بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد برهان ریاضی ۷۸

فصل نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه

در این شماره می‌خوانید:

دورهٔ بیست‌ویکم ✦ شمارهٔ ۲ ✦ زمستان ۱۳۹۰

◆ **مدیر مسئول:** محمدناصری
◆ **سردبیر:** حمیدرضا امیری
◆ **مدیر داخلی:** میرشهرام صدر
◆ **طراح گرافیک:** شاهرخ خره‌غانی
◆ **هیئت تحریریه:** حمیدرضا امیری، محمدهاشم رستمی، احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی، سید محمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور و با تشکر از همکاری ارزندهٔ **استاد پرویز شهریاری**
◆ **ویراستار ادبی:** مرتضی حاج‌علی‌فرد

◆ **وبگاه:** www.roshdmag.ir
◆ **پیام‌نگار:** Borhan@roshdmag.ir
◆ **پیام‌گیر نشریات رشد:** ۸۸۳۰۱۴۸۲ـ ۰۲۱
◆ **نشانی دفتر مجله:** تهران، صندوق‌پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
☎ **تلفن دفتر مجله:** ۸۸۳۰۵۸۶۲ـ ۰۲۱
☎ **تلفن امور مشترکین:** ۷۷۳۳۶۶۵۶ ۷۷۳۳۶۶۵۵ـ ۰۲۱
◆ **شمارگان:** ۱۱/۰۰۰ نسخه
◆ **چاپ:** شرکت افست (سهامی عام)

مجلهٔ رشد برهان متوسطه، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در زمینه های زیر به همکاری دعوت می کند:

- نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ● طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ● طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه و...

- مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است. ● مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشد.
- مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.

حرف اول

چند توصیهٔ کلیدی

ریاضیات دبیرستانی که شما در کتاب‌های درسی مطالعه می‌کنید، شامل مباحث و موضوعات متنوعی است. هر کدام از این شاخه‌ها در سطوح بالاتر، بسیار تخصصی می‌شود تا جایی که در یک شاخه از ریاضیات، مثلاً هندسه یا آنالیز، آن هم در بخش خاصی از آن، درجهٔ دکترای ریاضی به آن اختصاص می‌دهند.

البته در سطح دبیرستان، ریاضیاتی که شما بررسی کرده و یاد می‌گیرید، بیشتر ریاضیات عمومی است و آن شاملِ شاخه‌ها و موضوعاتی همچون هندسه، مثلثات، جبر خطی، احتمال، ریاضیات گسسته، هندسه تحلیلی، حساب، دیفرانسیل و انتگرال و... می‌باشد. بعضی از این موضوعات، اصلی و بعضی فرعی محسوب می‌شوند. در هر حال، هر کدام از این موضوع‌ها و مباحثِ ریاضی، ویژگی‌ها و ساختارهای خاص خود را دارند. قطعاً توجه به این تفاوت‌های ساختاری، بسیار مفید خواهد بود؛ زیرا این تفاوت ساختاری، در نوع مطالعه و یادگیری، تمرین کردن و حتی چگونگی حضور در کلاس درس تأثیرگذار خواهد بود و شاید حتی در نوع پاسخ‌گویی به سؤالات امتحانی نیز تأثیر داشته باشد.

بعضی از موضوعات ریاضی، کاملاً مفهومی و بعضی دیگر بیشتر تکنیکی‌اند. بنابراین، وقتی می‌خواهید یک درس مفهومی را، که بیشتر با مفاهیم سروکار دارد، مطالعه کنید و یاد بگیرید، باید با دقت بیشتر و حواس جمع‌تر به درس گوش بدهید و هر کجا که مفهومی را متوجه نشدید، بلافاصله سؤال کنید تا اشکال شما به قسمت‌های بعدی منتقل نشود.

این‌گونه تصور نکنید که اگر مفهومی را متوجه نشدید، با حل چند تمرین، این مفهوم برای شما جا می‌افتد و آن را یاد می‌گیرید. در نقطهٔ مقابل این‌گونه مباحث، موضوعاتی هستند که برای یادگیری آن‌ها و بخصوص برای حل مسائل مربوط آن‌ها، به یادگیری روش‌ها و فرمول‌های ریاضی نیاز است.

بنابراین هر چقدر بیشتر مسئله حل کنید و از این روش‌ها و فرمول‌ها بیشتر استفاده کنید، مطالب برای شما راحت‌تر و قابل هضم‌تر خواهد بود و پیشرفت سریع‌تری در آن خواهید داشت.

بعضی از موضوع‌های ریاضی، مانند هندسه و هندسه تحلیلی، جزو هر دو گروه هستند و اصطلاحاً مفهومی - تکنیکی (روش) می‌باشند و این دو، تا حد زیادی به هم وابسته‌اند؛ یعنی برای یادگیری این دروس، هم باید مفاهیم را بخوبی درک کنید و هم باید با روش‌های متفاوت در حل مسائل به‌خوبی آشنا شوید.

موضوع‌هایی همچون احتمال، ترکیبیات و نظریه اعداد، مباحث مفهومی‌اند و موضوع‌هایی چون حساب، مثلثات و تا حدود ۷۰ درصد حسابان، از جمله دروس تکنیکی می‌باشند.

اما توصیه‌هایی که به همهٔ شما دانش‌آموزان عزیز دارم و امیدوارم به آن‌ها عمل کنید، در ۳ بخش خلاصه می‌شود:

۱. از کتاب درسی فاصله نگیرید و سعی کنید روی همهٔ مطالب، مثال‌های حل شده، کار در کلاس‌ها و کار در منزل و تمرین‌های کتاب‌های درسی خود تسلط داشته باشید. هر کدام را در جای خود، به‌طور کامل انجام دهید و از دبیران محترم خود نیز بخواهید همهٔ مطالب کتاب درسی را برایتان موشکافانه بررسی کنند.

۲. ریاضی خواندن موقوف است! ریاضی را باید بنویسید تا خوب آن را درک کنید، تا ملکهٔ ذهن شود و بتوانید مطالب آن را بخوبی به ذهن بسپارید. یک بار نوشتن با چند بار خواندن برابری می‌کند. چه این‌که شما در نهایت نیز باید با نوشتن، سر جلسه امتحان به سؤالات پاسخ دهید، یا اثبات قضیه‌ای را پاسخگو باشید. پس تا آنجا که می‌توانید سعی کنید، دست به قلم ببرید و وقتی ریاضی تمرین می‌کنید، مطالب را کامل بنویسید.

۳. شاید مهم‌ترین توصیه من به شما این باشد که: شما برای یادگیری و علاقه‌مند شدن به ریاضیات، نیاز به تمرکز و حواس جمع کردن و بیشتر از همه، آرامش ذهنی دارید. ان‌شاءالله با پیروی از کلام خداوند تبارک و تعالی که فرمودند: «الا بذکر ا... تطمئن القلوب»، به این آرامش، دست خواهید یافت.

سردبیر

مسئله چیست و چگونه می‌توان مسئله را حل کرد؟

محمد هاشم رستمی

اشاره

انسان همواره با مسئله‌های گوناگون مواجه بوده و تلاش کرده است تا راه‌هایی برای حل این مسئله‌ها پیدا کند. با توسعهٔ دانش بشری و پیدایش متفکران و دانشمندان از عهد باستان تاکنون، این دانشمندان توانسته‌اند روش‌هایی برای حل مسئله‌ها بیابند. برخی از این روش‌ها قانونمندند و برخی روش‌ها چنین نیستند.

در آموزش ریاضی نیز از دیر زمان، روش‌هایی برای حل مسئله‌های ریاضی ارائه شده است که برخی از آن‌ها روش‌های کلی حل مسئله‌های ریاضی است و برخی دیگر، روش‌های حل مسئلهٔ ریاضی در شاخه‌ای خاص از ریاضی مانند روش حل مسئله‌های هندسی است.

یکی از شاخص‌ترین روش‌های کلی حل مسئله‌های ریاضی روش جورج پولیا ریاضی‌دان و آموزشگر برجستهٔ ریاضی قرن بیستم است. او در کتاب چگونه مسئله را حل کنیم، مسئله‌ها را به دو دستهٔ یافتنی و ثابت‌کردنی تقسیم کرده و برای حل هر دو دسته مسئله روش چهار مرحله‌ای زیر را ارائه کرده است.

مرحلهٔ اول. فهمیدن مسئله

مرحلهٔ دوم. طرح نقشه

مرحلهٔ سوم. اجرای نقشه

مرحلهٔ چهارم. نگاه به عقب

شرح بیشتر این چهار مرحله را در مجلهٔ برهان شمارهٔ ۷۰ آورده‌ایم.

اکنون این سؤال مطرح است که:

آیا ریاضی‌دانان دیگری نیز بوده‌اند که روش‌های حل مسئله‌های ریاضی را ارائه داده باشند؟ پاسخ به این سؤال مثبت است. با تحقیق و بررسی آثار ریاضی‌دانان از عهد باستان تاکنون، پی می‌بریم که بسیاری از این ریاضی‌دانان برای انتقال تجربه‌های خود در زمینهٔ روش‌های حل مسئله‌های ریاضی، این روش‌ها را به صورت قانونمند منتشر کرده‌اند. تعدادی از این آثار تاکنون کشف شده و تعداد زیادی هنوز کشف نشده است و احتمالاً در کتابخانه‌های ملی یا شخصی در سراسر دنیا نگه‌داری می‌شوند. یکی از این ریاضی‌دانان عبدالجلیل سجزی ریاضی‌دان ایرانی قرن چهارم هجری (حدود ۱۰۰۰ سال پیش) است که دانش خود در زمینهٔ حل مسئله‌های هندسه را در رسالهٔ سجزی در روش‌های حل مسائل هندسی منتشر کرده است.

این اثر پس از حدود ۱۰۰۰ سال کشف و به همت دکتر هوخنداک به انگلیسی ترجمه شد و آقای محمد باقری آن را به فارسی ترجمه و انتشارات فاطمی چاپ کرد.

به یقین ریاضی‌دانان دیگری نیز در جهان بوده‌اند که آثار ارزشمندی در زمینهٔ آموزش ریاضی نوشته‌اند.

سجزی در کتاب خود هفت مرحله برای حل یک مسئلهٔ هندسه ارائه می‌دهد که عبارت‌اند از:

۱. مهارت و تیزهوشی و توجه به شرایطی که نظم مناسب ایجاب می‌کند؛

۲. تسلط عمیق بر قضایا و مقدمات (مرتبط با شکل)؛

۳. بهره گرفتن از هوش و شگردها؛

۴. آگاهی از وجوه مشترک شکل‌ها؛

۵. نقل؛

۶. تحلیل؛

۷. استفاده از شگردها.

نکتهٔ مهم و در خور توجه آن است که روش حل مسئله‌های هندسهٔ سجزی که هزار سال پیش تألیف شده، با روش حل مسئلهٔ جورج پولیا که در قرن بیستم انتشار یافته است مشابهت‌های بسیار دارد و این امر، تبحر، تیزهوشی و تسلط فراوان او بر ریاضیات، از جمله هندسه را نشان می‌دهد.

برای نشان دادن کار ارزشمند عبدالجلیل سجزی، نمونه‌های دیگری از مثال‌هایی را که سجزی در رسالهٔ خود آورده است، با حفظ امانت در متن، در زیر می‌آوریم.

در شماره‌های آیندهٔ مجلهٔ ریاضی برهان دبیرستان، نمونه‌هایی از مثال‌هایی را که جورج پولیا برای حل مسئله‌ها آورده است، خواهیم آورد.

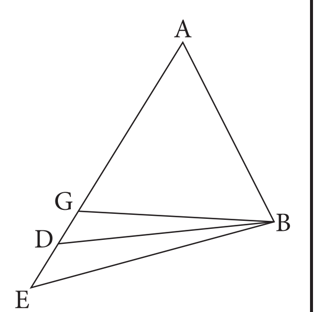
کلیدواژه‌ها:
حل مسئله، آموزش ریاضی، جورج پولیا، عبدالجلیل سجزی، حل مسائل هندسی، قضایا، مقدمات، مثلث، زاویهٔ خارجی، زاویهٔ داخلی، نسبت تقسیم مثلث‌ها، تحلیل، ساختار استنتاجی، اقلیدس، ترسیم پنج ضلعی متساوی‌الاضلاع، مربع، قائمه، نیمدایره.

مثال ۱: دربارهٔ جست‌وجوی ویژگی‌های خاص

چون هوشمندی در کشف ویژگی‌های خـاص بیـش از هر چیـز در ترسـیم‌ها مفید اسـت، مثالی در مورد جسـت‌وجوی ویژگی‌های خاص شکل‌ها می‌آوریم. مثلث ABG را در نظر می‌گیریم و ویژگی خاصی را در زاویه‌هایش جست‌وجو می‌کنیم، بدین قرار که مجموع هر سه (زاویه) برابر است با مجموع زاویه‌های یک مثلث معلوم، پیش از آنکه بدانیم (مجموعاً) با دو قائمه برابرند.

راه جسـت‌وجوی مـا در مرحلـهٔ اول چنین اسـت که یک زاویـهٔ آن را در وضع خود (ثابت) می‌گیریم، و اضلاعش را تغییر می‌دهیم تا بر ما آشکار شود که آیا دو زاویهٔ دیگر (مجموعاً) از (مجموع) دو زاویهٔ اصلی بزرگ‌ترند یا کوچک‌ترند یا با آن برابرند.

شکل ۴ زاویهٔ A را برخلاف زاویه‌های دیگر (ثابت) فرض کرده‌ایم با در نظر داشتن اینکـه: اگر فرض کنیـم دو زاویه از مثلث مفروضی با دو زاویه از مثلث مفروض دیگر برابر باشـند، به‌طوری که هر کدام با نظیر خود برابر باشـد، ناچار باید زاویهٔ باقی‌مانده (از یک مثلـث)، برابر با زاویهٔ باقی‌مانده (از مثلث دیگر) باشد، که به این ترتیب آنچه را می‌خواستیم بدانیم حاصل نمی‌شود.



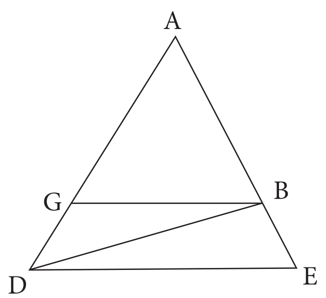
۴

AG را تا D امتـداد می‌دهیم و BD را وصل می‌کنیم. زاویهٔ ADB کوچک‌تر از زاویهٔ AGB می‌شـود. سپس به زاویه‌های ABG و ABD نگاه می‌کنیم. زاویهٔ ABD از زاویهٔ ABG بزرگ‌تر است. این کار را تکرار می‌کنیم. ضلع AD را تا E امتداد می‌دهیم و BE را وصل می‌کنیم. در این صورت زاویهٔ ADB کوچک‌تـر از زاویـهٔ ABE و زاویهٔ ABE بزرگ‌تر از زاویهٔ ABD اسـت. این کار را مرتبـاً تکرار می‌کنیم. به این ترتیب زاویه‌هایی را که [رأس آن‌ها] بر ضلع AG واقع می‌شوند کوچک‌تر و زاویه‌های مجاور به ضلع AB در نقطهٔ B را از آنچه قبلاً بوده بزرگ‌تر می‌کنیم.

اکنون باید بررسی کنیم که آیا این زیاد و کم‌شدن‌ها به‌طور طبیعی با هم متعادل‌اند، یعنی یکدیگر را جبران می‌کنند و آنچه در یک طرف اضافه می‌شود به همان اندازه از طرف دیگر کم می‌شود یا نه. اگر وضع بدین قرار یافته شد، ویژگی خاصی از مثلث‌های کلی را یافته‌ایم، یعنی این‌که (مجموع) سه زاویهٔ آن‌ها با هم برابرند.

حال متسـاوی بودن (احتمالی) آن‌ها (مجموع‌هـا) را از چـه طریقـی بررسـی کنیم؟ ابتـدا، طبق معمول فرض می‌کنیم که (مجمـوع) دو زاویهٔ ABG و AGB با (مجمـوع) دو زاویـهٔ ABD ، ADB برابر است، زیرا در آغاز کتاب قرار گذاشتیم این شـیوه را در پیش بگیریم. اگر وضع چنین باشـد که فرض کردیم، لازم است دو زاویهٔ GBD و GDB (مجموعاً) با زاویهٔ AGB برابر باشـند، زیرا اگر چنین باشد، دو زاویهٔ AGB (و مجموع زوایای) GBD و GDB چنان‌اند که دو زاویهٔ ABG به آن‌ها افزوده می‌شود.

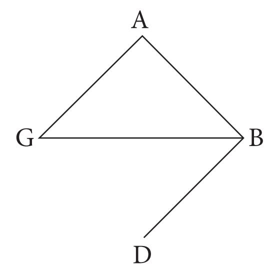
پس در این‌جا مسـئلهٔ ما چنین است. اگـر راه‌های (یعنی اسـتدلال‌های) خود را درسـت دنبال کنیم و به نتیجه‌ای درست نه غیرممکن برسـیم، در این صورت آنچه فرض کردیم درست است. اگر امر متناقض یا ناممکن نتیجه شود، پس زاویه‌های مثلث ABG بـا زاویه‌هـای مثلـث ABD و با زاویه‌های (هیچ) مثلث دیگری برابر نیستند مگر (مثلث‌های) متشابه با آن.



۵

به شکلی نیاز داریم که برای آن (مسئله) مناسب‌تر باشد، یعنی شباهت بیشتری با آن داشته باشد یا از جنسی مرتبط‌تر با آن باشد. پس (شکل ۵) DE را موازی با BG می‌کشیم و AE را وصل می‌کنیم تا دو مثلث متشابه شوند و زوایای مساوی پدید آید، چنان که به هم برسند براساس نتیجه‌ای که از اینجا به‌دست می‌آید صحت یا سقم فرض اولیهٔ ما روشن می‌شود.

اما زاویهٔ BDE با زاویهٔ DBG برابر است و (مجموع) زاویه‌های EDB و BDG با زاویهٔ EDG برابر است. پس مجموع زاویه‌های BDG و DBG با زاویهٔ BGA برابر است. پس آنچه در جست‌وجویش بودیم حاصل شد، ولی ما در جست‌وجوی تساوی زاویه‌های مثلث ABG با زاویه‌های مثلث ABD بودیم. پس ویژگی خاصی از مثلث، بلکه دو ویژگی خاص آن را یافتیم، زیرا در پایان مطلب دریافتیم که اگر یکی از ضلع‌های مثلثی را امتداد دهیم زاویه‌ای خارجی ایجاد می‌شود که برابر است با (مجموع) دو زاویهٔ داخلی روبه‌روی آن در مثلث.



۶

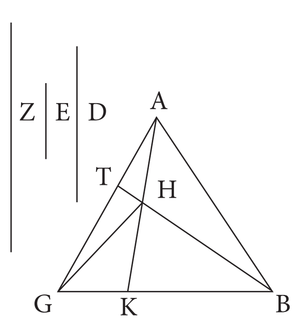
اکنون پس از آنکه برایمان روشن شد که مجموع زوایای هر مثلث با مجموع زوایای [هر مثلث] دیگر برابر است، ویژگی خاص دیگری از آن را جست‌وجو می‌کنیم، آن‌هم اینکه مقدار (مجموع) این زوایا را می‌طلبیم. در اینجا لازم است مقیاسی برای اندازه‌گیری زاویه‌ها داشته باشیم. این مقیاس باید از جنس آن‌ها باشد و آن زاویهٔ قائمه است. پس باید مثلثی را فرض کنیم و زاویه‌ای از آن را قائمه قرار دهیم، زیرا اگر دو زاویهٔ آن را قائمه قرار دهیم، از این ترسیم مثلث به وجود نمی‌آید، بلکه دو ضلع آن متوازی می‌شوند و یکدیگر را قطع نمی‌کنند، در حالی‌که مثلث از برخورد سه ضلعش ایجاد می‌شود. پس فرض می‌کنیم که دو ضلع طرفین زاویهٔ قائمه برابرند (شکل ۶). مثلث ABG را قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین فرض می‌کنیم و زاویهٔ قائمه، زاویهٔ A است. سپس خط موازی را به‌کار می‌بریم، زیرا تناسب آن با این وضعیت از خطوط دیگر بیشتر است. از نقطهٔ B خط BD را موازی با AG رسم می‌کنیم. زاویه‌ای ایجاد می‌شود که خواص آن‌را جست‌وجو می‌کنیم، زاویهٔ DBG را مساوی با زاویهٔ BGA یافته‌ایم، ولی زاویهٔ BGA را با ABG مساوی گرفته بودیم. پس زاویه‌های ABG و DBG برابرند، اما مجموع آن‌ها با زاویهٔ BAG برابر است. پس لازم می‌آید که (مجموع) سه زاویهٔ مثلث ABG برابر با دو قائمه باشد.

اما این ویژگی خاصی است که در مثلث مشخصی یافتیم، یعنی مثلثی که یک زاویه‌اش قائمه است و دو ضلع طرفین آن برابرند. اما گفته‌ایم که (مجموع) زاویه‌های مثلث‌های مشخص و کلی (نامشخص) با هم برابرند. پس معلوم می‌شود که (مجموع) سه زاویهٔ هر مثلث با دو زاویهٔ قائمه برابر است. این همان چیزی است که می‌خواستیم نشان دهیم.

این یکی از راه‌های جست‌وجوی ویژگی‌های خاص است. پس لازم است فهم و ذهن خود را در این فهم اصلاح کنی. در این طریق، یعنی کشف شکل‌ها، اصلاح فهم و باز بودن ذهن مفیدتر از خواندن کتاب‌های هندسه است که پیشینیان تجویز می‌کردند، چرا که قصد آن‌ها از این کار خواندن کتاب‌های هندسه به عنوان مدخلی بر سایر کتاب‌های فلسفهٔ ریاضی و پرورش ذهن بود.

مثال ۲: دربارهٔ تحلیل

اکنون مثال دیگری مربوط به مسئلهٔ دیگری می‌آوریم تا جویندهٔ این فن با آن تمرین کند و مسائلی که برایش مبهم است بر او روشن شود. [مسئله] این است: چگونه مثلث مفروضی را به نسبت مفروضی به سه قسمت تقسیم کنیم؟



۷

شکل ۷ مثلث ABG و نسبت D (به) E (به) Z را در نظر می‌گیریم. تقسیم شکل باید با سه خط دیگر که در وسط مثلث به هم می‌رسند صورت گیرد. پس فرض می‌کنیم مثلث همان‌طور که خواسته‌ایم تقسیم شده است یعنی (به) مثلث‌های ABH ، AGH و BGH، چنان‌که نسبت (مساحت) مثلث ABH به مثلث AGH نسبت D به E است و نسبت مثلث AGH به مثلث BGH مثل نسبت E به Z است.

سپس دربارهٔ جست‌وجوی ترسیمی فکر می‌کنیم که در این مسئله مفید باشد. BH را تا T امتداد می‌دهیم چنان‌که بر ما روشن شود نسبت مثلث ABH به مثلث BGH مثل نسبت AT به GT است.

پس اگر ضلع AG را به نسبت D به Z تقسیم کنیم، تقسیم دو مثلث باید بر خط BT منطبق شود. پس AG را در T به نسبت D به Z تقسیم و BT را وصل می‌کنیم. پس لازم می‌آید که نقطهٔ تقسیم و ایجاد زاویهٔ مثلث مجاور به خط AG، بر خط BT باشد.

پس باید یک مثلث (AHG) از ضلع AG و دو خط خارج شده از نقاط A و

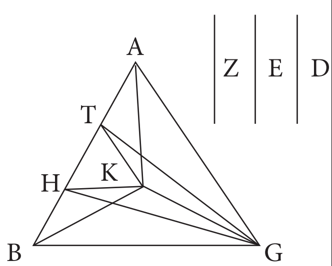
G و (رأس) زاویه‌ای که بر خط BT قرار می‌گیرد رسم کنیم، ولی نسبت آن به یکی از مثلث‌های باقی‌مانده مثل نسبت E به D یا به Z است. ترسیم اول را به عنوان مقدمهٔ آن به‌کار می‌بریم، زیرا روش درستی است. روی ضلع BG همان ترسیمی را که روی AG کردیم انجام می‌دهیم، یعنی ضلع BG را در نقطهٔ K به نسبت D به E تقسیم و AK را وصل می‌کنیم. پس روشن است که نسبت مثلث AHB به مثلث AGH مثل نسبت D به E است.

نشان داده‌ایم که نسبت هر دو مثلثی که دو ضلعشان از نقاط A و G خارج می‌شوند و روی BT به هم می‌رسند مثل نسبت مثلث‌های ABT و BTG است. پس سه مثلث رسم شده در مثلث ABG به نسبت مفروض هستند. این چیزی است که می‌خواستیم نشان دهیم.

روش دیگر: فرض می‌کنیم که سه مثلث رسم شده‌اند و BH را تا T امتداد می‌دهیم (شکل ۷). اکنون باید مثلث AHB را جست‌وجو کنیم، اما چنان که در یافتن شکل‌ها به روش تحلیل معمول است، فرض می‌کنیم که ترسیم شده است.

پس به شیوهٔ ریاضی در آن می‌اندیشیم و راهی برای آن جست‌وجو می‌کنیم که شیوهٔ آن به شیوهٔ نخست نزدیک باشد، چنان که در پی می‌آید. اگر BT را در نقطهٔ H چنان تقسیم کنیم که نسبت مثلث ABH به مثلث AHT معلوم باشد، نسبت مثلث AHT به مثلث GTH بر ما معلوم است، اما کل مثلث‌های AGB و AHB را نداریم. اگر بتوانیم نسبت‌ها را معلوم کنیم، آنگاه چنانچه بعضی از آن‌ها را ترکیب کنیم، (مثلث ABG) تقسیم شده به نسبت‌های مفروض به‌دست می‌آید. پس از آنکه نسبت هر دو مثلثی را که مثل مثلث‌های ABH و GBH هستند، دانستیم، پس با این روش جست‌وجو می‌کنیم تا ببینیم به جواب می‌رسیم یا نه. اگر (به‌فرض) نسبت BH به HT و نسبت AT به TG به ما معلوم باشد، پس از ترسیم مثلث، نسبت مثلث‌های AGH و AHB معلوم است، زیرا فرض همین بود.

اما نسبت ضمن جست‌وجو تقسیم شده است. پس باید یکی از خط‌های متناسب را به (همان) نسبت‌های تقسیم دو مثلث AHT و HTG تقسیم کنیم. پس E را به دو قسمت می‌کنیم چنان‌که نسبت یکی از آن‌ها به دیگری مثل D به Z باشد. نسبت BH به HT را چون نسبت D به یکی از قسمت‌های E قرار می‌دهیم. AH و GH را وصل می‌کنیم. پس نسبت مثلث ABH به مثلث AHT مثل نسبت D به یکی از اجزای E است، و نسبت مثلث AHT به مثلث HTG مثل نسبت یکی از اجزای E به جزء باقی‌ماندهٔ آن است. پس نسبت مثلث ABH به مثلث AHG مثل نسبت D به E است. اما نشان دادیم که نسبت مثلث ABH به باقی‌ماندهٔ مثلث BGH مثل نسبت D به Z است. این چیزی است که می‌خواستیم نشان دهیم.



۸

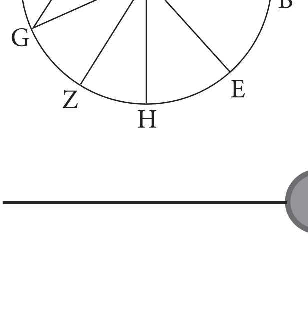
روش دیگری برای ترسیم این شکل وجود دارد که چنین است (شکل ۸): ضلع AB را در (نقاط) H و T به نسبت‌های E، D، و Z تقسیم می‌کنیم و خط‌های GH و GT را می‌کشیم. روشن است که هر یک از مثلث‌های مطلوب (BGK، AGK و ABK در شکل ۸) با یکی از این سه مثلث (AGT، TGH و HGB) برابر است. در مرحلهٔ اول، این شیوه را در ذهن داشته‌ایم. سپس می‌اندیشیم و نقطه‌ای را که خطوط اضلاع سه مثلث (مطلوب) مساوی با این سه مثلث رسم شده به هم می‌رسند (یعنی نقطهٔ K را) جست‌وجو می‌کنیم. پس TK را موازی با AB رسم می‌کنیم، زیرا می‌دانیم که رأس هر مثلث مساوی با مثلث ATG و به قاعدهٔ AG بر خط موازی با AG قرار دارد. به همین ترتیب HK را موازی با BG می‌کشیم، بنا به دلیلی که قبلاً ذکر کردیم، در نقطهٔ K به‌هم می‌رسند، سپس BK، AK و GK را رسم می‌کنیم و می‌گوییم تقسیم به نسبت‌های موردنظر انجام شده است. این (روش) یکی از راه‌های (حل) آن است، ولی آن را به تمامی شرح نداده‌ایم.

روش دیگری برای این حکم وجود دارد، ولی به این دو روشی که ذکر کردیم منتهی می‌شود، بنابراین آن را حذف کرده‌ایم.

مثال ۳: دربارهٔ ساختار استنتاجی

چنان‌که قبلاً گفتیم «اگر مقدمه یا قضیه‌ای از مقدمات و قضایا را داشته باشیم و آن مقدمه یا قضیه هم مقدمه‌ای داشته باشد و بر آن مقدمه با هم مقدمه‌ای باشد، آن مقدمه یا قضیه را می‌توان به کمک مقدمهٔ مقدمه‌اش اثبات کرد» (شکل ۹) دایرهٔ AB را به مرکز نقطهٔ D فرض می‌کنیم. زاویهٔ BAG بر کمان BAG واقع است. پاره‌خط‌های BD و GD را رسم می‌کنیم. می‌گوییم که زاویهٔ BDG دو برابر زاویهٔ BAG است.

اقلیدس این را با استفاده از ویژگی خاص زاویهٔ خارجی مثلثی که یک ضلعش



۹

امتداد یافته باشد، ثابت کرده است. این قضیه (شکل) سی و دوم مقالهٔ اول او دربارهٔ اصول است، ولی قضایای بیست و نهم و سی و یکم، مقدمات این قضیه‌اند. پس لازم است بررسی شود که آیا این (ویژگی خاص دایره) را می‌توان از ان دو یا یکی از آن‌ها به دست آورد یا نه. پس، از نقطهٔ D خط DE را موازی با BA و DZ را موازی با AG رسم می‌کنیم و AD را تا H امتداد می‌دهیم. این کاربرد قضیهٔ سی‌ویکم است که وی آن را مقدمه‌ای بر مقدمه‌اش قرار داده است. اما زاویهٔ خارجی EDH برابر است با زاویهٔ داخلی BAD و زاویهٔ EDB برابر است با زاویهٔ متبادل DBA. زاویهٔ DBA (نیز) با زاویهٔ BAD برابر است. تساوی دو ضلع که در این شکل ظاهر می‌شود مقدمه نیست، بلکه ویژگی خاصی از شکل است که او (اقلیدس) به شکل اضافه کرده است، پس آن را به همین صورت نگاه می‌داریم.

پس هر یک از دو زاویهٔ BDE و EDH با زاویهٔ BAD برابر است. بنابراین زاویهٔ BDH دو برابر زاویهٔ BAD است. همچنین روشن است که به همین ترتیب زاویهٔ HDG دو برابر زاویهٔ DAG است. بنابراین کل زاویهٔ BDG دو برابر کل زاویهٔ BAG است. این کاربرد قضیهٔ بیست و نهم است.

پس ما مقدمات آن را به‌کار برده‌ایم و توانسته‌ایم آن را ثابت کنیم. این چیزی بود که می‌خواستیم نشان دهیم.

مثال ۴: دربارهٔ ویژگی‌های مشترک شکل‌های مختلف

مثالی دربارهٔ وجوه مشترک شکل‌ها می‌آوریم، با استفاده از شکل‌های مرکب از تقسیم خط به نسبت ذات وسط و طرفین. به‌طور کلی حکم‌هایی که مرکب از آن (تقسیم باشند) متضمن (عدد) پنج هستند.

مثلاً ترسیم پنج‌ضلعی متساوی‌الاضلاع شامل تقسیم خطی به نسبت ذات‌وسط و طرفین است.

از کنار هم (بر یک خط مستقیم) گذاشتن شعاع (دایره) و ضلع ده ضلعی منتظم (محاطی) که به علت دربرداشتن نصف کمان پنج ضلعی، با ضلع پنج ضلعی مرتبط است، خطی حاصل می‌شود که به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده است.

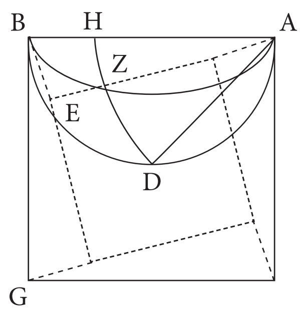
دو وتری که در دایرهٔ پنج ضلعی واقع می‌شوند، یعنی وترهایی که از رأس‌های پنج ضلعی (محاط) در دایره خارج می‌شوند، یکدیگر را به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم‌می‌کنند.

< اگر خطی به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شود > و به بخش بزرگ‌تر، نصف کل خط افزوده شود، مربع آن پنج برابر مربع نصف خط خواهد بود.

هرگاه خطی با این نسبت به دو بخش تقسیم شود، مربع کل خط، پنج برابر بخش اول خواهد بود. اگر خطی به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شود و اگر به بخش کوتاه‌تر خطی برابر با نصف بخش بلندتر افزوده شود، مربع آن (مجموع) پنج برابر مربع نصف بخش بلندتر است.

از افزایش و کاهش ضلع‌های یک شکل مربع که به پنج بخش مساوی تقسیم شده باشد می‌توان خط تقسیم شده به نسبت ذات وسط و طرفین به‌دست آورد. منظورم از این افزایش، افزودن قسمت‌هایی از خطوط به خط‌های دیگر و وصل‌کردن آن‌هاست، چنان‌که حاصل خطی راست باشد و منظورم از کاهش این است که خط بلندتر به دو بخش تقسیم شود چنان‌که یکی از این بخش‌ها با خط کوتاه‌تر برابر باشد.

مثال: (شکل ۱۰) مربع AG را در نظر می‌گیریم، ولی زاویهٔ E قائمه است پس (مجموع) مربع‌های AE و EB با مربع AB برابر است. خط دیگر AD را چنان می‌یابیم که دو برابر مربع آن مساوی با مربع AB و خود آن مساوی با AZ باشد. یافتن خط AD آسان است: نیم‌دایرهٔ ADB را می‌کشیم و آن‌را در D نصف می‌کنیم و AD را وصل می‌کنیم. حال دو برابر مربع AD با مربع AB برابر است. اکنون باید خط AE را چنان بیابیم که اگر EB رسم شود، EB با EZ مساوی باشد و ZA با AD، تا به مقصود خود برسیم.



۱۰

برای یافتن آن، وضعیتی را تصور می‌کنیم که این خط به‌دست آمده است، یعنی ZE برابر با EB است. روشن است که اگر AE را رسم کنیم و در نقطهٔ B از خط EB زاویهٔ نیم‌قائمه‌ای بسازیم و BZ را وصل کنیم، خط ZE با خط EB برابر خواهد بود. سپس باید در پی تساوی AZ و AD کنیم، خط ZE با خط EB برابر خواهد بود. سپس باید در پی تساوی باشیم. باید خط AE را در حال حرکت حول نقطهٔ A تجسم کنیم، بنابراین به مرکز A و به شعاع AD دایرهٔ DZ را می‌کشیم. این خط الزاماً باید دایرهٔ DZ را قطع کند. پس باید کمانی درخور زاویهٔ یک و نیم برابر زاویهٔ قائمه مثل کمان AZB رسم کنیم، زیرا اگر دایرهٔ DZ آن را قطع کند و AZ تا E ادامه یابد و BZ وصل شود، زاویهٔ خارجی AZB برابر است با دو زاویهٔ داخلی E و B. اما بر ما روشن است که زاویهٔ E قائمه است، پس نتیجه می‌گیریم که زاویهٔ B [در مثلث BEZ] با نصف زاویهٔ قائمه برابر است. از اینجا نتیجه می‌شود که در مثلث ZEB، زاویهٔ B و زاویهٔ Z با هم برابرند، پس خط EZ با خط EB برابر است و خط AZ با خط AD. پس AE چنان‌که می‌خواستیم تقسیم شده است. اما براساس نقل، اگر ZH را موازی با EB رسم کنیم، AB چنان‌که می‌خواستیم تقسیم شده است. برهان آن آسان است. این چیزی بود که می‌خواستیم نشان دهیم.

منابع......................
۱. مقاله‌های آموزش ریاضی.
۲. رسالهٔ سجزی در روش‌های حل مسائل هندسی.

آموزش

معادله‌های مثلثاتی ۱

برای دانش آموزان سال سوم متوسطه

احمد قندهاری

کلیدواژه‌ها:
معادله،
معادلهٔ جبری،
معادله‌های مثلثاتی،
ریشه مضاعف،
فاکتورگیری،
معادلهٔ درجه دوم.

معادلهٔ $۲x^۲ - ۱۸ = ۰$ یک معادلهٔ جبری است. منظور از حل معادلهٔ جبری، یافتن تمام xهایی است که در آن معادله صدق کند.

معادله‌هایی نظیر $۲Cosx - ۱ = ۰$، $\tan x = \sqrt{۳}$ و $Sin^۲x - Sinx = ۰$ را معادله‌های مثلثاتی گوییم. منظور از حل معادلهٔ مثلثاتی، یافتن تمام xهایی است که در آن معادله صدق می‌کند.

فرمول‌های کلّی حل معادله‌های مثلثاتی

$$۱)\ Sinx = Sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha & , k \in Z \\ x = ۲k\pi + (\pi - \alpha) & , k \in Z \end{cases}$$

مثال:

$$Sinx = Sin\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} & , k \in Z \\ x = ۲k\pi + (\pi - \frac{\pi}{۶}) & , k \in Z \end{cases}$$

$$۲)\ Cosx = Cos\alpha \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \alpha \quad , k \in Z$$

مثال:

$$Cosx = Cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \quad , k \in Z$$

$$۳)\ \tan x = \tan\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha \quad , k \in Z$$

مثال:

$$\tan x = \tan\frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴} \quad , k \in Z$$

$$۴)\ Cotx = Cot\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha \quad , k \in Z$$

مثال:

$$Cotx = Cot\frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۶} \quad , k \in Z$$

حالت خاص در معادله‌های مثلثاتی

$$۱)\ \begin{cases} Sinx = ۰ \\ \text{یا} \\ \tan x = ۰ \end{cases} \Rightarrow x = k\pi \quad , k \in Z$$

$$۲)\ \begin{cases} Cosx = ۰ \\ \text{یا} \\ Cotx = ۰ \end{cases} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \quad , k \in Z$$

$$۳)\ Sinx = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \quad , k \in Z$$

همهٔ ریشه‌ها مضاعف است.

$$۴)\ Sinx = -۱ \Rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \quad , k \in Z$$

همهٔ ریشه‌ها مضاعف است.

$5)\ \text{Cos}x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \quad ,k \in Z$

همهٔ ریشه‌ها مضاعف است.

$6)\ \text{Cos}x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \quad ,k \in Z$

همهٔ ریشه‌ها مضاعف است.

$$7)\begin{cases} \tan x = 1 \\ \text{یا} \\ \text{Cot}x = 1 \end{cases} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad ,k \in Z$$

$$8)\begin{cases} \tan x = -1 \\ \text{یا} \\ \text{Cot}x = -1 \end{cases} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \quad ,k \in Z$$

مثال ۱: معادلهٔ $2\text{Sin}^2x - \sqrt{2}\text{Sin}x = 0$ را حل کنید و جواب‌های کلّی آن را بیابید.

حل:

$$2\text{Sin}^2x - \sqrt{2}\text{Sin}x = 0$$

$$2\text{Sin}x(\text{Sin}x - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$$

الف) $\text{Sin}x = 0 \Rightarrow x = k\pi \quad ,k \in Z$

ب) $\text{Sin}x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$$\text{Sin}x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{Sin}x = \text{Sin}\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} & ,k \in Z \\ x = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{4}) & ,k \in Z \end{cases}$$

مثـال ۲: معادلهٔ $2\text{Cos}^2x + \text{Cos}x = 0$ را حل کنید و جواب‌های کلّی آن را بیابید.

حل:

$$2\text{Cos}^2x + \text{Cos}x = 0$$

$$2\text{Cos}x(\text{Cos}x + \frac{1}{2}) = 0$$

الف) $\text{Cos}x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad ,k \in Z$

ب) $\text{Cos}x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \text{Cos}x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{Cos}x = -\text{Cos}\frac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow \text{Cos}x = \text{Cos}(\pi - \frac{\pi}{3})$$

$$\text{Cos}x = \text{Cos}\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad ,k \in Z$$

مثال ۳: معادلهٔ $\tan^2 x + \sqrt{3}\tan x = 0$ را حل کنید و جواب‌های کلّی آن را بیابید.

حل:

$$\tan^2 x + \sqrt{3}\tan x = 0 \Rightarrow \tan x(\tan x + \sqrt{3}) = 0$$

الف) $\tan x = 0 \Rightarrow x = k\pi \quad ,k \in Z$

ب) $\tan x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \tan x = -\sqrt{3} \Rightarrow \tan x = -\tan\frac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow \tan x = \tan(-\frac{\pi}{3}) \Rightarrow x = k\pi + (-\frac{\pi}{3}) \quad ,k \in Z$$

مثال ۴: معادلهٔ $3\text{Cot}^2x - \sqrt{3}\text{Cot}x = 0$ را حل کنید و جواب‌های کلّی آن را بیابید.

حل:

$$3\text{Cot}^2x - \sqrt{3}\text{Cot}x = 0 \Rightarrow 3\text{Cot}x(\text{Cot}x - \frac{\sqrt{3}}{3}) = 0$$

الف) $\text{Cot}x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad ,k \in Z$

ب) $\text{Cot}x - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0 \Rightarrow \text{Cot}x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\text{Cot}x = \text{Cot}\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3} \quad ,k \in Z$$

چند نکته دربارهٔ معادله‌های مثلثاتی

۱) برای حل هر معادلهٔ مثلثاتی به صورت $a\text{Sint}\,x + b\text{Cost}x = 0$، دو طرف معادله را بر Sintx یا Costx تقسیم‌می‌کنیم.

مثال: معادلهٔ $3\text{Sin}5x - \sqrt{3}\text{Cos}5x = 0$ را حل کنید و جواب‌های کلّی آن را بیابید.

حل:

$$3\text{Sin}5x - \sqrt{3}\text{Cos}5x = 0$$

دو طرف معادله را بر $\text{Cos}5x \neq 0$ تقسیم می‌کنیم.

سؤال: چرا Cos5x مخالف صفر است؟

جـواب: اگـر Cos5x، مسـاوی صفـر باشـد. آنـگاه، Sin5x برابر ۱ است، اگر این مورد را در معادله بررسی کنیم خواهیم داشت $3(1) - \sqrt{3}(0) = 0$ یا $3=0$ که غیرممکن است.

حال حل معادله را پی می‌گیریم.

$$\frac{3\text{Sin}5x}{\text{Cos}5x} - \frac{\sqrt{3}\text{Cos}5x}{\text{Cos}5x} = 0$$

$$\Rightarrow 3\tan 5x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow 3\tan 5x = \sqrt{3} \Rightarrow \tan 5x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \tan 5x = \tan\frac{\pi}{6} \Rightarrow 5x = k\pi + \frac{\pi}{6} \quad ,k \in Z$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{5} + \frac{\pi}{30} \quad ,k \in Z$$

۲) معادله‌هایی که دو طرف آن‌ها به دو نسـبت مثلثاتی همنام تبدیل می‌شوند.

برای حل هر معادلهٔ مثلثاتی به صورت $a\text{Sin}x+b\text{Cost}x = 0$، دو طرف معادله را بر Sintx یا Costx تقسیم می‌کنیم

مثـــال: معادلـهٔ $\text{Cos}(4x+\frac{\pi}{4})+\text{Sin}2x=0$ را حـل کنیـد و جواب‌های کلّی آن را بیابید.

حل: $\text{Cos}(4x+\frac{\pi}{4})=-\text{Sin}2x$

حال باید ($-\text{Sin}2x$) را به کسینوس کمانی تبدیل کنیم؛ داریم:

$$\text{Cos}(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\text{Sin}\alpha \Rightarrow \text{Cos}(\frac{\pi}{2}+2x)=-\text{Sin}2x$$

در معادله قرار می‌دهیم.

$$\text{Cos}(\underbrace{4x+\frac{\pi}{4}}_{X})=\text{Cos}(\underbrace{\frac{\pi}{2}+2x}_{\alpha})$$

الف) $X=2k\pi+\alpha \Rightarrow 4x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}+2x$

$$\Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} \Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{8}\quad ,k\in Z$$

ب) $X=2k\pi-\alpha \Rightarrow 4x+\frac{\pi}{4}=2k\pi-\frac{\pi}{2}-2x$

$$\Rightarrow 6x=2k\pi-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} \Rightarrow 6x=2k\pi-\frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x=\frac{k\pi}{3}-\frac{\pi}{8}\quad ,k\in Z$$

۳) معادله‌هایی که به کمک فاکتورگیری از راه دسته‌بندی قابل حلّ‌اند.

مثـــال: معادلهٔ $4\text{Sinx}.\text{Cosx}-2\sqrt{2}\text{Cosx}-2\text{Sinx}+\sqrt{2}=0$ را حل کنید و جواب‌های کلّی آن را بیابید.

حل:

$$4\text{Sinx}.\text{Cosx}-2\sqrt{2}\text{Cosx}-2\text{Sinx}+\sqrt{2}=0$$

$$2\text{Cosx}(2\text{Sinx}-\sqrt{2})-(2\text{Sinx}-\sqrt{2})=0$$

$$(2\text{Sinx}-\sqrt{2})(2\text{Cosx}-1)=0$$

الف) $2\text{Sinx}-\sqrt{2}=0 \Rightarrow 2\text{Sinx}=\sqrt{2} \Rightarrow \text{Sinx}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow \text{Sinx}=\text{Sin}\frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{4} & ,k\in Z \\ x=2k\pi+(\pi-\frac{\pi}{4}) & ,k\in Z \end{cases}$$

ب) $2\text{Cosx}-1=0 \Rightarrow 2\text{Cosx}=1 \Rightarrow \text{Cosx}=\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \text{Cosx}=\text{Cos}\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\quad ,k\in Z$$

۴) معادله‌هایی کـه به کمک تبدیل به معادلهٔ درجهٔ دوم قابل حلّ‌اند.

مثـــال ۱: معادلـهٔ $\text{Cos}2x+5\text{Sinx}-4=0$ را حل کنید و جواب‌های کلّی آن را بیابید.

حل:

داریم : $\text{Cos}2x=1-2\text{Sin}^2x$

$$\text{Cos}2x+5\text{Sinx}-4=0$$

$$\Rightarrow 1-2\text{Sin}^2x+5\text{Sinx}-4=0$$

$-2\text{Sin}^2x+5\text{Sinx}-3=0$ یا

$$+2\text{Sin}^2x-5\text{Sinx}+3=0$$

حال فرض می‌کنیم y=sinx، مسلّماً: $-1\le y\le 1$

$$\Rightarrow 2y^2-5y+3=0 \quad \begin{cases} a=2 \\ b=-5 \quad a+b+c=0 \\ c=3 \end{cases}$$

در این معادلهٔ درجه دوم، مجموع ضرایب صفر اســت، پس یک ریشهٔ این معادله عدد ۱ و ریشهٔ دیگر برابر $(\frac{c}{a})$ است.

$$\Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=\frac{c}{a}=\frac{3}{2} \end{cases}$$

با توجه به شرط $-1\le y\le 1$، پس $y=\frac{3}{2}$ غیرممکن است.

بنابراین جواب قابل قبول y=1 است.

$$y=1 \Rightarrow \text{Sinx}=1 \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\quad ,k\in Z$$

مثـــال ۲: معادلهٔ $4\text{Cos}^2x-2(\sqrt{2}+1)\text{Cosx}+\sqrt{2}=0$ را حل کنید و جواب‌های کلّی آن را بیابید.

حل: فرض می‌کنیم y=Cosx، مسلماً $-1\le y\le 1$

$$\Rightarrow 4y^2-2(\sqrt{2}+1)y+\sqrt{2}=0$$

$$\begin{cases} a=6 \\ b=-2(\sqrt{2}+1),\ b'=-(\sqrt{2}+1) \\ c=\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Delta'=b'^2-ac=(\sqrt{2}+1)^2-4\sqrt{2}$$

$$\Delta'=2+1+2\sqrt{2}-4\sqrt{2}=2+1-2\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^2$$

$$y=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{(\sqrt{2}+1)\pm\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}}{4}=\frac{\sqrt{2}+1\pm(\sqrt{2}-1)}{4}$$

(الف) $y_1 = \frac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(ب) $y_2 = \frac{\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)}{4} = \frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

در نتیجه:

$$\begin{cases} Cosx = y_{11} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ Cosx = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow Cosx = Cos\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}, k \in Z \end{cases}$$

و $Cosx = y_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow Cosx = Cos\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}\ , k \in Z$

۵) معادله‌هایی که کمان‌های متمم دارند، قابل حل‌اند:

یعنی: معادله‌های مثلثاتی که شامل سینوس و کسینوس یا شامل تانژانت و کتانژانت باشند و مجموع کمان‌های آن‌ها برابر $\frac{\pi}{2}$ باشد، قابل حل‌اند.

مثال: معادلهٔ $Sin^2(x-\frac{\pi}{12}) + 2Cos(\frac{7\pi}{12}-x) - 3 = 0$ را حل کنید و جواب‌های کلّی آن را بیابید.

حل:

$(x-\frac{\pi}{12}) + (\frac{7\pi}{12}-x) = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{12} = \frac{6\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$

پس دو کمان $(x-\frac{\pi}{12})$ و $(\frac{7\pi}{12}-x)$ متمم یکدیگرند و سینوس یکی برابر کسینوس دیگری است. پس:

$Sin^2(x-\frac{\pi}{12}) + 2Cos(\frac{7\pi}{12}-x) - 3 = 0$

$Sin^2(x-\frac{\pi}{12}) + 2Sin\left[\frac{\pi}{2} - (\frac{7\pi}{12}-x)\right] - 3 = 0$

$Sin^2(x-\frac{\pi}{12}) + 2Sin(x-\frac{\pi}{12}) - 3 = 0$

فرض می‌کنیم $y = Sin(x-\frac{\pi}{12})$، مسلماً $-1 \le y \le 1$

$$y^2 + 2y - 3 = 0 \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -3 \end{cases}$$

در این معادلهٔ درجه دوم، مجموع ضرایب صفر است، پس:

$$\begin{cases} y_1 = 1 \Rightarrow Sin(x-\frac{\pi}{12}) = 1 \\ y_2 = -3 \quad \text{که غیرممکن است} \end{cases}$$

$Sin(x-\frac{\pi}{12}) = 1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{12} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}\ , k \in Z$

$\Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{7\pi}{12}\ , k \in Z$

۶) معادله‌هایی که به کمک فرمول‌های تبدیل مجموع به حاصل‌ضرب قابل حل‌اند.

مثال: معادلهٔ $Sin5x - Sin3x + Sinx = 0$ را حل کنید و جواب‌های کلّی آن را بیابید.

حل: داریم:

$Sinp + Sinq = 2Sin\frac{p+q}{2}Cos\frac{p-q}{2}$

$\Rightarrow Sin5x + Sinx = 2Sin\frac{5x+x}{2}.Cos\frac{5x-x}{2}$

$= 2Sin3x.Cos2x$

$\underbrace{Sin5x + Sinx} - Sin3x = 0$

$2Sin3x.Cos2x - Sin3x = 0$

$Sin3x(2Cos2x - 1) = 0$

(الف) $Sin3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}\ , k \in Z$

(ب) $2Cos2x - 1 = 0 \Rightarrow Cos2x = \frac{1}{2}$

$Cos2x = Cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}, k \in Z$

۷) معادله‌هایی که به کمک تبدیل حاصل‌ضرب به حاصل‌جمع قابل حلّ‌اند.

مثال: معادلهٔ $2Sin\frac{5x}{2}.Cos\frac{x}{2} = Sin2x$ را حل کنید و جواب‌های کلّی آن را بیابید.

حل: داریم:

$2Sin\alpha.Cos\beta = Sin(\alpha+\beta) + Sin(\alpha-\beta)$

$\Rightarrow 2Sin\frac{5x}{2}.Cos\frac{x}{2} = Sin(\frac{5x}{2}+\frac{x}{2}) + Sin(\frac{5x}{2}-\frac{x}{2})$

$2Sin\frac{5x}{2}.Cos\frac{x}{2} = Sin3x + Sin2x$

در معادله قرار می‌دهیم:

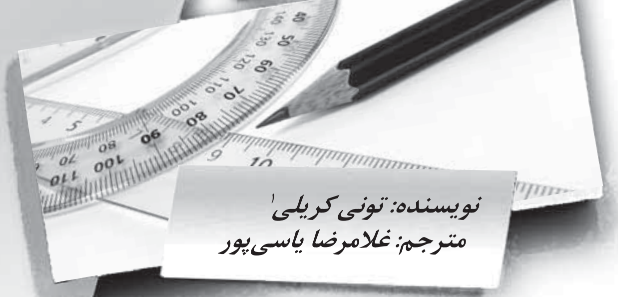
$2Sin\frac{5x}{2}.Cos\frac{x}{2} = Sin2x$

$Sin3x + Sin2x = Sin2x$

$\Rightarrow Sin3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}\ , k \in Z$

معادله‌هایی که کمان‌های متمم دارند، قابل حل‌اند: یعنی: معادله‌های مثلثاتی که شامل سینوس و کسینوس یا شامل تانژانت و کتانژانت باشند و مجموع کمان‌های آن‌ها برابر $\frac{\pi}{2}$ باشد، قابل حل‌اند

ترسیمات هندسی ۱



نویسنده: تونی کریلی[1]
مترجم: غلامرضا یاسی‌پور

اشاره

اثبات منفی اغلب مشــکل است، اما پاره‌ای از بزرگ‌ترین موفقیت‌ها در ریاضیات درســت از همین روش ناشــی شــده‌اند. ایــن بدان معناســت که اثبات کــردن مطلبی امکان‌پذیر نیست. تربیع دایره کاری ناممکن است، اما چگونه می‌توان آن را ثابت کرد؟

کلیدواژه‌ها: تثلیث زاویه، تضعیف مکعب، تربیع دایره، کثیرالاضلاع.

یونانیان باستان، چهار مسئلهٔ ترسیمی مهم داشتند:

- تثلیث زاویه[2] (یعنی تقسیم یک زاویه به سه زاویهٔ کوچک‌تر برابر)؛
- تضعیف مکعب[3] (یعنی ســاختن مکعبی با دو برابر حجم مکعب اول)؛
- تربیع دایره[4] (یعنی ایجاد مربعی با مســاحت برابر با سطح دایره‌ای معین)؛
- ترسـیم کثیرالاضلاع‌ها[5] (یعنی ساختن اشکال منتظم با اضلاع و زوایای مساوی).

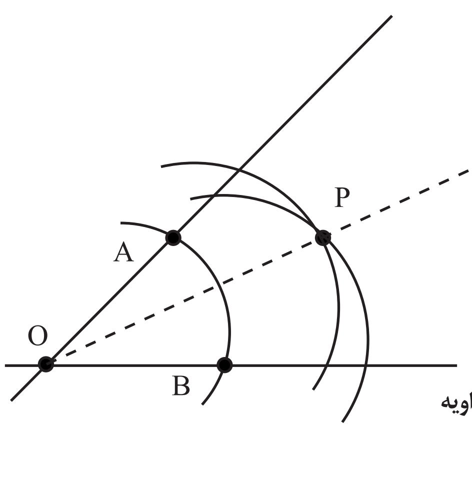
آن‌ها برای انجام این امور، تنها از دو وســیلهٔ اساســی استفاده می‌کردند:

- خط‌کش نامدرّج، برای ترسـیم خطوط مستقیم (و به‌طور قطع نه برای اندازه‌گیری طول‌ها)؛
- پرگار، برای ترسیم دوایر.

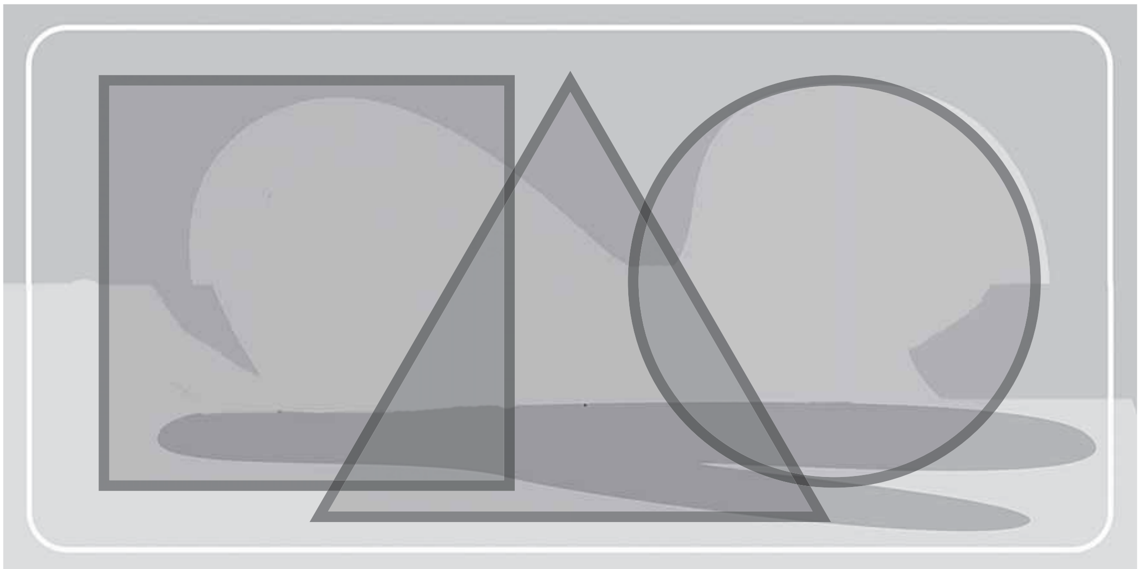
اگر شما مایل به کوهنوردی، بدون طناب، اکسیژن، تلفن همراه و ســایر ملزومات باشید، بی‌شک، این مسائل دارای جاذبه خواهند شــد، زیرا بدون تجهیزات اندازه‌گیری مدرن، روش‌های لازم برای اثبات این نتایج پیچیده بودند و مسائل ترسیمی کلاسیک باستانی مزبور، تنها در قرن نوزدهم و با استفاده از روش‌های آنالیز مدرن[6] و جبر مجّرد[7] حل شدند.

تثلیث‌زاویه

برای تقسیم یک زاویه به دو زاویهٔ کوچک‌تر مساوی، یا به عبارت دیگر، تنصیف یا نصــف کردن آن به طریق زیر عمل می‌کنیم. ابتدا نــوک پرگار را در O می‌گذاریم، و با شــعاع دلخــواه OA و OB را مشخص می‌کنیم. با قراردادن نوک پرگار در A، قسمتی از یک دایره را رســم می‌کنیم. همیــن کار را در B انجام می‌دهیم. نقطهٔ تقاطع این دوایر را با P مشخص می‌کنیم و با لبهٔ مستقیم (یعنی خط‌کش نامــدرج) O را به P وصل می‌کنیم. مثلث‌هــای AOP و BOP در شکل حاصل همنهشتند، بنابراین زوایای $A\hat{O}P$ و $B\hat{O}P$ مساوی می‌شوند. در این صورت، خط OP نیمساز مطلوب است و زاویه را به دو زاویهٔ مساوی تقسیم می‌کند.



تنصیف زاویه



اما آیا می‌توانیم عملیات مشابه آن را انجام دهیم و زاویه‌ای دلخواه را به سه زاویهٔ مساوی تقسیم کنیم؟ این همان مسئلهٔ تثلیث زاویه است.

اگر زاویه‌مان ۹۰ درجه، یعنی زاویهٔ قائمه باشد، مشکلی وجود نخواهد داشت، زیرا زاویهٔ ۳۰ درجه را می‌توان ترسیم کرد. اما اگر برای نمونه زاویهٔ ۶۰ درجه را اختیار کنیم،این زاویه را نمی‌توان به سه قسمت مساوی تقسیم کرد. در این مورد، گرچه می‌دانیم پاسخ ۲۰ درجه است، اما هیچ طریقی برای رسم این زاویه، تنها به کمک لبهٔ مستقیم و پرگار، موجود نیست. بنابراین به‌طور خلاصه:

- می‌توان همهٔ زوایا را در همهٔ احوال نصف کرد.
- می‌توان پاره‌ای از زوایا را در همهٔ احوال به سه قسمت مساوی تقسیم کرد، اما
- هیچ‌گاه نمی‌توان پاره‌ای از زوایا را تثلیث کرد.

تضعیف مکعب، مسئله‌ای مشابه، معروف به مسئلهٔ دلیان[۸] است. داستان به بومیان دلوس[۹] در یونان برمی‌گردد که با اوراکل[۱۰] پیشگوی معبد، دربارهٔ طاعونی که به آن مبتلا بودند، رأی زدند. به آن‌ها گفته شد محرابی با حجمی دو برابر محراب موجود بسازند.

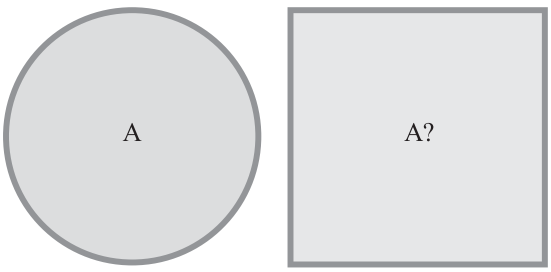
فرض می‌کنیم محراب دلیان به صورت مکعبی با جمیع اضلاع برابر در طول مثلاً a بنا شده باشد. بنابراین، آن‌ها نیاز به ساختن مکعبی دیگر به طول b با حجمی دو برابر حجم آن دارند. حجم هر یک از آن‌ها a^3 و b^3 است، که با $b^3=2a^3$ یا $b=\sqrt[3]{2}\times a$ مرتبط است. در این رابطه $\sqrt[3]{2}$ عددی است که چون سه بار در خودش ضرب شود ۲ را به دست می‌دهد (ریشهٔ سوم یا کعب[۱۱]). در صورتی که ضلع مکعب اصلی $a=1$ می‌بود، بومیان دلیان مجبور بودند طول $\sqrt[3]{2}$ را روی یک خط مشخص کنند. متأسفانه از لحاظ ایشان، این کار با لبهٔ مستقیم و پرگار، بی‌توجه به اینکه چه مقدار خلاقیت و ابتکار در مورد ساختمان جدید به‌کار می‌برند، غیرممکن است.

تربیع دایره

این مسئله اندکی متفاوت است و معروف‌ترین مسئلهٔ ترسیماتی به‌شمار می‌رود. این مسئله با موضوع زیر معادل است:

ساختن مربعی که سطح آن برابر سطح دایره‌ای مفروض باشد.

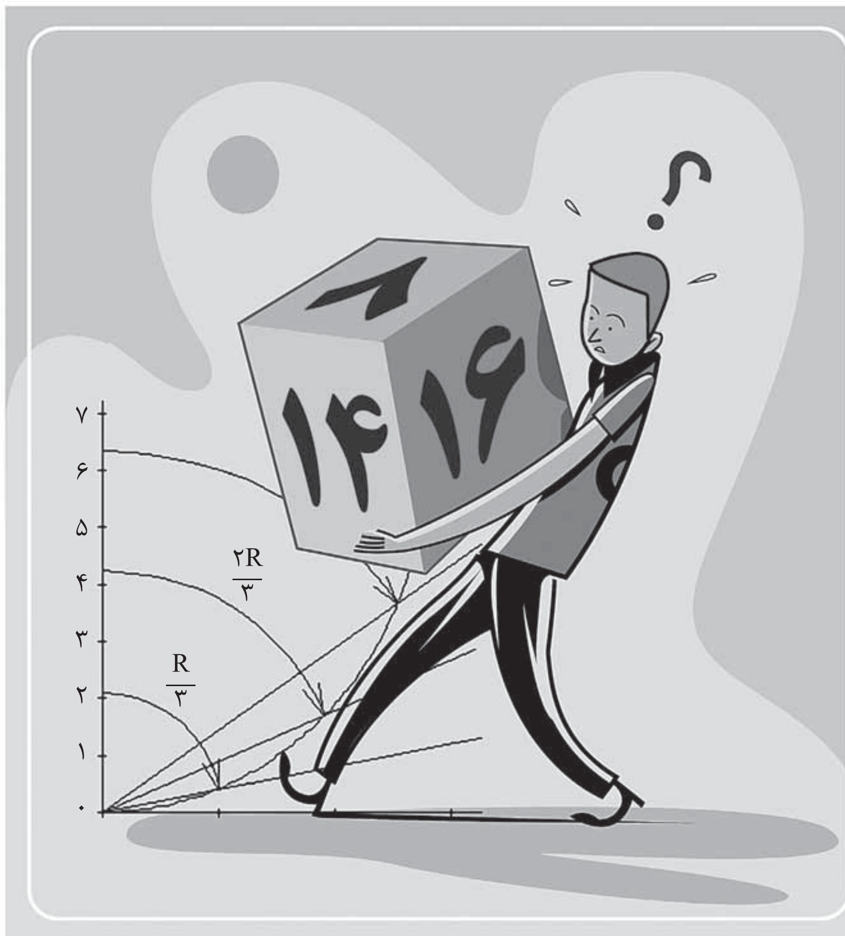
می‌توان پاره‌ای از زوایا را در همهٔ احوال به سه قسمت مساوی تقسیم کرد



تربیع دایره

عبارت تربیع دایره عموماً برای بیان غیرممکن بودن به‌کار می‌رود. معادلهٔ جبری $x^2-2=0$ دارای جواب‌های مشخص $x=\sqrt{2}$ و $x=-\sqrt{2}$ است. این اعداد، اعدادی گنگ‌اند (یعنی نمی‌توانند به صورت کسر نوشته شوند)، اما نشان دادن اینکه دایره نمی‌تواند تربیع شود به نشان دادن این مطلب می‌انجامد که π نمی‌تواند جواب هیچ معادلهٔ جبری باشد. اعداد گنگ با این ویژگی، اعداد متعالی[۱۲] نامیده می‌شوند، زیرا گنگیِ «بالاتر»ی از عموزاده‌های گنگشان نظیر $\sqrt{2}$ دارند.

ریاضی‌دان‌ها عموماً عقیده داشتند که π متعالی است، اما اثبات این «معمای روزگاران» تا زمانی که فردیناند فون لیندمان[۱۳] تعدیلی از تکنیک پیشرفتهٔ شارل هرمیت[۱۴] را به‌کار نبرد، مشکل به نظر می‌رسید.



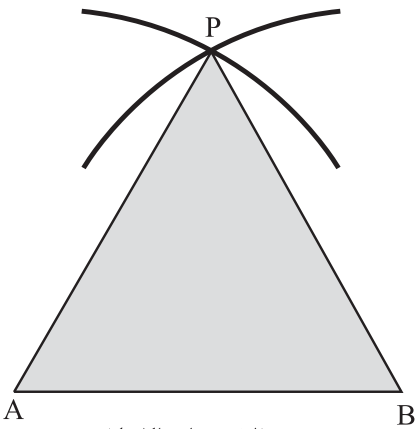
تکنیک مزبور را هرمیت برای اثبات آسان‌تر این موضوع به‌کار بـرده بود که پایه یا مبنای لگاریتم‌های طبیعی، یعنی e، متعالی است.

بعد از دســتاورد لیندمان، ممکن است فکر کنیم که جریان مقالات گــروه تزلزل‌ناپذیر «دایره ـ مربعیــان» بند آمد. اما اصلاً این‌طور نشــد، زیرا هنوز افرادی آویزان در حاشیهٔ ریاضیات بودند که از قبول منطق اثبات مزبور کراهت داشــتند و نیز کســانی که هرگز سخنی دربارهٔ آن به گوششان نخورده بود.

ترسیم کثیرالاضلاع‌ها

مسئلهٔ چگونگی رســم کثیرالاضلاع یا چندضلعی منتظم را اقلیدس مطرح کرد. این چندضلعی، شکلی متقارن مانند مربع یا پنج‌ضلعی منتظم اســت که در آن، طول تمام ضلع‌ها با هم برابر اســت و اضلاع مجاور، زوایای برابر با یکدیگر می‌ســازند. اقلیدس در اثر مشــهورش، مقدمات[15] (کتاب ۴) نشان می‌دهد که چگونه می‌توان ۳، ۴، ۵ و ۶ ضلعی منتظم را تنها با دو ابزار مبنایی مورد بحث ترسیم کرد.

ترسیم سه ضلعی منتظم، که معمولاً مثلث متساوی‌الاضلاع نامیده می‌شــود، به‌خصوص، آســان اســت. اندازه‌ای را که برای مثلثتان می‌خواهید بر نقطهٔ A و ســپس B، با فاصلهٔ مطلوب در بین آن‌ها مشخص کنید. نوک پرگار را در A قرار دهید و قسمتی از دایره به شــعاع AB را رســم کنید. این‌کار را با قرار دادن نوک پرگار در B و به‌کار بردن همان شــعاع، تکرار کنید. نقطهٔ تقاطع این دو کمان در P اســت. از آنجا که AP=AB و BP=AB، هر ســه ضلع مثلث APB برابرند. در این صورت، مثلث با وصل BP، AP، AB، با استفاده از لبهٔ مستقیم، کامل می‌شود.



ترسیم مثلث متساوی‌الاضلاع

اگر در این فکرید که داشتن لبهٔ مستقیم، وسیله‌ای تجملی به نظر می‌رسد، در این اندیشه تنها نیستید؛ دِین گئورگ‌مور[16] نیز چنین می‌اندیشید؛

زیــرا مثلــث متســاوی‌الاضلاع مورد بحــث، با یافتــن نقطهٔ P رســم شــده اســت و برای این نقطه تنها به پرگار نیاز داریم. لبهٔ مســتقیم تنها برای آنکه به‌طور عینی[17] نقــاط را به هم وصل کند، به‌کار رفته اســت. مور نشــان داد که هر ترســیم به‌دست‌آمدنی از لبهٔ مســتقیم و پرگار را می‌توان با پرگار تنها به دســت آورد. لورنزو ماچرونی[18] ایتالیایی نیز، ۱۲۵ ســال بعد، همیــن نتایج را به اثبات رســاند. ویژگی جالب کتاب ۱۷۹۷ وی به نام هندسهٔ پرگاری[19]، که به ناپلئون تقدیم شــده بود، در این اســت که آن را به نظم نوشــته است.

در مسئلهٔ عمومی، به‌خصوص چندضلعی‌های با p ضلع، که در آن p عددی اول است، دارای اهمیت‌اند. قبلاً ۳ ضلعی منتظم را رسم کردیم. اقلیدس نیز ۵ ضلعی منتظم را رسم کرد، اما نتوانست ۷ ضلعی منتظم را رسم کند. کارل فردریش گاوس[20]، ۱۷ ساله، در تحقیق این مسئله، راه‌حل منفی آن را اثبات کرد، یعنی نتیجه گرفت که ترسیم

p ضلعی منتظم به ازای

$p = ۷ , ۱۱$ یا ۱۳

غیرممکن است.

گاوس، اما راه‌حل مثبتی نیز به اثبات رساند و نتیجه گرفت که ترسیم ۱۷ ضلعی منتظم امکان‌پذیر است. وی در این مورد عملاً پیش‌تر رفت و ثابت کرد که p ضلعی منتظم ترسیم‌پذیر است، اگر و تنها اگر عدد اول p به صورت زیر باشد:

$$p = ۲^{۲^n} + ۱$$

اعدادی به این صورت، به اعداد فِرما[21] موسوم‌اند. اگر آن‌ها را به ازای

$$n = ۰,۱,۲,۳,۴$$

محاسبه کنیم، درمی‌یابیم که برابر اعداد اول زیرند:

$$p = ۳,۵,۱۷,۲۵۷,۶۵۵۳۷$$

که نظیر چندضلعی منتظم با p ضلع ترسیم‌پذیرند.

در این مورد، چون n=۵ را بررسی کنیم، عدد فرما عبارت است از:

$$p = ۲^{۳۲} + ۱ = ۴,۲۹۴,۹۶۷,۲۹۷$$

پی‌یِر دو فرما[22] حدس زده بود که این اعداد همه اول‌اند، اما متأسفانه این یکی اول نیست، زیرا:

$$۴,۲۹۴,۹۶۷,۲۹۷ = ۶۴۱ \times ۶,۷۰۰,۴۱۷$$

اگر در این فرمول، n را برابر ۶ یا ۷ قرار دهیم، نتیجه‌ها اعداد فرمای عظیمی هستند که مانند حالت ۵، هیچ یک اول نیستند.

آیا هیچ‌یک از اعداد دیگر فِرما اول هستند؟ خرد متعارف در این است که چنین نیستند، اما هیچ‌کس به اطمینان نمی‌داند.

چند تاریخچه

۴۵۰ قبل از میلاد: آناکسو گوراس[25]، زمانی که در زندان بود، در تربیع دایره کوشید.

۱۶۷۲ میلادی: مور ثابت کرد که همهٔ ترسیمات اقلیدسی را می‌توان به تنهایی با پرگار انجام داد.

۱۸۰۱ میلادی: گاوس مقالاتی در حساب[26] از جمله بخشی در مورد ترسیم ۱۷ ضلعی منتظم با خط‌کش نامدرج و پرگار منتشر کرد.

۱۸۳۷ میلادی: وانتزل[27] ثابت کرد که مسائل کلاسیک تضعیف مکعب و تثلیث زاویه را نمی‌توان با خط‌کش و پرگار حل کرد.

۱۸۸۲ میلادی: لیندمان ثابت کرد که دایره را نمی‌توان تربیع کرد.

شاهزاده‌ای متولد می‌شود

کارل فردریش گاوس[23] به قدری از دستاوردش، که نشان می‌داد ۱۷ ضلعی منتظم را می‌توان رسم کرد، تحت تأثیر قرار گرفت که تصمیم گرفت مطالعهٔ زبان‌ها را که در برنامه داشت کنار نهد و ریاضی‌دان شود، مابقی تاریخ است، زیرا او به عنوان «شاهزادهٔ ریاضی‌دان‌ها» شناخته شد. ۱۷ ضلعی منتظم، شکل پایهٔ یادبودش در گوتینگن[24]، آلمان، تجلیلی مناسب از نبوغ اوست.

پی‌نوشت..........................

1. Tony Crilly
2. trisecting the angle
3. doubling the cube
4. squaring the circle
5. constructing polygons
6. modern analysis
7. abstract algebra
8. Delian problem
9. Delos
10. oracle
11. cube root
12. transcendental numbers
13. Ferdinand von Lindemann
14. Charles Hermite
15. Elements
16. Dane Georg Mohr
17. physically
18. Lorenzo Mascheroni
19. Geometrica del Compasso
20. Carl Friederich Gau
21. Fermat numbers
22. Pierre de Fermat
23. Carl Friedrich Gaus
24. Göttingen
25. Anaxogoras
26. Discourses on Arithmetic
27. Wantzel

سهمی

برای دانش‌آموزان سال دوم و سوم متوسطه

سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

کلیدواژه‌ها:
سهمی، نقطه‌یابی، جدول متغیرها، دستگاه مختصات، خط، محور تقارن، نمودار منحنی، رأس سهمی، نقطهٔ ماکزیمم، نقطهٔ می‌نیمم، ریشهٔ معادله، نقطهٔ تماس، مختصات نقطه، سهمی قائم، سهمی افقی.

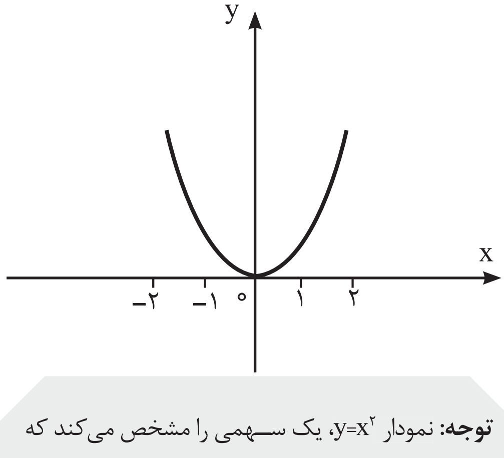
با رسم نمودار $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ به روش نقطه‌یابی آشنا هستید. در این‌جا برای یادآوری این مطلب چند مثال می‌آوریم.

مثال ۱: نمودار $y=x^2$ را رسم کنید.

حل: برای رسم نمودار، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

x	...	−۲	−۱	۰	۱	۲	۳	...
$y=x^2$	...	۴	۱	۰	۱	۴	۹	...

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید به x مقادیر مختلفی داده شده و برای y (یا x^2) به ترتیب مقادیری به دست آمده است که هر نقطه مانند (x_1, y_1)، مشخص کنندهٔ یک نقطه از منحنی $y=x^2$ است. در صورتی‌که نقاط بیش‌تری را مشخص کنیم، از وصل این نقاط، نمودار منحنی مطابق شکل زیر رسم می‌شود (دستگاه مختصات):



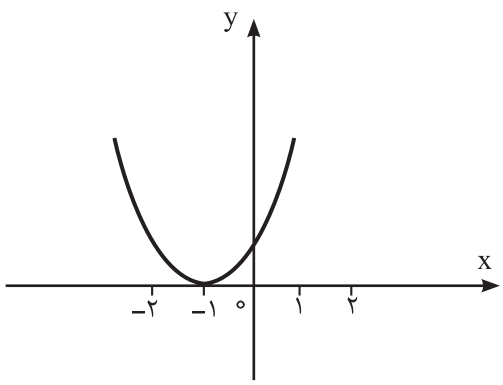
توجه: نمودار $y=x^2$، یک سهمی را مشخص می‌کند که نسبت به محور yها متقارن است، یعنی خط $x=0$، محور تقارن نمودار است.

مثال ۲: نمودار $y=(x+1)^2$ را رسم کنید.

حل: برای رسم نمودار، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

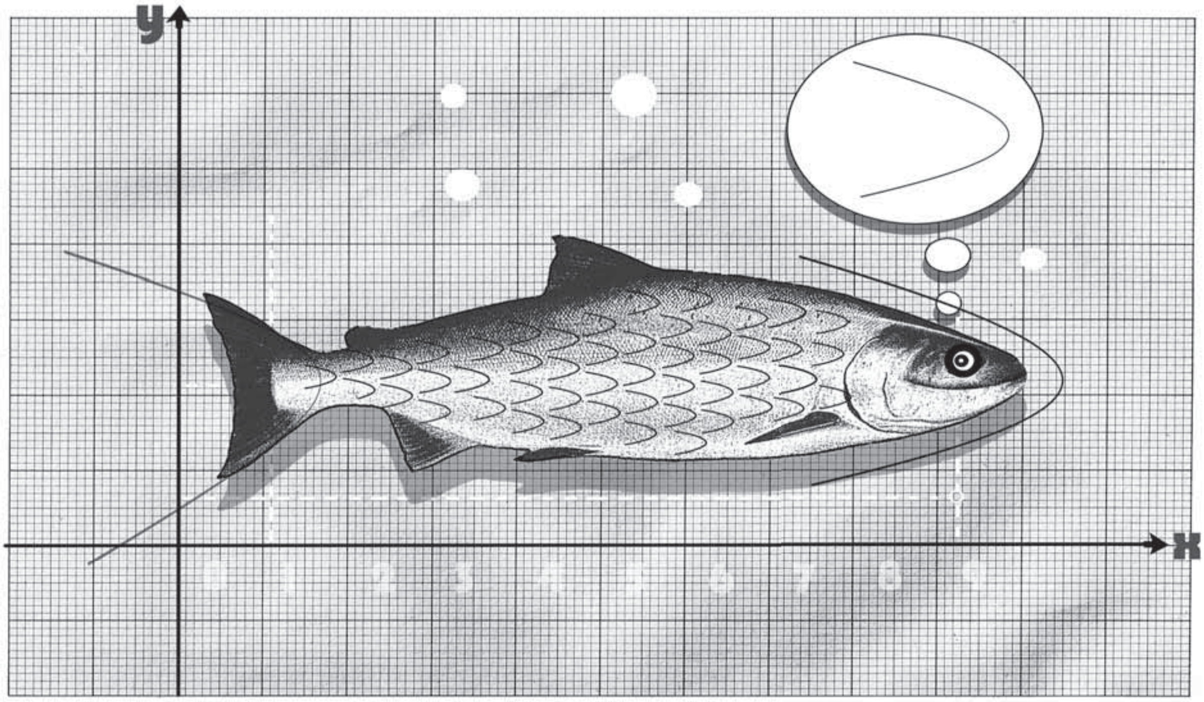
x	...	−۲	−۱	۰	۱	۲	...
$y=(x+1)^2$	...	۱	۰	۱	۴	۹	...

با توجه به جدول و مقادیر مختلف دیگری که به x می‌دهیم، نمودار منحنی مطابق شکل زیر رسم خواهد شد.



همان‌طور که مشاهده می‌شود، این نمودار، نظیر نمودار $y=x^2$ است. این نوع نمودارها را **سهمی** می‌نامند.

در نمودار (۱) نقطهٔ (۰ , ۰) و در نمودار (۲) نقطهٔ (۰ , ۱−) را **رأس سهمی** می‌نامند. با توجه به نمودارها، ملاحظه می‌شود که این نمودارها به ترتیب در (۰ , ۰) و (۰,۱−) بر محور



xها مماس‌اند. واضح است که خط ۱-=x، محور تقارن نمودار $y=(x+1)^2$ است. بدیهی است که با تعیین محور تقارن سهمی $y=ax^2+bx+c$ و دو نقطهٔ متقارن دیگر (نسبت به محور تقارن) می‌توان نمودار را مشخص کرد.

مثال ۳: نمودار سهمی $y=x^2-4x+5$ را رسم کنید.

حل: برای رسم نمودار سهمی، ابتدا محور تقارن منحنی را تعیین می‌کنیم:

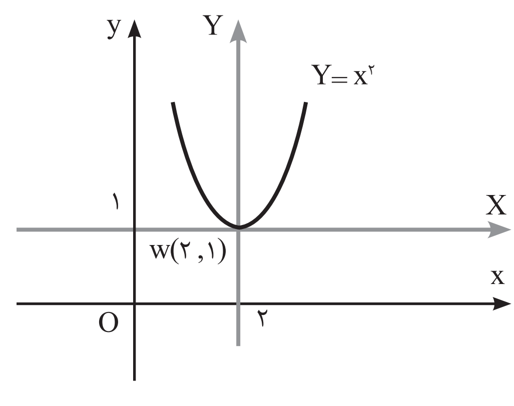
$$y=x^2-4x+5=(x^2-4x+4)+1=(x-2)^2+1;$$

$$y-1=(x-2)^2 \qquad (1)$$

در این‌جا، با فرض $X=x-2$ و $Y=y-1$:

$$Y=X^2 \qquad (2)$$

بنابراین اگر مبدأ دستگاه xoy را به نقطهٔ w(۲,۱) منتقل کنیم. در دستگاه جدید، کافی است منحنی $Y=X^2$ را که بسیار ساده و مشخص است، رسم کنیم:



با توجه به نمودار (۳)، رأس سهمی و محور تقارن آن به سادگی تعیین می‌شوند:

x=۲ (محور تقارن) و S(۲,۱) (رأس سهمی)

در این‌جا، با توجه به مثال (۳)، رسم نمودار سهمی به معادلهٔ عمومی زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$y=(x-\alpha)^2+\beta \qquad (1)$$

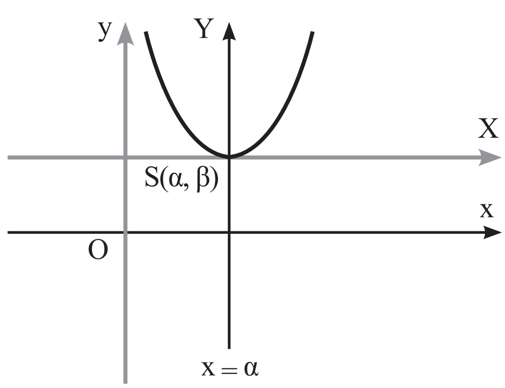
برای رسم نمودار منحنی به معادلهٔ (۱) یا $y-\beta=(x-\alpha)^2$، فرض می‌کنیم:

$$X=x-\alpha, Y=y-\beta \qquad (2)$$

بنابراین، معادلهٔ (۱) را می‌توان به صورت ساده‌تر نوشت:

$$Y=X^2 \qquad (3)$$

در نتیجه اگر مبدأ دستگاه xoy را به نقطهٔ $S(\alpha,\beta)$ منتقل کنیم، در دستگاه جدید، کافی است منحنی به معادلهٔ (۳) را که نمودار آن مشخص است، رسم کنیم:

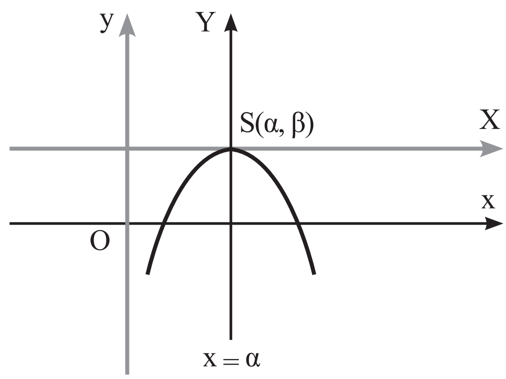


با توجه به نمودار (۴)، رأس سهمی و محور تقارن آن به سادگی تعیین می‌شوند:

$x=\alpha$ (محورتقارن) و $S(\alpha,\beta)$ (رأس سهمی)

گفتنی است که رأس سهمی (S) در نمودار (۴) از نظر عرض کم‌ترین مقدار را دارد. نقطهٔ S می‌نیمم سهمی است.

به همین ترتیب، رسم نمودار سهمی به معادلهٔ عمومی $y=-(x-\alpha)^{2}+\beta$ به‌صورت زیر است:



$x=\alpha$ (محورتقارن) و $S(\alpha,\beta)$ (رأس سهمی)

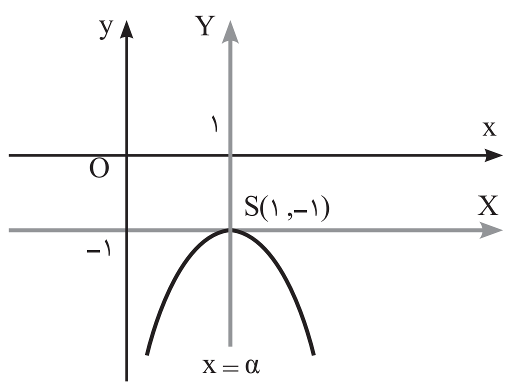
در نمودار (۵)، واضح است که رأس سهمی (S) از نظر عرض بیش‌ترین مقدار را دارد. نقطهٔ S ماکزیمم سهمی است.

مثال ۴: نمودار سهمی $y=-x^{2}+2x-2$ را رسم کنید.

حل: ابتدا معادلهٔ استاندارد سهمی را می‌نویسیم:

$$y=-x^{2}+2x-2=-(x^{2}-2x+1)-1=-(x-1)^{2}-1;$$

$$y+1=-(x-1)^{2},\quad S(1,-1)$$



حال نمودار سهمی به معادلهٔ عمومی زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$y=a(x-\alpha)^{2}+\beta \qquad (1)$$

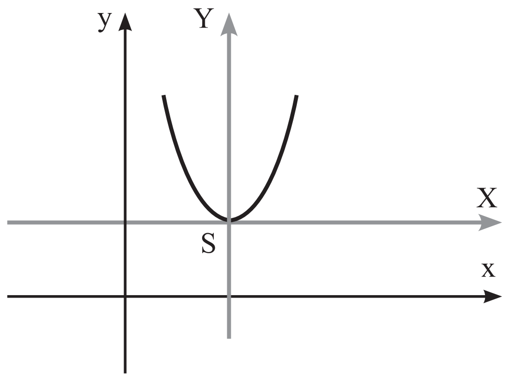
برای بررسی نمودار (۱)، دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت ۱) $a>0$:

$$y=a(x-\alpha)^{2}+\beta,\quad y-\beta=a(x-\alpha)^{2} \qquad (2)$$

چون $a>0$ فرض شده است، بنابراین نقطهٔ $S(\alpha,\beta)$ می‌نیمم سهمی است.

با فرض $X=x-\alpha$ و $Y=y-\beta$:

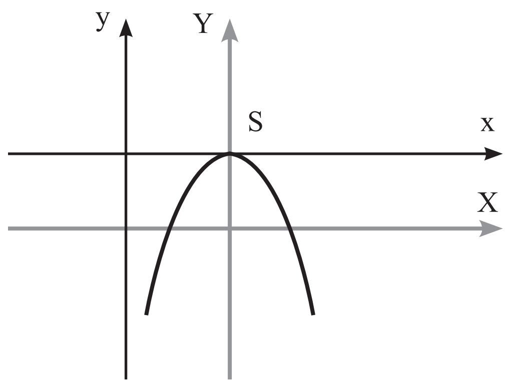


در این‌جا ضریب a فقط دو شاخهٔ سهمی را به هم نزدیک یا از هم دور می‌کند.

حالت ۲) $a<0$:

چون $a<0$ فرض شده است، بنابراین نقطهٔ $S(\alpha,\beta)$، ماکزیمم سهمی است.

نکته: برای رسم نمودار (۱) ابتدا رأس سهمی (نقطهٔ S) را تعیین می‌کنیم. سپس محور تقارن ($x=\alpha$) آن را تعیین و حداقل دو نقطهٔ متقارن نسبت به این خط را معین می‌کنیم.



در این‌جا با توجه به مطالب اخیر، نمودار سهمی به معادلهٔ عمومی زیر را در حالت کلی مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$y=ax^{2}+bx+c \qquad (1)$$

برای بررسی سهمی به معادلهٔ (۱)، ابتدا معادلهٔ آن را به صورت استاندارد:

$$y-\beta=k(x-\alpha)^{2} \qquad (2)$$

تبدیل می‌کنیم:

$$y=ax^{2}+bx+c=a(x^{2}+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})$$

$$= a\left[(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$
$$= a\left[(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$
$$= a(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$$

بنابراین:

$$y + \frac{b^2-4ac}{4a} = a(x+\frac{b}{2a})^2 \qquad (۳)$$

در این‌جا به کمک معادلهٔ (۳)، رأس و محور تقارن سـهمی به معادلهٔ (۱) را می‌نویسیم:

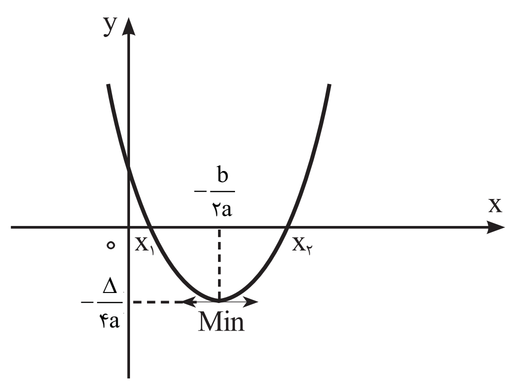
$x = -\frac{b}{2a}$ (محور تقارن) و $S(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a})$ (رأس سهمی)

برای سادگی، عبارت b^2-4ac را به Δ نشان می‌دهیم:

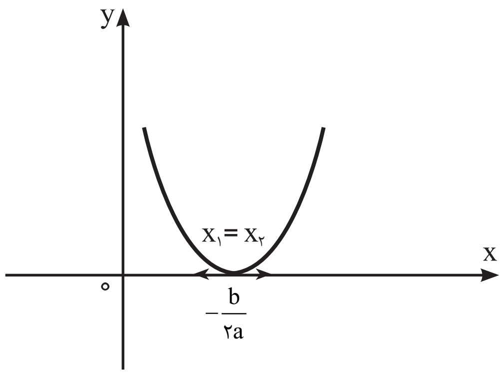
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

حال برای رسم نمودار (۱) یا (۳)، باید شش حالت کلی ممکن را در نظر گرفت:

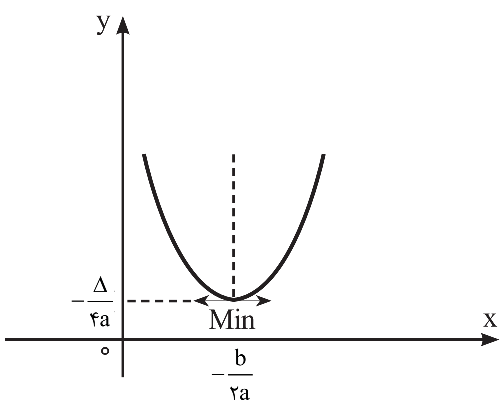
۱) $a>0$ و $\Delta>0$: در این حالت سهمی دارای می‌نیمم S است. و محور xها را در دو نقطهٔ x_1 و x_2 که ریشه‌های معادلهٔ ax^2+bx+c (y=۰) است، قطع می‌کند و نمودار آن مانند شکل زیر است:



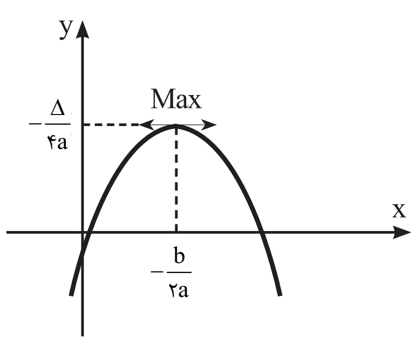
۲) $a>0$ و $\Delta=0$: در این حالت می‌نیمم سهمی (S) بر محور xها مماس است و طول نقطهٔ تماس از معادلهٔ y=۰ به‌دست می‌آید و نمودار آن مانند شکل زیراست:



۳) $a>0$ و $\Delta<0$: در این حالت می‌نیمم سهمی (S) بالای محور xها قرار دارد، معادلهٔ y=۰ ریشهٔ حقیقی ندارد و نمودار آن مانند شکل زیر است:

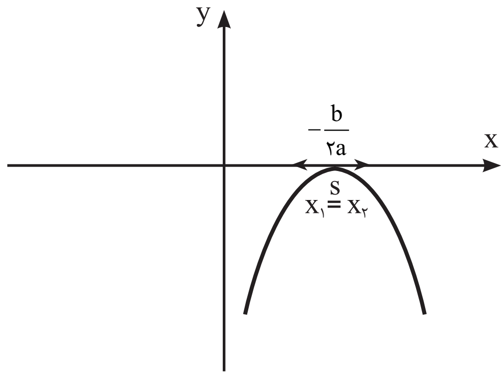


۴) $a<0$ و $\Delta>0$: در این حالت سهمی دارای ماکزیمم S است. و محور xها را در نقطه‌های x_1 و x_2 که ریشه‌های معادلهٔ y=۰ است، قطع می‌کند و نمودار آن مانند شکل زیر است:

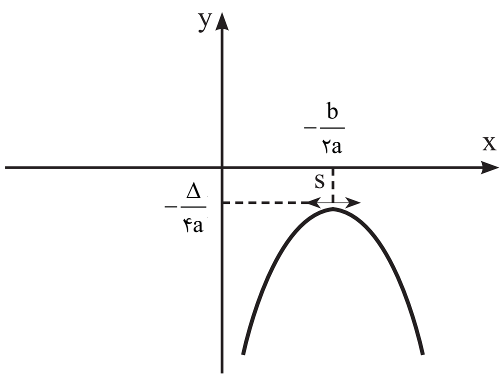


۵) $a<0$ و $\Delta=0$: در این حالت ماکزیمم سهمی (S) بر محور xها مماس است. و طول نقطهٔ تماس از معادلهٔ y=۰ به دست می‌آید و

نمودار آن مانند شکل زیر است:



۶) $a<0$ و $\Delta<0$: در این حالت ماکزیمم سهمی (S) پایین محور xها قرار دارد و معادلهٔ $y=0$ ریشهٔ حقیقی ندارد و نمودار آن مانند شکل زیر است:



مثال ۵: نمودار سهمی $y = x^2 - 3x + 2$ را رسم کنید.

حل: چون $a = 1 > 0$ و $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1 > 0$، بنابراین سهمی دارای می‌نیمم S است:

$x = \frac{3}{2}$ (محورتقارن) و $S(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ ؛ $S(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4})$ (رأس‌سهمی)

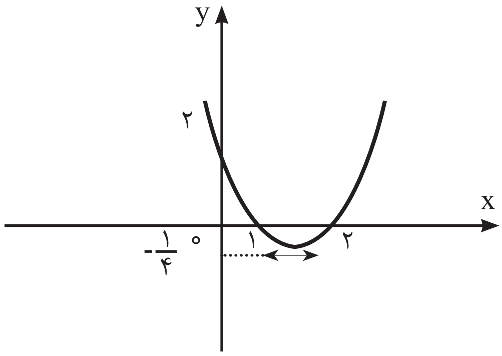
با در دست داشتن رأس سهمی و محور تقارن آن، به سادگی می‌توان نمودار سهمی مورد نظر را رسم کرد. برای دقت بیش‌تر در رسم نمودار، نقاط برخورد سهمی با **محورهای مختصات** را تعیین می‌کنیم:

$x = 0 : y = (0)^2 - 3(0) + 2 = 2; A(0,2)$
(نقطهٔ برخورد سهمی با محور yها)

$y = 0 : x^2 - 3x + 2 = 0 ; (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 1 ; x = 2$

نقاط برخورد سهمی با محور xها: $B(1,0),\ C(2,0)$

در این‌جا با معلومات به دست آمده، به سادگی می‌توان نمودار سهمی را رسم کرد:



مثال ۶: نمودار سهمی به معادلهٔ $y = -4x^2 + 8x - 4$ را رسم کنید.

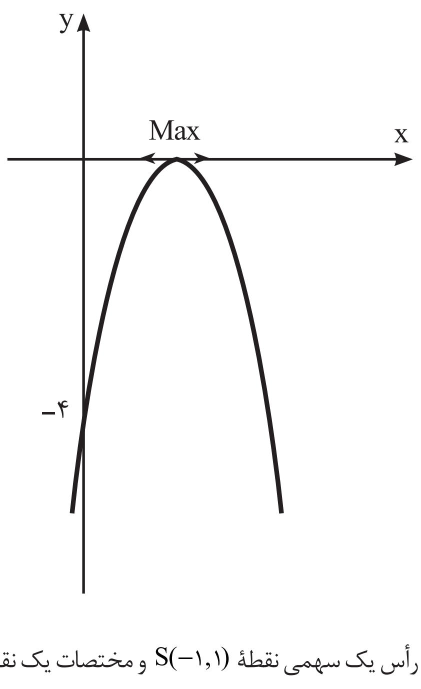
حل: چون $a = -4 < 0$ و $\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 64 = 0$، بنابراین سهمی دارای ماکزیمم S است و نقطهٔ S بر محور xها مماس است، یعنی معادلهٔ $y=0$ دارای ریشهٔ مضاعف است:

$x=1$ (محور تقارن) و $S(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}), S(1,0)$ (رأس سهمی)

$x = 0 : y = -4(0)^2 + 8(0) - 4 = -4 ;\ A(0,-4)$
(نقطهٔ برخورد سهمی با محور yها)

$y = 0 : -4x^2 + 8x - 4 = 0 ; -4(x-1)^2 = 0, x_1 = x_2 = 1$

حال با معلومات به دست آمده، نمودار سهمی را رسم می‌کنیم:



مثال ۷: رأس یک سهمی نقطهٔ $S(-1,1)$ و مختصات یک نقطهٔ آن $A(1,2)$ است. سهمی را مشخص کنید.

حل: معادلهٔ سهمی در حالت عمومی به صورت $y = ax^2 + bx + c$ است.

بنابراین:

$$S(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}), \quad S(-1,1): \begin{cases} -\frac{b}{2a}=-1 \\ -\frac{b^2-4ac}{4a}=1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} b=2a \\ c-\frac{b^2}{4a}=1 \end{cases}; \begin{cases} b^2=4a^2 \\ c=\frac{b^2}{4a}+1 \end{cases} \Rightarrow b=2a\,(1), c=a+1 \quad (2)$$

مختصات نقطهٔ A در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند:

$$A(1,2): 2=a(1)^2+b(1)+c; a+b+c=2$$

با توجه به رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳):

$$b=2a, \quad c=a+1: \quad a+b+c=a+2a+a+1=2;$$

$$4a+1=2; \quad 4a=1; \quad a=$$

پس:

$$a=\frac{1}{4}, \ b=\frac{1}{2}, \ c=\frac{5}{4}: \ y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{4}$$

(معادلهٔ مطلوب)

مثال ۸: در سهمی $y=2x^2-k^3x+k$، عدد k را چنان تعیین کنید که خط x=2 محور تقارن آن باشد.

حل: محور تقارن سهمی $y=ax^2+bx+c$، به صورت زیر است:

$$x=-\frac{b}{2a}$$

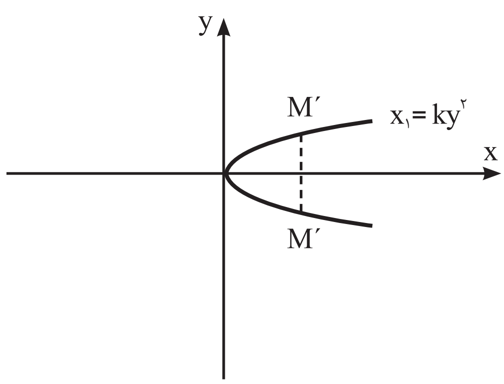
بنابراین، محور تقارن سهمی مورد نظر چنین است:

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-k^3}{2(2)}=2; \quad k^3=8; \quad \boxed{k=2}$$

$$k=2: y=2x^2-8x+2$$ (معادلهٔ مطلوب)

تبصره ۱: به هر سهمی که **محور تقارن** آن موازی محور yها باشد، **سهمی قائم** و هر سهمی که **محور تقارن** آن موازی xها باشد، **سهمی افقی** گویند.

تبصره۲: منحنی‌ها به معادله‌های $x=ky^2$، $x=y^2$، $x-\alpha=(y-\beta)^2$، $x-\alpha=-(y-\beta)^2$، $x-\alpha=k(y-\beta)^2$ ودرحالت‌عمومی $x=ay^2+by+c$؛ همگی یک سهمی افقی را مشخص می‌کنند که به طور مثال منحنی به معادلهٔ $x=ky^2$ چنین است:



بحث و بررسی روی سهمی افقی نیز به طور کامل مانند سهمی قائم است که آن را به عنوان **تمرین** می‌گذاریم.

اسم وبگاه: Math Guide

نشانی وبگاه: http://www.mathguide.com

این وبگاه می‌تواند منبع خوبی برای ارائهٔ راهنمایی‌های لازم در زمینهٔ ریاضیات به ریاضی‌آموزان، معلمان و مدرسان ریاضی و نیز علاقه‌مندان به این شاخه از علم باشد. صفحهٔ اصلی این وبگاه دارای سه قسمت عمده به همراه زیر عنوان‌هایی به شرح زیر است:

- **مدرسان**
  - برگه‌های تمرین ■ پژوهش ■ منبع ■ آزمون‌های استاندارد شده
- **دانش‌آموزان**
  - چرا ریاضی یاد می‌گیرید؟ ■ ماشین حساب‌ها ■ پروژه‌ها ■ معماها
- **خدمات ویژه**
  - مرکز کمک‌رسانی ■ رایانامهٔ سریع‌السیر ■ پیوندها

تاریخ ریاضی

۳

خیاط در کوزه

تاریخچه مجله ریاضی برهان

غلامرضا یاسی‌پور

کلیدواژه‌ها: مجموعه‌ها، مجله ریاضی برهان، معادله درجه۳، اصل حجره‌ها، توابع گزاره‌ای و سورها.

در شمارهٔ پانزدهم برهان و در همان صفحات اولیه، به این ادب ریاضی برمی‌خوریم که از کتاب احصاءالعلومِ فارابی است:

علم حِیَل [مکانیک] عبارت است از شناختن راه تدبیری که انسان با آن بتواند تمام مفاهیمی را که وجود آن‌ها در ریاضیات با برهان ثابت شده است بر اجسام خارجی منطبق سازد و به ایجاد و وضع آن‌ها در اجسام خارجی فعلیت بخشد. توضیح آن‌که در علوم ریاضی خطوط و سطوح و مجسمات و اعداد و دیگر مفاهیم ریاضی (تنها از لحاظ عقلی و جدا از اجسام خارجی) بررسی می‌شوند، ولی ما هنگام ایجاد این مفاهیم ریاضی در خارج (یعنی در اجسام طبیعی و محسوسات به طریق ارادی و به‌وسیلهٔ صنعت) به نیرویی نیاز داریم که راه و تدبیر تحقق بخشیدن به مفاهیم ریاضی را روشن سازد و مطابقهٔ آن‌ها را بر مواد و اجسام خارجی ممکن کند، زیرا مواد و اجسام خارجی دارای احوال و کیفیاتی هستند که آن احوال مانع می‌شوند از این‌که مفاهیم ثابت شده در ریاضیات به آسانی و به هر صورت ممکن بر این اجسام منطبق شود، پس نیرویی لازم است که بتواند اجسام طبیعی را آن‌چنان آماده کند که این صورت‌های ذهنی و مفاهیم ریاضی را در خود پذیرا شوند و در برطرف ساختن موانع، رامِ دست باشد.

علم حیل همان علمی است که راه‌های شناخت این تدابیر و شیوه‌های دقیق عملی کردن این مفاهیم را به‌وسیلهٔ صنعت مشخص می‌کند و نشان می‌دهد که چگونه می‌توان مفاهیم عقلی ریاضی را در اجسام طبیعی محسوس آشکار کرد.

در **مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان**، مسئلهٔ زیر مطرح شده است:

آیا یک عدد به حاصل‌ضرب عوامل یکتا تجزیه می‌شود؟

باز در **ادب ریاضی** این شماره و باز هم از کتاب **احصاءالعلوم فارابی** چنین آمده است:

کتاب منسوب به **اقلیدس فیثاغوری** شامل اصول هندسه و عدد است. این کتاب به نام **اُسطُقُسّات** معروف شده و مطالعه در این اصول از دو راه است: راه تحلیل؛ راه ترکیب. دانشمندان پیشین این رشته (غیر از اقلیدس) در کتاب‌های خود، راه تحلیل و ترکیب را با هم آورده‌اند، اما اقلیدس مطالب کتاب خود را تنها براساس راه ترکیب، تألیف کرده است.

این **ادب ریاضی** نیز از همین کتاب آورده شده است:

کسی که به تحصیل حکمت می‌پردازد (حکمت نظری به سه قسمت الهیات، ریاضیات و طبیعیات تقسیم می‌شده است.) باید جوان و تندرست باشد، آداب اخیار را از دست ندهد، علوم شرع و قرآن و لغت را پیش از آن آموخته باشد، عفیف و راستگو باشد، غدار و خائن نباشد، به گرم کردن بازار خود و حیله و مکر نپردازد، مصالح زندگانی را فراهم آورد، وظایف شرعی را انجام دهد، هیچ‌یک از آداب و ارکان شریعت را ترک نگوید، علم و علما را بزرگ دارد، جز علم و علما را محترم نشمارد و حکمت را حرفه نکند. هر که برخلاف این صفات باشد، حکیم دروغین است.

در مقالهٔ **تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران** که همچنان به مجلهٔ یکان پرداخته است در مورد ادعای ارشمیدس که نقطهٔ

اتکایی می‌خواست تا زمین را از جای بلند کند، چنین آمده است که:

بدون‌شک اگر ارشمیدس از تودهٔ عظیم زمین اطلاع داشت هرگز چنین سخنی نمی‌گفت. حال فرض کنیم که ارشمیدس روی سیارهٔ دیگری قرار داشت و اهرم دراز مورد لزوم در اختیارش بود. آیا می‌توانید حدس بزنید که چه زمانی طول می‌کشید تا ارشمیدس زمین را فقط یک سانتیمتر بلند کند؟

در مقالهٔ «دلیل محسوس» در کنار «برهان» از **دکتر احمد شرف‌الدین** در مورد دلایل محسوس چنین آمده است:

این‌گونه دلیل‌ها با وجود آن‌که به نظر برهان می‌آیند، ولی برهان نیستند، اما علاوه بر آن‌که در تشریح و تفهیم مطلب نقش مهمی دارند، دارای جاذبهٔ خاصی هستند و شایسته است در کنار برهان ذکر شوند.

در مقالهٔ **طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روش‌های مقدماتی** به این مسئله که حل آن از **یاکوب اشتینر** است، برمی‌خوریم:

با n برش مستقیم کارد پیتزا بری روی یک پیتزا، شخص می‌تواند چند تکه پیتزا به‌دست آورد؟ یا به‌صورت عالمانه‌تر آن: بیش‌ترین تعداد (L_n) نواحی تعریف‌شده با n خط واقع در صفحه چیست؟

بعضی از مقالات دیگر این شماره به شرح زیرند:

صحبت تقارن: احمد قندهاری

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی: حمیدرضا امیری

مکان هندسی: محمدهاشم رستمی

بردارها: سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

* * *

شمارهٔ شانزدهم مجله در پنجمین سال انتشار آن با بهای ۲۰۰۰ ریال در زمستان ۱۳۷۴ منتشر شد.

در این شماره نیز سرآغاز مقالات مجله، مقالهٔ مسلسل **شما هم می‌توانید در درس ریاضیات خود موفق باشید** است.

در **ادب ریاضی** این شماره، این مطلب از **احصاءالعلوم فارابی** به‌چشم می‌خورد:

منطق قوانینی را به دست می‌دهد که انسان را از اشتباه و لغزش و خطا در معقولات بازمی‌دارد؛ قوانینی که به‌وسیلهٔ آن‌ها میزان خطای خطاکننده در معقولات سنجیده می‌شود، زیرا در مورد برخی از معقولات هرگز امکان اشتباه وجود ندارد؛ همان معقولاتی که آدمی گویی بنابر فطرت می‌تواند آن‌ها را بشناسد و دربارهٔ آن‌ها یقین حاصل کند، مانند این‌که کُل بزرگ‌تر از جزء است یا عدد سه فرد است. اما در امور دیگر ممکن است خطا کند و در راه رسیدن به حقیقت به اشتباه بیفتد. این‌گونه امور باید با فکر و اندیشه و از طریق قیاس و استدلال فهمیده شود. در این دسته از امور انسان (نه در آن دستهٔ اول) که هرکس خواستار دست یافتن به حقیقت یقینی امور مطلوب باشد، به قوانین منطق نیاز خواهد داشت.

باز در **ادب ریاضی** دیگر این شماره مطلبی می‌خوانیم از تاریخ **حبیب‌السیر** اثر **خواند میر** در ذکر فیثاغورس صوری، که در آن چنین آمده است:

هنوز در صِغَرسن بود که اهل صور را به سبب استیلای اعداد صورت جلا روی نمود و پدر فیثاغورس او را به **ساموس** و از ساموس به **اَنطاکیه** برد و حاکم انطاکیه فیثاغورس را فرزندخوانده، به معلم سپرد و فیثاغورس به تحصیل علم لغت و موسیقی سعی فرموده، در آن فن مهارت کامل حاصل نمود، چنان‌چه گویند اکثر سازها اختراع اوست؛ و فیثاغورس در سن شباب به تعلیم هندسه و نجوم پرداخت، آن‌گاه به مصر شتافته، مطالعهٔ علم حکمی را پیشنهادِ همت ساخت و از آن‌جا به شهر ساموس بازگشته، به درس حکمت و تألیف مسائل آن فن، اوقات شریف مصروف داشت و دویست و هشتاد رساله در علوم مختلفه تصنیف نمود و خلق بسیار از طالبان فضل و کمال به ملازمت آن حکیم عدیم‌المثال می‌رفتند و در مقام استفاده بوده، از افادهٔ طبع وقادش بهره می‌گرفتند و بعضی از ملوک اطراف به زیارت آن قُدوهٔ اشراف می‌شتافتند و از نصایح سودمندش و مواعظ دلبندش بهره و حظی تمام می‌یافتند و فیثاغورس همواره فِرَقِ اَنام را به تحصیل معرفت طبایع اشیا و دست بازداشتن از ارتکاب مَآثم و خطایا ترغیب نمودی و بر مواظبت جهاد و اکثار صیام و مداومت قرائت کتب امر فرمودی و به بقای نفس بعد از مفارقت بدن و ادراک لذت و الم و ثواب و عقاب اعتراف داشت و عَلَی الدّوام همت بر سیاحت و احراز فضایل و اکتساب کمالات می‌گماشت.

در مطلب «**مقالات کوتاه از مجله‌های ریاضی معتبر جهان**»، مطلبی آمده است دربارهٔ یک مجمع تاریخی که به سال ۱۹۰۰ میلادی در پاریس برپا شد. در این مقاله که به هیلبرت و ۲۳ مسئلهٔ مفروضش اشاره شده است، چنین می‌خوانیم:

در اوت ۱۹۰۰ بهترین ریاضی‌دان‌های جهان برای دومین کنگرهٔ بین‌المللی ریاضی‌دانان در پاریس گرد آمدند (واقعه‌ای که جز در دوران جنگ به برقرار شدن در هر چهار سال یک‌بار در یکی از حوزه‌های دارای صلاحیت دنیا ادامه داده است). دیوید هیلبرت، استاد ۳۸ سالهٔ دانشگاه گوتینگن از میان این ریاضی‌دان‌ها بود. قرار بر این بود که هیلبرت به‌عنوان یکی از سردمداران ریاضی آن زمان یکی از نطق‌های مهم همایش مزبور را انجام دهد. روزی که برای این کار در نظر گرفته بودند هشتم اوت بود.

از آن‌جا که همایش مورد بحث در اولین سال قرن بیستم انجام می‌گرفت (درواقع برای نیل به این منظور یک سال جلوتر آورده شده بود)، هیلبرت در سخنرانی‌اش نه به بررسی بعضی از کارهای متأخر (که قالب معمول صحبت‌هایی چنین بود)، بلکه اشاره به کارهای آینده پرداخت.

وی چنین فریاد زد: «این ندای دائمی را در درون خود می‌شنویم که: «این همان مسئله است، علتش را جست‌وجو کن. می‌توانی آن را با برهان بیابی، زیرا در ریاضیات لادری (نمی‌دانم) وجود ندارد.» و برای تأیید این ندا به همایش مزبور، نه یکی

فرض کنیم که ارشمیدس روی سیارهٔ دیگری قرار داشت و اهرم دراز مورد لزوم در اختیارش بود. آیا می‌توانید حدس بزنید که چه زمانی طول می‌کشید تا ارشمیدس زمین را فقط یک سانتیمتر بلند کند؟

ریاضیات، همیشه در تمامی طول تاریخ تکامل خود، با زندگی و عمل بستگی داشته است. با وجود این، در تاریخ ریاضیات می‌توان دوره‌هایی را تشخیص داد که در آن‌ها، اهمیت درجه اول به ریاضیات کاربردی داده شده است؛ دوره‌هایی هم وجود دارد که در آن‌ها ریاضیات با سمت‌گیری نظری پیشرفته است

بلکه فهرستی از بیست و سه مسئلهٔ مهم حل نشده را ارائه داد. مسائلی که راه‌حل هریک از آن‌ها در صورت یافت‌شدن، پیشرفت مهمی را در دانش ریاضی رقم خواهد زد.

هم‌چنان که مجله را ورق می‌زنیم، چشممان به مقاله‌ای دیگر از استاد **پرویز شهریاری** می‌خورد. نام این مقاله ریاضیات کاربردی است. در این مقاله با مطالبی خواندنی از جمله مطلب زیر مواجه می‌شویم:

ریاضیات، همیشه در تمامی طول تاریخ تکامل خود، با زندگی و عمل بستگی داشته است. با وجود این، در تاریخ ریاضیات می‌توان دوره‌هایی را تشخیص داد که در آن‌ها، اهمیت درجه اول به ریاضیات کاربردی داده شده است؛ دوره‌هایی هم وجود دارد که در آن‌ها ریاضیات با سمت‌گیری نظری پیشرفته است.

در واقع، مسیر تاریخ ریاضیات به تناوب از دورهٔ ریاضیات کاربردی به ریاضیات نظری و برعکس، عبور کرده است. دو دورهٔ اصلی از سمت‌گیری کاربردی ریاضیات را در گذشته می‌شناسیم. دورهٔ اول که از هزاره‌های پیش از میلاد و از زمان پیدایش انسان آغاز می‌شود و تا سده‌های ششم و هفتم پیش از میلاد ادامه دارد، دوران شکل‌گیری مفهوم‌های اصلی ریاضیات (یعنی عدد و شکل) در بستگی تنگاتنگ با نیازهای زندگی است. نخستین جهش در پیشرفت ریاضیات در پیدایش خط به‌وجود آمد. خط به انسان امکان داد تا نیت خود را به‌صورت ساده ثبت کند و با نشانه‌ها و نمادها، اندیشهٔ خود را هم برای دیگران و هم برای آیندگان باقی بگذارد.

مقالات زیر از دیگر مقالات این شماره‌اند:

فضای برداری: حمیدرضا امیری

حد: احمد قندهاری

مکان هندسی: محمدهاشم‌رستمی

آموزش متون ترجمهٔ ریاضی: حمیدرضا امیری

ریاضیات گسسته: غلامرضا یاسی‌پور

مبانی کامپیوتر: حسین ابراهیم‌زاده قلزم

توان: سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

* * *

شمارهٔ ۱۷ مجله در بهار ۱۳۷۵ انتشار یافته است.

در این شماره از مقالهٔ **شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید** از **استاد شهریاری** که کماکان اولین مقالهٔ مجله را تشکیل می‌دهد، می‌گذریم و در مقالهٔ **تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران** از قول **دکتر هوشنگ منتصری** دربارهٔ شرح حال **دکتر اکبرزاده**، دانشمند ریاضی معاصر، چنین می‌خوانیم:

آقای دکتر حسن اکبرزاده در سال ۱۳۰۶ شمسی در شهرستان رشت به‌دنیا آمد، آموزش ابتدایی را در همان شهر و تحصیلات متوسطه را در سال ۱۳۲۶ در دبیرستان البرز خاتمه داد. سپس وارد دانشکدهٔ علوم تهران شد و در سال ۱۳۲۹ لیسانس در رشتهٔ علوم ریاضی را با احراز رتبهٔ اول و اخذ مدال علمی به پایان رساند.

پس از پایان تحصیلات دانشگاهی در ایران بلافاصله برای ادامهٔ تحصیلات عالیهٔ خود به فرانسه مسافرت کرد و در دانشگاه پاریس «سوربن» در مدت دو سال، بعد از گذراندن چهار شهادت‌نامه (ریاضیات عمومی، مکانیک استدلالی، حساب جامعه و فاضله و هندسهٔ عالی) مجدداً به اخذ درجهٔ لیسانس علوم ریاضی نایل شد. یک سال بعد با دریافت شهادت‌نامهٔ آنالیز عالی کار رسالهٔ دکترای خود را آغاز کرد.

موضوع رسالهٔ آقای دکتر اکبرزاده دربارهٔ «فضاهای فینسلر» است. «فینسلر» ریاضی‌دان سوئیسی در اوایل قرن بیستم بوده است. او در مطالعات خود به یک نوع از فضاهایی که بعدها به نام خود او معروف شد، برخورد. این فضاها نوع عمومی‌تر و دقیق‌تری از فضاهای «ریمان» است که در رشته‌های فیزیک و ریاضی کاربرد بسیار دارد.

ارتباط فضاهای فینسلر با مسائل مورد بحث در «نسبیّت عمومی» و آخرین نظریهٔ اینشتین «نظریهٔ وحدانی» و هم‌چنین در توضیح و تفسیر تئوری‌های مکانیک کوانتیک از دیرباز مورد توجه دانشمندان قرار داشته است، به‌طوری که در سال‌های اخیر بسیاری از مکتب‌های ریاضی شالودهٔ تئوری‌های مزبور را براساس فضاهای فینسلر طرح کرده‌اند.

مطالعات و تحقیقات آقای دکتر اکبرزاده دربارهٔ پی‌ریزی جدید و عمومیت فضاهای فینسلر آن‌قدر جالب و پر ارزش بود که بعد از تهیه و تنظیم دو یادداشت به آکادمی علوم پاریس در همان حال که کار رسالهٔ دکترای خود را تعقیب می‌کرد به‌عنوان وابستهٔ تحقیقاتی در «مرکز دولتی تحقیقات علمی» استخدام شد و پس از آن، چهار یادداشت دیگر به آکادمی علوم پاریس تقدیم کرد که همهٔ این شش یادداشت به‌صورت جزواتی چاپ و به کلیهٔ مراکز تحقیقاتی و دانشگاهی کشورهای جهان فرستاده شده است.

سرانجام در ۱۳ ژوئن ۱۹۶۱ بعد از ۱۱ سال تحصیل و تحقیق در پاریس، رسالهٔ دکترای دولتی خود را با درجهٔ «شایان افتخار» که بالاترین درجات تصویب یک رساله از طرف هیئت قضات است، گذراند.

پس از پایان تحصیلات، آقای دکتر اکبرزاده به سمت «مأمور تحقیقاتی» در مؤسسهٔ معروف «کلژ دو فرانس» انتخاب شد.

متن رسالهٔ آقای دکتر اکبرزاده به علت اهمیت علمی آن در سالنامهٔ دانشسرای عالی در پاریس (۱۹۶۲-۱۹۶۳) چاپ شده است و در کلژدوفرانس و هم‌چنین در پاره‌ای از دانشکده‌های خارج از فرانسه نیز، تحقیقات این جوان ایرانی با ذکر نام خود او تدریس می‌شود.

کار آقای دکتر اکبرزاده در کلژدوفرانس، صرف‌نظر از ادامهٔ تحقیقات، دادن یک سلسله کنفرانس‌ها و هدایت پروفسور آگرژه‌هایی است که مشغول تهیهٔ رسالهٔ تحقیقاتی هستند

هم‌چنان که به مقالات مجله نگاه می‌کنیم، چشممان به ادب ریاضی این شماره می‌خورد که در آن از قول ابن‌سینا در **اشارات و تنبیهات** چنین آمده است:

چون پیدا و دانسته برابر ناپیدا و نادانسته است، پس همان‌گونه که گاهی تصور ساده و بدون حکم پیدا و دانسته است، مانند شناخت ما به نام مثلث؛ و زمانی هم تصوری که تصدیق به همراه دارد پیداست، مانند باور ما به این‌که سه زاویهٔ مثلث با دو زاویهٔ قائمه برابر است؛ هم‌چنین گاهی یک چیز از جهت تصور ناپیدا و ناشناخته است در این صورت معنای آن به ذهن نمی‌آید مگر آن‌که شناخته شود، مانند «ذی‌الاسمین» و «منفصل» و مانند آن‌دو؛ و زمانی یک چیزی از تصدیق ناپیدا و نامعلوم است تا دانسته شود، مانند قوی بودن (برابر بودن) قطر دایره نسبت به دو ضلع زاویهٔ قائمه‌ای که همان قطر، وتر آن زاویه واقع شده است. پس آن‌چه در علوم و نظایر آن مطلوب ماست یا به سوی تصور ناپیدا و مجهول یا به سوی تصدیق ناپیدا و مطلوب است، که باید به‌دست آید.

در مقالهٔ مشاهیر ریاضی جهان، مطلبی موجود است از **فرهنگ فشردهٔ ریاضی آکسفورد** در شرح حال **ددکیند**، ریاضی‌دان آلمانی، که در آن چنین می‌خوانیم:

دد کیند[1]، (۱۸۳۱-۱۹۱۶)، ریاضی‌دان آلمانی، چند سالی را در دانشگاه **گوتینگن** گذراند و بیش‌تر باقی‌ماندهٔ عمرش را در یک دانشکدهٔ فنی تدریس کرد. شهرتش به علت برش ددکیند است. این برش رجوع به ساخت صوری دستگاه عدد حقیقی‌اش از اعداد گویا دارد. این کار قدم مهمی درخصوص تنظیمی از ریاضیات است که در این قرن با آن مواجه شده‌ایم؛ تنظیمی که ۲۰۰۰ سال پیش‌تر، **اودوکسوس** آن را پیش‌بینی کرده بود. در این مورد، خواننده را به روایت بسیار خواندنی ددکیند از کارش در مقالهٔ **پیوستگی و اعداد گنگ** ارجاع می‌دهیم.

این شماره گزارشی دارد از بیست و ششمین کنفرانس ریاضی کشور، که در آن چنین آمده است:

دانشگاه شهید باهنر کرمان در روزهای ۸ تا ۱۱ فروردین ۱۳۷۴ میزبان بیست و ششمین کنفرانس ریاضی کشور بود. این کنفرانس با همکاری انجمن ریاضی ایران و با پشتیبانی مسئولان عالی‌رتبهٔ کشور، وزارتخانه‌ها و استانداری کرمان برگزار شد. در این کنفرانس بیش از ۱۰۰۰ نفر از جمله عده‌ای از ریاضی‌دانان خارجی و ریاضی‌دانان ایرانی مقیم خارج از کشور شرکت داشتند، سخنرانی‌ها در دو زمینهٔ عمومی و تخصصی ارائه شد و در این کنفرانس برای دومین‌بار شاهد فعالیت کارگاه‌های آموزش ریاضی، آنالیز عددی، هندسه و ریاضیات فازی بودیم که استقبال دبیران ریاضی کشور از این کارگاه آموزش ریاضی، چشمگیر بود. اقدام شایستهٔ کمیتهٔ اجرایی کنفرانس، انتشار کتاب‌های کارگاه‌ها و ارائهٔ آن به شرکت‌کنندگان بود. در کنار کنفرانس میزگرد نظام جدید و مجمع عمومی انجمن ریاضی ایران و هم‌چنین مسابقهٔ ریاضی دانشجویی برگزار شد. علاوه بر این، نمایشگاه کتاب‌های ریاضی خارجی و نمایشگاه و فروشگاه کتاب‌های علوم پایهٔ فارسی و اجرای تئاتر و تورهای مسافرتی ماهان و بم از فعالیت‌های جنبی و مفید این کنفرانس بود.

صف‌های طویل شرکت‌کنندگان کنفرانس برای رزرو بلیط تورهای مسافرتی ماهان و بم، حاکی از جذابیت آثار تاریخی استان کرمان و استقبال شرکت‌کنندگان از این برنامه‌ها بود.

میزگرد نظام جدید آموزش متوسطه نیز با استقبال گرم دبیران ریاضی کشور همراه بود. در این میزگرد، مهندس علاقه‌مندان، تنی چند از اساتید دانشگاه و دبیران شرکت داشتند. هدف‌های نظام جدید و مقایسهٔ آن با نظام فعلی را برای حاضران تشریح کردند. سپس اساتید دانشگاه، هریک مزایا و مشکلات نظام جدید را مورد بحث و بررسی قرار دادند. در پایان میزگرد بر این نکته تأکید شد که تمام دست‌اندرکاران، اساتید و دبیران محترم باید در پیاده کردن نظام جدید همکاری نزدیک و بیش‌تری داشته باشند.

یکی از تصمیم‌های خوب کنفرانس تجلیل از چهار استاد و پژوهشگر ریاضیات بود. در جلسهٔ عمومی کنفرانس، پیش از ظهر هشتم فروردین، آقایان دکتر جواد بهبودیان، دکتر ابوالقاسم قربانی، دکتر هادی شفیعیها و پرویز شهریاری، به‌عنوان پیش‌کسوتان ریاضی کشور به شرکت‌کنندگان معرفی شدند و هدیه‌هایی دریافت کردند.

حرف آخر این‌که تلاش شبانه‌روزی کمیتهٔ اجرایی کنفرانس، دبیر کنفرانس، دانشجویان دانشگاه شهید باهنر، کادر خدماتی و مقامات مؤسسه‌های مختلف استان کرمان در هر چه بهتر برگزار کردن کنفرانس، قابل تقدیر و ستودنی بود که به حق در تحقق این هدف موفق و سرافراز شدند.

مقالات دیگر این شماره عبارت‌اند از:

حد: احمد قندهاری

تبدیل: حمیدرضا امیری

داستان شیر و موش در هندسه: دکتر احمد شرف‌الدین

توان: سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

کاربرد دترمینان: سیامک جعفری

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی: حمیدرضا امیری

طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روش‌های مقدماتی: غلامرضا یاسی‌پور

اثبات نامساوی‌ها: محمدعلی سلحشور

خط‌های راست و صفحه‌های عمود

برهم در فضا: پرویز شهریاری

یکی از تصمیم‌های خوب کنفرانس تجلیل از چهار استاد و پژوهشگر ریاضیات بود. در جلسهٔ عمومی کنفرانس، پیش از ظهر هشتم فروردین، آقایان دکتر جواد بهبودیان، دکتر ابوالقاسم قربانی، دکتر هادی شفیعیها و پرویز شهریاری، به‌عنوان پیش‌کسوتان ریاضی کشور به شرکت‌کنندگان معرفی شدند

آموزش

تابع ۲

برای دانش‌آموزان سال دوم متوسطه

حمیدرضا امیری

کلیدواژه‌ها:
زوج مرتب، تابع، تابع خطی، وارون رابطه، قرینه، تابع معکوس، تابع یک‌به‌یک، بازه.

چکیده:
در شمارهٔ قبل با مفاهیم زوج مرتب، رابطه و تابع آشنا شدید. همچنین وارون یک رابطه و تابع یک‌به‌یک را بررسی کردیم. اینک در ادامهٔ آن، مطالبی دیگر از تابع را می‌آوریم.

تابع معکوس

تابع یک‌به‌یک $f=\{(۱,۴),(۲,۶),(۳,۷)\}$ را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم:

دامنهٔ $f = \{۱,۲,۳\}$

برد $f = \{۴,۶,۷\}$

حال، تابع g را با تعویض مؤلفه‌های زوج‌های f در نظر می‌گیریم، یعنی:

$g=\{(۴,۱),(۶,۲),(۷,۳)\}$

دامنهٔ $g = \{۴,۶,۷\}$

برد $g = \{۱,۲,۳\}$

تابع g را تابع معکوس تابع f می‌نامیم و آن‌را با f^{-1} نشان می‌دهیم. از گفته‌های بالا چند نتیجه گرفته می‌شود:

اول: این‌که تابع f باید یک‌به‌یک باشد تا تابع معکوس وجود داشته باشد. چنان‌چه تابع f یک‌به‌یک نباشد و جای مؤلفه‌های داخل زوج‌ها را عوض کنیم، تابعی به دست نمی‌آید. برای مثال، اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۲)\}$ آن‌گاه $g=\{(۲,۱),(۵,۲),(۲,۳)\}$ تابع نیست، زیرا عدد ۲ هم به ۱ مربوط شده است، هم به ۳.

دوم: این‌که اگر دو تابع f و g معکوس یکدیگر باشند، آن‌گاه دامنهٔ f مساوی برد g و برد f مساوی دامنهٔ g است (توجه داشته باشیم که عکس این مطلب درست نیست)؛ یعنی اگر در دو تابع f و g داشته باشیم و دامنهٔ f مساوی برد g و برد f مساوی دامنهٔ g باشد، ممکن است دو تابع معکوس یکدیگر نباشند، مانند دو تابع $f:R\to R$ و $g:R\to R$ که $f(x)=x$ و $g(x)=x+۱$

سوم: اگر به زوج‌های مرتب تابع $f=\{(۱,۴),(۲,۶),(۳,۷)\}$ و به زوج‌های مرتب تابع $g=\{(۴,۱),(۶,۲),(۷,۳)\}$ دقت کنیم، ملاحظه می‌کنیم:

$A\left|\begin{matrix}۱\\۴\end{matrix}\right.$ در تابع f است و $A'\left|\begin{matrix}۴\\۱\end{matrix}\right.$ در تابع g است.

$B\left|\begin{matrix}۲\\۶\end{matrix}\right.$ در تابع f است و $B'\left|\begin{matrix}۶\\۲\end{matrix}\right.$ در تابع g است.

$C\left|\begin{matrix}۳\\۷\end{matrix}\right.$ در تابع f است و $C'\left|\begin{matrix}۷\\۳\end{matrix}\right.$ در تابع g است.

از این نوشته‌ها نتیجه می‌گیریم که نقاط تابع g قرینهٔ نقاط تابع f نسبت به خط نیمساز ربع اول و سوم است.

به‌طور کلی، اگر $f=\{(x,y)|(x,y)\in f\}$ و $g=\{(y,x)|(x,y)\in f\}$ آن‌گاه دو تابع f و g را معکوس یکدیگر گوییم. و نمودارهای دو تابع f و g نسبت به خط y=x قرینهٔ یکدیگرند.

چهارم: تعویض جای x و y را در معادلهٔ تابع نیز می‌توان انجام داد تا معادلهٔ تابع معکوس به‌دست آید.

تعریف: اگر f یک تابع باشد و وارون آن یعنی f^{-1} نیز تابع باشد، در این صورت f را وارون‌پذیر (معکوس‌پذیر) می‌نامیم.

مثال: تابع $f=\{(۲,۳),(٤,۳),(۵,۱)\}$ وارون‌پذیر نیست، زیرا وارون آن یعنی $f^{-1}=\{(۳,۲),(۳,٤),(۱,۵)\}$ تابع نیست.

مثال: اگر $\begin{cases} f:R\to R\\ y=f(x)=۲x-٤\end{cases}$، آن‌گاه معادلهٔ تابع معکوس تابع f چنین به‌دست می‌آید:

$$y=۲x-٤ \xRightarrow{\text{جای x و y را عوض می‌کنیم.}} x=۲y-٤\Rightarrow ۲y=x+٤$$

$$\Rightarrow y=\frac{x}{۲}+۲ \quad \text{ضابطهٔ } f^{-1}$$

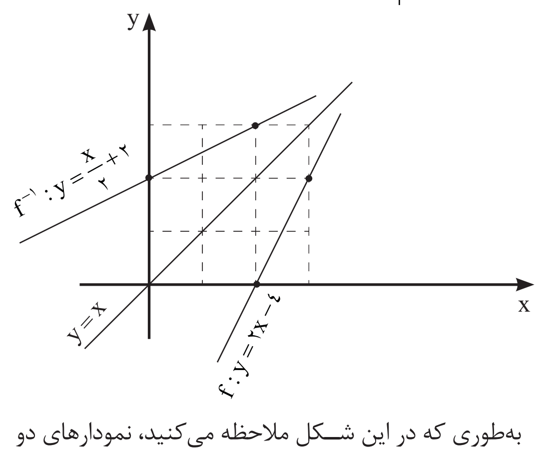
حال این دو تابع را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم می‌کنیم:

$f:y=۲x-٤$

x	y
۳	۲
۲	۰

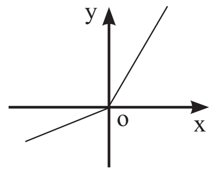
$f^{-1}:y=\frac{x}{۲}+۲$

x	y
۲	۳
۰	۲

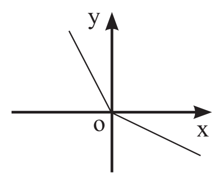


به‌طوری که در این شکل ملاحظه می‌کنید، نمودارهای دو تابع f و f^{-1} نسبت به خط y=x قرینهٔ یکدیگرند.

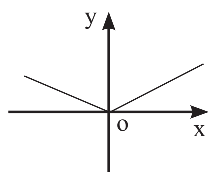
مثال: در شکل روبه‌رو تابع f رسم شده است. نمودار تابع f^{-1} کدام است؟



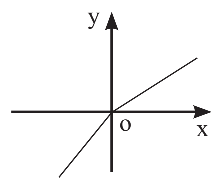
۱)



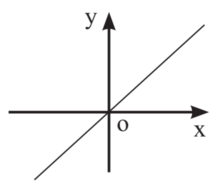
۲)



۳)



۴)



حل: اگر خط y=x را رسم کنیم، به کمک رسم قرینهٔ شکل نسبت به خط y=x، به‌سادگی نمودار (۳) به‌دست می‌آید.

مثال: تابع f با ضابطهٔ $\begin{cases} f:R\to R\\ y=f(x)=۲x+۶\end{cases}$ را در نظر می‌گیریم.

می‌دانیم f تابعی یک‌به‌یک است، زیرا: اگر $x_۱,x_۲\in R$ و اگر $f(x_۱)=f(x_۲)$

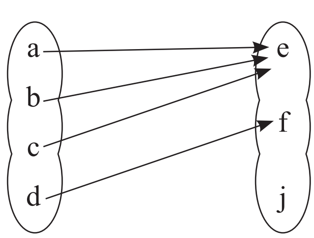
$$\Rightarrow ۲x_۱+۶=۲x_۲+۶\Rightarrow ۲x_۱=۲x_۲\Rightarrow x_۱=x_۲$$

f یک‌به‌یک است

چند نکتهٔ مهم:

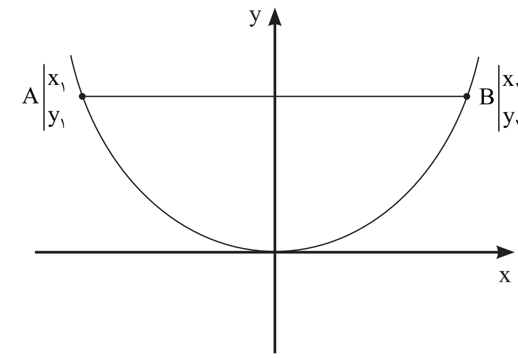
۱. تابع f در صورتی یک‌به‌یک است که:

الف) اگر نمودار پیکانی آن را رسم کنیم به هر عضو از مجموعهٔ دوم حداکثر یک عضو از مجموعهٔ اول مربوط باشد.



[این تابع یک‌به‌یک نیست، زیرا به عضو e از B دو عضو از A مربوط است (دو به یک است!)].

ب) اگر نمودار مختصاتی تابع f، و دسته خطوط موازی محور xها رسم شود و نمودار تابع در بیش از یک نقطه قطع نشود، نمودار تابع f یک به‌یک نیست.



۲. شرط لازم و کافی برای آن‌که تابع f وارون‌پذیر باشد ($f^{-۱}$ تابع باشد) آن است که f یک‌به‌یک باشد، یعنی: اگر f یک‌به‌یک باشد، آن‌گاه وارون‌پذیر است و اگر f وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه یک‌به‌یک است.

بازه (فاصله) در اعداد حقیقی

مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی بین دو عدد a و b را که شاملِ خود a و خود b نباشند، با نماد (a,b) نمایش می‌دهیم و آن را فاصله یا بازهٔ باز می‌نامیم.

$$(a,b)=\{x\in R\,|\,a<x<b\}$$

و به همین ترتیب بازه‌ها در حالت‌های مختلف (باز، نیم‌باز و بسته) به صورت‌های زیر تعریف می‌شوند:

$$[a,b)=\{x\in R\,|\,a\le x<b\}$$

$$[۲,۹)=\{x\in R\,|\,۲\le x<۹\}$$

$$(-۳,۵]=\{x\in R\,|\,-۳<x\le ۵\}$$

$$[-۲,۱۱]=\{x\in R\,|=-۲\le x\le ۱۱\}$$

$$(-\infty,۵]=\{x\in R\,|\,x\le ۵\}$$

$$(٤,+\infty)=\{x\in R\,|\,x>٤\}$$

مقدار تابع در یک نقطه

اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,٤),...\}$ یک تابع باشد، واضح است که D_f=N و $R_f=N-\{۱\}$. اگر بخواهیم برای f ضابطه تعریف کنیم، خواهیم داشت: $y=f(x)=x+۱$. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید $(۱,۲)\in f$ یا $f(۱)=۲$؛ همچنین $f(۲)=۳$، $f(۳)=٤$ و... و $f(x)=x+۱$.

نمایش ضابطه‌ای یا جبریِ تابع f به صورت $f(x)=x+۱$ است و مقدار تابع f در نقطهٔ ۱ یعنی f(۱) برابر با ۲ است و مقدار تابع در نقطهٔ k برابر با f(k) یا (k+۱) خواهد بود.

مثال: اگر تابع f با ضابطهٔ $f(x)=۲x^۲-۱$ مفروض باشد و D_f=R در نظر گرفته شود، در این صورت مقدار تابع f را در نقاط $x=۲$، $x=-۱$، $x=۱$، $x=\frac{۱}{۲}$، $x=\sqrt{۲}$، $x=k$، $x=a^۲$ و $x=۲a-۱$ به‌دست آورید.

حل:

$$f(۲)=۲\times۲^۲-۱=۷$$

$$f(-۱)=۲\times(-۱)^۲-۱=۱,\ f(۱)=۲\times۱^۲-۱=۱$$

$$f(\tfrac{۱}{۲})=۲\times(\tfrac{۱}{۲})^۲-۱=-\tfrac{۱}{۲}$$

$$f(\sqrt{۲})=۲\times(\sqrt{۲})^۲-۱=۳$$

$$f(k)=۲k^۲-۱\ ,\ f(a^۲)=۲(a^۲)^۲-۱=۲a^٤-۱$$

$$f(۲a-۱)=۲\times(۲a-۱)^۲-۱=۲(٤a^۲-٤a+۱)-۱$$
$$=۸a^۲-۸a+۱$$

مثال: اگر $f(x)=۲x-۱$ و $g(x)=x^۲+۲$ در این صورت مطلوب است $f(۵)+g(۵)$، $f(g(۲))$ و $f(g(x))$.

$$f(۵)=۲\times۵-۱=۹\ ,\ g(۵)=۵^۲+۲=۲۷\ ,$$

$$f(۵)+g(۵)=۹+۲۷=۳٦$$

$$(f+g=۲x-۱+x^۲+۲=x^۲+۲x+۱\ ,$$

$$(f+g)(۵)=۵^۲+۲\times۵+۱=۳٦)$$

$$g(۲)=۲^۲+۲=٦\ ,\ \ f(g(۲))=f(٦)=۲\times٦-۱=۱۱$$

$$f(g(x))=۲(\underbrace{x^۲+۲}_{g(x)})-۱=۲x^۲+۳$$

مثال: اگر f تابعی خطی باشد و $f(۱)=-۱$ و $f(۲)=۱$، در این صورت ضابطهٔ تابع f را بیابید.

حل: چون تابع f خطی است، پس داریم: $f(x)=ax+b$ و در نتیجه:

$$f(۱)=-۱\Rightarrow -۱=a\times۱+b\Rightarrow a+b=-۱$$

$$f(۲)=۱\Rightarrow ۱=a\times۲+b\Rightarrow ۲a+b=۱$$

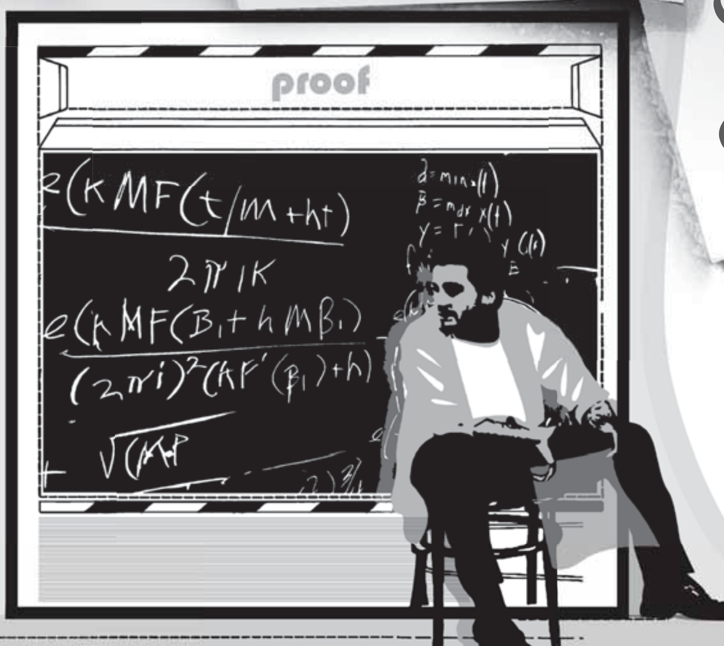
$$-\begin{cases}a+b=-۱\\ ۲a+b=۱\end{cases}\Rightarrow a=۲,\ b=-۳\Rightarrow f(x)=۲x-۳$$

ریاضیات در سینما

ریاضیات در سینمای جهان

اسم فیلم: اثبات[1]

احسان یارمحمدی



کارگردان[2]: جان مَدِن[3]

تهیه‌کنندگان: آلیسون اون[4] و جف شارپ[5]

نویسندگان: دیوید آوُبرن[6] و ربکا میلر[7]

بازیگران: گینِس پالترو[8]، آنتونی هاپکینز[9]، جِیک گیلِنهال[10] و هاپ دیویس[11]

مدت فیلم: ۱۰۰ دقیقه

زبان: انگلیسی[12]

کاترین[13](گینِس پالترو) از پدرش، روبرت[14](آنتونی هاپکینز) که ریاضی‌دانی نابغه است و چندین سال قبل دیوانه شده، مراقبت می‌کند. هنگامی که پدر او می‌میرد یکی از شاگردان سابقش به نام هارولد[15](جیک گیلِنهال) به سراغ دفترچهٔ یادداشت روبرت به امید کشف موضوعی می‌رود. کاترین به هارولد برای این‌که ممکن است وی قصد داشته باشد برای کسب اعتبار و امتیاز علمی از دفترچهٔ یادداشت پدرش سرقت علمی انجام دهد، ظنین و بدگمان می‌شود. خواهر کاترین، کِلِیر[16]، که از نیویورک رسیده است به سلامت عقل کاترین شک می‌کند. کاترین به ایجاد ارتباط با هارولد می‌پردازد و به او کلید میز تحریر پدرش را می‌دهد. هارولد در میز تحریر روبرت دفترچهٔ یادداشتی را پیدا می‌کند که در آن اثباتی از یک قضیهٔ مهم ریاضی وجود دارد. اما کاترین ادعا می‌کند که خودش روی این قضیه کار کرده است و ارائهٔ اثبات برای این قضیهٔ مهم ریاضی را به خودش نسبت می‌دهد، ولی هنگامی که دست‌خط ارائه شده برای اثبات قضیه ظاهر می‌شود، حکایت از این دارد که دست خط مزبور به پدر کاترین، یعنی روبرت متعلق است. در این موقع است که همهٔ افراد، حتی خود کاترین به سلامت عقل وی شک می‌برند.

پی‌نوشت

1. proof
2. Director
3. John Madden
4. Alison Owen
5. Jeff Sharp
6. David Auburn
7. Rebecca Miller
8. Gwyneth Paltrow
9. Anthony Hopkins
10. Jake Gyllenhaal
11. Hope Davis
12. English
13. Catherine
14. Robert
15. Harold
16. Claire

کاربرد هندسه در فیزیک

بررسی یک مسئلهٔ زیبا

هوشنگ شرقی

کلیدواژه‌ها: هندسه، فیزیک، تابش نور.

اشاره

دربارهٔ کاربردهای مختلف ریاضیات در شاخه‌های گوناگون علوم دیگر بسیار گفته و نوشته‌اند. در این نوشتار قصد داریم نمونه‌ای از کاربرد قضایا و قوانین هندسه در فیزیک نور را نشان دهیم. خوانندگانی که در زمینهٔ فیزیک نور و قوانین آن مطالعه کرده‌اند، حتماً به این نکته واقف‌اند که قواعد هندسه تا چه حد در این بحث مورد استفاده قرار می‌گیرند. قوانین بازتابش نور در آینه‌ها، قوانین شکست نور، منشورها و عدسی‌های محدب و مقعر و آینه‌های محدب و مقعر و مسائل کاربردی و ترکیبی آن‌ها سرشار از مسائل هندسی ناب هستند.

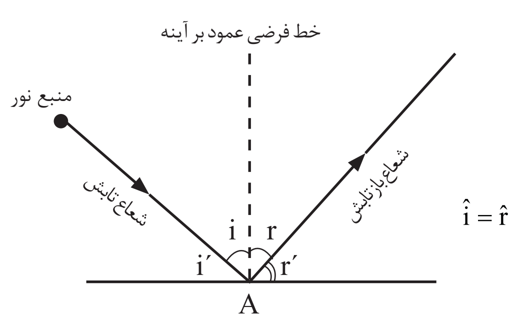
مسئله مـا در این‌جا مطالعـهٔ رفتار شـعاع‌های تابش و بازتابش روی دو آینهٔ عمود بر هم است، وقتی که آینه‌ها حول فصل مشترک‌شـان دوران می‌کنند. منبع مسئله یک کتاب قدیمی فیزیک بود که یکی از همکارانم این مسـئله را از آن اقتباس کـرد و در اختیار این‌جانب قرار داد و متأسـفانه نام کتاب و نویسندهٔ آن را به خاطر نداشت. مسئله ماهیتی کاملاً هندسی دارد و در واقع یک مسئله خالص هندسی است. امید است از مطالعهٔ آن لذت ببرید و از کاربردهای ریاضی بیش از پیش آگاهی پیدا کنید.

مسئله: دو آینهٔ مسطح OM و OM' در نقطهٔ O بر یکدیگر عمودند. صفحه‌ای مانند E که سوراخ کوچکی مانند S در آن تعبیه شده است، در مقابل دو آینه قرار دارد. از درون S یک شعاع نورانی عمود بر صفحهٔ E خارج می‌شـود و بعد از دو انعکاس روی دو آینه به طرف صفحهٔ E بازمی‌گردد و روی آن لکهٔ روشنی مانند S' می‌سازد. اکنون فرض کنید مجموعهٔ دو آینه را حول نقطهٔ O به اندازهٔ زاویهٔ متغیر θ دوران دهیم (بدون آن‌که وضع دو آینه را تغییر دهیم).

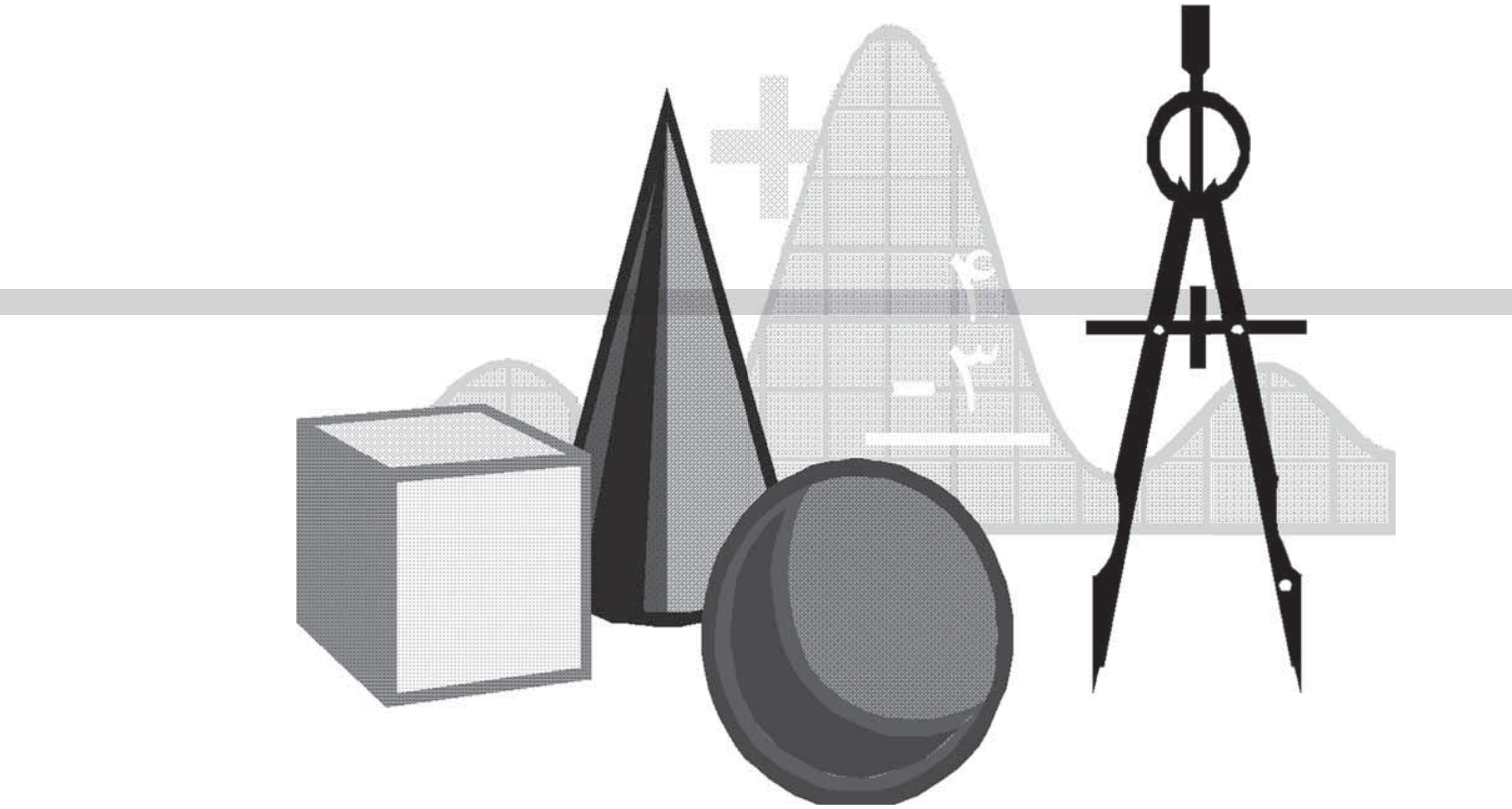
الف) نشان دهید با این دوران جای S' تغییر نمی‌کند و در نتیجه SS' ثابت می‌ماند.

ب) مکان هندسی نقطهٔ برخورد دو عمودی را که در هر حالت بر سطح دو آینه در نقطهٔ تابش رسم می‌شوند، به‌دست آورید.

پیش از آنکه حل مسئله و پاسخ آن را آغاز کنیم، یادآور می‌شویم که شعاع‌های تابش و بازتابش زاویه‌هایی را با خط عمود بر آینه (در نقطهٔ تابش نور) می‌سازند که به زوایای تابش و بازتابش معروف‌اند و اندازه‌های این دو زاویه با یکدیگر برابرند:

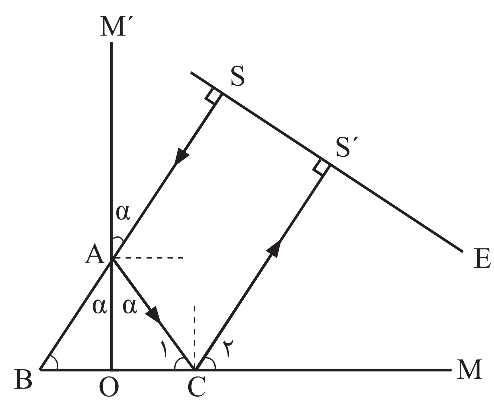


$$\hat{i} = \hat{r}$$



بدیهی است که در این صورت متمم‌های دو زاویهٔ $\hat{i}$ و $\hat{r}$ یعنی $\hat{i}'$ و $\hat{r}'$ نیز با هم برابرند. این قانونی است که به قانون اصلی بازتابش نور از آینه‌های تخت معروف است و خود اثباتی هندسی دارد که در انتهای این بحث آن را می‌آوریم.

با توجه به موضوع فوق، نخستین چیزی که در این مسئله به سادگی می‌توان آن را اثبات کرد، آن است که شعاع بازتابش آخر (که به E برمی‌گردد) با شعاع تابش نخست موازی است و هر دو بر صفحهٔ E عمودند. این موضوع در شکل زیر به سادگی دیده می‌شود:

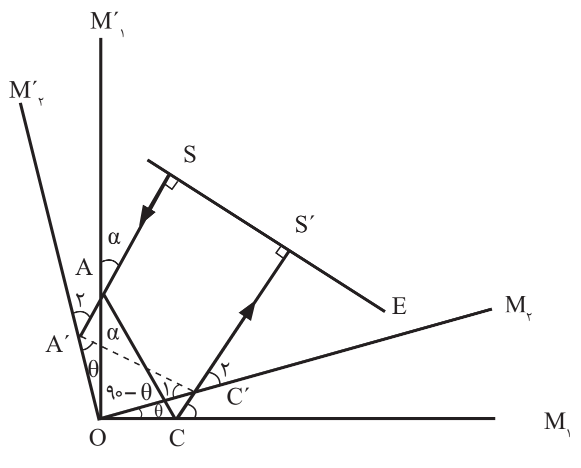


شعاع تابش SA در نقطهٔ A به آینهٔ OM' برخورد می‌کند و شعاع بازتابش AC از آن خارج می‌شود و در نقطهٔ C به آینهٔ OM و شعاع بازتابش آن در نقطهٔ S' به صفحهٔ E برخورد می‌کند. امتدادهای SA و OM یکدیگر را در نقطهٔ B قطع می‌کنند. بدیهی است که با توجه به ویژگی بازتابش داریم:

$$S\hat{A}M' = C\hat{A}O = O\hat{A}B = \alpha \Rightarrow \hat{B} = ۹۰^\circ - \alpha$$
$$\hat{C}_۲ = \hat{C}_۱ = ۹۰^\circ - \alpha \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}_۲ \Rightarrow CS' \| BS$$
$$\Rightarrow CS' \| SA \Rightarrow CS' \perp E$$

و این نتیجه برای هر وضعی که دو آینه داشته باشند (به شرطی که بر هم عمود باشند) صادق است.

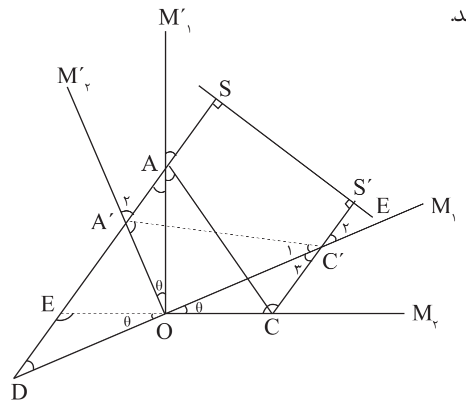
حال مجموعهٔ دو آینه را به اندازهٔ زاویهٔ θ حول O دوران می‌دهیم. شکل زیر حاصل می‌شود:



اکنون با توجه به تغییر وضع آینه‌ها، شعاع نوری SA، در همان راستا و در نقطهٔ A' به آینهٔ اول برخورد می‌کند و بقیهٔ مسیر آن را فعلاً نمی‌دانیم. امّا با توجه به آن‌چه صورت مسئله می‌گوید، می‌توانیم حدس بزنیم که باید مسیر آن $A'C'S$ باشد (C' نقطه برخورد CS'، شعاع بازتابش قبلی، با آینهٔ دوّم در وضع جدید است)، امّا اگر بخواهیم این حدس اثبات شود، باید نشان دهیم که:

$\hat{A}'_1 = \hat{A}'_2$ و $\hat{C}'_1 = \hat{C}'_2$؛ و نکتهٔ جالب آن است که این دو تساوی معادل یکدیگرند، زیرا: $\hat{A}'_1 + \hat{C}'_1 = 90^\circ$ و $\hat{A}'_2 + \hat{C}'_2 = 90^\circ$ بنابراین: $\hat{A}'_1 = \hat{A}'_2 \Leftrightarrow \hat{C}'_1 = \hat{C}'_2$ (چرا؟)

پس کافی است درستی یکی از این دو تساوی را نشان دهیم. برای مثال، نشان دهیم که $\hat{C}'_1 = \hat{C}'_2$. برای اثبات این برابری از یک ابتکار جالب هندسی کمک می‌گیریم: امتدادهای SA' و OC' همدیگر را در نقطهٔ D و امتداد OC نیز $A'D$ را در نقطهٔ E قطع می‌کنند.



حال با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l} O\hat{A}E = O\hat{A}C = \alpha \\ AOC = AOE = 90^\circ \\ AO = AO \end{array}\right\} \overset{\text{(زضز)}}{\Rightarrow} \Delta AOE \cong \Delta AOC \Rightarrow OC = OE$$

$$CS' \perp E, DS \perp E \Rightarrow CS' \| DS \Rightarrow CC' \| DE$$

$$\Rightarrow C'\hat{C}O = D\hat{E}O, E\hat{O}D = C'\hat{O}C = \theta, OC = OE$$

$$\Rightarrow \Delta OCC' \cong \Delta ODE \ \text{(زضز)} \ \Rightarrow \hat{C}'_3 = \hat{D}, \hat{C}'_3 = \hat{C}'_2$$

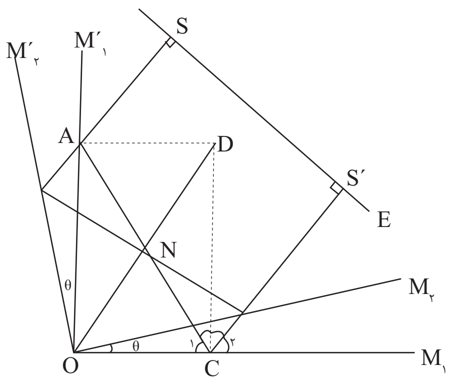
$$\Rightarrow \hat{C}'_2 = \hat{D}, OC' = OD$$

$$OC' = OD, A'\hat{O}C' = A'\hat{O}D = 90^\circ, A'O = A'O \Rightarrow$$

$$\Delta A'OD \cong \Delta A'OC' \ \text{(ضزض)} \ \Rightarrow \hat{C}'_1 = \hat{D}, \hat{C}'_2 = \hat{D} \Rightarrow \hat{C}'_1 = \hat{C}'_2$$

و با توجه به برابری فوق، برابری $\hat{A}'_1 = \hat{A}'_2$ نیز نتیجه می‌شود و در نتیجه مسیر شعاع نوری پس از دوران آینه به اندازهٔ دلخواه θ در بازتابش نهایی بر مسیر CS' منطبق است و لذا SS' تغییر نمی‌کند.

اکنون به قسمت **ب** می‌پردازیم:



مطابق شکل نقطهٔ برخورد دو خط عمود بر دو آینه در دو نقطهٔ تابش A و C را نقطهٔ D می‌نامیم. در مستطیل OCDA، قطرها با یکدیگر برابرند و همدیگر را نصف می‌کنند، پس ON=NC و در نتیجه: $\hat{C}_1 = N\hat{O}C$ ؛ و چون $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ ، بنابراین: $N\hat{O}C = \hat{C}_2$ و از آنجا نتیجه می‌شود: $OD \| CS'$.

دقیقاً با همین استدلال می‌توان نشان داد که همهٔ این مستطیل‌ها در رأس O مشترک‌اند و از برخورد خطوط عمود بر نقاط تابش دو آینه تشکیل می‌شوند، پس قطر مستطیل موازی CS' و در نتیجه موازی AS و عمود بر راستای صفحهٔ E است. لذا با تغییر مکان این آینه‌ها و در نتیجه تغییر مکان D، D روی خط راستی در راستای عمود بر E و گذرنده از O تغییر مکان می‌دهد و مکان هندسی آن همین خط راست است.

پی‌نوشت

اثبات قانون بازتابش نور از آینه‌های تخت؛ اثبات برابری زوایای تابش و بازتابش در بازتابش نور از آینه‌های تخت براساس این اصل فیزیکی انجام می‌گیرد که:

«نور در طی مسیر خود همواره از مسیری می‌گذرد که شامل کمترین زمان ممکن باشد.» در این‌جا چون سرعت نور ثابت است (شعاع‌های تابش و بازتابش در یک محیط قرار دارند)، پس کم‌ترین زمان ممکن وقتی به‌دست می‌آید که نور کوتاه‌ترین مسیر را طی کند. حال مسئلهٔ ما این است:

یک شعاع نوری از نقطهٔ A خارج شده و پس از برخورد با آینه در نقطهٔ M، از نقطهٔ B خارج شده است. شرط این که MB+AM مینیمم شود، چیست؟ برای پاسخ به این پرسش، بازتاب A نسبت به آینه، یعنی نقطهٔ A' را می‌یابیم. حال اگر $A'B$ را رسم کنیم و نقطهٔ برخورد آن را با آینه M بنامیم، این همان نقطهٔ مطلوب است، زیرا با توجه به اینکه L عمودمنصف AA' است، داریم:

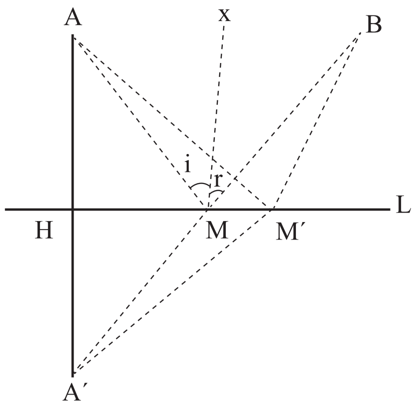
$$MA = MA' \Rightarrow MA + MB = MA' + MB = A'B$$

و برای هر نقطهٔ دلخواه دیگر M' روی L داریم:

$$A'M' = AM' \Rightarrow AM' + M'B = A'M' + M'B > A'B$$

پس نقطهٔ M همان جایی است که شعاع تابش به آینه برخورد می‌کند و در نتیجه داریم:

$$Mx \| AA' \Rightarrow \hat{i} = \hat{A}, \hat{r} = A', \hat{A} = \hat{A}' \Rightarrow \hat{i} = \hat{r}$$



ریاضیات کاربردی

آهنگ آنی و کمیت‌های وابسته

برای دانش‌آموزان سال سوم و چهارم متوسطه

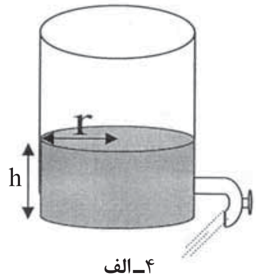
سیمین اکبری‌زاده
دبیر ریاضی ناحیهٔ یک اراک

کلیدواژه‌ها:
آهنگ آنی، آهنگ تغییرات، مشتق و کمیت‌های وابسته.

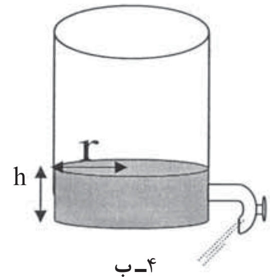
اشاره

در شمارهٔ قبل آهنگ لحظه‌ای کمیت A به کمیت r در $r=r_۰$ با ذکر مثال‌هایی مورد بررسی قرار گرفت، همچنین کمیت‌های وابسته با مثال‌هایی بررسی شد، اینک در پی ادامهٔ مثال‌های کمیت‌های وابسته را می‌آوریم.

مثال۵: بشکه‌ای به شکل استوانه و به شعاع قاعدهٔ ۵۰ سانتی‌متر پر از آب است. اگر شیر بشکه باز باشد و آب با سرعت $۲/۵\pi$ سانتی‌متر مکعب در ثانیه در حال خارج شدن باشد، ارتفاع آب با چه سرعتی تغییر می‌کند؟



۴ـالف



۴ـب

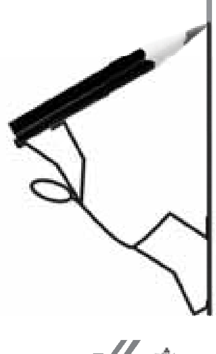
حل: با خارج شدن آب از بشکه، وضعیت بشکه از شکل ۴ـالف به شکل ۴ـب تبدیل می‌شود و همان‌طور که از مقایسهٔ شکل‌ها مشخص است، شعاع سطح قاعدهٔ بشکه (r) در هر دو ثابت است؛ لذا داریم:

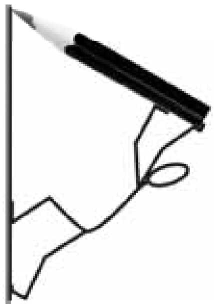
$h'(t)=?$:مجهول ؛ مفروضات: $\begin{cases} r: \text{شعاع سطح قاعدهٔ استوانه} = ۵۰ \text{ ثابت} \\ v'(t) = -۲/۵\pi \quad Cm^۳/s \end{cases}$ ؛ متغیرها: $\begin{cases} v: \text{حجم آب موجود در استوانه} \\ h: \text{ارتفاع آب موجود در استوانه} \\ t: \text{زمان} \end{cases}$

سؤال: فکر می‌کنید حاصل $h'(t)$ مثبت است یا منفی؟ بله درست حدس زدید، چون با گذشت زمان، h کم شده، یعنی h برحسب t تابع نزولی است، پس $h'(t)$ منفی به‌دست می‌آید. می‌دانیم $V=\pi r^۲h$ و چون r ثابت و $۵۰cm$ است، می‌توانیم قبل از مشتق‌گیری آن را جاگذاری کنیم، پس خواهیم داشت:

$$(\text{ارتباط بین } v \text{ و } h) \quad v = ۲۵۰۰\pi h \xRightarrow{\text{مشتق نسبت به } t} v'(t) = ۲۵۰۰\pi h'(t) \xRightarrow{\text{جاگذاری}} -۲/۵\pi = ۲۵۰۰\pi h'(t) \Rightarrow h'(t) = \frac{-۱}{۱۰۰۰}$$

یعنی پس از گذشت ۱ ثانیه، ارتفاع آب موجود در بشکه $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ سانتی‌متر کم می‌شود.





(البته می‌توانستیم r=۵۰ را قبل از مشتق‌گیری وارد نکنیم، ولی در هنگام مشتق‌گیری نسبت به t، با توجه به آن‌که πr^2 عدد ثابت بود، داشته باشیم: $v'(t)=\pi r^2 h'(t)$ و سپس جاگذاری کنیم).

مثال ۶: شن با سرعت ۱۰ مترمکعب در دقیقه روی یک کپهٔ مخروطی‌شکل می‌ریزد. شعاع قاعدهٔ این کپه همواره نصف ارتفاع آن است. سرعت ازدیاد ارتفاع این کپه را هنگامی که این ارتفاع ۵ متر باشد، پیدا کنید.

حل:

متغیرها: $\begin{cases} t: & \text{زمان} \\ r: & \text{شعاع قاعدهٔ کپهٔ مخروطی} \\ h: & \text{ارتفاع کپهٔ مخروطی} \\ v: & \text{حجم کپهٔ مخروطی} \end{cases}$ مفروضات: $\begin{cases} v'(t)=+10\dfrac{m^3}{\min t} \\ r=\dfrac{h}{2} & \text{همواره} \\ h=5m & \text{در لحظهٔ خاص} \end{cases}$ مجهول: $h'(t)=?$

$$v=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h \Rightarrow (\text{ارتباط بین v و h}): v=\frac{\pi}{12}h^3 \xRightarrow{\text{مشتق نسبت به t}} v'(t)=\frac{\pi}{12}(3h^2h'(t))$$

$$\Rightarrow v'(t)=\frac{\pi}{4}h^2h'(t) \xRightarrow{\text{جاگذاری}} 10=\frac{\pi}{4}(5)^2h'(t) \Rightarrow h'(t)=\frac{8}{5\pi}\frac{m}{\min t}$$

مثال ۷: فرض کنید v حجم و s مساحت رویهٔ کل استوانهٔ مستدیر قائمی باشد که ارتفاع آن ۵ و شعاعش r متر است. مطلوب است $\frac{dv}{ds}$ به‌ازای r=۳.

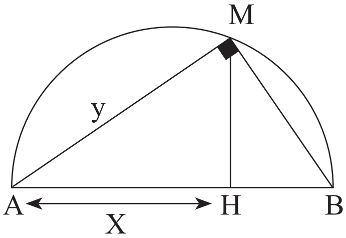
حل: $V'(S)$ مجهول است و چون نوشتن v برحسب s مشکل است، از قضیهٔ مشتق تابع مرکب و فرمول $v'(s)=\frac{v'(t)}{s'(t)}$ استفاده می‌کنیم.

$$v=\pi r^2 h \xRightarrow{h=5=\text{ثابت}} v=5\pi r^2 \xRightarrow{\text{مشتق نسبت به t}} v'(t)=10\pi r r'(t) \xRightarrow{r=3} v'(t)=30\pi r'(t)$$

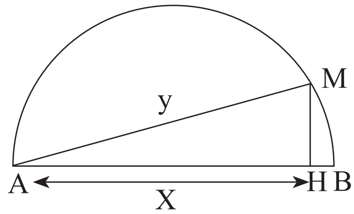
$$s=2\pi r^2+2\pi r h \xRightarrow{h=5=\text{ثابت}} s=2\pi r^2+10\pi r \xRightarrow{\text{مشتق نسبت به t}} s'(t)=4\pi r r'(t)+10\pi r'(t) \xRightarrow{r=3} s'(t)=22\pi r'(t)$$

$$v'(s)=\frac{v'(t)}{s'(t)}=\frac{30\pi r'(t)}{22\pi r'(t)}=\frac{15}{11}$$

مثال ۸: نقطهٔ M بر روی نیم‌دایره‌ای به قطر AB=۹ در حرکت است. تصویر نقطهٔ M بر قطر AB با سرعت ثابت ۰/۰۵ واحد در ثانیه از نقطهٔ A دور می‌شود. در لحظه‌ای که این فاصله ۶/۲۵ واحد است، سرعت افزایش طول وتر AM را بیابید.



۵ ــ الف



۵ ــ ب

حل: وقتی نقطهٔ M حرکت می‌کند، وضعیت آن از شکل ۵- الف به شکل ۵- ب تبدیل می‌شود.

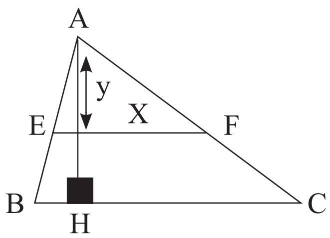
متغیرها: $\begin{cases} t: & \text{زمان} \\ y: & \text{فاصلهٔ نقطهٔ M تا نقطهٔ A} \\ x: & \text{فاصلهٔ تصویر نقطهٔ M بر AB(H) تا نقطهٔ A} \end{cases}$; مفروضات: $\begin{cases} |AB| = ۹ = \text{عدد ثابت} \\ x'(t) = +\frac{۵}{۱۰۰} \\ x = ۶/۲۵ \quad \text{در لحظهٔ خاص} \end{cases}$; مجهول: $y'(t) = ?$

می‌دانیم مثلث AMB قائم‌الزاویه است و در مثلث قائم‌الزاویه، مربع هر ضلع زاویهٔ قائمه برابر است با حاصل‌ضرب وتر در تصویر آن ضلع بر وتر، یعنی $|AM|^۲ = |AB||AH|$؛ پس داریم:

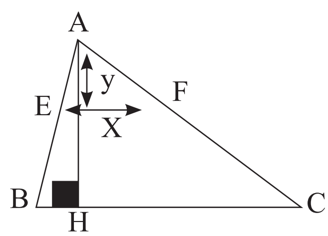
$$(\text{ارتباط بین x و y}):\ y^۲ = ۱۰x \xRightarrow{\text{مشتق نسبت به t}} ۲yy'(t) = ۱۰x'(t) \xRightarrow{\text{جاگذاری و ※}} ۲(۷/۵)y'(t) = ۱۰(۶/۲۵) \Rightarrow y'(t) = ۰/۰۳$$

$$(※)\ \text{در لحظهٔ خاص}\quad y^۲ = ۱۰x \Rightarrow y^۲ = ۱۰(۶/۲۵) \Rightarrow y = ۷/۵$$

مثال ۹: در مثلثی به طول قاعده ۳۲ و ارتفاع ۲۸ واحد، خطی موازی قاعده با سرعت ۰/۰۲ واحد در ثانیه به رأس مقابل آن نزدیک می‌شود و با دو ضلع دیگر این مثلث، مثلث‌های متشابه می‌سازد. در لحظه‌ای که فاصلهٔ ایـن خط تا رأس مقابل ۷ واحد اسـت، سرعت کاهش مساحت مثلث را بیابید.



۶ـ الف



۶ـ ب

حل: وقتی پاره‌خط EF به رأس A نزدیک می‌شود، وضعیتِ مثلث از شکل ۶- الف به ۶- ب تبدیل می‌شود و همان‌طور که از مقایسهٔ دو شکل معلوم است، داریم:

متغیرها: $\begin{cases} t: & \text{زمان} \\ x: & \text{طول خط موازی قاعده (طول EF)} \\ y: & \text{فاصلهٔ خط موازی قاعده تا رأس مقابل} \\ s: & \text{مساحت مثلث بالا (مثلث AEF)} \end{cases}$; مفروضات: $\begin{cases} y'(t) = -\frac{۲}{۱۰۰} \\ y = ۷ \end{cases}$; مجهول: $S'(t) = ?$

$$\left.\begin{array}{l} S = \frac{xy}{۲} \quad \text{مساحت مثلث بالا} \\ \Delta AEF \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{x}{۳۲} = \frac{y}{۲۸} \Rightarrow x = \frac{۸}{۷}y \end{array}\right\} \Rightarrow (\text{ارتباط بین S و y})\ S = \frac{۸}{۱۴}y^۲ \xRightarrow{\text{مشتق نسبت به t}} s'(t) = \frac{۱۶}{۱۴}yy'(t) \Rightarrow s(t) = ۸ \times \times ۲ =$$

$$\xRightarrow{\text{جاگذاری}} s'(t) = \frac{۸}{۷} \times ۷ \times \frac{-۲}{۱۰۰} = \frac{-۱۶}{۱۰۰}$$

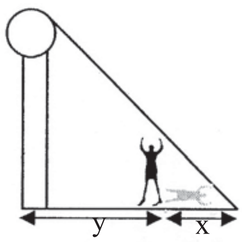
یعنی پس از گذشت ۱ ثانیه، مساحت مثلث بالا $\frac{۱۶}{۱۰۰}$ واحد مربع کاهش می‌یابد.

سخنی برای گوش شنوا: اگر از طرفین فرمول $S = \frac{xy}{۲}$ نسبت به t مشتق بگیریم، در هنگام جاگذاری با مشکل مواجه می‌شویم، چون با $x'(t)$ مواجه خواهیم شد که در فرض مسئله داده نشده است؛ لذا به کمک فرمول دیگری، x را از این فرمول حذف کردیم.

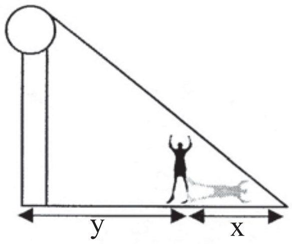
مثال ۱۰: پسری به قد ۱/۵ متر با سرعت ۱/۲۵ متر بر ثانیه به طرف چراغی که در ارتفاع ۴ متری بالای زمین نصب شده است، حرکت می‌کند. وقتی که او در ۲/۵ متری پایهٔ چراغ واقع می‌شود، الف) سرعت تغییرات طول سایهٔ پسر را بیابید.

ب) انتهای سایهٔ پسر با چه سرعتی به پایهٔ چراغ نزدیک می‌شود؟

حـــل: الف) وقتی فرد به طرف تیر چراغ برق حرکت می‌کند وضعیت از شکل ۷–الف به ۷–ب تبدیل می‌شود و همان‌طـــور که از مقایســـهٔ دو شـــکل معلوم می‌شـــود، داریم:

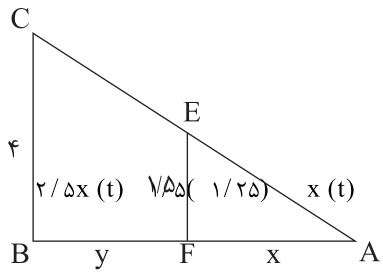


۷ ــ ب



۷ ــ الف

مجهول: $\begin{cases} \text{الف}: x'(t) = ? \\ \text{ب}: x'(t) + y'(t) = ? \end{cases}$; مفروضات: $\left\{ y'(t) = -۱/۲۵ \dfrac{m}{s} \right.$; متغیرها: $\begin{cases} t: \text{زمان} \\ x: \text{طول سایهٔ پسر} \\ y: \text{فاصلهٔ پسر تا تیر چراغ برق} \end{cases}$



$$\text{الف)}\ ABC \sim AEF \Rightarrow \frac{۴}{۱/۵} = \frac{x+y}{x} \Rightarrow ۴x = ۱/۵x + ۱/۵y$$

$$\Rightarrow \text{(ارتباط بین x و y)}: ۲/۵x = ۱/۵y \overset{\text{مشتق نسبت به t}}{\Rightarrow} ۲/۵x'(t) = ۱/۵y'(t)$$

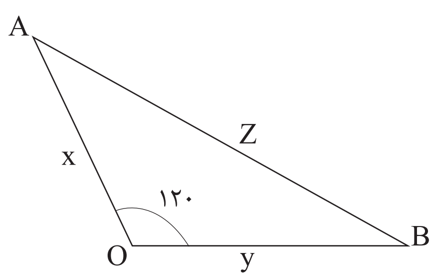
$$\overset{\text{جاگذاری}}{\Rightarrow} ۲/۵x'(t) = ۱/۵(-۱/۲۵) \Rightarrow x'(t) = -۰/۷۵ \frac{m}{s}$$

یعنی پس از گذشت ۱ ثانیه، سایهٔ فرد ۰/۷۵ متر کمتر می‌شود.

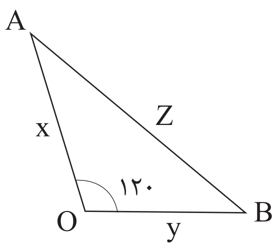
$$\text{ب)}\ x'(t) + y'(t) = -۱/۲۵ - ۰/۷۵ = -۲ \frac{m}{s}$$

مثال ۱۱: دو کشتی A و B روی دو خط که با هم زاویهٔ ۱۲۰° می‌سازند در حال دور شدن از نقطهٔ O هستند هرگاه در لحظهٔ معین OA=۸km و OB=۶km و سرعت کشتی A برابر ۲۰ کیلومتر در ساعت و سرعت کشتی B برابر ۳۰ کیلومتر در ساعت باشد، فاصلهٔ بین دو کشتی با چه سرعتی زیاد می‌شود؟

حل:



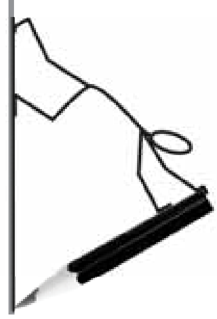
۸ ــ ب

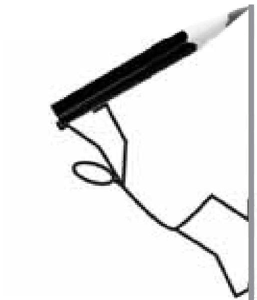


۸ ــ الف

وقتی دو کشتی از نقطهٔ O دور می‌شوند، وضعیت آن‌ها از شکل ۸–الف به ۸–ب تبدیل می‌شود. با مقایسهٔ شکل‌ها داریم:

مجهول: $z'(t) = ?$; مفروضات: $\begin{cases} x'(t) = +۲۰ \dfrac{km}{h} \\ y'(t) = +۳۰ \dfrac{km}{h} \\ x = ۸km \ \text{در لحظهٔ خاص} \\ y = ۶km \ \text{در لحظهٔ خاص} \end{cases}$; متغیرها: $\begin{cases} t: \text{زمان} \\ x: \text{فاصلهٔ کشتی A از نقطهٔ O} \\ y: \text{فاصلهٔ کشتی B از نقطهٔ O} \\ z: \text{فاصلهٔ دو کشتی} \end{cases}$





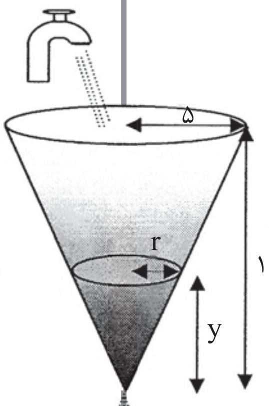
قضیهٔ کسینوس‌ها در $\overset{\Delta}{OAB}$: $z^۲ = x^۲ + y^۲ - ۲xy\cos۱۲۰ \Rightarrow z^۲=x^۲+y^۲+xy$:(ارتباط بین z و x و y)

$$\xRightarrow{\text{مشتق نسبت به } t} ۲zz'(t) = ۲xx'(t) + ۲yy'(t) + x'(t)y + y'(t)x$$

$$\xRightarrow{\text{جاگذاری و} *} ۲(۲\sqrt{۳۷})z'(t) = ۲(۶)(۳۰) + ۲(۸)(۲۰) + ۳۰(۸) + ۲۰(۶) \Rightarrow z'(t) = \frac{۲۶}{\sqrt{۳۷}}$$

$$z^۲ = x^۲ + y^۲ + xy \underset{x=۸}{\overset{y=۶}{\Longrightarrow}} z^۲ = ۳۶ + ۶۴ + ۴۸ \Rightarrow z^۲ = ۱۴۸ \Rightarrow z = ۲\sqrt{۳۷}(*)$$

مثال ۱۲. ظرف مخروطی‌شکلی به ارتفاع ۱۰ متر و شعاع قاعدهٔ ۵ متر مفروض است. سوراخی در رأس ظرف تعبیه شده است و آب در لحظه‌ای که عمقش y است با سرعت $۰/۰۸\sqrt{y}$ مترمکعب در دقیقه از ظرف خارج می‌شود. از طرف دیگر آب با سرعت ثابت c مترمکعب در دقیقه وارد مخزن می‌شود. در لحظه‌ای که عمق آب $۶\frac{۱}{۴}$ متر است، مشاهده می‌شود که عمق آن با سرعت ۰/۰۲ متر در دقیقه افزایش می‌یابد. آیا با این شرایط مخزن پر خواهد شد؟ چرا؟



شکل ۹

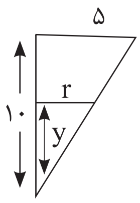
حل: وقتی آب موجود در ظرف تغییر می‌کند، خواهیم داشت:

متغیرها: $\begin{cases} t: \text{زمان} \\ y: \text{عمق آب موجود در ظرف} \\ r: \text{شعاع سطح قاعدهٔ آب موجود در ظرف} \\ v: \text{حجم آب موجود در ظرف} \end{cases}$ ؛ مفروضات: $\begin{cases} y = \frac{۲۵}{۴} & \text{در لحظهٔ خاص} \\ y'(t) = +\frac{۲}{۱۰۰} \end{cases}$

برای یافتن جواب سؤال، اولاً با توجه به فرض، تغییر خالص حجم برای عمق y عبارت است از:

$v'(t) = c - ۰/۰۸\sqrt{y}$؛ پس برای $y = \frac{۲۵}{۴}$ داریم: $v'(t) = c - \frac{۸}{۱۰۰} \times \sqrt{\frac{۲۵}{۴}} = c - \frac{۱}{۵}$

ثانیاً: $v = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ y$ و با توجه به تشابه مثلث‌ها:



داریم: $\frac{r}{۵} = \frac{y}{۱۰}$؛ پس $r = \frac{۱}{۲}y$

و از این دو ارتباط بین V و y (آن‌چه آهنگ تغییرش نسبت به t مجهول است یا داده شده است) به‌دست‌می‌آید.

$$(\text{ارتباط بین } V \text{ و } y): v = \frac{\pi}{۱۲}y^۳ \xRightarrow{\text{مشتق نسبت به } t} v'(t) = \frac{\pi}{۱۲}y^۲y'(t) \xRightarrow{\text{جاگذاری}} v'(t) = \frac{\pi}{۱۲}(\frac{۲۵}{۴})^۲(\frac{۲}{۱۰۰}) = \frac{۲۵\pi}{۱۲۸}$$

یعنی در لحظه‌ای که $y = \frac{۲۵}{۴}$، طبق فرض ۴ مسئله داریم: $v'(t) = \frac{۲۵\pi}{۱۲۸}$. طبق فرض ۲ و ۳ مسئله نیز برای $y = \frac{۲۵}{۴}$ به‌دست آوردیم $v'(t) = C - \frac{۱}{۵}$، پس باید $C - \frac{۱}{۵} = \frac{۲۵\pi}{۱۲۸}$ در نتیجه $C = \frac{۲۵\pi}{۱۲۸} + \frac{۱}{۵} \simeq ۰/۸$ باشد. لذا برای عمق y داریم: $v'(t) = ۰/۸ - ۰/۰۸\sqrt{y}$ و چون برای $۰ \le y \le ۱۰$ همواره $v'(t) > ۰$ برقرار است، بنابراین مخزن پر خواهد شد.

منابع

۱. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی، جلد اول

۲. جورج توماس، راس فینی، ترجمه: مهدی بهزاد، سیامک کاظمی، علی کافی

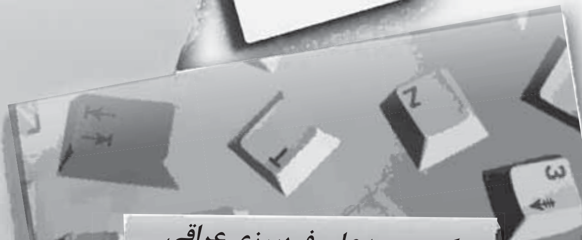
۳. جورج ب. توماس، ترجمه: علی‌اکبر جعفریان، ابوالقاسم میامئی

۴. لیت هولد، ترجمه: دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده

آموزش

۶

بستهٔ نرم‌افزاری متمتیکا



دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی
عضو هیات علمی گروه ریاضی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی

مقدمه

یکی از مباحث مهم و اساسی در نظریهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال، مفهوم مشتق یک تابع است که در کتب حسابان سال سوم متوسطه و ریاضی دورهٔ پیش‌دانشگاهی روی آن بحث شده است. اهمیت مشتق به دلیل کاربردهای زیاد آن در علومی چون فیزیک و مکانیک است. در این قسمت، خوانندگان گرامی را با دستورالعمل‌های محاسبه مشتق یک تابع در محیط بستهٔ نرم‌افزاری متمتیکا آشنا می‌کنیم. متمتیکا می‌تواند عملیات مربوط به محاسبهٔ مشتقات متوالی یک تابع را (در صورت وجود) به شکلی ساده انجام دهد. در متمتیکا چندین راه برای محاسبهٔ مشتق وجود دارد که می‌توان هریک را که مناسب‌تر بود برای انجام اعمال مشتق‌گیری استفاده کرد.

کلیدواژه‌ها:
مشتق، دستورالعمل D، دستورالعمل ∂، مشتق راست و چپ، دستورالعمل Derivative

۱. دستورالعمل‌های f'، f'' و ...

به منظور محاسبهٔ متشقات متوالی تابع مفروض f می‌توان ابتدا ضابطهٔ این تابع را در متمتیکا تعریف و سپس دستورالعمل $f'[x]$، $f''[x]$ و... را برای محاسبهٔ مشتق اول، مشتق دوم و... اجرا کرد. با فشار همزمان دکمه‌های Shift+Enter هر یک از مشتق‌ها جداگانه حساب می‌شوند:

f[x_] ضابطهٔ تابع ;
f'[x]
f''[x]
f'''[x]

مثال ۱: در این مثال، مشتقات اول تا سوم تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^{٥}+٢x^{٤}-٦x^{٣}+٣x^{٢}-٤x+٧$ محاسبه شده‌اند.

$f[x\_]=x^{٥}+٢x^{٤}-٦x^{٣}+٣x^{٢}-٤x+٧;$
$f'[x]$
$-٤+٦x-١٨x^{٢}+٨x^{٣}+٥x^{٤}$
$f''[x]$
$٦-٣٦x+٢٤x^{٢}+٢٠x^{٣}$
$f'''[x]$
$-٣٦+٤٨x+٦٠x^{٢}$

۲. دستورالعمل D

این دستورالعمل که به صورت زیر تعریف می‌شود، مشتق تابع f را نسبت به متغیر x به‌دست می‌آورد:

D[f(x), x]

مثال ۲: مشتق تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$D[\sqrt{x}, x]$

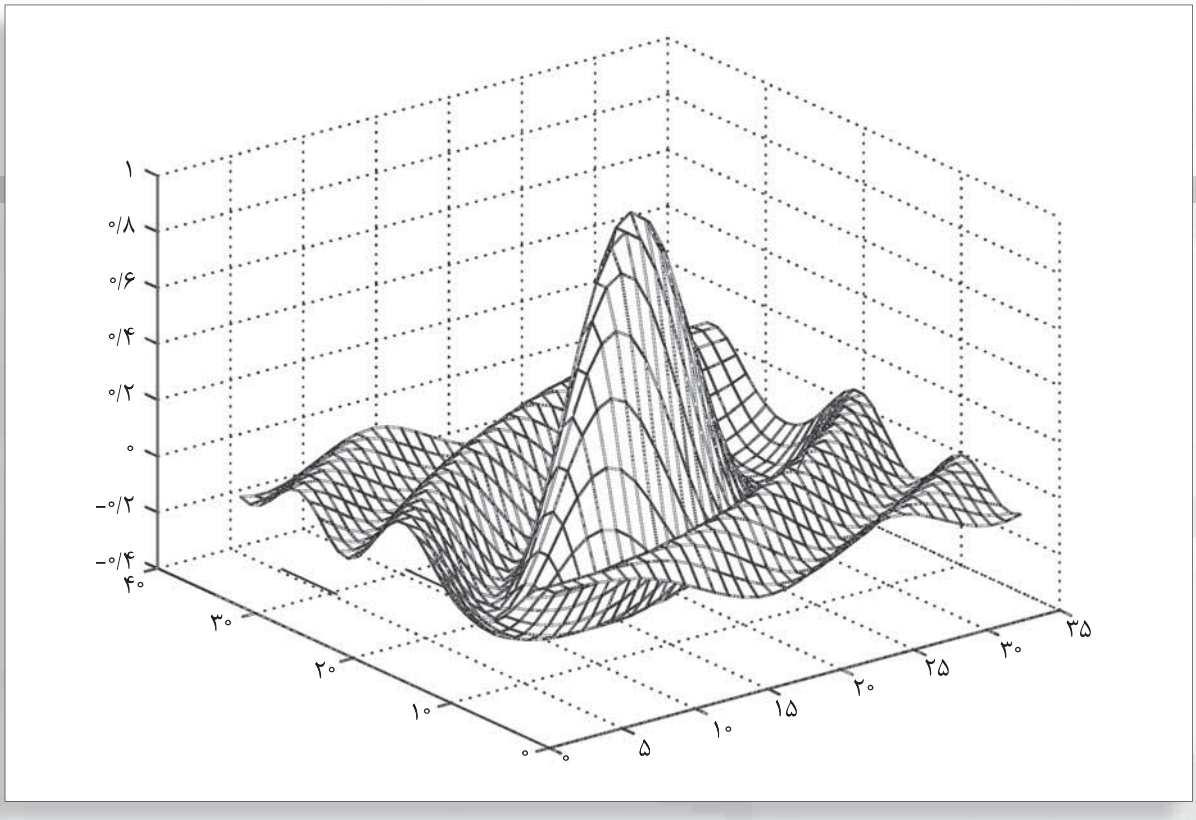
$\frac{١}{٢\sqrt{x}}$

همچنین برای محاسبهٔ مشتق مرتبهٔ nام تابع $f\ (n\in N)$ نسبت به متغیر x از دستور D به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

D[f(x), {x, n}]

مثال ۳: در این مثال، مشتق اول و سوم تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{١}{x}$ محاسبه شده است. توجه شود که چون ابتدا ضابطهٔ تابع جداگانه معرفی شده، باید ابتدا با فشار همزمان دکمه‌های Shift+Enter پس از تایپ ضابطهٔ f و علامت «;» این تابع را در متمتیکا معرفی کرد و سپس دستورالعمل‌های D را برای محاسبهٔ مشتق‌های f به‌کار برد.

$f[x\_]=\frac{١}{x};$



D[f(x), x]

$-\frac{۱}{x^{۲}}$

D[f(x), {x, ۳}]

$-\frac{٦}{x^{٤}}$

مثال ۴: فرض کنید f(x)=Sinx در زیر مشتقات اول تا چهارم تابع f با به‌کارگیری دستورالعمل D محاسبه شده‌اند. در این مثال، ضابطهٔ f جداگانه تعریف نشده و در داخل دستور D مطرح شده است.

D[Sin[x], x]

Cos[x]

D[Sin[x], {x, ۲}]

– Sin [x]

D[Sin[x], {x, ۳}]

– Cos [x]

D[Sin[x], {x, ۴}]

Sin[x]

مثال ۵: در این مثال مشتق‌های اول و دوم تابع f با ضابطهٔ f(x)=Lnx به دست آمده‌اند. توجه شود که در متمتیکا این تابع به صورت Log[x] تعریف می‌شود (یعنی لگاریتم در مبنای عدد نپر).

D[Log[x] , x]

$\frac{۱}{x}$

D[Log[x], {x, ۲}]

$-\frac{۱}{x^{۲}}$

نکته: می‌دانیم $f'(a)=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. به عبارت دیگر اگر حد کسر $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ وقتی h به سمت صفر میل می‌کند، وجود داشته باشد، آنگاه مقدار این حد مشتق تابع f در x=a است. با استفاده از دستور Limit می‌توان مطابق تعریف مشتق، حاصل مشتق تابع مفروض f را در نقطهٔ x=a یافت.

مثال ۶: فرض کنید $f(x)=e^x$ مطلوب است f′(a) با استفاده از تعریف مشتق

حل:

$f[x\_]=e^x;$

$\text{Limit}\left[\frac{f[a+h]-f[a]}{h}, h\to ۰\right]$

e^a

بنابراین $f'(a)=e^a$

گفتنی است برای ورود عدد نپر در صفحهٔ متمتیکا کافی است در پنجرهٔ Basic Math Input روی نماد (ⅇ) کلیک کنیم. در این

نکته: می‌دانیم $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. به عبارت دیگر اگر حد کسر $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ وقتی h به سمت صفر میل می‌کند، وجود داشته باشد، آنگاه مقدار این حد مشتق تابع f در x=a است

پنجره تمام نمادهای معروف ریاضی وجود دارد و به‌راحتی با کلیک روی هر یک از آن‌ها نماد موردنظر روی صفحه ظاهر می‌شود. البته چون می‌خواهیم e^x را تایپ کنیم، باید ابتدا در این پنجره روی نماد توان‌رسانی $\blacksquare^{\square}$ کلیک و سپس روی نماد عدد نپر (e) کلیک کنیم و سپس با فشار دکمهٔ Tab به مربع بالایی رویم و x را در آن تایپ کنیم. تأکید می‌شود که اگر حرف e را در صفحه تایپ کنید، متمتیکا آن را به عنوان عدد نپر در نظر نمی‌گیرد.

مثال ۷: فرض کنید $f[x]=\sqrt[3]{x}$، مطلوب است f'(a).

حل: با توجه به تعریف مشتق

$f[x\_]=\sqrt[3]{x};\qquad f[x]=\sqrt[3]{x};$

$\text{Limit}\left[\frac{f[a]-f[a-h]}{h}, h\to 0\right]$

$\frac{1}{3a^{2/3}}$

لذا $f'(a)=\frac{1}{3a^{2/3}}$.

نکته: در صورتی که بخواهیم مقدار مشــتق تابع f را در نقطهٔ x=a از دامنهٔ تابع f به دست آوریم می‌توانیم از دستورالعمل D به صورت زیر استفاده کنیم:

D[f[x], x] /. x→a

مثال ۸: گیریم $f(x)=\text{Sin}\sqrt[3]{x^2}$، مطلوب است f'(1).

حل:

$f[x\_]=\text{Sin}[\sqrt[3]{x^2}];$

D[f[x], x] /. x→1

$\frac{2\text{Cos}[1]}{3}$

بنابراین $f'(1)=\frac{2}{3}\text{Cos}1$.

نکته: با به‌کارگیری دســتورالعمل D به صــورت زیر می‌توان فرمول‌های مشتق‌های جمع (یا تفریق)، ضرب و تقسیم دو تابع مفروض f و g را یافت. در مورد مشــتق عمل تقسیم، می‌توان با به‌کارگیری دستورالعمل Simplify عبارت خروجی را ساده کرد. همچنین مشتق ترکیب این دو تابع به صورت $(fog)'(x)$ نیز با این دســتور قابل محاسبه است که در زیر نتیجه به شکل $g'(x).f'(g(x))$ به‌دست آمده است.

D[f[x]+g[x], x]

$f'[x]+g'[x]$

D[f[x] g[x], x]

$g[x]\, f'[x]+f'[x]\, g'[x]$

D[f[x] / g[x], x]

$\frac{f'[x]}{g[x]}-\frac{f[x]g'[x]}{g[x]^2}$

D[f [g[x]], x]

$f'[g[x]]\, g'[x]$

مثال ۹: فرض کنید f(x)= Tanx و g(x)= Cosx، مطلوب اســت $(f+g)'(n)$ و $(f\times g)'(x)$ و مشتق Ln(f(x)+g(x)) در x=π.

حــل: ابتدا ضابطه‌های f و g را جداگانه در دو ســطر مختلف تعریف و بعد از هر کدام علامت «;» را تایپ و هر سطر را با فشار دکمه‌های Shift+Enter اجرا می‌کنیم تا این توابع در حافظه ذخیره شوند. سپس با به‌کارگیری دستور D به صورت زیر، نتایج موردنظر را به دست می‌آوریم:

f[x_]= Tan[x];

g[x_]=Cos [x];

D[f[x]+g[x], x]

$\text{Sec}[x]^2-\text{Sin}[x]$

D [f[x] g[x], x]

Cos [x]

D[Log [f[x] + g[x]], x] /. x→π

−1

مثــال ۱۰: فرض کنید $f(x)=x^2+1$ و $g(x)=\sqrt{x}$، مطلوب است $(g.f)'(0)$.

حل:

$f[x\_] = x^{۲} + ۱;$

$g[x\_] = \sqrt{x};$

$D[g[f[x]], x] /. x \to ۰$

۰

بنابراین: $(g.f)'(۰)=۰$.

مثال ۱۱: گیریم $f(x) = (\sqrt{۱+x^{۲}} - x)^{۷}$ و $g(x) = (\sqrt{۱+x^{۲}} + x)^{۷}$، مطلوب است $(f\times g)'(x)$.

حل:

$f[x\_] = (\sqrt{۱+x^{۲}} - x)\wedge ۷;$

$g[x\_] = (\sqrt{۱+x^{۲}} + x)\wedge ۷;$

Simplify [D[f[x] g[x], x]]

۰

بنابراین $(f\times g)'(x)=۰$. توجه شود که اگر دستورالعمل Simplify استفاده نشود، حاصل $(f\times g)'(x)$ بدون ساده شدن و به شکل یک عبارت طولانی که نتیجهٔ مشتق $f\times g$ است مشخص می‌شود. لذا به‌کارگیری این دستور برای ملاحظهٔ شکل ساده شدهٔ مشتق توصیه می‌شود.

مثال ۱۲: مطلوب است مشتق تابع f با ضابطهٔ $f(x) = x^{۲}\sqrt[۳]{x^{۲}+۱}$.

حل:

$\text{Simplify}\left[D\left[x^{۲}\sqrt[۳]{x^{۲}+۱}, x\right]\right]$

$\dfrac{۲x(۳+۴x^{۲})}{۳(۱+x^{۲})^{۲/۳}}$

در این مثال نیز از دستور Simplify برای ساده‌کردن حاصل مشتق تابع f استفاده شده است.

نکته: می‌دانیم تابع f در $x=a$ وقتی مشتق‌پذیر است که مقادیر مشتقات راست و چپ این تابع در $x=a$ وجود داشته و برابر باشند. با استفاده از تعریف مشتق راست و چپ و دستورالعمل Limit می‌توان به بررسی مشتق‌پذیری تابع f در یک نقطه پی برد.

مثال ۱۳: آیا تابع f با ضابطهٔ $f(x)=|x|$ در $x=۰$ مشتق‌پذیر است؟

در صورتی که بخواهیم مقدار مشتق تابع f را در نقطهٔ $x=a$ از دامنهٔ تابع f به دست آوریم می‌توانیم از دستورالعمل D به صورت زیر استفاده کنیم:

D[f[x], x] /. x→a

حل:

$f[x\_] = \text{Abs}[x];$

$\text{Limit}\left[\dfrac{f[x]-f[۰]}{x}, x \to ۰, \text{Direction} \to ۱\right]$

-۱

$\text{Limit}\left[\dfrac{f[x]-f[۰]}{x}, x \to ۰, \text{Direction} \to -۱\right]$

۱

بنابراین چون مقادیر مشتق‌های راست و چپ به تعریف ۱ و ۱- شده و این مقادیر برابر نیستند، این تابع در $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست.

۳) دستور ∂_x (یا $\partial_{x,x}$):

صورت کلی این دستور عبارت است از:

$\partial_{\square}$ (ضابطهٔ تابع f)

$\partial_{\square,\square}$ (ضابطهٔ تابع f)

نماد $\partial_{\square}$ (یا $\partial_{\square,\square}$) در پنجرهٔ Basic Math Input وجود دارد و با کلیک روی این نماد می‌توان آن را در صفحهٔ متمتیکا وارد و درون □ متغیر موردنظر را تایپ و سپس ضابطهٔ تابع f را درون پرانتز تایپ کرد. نماد ∂_x به معنای مشتق نسبت به متغیر x و نماد ∂_a به معنای مشتق نسبت به متغیر a است.

مثال ۱۴: در این مثال مشتق توابع با ضابطه‌های $x^{۵}+۳x^{۴}$، $\text{Sin}^{۲}x$، tanx، و $\text{Sin}^{۳}(ax+b)$ نسبت به متغیر x به ترتیب محاسبه شده‌اند:

$\partial_x (x^{۵}+۳x^{۴})$

$۱۲x^{۳}+۵x^{۴}$

$\partial_{x,x}(\text{Tan}[x])$

$۲\text{Sec}[x]^{۲}\text{Tan}[x]$

$\partial_x (\text{Sin}[x]^{۲})$

$۲\text{Cos}[x]\text{Sin}[x]$

$\partial_{x,x}(\text{Sin}[ax+b]^{۳})$

$۶a^{۲}\text{Cos}[b+ax]^{۲}\text{Sin}[b+ax] - ۳a^{۲}\text{Sin}[b+ax]^{۳}$

به خوانندگان گرامی پیشنهاد می‌شود مسائل مبحث مشتق در کتاب حسابان یا ریاضی عمومی را با به‌کارگیری دستورالعمل‌های فوق به عنوان تمرین حل کنند تا به این دستورها مسلط شوند. در قسمت بعد روی کاربردهای مشتق با استفاده از متمتیکا می‌پردازیم.

مثال ۱۵: اگر $f(x,a) = x^3a + xa^3$، مطلوب است مشتق f نسبت به a و مشتق f نسبت به x.

حل:

$\partial_a (x^3a + xa^3)$

$3a^2x + x^3$

$\partial_a (x^3a + xa^3)$

$a^3 + 3ax^2$

نکته: با استفاده از دستورالعمل ∂ می‌توان به صورت زیر مشتق مرتبهٔ n≥۱ام تابع f را یافت.

$\partial_{\{x,n\}}$ (ضابطهٔ تابع f)

مثال ۱۶: مطلوب است مشتق سوم تابع f با ضابطهٔ $f(x) = (3x+2)^5$.

حل:

$\partial_{\{x,3\}}((3x+2)\wedge 5)$

$1620(2+3x)^2$

۴) دستورالعمل Derivative:

واژهٔ Derivative به معنای مشتق است و این دستور نیز مشابه دستورالعمل‌های قبلی برای محاسبهٔ مشتق یک تابع استفاده می‌شود. صورت کلی این دستور عبارت است از:

Derivative [n] [f] [x]

با اجرای این دستور مشتق nام (n≥۱) تابع مفروض f نسبت به متغیر x به‌دست می‌آید.

مثال ۱۷: اگر $f(x)=e^{3x}$، مطلوب است $f'(x)$ و $f''(x)$.

حل:

f[x–] = e³x;

Derivative [1] [f] [x]

$3e^{3x}$

Derivative [2] [f] [x]

$9e^{3x}$

در آخر، برای مرور دستورالعمل‌های ∂ و D مشتق چند تابع به‌دست آمده است.

مثال ۱۸:

الف) مطلوب است مشتق تابع با ضابطهٔ $\frac{1}{\text{Cosx}} + \text{Tan}\,x$ در $x = \frac{\pi}{3}$

ب) مطلوب است مشتق تابع با ضابطهٔ $\sqrt[3]{\text{Cosx}}$

ج) مطلوب است مشتق تابع با ضابطهٔ 2^x

د) مطلوب است مشتق تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \frac{e^{2x} + e^x + 1}{e^x + 1}$

حل: الف)

$\partial_x (\frac{1}{\text{Cos}[x]} + \text{Tan}[x]) /. x \to \frac{\pi}{3}$

$4 + 2\sqrt{3}$

ب)

$D\left[\sqrt[5]{\text{Cos}[x]}, x\right]$

$-\frac{\text{Sin}[x]}{5\text{Cos}[x]^{4/5}}$

ج)

$D[2^x, x]$

$2^x \,\text{Log}[2]$

د)

$f[x\_] = \frac{e^{2x} + e^x + 1}{e^x + 1};$

Simplify[D[f[x], x]]

$\frac{e^{2x}(2+e^x)}{(1+e^x)^2}$

به خوانندگان گرامی پیشنهاد می‌شود مسائل مبحث مشتق در کتاب حسابان یا ریاضی عمومی را با به‌کارگیری دستورالعمل‌های فوق به عنوان تمرین حل کنند تا به این دستورها مسلط شوند. در قسمت بعد روی کاربردهای مشتق با استفاده از متمتیکا می‌پردازیم.

منابع

۱. کتب درسی **حسابان ۱ و ۲** سال سوم رشتهٔ ریاضی و ریاضی عمومی ۱ و ۲ دورهٔ پیش‌دانشگاهی رشتهٔ تجربی، ۱۳۹۰.

2. ***Mathematica***, Second Edition, Eugene Don, Schaum's outline series, McGrow Hill, 2009.

آموزش

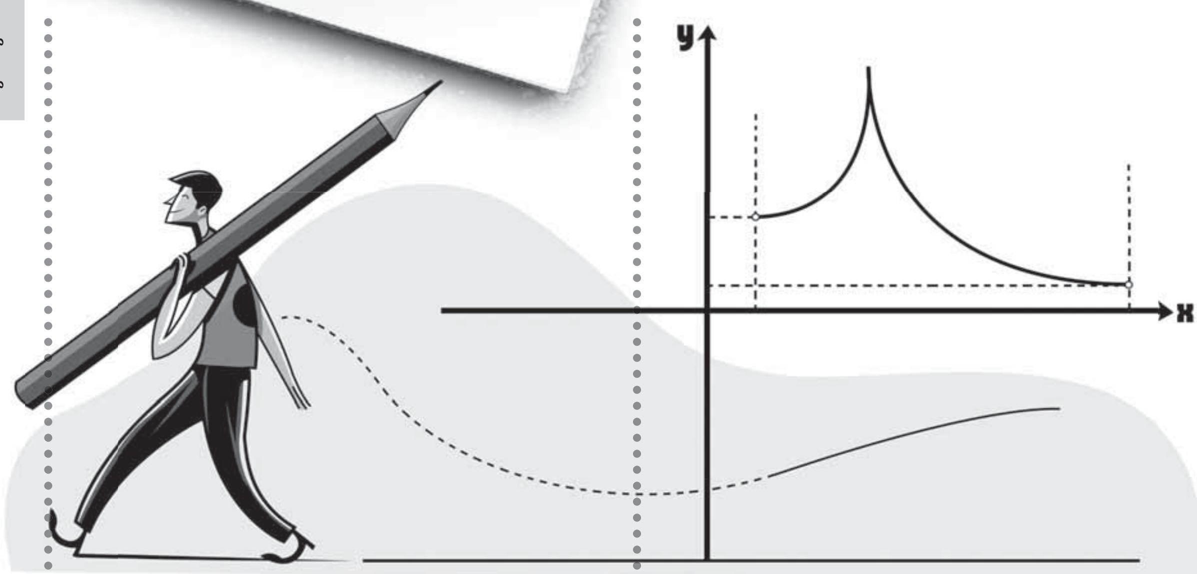
۲

رسم نمودار تابع

$$f(x)=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

احسان یارمحمدی

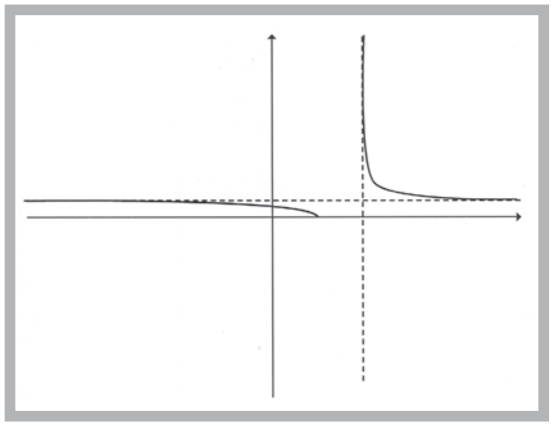
کلیدواژه‌ها:
رسم نمودار، مجموعهٔ تهی، جدول تغییرات، مجانب قائم و افقی، مشتق صعودی، دامنه.



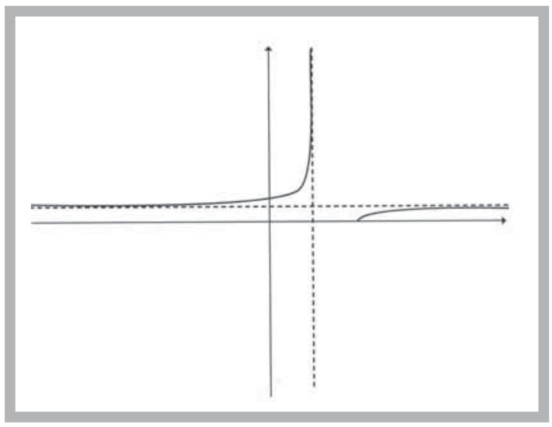
موضـوع ایـن مقاله بحث و بررسـی رسـم نمـودار تابع $f(x)=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}, a,b,d\in\mathbb{R}, c\in\mathbb{R}-\{0\}$ اسـت. در ضمـن می‌دانیم کـه تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}, c\neq 0$ را تابـع هموگرافیک می‌نامند. بنابراین اگر شما ریاضی‌آموزان، آشنایی لازم و کافی را با تابع هموگرافیک و رسم نمودار آن داشته باشید، به‌علت تشابه‌های مشترک بین توابع هموگرافیک و $f(x)=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}, c\neq 0$ درک بهتر و مفیدتری از این مقاله خواهید داشت. در شمارهٔ قبل به بررسی ۶ حالت مختلف برای این پرداختیم. اینک در ادامهٔ آن، حالت‌های دیگری را بررسی می کنیم.

حالت هفتم

اگـر در تابـع $f(x)=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ داشـته باشـیم: $a<0, b>0, c<0, d>0$ یا $a>0, b<0, c<0, d<0$، در این صورت، تابع مزبور دارای دامنه‌ی $D_f=(-\infty,-\frac{b}{a}]\cup(-\frac{d}{c},+\infty)$ یا $D_f=(-\infty,-\frac{d}{c}]\cup[-\frac{b}{a},+\infty)$، مجانب افقی $y=\sqrt{\frac{a}{c}}>0$ و مجانـب قائم $x=-\frac{d}{c}>0$ اسـت و نمـودار آن شـبیه یکی از منحنی‌های زیر خواهد بود:



یا

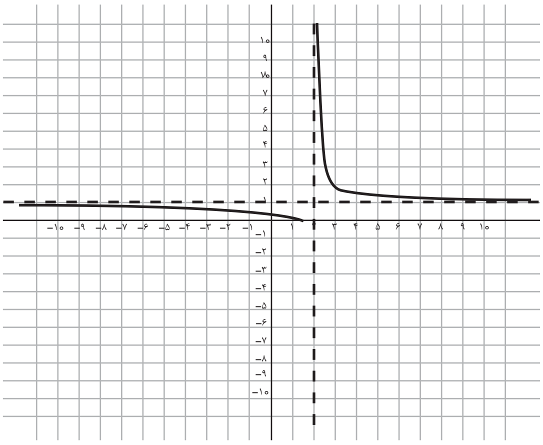


مثال ۷: جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\sqrt{\frac{1-2x}{4-2x}}$ را رسم کنید.

حل: دامنه‌ی تابع مزبور $D_f=(-\infty,\frac{1}{2}]\cup(2,+\infty)$، مجانب افقی آن $y=1$ و مجانب قائم آن $x=2$ است.

$f(x)=\sqrt{\frac{1-2x}{4-2x}} \Rightarrow f'(x)=\frac{-3}{(4-2x)^2\times\sqrt{\frac{1-2x}{4-2x}}}<0 \Rightarrow$ نزولی $f(x)$

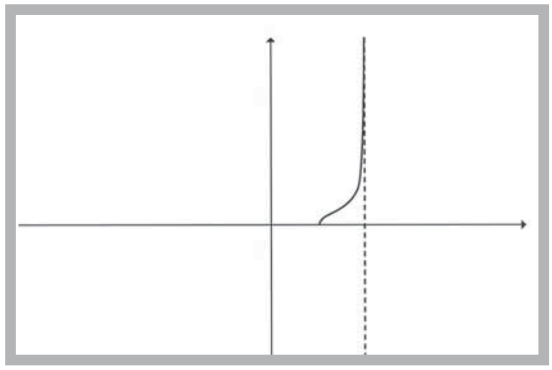
x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$				
$f(x)$	$1 \searrow$	0		$+\infty$	$\nearrow 1$



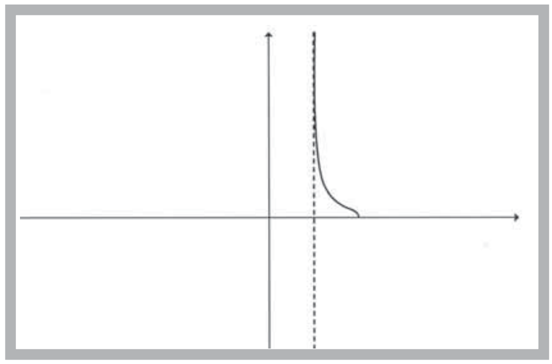
تمرین ۷: جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\sqrt{\frac{4x-8}{x-6}}$ را رسم کنید

حالت هشتم

اگر در تابع $f(x)=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ داشته باشیم: $a<0, b>0, c>0, d<0$ یا $a>0, b<0, c<0, d>0$، در این صورت، تابع مزبور دارای دامنه‌ی $D_f=[-\frac{b}{a},-\frac{d}{c})$ و مجانب قائم $x=-\frac{d}{c}>0$ است و مجانب افقی ندارد و نمودار آن شبیه یکی از منحنی‌های زیر خواهد بود:



یا

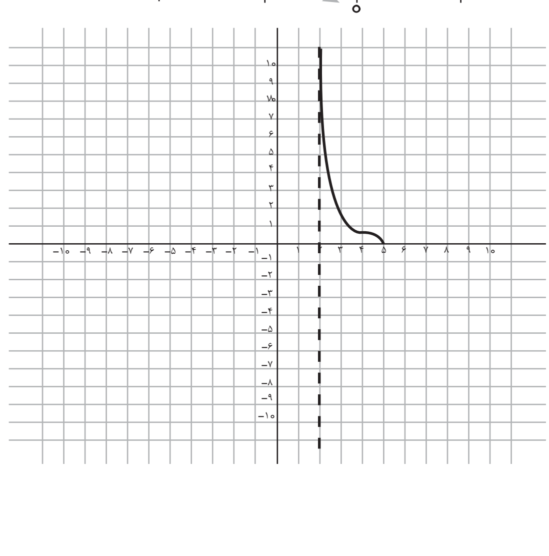


مثال ۸: جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\sqrt{\frac{۵-x}{x-۲}}$ را رسم کنید.

حل: دامنه‌ی تابع مزبور $D_f=(۲,۵]$، مجانب قائم آن $x=۲$ است و مجانب افقی ندارد.

$f(x)=\sqrt{\frac{۵-x}{x-۲}} \Rightarrow f'(x)=\frac{-۳}{۲(x-۲)^{۲}\times\sqrt{\frac{۵-x}{x-۲}}}<۰ \Rightarrow$ نزولی $f(x)$

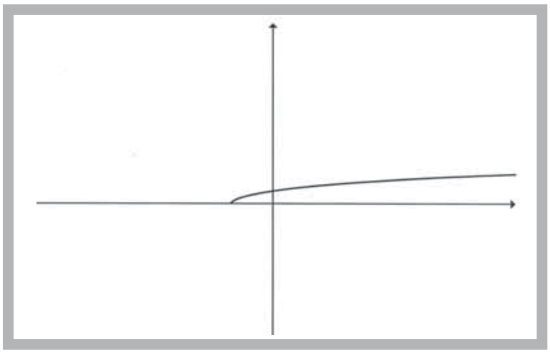
x	$-\infty$	۲		۵	$+\infty$
$f'(x)$			—		
$f(x)$		$+\infty$	↘	۰	



تمرین ۸: جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\sqrt{\frac{x-۶}{۱-x}}$ را رسم کنید.

حالت نهم

در تابع $f(x)=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ اگر داشته باشیم $c=۰$ و $a>۰,b>۰,d>۰$ یا $a<۰,b<۰,d<۰$، تابع مزبور به صورت $f(x)=\sqrt{\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}}$ تبدیل می‌شود و دامنه‌ی آن $D_f=[-\frac{b}{a}<۰,+\infty)$ است، مجانب قائم و مجانب افقی ندارد و نمودار آن شبیه شکل زیر است:

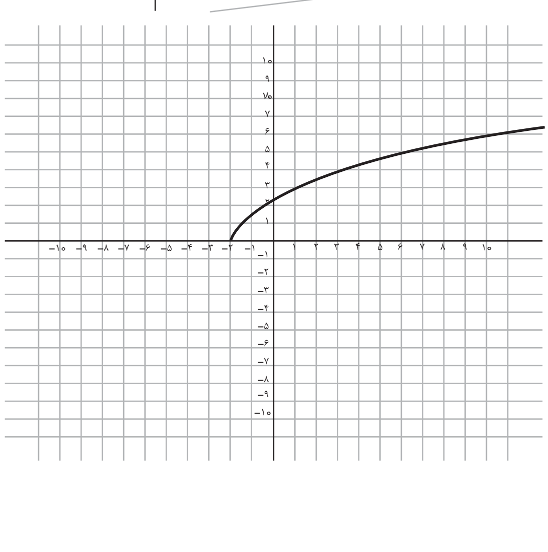


مثال ۹: جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\sqrt{\frac{۶x+۱۲}{۲}}$ را رسم کنید.

حل: دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{\frac{۶x+۱۲}{۲}}=\sqrt{۳x+۶}$ برابر با $D_f=[-۲,+\infty)$ است و تابع مزبور دارای مجانب افقی و مجانب قائم نیست.

$f(x)=\sqrt{۳x+۶}\Rightarrow f'(x)=\frac{-۳}{۲\sqrt{۳x+۶}}>۰\Rightarrow$ صعودی $f(x)$

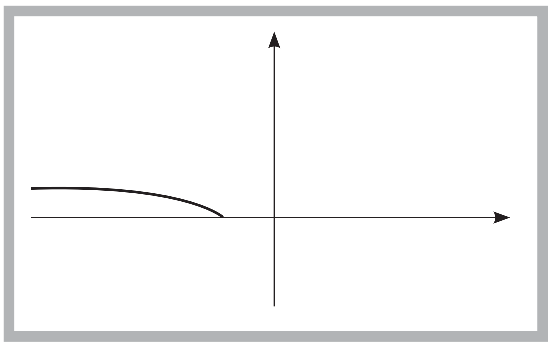
x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	۰	↗	$+\infty$



تمرین ۹: جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\sqrt{۲x+۴}$ را رسم کنید.

حالت دهم

در تابع $f(x)=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ اگر داشته باشیم $c=۰$ و $a>۰, b>۰, d<۰$ یا $a<۰, b<۰, d>۰$، تابع مزبور به صورت $f(x)=\sqrt{\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}}$ تبدیل می‌شود و دامنه‌ی آن $D_f=(-\infty,-\frac{b}{a}<۰]$ است، مجانب قائم و مجانب افقی ندارد و نمودار آن شبیه منحنی زیر خواهد بود:

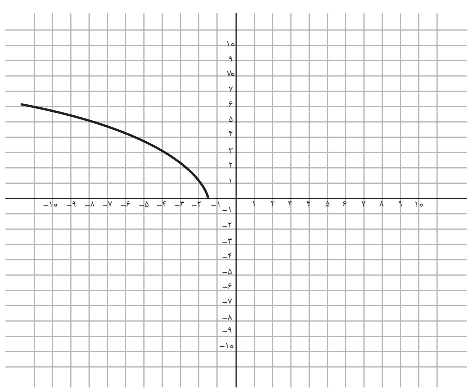


مثال ۱۰: جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\sqrt{\frac{۱۲x+۱۸}{-۳}}$ را رسم کنید.

حل: دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\frac{۱۲x+۱۸}{-۳}}=\sqrt{-۴x-۶}$ برابر با $D_f=(-\infty,\frac{۳}{۲}]$ است و تابع مزبور مجانب افقی و مجانب قائم ندارد.

$$f(x)=\sqrt{-۴x-۶}\Rightarrow f'(x)=\frac{-۲}{\sqrt{-۴x-۶}}>۰\Rightarrow \text{نزولی } f(x)$$

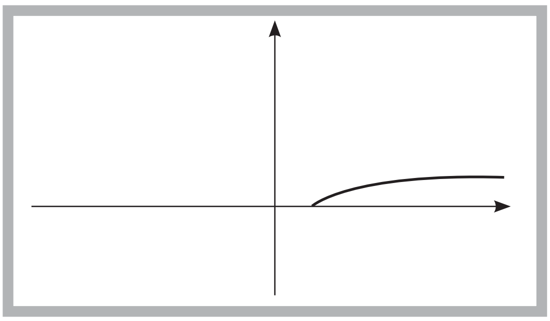
x	$-\infty$		$+\infty$
f'(x)		$-$	
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	۰



تمرین ۱۰: جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\sqrt{-۶x-۲۴}$ را رسم کنید.

حالت یازدهم

در تابع $f(x)=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ اگر داشته باشیم $c=۰$ و $a>۰, b<۰, d>۰$ یا $a<۰, b>۰, d<۰$، تابع مزبور به‌صورت $f(x)=\sqrt{\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}}$ تبدیل می‌شود، دامنه‌ی آن $D_f=[-\frac{b}{a}>۰,+\infty)$ است و مجانب قائم و مجانب افقی ندارد و نمودار آن شبیه منحنی زیر خواهد بود:

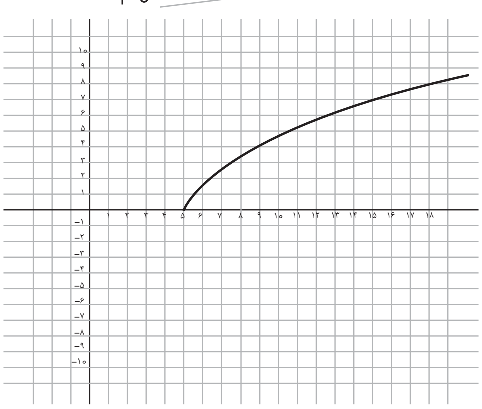


مثال ۱۱: جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\sqrt{\frac{۱۰x-۵۰}{۲}}$ را رسم کنید.

حل: دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{\frac{۱۰x-۵۰}{۲}}=\sqrt{۵x-۲۵}$ برابر با $D_f=[۵,+\infty)$ است و تابع مزبور مجانب افقی و مجانب قائم ندارد.

$$f(x)=\sqrt{۵x-۲۵}\Rightarrow f'(x)=\frac{۵}{۲\sqrt{۵x-۲۵}}>۰\Rightarrow \text{صعودی } f(x)$$

x	۵		$+\infty$
f'(x)		$+$	
f(x)	۰	$\nearrow$	$+\infty$



منابع

۱. **حسابان** (رشته‌ی ریاضی و فیزیک). مؤلفان: بهمن اصلاح‌پذیر، ناصر بروجردیان، ابراهیم ریحانی، محمدتقی طاهری تنجانی و وحید عالمیان، ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۸۹.

۲. **ریاضیات ۲** (رشته‌های علوم تجربی ـ ریاضی و فیزیک). مؤلفان: علی ایرانمنش، محسن جمالی، حمیدرضا ربیعی، ابراهیم ریحانی، احمد شاهورانی و وحید عالمیان، ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۸۹.

۳. **حسابان** (رشته‌ی ریاضی و فیزیک). مؤلفان: محمدحسن بیژن‌زاده، غلام علی فرشادی و یدالله ایلخانی‌پور. ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۸۷.

۴. **حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه‌ی تحلیلی جدید.** مؤلف: ریچارد ا. سیلورمن، مترجم: علی اکبر عالم‌زاده، ناشر: انتشارات علمی و فنی، ۱۳۷۰.

۵. **حساب و دیفرانسیل و انتگرال.** مؤلف: تام م. آپوستل، مترجم: علی‌رضا ذکایی، مهدی رضائی دلفی، علی‌اکبر عالم‌زاده و فرخ فیروزان، ناشر: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۰.

آموزش

۲۹ روش برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم و کاربردهای آن‌ها

۲

$$ax^2+bx+c=0$$

سید محمدرضا هاشمی موسوی

کلیدواژه‌ها:
حل معادله،
معادلهٔ درجه دوم،
معادلهٔ تقلیل‌یافته.

اشاره

در شمارهٔ ۷۰ مجله، ده روش برای حل معادلهٔ درجه دوم ارائه شد، اینک در ادامه، بقیهٔ روش‌های حل معادلهٔ درجهٔ دوم را می‌آوریم.

۱۱) روش تبدیل

در این روش کافی است که در معادلهٔ (۱) x را به X+β تبدیل کنیم:

$$ax^2+bx+c=0 \quad (1)$$

$$x=X+\beta : a(X+\beta)^2+b(X+\beta)+c=0 \quad (2)$$

پس از اختصار لازم:

$$aX^2+(2a\beta+b)X+a\beta^2+b\beta+c=0 \quad (3)$$

برای حل معادلهٔ (۳) کافی است مقدار β را چنان تعیین کنیم که ضریب X صفر شود (به معادلهٔ درجهٔ دوم ناقص تبدیل شود):

(۴)

$$2a\beta+b=0\ ;\ \beta=\frac{-b}{2a} : aX^2+a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2+b\left(\frac{-b}{2a}\right)+c=0$$

پس از اختصار لازم به معادلهٔ درجهٔ دوم ناقص زیر می‌رسیم:

$$aX^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0;\ X^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\frac{\Delta}{4a^2};\ X=\frac{\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

بنابراین، ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم (۱) به صورت زیر هستند:

$$x=X+\beta=\frac{\pm\sqrt{\Delta}}{2a}-\frac{b}{2a};\ x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

کاربرد: از این روش برای تبدیل هر معادلهٔ درجهٔ nام به صورت عمومی زیر:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0$$

به معادلهٔ ناقص زیر استفاده می‌شود:

$$x=X-\frac{b}{na} :\ X^n+pX^{n-2}+\ldots+k+s=0$$

برای مثال، با تبدیل $x=X-\frac{b}{3a}$، معادلهٔ درجهٔ سوم عمومی $ax^3+bx^2+cx+d=0$ به معادلهٔ درجهٔ سوم کانونی $X^3+pX+q=0$ تبدیل می‌شود و به‌جای بحث روی مبین معادلهٔ عمومی، بحث روی مبین معادلهٔ کانونی ($\Delta=4p^3+27q^2$) انجام می‌شود.

۱۲) روش پارامترهای نامعین معادلهٔ تقلیل یافته (HM)

فرض می‌کنیم معادلهٔ تقلیل یافتهٔ معادلهٔ $x^2+px+q=0$ به صورت $x+A=B$ باشد (هر معادله به صورت عمومی (۱) با تقسیم معادله بر $a\neq0$ به صورت فوق تبدیل می‌شود). حال دو طرف معادلهٔ تقلیل یافته را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x^2+2Ax+A^2=B^2;\ x^2+2Ax+A^2-B^2=0$$

از مقایسهٔ دو معادله، دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases}2A=p\\ A^2-B^2=q\end{cases};\ A=\frac{p}{2};\ B^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{p^2-4q}{4}=\frac{\Delta}{4};\ B=\frac{\pm\sqrt{\Delta}}{2};$$

$$x=B-A=\frac{\pm\sqrt{\Delta}}{2}-\frac{p}{2}=\frac{-p\pm\sqrt{\Delta}}{2};\ x=\frac{-p\pm\sqrt{\Delta}}{2}$$

کاربرد: هر معادلهٔ درجهٔ زوج به صورت عمومی $x^{2n}+px^{2n-1}+...+q=0$ را می‌توان با این روش حل کرد.

۱۳) روش دستگاه مزدوج (HM)

برای تشکیل دستگاه مزدوج، ابتدا معادلهٔ (۱) را بر x تقسیم می‌کنیم: $\frac{1}{x}(ax^2+bx+c)=0$

(چون c≠0، پس: x≠0)

$$ax+b+cx^{-1}=0;\ ax+cx^{-1}=-b$$

اکنون مزدوج معادلهٔ اخیر را به y نمایش می‌دهیم و دستگاه مزدوج زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} ax+cx^{-1}=-b \\ ax-cx^{-1}=y \end{cases};\ \begin{cases} 2ax=-b+y & \text{(جمع دو معادله)} \\ 2cx^{-1}=-b-y & \text{(تفاضل دو معادله)} \end{cases};$$

$$4acxx^{-1}=b^2-y^2 \quad \text{(ضرب دو معادله)}$$

$$y^2=b^2-4ac=\Delta;\ y=\pm\sqrt{\Delta};\ x=\frac{y-b}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

کاربرد: این روش برای خطی‌سازی مسئله‌های درجهٔ دوم (یا از درجات بالاتر) به کار می‌رود. این روش هم‌چنین برای حل معادله‌های کلاسیک $a\sin x+b\cos x=c$ و یا $a\tan x+b\cot x=c$ و غیره به سهولت و سادگی خاصی انجام می‌شود. برای حل معادله‌های کلاسیک فوق کافی است مزدوج معادله را به y نشان دهیم و معادله‌های مزدوج را در یک دستگاه حل کنیم:

$$\begin{cases} a\tan x+b\cot x=c \\ a\tan x-b\cot x=y \end{cases};\ \begin{cases} 2a\tan x=c+y \\ 2b\cot x=c-y \end{cases};4ab\underbrace{\tan x\cot x}_{1}=c^2-y^2$$

$$y^2=c^2-4ab;\ y=\pm\sqrt{c^2-4ab};\ \tan x=\frac{c\pm\sqrt{c^2-4ab}}{2a},$$

$$\cot x=\frac{c\mp\sqrt{c^2-4ab}}{2b}$$

روش‌های آنالیزی

۱۴) روش سلسلهٔ کسرهای مسلسل نامتناهی (HM)

ابتدا معادلهٔ عمومی درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ یا $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ را با تبدیل $x=\frac{-b}{c}X$ (یا $x=\frac{X}{M}$) به معادلهٔ $X^2-kX-k=0$ تحویل می‌دهیم.

(در این‌جا برای القای روش موردنظر معادله را برای k=1 حل می‌کنیم).

این معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(X>0)\ X^2=kX+k;\ X=k+\frac{k}{X}\ \ (k=\frac{-b^2}{ac})$$

در این‌جا معادلهٔ فوق را می‌توان به صورت سلسلهٔ کسرهای مسلسل نامتناهی نشان داد:

پس:

$$X=k+\frac{k}{X},\ k=1:\ X=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+...}}}$$

پس:

$$1,1+\frac{1}{1},1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}},1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}},...,X\to X_1>0$$

بنابراین، دنبالهٔ زیر به ریشهٔ مثبت معادلهٔ اصلی می‌گراید:

$$1,2,1\frac{1}{2},1\frac{2}{3},1\frac{3}{5},1\frac{5}{8},...\to X_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618$$

(برای اطلاع بیش‌تر رجوع کنید به مجلهٔ شمارهٔ ۳۰ آشنایی با ریاضیات)

کاربرد: هر معادلهٔ درجهٔ nام $x^n+px+q=0$ با این روش قابل حل است.

۱۵) روش سلسلهٔ رادیکال‌های نامتناهی (HM)

ابتدا با توجه به روش ۱۴ معادلهٔ عمومی (۱) یا $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ را با تبدیل $x=\frac{-b}{a}X$ (یا $x=\frac{X}{m}$) به معادلهٔ $X^2-X-k=0$ تحویل می‌دهیم. (در این‌جا برای القای روش موردنظر، معادله را برای k=1 حل می‌کنیم).

این معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(X>0)\ X^2=X+k;\ X=\sqrt{k+X}\quad (k=\frac{-ac}{b^2})$$

در این‌جا، معادلهٔ فوق را می‌توان به صورت سلسلهٔ رادیکال‌های نامتناهی نشان داد:

$$X=\sqrt{k+\underbrace{\sqrt{k+\sqrt{k+\sqrt{\dots}}}}_{X}}\ ;k=1:X=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\dots}}}}$$

پس:

$$\sqrt{1},\sqrt{1+\sqrt{1}},\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}},\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}},\dots\to X_1>0$$

بنابراین، دنبالهٔ زیر به ریشهٔ مثبت معادلهٔ اصلی می‌گراید:

$$1,\sqrt{2},\sqrt{1+\sqrt{2}},\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}},\dots\to X_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1/618$$

کاربرد: با این روش و روش قبل (روش ۱۴) می‌توان معادلهٔ درجهٔ nام به صورت عمومی

$$x^n+px+q=0$$

را حل کرد. البته این نوع روش حل، یک روش تقریبی است که می‌توان با ادامه و تکرار عمل با هر تقریب دلخواه به ریشه‌های معادله دست یافت (برای اطلاع بیش‌تر رجوع کنید به شمارهٔ ۳۰ آشنایی با ریاضیات).

۱۶) روش نیوتن (تکرار)

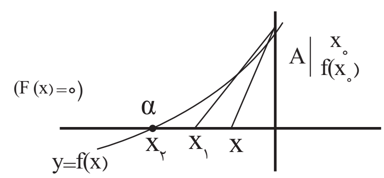
فرمول روش نیوتن را می‌توان به دو طریق به دست آورد:

الف) روش هندسی (ترسیم مماس)

ب) روش تقریبی (با استفاده از بسط تیلور)

در این‌جا تعبیر مختصری از روش هندسی (ترسیم مماس) به این صورت است که با توجه به نمودار زیر:

$(f(\alpha)=0)$



اگر x_0 تقریبی از α (ریشهٔ معادله) باشد، از نقطهٔ A واقع بر منحنی y=f(x) به‌طول x_0 مماس بر این منحنی رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن را با محور طول‌ها x_1 می‌نامیم (مانند شکل).

اگر این عمل را تکرار کنیم (رسم مماس‌ها) بدیهی است که به تقریب دلخواه (به ریشهٔ معادله) نزدیک می‌شویم. اگر x_0 معلوم باشد، برای به دست آوردن x_1 باید معادلهٔ خط مماس بر منحنی y=f(x) را در نقطهٔ $A(x_0,f(x_0))$ بنویسیم و محل تلاقی آن را با محور xها تعیین کنیم. ضریب زاویهٔ این خط $f'(x_0)$ است:

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ (معادلهٔ خط مماس در x_0)

محل تلاقی این خط با محور طول‌ها را $(x_1,0)$ در نظر می‌گیریم: پس:

$$0-f(x_0)=f'(x_0)(x_1-x_0)$$

با فرض $f'(x_0)\neq 0$ داریم $x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ و با تکرار روش نیوتن به فرمول بازگشتی تکرار زیر می‌رسیم:

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\quad (❋)$$

برای معادلهٔ درجهٔ دوم (۱) داریم $f'(x_n)=2ax_n+b$ و با تکرار عمل (❋) به ریشهٔ معادله با تقریب دلخواه خواهیم رسید.

کاربرد: روش نیوتن برای حل هر معادلهٔ کلاسیک یا غیرکلاسیک قابل استفاده است. (البته با داشتن شرایط مشتق‌پذیری).

۱۷) روش استفاده از اکسترمم تابع (ماکزیمم یا می‌نیمم تابع) (HM)

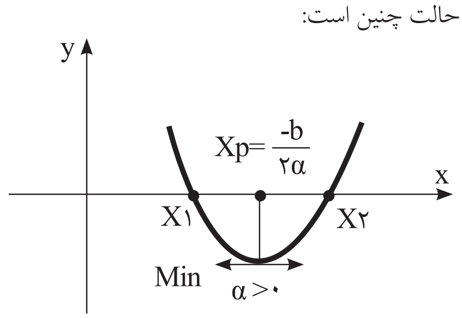
می‌دانیم معادلهٔ درجهٔ دوم عمومی $ax^2+bx+c=0$ در واقع طول‌های نقاط برخورد منحنی تابع با ضابطهٔ $y=ax^2+bx+c$ با محور xها را به ما می‌دهد (y=0).

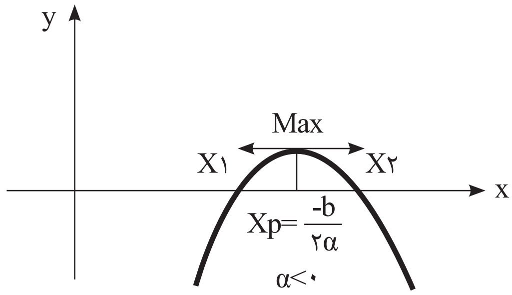
بنابراین خاصیت‌های اساسی این تابع می‌توانند ما را به ریشه‌های معادله نزدیک کنند. طول نقاط اکسترمم (ماکزیمم یا می‌نیمم) تابع، ریشه‌های مشتق تابع هستند:

(طول اکسترمم تابع)

$$y'=2ax_P+b=0;\quad x_P=-\frac{b}{2a}$$

می‌دانیم در حالت a>0 تابع درجهٔ دوم دارای می‌نیمم و در حالت a<0 دارای ماکزیمم است. در واقع نمودارهای منحنی در این دو حالت چنین است:





در صورتی که معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی باشد با توجه به این‌که خط $x_P=\frac{-b}{2a}$ محور تقارن منحنی است؛ بنابراین ریشه‌های معادله که نسبت به این خط قرینهٔ یکدیگرند از رابطهٔ $x_{1,2}=\frac{-b}{2a}\pm k$ به‌دست می‌آیند. از طرفی مجموع ریشه‌ها از خاصیت تقارنی به دست می‌آید.

$$x_P=\frac{-b}{2a}=\frac{x_1+x_2}{2};\ x_1+x_2=\frac{-b}{a}$$

برای تعیین مقدار k کافی است که مقدار $x_{1,2}$ را داخل معادلهٔ درجهٔ دوم مورد نظر قرار دهیم:

$$x_{1,2}=\frac{-b}{2a}\pm k : a\left(\frac{-b}{2a}\pm k\right)^2+b\left(\frac{-b}{2a}\pm k\right)+c=0$$

پس از اختصار لازم:

$$k^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\frac{\Delta}{4a^2}\xrightarrow{(\Delta\geq 0)}k=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

بنابراین با شرط $\Delta\geq 0$، ریشه‌های حقیقی معادله از رابطهٔ زیرقابل محاسبه هستند:

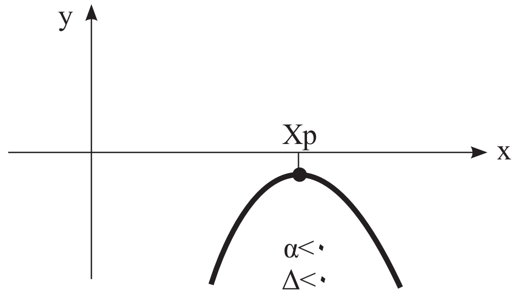
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

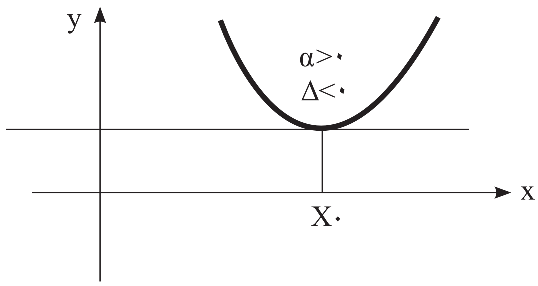
(مبین معادله: $\Delta=b^2-4ac$)

و یا به‌طور اختصار، با توجه به مبین معادله از فرمول زیر قابل محاسبه‌اند:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

می‌دانیم در حالت $\Delta<0$ منحنی تابع، محور xها را قطع نخواهد کرد و به یکی از دو صورت زیر است:





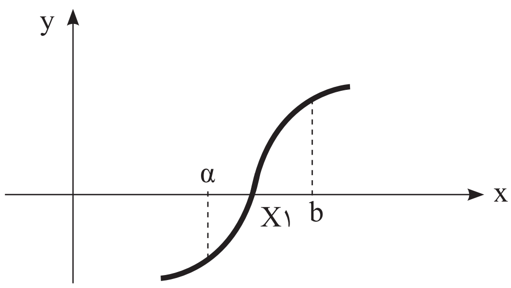
بنابراین در حالت $\Delta<0$ معادلهٔ درجهٔ دوم عمومی دارای ریشه‌های حقیقی نیست.

روش عددی (تکرار) ساده‌تر

۱۸) روش تنصیف (نصف‌کردن بازه)

این روش را برای تعیین ریشه‌های حقیقی یا ریشه‌های تکراری معادله می‌توان به‌کار برد. در صورتی که تابع درجهٔ دوم موردنظر بر بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و علامت آن در دو سر بازه مختلف باشد $(f(a).f(b)<0)$ بدیهی است که تابع درجهٔ دوم موردنظر بر $[a,b]$ اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است. با این مفروضات تابع درجهٔ دوم فوق بر بازهٔ (a,b) تنها دارای یک ریشهٔ حقیقی مانند x_1 است. هدف در این روش ساخت دنباله‌ای مثل $\{x_n\}$ است که به ریشهٔ x_1 همگرا باشد؛ یعنی $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_1$ (شکل (۱) ملاحظه شود).

$y=ax^2+bx+c$



به همین دلیل، بازهٔ $[a,b]$ را به دو بخش برابر تقسیم می‌کنیم و قرار می‌دهیم:

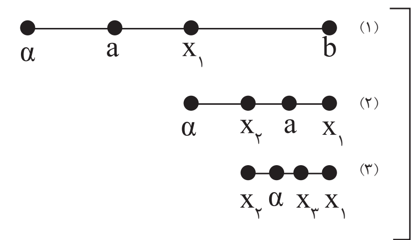
$$x_1=\frac{a+b}{2}=\alpha$$

پس، x_1 وسط بازهٔ $[a,b]$ قرار دارد و این بازه را به دو زیر بازهٔ $[a,x_1]$ و $[x_1,b]$ افراز می‌کنیم (یعنی بازهٔ مورد نظر به دو بخش یا دو بازه افراز می‌شود). اگر $f(\alpha)=0$، آن‌گاه $x_1=\alpha$ و در غیر این صورت ریشهٔ α در یکی از دو زیر بازهٔ مذکور قرار دارد. با توجه به قضیهٔ مقدار میانی، اگر $f(\alpha)f(x_1)<0$ ، α در $[a,x_1]$ و اگر $f(x_1)f(b)<0$ ، α در $[x_1,b]$ قرار دارد. برای ادامهٔ کار بدیهی است که α در هر کدام از این دو بازه قرار داشته

باشــد، دوبــاره آن بــازه را به دو بخــش برابر تقســیم می‌کنیم تــا نقطــهٔ $x_2=\frac{a+x_1}{2}$ یــا $x_2=\frac{x_1+b}{2}$ بــه دســت آید. بــا ادامهٔ ایــن روند (مطابــق شــکل (۲)) دنبالــه‌ای به صورت x_1، x_2، x_3 و ... حاصل خواهد شد که هرگاه تعداد جملات دنباله بیش‌تر شــود (به قدر کافی) به ریشهٔ $x_1=\alpha$ نزدیک‌تر خواهد شد (با دقت دلخواه)

※ **توجه:** در رابطه با این روش (الگوریتم، نمودار گردشــی محاســن و معایب روش و...) به تفصیل در مقالهٔ بعدی با عنوان «۳۱ روش برای حل معادلهٔ درجهٔ سوم» بحث خواهد شد.

در این‌جــا بــا ایــن روش بــه تعییــن ریشــه‌های معادلــهٔ $x^2-3x+1=0$ می‌پردازیم.



برای حــل معادلهٔ مورد نظر تابع درجــهٔ دوم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(x)=x^2-3x+1$$

این تابع در بازهٔ $[0,1]$ تغییر علامت می‌دهد؛ زیرا:

$$0\le x\le 1,\ \ f(0)f(1)=(1)(-1)<0$$

از طرفی برای هر $0<x<1$:

$$f'(x)=2x-3<0$$

بنابراین، در $[0,1]$ تنها یک ریشهٔ حقیقی دارد. جدول روبه‌رو نتایج روش نصف‌کردن بازه (تنصیف) را تا رســیدن به دقت سه رقم اعشار نشان می‌دهد:

(بازهٔ موردنظر) $[a,b]=[0,1]$

با توجه به جدول بدیهی اســت که ریشــهٔ معادله با سه رقم اعشار درست چنین است:

$$0/381<x_1<0/383:\ x_1\approx 0/382\rightarrow f(x_1=0/382)=0/000076$$

ریشــهٔ دیگر معادله با توجه به روابط بین ریشه‌ها و ضرایب چنین است:

$$x_1x_2=1;\ x_2=\frac{1}{x_1}\approx\frac{1}{0/382}\approx 2/618$$

(این‌جا، به دو ریشــهٔ معادله، با سه رقم اعشار درست دست یافتیم.)

n	a	b	$x=\frac{a+b}{2}$	f(a)	f(x)	علامت f(a).f(x)
۱	۰	۱	۰/۵	۱	−۰/۲۵	−
۲	۰	۰/۵	۰/۲۵	۱	۰/۳۱۲۵	+
۳	۰/۲۵	۰/۵	۰/۳۷۵	۰/۳۱۲۵	۰/۲۰۳۱	+
۴	۰/۳۷۵	۰/۵	۰/۴۳۷۵	۰/۲۰۳۱	−۰/۱۲۱۱	−
۵	۰/۳۷۵	۰/۴۳۷۵	۰/۴۰۶۲۵	۰/۲۰۳۱	−۰/۰۵۳۸	−
۶	۰/۳۷۵	۰/۴۰۶۳	۰/۳۹۰۶۵	۰/۲۰۳۱	−۰/۰۱۹۴	−
۷	۰/۳۷۵	۰/۳۹۰۷	۰/۳۸۲۸۵	۰/۲۰۳۱	−۰/۰۰۱۹۸	−
۸	۰/۳۷۵	۰/۳۸۲۹	۰/۳۷۸۹۵	۰/۲۰۳۱	۰/۰۰۶۷۵	+
۹	۰/۳۷۹	۰/۳۸۳	۰/۳۸۱	۰/۰۰۳۶۳	۰/۰۰۲۱۶	+
۱۰	۰/۳۸۱	۰/۳۸۳	۰/۳۸۲	۰/۰۰۲۱۶۱	−۰/۰۰۰۰۷۶	−
...	...	...	...	...	...	...

۱۹) روش استفاده از اعداد مختلط $(\alpha\pm i\beta)$

می‌دانیم در صورتی که معادلهٔ درجهٔ دوم عمومی:

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (1)$$

دارای ریشه‌های حقیقی نباشد دارای دو ریشهٔ مختلط است.

و در صورتی که a، b و c اعدادی حقیقی باشند دو ریشهٔ مختلط به صورت مزدوج ظاهر می‌شوند:

$$(2)\qquad x_{1,2}=\alpha\pm i\beta$$

در این رابطه $i=\sqrt{-1}$ و α و β اعداد حقیقی هستند.

در این‌جا با قراردادن ریشــه‌های (۲) در معادلهٔ (۱) خواهیم داشت:

$$a(\alpha\pm i\beta)^2+b(\alpha\pm i\beta)+c=0;$$

$$a(\alpha^2-\beta^2\underline{\pm 2\alpha\beta i})+b\alpha\underline{\pm b\beta i}+c=0;$$

$$(a\alpha^2-a\beta^2+b\alpha+c)\pm(2a\alpha+b)i\beta=0$$

هر یک از جملات متحد با صفر است؛ بنابراین دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases}a\alpha^2-a\beta^2+b\alpha+c=0\\ 2a\alpha+b=0\end{cases}\rightarrow\alpha=\frac{-b}{2a}$$

با قراردادن مقدار α در رابطهٔ اول دستگاه:

$$\beta^2=\frac{4ac-b^2}{4a^2};\beta=\pm\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}=\frac{\pm\sqrt{-(b^2-4ac)}}{2a}$$

$$\beta=\frac{\pm\sqrt{-1}\sqrt{\Delta}}{2a}=\pm\frac{i\sqrt{\Delta}}{2a};x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad (3)$$

بنابراین ریشه‌های حقیقی معادلهٔ (۱) از فرمول (۳) محاسبه می‌شوند.

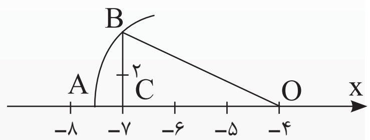
ادامه دارد ...

مسائل برای حل

ریاضیات سال اول

فرخ فرشیان

۱. در شکل زیر، نقطهٔ A نمایش چه عددی است؟



۲. هرگاه داشته باشیم:

$A \subset \{5,7,8,9,11,13\}$

$A \cap \{3,5,8,11\} = \{5,8\}$

$A \cup \{4,5,11,13\} = \{4,5,7,8,11,13\}$

و $13 \in A$ در این صورت اعضای مجموعهٔ A را به‌دست آورید.

۳. مجموعهٔ

$B = \left\{ x^{-2} - 2^{-x} \,\middle|\, x \in N,\ x < 4 \right\}$

مفروض است. اعضای مجموعهٔ B را به‌دست آورید.

۴. مقدار x را برحسب n به‌دست آورید.

$(n^{n^n})^x = n^{n^{2n}}$

۵. اگر $x = t^{\frac{1}{t-1}}$ و $y = t^{\frac{t}{t-1}}$ ($t > 0$ و $t \neq 1$) باشد چه رابطه‌ای بین x و y برقرار است؟ (راهنمایی: t حذف شود)

۶. ابتدا مخرج کسر را ساده و سپس گویا کنید.

$$\frac{4}{\sqrt[6]{4} + \sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{4}}} + (\sqrt[10]{2})^3 - \sqrt[20]{64} - 2^{0/3}}$$

۷. اگر داشته باشیم: $A = -m(2x-1)y$، $B = 4y(1-x)m$ و $C = mx - \frac{1}{2}$، در این صورت حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$2A - (\frac{1}{2}B - 2C)$

۸. حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها به‌دست آورید.

الف) $(2^x - 2)^2(8 + 2^{3x})^2(2^{2x} + 2^{x+1} + 4)^2$

ب) $\frac{4}{x}(x-2)(\frac{x}{2}+1)(\frac{x^2}{2}+2)(x^5+16x) + 2^8$

۹. عبارات زیر را تجزیه کنید.

الف) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y - 3$

ب) $x^7 + x^4 - 16x^3 - 16$

۱۰. اگر $x^3 - 1 = 0$ و $x \neq 1$ باشد، در این صورت مقدار عبارت زیر را به‌دست آورید.

$x^2 + 2x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$

ریاضیات سال دوم

● مجتبی معارف‌وند

۱. اگر $2^a, 4\sqrt{2}, 2^b, \ldots$ یک دنبالهٔ هندسی و $a, x, b, \ldots$ یک دنبالهٔ حسابی باشند، مقدار x را بیابید.

۲. ثابت کنید اگر اندازه‌های اضلاع مثلثی را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم و تشکیل یک دنبالهٔ هندسی بدهند، آنگاه اندازه‌های ارتفاع‌های این مثلث نیز تشکیل یک دنبالهٔ هندسی می‌دهند.

۳. الف) حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$(\sqrt{3}-2)^{\left(\frac{2}{\sqrt{5}+2}\right)}(7+4\sqrt{3})^{(\sqrt{5}-2)}$$

ب) مقدار مثبت x را به گونه‌ای بیابید که تساوی زیر درست باشد.

$$x^{2\sqrt{3}}+x^{\sqrt{3}}-20=0$$

۴. دامنهٔ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{2-\sqrt{x^2-2x+1}}$ و برد تابع g با ضابطهٔ $g(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}}$ را به‌دست آورید.

۵. الف) فرض کنید $f(x)=mx+b$ یک تابع خطی باشد و داشته باشیم: $f(2)=5$ و $f(x+2)=f(x)+2$. ضابطهٔ تابع f را مشخص کنید.

ب) فرض کنید برای تابعی مانند f داشته باشیم: $f(x-1)=\frac{2x+1}{x^2+6}$، مقدار $f(f(1))$ را محاسبه کنید.

۶. ابتدا ثابت کنید تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ وارون‌پذیر است. سپس ضابطهٔ وارون آن را به‌دست آورید.

۷. اگر $a>3$، ثابت کنید $a+\frac{1}{a-3}\geq 5$.

۸. حدود m را طوری تعیین کنید که عبارت $\frac{(m+2)x^2+2mx+m-1}{-x^2+3x-4}$ همواره منفی باشد.

۹. مقدار m را چنان تعیین کنید که نمودار تابع با ضابطهٔ زیر:

$$y=(2m-1)x^2-2(m+1)x+3m+1$$

بالای محور xها قرار گیرد و بر آن مماس شود.

۱۰. نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}-2\right|$ را رسم کنید.

هندسهٔ ۱

● هوشنگ شرقی

۱. در مثلث متساوی‌الساقین $(AB=AC)$ ABC نیمساز زاویهٔ B، ضلع مقابل را در نقطهٔ D قطع کرده است. اگر $BD=BC$ باشد، اندازه‌های سه زاویهٔ مثلث را به‌دست آورید.

۲. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ $(AB\parallel CD)$، $AB=2BC$ اگر M وسط AB باشد، ثابت کنید: $CM\perp MD$.

۳. ثابت کنید هر متوازی‌الاضلاعی که قطرهای آن با هم برابر باشند، مستطیل است.

۴. مجموع اندازه‌های تعدادی زاویه برابر با °۲۰۰ و مجموع اندازه‌های متمم‌های این زاویه‌ها مساوی °۵۲۰ است. تعداد این زاویه‌ها را به‌دست آورید.

۵. در مثلث ABC، $\hat{A}=80^\circ$ و نقطهٔ M روی BC طوری واقع است که $MB<AB$ و $MC<AC$. روی AB پاره‌خط BN را مساوی MB و روی AC، CP را مساوی MC جدا می‌کنیم. اندازهٔ زاویهٔ $\alpha=N\hat{M}P$ را به‌دست آورید.

۶. در مثلث ABC، $AB=AC=10$ و $BC=12$. طول ارتفاع رأس B را به‌دست آورید.

۷. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ ارتفاع AH را رسم کرده‌ایم. ثابت کنید: $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AB^2}$.

۸. در مثلث ABC از نقطهٔ M وسط BC عمودهای MH و MH' را به ترتیب بر AB و AC وارد کرده‌ایم. ثابت کنید: $\frac{MH}{MH'}=\frac{AC}{AB}$.

۹. بدون استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، ثابت کنید طول قطر هر مربع $\sqrt{2}$ برابر طول ضلع آن است.

حسابان

● مجتبی رفیعی

۱. حاصل جمع عبارت زیر را به‌دست آورید.

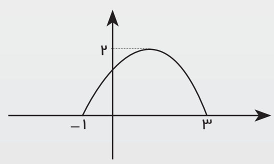
$$S = 1+11+111+\ldots+\underbrace{111\ldots1}_{\text{۱۰۰ تا}}$$

۲. دو تصاعد حسابی با قدر نسبت‌های ۹۰ و ۶۶ مفروض‌اند. می‌دانیم جملهٔ سوم هر دو تصاعد حسابی ۴۷ است. عدد بعدی یکسان در هر دو تصاعد را به‌دست آورید؟ این عدد یکسان جملهٔ چندم هر تصاعد است؟

۳. اگر عبارت $x^{2n+1}+2x^{2n}+x^5-5x^3+k$ به‌ازای هر عدد طبیعی n بر دو جمله‌ای $x+2$ بخش‌پذیر باشد، آنگاه باقی ماندهٔ تقسیم آن بر x^2-1 را بیابید.

۴. مقدار k را طوری به‌دست آورید که معادلهٔ $\sqrt{x-1+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}=k$ بی‌شمار جواب داشته باشد.

۵. با توجه به نمودار $y=ax^2+bx+c$ و با ذکر دلیل، تعداد ریشه‌ها و علامت ضرایب a و b و c را بنویسید.



۶. به کمک رسم نمودار مشخص کنید معادلهٔ $||x|-2|=x+2$ چند جواب دارد؟

۷. مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای $20\,cm^2$ است. طول وتر این مثلث را به عنوان تابعی از محیط آن به‌دست آورید.

۸. اگر $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ و $g(x)=\sqrt{x}$، دامنهٔ $(f+g)of$ را به‌دست آورید.

۹. حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$A=\cos^2(x+y)+\cos^2(x-y)-\cos 2y\cos 2x$$

۱۰. با شرط $xy>-1$ ثابت کنید:

$$\tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)=\tan^{-1}(x)-\tan^{-1}(y)$$

۱۱. معادلهٔ $\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}$ در بازهٔ $[0,4\pi]$ چند جواب دارد؟

جبر و احتمال

● میرشهرام صدر

۱. با استفاده از اصل استقرای ریاضی برای هر عدد طبیعی n، ثابت کنید:

$$(2n)!<2^{2n}(n!)^2$$

۲. با استفاده از اصل استقرای تعمیم‌یافتهٔ ریاضی، ابتدا عدد مناسب m را برای برقراری حکم زیر بیابید، سپس آن را ثابت کنید:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}<\frac{5(n-1)}{12}$$

۳. با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید، هر عدد شش رقمی که از تکرار دوبار یک عدد سه رقمی حاصل می‌شود، بر عدد ۱۳ بخش‌پذیر است.

۴. هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند، حکم‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $a^2+b^2\geq -4(a+b+2)$

ب) $2a(b-a+1)\leq b^2+1$

۵. با فرض این‌که $\sqrt{6}$ عددی گنگ است، ثابت کنید عدد $2\sqrt{2}-\sqrt{3}$ نیز عددی گنگ است.

۶. ۶۵ رأس گاو در چهار رنگ و از چهار نژاد مختلف، متعلق به دو نفر هستند. ثابت کنید یکی از این دو نفر حداقل سه گاو هم‌رنگ و هم‌نژاد دارد.

۷. تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی یک مجموعه، ۱۴ واحد بیشتر از تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی آن است، تعداد زیرمجموعه‌های چهارعضوی این مجموعه را بیابید.

۸. چنان‌چه برای سه مجموعهٔ A و B و C داشته باشیم: $A\cap B=A\cap C$ و $B-A=C-A$ ثابت کنید که $B=C$.

۹. با استفاده از جبر مجموعه‌ها، حکم‌های زیر را ثابت کنید:

الف) $A-B-C=(A\cup B)-(B\cup C)$

ب) $A'\subset B'\Rightarrow B\subset A$

ج) $A\subset B\Leftrightarrow A\cup B=B$

د) اگر $A\cup B=A\cap B$ آن‌گاه ثابت کنید $A=B$

۱۰. اگر داشته باشیم

$A=\{2^x \mid x\in Z, |x|\leq 1\}$ و $B=\{x\in Z \mid x^2\leq 1\}$، آن‌گاه تعداد زیرمجموعه‌های $A\times B-A^2$ را پیدا کنید.

۱۱. x و y را طوری تعیین کنید که زوج‌های مرتب $(2^4,xy)$ و $(x^2-y^2,15)$ با هم برابر باشند.

۱۲. مجموعهٔ $A=\{0,3,8,15,24,\ldots\}$ را با نماد ریاضی نمایش دهید.

هندسهٔ ۲

● **هوشنگ شرقی**

۱. الف) با اســتفاده از استدلال استقرایی، رابطه‌ای که مجموع زاویه‌های داخلی یک n ضلعــی محدب را بیــان می‌کند حدس بزنید و مراحل کار را توضیح دهید.

ب) در یــک n ضلعی محدب، تعداد اقطار ۴ برابر تعداد اضلاع اســت. مجموع زوایای داخلی این چندضلعی را پیدا کنید.

۲. ثابت کنید اگر در مثلث ABC، AB>AC و میانهٔ AM را رســم کنیم، اولاً $\hat{AMC} < ۹۰^\circ$؛ ثانیاً: $M\hat{A}C > M\hat{A}B$

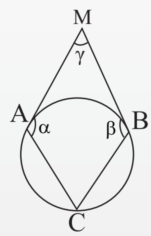
۳. نقطــهٔ M درون مثلث ABC، از اضلاع BC و AB و AC به ترتیب به فاصله‌های L_a و L_c و L_b واقع اســت. اگر ارتفاع‌های وارد بر این ســه ضلع به ترتیب h_a و h_c و h_b باشند، ثابت کنید:

$$\frac{L_a}{h_a}+\frac{L_b}{h_b}+\frac{L_c}{h_c}=۱$$

۴. اندازه‌های سه ضلع مثلثی ۸ و ۱۲ و ۱۵ سانتی‌متر است. اندازه‌های پاره‌خط‌هایی را که نیمساز داخلی زاویهٔ بزرگ‌تر مثلث روی ضلع مقابل به آن پدید می‌آورد، به‌دســت آورید.

۵. مثلث ABC را با داشتن مقادیر BC=a و $\hat{B}-\hat{C}$ و b−c (AB=c و AC=b) رسم کنید (AC >AB).

۶. در شکل زیر از نقطهٔ M دو مماس MA و MB بر دایره رسم شده و A و B به نقطهٔ C روی محیط دایره وصل شــده‌اند. مقدار $\alpha+\beta+\frac{\gamma}{۲}$ را به‌دست آورید.



۷. در مثلث ABC نیمساز داخلی AD را رسم می‌کنیم و دو دایرهٔ محیطی مثلث‌های ADC و ADB را رسم می‌کنیم. آن‌ها AC را در E و AB را در F قطع می‌کنند. ثابت کنید: BF=CE.

۸. طول مماس مشــترک خارجی دو دایرهٔ مماس خارج، $\sqrt{۲}$ برابر شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر است. شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر چند برابر شعاع دایرهٔ کوچک‌تر است؟

پاسخ ریاضیات سال اول

● **فرخ فرشیان**

۱. طبق شکل در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBC رابطــهٔ فیثاغــورس $OB^۲=BC^۲+OC^۲$ برقــرار اســت کــه $OB^۲=۲^۲+۳^۲$؛ پس $OB=\sqrt{۱۳}$ و نقطهٔ A نمایش‌دهندهٔ نقطهٔ $-۴-\sqrt{۱۳}$ است.

۲. از اینکــه $A\cap\{۳,۵,۸,۱۱\}=\{۵,۸\}$ می‌تــوان نتیجــه گرفــت ۵ و ۸ عضو A هستند و از طرفی

$$A\cup\{۴,۵,۱۱,۱۳\}=\{۴,۵,۷,۸,۱۱,۱۳\}$$

نشان‌دهندهٔ آن است که $۷\in A$. و طبق مسئله $۱۳\in A$. بنابراین

$$A=\{۵,۷,۸,۱۳\}$$

و زیرمجموعهٔ $\{۵,۷,۸,۹,۱۳\}$ است.

۳. می‌دانیم $x\in\{۱,۲,۳\}$ اســت کــه در آن داریم:

$$x^{-۲}-۲^{-x}\overset{x=۱}{\Rightarrow}۱^{-۲}-۲^{-۱}=\frac{۱}{۱^۲}-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$x^{-۲}-۲^{-x}\overset{x=۲}{\Rightarrow}۲^{-۲}-۲^{-۲}=\frac{۱}{۲^۲}-\frac{۱}{۲^۲}=۰$$

$$x^{-۲}-۲^{-x}\overset{x=۳}{\Rightarrow}۳^{-۲}-۲^{-۳}=\frac{۱}{۳^۲}-\frac{۱}{۲^۳}=\frac{-۱}{۷۲}$$

بنابراین، $B=\left\{\frac{۱}{۲},۰,\frac{-۱}{۷۲}\right\}$ است.

۴.

$$(n^{n^n})^x=n^{n^{۲n}}$$

که طبق قانون $(a^m)^n = a^{mn}$ داریم

$$n^{n^n\times x} = n^{n^{2n}}$$

چون پایه‌ها یکی است، پس نماها با هم برابر است.

$$n^n \times x = n^{2n}$$

بنابراین: $x = \frac{n^{2n}}{n^n} \Rightarrow x = n^{2n-n}$

در نتیجه $x = n^n$

۵. ابتدا دو رابطه را برهم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{y}{x} = \frac{t^{\frac{t}{t-1}}}{t^{\frac{1}{t-1}}} = t^{\frac{t}{t-1}-\frac{1}{t-1}} = t^{\frac{t-1}{t-1}} = t$$

در نتیجه $\frac{y}{x} = t$؛ این رابطه را (۱) می‌نامیم.

از رابطهٔ $x = t^{\frac{1}{t-1}}$ دو طرف را به توان t می‌رسانیم. پس $x^t = t^{\frac{t}{t-1}}$ و با توجه به فرض مسئله $x^t = y$.

اگر رابطهٔ به‌دست آمده را به توان x برسانیم، داریم: $x^{tx} = y^x$ و با توجه به رابطهٔ (۱) $x^{\frac{y}{x}\times x} = y^x$ خواهیم داشت: $x^y = y^x$.

۶. در عبارت $\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{4}$

و همین‌طور

$$\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{4}}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{2^3 \times 2\sqrt[4]{4}}} = \sqrt[15]{2^4\sqrt[4]{4}}$$

و در ادامه

$$\sqrt[15]{\sqrt[4]{(2^4)^4 \times 2^2}} = \sqrt[60]{2^{18}} = \sqrt[10]{2^3}$$

و در عبارات داریم:

$$\sqrt[20]{64} = \sqrt[20]{2^6} = \sqrt[10]{2^3}$$

$$2^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{2^3}$$

پس مخرج کسر به‌صورت زیر درمی‌آید.

$$\sqrt[3]{2} + \sqrt[10]{2^3} + \sqrt[10]{2^3} - \sqrt[10]{2^3} - \sqrt[10]{2^3} = \sqrt[3]{2}$$

بنابراین کسر $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$ به‌دست می‌آید که عبارت را در $\sqrt[3]{2^2}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{4}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{2} = 2\sqrt[3]{4}$$

۷. مقادیر A و B و C را در رابطهٔ $2A-(\frac{1}{2}B-2C)$ جای‌گذاری می‌کنیم

$$2[-m(2x-1)y] - \left\{\frac{1}{2}[4y(1-x)m] - 2(mx-\frac{1}{2})\right\}$$

$$= (-2my)(2x-1) - [2my(1-x)] - 2(mx-\frac{1}{2})]$$

$$= -\underline{4myx} + \underline{\underline{2my}} - \underline{\underline{2my}} + \underline{2myx} + 2mx - 1$$

$$= -2mxy + 0 + 2mx - 1$$

$$= -2mxy + 2mx - 1$$

۸.

الف) $[(2^x-2)(2^{2x}+2^{x+1}+4)(2^{3x}+8)]^2$

به کمک اتحاد

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

اگر $a = 2^x$ و $b = 2$ باشد، داریم:

$$(2^x-2)(2^{2x}+2^{x+1}+4) = (2^x)^3 - 2^3$$
$$= 2^{3x} - 8$$

در ادامه $[(2^{3x}-8)(2^{3x}+8)]^2$ می‌شود و با کمک اتحاد مزدوج داخل کروشه به صورت $[(2^{3x})^2 - 8^2]^2$ درمی‌آید و در نتیجه $(2^{6x}-64)^2$. با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای خواهیم داشت:

$$(2^{6x})^2 - 2(2^{6x})(64) + 64^2$$

$$= 2^{12x} - 128 \times 2^{6x} + 4096$$

ب) $\frac{4}{x}(x-2)(\frac{x}{2}+1)(\frac{x^2}{2}+2)(x^5+16x)+2^8$

$$= (x-2)(2)(\frac{x}{2}+1)(2)(\frac{x^2}{2}+2)(x)(\frac{1}{x})(x^4+16)+2^8$$

$$= (x-2)(x+2)(x^2+4)(x^4+16)+2^8$$

که به کمک اتحاد مزدوج

$$(x-2)(x+2) = x^2 - 4$$

و در ادامه $(x^2-4)(x^2+4) = (x^2)^2 - 4^2$

$$= x^4 - 16$$

و در ادامه

$$(x^4-16)(x^4+16) = (x^4)^2 - 16^2$$
$$= x^8 - 16^2$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$x^8 - 16^2 + 2^8 = x^8$$

۹.

الف) $x^2+4xy+4y^2-2x-4y-3$

سه جمله‌ای $x^2+4xy+4y^2$ را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای به صورت $(x+2y)^2$ تجزیه می‌کنیم و در عبارت $-2x-4y$ از (-2) فاکتور می‌گیریم که به‌صورت $-2(x+2y)$ درمی‌آید حال با استفاده از نکات بالا به صورت مسئله برمی‌گردیم.

$$(x+2y)^2 - 2(x+2y) - 3$$

و $(x+2y)$ را جملهٔ مشترک در نظر می‌گیریم و به کمک اتحاد یک جملهٔ مشترک، آن را تجزیه می‌کنیم.

$$(x+2y-3)(x+2y+1)$$

ب) $x^7+x^4-16x^3-16$

دو جملهٔ x^7+x^4 را یک دسته فرض می‌کنیم و از x^4 فاکتور می‌گیریم. بنابراین

$$x^7+x^4 = x^4(x^3+1)$$

و در دو جملهٔ $-16x^3-16$ از -16 فاکتور می‌گیریم $-16(x^3+1)$ حال به صورت مسئله برمی‌گردیم.

$$= x^4(x^3+1) - 16(x^3+1)$$

$$= (x^3+1)(x^4-16)$$

$$= (x+1)(x^2-x+1)(x^2-4)(x^2+4)$$

$$= (x+1)(x^2-x+1)(x-2)(x+2)(x^2+4)$$

۱۰.

$$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0$$

و چون طبق فرض مسئله $x \neq 1$ است، پس $x-1 \neq 0$. در نتیجه

$$x^2+x+1 = 0 \Rightarrow x^2+1 = -x$$

و اگر دو طرف تساوی را بر $x \neq 0$ تقسیم کنیم، داریم:

$$\frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} = \frac{-x}{x} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -1$$

و ما می‌خواهیم مقدار عبارت

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2x + \frac{2}{x}$$

را به‌دست آوریم. به کمک اتحاد فرعی

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

داریم:

$$(x+\frac{1}{x})^2 - 2(x)(\frac{1}{x}) + 2(x+\frac{1}{x})$$

و

$$(x+\frac{1}{x})^2 - 2 + 2(x+\frac{1}{x})$$

و با قراردادن $x + \frac{1}{x} = -1$ حاصل برابر است با:

$$(-1)^2 - 2 + 2(-1) = 1 - 2 - 2 = -3$$

پاسخ ریاضیات سال دوم

● مجتبی معارف‌وند

۱. از آنجا که $2^a, 4\sqrt{2}, 2^b, \ldots$ یک دنبالهٔ هندسی با قدر نسبت r است، پس:

$$r=\frac{4\sqrt{2}}{2^a}=\frac{2^b}{4\sqrt{2}}\Rightarrow (4\sqrt{2})^2=2^a\times 2^b$$

$$\Rightarrow 32=2^{a+b}\Rightarrow 2^5=2^{a+b}\Rightarrow a+b=5 \quad (1)$$

دنبالهٔ $a, x, b, \ldots$ یک دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت d است، بنابراین:

$$d=x-a=b-x\Rightarrow 2x=a+b\overset{(1)}{\Rightarrow} 2x=5$$

$$\Rightarrow x=\frac{5}{2}$$

۲. فرض می‌کنیم در مثلث ABC با طول ضلع‌های a و b و c و ارتفاع‌های نظیر h_a و h_b و h_c داشته باشیم $a<b<c$.

از آنجا که c و b و a تشکیل یک دنبالهٔ هندسی می‌دهند، پس $\frac{c}{b}=\frac{b}{a}$. (*)
با توجه به فرمول مساحت مثلث داریم:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}a.h_a\overset{(1)}{=}\frac{1}{2}b.h_b\overset{(2)}{=}\frac{1}{2}c.h_c$$

از تساوی (۱)، تناسب $\frac{b}{a}=\frac{h_a}{h_b}$ و از تساوی (۲)، تناسب $\frac{c}{b}=\frac{h_b}{h_c}$ حاصل می‌شوند و با عنایت به تساوی (*) خواهیم داشت: $\frac{h_b}{h_c}=\frac{h_a}{h_b}$.

(و البته از هندسه می‌دانیم که اگر در مثلث ABC، $a<b<c$ آنگاه $h_c<h_b<h_a$).

بنابراین $h_c, h_b, h_a, \ldots$ تشکیل یک دنبالهٔ هندسی می‌دهند.

۳. الف) از آنجا که

$$\frac{1}{\sqrt{5}+2}=\frac{1}{\sqrt{5}+2}\times\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}-2$$

و $(\sqrt{3}-2)^2=7-4\sqrt{3}$، پس:

$$A=(\sqrt{3}-2)^{\left(\frac{2}{\sqrt{5}+2}\right)}(7+4\sqrt{3})^{(\sqrt{5}-2)}$$

$$=\left[(\sqrt{3}-2)^2\right]^{\left(\frac{1}{\sqrt{5}+2}\right)}(7+4\sqrt{3})^{(\sqrt{5}-2)}$$

$$=(7-4\sqrt{3})^{(\sqrt{5}-2)}(7+4\sqrt{3})^{(\sqrt{5}-2)}=$$

$$=\left[(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})\right]^{(\sqrt{5}-2)}$$

$$=1^{(\sqrt{5}-2)}=1$$

ب) قرار می‌دهیم $y=x^{\sqrt{3}}$. در نتیجه:

$$y^2+y-20=0\Rightarrow (y-4)(y+5)=0$$

$$\Rightarrow y=-5 \text{ یا } y=4$$

از آنجا که x مقداری مثبت است، پس $x^{\sqrt{3}}$ نیز مثبت خواهد بود و در نتیجه جواب $y=-5$ غیرقابل قبول و جواب $y=4$ قابل قبول است. بنابراین خواهیم داشت:

$$x^{\sqrt{3}}=4\Rightarrow (x^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}=4^{\sqrt{3}}\Rightarrow x^3=4^{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt[3]{4^{\sqrt{3}}}$$

۴. از آنجا که $x^2-2x+1=(x-1)^2$، پس $\sqrt{x^2-2x+1}=|x-1|$ و در نتیجه $f(x)=\sqrt{2-|x-1|}$ و دامنهٔ آن به صورت $D_f=\{x\in R \mid 2-|x-1|\geq 0\}$ است. تعیین دامنهٔ f منوط به حل نامعادلهٔ $2-|x-1|\geq 0$ است. بنابراین:

$$2-|x-1|\geq 0\Rightarrow |x-1|\leq 2\Rightarrow -2\leq x-1\leq 2$$

$$\Rightarrow -1\leq x\leq 3$$

در نتیجه $D_f=[-1,3]$.

دامنهٔ تابع g برابر $(0,+\infty)$ است، پس همواره $y>0$.

قرار می‌دهیم:

$$y=\frac{x+1}{\sqrt{x}}\Rightarrow y^2=\frac{(x+1)^2}{x}$$

$$\Rightarrow x^2+2x+1=xy^2$$

$$\Rightarrow x^2+(2-y^2)x+1=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{2}((y^2-2)\pm\sqrt{(2-y^2)^2-4})$$

اما y مقادیری از اعداد حقیقی را می‌توانند اختیار کند که:

$$(2-y^2)^2-4\geq 0$$

برای حل نامعادلهٔ اخیر داریم:

$$(2-y^2-2)(2-y^2+2)\geq 0$$

$$\Rightarrow (-y^2)(4-y^2)\geq 0\overset{-y^2\leq 0}{\Rightarrow} 4-y^2\leq 0$$

با توجه به جدول تعیین علامت $p=4-y^2$ که به صورت زیر است و نیز شرط $y>0$ نتیجه می‌گیریم که $R_g=[2,+\infty)$

y		-2		2	
$4-y^2$	$-$	0	$+$	0	$-$
	جواب نامعادله				جواب نامعادله

۵. الف)

$$f(x+2)=f(x)+2$$

$$\Rightarrow m(x+2)+b=(mx+b)+2$$

$$\Rightarrow mx+2m+b=mx+b+2$$

$$\Rightarrow 2m=2\Rightarrow m=1$$

$$f(2)=5\Rightarrow 2m+b=5\overset{m=1}{\Rightarrow} b=5-2=3$$

بنابراین ضابطهٔ تابع خطی f به‌صورت $f(x)=x+3$ است.

ب) قرار می‌دهیم $u=x-1$، در نتیجه $x=u+1$ و

$$f(u)=\frac{2(u+1)+1}{(u+1)^2+6}=\frac{2u+3}{u^2+2u+7}$$

به عبارت دیگر، ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=\frac{2x+3}{x^2+2x+7}$ است و در نتیجه داریم:

$$f(1)=\frac{2(1)+3}{1^2+2(1)+7}=\frac{1}{2}$$

$$f(f(1))=f(\frac{1}{2})=\frac{2(\frac{1}{2})+3}{(\frac{1}{2})^2+2(\frac{1}{2})+7}=\frac{16}{33}$$

۶. یک تابع در صورتی وارون‌پذیر است که یک‌به‌یک باشد و یک تابع در صورتی یک‌به‌یک است که هرگاه داشته باشیم $f(x_1)=f(x_2)$ بتوانیم نتیجه بگیریم $x_1=x_2$.

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+1}}=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1^2}{x_1^2+1}=\frac{x_2^2}{x_2^2+1}$$

$$\Rightarrow x_1^2x_2^2+x_1^2=x_2^2x_1^2+x_2^2\Rightarrow x_1^2=x_2^2$$

$$\Rightarrow x_1=\pm x_2$$

امّا جواب $x_1=-x_2$ غیرقابل قبول است، زیرا در تساوی $f(x_1)=f(x_2)$ صدق نمی‌کند، ملاحظه بفرمایید:

$$\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+1}} \neq \frac{-x_1}{\sqrt{x_1^2+1}}$$

بنابراین، جواب $x_1=x_2$ قابل قبول و تابع f یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است.

برای یافتن ضابطهٔ وارون f قرار می‌دهیم.

$$y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Rightarrow y^2=\frac{x^2}{x^2+1} \Rightarrow x^2y^2+y^2=x^2$$

$$\Rightarrow x^2-x^2y^2=y^2$$

$$\Rightarrow x^2(1-y^2)=y^2 \Rightarrow x^2=\frac{y^2}{1-y^2}$$

$$\Rightarrow x=\frac{\pm y}{\sqrt{1-y^2}} \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \text{یا} \\ f^{-1}(x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$$

اما جواب $f^{-1}(x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ غیرقابل قبول است و ضابطهٔ تابع وارون f، $f^{-1}(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ است، زیرا با توجه به ضابطهٔ f، یعنی $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$، مقادیر x و y همواره هم علامت‌اند.

۷. از آنجا که $a>3$، پس $a-3>0$. حال طرفین نامساوی حکم را در $a-3$ ضرب می‌کنیم

$$a+\frac{1}{a-3}\geq 5 \Leftrightarrow a(a-3)+1\geq 5(a-3)$$

$$\Leftrightarrow a^2-3a+1\geq 5a-15$$

$$\Leftrightarrow a^2-8a+16\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-4)^2\geq 0$$

چون نامساوی اخیر همواره درست است و تمام اعمال انجام‌شده برگشت‌پذیرند، پس نامساوی حکم برای همهٔ مقادیر $a>3$ درست خواهد بود.

۸. ابتدا سه جمله‌ای $P=-x^2+3x-4$ را تعیین علامت می‌کنیم.

$$\Delta=b^2-4ac=3^2-4(-1)(-4)=-7$$

از آنجا که $\Delta<0$ و $a=-1<0$، پس سه جمله‌ای $P=-x^2+3x-4$ به ازای جمع مقادیر حقیقی x منفی است. بنابراین مخرج کسر مذکور همواره منفی است، در نتیجه برای اینکه این کسر همواره منفی باشد، باید m را طوری بیابیم که صورت کسر همواره مثبت باشد، یعنی:

$$(m+2)x^2+2mx+(m-1)>0$$

برای این منظور باید مقدار m را به‌گونه‌ای تعیین کنیم که $\Delta<0$ و $a>0$.

$$\Delta=b^2-4ac=(2m)^2-4(m+2)(m-1)$$

$$=-4m+8$$

$$\Delta<0 \Rightarrow -4m+8<0 \Rightarrow m>2 \quad (1)$$

$$a<0 \Rightarrow m+2>0 \Rightarrow m>-2 \quad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که $m>2$.

۹. نمودار تابع $y=ax^2+bx+c$ بر محور xها مماس است، هرگاه معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ یک ریشهٔ مضاعف داشته باشد. برای این منظور باید داشته باشیم $\Delta=0$.

همچنین در این حالت ($\Delta=0$) نمودار تابع بالای محور xها قرار می‌گیرد، هرگاه به ازای همهٔ مقادیر x (به جز ریشهٔ مضاعف)، $y>0$ باشد و برای این هدف نیز باید داشته باشیم $a>0$.

بنابراین:

$$\Delta=b^2-4ac=\left[-2(m+1)\right]^2-4(2m-1)(3m+1)$$

$$=4(-5m^2+3m+2)$$

$$\Delta=0\Rightarrow -5m^2+3m+2=0$$

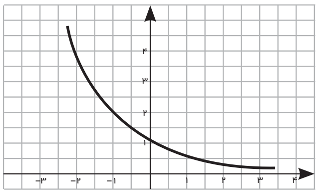
$$\Rightarrow m=1 \ \text{یا}\ m=\frac{-2}{5} \quad (1)$$

$$a>0 \Rightarrow 2m-1>0 \Rightarrow m>\frac{1}{2} \quad (2)$$

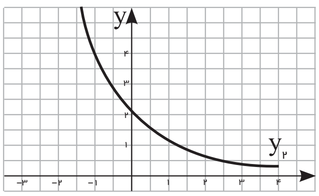
از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که $m=1$.

۱۰. ابتدا نمودار تابع $y_1=(\frac{1}{2})^x$ را به کمک نقطه‌یابی رسم می‌کنیم.

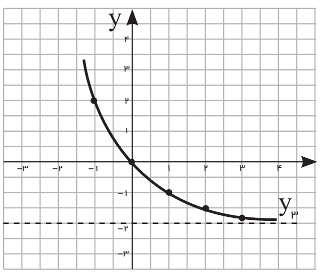
x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



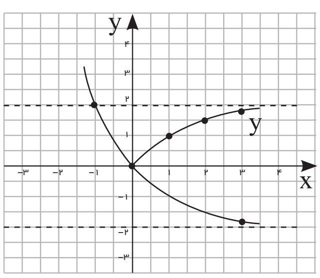
سپس نمودار تابع $y_2=(\frac{1}{2})^{x-1}$ را با انتقال نمودار تابع y_1 در راستای محور xها و به اندازهٔ یک واحد به سمت راست ترسیم می‌کنیم.



اکنون برای رسم نمودار تابع $y_3=(\frac{1}{2})^{x-1}-2$ کافی است نمودار y_2 را در راستای محور yها و به اندازهٔ ۲ واحد به سمت پایین انتقال دهیم.



و در نهایت نمودار تابع $y=\left|(\frac{1}{2})^{x-1}-2\right|$ از قرینه کردن بخش‌هایی از نمودار تابع y_3 که زیر محور xها قرار دارند، نسبت به محور xها حاصل می‌شود.



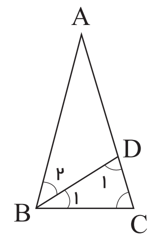
پاسخ هندسهٔ ۱

● هوشنگ شرقی

۱. مطابق شکل و با فرض $\hat{B}_1=\hat{B}_2=\alpha$ نتیجه می‌شود:

$$\hat{B}=2\alpha, AB=AC \Rightarrow \hat{C}=\hat{B}=2\alpha$$

و با فرض BD=BC نیز نتیجه می‌شود:
$\hat{D}_1=\hat{C}=2\alpha$



و مجموع زوایای داخلی مثلث BDC مساوی 180° است:

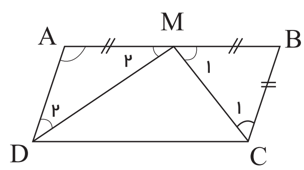
$$\hat{B}_1+\hat{D}_1+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow \alpha+2\alpha+2\alpha=180^\circ$$

$$\Rightarrow 5\alpha=180^\circ, \alpha=\frac{180}{5}=36^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{B}=\hat{C}=2\alpha=72^\circ,$$

$$\hat{A}=180^\circ-(\hat{B}+\hat{C})=180^\circ-(72^\circ+72^\circ)=36^\circ$$

۲. مطابق شکل می‌توان نوشت:



$$AB=2BC, MA=MB=\frac{AB}{2}$$

$$\Rightarrow BC=AD=MB=MA$$

بنابراین، مثلث‌های BMC و AMD به ترتیب در رأس B و رأس A متساوی‌الساقین‌اند و از آن‌جا داریم:

$$\hat{M}_1=\hat{C}_1=\frac{180^\circ-\hat{B}}{2}, \hat{M}_2=\hat{D}_2=\frac{180^\circ-\hat{A}}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{M}_1+\hat{M}_2=\frac{180^\circ-\hat{B}}{2}+\frac{180^\circ-\hat{A}}{2}$$

$$=\frac{360^\circ-(\hat{A}+\hat{B})}{2}=\frac{360^\circ-180^\circ}{2}=\frac{180^\circ}{2}=90^\circ$$

$$\Rightarrow D\hat{M}C=90^\circ \Rightarrow CM \perp MD$$

(توجه کنید که چون در متوازی‌الاضلاع زوایای مجاور مکمل یکدیگرند، پس: $\hat{A}+\hat{B}=180^\circ$)

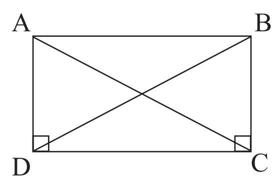
۳. مطابق شکل، فرض بر این است که ABCD متوازی‌الاضلاع است و قطرهای AC و BD با یکدیگر برابرند. در متوازی‌الاضلاع، اضلاع مقابل با یکدیگر برابرند، پس: AD = BC، و از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$AD=BC, CD=CD, AC=BD$$

$$\Rightarrow \Delta ACD \cong \Delta BCD \Rightarrow \hat{C}=\hat{D}$$

$$\hat{C}+\hat{D}=180^\circ \Rightarrow \hat{C}=\hat{D}=90^\circ$$

در نتیجه ABCD مستطیل است.



۴. زاویه‌ها را α_1 و α_2 و ... و α_n (n تعداد زاویه‌هاست) می‌گیریم. با توجه به فرض مسئله می‌نویسیم:

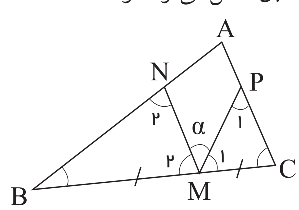
$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=200^\circ$$

$$(90-\alpha_1)+(90-\alpha_2)+\ldots+(90-\alpha_n)=520^\circ$$

$$\Rightarrow (90+90+\ldots+90)-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)=520^\circ$$

$$\Rightarrow 90n-200^\circ=520^\circ \Rightarrow 90n=720 \Rightarrow n=8$$

۵. مطابق شکل می‌توان نوشت:



$$\left.\begin{array}{l} CP=CM \Rightarrow \hat{M}_1=\hat{P}_1=\dfrac{180^\circ-\hat{C}}{2} \\ BM=BN \Rightarrow \hat{M}_2=\hat{N}_2=\dfrac{180^\circ-\hat{B}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

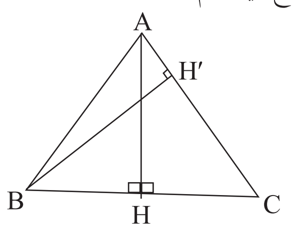
$$\hat{M}_1+\hat{M}_2=\frac{180^\circ-\hat{C}}{2}+\frac{180-\hat{B}}{2}=\frac{360^\circ-(\hat{B}+\hat{C})}{2}$$

$$\hat{A}=80^\circ \Rightarrow \hat{B}+\hat{C}=100^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{M}_1+\hat{M}_2=\frac{360^\circ-100^\circ}{2}=130^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha}=180^\circ-(\hat{M}_1+\hat{M}_2)=180^\circ-130^\circ=50^\circ$$

۶. ارتفاع AH از مثلث متساوی‌الساقین ABC را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که این ارتفاع، میانه هم هست.



بنابراین داریم:

$$BH=CH=6, AB=10 \Rightarrow$$

$$BH^2+AH^2=AB^2, 36+AH^2=100$$

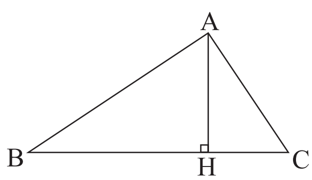
$$\Rightarrow AH=8$$

$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}AH.BC=\frac{1}{2}\times 8\times 12=48$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}BH'.AC=\frac{1}{2}\times BH'\times 10=48$$

$$\Rightarrow BH'=\frac{48}{5}$$

۷. به کمک دستور مساحت مثلث قائم‌الزاویه می‌توان نوشت:



$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}BC.AH$$

$$\Rightarrow AB.AC=BC.AH$$

$$\Rightarrow AB^2.AC^2=BC^2.AH^2$$

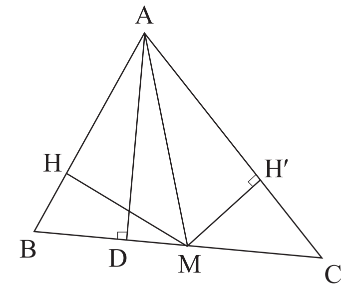
$$\Rightarrow AH^2=\frac{AB^2.AC^2}{BC^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2}=\frac{BC^2}{AB^2.AC^2}=\frac{AB^2+AC^2}{AB^2.AC^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2}=\frac{AB^2}{AB^2.AC^2}+\frac{AC^2}{AB^2.AC^2}$$

$$=\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AB^2}$$

۸. از این واقعیت استفاده می‌کنیم که در هر مثلث، هر میانه، مثلث را به دو مثلث معادل (هم مساحت) تفکیک می‌کند.



برای اثبات این موضوع کافی است توجه کنید که مثلث‌های AMB و AMC در رأس A یک ارتفاع دارند (ارتفاع AD) و چون $MB = MC$، پس داریم:

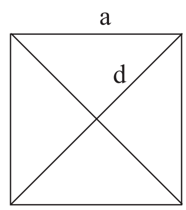
$$S_{AMB} = \frac{۱}{۲}MB.AD = \frac{۱}{۲}MC.AD = S_{AMC}$$

حال مساحت‌های این دو مثلث را با ارتفاع‌های MH و MH′ می‌نویسیم و مساوی قرار می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} S_{AMB} = \frac{۱}{۲}MH.AB \\ S_{AMC} = \frac{۱}{۲}MH'.AC \end{array}\right\} \Rightarrow MH.AB = MH'.AC$$

$$\Rightarrow \frac{MH}{MH'} = \frac{AC}{AB}$$

۹. می‌دانیم که مربع نوعی خاصی از لوزی است (که یک زاویه ۹۰° داشته باشد)، بنابراین مساحت مربع را به کمک دستور مساحت لوزی (نصف حاصلضرب دو قطر) می‌نویسیم و با $S = a^۲$ مساوی قرار می‌دهیم:



$$\begin{cases} S = a^۲ \\ S = \frac{d \times d}{۲} = \frac{d^۲}{۲} \end{cases} \Rightarrow a^۲ = \frac{d^۲}{۲} \Rightarrow d^۲ = ۲a^۲$$

$$\Rightarrow d = a\sqrt{۲}$$

پاسخ حسابان

● مجتبی رفیعی

۱.

$$S = \frac{۱}{۹}(۹ + ۹۹ + ۹۹۹ + ... + \underbrace{۹۹۹...۹}_{۱۰۰\ \text{تا}})$$

$$S = \frac{۱}{۹}\Big[(۱۰ - ۱) + (۱۰^۲ - ۱) + (۱۰^۳ - ۱) + ... + (۱۰^{۱۰۰} - ۱)\Big]$$

$$S = \frac{۱}{۹}\Big[(۱۰ + ۱۰^۲ + ۱۰^۳ + ... + ۱۰^{۱۰۰}) - (\underbrace{۱ + ۱ + ۱ + ... + ۱}_{۱۰۰\ \text{تا}})\Big]$$

$$S = \frac{۱}{۹}\left[\frac{۱۰(۱۰^{۱۰۰} - ۱)}{۱۰ - ۱} - ۱۰۰\right]$$

$$= \frac{۱}{۹}\left[\frac{۱۰}{۹}(۱۰^{۱۰۰} - ۱) - ۱۰۰\right]$$

$$S = \frac{۱}{۸۱}(۱۰^{۱۰۱} - ۱۰) - \frac{۱۰۰}{۹} = \frac{۱۰^{۱۰۱} - ۱۰ - ۹۰۰}{۸۱}$$

$$= \frac{۱۰^{۱۰۱} - ۹۱۰}{۸۱}$$

۲.

$$[۶۶,۹۰] = ۹۹۰$$

$$c_n = ۴۷ + (n - ۱)۹۹۰ = ۹۹۰n - ۹۴۳$$

$$c_۲ = ۹۹۰(۲) - ۹۴۳ = ۱۰۳۷$$

دومین عددی که در هر دو تصاعد مشترک است

$$a_۳ = a_۱ + ۲d \Rightarrow ۴۷ = a_۱ + ۱۸۰ \Rightarrow a_۱ = -۱۳۳$$

$$a_n = a_۱ + (n - ۱)d \Rightarrow ۱۰۳۷ = -۱۳۳ + (n - ۱)۹۰$$

$$\Rightarrow \boxed{n = ۱۴}$$

$$b_۳ = b_۱ + ۲d \Rightarrow ۴۷ = b_۱ + ۱۳۲$$

$$\Rightarrow b_۱ = ۴۷ - ۱۳۲ = -۸۵$$

$$b_n = b_۱ + (n - ۱)d \Rightarrow ۱۰۳۷ = -۸۵ + (n - ۱)۶۶$$

$$\Rightarrow ۱۰۳۷ + ۸۵ + ۶۶ = ۶۶n$$

$$\Rightarrow ۱۱۸۸ = ۶۶n \Rightarrow \boxed{n = ۱۸}$$

۳.

$$f(-۲) = ۰$$

$$\Rightarrow (-۲)^{۲n+۱} + ۲(-۲)^{۲n} + (-۲)^۵ - ۵(-۲)^۳ + k = ۰$$

$$\Rightarrow -۳۲ + ۴۰ + k = ۰ \Rightarrow k = -۸$$

$$f(x) = (x^۲ - ۱)Q(x) + ax + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \Rightarrow f(۱) = a + b \\ x = -۱ \Rightarrow f(-۱) = -a + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = -۹ \\ -a + b = -۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -۳ \\ b = -۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow R(x) = -۳x - ۶$$

۴.

$$\sqrt{x - ۱} = a \Rightarrow x = a^۲ + ۱$$

$$a + \sqrt{a^۲ + ۱ - ۲a} = k \Rightarrow a + \sqrt{(a - ۱)^۲} = k$$

$$\Rightarrow a + |a - ۱| = k$$

اگر $a - ۱ \geq ۰$

$$|a - ۱| = a - ۱ \Rightarrow a + a - ۱ = k \Rightarrow ۲a - ۱ = k$$

$$\Rightarrow ۲\sqrt{x - ۱} - ۱ = k$$

(این معادله به ازای هر مقدار k، جواب‌های محدودی دارد)

و اگر $a - ۱ < ۰$ باشد:

$$|a - ۱| = a - ۱ \Rightarrow a + ۱ - a = k \Rightarrow k = ۱$$

۵. چون رأس سهمی در حالت Max است، پس $a < ۰$

$$S = -\frac{b}{a} > ۰ \xrightarrow{a<۰} b > ۰$$

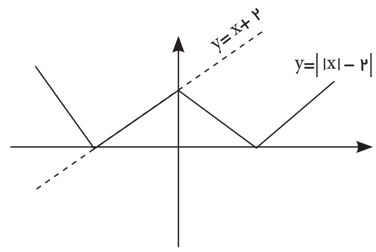
$$P = \frac{c}{a} < ۰ \xrightarrow{a<۰} c > ۰$$

اگر ریشهٔ مثبت $x_۱$ و ریشهٔ منفی $x_۲$ باشند، آن‌گاه:

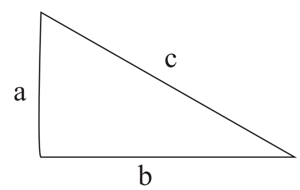
$|x_2| < |x_1|$

۶. بی‌شمار جواب دارد، زیرا:

$$\begin{cases} y = x+2 \\ y = \big||x|-2\big| \end{cases}$$



۷.



$$P = a+b+c$$

$$\begin{cases} S = 20 = \frac{1}{2}ab \Rightarrow ab = 40 \\ c^2 = a^2+b^2 \Rightarrow (a+b)^2 = c^2+2ab \end{cases}$$

$$\Rightarrow a+b = \sqrt{c^2+80}$$

$$c = P-(a+b) \Rightarrow c = P - \sqrt{c^2+80}$$

$$\Rightarrow P - c = \sqrt{c^2+80}$$

$$(P-c)^2 = c^2+80 \Rightarrow P^2 + c^2 - 2Pc = c^2+80$$

$$\Rightarrow \boxed{c = \frac{P^2-80}{2P}}$$

۸.

$$D_f : 1-x^2 \ge 0 \Rightarrow x^2 \le 1 \Rightarrow x \in [-1,1]$$

$$D_g : [0,+\infty)$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = [0,1]$$

$$D_{(f+g)of} = \{x \in D_f \,|\, f(x) \in D_{f+g}\}$$

$$\Rightarrow \{x \in [-1,1] \,|\, \sqrt{1-x^2} \in [0,1]\}$$

$$\Rightarrow 0 \le \sqrt{1-x^2} \le 1 \Rightarrow 0 \le 1-x^2 \le 1$$
$$\Rightarrow -1 \le -x^2 \le 0$$
$$\Rightarrow 0 \le x^2 \le 1$$
$$\Rightarrow x^2 \le 1$$
$$\Rightarrow -1 \le x \le 1$$

$$\Rightarrow D_{(f+g)of} = [-1,1]$$

۹.

$$A = \frac{1+\cos(2x+2y)}{2} + \frac{1+\cos(2x-2y)}{2}$$
$$-\cos 2y \cos 2x$$
$$= 1 + \frac{1}{2}\left[\cos(2x+2y)+\cos(2x-2y)\right]$$
$$-\cos 2y \cos 2x$$
$$= 1 + \frac{1}{2} \times 2\cos 2x \cos 2y - \cos 2y \cos 2x = 1$$

۱۰.

$$\tan^{-1} x = \alpha \Rightarrow \tan\alpha = x$$
$$\tan^{-1} y = \beta \Rightarrow \tan\beta = y$$

$$\Rightarrow \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{x-y}{1+xy}$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right) = \alpha - \beta$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right) = \tan^{-1} x - \tan^{-1} y$$

۱۱.

$$\sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Rightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) = 1$$
$$\Rightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi$$
$$\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{8}$$

۴ ریشه دارد.

k	۰	۱	۲	۳
x	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{17\pi}{8}$	$\frac{25\pi}{8}$

پاسخ جبر و احتمال

۱.

$$n = 1 : 2 < 4$$

$$n = k : (2k)! < 2^{2k}(k!)^2$$

$$n = (k+1) : (2k+2)! < 2^{2k+2}[(k+1)!]^2$$

دو طرف فرض استقرا، را در $(2k+1)(2k+2)$ ضرب می‌کنیم:

$$(2k+1)(2k+2)\times(2k!) < (2k+1)(2k+2)\times 2^{2k}(k!)^2$$

$$\Rightarrow (2k+2)! < (2k+1)(2k+2)\times 2^{2k}(k!)^2$$

باید ثابت کنیم که:

$$(2k+1)(2k+2)\times 2^{2k}(k!)^2 \le 2^{2k}\times 2^3 \times [(k+1)!]^2$$

$$(2k+1)\times 2\times(k+1)\cancel{2^{2k}}(k!)^2 \le \cancel{2^{2k}} \times 2^{\cancel{3}}$$
$$\times \cancel{(k!)^2} \times (k+1)^{\cancel{2}}$$

$$\Rightarrow 2k+1 \le 2k+2 \to 1 \le 2$$

پس حکم برای هر $n \in N$ برقرار است.

۲.

$$n = 2 : \frac{1}{2} < \frac{5}{12} ; n = 3 : \frac{5}{6} < \frac{10}{12} ;$$

$$n = 4 : \frac{13}{12} < \frac{15}{2}$$

$m = 4$ مناسب

$$n = k : \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k} < \frac{5(k-1)}{12}$$

$$n = (k+1) : \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1} < \frac{5k}{12}$$

دو طرف فرض را با $\frac{1}{k+1}$ جمع می‌کنیم.

طرف اول حکم $< \frac{5(k-1)}{12} + \frac{1}{k+1} \le \frac{5k}{12}$

$$\Rightarrow \frac{5k-5-5k}{12} \le \frac{-1}{k+1} \Rightarrow \frac{-5}{12} \le \frac{-1}{k+1}$$

$$\Rightarrow k+1 \ge \frac{12}{5} \to k \ge \frac{7}{5}$$

پس حکم برای هر $n \ge 4$ برقرار است.

۳.

$\overline{abcabc}=۱۳k$

$\overline{abcabc}=a\times ۱۰^۵+b\times ۱۰^۴+c\times ۱۰^۳+a\times ۱۰^۲+b\times ۱۰+c$

$=a\times ۱۰^۲(۱۰^۳+۱)+b\times ۱۰(۱۰^۳+۱)+۲(۱۰^۳+۱)$

$=۱۰۰۱(a\times ۱۰^۲+b\times ۱۰+c)$

$=۱۳\times ۷۷(\overline{abc})=۱۳k$

۴.

الف) $a^۲+b^۲+۴a+۴b+۸\ge ۰$

$\Leftrightarrow (a^۲+۴a+۴)+b^۲+۴b+۴\ge ۰$

$\Leftrightarrow (a+۲)^۲+(b+۲)^۲\ge ۰$

ب) $۲ab-۲a^۲+۲a\le b^۲+۱$

$\Leftrightarrow b^۲-۲ab+a^۲+a^۲-۲a+۱\ge ۰$

$\Leftrightarrow (b^۲+a^۲-۲ab)+(a^۲-۲a+۱)\ge ۰$

$\Leftrightarrow (a-b)^۲+(a-۱)^۲\ge ۰$

۵. فرض کنیم $\sqrt{۳}-۲\sqrt{۲}$ عددی گویا باشد، داریم:

$۲\sqrt{۲}-\sqrt{۳}=\frac{a}{b}\in Q\Rightarrow (۲\sqrt{۲}-\sqrt{۳})^۲=\frac{a^۲}{b^۲}$

$\Rightarrow ۸+۳-۴\sqrt{۶}=\frac{a^۲}{b^۲}\Rightarrow -۴\sqrt{۶}=\frac{a^۲}{b^۲}-۱۱$

$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{۶}}_{\in Q'}=\underbrace{\frac{a^۲}{-۴b^۲}+\frac{۱۱}{۴}}_{\in Q}$ تناقض

۶. کبوترها = ۶۵

لانه‌ها = ۳۲=۲×۴×۴

طبق اصل لانه کبوتر: $\left[\frac{۶۵-۱}{۳۲}\right]+۱=۳$

۷.

$\binom{n}{۳}=۱۴+\binom{n}{۲}$

$\frac{n!}{(n-۳)!\times ۳!}=۱۴+\frac{n!}{۲!\times (n-۲)!}$

$\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۳!}=۱۴+\frac{n(n-۱)}{۲}$

$n(n-۱)(n-۲)-۳n(n-۱)=۸۴$

$n(n-۱)(n-۵)=۲^۲\times ۳\times ۷\Rightarrow n=۷\Rightarrow \binom{۷}{۴}$

۸.

$\begin{cases}A\cap B=A\cap C\\ B\cap A'=C\cap A'\end{cases}$

$(A\cap B)\cup(B\cap A')=(A\cap C)\cup(C\cap A')$

$B\cap(\underbrace{A\cup A'}_{U})=C\cap(\underbrace{A\cup A'}_{U})\Rightarrow B=C$

۹.

الف) $(A\cup B)\cap(B\cup C)'$

$=(A\cup B)\cap(B'\cap C')$

$=((B'\cap C')\cap A)\cup(\underbrace{(B'\cap C')\cap B}_{\varnothing})$

$=(A\cap B')\cap C'=(A-B)-C$

ب) $A'\subset B'\Rightarrow A'\cup B'=B'$

$\Rightarrow (A\cap B)'=B'$

$\Rightarrow A\cap B=B\Rightarrow B\subset A$

ج) قضیه کتاب درسی

د) $A\cup B=A\cap B\Rightarrow A\cap(A\cup B)$

$=A\cap(A\cap B)$

$\Rightarrow A=A\cap B\Rightarrow A\subset B$ (۱)

$A\cup B=A\cap B\Rightarrow B\cap(A\cup B)=B\cap(A\cap B)$

$B=A\cap B\Rightarrow B\subset A$ (۲)

$(۱),(۲)\to A=B$

۱۰.

$|x|\le ۱, x\in Z\Rightarrow x=-۱,۰,۱$

$A=\left\{\frac{۱}{۲},۱,۲\right\}$

$x^۲\le ۱, x\in Z\Rightarrow B=\{-۱,۰,۱\}$

$A\times B=\left\{(\frac{۱}{۲},-۱),(\frac{۱}{۲},۰),(\frac{۱}{۲},۱),(۱,-۱),(۱,۰),(۱,۱),(۲,-۱),(۲,۰),(۲,۱)\right\}$

$A^۲=\left\{(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}),(\frac{۱}{۲},۱),(\frac{۱}{۲},۲),(۱,\frac{۱}{۲}),(۱,۱),(۱,۲),(۲,\frac{۱}{۲}),(۲,۱),(۲,۲)\right\}$

$|A\times B-A^۲|=۶\Rightarrow ۲^۶=۶۴$ زیرمجموعه

۱۱.

$\begin{cases}x^۲-y^۲=۱۶\\ xy=۱۵\Rightarrow x=\frac{۱۵}{y}\end{cases}$

$\frac{۲۲۵}{y^۲}-y^۲=۱۶\Rightarrow y^۴+۱۶y^۲-۲۲۵=۰$

$\Rightarrow (y^۲+۲۵)(y^۲-۹)=۰$

$\Rightarrow y=\pm ۳\Rightarrow x=\pm ۵$

۱۲.

$A=\left\{n^۲-۱|n\in N\right\}$

پاسخ هندسهٔ ۲

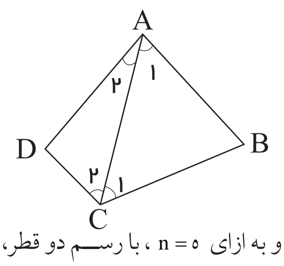
● هوشنگ شرقی

۱. الف) با توجه به مجموع زوایای داخلی هر مثلث، بـه ازای $n=۳$، $S_n=۱۸۰^\circ$ و به ازای $n=۴$، با رسـم یک قطر چهار ضلعی را به دو مثلث تفکیک می‌کنیم و مجموع زوایای داخلی آن را می‌یابیم:

$\begin{rcases}\hat{A}_۱+\hat{B}+\hat{C}_۱=۱۸۰^\circ\\ \hat{A}_۲+\hat{D}+\hat{C}_۲=۱۸۰^\circ\end{rcases}$

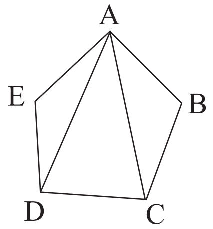
$\Rightarrow \hat{A}_۱+\hat{A}_۲+\hat{B}+\hat{C}_۱+\hat{C}_۲+\hat{D}=۲\times ۱۸۰^\circ$

$\Rightarrow S_۴=\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=۲\times ۱۸۰^\circ=۳۶۰^\circ$



و به ازای $n=۵$، با رسـم دو قطر، پنج ضلعی را به سه مثلث تفکیک می‌کنیم و با همان روش نتیجه می‌شود:

$S_۵=۳\times ۱۸۰^\circ=۵۴۰^\circ$



و به طریق استـقرایی، جـدول زیر را تنظیم می‌کنیم و فرمـول کلّی S_n را حدس می‌زنیم:

n	۳	۴	۵	...	n
S_n	۱۸۰°	۳۶۰°	۵۴۰°		$(n-۲)۱۸۰^\circ$

ب) تعـداد قطرهای n ضلعی محدّب

$\frac{n(n-3)}{2}$ است. بنابراین داریم:

$$\frac{n(n-3)}{2}=4n \overset{n\neq 0}{\Rightarrow} \frac{n-3}{2}=4 \Rightarrow n-3=8$$

$$\Rightarrow n=11$$

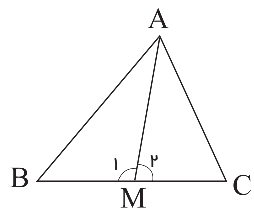
$$\Rightarrow S_n=(n-2)180^\circ=9\times180^\circ=1620^\circ$$

۲. به کمک عکس قضیهٔ لولا در دو مثلث AMB و AMC می‌نویسیم:

MB=MC و AM=AM و AB > AC

$$\Rightarrow \hat{M}_1 > \hat{M}_2 \Rightarrow \hat{M}_1+\hat{M}_2 > 2\hat{M}_2$$

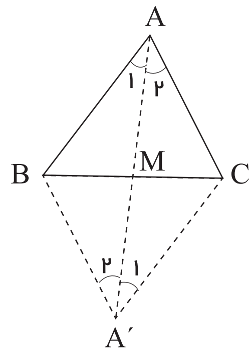
$$\Rightarrow 2A\hat{M}C < 180^\circ \Rightarrow A\hat{M}C < 90^\circ$$



و برای اثبات قسمت دوم مسئله، میانهٔ AM را از طرف M به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ A' امتداد می‌دهیم و از A' به B و C وصل می‌کنیم. چون $AM=A'M$ و BM=MC پس در چهارضلعی $ACA'B$ قطرها همدیگر را نصف کرده‌اند و در نتیجه این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است، بنابراین:

$A'C=AB$ و $A'C \parallel AB$ و در نتیجه:

$$A_1=\hat{A}'_1$$



و چون AB > AC پس $A'C > AC$؛ و لذا در مثلث ACA' می‌توان نوشت:

$$A'C > AC \Rightarrow \hat{A}_2 > \hat{A}'_1,\ \hat{A}'_1=\hat{A}_1$$

$$\Rightarrow \hat{A}_2 > \hat{A}_1 \Rightarrow M\hat{A}C > M\hat{A}B$$

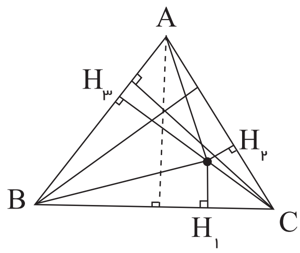
۳. اگر از M به سه رأس مثلث وصل کنیم، نتیجه می‌شود:

$$S_{ABC}=S_{MAB}+S_{MAC}+S_{MBC}$$

$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}MH_1.BC+\frac{1}{2}MH_2.AC$$

$$+\frac{1}{2}MH_3.AB=\frac{1}{2}a.L_a+\frac{1}{2}b.L_b+\frac{1}{2}c.L_c$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}aL_a}{S_{ABC}}+\frac{\frac{1}{2}bL_b}{S_{ABC}}+\frac{\frac{1}{2}cL_c}{S_{ABC}}=1$$



ولی روشن است که:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}a.h_a=\frac{1}{2}b.h_b=\frac{1}{2}c.h_c$$

و در نتیجه:

$$\frac{\frac{1}{2}aL_a}{\frac{1}{2}a.h_a}+\frac{\frac{1}{2}bL_b}{\frac{1}{2}b.h_b}+\frac{\frac{1}{2}cL_c}{\frac{1}{2}c.h_c}=1$$

$$\Rightarrow \frac{L_a}{h_a}+\frac{L_b}{h_b}+\frac{L_c}{h_c}=1$$

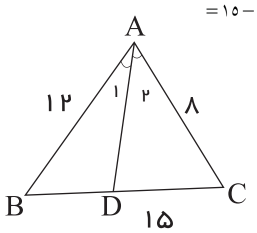
۴. به کمک قضیهٔ نیمسازها می‌نویسیم:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BC}{CD}\Rightarrow \frac{AB+AC}{AC}=\frac{\overbrace{BD+CD}^{BC}}{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{8+12}{8}=\frac{15}{CD}$$

$$\Rightarrow CD=\frac{15\times 8}{20}=6 \Rightarrow BD=BC-CD$$

$$=15-6=9$$



۵. مسئله را حل شده فرض می‌کنیم. مطابق شکل هم‌اندازهٔ AB، AD را روی AC جدا می‌کنیم.

بنابراین داریم:

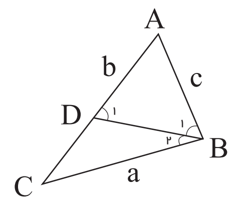
$$AD=AB=c \Rightarrow CD=AC-AD=b-c$$

$$AD=AB \Rightarrow \hat{D}_1=\hat{B}_1,\ \hat{D}_1=\hat{C}+\hat{B}_2$$

$$\Rightarrow \hat{B}_1=\hat{C}+\hat{B}_2,\ \hat{B}_1+\hat{B}_2=\hat{B} \Rightarrow \hat{B}_1=\hat{B}-\hat{B}_2$$

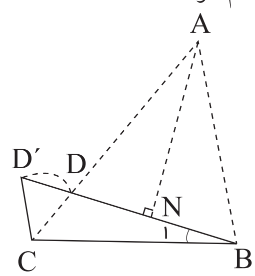
$$\Rightarrow \hat{B}-\hat{B}_2=\hat{C}+\hat{B}_2 \Rightarrow 2\hat{B}_2=\hat{B}-\hat{C},$$

$$\hat{B}_2=\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}$$



پس در مثلث BCD اندازه‌های ضلع‌های BC=a و CD=b−c و زاویهٔ $\hat{B}_2 = \frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}$ را داریم، لذا این مثلث قابل رسم است و از آنجا می‌توان مثلث ABC را نیز رسم کرد.

طریقهٔ رسم: ابتدا پاره‌خط BC=a را رسم و سپس روی رأس B، زاویهٔ $\hat{B}_2 = \frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}$ را جدا می‌کنیم. حال به مرکز C و به شعاع b−c دایره‌ای می‌زنیم. محل برخورد این دایره و ضلع دیگر زاویهٔ $\hat{B}_2$ را D می‌نامیم. CD را از طرف D امتداد می‌دهیم و محل برخورد آن با عمودمنصف BD، رأس A از مثلث ABC است (چرا؟) و از A به B و C وصل می‌کنیم تا مثلث ABC با شرایط مسئله رسم شود.



بحث: اگر دایرهٔ فوق در نقطهٔ دیگری مانند D′ نیز ضلع دوم زاویهٔ $\hat{B}_2$ را قطع کند، در این صورت CD′، عمودمنصف BD′ را در پایین BC قطع می‌کند و مسئله یک جواب دیگر نیز دارد (آن را رسم کنید)؛ ولی در این مثلث AB>AC و در نتیجه: $c>b$ و $\hat{C}>\hat{B}$ و این جواب مورد قبول ما نیست، ولی اگر از ابتدا به جای b−c و $\hat{B}-\hat{C}$، $|b-c|$ و $|\hat{B}-\hat{C}|$ را موجود فرض می‌کردیم، این هم جواب دیگری بود.

اما اگر دایرهٔ فوق امتداد ضلع زاویهٔ $\hat{B}_2$ را قطع نکند مسئله جواب ندارد.

سؤال: آیا ممکن است دایرهٔ فوق این ضلع را در یک نقطه قطع کند، یعنی بر آن مماس شود؟

۶. براساس قضایای مربوط به زاویه‌های ظلّی و محاطی در دایره می‌توان نوشت:

$$\hat{\alpha} = \frac{\overset{\frown}{ABC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}}{2} \quad \text{و}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\overset{\frown}{BAC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AC}}{2}$$

$$\hat{\gamma} = \frac{\overset{\frown}{BCA}-\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{AB}}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha}+\hat{\beta}+\frac{\hat{\gamma}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}}{2}+\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AC}}{2} + \frac{\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AB}}{4}$$

$$= \frac{2\overset{\frown}{AB}+2\overset{\frown}{BC}+2\overset{\frown}{AB}+2\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AB}}{4}$$

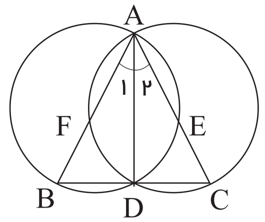
$$= \frac{3\overset{\frown}{AB}+3\overset{\frown}{AC}+3\overset{\frown}{BC}}{4} = \frac{3(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BC})}{4}$$

$$= \frac{3\times 360^\circ}{4} = 270^\circ$$

۷. از قضیهٔ خطوط قاطع در دایره می‌توان کمک گرفت:

$CD.CB = CE.CA$ و $BD.BC = BF.BA$

و از تقسیم این دو رابطه بر یکدیگر خواهیم داشت:



$$\frac{CD.CB}{BD.BC} = \frac{CE.CA}{BF.BA} \Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{CE}{BF}.\frac{CA}{BA}$$

و مطابق قضیهٔ نیمسازها داریم: $\frac{CD}{BD} = \frac{CA}{BA}$. در نتیجه:

$$\frac{CA}{BA} = \frac{CE}{BF}.\frac{CA}{BA} \Rightarrow \frac{CE}{BF} = 1 \Rightarrow CE = BF$$

۸. با توجه به دستور مربوط به محاسبهٔ طول مماس مشترک خارجی دو دایره می‌توان نوشت:

$$L = \sqrt{d^2-(R-R')^2}$$

$$= \sqrt{(R+R')^2-(R-R')^2}$$

$$= \sqrt{4RR'} = 2\sqrt{RR'} \quad \text{و} \quad L = \sqrt{2}R$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}R = 2\sqrt{RR'} \Rightarrow 2R^2 = 4RR' \Rightarrow R = 2R'$$