل‌ها تشکیل شده است. در هر شماره از فصل‌نامه، ۲۰ مسئله جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در فصل‌نامه، برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم که مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس فصل‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی‌که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل dpi ۱۵۰) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در فصل‌نامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود. نکتهٔ آخر اینکه در چند شمارهٔ اول، سهم مسئله‌ها بیشتر است و با دریافت پاسخ‌های شما، بخش راه‌حل‌ها به‌تدریج پربارتر خواهد شد. منتظر راه‌حل‌های ارسالی شما هستیم.

بخش اول: مسئله‌ها

۴۱. همهٔ زوج اعداد حقیقی (a,b) را بیابید، به‌طوری که:
ع+ع = ۱ و ع^۴ + ع^۴ = (ع^۳ + ع^۳)(ع^۲ + ع^۲).

۴۲. مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC از متوازی‌الاضلاع ABCD روی قطر BD واقع است. ثابت کنید ABCD لوزی است.

۴۲. قطرهای A_1A_3، A_2A_4، A_3A_5، A_4A_6، A_5A_1 و A_6A_2 از شش‌ضلعی $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$، یکدیگر را قطع می‌کنند تا شش‌ضلعی منتظم $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ حاصل شود. ثابت کنید $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ نیز منتظم است.

۴۴. در مثلث ABC با طول اضلاع ع = |ب ا|، ع = |ا ب| و ع = |ب ا|، ثابت کنید: ∠ب ا ب = °۶۰ اگر و تنها اگر: ۳/(ع+ع+ع) = ۱/(ع+ع) + ۱/(ع+ع).

۴۵. رقم یکان عدد ذ = ۱^۱ + ۲^۲ + ۳^۳ + ... + ۲۰۱۱^۲۰۱۱ را بیابید.

۴۶. همهٔ اعداد طبیعی n را بیابید، به‌طوری که ۱ + ۲^۲ + ۳^۳ + ۴^ک مربع کامل باشد.

۴۷. در چهارضلعی ABCD، داریم: |پ ا| = |پ ب| = |پ ب| و ∠ب ا ب = ∠ب ا ب = ∠ب ب. مطلوب است اندازهٔ زوایای چهارضلعی.

۴۸. دو قطر ذوزنقهٔ ABCD با دو قاعدهٔ AB و CD، یکدیگر را در نقطهٔ P قطع می‌کنند. ثابت کنید مجموع مساحت دو مثلث PAB و PCD از مجموع مساحت دو مثلث PBC و PDA بیشتر است.

۴۹. نامساوی زیر را ثابت کنید:

$$2010 < \frac{2^2+1}{2^2-1}+\frac{3^2+1}{3^2-1}+\dots+\frac{2010^2+1}{2010^2-1} < 2010+\frac{1}{2}$$

۵۰. یک ۱۳۹۲-ضلعی به تعدادی مثلث افراز شده است.

حداقل تعداد مثلث‌ها را بیابید.

۵۱. بـرای هـر چهار ضلعی با طول اضـلاع a، b، c و d و مساحت S ثابت کنید:

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \geq 4S$$

نامساوی برای کدام چهارضلعی‌ها به تساوی تبدیل خواهد شد؟

۵۲. عـدد طبیعـی M را جادویـی می‌نامیـم، هـرگاه حاصل‌ضرب ارقام آن با مجموع ارقام آن برابر باشد.

الف) ثابت کنید برای هر $n=1,2,\dots,10$، عددی n رقمی و جادویی وجود دارد.

ب) ثابت کنید بی‌شمار عدد طبیعی جادویی وجود دارد.

۵۳. مسـتطیلی با طول و عـرض m و n به مربعات واحد افراز شده اسـت و $m,n \in \mathbb{N}$، به‌طوری که مجموع مسـاحت مربعات واحدی که مجاور اضلاع مستطیل هستند، برابر است با نصف مساحت مستطیل. مقادیر طبیعی m و n را بیابید.

۵۴. فرض کنیـد x، y و z اندازه‌هـای زوایای یک مثلث برحسب درجه باشند. ثابت کنید:

الف) اگر $\frac{x}{y}$، $\frac{y}{z}$ و $\frac{z}{x}$ اعدادی گویا باشند، آن‌گاه x، y و z نیز گویا هستند.

ب) اگر تنها یکی از اعداد $\frac{x}{y}$، $\frac{y}{z}$ و $\frac{z}{x}$ گویا باشد، آن‌گاه x، y و z گنگ هستند.

۵۵. در یک مدرسـه ۱۰ کلاس وجود دارد. هر دانش‌آموز از یـک کلاس دقیقاً با یـک دانش‌آموز از هریک از ۹ کلاس دیگر آشناست. ثابت کنید تعداد دانش‌آموزان کلاس‌ها یکسان است.

۵۶. مستطیل L را می‌توان به ۲۰۰ مربع یکسان افراز کرد. همچنین می‌توان L را به ۲۸۸ مربع یکسان افراز کرد. ثابـت کنید L را می‌توان به ۳۹۲ مربع یکسـان افراز کرد.

۵۷. ثابت کنید مجموع هر سه عدد طبیعی متوالی، عددی است که مجموع مکعبات آن سه عدد را می‌شمارد.

۵۸. x و y دو عـدد حقیقـی هسـتند، به‌طـوری کـه: $(x+5)^2+(y-12)^2=14^2$. کمتریـن مقـدار x^2+y^2 را بیابید.

۵۹. حاصل عبارت $\frac{1}{1!1391!}+\frac{1}{3!1389!}+\dots+\frac{1}{1391!1!}=S$ را به‌دست آورید.

۶۰. k و n دو عدد طبیعی هستند. ثابت کنید:

$$1\times2\times\dots\times k+2\times3\times\dots\times(k+1)+\dots$$
$$+n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)=\frac{n(n+1)\dots(n+k)}{k+1}$$

بخش دوم: راه‌حل‌ها

۱. مجموعهٔ $X=\{1,2,\dots,n\}$ مفروض است.

الف) X چند زیرمجموعه با تعداد اعضای زوج و مجموع اعضای زوج دارد؟

ب) X چند زیرمجموعه با تعداد اعضای زوج و مجموع اعضای فرد دارد؟ (این مسئله دو قسمت دیگر نیز دارد. آن‌ها را طرح و حل کنید.)

راه‌حل:

الـف) بـرای تشـکیل چنیـن زیرمجموعـه‌ای، ابتـدا یـک زیرمجموعهٔ دلخواه از $X-\{1,2\}$ انتخـاب می‌کنیم (بـه $2^{(n-2)}$ طریـق). سـپس بـا توجـه بـه تعـداد اعضـا و مجموع اعضـای ایـن زیرمجموعه، دربـارهٔ عضویـت دو عدد ۱ و ۲ در ایـن زیرمجموعـه

تصمیم می‌گیریم. اگــر تعداد اعضا و مجموع اعضای زیرمجموعــهٔ انتخابی هر دو فرد بودند، تنها عدد ۱ را به زیرمجموعه اضافه می‌کنیم تا به شــرایط مطلوب برســیم. اگر تعداد اعضا فرد و مجموع اعضا زوج بود، تنها عدد ۲ را بــه زیرمجموعه اضافه می‌کنیم و... در نتیجه تعداد زیرمجموعه‌های مطلوب برابر اســت با: $2^{(n-2)}$

ب) به طریق مشابه ثابت می‌شود که تعداد زیرمجموعه‌های خواسته شده برابر است با: $2^{(n-2)}$.

دو قســمت دیگر که به طریق مشابه می‌توان آن‌ها را حل کرد چنین هستند:

ج) X چنــد زیرمجموعه با تعداد اعضــای فرد و مجموع اعضای زوج دارد؟

د) X چنــد زیرمجموعه با تعــداد اعضا و مجموع اعضای فرد دارد؟

۲. در ساعت ۹ صبح، عقربه‌های ساعت زاویهٔ ۹۰ درجه با هم می‌ســازند. بعد از ساعت ۹، اولین زمانی را مشخص کنید که مجدداً دو عقربه زاویهٔ ۹۰ درجه با هم می‌سازند.

راه‌حل: فرض کنید x دقیقه بعد از ســاعت ۹، مجدداً این اتفاق بیفتد. در این x دقیقه، عقربهٔ دقیقه‌شمار 6x درجه و عقربهٔ ساعت‌شمار $\frac{x}{2}$ درجه را طی کرده‌اند. بنابراین زاویهٔ بین آن‌ها برابر است با: $270-6x+\frac{x}{2}$. در نتیجه: $270-6x+\frac{x}{2}=90$ که نتیجه می‌دهد: $x=\frac{360}{11}$. بنابراین بعد از حدود $32/\overline{72}$ دقیقه، مجدداً زاویهٔ بین دو عقربه قائمه خواهد شد.

۳. عدد حقیقی x را بیابید، به‌طوری که جزء اعشاری، جزء صحیح و خود عدد

الف) سه جملهٔ متوالی یک تصاعد حسابی باشند.

ب) سه جملهٔ متوالی یک تصاعد هندسی باشند.

راه‌حل:

الف) باید داشته باشیم: $2[x]=x+\{x\}$ که در آن، {x} همان جزء اعشاری x و [x] همان جزء صحیح عدد است. در نتیجــه چون: $x=[x]+\{x\}$، پس $[x]=2\{x\}$. اما می‌دانیم: $0\le\{x\}<1$ و تنها دو حالت $[x]=\{x\}=0$ و یا $[x]=1=2\{x\}$ نتیجه خواهد شد. بنابراین: $x=0$ یا $x=1/5$.

ب) باید داشته باشیم: $[x]^2=x\{x\}$. می‌دانیم: $0\le\{x\}<1$ و $x<[x]+1$. در نتیجه: $[x]^2=x\{x\}<[x]+1$. اما چون [x] عــددی صحیح اســت، تنها مقدار قابــل قبول در نامساوی $[x]^2<[x]+1$، مقدار $[x]=1$ است. در نتیجه باید داشــته باشیم: $x(x-1)=1$ و $1\le x<2$. با حل این معادلهٔ درجه دوم به مقدار $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ می‌رسیم.

۴. اعداد طبیعی را به‌طور مارپیچ مطابق شکل روی صفحه نوشــته‌ایم. موقعیت عــدد ۱۳۹۲ را نســبت به عدد ۱ مشخص کنید.

۷	۸	۹	۱۰
۶	۱	۲	۱۱
۵	۴	۳	۱۲
-	-	۱۴	۱۲

راه‌حل: با دنبال کردن الگو خواهیم دید که مربع اعداد فرد به‌صورت قطری قرار می‌گیرند. بزرگ‌ترین مربع عدد فرد که از ۱۳۹۲ کوچک‌تر است، $37^2=1369$ است. بنابراین اگر عدد ۱ را در مبدأ مختصات فرض کنیم، عدد ۱۳۶۹ در نقطهٔ (۱۸،۱۸) واقع می‌شــود. در نتیجه عدد ۱۳۷۰ در نقطهٔ (۱۹،۱۸)، عدد ۱۳۷۱ در نقطهٔ (۱۹،۱۷)، ...، و عدد ۱۳۹۲ در نقطهٔ (۱۹،‎-۴) واقع می‌شود.

۵. زوج (x,y) از اعــداد طبیعــی را مربع می‌نامیم، هرگاه x+y و x.y هر دو مربع کامل باشند (مانند ۲۰ و ۵). ثابت کنید هیچ مربعی موجود نیست که یکی از مؤلفه‌هایش ۳ باشد.

راه‌حــل: حکــم را به روش برهان خلــف اثبات می‌کنیم. فــرض کنید (۳,y) یک مربع باشــد. در نتیجه: $a^2=y+3$ و $b^2=3y$ که در آن‌هــا، $a,b\in\mathbb{N}$. در نتیجه: $9=3a^2-b^2$. از این تســاوی نتیجه می‌شود که b باید مضرب ۳ باشد. پس فرض می‌کنیــم: $b=3c$ و در معادله جای‌گذاری می‌کنیم. در نتیجه: $3=a^2-3c^2$. از این تســاوی نتیجه می‌شــود که a باید مضرب ۳ باشــد. بنابرایــن فرض می‌کنیم: $a=3d$ و در معادلــه جای‌گذاری می‌کنیــم. در نتیجه: $1=3d^2-c^2$. بنابراین: $c^2=3d^2-1$. از طرف دیگر می‌دانیم مربع هر عدد صحیح یا به فرم 3k است و یا به فرم 3k+1 و هیچ‌وقت به فرم 3k+2 (یــا 3k-1) نخواهد بود. (چرا؟) در نتیجه c^2 نمی‌تواند با $3d^2-1$ برابر باشد و تناقض است. این تناقض نشان می‌دهد (۳,y) نمی‌تواند مربع باشد.

۶. دستگاه معادلات زیر را در مجموعه اعداد حقیقی حل کنید:

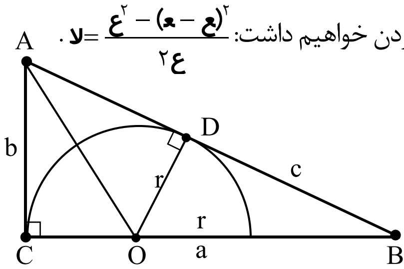
$$\begin{cases} 2(x+y-2)=y(x-y+2) \\ x^2(y-1)+y^2(x-1)=xy-1 \end{cases}$$

راه‌حل: می‌توان معادلهٔ اول را به $(2-y)(2+y)=(2-y)x$ تبدیــل کرد. دو حالت در نظر می‌گیریــم: در حالت اول، اگر: $2-y=0$، آن‌گاه $y=2$ و بــا جای‌گــذاری در دو معادله، به

معادلهٔ ۰ = ۳ − **و**۲ + ^۲^**و** می‌رسیم که دو جواب دارد: ۱ = **و** و ۳− = **و**. در حالت دوم، اگر ۰ ≠ ۲ − **ه**، آن‌گاه: ۲ + **ه** = **و**. با جای‌گذاری در معادلهٔ دوم به معادلهٔ ۰ = (۱ − ^۲^**ه**)(۳ + **ه**۲) می‌رسیم و سه جواب ۱±، $-\frac{۳}{۲}$ برای مقدار y به‌دست می‌آید. در نتیجه جواب‌های دستگاه عبارت‌اند از: (۱,۲)، (۳,۲−)، (۳,۱)، (۱,۱−) و $(-\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲})$.

۷. مطابق شکل، نیم‌دایرهٔ ´C در داخل مثلث قائم‌الزاویه‌ای با طول اضلاع a، b و c محاط شده است. شعاع نیم‌دایره را برحسب a، b و c به‌دست آورید.

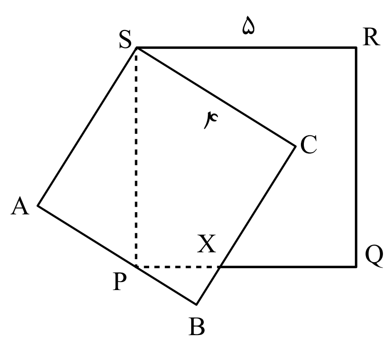
راه‌حل: مرکز نیم‌دایره را O و نقطهٔ تماس نیم‌دایره با ضلع AB را D می‌نامیم. O را به D و A وصل می‌کنیم. چون: **لا** = **بد**=**پد**، در نتیجه نقطهٔ O روی نیم‌ساز زاویهٔ A واقع است و در نتیجه: **ع** =**پا**. حال رابطهٔ فیثاغورث را در مثلث ODB می‌نویسیم. داریم: ^۲^(**ع** − **ﻌ**) + **لا** = ^۲^(**لا** − **ع**). پس از ساده کردن خواهیم داشت: $\frac{(\text{ع}-\text{ﻌ})^{۲}-\text{ع}^{۲}}{۲\text{ع}}$ = **لا**.



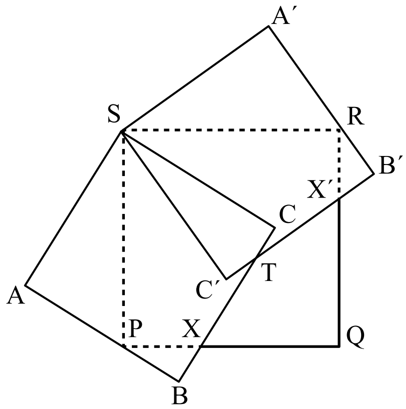
شکل ۱

۸. ثابت کنید یک مربع ۵×۵ را می‌توان با سه مربع ۴×۴ پوشاند.

راه‌حل: مربع SABC به ضلع ۴ را مطابق شکل ۲ طوری روی مربع SPQR به ضلع ۵ قرار می‌دهیم که طول AP برابر ۳ و طول PB برابر ۱ باشد. از تشابه دو مثلث SAP و PBX می‌توان نتیجه گرفت: $\frac{۵}{۴}$ = **سخ**. مربع دوم به ضلع ۴ را مطابق شکل ۳ و به طریق مشابه در صفحه قرار می‌دهیم. با توجه به اینکه QB و ´QB هر دو طولی برابر ۳/۷۵ دارند، به‌راحتی می‌توان چهارضلعی ´TBQB را با مربع سوم پوشاند (چرا؟).



شکل ۲



شکل ۳

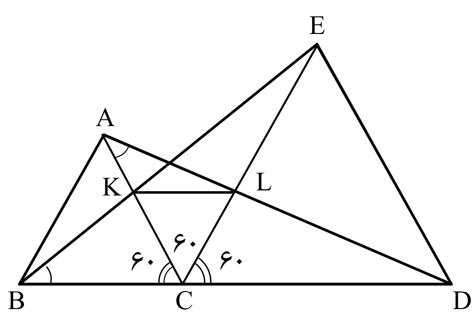
۹. با فرض $(۲+۱)(۲^{۲}+۱)(۲^{۴}+۱)...(۲^{۱۰۲۴}+۱)+۱$ = **ذ**، حاصل $\text{ذ}^{\frac{۱}{۱۰۲۴}}$ را بیابید.

راه‌حل:
$$\text{ذ} = (۲^{۲}-۱)(۲^{۲}+۱)...(۲^{۱۰۲۴}+۱)+۱$$
$$= (۲^{۴}-۱)(۲^{۴}+۱)...(۲^{۱۰۲۴}+۱) = ...$$
$$= (۲^{۱۰۲۴}-۱)(۲^{۱۰۲۴}+۱)+۱ = ۲^{۲۰۴۸}$$

در نتیجه: $\text{ذ}^{\frac{۱}{۱۰۲۴}} = ۲^{۲} = ۴$.

۱۰. دو مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و CDE در یک طرف خط راست BCD هستند. اگر BE، AC را در K و DA، CE را در L قطع کند، ثابت کنید KL و BD موازی‌اند.

راه‌حل: چون °۶۰ =**پ بِ پِ**∠ = **ا بِ**∠، در نتیجه: °۶۰ = **پِ بِ ا**∠. بنابراین: **پ بِ ا**∠ = **پِ بِ**∠. چون **بِ** = **بِ ا** و **پِ بِ**=**پ بِ**، در نتیجه دو مثلث ACD و BCE همنهشتند. پس: **پِ بِ**∠ =**پ ا بِ**∠ و در نتیجه دو مثلث ACL و BCK همنهشتند. در نتیجه **چ بِ** = **جِ بِ** که نشان می‌دهد، مثلث CKL متساوی‌الاضلاع است و °۶۰ =**چ جِ بِ**∠. در نتیجه از تساوی دو زاویهٔ BCK و CKL، توازی BC و KL نتیجه می‌شود.



شکل ۴

* iradmusa@yahoo.com

آموزشی

ویژگی‌های ریاضی ستاره‌های مرتبهٔ n اُم

هادی صفری
دانش‌آموز ریاضی ـ فیزیک
مرکز پرورش استعدادهای درخشان و پژوهشگران جوان
واحد شهید بهشتی شهرکرد

چکیده
هر چندضلعی شامل تعدادی رأس، تعدادی ضلع و چندین قطر است. در برخی چندضلعی‌ها، از برخورد قطرها شکل‌های زیبایی شبیه به شکل‌هایی که به‌طور عمومی آن‌ها را به نام ستاره می شناسند، تشکیل می‌شوند که با کمی دقت قابل تشخیص هستند. در این مقاله، به بررسی برخی ویژگی‌های این شکل‌های ستاره‌مانند و چندضلعی‌های سازندهٔ آن‌ها پرداخته شده است.

کلیدواژه
چندضلعی، ستاره، هندسه مسطحه، آنالیز ترکیبی، ریاضیات محض.

مقدمه

مطلب کوتاهی در صفحهٔ ۳۲۶ کتاب ارزشمند «*آموزش هنر حل مسئله*» دربارهٔ چندضلعی‌های ستاره‌ای، نگارنده را به این چندضلعی‌ها و ویژگی‌هایشان علاقه‌مند کرد. نتیجهٔ بررسی این ویژگی‌ها را در مقالهٔ حاضر می‌خوانید. اما ابتدا برخی تعاریف مورد نیاز ذکر خواهد شد:

چندضلعی[1]: «در هندسه، چندضلعی به شکلی دوبعدی در صفحه گفته می‌شود که با مسیری بسته، شامل تعداد متناهی خطوط راست، محیط شده باشد» (ویکی‌پدیا، دانش‌نامهٔ آزاد).

ضلع[2]: «در هندسه، ضلع پاره‌خطی است که دو رأس مجاور را در یک چندضلعی به‌هم متصل می‌کند. بنابراین در عمل، یک ضلع رابطی برای یک پاره‌خط یک‌بعدی و دو شیء صفر بعدی است» (پیشین).

قطر[3]: خطی است که دو رأس غیرمجاور از یک چندضلعی یا چندوجهی را به‌هم متصل می‌کند» (پیشین).

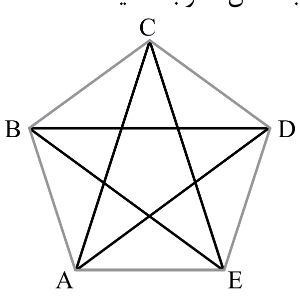
چندضلعی محدب: «چندضلعی کوژ (محدب) یک چندضلعی است که اگر از هر دو رأس آن خطی به‌هم وصل کنیم، آن خط از داخل چندضلعی عبور کند. [اثبات می‌شود که] یک چندضلعی، کوژ است اگر و تنها اگر هیچ‌یک از زاویه‌های داخلی آن بیشتر از ۱۸۰ درجه نباشند» (پیشین).

در ادامه، خلاصهٔ مطلبی که دربارهٔ چندضلعی‌های ستاره‌ای در کتاب «*آموزش هنر حل مسئله*» آمده است، نقل می‌شود.

یک دایره رسم کنید و سپس پنج نقطه را روی محیط آن علامت بزنید. این پنج نقطه را به‌هم متصل کنید. در این حالت یک پنج‌ضلعی به همراه قطرهای آن به‌دست می‌آید. اگر اضلاع پنج‌ضلعی و دایره را در نظر نگیرید، یک ستارهٔ پنج‌پر مشاهده می‌کنید. گاهی از این روش اشکالی به‌دست می‌آیند که حاصل اجتماع چندضلعی‌های کوچک‌ترند. برای مثال، یک ستارهٔ شش‌پر حاصل اجتماع دو مثلث است.

ارائهٔ روشی برای رسم ستاره‌وارهای n پَر

بیایید تا بار دیگر متن کوتاه فوق را با تعمق بیشتری بررسی کنیم. به شکل ۱ توجه کنید.



شکل ۱ـ یک ستارهٔ پنج‌پر حاصل از قطرهای یک پنج‌ضلعی محدّب

اولین نکته‌ای که توجه فرد را جلب می‌کند، روش رسم پنج‌ضلعی است. چرا از دایره برای رسم پنج‌ضلعی کمک گرفته شده است؟ هدف آن بوده است که پنج‌ضلعی حاصل، شکلی محدب باشد. قضیهٔ ۱ به بررسی این مسئله می‌پردازد. این مسئله روشی برای رسم یک چندضلعی محدب ارائه می‌کند.

قضیهٔ ۱. هر چندضلعی که رئوس آن روی محیط یک دایره قرار گیرند، محدب است.

اثبات: فرض کنید تمام رئوس چندضلعی روی محیط یک دایره باشند. بنابراین، هر سه نقطهٔ A، B و C روی محیط دایره و برهم نامنطبق هستند. پس $\angle ABC$ یک زاویهٔ محاطی از دایره است. زاویهٔ محاطی از زاویه‌ای برابر نصف کمان روبه‌روی خود برخوردار است و دایره نیز کمانی ۳۶۰ درجه‌ای است. برای این زاویه می‌توان سه حالت متصور شد:

بخشی از دایره > تمام دایره ← ۳۶۰ > کمان متناظر زاویه ← $\angle ABC > 180$ ← تناقض

تناقض ← یک ضلع سه رأس را به‌هم متصل کرده است. ← $\angle ABC = 180$

قابل پذیرش: $\angle ABC < 180$

بنابراین تمـــام زوایای چندضلعی مورد بحث کوچک‌تر از ۱۸۰ درجه هستند؛ پس چندضلعی محدب است. ■

به شکل ۱ توجه کنید. ستارهٔ پنج‌پر شامل یک پنج‌ضلعی در وسـط و پنـج مثلـث روی اضلاع آن اسـت. در این مقاله ســتاره‌واری nپَر که شــامل یک nضلعی در وسط و n مثلث (حاصــل از امتداد اضلاع nضلعی) روی اضلاع آن اســت، یک **ســتاره از مرتبه nاُم** نامیده می‌شـود. بر این اساس، خطوط پررنگ شکل ۱ یک ستارهٔ مرتبه پنجم را نمایش می‌دهند. در این مقاله نویسنده نماد قراردادی S_n را برای ستاره مرتبهٔ nاُم تعیین کرده است.

برای اثبات‌های بعدی، نیاز به قضایا و روابطی داریم که به بررسی برخی از آن‌ها می‌پردازیم:

قضیهٔ ۲. تعداد قطرهای داخلی یک nضلعی محدب برابر است با: $n(n-3)/2$

اثبات: یک nضلعی شــامل n رأس است. تعداد خطوطی که دو رأس را به یکدیگر متصل می‌کنند، برابر است با: $\binom{n}{2}$. از میان این خطــوط، n پاره‌خط ضلــع و بقیه قطر هســتند. از آنجا کــه nضلعی محدب اســت، تمام این قطرهــا (که خطوطی هســتند کــه دو نقطه از nضلعی را به‌هــم متصل می‌کنند)، درون شــکل قــرار دارنــد. بنابرایــن تعداد قطرهــای داخلی nضلعی برابر است با:

$$\binom{n}{2}-n=\frac{n(n-1)}{2}-n=\frac{n(n-1)-2n}{2}=\frac{n(n-3)}{2}$$ ■

قضیهٔ ۳. مجموع زوایای یک n ضلعی محدب برابر اســت با: $180(n-2)$.

اثبات (استقرای ریاضی):

● **پایهٔ استقرا (n=۳):** مجموع زوایای مثلث برابر است با ۱۸۰ درجه. (اثبات در اغلب کتاب‌های هندسهٔ پایه بیان شده است.)

● **گام اســتقرا (n>۳):** هر n ضلعی محدب را با رسم یکی از قطرهای آن میان دو رأس به فاصلهٔ یک می‌توان به یک مثلث (بــا مجموع زوایای ۱۸۰ درجه) و یک n-۱ ضلعی (با مجموع زوایای $180((n-1)-2)$) تبدیل کرد. بنابراین مجموع زوایای n ضلعی برابر است با:

$$180+180((n-1)-2)=180(n-2)$$

اثبات وجود ستاره‌هایی از مرتبه n

در هندسهٔ مسطحهٔ اقلیدسی، nضلعی‌ها حداقل شامل سه ضلع (مثلث) هستند. مثلث هیچ‌گونه قطری ندارد (مطابق قضیهٔ ۲)، بنابر این نمی‌توانیم یک S_3 داشــته باشیم. در چهارضلعی قطرها همرس هستند، پس یک چهارضلعی تشکیل نمی‌دهند؛ بنابراین S_4 هم نداریم. قضیهٔ ۴ بیان می‌کند که ستاره‌هایی از مرتبهٔ پنجم یا بیشتر وجود دارند.

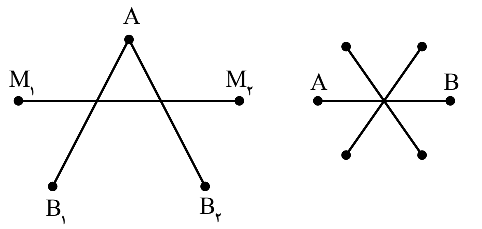
قضیهٔ ۴. به ازای هر n ضلعی ($n\geq 5$) ستاره‌ای از مرتبهٔ n وجود دارد.

اثبات: مطابق لم ۱، در شــرایط مفروض قطرهایی که دو سرشــان به فاصلهٔ یک رأس هســتند، یک nضلعی در وسط تشکیل می‌دهند. لم ۲ بیان می‌کند که n مثلث موردنظر ما هم وجود خواهند داشت. از این دو مسئله حکم اثبات می‌شود. ■

لم ۱: به ازای هر n ضلعی ($n\geq 5$)، قطرهایی که دو سرشان به فاصلهٔ یک رأس هســتند، یک nضلعی در وســط تشکیل می‌دهند.

اثبات: تنها قطرهایی برای رسم n ضلعی کوچک‌تر و سپس ستارهٔ مرتبهٔ n مورد استفاده قرار می‌گیرند که بین دو سر آن‌ها، تنها یک رأس فاصله باشد. در این صورت به هر رأس، دقیقاً دو قطر مفروض متصل می‌شود (یکی رو به جلو و دیگر رو به عقب). در این صورت برای رأسی مثل A، رأس‌هایی مانند B_1 و B_2 برای سر دیگر قطرها و دو رأس مثل M_1 و M_2 برای فاصلهٔ میان دو سر هر قطر نیازمندیم. پس nضلعی باید حداقل پنج رأس داشته باشد ($n\geq 5$). عکس قضیه بدیهی است.

همچنین، حداکثر تعداد قطرهای مفروض همرس در هر نقطهٔ درون چندضلعی برابر است با: ۲. اگر این تعداد بیشتر از ۳ باشد، می‌توانیم فقط سه‌تا از آن‌ها را در نظر بگیریم.



شکل۲ـ مربوط به اثبات لم‌های ۱ و ۲

برهان خلف: فرض کنید سه قطر مفروض در یک نقطه درون چندضلعی همرس هستند. در این صورت مطابق شکل ۲ بین دو سر قطر AB حداقل ۲ رأس قرار دارد و از آنجا که: ۲>۱، به تناقض برمی‌خوریم (فرض کرده بودیم بین هر دو قطر مفروض، دقیقاً یک رأس فاصله باشد). بنابراین فرض خلف باطل است و حکم اثبات می‌شود. ■

لم ۲: در شرایط مفروض لم ۱، هر سه قطری مانند AB_1، AB_2 و M_1M_2 (این نقاط همان نقاط لم ۱ هستند.) مثلثی می‌سازند که ضلعی دارد که قطر nضلعی نیست. (بدیهی است که در این صورت این ضلع از یکی از اضلاع n ضلعی کوچک‌تر خواهد بود.)

اثبات: با رسم M_1M_2، برای A سه حالت زیر متصور خواهد بود (در عبارات زیر فرض کرده‌ایم B_1B_2 پایین‌تر از M_1M_2 قرار دارند):

- A پایین M_1M_2 قرار دارد: بنابراین M_1M_2 که پاره‌خطی میان دو نقطه از چندضلعی محدب است، از خارج چندضلعی محدب می‌گذرد (تناقض).
- A روی M_1M_2 قرار دارد: پس قطر M_1M_2 سه رأس را به یکدیگر متصل کرده است (تناقض).
- A بالای M_1M_2 قرار دارد: پس مثلث موردنظر ما تشکیل می‌شود (اثبات حکم).

توجه کنید که در این اثبات فرض شده است چندضلعی حداقل پنج رأس دارد. ■

تعداد ستاره‌های حاصل از قطرهای یک nضلعی

اگر تعداد ستاره‌های یک n ضلعی را با f(n) و تعداد ستاره‌های مرتبهٔ kام یک n ضلعی را با f(k,n) نشان دهیم، آن‌گاه:

$$f(n)=\sum_{k=5}^{n} f(k,n)$$

- **قضیهٔ ۵:** $f(k,n)=\binom{n}{k}$
- **اثبات (استقرای ریاضی):** اگر k>n، آن‌گاه همان‌طور که انتظار داشتیم: $f(k,n)=\binom{n}{k}=0$؛ وگرنه:
- **پایهٔ استقرا** (n=k): با توجه به اینکه برای رسم هر S_k دقیقاً به k رأس نیاز داریم، بدیهی است که: $f(k,k)=1$. از طرف دیگر می‌دانیم: $\binom{k}{k}=1$. پس داریم: $f(k,k)=\binom{k}{k}$.
- **گام استقرا** (n>k): با انتخاب k رأس به یک kضلعی محدب می‌رسیم که مطابق اثبات پایه، تنها یک ستاره از مرتبهٔ n در آن وجود دارد. برای انتخاب این n−k رأس، $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ حالت وجود دارد. پس حکم با استقرای ریاضی ثابت شد. ■

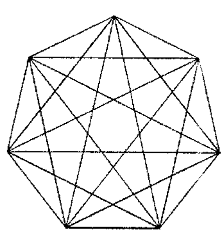
با توجه به فرمول فوق، قضیهٔ ۵ و آنکه $2^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$، داریم:

$$f(n)=\sum_{k=5}^{n} f(k,n)=\sum_{k=5}^{n}\binom{n}{k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}-\sum_{k=0}^{4}\binom{n}{k}=2^n-\sum_{k=0}^{4}\binom{n}{k}$$

پس ثابت کردیم تعداد ستاره‌های حاصل از برخورد قطرهای یک nضلعی برابر است با: $2^n-\sum_{k=0}^{4}\binom{n}{k}$. ■

برای مثال به شکل ۳ توجه کنید. این شکل تمام ستاره‌های حاصل از برخورد قطرهای یک هفت‌ضلعی را نشان می‌دهد. در این شکل ستارهٔ مرتبه هفتم و ستاره‌های مرتبهٔ ششم نشان داده شده‌اند.

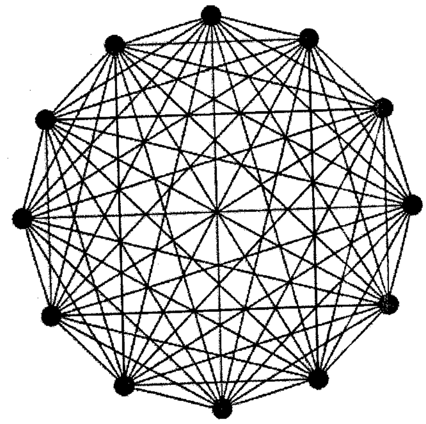


شکل ۳ـ نمایش تصویری f(۷)

حالا به محاسبهٔ f(۷) می‌پردازیم:

$$f(7)=2^7-\sum_{k=0}^{4}\binom{7}{k}=29$$

به‌عنوان نمونه‌ای دیگر می‌توانید تعداد ستاره‌های حاصل از برخورد قطرها در یک دوازده‌ضلعی منتظم (شکل ۴) را با کمک همین رابطه بشمارید.



شکل ۴ــ دوازده‌ضلعی منتظم و نمایش f(۱۲)

مجموع زوایای داخلی یک ستاره از مرتبه n

مطابق تعریف، هر S_n شامل یک n ضلعی و n مثلث است. بنابراین مجموع زوایای داخلی S_n برابر مجموع زوایای n ضلعی محدب و n برابر مجموع زوایای مثلث است. در این صورت و با توجه به قضیهٔ ۳، مجموع زوایای داخلی ستاره از مرتبهٔ n برحسب درجه برابر است با:

$$360(n-1) = 180(n-2+n) = 180n + 180(n-2) \quad \blacksquare$$

به‌عنوان نمونه، مجموع زوایای داخلی یک S_5 (شکل ۱) برحسب درجه برابر است با: $360(5-1) = 1440$

بررسی امکان رسم ستاره‌ای از مرتبهٔ n بدون برداشتن مداد از روی کاغذ

با بررسی چند حالت خاص کار را آغاز می‌کنیم. با آزمایش می‌توانیم متوجه شویم که S_5 و S_7 را می‌توان بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم کرد، اما دربارهٔ S_6 و S_8 این کار امکان‌پذیر نیست. از این موضوع می‌توان حدس زد که: «این عمل دربارهٔ S_n ممکن است، اگر و فقط اگر n عددی فرد باشد.» حالا باید این نتیجهٔ استقرایی را به کمک استدلال استنتاجی اثبات کنیم. توجه کنید که چون n عددی طبیعی است، یا فرد است یا زوج.

ابتدا رئوس n ضلعی را از ۰ تا n-۱ نام‌گذاری می‌کنیم. قطرهای موردنظر، قطرهایی هستند که فاصلهٔ بین دو سر آن‌ها دقیقاً یک رأس است. می‌توانیم رئوس n ضلعی را رئوس گراف جهت‌دار G و قطرهای موردنظر را یال‌های جهت‌دار G فرض کنیم (از ۰ تا n-۱). یال (قطر) e_n از رأس v_n به رأس v_i به‌طوری که ۲ + کف متصل است. نام‌گذاری رئوس را از نقطهٔ آغاز حرکت شروع می‌کنیم.

با توجه به آنکه از v_0 حرکت آغاز شده است و گام حرکت نیز ۲ است، در اولین مرحله تمام رئوس دارای شمارهٔ زوج به اصطلاح دیده می‌شوند. اگر n فرد باشد، از آخرین رأس مرحلهٔ اول n-۱ به رأس شمارهٔ ۱ می‌رویم و در این مرحله (مرحلهٔ دوم) تمام رأس‌های فرد (تمام رأس‌های مانده) را می‌بینیم و به این ترتیب تمام یال‌ها (قطرها) بدون برداشتن مداد از روی کاغذ رسم می‌شوند. اما اگر n عددی زوج باشد، از آخرین رأس مرحلهٔ اول (n-۲) به رأس شمارهٔ ۰ می‌رسیم که قبلاً آن را دیده بودیم. در اینجا مجبوریم با برداشتن مداد از روی کاغذ به رأس شمارهٔ ۱ (یا هر رأس فرد (ماندهٔ) دیگری) برویم و مرحلهٔ دوم را از آنجا آغاز کنیم تا تمام رأس‌های فرد (مانده) در این مرحله دیده و تمام یال‌ها (قطرها) نیز رسم شوند. ■

به زبان نظریهٔ گراف، اگر شکل را گرافی ساده فرض کنیم، به هر رأس دو یال (ضلع) وصل شده است. بنابراین درجهٔ هر رأس زوج (۲) است. از طرف دیگر، اگر n فرد باشد، گراف حاصل گرافی «همبند» است. بنابراین اگر گرافی اویلری است، امکان رسم آن بدون برداشتن قلم از روی صفحه وجود دارد. اما اگر n زوج باشد، ستارهٔ مرتبهٔ n گرافی ناهمبند است (بین دو رأس متوالی هیچ مسیری وجود ندارد.) بنابراین نمی‌تواند گرافی اویلری باشد و رسم آن بدون برداشتن از روی کاغذ ممکن نیست. (توجه کنید که نقاط برخورد خطوط در وسط ستاره رأس به‌حساب نمی‌آیند، بنابراین ستارهٔ مرتبهٔ پنجم گرافی از مرتبهٔ پنج است.)

نتیجه‌گیری

نگارنده ابتدا ستاره‌ای از مرتبهٔ n (S_n) را به‌صورت ستاره‌واری n پر که شامل یک n ضلعی در وسط و n مثلث روی اضلاع آن است، تعریف کرد و سپس به بررسی برخی ویژگی‌های S_n پرداخت. ابتدا ثابت شد S_n اگر و فقط اگر[4] $n>5$ وجود دارد. در مراحل بعد اثبات شد، تعداد ستاره‌های حاصل از برخورد قطرهای یک n ضلعی محدب برابر $2^{n} - \sum^{4}\binom{n}{k}$ است. در ادامه ثابت شد که مجموع زوایای داخلی یک S_n (در صورت وجود شکل) برابر ۳۶۰ (n-۱) است. در انتها نیز اثبات شد: اگر و فقط اگر n فرد باشد، می‌توان S_n را بدون برداشتن مداد از روی کاغذ رسم کرد.

لازم به ذکر است در این مقاله تنها به بررسی برخی ویژگی‌های هندسی و ریاضی ستاره‌های n پَر پرداخته شد و دربارهٔ مبانی فلسفی، تاریخی و دین‌شناسی این اشکال ستاره‌گونه بحثی انجام نشد.

آموزشی

پیوستگی

کلیدواژه: پیوستگی، پیوستگی راست، پیوستگی چپ، پیوستگی در بازه

امین ادراکی
دانش‌آموز سال چهارم ریاضی
دبیرستان شهید بهشتی بوشهر

در پی تغییرات گستردهٔ کتاب‌های درسی حسابان و حساب دیفرانسیل و انتگرال، مبحث پیوستگی نیز دچار تغییرات گسترده‌ای شده و به شکلی نو در کتاب‌های درسی جدید بیان شده است. در ادامه با استفاده از همین مفاهیم و تعاریف جدید، اندکی درباب پیوستگی صحبت خواهیم کرد.

«**تعریف:** فرض کنید تابع f در نقطهٔ a و در یک همسایگی چپ یا راست (یا هر دو) تعریف شده باشد. اگر حد این تابع در a موجود و برابر f(a) باشد، یعنی $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$، گوییم تابع f در a پیوسته است» (متن کتاب درسی حسابان).

با توجه به تعریف پیوستگی باید توجه داشت، هنگامی تابع f در x=a پیوسته است که:

۱. f(a) تعریف شده باشد. (یعنی a در دامنهٔ تابع f قرار داشته باشد.)

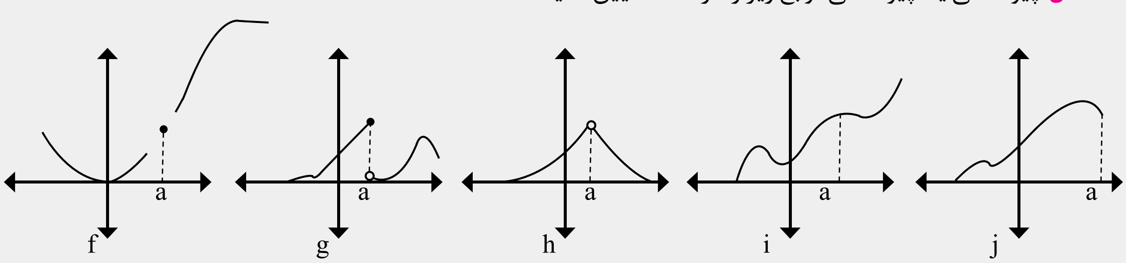
۲. تابع f(x) در یک همسایگی چپ یا راست (یا هر دو) a تعریف شده باشد.

۳. $\lim_{x\to a} f(x)$ موجود و با f(a) برابر باشد.

دقت کنید که بنابر تعریف کتاب درسی حسابان، اگر تابعی در یک نقطه تعریف نشده باشد، نمی‌توانیم در رابطه با پیوستگی یا ناپیوستگی آن در نقطهٔ مذکور صحبت کنیم. همچنین، اگر تابع f در x=a تعریف شده باشد، اما در هیچ همسایگی از این نقطه تعریف نشده باشد، نمی‌توانیم از پیوستگی این تابع در x=a صحبت کنیم. به مثال زیر از کتاب حسابان دقت کنید:

«آیا تابع $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ در ۱ پیوسته است؟ از پیوستگی این تابع در ۱ نمی‌توانیم صحبت کنیم. چون این تابع در ۱ تعریف نشده است. شرط صحبت از پیوستگی یا ناپیوستگی یک تابع در یک نقطه آن است که تابع در آن نقطه و یک همسایگی چپ یا راست (یا هر دو) آن نقطه تعریف شده باشد» (متن کتاب درسی حسابان).

مثال: پیوستگی یا ناپیوستگی توابع زیر را در x=a تعیین کنید.



شکل ۱

پاسخ:

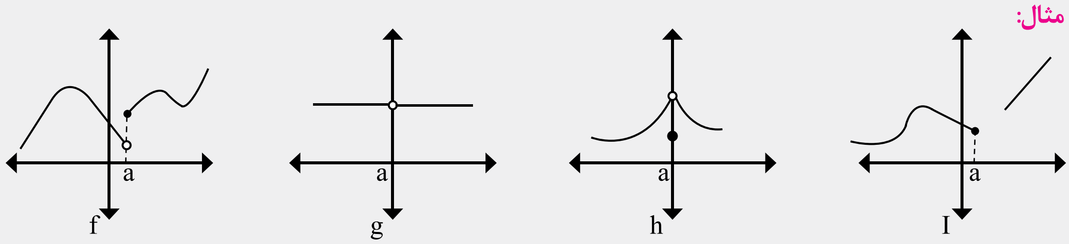
- از پیوستگی تابع f در نقطهٔ a نمی‌توان صحبت کرد. زیرا در هیچ همسایگی از a تعریف نمی‌شود.
- تابع g در نقطهٔ a ناپیوسته است، زیرا در این نقطه تعریف می‌شود، اما $\lim_{x\to a} g(x)$ وجود ندارد.

- از پیوستگی تابع h در نقطهٔ a نمی‌توان صحبت کرد، زیرا a در دامنهٔ h قرار ندارد.
- توابع J و I در نقطهٔ x=a پیوسته‌اند، زیرا: $I(a)=\lim_{x\to a} I(x)$ و $J(a)=\lim_{x\to a} J(x)$.

■ پیوستگی راست و چپ

«**تعریف:** می‌گوییم f در c از راست پیوسته است، هرگاه: $f(c)=\lim_{x\to c^+} f(x)$ و می‌گوییم f در c از چپ پیوسته است، هرگاه: $f(c)=\lim_{x\to c^-} f(x)$» (متن کتاب درسی دیفرانسیل).

مثال:



شکل ۲

- تابع f در نقطهٔ a پیوستگی راست دارد. یعنی: $f(a)=\lim_{x\to a^+} f(x)$. اما پیوستگی چپ ندارد. زیرا: $f(a)\neq\lim_{x\to a^-} f(x)$.
- نقطهٔ a جزء دامنهٔ g نیست و در نتیجه نمی‌توان در رابطه با پیوستگی تابع در این نقطه صحبت کرد.
- تابع h در نقطهٔ a نه پیوستگی راست دارد و نه پیوستگی چپ.
- تابع I در نقطهٔ a پیوستگی چپ دارد. یعنی: $I(a)=\lim_{x\to a^-} I(x)$. اما در رابطه با پیوستگی راست آن نمی‌توان صحبت کرد؛ زیرا در هیچ همسایگی راست a تعریف نمی‌شود.

■ پیوستگی روی بازه

«**تعریف:** می‌گوییم تابع f روی بازهٔ I پیوسته است، هرگاه f در هر نقطهٔ I پیوسته باشد. به‌ویژه می‌گوییم f تابعی پیوسته است، هرگاه f در هر نقطهٔ دامنه‌اش پیوسته باشد» (متن کتاب درسی دیفرانسیل).

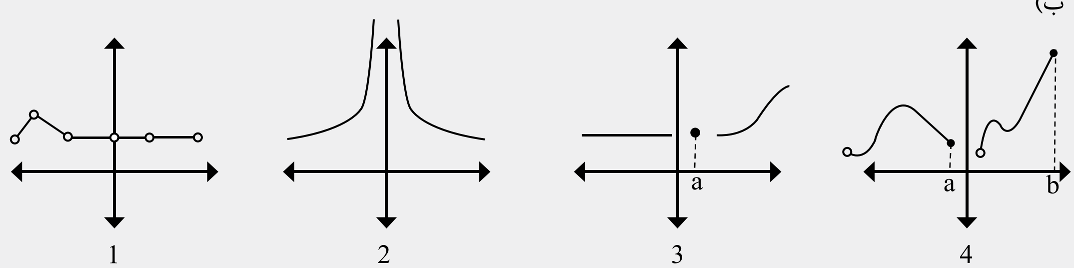
دقت کنید! هنگامی می‌گوییم تابعی پیوسته است که در تمام نقاط دامنه‌اش پیوسته باشد. همچنین، بدیهی است که اگر تابع f روی بازهٔ I پیوسته باشد، می‌باید: $I \subseteq D_f$.

مثال: پیوستگی توابع زیر را در دامنهٔ خود بررسی کنید.

الف) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ (تمرین در کلاس کتاب درسی دیفرانسیل)

پاسخ: می‌دانیم: $D_f=(1,+\infty)$ و $f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$. پس f تابعی پیوسته است.

ب)



شکل ۳

پاسخ:

- نمودارهای ۱ و ۲ در تمامی نقاط دامنهٔ خود پیوسته‌اند. در نتیجه مربوط به توابعی پیوسته هستند و هیچ نقطهٔ ناپیوستگی ندارند. اما در رابطه با پیوستگی نمودار ۳ در نقطهٔ a نمی‌توان صحبت کرد. زیرا شرط صحبت در این‌باره، آن است که تابع در این نقطه و یک همسایگی آن تعریف شده باشد. در نتیجه دربارهٔ پیوستگی یا ناپیوستگی این تابع نمی‌توان صحبت کرد.
- نمودار ۴ در تمام نقاط دامنهٔ خود (حتی b و a) پیوسته است. پس تابعی پیوسته است و هیچ نقطهٔ ناپیوستگی ندارد.
- توجه کنید برای نقاط ابتدایی یا انتهایی بازه‌های دامنهٔ تابع، پیوستگی به ترتیب به معنای پیوستگی راست و چپ می‌باشد. برای مثال، در نمودار ۴ کافی است تابع در نقطهٔ b از چپ پیوسته باشد و در این صورت f در این نقطه پیوسته است. در واقع:

$$\text{غ(ع)} = \lim_{\text{و}\to\text{ع}^-}\text{غ(و)} = \lim_{\text{و}\to\text{ع}}\text{غ(و)}$$

قضیه: چندجمله‌ای‌ها، توابع گویا و توابع مثلثاتی cot x، sin x، cos x، tan x توابعی پیوسته هستند.

مثال: تابع $\text{غ(و)} = \dfrac{\text{و}^3}{(1+2\text{و}-\text{و}^2)(3-\text{و})}$ چند نقطهٔ ناپیوستگی دارد؟

پاسخ: این تابع در تمامی نقاط دامنهٔ خود پیوسته است و هیچ نقطهٔ ناپیوستگی ندارد.

قضیه: اگر g و f در a پیوسته باشند، آن‌گاه: $\text{غ}\pm\text{ڠ},\ \text{غڠ},\ \dfrac{\text{غ}}{\text{ڠ}}(\text{ڠ}\neq 0)$

در a و روی $\text{پ}_{\text{غ}} \cap \text{پ}_{\text{ڠ}}$، اشتراک دامنهٔ دو تابع، پیوسته هستند. همچنین تابع cf (که c عددی ثابت است) در a پیوسته است.

مثال: فرض کنید $\text{غ(و)} = \sqrt{\text{و}} + \text{ضص}$ و $\text{ڠ(و)} = \sqrt{\text{و}} - \text{ضص}$. داریم: $\text{پ}_{\text{غ}} = \text{پ}_{\text{ڠ}} = [\text{ص}, +\infty)$. همچنین هر دو تابع g و f در x=۰ پیوسته هستند. پس:

$$(\text{غ}-\text{ڠ})(\text{و}) = \begin{cases} \text{ضص}2 & \text{و} \in [\text{ص}, +\infty) \\ \text{تعریف نشده است.} & \text{و} \notin [\text{ص}, +\infty) \end{cases}$$

بدیهی است که این تابع در x=۰ پیوسته است.

ممکن بود در حل مثال بالا این‌گونه استدلال کنیم:

$$(\text{غ}-\text{ڠ})(\text{و}) = \sqrt{\text{و}} + \text{ضص} - \sqrt{\text{و}} + \text{ضص} = \text{ضص}2$$

و نتیجه بگیریم که تابع فوق در x=۰ پیوسته نیست! اما باید توجه کنید که دامنهٔ توابع f.g و $\text{غ}\pm\text{ڠ}$ برابر $\text{پ}_{\text{غ}} \cap \text{پ}_{\text{ڠ}}$ (در این مثال $[\text{ص}, +\infty)$) است. که با این فرض این تابع در نقطهٔ x=۰ پیوسته خواهد بود. حالا به این مثال از کنکور سراسری سال ۱۳۹۱ توجه کنید:

مثال: اگر f+g و f-g هر دو در نقطهٔ x_0 پیوسته باشند، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟ (سراسری ۱۳۹۱)

الف) الزاماً g و f هر دو در x_0 پیوسته‌اند.

ب) f.g ممکن است در x_0 پیوسته نباشد.

ج) f یا g ممکن است در x_0 پیوسته نباشند.

د) الزاماً fog(x) در x_0 پیوسته است.

پاسخ: «بیایید فرض کنیم: $\text{غ(و)} = \sqrt{\text{و}}$ و $\text{ڠ(و)} = \text{ص}$. بدیهی است که دامنهٔ f برابر $[\text{ص}, +\infty)$ و دامنهٔ g برابر R است و در نتیجه دامنهٔ $\text{غ}\pm\text{ڠ}$ مساوی اشتراک این دو دامنه، یعنی $[\text{ص}, +\infty)$ خواهد بود. حال بدیهی است که پیوستگی راست تابع $\text{غ}\pm\text{ڠ}$ در x=۰ به معنای پیوستگی کامل آن است:

$$(\text{غ}\pm\text{ڠ})(0) = 0 = \text{ضص} \pm \sqrt{\text{و}}) \lim_{\text{و}\to 0^+} = \lim_{\text{و}\to 0^+}\text{غ(و)} \pm \text{ڠ(و)}$$

واضح است که براساس تعریف جدید کتاب از پیوستگی، توابع $(\text{غ}\pm\text{ڠ})$ که ما مثال زدیم، در x=۰ پیوسته هستند. در حالی‌که $\text{ڠ(و)} = \text{ص}$ در x=۰ ناپیوسته است و گزینهٔ ج صحیح است».

ممکن بود در حل این سؤال این‌گونه استدلال می‌کردیم:

در $x=x_\circ$ پیوسته است. ، (و)(غ+غ)
در $x=x_\circ$ پیوسته است. ، (و)(غ−غ)

⇐ در $x=x_\circ$ پیوسته است. ، (و)غ۲ = (و)(غ−غ) + (و)(غ+غ)

در $x=x_\circ$ پیوسته است. ، (و)غ۲ = (و)(غ−غ) − (و)(غ+غ)

و به این ترتیب نتیجه می‌گرفتیم f و g در $x=x_\circ$ پیوسته هستند. اما دقت کنید که تساوی‌های فوق فقط در شرایطی برقرار هستند که: پ = پ. در واقع داریم:

(و)(غ+غ) + (و)(غ−غ) = { (و)غ۲ و ∈ پ ∩ پ ؛ تعریف نشده است. و ∉ پ ∩ پ }

(و)(غ+غ) − (و)(غ−غ) = { (و)غ۲ و ∈ پ ∩ پ ؛ تعریف نشده است. و ∉ پ ∩ پ }

نکته: اگر f در a پیوسته و g در a ناپیوسته باشد، دربارهٔ پیوستگی هیچ‌یک از توابع غ/غ، f.g و غ±غ در a نمی‌توانیم تصمیم‌گیری کنیم (وضعیت پیوستگی آن‌ها در این نقطه مشخص نیست). به توضیحات زیر دقت کنید:

- f را تابع ثابت ۰ با دامنهٔ R و g را به شکل (و)غ = ص فرض کنید. بدیهی است که تابع f در نقطهٔ $x=۲$ پیوسته و g در این نقطه ناپیوسته است. مشاهده می‌کنیم که هر دو تابع غ/غ و f.g در نقطهٔ $x=۲$ پیوسته هستند.
- در مورد غ±غ در حقیقت ممکن است با محدودشدن دامنهٔ تابع g به: پ ∩ پ این تابع در a، و در نتیجه غ±غ نیز در نقطهٔ $x=a$ پیوسته باشند. حل مثال بعد کمک زیادی به درک این موضوع خواهد کرد.

توجه کنید که به سادگی می‌توان توابع f و g را طوری تعریف کرد که توابع ذکر شده (یعنی غ/غ، f.g و غ±غ) در $x=a$ ناپیوسته باشند.

مثال: فرض کنید: $\sqrt{و}$ = (و)غ و (و)غ = { ۱ و ≥ ۰ ؛ ۱− و < ۰ }. بدیهی است که f در ۰ پیوسته و g در ۰ ناپیوسته است. حال توابع غ/غ، f.g و غ±غ را تشکیل می‌دهیم:

(و)(غ+غ) = $\sqrt{و}$ +۱   پ(غ+غ) = (∞+,ص)

(و)(غ−غ) = $\sqrt{و}$ −۱   پ(غ−غ) = (∞+,ص)

(و)(غغ) = $\sqrt{و}$ ×۱ = $\sqrt{و}$ پ(غغ) = (∞+,ص)

(و)(غ/غ) = $\sqrt{و}$ پ(غ/غ) = (∞+,ص)

واضح است که تمامی توابع بالا در دامنهٔ خود (و در $x=۰$) پیوسته هستند. (همان‌طور که مشاهده کردید، در این مثال با تغییر دامنهٔ g از R به (∞+,ص)، وضعیت پیوستگی آن در نقطهٔ $x=۰$ تغییر کرد و موجب پیوستگی توابع غ±غ شد.)

نکته: اگر توابع f،g در $x=a$ ناپیوسته باشند، دربارهٔ پیوستگی هیچ‌یک از توابع غ/غ، f.g و غ±غ در a نمی‌توانیم تصمیم‌گیری کنیم (وضعیت پیوستگی آن‌ها در این نقطه مشخص نیست.)

برای مثال فرض کنید: (و)غ = { ۱ و ≥ ۰ ؛ ۱− و < ۰ } و (و)غ = { ۱− و ≥ ۰ ؛ ۱ و < ۰ }. بدیهی است که f و g در $x=۰$ ناپیوسته هستند. همچنین:

۲ ≡ (و)(غ−غ) ـ ۰ ≡ (و)(غ+غ)

۱− ≡ (و)(غ/غ) ـ ۱− ≡ (و)(غغ)

که همگی در $x=۰$ پیوسته هستند.

توجه کنید که به سادگی می‌توان توابع f و g را طوری تعریف کنید که توابع ذکر شده (یعنی غ/غ، f.g و غ±غ) در $x=a$ ناپیوسته باشند.

آموزشی

معادلات تابعی

صادق جهانی‌پور*
دبیر ریاضی از استان قم

کلیدواژه معادلات تابعی، معادلهٔ کوشی، روش ضرایب‌نامعین

تعریف

معادلات تابعی معادلاتی هستند که در آن‌ها، مجهول یک تابع حقیقی است. برای حل چنین معادلاتی سعی می‌کنیم که به‌وسیلهٔ شرط داده شده آن تابع را جست‌وجو کنیم.
معادلات تابعی راه‌حل عمومی ندارند، ولی در این مطلب بعضی از حالت‌های خاص را بررسی می‌کنیم.

■ روش‌های حل معادلات تابعی دارای یک متغیر:

✔ روش تغییر متغیر

با استفاده از این روش، متغیر مستقل معادله را با متغیر دیگری جای‌گزین می‌کنیم، به‌طوری که معادلهٔ جدید به‌دست آمده، ما را به سمت تابع اصلی هدایت کند.

***

مثال ۱. اگر $f(x+7)=x^2-5x+2$ باشد، آن‌گاه $f(x)$ را پیدا کنید.

حل: فرض کنیم $t=x+7$ باشد. در این‌صورت $x=t-7$. با جایگزینی این مقدار در معادله داریم:

$$f(t)=(t-7)^2+5(t-7)+2=t^2-9t+16$$

می‌دانیم در نوشتن ضابطهٔ یک تابع، متغیر مستقل یک حرف دلخواه است و لذا می‌توانیم بنویسیم: $f(x)=x^2-9x+16$.

***

مثال ۲. با فرض $f\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{x^2+1}{x^2}+\frac{1}{x}$، تابع $f(x)$ را پیدا کنید.

حل: اگر $\frac{x+1}{x}=t$، آن‌گاه $x=\frac{1}{t-1}$ و لذا:

$$f(t)=\frac{\left(\frac{1}{t-1}\right)^2+1}{\left(\frac{1}{t-1}\right)^2}+\frac{1}{\frac{1}{t-1}}=t^2-t+1$$

بنابراین: $f(x)=x^2-x+1$.

***

مثال ۳. اگر $f(\log x)=x^2+x+1$ باشد، با شرط $x>0$ پیدا کنید ضابطهٔ $f(x)$ را.

حل: با در نظر گرفتن $t=\log x$ خواهیم داشت: $x=10^t$ و بنابراین:

$$f(t)=(10^t)^2+10^t+1=10^{2t}+10^t+1$$
$$\Rightarrow f(x)=10^{2x}+10^x+1$$

به‌طور کلی اگر $f(g(x))=h(x)$ و $g(x)$ یک تابع معکوس‌پذیر باشد، آن‌گاه با جایگزینی x با $g^{-1}(x)$ خواهیم داشت: $f(x)=h(g^{-1}(x))$.

✔ معادلات تابعی هم‌زمان

اغلب بعد از تغییر متغیر، به معادلات تابعی هم‌زمان می‌رسیم. به‌عبارت دیگر سعی می‌کنیم با تشکیل یک معادلهٔ دیگر در کنار معادلهٔ اصلی، به یک دستگاه معادلات برسیم و در نهایت با حذف یکی از تابع‌های مجهول، تابع اصلی را به‌عنوان جواب معادله پیدا کنیم.

***

مثال ۴. فرض کنید $f(x)+2f(-x)=2x+1$ باشد، ضابطهٔ تابع $f(x)$ را بیابید.

حل: اگر $t=-x$ باشد، آن‌گاه $x=-t$ و لذا با جایگزینی در معادله داریم:

$$f(-t)+2f(t)=-2t+1$$

یا

$$f(-x)+2f(x)=-2x+1 \quad (*)$$

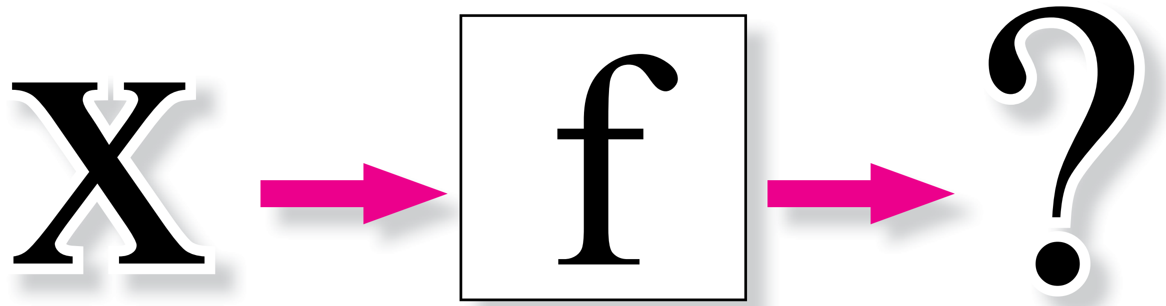
حال با ضرب معادلهٔ (*) در ۲- و جمع آن با معادلهٔ سؤال داریم:

$$f(x)-4f(x)=2x+1-2(-2x+1)=6x-1$$
$$\Rightarrow f(x)=-\frac{6x-1}{3}$$

***

مثال ۵. اگر $f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x$ باشد، تابع $f(x)$ را پیدا کنید.

حل: فرض کنیم $\frac{x-1}{x}=t$ باشد. در این‌صورت $x=\frac{1}{1-t}$



خواهد شد. با جایگزینی در معادله داریم:

$$f(t)+f\left(\frac{1}{1-t}\right)=1+\frac{1}{1-t} \qquad (*)$$

یا

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=1+\frac{1}{1-x} \qquad (1)$$

مجدداً با فرض $t=\frac{1}{1-x}$ با جایگزینی در معادلهٔ (*) خواهیم داشت:

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+\frac{x-1}{x} \qquad (2)$$

حال مجموع معادلات سؤال و (۱) و (۲) را حساب و آن را بر دو تقسیم می‌کنیم. در این‌صورت معادلهٔ زیر را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{2}\left(3+\frac{1}{1-x}+\frac{x-1}{x}+x\right) \qquad (3)$$

اگر معادلهٔ (۲) را از معادلهٔ (۳) کم کنیم، خواهیم داشت:

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(3+\frac{1}{1-x}+\frac{x-1}{x}+x\right)-\left(1+\frac{x-1}{x}\right)$$
$$=\frac{-x^3+x^2+1}{2x(1-x)}$$

■ روش ضرایب نامعین

در این‌گونه معادلات تابع مجهول یک تابع چندجمله‌ای فرض می‌شود. برای حل کافی است ضرایب جملات آن را با استفاده از شرایط مسئله تعیین کنیم.

***

مثال ۶. اگر f(x) یک تابع چندجمله‌ای درجهٔ دوم و $f(x+1)-f(x)=8x+3$ و $f(0)=5$ باشد، ضابطهٔ آن را تعیین کنید.

حل: فرض کنیم $f(x)=ax^2+bx+c$ باشد، آن‌گاه:

$$8x+3=a(x+1)^2+b(x+1)+c-ax^2-bx-c$$

پس از ساده کردن خواهیم داشت: $8x+3=2ax+a+b$.
با مقایسه کردن طرفین به‌دست می‌آوریم: $a=4$ و $b=-1$. از طرف دیگر داریم: $f(0)=5$. لذا:

$$f(x)=4x^2-x+c \xrightarrow{f(0)=5} f(x)=4x^2-x+5$$

■ معادلات تابعی با بیشتر از یک متغیر

برای حل چنین معادلاتی، علاوه بر روش‌های بالا می‌توانیم مقادیر خاصی را نیز در معادله جایگزین کنیم. اغلب با جایگزینی $x=y=0$ در شرایط داده شده، نتایج دیگری از سؤال پیدا می‌کنیم. مثال‌های زیر این روش را به‌خوبی توضیح می‌دهند.

***

مثال ۷. فرض کنید f: Q→Q تابعی باشد که در شرایط زیر صدق کند:

الف) $f(1)=2$

ب) برای هر x,y∈Q داشته باشیم:

$$f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1$$

ضابطهٔ f را بیابید.

حل: فرض کنیم $y=1$ باشد. در این‌صورت:

$$f(x)=f(x)f(1)-f(x+1)+1=2f(x)-f(x+1)+1$$
$$\Rightarrow f(x+1)=f(x)+1$$

با استفادهٔ مجدد از شرط (الف) و استقرای ریاضی درمی‌یابیم که برای هر x صحیح، $f(x)=x+1$ است. حال اگر x به‌صورت عدد گویای $\frac{m}{n}$ که m,n∈Z و $n\neq 0$ باشد، آن‌گاه می‌توانیم با جایگزینی $x=\frac{m}{n}$ و $y=n$ در معادلهٔ سؤال، رابطهٔ زیر را پیدا کنیم:

$$f\left(\frac{m}{n}\times n\right)=f\left(\frac{m}{n}\right)f(n)-f\left(\frac{m}{n}+n\right)+1$$

$$\xrightarrow{f(n)=n+1} f(m)=f\left(\frac{m}{n}\right)(n+1)-f\left(\frac{m}{n}+n\right)+1$$

از طرف دیگر می‌دانیم برای هر x∈Z داریم: $f(x+1)=f(x)+1$ لذا $f\left(\frac{m}{n}+n\right)=f\left(\frac{m}{n}\right)+n$. با جایگزینی این مقدار در رابطهٔ بالا خواهیم داشت:

$$m+1=f\left(\frac{m}{n}\right)(n+1)-f\left(\frac{m}{n}\right)-n+1\Rightarrow f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{m}{n}+1$$

ملاحظه می‌کنیم به ازای هر x∈Q نیز ضابطهٔ $f(x)=x+1$ را به‌دست می‌آوریم.

نکته: در این مثال ملاحظه می‌کنیم که ابتدا معادله را

در حالت خاص x∈Z و سپس آن را در حالت کلی‌تر حل کردیم. (f(x) را در حالت x∈Q پیدا کردیم.) این روش را می‌توانیم در بسیاری از موارد به‌کار گیریم. در حالت f: R→R نیز به‌طور مشابه چنین می‌کنیم. یعنی ابتدا معادله را برای x∈Z حل می‌کنیم و سپس f(x) را با شرط x∈Q با جایگزینی $x=\frac{m}{n}$ می‌یابیم. در نهایت برای توابع پیوسته می‌توانیم f را برای x∈f پیدا کنیم.

***

مثال ۸. برای هر x و y ($|x|\neq|y|$) داریم: $(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=4xy(x^2-y^2)$. ضابطهٔ f را بیابید.

حل: از رابطهٔ سؤال می‌توانیم نتیجه زیر را بگیریم:

$$\frac{f(x+y)}{x+y}-\frac{f(x-y)}{x-y}=4xy=(x+y)^2-(x-y)^2$$

$$\Rightarrow \frac{f(x+y)}{x+y}-(x+y)^2=\frac{f(x-y)}{x-y}-(x-y)^2$$

این تساوی نشان می‌دهد که برای هر x، $\frac{f(x)}{x}-x^2$ مقداری ثابت دارد. اگر $c=\frac{f(x)}{x}-x^2$ باشد، آن‌گاه: $f(x)=x^3+cx$.

نکته: در این مثال با یک حالت تقارنی مواجه شدیم. با بدست آوردن این تقارن به یک معادله تابعی با یک متغیر رسیدیم. این روش می‌تواند برای معادلات تابعی متقارن استفاده شود.

***

مثال ۹. اگر f: R→R، به ازای هر x, y∈R در شرط $f(x^2+f(y))=y+xf(x)$ صدق کند، ضابطهٔ f را بیابید.

حل: با قراردادن x=۰ در معادله داریم: $f(f(y))=y$.
حال از طرفین رابطهٔ داده شده در صورت سؤال f می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$(1)\quad f(y)+x^2=f(f(x^2+f(y)))=f(xf(x)+y)$$

و در رابطهٔ (۱) به‌جای x قرار می‌دهیم f(x)، لذا داریم:
$f(y)+(f(x))^2=f(f(x)f(f(x))+y)$. چون $f(f(y))=y$ است، پس:

$$(2)\quad f(y)+(f(x))^2=f(xf(x)+y)$$

از معادلات (۱) و (۲)، تساوی $(f(x))^2=x^2$ را پیدا می‌کنیم و از آنجا خواهیم داشت:

f(x) = ±x

نکته: در این سؤال ما به‌جای متغیر مستقل، موارد دیگری را جایگزین کردیم. برخی از این جایگزینی‌های رایج عبارت‌اند از f(x) به‌جای x و یا $f(f(x))$ به‌جای x. همچنین می‌توانیم مقادیر $x=0$ یا $y=0$ و یا حتی $x=1$ و... را نیز در نظر بگیریم.

چند معادلهٔ تابعی مشهور

۱. اگر f یک تابع پیوسته باشد، به‌گونه‌ای که: $f(x+y)=f(x)+f(y)$، برای هر x,y∈R برقرار باشد، آن‌گاه داریم: f(x)=cx که در آن c ثابت است (**معادلهٔ کوشی**).

۲. اگر f یک تابع پیوسته باشد و برای هر x,y∈R داشته باشیم:

الف) $f(x+y)=f(x)f(y)$، آن‌گاه: $f(x)=c^x$

ب) $f(xy)=f(x)+f(y)$، آن‌گاه: $f(x)=c\log x$

ج) $f(xy)=f(x)f(y)$، آن‌گاه: $f(x)=x^c$

که در آن c ثابت است.

***

مثال ۱۰. اگر f یک تابع حقیقی باشد و به ازای هر x,y>۱ داشته باشیم: $f(xy)=xf(y)+yf(x)$، ضابطهٔ تابع f را بیابید.

حل: دو طرف معادلهٔ داده شده را بر xy تقسیم می‌کنیم. در این صورت رابطهٔ $\frac{f(xy)}{xy}=\frac{f(x)}{x}+\frac{f(y)}{y}$ را به‌دست می‌آوریم. با فرض $g(x)=\frac{f(x)}{x}$، تساوی $g(xy)=g(x)+g(y)$ را نتیجه خواهیم گرفت. از معادلات تابعی مشهور که در بالا آمده است نتیجه می‌گیریم که: $g(x)=c\log x$ و لذا: $f(x)=cx\log x$.

تمرین

۱. تابع f(x) را با هریک از شرایط زیر پیدا کنید:

الف) $f(x+2)=x^2+4x+6$

ب) $3f(x)+2f(\frac{1}{x})=4x$

ج) $f(x)+f(1-\frac{1}{x})=\log x \quad (x>0)$

د) $af(x-1)+bf(1-x)=cx \quad a,b,c\in \mathbb{R}$

هـ) $f(x+y)=\frac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)} \quad (x>0)$

و) $f(x+y)=f(x)+f(y)+f(x)f(y)$

۲. همهٔ توابع f: Z→Z را پیدا کنید به‌گونه‌ای که:

الف) $f(1)=1$

ب) برای هر x,y∈Z،

$$f(x+y)(f(x)-f(y))=f(x-y)(f(x)+f(y))$$

۳. پیدا کنید همهٔ توابع $f: R^+\to R^+$ که برای هر $x,y\in R^+$ در رابطهٔ $x^2(f(x)+f(y))=(x+y)f(f(x)y)$ صدق می‌کنند (انتخابی المپیاد بین‌المللی ریاضی در اسلوونی ۲۰۰۵).

۴. تابع حقیقی f را پیدا کنید، به‌طوری‌که $f(xf(x)+f(y))=(f(x))^2+y$ برای هر x,y∈R برقرار باشد (مسابقات ریاضی بالکان ۲۰۰۰).

* Sadegh5634@yahoo.com

مسائل حل‌نشده و مباحث چالش‌برانگیز ریاضی

نویسنده: محمدرضا بیدار

ناشر: مؤسسهٔ انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف

ویراستار علمی: بردیا حسام

چاپ اول: ۱۳۸۸

این کتاب، همان‌طور که از نامش برمی‌آید، به بحث‌های لاینحل، معماها و مسائل حل نشدهٔ ریاضی و بعضی مسائل چالش‌برانگیز دیگر پرداخته است. در پیش‌گفتار کتاب، نویسنده مخاطبان کتاب را به سه گروه تقسیم کرده است: گروه اول دانش‌آموزان علاقه‌مند و مستعد دورهٔ دبیرستان، گروه دوم دانشجویان تمام دوره‌های رشتهٔ ریاضی که به ارائهٔ مقالات تخصصی تمایل دارند، و گروه سوم همهٔ افراد علاقه‌مند به ریاضیات با معلوماتی در حد متوسط.

کتاب دارای چهار فصل است: در فصل اول به تعدادی از مسائل حل نشدهٔ معروف ریاضی که دارای صورت مقدماتی هستند و در شاخه‌های گوناگون ریاضی (نظریهٔ اعداد، هندسه، ترکیبیات و...) مطرح شده‌اند، اشاره شده است.

بعضی از این مسائل امروزه برای اغلب دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی شناخته شده هستند؛ مانند حدس **گلدباخ** در نظریهٔ اعداد: «هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به‌صورت حاصل جمع دو عدد اول نوشت.»

در فصل دوم، زیر عنوان قضایا و حقایق جالب ریاضی، به مسائلی نظیر «نظریهٔ گالوا» پرداخته شده است. در فصل سوم به پارادوکس‌ها که از بحث‌های شیرین و جذاب در ریاضی و منطق هستند، توجه شده است. در فصل چهارم نیز تعدادی مسئله چالش‌برانگیز در زمینهٔ معماهای منطقی، برنامه‌ریزی و طراحی الگوریتم، ترکیبیات، هندسه، نظریهٔ اعداد و جبر و آنالیز مطرح شده است.

البته مسائل بدون حل یا راهنمایی هستند و این شاید نقطهٔ ضعفی برای کتاب باشد. اما در هر حال مطالعهٔ این کتاب را به همهٔ علاقه‌مندان رشتهٔ ریاضی توصیه می‌کنیم، چرا که آنان را با سطحی از مباحث ریاضی آشنا می‌کند که در نگاه متخصصان رشتهٔ ریاضی، «ریاضیات عالی» نامیده می‌شود.

گفت‌وگو

پای صحبت استاد دکتر مهدی بهزاد، ریاضی‌دان معاصر ایران

ایرانی‌ها در زمینه‌های متفاوت پیشرفت کرده‌اند

اشاره

روز یکشنبه بیست‌ودوم اردیبهشت ۹۲، اعضای هیئت تحریریهٔ مجلهٔ ریاضی برهان متوسطه میهمان دکتر مهدی بهزاد بودند و در نشستی صمیمی با ایشان دربارهٔ زندگی و کارهایشان در زمینهٔ ریاضیات و به‌خصوص رشتهٔ تخصصی ایشان، یعنی «تئوری گراف‌ها» گفت‌وگو کردند. دکتر مهدی بهزاد رئیس سابق «انجمن ریاضی ایران» و از سرشناس‌ترین استادان و ریاضی‌دانان بنام ایرانی است. وی از صاحب‌نظران تئوری گراف‌ها در عرصهٔ بین‌المللی است و تاکنون در این زمینه و زمینه‌های دیگر ریاضیات، ده‌ها سخنرانی در معتبرترین دانشگاه‌های دنیا داشته و به‌علاوه، دکتر بهزاد صاحب تألیفات و آثار بسیاری در نشریات معتبر ملی و بین‌المللی است. بنابراین گفت‌وگو با ایشان فرصت گران‌قدری بود که نصیب ما و خوانندگان مجله شد.

گزارش این گفت‌وگو را در ادامه می‌خوانید. در این نشست از سوی مجلهٔ برهان، حمیدرضا امیری (سردبیر)، هوشنگ شرقی (مدیر داخلی) و محمدهاشم رستمی (عضو هیئت تحریریه) حضور داشتند.

● **امیری:** فکر می‌کنم بهتر است از اینجا شروع کنیم که شما یک شرح کوتاهی از زندگی ریاضی خودتان، یعنی آنچه که به ریاضیات مربوط می‌شود، اعم از تحصیل و تدریس، از آغاز تا امروز، بفرمایید تا بعد وارد جزئیات شویم.

■ **بهزاد:** کلمات زیبایی به‌کار می‌برید. می‌فرمایید، کوتاه، که برای من قابل فهم نیست. کوتاه یعنی در حد چند ثانیه است؟ چند دقیقه است؟ چند ساعت است؟ در هر حال، همان‌طور که می‌دانید، من مهدی بهزاد، متولد ۱۳۱۵ در شهر یزد هستم. ماجرای زندگی‌ام هم طبیعتاً در طول ۷۷ سالی که گذشته، خیلی بالا و پایین داشته است؛ مخصوصاً در ارتباط با ریاضیات و علاقه‌ای که به این رشته داشته‌ام. وقتی بچه بودم، بزرگ فامیل به مرحوم

تاریخچهٔ مختصری ازنظریهٔ نمودارها

دربسیاری از موارد ما از یکدسته نقطه که توسط خطوط و یا پیکانهائی بهم مربوط میگردند استفاده میکنیم تاموقعیت مورد نظر را نمایش دهیم . این نقاط ممکن است نمایندهٔ افراد مردم ،شهرها ویااتمها؛ این خطوط(پیکانها) ممکن‌است‌نمایندهٔ روابط خویشاوندی راهها ویاخطوط اتصال شیمیائی باشند . چنین‌اشکالی درموضوعات مختلف به نامهای متفاوت نامیده میشوند مثلا درروانشناسی Sociogram ، در توپولوژی Simplex در فیزیک ومهندسی نمودار مدار و . . .

D . KONIG اولین‌کسی بود که پیشنهاد نمود کلمهٔ نمودار ، GRAPH ، برای تمام آنها بکار برده شود و خواص آنها بطورمجرد مطالعه گردد . البته این نمودار بانموداری که در هندسهٔ‌تحلیلی ویانظریهٔ توابع باآن‌آشنائی داریم کاملا متفاوت‌است.

نظریهٔ نمودار ها یکی از چند رشته ریاضیات است که تاریخ پیدایش‌آن‌قطعاً معلوم است . اولین مقاله دراین باره توسط **اویلر** (۱۷۰۳–۱۷۸۳)ریاضی‌دان‌سویسی‌درسال۱۷۳۶درشهر **لنین گراد** منتشر شد . **اویلر** مقالهٔ خود را با بحث دربارهٔ مسئلهٔ معروف پل Kömigsberg شروع میکند . شهر Kömigsberg که فعلا **کالنین گراد** نام‌دارد شامل دوجزیره‌وسواحل رودخانه Pregel میباشددر آن‌زمان‌قسمتهای‌مختلف‌شهر بوسیله هفت‌پل بهم‌مربوط بودند هماطور که امروزهم در **آلمان** مرسوم است مردم یکشنبه‌ها برای تفریح بقدم زدن باطراف شهر می‌پرداختند . مسئلهٔ پل بشرح زیر مطرح شد :

آیا ممکن است ازیك نقطهٔ شهر حرکت وپیاده ازهمهٔ پلها وازهرپل فقط وفقط یکمرتبه گذشته‌وبه‌نقطهٔ اول بازگشت ؟ (درشکل چهار ناحیه بحروف A وB وC وD نموده شده‌اند)

اویلر حالت بسیار کلی تری رادرمقالهٔ خود مورد بحث قرار میدهد . و از روی آن به سئوال فوق جواب منفی‌میدهد .

کار**اویلر** برای تقریباً صد سال دنبال‌نشد . مجدداً در اواسط قرن گذشته در**انگلستان** توجه‌دانشمندان‌به‌نظریهٔ‌نمودارها جلب گردید . ده سال پیش این علما‌ازهرطرف شروع بجوانه‌زدن نمود واز‌آن حتی درزیست شناسی وعلوم فضائی نیزاستفاده گردید .

دربارهٔ‌نظریه نمودارها‌تابحال‌چند کتابی بیش‌منتشر نشده‌است عجیب اینکه تا سال ۱۹۶۲ بزبان انگلیسی دراین باره هیچ‌کتابی وجود نداشت‌واولین‌کتاب دراین سال توسط O.ORE درآمریکا بچاپ رسید .

نظریهٔ نمودارها در ریاضیات بخشی از توپولوژی بحساب میآید اما رابطهٔ نزدیکی با جبرونظریه ماتریسها (MATRIX) نیز دارد ولذا میتوان آنرا **توپوالجبرا** نامید .

مهدی بهزاد
دانشجوی دکترای ریاضیات دانشگاه میشگان

مجلهٔ ریاضی یکان شمارهٔ ۳ و ۴ فروردین ۱۳۴۳

پدرم توصیه کرد، مهدی آقا وقتی بزرگ شد، خوب است که روحانی شود؛ زیرا ما در فامیل روحانی نداریم. مرحوم پدرم بلافاصله گفت: پزشک هم نداریم! خوب است که پزشک شود، و علاقهٔ خودش را این‌طوری ابراز کرد.

در هر حال این اتفاق نیفتاد. آن زمان کلاس ششم دبیرستان سه رشتهٔ ریاضی، طبیعی و ادبی داشت. من کلاس ششم را دیر شروع کردم. در حقیقت، روز چهارم آبان که آن موقع روز تعطیلی بود، از تهران سوار بر اتوبوس به طرف یزد رفتم که ششم را شروع کنم. پنجم را در یزد گرفته بودم و رفته بودم تهران. به فکر بودم که حالا در تهران بمانم یا نه و ادامهٔ تحصیل بدهم یا ندهم و بالاخره به یزد رفتم و روز اول که پنجم آبان باشد، به توصیهٔ پدرم سر کلاس رشتهٔ طبیعی نشستم. همان روز آقایی که بعدها فهمیدم که بودند و خدا رحمتشان کند، با سه چهار نفر از هم‌کلاسی‌های سابقم سر کلاس ما آمدند. آن آقا دست مرا گرفت و کشان‌کشان از کلاس بیرون برد و گفت: با حرف‌هایی که در مورد تو شنیده‌ام، جایت در کلاس ششم ریاضی است و نه طبیعی. مشخص شد که قبلاً در آن فاصلهٔ اول مهر تا آن زمان در مورد من بحث شده بوده که شاگرد اول پارسالتان کی بوده است و از این حرف‌ها. آن آقا کسی نبود جز آقای دکتر **قینی**. ایشان در آن زمان در دانشگاه تهران شاگرد اول شده بودند.

● **امیری:** ایشان آنجا تدریس می‌کردند؟

■ **بهزاد:** آمده بودند برای تدریس. خلاصه به‌خاطر ایشان ششم ریاضی را در یزد شروع کردم. اگر اشتباه نکنم، بیست‌وچهار پنج نفر از دانش‌آموزان علاقه‌مند به ششم ریاضی آمده بودند.

● **امیری:** از هم‌کلاسی‌های آن زمانتان کسی یادتان هست که ریاضی خوانده باشد؟

■ **بهزاد:** آقایی به‌نام **تقوی اردکانی** ایشان از دانش‌سرای عالی لیسانس ریاضی گرفت، ولی بعد به مهندسی رفت. خلاصه من از روز پنجم آبان کلاس ریاضی را شروع کردم، بعد دیپلم گرفتم و شاگرد اولشان شدم. برای ورود به دانشگاه باید در چند جای متفاوت امتحان کنکور می‌دادیم. در دانشکده فنی و دانشکده کشاورزی هم قبول شدم. با چند نفر مشورت کردم و گفتند به دانشگاه فنی برو. آن موقع مرحوم مهندس **ریاضی** رئیس دانشکدهٔ فنی بودند. در کنکور فنی هم شاگرد چهارم شدم، بدون اینکه تخته رسم داشته باشم. چون تخته رسم نداشتم، در درس رسم نمرهٔ صفر گرفتم. اگر تختهٔ رسم داشتم، احتمالاً اول می‌شدم.

آن موقع چهار رشتهٔ مطرح داشتیم: الکترومکانیک، مهندسی ساختمان، شیمی و معدن که من با میل خودم رشتهٔ الکترومکانیک رفتم. چهار ماه درس خواندم. بعد باید به کارگاه می‌رفتیم و یک چکش می‌ساختیم. چکش را سوهان زدم و آهن‌های اضافه را جدا کردم. باید آن را سوراخ می‌کردم. گذاشتمش زیر دریل که سوراخ کند، به‌جای آنکه وسط را سوراخ کند، زد از گوشه رفت بیرون. من چکش را گذاشتم و رفتم. گفتم فنی جای من نیست، باید به رشتهٔ ریاضی بروم. بچه‌ها گفتند: سال دیگر باید کنکور بدهی، قبول نمی‌شوی، باید بروی سربازی. گفتم: خب باید بروم دیگر.

رفتم و سال بعد دوباره در کنکور شرکت کردم و قبول شدم. سه سالی هم در دانش‌سرای عالی که اغلب استادانمان هم از دانشگاه تهران بودند، درس خواندم. استادانمان در آن زمان


هوشنگ شرقی


محمدهاشم رستمی


حمیدرضا امیری

دکتر **افضلی‌پور**، **ریاضی کرمانی**، پروفسور **فاطمی**، **هشترودی**، ...

● **رستمی:** چه سالی استاد؟

■ **بهزاد:** سال ۱۳۳۵ به دانشکدهٔ فنی رفتم. سال ۱۳۳۶ در دانش‌سرای عالی قبول شدم که جزو دانشگاه تهران بود و بعد مستقل شد. به‌همین دلیل هم استاد نداشتند و استادان بزرگواری به دانش‌سرا می‌آمدند؛ مثل دکتر **وصال** که خوب ایشان را به‌یاد دارم و خیلی‌های دیگر. پس از سه سال باز هم شاگرد اول شدم. آن موقع دانشجو به خارج اعزام می‌کردند.

اول قرار بود به انگلستان بروم، ولی بعد طوری شد که برای فوق‌لیسانس و دکترا به آمریکا رفتم. دکترا که گرفتم، در آمریکا یک سال تدریس کردم بعد به ایران برگشتم به دانشگاه پهلوی یا

همان دانشگاه شیراز رفتم.

● **شـرقی:** آقای دکتر لطفاً موارد را کمی دقیق کنید. در آمریکا در کدام دانشگاه بودید؟

■ **بهـزاد:** از دو سـه دانشـگاه برایم پذیـرش آمده بود. آن موقـع «وزارت فرهنـگ» باید تصویب می‌کرد؛ وزارت علـوم که نبـود. برای من از دانشـگاه ایالتـی پنسـیلوانیا پذیـرش گرفتند. ولی چون یکی از دوستانم در دانشگاه ایالتی میشیگان بود، به آنجا رفتم و از دانشگاه ایالتی میشیگان فوق‌لیسانس و دکترا گرفتم. بعد یک سال در دانشگاه «Wayne State University» کـه به فارسی وقتی می‌نویسـند: «وِیْن»، خیلی‌هـا تلفـظ می‌کنند: «دانشـگاه وِیَن!» دانشگاه ایالتی خیلی خوبی بود و سـال‌ها بود که دورهٔ دکترا داشـت. آنجا به مدت یک سـال بـه تدریس و تحقیق پرداختم و در سـال ۱۳۴۵ به ایران برگشتم.

● **شرقی:** و به دانشگاه پهلوی آن زمان رفتید؟

■ **بهزاد:** بله.

● **شرقی:** با این حساب، وقتی تشریف آوردیـد ایـران آقـای **مصحفـی** را دیدید؟

■ **بهـزاد:** نـه، قبـل از آن و در دبیرستان، قبل از اینکه به سال ششم برسم، ایشان را دیدم...

● **شرقی:** چون در مطالبی که در مورد آقای مصحفی نوشته بودید، فرموده بودید، وقتی در آمریکا بودید، نامه‌ای از آقای مصحفی رسید. بعد در سال ۱۳۴۵ که برگشتید...

■ **بهـزاد:** وقتی برگشـتم ایشـان را ندیدم، چون به شیراز رفتم...

● **شـرقی:** بـا مجلهٔ یـکان همکاری می‌کردید؟

■ **بهـزاد:** تنها مطلبـی که از من در مجلهٔ یکان چاپ شـد، مسـئله‌ای بود که برایشـان فرسـتاده بودم. آن را در همان شمارهٔ اول چاپ کردند و بالایش هم نوشـتند: «فرستنده: مهدی بهزاد، دانشـجو از آمریـکا». بعـد از آن هیچ ارتباطی نداشتیم.

دو سـال در دانشگاه پهلوی شیراز بـودم. بعد برای تدریـس و تحقیق به آمریـکا رفتـم. آنجا در سـال ۱۹۷۲ کـه می‌شـود ۱۳۵۱ شمسـی، با یک آمریکایی به نام چارتراند، کتاب اولمان را چاپ کردیم. سـال بعد که به ایران برگشـتم، دیگر بـه شـیراز نرفتم. به «دانشگاه ملی» (دانشگاه شهید بهشتی کنونی) رفتم و سـه چهـار ماهی آنجا بودم. بعد به وزارت دربار رفتم که یک کار تحقیقاتـی انجام می‌دادم، ولی کار آمارگیری بود و مـن آمار بلد نبودم و علاقه‌ای هم نداشتم. یک دفتر در کاخ مرمر و یک دفتر هم در کاخ سـعدآباد داشتم. بهترین مقاله‌ای را که در عمرم نوشته‌ام، در همان یک سال بود، چون فراغ‌خاطـر داشـتم و تدریـس و کار اجرایی نداشتم.

● **شرقی:** این چه سالی بود؟

■ **بهزاد:** ۱۳۴۹.

● **شـرقی:** پس احتمال دارد که آقای **علم** در خاطراتش اشاره کرده باشد.

■ **بهزاد:** بسـیار بعیـد می‌دانم، من نخوانده‌ام ولی پسـر اسـماعیل مرآت معروف، آقای دکتر مرآت، فیزیک‌دان بود و کارهای تحقیقاتی زیرنظر ایشان بود. سـال تحصیلـی ۱۳۴۹ که تمام شد به دانشگاه آریامهر (شریف امروز) دعوت شـدم و در آنجا بلافاصله از من خواسـتند که رئیس دانشکدهٔ ریاضی شـوم. رئیس دانشـگاه مرحـوم دکتر محمدرضا امین بودند. سه سال ریاست دانشـکده را به‌عهده داشتم و تدریس و تحقیق هم می‌کـردم. بعد به آمریکا رفتـم و کتاب دوممان را تألیف کردیم که در سـطح پیشـرفته بود. یک سال آنجا بودم و وقتی برگشـتم، این دفعه مأمور خدمت در دانشگاه تازه تأسیسی در مازندران شدم.

● **شـرقی:** در دورهٔ انقلاب شما ایران بودید؟

■ **بهـزاد:** بله من در ایران و قائم‌مقام وزیر، و در واقع رئیس همان دانشـگاه تازه تأسیس بودم.

● **امیری:** که بعد از انقلاب به دانشگاه مازندران تبدیل شد؟

■ **بهـزاد:** بلـه. در سـال ۱۳۶۱ هم بازنشسته شدم.

● **شرقی:** پس شما در سال‌های ۶۱ تا ۶۳ خانه‌نشین بودید؟

■ **بهـزاد:** در سـال ۱۳۶۱ بازنشسته شـدم، ولی تا این لحظه خانه‌نشـین نشـده‌ام. من در مرکز نشر دانشگاهی

فعالیت‌هـای زیادی داشـتم و بعد که دانشگاه‌ها باز شدند، برای تدریس ابتدا به دانشـگاه شـریف و بعد به دانشگاه شهید بهشتی می‌رفتم.

● **امیـری:** چه درس‌هایـی را تدریس می‌کردید؟

■ **بهزاد:** ۱۵ درس را در دانشگاه شهید بهشتی معین کرده بودم و می‌گفتم بنا به نیاز هر کدام را می‌خواهید، انتخاب کنید. گاهـی آنالیز بـود، گاهی جبر. بیشتر گراف بود، ترکیبیات، ریاضیات گسسته و زبان تخصصی. بالاخره امثال من بایـد قدری هـم در خدمت آن‌ها باشیم تا کارشان راه بیفتد.

● **شـرقی:** مـن خودم ورودی سـال ۱۳۶۳ دانشگاه شـریف بودم. استاد ما آقای دکتـر محمودیان بودند که گـراف درس می‌دادند. در بحث‌های کلاسی شـایع بود که یک قضیه در گـراف داریم به نـام «قضیهٔ بهزاد» که از آقای دکتر بهزاد اسـت. دکتر بهزاد ایرانی است و در آمریکا تحقیق می‌کند. به زبان انگلیسی کتاب دارد و در گـراف صاحب‌نظـر اسـت. ما می‌پرسـیدیم: الان کجاست؟ گفته می‌شـد: در ایران نیسـت، احتمالاً نباید در ایران باشد.

■ **بهزاد:** قضیه نیست، در مورد گراف حدسـیه یا انگاره یا conjecture است. در ریاضی با مسئله‌ای روبه‌رو می‌شوید. می‌خواهید حلـش کنید و به نتیجه و فرمولی می‌رسید که فکر می‌کنید باید درست باشد، ولی هرچه سعی می‌کنید نمی‌توانید اثباتش کنید. بعد آن فرمول را محـک می‌زنید و آزمایش می‌کنید، می‌بینید به‌نظر درست است. خب در این حال شما نتیجهٔ خودتان را به‌عنوان حدس اعلام می‌کنید. البته اگر حدسی را اعلام کنید و خیلی زود مثال نقضی برای آن پیدا شود، آبروریزی است. من این حدس را در پایان‌نامه‌ام در سـال ۱۹۶۵، یعنی نزدیک ۵۰ سـال پیش، مطرح کردم و هنوز اثبات نشده است. وقتـی اثبات شـود، به قضیـه تبدیل می‌شود.

● **شـرقی:** می‌توانیـد الان آن را بیان کنید؟

■ **بهزاد:** بله، برای کسانی که کمی از گراف اطلاع داشته باشند، ساده است. گراف که می‌دانید، شـکلی متشکل از تعدادی نقطه و تعدادی خط است که خط‌ها برخـی از زوج نقطه‌ها را به‌هم وصـل می‌کننـد؛ مثل شـکل راه‌های یک شهر، یا در شیمی مثل شکل‌های متـان، اتـان و پروپان. نقـاط گراف را به دلایل متفاوت رنـگ می‌کنند و به دنبال حداقل تعداد رنگ‌ها می‌گردند. شـرطش هم این است که دو نقطه‌ای که بینشـان خط اسـت، باید رنگشان متفـاوت باشـد. کاربردهـا و قضایای زیادی دارد.

شـما به‌جای آنکه نقـاط را رنگ کنیـد، می‌توانیـد یال‌ها یـا خط‌ها را رنگ کنید. آن هم یک شـرط دارد: دو خطی که نقطهٔ مشـترک دارند، نباید هم‌رنگ باشند. من موقعی که پایان‌نامهٔ دکترایم را می‌نوشـتم، جـوان بودم و جوانان معمولاً ماجراجو و بلندپروازند. مسـئله‌ای بـود به‌نام «مسـئلهٔ چهار رنگ» که آن زمان سابقهٔ ۶۰-۵۰ ساله داشـت. الان با رایانه حل شـده است، ولی برخی هنوز دنبال راه‌حل سـنتی برای آن هستند. بیش از ۱۲۰۰ ساعت از وقت یک رایانـهٔ بزرگ را حدود ۲۵ سـال پیش گرفتند تا همهٔ حالت‌ها را بررسـی کنند و مسـئله حل شد. ولی بعضـی از ریاضی‌دان‌های سـنتی این اثبات را قبول ندارند.

یکی از اسـتادهای بـزرگ به‌جای «مسئلهٔ چهار رنگ» اسمش را گذاشته بـود: «مرض چهـار رنـگ!» خیلی‌ها وقتی این مسـئله را می‌شنوند، مرض را می‌گیرند و شـروع می‌کنند به حل کـردن. بعد از مدتی هم مصونیت پیدا می‌کنند و آن را کنار می‌گذارند.

● **شرقی:** مثل آخرین قضیهٔ **فرما**.

■ **بهزاد:** دقیقاً. بنابراین من هم مرض چهار رنگ را گرفتم. یک مقدار رویش کار کردم. بعد به این جملهٔ پوانکاره فکر کردم که وقتی مسئله‌ای را نمی‌توانید حـل کنیـد، تعمیمش دهیـد. ظاهراً انسـان فکر می‌کند که اگر تعمیمش دهد، مشکل‌تر می‌شود.

من فکر کردم که بیایم این مسئلهٔ رنگ‌آمیزی را همزمان به رأسی و یالی تعمیم دهم. رفتم به اسـتادم گفتم که در این مسئله هم‌زمان هم نقاط را رنگ کنیم و هم یال‌ها را. منتهی شرط‌هایی بگذاریم و شـرط‌ها هم خیلی طبیعی باشند. رأس‌های مجاور هم‌رنگ نباشند، یال‌های مجاور هم‌رنگ نباشند و رنگ هیچ یالی مثل رنگ دو انتهایش نباشد. ظاهراً این مسئله خیلی مشکل‌می‌شود. در این مسـئله به دنبال حداقل تعداد رنگ‌ها می‌گشتم.

درجهٔ گـراف را هم کـه می‌دانید چیسـت؟ تعداد یال‌هایی که به رأسی از گـراف وصل باشـد، درجهٔ گراف نام دارد. مـن بـه این نتیجه رسـیدم که عدد رنگی کلی که با یک حرف یونانی نمایشش دادیم، حداقلش معلوم است که ماکزیمم درجه به‌علاوه یک اسـت. پنداشتم که این عدد از ماکزیمم درجهٔ گراف به‌علاوهٔ دو، بیشتر نیست!

● **شرقی:** یعنی مینی‌مم رنگ‌ها یا این است یا آن.

■ **بهـزاد:** یعنی هر گرافـی را که در نظر بگیریـد، اگر این حدس درسـت باشد، عدد رنگی‌اش یا این است یا آن.

● **شـرقی:** شما این مسئله را به‌عنوان یک مسـئله در ریاضیات گسسـتهٔ سال آخر دبیرستان نیاوردید؟

■ **بهـزاد:** آقـای نجفـی وزیـر

آموزش‌وپرورش بودند، ایشان درس گراف را با من در دانشگاه صنعتی شریف گرفته بودند. اصلاً رشته ایشان مهندسی متالوژی بود، نه ریاضی. همهٔ این بچه‌ها باید درس ریاضی را می‌گرفتند و خوب یادم هست که سر کلاس در همان جلسهٔ پنجم ششم استعداد خود را نشان دادند. وقتی رئیس دانشکده بودم، پیش من آمدند و گفتند که می‌خواهند از مهندسی به ریاضی تغییر رشته بدهند. من مخالفت کردم. گفتم می‌خواهی مخالف جهت آب شنا کنی. معمولاً از ریاضی به مهندسی می‌روند. الان نمی‌شود. در نیم‌سال آینده درس جبر را با من بگیرید. اگر خوشتان آمد آن موقع تصمیم می‌گیریم و چنین شد.

● **شرقی:** استاد تئوری اعداد ما بودند.

■ **بهزاد:** در مسابقهٔ ریاضی کشور شرکت کردند که انجمن ریاضی کشور برگزار کرده بود معمولاً رقابت خیلی سنگین است. هر دانشگاه باید یک تیم پنج نفره معرفی می‌کرد. ایشان شاگرد اول شد. نمره‌اش از مجموع نمرات شاگرد دوم و سوم بیشتر بود؛ ایشان وزیر که بودند، می‌خواستند نظریهٔ گراف وارد کتاب درسی دبیرستان شود.

● **امیری:** در مورد کتاب ریاضیات گسسته مطلبی به ذهنم رسید. من از اولین سالی که این کتاب چاپ شد، فکر می‌کنم سال ۱۳۷۴ یا ۱۳۷۵ بود، این کتاب را تدریس کردم. تا همین امسال هم جزو کتاب‌هایی که در سال چهارم درس می‌دهم، کتاب ریاضیات گسسته است. یعنی تدریس ریاضیات گسسته را تخصص حرفه‌ای خودم می‌دانم و بخش گرافش خیلی برایم جالب است. اگر یادتان باشد، ما همایشی در منطقهٔ یک داشتیم و از شما هم دعوت کردیم تشریف آوردید. آشنایی من با شما به واسطهٔ آن کتاب بود. یعنی برای اولین‌بار، وقتی دیدم که بخش گراف کتاب را شما زحمت کشیده‌اید، سعی کردم به هر شکل شده، پیدایتان کنم. استاد تشریف آوردند در آن همایش یکروزه اگر خاطرتان باشد، ۶۰۰ دانش‌آموز در یک سالن خیلی بزرگ جمع شده بودند و شما برایشان دربارهٔ کاربرد گراف در بازی شطرنج صحبت کردید. پاورپوینتی را هم آنجا نمایش دادید که من هنوز آن را دارم. مثل اینکه آن‌را پسرتان تهیه کرده بود. فکر می‌کنم نظریهٔ گراف از آنجا وارد کتاب‌ها شد.

حالا در همین ارتباط می‌خواستم بپرسم که شما درس گراف را برای بچه‌ها تا چه اندازه مفید می‌دانید؟ برای من به‌عنوان یک لیسانس ریاضی، درس گراف درسی اختیاری است، در حالی‌که برای دبیرستان این درس اجباری شده است. حتماً اهدافی پشت این قضیه بوده است. شما گراف را در ابتدای کتاب مطرح کرده‌اید. آیا می‌خواهید ذهن بچه‌ها را به سمت‌وسوی استفاده از این علم ببرید؟

■ **بهزاد:** ببینید، وقتی آقای نجفی پیشنهاد دادند که این کتاب برای اول مهر حاضر شود، من خیلی نگران شدم. سال قبل آموزش‌وپرورش کتاب‌هایی را چاپ کرده بود که غلط‌های زیادی داشتند. از یک طرف دلم می‌خواست این درس وارد دبیرستان شود. فکر می‌کردم موقعیت خوبی فراهم شده است، بنابراین باید همکاری کنم. از طرف دیگر، ما پنج نفر، یعنی **محمودیان**، دکتر **تابش**، دکتر **رجالی**، دکتر **عمیدی** و من، باید هم‌فکری می‌کردیم. در آن مدت کم تنها کاری که می‌توانستیم بکنیم این بود که کتاب را به اصطلاح Camera Ready تحویل دهیم تا آن را عیناً همان‌طور که هست، چاپ کنید که قبول کردند. کار بسیار سختی بود و با عجله انجام شد، ولی خوش‌حالم که انجام شد.

من اعتقاد دارم نظریهٔ گراف هم ویژگی هندسه را دارد و هم ویژگی نظریهٔ اعداد را، شهود می‌خواهد و تجسم قوی، حل مسائلش هم ابتکار می‌خواهد هم نوعی نبوغ.

● **امیری:** هم به نظریهٔ مجموعه‌ها نیاز

دارد و هم به ترکیبیات. من هم فکر می‌کنم آمیخته‌ای از چند شاخهٔ ریاضی است که می‌تواند همهٔ این‌ها را به‌هم وصل کند و دانش‌آموز ببیند که مثلاً آنچه در مجموعه‌ها خوانده و در ترکیبیات یاد گرفته است، اینجا چه‌طور مورد استفاده قرار می‌گیرد و چه کاربردهایی دارد.

● **شرقی:** می‌شد بعضی کاربردهای آن را اضافه کرد، چرا این‌قدر محض؟

■ **بهزاد:** تعداد صفحات کتاب بسیار محدود بود.

● **شرقی:** حداقل همان مسئلهٔ سه تا چاه و سه تا خانه‌ای را که خودتان مثال زدید می‌توانستید بگذارید! مثلاً گراف هامنی را.

■ **بهزاد:** اجازه نمی‌دادند. این موضوع سنگین است و واقعاً هم سنگین است و دبیران هم به این موضوع تسلط کافی ندارند.

● **رستمی:** یعنی هم محدودیت زمانی وجود داشت هم محدودیت صفحه‌ای و هم محدودیت دبیرها.

● **شرقی:** این را دانش‌آموز سال چهارم می‌خواند که دغدغهٔ کنکور دارد و اصلاً حوصلهٔ فکر کردن ندارد.

● **امیری:** من خودم تا چهار سال پیش فکر می‌کردم چرا این‌طور نشد؟ چرا این صفحه‌ها به کتاب اضافه نشدند؟ تا جریان نوشتن کتاب ریاضی ۳ پیش آمد و گفتند بخش احتمالش را در ۱۴ صفحه بنویسم. ۱۴ صفحه از آخر کتاب (کاربرد مشتق) را حذف کردند و من باید کل احتمال را برای بچه‌های تجربی در ۱۴ صفحه می‌نوشتم و خیلی کار سنگینی بود.

■ **بهزاد:** ولی علی‌رغم تمام این محدودیت‌ها، من خوش‌حالم که این کار انجام شده است. اگر اجازه می‌دادند، یکی دوتا از کاربردهایش و مثلاً شکل‌های متان، اتان یا پروپان در کتاب بیاید...

● **امیری:** الان این شکل‌ها در کتاب هستند. من خیلی‌ها را به واسطهٔ گراف به ریاضی علاقه‌مند کردم. از جمله دختر خودم که وقتی سال چهارم پیش‌دانشگاهی، به او گراف درس می‌دادم. آن‌قدر علاقه‌مند شد که به‌خاطر گراف گفت من باید رشتهٔ ریاضی بخوانم و از «دانشگاه الزهرا» لیسانس ریاضی گرفت. الان هم می‌خواهد در رشتهٔ گراف ادامهٔ تحصیل بدهد.

■ **بهزاد:** زیباست، واقعاً زیباست. وقتی شکل را می‌کشی می‌توانی مفهوم آن را تجسم کنی.

● **شرقی:** کاربردهای زیادی دارد.

● **امیری:** آقای دکتر، اگر بخواهیم مقایسهٔ کوچکی داشته باشیم بین زمانی که شما در یزد دانش‌آموز بودید، و الان که می‌دانم با دانشجویان سال اول و دوم که از نظر من هنوز دانش‌آموزند، ارتباط دارید نظرتان چیست؟ الان دانش‌آموزان در چه جایگاهی قرار دارند؟ آن موقع در چه جایگاهی قرار داشتند؟ الان چه نیازهایی دارند؟ چه توصیه‌هایی دارید برای دانش‌آموزان دبیرستانی و البته بسیاری از دبیران ریاضی که این مجله را می‌خوانند؟ چه پیشنهادی دارید برای اینکه ریاضی را بهتر بخوانند و بهتر درک کنند. شاید ریاضی‌دان‌هایی هم از میان آن‌ها بیرون بیایند.

■ بهزاد: من در کودکی در یزد به دبستان **«اسلام»** می‌رفتم. شاید باورتان نشود که از بین بچه‌های هم‌کلاس من، به‌جز یک نفر که پزشک هم شد، بقیه دیپلم هم نگرفتند. یعنی زمانه خیلی فرق کرده و وضعیت عوض شده است. الان تقریباً تعداد باسوادهای مملکت نزدیک نود و خرده‌ای درصد است، آن زمان شاید ۲۰ تا ۳۰ درصد بیشتر نبود و حتی کمتر از این بود. پس از انقلاب اسلامی که طبیعتاً جمعیت هم زیاد شده، دانشگاه‌ها و مدارس متعدد ایجاد و تحصیلات، اجباری شده است. این‌ها را باید به‌عنوان امتیاز مثبت تلقی کنیم؛ هر چند متأسفانه نکات منفی هم فراوان داریم. ولی این‌ها مثبت‌اند. الان استعدادهای درخشان در سراسر کشور تشویق می‌شوند که به تحصیلات عالی بپردازند. تعداد بسیار زیادی از آن‌ها الان در خارج مشغول تحصیل هستند، یا به کار اشتغال دارند. خیلی از ایرانی‌ها الان در آمریکا و اروپا سرآمد هستند. ایرانی‌ها در زمینه‌های متفاوت پیشرفت کرده‌اند؛ در زمینه‌های علمی، اقتصادی...

● **امیری:** در مجموع، برآیند صحبت‌هایتان این است که وضعیت دانش‌آموزان ما بهتر شده است؟

■ **بهزاد:** خیلی بهتر شده و امکانات زیاد شده است. آن زمان ارتباطات از طریق تلویزیون، ماهواره و اینترنت اصلاً نبود. ما اگر مقاله‌ای می‌نوشتیم، باید با پست معمولی می‌فرستادیم. من وقتی صحبت از مقاله‌نویسی می‌کنم، برمی‌گردم به چهل ـ پنجاه سال پیش، که مقاله‌نویس انگشت‌شمار است.

ولی اگر اجازه بدهید، این نکته را به سؤال شما اضافه کنم که در حال حاضر به دلایل گوناگون، دانشجویان ما (من با دانش‌آموزان سروکاری ندارم) سرگشته و نگران‌اند. به این سادگی شغلی پیدا نمی‌کنند. جمعیت زیادی در حال فارغ‌التحصیل شدن هستند که توقع بالایی دارند. مثلاً یکی از دانشجویان سال اول دانشگاه شهید بهشتی که دختر خانمی است، پیش من آمده و می‌گوید: آقای دکتر، من شنیده‌ام شما مقاله می‌نویسید. دلم

می‌خواهد به من کمک کنید یک مقاله بنویسم. من فهمیدم منظورش چیست، ولی سؤال کردم: هدفت چیست؟ دانشجوی چه سالی هستی؟ گفت: سال اولم! دانشجوی سال اول به قول شما هنوز یعنی دانش‌آموز. می‌خواهد مقاله بنویسد! پرسیدم: مقاله به چه دردت می‌خورد؟ گفت: شنیده‌ام وقتی مقاله بنویسیم، راحت‌تر می‌توانیم پذیرش بگیریم. یعنی وارد دانشگاه شده و حالا به فکر رفتن به خارج است.

● **رستمی:** استاد شما چند دوره رئیس انجمن ریاضی ایران بوده‌اید؟

■ **بهزاد:** دفعهٔ اول که رئیس شدم، دو دوره. دفعهٔ دوم هم که رئیس شدم برای دو دوره. طبق مقررات هم کسی بیش از دو دوره متوالی نمی‌تواند رئیس انجمن شود. دفعهٔ اول دو سال و دو سال بود اگر اشتباه نکنم. دفعهٔ دوم به سه سال و سه سال تبدیل شد.

● **رستمی:** در دورهٔ دوم یا سوم من خدمتتان رسیدم برای **دایرةالمعارف هندسه**. در دوران دانشگاه، من و شما یک سال هم‌دوره بودیم. شما سال سوم دانشگاه بودید و من سال اول با دکتر **یاسایی**.

● **شرقی و امیری:** دکتر **یاسایی** استاد ما هم بودند.

■ **بهزاد:** بسیار باهوش، زیرک و پرانرژی بود. وقتی من رئیس دانشکدهٔ ریاضی در دانشگاه صنعتی شریف بودم، خواهش کردم که ایشان معاونم شوند و ایشان کتابخانه را بسیار قوی کرد. این کار یکی از کارهای بزرگ ایشان بود.

● **امیری:** من هم از ایشان خاطره‌ای دارم: جلسهٔ اول حضور و غیاب کردند و گفتند هرکس که اسمش را می‌خوانم، بایستد. تا آخر ترم ایشان همه را به اسم و فامیل صدا می‌کردند! فقط با یک‌بار و این برای ما عجیب بود. من هربار که سؤال می‌کردم، مرا به اسم صدا می‌کردند! یا اگر سؤالی می‌پرسیدیم، ایشان پس از نیم ساعت که می‌خواستند پاسخ دهند، به اسم خطاب می‌کردند که مثلاً امیری سؤالی که پرسیدی، حالا جوابش را بگیر!

● **رستمی:** آن دوره اصلاً دورهٔ درخشانی بود. در آن دوره، زبده‌ترین، بهترین و باهوش‌ترین دانش‌آموزان ریاضی به دانش‌سرای عالی آمدند و من وقتی آمدم آقای دکتر بهزاد سال سوم بودند، دکتر **شادمان** سال بعد از ایشان بودند و بعد از او دکتر **یاسایی** و دکتر **للهی** بودند.

● **امیری:** دکتر **نشوادیان** هم با شما بودند؟

● **رستمی:** دکتر نشوادیان هم‌کلاس من بود.

■ **بهزاد:** قبل از من دکتر احمد میرباقری، استاد جبر بودند و مرحوم شدند. قبل از ایشان دکتر حبیب صالحی که به آمریکا رفت و دیگر پایش را به ایران نگذاشت. قبل از دکتر صالحی اگر اشتباه نکنم، دکتر حیدر رجوی بود.

● **امیری:** یکی از سؤالات آقای یاسی‌پور این است که: مسائل پیش‌روی قرن بیست‌ویکم با اشاره به فهرست مسائل **هیلبرت** چیست؟

■ **بهزاد:** هیلبرت در سال ۱۹۰۰ میلادی در یک کنگرهٔ جهانی ریاضیات، بیست و چند مسئله را به‌عنوان مسائل چالش‌انگیز پیش‌روی ریاضی‌دانان در قرن بیستم مطرح می‌کند. از این مسائل، خیلی‌ها حل شده‌اند و چند مسئله هنوز حل نشده‌اند. با تأسی از این کنگره، «انجمن ریاضی آمریکا» که استادان بسیاری عضو آن هستند، و «جامعهٔ ریاضی آمریکا» که بیشتر دبیران را شامل می‌شود، دست به دست هم دادند و در سال ۲۰۰۰ در «دانشگاه UCLA» کنگره‌ای برپا کردند زیر عنوان «مسائل چالشی قرن بیست و یکم». آن‌ها حدود ۲۰ نفر از ریاضی‌دانان بزرگ سراسر دنیا را انتخاب کردند تا در رشته‌های تخصصی خودشان، مسائل چالش‌انگیز را شرح دهند؛ مسائلی که در قرن بیست‌ویکم ریاضی‌دانان روی آن‌ها کار می‌کنند و کار خواهند کرد.

من در سال ۲۰۰۰ در آن کنگره شرکت کردم. همان موقع پسر کوچکم هم دانشجوی دانشگاه UCLA بود. بنابراین من هم او را دیدم و هم در کنگره شرکت کردم. کنگرهٔ بسیار جالبی بود. هیچ یادم نمی‌رود که یکی از این آقایان استاد بازنشستهٔ دانشگاه برکلی که تخصصش هم گراف بود، این جمله خیلی جالب و آموزنده را گفت: «قرن بیستم قرن ریاضیات و فیزیک بود، قرن بیست‌ویکم قرن ریاضیات و زیست‌شناسی است.»

وی یک مثال زد. او گفت: «مغز انسان گرافی است متشکل از ۱۰ به توان ۱۰ نورون و ۱۰ به توان ۱۴ سیناپس. در واقع نورون‌ها همان نقطه‌ها هستند و سیناپس‌ها همان یال‌ها. گرافی است که این همه نقطه و این همه یال دارد. واقعاً خلقت چه عظمتی دارد!»

می‌گفت: «ما می‌خواهیم مطالعه کنیم که به‌طورهم‌زمان مغز روی چند موضوع می‌تواند تعمق و فکر کند.» در حقیقت من به این فکر افتادم که می‌خواهد تعداد مؤلفه‌های این گراف را معلوم کند و می‌خواهد ببیند این گراف هم‌بند است و یک مؤلفه دارد، یا غیرهم‌بند است و چند مؤلفه دارد. می‌خواهد ببیند که مغز انسان با این همه نقطه و خط به‌طور هم‌زمان چند کار مختلف را می‌تواند انجام دهد.

نمایش هندسی $\sqrt{x}$

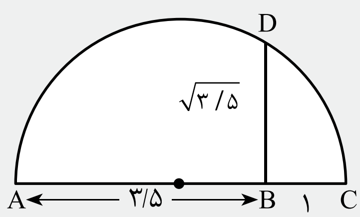
ترجمهٔ
احترام انبارکی

کلیدواژه رسم $\sqrt{\text{و}}$، قضیهٔ فیثاغورس

در کتاب ریاضیات (۱) اول دبیرستان روش نمایش $\sqrt{\text{و}}$ برای هر عدد صحیح و مثبت x توضیح داده شده است. در این مقاله نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان $\sqrt{\text{و}}$ را برای هر عدد حقیقی مثبت x به‌طور هندسی نمایش داد.

برای مثال بیایید $\sqrt{۳/۵}$ را به‌طور هندسی پیدا کنیم.

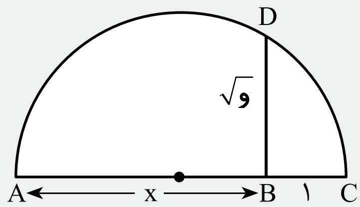
روی یک خط مفروض به فاصلهٔ ۳/۵ واحد از نقطهٔ ثابت A، نقطهٔ B را مشخص می‌کنیم (شکل ۱).



شکل ۱

در فاصلهٔ ۱ واحدی نقطهٔ B، نقطهٔ جدید C را مشخص می‌کنیم. نقطهٔ وسط پاره‌خط AC را O می‌نامیم. نیم‌دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OC رسم می‌کنیم. از نقطهٔ B خطی عمود بر AC می‌کشیم تا نیم‌دایره را در نقطهٔ D قطع کند. در این‌صورت: $\sqrt{۳/۵} = \text{یب}$.

به‌طور کلی‌تر، برای یافتن $\sqrt{\text{و}}$، برای هر عدد حقیقی و مثبت x، نقطهٔ B را چنان اختیار می‌کنیم که AB=x. مطابق آنچه در شکل ۲ نمایش داده شده است، نقطهٔ C را چنان اختیار کنید که BC برابر ۱ واحد باشد. سپس همان‌طور که در حالت x =۳/۵ عمل کردیم، $\sqrt{\text{و}} = \text{یب}$ را می‌یابیم (شکل ۲).



شکل ۲

می‌توانیم این نتیجه را با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس هم ثابت کنیم.

توجه کنید که در شکل ۳ مثلث OBD یک مثلث قائم‌الزاویه است. همچنین شعاع دایره برابر است با $\frac{\text{و}+۱}{۲}$.

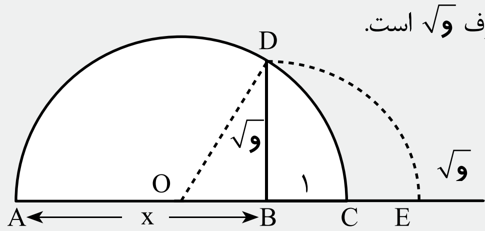
بنابراین، $\text{ب د} = \text{پ د} = \text{ا د} = \frac{\text{و}+۱}{۲}$. پس: $\text{ب د} = \text{و} - (\frac{\text{و}+۱}{۲}) = \frac{\text{و}-۱}{۲}$. حال با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$\text{پب}^۲ = \text{پ د}^۲ - \text{ب د}^۲ = (\frac{\text{و}+۱}{۲})^۲ - (\frac{\text{و}-۱}{۲})^۲ = \frac{۴\text{و}}{۴} = \text{و}$$

و از اینجا نتیجه می‌گیریم که: $\sqrt{\text{و}} = \text{یب}$

این ساختار، روشی دیداری و هندسی را برای نشان دادن اینکه $\sqrt{\text{و}}$ برای هر عدد حقیقی $x>۰$ وجود دارد، به ما می‌دهد.

اگر می‌خواهید جای $\sqrt{\text{و}}$ را روی محور اعداد بدانید، خط BC را محور اعداد فرض کنید و نقطهٔ B را به‌عنوان صفر و نقطهٔ C را به‌عنوان ۱ در نظر بگیرید و به‌همین ترتیب ادامه دهید. به مرکز B و به شعاع BD کمانی رسم کنید که این کمان محور فوق را در نقطهٔ E قطع کند (شکل ۳). نقطهٔ E معرف $\sqrt{\text{و}}$ است.



شکل ۳

منبع
کتاب ریاضیات کلاس نهم کشور هند

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه دوم:

چند معما از دزدان شهر بغداد!

حتماً بیشتر شما با داستان‌های «هزار و یک‌شب» آشنایی دارید. اگر هم کتاب معروف آن را نخوانده باشید، انیمیشن‌ها و فیلم‌های ساخته شده از روی آن را دیده‌اید. بیشتر داستان‌های این مجموعه در شهر بغداد، پایتخت باشکوه دوران خلافت «خلفای عباسی» می‌گذرند. یکی از معروف‌ترین این داستان‌ها، داستان «علی بابا و چهل دزد بغداد» است. معماهای این شمارهٔ ما از این داستان اقتباس شده‌اند.

دزدان بغداد هر از چندگاه دست به سرقتی می‌زدند، اما هربار دستگیر می‌شدند و قاضی دانای خلیفه با بازجویی و سؤال و جواب‌های هوشمندانه‌اش، آن‌ها را محکوم می‌کرد. روزی سه تن از دزدان آن گروه، به نام‌های **عبید**، **حسیب** و **عماد** به بغداد آمدند و در خانه‌ای ساکن شدند. همهٔ اهالی از ورود آن‌ها ناراحت و به آن‌ها مظنون شدند. هرچندگاه یک‌بار، یکی از آن‌ها از این سه نفر به قاضی شکایت می‌برد و آن‌ها را برای بازجویی به دادگاه شهر می‌بردند. در اینجا روایت این دادگاه‌ها و صحبت‌های این سه تن با قاضی آمده است. در هر مورد یک معما مطرح شده است که شما باید آن را حل کنید:

معمای اول

دزدی وارد مغازهٔ **عبدل** جواهرفروش شـده و از آن دزدی کرده بود. معلوم شد که دزد یکی از همان سه نفر بوده است. در دادگاه، هر یک از این سه نفر، یکی از دیگران را متهم به دزدی کرد، اما عبید تنها کسی بود که دروغ گفت. آیا او دزد است؟

معمای دوم

بار دیگر، و این‌بار از مغازهٔ **سـعد** جواهرفروش، سرقت شد و جواهرات را در خانهٔ همان سه نفر پیدا کردند. در نتیجه آن سه به دادگاه برده شدند. در دادگاه آن‌ها جملات زیر را گفتند:

عبید: من در سرقت شرکت نداشته‌ام!

عماد: البته حسیب هم شرکت نداشته است!

حسیب: ولی من در سرقت شرکت داشته‌ام!

حالا معلوم شده است که دوتای آن‌ها دروغ گفته‌اند. سارق چه کسی بوده است؟

معمای سوم

باز هم سرقتی دیگر اتفاق افتاد! و طبق معمول همان سه نفر مظنون بودند! در دادگاه آن‌ها جملات زیر را گفتند:

عماد: حسیب هرگز در دزدی شرکت نداشته است.

حسیب: درست است.

عبید: عماد بی‌گناه است.

عجیب اینکه دزد واقعی درست گفت، اما همهٔ آن‌ها راست نگفتند. سارق چه کسی بود؟

معمای چهارم

باز هم سرقت! و باز هم همان سه نفر! این‌بار هم معلوم شد که فقط یکی از آن‌ها مجرم است. عبید گفت که بی‌گناه است، عماد قبول کرد که عبید بی‌گناه است و حسیب اعتراف کرد که خودش همان مجرم است. همچنین معلوم شد که مجرم کسی بود که دروغ گفته بود. چه کسی سارق بود؟

معمای پنجم

یک روز شمشیری قیمتی از خزانهٔ حکومتی دزدیده شد و باز همان سه نفر به‌عنوان متهم به دادگاه احضار شدند. عماد گفت که حسـیب شمشیر را دزدیده است و حسیب گفت که عبید آن را دزدیده است. قاضی در این زمان نتوانست تشخیص دهد که چه کسی مجرم است، اما بعداً مشخص شد که هیچ بی‌گناهی دروغ نگفته و فقط یک نفر دزد بوده اسـت. آیا حالا قاضی می‌تواند بگوید که چه کسی دزد است؟!

معمای ششم

این‌بار یک ساعت قیمتی به سرقت رفت و مشخص شد که دزد یکی از همان سه نفر است. در دادگاه عبید اظهار کرد که حسیب بی‌گناه است و حسیب گفت که عماد بی‌گناه است و جملهٔ عماد نیز توسط منشیان دادگاه ثبت نشد. عجیب اینکه مجرم راست گفته و دو فرد بی‌گناه هر دو دروغ گفته بودند! چه کسی ساعت را دزدیده بود؟

معمای هفتم

ایـن دفعه آن سـه نفر بـه اصطبل خلیفه وارد شـدند و حیواناتـی را از آنجا دزدیدند! یکی از آن‌ها یک اسـب دزدید، یکی یک قاطر و دیگری یک شـتر! بالاخره هر سـه دستگیر و بـه دادگاه برده شـدند. در دادگاه عبید گفت: عماد اسـب را دزدید. حسـیب گفت: نه این‌طور نیسـت، عمـاد قاطر را دزدیـد و عماد گفت: نه این‌طور نیسـت، هر دوی آن‌ها دروغ می‌گویند! من هیچ‌یک از آن‌ها را ندزدیده‌ام. معلوم شد، کسی که شـتر را دزدیده اسـت دروغ می‌گوید و کسی که اسب را دزدیده اسـت راسـت می‌گوید. هرکس چه چیزی را دزدیده بود؟

معمای هشتم

این دفعه دیگر وحشـتناک بـود! آن‌قدر با این سـه نفر مماشـات کردند تا بالاخره به خودشـان جرئت دادند که وارد قصر خلیفه شوند و از سه تن از زنان دربار، جواهراتی قیمتی را سرقت کنند، البته بعد از این دزدی جسورانه، هر سه نفر آن‌ها اعدام شدند و داستان این سه به پایان رسید، ولی قبل از آن به دادگاه برده شدند. نام این سه زن، **امینا**، **لیلا** و **صفیه** بود و از هر کدام یک جواهر قیمتی، شامل الماس، زمرد و یاقوت دزدیده شـده بود. با اظهارات آن‌ها در دادگاه قاضی خردمند توانست اطلاعات زیر را به‌دست آورد:

۱. کسی که الماس را دزدیده بود، مجرد و خطرناک‌ترین فرد در میان این سه دزد بود.

۲. امینا جوان‌تر از خانمی بود که زمرد داشت.

۳. برادر زن عبید، یعنی عماد، کسی بود که از بزرگ‌ترین خانم‌هـا دزدی کرده بـود و نیز از دزدی که زمـرد را دزدید، کم‌خطرتر بود.

۴. مردی که از امینا دزدی کرد، مجرد بود.

۵. عبید از لیلا دزدی نکرد.

حالا بگویید که هرکس چه چیزی را از چه کسی دزدیده بود؟!

آموزشی

حمیدرضا امیری*

■ توابع درجهٔ دوم

یک تابع درجهٔ دوم تابعی چندجمله‌ای از درجهٔ ۲ به‌صورت زیر است:

غ(و) = ع‌و^{۲} + ع‌و + ـعـ   که ع ≠ ۰

نمودار تابع درجهٔ ۲ یک سهمی است که اگر ع > ۰، شاخه‌های سهمی به سمت بالا و اگر ع < ۰، شاخه‌های سهمی به سمت پایین باز می‌شود. مختصِ x (طول) رأس سهمی برابر با و = $\frac{-\text{ع}}{۲\text{ع}}$ و مختصِ y (عرضِ) آن با قراردادنِ مقدار x در f(x) به‌دست می‌آید.

اگر مختصات رأس سهمی (h,k) باشد، در این صورت معادلهٔ استاندارد سهمی به شکل (ه − ق) = ع(و − غ)^{۲} خواهد بود. محل برخورد سهمی با محور xها در صورت وجود از حل معادلهٔ ع‌و^{۲} + ع‌و + ـعـ = ۰ به‌دست می‌آید.

❊❊❊

مثال ۱: رأس سهمی ه = ۲و^{۲} − ۸و + ۷ را بیابید.

حل: داریم: و = $\frac{-\text{ع}}{۲\text{ع}}$ = $-\frac{(-۸)}{۲\times۲}$ = ۲ و در نتیجه:

ه = ۲ × (۲^{۲}) − ۸ × (۲) + ۷ = −۱

مثال ۲: مینیمم (کمترین) مقدار تابع غ(و) = ۲و^{۲} + ۲و + ۵ را بیابید.

حل: این تابع کمترین مقدار را در مختصِ y (عرضِ) رأس می‌گیرد. از آنجایی که طول نقطهٔ رأس از رابطهٔ و = $\frac{-\text{ع}}{۲\text{ع}}$ = $\frac{-۲}{۲\times۲}$ = $-\frac{۱}{۲}$ به‌دست می‌آید، مینیمم مقدار به‌صورت

ه = ۲ × ($-\frac{۱}{۲}$)^{۲} + ۲ × ($-\frac{۱}{۲}$) + ۵

= ۲ × ($\frac{۱}{۴}$) − ۱ + ۵ = $\frac{۱}{۲}$ + ۴ = $\frac{۹}{۲}$

به‌دست می‌آید.

❊❊❊

تمرین ۱. رأس سهمی ه = و^{۲} + ۶و − ۲ را بیابید.

تمرین ۲. ماکزیمم (بیشترین) مقدار تابع غ(و) = −و^{۲} − ۵و + ۹ را بیابید.

آموزش ترجمهٔ

■ Quadratic Functions

A quadratic function is a 2nd-degree polynomial function:

$f(x)=ax^2+bx+c$, where $a\neq0$.

The graph of a quadratic function is a parabola, which opens up if $a>0$ and opens down if $a<0$.

The x-coordinate of the vertex of the parabola is given by و = $-\frac{\text{ع}}{۲\text{ع}}$, and the y-coordinate can be found by substituting this value for x info f(x).

If the vertex of the parabola has coordinates (h,k), then the standard equation of the parabola has the form $y-k=a(x-h)^2$.

The x-intercepts of the parabola, if there are any, are the solutions of the quadratic equation $ax^2+bx+c=0$.

Ex 1 Find the vertex of the parabola $y=2x^2-8x+7$.

Sol We have that و = $-\frac{\text{ع}}{۲\text{ع}}$ = $-\frac{(-۸)}{(۲*۲)}$ = ۲ , and then $y= 2(2^2)-8(2)+7=8-16+7=-1$.

Ex 2 Find the minimum value of the function $f(x)=2x^2+2x+5$.

Sol The minimum value of this function is given by the y-coordinate of the vertex. Since the x-coordinate of the vertex

تمرین ۳. تابعی درجهٔ دو چون f(x) بیابید، به قسمی که نمودار آن در دو نقطه با طول‌های ۵ و ۱ محور xها را قطع کند و دارای مینی‌مم مقداری برابر با ۱۲- باشد.

تمرین ۴. یک سهمی چون ه = وع^۲ + وع + ء را به قسمی مشخص کنید که نقطهٔ (۳،۲−) رأس آن باشد و از نقطهٔ (۱−،۲) عبور کند.

تمرین ۵. مینیمم مقدار تابع غ(و) = و^۴ − ۸و^۲ + ۲۵ را بیابید و مقداری از x را بیابید که به ازای آن g(x) کمترین مقدار را دارد.

تمرین ۶. رأس سهمی و = ه^۲ − ۱۰ه + ۴۰ را بیابید.

تمرین ۷. تابع درجهٔ دومی چون f(x) بیابید، به قسمی که غ(۲) = ۲۰− کمترین مقدار آن و غ(۴) = ۸− باشد.

تمرین ۸. معادلهٔ خط غیرعمودی را بیابید که سهمی ه = و^۲ را فقط در نقطهٔ (۳،۹) قطع کند.

تمرین ۹. ماکزیمم مقدار تابع غ(و) = ۱۲و / (و^۲ + ۴) را بیابید.

برخی لغات مهم متن

1) Quadratic	درجهٔ دوم
2) Function	تابع
3) Polynomial	چندجمله‌ای
4) graph	نمودار
5) Parabola	سهمی
6) X-Coordinate	مختصِ x
7) Equation	معادله
8) Vertex	رأس
9) Value	مقدار
10) Coordinates	مختصات

متون ریاضی (۱)

is given by و = −ع/۲ع = −۲/(۲*۲) = −۱/۲, the minimum value is given by ه = ۲(−۱/۲)^۲ + ۲(−۱/۲) + ۵ = ۲(۱/٤) − ۱ + ۵ = ۱/۲ + ٤ = ۹/۲

Pr 1 Find the vertex of the parabola $y=x^2+6x-2$.

Pr 2 Find the maximum value of the function $f(x)=-x^2-5x+9$.

Pr 3 Find a quadratic function f(x) which has 5 and 1 as the x-intercepts of its graph and which has a minimum value of −12.

Pr 4 Find a parabola $y=ax^2+bx+c$ which has its vertex at the point (−2,3) and which passes through the point (2,−1).

Pr 5 Find the minimum value of the function $g(x)=x^4-8x^2+25$, and find the values of x for which g(x) is a minimum.

Pr 6 Find the vertex of the parabola $x=y^2-10y+40$.

Pr 7 Find a quadratic function f(x) such that f(2)=−20 is its minimum value, and such that f(4)=−8.

Pr 8 Find an equation of the non-vertical line which intersects the parabola $y=x^2$ only at the point (3,9).

Pr 9 Find the maximum value for the function غ(و) = ۱۲و / (و^۲ + ٤).

رویکردهای جدید آموزش ریاضی
در کتاب جدیدالتألیف ریاضیات ۱

بهنام آیتی‌پور*
دبیر ریاضی
دبیرستان‌های دزفول

کلیدواژه: روش استقرایی، روان‌خوانی، مفهوم‌محوری، قاعده‌محوری

اشاره

در کتاب جدیدالتألیف ریاضی ۱، برخی رویکردهای بدیع آموزشی به‌چشم می‌خورند که آن‌ها را مثبت ارزیابی می‌کنیم. در این مقاله ابتدا به معرفی رویکردهای مزبور می‌پردازیم و سپس نقاط مثبت و منفی تألیف کتاب را در تحقق این اهداف بررسی می‌کنیم.

■ راهبرد اول:
استفاده از روش استقرایی در بیان مفاهیم ریاضی

در کتاب‌های قبلی عموماً فرمول‌ها به‌صورت مستقیم بیان می‌شدند و دانش‌آموزان فقط آن‌ها را حفظ می‌کردند؛ مثل:

قاعدهٔ ضرب رادیکال‌ها: $\sqrt{\text{ع}}\times\sqrt{\text{ع}}=\sqrt{\text{ع}\times\text{ع}}$

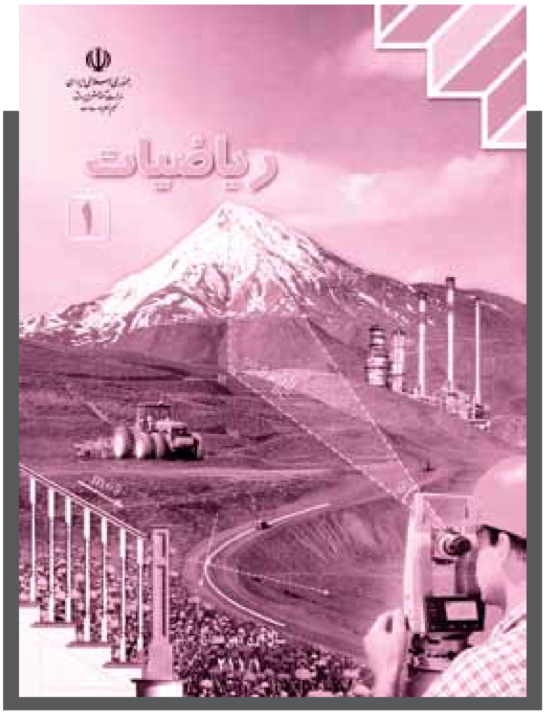
اما در تألیف جدید با تشکیل جدول و بیان مثال‌های عددی سعی در تفهیم فرمول‌ها و قواعد می‌شود؛ به‌طوری‌که دانش‌آموز با دقت در این مثال‌ها به الگوهای منطقی پی می‌برد که صورت ریاضی آن‌ها همان فرمول‌ها هستند.

مسئلهٔ ۱

۱. جدول زیر را تکمیل کنید.

عدد توان‌دار	$۳^{۱}$	$۳^{۲}$	$۳^{۳}$	$۳^{۴}$
حاصل				۸۱

۲. چه رابطه‌ای بین اعداد سطر دوم جدول می‌یابید؟



۳. سطر اول را ادامه دهید و عدد بعدی را $۳^{۰}$ قرار دهید. با توجه به رابطه‌ای که بین اعداد سطر دوم پیدا کرده‌اید، چه عددی را برای $۳^{۰}$ پیشنهاد می‌کنید؟

مسئلهٔ ۲

۱. جدول زیر را کامل کنید.

ع	۹	۲۵	$\frac{۱}{۴}$
ع	۴	۴	۱۰۰
$\sqrt{\text{ع}}\sqrt{\text{ع}}$			
$\sqrt{\text{عع}}$			

۲. چه رابطه‌ای بین اعداد سطر سوم و چهارم می‌بینید؟

۳. با انتخاب چند عدد دیگر برای a و b که مربع یک عدد گویا هستند، درستی نتیجه‌ای را که گرفته‌اید بررسی کنید.

مسئلهٔ ۳

اتحادها و تجزیه‌ها

۱. به ازای مقادیر داده شده برای x جدول را کامل کنید.

و	$\text{و}^{۲}$	۶و	$(\text{و}+۳)^{۲}$	$\text{و}^{۲}+۶\text{و}+۹$
−۳				
−۲				
۰				
$\frac{۱}{۲}$				

۲. با مقایسهٔ دو ستون آخر جدول چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ اگر جـدول را به ازای چند مقدار دیگـر برای x ادامه دهیم، چه حدسی برای دو ستون آخر می‌زنید؟

گرچه این روش از نظر علمی جایگاه معتبر ندارد و با بیان مثـال ولو با تعداد زیاد، اثبات موضوع تحقق نیافته اسـت، اما در آموزش نیاز اسـت گاهی با مثال‌های هدایت شده‌ای، ذهن دانش‌آمـوز را به فهم موضـوع نزدیک کرد. در این میان نباید از تألیف سؤالاتی که هوشمندی الگویابی را تقویت می‌کنند، غافل بود.

مثال: از مثال‌های زیر به چه الگویی می‌رسیم؟

$$(\text{و}-۲)(\text{و}+۲)=\text{و}^{۲}+۲\text{و}-۲\text{و}-۴=\text{و}^{۲}-۴$$

$$(\text{ع}-\text{ع})(\text{ع}+\text{ع})=\text{ع}^{۲}+\text{عع}-\text{عع}-\text{ع}^{۲}=\text{ع}^{۲}-\text{ع}^{۲}$$

$$(\Delta-\square)(\Delta+\square)=\Delta^{۲}+\Delta\square-\Delta\square-\square^{۲}=\Delta^{۲}-\square^{۲}$$

مورد **آخر الگویی** است که باید دانش‌آموز به‌عنوان نتیجه اعلام کند و چون این نتیجه خودجوش است، ماندگار و قابل تعمیم‌می‌شود.

■ راهبرد دوم:

روان‌خوانی عبارت‌های ریاضی به‌جای روخوانی عبارت‌های ریاضی

در قسـمتی از کتـاب چند عبـارت جبری داده شـده و خواسته شـده اسـت مفهوم آن‌ها به زبان فارسی بیان شود. گرچه ترجمهٔ تمام و کمال یک عبارت ریاضی کاری غیرممکن اسـت و محدودیت‌هایی در این بین وجـود دارد، اما رویکرد آموزشی مجوز اندکی تسامح و تساهل را به ما می‌دهد. ارزش روان‌خوانی وقتی مشخص می‌شود که در کلاس درس متوجه می‌شـویم، دانش‌آموزان هیچ تفاوتی بین عبارت‌های ۲^{n} و $۲n$ یا عبارت‌هایی مانند $\sin x^{۲}$ و $\sin^{۲}x$ قائل نیسـتند. یا اینکه در ریاضی سـال بعد وقتـی از دانش‌آمـوزی می‌خواهیم عبارت $\text{غ}=\{(\text{و},\text{ه})\mid \text{و}\in\text{ح},\ \text{ه}=۲\text{و}\}$ را بخوانـد، با چنیـن جوابی مواجه می‌شـویم: «اف ایکس وای به‌طوری کـه وای برابر دو ایکس.»

این راهبرد تقریباً در بقیهٔ فصل‌ها متوقف شده است. مثلاً در قسمت توان می‌توانستیم چنین تمریناتی را ذکر کنیم:

۱. تساوی مقابل را به زبان فارسی بیان کنید.

$$\text{ع}^{\text{ک}}\times\text{ع}^{\text{ک}}=\text{ع}^{\text{ک}+\text{ک}}$$

هـرگاه دو عدد توان‌دار با پایه‌های مسـاوی درهم ضرب شوند، یکی از پایه‌ها را می‌نویسیم و توان‌ها را جمع می‌کنیم.

۲. اتحاد مقابل را به زبان فارسی بازنویسی کنید.

$$(\text{ع}+\text{ع})^{۲}=\text{ع}^{۲}+۲\text{عع}+\text{ع}^{۲}$$

مربع مجموع دو عدد می‌شـود مربع اولی، به اضافهٔ مربع دومی، به اضافهٔ دو برابر حاصل‌ضرب اولی در دومی.

۳. فرمول مقابل را به زبان فارسی بازنویسی کنید.

$$\text{ع}=\sqrt{(\text{و}_{\text{ب}}-\text{و}_{\text{ا}})^{۲}+(\text{ه}_{\text{ب}}-\text{ه}_{\text{ا}})^{۲}}$$

فاصلهٔ دو نقطه در دستگاه مختصات می‌شود جذر مجموع مربـع اختلاف طول‌هـای دو نقطه، به اضافـهٔ مربع اختلاف عرض‌های آن‌ها.

نتیجه اینکـه رویهٔ مذکور نباید به یک قسـمت محدود می‌شد و در دیگر فصل‌ها هم باید ادامه می‌یافت.

■ راهبرد سوم:

بیـان عبارت‌های جبـری با اسـتفاده از تعابیر هندسی

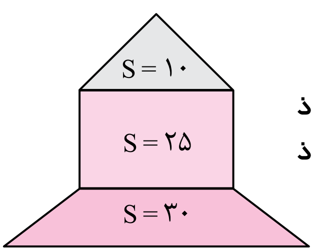
قبـل از کاربرد این راهبرد نیاز بود اصل مسـاحت بیان و تفهیم شود. همچنین، مربع کامل شدن به عنوان فرایندی که به حل مسئله کمک می‌کند، قابل طرح بود.

اصل مساحت:

مساحت کل برابر است با مجموع مساحت‌های اجزا

مسئلهٔ ۴

مساحت شکل زیر را حساب کنید.

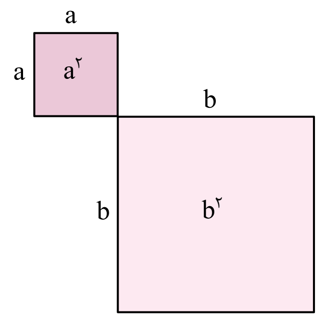


$$\text{ذ}=\text{ذ}_{\Delta}+\text{ذ}_{\square}+\text{ذ}_{⏢}$$

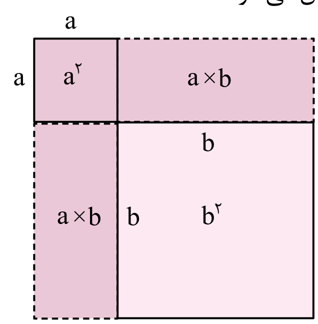
$$\text{ذ}=۱۰+۲۵+۳۰=۶۵$$

مسئلهٔ ۵

شـکل زیـر را طوری کامل کنید که بـه یک مربع کامل تبدیل شود.



با افزودن دو مستطیل به طول و عرض a و b، شکل به یک مربع کامل تبدیل می‌شود.



مساحت مربع کامل شده را با دو روش زیر پیدا کنید:

۱. با استفاده از مساحت مربع:

$$\text{ق}^{۲} = \text{ذ}$$

مربع یک ضلع ⇓   مساحت مربع ⇓

۲. با استفاده از اصل مساحت:

$$\text{ذ} = \text{ذ}_{۱} + \text{ذ}_{۲} + \ldots$$

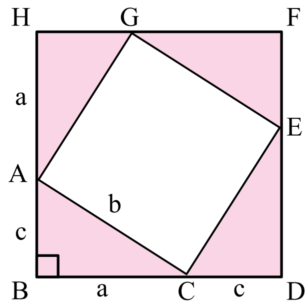
نتیجه:

$$\text{ع}^{۲} + \text{۲عع} + \text{ع}^{۲} = (\text{ع} + \text{ع})^{۲}$$

باز هم این راهبرد نیمه‌کاره رها شـده اسـت. تعمیق این راهبرد می‌توانسـت بر ارزش علمی کتاب بیفزاید و به تفهیم برخی مطالب یاری رساند. به مسئلهٔ زیر دقت کنید.

مسئلهٔ ۶

قضیهٔ فیثاغورس را با استفاده از شکل زیر اثبات کنید.



$$\text{ع}^{۲} + ۴(\frac{۱}{۲} \times \text{ع} \times \text{ع}) = (\text{ع}+\text{ع})^{۲} \Rightarrow \text{ذ}_{\text{ابپت}} + ۴\text{ذ}_{\overset{\Delta}{\text{اب}}} = \text{ذ}_{\text{ثتپب}}$$

$$\text{ع}^{۲} + \text{ع}^{۲} + \text{۲عع} = \text{۲عع} + \text{ع}^{۲} \Rightarrow \text{ع}^{۲} + \text{ع}^{۲} = \text{ع}^{۲}$$

■ راهبرد چهارم:

توجه مفهومی به تعاریف

گاهی در کلاس سـوم ریاضی از دانش‌آموزان می‌پرسـم: اتحاد چیسـت؟ و با تعجب می‌بینم که جواب درسـتی ارائه نمی‌شود. یا مثلاً می‌پرسم: فرق اتحاد و معادله چیست؟ و باز مشاهده می‌کنم درک درستی از این موضوع وجود ندارد. علت این اسـت که در کتاب‌های قبلی فقط به ذکر صورت تعاریف اکتفا می‌شـد. در صورتی‌که در کتاب جدید مسـائلی مطرح می‌شوند که در آن‌ها مفهوم تعاریف به چالش کشیده می‌شود.

مثال ۱. معلم پرسید: آیا عبارت «چهار عدد زوج متوالی» یک مجموعه را نشـان می‌دهد؟ دانش‌آموزی گفت: بله، مثلاً {۲،۴،۶،۸}. به نظر شـما آیا پاسـخ او صحیح بوده است؟ در صورت اشتباه بودن، علت اشتباه را توضیح دهید.

باید به این دسته از سؤالات و کیفیت آن‌ها افزود.

مثال ۲. آیا تسـاوی $0 \times X = 0$ یک اتحاد اسـت؟ بله چون به ازای تمامی مقادیری که جایگزین متغیر X شـود، تساوی برقرار است.

■ راهبرد پنجم:

«مفهوم‌محوری» به‌جای «قاعده‌محوری»

شاید مهم‌ترین راهبرد و رویکرد آموزشی در کتاب همین راهبرد باشـد و بقیهٔ راهبردها به‌نوعـی زیرمجموعه‌ای از این راهبرد اساسی باشند. برای روشن شدن موضوع به ادامهٔ مطلب توجه کنید:

قاعده: کسری که مخرج آن صفر باشد، تعریف نشده است.

مفهوم: چرا کسری که مخرج آن صفر است، تعریف نشده است؟

قاعده یک دستورالعمل حفظی است که بسیار خوشایند دانش‌آموز است زیرا با دانستن آن، مسئله با سهولت و سرعت هرچه تمام‌تر حل می‌شود. مثلاً طبق قاعده می‌گوییم $\frac{۵}{۰}$ تعریف نشده است، اما مفهوم، یک استدلال منطقی است که با استفاده از تفکر به‌دست می‌آید. نمونه‌های زیر را ملاحظه کنید

۱. محاسبهٔ $\frac{۱۲}{۳}$ یک سؤال است. یعنی چه عددی را در ۳ ضرب کنیم که جواب بشود ۱۲؟ جواب: ۴

۲. محاسبهٔ $\frac{۱۵}{۵}$ یک سؤال است. یعنی چه عددی را در ۵ ضرب کنیم که جواب بشود ۱۵؟ جواب: ۳

۳. محاسبهٔ $\frac{۰}{۴}$ یک سؤال است. یعنی چه عددی را در ۴ ضرب کنیم که جواب بشود ۰؟ جواب: ۰

۴. محاسبهٔ $\frac{۵}{۰}$ یک سؤال است. یعنی چه عددی را در ۰ ضرب کنیم که جواب بشود ۵؟

چنین عددی وجود ندارد چون هر عددی در ۰ ضرب شود، حاصل‌ضرب مساوی ۰ می‌شود و نه ۵.

به چنین اعدادی در ریاضی تعریف نشده می‌گوییم.

نمونهٔ سؤال قاعده‌محور:

درستی تساوی زیر را نشان دهید.

۴۵ کهم = °۶۰ فک ل × °۳۰ گک ع + °۶۰ گک ع × °۳۰ فک ل

نمونهٔ سؤال مفهوم‌محور:

نشان دهید: $\frac{۱}{۲}$ = °۳۰ فک ل

نتیجه

ملاک ارزیابی در موفقیت یا عدم موفقیت تألیف کتاب درسی توانمندی یا عدم توانمندی در بیان مفاهیم است. این‌جانب تألیف کتاب جدید را اقدامی شجاعانه ارزیابی می‌کنم، اگرچه نقدهایی بر آن دارم. اما نکتهٔ مهم این است که فقط با تألیف جدید، رویکرد آموزش ریاضی احیا نمی‌شود، بلکه اقداماتی چون در نظر گرفتن ریاضی به مثابه یک درس مهارتی، تشکیل کارگاه آموزشی ریاضی در مدارس و... لازمهٔ این حرکت سازنده است.

* Behayati110@yahoo.com

خبر

یک خبر خوب برای ریاضی‌دوستان!
تولد یک نشریهٔ جدید ریاضی

به تازگی انتشارات مبتکران که سابقهٔ ۲۷ سال فعالیت فرهنگی را در پیشینهٔ خود دارد، اقدام به انتشار یک مجلهٔ ریاضی، ویژهٔ دورهٔ آموزش متوسطهٔ ۲ و کلیه علاقه‌مندان به دانش ریاضی کرده است.

این انتشارات که سابقهٔ فعالیت مطبوعاتی علمی را دارد و چند سال پیش هم مجلات ریاضی را با عنوان «توان» برای دانش‌آموزان دوره‌های راهنمایی و دبیرستان به‌صورت مجزا منتشر می‌نمود، اکنون مجلهٔ ریاضی پایا را تقدیم خوانندگان خود کرده است. مجلهٔ ریاضی پایا که تاکنون ۲ شماره از آن منتشر شده است (شمارهٔ ۱ـ زمستان ۱۳۹۱ و شمارهٔ ۲ ـ تابستان ۱۳۹۲) دارای شناسنامه‌ای به شرح زیر است:

شرکت آموزشی فرهنگی مبتکران
مدیرعامل: یحیی دهقانی
صاحب امتیاز و مدیر مسئول: عنایت‌الله راستی‌زاده
سردبیر: میرشهرام صدر
شورای برنامه‌ریزی و کارشناسی: ناصر بروجردیان، خسرو داودی، مجتبی رفیعی، ابراهیم ریحانی، سیدحسین سیدموسوی، میرشهرام صدر، محمدعلی فریبرزی عراقی، بهزاد منوچهریان، محمود نصیری، احسان یارمحمدی
مدیرداخلی: مجتبی رفیعی
ویراستار ارشد: ناصر بروجردیان

در این دو شماره، مقالاتی به چاپ رسیده است که عناوین برخی از آن‌ها به قرار زیر است:

مغالطه در استدلال: مجتبی رفیعی، فعالیت‌ها در آزمایشگاه ریاضی: دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی، آیا $(-۱)^{\frac{۱}{۳}}$ تعریف می‌شود: دکتر ناصر بروجردیان، باروها در ریاضی: میرشهرام صدر، حد تابع: محمود نصیری، آشنایی با نقشهٔ مفهومی: دکتر ابراهیم ریحانی ـ مریم استادی ـ شهرناز بخشعلی‌زاده، مسئله‌های تاریخی ریاضیات: دکتر محرم‌نژاد ایرد موسی، رمزنگاری با استفاده از ماتریس‌ها: احسان یارمحمدی، معماهای ریاضی: هوشنگ شرقی، مهارت‌های حل مسئله: مجتبی معارفوند، کاربرد دنباله‌ها در موسیقی: سیمین اکبری‌زاده

برای دست‌اندرکاران تهیهٔ این مجله آرزوی توفیق داریم و کار آنان را در این شرایط خاص که انجام این‌گونه کارها، مستلزم دشواری‌های فراوانی است، می‌ستاییم و مطالعهٔ آن را به همهٔ علاقه‌مندان رشته ریاضی و به‌خصوص دانش‌آموزان توصیه می‌کنیم.

آموزشی

رسم نمودار $y=\frac{1}{f(x)}$ از روی نمودار $y=f(x)$

مریم مهدوی*

دبیر ریاضی دبیرستان شاهد، مازندران (ساری)

با رسم نمودار یک تابع، هم راحت‌تر می‌توان معادلات و نامعادلات مربوط به آن‌ها را حل کرد، هم رفتار تابع را بهتر می‌توان فهمید. برای رسم یک تابع، بررسی خواص آن، مثلاً دورهٔ تناوب یا زوج و فرد بودن آن، بسیار مهم است. در متن زیر بیان می‌شود که چگونه از روی نمودار $f(x)$، نمودار $y=\frac{1}{f(x)}$ را می‌توان رسم کرد. برای رسم $y=\frac{1}{f(x)}$ به نکات زیر توجه می‌کنیم:

۱. اگر $f(x)>0$ باشد، آن‌گاه $\frac{1}{f(x)}>0$ است و هرگاه $f(x)<0$ باشد، آن‌گاه $\frac{1}{f(x)}<0$ است. (به‌عبارت دیگر، هر دو نمودار بالای محور xها و یا هر دو پایین محور xها واقع می‌شوند.)

۲. صفرهای $f(x)$ مجانب‌های قائم تابع $\frac{1}{f(x)}$ هستند.

۳. افزایش و کاهش دو تابع عکس یکدیگر است. هرگاه $f(x)$ صعود کند، $\frac{1}{f(x)}$ نزول می‌کند و هرگاه $f(x)$ نزولی است، $\frac{1}{f(x)}$ صعودی است.

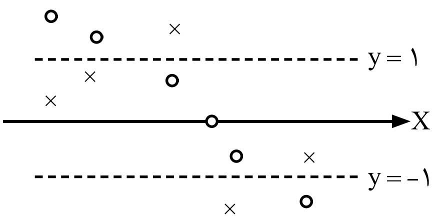
۴. اگر $f(x)$ زوج باشد، $\frac{1}{f(x)}$ نیز زوج است.

۵. اگر $f(x)$ فرد باشد، $\frac{1}{f(x)}$ نیز فرد است.

۶. اگر نمودار $f(x)$ در ناحیهٔ $y>1$ واقع باشد، نمودار $\frac{1}{f(x)}$ در نوار $0<y<1$ واقع است و اگر نمودار $f(x)$ در ناحیهٔ $0<y<1$ واقع باشد، نمودار $\frac{1}{f(x)}$ در نوار $y>1$ قرار دارد (وضعیتی مشابه در ناحیهٔ $y<-1$ و $-1<y<0$ برقرار است).

۷. اگر $f(x)=\pm 1$ باشد، آن‌گاه $\frac{1}{f(x)}=\pm 1$ می‌شود. یعنی نمودار $\frac{1}{f(x)}$ از محل تقاطع خطوط $y=1$ و $y=-1$ با تابع $f(x)$ عبور می‌کند.

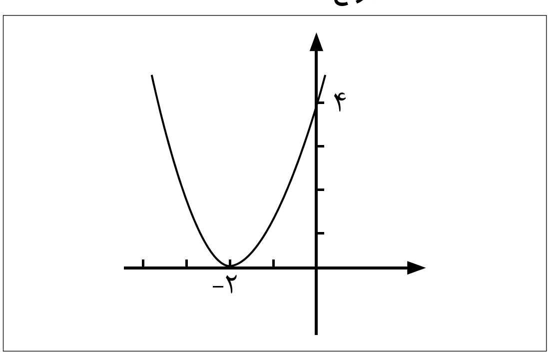
اگر O نقطه‌ای از نمودار $f(x)$ و X نقطه‌ای از $\frac{1}{f(x)}$ باشد، با توجه به جای O می‌توان جای X را از جدول کمکی زیر تعیین کرد.



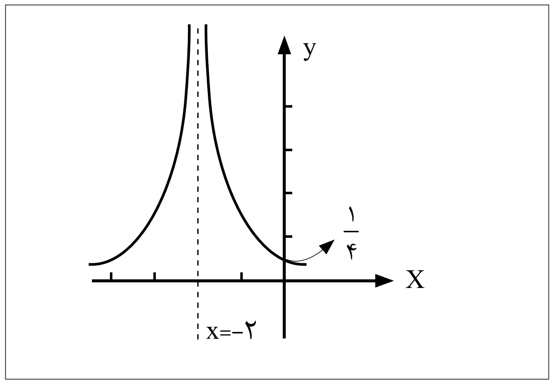
مثال ۱. اگر $f(x)=(x+2)^2$ باشد، آن‌گاه $y=\frac{1}{f(x)}$ را رسم کنید.

حل: در $y=f(x)$ می‌بینیم که: $f(x)>0$.

بنابراین: $\frac{1}{f(x)}>0$.



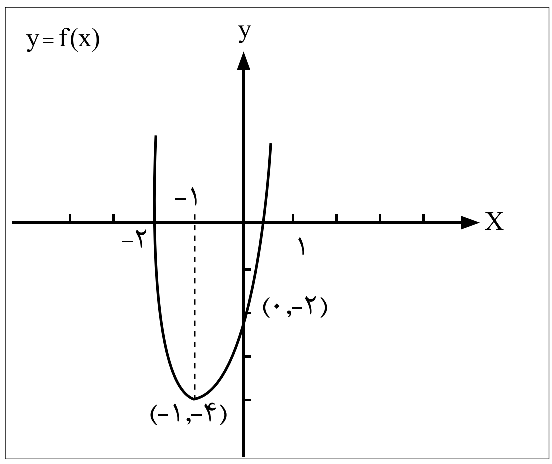
اگر $x=-2$، آن‌گاه: $f(x)=0$. بنابراین $\frac{1}{f(x)}$ برای این مقدار تعریف نشده و $x=-2$ یک مجانب قائم $y=\frac{1}{f(x)}$ است. چون $f(x)$ محور yها را در $(0,4)$ قطع می‌کند، $\frac{1}{f(x)}$ محور yها را در $(0,\frac{1}{4})$ قطع می‌کند.

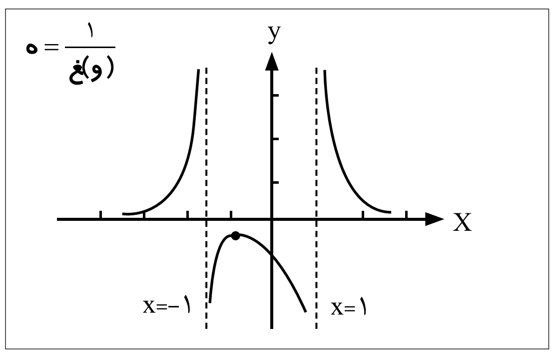


مثال ۲. اگر $f(x)=(x-1)(x+2)$ باشد، $y=\frac{1}{f(x)}$ را رسم کنید.

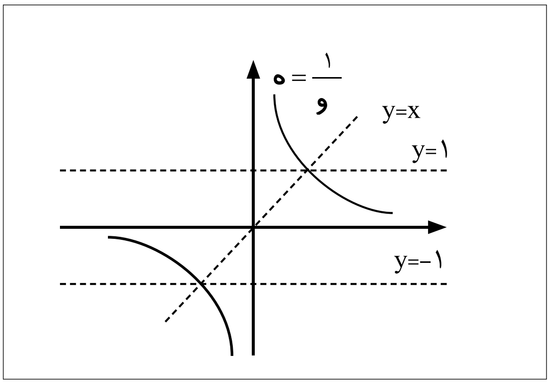
حل: x=۱ و x=-۲ صفرهای f(x) هستند. پس مجانب‌های قائم $\frac{1}{f(x)}$ نیز محسوب می‌شوند. (-۱,-۴) مینیمم تابع y=f(x) است، پس $(-1,-\frac{1}{4})$ ماکسیمم $y=\frac{1}{f(x)}$ است.

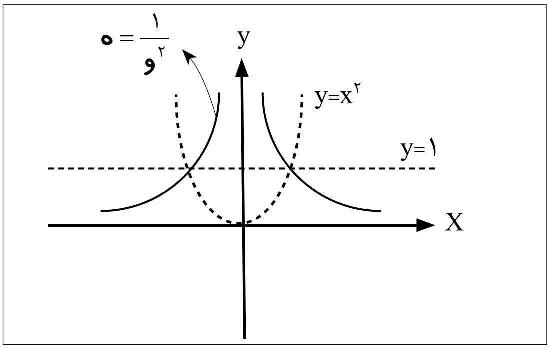
وقتی $-2<x<1$ باشد، می‌بینیم: $f(x)<0 \Rightarrow \frac{1}{f(x)}<0$ و وقتی $x>1$ یا $x<-2$، آن‌گاه: $\frac{1}{f(x)}>0$.

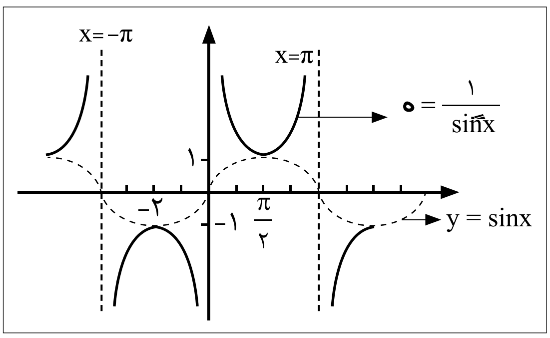


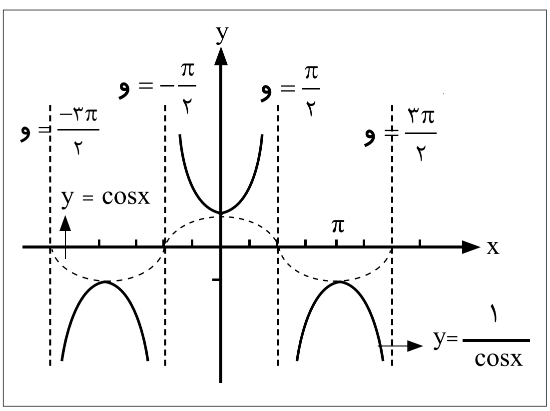


در پایان به نمونه‌های روبه‌رو هم توجه کنید (نمودار خط‌چین، نمودار f(x) و نمودار پررنگ، مربوط به $\frac{1}{f(x)}$ است):









نمودار نقطه‌چین f(x) = cosx و $\frac{1}{f(x)}$، یعنی y=csc(x)، در شکل فوق رسم شده است.

❊ mpm1356@yahoo.com

منبع ....

مهارت در ریاضیات، تألیف آنتونی نیکلایدس، ریاضی عمومی (فرزین حاجی جمشیدی)

تاریخچه مجلات ریاضی ایران

اين شماره:

رشد آموزش ریاضی

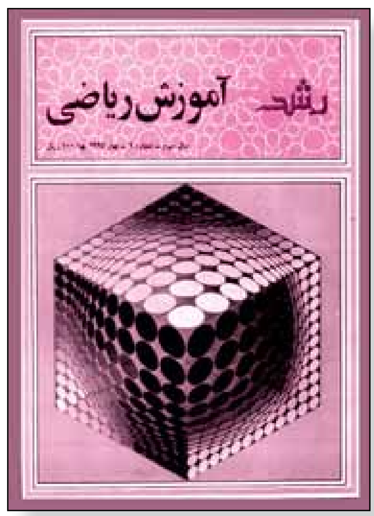
شماره‌های ۹ تا ۱۲

غلامرضا یاسی‌پور*

کلیدواژه: احمد بیرشک، مهندس‌الممالک، غلامحسین مصاحب، ریاضیات محض و کاربردی، مفتاح‌المعاملات، محمدبن ایوب طبری، مسئلهٔ چهار رنگ

شمارهٔ نهم رشد آموزش ریاضی در سال سوم نشر آن در بهار ۱۳۶۵ به قیمت ۱۰۰ ریال در دسترس علاقه‌مندان قرار گرفته است. یکی از مطالب آن مصاحبه با **احمد بیرشک**، دبیر ریاضی دبیرستان‌های هدف است.

آقای **بیرشک** در مورد خویش می‌گوید: «زندگی خودم چیز شایان توجه و گفتنی ندارد، مگر کوشایی و طبع اجتماعی که شاید اشاره‌ای به آن‌ها برای فرزندان روحانی من خالی از فایده نباشد. چون پدرم کارمند دولت بود، و به حکم وظیفه در نقاط دوردست میهنمان در شمال و جنوب و شرق و غرب خدمت می‌کرد، ما فرزندان خانواده وضع تحصیلی منظمی شبیه به آنچه متداول است نداشتیم. من آموختن زبان مادری و زبان‌های فرانسوی و روسی را در خردسالی نزد پدر آغاز کردم.»



آقای بیرشک در مورد تألیفات خود می‌گوید: «اما تألیف. زمانی که در دبیرستان درس می‌خواندم، کتاب‌های هندسهٔ متداول از **رضا نجمی**، **مهندس‌الممالک** و **غلامحسین رهنما** بود. کتاب‌های مهندس ترجمهٔ تمام‌عیار و خوبی بود، ولی کار را برای دانش‌آموز بسیار آسان می‌کرد؛ یعنی مجال فکر به او نمی‌داد. کتاب رهنما که فقط یک جلد و برای سال سوم دبیرستان بود، آن‌گونه بود که باید پوست سخت را شکست و میوهٔ خوش‌مزه را بیرون آورد و به‌نظر من قدری بیشتر از استعداد شاگرد کلاس سوم از او می‌طلبید. در ۱۳۱۴ یا ۱۳۱۵ من مصمم شدم که هندسه‌ای بنویسم که نه به اندازهٔ کتاب‌های مهندس‌الممالک نیروی تفکر را عاصی کند و نه به اندازهٔ هندسهٔ رهنما زائد بر حد، پرتوقع باشد.»

در مورد مجله‌های ریاضی ایران می‌گوید: «شاید اولین مجلهٔ ریاضی آن باشد که **غلامحسین مصاحب** بعد از اتمام دورهٔ دارالمعلمین و شاید هم مقارن با زمان تحصیل در آن، تهیه کرد، ولی عمری دراز نداشت. **باشگاه مهرگان** هم درصدد برآمد، اما توفیق نیافت. همت آقای **عبدالحسین مصحفی** موجب انتشار مرتب و درازمدت یکان بود که متأسفانه جایش نزد علاقه‌مندان به این‌گونه کارها خالی شد. **آشتی با ریاضیات** و حالا **آشنایی با ریاضیات** آقای **پرویز شهریاری** و همکارانش نیز تلاشی است که باید امیدوار بود که پایا باشد و فرجام نیک داشته باشد. اما مجلهٔ خوب ریاضی باید در عین‌حال که با زمان پیش می‌رود، گذشته را از نظر دور ندارد و کارهای پیشینیان را نشان دهد؛ مخصوصاً اگر کارهایی نادیده مانده باشد. یک مجلهٔ خوب ریاضی نمی‌تواند خواهش کسانی را که در سطوح مختلف ریاضی کار می‌کنند برآورده سازد؛ هر سطح مجله‌ای مناسب برای خود می‌خواهد.»

مقالهٔ «*ریاضیات چیست*» از دکتر **مدقالچی** در مورد این علم می‌گوید: «**فیلیسین شاله** در کتاب **شناخت روش علمی** می‌گوید: ریاضیات عبارت است از علم کمیت‌ها، و به‌عبارت دیگر علم اندازه‌گیری غیرمستقیم مقادیر. روش ریاضیات عبارت است از استنتاج یک سلسله از قضایا به کمک اصولی که در آغاز هر قسمت آن وضع شده است. با این تعریف، او دانش ریاضی را شامل حساب، جبر و هندسه می‌داند و متناسب با دید فلسفی خویش برای هریک از این‌ها تعریف ارائه می‌دهد. این باور سبب تقویت روح منطق‌گرایی گردیده و باعث می‌شود که قدرت استنتاج منطقی را در بخش‌های متفاوت ریاضیات ملاحظه کنیم.»

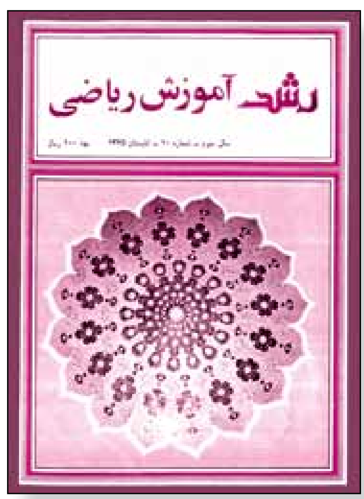
بعضی از مقاله‌های دیگر این شماره عبارت بودند از: *تاریخ هندسه و خطوط موازی، نامشخص‌ترین مثلث، استدلال‌های معمایی هندسی*.

***

در شمارهٔ دهم مجلهٔ رشد آموزش ریاضی مقاله‌ای از دکتر **طاهر قاسمی هنری** با نام «*ارزیابی ریاضیات محض*» آمده است. در این مقاله می‌خوانیم: «سؤالات اولیه‌ای که به ذهن خطور می‌کنند، معمولاً بدین صورت‌اند: ریاضیات محض چیست و با ریاضیات کاربردی چه تفاوتی دارد؟ آیا ریاضیات محض علم مفیدی است؟ آیا ریاضیات محض زاییدهٔ یکی دو قرن اخیر است یا از قدیم‌الایام وجود داشته است؟ آیا ریاضیات مبتنی بر نیازهای جامعه بوده و به تناسب آن پیشرفت کرده است و می‌کند؟

در جهت جواب‌گویی به این نوع سؤالات مقالات متعددی توسط فلاسفه و دانشمندان ریاضی نوشته شده است و گاه نظریات آن‌ها کاملاً متفاوت می‌باشد. من در این مقاله در پی آن نیستم که این نظریات را به‌طور مفصل بازگو کنم، ولی اشاره‌ای به نظریات برخی از صاحب‌نظران از جمله **برتراند راسل** و **هاردی** را در این مقوله مفید می‌دانم.

راسل می‌گوید: در ریاضیات محض از یک سلسله قواعد معین استنتاج آغاز می‌کنیم و با توجه به آن‌ها نتیجه می‌گیریم که اگر گزاره یا گزاره‌هایی راست باشند، گزارهٔ دیگری نیز راست است. بخش وسیعی از اصول موضوع منطق صوری را همین قواعد استنتاج تشکیل می‌دهند. به عقیدهٔ راسل، ریاضیات محض یعنی مجموعهٔ احکامی مبنی بر اینکه اگر گزاره‌ای دربارهٔ شیئی نامشخص صادق باشد، آن‌گاه فلان گزارهٔ دیگر هم دربارهٔ آن شیء صادق است. البته در مورد صدق واقعی این گزارهٔ نهایی بحثی نمی‌کنیم و ذکری هم از ماهیت شیئی که فرض کرده‌ایم و حکم صادقی دربارهٔ آن داریم، به میان نمی‌آوریم، زیرا این نکات اختصاص به ریاضیات کاربردی دارند.»



یکی از مقاله‌های بسیار جالب این شماره، مقاله‌ای با عنوان «*گفت‌وگو با مایکل اتیا*» است. این مقاله که به ترجمهٔ **سیامک کاظمی** است، چنین آغاز می‌شود: «اتیا در آغاز مصاحبه می‌گوید که از دوران نوجوانی به ریاضیات علاقه داشته است و جز دوران کوتاهی ـ در ۱۵ سالگی ـ که توجه کوتاه مدتی به شیمی پیدا کرده، هیچ‌وقت به‌طور جدی به در پیش گرفتن کار دیگری، مگر پرداختن به ریاضیات، نمی‌اندیشیده است.

در پاسخ به این سؤال که در ریاضیات جریان‌های عمده و غیرعمده وجود دارند، می‌گوید: بله فکر می‌کنم همین‌طور است. من به شدت با این نظر مخالفم که ریاضیات صرفاً مجموعه‌ای از موضوع‌های جداگانه است و اینکه شما می‌توانید به دلخواه خود چند اصل موضوع را کنار هم بگذارید، روی آن‌ها کار کنید، پیش بروید، و به این طریق یک شاخهٔ جدید ریاضی اختراع کنید. ریاضیات صرفاً حاصل یک گسترش ارگانیک نیست، بلکه تاریخچهٔ مفصلی از ارتباط با گذشته است، و ارتباطاتی با سایر رشته‌ها دارد.»

بعضی از مقاله‌های دیگر این شماره عبارت‌اند از: *ریاضیات دورهٔ اسلامی*؛ *درس‌هایی از هندسه*؛ *پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع ریمان*؛ *استدلال‌های معمایی*.

***

شمارهٔ یازدهم مجلهٔ رشد آموزش ریاضی در پاییز ۱۳۶۵ انتشار یافته است. اولین مقالهٔ آن *مصاحبه با آقای* ***میرزا جلیلی*** از دبیران مشهور ریاضیات است. در مصاحبه، آقای جلیلی در مورد تألیف کتاب‌های درسی به‌طور مفصل داد سخن می‌دهد و در پاسخ به این پرسش که: «کتاب درسی ریاضی چگونه تدوین و تألیف می‌شود؟» می‌گوید: «لازم به یادآوری است که ضرورت‌های انقلابی و فرهنگی بعد از انقلاب ایجاب می‌کرد که کتاب‌های درسی تجدید تألیف شود.»

مقاله‌های دیگر این شماره ادامهٔ مقاله‌های ثابت هستند و بعضی از آن‌ها عبارت‌اند از: *استدلال‌های معمایی*؛ حد *دنباله و حد تابع*؛ *درس‌هایی از هندسه*.

مقالهٔ معرفی و بررسی اجمالی کتاب، از **سیدمحمدحسن حسینی**، به معرفی کتاب «مفتاح‌المعاملات» پرداخته است و در مورد آن می‌نویسد:

«کتاب مفتاح‌المعاملات، نوشتهٔ **محمدبن ایوب طبری**، متنی ریاضی از قرن پنجم هجری است که به کوشش آقای دکتر **محمدامین ریاحی** که نسخهٔ منحصربه‌فردی از آن را در کتابخانهٔ موزهٔ ایاصوفیهٔ ترکیه یافتند، توسط **انتشارات بنیاد فرهنگ ایران** در سال ۱۳۴۹ منتشر شده است. نام و کنیت نویسنده، **ابوجعفر محمدبن الحاسب طبری** و در بعضی کتب **محمدبن ایوب الطبری** آمده است. اشاراتی هست که این دانشمند معاصر **الب ارسلان** و **ملکشاه سلجوقی** بوده و لااقل در ربع قرن از ۴۶۵ تا بعد از ۴۸۵ هـ .ق فعالیت علمی داشته است.»

***

شمارهٔ دوازدهم مجلهٔ رشد آموزش ریاضی در سال سوم انتشار آن، در زمستان ۱۳۶۵ منتشر می‌شود. اولین مقالهٔ آن، «*ریاضیات چیست؟*»

ریاضیات صرفاً حاصل یک گسترش ارگانیک نیست، بلکه تاریخچهٔ مفصلی از ارتباط با گذشته است، و ارتباطاتی با سایر رشته‌ها دارد

تاکنون نقشه‌ای پیدا نشده که برای رنگ‌آمیزی صحیح آن به بیش از چهار رنگ نیاز باشد

دنبالهٔ مطالب شماره‌های پیش در این زمینه است. اغلب مقاله‌های این شماره دنبالهٔ مطالب قبل هستند.

یکی از مقاله‌های این شماره مقالهٔ «*مفهوم مدل‌های زیست ریاضی*» است که با این جملات آغاز می‌شود: «تا اوایل ۱۹۶۰ ریاضیات عملی عبارت بود از کاربرد ریاضیات در حل مسائل مکانیک. در حال حاضر ریاضیات عملی و یا ریاضیات کاربردی عبارت است از موارد استفادهٔ ریاضیات در رشته‌های مختلف از قبیل اقتصاد، بیولوژی، جغرافیا، پزشکی و غیره. فصل مشترک تمام این کاربردها مبحث مدل‌های ریاضی می‌باشد.»

در ادامه می‌خوانیم: «به منظور حل یک مسئله، شخص بایستی تمام جنبه‌های مربوط از قبیل متغیرها و پارامترهای داخلی و یا اثرات متقابل آن‌ها را با فاکتورها و عوامل خارجی مدنظر قرار دهد. بعضی از نتایج حاصله از این مراحل جنبهٔ کیفی دارد و بعضی جنبهٔ کمّی. نمونه‌سازی شامل بررسی دقیقی از اجزای مقداری می‌باشد، زیرا بخش‌هایی از این اجزا که قابلیت

اندازه‌گیری دارند، بایستی مشخص شوند. مقدار تأثیر فرایند تحت مطالعه بایستی ذکر شده و در مدل نیز گنجانده شود.»

مقاله می‌گوید: «توصیف کیفی یک مسئله نه فقط بایستی شامل تعریف هدف باشد، بلکه بایستی حاوی پروسهٔ واقعی که به منظور برآورد هدف اتخاذ می‌گردد نیز باشد. در ضمن فاکتورهای کنترل‌پذیر و غیرقابل کنترل یک پروسه بایستی شناخته گردند.

در تجزیه و تحلیل نمونه‌سازی یک مسئله نکات زیادی را بایستی موردنظر قرار داد که اولین نکتهٔ مهم تعیین هویت و یا شناخته شدن مسئله و در مرحلهٔ بعدی فرموله شدن آن می‌باشد. در پروسه فرموله کردن، بایستی متغیرهای مستقل و وابسته، تصادفی و یا قطعی را مشخص نمود و سپس کنترل‌پذیری و یا غیرقابل کنترل بودن آن‌ها را مورد تجزیه و تحلیل قرار داد.»

مقاله از آن مفصل‌تر است که بتوان به تمام نکات ارزشمند آن اشاره کرد. بنابراین خوانندهٔ مشتاق را به اصل مقاله حوالت می‌دهیم. بعضی دیگر از مقاله‌های مجله عبارت‌اند از: *رسم نمودار توابع؛ حل مسائل شمارهٔ ۱۰؛ قرینه‌سازی جبری؛* و...

خلاصهٔ مطلب مقالهٔ «*رشد تفکر ریاضی*»، آن‌چنان که در ابتدای مقاله از دکتر **محمدحسن بیژن‌زاده** آمده، چنین است:

«در این مقاله و مقالات آتیه کوشش‌مان این است تا «رشد قوهٔ بچه‌ها» را در جهت تفکر ریاضی و انجام اعمالی که روش‌هایی اساسی برای بررسی خواص عددی، کمی و فضایی اشیا و موقعیت‌ها هستند، ردیابی کنیم. مطالعهٔ این رشد برای معلمین و دست‌اندرکاران برنامه‌ریزی آموزشی اهمیت حیاتی دارد، زیرا که هدف اصلی معلمین از آموزش ریاضی به بچه‌ها، باید شکوفایی استعداد آن‌ها از درک روابط و باروری تفکر صحیح در آن‌ها باشد تا برای کسب علوم و فنونی که جامعه بدان محتاج است، آماده باشند. برای اینکه معلم بتواند به بچه‌ها کمک کند تا قوه و استعدادی را که خداوند به آن‌ها هدیه داده است، رشد بدهند، باید قادر باشد تا در هر زمانی از راه اموری که بچه‌ها انجام می‌دهند، نوع تفکر آنان را بشناسد. فقط در این صورت است که می‌توان رشد بیشتر بچه‌ها را برنامه‌ریزی کرد. آگاهی‌مان از مراحل رشد تفکر بچه‌ها ما را به لزوم این امر متقاعد می‌کند که باید به بچه‌ها در فرصت‌های بسیار اجازه داد تا با اشیا و مواد مختلف و متنوعی تجربه و کار کرده، احساسات خود را به زبان خودشان بیان کرده، خودشان قضاوت کنند و از راه کشفیاتی که می‌کنند، فکر بکنند و به راه‌حل‌های مسائل پی ببرند.»

در این مقاله دربارهٔ عدد چنین آمده است: «بدون عدد نمی‌توانیم کمیت‌ها را اندازه بگیریم، چون که باید واحدهای اندازه‌گیری را بشماریم. از طرفی دیگر، مقایسهٔ کمیت‌ها ما را به درک عمیق‌تر اعداد و نیز آشکار کردن بعضی از خواص فضا رهنمون می‌کند. برای مثال، اندازه‌گیری طول‌ها نشان می‌دهد که اعداد درست (طبیعی)، جوابی که به قدر کافی دقیق باشد به ما نمی‌دهد و لذا مجبوریم در مورد کسرها بیندیشیم. اندازه‌گیری دو قطر یک مستطیل این ایده را به ما می‌دهد که باید این قطرها مساوی باشند.»

مقالهٔ دیگری با نام «*مروری کوتاه بر تاریخچهٔ مسئلهٔ چهار رنگ*» با این جمله‌ها آغاز می‌شود: «فرض کنید که یک نقشه معین روی یک صفحه داده شده باشد. اگر هر یک از کشورها یا نواحی آن با یک رنگ خاص مشخص شده و نیز هر دو کشور یا ناحیهٔ مجاور (یعنی دو کشوری که مرز مشترک دارند) دارای دو رنگ متفاوت باشند، می‌گوییم این نقشه به‌طور صحیح رنگ‌آمیزی شده است. هر نقشهٔ جغرافیایی می‌تواند مثالی برای این‌گونه نقشه‌ها باشد. مثلاً یک راه برای رنگ کردن نقشه‌ها آن است که هر کشور آن را به رنگ مخصوصی درآوریم، اما این کار از نظر اقتصادی مقرون به‌صرفه نیست. طبعاً در اینجا سؤالی پیش می‌آید و آن اینکه: حداقل تعداد رنگ‌هایی که برای رنگ‌آمیزی یک نقشه به‌طور صحیح لازم و کافی است، چه‌قدر است؟ یک حقیقت مهم در رابطه با این سؤال آن است که تاکنون نقشه‌ای پیدا نشده که برای رنگ‌آمیزی صحیح آن به بیش از چهار رنگ نیاز باشد.»

خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند به اصل مقاله رجوع کند.

---

* aban_mehr@gmail.com

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه سوم

لطیفه‌های ریاضی!

بعد از کلنجار رفتن متوالی با معماهای ایستگاه دوم، حالا شنیدن چند لطیفهٔ ظریف ریاضی واقعاً لذت‌بخش است. پس با هم بخوانیم:

لطیفهٔ اول

ابتدا حکایتی خواندنــی از زندگی یک ریاضی‌دان آلمانی به نام **ارنست ادوارد کومر**[1]. این ریاضی‌دان که متخصص جبر محسوب می‌شد، در زمینهٔ محاسبات معمولی به‌شدت ضعیف بـــود، به‌طوری که حتی جدول‌ضـــرب معمولی را هم به‌خوبی در خاطر نداشـــت و گاهی برای نوشتن محاسبه‌های ساده از دانشـــجویانش کمک می‌گرفت. یک‌بار در کلاس درس خود، او می‌خواست حاصل‌ضرب ۹×۷ را به‌دست آورد. گفت: «خُب هفت نه‌تا چندتا می‌شه؟!» هفت نه‌تا... هفت نه‌تا... بذار ببینم...

یکی از دانشجویان فریاد زد: «می‌شه شصت و یک تا!»

و کومر روی تخته نوشت: ۶۱=۹×۷! اما کمی بعد دانشجوی دیگری گفت: «نه آقا، می‌شه شصت و نه‌تا!»

کومر گفت: «دســـت نگه دارید! ببینید، نمی‌شه که ۹×۷ هم مســـاوی ۶۱ و هم مساوی ۶۹ باشه، اون باید مساوی یکی از این دو باشه!»

لطیفهٔ دوم

روزی یـــک ریاضی‌دان در جمعـــی از همکارانش در یک ســـمینار ریاضی، در حال بحث روی اثبات یک قضیهٔ جدید بود. پس از آنکه ریاضی‌دان مدتی روی موضوع صحبت کرد و استدلال خود را روی تخته نوشت و اثبات را به اتمام رساند، از جمع خداحافظی کرد و در حال خارج شـــدن از ســـالن ســـخنرانی بود که یکی از حاضران دســـت بلند کرد و گفت: «صبر کنید! این نتیجه درست نیست. من یک مثال نقض برای آن دارم!»

و ریاضی‌دان در حال خروج از در ســـالن گفت: «باشه، من هم دو راه برای اثبات آن دارم!»

لطیفهٔ سوم

یک شرکت داروسازی موفق به تولید قرص‌هایی شده بود که با خوردن هر یک از آن‌ها، دانشـــی به‌خصوص به ذهن فرد استفاده کننده تزریق می‌شد! روزی دانش‌آموزی به داروخانه‌ای مراجعه کرد و از فروشنده پرسید: قرص کدام دانش‌ها را دارد. فروشـــنده در پاســـخ گفت: «خُب بذار ببینم، این قرص زبان انگلیسیه.»

دانش‌آموز بلافاصله آن را خرید و با خوردن آن احســـاس کرد که تسلط خیلی بیشتری نسبت به زبان انگلیسی پیدا کرده است. بعد به فروشنده گفت: «دیگه چه قرص‌هایی دارید؟»

فروشـــنده گفت: «قرص تاریخ، جغرافی، شیمی و فیزیک هم داریم!»

و دانش‌آموز گفت: «قرص ریاضی چه‌طور، ندارید؟»

فروشنده گفت: «چرا مثل اینکه یکی مونده.»

و به اتاق پشـــت ویترین رفـــت و لحظه‌ای بعد با یک عدد قرص درشـــت و غول‌آسا برگشـــت و آن را روی میز گذاشت. دانش‌آموز گفت: «صبر کن ببینم! من اینو چه‌طوری بخورم؟!»

فروشنده گفت: «ببین، خودت هم می‌دونی که ریاضیات یه کمی هضمش دشواره!»

> **دانش برپایهٔ حقایق بنا می‌شود، همان گونه که ساختمان روی بلوک‌های سنگی بنا می‌شود. ولی برخلاف انبوهی از بلوک‌ها که از ساختمان بلندتر هستند، انبوهی از حقایق، هرگز فراتر از دانش نیستند**
>
> **هانری پوآنکاره ـ دانش و فرضیه**

پی‌نوشت ....

1. Ernst Eduard Kummer

همراه با مخاطبان

بدون مقدمه، در همین آغاز سخن باید یک دست مریزاد درست و حسابی به همهٔ خوانندگان مجله، اعم از همکاران محترم و دانش‌آموزان عزیز بگوییم؛ چرا که استقبال بسیار خوب و دور از انتظاری از فراخوان ما به همکاری و ارسال نامه (یا ایمیل) به مجلهٔ خودتان داشتید. از همهٔ شما صمیمانه سپاس‌گزاریم و امیدواریم که بیش از پیش به مجله‌تان توجه نشان دهید و آن را از خودتان بدانید.

دست همهٔ شما را به گرمی به همکاری می‌فشاریم و برای اثبات مدعای خود فقط به این دو موضوع اشاره می‌کنیم که:

اولاً، در این شماره کمترین تعداد مقاله را از اعضای هیئت تحریریهٔ مجله داریم و اکثر مطالب مجله از خود شماست.

ثانیاً، در این شماره سه مقاله از دانش‌آموزان عزیزمان داریم.

به این دوستان که تازه به راه نویسندگی آمده‌اند درود می‌فرستیم و از آنان می‌خواهیم که این راه را ادامه دهند و هیچ نگویند! چرا که این راه، خود، راه را به آنان نشان خواهد داد! بدون واهمه بنویسید و یادتان باشد که منابع نوشتاری خود را بی‌کم و کاست، حتماً و حتماً معرفی کنید، و از کپی‌کردن (معادل مؤدبانهٔ سرقت!) آثار دیگران جداً بپرهیزید. یادتان نرود که اغلب نویسندگان بزرگ سرزمین ما از همان دوران نوجوانی نوشتن را آغاز کرده‌اند.

مجلهٔ ما در اصل یک مجلهٔ دانش‌آموزی است، لذا از شما دانش‌آموزان عزیز می‌خواهیم که با مجلهٔ خودتان بیشتر همکاری کنید و مطمئن باشید که از سوی ما استقبال گرمی از شما صورت خواهد گرفت. با این مقدمه به سراغ پاسخ نامه‌ها و ایمیل‌هایتان می‌رویم:

- دوست دانش‌آموز، **سیداحسان حسینی**، از شهرستان دره‌شهر استان ایلام

مقالهٔ شما با عنوان «گراف‌های قطبی» به‌دست ما رسید و در همین شماره از آن استفاده کرده‌ایم. با سپاس فراوان از شما، باز هم ما را مورد محبت خود قرار دهید.

- دوست دانش‌آموز، **هادی صفری**، از مرکز پرورش استعدادهای درخشان شهرستان شهرکرد

مقاله‌تان دربارهٔ برخی ویژگی‌های ریاضی ستاره‌های مرتبهٔ n ام به‌دست ما رسید. با سپاس از توجهتان، در همین شماره آن را به چاپ رسانده‌ایم. باز هم برای ما مطلب بفرستید.

- همکار گرامی **مصطفی دیداری**

مقاله‌تان با عنوان «توزیع توپ‌ها در جعبه‌ها» را در یکی از شماره‌های آینده به چاپ می‌رسانیم. با تشکر بسیار از محبت و توجه خاصتان به مجلهٔ برهان که قبلاً هم شامل حال ما شده است، باز هم با ما در ارتباط باشید.

- دوستان گرامی، مهدی راستی و محمد کشاورز از استان فارس ـ ناحیهٔ یک شیراز

با تشکر از شما، مطلب ارسالی‌تان در این شماره مورد استفاده قرار گرفته است. از شما می‌خواهیم که از تخصص

خود اســتفاده کرده و مطالب مرتبط با ریاضــی و کامپیوتر را تهیــه و برایمان ارسال کنید.

● همــکار گرامی خانم **مریم مهدوی**، دبیــر ریاضــی دبیرســتان شــاهد شهرستان ساری ـ استان مازندران

مقالهٔ ارســالی‌تان که برای شرکت در مسابقهٔ مقاله‌نویســی «استاد **پرویز شــهریاری**» فرســتاده بودید، دریافت شد. نتوانستیم آن را به‌عنوان مقالهٔ برتر انتخاب کنیم، ولی آن را در همین شماره به چاپ رســانده‌ایم. باز هــم ما را مورد توجه خود قرار دهید.

● دوســت دانش‌آموز، **امین ادراکی** از دبیرستان شهید بهشتی بوشهر

مقالهٔ شــما با عنوان «پیوستگی» به‌دست ما رسید و در همین شماره آن را چاپ کردیم. ضمن تشکر، از شما دعوت می‌کنیم که به همکاری‌تان با مجله ادامه دهید.

● همکار گرامی، خانم **فهیمه کلاهدوز**، دبیر ریاضی از شهرســتان دهاقان ـ استان اصفهان

ضمــن ســپاس از شــما بابــت همکاری‌تان با مجله که از سال قبل آغاز شده است، اعلام می‌کنیم که مقاله‌تان با عنوان «استدلال ریاضی و جایگاه آن در ریاضیات مدرسه‌ای» به‌عنوان مقالهٔ برتر مسابقهٔ «استاد پرویز شهریاری» انتخاب شــد. انشــاءالله هدیه‌ای در خور و قابل قبول تقدیم حضورتان خواهد شد. ضمن عرض تبریــک از شــما می‌خواهیم به ارسال مقالات متنوع در زمینهٔ ریاضیات دبیرســتان بــه مجلــهٔ خودتــان ادامه دهید.

● همکار محترم، **مهــدی میرزافام** از شهرستان عجبشیر ـ استان آذربایجان شرقی

ســپاس فــراوان از لطــف و صفــا و صمیمیت بی‌شــائبه‌تان. مطالب ارسالی شما دریافت شد. انشاءالله در شماره‌های آتی از آن‌ها استفاده خواهیم کرد. حتماً باز هم برایمان بنویسید.

● همکار گرامی خانم **احترام انبارکی**

مطلبتان دریافت شــد و در همین شماره مورد استفاده قرار گرفت. ان‌شاءالله در آینــده‌ای نزدیک مقــالات تحلیلی و توصیفی بیشتری از شما دریافت خواهیم کرد.

● دانش‌آموز عزیز، **بنیامین هادی‌زاده**

نامهٔ پدرتان در زمینهٔ حدسیه‌هایتان دربارهٔ مثلث متساوی‌الاضلاع را دریافت کردیم. انشاءالله در مقاله‌ای که در شمارهٔ آینده به چاپ می‌رسد، پاسخ مناسبی به آن‌ها خواهیم داد. با سپاس فراوان از شما و پدر بزرگوارتان، از شما می‌خواهیم که با ما در ارتباط مداوم باشید.

● همکار گرامی، **مســعود غضنفری**، دبیر دبیرستان‌های تهران

بــا ســپاس از مقاله‌تــان، به عرض می‌رساند که ایدهٔ استفاده از مساحت‌ها در اثبــات همرســی میانه‌هــای مثلث، ایده‌ای تکراری اســت. از جمله، شما را به مقالهٔ «اثبات همرســی سه میانه در مثلث» از آقای دکتر **احمد شرف‌الدین** در مجلهٔ رشــد برهان متوســطه شمارهٔ ۵۹ ارجــاع می‌دهیم. با این حال، از آنجا که شیوهٔ استفاده از مساحت‌ها در اثبات شــما، کمی با آن مقاله تفاوت دارد، لذا از مقاله‌تان در یکی از شــماره‌های آتی استفاده می‌کنیم. البته شایان ذکر است که مقاله‌های ارســالی باید لااقل دارای عنوان باشند (!) حتماً منابع خود را ذکر کرده باشند، کلیدواژه داشته باشند و... که امیدواریم در مقاله‌های بعدی که برایمان می‌فرستید (و حتماً بفرستید) این موارد را بیشتر مراعات کنید. با آرزوی توفیق روزافزون برای شما همکار گرامی.

● همکار عزیز، خانم **مروارید جعفری**

مقاله‌تان بــا عنوان «یــک اتحاد و نتایج حاصل از آن» به‌دست ما رسید و بررســی شد و در صورت امکان در یکی از شــماره‌های آتی به چاپ می‌رسد. در صورتی کــه مقاله‌هایتــان را برای ما ایمیل می‌کنید، لطفاً آن را به فایل «pdf» تبدیل کنید و بعد بفرستید. با سپاس فراوان از شما، منتظر کارهای بعدی‌تان می‌مانیم.

● دوست دانش‌آموز، **محمد طبیعی** از تهران

ضمن سپاس فراوان از توجه شما به مجلهٔ خودتان و مطلب بسیار خوبی که برایمان فرستاده‌اید، حتماً از مطالبتان در شماره‌های بعد استفاده خواهیم کرد. در ضمن بابت ارسال پاسخ مسائل مسابقه‌ای برهان نیز که همگی درست بودند، از شما ســپاس‌گزاریم و هدیه‌ای ناقابل برایتان ارسال کردیم. با این استعداد و علاقه‌ای کــه به ریاضیات دارید، حیف اســت که بیشتر و بیشتر ننویســید. حتماً باز هم برایمان از مطالب خوبتان بفرستید.

ضمن تشکر از دوستان دیگری که در این بخش فرصت پاسخ‌گویی به آن‌ها فراهم نشد، پاســخ به این عزیزان را به شمارهٔ آتی موکول می‌کنیم.

اعداد کامل

کلیدواژه

عدد کامل، مقسوم‌علیه

تهیه‌کنندگان:
مهدی راستی،
کارشناس کامپیوتر، ناحیهٔ یک شیراز
محمد کشاورز،
کارشناس ارشد کامپیوتر، ناحیهٔ یک شیراز

آیا تاکنون نام اعداد کامل را شنیده‌اید؟ آیا با این اعداد آشنایی دارید؟ از روابط جالب و شگفت‌انگیزی که بین اعداد وجود دارد، چه میزان و چه مقدار اطلاع دارید؟

ریاضیات علمی است پر از شگفتی و دارای رمز و رازهایی بی‌شمار که وجود هریک از آن‌ها همراه با نظم و پیوستگی موجود در آن، ما را به تفکری عمیق وامی‌دارد. در این مقاله می‌خواهیم به یکی از این مباحث به نام اعداد کامل بپردازیم. ابتدا «مقسوم علیه» را تعریف می‌کنیم و نحوهٔ به‌دست آوردن مقسوم‌علیه‌های یک عدد را می‌آموزیم، سپس در ادامه با بررسی چند مثال و مروری کوتاه، به اعداد کامل می‌پردازیم.

مقسوم‌علیه‌های یک عدد: هر عدد طبیعی بر تعدادی از عددهای طبیعی بخش‌پذیر است که مقسوم‌علیه‌های آن عدد هستند. مثلاً عدد ۲۰ بر عددهای ۱، ۲، ۴، ۵، ۱۰ و ۲۰ بخش‌پذیر است، پس:

{۲۰، ۱۰، ۵، ۴، ۲، ۱} = مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۲۰

اینک به مجموعه‌های زیر توجه کنید:

{۴، ۲، ۱} = مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۴

{۶، ۳، ۲، ۱} = مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۶

{۱۲، ۶، ۴، ۳، ۲، ۱} = مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۱۲

{۱۷، ۱} = مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۱۷

{۲۸، ۱۴، ۷، ۴، ۲، ۱} = مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۲۸

حال به مجموع مقسوم‌علیه‌های طبیعی هر عدد به‌جز خودش توجه کنید:

۳ = ۲+۱ = مجموع مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۴ به‌جز ۴

۶ = ۳+۲+۱ = مجموع مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۶ به‌جز ۶

۱۶ = ۶+۴+۳+۲+۱ = مجموع مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۱۲ به‌جز ۱۲

۱ = مجموع مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۱۷ به‌جز ۱۷

۲۸ = ۱۴+۷+۴+۲+۱ = مجموع مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۲۸ به‌جز ۲۸

ملاحظه می‌کنید که مجموع مقسوم‌علیه‌های هر عدد به‌جز خودش، می‌تواند کوچک‌تر از آن عدد، مانند «۴ و ۱۷»، برابر با آن عدد، مانند «۶ و ۲۸» و یا بزرگ‌تر از آن، مانند «۱۲» باشد. از بین اعداد فوق دو عدد ۶ و ۲۸ کامل هستند، چون با مجموع تمام مقسوم‌علیه‌های کوچک‌تر از خودشان برابرند.

اگر عددی با مجموع مقسوم‌علیه‌های کوچک‌تر از خودش برابر باشد، آن عدد را کامل می‌گوییم.

اولین‌بار **اقلیدس** در کتاب خود با نام «*عناصر*» که حدود ۳۰۰ سال قبل از میلاد نوشت، به مفهوم عدد کامل اشاره کرد. اقلیدس این قضیه جالب را در مورد اعداد کامل به‌صورت زیر بیان کرد.

اگر برای $k>1$، 2^k-1 یک عدد اول باشد، آن‌گاه $2^{k-1}(2^k-1)$ یک عدد کامل است.

برای مثال، $7=2^3-1$ یک عدد اول است، بنابراین $28=4\times7=2^{3-1}(2^3-1)$ باید یک عدد کامل باشد که صحیح است.

همچنین، $31=32-1=2^5-1$ نیز یک عدد اول است. بنابراین $496=16\times31=2^{5-1}(2^5-1)$ نیز باید عددی کامل باشد که صحیح است.

دو عدد کامل ۴۹۶ و ۸۱۲۸ را اقلیدس یافت.

۴۹۶ = ۲۴۸+۱۲۴+۶۲+۳۱+۱۶+۸+۴+۲+۱

۸۱۲۸ = ۴۰۶۴+۲۰۳۲+۱۰۱۶+۵۰۸+۲۵۴+۱۲۷+۶۴+۳۲+۱۶+۸+۴+۲+۱

پس از ۱۵۰۰ سال از زمان اقلیدس، پنجمین عدد کامل «۳۳/۵۵۰/۳۳۶» شناخته شد.

تاکنون با استفاده از رایانه‌های قوی و مجهز، ریاضی‌دانان توانسته‌اند در مجموع ۲۴ عدد کامل را بیابند. جالب است بدانید، بیست و چهارمین عدد کامل بیش از ۱۲ هزار رقم دارد.

چند عدد کامل دیگر:

۳۳/۵۵۰/۳۳۶

۸/۵۸۹/۸۶۹/۰۵۶

۱۳۷/۴۳۸/۶۹۱/۳۲۸

۲۳۰/۵۸۴/۳۰۰/۸۱۳۹/۹۵۲/۱۲۸

پاسخ
معماهای ایستگاه اندیشهٔ این شماره

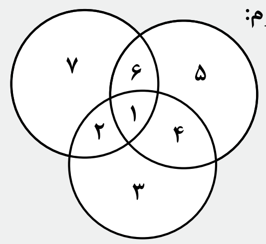
پاسخ‌ها

ایستگاه اول: جورچین‌های عددی

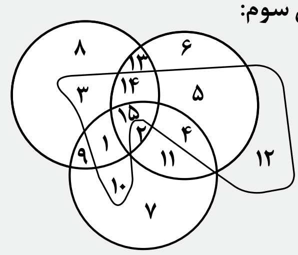
جورچین اول:

۸	۹	۲۴
۳۶	۱۲	۴
۶	۱۶	۱۸

جورچین دوم:



جورچین سوم:



ایستگاه دوم: چند معما از دزدان شهر بغداد

معمای اول: بله عبید دزد است. زیرا دوتای دیگر که راست گفته‌اند و دیگری را متهم کرده‌اند، پس خودشان بی‌گناه‌اند. لذا فقط عبید می‌تواند گناهکار باشد.

معمای دوم: چون عماد و حسیب اظهارات یکدیگر را رد کرده‌اند، پس یکی از آن‌ها دروغ می‌گوید. اما چون دو نفر دروغ گفته‌اند، پس باید یکی از آن‌ها عبید باشد. لذا عبید باید سارق باشد.

معمای سوم: اگر حسیب در دزدی شرکت داشت، آن‌گاه جمله‌ای که گفت (که عماد هم با آن موافقت کرد) نادرست است و این موضوع با این حقیقت که دزد راست گفته است، تناقض دارد. بنابراین حسیب مجرم نیست. اگر عبید مجرم باشد، آن‌گاه هر سه نفر راست گفته‌اند و این هم با شرط داده شدهٔ مسئله (که حداقل یک نفر دروغ گفته است) تناقض دارد. در نتیجه عماد مجرم است و راست گفته است.

😊 **معمای چهارم:** اگر حسیب مجرم باشد، مجرم کسی است که راست گفته است و این با فرض مسئله تناقض دارد. پس حسیب بی‌گناه است و دروغ هم گفته است. اگر عماد مجرم باشد، آن‌گاه عبید باید بی‌گناه باشد. در نتیجه عماد راست گفته که باز هم در تناقض با فرض مسئله است. بنابراین عبید مجرم است (و هر سه نفر دروغ گفته‌اند).

😊 **معمای پنجم:** اگر عماد مجرم باشد، آن‌گاه حسیب بی‌گناه است و بنابراین راست گفته است، که یعنی عبید هم مجرم است و در نتیجه دو نفر مجرم هستند که با فرضیات مسئله تناقض دارد. پس عماد نمی‌تواند مجرم باشد و بی‌گناه است. پس راست گفته است، یعنی حسیب مجرم است (و به دروغ عبید را متهم کرده است).

😊 **معمای ششم:** باز هم حسیب مجرم است (خودتان استدلال کنید).

😊 **معمای هفتم:** اگر عماد شتر را دزدیده بود، آن‌گاه جملهٔ او که او نه اسب را دزدیده و نه قاطر را، درست می‌بود. اما به ما گفته شده، کسی که شتر را دزدیده، دروغ گفته است: بنابراین عماد شتر را نزدیده بود. اگر عماد اسب را دزدیده بود، پس جمله‌اش دروغ بود و این در تناقض بود با این فرض که دزد اسب راست می‌گفت. پس عماد قاطر را دزدیده بود و حسیب در اظهار اینکه عماد قاطر را دزدیده، راست گفته است. لذا حسیب شتر را نزدیده بود. بنابراین حسیب اسب را دزدیده و در نتیجه عبید شتر را دزدیده بود.

😊 **معمای هشتم:**

قدم ۱: مطابق حقیقت (۳)، عماد کم‌خطرتر از کسی بود که زمرد را دزدیده بود. براساس حقیقت (۱) نیز عماد کم‌خطرتر از کسی بود که الماس را دزدیده بود. بنابراین عماد یاقوت را دزدیده بود و دزد زمرد و دزد الماس به ترتیب از او خطرناک‌ترند.

قدم ۲: مطابق حقیقت (۲)، امینا صاحب زمرد نبود. همچنین عماد یاقوت را از امینا ندزدیده بود، بلکه آن را از بزرگ‌ترین خانم‌ها دزدیده بود (که طبق حقیقت (۲) نمی‌تواند امینا باشد). بنابراین امینا صاحب یاقوت نبود، بلکه صاحب الماس بود.

قدم ۳: چون امینا صاحب الماس بود، پس مردی که از او دزدی کرد، طبق حقایق ۱ و ۴، مجرد است و نمی‌توانست برادر زن داشته باشد. لذا عبید نبود. پس عبید زمرد را دزدیده بود و در نتیجه حسیب هم دزد الماس بود.

قدم ۴: حسیب از امینا دزدی کرده بود، زیرا عبید از امینا دزدی نکرده بود و او نمی‌توانسته از لیلا دزدی کرده باشد، پس از صفیه دزدی کرده بود. بنابراین عبید زمرد را از صفیه، حسیب الماس را از امینا، و عماد یاقوت را از لیلا دزدیده بود.

پاسخ جدول ایستگه اندیشهٔ شمارهٔ ۷۹، پاسخ دکتر ابوالقاسم قربانی بود. دربارهٔ زنده‌یاد ابوالقاسم قربانی و آثار وی در صفحهٔ ۲ جلد این شماره مطالبی داریم.

ضَریب هوشی و جنبه‌های دیگر از زندگی دانشمندان ریاضی و فیزیک

احسان یارمحمدی*

■**اسم فیلم:** ضریب هوشی[۱]
■**کارگردان:** فِرِد شِپیسی[۲]
■**تهیه‌کنندگان:** فِرِد شِپیسی، کارُل بااُم[۳]، اِسکات رودین[۴] و نیل آ. ماچلیس[۵]
■**نویسنده:** اَندی برِکمن[۶]
■**بازیگران:** تیم روبینز[۷]، مِگ رِیان[۸] و والتر مَتیو[۹]
■**موسیقی:** جِری گولداسمیت[۱۰]
■**فیلم‌بردار:** یان بیکِر[۱۱]
■**تدوین:** جیل بیلکاک[۱۲]
■**تاریخ اکران:** ۲۵ دسامبر ۱۹۹۴
■**مدت فیلم:** ۹۵ دقیقه
■**محصول:** ایالات متحده آمریکا
■**زبان:** انگلیسی و آلمانی
■**بودجه:** ۲۵ میلیون دلار
■**فروش بلیط در گیشه:** ۲۲۱/۳۸۱/۲۶ دلار

در این فیلم **کاترین بوید**[۱۳] (مِگ رِیان) دانشـجوی دورهٔ دکترای ریاضی در دانشـگاه پرینستون[۱۴] و برادرزادهٔ **آلبرت اینشتِین**[۱۵] (والتر مَتیو) است. فیلم ضریب هوشی سعی دارد بـا ارائهٔ گفتارهـا و رفتارهای طنزآمیز و فکاهـی از جانب بازیگرانـش، بـه جنبه‌های دیگری از زندگی دانشمندان رشـته‌های ریاضی و فیزیک بپردازد. در فیلم مزبور، آلبرت اینشـتِین (۱۹۵۵-۱۸۹۷) در کنار سـه تن از دوسـتان دانشـمند خود بـه نام‌های **کـورت گـودِل**[۱۶] (۱۹۷۸-۱۹۰۶)، **بوریـس یاکوولِویچ پودولسـکی**[۱۷] (۱۹۶۶-۱۸۹۶) و **ناتـان لِیبنِخـت**[۱۸] سعی و کوشـش فراوانی در قالـب ترفندهـای گوناگون به‌کار می‌برند تا کاترین بتواند آشنایی بیشـتری، به منظور ازدواج بـا **اِد والتـرز**[۱۹] (تیم رابینز) که به‌عنوان تعمیرکار خـودرو در یـک مکانیکـی مشغول به‌کار است، پیدا کند! و بـه این واسـطه از جهان تجریدی اطراف خود که مملو از دیدگاه‌ها و روابط علمی اسـت، تا انـدازه‌ای رهایی یابد.

آن‌هـا حتـی در یکـی از صحنه‌هـای این فیلـم برای رسـیدن به مقصودشان بیان می‌کنند که **مایکل فارادِی**[۲۰] (۱۸۶۷-۱۷۹۱) ابتـدا نجار بوده و **سِـر ایـزاک نیوتن**[۲۱] (۱۷۲۷-۱۶۴۳) نیـز در آغاز فروشـنده بـوده اسـت! اما کاترین به عمویش می‌گوید کـه نیوتـن هیـچ‌گاه یـک فروشنده نبوده است. آشنایی کاترین و اِد در تعمیرگاه او رخ می‌دهد و با نقشه‌ای که آلبرت اینشتِین و دوستان دانشمند او برای پیوند این دو می‌ریزند، ادامه می‌یابـد. ماجرا تا آنجا پیـش می‌رود که اینشـتِین و دوسـتانش، با کمک به اِد والترز که حتی کم‌ترین سواد آکادمیک را در مورد فیزیک کوانتوم ندارد، سـعی بر این دارند کـه از اِد والترز نابغه‌ای

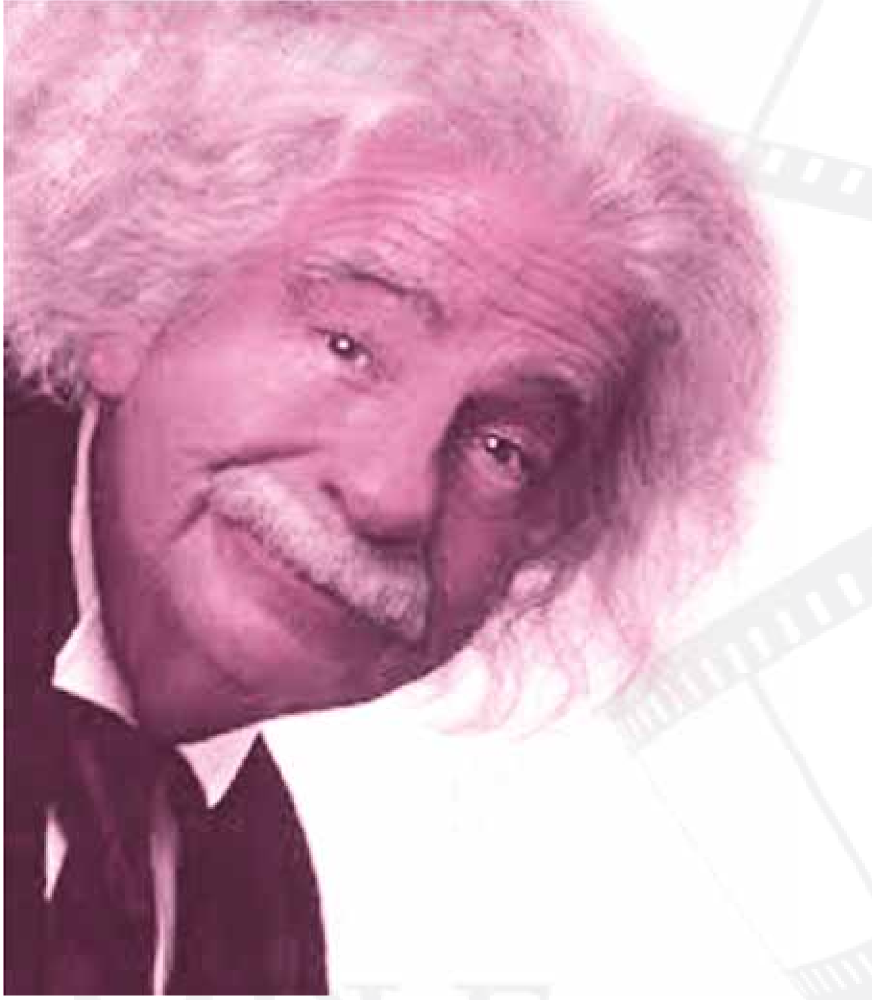
پی‌نوشت‌ها..

1. I.Q

«ضریب هوشی»، بهره هوشی یا هوش بهر با علامت اختصـاری IQ، ترجمهٔ اصطلاح «Intelligence Quotient» و عـددی بـا میانگیـن ۱۰۰ و انحراف معیار ۱۵ اسـت. از ایـن‌رو در رده‌بنـدی و تقسـیم هوش، به‌صـورت میانگین، نزدیـک ۷۰ درصد از مـردم دارای هوش میانه، ۱۲ درصد دارای هوش بالاتر از میانه، ۲ درصد بسیار باهوش و ۱ درصد افراد برگزیده هستند. همین روند دربارهٔ افراد کم‌هوش، واپس‌ماندهٔ ذهنی و... در سـوی دیگر پابرجاسـت. برای به‌دست آوردن بهرهٔ هوشـی فرد، از وی آزمون‌های گوناگونی برای ارزیابی قابلیت‌های متفاوت ذهنـی وی گرفته می‌شـود. هـر آزمایش بخشی از ویژگی‌های مغزی و اندیشه‌ای فرد را می‌سنجد و سپس از روی آن‌ها با نگرش به سن فرد، بهرهٔ هوشی او معین می‌شود.

2. Fred Schepisi
3. Carol Baum
4. Scott Rudin
5. Neil A.Machlis
6. Andy Breckman
7. Tim Robbins
8. Meg Ryan
9. Walter Matthau
10. Jerry Goldsmith
11. Ian Baker
12. Jill Bilcock
13. Catherine Boyd
14. Princeton University
15. Albert Einstein

آلبرت اینشـتین (زادهٔ ۱۴ مارس ۱۸۷۹ـ در گذشـتهٔ ۱۸ آوریل ۱۹۵۵) فیزیک‌دان نظری آلمانی بود. او بیشتر به‌خاطر نظریهٔ نسـبیت و به‌ویژه بـرای هـم‌ارزی جرم و انرژی که از معروف‌ترین روابط فیزیک بین غیرفیزیک‌دان‌هاست، شهرت دارد. علاوه بر این، او در بسـط تئوری کوانتوم و مکانیک آماری سـهم عمده‌ای داشـت. اینشـتین جایزهٔ نوبل فیزیک را در سال ۱۹۲۱ برای خدماتش به فیزیک نظـری و به‌خصوص به‌خاطر کشـف «قانون اثر فوتوالکتریک»



بسازند تا به چشم کاترین خوش بدرخشد و پیوند ازدواج بین آن‌ها برقرار شود.

اینشتین و سه دوست دانشمندش با کمک‌های بسیاری به اِد والترز، زمینهٔ حضور او را در یک همایش بین‌المللی فیزیک فراهم می‌کنند و او در آنجا به ایراد سخنرانی در زمینهٔ دستاورد جدیدش می‌پردازد. اما اِد مایل است که اصل ماجرا را برای کاترین بیان کند. به او بگوید که تنها یک مکانیک ساده است و نه یک تعمیرکار نابغه، که توانسته مانند عمویش که یک کارمند ساده بوده، اما در نهایت به دانشمندی نامی و برجسته تبدیل شده است، به دستاورد جدیدی در فیزیک کوانتوم نائل آید. اما کاترین با انجام محاسبات دقیق ریاضی روی دستاورد اِد والترز متوجه نقصان و اشکال در آن می‌شود و قبل از اینکه اِد کلامی به زبان آورد، خود متوجه موضوع می‌شود. این موضوع باعث آزردگی خاطر و دلسردی کاترین از اِد می‌شود، اما در نهایت با همکاری اینشتین و دوستان دانشمندش برای ایجاد الفت میان آن‌ها، همه‌چیز ختم به‌خیر می‌شود.

اکنون می‌خواهیم چرایی و چگونگی نام‌گذاری این فیلم را به «ضریب هوشی» مورد بررسی قرار دهیم؛ سپس با استفاده از مفهوم مذکور و نیز مفهوم «هوش هیجانی» (هوش عاطفی یا هوش احساسی)، به تحلیل و کنکاش در فیلم مزبور بپردازیم. نخست مطالبی را برای درک بهتر این فیلم دربارهٔ مفهوم هوش هیجانی مطرح می‌کنیم.

هوش هیجانی (که با EQ نشان داده می‌شود) شامل شناخت و کنترل عواطف و هیجان‌های خود است. به‌عبارت دیگر، شخصی که هوش هیجانی بالایی دارد، سه مؤلفهٔ هیجان‌ها (مؤلفهٔ شناختی، مؤلفهٔ فیزیولوژیکی و مؤلفهٔ رفتاری) که به‌طور موفقیت‌آمیزی با یکدیگر تلفیق می‌کند. عوامل مؤثر در هوش هیجانی عبارت‌اند از:

۱. شناخت عواطف شخصی: خودآگاهی (تشخیص هر احساس به همان صورتی‌که بروز می‌کند) سنگ بنای هوش هیجانی است. توانایی نظارت بر احساسات در هر لحظه، در به‌دست آوردن بینش روان‌شناختی و ادراک خویشتن نقش تعیین‌کننده دارد. ناتوانی در تشخیص احساسات راستین، ما را به

دریافت کرد. او به‌دلیل تأثیرات چشم‌گیرش یکی از بزرگ‌ترین فیزیک‌دانانی شناخته می‌شود که به این جهان پا گذاشته‌اند.

16. Kurt Godel

کورت گودل (زادهٔ ۲۸ آوریل ۱۹۰۶ در شهر برنو در پادشاهی اتریش ـ مجارستان و در گذشتهٔ ۱۴ ژانویه ۱۹۷۸ در شهر پرینستون، ایالت نیوجرسی آمریکا) ریاضی‌دان، منطق‌دان و فیلسوفی اتریشی بود. قابل توجه‌ترین منطق‌دانی که آثارش تأثیرات بسیار وسیعی بر تفکرات علوم و فلسفهٔ قرن بیستم گذاشت، زمانی که بسیاری مانند برتراند راسل، آلفرد وایتهد و دیوید هیلبرت پیشگامان استفاده از منطق و تئوری مجموعه‌ها برای فهم مبانی ریاضیات بودند. گودل با دو «قضایای ناتمامیت» شهرت دارد که درست یک سال بعد از اخذ مدرک دکترا از دانشگاه وین در سال ۱۹۳۱ (یعنی در سن ۲۵ سالگی وی) به چاپ رسید. او همچنین نشان داد که «فرضیهٔ پیوستار» را نمی‌توان به‌وسیلهٔ اصول پذیرفته شده در تئوری مجموعه‌ها، به فرض پایداری آن اصول، باطل کرد. او سهم عمده‌ای برای اثبات تئوری به‌وسیلهٔ تبیین ارتباط بین منطق کلاسیک، منطق شهودگرا و منطق وجهی داشت. کورت گودل در ۲۳ سالگی برای گریز از مشکلات جنگ جهانی دوم به کشور آمریکا مهاجرت کرد و تا پایان عمر در آن کشور باقی ماند.

17. Boris Yakovlevich Podolsky

بوریس یاکوولِویچ پودولسکی (زادهٔ ۲۹ ژوئن ۱۸۹۶ در تاگونورگ امپراتوری روسیه و در گذشتهٔ ۲۸ نوامبر ۱۹۶۶ در سینسیناتی ایالات متحده آمریکا) فیزیک‌دان برجستهٔ آمریکایی ـ روسی که کارهای ارزشمند و برجسته‌ای را در مکانیک کوانتومی انجام داده است. آلبرت اینشتین، بوریس پودولسکی و ناتان روزِن توانستند با همکاری یکدیگر به دستاوردهای مشهور به «پارادوکس ایی پی آر» (نام این پارادوکس از ابتدای نام‌های خانوادگی این سه دانشمند گرفته شده است) دست یابند.

18. Nathan Liebknecht

19. Ed Walters

سـردرگمی دچـار می‌کند. افرادی که نسبت به احساسات خود اطمینان بیشتری دارند، بهتر می‌توانند زندگی خویش را هدایت کنند. ایـن افراد دربـارۀ احساسـات واقعـی خـود در زمینـۀ اتخـاذ تصمیمات شخصی، از انتخاب همسر آینده گرفته تا شغلی کـه برمی‌گزینند، احسـاس اطمینان بیشتری دارند.

۲. بـه‌کار بـردن درسـت هیجان‌هـا: قـدرت تنظیـم احساسـات خـود نوعـی توانایـی اسـت کـه بر حس خودآگاهـی متکی و شـامل ایـن مـوارد اسـت: ظرفیت شـخص بـرای تسـکین دادن خـود، دور کـردن اضطراب‌ها، افسـردگی‌ها یا بی‌حوصلگی‌های متـداول و پیامدهـای شکسـت در این مهـارت عاطفی. افـرادی که از نظـر ایـن توانایی ضعیف هسـتند، دائماً با احسـاس نومیدی و افسردگی دست به گریبان‌اند. اما افرادی که در آن مهارت زیادی دارند، با سرعت بسـیار بیشـتری می‌توانند ناملایمات زندگی را پشت‌سر بگذارند.

۳. برانگیختـن خـود: بـرای عطـف توجـه دیگـران، برانگیختن شخصی، تسلط بر نفس خود، و برای خلاق بودن لازم است فرد سکان رهبری هیجان‌هایـش را در دسـت بگیرد تا بتواند به هدف خود دسـت یابد. خویشـتن‌داری عاطفی (به تأخیـر انداختن کامرواسـازی و فرونشـاندن تکانش‌هـا) زیربنـای تحقق هر پیشرفتی اسـت. توانایی دستیابی به مرحلۀ غرقه شدن در کار، انجام هر نوع فعالیت چشـم‌گیر را میسر می‌سازد. افراد دارای این مهارت، در هر کاری کـه برعهده می‌گیرند، بسیار مولد و اثربخش خواهند بود.

۴. شناخت عواطف دیگران: «همدلی» توانایـی دیگری اسـت کـه بـر خودآگاهی عاطفی تکیه دارد و اسـاس «مهـارت ارتباط بـا مردم» محسوب می‌شود. افرادی که از همدلی بیشتری برخوردار باشـند، به علائـم اجتماعی ظریفـی کـه نشـان‌دهندۀ نیازها یا خواسته‌های دیگران اسـت، توجه بیشتری نشان می‌دهند. ایـن توانایی آنان را در حرفه‌هایی که مستلزم مراقبـت از دیگـران اسـت (ماننـد تدریس، فـروش و مدیریت)، موفق‌تر می‌سازد.

۵. حفـظ ارتباط‌هـا: بخش عمـده‌ای از هنـر برقـراری ارتباط، مهارت کنترل عواطف در دیگـران اسـت؛ ماننـد صلاحیت یـا عدم صلاحیت اجتماعـی و مهارت‌هـای خاص لازم بـرای آن. این‌ها توانایی‌هایـی هسـتند کـه محبوبیت، رهبری و اثربخشی بین‌فردی را تقویت می‌کنند. افرادی کـه در این مهارت‌ها توانایی زیـادی دارند، در هر آنچـه که به کنـش متقابل آرام با دیگـران باز می‌گردد، به‌خوبی عمل می‌کنند. آنان ستاره‌های اجتماعی هستند.

اکنـون با توجه بـه موارد بالا می‌توانیم ملاحظه کنیم که در فیلم ضریب هوشـی، آنچه که کارگردان این فیلم پیگیری می‌کند تا مخاطبان را با آن آشـنا سـازد، مفهوم هـوش هیجانی اسـت. فِرِد شِپیسی، در مقام کارگردان این فیلـم، چهار دانشـمند برجسـته را کـه هریـک از آن‌هـا دارای بهـرۀ هوشـی بالایـی هسـتند، در کنار اِد والتـرز که تنها یک مکانیک سادۀ خودرو است و نمی‌باید ضریب هوشی بالایی داشته باشد (این موضوع در فیلم به کرات به تصویر کشیده شده است)، و نیز کاترین بوید که از ضریب هوشی بالایی بهره می‌بـرد، قرار داده اسـت. اما آنچه که می‌تواند راه‌گشـای مسائل و مشکلات روی‌داده در زندگی آن‌ها بشـود، وجه اشـتراک یا وجه تمایز بهرۀ هوشـی آن‌ها نیسـت. بلکه آلبرت اینشتین و سه دوست دانشـمندش در ایـن فیلم، علاوه بر داشتن بهرۀ هوشی بـالا، دارای هـوش عاطفی بسـیار بالایی نیز هسـتند و بـا اسـتفاده از این ویژگی می‌کوشـند کاربرد آن را در زندگی برادرزادۀ اینشـتِین عملی کنند.

بنابرایـن می‌توانیم اذعان کنیم: افرادی که دارای هوش احساسـی بالایی هسـتند، در تعامـلات اجتماعـی، رویدادهـای زندگی شـامل کامیابی‌هـا، ناکامی‌هـا و... موفقیت‌هـای بیشـتری را نسـبت به افرادی به‌دسـت می‌آورند که تنها می‌خواهند با استفاده از بهرۀ هوشی‌شان بر موانع و مشـکلات زندگی روزمره فائق آیند.

20. Michael Faraday
مایکل فارادی، فیزیک‌دان و شـیمی‌دان انگلیسـی کـه زمینه‌هـای کاری او الکترومغناطیـس و الکتروشـیمی بود و در زمـرۀ حکیمـان مادی قرار داشـت. وی چـراغ بونزن را ابداع کـرد. با وجود اینکه فارادی علوم رسمی کمی آموخت و ریاضیات عالی را خیلی کم یاد گرفت، اما یکـی از تأثیرگذارترین دانشـمندان تاریخ بـود. برخی از مورخـان علم او را بزرگ‌ترین تجربه‌گر تاریخ علم می‌دانند. «فاراد» که واحـد ظرفیت الکتریکی در «SI» اسـت و «ثابـت فـارادی» که بار الکتریکـی یک مـول از الکترون اسـت (حدود ۹۶/۴۸۵ کولن)، بعد از او این‌گونه نام‌گذاری شدند.

21. Sir Isaac Newton
سِر آیزاک نیوتن، فیزیک‌دان، ریاضی‌دان، ستاره‌شـناس و فیلسـوف انگلیسی بوده است. وی در سال ۱۶۸۷ میلادی شاهکار خـود، «اصول ریاضی فلسـفۀ طبیعی» را به نـگارش درآورد. در این کتاب او مفهوم گرانش عمومی را مطرح ساخت و با تشریح قوانیـن حرکت اجسـام، علـم «مکانیک کلاسیک» را پایه گذاشت. از دیگر کارهای مهم او بنیان‌گذاری «حساب دیفرانسیل و انتگرال» اسـت. نام نیوتن با انقلاب علمی در اروپا و ارتقای نظریۀ خورشید ـ مرکزی پیوند خورده است. او نخستین کسی است که قواعـد طبیعی حاکم بـر گردش‌های زمینـی و آسـمانی را کشـف کـرد. وی همچنین توانسـت برای اثبات قانون‌های حرکت سیاره‌های **کپلر**، برهان‌های ریاضی بیابد. در جهت بسـط قوانیـن نامبرده،او این جسـتار را مطرح کرد کـه مدار اجرامِ آسـمانی مانند سـتارگان دنباله‌دار، لزوماً بیضوی نیسـت، بلکه می‌تواند هذلولی یا شلجمی نیز باشـد. افزون بر این‌ها، نیوتن پـس از آزمایش‌های دقیق دریافت که نور سـفید ترکیبی از تمـام رنگ‌های موجود در رنگین‌کمـان اسـت. او فرضیۀ موجی **هویگنـس** را دربارۀ نور رد کرد. از دیدگاه نیوتـن نور جریانـی از ذرات اسـت که از چشمۀ نور به بیرون فرستاده می‌شوند.

* ehsan.yarmohamadi@yahoo.com

- نخستین کاری که برای حل مسئلهٔ خود باید بکنیم، فهمیدن آن است. هرکس که بد بفهمد، بد جواب می‌دهد. باید به‌صورتی روشن ببینیم که می‌خواهیم به چه هدفی برسیم.
- آدم دیوانه آغاز را در نظر می‌گیرد و آدم عاقل به پایان می‌نگرد. اگر پایان در ذهن ما روشن و آشکار نباشد، به آسانی ممکن است از راه‌حل مسئله دور شویم و آن را رها کنیم. مرد حکیم در پایان آغاز می‌کند و مرد ابله در آغاز به پایان می‌رسد.
- «پیش از آغاز به پایان بیندیشید.» این اندرزی بسیار قدیمی است. با کمال تأسف باید گفت که همه‌کس به این اندرزِ خوب اعتنا نمی‌کند. مردمان غالباً بدون آنکه به‌صورت لازم و شایسته هدفی را که می‌خواهند به آن برسند فهمیده باشند، به جست‌وجو، سخن گفتن و حتی مشاجره کردن با دیگران در آن‌باره می‌پردازند.
- البته تنها فهمیدن مسئله هم کافی نیست، بلکه باید میل به حل کردن آن نیز در ما وجود داشته باشد. بدون داشتن میلی شدید به حل مسئلهٔ دشوار، در رسیدن به جواب آن، بخت یار ما نخواهد شد. هرجا اراده باشد، راه هم هست.

جرج پولیا، ریاضی‌دان بزرگ معاصر

۵۷
57
از خون شهیدان
وطن لاله دمیده