رشد برهان ریاضی ۱

۳

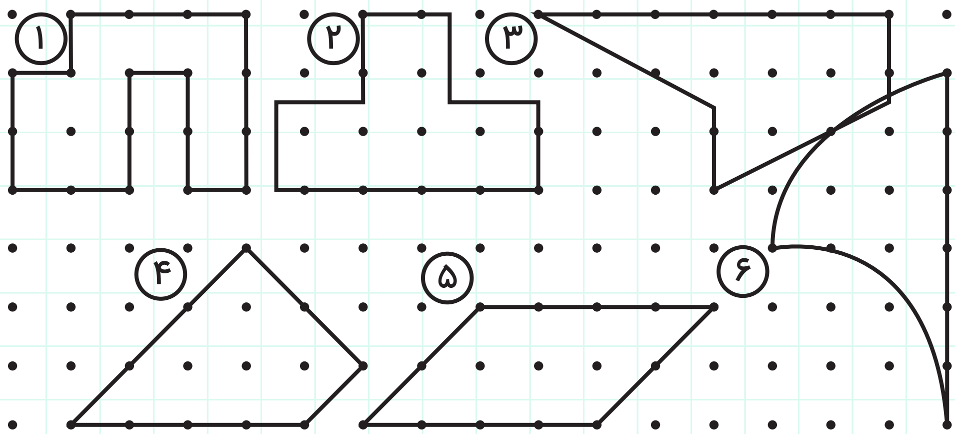
وزارت آموزش و پرورش/سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی/
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی
ماهنامهٔ آموزشی و تربیتی برای دانش‌آموزان دورهٔ اول متوسطه
www.roshdmag.ir/دورهٔ بیست‌ونهم/شمارهٔ ۱۴۱
۴۰ صفحه/آذر ۱۴۰۲/پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۱۲/ISSN :1735-4943

مجله چندرسانه‌ای • شنیداری • دیداری • خوانشی

شرح روی جلد

مربع بساز

خسرو داودی



به صفحهٔ شطرنجی نقطه‌ای مربعی بالا نگاه کنید. شش شکل می‌بینید. فقط می‌توانید یک برش روی شکل ایجاد و سپس مشخص کنید که با چه تبدیل هندسی‌ای می‌توان بخش برش‌خورده را به قسمت دیگر منتقل کرد تا در مجموع یک مربع ساخته شود. با تبدیل‌های انتقال، تقارن محوری، تقارن مرکزی یا دوران از دو قطعه، یک مربع بسازید. به این ترتیب شما شش مربع یک اندازه به دست می‌آورید.

برای مشـاهدهٔ پاسخ، رمزینه را پویش کنید.

بســـــم الله الرحمن الرحیم

اللّهم صل علی **محمد** و آل **محمد** و عجل فرجهم

رشد برهان ۱ ریاضی

۳

وزارت آمـوزش و پـرورش سازمان پـژوهش و برنامـه‌ریزی آموزشی
دفتـر انـتشــارات و فـنـاوری آمــوزشـــی www.roshdmag.ir
دورهٔ بیـســت و نـهــم/ شـمــارهٔ پـی درپـی **۱۴۱**/ آذر **۱۴۰۲**
ماهنامهٔ آموزشـی و تربیتـی برای دانش‌آمـوزان دورهٔ اول متـوسطـه
ISSN:**1735-4943** / پـیـامک: **۳۰۰۰۸۹۹۵۱۲/ ۴۰** صفحـه

مدیرمسئول: محمدصالح مذنبی/ **سردبیر:** حسین نامی ساعی/ **مدیر داخلی:** پری حاجی خانی
هیئت تحریریه: محرم ایردموسی، مریم جعفرآبادی، مجید حکمت، روح‌الله خلیلی بروجنی، خسرو داودی، محمدرضا سیدصالحی، مرتضی مرتضوی، محمود نصیری
ویراستار: بهروز راستانی/ **مدیر هنری:** کوروش پارسانژاد/ **طراح گرافیک:** حسین یوزباشی
تصویرگر: حسین یوزباشی

در این ماه؛ آذر ۱۴۰۲: ◀**پنجم:** روز بسیج مستضعفان ◀**هفتم:** روز نیروی دریایی ◀**نهم:** روز بزرگداشت شیخ مفید ◀**دهم:** شهادت آیت‌الله سید حسن مدرس، روز مجلس ◀**دوازدهم:** روز قانون اساسی جمهوری اسلامی ایران ◀**بیست‌وپنجم:** روز پژوهش ◀**بیست‌وششم:** شهادت حضرت فاطمه(س) ◀**سی‌ام:** جشن شب یلدا

◀شرح مناسبت‌های ماه را با پویش رمزینه ببینید.

سخن سردبیر

ریاضی و مدرسه

ریاضی و استدلال

گفت‌وگو

ریاضی و کاربرد

ریاضی و تاریخ

ریاضی و سرگرمی

ریاضی و مسئله

ریاضی و برنامه‌نویسی

در سال ۱۳۲۶ در اصفهان به دنیا آمد. در پنج سالگی او را به مکتب گذاشتند، اما در همان روز اول از آنجا فرار کرد و به خانه بازگشت. خوشه‌های رسیدهٔ انگور درخت مویی که در حیاط مکتب روییده بود، نظر او را جلب کرده بود...
صفحه‌های ۲۰ و ۲۱ را بخوانید.

قیمت: ۱۱۰۰۰۰ ریال

خانوادهٔ مجلات رشد همهٔ تلاش خود را کرده است تا این مجله در **دسترس عموم** دانش‌آموزان قرار گیرد و همهٔ کودکان و نوجوانان میهن عزیز اسلامی‌مان **امکان تهیهٔ** آن را داشته باشند.
برای مشاهدهٔ شرایط ارسال مطلب و همکاری با ماهنامهٔ رشد ریاضی برهان متوسطهٔ اول، رمزینه را پویش کنید.

نشانی کانال مجلهٔ رشد برهان متوسطهٔ اول در پیام‌رسان شاد:

@roshd_borhan1

نردبان ریاضی

حسین نامی‌ساعی

شهادت حضرت فاطمه زهرا (س) را تسلیت می‌گوییم. پیامبر اکرم (ص) می‌فرمایند: اِنَّ فَاطِمَةُ سَيِّدَةُ نِسَاءِ الْعَالَمِینَ (همانا فاطمه سرور زنان عالم است[۱]).

دوستان، متأسفانه در این روزهای مهر و آبان شاهد جنایات رژیم غاصب اسرائیل، و بمباران وحشیانه و شدید غزه توسط جنگنده‌های اسرائیلی و هدف قرار دادن خانه‌ها و ساختمان‌های مسکونی و حتی بیمارستان‌ها هستیم ،که این عمل ددمنشانه منجر به کشته و زخمی‌شدن هزاران نفر از مردم مظلوم و بی‌گناه غزه و حتی شمار زیادی از کودکان و زنان شده‌است. این جنایات نقض قوانین بین‌المللی حقوق بشر و بشردوستانه است و از نظر ما و ملت عزیز ایران و تمام ملت‌های آزادی‌خواه و انسان‌دوست محکوم است.

بچه‌ها اجازه دهید وارد دنیای ریاضی شویم. ریـاضی‌ای که خیلی‌ها فکر می‌کنند سخت است، آیا ریاضی سخت است؟ ریاضی سخت نیســت، اگر تفکرتان منطقی باشد و با دلیل و استدلال آن را مطالعه کنید. حل مسئلهٔ ریاضی سخت نیست، اگر به جزئیات آن توجه داشته باشید و اطلاعات کافی را برای حل آن به‌دست آورید. فهم موضوع‌های جدید ریاضی آسان است، اگر پشتکار به خرج دهید و از دانش قبلی خود برای یادگیری مطالب جدید استفاده کنید و پله‌پله پیش بروید. کسی که دنبال فهم و درک ریاضیات است، باید پیوسته مطالعه کند و خود را با ریاضیات درگیر سازد. به‌طور منظم تمرین، مثال و مسئله‌های ریاضی حل کند، از صاحب‌نظران بپرسد و کمک بگیرد، و نگرش مثبت و مطمئنی نسبت به ریاضیات پیدا کند.

چند ســال پیش یکی از دانش‌آموزانم بعد از پایان کلاس پیش من آمد و گفت: «من ریاضیات را دوست دارم، ولی این درس را خوب نمی‌فهمم، در حل مسئله‌های ریاضی معمولاً خطا و اشتباه دارم و ...»

فقط آن دانش‌آموز این مشکل را نداشت، خیلی از دانش‌آموزان در فهم ریاضیات و حل مسئله‌های آن مشکل دارند. از ریاضی می‌ترسند، درک نادرستی از مفهوم‌های ریاضی دارند، در حل مسئله‌های ریاضی دقت کافی ندارند، و به نتایج درستی نمی‌رسند و دچار اشتباه می‌شوند. ● اشتباه‌هایی که از ندانستن و به‌خاطرنسپردن اصول، قضیه‌ها، تعریف‌ها، قوانین یا فرمول‌ها حاصل می‌شوند. ● اشتباه‌هایی که از به‌کارنگرفتن روش‌های صحیح حل مسئله به‌وجود می‌آیند. ● اشتباه‌هایی که در محاسبه‌های جمع، تفریق، ضرب یا تقســیم مرتکب می‌شوند. ● اشــتباه‌هایی که از درک‌نکردن مفهوم‌ها یا اصول زیربنایی به بار می‌آیند. ● و شاید اشتباه‌های دیگر. مانند اشتباه‌هایی که در اثر اضطراب و ترس پیش می‌آیند. چه کنیم تا گرفتار این اشتباه‌ها نشویم.

مهم‌ترین عامل و اولین پله برای بالا رفتن از نردبان ریاضی، دوری از این اشتباه‌ها و فهم صحیح ریاضیات؛ و همان‌طور که در ابتدای این یادداشت گفتیم، داشتن «تفکر منطقی» است. تفکر منطقی تفکری است که از داده‌ها، دلیل‌ها و شواهد هر مسئله برای حل آن و رسیدن به نتایج درست استفاده می‌کند. تفکر منطقی در حل یک مسئله، شناخت مسئله، تجزیه‌وتحلیل آن، و به‌کارگیری اطلاعات و قواعد و اصول برای پیداکردن ایده و راهی منطقی برای حل آن مســئله است. دومین پله برای فهم ریاضیات، تسلط بر قضیه‌ها، اصول و قواعد، و فرمول‌های ریاضی است. سومین پله برای فهم ریاضیات، حل مسئله‌های متنوع و توجه به تمام جزئیات مسئله است. توجه داشته باشیم، هنگامی که یک مسئله را حل می‌کنیم، آن را به دقت تحلیل‌وتجزیه، مرتب و سازمان‌دهی کنیم. ارتباط بین داده‌های مسئله را بیابیم و از تمام اطلاعات قبلی‌مان برای حل آن بهره بگیریم. چهارمین پله برای فهم ریاضیات، پرسیدن سؤال و کمک خواستن از آن‌هایی است که ریاضی می‌دانند. پنجمین پله برای فهم ریاضیات، دقت و پرهیز از کم‌توجهی است. ششمین پله برای فهم ریاضیات، اعتمادبه‌نفس و مثبت‌نگری است. فراموش نکنید همهٔ این‌ها با مطالعه و دوستی با ریاضیات به‌دست می‌آیند. امیدواریم شما با تفکری منطقی و به‌کارگیری این توصیه‌ها از خواندن ریاضیات لذت ببرید.

سربلند و موفق باشید.

پی‌نوشت

۱. بحارالانوار، جلد ۲۵، ص ۳۶۱.

ریاضی و مدرسه
۳
دوره ۲۹ | شماره ۳

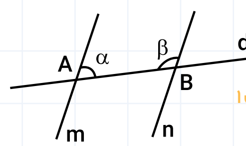
محمود نصیری

مفهوم‌های هندسی و حل مسئله

آشنایی با هم‌نهشتی در مثلث‌ها

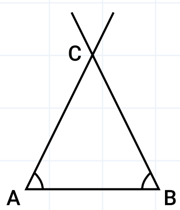
در بخش‌های قبلی، هم‌نهشتی ض‌ز‌ض را همراه با کاربردهایی از آن در حل مسئله بررسی کردیم. اکنون حالت‌های دیگر هم‌نهشتی مثلث‌ها را بررسی و سعی می‌کنیم مسئله‌های متنوعی را حل کنیم. دومین هم‌نهشتی مثلث‌ها هم‌نهشتی دو زاویه و ضلع بین است.

در بخش‌های قبلی این ویژگی را در مورد خط‌ها بیان کردیم که اگر دو خط m و n خط d را در A و B قطع کنند و α و β مکمل باشند، یعنی، $\alpha+\beta=180^\circ$، آن‌گاه دو خط m و n موازاند (شکل ۱).



شکل ۱

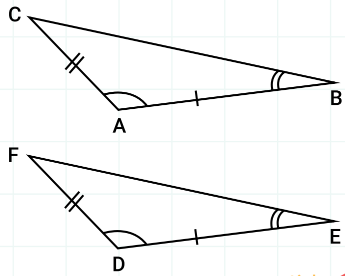
اکنون فرض کنیم اندازه‌های $\angle A$ و $\angle B$ در یک مثلث معلوم باشند. ضلع AB را که روی ضلع‌های هر دو زاویه است، ضلع بین دو زاویه می‌نامیم. چون در هر مثلث مجموع هر دو زاویه از 180° کمتر است، پس مجموع اندازه‌های $\angle B$ و $\angle C$ از 180° کمتر است. حال فرض کنیم $\angle A$ و $\angle B$ معلوم باشند و اندازهٔ ضلع بین این دو زاویه، یعنی ضلع AB نیز معلوم باشد. ابتدا ضلع AB را رسم می‌کنیم. سپس دو زاویهٔ A و B را رسم می‌کنیم (شکل ۲). بنا بر آنچه توضیح دادیم، دو ضلع دیگر $\angle A$ و $\angle B$ نمی‌توانند موازی باشند، در نتیجه در یک نقطهٔ یکتا مانند C یکدیگر را قطع می‌کنند. بنابراین، با معلوم‌بودن دو زاویه و ضلع بین مثلثی یکتا می‌توان ساخت. یعنی هر تعداد مثلث با این ویژگی بسازیم، همه با هم، هم‌نهشت هستند.



شکل ۲

در واقع هم‌نهشتی دو زاویه و ضلع بین را داریم.

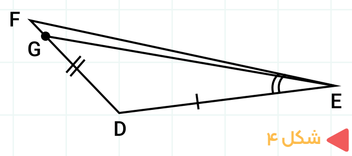
هم‌نهشتی زض‌ز: هرگاه دو زاویه و ضلع بین از مثلثی با دو زاویه و ضلع بین از مثلث دیگری نظیر به نظیر هم‌نهشت باشند (شکل ۳)، آن‌گاه دو مثلث هم‌نهشت‌اند.



شکل ۳

$\angle A \cong \angle D$، $\angle B \cong \angle E$ و $AB \cong DE$، در نتیجه: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

اگر همنهشتی ض‌زض را بدانید، آیا می‌توانید همنهشتی زض‌ز را به‌عنوان یک مسئله، به کمک آن ثابت کنید؟ مسلماً یکی از راهبردهای حل مسئله در هندسه تبدیل آن مسئله به مسئلهٔ دیگری است که قبلاً حل کرده‌ایم. نقطهٔ G را روی نیم‌خط DF، یعنی در طرفی از خط DE که F واقع است، چنان در نظر می‌گیریم که: DG=AB (شکل ۴). اکنون آیا می‌توانید نتیجه بگیرید که دو مثلث ABC و DEG همنهشت هستند؟ چرا؟ چگونه از همنهشتی ض‌زض استفاده می‌کنید؟ ضلع‌ها و زاویه‌های همنهشت کدام‌اند؟

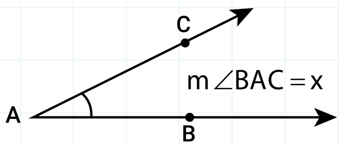


شکل ۴

اکنون اگر بتوانید نتیجه بگیرید که نقطهٔ G همان نقطهٔ F است، درمی‌یابیم که در واقع $\triangle DEG$ همان $\triangle DEF$ است. در نتیجه دو مثلث ABC و DEF همنهشت هستند (شکل ۴).

از همنهشتی دو مثلث DEF و DEG چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ می‌دانید وقتی دو مثلث همنهشت هستند، همهٔ اجزای نظیرشان نیز همنهشت‌اند. بنابراین $\angle DEG$ و $\angle DEF$ همنهشت و در نتیجه هم‌اندازه هستند. اما این دو زاویه در رأس E و ضلع ED مشترک هستند و دو ضلع دیگر آن‌ها به جز E در یک طرف خط DE واقع‌اند. بنابراین باید دو ضلع دیگر این دو زاویه بر هم منطبق شوند. در نتیجه G روی E واقع می‌شود و $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ همنهشت هستند.

ایده‌ای که در اثبات بالا از آن استفاده کردیم، در مورد همنهشتی پاره‌خط‌ها و همچنین همنهشتی زاویه‌ها بسیار مهم است. اگر نقطهٔ A روی خط m مفروض باشد و x یک عدد مثبت باشد، آنگاه در یک طرف نقطهٔ A روی خط m، یک و فقط یک نقطهٔ B وجود دارد، به‌طوری که: AB=x. به همین ترتیب این رابطه در مورد زاویه‌ها برقرار است. اگر (نیم‌خط) $\overrightarrow{AB}$ و عدد مثبت r مفروض باشند، در یک طرف خط AB یک و فقط یک $\overrightarrow{AC}$ وجود دارد، به طوری که: $m\angle BAC = x$. یعنی اندازهٔ زاویهٔ BAC برابر x است (شکل ۵).



شکل ۵

از این ویژگی در اثبات یکی‌بودن $\overrightarrow{EG}$ و $\overrightarrow{EF}$ استفاده کردیم.

اکنون که دومین همنهشتی مثلث‌ها، یعنی همنهشتی زض‌ز را ثابت کردیم، به حل چند مسئله می‌پردازیم. اولین مسئله همان است که در انتهای مقالهٔ شمارهٔ قبلی مطرح کردیم. این قضیه برعکس قضیهٔ مثلث متساوی‌الساقین است. خود قضیه به این صورت مطرح شده است:

قضیه: در هر مثلث متساوی‌الساقین، زاویه‌های مجاور به قاعده همنهشت هستند.

در این قضیه، «مثلث متساوی‌الساقین است» را فرض مسئله و «زاویه‌های مجاور به قاعده همنهشت هستند» را حکم یا نتیجهٔ قضیه می‌نامند. فرض قضیه یا مسئله مجموعه اطلاعاتی هستند که آن‌ها را درست در نظر می‌گیریم. سپس با استدلال‌هایی که بیان می‌کنیم، می‌کوشیم درستی حکم قضیه یا مسئله را نشان دهیم.

اکنون در این قضیه جای فرض و حکم را عوض می‌کنیم. آن را چگونه بنویسیم؟

البته برای نوشتن باید کلمه‌هایی اضافه یا کم کنیم، اما نباید مفهوم اصلی فرض و حکم تغییر کند. مثلاً فرض به این صورت نوشته می‌شود: «در مثلثی، دو زاویه همنهشت هستند.»

این همان حکم قضیهٔ قبل است. و حکم چنین می‌شود:

«مثلث متساوی‌الساقین است.»

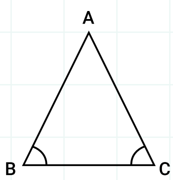
پس می‌توانیم آن را چنین بنویسیم که در این صورت می‌گوییم عکس قضیهٔ قبل است. یعنی اگر در مسئله یا قضیه‌ای جای فرض و حکم را عوض کردیم، مسئله یا قضیهٔ جدید را عکس مسئله یا قضیهٔ قبلی می‌نامیم.

عکس قضیهٔ مثلث متساوی‌الساقین:

هرگاه در مثلثی دو زاویه همنهشت باشند، آن‌گاه آن مثلث، متساوی‌الساقین است.

با نمادهای ریاضی فرض و حکم به صورت زیر است:

حکم	فرض
$\overline{AB} \cong \overline{AC}$	$\angle B \cong \angle C$
$AB=AC$	یا $m\angle B = m\angle C$



شکل ۶

اکنون این قضیه را چگونه ثابت می‌کنید؟ از کدام همنهشتی بین دو مثلث استفاده می‌کنید؟ چگونه اجزای نظیر را در دو مثلث ABC و ACB (شکل ۶) می‌نویسید؟

در واقع مانند اثبات خود قضیه از

همنهشتی مثلث با خودش استفاده می‌کنیم. فکر می‌کنم توانسته‌اید آن را ثابت کنید. همنهشتی‌های اجزای نظیر به صورت زیر هستند:

$\overline{AB} \cong \overline{BA}$ و $\angle B \cong \angle C$ ، $\angle C \cong \angle B$

اکنون قضیهٔ زضز را به کار می‌بریم.

بنابراین: $\triangle ABC \cong \triangle ACB$.

از این همنهشتی چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ بله احتمالاً درست حدس زده‌اید: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ و $\overline{AC} \cong \overline{AB}$.

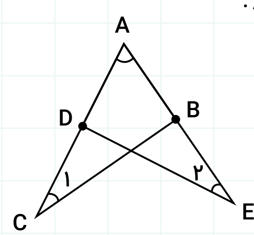
این همان نتیجه‌ای است که به دنبالش هستیم؛ یعنی $\triangle ABC$ متساوی‌الساقین است.

با تعریف مثلث متساوی‌الاضلاع آشنا هستید. از دو قضیه‌ای که ثابت کردیم کمک بگیرید و دو قضیهٔ زیر را ثابت کنید. آیا این دو قضیه عکس هم هستند؟ یعنی آیا جای فرض و حکم عوض شده‌اند؟

۱. اگر مثلثی متساوی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه هر سه زاویهٔ آن همنهشت‌اند.
۲. اگر در مثلثی سه زاویه همنهشت باشند، آن‌گاه آن مثلث متساوی‌الاضلاع است.

حال که با دومین ویژگی همنهشتی دو مثلث آشنا شدیم، سعی می‌کنیم مسئله‌های دیگری را مطرح و حل کنیم:

مسئلهٔ ۱. در شکل ۷ داریم: $\overline{AE} \cong \overline{AC}$ و $\angle 2 \cong \angle 1$، ثابت کنید: $\overline{BC} \cong \overline{DE}$ و $\overline{AB} \cong \overline{AD}$.



شکل ۷

پاسخ: فکر می‌کنید از همنهشتی کدام دو مثلث باید استفاده کنیم؟ مسلماً مثلث‌هایی را در نظر می‌گیریم که فرض‌ها و حکم‌ها اجزایی از آن‌ها باشند. پس باید دو مثلث چنان انتخاب کنیم که ضلع‌های AC و AE و همچنین $\angle 1$ و $\angle 2$ اجزایی نظیر از آن‌ها باشند.

حتماً حدس زده‌اید که این دو مثلث، مثلث‌های AED و ACB هستند.

اکنون در این دو مثلث دو جزء متناظر همنهشت دیگر باید چنان پیدا کنید که یا از همنهشتی ض‌زض یا از همنهشتی زضز استفاده کنید. اما مشاهده می‌کنیم که همنهشتی دو ضلع دیگر امکان ندارد، زیرا هر دو در حکم مسئله هستند و باید آن‌ها را ثابت کنیم. با کمی دقت مشاهده می‌کنیم که همنهشتی دو زاویهٔ دیگر امکان‌پذیر است. چرا؟

چون: $\angle CAB \cong \angle EAD$ و هر دو یک زاویه با دو نام متفاوت‌اند. در واقع زاویهٔ A در هر دو مثلث مشترک است. پس بنا بر زضز داریم: $\triangle ACB \cong \triangle AED$.

اگر همنهشتی اجزای نظیر را در این دو مثلث بنویسید، به همان نتیجه‌ای که می‌خواستید، یعنی حکم‌های مسئله می‌رسید.

قبلاً با تعریف‌های میانه، ارتفاع، نیمساز و عمودمنصف در مثلث آشنا شده‌اید. چون می‌خواهیم مسئله‌هایی را در مورد آن‌ها حل کنیم، این تعریف‌ها را یادآوری می‌کنیم.

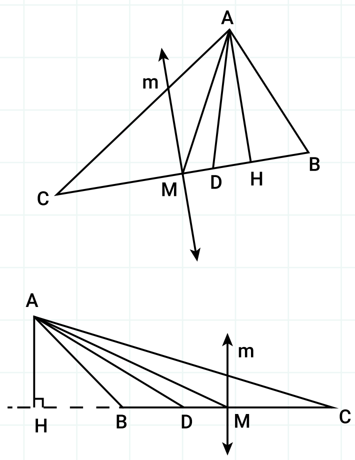
۱. تعریف میانه: پاره‌خطی است که یک انتهای آن یک رأس مثلث و انتهای دیگر آن روی وسط ضلع مقابل آن رأس باشد.

۲. تعریف نیمساز: پاره‌خطی است که یک انتهای آن یک رأس مثلث و انتهای دیگر آن روی ضلع مقابل آن رأس باشد و زاویهٔ آن رأس را به دو زاویه با اندازه‌های مساوی تقسیم کند.

۳. تعریف ارتفاع: پاره‌خطی است که یک انتهای آن یک رأس و انتهای دیگر آن روی خط شامل ضلع مقابل آن رأس باشد و بر این خط عمود باشد.

هر سه جز میانه، ارتفاع و نیمساز را در مثلث پاره‌خط در نظر می‌گیریم و پاره‌خط‌بودن آن‌ها از تعریف‌ها نیز مشخص است. اما عمودمنصف ضلع در مثلث کمی تفاوت دارد، زیرا یک خط است.

۴. تعریف عمودمنصف: در مثلث، عمودمنصف خطی است که در وسط هر ضلع مثلث بر آن عمود شده باشد.



شکل ۸

در مثلث‌های شکل ۸، $\overline{AM}$، $\overline{AD}$ و $\overline{AH}$ به ترتیب میانه، نیمساز و ارتفاع هستند و خط m، عمودمنصف نظیر ضلع BC است. نقطه‌های M، D و H را به ترتیب پای میانه، پای نیمساز و پای ارتفاع می‌نامیم. پای میانه همواره بین دو رأس است. چرا؟ پای نیمساز نیز همواره بین دو رأس است. در تعریف ما آن را چنین در نظر گرفتیم، اما در هندسهٔ پیشرفته‌تر نیازی به بیان آن نیست. می‌توانیم ثابت کنیم که پای نیمساز همواره بین دو رأس است. مشاهده می‌کنیم که پای ارتفاع می‌تواند هر نقطه‌ای روی خط، شامل ضلع نظیر آن باشد. پای عمودمنصف چگونه است؟

اکنون که با تعریف‌های این اجزا در مثلث آشنا شدیم، در بخش بعدی مسئله‌هایی را در مورد آن‌ها مطرح خواهیم کرد.

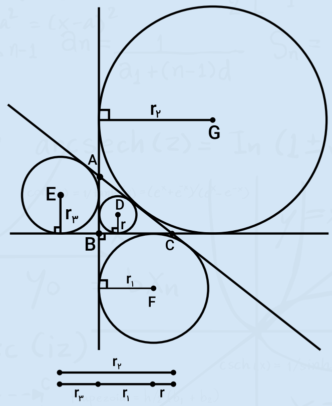
ریاضی و مدرسه
دوره ۲۹ | شماره ۳

یک مسئله و چند راه حل

محسن کیخائی

دایره، مماس، شعاع و مسئله

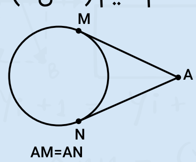
مسئله: در شکل ۱ دایرهٔ به مرکز D درون مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و مماس بر سه ضلع آن رسم شده است. سه دایرهٔ دیگر به مرکزهای E، F و G هم به‌گونه‌ای رسم شده‌اند که بر یکی از ضلع‌های مثلث و امتداد دو ضلع دیگر مماس‌اند. ثابت کنید: $r_3+r_1+r=r_2$. یعنی اندازهٔ شعاع دایرهٔ بزرگ برابر است با مجموع اندازهٔ شعاع‌های سه دایرهٔ دیگر.



شکل ۱

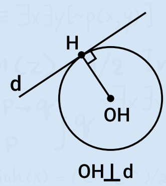
چند نکته

۱. اگر از نقطه‌ای خارج دایره دو مماس بر آن رسم کنیم (شکل ۲)، طول این مماس‌ها برابر است.



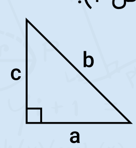
شکل ۲

۲. شعاع دایره، در نقطهٔ تماس، بر خط مماس عمود است (شکل ۳).



شکل ۳

۳. در هر مثلث قائم‌الزاویه، مجذور وتر برابر است با مجموع مجذورهای دو ضلع قائمهٔ آن (رابطهٔ فیثاغورس، شکل ۴).



$b^2=a^2+c^2$

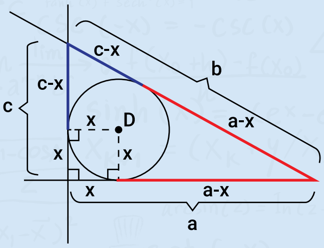
شکل ۴

اثبات مسئله

روش اول

با در نظر گرفتن: BC=a، AC=b و AB=c، و به کمک نکته‌های ۱ و ۲، رابطه‌هایی بین شعاع هر دایره و ضلع‌های مثلث قائم‌الزاویه پیدا می‌کنیم. ابتدا برای دایرهٔ داخلی به مرکز D، شکل ۵ را در نظر می‌گیریم:

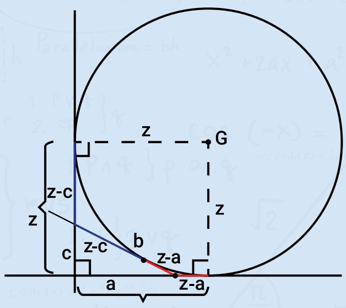
$$(a-x)+(c-x)=b \Rightarrow a+c-b=2x$$
$$\Rightarrow x=\frac{a+c-b}{2} \xrightarrow{r=x} r=\frac{a+c-b}{2}$$



شکل ۵

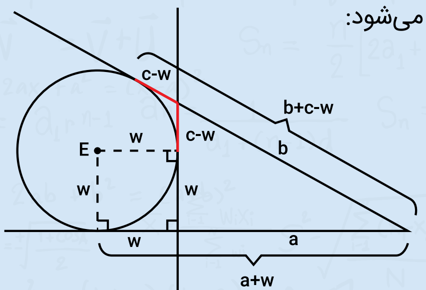
اکنون برای دایرهٔ به مرکز G با توجه به شکل ۶ داریم:

$$(z-a)+(z-c)=b \Rightarrow 2z=a+b+c$$
$$\Rightarrow z=\frac{a+b+c}{2} \xrightarrow{r_2=z} r_2=\frac{a+b+c}{2}$$



شکل ۶

در ادامه برای دایرهٔ به مرکز E با توجه به شکل ۷ و استفادهٔ ویژه از نکتهٔ ۱، نتیجه می‌شود:



شکل ۷

$$b+c-w=a+w \Rightarrow b+c-a=2w$$
$$\Rightarrow w=\frac{b+c-a}{2} \xrightarrow{r_3=w} r_3=\frac{b+c-a}{2}$$

تمرین ۱. مانند قبل برای دایرهٔ به مرکز F با رسم شکل و نام‌گذاری مناسب، رابطهٔ $r_1=\frac{b+a-c}{2}$ را به‌دست آورید.

اکنون با توجه به رابطه‌های بالا نتیجه می‌شود:

$$r_3+r_1+r=\frac{b+c-a}{2}+\frac{b+a-c}{2}+\frac{a+c-b}{2}=\frac{a+b+c}{2}=r_2$$

روش دوم

در این روش، ابتدا درستی دو رابطهٔ فرعی زیر را نشان می‌دهیم. سپس با استفاده از آن‌ها رابطهٔ اصلی را ثابت می‌کنیم:

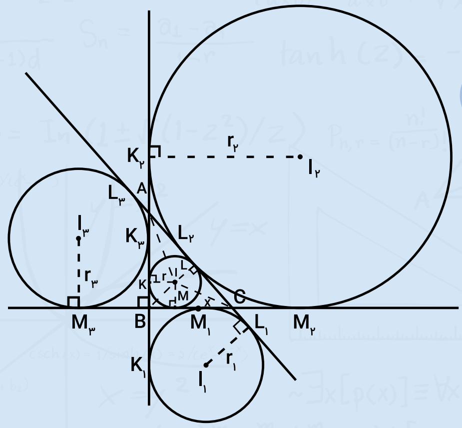
الف) $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r}$

ب) $r.r_2=r_1.r_3$

اثبات الف) در شکل ۸ با در نظر گرفتن AB=c، AC=b، BC=a و

داریم: $p=\frac{a+b+c}{۲}$

$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta BCI}+S_{\Delta ACI}+S_{\Delta ABI}$$
$$=\frac{۱}{۲}IM.BC+\frac{۱}{۲}IL.AC+\frac{۱}{۲}IK.AB$$
$$=\frac{۱}{۲}ra+\frac{۱}{۲}rb+\frac{۱}{۲}rc=\frac{۱}{۲}r(a+b+c)$$
$$\xrightarrow{p=\frac{a+b+c}{۲}}S_{\Delta ABC}=pr\Rightarrow r=\frac{S_{\Delta ABC}}{p}$$



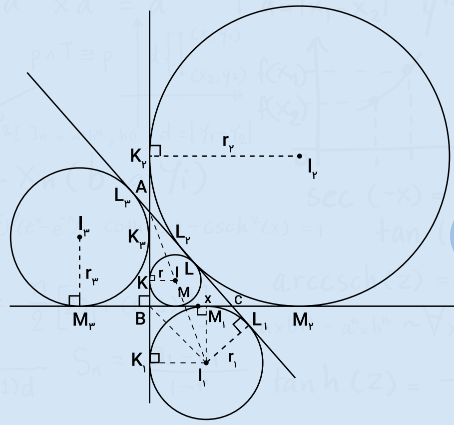
شکل ۸

با در نظر گرفتن شکل ۹ این رابطه‌ها را داریم:

$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABI_۱}+S_{\Delta ACI_۱}-S_{\Delta BCI_۱}$$
$$=\frac{۱}{۲}I_۱K_۱.AB+\frac{۱}{۲}I_۱L_۱.AC-\frac{۱}{۲}I_۱M_۱.BC$$
$$=\frac{۱}{۲}r_۱c+\frac{۱}{۲}r_۱b-\frac{۱}{۲}r_۱a=\frac{۱}{۲}r_۱(c+b-a)$$

با توجه به اینکه: داریم $p=\frac{a+b+c}{۲}$

$$۲p=a+b+c\Rightarrow ۲p-۲a=b+c-a\Rightarrow ۲(p-a)=b+c-a$$
$$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{۱}{۲}r_۱.۲(p-a)=r_۱(p-a)\Rightarrow r_۱=\frac{S_{\Delta ABC}}{p-a}$$



شکل ۹

به طریق مشابه می‌توان نشان داد: $r_۲=\frac{S_{\Delta ABC}}{p-b}$ و $r_۳=\frac{S_{\Delta ABC}}{p-c}$.

تمرین۲. درستی این دو رابطه را بررسی کنید.

با توجه به رابطه‌های بالا نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{۱}{r_۱}+\frac{۱}{r_۲}+\frac{۱}{r_۳}=\frac{p-a}{S_{\Delta ABC}}+\frac{p-b}{S_{\Delta ABC}}+\frac{p-c}{S_{\Delta ABC}}$$
$$=\frac{۳p-(a+b+c)}{S_{\Delta ABC}}=\frac{۳p-۲p}{S_{\Delta ABC}}=\frac{p}{S_{\Delta ABC}}=\frac{۱}{r}$$

اثبات ب) برای اثبات رابطهٔ $r.r_۲=r_۱.r_۳$، باید نشان دهیم:

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{p}.\frac{S_{\Delta ABC}}{p-b}=\frac{S_{\Delta ABC}}{p-a}.\frac{S_{\Delta ABC}}{p-c}$$

پس کافی است اثبات تساوی زیر را در نظر بگیریم:

$$\frac{۱}{p}.\frac{۱}{p-b}=\frac{۱}{p-a}.\frac{۱}{p-c}\quad *$$

با جای‌گذاری $p=\frac{a+b+c}{۲}$ و $p-b=\frac{a+c-b}{۲}$ در سمت چپ تساوی * داریم:

$$\frac{۱}{p}.\frac{۱}{p-b}=\frac{۲}{a+b+c}.\frac{۲}{a+c-b}$$
$$=\frac{۴}{a^۲+ac-ab+ab+bc-b^۲+ac+c^۲-bc}$$
$$=\frac{۴}{a^۲+۲ac-b^۲+c^۲}=\frac{۴}{۲ac}=\frac{۲}{ac}$$

(برای رسیدن به تساوی ماقبل آخر از رابطهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، یعنی $b^۲=a^۲+c^۲$ استفاده شده است.)

به طریق مشابه با جای‌گذاری $p-a=\frac{b+c-a}{۲}$ و $p-c=\frac{a+b-c}{۲}$ در سمت راست تساوی * و استفاده از رابطهٔ فیثاغورس $(b^۲=a^۲+c^۲)$ در مثلث ABC، داریم: $\frac{۱}{p-a}.\frac{۱}{p-c}=\frac{۲}{ac}$ پس $r.r_۲=r_۱.r_۳$.

با توجه به مطالب فوق نتیجه می‌شود:

$$r.r_۲=r_۱.r_۳\Rightarrow r=\frac{r_۱.r_۳}{r_۲}\Rightarrow\frac{۱}{r}=\frac{r_۲}{r_۱.r_۳}$$
$$\frac{۱}{r_۱}+\frac{۱}{r_۲}+\frac{۱}{r_۳}=\frac{۱}{r}\Rightarrow\frac{r_۲.r_۳+r_۱.r_۳+r_۱.r_۲}{r_۱.r_۲.r_۳}=\frac{r_۲}{r_۱.r_۳}$$
$$\xrightarrow[\text{جای‌گذاری در صورت}]{r_۱.r_۳=r.r_۲}\frac{r_۲.r_۳+r.r_۲+r_۱.r_۲}{r_۱.r_۲.r_۳}=\frac{r_۲}{r_۱.r_۳}$$
$$\Rightarrow\frac{r_۲(r_۳+r+r_۱)}{r_۱.r_۲.r_۳}=\frac{r_۲}{r_۱.r_۳}$$
$$\Rightarrow\frac{(r_۳+r+r_۱)}{r_۱.r_۳}=\frac{r_۲}{r_۱.r_۳}\Rightarrow r_۳+r_۱+r=r_۲$$

تمرین۳. با اســتفاده از روابط $r=\frac{S_{\Delta ABC}}{p}$، $r_۱=\frac{S_{\Delta ABC}}{p-a}$، $r_۲=\frac{S_{\Delta ABC}}{p-b}$، $r_۳=\frac{S_{\Delta ABC}}{p-c}$ و جای‌گذاری $p=\frac{a+b+c}{۲}$ و جای‌گذاری مستقیم ثابت کنید:

$r_۳+r_۱+r=r_۲$

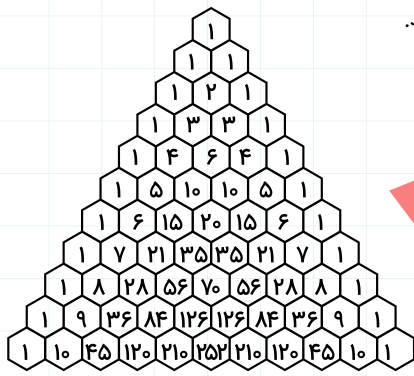
منابع

1. De Villiers, M. A Multiple Solution Task: Another SA Mathematics Olympiad Problem, Article in Learning and Teaching Mathematics. July 2017.
2. Alfred S, Posamentier. Advanced Euclidean Geometry. Key College Publishing. 2002.

الگویابی در دنباله‌های عددی

به انتخاب آرش رستگار

فعالیت: به کمک دوستانتان جدول عددهای زیر را بررسی کنید. در این عددها چه الگوهایی مشاهده می‌کنید؟ هر الگو را توصیف کنید و سپس به زبان فرمول‌های ریاضی بنویسید.



محبوبه: در این الگو دو ضلع مثلث را فقط عدد ۱ پر کرده است!

اقدس: برای من عددهای متوالی ۱، ۲، ۳، ۴، ... و ۱۰ در دو ستون کج جالب است.

عزت: در هر سطر هم عددهایی تکراری هستند. بعضی عددها دوبار تکرار شده‌اند. اما این الگوها که جالب نیستند. منظور سؤال چیست؟

معلم: همین‌طور که به دنبال الگوها می‌گردید، سعی کنید به این سؤال‌ها پاسخ دهید.

۱. آیا می‌توانید ردیف بعدی را پیش‌بینی کنید؟
۲. آیا در تکرار عددها الگویی می‌بینید؟
۳. آیا در ستون‌های کج الگویی می‌بینید؟

محبوبه: بیایید روی پیش‌بینی ردیف بعد متمرکز شویم. همه حدس می‌زنند که ردیف بعدی باید با ۱، ۱۱، ... شروع شود و با ...، ۱۱، ۱ خاتمه پیدا کند. اما عدد بعد از ۱۱ را چطور پیدا کنیم؟

اقدس: عددهای ۱ و ۱۱ را با توجه به ستون‌های کج حدس زدیم. لابد اینجا هم باید ستون کج بعدی را در نظر بگیریم و در آن الگویی بیابیم. از هر دو طرف، ستون کج بعدی این دنباله است:

... و ۴۵ و ۳۶ و ۲۸ و ۲۱ و ۱۵ و ۱۰ و ۶ و ۳ و ۱

آیا می‌توانید جملهٔ بعدی را حدس بزنید؟

محبوبه: بعضی زوج و بعضی فرد هستند. از این لحاظ که من الگویی در آن‌ها نمی‌بینم.

عزت: فکر نمی‌کنم مضرب‌های عددی خاص باشند. به تجزیهٔ آن‌ها توجه کنید:

... و 5×3^2 و $3^2\times2^2$ و 7×2^2 و ۷×۳ و ۵×۳ و ۵×۲ و ۳×۲ و ۳ و ۱

صبر کنید. من یک الگو می‌بینم. هر عدد با عدد بعدی یک عامل اول مشترک دارد. البته به جز دو عدد اول. مثلاً ۳ با ۳×۲ عامل مشترک ۳ و ۳×۲ با ۵×۲ عامل مشترک ۲ و ۵×۲ با ۵×۳ عامل مشترک ۵ را دارند.

اقدس: ولی این عامل‌های مشترک الگویی ندارند. نگاه کن:

... و 5×3^2 و $3^2\times2^2$ و 7×2^2 و ۷×۳ و ۵×۳ و ۵×۲ و ۳×۲ و ۳ و ۱

این عددهای اول نه ترتیبی دارند و نه حتی افزایشی هستند. در صورتی که دنبالهٔ ... و ۴۵ و ۳۶ و ۲۸ و ۲۱ و ۱۵ و ۱۰ و ۶ و ۳ و ۱ افزایشی است.

محبوبه: پس بیایید در افزایش این دنباله الگویی پیدا کنیم. ببینیم در هر مرحله چقدر به عدد قبلی اضافه می‌شود.

عزت: بسیار خب.

۱
۳=۱+۲
۶=۳+۳
۱۰=۶+۴
۱۵=۱۰+۵
۲۱=۱۵+۶
۲۸=۲۱+۷
۳۶=۲۸+۸
۴۵=۳۶+۹

عالی است! محبوبه نابغه‌ای! یک بار با ۲، یک بار با ۳، یک بار با ۴، ... و همین‌طور به ترتیب با سایر عددهای طبیعی جمع کرده‌ایم تا عدد بعدی را به‌دست آوریم.

اقدس: پس عدد بعدی می‌شود ۴۵+۱۰ که همان ۵۵ است. یعنی دنبالهٔ ما با ۱، ۱۱، ۵۵ و ... شروع و با ...، ۵۵، ۱۱، ۱ خاتمه می‌یابد. برویم سراغ عدد بعدی.

محبوبه: باید در ستون کج بعدی الگویی پیدا کنیم.

عزت: ۱۲۰ و ۸۴ و ۵۶ و ۳۵ و ۲۰ و ۱۰ و ۴ و ۱

این دنباله هم افزایشی است. محاسبه می‌کنیم در هر مرحله چقدر افزایش داشته‌ایم.

۱ ، ۴ ، ۱۰ ، ۲۰ ، ۳۵ ، ۵۶ ، ۸۴ ، ۱۲۰

۳ ۶ ۱۰ ۱۵ ۲۱ ۲۸ ۳۶

اقدس: اینکه همان دنبالهٔ ستون قبلی است! عدد بعدی می‌شود ۴۵+۱۲۰ یعنی ۱۶۵.

عزت: به نظر می‌رسد همهٔ ستون‌های کج الگو دارند. هر عدد از جمع‌کردن عدد قبلی از همان ستون و عددی از ستون قبل به دست می‌آید. بیایید به مثلث نگاه کنیم.

اقدس: همین‌طور است که می‌گویی. حتی یک الگوی جالب‌تر دیده می‌شود. هر عدد درست با مجموع دو عدد بالای سرش برابر است:

سطر اول	۱
سطر دوم	۱ ۱
سطر سوم	۱ ۲ ۱
سطر چهارم	۱ ۳ ۳ ۱
سطر پنجم	۱ ۴ ۶ ۴ ۱
سطر ششم	۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱
سطر هفتم	۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱
سطر هشتم	۱ ۷ ۲۱ ۳۵ ۳۵ ۲۱ ۷ ۱

محبوبه: این کار را تمام می‌کند. می‌توان فقط با سطر یازدهم سطر بعدی را حساب کرد:

۱ ۱۰ ۴۵ ۱۲۰ ۲۱۰ ۲۵۲ ۲۱۰ ۱۲۰ ۴۵ ۱۰ ۱

۱ ۱۱ ۵۵ ۱۶۵ ۳۳۰ ۴۶۲ ۴۶۲ ۳۳۰ ۱۶۵ ۵۵ ۱۱ ۱

اقدس: بسیار خب، این‌طور می‌توانیم جدول را هر قدر بخواهیم ادامه دهیم. آیا معنی‌اش این است که همهٔ الگوهای زیبا در این مثلث را می‌شناسیم؟

عزت: صبر کنید! معنی‌اش این نیست! من در مجموع عددهای هر سطر الگویی می‌بینم.

خود را بیازماییم

آیا مجموع عددهای هر سطر از الگویی پیروی می‌کنند؟ بعد از اینکه این الگو را حدس زدید، درستی حدس خود را برای ادامهٔ جدول عددها تحقیق کنید.

رویا، مهتا و رزا به صورت گروهی روی جدول عددها فکر کردند. آن‌ها موفق شدند بدون راهنمایی معلم الگوهایی بیابند.

رویا: به نظر می‌رسد ستون‌های کج هر کدام الگویی دارند.

ستون اول: ... و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱

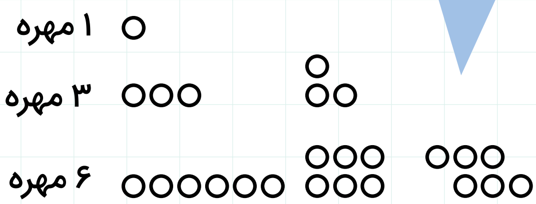
ستون دوم: ... و ۱۰ و ۹ و ۸ و ۷ و ۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱

ستون سوم: ... و ۴۵ و ۳۶ و ۲۸ و ۲۱ و ۱۵ و ۱۰ و ۶ و ۳ و ۱

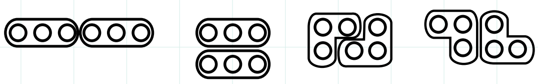
ستون سوم الگویی ندارد.

مهتا: لابد الگویی دارد ولی ما آن را نمی‌بینیم.

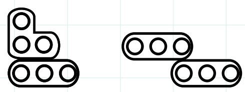
رزا: بیایید با هر کدام از این عددها شکلی بسازیم. مثلاً با ۱ مهره، ۳ مهره، ۶ مهره یا ۱۰ مهره چه الگوهایی می‌توان ساخت؟



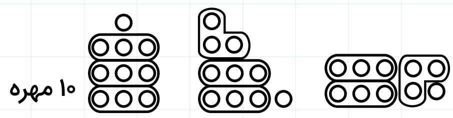
می‌بینید، الگوهای شش‌تایی از الگوهای سه‌تایی به‌دست می‌آیند؛ مثلاً:



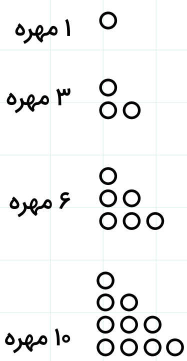
می‌توان الگوهای دیگری هم از ۶ مهره ساخت؛ مثلاً:



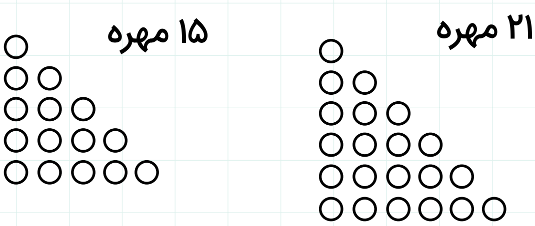
پس سعی می‌کنیم به کمک الگوهای قبلی الگوهایی ۱۰تایی بسازیم.



مهتا: اگر بخواهی از این چیدن‌ها یکی را که از همه منظم‌تر است انتخاب کنی، بهترین انتخاب به نظر من این است که آن‌ها را مثلثی بچینیم.



این با بقیهٔ عددهای ستون سوم هم سازگار است:



این الگو به ما می‌گوید که:

۱
۳=۱+۲
۶=۱+۲+۳
۱۰=۱+۲+۳+۴
۱۵=۱+۲+۳+۴+۵
۲۱=۱+۲+۳+۴+۵+۶
۲۸=۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷
۳۶=۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸
۴۵=۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹

رویا: بنابراین عدد بعدی می‌شود ۱۰+۹+۸+۷+۶+۵+۴+۳+۲+۱ که برابر است با ۵۵. این‌طور می‌توانیم ستون سوم را همین‌طور پشت سر هم حساب کنیم.

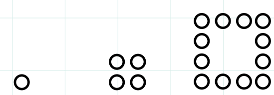
مهتا: برویم سر ستون بعدی:

ستون چهارم: ... و ۱۲۰ و ۸۴ و ۵۶ و ۳۵ و ۲۰ و ۱۰ و ۴ و ۱

رزا: اگر بخواهیم با مهره‌ها کار کنیم باز هم باید با مهره‌ها الگو بسازیم. در دنبالهٔ قبلی چون با ۳ مهره تنها شکل جالبی که می‌شد ساخت مثلث بود، الگوی مثلثی جواب داد. شاید اینجا الگوی مربعی جواب بدهد:

مثل اینکه این ایده جواب نمی‌دهد!

رویا: الگوی مربع را می‌شود طور دیگری هم ادامه داد:

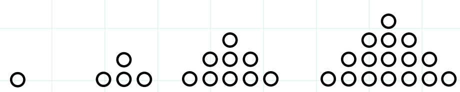


۱ مهره　۴ مهره　۱۰ مهره

نه این یکی هم نمی‌شود.

رزا: شاید این ایده که با مهره کار کنیم اصلاً جواب ندهد.

مهتا: باید بیشتر تلاش کنیم. بگذار ببینم می‌توانم با ۴ مهره الگویی دیگر بسازم:



۱ مهره　۴ مهره　۱۰ مهره　۲۰ مهره

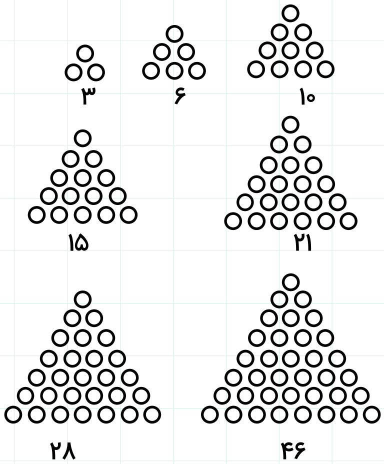
این هم کار نمی‌کند. اگر بخواهیم الگویی تکراری داشته باشیم، باید مهره‌هایی که هر بار اضافه می‌کنیم نظمی داشته باشند.

رویا: یعنی باید نظمی در تعدادی که هر بار اضافه می‌شود بیابیم.

۱ ، ۴ ، ۱۰ ، ۲۰ ، ۳۵ ، ۵۶ ، ۸۴ ، ۱۲۰ ، ...

۳　۶　۱۰　۱۵　۲۱　۲۸　۳۶

رزا: اینکه همان دنباله‌ای است که قبلاً ساختیم:



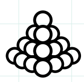
رویا: پس زیر هر ردیف باید یک مثلث بگذاریم؟

مهتا: فهمیدم. شکل ما سه بعدی می‌شود. نمی‌توان آن را با یک الگوی مسطح درست کرد. الگوی ما از روی هم گذاشتن این مثلث‌ها درست می‌شود. توجه کنید:

۱ مهره

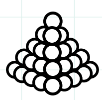
۴ مهره

البته یک مهرهٔ آن پشت است که دیده نمی‌شود:



۱۰ مهره

سطر بعدی با اضافه‌کردن یک مثلث به سطر قبلی به‌دست می‌آید:



۲۰ مهره

رزا: پس برای پیدا‌کردن عدد بعدی باید کمی نام‌گذاری کنیم. باید برای عددهای دنبالهٔ قبلی اسمی بگذاریم؛ مثلاً:

$T_{۱}$=۱
$T_{۲}$=۱+۲
$T_{۳}$=۱+۲+۳
$T_{۴}$=۱+۲+۳+۴

یعنی اولین عدد مثلثی را $T_{۱}$ بنامیم و دومین عدد مثلثی را $T_{۲}$ و سومی را $T_{۳}$ و همین‌طور تا آخر. در این صورت عددهای چهاروجهی که در بالا ساختم از فرمول زیر به دست می‌آیند:

۱=$T_{۱}$

چهار از دو مثلث زیر هم تشکیل شده است:

۴=$T_{۱}+T_{۲}$

ده از سه مثلث زیر هم تشکیل شده است:

۱۰=$T_{۱}+T_{۲}+T_{۳}$

بیست از چهار مثلث زیر هم تشکیل شده است:

$20=T_1+T_2+T_3+T_4$

$35=T_1+T_2+T_3+T_4+T_5$

$56=T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6$

$86=T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6+T_7$

$120=T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6+T_7+T_8$

مهتا: عدد بعدی دنباله هم معلوم است:

$T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6+T_7+T_8+T_9$

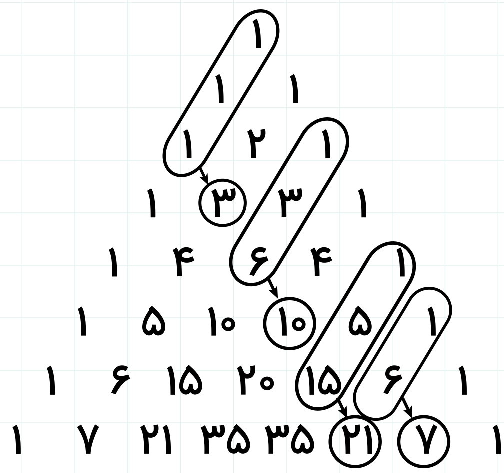
$=1+3+6+10+15+21+28+36+45=165$

عدد بعدی ۱۶۵ است.

رویا: فهمیدم! من می‌دانم چطور تمام سطر بعد را به‌دست بیاوریم.

هر عدد برابر است با مجموع عددهای ستون کج قبلی که بالای سرش هستند.

به جدول نگاه کنید:



این‌طور می توان تمام عددهای سطر بعد را به دست آورد.

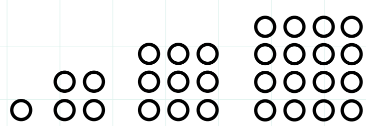
شما بحث کدام گروه را بیشتر دوست دارید؟ عزت، محبوبه و اقدس بهتر با هم فکر می‌کنند یا رویا، رزا و مهتا؟

خود را بیازماییم

۱. در عددهای ستون پنجم الگویی بیابید:

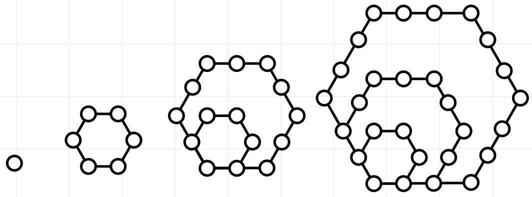
۲۱۰ و ۱۲۶ و ۷۰ و ۳۵ و ۱۵ و ۵ و ۱

۲. عددهای مربعی را این‌طور می‌سازند:



فرمولی برای این دنباله از عددها پیدا کنید.

۳. عددهای شش وجهی را این‌طور می‌سازند:



۱ ۶ ۱۵ ۲۸

این الگوی هندسی را ادامه دهید و به صورت عددی بنویسید. سپس سعی کنید این الگو را در جدول عددها پیدا کنید.

هدی و حورا سعی کردند الگویی بیابند تا به کمک آن بتوانند سطر بعدی را حساب کنند.

هدی: سطر اول و دوم خیلی به هم شبیه هستند. با این همه شباهت نمی‌توان الگویی پیدا کرد. ولی سطر دوم و سوم مرا یاد چیزی می‌اندازند. بین ۱۱ و ۱۲۱ رابطه‌ای بود ...

حورا: شاید منظورت این است که: $121=11\times11=11^2$.

هدی: بله! همین است که گفتی:

11^1 سطر اول

$11^2=121$ سطر دوم

لابد سطر سوم هم همین‌طور به‌دست می‌آید.

$11^3=11\times11\times11=1331$ سطر سوم

حورا: عجب الگویی پیدا شد. بگذار این کار را ادامه دهیم تا سطر بعدی جدول به‌دست بیاید.

$11^1=11$

$11^2=121$

$11^3=1331$

$11^4=14641$

$11^5=161051$

$11^6=1771561$

$11^7=19487171$

می‌بینی که این الگو کار نمی‌کند، ولی زیر رقم‌هایی که درست به دست آمده‌اند، خط می‌کشیم.

هدی: شباهت خیلی زیاد است. شاید بتوان این دو دنباله از عددها را از روی هم به دست آورد. بیا آن‌ها را کنار هم بنویسیم.

منبع

۱. رئیسی، بهروز؛ حاجی‌بابایی، جواد؛ رستگار، آرش؛ رستگار، محمدحسن. ۱۳۸۰. ریاضی ۱. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، تهران.

کشف کنید تا یاد بگیرید

گفت‌وگو با دکتر ابراهیم ریحانی، مؤلف کتاب‌های ریاضی و مخاطب دیروز رشد ریاضی برهان

محمدحسین دیزجی

این کنجکاوی در بیشتر افرادی که کتابی را مطالعه می‌کنند یا فیلمی را به تماشا می‌نشینند وجود دارد که بدانند نویسنده یا کارگردان آن اثر چه کسی است. آیا می‌دانید کتاب درسی ریاضی و شاید تعدادی از کتاب‌های این حوزهٔ آموزشی که شما مطالعه می‌کنید، به قلم چه کسانی نوشته شده‌اند؟ دکتر ابراهیم ریحانی، دانشـیار گروه ریاضی دانشکدهٔ علوم پایهٔ «دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی» یکی از نویسندگان این‌گونه کتاب‌هاســت. او در سال‌های دبیرستان در رشتهٔ ریاضی- فیزیک تحصیل کرد و مدرک کارشناسی دبیری ریاضی را در سال ۱۳۶۸ از «دانشـگاه خوارزمی» و مدرک کارشناسی ارشد ریاضی محض (شـاخهٔ جبر) را در سال ۱۳۷۳ از «دانشگاه شهید بهشتی» دریافت کرد. سپس در سال ۱۳۸۴ موفق به اخذ مدرک دکترای ریاضی با گرایش آموزش ریاضی از «دانشگاه دولتی مسکو» شد. بیش از ۱۵۰ مقالهٔ علمی در مجله‌ها و همایش‌های علمی ارائه کرده و در کارگروه (کمیتهٔ) علمی و داوری مجله‌ها و همایش‌های علمی نیز فعالیت داشته است. در این گفت‌وگو بنا داریم بیشتر از یک اسم در کتاب درسی با او آشنا شویم و از فعالیت‌ها و نظراتش بدانیم. با این گفت‌وگو همراه باشید.

• دانش‌آمـوزان بسـیاری کتاب‌هایی را بـرای فراگیری ریاضی خوانده‌اند که شـما در تألیف آن‌ها نقش داشته‌اید. فعالیت‌های شما بسیار گسترده‌تر از تألیف کتاب‌های درسی با موضوع دانش ریاضی اسـت. ابتدا از موفقیت‌های خودتان برای ما بفرمایید تا دانش‌آموزان مخاطب مجله آشنایی بیشتری با شما پیدا کنند و در ادامه به سراغ پرسش‌های دیگر برویم.

○ تاکنون بیش از ۷۰ دانشـجوی دورهٔ تحصیلات تکمیلی تحت راهنمایی بنده از پایان‌نامهٔ خود دفاع کرده‌اند. همچنین کارگاه‌های آموزشی متعددی در استان‌های کشور برای دبیران ریاضی برگزار کرده‌ام. به عنوان مجری، «طرح پژوهشی تدوین راهنمای برنامهٔ درسی حوزهٔ یادگیری ریاضی» را در سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشـی با همکاری گروهی از اسـتادان و کارشناسان به انجام رسانده‌ام. زمینه‌های تخصصی بنده عبارت‌اند از: حل مسئلهٔ ریاضی، طرح مسـئلهٔ ریاضی و آموزش معلمان ریاضی. در سال ۱۴۰۲ به عنوان «سرآمد آموزشی» دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی برگزیده شدم. همچنین امسـال نیز به عنوان یکی از ۲۰ برگزیدهٔ کشوری سرآمد آموزشی وزارت علوم، تحقیقات و فناوری برگزیده شدم.

• لطفاً اشارهٔ بیشتری به آثار و تألیفات خودتان داشته باشید؛ اعم از کتاب‌های درسی و غیردرسی. به‌ویژه اینکه در کتاب‌های ریاضی پایه‌های هفتم تا نهم چه سرفصل‌ها و مبحث‌هایی را جناب‌عالی نوشته‌اید؟

○ در تیم تألیف ۲۱ کتاب درسـی ریاضـی و کتاب راهنمای معلم عضویت داشـته‌ام. همچنین یک کتاب به زبان روسـی در سال ۲۰۰۷ با همکاری استادان راهنمایم نوشته‌ام. تألیف دو کتاب درسی دانشـگاهی هم در کارنامهٔ بنده وجود دارد. در بیشتر کتاب‌های درسی مدرسه‌ای، پس از آماده‌شدن پیش‌نویس اولیهٔ یک فصل، متن توسـط تیم تألیف نقد، اصلاح و ویرایش می‌شد. در تألیف مبحث توان در کتـاب ریاضی پایهٔ هفتم، مبحث توان و جذر در ریاضی پایهٔ هشـتم و مبحث توان و ریشـه در ریاضی پایهٔ نهم مشارکت فعال داشته‌ام. در بخش‌های مهم دیگری از این کتاب‌ها هم ایده‌ها و پیشنهادهای زیادی ارائه کرده‌ام.

• خودتـان در دوران دانش‌آمـوزی مطالب ریاضـی را چطور می‌خواندید و یاد می‌گرفتیـد؟ آن زمان چقدر به تمرین و تکرار مباحث معتقـد بودید و اگر در یادگیری نکته‌ای دچار مشـکل می‌شدید، چه می‌کردید؟

○ در زمان دانش‌آموزی بنده امکانات فراوان امروزی وجود نداشت. با این حال، وجود دبیران دلسوز و توانمند مانند امروز قوت قلبی برای جامعه بود. تکیهٔ عمده روی مطالب ارائه‌شـده توسط معلم بود و برای فهم بیشتر به کتاب هم رجوع می‌کردم. یادگیری عمیق در ریاضی فقط با تکرار به‌دسـت نمی‌آید. برای حل مشکلاتم به دوستان و دبیرانم رجوع می‌کردم.

• چرا این تصور در ذهن تعـدادی از دانش‌آموزان وجود دارد که درس ریاضی، سـخت، دشوار و کمی خشـک است و لطافت و جذابیت چندانی ندارد؟ این تصورات از کجا در ذهن بچه‌ها شکل گرفته است؟ چه توصیه‌ای برای بهبود این تفکر به آنان دارید؟

○ عوامـل زیادی در این موضوع نقـش دارند. برای مثال، یکی از این دلایل حجم زیاد مبحث‌های ریاضی است که در دورهٔ مدرسه

دانش‌آموزان مطالعه می‌کنند. این نکته باعث می‌شـود که دانش‌آموزان به جای کشف مطلب به حفظ آن روی بیاورند. به نظر بنده اگر به شیوهٔ جدیدی که در کتاب‌های درسی- یعنی فراگیری مبحث درسی ضمن انجام یک فعالیت- ذکر شده است پایبند باشیم و در آموزش بر توازن ارائهٔ مفهومی و ارائهٔ رویه‌ای تأکید کنیم، بخش مهمی از مشکلات مرتفع خواهد شد.

• شما مؤلف کتاب‌های ریاضی هستید. بنابراین توصیه‌های شما برای آنکه این کتاب را چگونه بخوانیم تا بهتر یاد بگیریم، در ذهـن مخاطبان پذیرفتنی‌تر اسـت. در ایـن زمینه چه توضیحاتی برای دانش‌آموزان پایه‌های هفتم تا نهم دارید؟

○ این کتاب‌هــا حاصل تلاش جمعی تعــدادی از معلمان مجرب و اســتادان ریاضی و آموزش ریاضی است و با تکیه بر پژوهش‌های معتبر داخلی و بین‌المللی نوشــته شده‌اند. توصیهٔ ســاده و دقیق بنده این اســت که دانش‌آموزان از فرصتی که فعالیت‌های کتاب برای آموزش در اختیارشــان قــرار می‌دهند به‌خوبی بهره بگیرنــد و با انجام کارهایی که یک فعالیت از دانش‌آموز می‌خواهد، خود به کشف موضوع یــا مبحث درســی بپردازند. البته نقش معلــم در هدایت دانش‌آموزان بی‌بدیل است.

• آیا به نظر شما حل تمرین‌های موجود در کتاب برای یادگیری مباحث ارائه‌شــده کفایت می‌کند یا دانش‌آموزان برای فهم عمیق‌تر مطالب باید به تمرین‌های بیشــتری بپردازند؟ اگر چنین هست کدام تمرین‌ها و از چه منابعی را توصیه می‌کنید؟

○ کتاب واقعاً کفایت می‌کند؛ البته به شــرط آنکه به توصیهٔ کتاب عمل شود. مایلم بخشی از آنچه را که در بخش «سخنی با معلم» کتاب ریاضی پایهٔ هشــتم آمده است، اینجا تکرار کنم: «یکــی از اهداف مهم و اصلی این کتاب درگیرشــدن دانش‌آموزان در فرایند حل مسئله است. فعالیت‌های کتاب به‌طور عمده به این منظور طراحی شــده‌اند. به‌طور معمول دانش‌آموزان در این فعالیت‌ها با دشــواری و چالش روبه‌رو خواهند شــد. این موضوع نه تنها نگران‌کننده نیست، بلکه هنگامی که با کمک و راهنمایی معلم همراه باشد، نتیجه‌ای مناسب به دنبال دارد.

در این کتــاب، مواجه‌کردن دانش‌آموزان با مســئله، امری هدفمند و آگاهانه به شمار می‌رود. کمک به دانش‌آموز نباید با در اختیار گذاشتن حل مسئله یکسان تلقی شود. کمک‌ها و راهنمایی‌ها باید تا جایی باشــند که شــوق کشف و لذت حل‌کردن را از دانش‌آموز نگیرد. طی این مســیر، گفت‌وگوی دانش‌آموزان با معلــم و نیز با یکدیگر، توضیح افکار و دفاع از آن‌ها، قضاوت در مورد افــکار ریاضی دیگر دانش‌آموزان، بررســی و آزمایش حدس‌ها و نقد راه‌حل‌ها، جزئی از فرایند یادگیری ریاضی هستند. در این راستا معلم ریاضی به‌یقین می‌تواند نقشی بی‌بدیل ایفا کند. معلم در گفت‌وگوی ریاضی‌وار در کلاس درس کــه از آن به گفتمان ریاضی نیز یاد می‌شــود، با بسیاری از دیدگاه‌ها، افکار و مشکلات و بدفهمی‌های دانش‌آموزان دربارهٔ مفاهیم درسی آشنا می‌شود و امکان برطرف‌کردن آن‌ها را در کلاس و احتمالاً با مشارکت دیگر دانش‌آموزان پیدا می‌کند. این کار مستلزم تمرکز بر فرایند حل مسئله و به‌ویژه پس از ارائهٔ پاسخ از ســوی دانش‌آموزان است. به همین دلیل حجم زیاد و فراوانی مسائل، خود مانعی به شمار می‌آید. تعداد مسائلی که در بیشتر کتاب‌های کمک آموزشــی مطرح می‌شوند، به‌طور معمول از نیاز دانش‌آموزان بیشــتر است. اگر تعداد کمتری مسئله ولی با عمق بیشــتر در کلاس درس و با مشارکت دانش‌آموزان حل و بررسی شود، نسبت به حالتی که تعداد زیادی مسئله و به شیوهٔ تکرار و تمرین حل شود، نتیجهٔ به مراتب بهتری به دست می‌آید.»

• خودتــان به کدام یک از شــاخه‌ها و مباحث ریاضی بیشــتر علاقه‌مند هستید و چرا؟

○ تخصص بنده آموزش ریاضی است. به «حل مسئلهٔ ریاضی» و «طرح مسئلهٔ ریاضی» علاقه دارم. در این زمینه کارهایی منتشر کرده‌ام.

• بچه‌ها به‌طور کلی چرا باید ریاضی بخوانند و دانش ریاضی در زندگی ما چه تأثیری دارد که باید به آن اهمیت بدهیم؟

○ در این‌باره زیاد گفته شده است. مفیدبودن ریاضیات یکی از این دلایل است. اما دانش‌آموزان در عمل باید به این مطالب برسند. توصیهٔ بنده در یکی از پاسخ‌های قبلی به‌طور مفصل آمده است.

• شــما در تألیف چه مباحثی از کتاب‌های ریاضی بیشــتر نقش داشــته و دارید و توصیهٔ خودتان بــرای فهم بهتر این مباحث به دانش‌آموزان چیست؟

○ تقریباً به دلیل مســئولیتم در تألیف خیلی از مباحث به عنوان یکی از اعضای تیم تألیف نقش داشــته‌ام. تألیف مبحث تابع، مبحث حد و پیوستگی و مفهوم مشتق از مهم‌ترین آن‌هاست. توصیــهٔ بنده انجام فعالیت‌ها زیر نظر معلم و با حوصله و صرف وقت اســت. طراحی این فعالیت‌ها به کمــک خردجمعی و با استفاده از پژوهش‌های معتبر انجام شده است.

• شــما چطور با مجله‌های برهان و نشــریات ریاضی در دوران دانش‌آموزی آشــنایی پیدا کردید و بیشــتر تمایل داشتید چه مباحثی از این مجله را مطالعه کنید؟ چه توصیه‌ای برای مخاطبان امروز مجلهٔ رشد ریاضی برهان دارید؟

○ در دوران دانشــجویی با این مجلات آشــنا شــدم. مسائل مطرح‌شده در مجله و گزارش‌ها و مصاحبه‌ها برایم جالب بودند.

• از حضورتــان در ایــن گفت‌وگوی صمیمانه سپاســگزاریم و موفقیت‌های روزافزون برایتان آرزومندیم.

بیایید کمی فکر کنیم!

خسرو داودی

عرفات، منا، حج و ریاضیات

کمی فکر کنیم

به‌طور معمول در روزهایی که مناسک حج انجام می‌شود، صحنه‌های وصف‌ناشدنی این اجتماع عظیم از شبکه‌های سیما پخش می‌شوند. بخش‌های منتخب نیز در شبکه‌های اجتماعی و فضای مجازی به اشتراک گذاشته می‌شوند.

امسال یک میلیون و ۸۰۰ هزار نفر اعمال حج را به‌جا آوردند. شنیدن این عدد ذهن‌ها را تکان می‌دهد. چطور می‌توان این عدد را تصور کرد؟ آیا هیچ درک و تصور خوبی از این عدد داریم؟ برای کسانی‌که در آن موقعیت قرار داشته‌اند و حاجی شده‌اند، شاید درک آن ساده‌تر باشد. اما برای همان افراد هم وقتی تصویرهایی از ارتفاع بالا را که با بالگرد گرفته شده‌اند، نمایش دهید، انگار دنیای جدیدی را تجربه می‌کنند.

اعمال حج واجب با «حضور در صحرای عرفات» شروع می‌شود. پس از احرام بستن، تمام افراد با نظم و ترتیب خاصی از مکه وارد صحرای عرفات می‌شوند و باید تا غروب در آن صحرا بمانند. پس از تاریک‌شدن هوا به سمت «مشعرالحرام» حرکت می‌کنند و شب را در آنجا می‌مانند. در این صحرا باید تعدادی سنگ جمع کنند تا در مراسم بعدی که باید به شیطان سنگ بزنند، از آن‌ها استفاده کنند.

با طلوع آفتاب از مشعر به سمت «منا» یا قربانگاه حرکت می‌کنند. ابتدا یک بار باید شیطان را صبح روز عید قربان سنگ بزنند و پس از قربانی‌کردن و «تقصیر» (زدن موی سر و گرفتن ناخن) در دو روز بعد هر بار باید شیطان را سنگ بزنند. سپس به سمت مکه حرکت کنند و پس از «طواف» و «نماز»، اعمالشان به اتمام می‌رسد. با این توضیح مختصر بیایید کمی محاسبه کنیم که این جمعیت چگونه اعمالشان را در این مکان‌ها انجام می‌دهند.

محاسبه کنیم

در صحرای عرفات از ظهر تا غروب حاجی‌ها زیر چادرهای بزرگی که به صورت موقت و یک‌روزه برپا می‌شوند، به راز و نیاز مشغول می‌شوند. بعد از غروب آفتاب و حرکت به سمت مشعر، این چادرها جمع‌آوری می‌شوند. ببینیم برای این تعداد حاجی چند چادر و با چه ابعادی باید در عرفات برپا شوند.

فرض کنیم هر نفر اندازهٔ یک مستطیل به طول ۲ و عرض ۱ متر فضا احتیاج داشته باشد. به این ترتیب مساحت مورد نیاز برای هر فرد برابر است با: (مترمربع) ۲=۲×۱. به این ترتیب برای ۱۸۰۰۰۰۰ نفر حاجی که در صحرای عرفات هستند، چه مقدار فضا مورد نیاز است؟

مترمربع ۱۸۰۰۰۰۰×۲=۳۶۰۰۰۰۰

این را هم در نظر داشته باشید که صحرای عرفات قابل گسترش و اضافه‌شدن نیست.

این صحرا ۱۲ کیلومتر طول و ۶/۵ کیلومتر عرض دارد. پس به‌طور تقریبی مساحت آن برابر است با:

مترمربع ۱۰۰۰۰۰۰=۱ کیلومترمربع و کیلومتر ۷۸=۱۲×۶/۵

پس مترمربع ۷۸۰۰۰۰۰۰=۷۸ کیلومترمربع

بخش زیادی از این صحرا برای خیابان‌ها و رفت و آمد و مسیرهای حرکت به سمت مشعر و مسیرهای ورودی از مکهٔ مکرمه اختصاص داده شده است. همچنین بخش زیادی از این صحرا برای کوچه‌های بین چادرها برای رفت و آمد افراد درنظر گرفته شده است. به همین دلیل امکان دادن فضای ۲ مترمربع برای افراد ممکن نیست. به‌طور تقریبی برای هر فرد ۱/۵ مترمربع در چادرهای حاجیان ایرانی در نظر گرفته می‌شود. به‌طور تقریبی در هر چادر ۵۰ نفر اسکان داده می‌شوند. بنابراین:

تعداد چادرهای مورد نیاز ۱۸۰۰۰۰۰÷۵۰=۳۶۰۰۰

بیشتر فکر کنیم

البته زائران همهٔ کشورها خدمات یکسانی دریافت نمی‌کنند و تعدادی از آن‌ها ممکن است در عرفات محلی برای استراحت و دعا نداشته باشند. آن‌ها از ظهر تا غروب در گوشه‌ای می‌نشینند و به راز و نیاز مشغول می‌شوند. اما این تعداد چادر بسیار قابل توجه است. در مشعر که زائران فقط یک شب از غروب تا اذان صبح هستند، محلی برای استراحت وجود ندارد. به‌طور معمول هر فرد یک زیرانداز ۱×۲ متر دارد و اگر می‌خواهد بخوابد روی همان زیرانداز شب را به صبح می‌رساند. در منا با توجه به اینکه زائران دو شب حضور دارند تا اعمالشان را انجام دهند، چادرهای دائمی وجود دارد. البته سرانهٔ هر فرد در حدود ۱ مترمربع است؛ چون امکان اضافه‌کردن فضا وجود ندارد. اما با همین حدود ۳۶۰۰۰ چادری که به‌طور دائمی در این صحرا نصب می‌شود، فضای زیادی باقی نمی‌ماند.

ما در این قسمت فقط از نظر محل استراحت بررسی کردیم. شبیه همین محاسبه‌ها را می‌شود در موارد دیگر، از جمله رساندن غذا و آب، سرویس بهداشتی مورد نیاز، و اتوبوس‌هایی که زائران را جابه‌جا می‌کنند نیز انجام داد. شما دست به کار شوید و این محاسبه‌ها را انجام دهید تا به عظمت موضوع بیشتر پی ببرید.

با پویش رمزینه چادرهای صحرای عرفات را ببینید.

روح‌الله خلیلی‌بروجنی

آب به زبان اعداد

با توجه به سن و شرایط فیزیکی فرد، بین ۵۰ تا ۶۵ درصد بدن از آب تشکیل شده‌است!

آب برای حیات روی زمین ضروری است. بدون آن گیاهان، حیوانات و هیچ جانداری نمی‌تواند زنده بماند. حدود ۷۱ درصد زمین پوشیده از آب است. این شامل آب شور و آب شیرین می‌شود. تمام آب شیرین به‌راحتی برای استفادهٔ ما در دسترس نیست.

۳۰/۸ درصد

کمی بیش از ۳۰ درصد آب شیرین زیر سطح زمین قرار دارد. این آب‌های زیرزمینی به دریاچه‌ها و رودخانه‌ها می‌ریزند. ما نیز از آن‌ها در زندگی روزمرهٔ خود استفاده می‌کنیم.

۰/۳ درصد

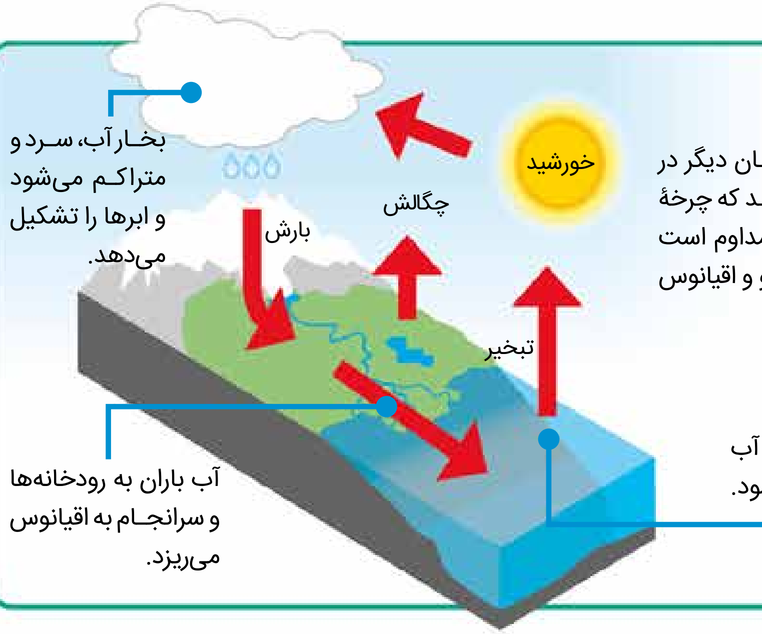
تنها درصد بسیار کمی از آب شیرین زمین در دریاچه‌ها و رودخانه‌ها یافت می‌شود که از آن در شست‌وشو و نوشیدن استفاده می‌کنیم.

۶۸/۹ درصد

حدود ۷۰ درصد از آب شیرین زمین در کلاهک‌های یخی و یخچال‌های طبیعی وجود دارد. بنابراین دسترسی و استفاده از آن برای ما بسیار دشوار و پرهزینه است.

آب روی زمین

بیشتر آب زمین، یعنی حدود ۹۷/۵ درصد آن، آب شور است که اقیانوس‌ها و دریاها را تشکیل می‌دهد. ۲/۵ درصد باقی‌مانده آب شیرین است. آب شیرین در کلاهک‌های یخی، یخچال‌های طبیعی، دریاچه‌ها، رودخانه‌ها و زیرزمین یافت می‌شود.



چرخهٔ آب

آب همیشه از مکانی به مکان دیگر در حال حرکت است. این فرایند که چرخهٔ آب نامیده می‌شود، سفری مداوم است که در آن آب بین خشکی، جو و اقیانوس حرکت می‌کند.

نحوهٔ استفاده از آب

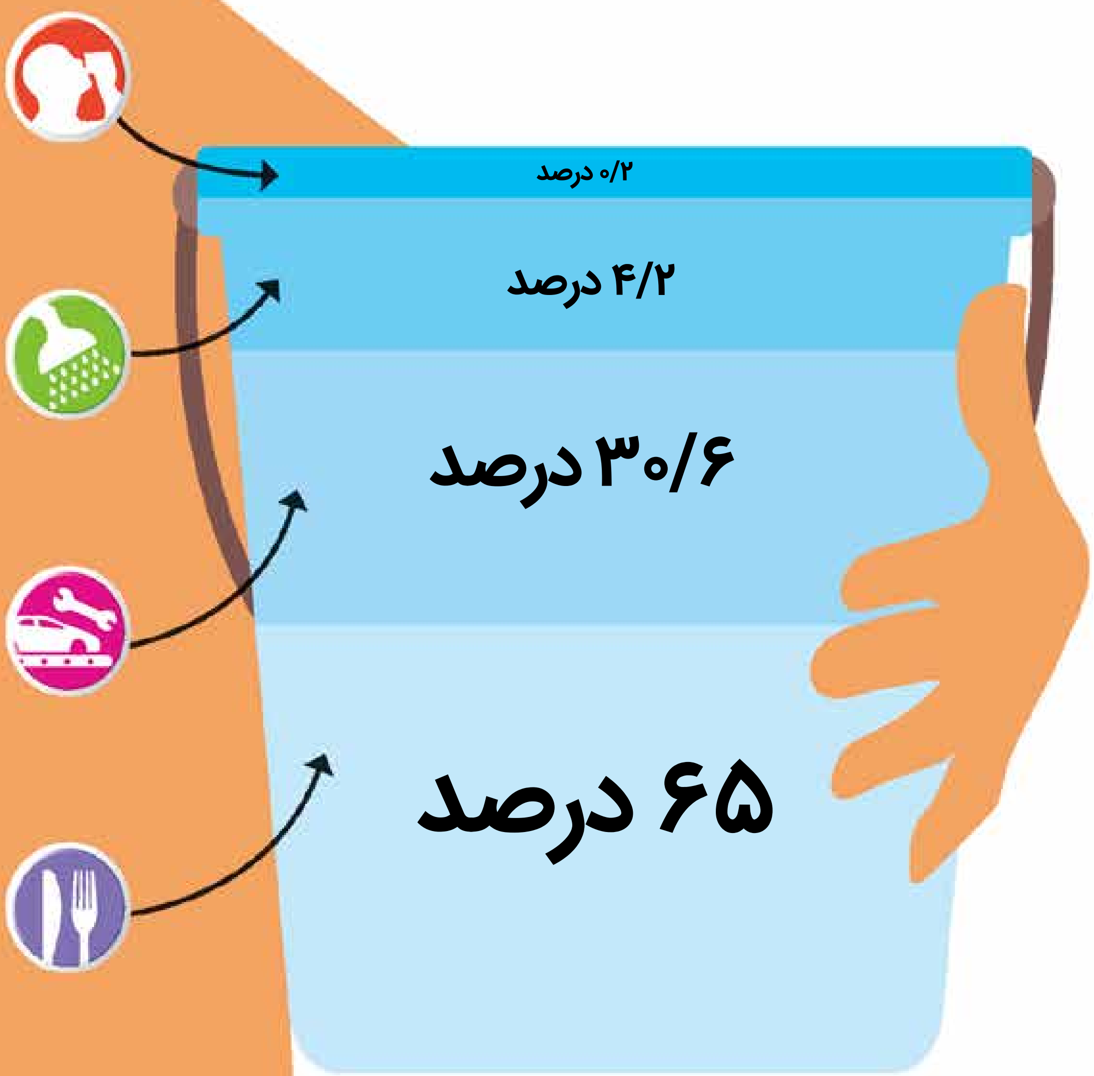
همهٔ ما مقدار بسیار زیادی آب مصرف می‌کنیم. از آب برای نوشیدن، پخت و پز و شست‌وشو و همچنین در کشاورزی، دامداری و صنعت استفاده می‌کنیم. در ادامه درصدهای آبی که هر فرد روزانه برای این قبیل نیازها استفاده می‌کند آمده‌است.

نوشیدن
فقط مقدار کمی از آبی که انسان در روز استفاده می‌کند، برای نوشیدن و پخت‌وپز است.

بهداشت
حدود ۴ تا ۵ درصد آب مصرفی هر فرد در روز صرف شست‌وشو و نظافت می‌شود.

تولید صنعتی
نزدیک به یک‌سوم آب روزانهٔ هر فرد برای ساختن کالاهایی مصرف می‌شود که در زندگی روزمره استفاده می‌کنیم.

تولید غذا
بیشتر آب مصرفی هر فرد صرف تولید محصولات کشاورزی و دامی می‌شود. آب بخش مهمی از رژیم غذایی ماست.



قسمت سوم

ریاضی و نشانی
روش مهم‌تر از جواب

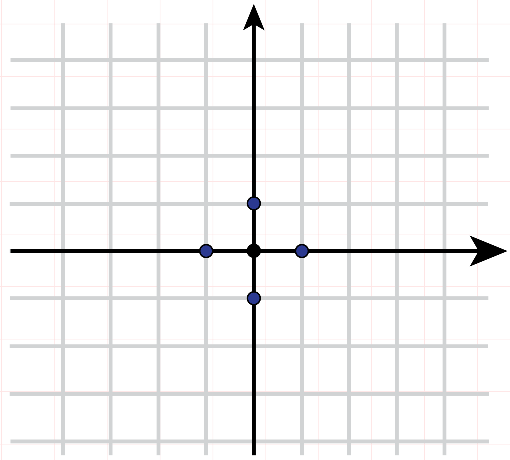
● شراره تقی‌دستجردی، ● صبا قاسمی

خوب است پیش از ادامهٔ مطلب کمی به عقب برگردیم و نگاهی به مسیری بیندازیم که تا به حال طی کرده‌ایم. در دو شمارهٔ پیشین پیرامون حرکت از خانهٔ مبدأ به خانهٔ مقصد در جدول عددهای ۱ تا ۱۰۰ صحبت کردیم. این مشابه همان کاری است که هنگام نشانی‌دادن یا نشانی‌گرفتن انجام می‌دهیم. همچنین دیدیم که با هر قانون حرکتی نمی‌توان همهٔ خانه‌های جدول را پیمایش کرد. اگر قوانینی تعریف کنیم که تضمین کنند با آن‌ها می‌توان از هر خانه به خانه‌های راست، چپ، بالا و پایینش رفت، آنگاه می‌توانیم تمام جدول را بپیماییم. اما کدام قوانین اجازهٔ چنین کاری را به ما می‌دهند؟ آیا می‌توان رابطه‌ای پیدا کرد که اگر قوانین حرکت در آن رابطه صدق کند، تضمین‌کنندهٔ رسیدن به خانه‌های مجاور (راست، چپ، بالا و پایین) هر خانه باشد؟

خوب است برای پاسخ به این سؤال از چند مثال کمک بگیریم و تعدادی از این قوانین را در جدول عددها بررسی کنیم. اما جدول عددهای ۱ تا ۱۰۰ جدول کوچکی است و امکان بررسی قوانین متفاوت را از ما می‌گیرد. مثلاً ممکن است کسی بخواهد قوانین حرکت عمودی را ۱۵ خانه به پایین و ۱۳ خانه به بالا تعریف کند که وقوع چنین چیزی در جدول عددهای ۱ تا ۱۰۰ غیرممکن است.

ما برای آنکه بتوانیم دید درست و خوبی از منطق نشانی‌دادن در ریاضیات به دست آوریم، به جدول‌های بزرگ‌تری نیاز داریم، چرا که نه ریاضیات و نه حتی ما در زندگی روزمره‌مان به یک مربع ۱۰×۱۰ محدود نیستیم. اما جدولمان را چقدر بزرگ کنیم؟ آیا یک جدول ۱۰۰×۱۰۰ کافی است؟ ۱۰۰۰×۱۰۰۰ چطور؟ این جدول‌ها گرچه بزرگ‌تر از جدول قبلی‌اند، اما باز هم محدود هستند و باز ما با مشکلات قبلی مواجه می‌شویم. ما به جدولی نیاز داریم که از هیچ سمتی یعنی نه از بالا، نه از پایین و نه از چپ و نه از راست محدود نباشد، بنابراین باید جدولمان را نامتناهی در نظر بگیریم؛ جدولی که از هیچ سمتی محدود نیست و انتها ندارد.

دستگاه مختصات نمونهٔ خوبی از چنین جدولی‌ست؛ زیرا نه تنها هر مکان در این جدول جایگاه منحصربه‌فردی دارد، بلکه شما می‌توانید هر اندازه که بخواهید به چپ یا راست، بالا یا پایین حرکت کنید. اما برای سادگی فعلاً نقطه‌هایی از این دستگاه را در نظر می‌گیریم که مختصاتشان صحیح باشد. باز هم برای سادگی فرض کنید فعلاً شما در مختصات (۰و۰) قرار دارید. در این صورت نقطه‌های مجاور این نقطه را مانند قبل نقطه‌های راست، چپ، بالا و پایین آن تعریف می‌کنیم.



از طـرف دیگـر، همان‌طور که در دو شـمارۀ قبل گفته شـد، حرکت‌های عمودی و افقی مستقل از هم هستند. پس باز هم برای سادگی اجازه دهید تنها نقطه‌های صحیح روی یک محور افقی را بررســی کنیم. پس شـما در مبدأ مختصات هستید و می‌خواهید به نقطه‌های مجــاور یعنی (۰و۱) و (۰و۱-) بروید. با کدام‌یک از قوانین زیر چنین کاری امکان‌پذیر است؟

الف) شـما در هر حرکت می‌توانید یا ۲ واحد به جلو (راست) و یا ۶ واحد به عقب (چپ) بروید.

ب) شـما در هر حرکت می‌توانید یا ۵ واحـد به جلو و یا ۱۰ واحد به عقب بروید.

پ) شما در هر حرکت می‌توانید یا ۶ واحد به جلو و یا ۴ واحد به عقب بروید.

ت) شما در هر حرکت می‌توانید یا ۳ واحد به جلو و یا ۴ واحد به عقب بروید.

ث) شما در هر حرکت می‌توانید یا ۵ واحد به جلو و یا ۲ واحد به عقب بروید.

همـان طور که امتحـان کردید، تنها دو حالـت آخر ما را به نقطه‌های مجاور می‌رسـاند و این امر برای هر نقطۀ شروعی درست است. (چرا؟)

اما چه شباهتی بین سه حالت الف، ب و پ وجود دارد که ما را قادر به چنین کاری نمی‌کند؟ وجه اشـتراک قوانین ت و ث چیست که رفتن به نقطه‌های مجاور را امکان‌پذیر می‌سازد؟ اگر هنوز نتوانسته‌اید شباهت‌ها را در این دو دسته از قوانین پیدا کنید، ناامید نشـوید. شاید اسـتفاده از زبان ریاضی به آشکارشدن این شباهت‌ها کمک کند.

برای مثال، قانون الف را در نظر بگیرید. وقتی از مبدأ به اندازۀ ۲ واحد به سـمت راسـت می‌رویم، یعنی داریم صفر را با ۲ جمـع می‌کنیم (توجه کنید که به علـت حرکت افقی از مبدأ مختصات، عرض مختصات هر نقطه صفر اسـت و تنها طول آن تغییر می‌کند. لذا منظور جمع‌کردن مؤلفۀ طول مختصات مبدأ با ۲ است). اگر چندین بار حرکت به راست را ادامه دهیم به همان تعداد که ایــن کار را تکرار می‌کنیم، داریم این عملِ جمــع با ۲ را تکرار می‌کنیم. اما تکــرار عمل جمع با یک عدد ثابت را می‌توان با عمل ضرب نیز نشان داد. به عبارت دیگر، اگر این تعداد تکرار را با n نشــان دهیم، آنگاه n بار حرکت به راست ما را به مختصات (۲nو۰) می‌برد. پس تنها با استفاده از حرکت به راست رسیدن به عدد ۱ (یا ۱-) امکان پذیر نیست. زیرا در این صورت، معادلۀ ۲n=۱ (یا ۲n=-۱) باید جوابی صحیح داشته باشد که چنین چیزی امکان‌پذیر نیست.

به طریق مشــابه، اگر تعداد حرکت‌های به چپ را با m نشان دهیم، رسیدن به عدد ۱ (یا ۱-) با m بار حرکت به چپ معادل اســت با اینکه معادلۀ ۶m=۱- (یا ۶m=-۱-) دارای جواب باشد کــه باز هم جوابی برای آن نمی‌توان پیدا کرد. ممکن اسـت بگویید که شاید بتوان با ترکیبی از حرکت‌های راست و چپ به عدد ۱ (یا ۱-) رسـید. پس بیایید آن را هم بررســی کنیم. فرض کنید شما چنین حرکت کرده باشید: یک حرکت به جلو، دو حرکت به عقب، دو حرکـت به جلو، یک حرکت به عقب و چهار حرکت بــه جلو. در این صورت شـما به چه خانه‌ای رسیده‌اید؟ برای پاسخ به پرسش بالا شما می‌توانید تعدادی جمع و تفریق بنویسید: ۰+۲-۶-۶+۲+۲-۶+۲+۲+۲+۲

اما باز هم این عبارت را می‌توان به کمک ضرب ساده‌تر نوشت (چون ۰ تأثیری در جواب ندارد آن را نمی‌نویسیم): ۷×۲-۳×۶

که در آن ۷ و ۳ به ترتیــب تعداد حرکت‌های رو به جلو و رو به عقب هســتند. با این توضیح اگر n حرکت رو به جلو و m حرکت رو به عقب داشته باشیم، می‌رسیم به: n×۲-m×۶

اکنــون باید ببینیم، آیا n و mهایی وجــود دارند که به ازای آن‌ها دو معادلۀ زیر دارای جواب باشند؟

n×۲-m×۶=۱ و n×۲-m×۶=-۱

دقــت کنید که کافی اســت وجود جواب بــرای یکی از این معادله‌ها را بررسی کنیم. زیرا اگر یکی از این دو معادله جواب داشته باشـد، با قرینه‌کردن می‌توان جواب معادلۀ دیگر را به دست آورد. بنابراین، تنها معادلۀ اول را بررسی می‌کنیم. با این صورت‌بندی می‌توان قوانین ب و پ را نیز بررسی کرد.

برای حالت ب: n×۵-m×۱۰=۱

برای حالت پ: n×۶-m×۴=۱

که در آن n تعــداد حرکت رو به جلو و m تعداد حرکت رو به عقب است.

• اکنون نوبت شماست!

۱. آیا می‌توانید شباهت سه معادلۀ اخیر را بیابید؟

۲. چرا هیچ یک از سه معادلۀ بالا دارای جواب نیست؟

۳. برای قانون ت نیز یک معادله بنویســید و برای آن ســه جواب متفاوت برای n و m بیابید.

۴. در هر حالت چه ارتباطی بین جواب‌ها وجود دارد؟

۵. پرسش‌های ۳ و ۴ را برای قانون ث نیز پاسخ دهید.

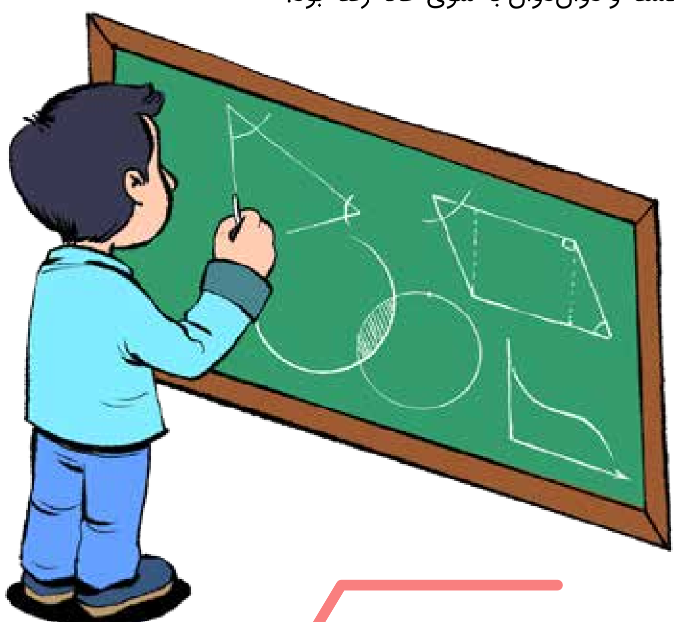
ادامه دارد ...

مجذوب خوشه‌های رسیده

بهزاد منوچهریان
تصویرگر: حسین یوزباشی

ریاضی‌دان معاصر؛ دکتر جعفر زعفرانی

در سال ۱۳۲۶ ش در اصفهان به دنیا آمد. در پنج‌سالگی او را به مکتب گذاشتند، اما در همان روز اول از آنجا فرار کرد و به خانه بازگشت. خوشه‌های رسیدهٔ انگور درخت مویی که در حیاط مکتب روییده بود، نظر او را جلب کرده بود. قصد چیدن انگور کرده بود که خانم معلم عصبانی شده و با چوب دنبالش کرده بود. او هم از ترس از در مکتب بیرون جسته و دوان‌دوان به سوی خانه رفته بود.



بعد از دورهٔ ابتدایی، به «دبیرستان سعدی» رفت که از دبیرستان‌های خوب اصفهان بود و شاگردان زرنگ را گلچین می‌کرد. دبیران خوبی هم داشت. کلاس هندسهٔ آقای جمالی، در جلب علاقهٔ او به ریاضیات خیلی مؤثر بود.

در سال ۱۳۴۴، هم در دانشگاه اصفهان قبول شد و هم در دانشگاه تهران، اما به تهران آمد. هنگام عزیمت به تهران هزار تومان از پدرش گرفت که ۸۵۰ تومان آن برای پرداخت شهریهٔ نیم‌سال اول دانشگاه بود. آن زمان دانشجویان باید شهریهٔ نیم‌سال اول خود را حتی در دانشگاه‌های دولتی هم می‌پرداختند.

در دانشــگاه تهران از استادانی چون دکتر قینی، دکتر بهفروز، دکتر افضلی‌پور، دکتــر هشــترودی، اســتاد فاطمی و دکتر جوانشــیر ریاضیــات آموخت، اما این دکتر قینی بود که بــرای اولین بار او را بــا کتاب‌های آمــار و احتمال که به زبان انگلیسی بودند، آشنا کرد.

او که با معدل بسیارعالی موفق به گرفتن مدرک کارشناسی شده بود، با راهنمایی و تشویق دکتر بهفروز و دکتر هشترودی که در دانشگاه اصفهان هم درس می‌دادند، برای گذراندن دورهٔ سربازی به دانشگاه اصفهان رفت و آن دوره را با تدریس ریاضیات و حل تمرین درس‌هایی که دکتر هشترودی و دکتر بهفروز می‌دادند، در دانشگاه اصفهان به پایان رساند.

پس از پایان دورهٔ سربازی، تصمیم گرفت برای ادامهٔ تحصیل به خارج از ایران برود. پس از آنکه از دانشگاه‌های آمریکا و انگلیس پذیرش گرفت، در پی آشنایی با دکتر گارنی، «دانشگاه لیژ» بلژیک را برای ادامهٔ تحصیل انتخاب کرد. در مدت تحصیل در بلژیک او بورسیهٔ دانشگاه اصفهان بود.

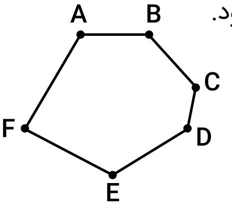
پس از گرفتن مدرک دکترا در سال ۱۳۵۴ به ایران برگشت و به دانشگاه اصفهان رفت. در همان سال، ضمن آشنایی با چند تن از ریاضی‌دانان، به انجمن ریاضی راه یافت و سال‌ها در انجمن فعال بود و یک دورهٔ دوساله هم رئیس انجمن ریاضی بود.

او یکی از بنیان‌گذاران «دانشگاه غیرانتفاعی شیخ بهایی» است که در سال ۱۳۷۵ در شهر جدید بهارستان در نزدیکی اصفهان تأسیس شد و اکنون ریاست این دانشگاه را برعهده دارد.

بچرخان و اندازه بگیر

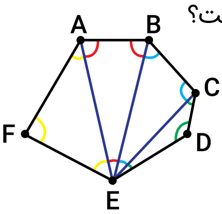
محرم ایردموسی

حتماً همهٔ شما از نحوهٔ محاسبهٔ مجموع زاویه‌های داخلی یک چندضلعی محدب اطلاع دارید. مثلاً اگر یک شش‌ضلعی مطابق شکل ۱ داشته باشیم، برای محاسبهٔ مجموع زاویه‌های داخلی آن، ابتدا سطح داخلی‌اش را به چند مثلث (اینجا ۴ مثلث) افراز می‌کنیم (شکل ۲). در هر مثلث مجموع زاویه‌ها برابر است با ۱۸۰ درجه. در نتیجه مجموع زاویه‌های شش‌ضلعی برابر °۴×۱۸۰، یعنی ۷۲۰ درجه خواهد بود.



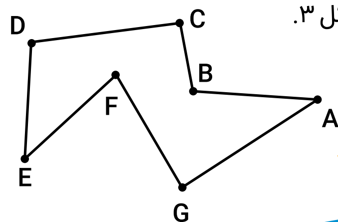
شکل ۱

حال اگر چندضلعی‌ها به شکل‌های دیگری باشند، چطور مجموع زاویه‌ها را به‌دست می‌آورید؟ آیا روش فوق مجدداً قابل استفاده است؟



شکل ۲

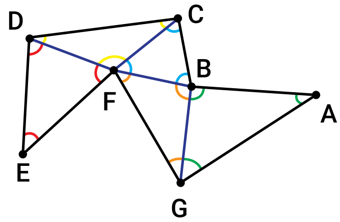
به‌عنوان مثال دوم، یک چندضلعی در نظر بگیرید که محدب نباشد (یعنی زاویه‌ای بیشتر از °۱۸۰ داشته باشد)؛ مانند شکل ۳.



شکل ۳

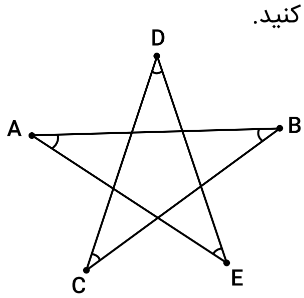
حتماً در بررسی شما هم به این نتیجه رسیده‌اید که روش گفته‌شده اینجا هم کارساز است (شکل ۴).

مجموع زاویه‌ها=۵×۱۸۰°=۹۰۰°



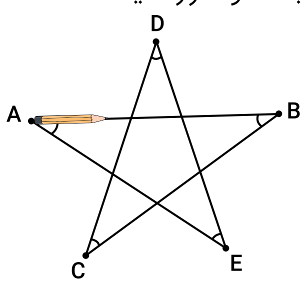
شکل ۴

حال چندضعلی‌هایی را در نظر بگیریم که ساده نباشند. چندضلعی ساده چندضلعی است که خودش را قطع نکند؛ مانند دو مثال قبل. اگر یک چندضلعی ساده نباشد، مانند چندضلعی شکل ۵، شاید نتوانیم از روش فوق برای محاسبهٔ مجموع زاویه‌هایش استفاده کنیم. ابتدا شما را دعوت می‌کنم که به کمک معلومات هندسی‌تان مسئله را حل کنید.



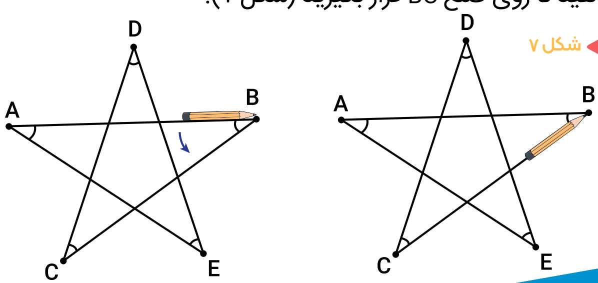
شکل ۵

علاوه بر راه‌حل‌های هندسی که برای چنین مسئله‌هایی وجود دارند، در ادامه به ارائهٔ روشی خلاقانه برای محاسبهٔ مجموع زاویه‌ها در این چندضلعی و چندضلعی‌های مشابه می‌پردازیم. یک خودکار یا مداد یا حتی چوب‌کبریت بردارید و آن را مطابق شکل ۶ در رأسی از چندضلعی به دلخواه قرار دهید:



شکل ۶

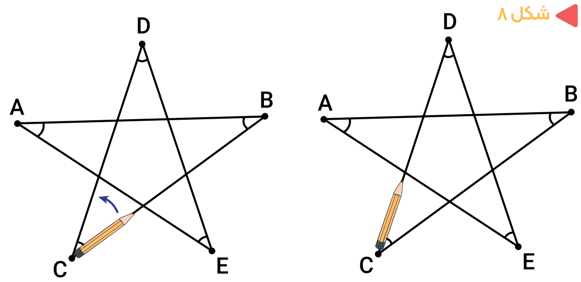
سپس آن را روی ضلع‌ها حرکت دهید تا به رأس بعدی برسد. نوک مداد روی رأس B که قرار گرفت مداد را در داخل چندضلعی دوران دهید تا روی ضلع BC قرار بگیرید (شکل ۷).



شکل ۷

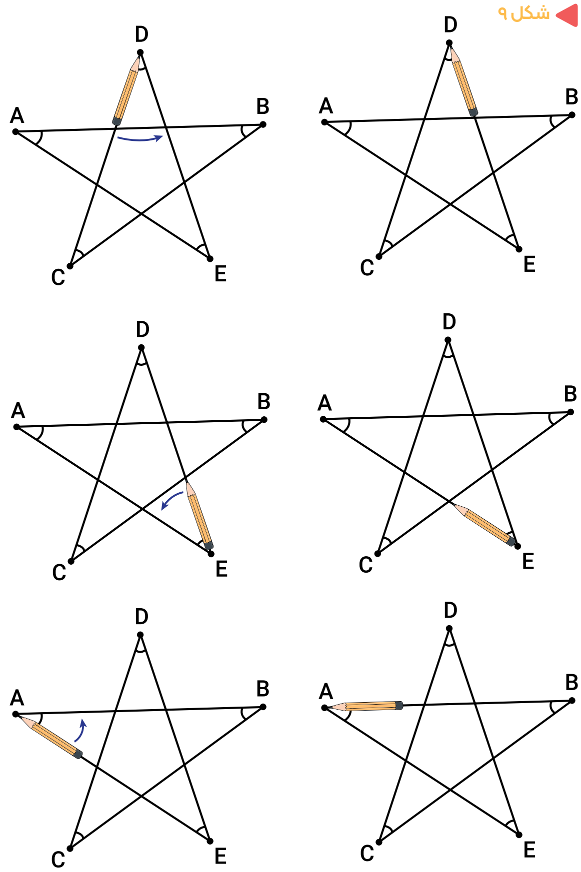
حال مداد را روی ضلع BC جابه‌جا کنید تا به رأس C برسید و مجدداً ته مداد روی C که قرار گرفت مانند شکل ۸ آن را داخل چندضلعی دوران دهید تا روی ضلع CD قرار گیرد

شکل ۸



حتماً حدس زده‌اید که در ادامه مداد را چطور حرکت دهید. این کار تا رسیدن مداد به جای اولش یعنی A باید ادامه پیدا کند (شکل ۹).

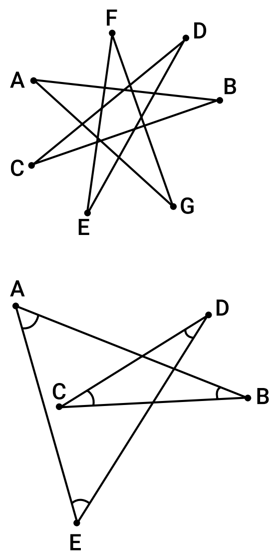
شکل ۹



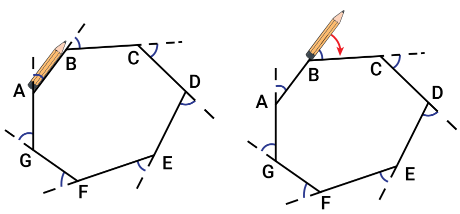
اکنون که مداد به نقطهٔ شروع بازگشته است، شکل نهایی و شکل ابتدایی را با هم مقایسه کنید. مداد سر و ته شده است که نشان می‌دهد °۱۸۰ چرخیده است. اگر روند حرکت مداد را دوباره بررسی کنید خواهید دید که مداد روی رأس‌ها و داخل چندضلعی می‌چرخد. پس مجموع چرخش‌ها همان مجموع زاویه‌های چندضلعی است و مجموع زاویه‌ها برابر °۱۸۰ خواهد بود.

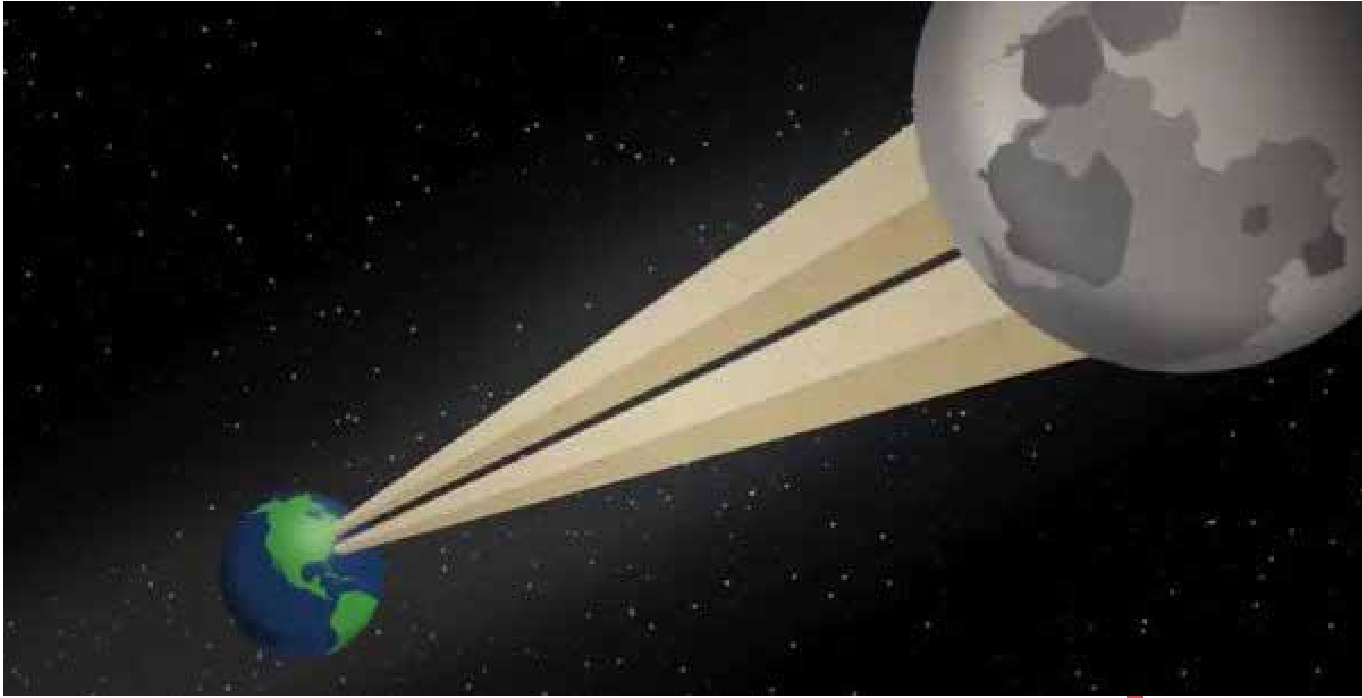
به عنوان تمرین سعی کنید مجموع زاویه‌های چندضلعی‌های شکل ۱۰ را با این روش به‌دست آورید. در حرکت‌دادن و چرخاندن مداد دقت کنید که مداد را در کل چند دور (یا نیم‌دور) چرخانده‌اید.

شکل ۱۰



می‌توانیم با این روش ثابت کنیم مجموع زاویه‌های خارجی هر چندضلعی محدب برابر °۳۶۰ است. نقطهٔ شروع راه‌حل از ما، تکمیل راه‌حل از شما!

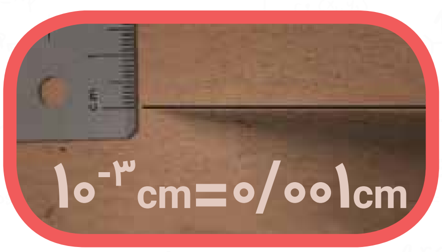




با چند بار تاکردن کاغذ به ماه می‌رسیم؟

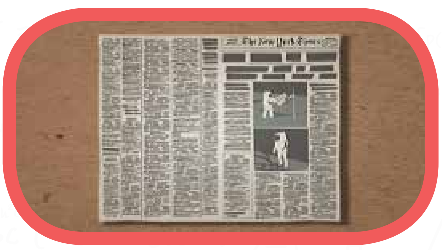
مریم جعفرآبادی

فکر می‌کنید یک کاغذ را چند بار می‌توانید تا کنید؟ آیا فکر می‌کنید ضخامت کاغذ در جوابی که می‌خواهید به این سؤال بدهید تفاوتی ایجاد می‌کند؟ بیایید فرض کنیم ضخامت کاغذ در حد «سیلک»، یا حدوداً ۰/۰۰۱ سانتی‌متر است. میزان نازک‌بودن کاغذ را تأیید می‌کنید؟ ادامه بدهیم؟



شاید دارید با خودتان فکر می‌کنید اندازهٔ کاغذ هم در پاسخ شما تأثیر دارد و هر قدر کاغذ بزرگ‌تر باشد، شما راحت‌تر و به دفعه‌های بیشتری می‌توانید آن را تا کنید. اگر کاغذی به بزرگی صفحه‌های روزنامه برداریم خوب است؟

کاغذی به نازکی ۰/۰۰۱ سانتی‌متر و به بزرگی یک صفحهٔ روزنامه را برمی‌داریم و کار را شروع می‌کنیم!



حالا با این شرایطی که با هم سرشان توافق کردیم، فکر می‌کنید چند بار این کاغذ می‌تواند از وسط تا شود؟

بیایید این کار را انجام دهید. تا هر تعداد دفعه که می‌توانید کاغذ را از وسط تا کنید و دوباره و دوباره ... چند بار شد؟ با انجام عملی این کار ببینید جواب قابل قبول و واقعی به این مسئله چیست؟ اما صرف‌نظر از اینکه در واقعیت تاکردن پشت سر هم یک ورق نازک تا چندمین بار امکان‌پذیر است، بیایید فرض کنیم محدودیتی در تعداد دفعه‌های آن نداشته باشیم. می‌خواهیم روی ضخامت کاغذ تاشده صحبت کنیم. ضخامت اولیهٔ کاغذ را ۰/۰۰۱ سانتی‌متر در نظر گرفته بودیم. پس با اولین بار تا کردن کاغذ ضخامت آن ۰/۰۰۲ سانتی‌متر می‌شود.

دفعهٔ بعد که تا می‌کنیم ضخامت کاغذ ۰/۰۰۴ و دفعهٔ بعد ۰/۰۰۸ و به همین ترتیب ۰/۰۱۶ و ... می‌شود.

این عددها برایتان آشنا نیستند؟ انگار داریم توان‌های دو را می‌بینیم.
بعد از ۱۰ بار تاکردن کاغذ، به عدد ۲ به توان ۱۰ می‌رسیم که ضخامت ۱/۰۲۴ را برای ما می‌سازد. یعنی فقط کمی بیشتر از ۱ سانتی‌متر.

فرض کنید فرایند تاکردن کاغذ از وسط را همین‌طور ادامه بدهیم (به نظر شــما در واقعیت اصلاً چنین چیزی ممکن است؟ شما تا چندمین بار توانستید کاغذتان را تا کنید؟) و مثلاً بــه ۱۷ امین دفعهٔ تاکردن برســیم. در این مرحله ضخامت چقدر خواهد بود؟
ضخامت کاغذ تاشده در این مرحله به حدود ۱۳۱ سانتی‌متر می‌رســد؛ کمی بیشــتر از ۴ فوت که تقریباً اندازهٔ قد یک کودک است.

در ۲۵ امین دفعهٔ تاکــردن خودتان ببینید که چه اتفاقی می‌افتد؟

برجی از کاغذ هم‌قد یک آسمان‌خراش!

به این نوع رشد ضخامت کاغذ «رشد نمایی» می‌گوییم.

فکر می‌کنید بعد از چندمین بار تاکردن کاغذ دســتمان به ماه می‌رسد؟ با ۴۰ بار تاکردن کاغذ به ماهواره‌هایی که دور زمین می‌گردند و مربوط به رادارهای «جی‌پی‌اس» هستند دست می‌یابیم.

با ۴۵ بار تاکردن می‌توانیم دور ماه قدم بزنیم. دفعهٔ ۴۶ام که کاغذ را تا کنید، می‌توانیم همین مســیری را که تا ماه آمده‌ایم برگردیم.

منبع

https://engei0211.wordpress.com/2019/03/29/no-1-how-folding-paper-can-get-you-to-the-moon-adrian-paenza/

هزینه- فرصت

ژما جواهری‌پور

اگر یک ساعت زمان برای تفریح داشته باشید، چه کاری انجام می‌دهید؟ به باشگاه ورزشی می‌روید یا فیلم تماشا می‌کنید؟ اگر به تماشای فیلم بنشینید فرصت رفتن به باشگاه را از دست داده‌اید. شما فرصت داشتید که زمان خود را صرف ورزش در باشگاه کنید و هزینهٔ تماشای فیلم، نرفتن به باشگاه بود. در طول روز ما دائماً در معرض انتخاب هستیم و هزینهٔ فرصت‌هایی را برای هر انتخابی می‌پردازیم.

یک مثال دیگر: فرض کنید شما مبلغ ۵۰۰۰۰۰ تومان بابت خرید یک لباس پرداخته‌اید. با این مبلغ چه کالاها و خدمات دیگری می‌توانستید بخرید؟ می‌توانستید به شهر بازی بروید یا در یک رستوران غذا صرف کنید یا کتاب بخرید یا یک کیف بخرید. همان‌طور که می‌بینید به این مجموعه انتخاب‌ها می‌توانید پیشنهادهای متنوعی را اضافه کنید. همهٔ کارهای این فهرست فرصت‌هایی هستند که با آن مبلغ می‌توانستید داشته باشید، ولی هزینه کردید.

وقتی اقتصاددان دربارهٔ هزینه صحبت می‌کند منظور او «هزینه-فرصت» است. یک مثال دیگر بزنیم: اگر شما با دوستان خود در خیابان قدم بزنید آیا هزینه‌ای کرده‌اید؟ شاید ابتدا بگویید من هیچ هزینه‌ای نکردم. ولی فرض کنید این زمان را برای یادگیری ریاضی اختصاص می‌دادید و یا یک کالای دست‌ساز می‌ساختید و به هم‌کلاسی‌های خود می‌فروختید. این‌ها همه فرصت‌هایی بودند که هزینه کردید.

اگر شما صاحب یک کسب و کار باشید و سود شرکت تعیین‌کنندهٔ موفقیت تجارت شما باشد، شناخت هزینهٔ فرصت هر سرمایه‌گذاری و انتخاب شما بسیار اهمیت پیدا می‌کند. چرا که هزینه- فرصت به این معنی است که وقتی فردی یا شرکتی بین چند انتخاب متفاوت تصمیم می‌گیرد، هزینه‌ای را که به دلیل انتخاب‌نکردن هر یک از گزینه‌های دیگر از دست می‌دهد باید در نظر بگیرد.

در ریاضیات می‌توان این مفهوم را با استفاده از معادله و فرمول بیان کرد. برای مثال، فرض کنید یک شرکت تصمیم گرفته است بین دو پروژهٔ متفاوت یکی را انتخاب کند. پروژهٔ A سالانه ۲۰,۰۰۰,۰۰۰ تومان سود به دست می‌آورد، در حالی که پروژهٔ B سالانه ۲۵,۰۰۰,۰۰۰ تومان سود به دست می‌آورد. با این حال، پروژهٔ A احتمال دارد که دو سال طول بکشد، در حالی که پروژهٔ B تنها یک سال طول می‌کشد. با توجه به اینکه شرکت از دو سال بعد نیاز دارد سود خود را برای سال دوم دوباره حساب کند، هزینهٔ فرصت انتخاب پروژهٔ A برابر است با:

تومان تومان سال تومان سال

(۲×۲۰,۰۰۰,۰۰۰)-(۱×۲۵,۰۰۰,۰۰۰)=۱۵,۰۰۰,۰۰۰

بنابراین، هزینه- فرصت انتخاب پروژهٔ A برای شرکت ۱۵,۰۰۰,۰۰۰ تومان است. اگر شما صاحب این شرکت بودید کدام پروژه را انتخاب می‌کردید؟

در زندگی هر روز و هر جا باید تصمیم بگیریم و انتخاب کنیم. این موضوع مهم است که بدانیم «هزینه-فرصت» هر تصمیم چیست. و یا ساده‌تر اینکه: چه چیزی از دست می‌دهیم و چه چیزی به‌دست می‌آوریم؟

تمرین‌های متفاوت

جور دیگر باید دید

خسرو داودی
آرش رستگار

در ایران و اکثر کشـورهای جهان «آموزش ریاضیات به سبک تصویری»، مغفول مانده یا به آن کم‌توجهی شـده اسـت؛ از موارد استثنا می‌توان به نظام آموزش ریاضی در کشور سنگاپور اشاره کرد. در این سلسله مقاله‌ها تلاش شده است این نقیصه با طرح تمرین‌هایی متفاوت تا حدی جبران شود.

هفتمی‌ها

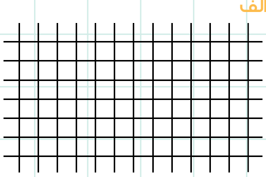
مسئلهٔ ۱. فرض کنید کاشی‌کاری‌هایی که در شکل ۱ می‌بینید، تـا بی‌نهایت ادامه دارند. تصویری بزرگ از هر یک را با کمک شابلون رسم کنید.

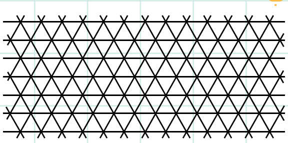
الف) در هر یک از کاشـی‌کاری‌های شـکل ۱ چه نقاطی مرکز تقارن هسـتند؟ چند نـوع مرکز تقـارن را می‌توانید در این کاشی‌کاری‌ها بازشناسی کنید؟ مثلاً ممکن است بعضی روی رأس کاشی باشند و برخی وسط یال کاشی.

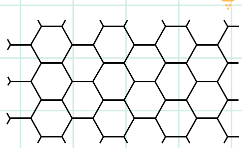
ب) در هر یک از کاشـی‌کاری‌های شـکل ۱، چه نقاطی مرکز دوران کوچک‌تر از ۱۸۰ درجه هسـتند که کاشی‌کاری را حفظ می‌کننـد؟ چند نوع مرکز تقارن دورانـی را می‌توانید در این کاشـی‌کاری‌ها بازشناسی کنید. مثلاً ممکن است بعضی روی مرکز کاشی باشند و بعضی وسط یال کاشی.

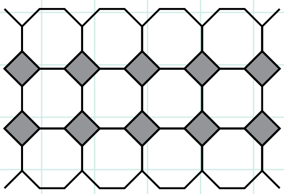
ج) در هـر یک از این کاشـی‌کاری‌ها چـه خط‌هایی محور تقارن هسـتند؟ چند نوع محور تقـارن را می‌توانید در این کاشی‌کاری‌ها بازشناسی کنید؟ مثلاً ممکن است بعضی از مرکز کاشی بگذرند و بعضی ادامهٔ یک یال باشند.

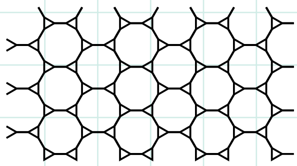
د) ساختار مرکزهای تقارن و محورهای تقارن کدام کاشی‌کاری‌ها شبیه هم هستند؟ آیا می‌توانید یکی از این کاشی‌کاری‌ها را از روی دیگری تولید کنید؟

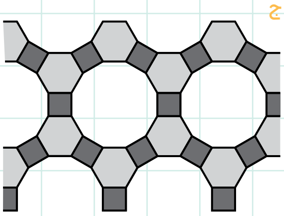
الف


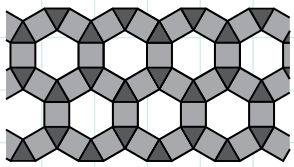
ب


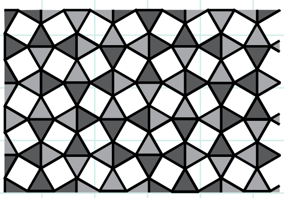
پ


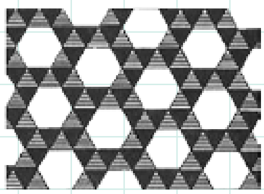
ت


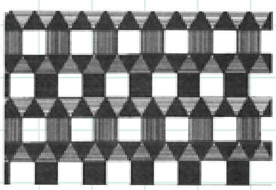
ث


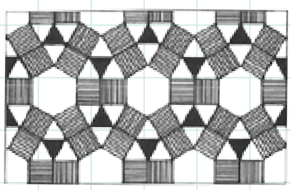
ج


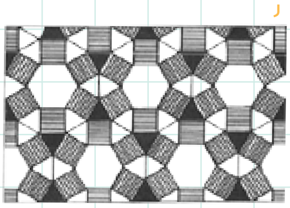
چ


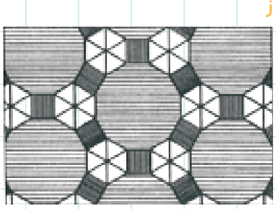
ح


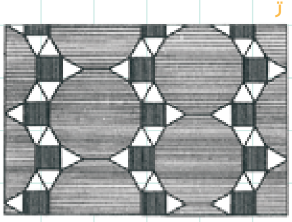
خ


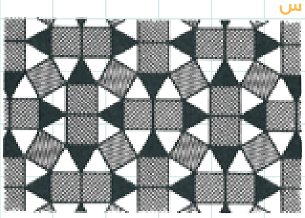
د


ذ


ر


ز


ژ


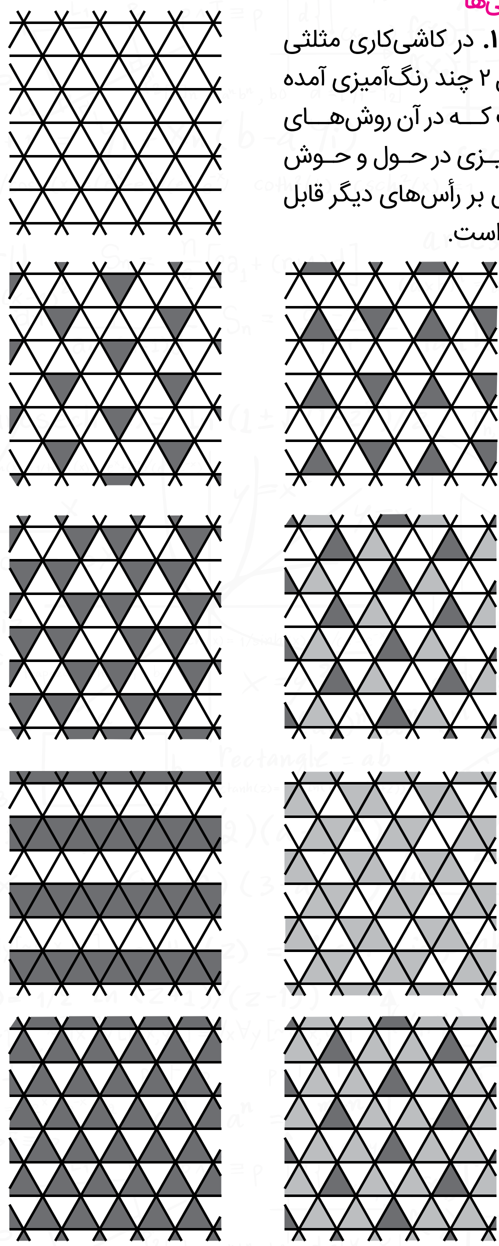
س


شکل ۱

هشتمی‌ها

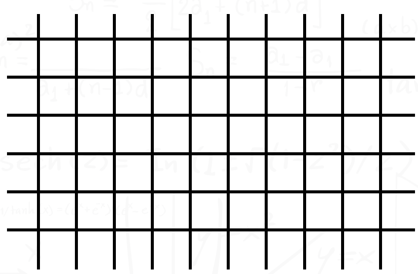
مسئلهٔ ۱. در کاشی‌کاری مثلثی شکل ۲ چند رنگ‌آمیزی آمده است که در آن روش‌های رنگ‌آمیزی در حول و حوش هر رأس بر رأس‌های دیگر قابل انطباق‌است.

شکل ۲



الف) شما هم کاشی‌کاری مثلثی دیگری را به روشی جدید رنگ‌آمیزی کنید که این خاصیت برقرار بماند.

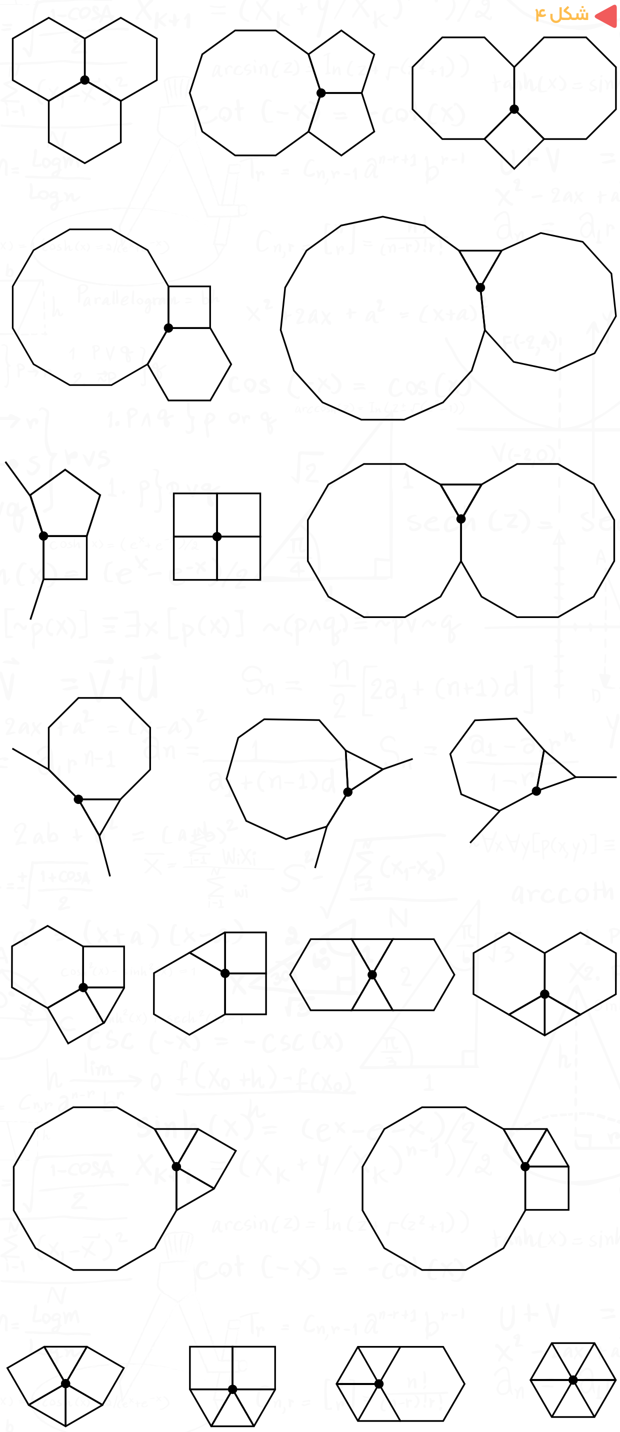
ب) حال همین مسئله را برای کاشی‌کاری مربعی شکل ۳ حل کنید. چند روش رنگ‌آمیزی با این خاصیت می‌توانید پیدا کنید؟



شکل ۳

مسئلهٔ ۲. در هر یک از گوشه‌های شکل ۴ تحقیق کنید که زاویهٔ هر چندضلعی منتظم چنان است که مجموع زاویه‌های هر گوشه برابر ۳۶۰ درجه خواهد بود.

شکل ۴

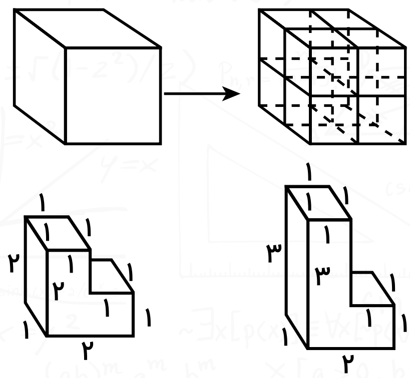


حال بگویید کدام‌یک از الگوهای بالا به یک کاشی‌کاری صفحه قابل توسعه است، به‌طوری که الگوهای اطراف همهٔ رأس‌های آن قابل انطباق باشند؟

نهمی‌ها

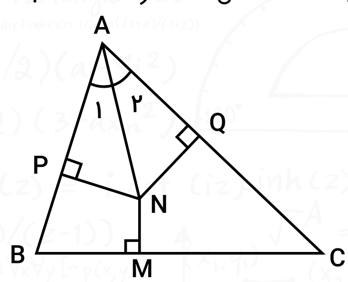
مسئلهٔ ۱. روی سطح کره دایره‌های عظیمهٔ کره را جانشین مفهوم خط کنید. تحقیق کنید آیا در یک مثلث مجموع زاویه‌ها همیشه ۱۸۰ درجه است؟ مفهوم‌های ارتفاع، نیمساز، عمودمنصف و میانه را برای یک مثلث کروی تعریف کنید. تحقیق کنید آیا قضایای هم‌رسی روی سطح کره نیز برقرارند؟

مسئلهٔ ۲. هر یک از حجم‌های شکل ۵ را به هشت حجم متشابه با خودش، اما کوچک‌تر افراز کنید؛ درست مانند مکعبی که در این شکل به هشت مکعب کوچک افراز شده است.



◀ شکل ۵

مسئلهٔ ۳. در شکل ۶ یک استدلال غلط درست‌نما گنجانده شده است.



◀ شکل ۶

نیمساز AN عمودمنصف MN از ضلع BC را در نقطهٔ N داخل مثلث قطع کرده است. آیا می‌توانید به کمک شکل ثابت کنید، هر مثلث ABC متساوی‌الساقین است و AB=AC؟! این استدلال چه اشکالی دارد؟

راهنمایی: از خط‌های اضافی کمک بگیرید.

استدلال: دو مثلث ANP و ANQ را در نظر بگیرید:

$$\left.\begin{array}{ll}\hat{A}_1=\hat{A}_2 & \text{(AN نیمساز) فرض مسئله}\\ AN=AN & \text{وترمشترک}\end{array}\right\}\xRightarrow{\text{وز}}\overset{\Delta}{ANQ}=\overset{\Delta}{ANP}\xRightarrow{\text{تساوی اجزا}}AP=AQ$$

دو مثلث PNB و QNC را در نظر بگیرید:

$$\left.\begin{array}{ll}NP=NQ & \text{چون N روی نیمساز است}\\ NB=NC & \text{چون N روی عمودمنصف است}\end{array}\right\}\xRightarrow{\text{وض}}\overset{\Delta}{QNC}=\overset{\Delta}{PNB}\xRightarrow{\text{تساوی اجزا}}PB=QC$$

$$\left.\begin{array}{l}AP=AQ\\ PB=QC\end{array}\right\}\Rightarrow AP+PB=AQ+QC\Rightarrow AB=AC$$

یعنی مثلث متساوی‌الساقین است.

مربع لوزی‌ای است که یک زاویهٔ قائمه داشته باشد.
مربع مستطیلی است که دو ضلع مجاورش برابر باشد.
این دو تعریف برای مربع معادل هستند.

مسئلهٔ ۴.

الف) چند تعریف معادل برای اینکه یک چهارضلعی مربع باشد ارائه دهید.

ب) چند تعریف معادل برای اینکه یک چهارضلعی مستطیل باشد ارائه دهید.

ج) چند تعریف معادل برای اینکه یک چهارضلعی لوزی باشد ارائه دهید.

د) چند تعریف معادل برای اینکه یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد ارائه دهید.

هـ) چند تعریف معادل برای اینکه یک چهارضلعی ذوزنقه باشد ارائه دهید.

و) حال در هر یک از قسمت‌های بالا شرطی بگذارید که تعریف بالا را نتیجه بدهد، ولی معادل با آن نباشد.

مسئلهٔ ۵. کدام‌یک از شکل‌های مستطیل، لوزی، ذوزنقه و متوازی‌الاضلاع می‌توانند با تغییر طول ضلع‌ها، ولی با ثابت‌ماندن زاویه‌ها تغییر کنند، ولی همان شکل بمانند؟ مثلاً مربع با بزرگ‌تر شدن متناسب ضلع‌ها و ثابت‌ماندن زاویه‌هایش همواره مربع باقی خواهد ماند.

الف) مستطیل
ب) لوزی
ج) ذوزنقه
د) متوازی‌الاضلاع

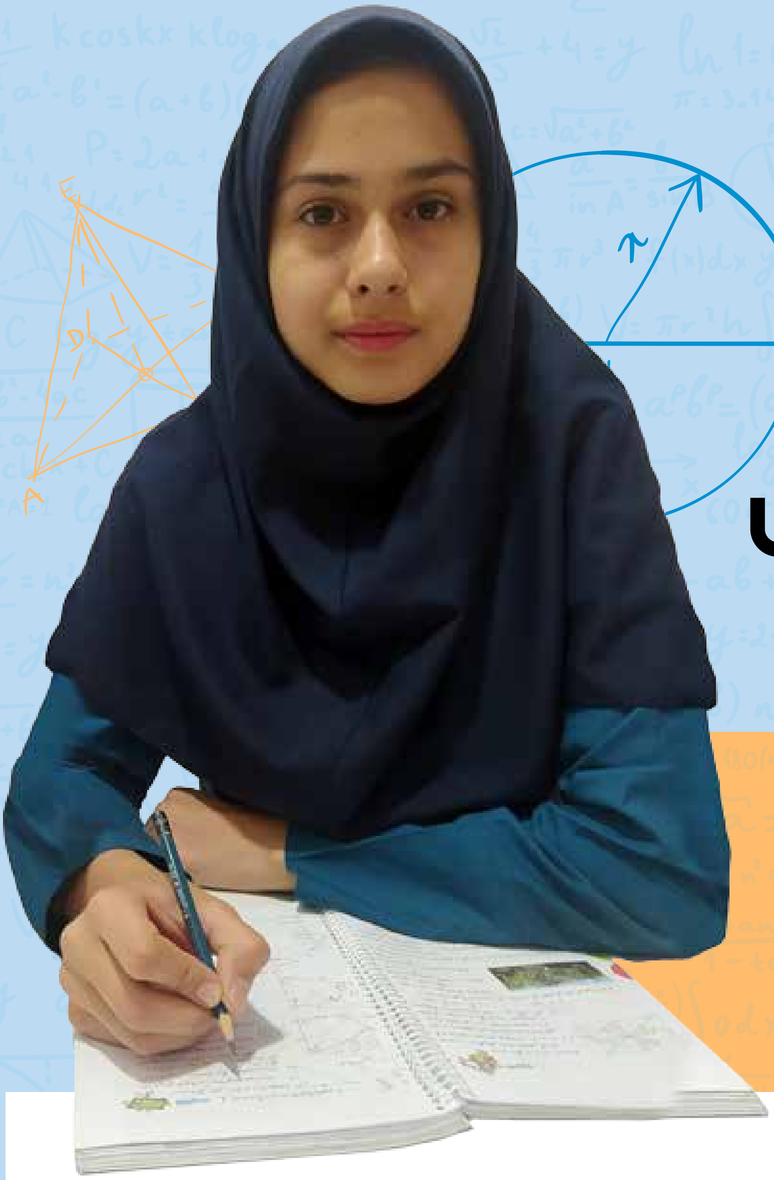
آیا هر شکل دلخواه خاصیت بالا را ندارد؟

مسئلهٔ ۶. کدام‌یک از شکل‌های مستطیل، مربع، متوازی‌الاضلاع و ذوزنقه می‌توانند با تغییر زاویه‌ها، ولی با ثابت‌ماندن طول ضلع‌ها، همان شکل باقی بمانند؟ مثلاً لوزی با تغییر زاویه‌های مقابل به هم یک لوزی باقی می‌ماند.

الف) مستطیل
ب) مربع
ج) متوازی‌الاضلاع
د) ذوزنقه

اگر همهٔ شکل‌های بالا تغییر می‌کنند و به شکل دیگری تبدیل می‌شوند، نام آن شکل کلی‌تر را بگویید.

▲ ادامهٔ مسئله‌ها ▲ پاسخ‌ها ▲ آموزش معلمان



ریاضی روحیهٔ نظم‌پذیری می‌دهد

مهدیه مسیبی

گفت‌وگو با **ضحا عرب بافرانی،** معلمیار و مخاطب امروز از شهر ری

یکی می‌پرسد: «ریاضی به جز یک حساب و کتاب معمولی در زندگی، به چه کار ما می‌آید؟!» اما این دختر می‌گوید: «ریاضی تمرکز می‌دهد و اعتمادبه‌نفس می‌بخشد.» دیگری بعد از آنکه همین چند تا تمرین را هم حل کرد، کتاب و دفتر را جمع می‌کند، اما این دانش‌آموز می‌کوشد ببیند کدام هم‌کلاسی در فهم یک مبحث دچار اشکال شده است تا آن را برطرف کند. آن یکی خودش را ته کلاس پنهان می‌کند تا در دید معلم قرار نگیرد، ولی ضحا پیشنهاد می‌دهد به عنوان معلمیار به تکلیف‌های بچه‌ها رسیدگی کند. این همه شوق و علاقه ما را تشویق کرد تا این دانش‌آموز پایهٔ هشتم مدرسهٔ شاهد نجمه منطقهٔ ۲ شهر ری را به گفت‌وگو دعوت کنیم، او را بهتر بشناسیم و به شما معرفی کنیم.

● **اگر کسی از شما بپرسد ریاضی چگونه درسی است، پاسخ شما چیست؟ منظورم این است که تعریف شما از ریاضی چیست؟**

○ درس ریاضی اگر توأم با علاقه و انگیزه باشد، درسی بسیار شیرین و کاربردی است. من معتقدم که علم ریاضی در ذهن انسان تمرکز ایجاد می‌کند، در فرد روحیهٔ نظم‌پذیری به‌وجود می‌آورد، و با حل تمرین‌ها اعتمادبه‌نفس در ما تقویت می‌شود.

● **در طول هفته چقدر برای مطالعهٔ ریاضی وقت می‌گذاری؟**

○ در طول هفته معمولاً ۳ تا ۵ ساعت.

● **آیا علاوه بر درس ریاضی و تمرین‌هایی که معلم تعیین می‌کند، مطالب دیگری در زمینهٔ ریاضی مطالعه می‌کنید یا خیر؟ این مطالب را از کجا انتخاب و مطالعه می‌کنید؟**

○ در کنار کتاب درسی ریاضی، کتاب‌های دیگری دارم که معمولاً در هفته چند صفحه از آن را حل می‌کنم و این کمک بزرگی به من می‌کند. البته گاهی هم نمونهٔ آزمون‌ها را برای خودم حل می‌کنم.

● **همهٔ ما گاهی در کار و درس با مشکل، معما و مسئله روبه‌رو می‌شویم که خودمان قادر به حل آن نیستیم. در چنین حالتی در درس ریاضی، اگر برای شما سؤالی پیش بیاید و خودتان نتوانید آن را حل کنید چه کار می‌کنید؟**

○ من نهایت تلاشم را می‌کنم که مسئله را خودم به‌تنهایی حل کنم، ولی اگر موفق به حل آن نشدم از معلم یا پدرم و یا از دوستانم کمک می‌گیرم.

● شـــنیدم معلمیار درس ریاضی در کلاس هستید. چطور شد برای این کار انتخاب شدید؟ چه کسی شما را انتخاب کرد و چه مدت است که معلمیار هستید؟

○ از جانــب دبیــر ریاضی بعــد از انجــام تکلیف‌ها و داوطلب‌شدن‌های پی‌درپی برای حل تمرین‌ها، از همان جلسه‌های اول سال تحصیلی انتخاب شدم. من از دوران ابتدایی به‌عنوان همیار معلم تجربهٔ این کار را پیدا کردم و تا الان این کار را انجام می‌دهم.

● وظیفهٔ معلمیار در کلاس شما چیست و در چه جاهایی به بچه‌ها کمک می‌کنید؟

○ معلمیار همان‌طور که از اســمش معلوم است، به‌نوعی بــه معلم کمک و یاری می‌رســاند. بررســی تکلیف‌های سرگروه‌ها، پیگیری و شناخت دانش‌آموزان ضعیف، رفع اشــکال و پاسخ‌گویی به دوستان در شــبکهٔ مجازی، به خصوص در روزهای امتحانات ترم و میان‌ترم.

● کسی که معلمیار اســت، باید درسش از سطح متوسط بچه‌های کلاس بالاتر باشــد تا بتواند به مشــکلات آنان رسیدگی کند یا پرســش‌های آنان را پاســخ بدهد. شما خودتان را در این زمینه چگونه آماده نگه می‌دارید؟

○ من در درجهٔ اول شــش دانگ حواسم به تدریس معلم اســت. سعی دارم که همان موقع در کلاس با دقت تمام درس را یاد بگیرم. گاهی مبحث درســی کامل نمی‌شود و من عجله دارم که تمام مبحــث را خودم در همان روز پیگیــری کنم و یاد بگیرم و هیچ نکته‌ای را برای جلســهٔ بعد نمی‌گذارم. پس بلافاصله درس‌نامه را بازنویســی و تمرین‌هــای جدید را حل می‌کنم. بنابراین نیازی به تکرار دوبارهٔ معلم ندارم و داوطلب حل تمرین جدید هستم.

● اگر دانش‌آموزان هم‌کلاســی شــما در حل مسئله‌ها و نکته‌های درس ریاضی با مشــکل روبه‌رو شوند، چگونه به آن‌ها کمک می‌کنید و برای این کار وقت می‌گذارید؟

○ من همیشــه آماده و پذیرای پاسخ‌گویی و رفع اشکال دوستانم هستم و با علاقه سؤال و پاسخ آن‌ها را بررسی می‌کنم و در حد توان مشکل آن‌ها را برطرف می‌کنم.

● در دوران کرونــا و مدتی پــس از آن هم برخی کلاس‌ها حالت برخط (آنلاین) داشتند و بچه‌ها از راه دور درس‌ها را می‌خواندند. آیا شما در آن زمان هم به دانش‌آموزان کلاس خودتان کمک می‌کردید؟ چگونه این کار را انجام می‌دادید؟

○ در زمــان کرونا معمــولاً با گرفتن تصویــر زنده (لایو)، داوطلب توضیــح و حل تمرین بودم و بیشــتر وقت‌ها درس‌هــا را برای خودم به‌طور جــدی تدریس می‌کردم و فیلم می‌گرفتم. گاهی بعضی از فیلم‌هــا را برای دبیر ریاضی می‌فرســتادم و مورد تشــویق ایشــان قرار می‌گرفتم. شبکهٔ مجازی امــکان خوبی برای کمک، هم‌فکری، تبادل نظر و رفع اشکال است و ما از این فرصت استفاده کرده و می‌کنیم.

● این‌طور که ما شنیدیم در حل تمرین‌های اضافه بر تمرین‌های کتاب درسی هم به هم‌کلاسی‌هایتان کمک می‌کنید؟

○ بله. ما یک سلسله تمرین‌های درسی، علاوه بر کتاب درسی را هم در برنامــهٔ کاری کلاس خودمان داریم تا در این زمینه بچه‌ها بیشتر تقویت بشــوند. به‌طور معمول یک ساعت در هفته با عنوان «ریاضی تکمیلی در مدرسه»، ما در این زمینه کار می‌کنیم و من در حل این تمرین‌ها هم به دوستانم کمک می‌کنم. هدف از تمرین‌های مذکور این است که ما خودمان را در درس ریاضی به چالش بکشیم و میزان یادگیری خودمان را محک بزنیم. این کار با برنامه‌ریزی که دبیر ما طراحی کرده است، در ساعت‌های اضافی انجام می‌شود.

● معمولاً بیشتر مشکلات دانش‌آموزان هم‌کلاسی شما در چه زمینه و موضوع‌هایی از ریاضی بود و شما چطور به آن‌ها پاسخ می‌دادید؟

○ مشکلات هم‌کلاسی‌های من بیشتر در مباحث جبر و معادله، توان و گاهی هندسه بود که من مجدداً مسئله را حل می‌کردم و موردهایی را که آن‌ها بی‌دقتــی کرده بودند، با علامت‌زدن روی تابلو تذکر می‌دادم.

● دوســت دارید ریاضی را تا کجا ادامه بدهید؟ برای دانشگاه آیا از حالا رشتهٔ خاصی را مد نظر دارید؟

○ همان‌طــور که می‌دانیم ریاضی جزو علوم مهم پایه اســت و بــرای من که رشــتهٔ تجربی یا ریاضی را مــد نظر دارم، از درس‌های پر اهمیت اســت. بنابراین با برنامه‌ریزی و تلاش مستمر خود را آماده می‌کنم تا در آینده رشتهٔ مورد علاقهٔ خود را از بین یکی از این دو رشته انتخاب کنم و ادامه دهم.

● با مجلهٔ رشد ریاضی برهان چقدر آشنایی دارید و چه مطالبی از این مجله را معمولاً مطالعه می‌کنید؟

○ متأسفانه در سال‌هایی که تحصیل مجازی بود، مجلهٔ برهان را ندیده بودم و با آن آشــنایی نداشتم. بعد از دبیران مدرسه شنیدم که مجلهٔ برهان به درس ریاضی اختصاص دارد. از آن به بعد این مجله را تهیه کردم و مطالب مفید آن را می‌خوانم. در اینجا از مدیریت محترم و کادر آموزشــی مجرب و دلسوز دبیرستان شاهد نجمه صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم.

● برای شــما و همهٔ دانش‌آموزان عزیز موفقیت روزافزون آرزو داریم.

محمدتقی طاهری‌تنجانی

درکلاس درس
عـددهـای اول

آقای رهنما بعد از خوش و بش با دانش‌آموزان روی تختهٔ کلاس با گچ نوشت «عددهای اول». بچه‌ها درس امروز ما دربارهٔ عددهای اول است. جلسهٔ قبل برایتان گفتم که «نظریهٔ اعداد» بخشی از علم ریاضی است که به «عددهای صحیح» می‌پردازد. عددهای اول هم بخشی از همان عددهای صحیح هستند که ویژگی‌های خاصی دارند و به خاطر همین ویژگی‌های خاص از اهمیت زیادی برخوردارند.

مصطفوی: آقا ببخشید! مگر عددهای دوم هم داریم که شما می‌گویید عددهای اول؟

آقای رهنما: (با تبسم) نه عزیزم. شاید به این خاطر به آن‌ها می‌گویند عددهای اول که ریشه و اساس عددها هستند و هر عدد را جوری می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب آن‌ها نوشت که امروز با آن بیشتر آشنا می‌شوید.

عدد اول به چه عددی گفته می‌شود؟ کسی از سال‌های قبل یادش هست؟

محسنی: استاد به ما گفته‌اند عددی اول است که فقط بر خودش بخش‌پذیر باشد.

آقای رهنما: بله، البته تعریف عدد اول ریزه‌کاری‌های دیگری هم دارد؛ مثل نوع عدد. آیا عددهای منفی هم عدد اول دارند؟

احمدی: آقا البته عدد اول بر یک هم قابل تقسیم است. البته هر عدد بر یک بخش‌پذیر است برای همین آقای محسنی اشاره‌ای به این مطلب نکرد.

آقای رهنما: همین‌طور است که آقای احمدی می‌گویند. در حقیقت عدد اول عددی است که فقط دو مقسوم‌علیه دارد یکی یک و دیگری خودش. البته برای اینکه تکلیف خیلی از چیزها مشخص شود گفته می‌شود که «عدد طبیعی مخالف یک را اول می‌گویند هرگاه فقط دو مقسوم‌علیه مثبت (یکی خودش و دیگری ۱) داشته باشد»؛ مثل عدد ۵ یا ۷ یا ۱۳.

محسنی: پس آقا با این حساب همهٔ عددهای اول فردند.

آقای رهنما: شاید این‌طور به‌نظر برسد. تنها عدد اول زوج عدد ۲ است. چرا سایر عددهای زوج اول نیستند؟ کسی می‌داند؟

حسینی: آقا اجازه! خب هر عدد زوج بر ۲ بخش‌پذیر است و تعداد مقسوم‌علیه‌ها بیش از دو تا می‌شود. یکی ۱، یکی خودش و یکی ۲... .

آقای رهنما: کاملاً درست است.

مصطفوی: آقا عدد ۳- هم اول است؟

آقای رهنما: سؤال خوبی مطرح کردید. کسی پاسخ آن را می‌داند؟

بچه‌ها: بله عدد اول است. هم بر ۱ و هم بر ۳ بخش‌پذیر است.

آقای رهنما: البته بر ۳- هم بخش‌پذیر است! برای اینکه چنین مشکل پیش نیاید در تعریف عدد اول، عددهای طبیعی، یعنی عددهای صحیح مثبت را در نظر می‌گیرند. با این حساب عددهای منفی در زمرهٔ عددهای اول نیستند.

حسینی: آقا ببخشید، از کجا بدانیم که یک عدد اول است یا نه؟

آقای رهنما: سؤال خوبی کردید آقای حسینی! تکلیف عددهای زوج که مشخص است. تنها عدد اول زوج ۲ است. حالا می‌ماند عددهای فرد که باید تحقیق کنیم اول هستند یا نه؟ مثلاً عدد ۴۵ اول است یا نه؟

بچه‌ها (یک‌صدا): آقا بر ۳ بخش‌پذیر است. آقا بر ۵ بخش‌پذیر است. پس عدد اول نیست.

آقای رهنما: آفرین! حالا هر عددی که داشتیم باید ببینیم بر عددهای دیگری غیر از خودش و یک بخش‌پذیر است یا نه. اگر بر هیچ عدد دیگری بخش‌پذیر نبود، عدد اول و در غیر این صورت عدد مرکب است. البته عدد ۱ نه اول است و نه مرکب. حالا تحقیق کنید عدد ۴۳ اول است یا مرکب؟

بچه‌ها به فکر فرو رفتند. آقای رهنما لحظه‌ای قدم زد. سپس گفت: «بیایید تحقیق کنیم. بر ۲ که بخش‌پذیر نیست. حالا بگویید بر ۳ چطور؟

احمدی: نه آقا عددی بر ۳ بخش‌پذیر است که مجموع رقم‌هایش بر ۳ بخش‌پذیر باشد. مجموع رقم‌های ۴۳ می‌شود هفت و بر ۳ بخش‌پذیر نیست.

آقای رهنما: خب بر ۵ چطور؟ آقای محسنی شما بگو.

محسنی: آقا بر ۵ هم بخش‌پذیر نیست. چون باید رقم یکان آن ۰ یا ۵ باشد.

آقای رهنما: آفرین، بر ۷ چطور؟

احمدی: آقا قاعده‌اش را نمی‌دانیم که چه عددهایی بر ۷ بخش‌پذیرند.

آقای رهنما: فعلاً قاعده‌ای لازم نیست، تقسیم کنید. آیا باقی‌ماندهٔ تقسیم بر ۷ صفر می‌شود؟

احمدی: نه آقا باقی‌مانده یک می‌شود. پس بر ۷ هم بخش‌پذیر نیست.

آقای رهنما: حالا می‌توانید تحقیق کنید و ببینید که بر ۱۱ یا ۱۳ هم بخش‌پذیر نیست.

مصطفوی: یعنی آقا ما باید بر همهٔ عددهای اول کمتر از ۴۳ این بخش‌پذیری را امتحان کنیم؟ حالا اگر عدد بزرگ بود سخت نمی‌شود؟!

آقای رهنما: قاعده‌ای هست که می‌گوید اگر عدد N اول باشد، باید بر هیچ‌یک از عددهای اول کمتر از $\sqrt{N}$ بخش‌پذیر نباشد. یعنی شما تا جذر عدد تحقیق کنید. کار خیلی ساده‌تر می‌شود. جذر عدد ۴۳ می‌شود شش و خورده‌ای، این‌طور نیست؟

احمدی: جذر ۴۹ می‌شود ۷ و جذر ۳۶ می‌شود ۶ پس عددی بین ۶ و ۷ است.

آقای رهنما: حالا بگویید ۴۳ اول است یا نه؟ آقای حسینی شما بفرمایید.

حسینی: این‌طور که شما فرمودید تا ۷ تحقیق کردیم. عدد ۴۳ بر ۲، ۳، ۵ و ۷ بخش‌پذیر نبود. لابد عدد اول است.

آقای رهنما: کاملاً درست است. حالا بگویید عدد ۱۰۱ اول است یا نه؟

بچه‌ها به فکر فرو رفتند. چند نفری دستشان را بالا گرفتند که: «آقا ما بگیم؟»

آقای رهنما: آقای محمودی امروز در بحث زیاد مشارکت نداری، شما بفرمایید.

محمودی: آقا عدد اول است. بر ۲، ۳ و ۵ که بخش‌پذیر نیست بر ۷ هم تقسیم می‌کنیم باقی‌مانده صفر نمی‌شود بر ۹ و ۱۱ هم بخش‌پذیر نیست.

آقای رهنما: بخش‌پذیر بر ۹ لازم نیست. ۹ که عدد اول نیست. جذر ۱۰۱ می‌شود ۱۰ و خورده‌ای. شما هم که همهٔ عددهای اول کمتر از ۱۰ را بررسی کردید. پس مرکب است یا عدد اول؟

محمودی: واضح است. عدد اول است.

آقای رهنما: بد نیست عددهای اول کمتر از ۵۰ را فهرست کنیم. آقای محسنی بیا پای تخته و آن‌ها را به کمک بچه‌ها بنویس.

محسنی پای تختهٔ کلاس آمد. گچ را برداشت و از سمت چپ تخته نوشت: ... و ۷ و ۵ و ۳ و ۲

آقای رهنما: خب ۱۱ و ۱۳ هم که اول‌اند. عدد بعدی ۱۵، اول است یا نه؟ ۱۷ و ۱۹ چطور؟

محسنی: آقا ۱۵ بر ۳ بخش‌پذیر است، پس اول نیست. ۱۷ و ۱۹ هم اول‌اند.

آقای رهنما: از میان عددهای ۲۱، ۲۳ و ۲۵ کدام اول است؟

بچه‌ها: ۲۳؟

آقای رهنما: چرا ۲۱ اول نیست؟

محسنی: $21=3\times7$، پس ۲۱ بر ۳ و ۷ بخش‌پذیر است.

آقای رهنما: آقای محسنی بقیهٔ عددها را هم من می‌گویم. شما و بچه‌ها در منزل می‌توانید تحقیق کنید که عدد اول هستند یا نه. ادامه بدهید.

... و ۴۷ و ۴۳ و ۴۱ و ۳۷ و ۳۱ و ۲۹ و ۲۳ و ۱۹ و ۱۷ و ۱۳ و ۱۱ و ۷ و ۵ و ۳ و ۲

احمدی: استاد حالا این عددهای اول چه فایده‌ای برای ما دارند؟

آقای رهنما: برای بررسی سؤال‌هایی که در زمینهٔ عددها مطرح می‌شوند، شناخت عواملی که عدد را به‌وجود آورده‌اند، اهمیت زیادی دارد که در جلسه‌های بعدی با آن‌ها آشنا می‌شوید. امروز فقط روش تجزیهٔ عددها به عامل‌های اول را بررسی می‌کنیم. حالا اگر یک عدد مرکب باشد چگونه تعیین کنیم بر چه عددهای اولی بخش‌پذیر است و چگونه آن را به صورت حاصل‌ضرب آن عددها بنویسیم؟

مثلاً عدد ۱۰۰ عدد مرکب است. برای تجزیهٔ آن خطی عمود می‌کشیم عدد ۱۰۰ را در سمت چپ آن و عامل‌های اول بخش‌پذیر آن را در سمت راست می‌نویسیم و تقسیم‌های متوالی بر عددهای اول را تا آنجا ادامه می‌دهیم که به عدد ۱ برسیم. (سپس با گچ گوشهٔ تخته‌سیاه نوشت:)

۱۰۰	۲
۵۰	۲
۲۵	۵
۵	۵
۱	

همین‌طور که مشاهده می‌کنید ۱۰۰ را بر ۲ تقسیم کردیم خارج‌قسمت ۵۰ شد که در سمت چپ و زیر ۱۰۰ می‌نویسیم. دوباره بر ۲ تقسیم می‌شود. خارج‌قسمت ۲۵ است. حالا این ۲۵ بر ۳ بخش‌پذیر نیست. عدد اول بعدی ۵ است که بر آن بخش‌پذیر است. خارج‌قسمت ۵ است خود ۵ هم بر ۵ بخش‌پذیر و خارج‌قسمت ۱ می‌شود. پس می‌شود نوشت:

$$100=2\times2\times5\times5$$

و به‌طور خلاصه $100=2^2\times5^2$. حالا شما عدد ۳۶۴ را تجزیه کنید.

مصطفوی: آقا اجازه دارم جواب را پای تخته‌سیاه بنویسم.

آقای رهنما: بفرمایید آقای مصطفوی.

مصطفوی: تخته پاک‌کن را برداشت تخته را کاملاً پاک کرد و نوشت:

۳۶۴	۲
۱۸۲	۲
۹۱	۷
۱۳	۱۳
۱	

$$364=2^2\times7\times13$$

آقای رهنما: آفرین حالا که با تجزیهٔ عددها هم آشنا شدید، در منزل می‌توانید تمرین‌هایی را که در پایان جلسه می‌دهم، برای تثبیت کار انجام دهید. در فرصت باقی‌مانده یک مسئله هم حل کنیم.

اگر حاصل‌ضرب سن گروهی از دانش‌آموزان ۱۳ تا ۱۷ ساله ۴۴۱۰۰ باشد، در این گروه حداکثر چند دانش‌آموز وجود دارد؟

خب بچه‌ها قدم اول حل مسئله چیزی جز تجزیه به عامل‌های اول نیست. عدد ۴۴۱۰۰ را تجزیه کنید. یک راه ساده‌تر اینکه برای هر صفر یک عامل ۲ و یک عامل ۵ در نظر بگیرید ($10=2\times5$). پس تجزیهٔ عدد می‌شود:

۴۴۱۰۰	۲
	۵
	۲
	۵
۴۴۱	۳
۱۴۷	۳
۴۹	۷
۷	۷
۱	

$$44100=2^2\times5^2\times3^2\times7^2$$

حالا باید با این تعداد عامل‌ها، آن‌ها را به‌صورت ضرب دو عدد بنویسیم که حاصل‌ضربشان در محدودهٔ ۱۳ تا ۱۷ باشد. می‌توان نوشت:

$$44100=(2\times7)(2\times7)(3\times5)(3\times5)=14\times14\times15\times15$$

پس حداکثر ۴ دانش‌آموز دارای سن‌های ۱۴ و ۱۴ و ۱۵ و ۱۵ وجود دارد.

خب فرصت برای ادامهٔ بحث وجود ندارد. ارشد کلاس لطفاً برگه‌های تمرین را بین دانش‌آموزان توزیع کنید.

تمرین

۱. کدام یک از عددهای زیر اول‌اند؟

الف) ۷۱ ب) ۱۰۳ ج) ۱۰۰۱ د) ۱۸۳

۲. به ازای کدام عدد طبیعی p عدد $2p^2+1$ عددی اول است؟

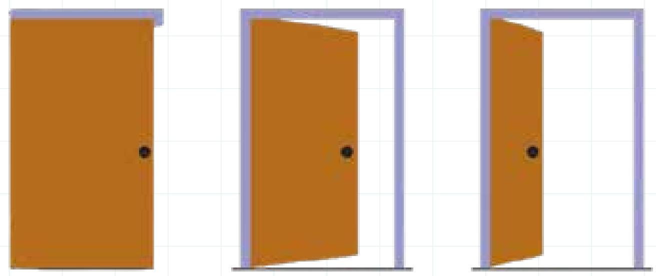
۳. عدد طبیعی $35^2\times28^2\times11^3$ بر چند عدد اول بخش‌پذیر است؟

۴. مجموع سه عدد اول a، b و c برابر ۱۰۸ است. این سه عدد کدام‌اند؟

۵. عدد اول p و عدد صحیح a در تساوی $\frac{p+a}{p-a}=46$ صدق می‌کنند. a و p را به‌دست آورید.

آریان خلیلی

برنامه‌نویسی آنالوگ و دیجیتال



وقتی برنامه‌ای را برای یک «رایانهٔ دیجیتال» می‌نویسیم، برنامهٔ نوشته‌شده توسط رایانه به رشتهٔ عددهای دودویی شامل ۰ و ۱ تبدیل می‌شود تا برای رایانه قابل فهم شود. در حالی که برنامه‌های نوشته‌شده برای «رایانه‌های آنالوگ» می‌توانند تمام مقدارهای بین ۰ و ۱ را در بر بگیرند. هر یک از این برنامه‌ها، روش‌های برنامه‌نویسی مخصوص به خود را دارند.

مقایسهٔ داده‌های دیجیتال با داده‌های آنالوگ

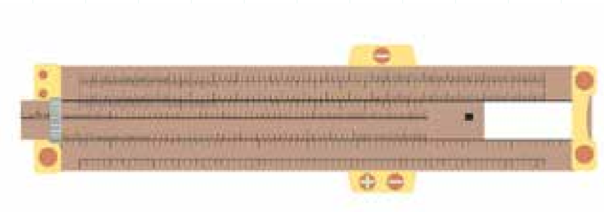
داده‌های دیجیتال به مقدارهای خاصی محدود می‌شوند. برای مثال، به صورت «آری» یا «نه» پاسخ می‌دهند. در حالی که داده‌های آنالوگ پاسخ‌هایی دقیق و با جزئیات کامل می‌دهند.

پاسخ‌های محدود یا دقیق

داده‌های دیجیتال به پرسش‌هایی مانند «آیا در باز است؟» فقط به صورت «آری» یا «نه» پاسخ می‌دهند. در حالی که داده‌های آنالوگ می‌توانند هر یک از حالت‌های بین این دو وضعیت را توصیف کنند. به این ترتیب می‌توان از آن‌ها برای پاسخ به پرسش‌های دقیق‌تر مانند «در چقدر باز است؟» نیز استفاده کرد.

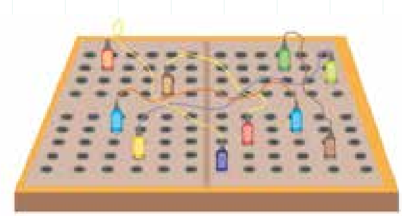
رایانه‌های آنالوگ

رایانهٔ آنالوگ، با استفاده از مقدارهای فیزیکی، مانند وزن، طول یا ولتاژ، داده‌ها را ذخیره و پردازش می‌کند. در حالی که رایانه‌های دیجیتال داده‌ها را به صورت کدهای دودویی (باینری) روی دیسک سخت (هارد دیسک) رایانه ذخیره می‌کنند. رایانه‌های دیجیتال به دو مقدار ۰ و ۱ محدود می‌شوند، در حالی که رایانه‌های آنالوگ می‌توانند شامل پاسخ‌های دقیق‌تری بین این دو مقدار باشد.



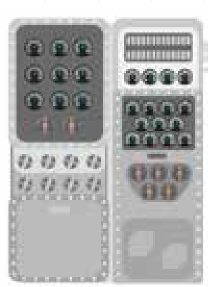
خط‌کش محاسبه

خط‌کش محاسبه یا خط‌کش لغزنده یک رایانهٔ آنالوگ مکانیکی است که در سال ۱۶۰۰ میلادی اختراع شد. از خط‌کش محاسبه در اصل برای ضرب و تقسیم، و همچنین توابعی مانند لگاریتم و مثلثات استفاده می‌شد. معمولاً از این خط‌کش برای جمع و تفریق استفاده نمی‌شد.



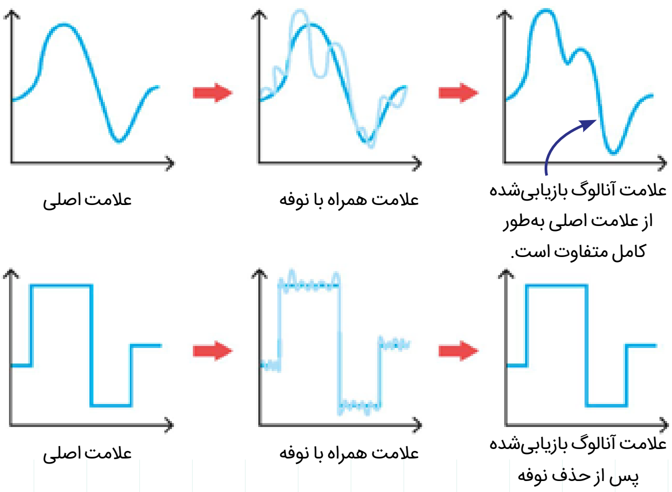
تختهٔ سیم‌بندی

در محاسبه‌های آنالوگ مفهومی به نام نرم‌افزار وجود ندارد. برنامه‌های مورد نظر، با اتصال مدارهای پایه با استفاده از تختهٔ سیم‌بندی ایجاد می‌شوند.



رایانهٔ داده اژدر[1]

اَژدَر یک سلاح انفجاری پرتابی است که از دریا و در درون آب پرتاب می‌شود. رایانهٔ داده اژدر که زیردریایی‌های آمریکایی در جنگ جهانی دوم از آن استفاده می‌کردند، یک رایانهٔ الکترومکانیکی بود که می‌توانست محاسبه‌های پیچیدهٔ ریاضی مربوط به هدایت یک اژدر شلیک‌شده به طرف یک هدف متحرک، مانند کشتی را انجام دهد.



نویز (نوفه)

وقتی امواج یا علامت‌های (سیگنال‌های) الکترومغناطیسی در محیطی منتشر می‌شوند، به دلیل وجود آشفتگی‌های گرمایی، الکتریکی یا نوری که به آن‌ها «نوفه» گفته می‌شود، دقت خود را از دست می‌دهند. به عبارت دیگر، نوفه می‌تواند باعث اختلال در ارسال امواج و علامت‌ها شود. برای مثال، اگر علامت ۱ از طریق یک سیم ارسال شود، می‌توان آن را به صورت هر مقداری بین ۰/۷۵ و ۱/۲۵ دریافت کرد. بنابراین فرستنده هرگز نمی‌تواند مطمئن باشد که علامت (سیگنال) ارسال شده، همان علامت دریافتی است. یعنی به دلیل نویز در مدارهای آنالوگ، همواره مقداری از دقت از بین می‌رود. علامت‌های دیجیتال به صورت پله‌ای رفتار می‌کنند. به این معنی که به علامت اصلی نزدیک‌تر و دریافت آن‌ها آسان‌تر است.

نسبت علامت (سیگنال) به نوفه

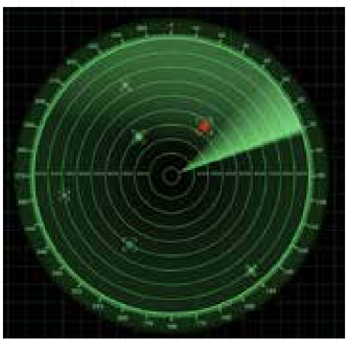
نوفه سبب اضافه‌شدن اطلاعات اضافی تصادفی به علامت آنالوگ می‌شود و شباهت علامت را با علامت اصلی کاهش می‌دهد. در حالی که تفاوت در حالت‌های «روشن» و «خاموش» در علامت‌های دیجیتال به قدری زیاد است که به‌راحتی می‌توان علامت اصلی را تشخیص داد؛ حتی اگر مقداری نوفه هم در مسیر ارسال وجود داشته باشد.

مزیت‌ها و عیب‌ها

هر رایانهٔ آنالوگ برای کار مشخصی طراحی می‌شود. به همین دلیل این نوع رایانه‌ها بسیار دقیق‌اند. با این حال، از آنجا که بسیار تخصصی ساخته می‌شوند، نمی‌توان آن‌ها را به‌راحتی برای انجام کارهای جدید دوباره برنامه‌ریزی کرد. برای تغییر عملکرد یک رایانهٔ آنالوگ، لازم است تغییرات فراوانی در سخت‌افزار آن ایجاد شود. حتی ممکن است لازم باشد اجزای جدیدی به آن اضافه کرد. حال آنکه رایانه‌های دیجیتال انعطاف‌پذیرترند و می‌توان آن‌ها را برای انجام هر نوع کاری برنامه‌ریزی کرد. نوشتن کد جدید در یک رایانهٔ دیجیتال بسیار ساده‌تر از طراحی مجدد سخت‌افزار یک رایانهٔ آنالوگ است.

مزیت‌های رایانه‌های آنالوگ عبارت‌اند از:

- **دقت و صحت را تضمین می‌کنند.**
- **امکان عملیات بلادرنگ و محاسبه‌های هم‌زمان را فراهم می‌آورند.**
- **انرژی کمتری مصرف می‌کنند و برخی از امور را سریع‌تر انجام می‌دهند.**
- **روشی طبیعی برای ذخیره‌سازی داده‌ها هستند.**



فناوری‌های بالا

رایانه‌های ترکیبی

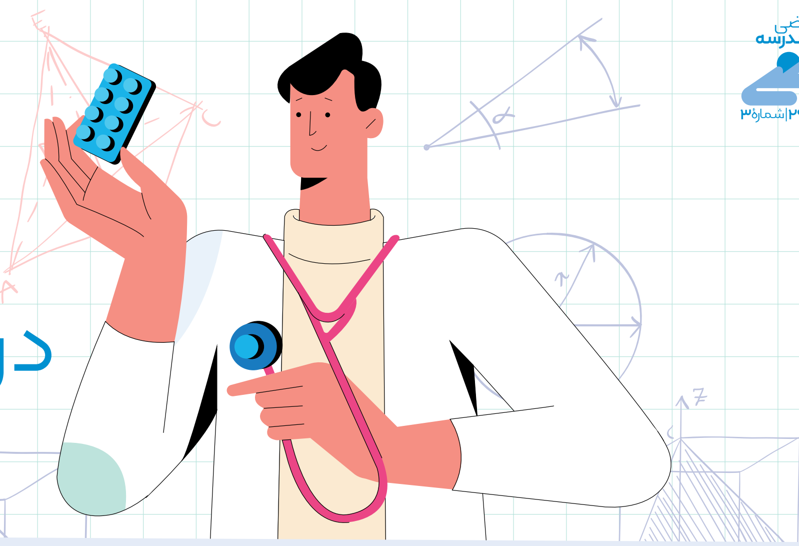
رایانه‌های ترکیبی می‌توانند سرعت برنامه‌نویسی آنالوگ را با دقت برنامه‌نویسی دیجیتال ترکیب کنند تا بهترین‌ها را از هر دو روش به دست آورند. تا کنون رایانه‌های ترکیبی از زمینه‌های تخصصی، مانند سامانه‌های راداری و محاسبه‌های علمی، فراتر نرفته‌اند. با این حال، رایانه‌های آنالوگ پس از سال‌ها که استفاده نشده‌اند، دوباره با استقبال برخی برنامه‌نویسان برای انجام اموری خاص مواجه شده‌اند.

پی‌نوشت

1. The Torpedo Data Computer

افشین خاصّه‌خان

خطاهای فراگیر در محاسبات ریاضی



سـلام و خسته نباشـید خدمت دوسـتداران درمانگاه ریاضی. امیدوارم دانش‌آموزان ما بتوانند با ریاضیات ارتباط برقرار کنند و از مفهوم‌های آن لذت ببرند. در این قسمت نیز به دو اشتباه متداولی می‌پردازیم که دانش‌آموزان مرتکب آن‌ها می‌شوند.

اشتباه متداول ۳: رعایت‌نکردن ترتیب عملیات جبری در محاسبه‌ها

یکی دیگر از اشـتباه‌های متداول دانش‌آموزان در محاسـبه‌های جبری، رعایت‌نکردن ترتیب آن‌هاسـت. تعداد بسـیار زیادی از دانش‌آموزان در ترتیب انجام عملیات جبری دچار اشتباه می‌شوند. برای مثال، در محاسبهٔ:

$$۳+۶(۴+۱)÷۱۵=?$$

اشتباه‌های زیر ممکن است رخ دهند:

$$۳+۶×۴+۱÷۱۵=۹×۴+۱÷۱۵=\frac{۳۷}{۱۵}$$ یا $$۹×۵÷۱۵=۴۵÷۱۵=۳$$

تشخیص

به نظر می‌رسـد دو علت می‌تواند برای این اشتباه متداول وجود داشته باشـد. علت اول «نقص دانش» اسـت. بدین معنی که دانش‌آموزان به‌درستی با مفهوم جمله آشنا نیستند و لذا نمی‌توانند تعـداد جمله‌ها را در یک عبارت تشـخیص دهند. مثلاً در عبارت جبری بالا در کل دو جمله وجود دارد: یکی ۳ و دومی $۶(۴+۱)÷۱۵$. علت دیگر روان‌شناختی است و آن عجله برای پاسخ‌دادن، بدون تأمل، تمرکز و صبر. علت دوم، حتی بـا اینکه دانش جواب‌دادن ممکن است وجود داشته باشد، اتفاق می‌افتد.

تجویز و درمان

ابتدا روی نقـص دانش‌آموزان متمرکز می‌شـویم. بسـیاری از دانش‌آموزان با مفهوم جمله در محاسبه‌های جبری آشنایی کافی ندارند. در واقع، آن‌ها باید جمله‌ها را تشـخیص دهند، سپس از هم تفکیک کنند، در نهایت مقدار هر جمله را به‌دسـت آورند و در پایان جمله‌های محاسبه‌شده را با هم جمع یا تفریق کنند. لازم به ذکر است که هر جمله از جملهٔ قبل و بعد از خود با علامت جمع یا تفریق جدا می‌شود. یعنی هر جمله می‌تواند شامل عمل‌های جبری ضرب، تقسیم و توان باشـد و اگر پرانتزی هم در این بین وجود دارد، به عنوان یک عدد حقیقی فرض می‌شود که حاصل عمل‌های جبری آن به همان ترتیب باید محاسبه شود. مثال بعدی به تفهیم بهتر موضوع کمک می‌کند:

$$۷×۵-۱۰(۲^۳×۳÷۶+۱)÷۵^۲+۹=?$$

در عبارت جبری بالا سه جمله وجود دارد که به صورت زیر تفکیک می‌شوند:

$$\boxed{۷×۵}-\boxed{۱۰(۲^۳×۳÷۶+۱)÷۵^۲}+\boxed{۹}=?$$

حال در محاسـبهٔ هر جمله لازم است مواردی رعایت شوند. جملهٔ اول یک ضرب سـاده است: $۷×۵=۳۵$. در جملهٔ دوم پرانتز وجود دارد و ابتدا عبارت داخل پرانتز باید محاسبه شود. در این محاسبه ترتیـب عملیات جبری معروف «اول توان بعد ضرب یا تقسـیم (اولویت از چپ به راست) بعد جمع یا تفریق» باید اجرا شود:

$$۲^۳×۳÷۶+۱=۸×۳÷۶+۱=۲۴÷۶+۱=۴+۱=۵$$

حال وقت آن است که جملهٔ دوم محاسبه شود:

$$۱۰×۵÷۵^۲=۵۰÷۲۵=۲$$

جملهٔ سوم فقط عدد ۹ است. بنابراین ساده‌شدهٔ عبارت جبری بالا عبارت است از: $۳۵-۲+۹=۴۲$.

برای درمان علت روان‌شـناختی این خطا ابتدا بهتر است از منابع معتبر روان‌شناسـی کودک و نوجوان برای کسب اطلاعات مفید بهره گرفت. علاوه بر آن، تمرین‌های عملی طراحی و در حد امکان اجرا کرد. این تمرین‌ها صبر و تأمل‌کردن را به دانش‌آموز آموزش می‌دهند. سـپس با تکرار مداوم آن‌ها به عادت تبدیل و نهادینه می‌شوند. مثلاً اگر در جمع دانش‌آموزان پرسش مطرح می‌کنیم، حالت مسـابقه به وجود نیاید؛ چرا که در این شـرایط هدف از «درسـت جواب‌دادن» به «سریع جواب‌دادن» تغییر می‌کند و در امر آموزش اختلال ایجاد می‌شود. در پرسش فردی نیز بهتر است برای پاسـخ‌دادن به دانش‌آموز فرصت داده شود تا از فشار روانی زود جـواب‌دادن نجات یابد و در صورت ناتوانی در جواب، تحقیر نشود، بلکه با پرسش‌های ساده‌تر به جواب نهایی سوق داده شود (روش سقراطی).

نسخهٔ تکمیلی

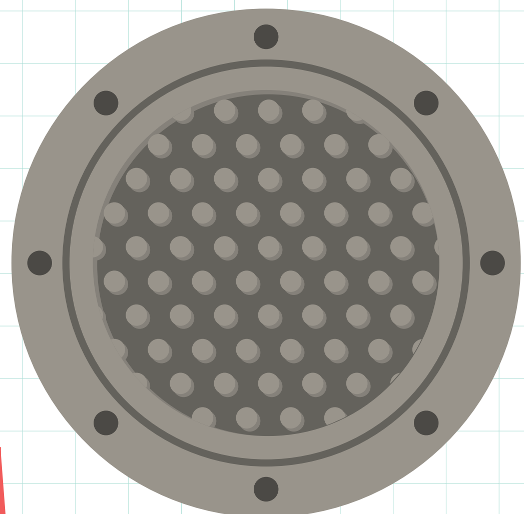
بهتر است برای دانش‌آموزان در ارتباط با محاسبه‌ها، تمرین‌های تکمیلی مرکـب از اعمال جبـری طراحی کنیم یـا از کتاب‌های کمک‌درسی سال‌های قبل، تمرین‌هایی مرتبط انتخاب و به عنوان کار در خانه به آن‌ها تکلیف دهیم. سـپس چند سـؤال در همین زمینه طراحی کنیم و به عنـوان آزمونک به آن‌ها ارائه دهیم و بر اهمیت این سؤال‌ها تأکید کنیم.

کمی درنگ

محمدتقی طاهری‌تنجانی

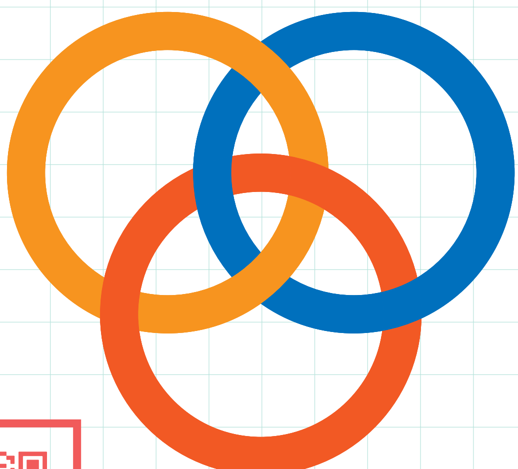
حجم بطری

بطری را در نظر بگیرید که کف آن تخت و به شکل دایره یا مربع و کناره‌اش مستقیم باشد بخشی از آن (حدود نصف آن) را از مایعی پر کرده‌ایم سر بطری باریک است و درپوش پیچی دارد. در صورتی که فقط یک خط‌کش مدرج داشته باشیم چگونه می‌توان حجم بطری را با دقت تعیین کرد؟



دریچه‌های گرد!

در بیشـــتر خیابان‌ها دریچه‌های گردی هســـت. این دریچه‌ها را برای دسترسی کارگران به لوله‌های فاضلاب، آب، گاز و ... کار می‌گذارنـــد. ایـــن دریچه‌های فولادی همیشه مدور (گرد) هستند. چرا این دریچه‌ها همیشه گردند؟ آیا شکل دیگری هست که همین کار را بکند؟



رهاسازی حلقه‌ها

در شکل زیر سه حلقهٔ دایره‌ای را چنان به هم قلاب کرده‌ایم کـــه اگر یکی از آن‌ها را ببریم و از گیر خارج کنیم دو حلقهٔ دیگر نیز رها خواهند شد. آیا اگر به جای سه حلقه، هزار حلقه داشـــته باشـــیم می‌توان آن‌ها را به گونه‌ای به هم قلاب کرد که اگر تنها یکی را ببریم حلقه‌های دیگر همگی از گیر آزاد شـــوند. البته فرض کنید حلقه‌ها انعطاف‌پذیر (لاستیکی) باشند.

بـــرای دیـــدن
پاسخ ها رمزینه
را پویش کنید.

جعفر ربانی

همه جا ریاضی!

۱.

لابد در درس جغرافیا خوانده‌اید که روسیه پهناورترین کشور جهان است، طوری که وقتی خورشید در شرق آن در حال طلوع است، غرب آن در تاریکی فرو رفته است؛ به‌ویژه اگر پاییز یا زمستان باشد که روزها کوتاه‌ترند. با توجه به این نکته بگویید، اگر هواپیمایی بخواهد فاصلهٔ ۹۰۰۰ کیلومتری بین شهر «ولادی وستک» در شرق روسیه را تا شهر «مسکو»، پایتخت آن، طی کند، به‌گونه‌ای که وقتی ساعت شش صبح (هنگام طلوع آفتاب) از ولادی وستک پرواز می‌کند، باز هم ساعت شش صبح (هنگام طلوع آفتاب) در مسکو (در حوالی مرکز روسیه) فرود آید، با چه سرعتی باید پرواز کند؟
جواب این سؤال ۱۰۰۰ کیلومتر بر ساعت است. آیا می‌دانید چرا؟

۲.

آن کدام یک است که دو نمی‌شود؟
کدام دو است که سه نمی‌شود؟
کدام سه است که چهار نمی‌شود؟
کدام چهار است که پنج نمی‌شود؟
کدام پنج است که شش نمی‌شود؟
کدام شش است که هفت نمی‌شود؟
کدام هفت است که هشت نمی‌شود؟
کدام هشت است که نه نمی‌شود؟
کدام نه است که ده نمی‌شود؟
کدام ده است که یازده نمی‌شود؟

۳.

با چند عدد در قرآن آشنا شوید:
خواب اصحاب کهف: ۳۰۰ سال
عمر حضرت نوح: ۹۵۰ سال
تعداد فرشتگانی که در جنگ «بدر» مؤمنین را یاری کردند: ۱۰۰۰
طول زمان روز قیامت: ۵۰۰۰۰ سال
تعداد روزهایی که خدا جهان را آفرید: ۶ روز
تعداد ماه‌های قمری: ۱۲ ماه
تعداد شب‌های اقامت حضرت موسی در کوه طور: ۴۰ شبانه‌روز
تعداد سوره‌های قرآن: ۱۱۴ سوره
تعداد آیات قرآن: ۶۲۳۶
تعداد جزءهای قرآن: ۳۰
تعداد حزب‌های قرآن: ۱۲۰

۴.

کسی می‌گوید من با مخالفان ضدگیاه‌خواری مخالفتی ندارم! در پنج ثانیه بگویید آیا آن شخص مخالف گیاه‌خواری است یا موافق!

۵.

سؤال هوش: یک شب بچه‌ای با چوب‌دستی خود زد و لامپ چراغ را شکست، اما در نور اتاق تغییری حاصل نشد. چرا؟

۶.

در مدت ۱۲ ساعت دو عقربهٔ ساعت چند بار روی هم قرار می‌گیرند؟

۷.

آیا می‌دانید حاصل‌جمع تعدادی عدد پی‌درپی چگونه محاسبه می‌شود؟ مثلاً حاصل‌جمع ۶۰+...+۱۲۰. خب این کاری وقت‌گیر است، مخصوصاً اگر تعداد عددها زیاد باشد. ساده‌ترین راه این است که عدد اول و عدد آخر را با هم جمع و حاصل‌جمع را نصف کنی. سپس این حاصل را در تعداد عددها ضرب کنی.

این راهی است که **گوس**، دانشمند ریاضی‌دان آلمانی؛ هنگامی‌که دانش‌آموز بود نشان داد. داستانش را قبلاً در همین مجله آورده‌ایم. آیا آن را می‌دانید؟

۸. برنولی‌ها

شما شاید هنوز نام **دانیل برنولی** را نشنیده باشید، اما اگر به خواندن ریاضیات ادامه دهید، ممکن است حتی در دورهٔ دوم متوسطه با این نام برخورد کنید. دانیل برنولی خودش ریاضی‌دان بزرگی بود و بعضی از فرزندان و نوه‌هایش هم ریاضی‌دان‌های برجسته‌ای شدند. به‌طوری که نامشان در علوم ریاضی و فیزیک مشهور شده است و به آن‌ها «برنولی‌ها» می‌گویند.

خانوادهٔ برنولی هم‌زمان با **نیوتن**، **لایب‌نیتز**، **اویلر** و **لاگرانژ**، در قرن‌های هفدهم و هجدهم، ریاضیات و فیزیک را تحت سیطرهٔ خود داشتند. اعضای خانوادهٔ برنولی یا برنولی‌ها هم هر کدام به یک یا چند رشته، مثل حساب دیفرانسیل، هندسه، مکانیک، بالستیک (علم پرتابه‌ها)، ترمودینامیک، هیدرودینامیک (نیروی آبی)، اپتیک (نور و عدسی)، الاستیسیته (نیروهای کششی)، مغناطیس، ستاره‌شناسی و بالاخره نظریهٔ احتمالات، علاقه داشتند.

برنولی‌ها سوئیسی و اهل شهر «بازِل» بودند. «بنیاد ملی سوئیس» از سال‌ها پیش دست به انتشار آثار باقی‌مانده از برنولی‌ها زده است. این آثار بالغ بر ۳۹ جلد است که ۲۴ مجلد آن آثار برنولی‌هاست و ۱۵ مجلد نیز بخشی از ۱۸۰۰۰ نامه‌ای است که آن‌ها نوشته‌اند و یا از دیگران دریافت کرده‌اند. البته بخش عمده‌ای از آن‌ها دربارهٔ ریاضیات و فیزیک است.

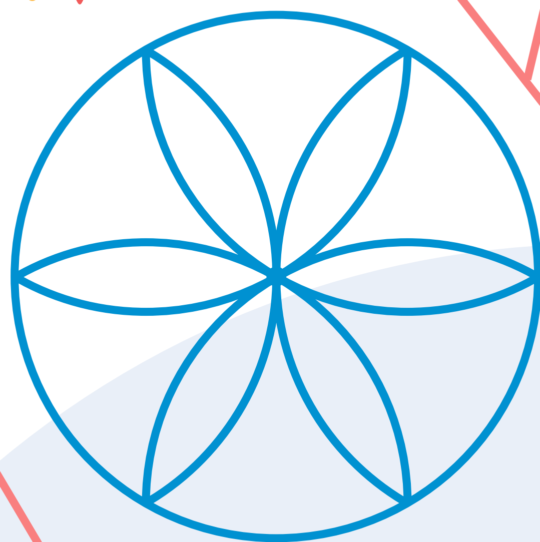
حکایتی دربارهٔ یکی از برنولی‌ها!

یوهان اول که پسر دانیل برنولی بود، یکی از این ریاضی‌دانان است. او با این ادعا که ریاضیات نمی‌تواند زندگی را تأمین کند، تلاش کرد پراستعدادترین فرزندش را که هم‌نام پدربزرگش دانیل برنولی بود، به پذیرش یک شغل تجاری وادارد، و وقتی معلوم شد او اهل تجارت نیست، اجازه داد پزشکی بخواند. اما دانیل در همان حال که پزشکی می‌خواند نزد برادر بزرگ‌ترش نیکولاس درس‌هایی در ریاضیات آموخت. او بعداً به «ونیز» - ایتالیا - رفت تا به‌عنوان پزشک مشغول کار شود. با این حال آن‌قدر دل‌بستهٔ ریاضیات بود و در این زمینه هم فعالیت کرد که به شهرت رسید؛ طوری که پتر کبیر، تزار روسیه، به او پیشنهاد کرد به «سن‌پترزبورگ» برود و کرسی «فرهنگستان علوم روسیه» را به عهده بگیرد.

چگونه رسم می‌شود؟

عباس قلعه‌پوراقدم

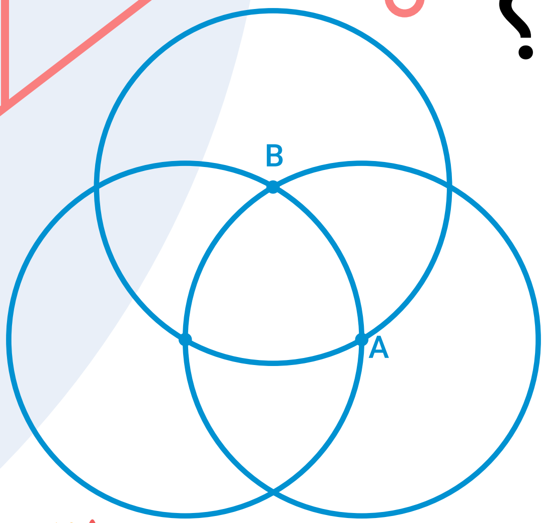
شکل ۱ چگونه رسم می‌شود؟



شکل ۱

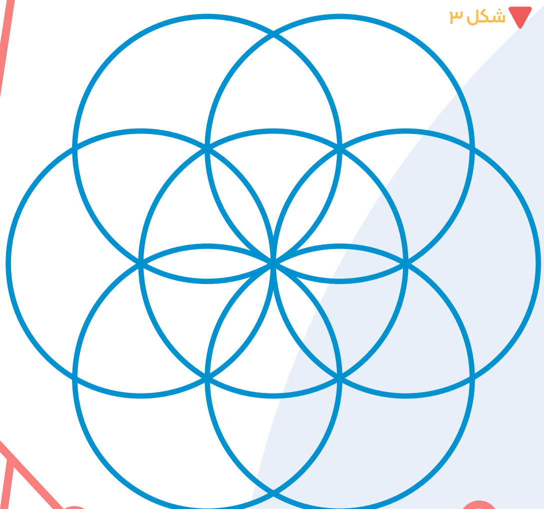
برای رسم این شکل به پرگار نیاز دارید. اگر در شمارهٔ پیشین مجله، این بخش را مطالعه کرده باشید، باید یادتان باشد که در آنجا طریقهٔ تقسیم دایره به شش کمان مساوی شرح داده شده بود. با دقت در شکل ۱ متوجه خواهید شد که در این مورد نیز کار مشابهی انجام خواهد شد.

ابتدا دایره‌ای به شعاع دلخواه رسم کنید. حال بدون اینکه دهانهٔ پرگار را تغییر دهید، نوک سوزن پرگار را روی نقطهٔ دلخواه A روی دایره قرار دهید و با همان شعاع دایره‌ای رسم کنید (شکل ۲). این دایره، از مرکز دایرهٔ قبلی خواهد گذشت و در نقطهٔ دیگری نیز محیط دایره را قطع خواهد کرد (نقطهٔ B). حالا به مرکز B و همان شعاع، دایرهٔ دیگری رسم کنید. این دایره نیز از مرکز دایرهٔ نخست خواهد گذشت و در نقطهٔ دیگری آن را قطع خواهد کرد.



شکل ۲

تا اینجای کار، دو دایرهٔ هم اندازه با دایرهٔ نخست رسم شده‌اند. این کار را چهار بار دیگر تکرار کنید تا به شکل ۳ برسید.



شکل ۳

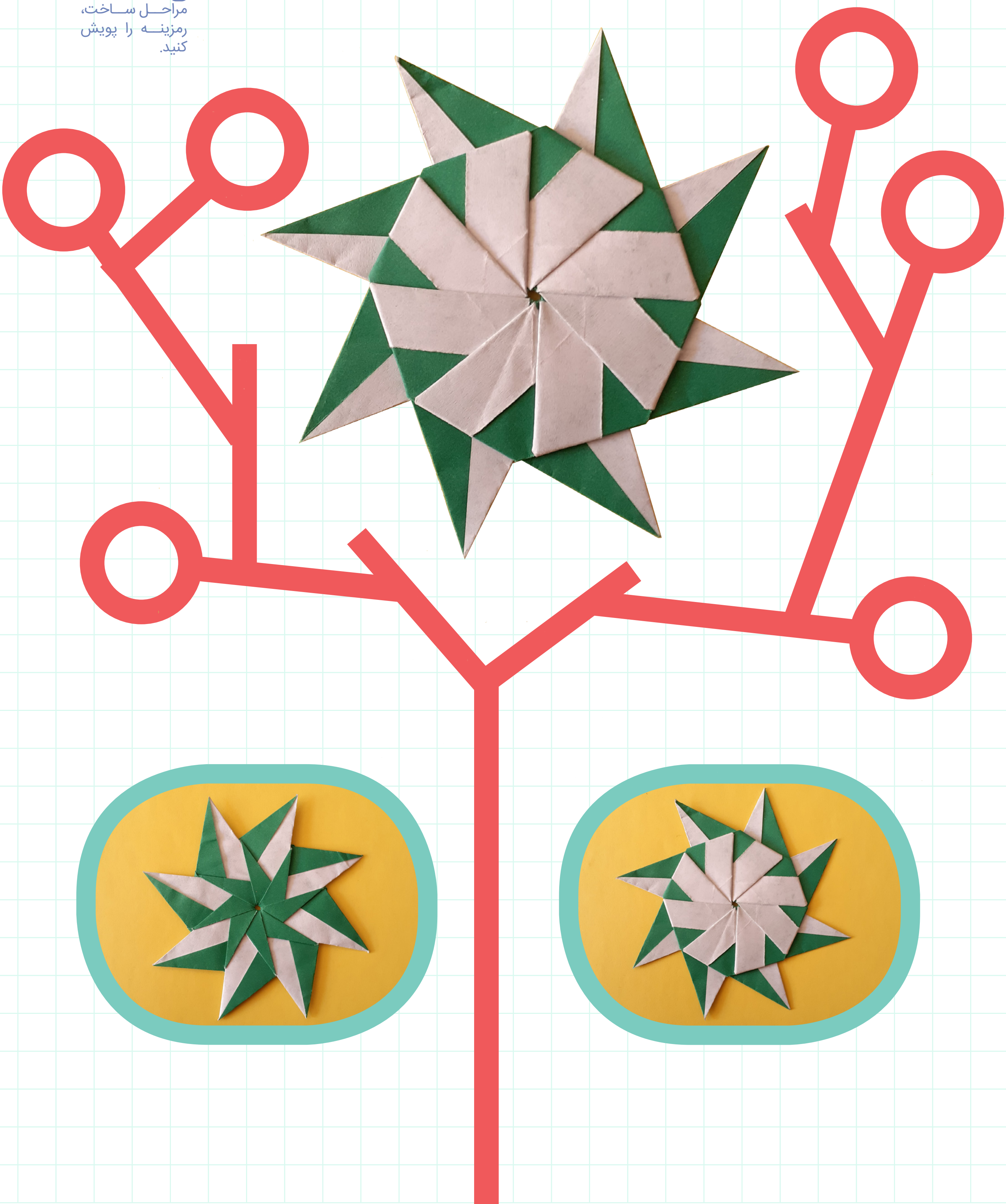
حالا اگر بخش‌های اضافی را به‌دقت پاک کنید، به شکل مورد نظر خواهید رسید. امیدوارم که از این رسم هم لذت برده باشید و به عنوان یک سرگرمی از آن بهره ببرید. یادتان نرود حتماً آن را به دیگران هم یاد دهید.

کاغذتایی

اوریگامی

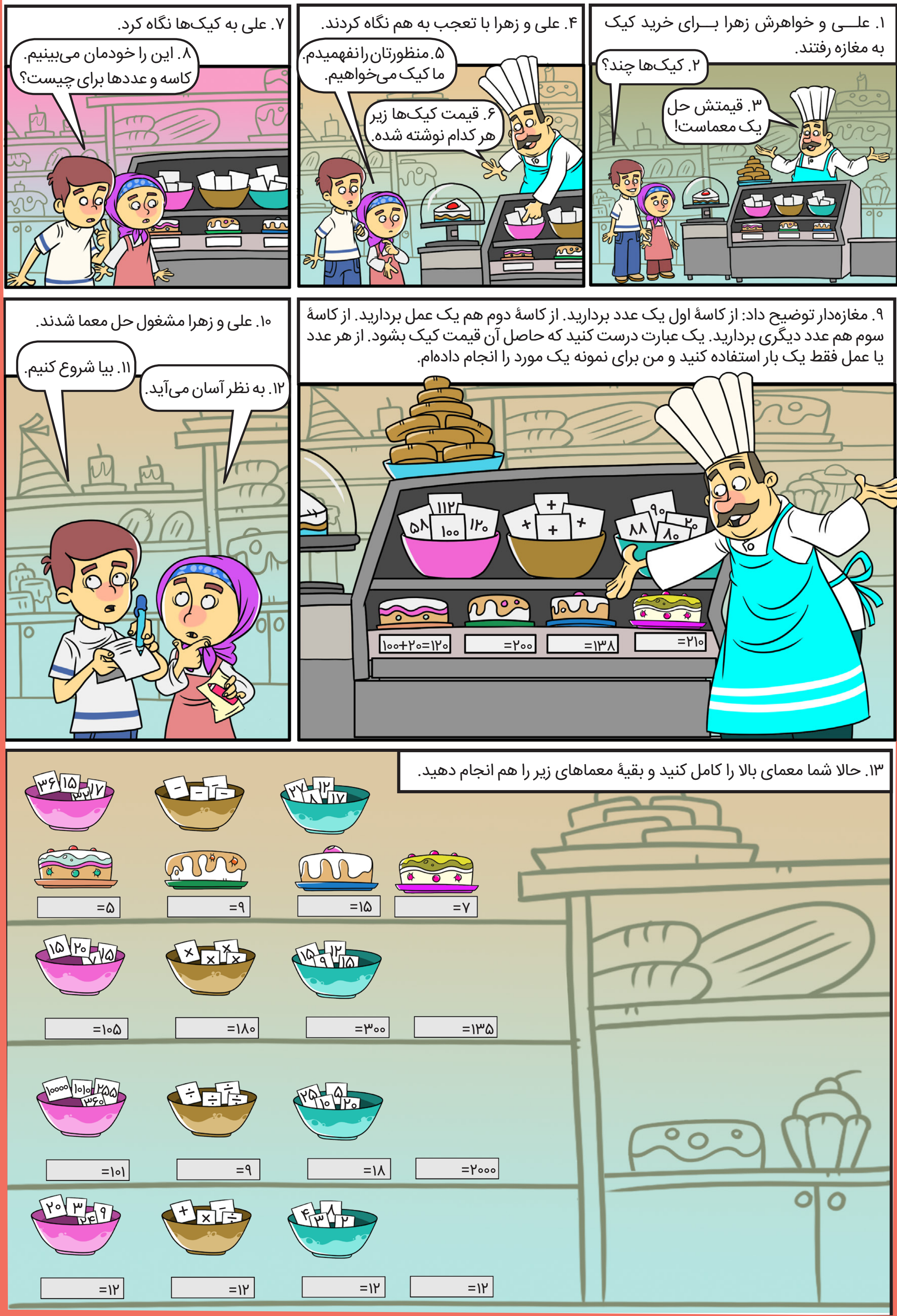
علیرضا محمدصالحی

برای مشاهدهٔ مراحل ساخت، رمزینه را پویش کنید.



کیک با طعم ریاضی

خسرو داودی تصویرگر: شهرام شیرزادی



بـــرای دیـــدن پاسخ رمزینه را پویش کنید.