وزارت آموزش و پرورش/سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی/
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی
ماهنامهٔ آموزشی و تربیتی برای **دانش‌آموزان دورهٔ اول متوسطه**
www.roshdmag.ir/دورهٔ بیست و نهم/شمارهٔ **۱۴۴**
۴۰ صفحه/اسفند **۱۴۰۲**/پیامک: **۳۰۰۰۸۹۹۵۱۲**/ISSN: **1735-4943**

شرح روی جلد

رشد برهان ۱ ریاضی

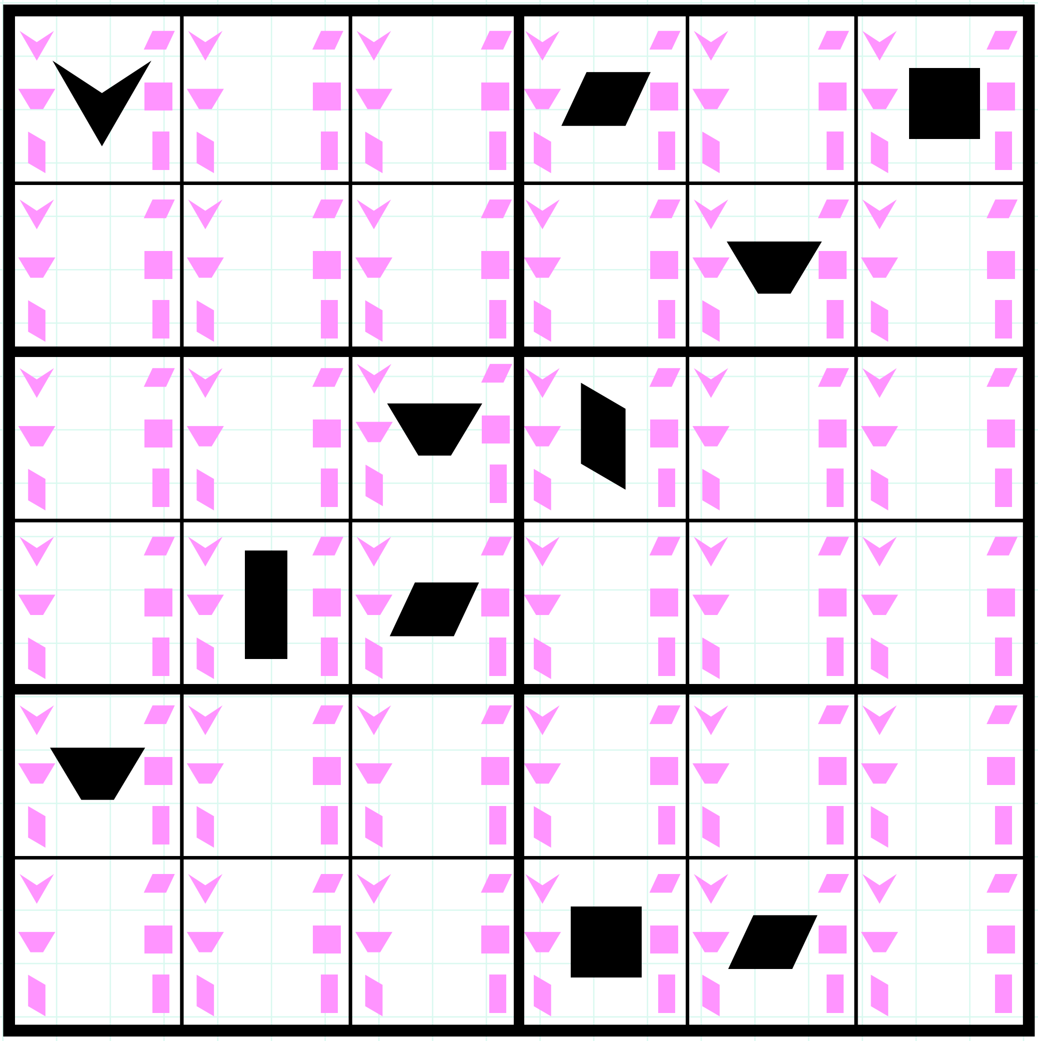
۶

مجله چندرسانه‌ای • شنیداری • دیداری • خواندنی

سودوکوی هندسی

برای مشاهدهٔ پاسخ،
رمزینه را پویش کنید.

به‌طور حتم تابه‌حال با معمای سودوکو آشنا شده‌اید. چندین مورد آن در کتاب‌های ریاضی اول و دوم ابتدایی وجود دارد. در روزنامه‌ها و مجله‌ها هم با آن برخورد داشته‌اید. نرم‌افزار کاربردی آن نیز روی تلفن همراه و رایانه‌ها هست. ســودوکو فقط با عدد کامل نمی‌شــود. می‌توان از هر زیرمجموعه‌ای مثل رنگ‌ها، شکل‌ها و ... برای کامل‌کردن آن استفاده کرد. برای مثال، سودوکوی زیر با شکل‌های سبک‌پر (کایت)، ذوزنقه، متوازی‌الاضلاع، لوزی، مربع و مستطیل درســت شده اســت. آن را کامل کنید. برای ساده‌ترشدن کار کافی است در هر خانه شکل مورد نظر را که به صورت کم‌رنگ و کوچک در آن خانه رسم شده است علامت بزنید. اگر دوست دارید می‌توانید شکل را هم در خانه رسم کنید.



بســـــم الله الرحمن الرحیم
اللّهم صل علی محمد و آل محمد و عجل فرجهم

رشد برهان ۱ ریاضی

وزارت آمـوزش و پـرورش سازمان پـژوهش و برنامـه‌ریزی آموزشی
دفتـر انـتـشـارات و فـنـاوری آمـوزشـی www.roshdmag.ir
دورهٔ بیست و نهم/ شمارهٔ پی در پی **۱۴۴**/ اسفند **۱۴۰۲**
ماهنامهٔ آموزشی و تربیتی برای دانش‌آموزان دورهٔ اول متوسطه
ISSN:1735-4943 / پیامک: **۳۰۰۰۸۹۹۵۱۲** / **۴۰** صفحه

مدیرمسئول: محمدصالح مذنبی/ **سردبیر:** حسین نامی ساعی/ **مدیر داخلی:** پری حاجی خانی
هیئت تحریریه: محرم ایردموسی، مریم جعفرآبادی، مجید حکمت، روح‌الله خلیلی بروجنی، خسرو داودی، محمدرضا سیدصالحی، مرتضی مرتضوی، محمود نصیری
ویراستار: بهروز راستانی/ **مدیر هنری:** کوروش پارسانژاد/ **طراح گرافیک:** حسین یوزباشی
تصویرگر: حسین یوزباشی

در این ماه؛ اسفند ۱۴۰۲: ◀**دوم:** ولادت حضرت علی‌اکبر(ع) ◀**پنجم:** روز بزرگداشت خواجه‌نصیرالدین طوسی و روز مهندس ◀**ششم:** ولادت حضرت ولی‌عصر(عج) ◀**چهاردهم:** روز احسان و نیکوکاری ◀**پانزدهم:** روز درختکاری ◀**بیست‌ودوم:** روز بزرگداشت شهدا ◀**بیست‌ونهم:** روز ملی شدن صنعت نفت

◀شرح مناسبت‌های ماه را با پویش رمزینه ببینید.

در سال ۱۳۳۸ در خرمشهر به دنیا آمد. در سال ۱۳۵۶ از «دبیرستان البرز» در تهران دیپلم گرفت و همان سال وارد رشتهٔ ریاضی «دانشگاه شهید بهشتی» شد. او در دبیرستان جزو آخرین گروه از دانش‌آموزانی بود که...
صفحه‌های ۲۰ و ۲۱ را بخوانید.

قیمت: ۱۱۰۰۰۰ ریال

خانوادهٔ مجلات رشد همهٔ تلاش خود را کرده است تا این مجله در **دسترس عموم** دانش‌آموزان قرار گیرد و همهٔ کودکان و نوجوانان میهن عزیز اسلامی‌مان **امکان تهیهٔ** آن را داشته باشند.
برای مشاهدهٔ شرایط ارسال مطلب و همکاری با ماهنامهٔ رشد ریاضی برهان متوسطهٔ اول، رمزینه را پویش کنید.

nazar.roshdmag.ir

نشانی کانال مجلهٔ رشد ریاضی برهان متوسطهٔ اول در پیام‌رسان شاد:
@roshd_borhan1

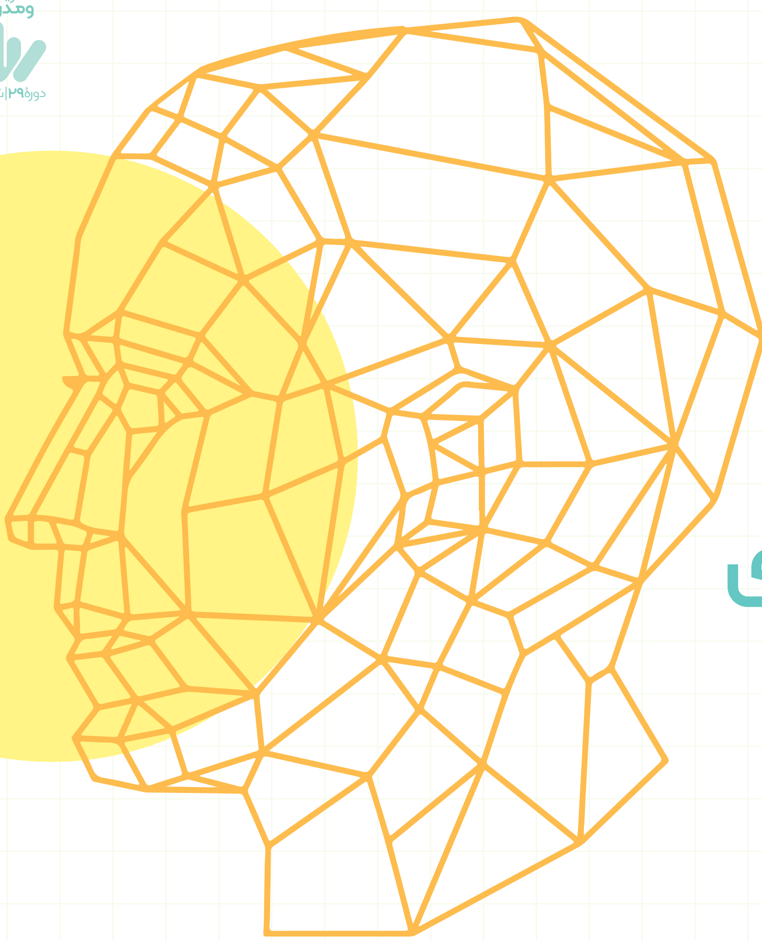
حسین نامی‌ساعی

بیست دقیقه برای ۲۰

سلام دوستان خوبم. کم‌کم به عید نوروز، بهار زیبا و پرامید طبیعت نزدیک می‌شویم. از طرف دیگر، امسال ۲۲ اسفند مقارن است با شروع ماه مبارک رمضان. بنابراین امسال هم مانند سال گذشته دو بهار داریم: بهار طبیعت و بهار دل‌ها و نیایش و رحمت و بندگی خداوند. این هم‌زمانی اتفاقی پربرکت است که ما می‌توانیم هم از شادی و نشاط نوروز لذت ببریم و هم از فضیلت و برکت ماه مبارک رمضان بهره بگیریم. پس از این فرصت نادر حداکثر استفاده را ببریم.

من و برهان هم فرارسیدن سال نو و ماه مبارک رمضان را به شما و خانواده‌های محترمتان تبریک می گوییم و سالی پر از موفقیت، سلامتی، شادی، آرامش و عبادت را برایتان آرزو می‌کنیم.

همراهان همیشگی. حتماً روی جلدهای مجلهٔ رشد ریاضی برهان متوسطهٔ اول در این دورهٔ تحصیلی را خوب دیده‌اید. روی جلدهای مجلهٔ برهان در این دوره ترکیبی از ورزش و ریاضی هستند و به استفادهٔ ورزش، رشته‌های ورزشی، و ورزشکاران، مربیان و برنامه‌ریزان ورزشی از ریاضیات مربوط‌اند. ما در هر شماره، همراه تصویر روی جلد، رمزینه‌ای آورده‌ایم که شما با پویش‌کردن و خواندن متن رمزینه تا حدودی با نحوهٔ استفادهٔ آن رشتهٔ ورزشی از ریاضیات آشنا می‌شوید. در همهٔ روی جلدها موضوع و سؤال این است: «ریاضیات در ورزش چه نقشی می‌تواند داشته باشد؟» و به‌صورت کلی پاسخ این است که: «ورزشکاران یا مربیان و برنامه‌ریزان ورزشی از ریاضیات کمک می‌گیرند تا بهترین نتیجه و عملکرد را در فعالیت‌های ورزشی خود داشته باشند. ریاضیات به آن‌ها کمک می‌کند با تجزیه‌وتحلیل‌هایی که بر پایهٔ منطق و محاسبه‌های ریاضی انجام می‌دهند، مهارت‌های فردی، تیمی و گروهی خود را ارتقا دهند و ...» این جلدها و توضیح‌های رمزینه همه مربوط به استفاده از ریاضیات در ورزش هستند. و اما سؤال امروز ما این است: «ورزش چه کمکی می‌تواند به ریاضیات و کسانی بکند که در زمینهٔ ریاضیات مطالعه و تحصیل می‌کنند؟» قبل از پاسخ به این سؤال به یک ضرب‌المثل اشاره می‌کنیم که بدون شک همه شنیده‌اید: «عقل سالم در بدن سالم است.» این ضرب‌المثل یعنی هرگاه جسم سالم و نیرومند باشد، فکر و عقل هم خوب کار می‌کند. ورزش همان‌طور که بدن را سالم می‌کند و پرورش می‌دهد، عقل را هم سالم می‌کند. یادم هست در یکی از مدرسه‌هایی که تدریس می‌کردم، معلم ورزشی بود که در علوم ورزشی، چه نظری و چه عملی، صاحب‌نظر بود. ایشان دکترای تربیت‌بدنی داشت و هم در مدرسه و هم در دانشگاه تدریس و فعالیت می‌کرد. بچه‌ها و معلم‌ها هر روز اول صبح، همراه با ایشان، بعد از مراسم مقدماتی صبحگاه، چند دقیقه‌ای ورزش می‌کردند و حرکات ورزشی منظم و اصولی را انجام می‌دادند. به این ترتیب خودشان را برای شروع کلاس و درس آماده می‌کردند. بعضی از روزها ایشان بعد از ورزش صبحگاهی، چند دقیقه‌ای را هم دربارهٔ فایده‌های ورزش صحبت می‌کرد. اتفاقاً یک روز در صحبت‌هایش به نکتهٔ جالبی دربارهٔ تأثیر ورزش در ارتقای کیفیت نمره و عملکرد ریاضیات دانش‌آموزان اشاره کرد. آن نکته مربوط به مجموعه پژوهش‌هایی بود که ایشان به همراه یک تیم پژوهشگر دربارهٔ نقش ورزش در ارتقای نمره‌های ریاضی در چند مدرسه انجام داده بودند. نتایج پژوهش را که گفت، بسیار جالب بود. ایشان شرح داد، در اولین کار پژوهشی که در مدرسه‌ای انجام دادند، به این نتیجه رسیدند: «دانش‌آموزانی که در یک برنامهٔ ورزشی، شامل ۳۰ دقیقه ورزش روزانه برای ۱۲ هفته، شرکت کرده بودند، نمره‌های ریاضی‌شان به‌طور متوسط هشت درصد افزایش پیدا کرده بود.» در پژوهشی در مدرسهٔ دیگری نتیجه گرفتند: «دانش‌آموزانی که در یک برنامهٔ ورزشی، شامل ۲۰ دقیقه ورزش روزانه برای ۱۶ هفته، شرکت کرده بودند، نمره‌های ریاضی‌شان به‌طور متوسط ۱۰ درصد افزایش پیدا کرده بود.» و در پژوهش آخری که در مدرسهٔ دیگر انجام داده بودند، دریافتند: «دانش‌آموزانی که در یک برنامهٔ ورزشی، شامل ۱۵ دقیقه ورزش روزانه برای ۲۴ هفته، شرکت کرده بودند، نمره‌های ریاضی‌شان به‌طور متوسط ۱۲ درصد افزایش پیدا کرده بود. این پژوهش‌ها و نتایج آن‌ها بسیاربسیار جالب و قابل تأمل بودند. به‌طوری که الان چندین سال از آن صحبت کوتاه معلم ورزش گذشته است و هنوز در خاطر من هست و هرگز نتایج این تحقیقات را فراموش نمی‌کنم. توصیهٔ من به شما این است که شما هم حتماً روزانه حداقل ۲۰ تا ۳۰ دقیقه ورزش کنید تا حداقل ۲۰ درصد به نمرهٔ ریاضیاتتان افزوده شود!



محمود نصیری

مفهوم‌های هندسی و حل مسئله

خط‌ها و پاره‌خط‌های مهم در مثلث و ویژگی‌های آن‌ها

در بخش‌های قبلی هم‌نهشتی مثلث‌ها را، چه در حالت کلی و چه در حالت‌های خاص مثلث‌های متساوی‌الساقین و مثلث‌های قائم‌الزاویه، بررسی کردیم. سپس با حل مسئله‌ها و همچنین کاربردهایی از آن‌ها بحث را ادامه دادیم. اکنون از این قسمت به بعد می‌خواهیم خط یا پاره‌خط‌هایی را که در مثلث رسم می‌شوند، همراه با ویژگی‌های آن‌ها و حل مسئله‌هایی در مورد آن‌ها بررسی کنیم و مطالب را ادامه دهیم.

از جمله مسئله‌های مهم هندسه در سال‌های اولیه که دانش‌آموزان را با مفهوم‌های هندسی آشنا می‌سازند، مسئله‌های مربوط به پاره‌خط‌های مهم در مثلث، یعنی میانه، ارتفاع و نیمساز، هستند. در مورد عمودمنصف پاره‌خط در بخش قبلی یک ویژگی مهم را بیان و آن را ثابت کردیم. اکنون در این قسمت عمودمنصف، ارتفاع، میانه و نیمساز را در مثلث بررسی می‌کنیم و تا آنجایی که بتوانیم ویژگی‌های آن‌ها را ثابت می‌کنیم.

عمودمنصف در مثلث

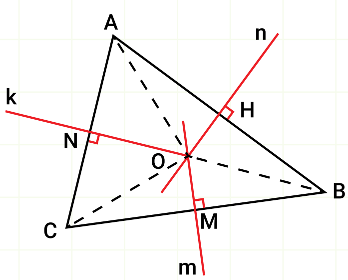
عمودمنصف را در مورد پاره‌خط تعریف کردیم. چون هر ضلع مثلث یک پاره‌خط است، پس می‌توانیم آن را برای مثلث نیز تعریف کنیم. در نتیجه هر مثلث دارای سه خط عمودمنصف است. در بخش قبلی این ویژگی‌های مهم عمودمنصف پاره‌خط را بیان و ثابت کردیم:

- **هر نقطه روی عمودمنصف هر پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.**
- **هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.**

اکنون با توجه به این ویژگی‌ها مسئله‌ای را مطرح می‌کنیم و با همراهی شما می‌کوشیم آن را ثابت کنیم.

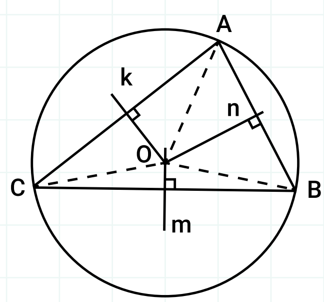
مسئلهٔ. ثابت کنید سه عمودمنصف ضلع‌های هر مثلث در یک نقطه متقاطع‌اند. یا بهتر بگوییم در یک نقطه یکدیگر را می‌برند.

شکل ۱



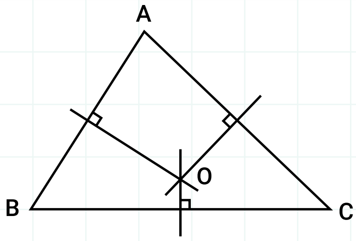
برای حل چنین مسئله‌هایی، ابتدا مانند شکل ۱ عمودمنصف دو ضلع را رسم می‌کنیم و نقطه‌ای را که یکدیگر را می‌برند، O می‌نامیم. البته اینکه دو عمودمنصف دو ضلع مثلاً عمودمنصف‌های ضلع‌های BC و AB که آن‌ها را m و n نام‌گذاری کرده‌ایم، در یک نقطه یکدیگر را می‌برند خودش یک مسئلهٔ مهم هندسهٔ اقلیدسی است و معمولاً در این سطح آن را ثابت نمی‌کنیم. فقط توضیح می‌دهیم که چون دو ضلع مثلث متقاطع‌اند، پس این دو خط عمود بر این دو ضلع نیز متقاطع‌اند. زیرا این به همان اصل توازی که در مقاله‌های قبلی بیان کردیم وابسته است. خلاصه اینکه در اینجا به سادگی بیان می‌کنیم که این دو عمودمنصف در یک نقطهٔ O یکدیگر را بریده‌اند. اکنون باید ثابت کنیم عمودمنصف ضلع سوم، یعنی در اینجا ضلع AC نیز از O می‌گذرد. بهتر بگوییم، باید نشان دهیم O نیز روی عمودمنصف ضلع AC است.
اگر ویژگی عمودمنصف را دوباره مرور کنید فکر می‌کنم بتوانید آن را ثابت کنید. در چه صورت یک نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط واقع می‌شود؟
بله درست حدس زده‌اید، وقتی از دو انتها یا دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله باشد. یعنی کافی است نشان دهید: OA=OC. چگونه آن را ثابت می‌کنید؟
دوباره ویژگی عمودمنصف را به‌کار ببرید. O روی عمودمنصف ضلع AB است، پس: OA=OB. همچنین O روی عمودمنصف ضلع BC است، پس: OB=OC. به نظر می‌رسد به آنچه که نیاز داشتیم رسیدیم. پس از این دو رابطه نتیجه می‌گیریم که: OA=OC. این یعنی O روی عمودمنصف ضلع AC است. پس خط k عمودمنصف ضلع AC نیز از O می‌گذرد. این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم. یعنی سه خط عمودمنصف سه ضلع در یک نقطه یکدیگر را می‌برند. فکر می‌کنید چه نتیجه یا نتیجه‌هایی از این مسئله می‌توان گرفت؟ نقطهٔ O چه ویژگی‌ای دارد؟
آیا می‌توانید ادعا کنید که نقطهٔ O، نقطه‌ای در صفحهٔ مثلث است که از سه رأس مثلث به یک فاصله است؟ بله درست است:
«نقطهٔ همرسی یا همان نقطهٔ تقاطع سه عمودمنصف مثلث تنها نقطه‌ای در صفحهٔ مثلث است که از سه رأس مثلث به یک فاصله است.»

شما از سال‌های قبل با دایره آشنایی دارید. دایره مجموعه نقطه‌هایی از صفحه است که از یک نقطهٔ ثابت آن صفحه به یک فاصلهٔ معین هستند. بنابراین هر تعداد نقطهٔ صفحه که همگی از یک نقطهٔ معین آن صفحه به یک فاصلهٔ معین باشند، یعنی مثلاً همه به فاصلهٔ ۵ سانتی‌متر از یک نقطهٔ O آن صفحه باشند، این نقطه‌ها همه روی یک دایره به مرکز O و شعاع ۵ سانتی‌متر واقع‌اند. بنابراین نتیجهٔ مهم دیگری که گرفته می‌شود را می‌توانیم چنین بیان کنیم:
«در هر مثلث، نقطهٔ همرسی سه عمودمنصف ضلع‌ها مرکز دایره‌ای است که از سه رأس آن مثلث می‌گذرد.»
این دایره را «دایرهٔ محیطی مثلث» می‌نامند. در شکل ۲ آن را مشاهده می‌کنید.



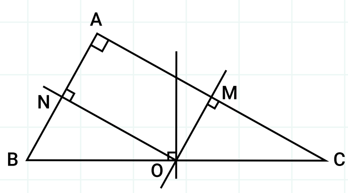
شکل ۲

اکنون که با عمودمنصف سه ضلع مثلث و ویژگی مهم آن آشنا شدیم، به‌طور شهودی می‌توانیم موقعیت نقطهٔ تلاقی سه عمودمنصف مثلث را با رسم شکل‌های متفاوت بررسی کنیم.
مثلث ABC (شکل ۳) را که تمام زاویه‌های آن حاده است در نظر می‌گیریم. سه عمودمنصف ضلع‌های آن را رسم کنید. مشاهده می‌کنید که هر سه در نقطه‌ای درون مثلث همرس یا متقاطع‌اند.



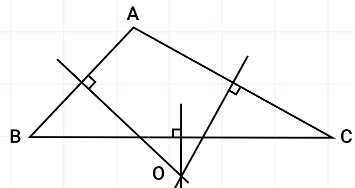
شکل ۳

اگر با دقت بیشتری این عمودمنصف‌ها را رسم کنیم مشاهده می‌کنیم که در نقطه‌ای که متقاطع‌اند این نقطه درون مثلث است. هر چند که برای اثبات آن به مقدمات بیشتری نیاز است و فقط می‌توانید آن را به طور شهودی مشاهده کنید.
اکنون مثلث ABC را که یک زاویهٔ آن قائمه است در نظر می‌گیریم (شکل ۴) و سه عمودمنصف ضلع‌های آن را با دقت بیشتری رسم می‌کنیم. مشاهده می‌کنید که نقطهٔ تلاقی هر سه دقیقاً روی وسط وتر واقع است. بعداً این مسئلهٔ مهم را در مثلث قائم‌الزاویه ثابت خواهید کرد که: «اندازهٔ میانهٔ وارد بر وتر نصف اندازهٔ وتر است.» به کمک این مسئله می‌توانید ثابت کنید سه عمودمنصف در مثلث قائم‌الزاویه روی وسط وتر متقاطع‌اند. چگونه آن را ثابت می‌کنید؟



شکل ۴

بالاخره مثلثی رسم کنید که یک زاویهٔ منفرجه داشته باشد (شکل ۵) و سه عمودمنصف آن را رسم کنید. مشاهده می‌کنید که در نقطه‌ای بیرون مثلث متقاطع‌اند. در حال حاضر نمی‌توانیم آن را ثابت کنیم.

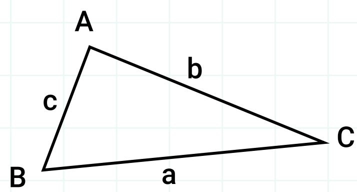


شکل ۵

مسئله: موقعیت نقطه‌های یک صفحه نسبت به فاصله‌های آن‌ها از دو سر یک پاره‌خط.

قبل از بررسی این مسئله یک نامساوی مهم در مثلث را که به «نامساوی مثلث» معروف است معرفی می‌کنیم؛ البته بحث نامساوی‌ها در مورد زاویه‌ها و ضلع‌های مثلث شامل قضیه‌ها و مسئله‌های جالبی است که در یک بخش مجزا به آن‌ها می‌پردازیم. اما چون نامساوی مثلثی از نظر شهودی بسیار واضح به نظر می‌رسد می‌توانیم از آن به‌خوبی استفاده کنیم.

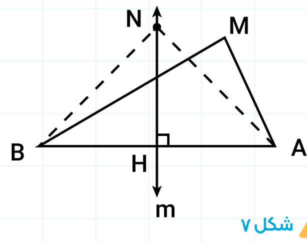
در هر مثلث مجموع اندازه‌های هر دو ضلع از اندازهٔ ضلع سوم بزرگتر است.



شکل ۶

در شکل ۶ داریم: $AB+AC>BC$ یا $b+c>a$ و آن را برای هر سه ضلع می‌توان نوشت؛ مثلاً: $a+b>c$.

شاید چنین به نظر برسد که این نامساوی به‌قدری واضح است که نیازی به اثبات ندارد. اما ریاضی این‌گونه نیست. وقتی گزاره‌هایی را به‌عنوان اصل می‌پذیریم، هر چیز دیگری را که بیان می‌کنیم باید ثابت کنیم. پس بحث در مورد نامساوی‌ها در مثلث را به بعد موکول می‌کنیم و اکنون به مسئلهٔ اصلی می‌پردازیم که در بالا بیان کردیم. می‌خواهیم نشان دهیم عمودمنصف یک پاره‌خط در یک صفحه چگونه نقطه‌های صفحه را بر حسب فاصله‌های آن‌ها از دو سر پاره‌خط به سه قسمت تقسیم می‌کند. ثابت کردیم که هر نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به فاصله‌های برابر است. در شکل ۷، N روی عمودمنصف پاره‌خط AB است و: $NB=NA$.

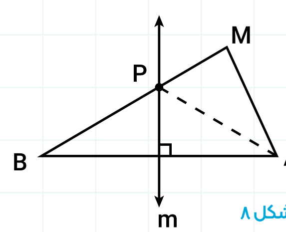


شکل ۷

اکنون فرض کنیم M هر نقطه‌ای در صفحه شامل پاره‌خط AB و خط m عمودمنصف آن باشد. همچنین M مطابق شکل ۷ در طرفی از خط m باشد که شامل نقطهٔ A می‌شود و به‌طور شهودی می‌توان گفت طرف راست خط m قرار دارد. به بیان دقیق‌تر در نیم‌صفحه‌ای است که شامل A می‌شود.

اکنون شاید به‌طوری شهودی بگویید: $MA<MB$؛ یعنی فاصلهٔ M از A که با M در یک نیم‌صفحهٔ خط m هستند، کمتر از فاصلهٔ M تا نقطهٔ B است که در نیم‌صفحهٔ دیگر خط m است. اما چگونه می‌توانید آن را ثابت کنید؟ چگونه از نامساوی مثلثی که در بالا بیان کردیم استفاده می‌کنید؟

این همان مسئله‌های هندسه است که به رسم پاره‌خط اضافی نیاز دارد. آیا می‌توانید آن را رسم کنید؟ احتمالاً حدس زده‌اید. از A به نقطهٔ P، تقاطع خط MB و خط m، متصل می‌کنیم (شکل ۸). چگونه رابطه‌های مورد استفاده را می‌نویسید؟



شکل ۸

بنابر نامساوی مثلثی در مثلث AMP داریم: $MP+PA>MA$.

می‌دانید که به سه روش می‌توانیم نامساوی مثلثی را در مثلث AMP بنویسیم، چرا فقط نامساوی $MP+PA>MA$ را انتخاب کرده‌ایم؟ امیدواریم که دلیل آن را خودتان بیان کرده باشید. بله دو دلیل خوب برای نوشتن این نامساوی وجود دارد:

- اول اینکه ما نیاز داریم MA از مقدار دیگر کوچکتر باشد. پس حدس می‌زنیم یک طرف نامساوی کوچکتری باید MA باشد.
- دلیل دیگر این است که با توجه به ویژگی عمودمنصف: $PB=PA$ و در نتیجه در این نامساوی، اگر به جای PA مساوی آن PB را قرار دهیم، به نامساوی $MP+PA>MA$ می‌رسیم که به نظر می‌رسد به حل مسئله دست یافته‌ایم؛ زیرا: $MP+PB=MB$ و در نتیجه: $MB>MA$؛ یعنی چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

واضح است که اگر M را در طرفی از خط m در نظر بگیریم که شامل B باشد، آنگاه مشابه آن ثابت می‌شود: $MB<MA$.

واضح است که اگر M روی خط AB باشد، با استفاده از جمع و تفریق اندازهٔ پاره‌خط‌ها نیز واضح است.

بنابراین مسئلهٔ زیر ثابت شده است

مسئله: پاره‌خط AB و عمودمنصف آن خط m را در یک صفحهٔ P در نظر می‌گیریم. خط m صفحهٔ P را به دو ناحیه تقسیم می‌کند:

۱. نقطه‌های روی خط m که همگی از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله‌اند.

۲. نقطه‌های در دو نیم‌صفحه با مرز m که شامل m نیستند. هر نقطه از این دو نیم‌صفحه از A و B به یک فاصله نیستند.

اگر M هر نقطه از یک نیم‌صفحه باشد که شامل A باشد، داریم: $MA<MB$ و اگر شامل B باشد، آنگاه: $MB<MA$. در واقع این یک مکان است.

محسن کیخائی

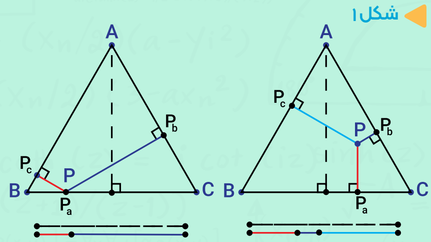
یک مسئله و چند راه حل

گام نخست با یک مورد مشخص سروکار دارد که نه تنها به صورت ویژه‌ای در دسترس است، بلکه به‌طور خاصی راهگشاست. می‌توانیم آن را یک مرحلهٔ خاص پیشرو بنامیم: «راهنمای رسیدن به یک راه حل کلی» (جورج پولیا[1]).

در مطلبی که در مجلهٔ مهرماه چاپ شد، مسئله‌ای را که به «قضیهٔ ویویانی[2]» معروف است، مطرح و چند روش اثبات برای آن بیان کردیم. در اینجا با توجه به اهمیت این قضیه در هندسه و همچنین کارایی و آموزنده‌بودن روش‌های اثباتی که برای آن در نظر گرفتیم، بار دیگر به آن می‌پردازیم.

مسئله: ثابت کنید مجموع فاصله‌های هر نقطه درون یا روی مثلث متساوی‌الاضلاع (شکل ۱) از سه ضلع آن، با ارتفاع مثلث برابر است.

شکل ۱



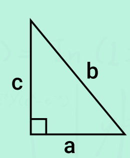
چند نکته

۱. منظور از فاصلهٔ یک نقطه از یک ضلع، طول پاره‌خطی است که از آن نقطه بر ضلع عمود می‌شود. اگر نقطه روی آن ضلع قرار داشته باشد، فاصله‌اش تا آن ضلع صفر است.

۲. فاصلهٔ دو خط موازی برابر است با فاصلهٔ هر نقطهٔ دلخواه واقع بر یکی از آن دو خط تا خط دیگر، و این فاصله همواره ثابت است.

۳. در مثلث متساوی‌الاضلاع، سه ارتفاع طول‌های برابر دارند و عمودمنصف ضلع مقابل هستند.

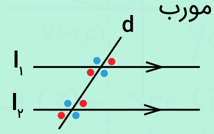
۴. در هر مثلث قائم الزاویه مانند شکل ۲، مجذور وتر برابر است با مجموع مجذورهای دو ضلع قائمهٔ آن $b^2=a^2+c^2$ (رابطهٔ فیثاغورس).



شکل ۲

۵. هرگاه خطی غیرعمود دو خط موازی را قطع کند، هشت زاویه به‌وجود می‌آید که چهار زاویهٔ تند با هم و چهار زاویهٔ باز با هم مساوی هستند (شکل۳). واضح است که اگر خط d بر یکی از دو خط موازی عمود باشد بر دیگری نیز عمود است و هشت زاویهٔ قائمه تشکیل می‌شود.

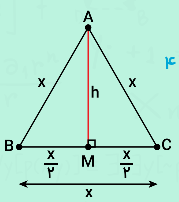
$l_1 \parallel l_2$ و d مورب



شکل ۳

مثال۱. ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع x را به‌دست آورید. با استفاده از نکته‌های ۳ و ۴ در شکل۴ داریم:

شکل ۴



$$(\frac{x}{2})^2+h^2=x^2 \Rightarrow h^2=x^2-(\frac{x}{2})^2$$

$$=x^2-\frac{x^2}{4}=\frac{3x^2}{4} \Rightarrow h=\sqrt{\frac{3x^2}{4}}=\frac{x\sqrt{3}}{2}$$

تمرین ۱. مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a را به‌دست آورید.

تذکر: تا پایان مطلب منظور از ABC، مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است.

اثبات مسئله

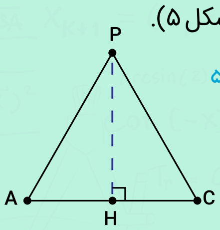
روش اول: اثبات به روش جورج پولیا

این روش مثالی به‌ظاهر جدید از پیشنهاد نقل شده از جورج پولیا است: «استفاده از یک مورد خاص پیشرو در مسیر رسیدن به یک راه حل کلی.» علاوه بر این، اثباتی که با این روش برای قضیهٔ ویویانی ارائه می‌شود، ارزش تعمیم در ریاضیات را برجسته می‌کند. این نتیجه به‌ظاهر در مورد یک مثلث متساوی‌الاضلاع است و با اثبات به‌طور اساسی، از جمله‌هایی در مورد همهٔ مثلث‌های متساوی‌الاضلاع استفاده می‌کند. می‌خواهیم ثابت کنیم برای هر نقطهٔ P که در داخل یا روی ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC قرار بگیرد، مجموع فاصلهٔ P از ضلع‌ها، برابر با ارتفاع مثلث ABC است.

ایدهٔ اثبات این است که روی حالت خاصی که نقطهٔ P روی یکی از ضلع‌های مثلث ABC قرار دارد، تمرکز کنیم. پس از اثبات، این موضوع نه تنها برای خود مثلث ABC، بلکه برای همهٔ مثلث‌های متساوی‌الاضلاع دیگر نیز صادق است. در ادامهٔ حرکت از حالت خاص به حالت عمومی، لازم است مورد خاص دیگری را در نظر بگیریم که این مورد خاص خود از طریق مورد خاص قبل از خود -مورد خاص پیشرو- ثابت می‌شود. اثبات را با یک مورد مشخص که با توجه به متساوی‌الاضلاع‌بودن ABC کاملاً واضح است، شروع می‌کنیم:

ادعای ۱. اگر P روی یک رأس ABC قرار بگیرد (B=P)، قضیهٔ ویویانی برقرار است (شکل ۵).

شکل ۵

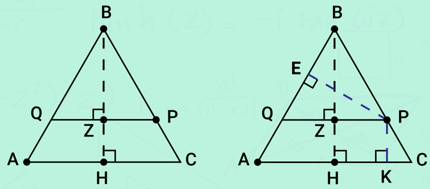


ادعای ۲. اگر P روی یک ضلع ABC قرار داشته باشد، قضیهٔ ویویانی برقرار است.

اثبات: بدون ازدست‌دادن کلیت، فرض کنیم P روی ضلع BC قرار

دارد. پاره خط PQ را موازی با AC رسم می‌کنیم (شکل۶). از آنجا که QBP یک مثلث متساوی‌الاضلاع است (چرا؟)، می‌توانیم از نتیجهٔ ادعای ۱ برای این مثلث استفاده کنیم؛ یعنی: PE=BZ. و با توجه به اینکه QP موازی با AC است، فاصلهٔ P تا AC برابر است با فاصلهٔ هر نقطهٔ دیگری روی پاره خط QP از AC. پس: PK=ZH. در نتیجه: PE+PK=BZ+ZH=BH.

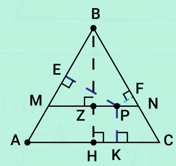
شکل ۶



ادعای ۳. اگر نقطهٔ P درون ABC قرار داشته باشد، قضیهٔ ویویانی برقرار است.

اثبات: همان‌طور که در شکل ۷ می‌بینید، پاره‌خط MN (گذرنده از P) را موازی AC رسم کرده‌ایم. اکنون با استفاده از ادعای ۲، در مثلث MBN داریم: PE+PF=BZ و با توجه به اینکه MN موازی AC است، داریم: PK=ZH. بنابراین: PE+PF+PK=BZ+ZH=BH.

شکل ۷



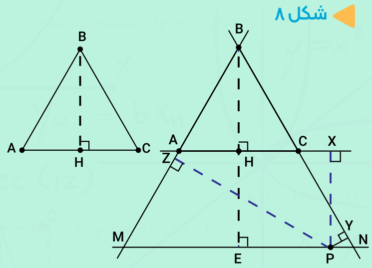
در حالی که چند اثبات متنوع و زیبا از قضیهٔ ویویانی در دسترس است (برای مثال منبع ۱ را ببینید)، اثبات به روش پولیا دارای این ویژگی ممتاز است که رابطهٔ بین حالت خاص و تعمیم را در ریاضیات پررنگ می‌کند. این موضوع ذهن شما را برای حرکت از مثلثی به مثلث دیگر به چالش می‌کشد و نقش محوری تعمیم در ریاضیات را نشان می‌دهد. علاوه بر این، قضیه‌های مرتبط را به‌راحتی می‌توان با استفاده از این چارچوب اثبات کرد. مثلاً می‌توان نتیجه‌های مشابهی را برای نقطه‌های خارج از مثلث، مورد بحث قرار داد.

ادعای ۴. ضلع‌های مثلث ABC را امتداد می‌دهیم. نقطهٔ P را در یکی از ناحیه‌هایی که با امتداد ضلع‌های ABC ایجاد شده است، قرار می‌دهیم. فرض کنیم PX فاصلهٔ بین P و امتداد ضلع AC، PY و PZ فاصله‌های P تا امتداد ضلع‌های BC و BA باشند. در این صورت PY+PZ-PX برابر با ارتفاع مثلث ABC است.

اثبات ادعای ۴ به اثبات ادعای ۳ شبیه است. با در نظر داشتن اینکه AB، BC، و AC به امتداد ضلع‌ها اشاره دارند نه فقط به خود ضلع‌ها، پاره‌خط MN گذرنده از P را موازی با AC رسم می‌کنیم (شکل ۸). اکنون در مثلث متساوی‌الاضلاع MBN داریم: PZ+PY=BE. در نتیجه:

$$PZ+PY-PX \overset{BE=PZ+PY}{\underset{EH=PX}{=\!=\!=\!=}} BH=BE-EH$$

شکل ۸

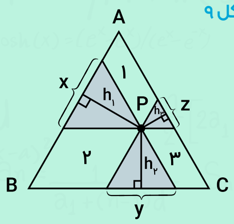


روش دوم: یک روش ساده و کمتر دیده‌شده

مثلث‌های متساوی‌الاضلاع با ارتفاع‌های h_1، h_2 و h_3 و طول اضلاع به ترتیب x، y و z مانند شکل ۹، در نظر می‌گیریم. با توجه به اینکه چهارضلعی‌های ۱، ۲ و ۳ متوازی‌الاضلاع هستند (چرا؟)، پس طول ضلع مثلث ABC برابر است با: x+y+z و اگر طول ارتفاع مثلث ABC را h بنامیم، با استفاده از مثال ۱ داریم:

$$\begin{cases} h=\frac{(x+y+z)\sqrt{3}}{2} \\ h_1=\frac{x\sqrt{3}}{2}, h_2=\frac{y\sqrt{3}}{2}, h_3=\frac{z\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow h=h_1+h_2+h_3$$

شکل ۹



تمرین ۲. نقطهٔ P را روی یکی از ضلع‌های ABC در نظر بگیرید و مانند روش دوم مسئله را ثابت کنید.

روش سوم: روشی کاملاً جدید

محاسبهٔ مساحت یک شکل به دو طریق روشی بسیار کارآمد است که در اثبات بعضی مسائل هندسه می‌توان به‌خوبی از آن استفاده کرد. در اینجا ما با در نظر گرفتن شکل مناسب و انجام این کار، روشی کاملاً جدید برای اثبات قضیهٔ ویویانی ارائه می‌دهیم. در شکل ۱۰ داریم: $BC \parallel KU, AC \parallel GL, AB \parallel TW$ و سه مثلث PGK، PWL و PUT با مثلث ABC هم‌نهشت (قابل انطباق) هستند. همچنین چهارضلعی‌های OGKN، FWLM و EUTD ذوزنقه‌اند (چرا؟)

اکنون طول ضلع و طول ارتفاع مثلث ABC را به ترتیب m و h در نظر می‌گیریم و مساحت شکل را به دو صورت به‌دست می‌آوریم:

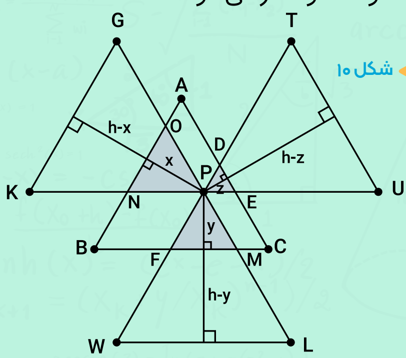
$$S=4\left(\frac{1}{2}m.h\right)-\left[\frac{1}{2}\overline{ON}.x+\frac{1}{2}\overline{FM}.y+\frac{1}{2}\overline{DE}.z\right]$$

$$=2m.h-\frac{1}{2}(\overline{ON}.x+\overline{FM}.y+\overline{DE}.z) \qquad (1)$$

$$S=\frac{1}{2}(m+\overline{ON})(h-x)+\frac{1}{2}(m+\overline{FM})(h-y)+\frac{1}{2}(m+\overline{DE})(h-z)+\frac{1}{2}m.h \qquad (2)$$

از برابری ۱و۲ و اینکه $\overline{ON}+\overline{FM}+\overline{DE}=m$ (چرا؟) نتیجه می‌شود: x+y+z=h در اینجا انجام محاسبات و جزئیات به عنوان تمرین۳ به خواننده واگذار می‌شود.

شکل ۱۰



تمرین۴. نقطهٔ P را روی یکی از ضلع‌های مثلث ABC در نظر بگیرید و مانند روش سوم مسئله را ثابت کنید.

پی‌نوشت‌ها

1. George Polya
2. Viviani's Theorem

منابع

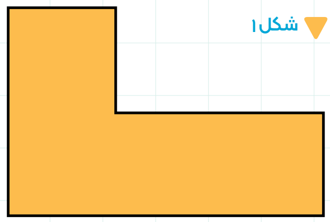
۱. مجلهٔ رشد ریاضی برهان متوسطهٔ اول، مهرماه ۱۴۰۲.
2. Specialization, generalization, and a new proof of Viviani's Theorem Addie Armstrong and Dan McQuillan Department of Mathematics, Norwich University, Northfield VT 05663 January 6, 2017.
3. Roger.B.Nelsen, Proofs Without Words 3,MAA, 2015.

الگویابی هندسی

به انتخاب آرش رستگار

مسئله. آیا می‌توانید شکل ۱ را با چهار نمونهٔ مشابه آن فرش کنید؟

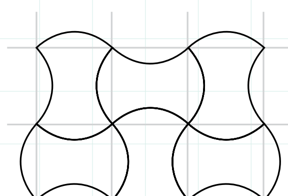
شکل ۱



یحیی: برای من این سؤال پیش آمده است که: با چه کاشی‌هایی می‌توان تمام صفحه را فرش کرد؟

سیاوش: بسیاری از این الگوها را می‌توان با یک تغییر پیوسته اما منظم، از همان کاشی‌کاری‌های قبل به دست آورد. مثلاً کاشی شکل ۲ را من در کاشی‌کاری‌های کف خیابان دیده‌ام.

شکل ۲



سیاوش که به هنر علاقه‌مند بود و به همین دلیل دقت هنری خاصی داشت، به این فکر افتاد که کاشی‌هایی به شکل موجودات زنده طراحی کند که بتوان با آن‌ها تمام صفحه را فرش کرد. او این ایده را در کلاس مطرح کرد. معلم از شنیدن ایدهٔ سیاوش بسیار خوش‌حال شد و گفت: «اتفاقاً این ایده به ذهن نقاش معروف، **اِشر**، نیز رسیده است!»

هفتهٔ بعد معلم چند اثر هنری از اِشر را به کلاس آورد و گفت: «اِشر از کاشی‌کاری‌های مسجد الحمراء ایده گرفت و طرح‌های بسیار جالبی ارائه داد. به طرح شکل ۳ توجه کنید.»

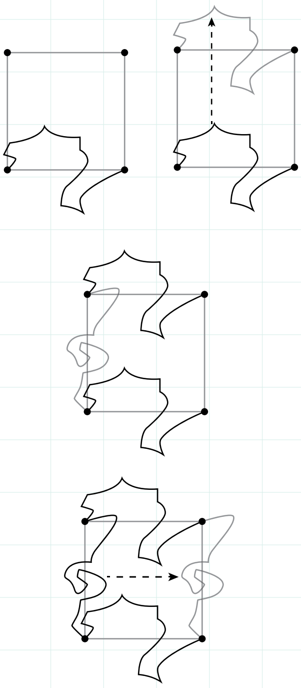
او ادامه داد: «فکر می‌کنید اِشر برای طراحی الگوی شکل ۳ از کدام یک از الگوهای کاشی‌کاری که می‌شناسیم، استفاده کرده است؟»

سیاوش: رنگ‌آمیزی شطرنجی مرا به یاد صفحهٔ شطرنج می‌اندازد.

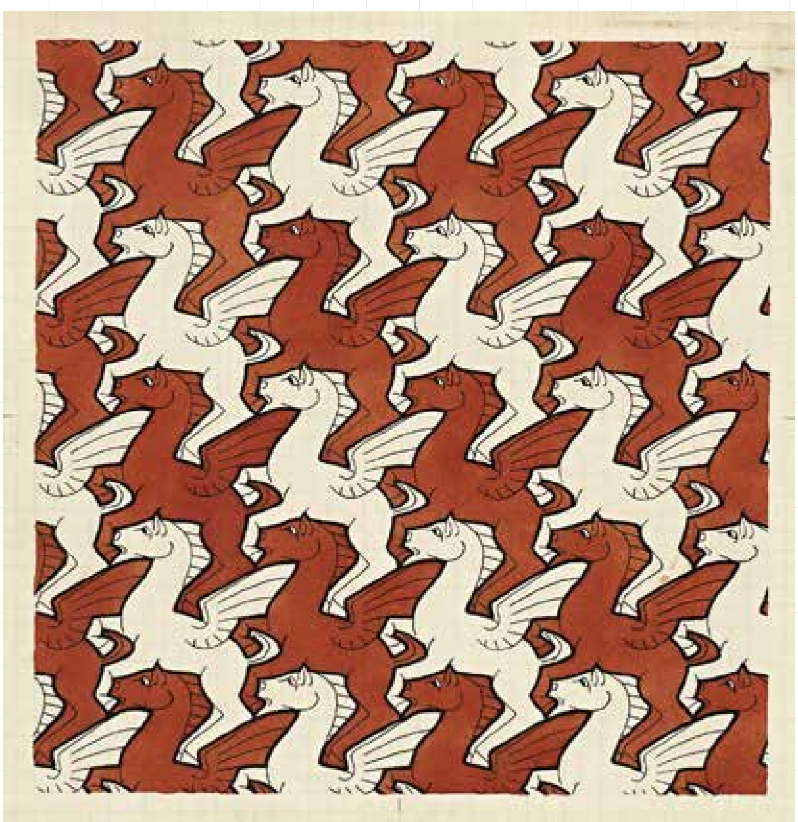
یحیی: می‌توان این‌طور هم فکر کرد که هر اسب با چهار اسب دیگر همسایه است و در هر گوشه هم چهار اسب به هم می‌رسند. اگر کمی دقت کنیم، می‌بینیم که این چهار گوشه روی یک مربع قرار گرفته‌اند.

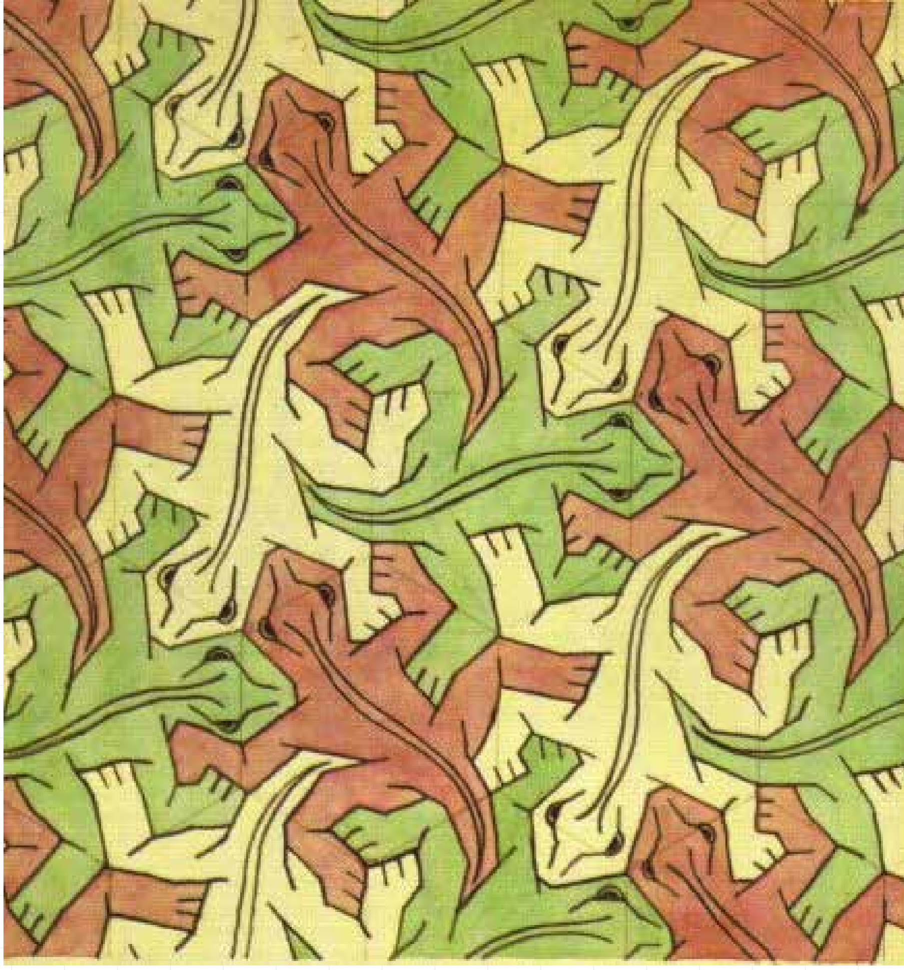
اشکان: می‌توان کاشی‌کاری اِشر را در چند مرحلهٔ شکل ۴ از صفحهٔ شطرنجی به‌دست آورد.

شکل ۴



شکل ۳





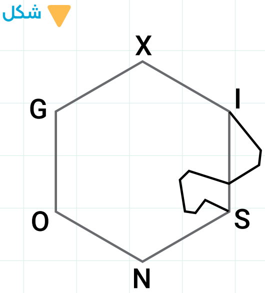
شکل ۵

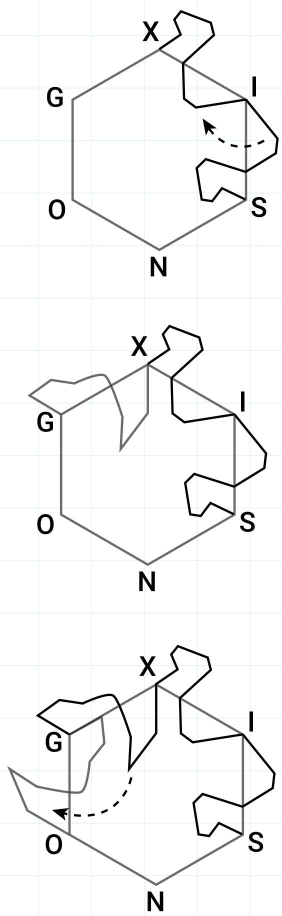
معلم شکل ۵ را در معرض دید دانش‌آموزان قرار داد و از آن‌ها خواست آن را بازسازی کنند.

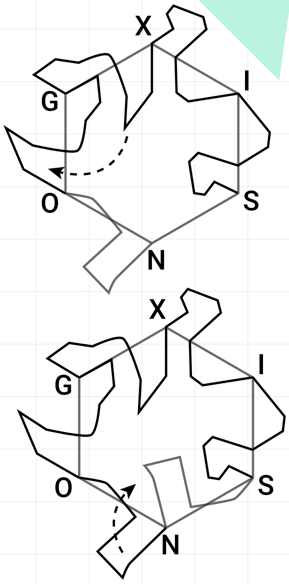
اشکان: این طرح خیلی شبیه همان الگوی اول است. هر قورباغه با شش قورباغهٔ دیگر همسایه است و در هر گوشه سه قورباغه به هم می‌رسند. پس این کاشی‌کاری شبیه کاشی‌کاری لانهٔ زنبور عسل است. اگر دقت کنیم، با وصل‌کردن این گوشه‌ها شش‌ضلعی منتظم به‌دست می‌آید. می‌توان این کاشی‌کاری را در مرحله‌هایی که در شکل ۶ می‌بینیم، به‌دست آورد.

تمرین: دو طرح شکل ۷ و ۸ را در کلاس بازسازی کنید.

شکل ۶







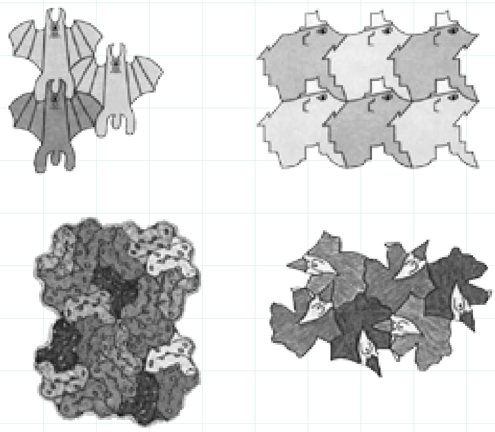
آیا در روش بازسازی طرح‌های اِشر تفاوتی اساسی مشاهده می‌کنید؟
آیا می‌توان با انتقال و دوران کاشی‌ها، هر یک از دو طرح شکل‌های ۷ و ۸ را بر هم منطبق کرد؟ اگر بازتاب (تصویر آینه‌ای) را هم اضافه کنیم چطور؟

شکل ۷

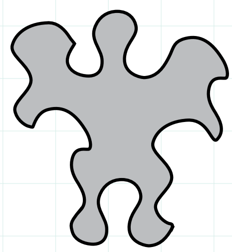
شکل ۸

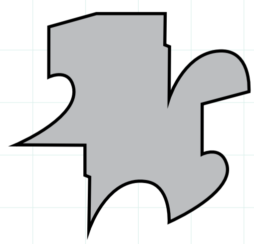
مسئله‌ها

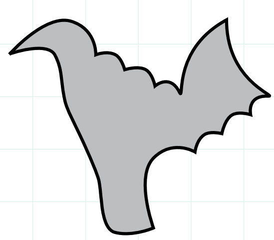
۱. در هر یک از شـــکل‌های زیر الگوهای هندسی را که این طرح‌ها به کمک آن‌ها ساخته‌شده‌اند، بیابید.



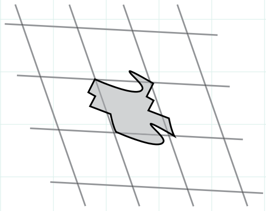
۲. الگوهای زیر طرح‌هایی از موجودات زنده هســـتند. این الگوها را نقاشی و به کمک آن‌ها کاشی‌کاری‌هایی با طرح‌های هنری ابداع کنید.

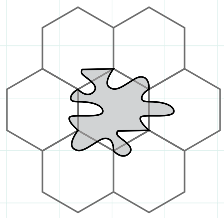


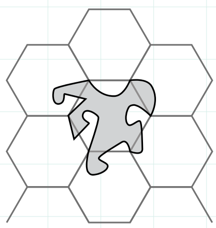


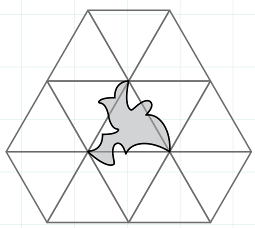


۳. با هر یک از شکل‌های زیر یک کاشی‌کاری از صفحه تولید کنید.

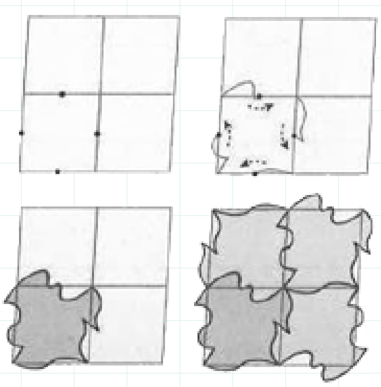








۴. بـــه چند روش می‌تـــوان به کمک دوران کاشـــی‌کاری، طرح‌های هنری تولیـــد کرد؟ یک کاشـــی‌کاری با تصویر موجودات تولید کنید که در آن از الگوی دَوَران زیر استفاده شده باشد.



منبع

تابش، یحیی؛ حاجی‌بابایی، جواد؛ رســـتگار، آرش (۱۳۷۹). آموزش هنر حل مسئله. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش‌وپرورش. تهران.

لذت حل مسئله

محمدحسین دیزجی

گفت‌وگو با دکتر محمدرضا سیدصالحی رئیس گروه ریاضی دفتر تألیف و برنامه‌ریزی کتاب‌های درسی

عکاس: مرتضی سلطانی همایون

اعتقاد دارد همهٔ افراد قابلیت درک و فهم بخش‌هایی از دانش ریاضی را دارند و اگر برخی بچه‌ها احساس می‌کنند در فهم ریاضی مشکل دارند، این موضوع ریشه در روش ارائهٔ ریاضی به آنان است. باور دارد کسی که ریاضی می‌خواند و می‌داند، نگاهش به مسئله‌ها و بحث‌های زندگی، حتی اگر پیچیده هم باشد، متفاوت خواهد بود و راحت‌تر از عهدهٔ رفع مشکلات برمی‌آید. محمدرضا سیدصالحی دوران مدرسه را در شهرستان «الیگودرز» استان لرستان سپری کرد. در دبیرستان رشتهٔ ریاضی را برگزید و تحصیلات عالی را نیز از کارشناسی تا دکترا، در دانشگاه‌های اصفهان، صنعتی‌شریف و تفرش ریاضی محض خواند. از سال ۱۳۷۷ به جمع آموزش‌وپرورش پیوست و در استان‌هایی همچون سیستان و بلوچستان، لرستان و تهران (شهرستان‌های استان تهران) تدریس کرد. در سال ۱۳۹۱ به «دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی» آموزش‌وپرورش آمد. ابتدا به صورت پاره‌وقت و سپس به صورت رسمی فعالیتش را دنبال کرد و از سال ۱۳۹۷ مسئولیت گروه ریاضی را بر عهده گرفت. او حرف‌هایی در حوزهٔ دانش ریاضی دارد که خواندن آن برای شما هم می‌تواند جالب و جذاب باشد. با هم پای تجربه‌های دکتر محمدرضا سیدصالحی می‌نشینیم.

● علاقهٔ شما به رشتهٔ ریاضی از دورهٔ متوسطه تا پایان دکترا، از نگاه خودتان ریشه در چه چیزی دارد؟

○ ریشهٔ علاقهٔ من به درس ریاضی به قبل از دوران ابتدایی برمی‌گردد. از همان دوران کودکی که در خانواده با عدد آشنا شدم، احساس کردم ریاضی را دوست دارم. همچنین تشویق‌های خانواده در این زمینه روی من اثر داشت. وقتی شما در دوران کودکی با تشویق‌های خانواده روبه‌رو می‌شوید، احساس علاقه‌مندی می‌کنید و من از پایهٔ دوم ابتدایی مصمم بودم که در رشتهٔ ریاضی تحصیل کنم. البته در دوران کودکی گاهی افراد تصمیم‌هایی می‌گیرند که شاید مبتنی بر شناخت عمیق نیست. به هر حال من از همان دوران ریاضی را دوست داشتم و به چیز دیگری هم فکر نمی‌کردم. شاید این نوع تصمیم‌گیری خوب هم نباشد، ولی مسیر زندگی من از آن موقع معلوم شد.

● هیچ وقت در طول زندگی تا امروز به این نکته فکر نکرده‌اید که اگر رشتهٔ تحصیلی خودتان را تغییر می‌دادید و رشتهٔ دیگری می‌خواندید، برایتان بهتر بود و موفق‌تر بودید؟

○ بستگی دارد به اینکه موفقیت را چطور تعریف کنیم. منظور درآمد بیشتر است یا لذت‌بردن از آن رشته؟! در پاسخ باید خدمت شما عرض کنم، من در سال ۱۳۸۶ یا ۱۳۸۷ تعدادی دانش‌آموز در سیستان و بلوچستان داشتم که با آن‌ها تا سال‌ها بعد هم در ارتباط بودم. یک سال یکی از همین بچه‌ها با من تماس گرفت و گفت: «استاد شما بالاخره دندان‌پزشک شدی؟» من تعجب کردم و گفتم شاید مرا با شخص دیگری اشتباه گرفته است. اما او گفت: «شما که آن زمان فوق‌لیسانس بودید، یک بار سر کلاس به ما گفتید شاید برای من راحت‌تر باشد که دکترای دندان‌پزشکی بخوانم تا این رشته را ادامه بدهم. به همین خاطر این سؤال به ذهن ما رسید که از شما بپرسیم.»

خیلی از همان بچه‌ها آن زمان در رشتهٔ تجربی در سال چهارم بودند و الان متخصص هستند. من یادم نبود که این حرف را سر کلاس آن‌ها زده‌ام، اما باید خدمت شما عرض کنم که در عمل من چیزی را با ریاضی مقایسه نکرده‌ام. البته اعتقاد دارم مسیری را که تا به امروز رفته‌ام، خودم خیلی در آن تصمیم‌گیری نکرده‌ام.

• در هر کاری می‌تواند لذتی وجود داشته باشد. شما در طول این سال‌ها که ریاضی خواندید و در تدریس و تألیف مباحث ریاضی صاحب تجربه هستید، چه لذتی در ریاضی کشف کردید که تا امروز آن را ادامه دادید؟

○ فکر می‌کنم اصلی‌ترین لذت در ریاضی حل مسئله و کشف یک سلسله از توانایی‌های ذهنی است که گاهی خود شما هم نمی‌دانید چطور اتفاق می‌افتد. می‌گویند زمانی که **مارادونا** فوتبال بازی می‌کرد، با او دربارهٔ مربیگری صحبت کرده بودند و او جواب داده بود که فوتبال بازی‌کردن اصلاً یاد دادنی نیست. بعد هم که مربی شد، احساس کرد که مربی خوبی نیست. زمانی شما خیلی ناخودآگاه از یک فرایند ذهنی آنقدر اقناع می‌شوید و آن مسیر آن‌قدر برایتان لذت‌بخش است که همچنان آن را پیش می‌روید. لذت‌بردن من از ریاضیات هم همین حس و حال را دارد.

• شما در طول سال‌هایی که در دفتر تألیف حضور داشتید، به یقین در نوشتن کتاب‌های درسی نقش‌آفرین بودید. از کتاب‌های درسی که بگذریم، چه مطالب و کتاب‌های دیگری را در حوزهٔ ریاضی نوشته‌اید؟

○ من نوشتن را از دوران تحصیل شروع کردم و مقاله‌هایی در حوزهٔ ریاضی نوشته‌ام. اما کار اصلی من در واقع آموزش ریاضی است. در اینجا علاوه بر تألیف کتاب‌های درسی و کتاب‌های راهنمای معلم، کتاب‌هایی را هم در زمینهٔ برنامهٔ درسی و پژوهش‌هایی در حوزهٔ ریاضی داشته و دارم. همچنین یک سلسله مطالعات تطبیقی در زمینهٔ آموزش ریاضی در کشورها انجام داده‌ام. البته این پژوهش‌ها به صورت جمعی بوده‌اند که من به همراه دیگران در این زمینه کار کرده‌ایم.

• شما در حوزهٔ کار خودتان چه برنامه و دغدغه‌ای دارید و چه تلاشی می‌کنید تا یادگیری درس ریاضی برای بچه‌ها آسان‌تر جلوه کند؟

○ آنچه که در عمل تا امروز انجام شده یک موضوع است، و آنچه که من در ذهنم دارم، موضوع دیگری است که امیدوارم در آینده شرایط به‌گونه‌ای باشد که تحقق پیدا کند. خاطرم هست یک بار یکی از همکلاسی‌های دورهٔ دکترا که خیلی کتاب‌های درسی را ندیده بود، به من گفت: «به نظرم این کتاب‌های درسی خیلی کتاب نیستند.» ایشان معتقد بود این کتاب‌ها انگار خیلی جدی نیستند. الان آموزش و حتی نوع رفتار در خانواده با بچه‌ها، آنطور که در ذهن بعضی‌ها وجود دارد، دستوری نیست. همهٔ ما می‌دانیم که باید بچه‌ها را علاقه‌مند کرد.

اما من اعتقاد دارم، چه در ایران و چه در دنیا، آموزش باید به سمتی برود که حالت فردی‌سازی باشد. البته آرام‌آرام به این سمت هم پیش می‌رویم. ما باید به سمتی پیش برویم که با توجه به استعدادهای دانش‌آموزان مطلب را به آنان ارائه کنیم. ما الان در دبیرستان رشته‌های متفاوتی داریم، ولی باید به‌گونه‌ای پیش برویم که بچه‌ها بر اساس استعداد خودشان به یک رشته گرایش پیدا کنند. منظورم این است که مثلاً در مبحث ریاضی، بر اساس نوع استعداد و علاقهٔ شخص، به او مباحثی از ریاضی را ارائه کنیم. یعنی برخی از مباحث اجباری و همگانی باشند و برخی از مباحث تخصصی هم بر اساس استعداد شخص به دانش‌آموز ارائه شود تا دانش‌آموز با توجه به علاقهٔ خودش به سمت یک موضوع برود و آن را بخواند.

• حال با توجه به شرایط امروز و وضعیت موجود، برای فهم بهتر مباحث ریاضی چه توصیه و راهکاری برای دانش‌آموزان دارید؟

○ ذهن انسان نسبت به کاری که می‌خواهد انجام بدهد نگاه و جهت‌گیری دارد. حال این کار خواندن درس ریاضی باشد یا رفتن به یک مسافرت و یا همین گفت‌وگوی من و شما. اگر من این گفت‌وگو را به عنوان وظیفه‌ای که بالاخره باید آن را به اتمام برسانم، در نظر بگیرم، کار یک جور پیش می‌رود، و اگر آن را به صورت یک گفت‌وگوی لذت‌بخش ببینم که در آن یاد خاطرات دوران تحصیل و دانشگاه می‌افتم و به یک سلسله نکته‌های خوب می‌رسم، یک جور دیگر پیش خواهد رفت. از نگاه من اصلی‌ترین مطلب در حوزهٔ یادگیری ریاضی این است که یادگیرنده باید بتواند ذهنش را از حالت اجبار به سمت چالشی ببرد که دوست دارد آن را تجربه کند و فرا بگیرد تا کار برایش لذت‌بخش شود. البته این را هم می‌دانیم که این یادگیری به عوامل متفاوتی مثل معلم، مدرسه و کتاب ربط دارد. اما در نهایت این خواست خود ماست که حرف اول و آخر را می‌زند.

• خاطره یا نکته و تجربه‌ای در این زمینه دارید که برای ما مثال بزنید؟

○ یادم هست چندی پیش از یک دست‌فروش که با وانت میوه می‌فروخت، چند رقم میوه خریدم که فروشنده بچهٔ کم سن و سالی بود. وقتی چند رقم میوه را کشید و آن‌ها را آماده کرد، پیش از آنکه من بخواهم حساب و کتاب کنم، او همه چیز را محاسبه و جمع کل را اعلام کرد. خیلی هم دقیق و درست گفت و همین برای من پرسشی ایجاد کرد. از او پرسیدم کلاس چندم هستی و پسر جواب داد تا هفتم بیشتر نخوانده‌ام. پرسیدم در طول این سال‌ها ریاضی برایت چطور بود و او جواب داد که خیلی سخت. به او گفتم: من دکترای ریاضی هستم و نویسندهٔ همان کتاب‌هایی که تو در مدرسه خوانده‌ای، ولی نتوانستم به سرعت تو محاسبه کنم.

حالا من پاسخ را خودم به شما می‌دهم. جواب این است که وقتی او به این حساب و کتاب نیاز دارد و باید درآمد داشته

باشد، تمام این محاسبه‌ها را به‌راحتی انجام می‌دهد. از طرف دیگر اجبار درس و مدرسه و معلم هم در کار نیست. ریاضی در مدرسه برای بچه‌ها سخت به نظر می‌رسد و به همین خاطر گاهی ذهن آنان نسبت به ریاضی قفل می‌شود. کار به جایی می‌رسد که دیگر توانایی‌های خودشان را باور نمی‌کنند.

آن کودک دست‌فروش به نظر من ریاضی را بلد بود، چرا که در حین کار از آن لذت می‌برد. اما در مدرسه چنین حالتی را نداشته که ریاضی برایش سخت بوده است. متأسفانه یکی از بدی‌های بحث ریاضی اینجاست که اگر کسی در آن قوی نباشد، فوراً آن را به حساب هوش طرف می‌گذارند. یعنی اگر طرف به دو سؤال ریاضی درست پاسخ ندهد، فوراً می‌گویند هوشش خوب نیست. در حالی که هوش را نمی‌توان صرفاً با ریاضی سنجید. من معتقدم وجود ترس در بچه‌هاست که نسبت به ریاضی این‌طور واکنش نشان می‌دهند.

● خود شما به کدام یک از بحث‌ها، موضوع‌ها و شاخه‌های ریاضی بیشتر علاقه دارید؟

○ ما وقتی در یک شاخهٔ ریاضی فعالیت می‌کنیم، شاید تصورمان این باشد که فقط این بخش را خیلی دوست داریم. گاهی وقتی وارد عرصهٔ دیگری می‌شویم، تازه علاقه به آن شاخهٔ جدید در ما شکوفا می‌شود. من دوستی داشتم که ریاضیات محض می‌خواند. یک بار سر کلاس دیگری از مباحث ریاضی نشسته بود که تازه استعداد خودش را در آن شاخه کشف کرد. رشته‌اش را تغییر داد و «تحقیق در عملیات کاربردی» خواند. برای مثال خودم در دورهٔ کارشناسی ارشد هم به گراف علاقه داشتم و هم به آنالیز. از استادم راهنمایی خواستم که کدام موضوع را دنبال کنم. ایشان در جوابم گفت: من هم وقتی در همین مقطع و جایگاه تو بودم، همین احساس را پیدا کردم. به نظر من مهم این است که شما از حل مسئله لذت ببرید. بنابراین فرقی نمی‌کند. وارد هر وادی از علم و دانش یا شاخه‌ای از ریاضیات بشوید، آن لذت را خواهید برد.

● کلام شما تا اینجا این نکته را به مخاطب ما ارائه می‌کند که برای یادگیری و علاقه به یک مبحث و موضوع، دانش‌آموز باید به صورت خودخواسته پیش برود؛ گرچه سایر عوامل مثل کتاب، مدرسه و معلم هم نقش‌آفرین هستند. برای دانش‌آموزی که می‌خواهد به صورت خودخواسته ریاضی یا هر دانشی را دنبال کند، چه توصیه‌ای دارید؟

○ بچه‌ها در کتاب‌های درسی در طول سال‌های تحصیل با مفهوم‌های متنوع ریاضی برخورد می‌کنند و آشنا می‌شوند. البته توانایی‌های ذهنی افراد با هم متفاوت است. ارتباطی که دانش‌آموز با مفهوم‌های مختلف برقرار می‌کند، شاید هدایت‌کنندهٔ او در زمینهٔ علاقه به مبحث‌های ریاضی باشد.

● یکی از دلایل انتخاب افراد در رشته‌های تحصیلی بحث کاربرد است. در ریاضی هر وقت صحبت از کاربرد شده اغلب به حساب و کتاب کردن در محاسبات زندگی اشاره کردند از اینکه بگذریم شما کاربردهای ریاضی در زندگی را چگونه برای دانش‌آموزان تشریح می‌کنید؟

○ من معتقدم به آموزش ریاضی از دو زاویه می‌توان نگاه کرد: یکی بحث کاربردها، و دیگری بحث تأثیری که روی تفکر و ذهن افراد می‌گذارد. وقتی شما ورزش می‌کنید، توان و تحمل جسمی شما هم افزایش پیدا می‌کند و نسبت به دیگران کمتر آسیب می‌بینید. این جدا از لذت‌بردن شماست. ما در زندگی با مسائل و مباحث و محاسبات مختلفی روبه‌رو هستیم که ذهن ما را درگیر خودشان می‌کنند و هر کدام هم پیچیدگی‌های خودشان را دارند. اینجا بحث توان ذهنی ما در مواجهه با این همه محاسبه در یک لحظه و پیچیدگی‌های آن پیش می‌آید. یکی از کارهایی که ریاضی برای ما انجام می‌دهد این است که توان ما را در مواجهه با چنین مسئله‌هایی افزایش می‌دهد. ریاضیات تأثیر خاص و ویژه‌ای بر نوع تفکر و اندیشهٔ ما می‌گذارد و این جدا از کاربردهای آن است. در جهان امروز برخورداربودن از پایهٔ ریاضی در موفقیت در عرصه‌های تحصیلی، شغلی، آزمون‌های استخدامی یا ورود به دانشگاه‌های جهان بسیار اهمیت دارد.

● نکته‌ای هست که در پایان دوست دارید با مخاطبان مجلهٔ ما درمیان بگذارید؟

○ عدهٔ زیادی از حل مسئله و ریاضیات لذت می‌برند و با آن ارتباط خوبی برقرار می‌کنند. اما گاه رفتار ما در برخورد با دانش‌آموزان در حوزهٔ ریاضی به‌گونه‌ای است که آنان اعتماد به نفسشان را از دست می‌دهند و این موضوع مرا ناراحت می‌کند و اتفاقاً به اصل ریاضی هم ربطی ندارد. من معتقدم اگر ما مبحث‌های ریاضی را به شیوه‌ای درست و صحیح به بچه‌ها عرضه کنیم، همه از آن لذت می‌برند. مهم این است که ما ریاضی را در حد فهم و توان شخص به او ارائه کنیم.

یک بار خاطرم هست آقای دکتر **شهشهانی**، از استادان معروف ریاضی دانشگاه صنعتی شریف اینجا صحبت می‌کرد و می‌گفت: «من متعجبم از اینکه ما برای این همه دانشجو در دانشگاه شریف یک مبحث را یکسان تدریس می‌کنیم، در حالی که این افراد با هم متفاوت هستند.» حال حساب کنید ما یک کتاب ریاضی برای این همهٔ دانش‌آموز سراسر کشور می‌نویسیم. کاش نظام آموزشی ما طوری بود که به فراخور توان و استعداد افراد مطلب ارائه می‌کرد. قبول دارم یک سلسله مبحث‌های لازم و اجباری برای هر درس وجود دارد، اما یک سلسله مبحث‌ها هم باید بر اساس علاقه و استعداد فرد ارائه شود تا او خودش انتخاب کند و فرابگیرد.

● با تشکر از شما که در این گفت‌وگو شرکت کردید.

خسرو داودی

بیایید کمی فکر کنیم!

فرار مغزها

کمی فکر کنیم

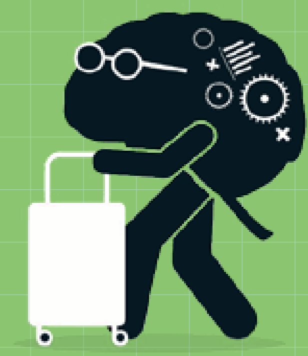
به‌طور حتم تا به حال عبارت «فرار مغزها» را زیاد شـــنیده‌اید. یکی از نگرانی‌هایی که وجود دارد رفتن نخبه‌های علمی و دانشجویان موفق دانشگاه‌ها به خارج از کشور برای ادامهٔ تحصیل است که اکثراً برگشتی وجود ندارد و به مهاجرت می‌انجامد. هزینهٔ زیادی صرف یک دانشجو می‌شود تا مدرک کارشناسی یا کارشناسی‌ارشد خود را از دانشگاه دریافت کند و زمانی که باید برای کشور ثمردهی کند و هزینه‌های صرف‌شده را به نوعی با دانش و علم خود به کشور برگرداند، با کمال تأســف توانایی و مهارت‌های خود را در کشورهای دیگر به کار می‌برد و نتایج آن هم برای کشورهای پذیرنده باقی می‌ماند.

بعد از انقلاب اسلامی بارها آمارهایی در این خصوص شنیده‌ایم و بحث‌های مفصلی در مورد دلایل این اتفاق صورت گرفته‌اند. اما در این شماره می‌خواهم از یک زاویهٔ دیگر به موضوع فرار مغزها بپردازم.

ایده‌ام را با یک خبر به نقل از وزیر محترم فرهنگ و ارشاد اسلامی شروع می‌کنم: «۳۴ میلیون ایرانی بازیکن بازی‌های گوشـــی همراه و رایانه‌ای هســـتند و میانگین سنی آن‌ها ۲۳ سال اســـت. از این تعداد ۴ میلیون نفر بازیکن حرفه‌ای هستند که هفته‌ای بیش از ۲۱ ساعت بازی می‌کنند.»

در نگاه اول شاید این موضوع عادی به نظر برسد، اما اگر با دقت به این موضوع فکر کنیم شاید دریابیم که این نوعی دیگر از فرار مغزهاست.

لازم اســـت یک بار به تعریف فرار مغزها توجه کنیم. فرار مغزها یعنی توانایی تفکر و کار فکری یک نفر که می‌توانسته در خدمت کشور باشد، صرف جای دیگری می‌شود و نفعش به مملکت خودمان نمی‌رسد. به این ترتیب اگر قرار باشد افراد حاضر در کشـــور، به‌جای آنکه برای مملکت خودشان کار فکری و مفیدی انجام دهند، ذهن، مغز و فکرشان جای دیگری باشـــد و یا صرف کار بیهوده و بی‌فایده‌ای شود، به‌نوعی مغزشـــان فرار کرده است و تأثیر مفید و مؤثری برای مملکت نخواهد داشت. پس این هم می‌تواند نوعی فرار مغز باشد.



محاسبه کنیم

فرض کنید یک فرد هر روز ۲ ساعت وقت خود را تلف کند و به کارهای بیهوده مثل گشتن در وبگاه‌ها، دیدن محتواهای شـــبکه‌های اجتماعی، بازی با انواع بازی‌های گوشی و رایانه‌ای بپردازد. با همین ۳۴ میلیون نفر که در بیان وزیر ارشاد بود شروع کنیم.

زمان تلف شده (نفر ساعت) ۳۴۰۰۰۰۰۰×۲=۶۸۰۰۰۰۰۰

یک دانشمند یا نخبه در روز ۱۰ ساعت وقت برای کار فکری مفید و مؤثر صرف می‌کند. پس خواهیم داشت:

نفر ساعت ۶۸۰۰۰۰۰۰÷۱۰=۶۸۰۰۰۰۰

و در یک سال خواهیم داشت:

نفر سال ۶۸۰۰۰۰۰÷۳۶۵=۱۸۶۳۰ ≃ ۱۹۰۰۰

یعنی معادل کار مفید حدود ۱۹۰۰۰ نفر خواهد شد که در یک سال کار کنند.

به عبارت دیگر، فقط ۲ ساعت وقت تلف‌کردن این ۳۴ میلیون نفر معادل روزانه ۱۰ ساعت کار فکری و مغزی ۱۹۰۰۰ نفر در یک سال کار خواهد شد. حالا اگر در یک سال روزی ۲ ساعت وقت تلف کنیم خواهیم داشت:

نفر سال ۱۸۶۳۰×۳۶۵= ۶۷۹۹۹۵۰ ≃ ۶۸۰۰۰۰۰

و اگر فرض کنیم آن نخبهٔ باهوش در یک ســـال هر روز ۱۰ ســـاعت به کار مفید مشغول شود و بتواند در طول عمر خود ۳۰ سال خدمت کند، خواهیم داشت:

نفر ۶۸۰۰۰۰۰÷۳۰ ≃ ۲۲۶۶۶۶

پس اگر این ۳۴ میلیون نفر روزی ۲ ســـاعت وقت خود را با بازی‌های رایانه‌ای تلف کنند، معادل این است که ۲۲۶۶۶۶ نفر فرار مغز داشته باشیم. حالا ببینید که کدام فرار مغز مهم‌تر است. مهاجرت تعدادی از دانشجویان و نخبگان یا عمر همهٔ ما که به همین راحتی از دست می‌رود و مغزمان دائم در حال فرار کردن است.

بیشتر فکر کنیم

درست است که انسان به استراحت و تفریح نیاز دارد، اما باید فکر کنیم که چگونه وقت استراحت خود را سپری کنیم. ورزش که به سلامتی جسم و روح ما کمک می‌کند بهتر است یا بازی رایانه‌ای که نه تنها فایده‌ای ندارد، بلکه آسیب‌های جســـمی و فکری زیادی هم خواهد داشت. درست است که عده‌ای با همین بازی‌کردن درآمد دارند و برای خود کسب و کار راه می‌اندازند، اما این اتفاق برای همه (۳۴ میلیون نفر) نمی‌افتد.

شما به عنوان دانش‌آموز دورهٔ اول متوسطه هر روز چه مقدار وقت خود را صرف بازی‌های رایانه‌ای یا گوشی می‌کنید؟ آیا به همین اندازه بـــرای کتاب خواندن وقت می‌گذارید؟ آیا به اندازهٔ کافی برای درس‌های خودتان وقت می‌گذارید؟ مغز شما چقدر در روز فرار می‌کند؟

بله من هم می‌دانم که این بازی‌ها جذابیت دارند و انســـان را ســـریع درگیر می‌کنند، اما خداوند به ما اختیار و اراده داده است تا در مقابل این موضوع سستی به خرج ندهیم و زود تسلیم نشویم. هدف کسانی که این بازی‌ها را درست می‌کنند این است که مغزها را درگیر کنند تا روزبه‌روز شاهد افت توانایی‌های علمی، مهارتی و اجتماعی جوانان کشورهایی باشند که قصد دارند بر آن‌ها مسلط شوند. معنی استعمار و استعمارگر همین است. شما نوجوانان باید آگاه باشید و خودتان را مهار کنید. باید مراقب باشید که مغزتان فرار نکند.

بیایید کمی بیشتر در این مورد فکر کنیم. وقتی وسوسه می‌شوید که در گوشی تلفن همراه و شبکه‌های اجتماعی وقت تلف کنید، یا درگیر بازی رایانه‌ای شوید، به این موضوع توجه کنید که مغزتان دارد کجا فرار می‌کند.

نمـــادگـ

ازبـــســ

روح‌الله خلیلی‌بروجنی

هنگام نوشــتن نتیجهٔ برخی از اندازه‌گیری‌ها در علوم، با مقدارهای بســیار بزرگ یا بســیار کوچک ســروکار داریم. برای مثال، فاصلهٔ زمین تا ماه حدود ۳۸۴۰۰۰۰۰۰ متر است. یا اندازهٔ هر مولکول آب حدود ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۳ متر است. بدیهی است که نوشــتن چنین عددهایی با صفرهای زیاد یا عددهای بسیار کوچک به صورت اعشــاری، افزون بر آنکه خواندن و نوشتن را دشوار می‌کند، احتمال اشتباه را نیز افزایش می‌دهد.

واقعاً کوچک

وقتی عددهای بسیار کوچک را به‌صورت نمادگذاری علمی می‌نویسیم، نوشتن و خواندن آن‌ها ساده می‌شود.

مثــلاً طــول هــر مولکــول DNA ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۲ متر است که با استفاده از نمادگذاری علمــی به‌صورت $۲×۱۰^{-۹}$ متر نوشته می‌شود.

طول هر مولکول DNA

«همـه‌ چـیـز در اطـراف شما ریـاضـیات است. همه‌چیز در اطراف شما عدد است.»

شاکونتالا دِوی[1] (۲۰۱۳-۱۹۲۹)

...ذاری علمی

...یار بزرگ تا بسیار کوچک

هنگامی که با عددهای بسیار بزرگ یا بسیار کوچک سروکار داریم، با به‌کاربردن نمادگـــذاری علمی که گاهی نمادگـــذاری توان‌های ۱۰ نیز نامیده می‌شـــود، می‌توانیم نتیجهٔ اندازه‌گیری را به‌سادگی بنویسیم و بخوانیم. شکل استاندارد نمادگذاری علمی برای نوشتن عددهای بسیار بزرگ یا بسیار کوچک به صورت $a\times10^b$ اســـت که در آن a عددی مساوی یا بزرگ‌تر از ۱ و کوچک‌تر از ۱۰ است. همچنین b یک عدد صحیح است. به این ترتیب و بر اساس نمادگذاری علمی می‌توان فاصلهٔ زمین تا ماه را به صورت $3/84\times10^{8}$ متر و اندازهٔ هر مولکول آب را به صورت 3×10^{-10} متر نوشت.

کهکشان آندرومدا

واقعاً بزرگ

وقتی عددهای بســیار بزرگ را به صــورت نمادگذاری علمی می‌نویسیم، نوشتن و خواندن آن‌ها ساده می‌شود.

فاصله تا کهکشان آندرومدا

فاصله تا نزدیک‌ترین کهکشـــان همسایهٔ ما، **آندرومدا**، تقریباً ۲۵۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ متر یا $2/5\times10^{+22}$ متر است.

آزمون

هر یک از موارد زیر را به‌صورت نمادگذاری علمی بنویسید.

شعاع اتم هیدروژن	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۵ m
طول ویروس کرونا	۰/۰۰۰۰۰۰۰۱ m
فاصلهٔ زمین تا پلوتو	۶۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ m
عمر متوسط انسان	۲۰۰۰۰۰۰۰۰۰ s

پی‌نوشت
۱. محاسبه‌گر ذهنی اهل هند که به عنوان رایانهٔ انسانی نیز معروف بود.

ریاضی و روش مهم‌تر از جواب

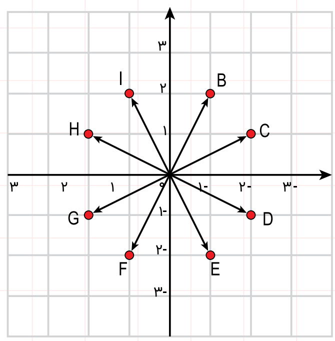
قسمت ششم

شراره تقی‌دستجردی، صبا قاسمی

در شمارهٔ قبل حرکت یکی از مهره‌های دوست‌داشتنی شطرنج، یعنی اسب را بررسی کردیم. حرکت L شکل اسب نمونهٔ خوبی بود تا ببینیم همانند حرکت‌های عمودی و افقی، با چنین حرکتی نیز می‌توانیم در صفحهٔ شطرنجی نامتناهی از هر خانه‌ای به هر خانهٔ دیگری سفر کنیم. برای صورت‌بندی ریاضی این امکان، از بردارها استفاده کردیم و در این راستا به جای صفحهٔ شطرنجی نامتناهی مجبور شدیم از دستگاه مختصاتی که فقط شامل نقطه‌های صحیح است، استفاده کنیم. به زبان بردارها، هشت بردار حرکت برای اسب چنین است:

$$\vec{b}=\begin{bmatrix}+1\\+2\end{bmatrix},\ \vec{c}=\begin{bmatrix}+2\\+1\end{bmatrix},\ \vec{d}=\begin{bmatrix}+2\\-1\end{bmatrix},\ \vec{e}=\begin{bmatrix}+1\\-2\end{bmatrix},\ \vec{f}=\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix},$$

$$\vec{g}=\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix},\ \vec{h}=\begin{bmatrix}-2\\+1\end{bmatrix} \text{ و } \vec{i}=\begin{bmatrix}-1\\+2\end{bmatrix}.$$



پس اگر بخواهیم از مبدأ مختصات به نقطهٔ $\begin{bmatrix}+1\\0\end{bmatrix}$ برویم، یک امکان چنین است:

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+\vec{b}+\vec{d}+\vec{g}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}+1\\+2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}+2\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}+1\\0\end{bmatrix}$$

به عبارت دیگر، ما با جمع سه بردار $\vec{b}$، $\vec{d}$ و $\vec{g}$ توانستیم بردار $\begin{bmatrix}+1\\0\end{bmatrix}$ را به دست آوریم.

- آیا با کمتر از سه بردار از هشت بردار مربوط به حرکت اسب، یعنی با دو بردار و یا حتی با یک بردار نیز می‌توان بردار $\begin{bmatrix}+1\\0\end{bmatrix}$ را تولید کرد؟

این مسئله یکی از مسئله‌هایی است که در شمارهٔ قبل آن را مطرح کردیم و شاید شما به آن فکر کرده باشید. البته شاید به این فکر کنید که: چرا ما این سؤال را مطرح می‌کنیم؟ وقتی یک پاسخ برای مسئله‌مان پیدا کرده‌ایم، دیگر استفاده از تعداد بردار کمتر چه تفاوتی ایجاد می‌کند؟

به طور کلی در ریاضیات مرسوم است که برای رسیدن به مقصود از شرط‌ها و امکانات **لازم** و **کافی** استفاده کنیم! لازم چون با حذف حتی یکی از این شرط‌ها دیگر نمی‌توانیم مسئله را حل کنیم. و کافی چرا که برای حل آن به شرط بیشتری نیاز نداریم. برای مثال، ما می‌دانیم که به کمک دو بردار $\begin{bmatrix}+1\\0\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}0\\+1\end{bmatrix}$ می‌توانیم تمام صفحه را پیمایش کنیم. در نتیجه منطقی نیست که از بردار یا بردارهای دیگری در کنار این دو استفاده کنیم، زیرا برای تحقق هدفمان این دو بردار لازم و کافی هستند و وجود بردار سوم ضروری نیست. حال که از این دو بردار نام بردیم، خوب است بدانید به دلیل اهمیت زیاد این دو بردار در ریاضیات، به آن‌ها اسمی نسبت داده‌اند. به بردار $\begin{bmatrix}+1\\0\end{bmatrix}$ بردار $\vec{i}$ و به بردار $\begin{bmatrix}0\\+1\end{bmatrix}$ بردار $\vec{j}$ گفته می‌شود. حالا که به اهمیت و ضرورت طرح این مسئله پی بردید، به آن برگردیم.

واضح است که با تنها یکی از بردارهای مربوط به حرکت اسب نمی‌توان چنین کاری را انجام داد، زیرا برای هر کدام از این بردارها، اگر n بار آن را با خودش جمع کنیم، مانند این است که n را در تک‌تک مؤلفه‌های طول و عرضش ضرب کرده‌ایم. از آنجا که هیچ کدام از مؤلفه‌های طول و عرض این هشت بردار صفر نیستند، پس با ضرب n در آن‌ها هم به مؤلفهٔ صفر برای عرض نمی‌رسیم. اگر مسئله برایتان پیچیده شده است، به مثال زیر نگاه کنید:

فرض کنید بخواهیم فقط از بردار $\vec{e}=\begin{bmatrix}+1\\-2\end{bmatrix}$ استفاده کنیم. در این صورت پاسخ سؤال بالا را باید در معادلهٔ زیر جست‌وجو کرد:

$$n\vec{e}=n\begin{bmatrix}+1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}+n\\-2n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}+1\\0\end{bmatrix}$$

اما چنین چیزی امکان‌پذیر نیست، زیرا هیچ عدد طبیعی n همزمان هر دو معادلهٔ $n=+1$ و $-2n=0$ را برآورده نمی‌کند.

به طریق مشابه می‌توانید ببینید با جمع‌کردن تعدادی متناهی از هر کدام از بردارهای $\vec{b}$، $\vec{c}$، $\vec{d}$، $\vec{f}$، $\vec{g}$، $\vec{h}$ و $\vec{i}$ نیز نمی‌توان بردار $\begin{bmatrix}+1\\0\end{bmatrix}$ را تولید کرد. پس کمترین تعداد بردار از هشت

نشانی

بردار مربوط به حرکت اسب، برای تولیدکردن بردار $\begin{bmatrix}+1\\0\end{bmatrix}$، برابر با یک نیســـت. درمورد استفاده از دو بردار چه می‌توان گفت؟ برای مثال از بیـــن بردارهای نامبرده، دو بردار $\vec{c}$ و $\vec{i}$ را انتخاب می‌کنیم. آیا از جمع‌کردن n بار بردار $\vec{c}$ با m بار بردار $\vec{i}$ می‌توان به بردار $\begin{bmatrix}+1\\0\end{bmatrix}$ رسید؟

بیایید این مثال را بررسی کنیم:

$$n\vec{c}+m\vec{i}=n\begin{bmatrix}+2\\+1\end{bmatrix}+m\begin{bmatrix}-1\\+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}+2n\\-1n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1m\\+2m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}+2n-m\\n+2m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}+1\\0\end{bmatrix}$$

در اینجـــا هم مجدداً مؤلفهٔ عرض بردار $\begin{bmatrix}+1\\0\end{bmatrix}$ که صفر اســـت ایـــن کار را امکان‌پذیر نمی‌کند، زیرا هر دوی مؤلفه‌های عرض بردارهای $\vec{c}$ و $\vec{i}$ عددهای مثبت هستند.

بـــا این توضیحات می‌تـــوان نتیجه گرفت، هیـــچ‌گاه ترکیب بردارهایی که هر دو مؤلفهٔ عرض مثبت داشته باشند، برای کار ما مناسب نیســـتند و به طریق مشابه هیچ‌گاه هر دو برداری که دارای مؤلفه‌های عرض منفی باشـــند نیز انتخاب مناسبی نیستند.

بسیار عالی! تا اینجا تعداد زیادی از حالت‌های انتخاب دو بردار از هشت بردار حرکت اســـب را حذف کرده‌ایم. اکنون نوبت به بررســـی این حالت است که دو برداری را انتخاب کنیم که یکی مؤلفهٔ عرضش منفی باشد و دیگری مؤلفهٔ عرضش مثبت.

اجازه دهید این بار بردار $\vec{c}=\begin{bmatrix}+2\\+1\end{bmatrix}$ را با بردار $\vec{f}=\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$ درنظر بگیریم. مشابه حالت اخیر می‌توان نوشت:

$$n\vec{c}+m\vec{f}=n\begin{bmatrix}+2\\+1\end{bmatrix}+m\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}+2n\\+1n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1m\\-2m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2n-m\\n-2m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}+1\\0\end{bmatrix}$$

یعنی باید بتوان دو عدد طبیعی n و m را بیابیم که هم‌زمان در هر دو معادلهٔ $2n-m=+1$ و $n-2m=0$ صدق کنند.

• اکنون نوبت شماست!

الف) آیـــا دو معادلهٔ بالا در مجموعـــهٔ عددهای طبیعی دارای جواب است؟

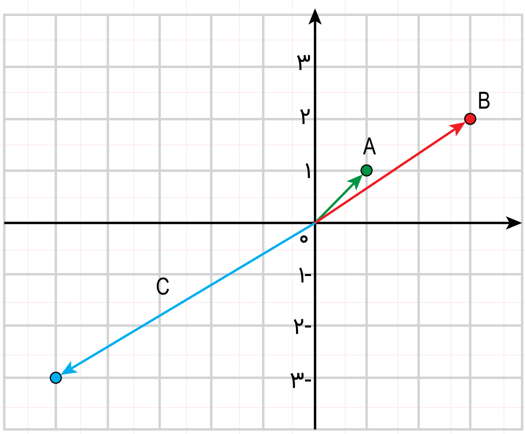
ب) به‌طور مشابه بررسی کنید: آیا از بین حالت‌های زیر، حالتی وجود دارد که ترکیب دو بردار، بتواند بردار $\begin{bmatrix}+1\\0\end{bmatrix}$ را تولید کند؟

$\{\vec{b},\vec{d}\},\{\vec{b},\vec{e}\},\{\vec{b},\vec{f}\},\{\vec{b},\vec{g}\},\{\vec{c},\vec{d}\},\{\vec{c},\vec{e}\},\{\vec{c},\vec{g}\},\{\vec{h},\vec{d}\},$
$\{\vec{h},\vec{e}\},\{\vec{h},\vec{f}\},\{\vec{h},\vec{g}\},\{\vec{i},\vec{d}\},\{\vec{i},\vec{e}\},\{\vec{i},\vec{f}\},\{\vec{i},\vec{g}\}$

کـــه در آن، $\vec{b}=\begin{bmatrix}+1\\+2\end{bmatrix}$، $\vec{c}=\begin{bmatrix}+2\\+1\end{bmatrix}$، $\vec{d}=\begin{bmatrix}+2\\-1\end{bmatrix}$، $\vec{e}=\begin{bmatrix}+1\\-2\end{bmatrix}$، $\vec{f}=\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$، $\vec{g}=\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}$، $\vec{h}=\begin{bmatrix}-2\\+1\end{bmatrix}$ و $\vec{i}=\begin{bmatrix}-1\\+2\end{bmatrix}$ است.

اکنون اجازه دهید از اســـب و شطرنجش فاصله بگیریم و این سؤال را به صورت مشابه در مسئلهٔ دیگری بررسی کنیم.

فرض کنید باز در صفحهٔ مختصات با نقاط صحیح هســـتیم. این بار حرکت‌های مجاز را با بردارهای $\vec{a}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$، $\vec{b}=\begin{bmatrix}+3\\+2\end{bmatrix}$ و $\vec{c}=\begin{bmatrix}-5\\-3\end{bmatrix}$ در نظـــر بگیرید. اگر از مبدأ با هر یک از این بردارها حرکت کنیم مطابق شکل زیر به سه نقطهٔ A، B و C می‌رسیم.



• باز هم نوبت شماست!

الف) اگر از مبدأ مختصـــات $\begin{bmatrix}+3\\0\end{bmatrix}$ یک بار با $\vec{a}$، یک بار با $\vec{b}$ و سپس دوبار با $\vec{c}$ حرکت کنیم به کدام نقطه می‌رسید؟

ب) آیـــا با ترکیب تعداد متناهی بـــردار از بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ می‌توان از مبدأ مختصات به نقطهٔ $\begin{bmatrix}+1\\0\end{bmatrix}$ منتقل شـــد؛ با این شـــرط که ضریب‌های بردارها را به جـــای مجموعهٔ عددهای طبیعی، مجموعـــهٔ عددهای صحیح در نظر بگیریم؟ (شـــرط منفی‌بـــودن ضریب‌ها به این معناســـت که شـــما می‌توانید قرینه‌های ســـه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را نیز به عنوان حرکت مجاز در نظر بگیرید.)

پ) با همان شـــرط مسئلهٔ ب، کمترین تعداد برداری که با هم ترکیب می‌شوند تا بردار $\begin{bmatrix}+1\\0\end{bmatrix}$ به دست آید، چندتاست؟ این بردار(ها) کدام‌اند؟

ادامه دارد ...

ریاضی‌دان رزمنده

بهزاد منوچهریان • تصویرگر: حسین یوزباشی

ریاضی‌دان معاصر: دکتر سیامک یاسمی

در سال ۱۳۳۸ در خرمشهر به دنیا آمد. در سال ۱۳۵۶ از «دبیرستان البرز» در تهران دیپلم گرفت و همان سال وارد رشتهٔ ریاضی «دانشگاه شهید بهشتی» شد. او در دبیرستان جزو آخرین گروه از دانش‌آموزانی بود که به اصطلاح طبق نظام قدیم تحصیل می‌کردند.

او در نیم‌سال اول دانشگاه درس «مبانی ریاضی و ریاضی عمومی» داشت که از اصطلاح‌های مجموعه‌ها و تعریف حد بر اساس اپسیلون و دلتا چیزی دستگیرش نشد، زیرا در دبیرستان چیزی در مورد این موضوع‌ها نخوانده بود. مدتی بعد هم انقلاب فرهنگی شد و دانشگاه‌ها تعطیل شدند. او هم به آموزش‌وپرورش رفت و به تدریس در مدرسه‌های راهنمایی و دبیرستان‌ها مشغول شد. در هفته ۳۶ ساعت درس می‌داد.

سه سال بعد که دانشگاه‌ها باز شدند، او باز هم به تدریس در مدرسه ادامه داد. سرانجام در شهریور ۱۳۶۴ دورهٔ کارشناسی را به پایان رساند. همان سال در دورهٔ کارشناسی ارشد به دانشگاه کرمان راه یافت و با دکتر **رضوی** در زمینهٔ «هندسه منیفلد» کار کرد. در حالی که دانشجوی کارشناسی ارشد بود، با اطلاع از تأسیس دورهٔ دکترای ریاضی در «مؤسسهٔ ریاضیات مصاحب» در امتحان ورودی آن شرکت کرد و با کسب رتبهٔ دوم یکی از هفت نفری بود که در دورهٔ دکترای ریاضی مؤسسه قبول شد.

پس از به پایان رسـانـدن دورهٔ کارشناسی ارشـد در بهمن ۱۳۶۶ از دانشگاه کرمان مدت شـش‌ماه به جبههٔ جنـگ ایران و عراق رفت و پس از گذراندن آن دوره به مؤسسـهٔ ریاضیات آمد، به او اعلام شد که در گرایش جبر پذیرفته شـده است. او که در دورهٔ کارشناسی ارشد درس‌های هندسـه را خوانده بود، ناچار شد همهٔ درس‌های جبر را یکی‌یکی بگذراند.

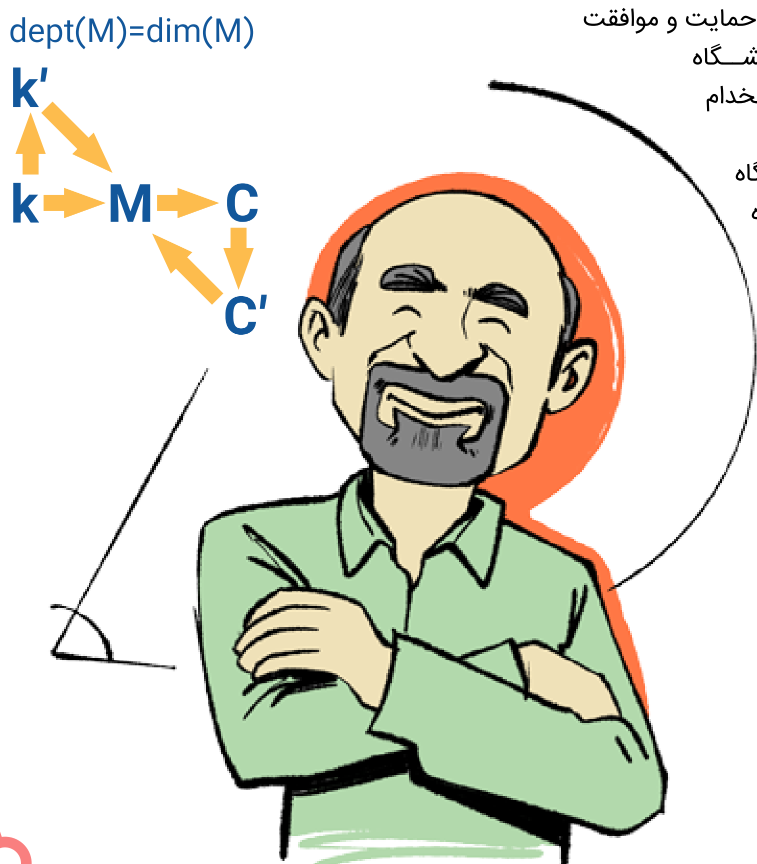
او اولین دانشـجویی بود که امتحان جامـع داد. اما بنا بـه دلایلی از ادامهٔ تحصیل صرف‌نظر کرد و تصمیم گرفت به دانمارک برود و پس از سه سال موفق شد مدرک دکترای خود را در زمینهٔ جبر بگیرد.

چند ماه بعد از اخذ مدرک دکترا از دانمارک به ایران بازگشـت و به دانشگاه تهران رفت و با کمک، حمایت و موافقت رییس دانشـکدهٔ علوم این دانشـگاه موفق شد در دانشگاه تهران استخدام شود.

دکتر یاسمی از زمانی که در دانشگاه تهران اسـتخدام شـد، همواره متوجه وضعیت دانشجویانش و دنبال حل مشکلات آنان بود.

او از همان موقع شروع کرد به تدریس درس‌های جبر و تربیت دانشجویان مستعد و علاقه‌مند.

یاسـمی در مدتـی که در دانشـگاه تهران مشـغول بـود، بـرای شـرکت در هم‌اندیشی‌ها (سمینارها) و سخنرانی‌های ریاضی به کشورهای متعدد سفر کرد و همچنان به فعالیت‌های آموزشـی و پژوهشی خود ادامه می‌دهد.



نگین دانش‌ها

کاربرد ریاضیات در زندگی

مجید عمیق

ریاضیات نه تنها درسی است که هر دانش‌آموزی آن را در مدرسه می‌خواند، بلکه پایه و اساس بسیاری از رشته‌های دیگر، مانند اقتصاد، فناوری، رایانه، تجزیه‌وتحلیل داده‌ها، فیزیک، شیمی، آمار، پزشکی، پیش‌بینی آب و هوا، هنر، حمل‌ونقل ریلی، هوافضا، کسب‌وکار، ساخت‌وساز، ورزش، طراحی، صنعت خودرو، شهرسازی، موسیقی، بازاریابی، انجام نظرسنجی، بودجه‌بندی، مدیریت زمان انجام پروژه‌ها و ... را تشکیل می‌دهد. همین‌طور در مورد بسیاری از کارهای روزمره، مانند آشپزی، باغبانی، برنامه‌ریزی مسافرت، رانندگی، خریدهای روزانه و ... با ریاضیات سروکار داریم.

در حقیقت علم و فناوری بدون ریاضیات وجود ندارد و اکنون ریاضیات به علم مهم کشورها، به‌ویژه کشورهای درحال توسعه، تبدیل شده است. هر چند هیچ تعریف پذیرفته‌شده‌ای از اینکه ریاضیات واقعاً چیست وجود ندارد، با این حال ریاضیات به‌طور کلی به دنبال الگوهایی است که برای حل مسائل خاص می‌توان از آن‌ها استفاده کرد. این رشته شامل موضوع‌های گوناگونی مانند نظریهٔ اعداد، جبر، هندسه، و تجزیه‌وتحلیل می‌شود.

در ادامه به مواردی از کاربردهای ریاضیات اشاره می‌کنیم:

پزشکی: شاید اینکه پزشکی می‌تواند با ریاضیات سروکار داشته باشد، برایتان سؤال‌برانگیز باشد. اما در جراحی‌ها، جدا از جنس خود سوزن جراحی، هندسهٔ سوزن جراحی که شامل قطر سوزن، شکل نوک سوزن، محل عبور نخ از سوزن و انحنای سوزن است، بسیار اهمیت دارد. معمولاً از سوزن‌هایی که مقطع گرد دارند و تیز نیستند برای بافت‌های نرم، مانند معده و از سوزن‌هایی که مقطع ذوذنقه‌ای شکل دارند، برای بافت‌های سفت استفاده می‌شود.

مهندسی ساختمان: حتماً می‌دانید که هر ساختمان دارای وزنی است که از طریق ستون‌ها به عمق زمین منتقل می‌شود. مهندسان عمران و معماران همهٔ محاسبه‌ها را روی کاغذ می‌آورند و برای این کار از فرمول‌هایی استفاده می‌کنند تا بتوانند وزن ساختمان را بر اساس تعداد طبقه‌ها، جنس خاک، قطر ستون‌ها و ... مشخص کنند.

جواهرسازی: برای برش‌دادن هر قطعه طلا یا الماس و قراردادن آن در پایه‌های گردن‌بند یا انگشتر، به هندسه و اندازه‌گیری نیاز داریم. برای چسباندن سنگ به پایه و مطمئن‌شدن از قرار گرفتنش در جای خود، ابتدا باید پایه را بر اساس وزن سنگ و نوع برش آماده کرد که همهٔ این موارد با ریاضیات سروکار دارد.

هنر: یکی از عرصه‌هایی که بدون ریاضیات قابل اجراشدن نیست، حوزهٔ هنر است که نقاشی، مجسمه‌سازی، موسیقی، پویانمایی، عکاسی و ... از جمله زیرمجموعه‌های این رشته هستند. در عکاسی زاویه‌ای که عکاس عکس را می‌گیرد یا مقدار نوردهی - مدت زمانی که نوربند (شاتر) باز و بسته می‌شود - بسیار حائز اهمیت است. یا در طراحی پویانمایی (انیمیشن) طراح، مجهولات را از طریق مجموعه‌ای از معادله‌های ساده کشف می‌کند تا هنگام کار با اجسامی که سروکار دارد و تغییر می‌کنند، جنبه‌های شکل‌های هندسی را برون‌یابی کند. همین‌طور طراح پویانمایی از جبر خطی برای نشان‌دادن شیوهٔ متحرک‌سازی و تبدیل نقاشی‌ها و درشت‌نمایی استفاده می‌کند. یا در موسیقی، چه به آن گوش دهید و چه آن را بسازید، همیشه ریاضیات دخالت دارد. هر آهنگی ریتم خاص خود را دارد و معمولاً از عددها و ریاضیات برای توصیف و آموزش موسیقی استفاده می‌شود. درک کسر و نسبت‌ها، به شناخت ریتم نت‌های موسیقی کمک می‌کند.

برنامه‌ریزی شهری: هنگام برنامه‌ریزی برای یک شهر، برآورد هزینه‌ها، میزان بودجه و اعتبارات، و مدت زمان

انجام و پایان پروژه‌ها باید چارچوب زمانی مشخصی داشته باشــد که تنها با اســتفاده از مفهوم‌های ریاضی امکان‌پذیر است و برای این کار از جبر و مثلثات استفاده می‌شود.

کشاورزی: ریاضیات در حوزهٔ کشاورزی نقشی حیاتی ایفا می‌کند. کشــاورزان باید از علم ریاضیات دانش کافی داشته باشند. ریاضیات به‌طور دقیق شرایط آب و هوایی را توصیف می‌کند و میزان اســیدیتهٔ خــاک را تجزیه‌وتحلیل می‌کند و امکان شناســایی نوع محصولات قابل کشت را مشخص می‌سازد. ریاضیات به کشاورز کمک می‌کند با تعیین عملکرد و کمیــت محصولات، تقریب مقدار بازده نســبت به قطعه زمین، کمک به بهبود بازده و مخارج، محاســبهٔ تلفات مورد انتظار، و اندازه و ابعاد را برنامه‌ریزی و تعیین کند.

آشــپزی: پخت‌وپز، چه از نوع آشپزی خانگی و روزمره در خانه‌ها باشــد و چه از نوع حرفه‌ای در رستوران‌ها، تماماً با دانش ریاضی ســروکار دارد. مــواد مورد نیاز برای هر نوع غذا، باید دقیقاً اندازه‌گیری شــود و برای این کار از عملیات ضرب و تقســیم استفاده می‌شــود تا مقدار دقیق مورد نیاز با توجه به تعداد نفرات محاســبه شود؛ برای مثال، محاسبهٔ مقدارهای مورد نیاز با توجه بــه اندازهٔ دیگ غذا. همچنین شخص آشپز باید با نسبت‌ها و دانش واحد اندازه‌گیری وزن مورد اســتفاده، مانند فنجان، وزن، لیتر، گرم و غیره آشنایی داشته باشد.

نرم‌افــزار رایانه: بدون ریاضیات رایانه‌ها نمی‌توانســتند وجود داشته باشند. علوم رایانه از دانش‌های متعدد ریاضیات بهره می‌گیرد کافی اســت به برنامه‌هایی مانند «اکســل»[1]، «پاورپوینت»[2] و «ورد»[3] فکر کنید. توسعه و گسترش چنین برنامه‌هایی بدون کمک ریاضی غیرممکن بود. همین موضوع در مــورد هر نوع نرم‌افزار روی رایانهٔ کیفی (لپ‌تاپ) یا تلفن همراه هم صدق می‌کند. برای اجرای این قبیل نرم‌افزارها به دانش کدنویسی، رمزنگاری و محاسبه‌ها نیاز داریم.

ورزش: شــاید شــنیدن ارتباط بین ریاضیات و ورزش برایتان تعجب‌آور باشد. اما باید بگوییم که ریاضیات بخش مهمی از هر رشــتهٔ ورزش را تشکیل می‌دهد و نقش بارزی در بازدهــی ورزش دارد. ریاضیات مهارت‌های شــناختی و تصمیم‌گیــری را تقویت می‌کند. ایــن مهارت‌ها برای مربی یا ورزشــکار بســیار اهمیت دارند، زیرا به او کمک می‌کنند تصمیم‌های درستی برای تیمش بگیرد. مهندسی و مثلثات به بازیکن کمک می‌کند، مسیر و زاویه‌ای را که توپ برای رسیدن به هدف باید طی کند، محاسبه کند تخمین بزند. همچنین ریاضیات کمک می‌کند در لحظات حســاس بر اساس منطق تصمیم‌گیری شــود؛ به‌ویژه در ورزش‌های گروهی که به اتخاذ تصمیم‌های درست نیاز است. احتمالات و استدلال منطقی از جمله دانش‌های ریاضی در این مورد هستند.

اقتصاد: تحلیل بازار و پیش‌بینی تحولات آینده بخش مهم علم اقتصاد را تشــکیل می‌دهد. ایــن توانمندی به شرکت‌های تولیدی و سیاست‌مداران کمک می‌کند نسبت به تغییرات واکنش نشان دهند. با این وصف این تغییرات فقط به کمک مفهوم‌های ریاضی قابل پیش‌بینی‌اند. جبر و آمار از جملهٔ مواردی هستند که در این زمینه کاربرد دارند. بنابراین برای بازار و اقتصاد حائز اهمیت‌اند. برنامه‌ریزی برای مسافرت، بودجه‌بندی، بازاریابی، خریدهای روزانهٔ زندگی، مدیریت زمان، بازی‌های ویدئویی، ادارهٔ امور بیمارستان‌ها، رانندگی، طراحی، تفکر انتقادی، باغبانی، انجام نظرسنجی، کسب‌وکار، بانکداری، تزیین (دکوراسیون) یک مکان، آمار، و ... از دیگر فعالیت‌هایی هستند که ریاضیات نقش مهمی در آن‌ها ایفا می‌کند.

سخن آخر

ریاضیات فقط دربارهٔ عددها، معادله‌ها، محاسبه‌ها یا الگوریتم نیست، بلکه در مورد «درک» است. (ویلیام پل تورستون). ریاضیات فقط مجموعه‌ای از مفهوم‌ها و معادله‌های انتزاعی و محدود به کتاب‌های درسی نیست، بلکه کاربرد ریاضیات شامل استفادهٔ عملی از اصول، فن‌ها (تکنیک‌ها) و الگوهای (مدل‌های) ریاضی برای حل مســئله‌های متفاوت است. ریاضیات در دنیای مدرن امروز یک فناوری برتر محســوب می‌شود و جای تعجب ندارد که ریاضیات ستون فقرات آن هستند. ریاضیات جزیره‌ای متروکه نیست، بلکه پلی است که یادگیری موضوع‌های متفــاوت را به یکدیگر متصل و تقویت می‌کند. ریاضیات یک زبان جهانی است. در واقع تنها زبانی اســت که در فرهنگ‌ها، کشورها و زبان‌های مختلف قابل درک اســت. محاسبهٔ ســادهٔ ۴=۲+۲ در سراسر جهان یکسان اســت، اما آنچه اهمیت دارد، درک مفهوم ریاضی اســت. گالیله، فیزیک‌دان، مهندس و ستاره‌شناس مشهور جهان، گفته اســت: اگر مطالعه را دوباره شروع می‌کردم، توصیه‌های افلاطون را به کار می‌گرفتم و با ریاضیات شروع می‌کردم. ریاضیات در عمل به ما کمک می‌کند بفهمیم هر چیزی چطور و چگونــه کار می‌کند و به ما کمک می‌کند تا آینده را پیش‌بینی کنیم.

پی‌نوشت‌ها

1. Excel
2. PowerPoint
3. Word

ریاضی در بازار کار

ژما جواهری‌پور

آیا در مورد شغل آیندهٔ خود و درآمد آن فکر کرده‌اید؟ از شرایط کاری خود در آینده چه تصوری دارید؟ از چه سنی فکر می‌کنید وارد «بازار کار» شوید؟

اشـــتغال یکی از مسائل مهم اقتصادی است و بازار کار یکی از چهار بازار مهم در علم اقتصاد است. برای آنکه بدانید چرا اشتغال اهمیت دارد و چرا دولت‌ها برای کم‌کردن بیکاری برنامه‌ریزی می‌کنند، مثالی می‌زنم. اگر یک میلیون نیروی کار شـــاغل به اندازهٔ ۱۲۵۰×۱۰^{۱۲} میلیارد تومان ثروت تولید کنند، وجود ۱۰۰ هزار بیکار به معنای وجـــود امکان افزایش ۱۲۵×۱۰^{۱۲} میلیارد تومان درآمد برای کشور است که از دست رفته است.

در اقتصاد مفهومی داریم به نام «نرخ مشارکت اقتصادی» که با رابطهٔ زیر نمایش داده می‌شود:

$$\text{نرخ مشارکت اقتصادی} = \frac{\text{جمعیت فعال بالای ۱۰ سال}}{\text{جمعیت بالای ۱۰ سال}}$$

نرخ مشـــارکت اقتصادی یعنی چه تعداد از افراد بالای ۱۰ سال به نسبت کل جمعیت در «بازار کار» مشغول فعالیت هستند.

بازار کار جایی است که نیروی کار مبادله می‌شود. مثل هر بازار دیگری یک سمت عرضه و یک ســـمت تقاضا وجود دارد. در بـــازار خرید و فروش کالا، فروشـــنده کالای خود مثلاً نان را به مصرف‌کننده به قیمتی مشخص می‌فروشد.

در بـــازار کار هر فرد توانایی و مهارت و یـــا دانش و علم خود را عرضـــه می‌کند و یک خریدار که ممکن اســـت صاحب یک شـــرکت تجاری و یا مدیر یک دستگاه دولتی باشد، متقاضی دریافت آن است و براســـاس توافق به‌عمل‌آمده بین طرفین متقاضی، به فرد دســـتمزد پرداخت می‌شود. بنابراین در این بازار، کالای مبادله‌شـــده دانش و مهارت است. حالا ببینیم در این بازار «نرخ دستمزد» چگونه مشخص می‌شود.

پیش‌بینی می‌کنید اگر تقاضای نیـــروی کار ثابت بماند، ولی عرضهٔ نیروی کار زیاد شود، یعنی اگر تعداد کسانی که جویای کار هستند بیشتر شود، قیمت نیروی کار یا همان دستمزد چه تغییری می‌کند؟

مثلاً اگر یک شـــرکت به یک نفر مهنـــدس صنایع چوب نیاز داشته باشد و ۱۸ نفر متقاضی کار، برگهٔ (فرم) ثبت نام پر کنند، دستمزد پیشنهادی شرکت کاهش می‌یابد. حال اگر بنگاه‌ها و شرکت‌های موجود بخواهند نیروی بیشتری استخدام کنند، در این صورت قیمت نیروی کار یعنی دستمزد افزایش می‌یابد.

از تعامل عرضه و تقاضای نیروی کار، دستمزد که همان قیمت نیروی کار است، مشخص می‌شود که اصطلاحاً به آن «دستمزد تعادلی» گفته می‌شود. برای مثال، اگر کل فرصت‌های شغلی برای اســـتخدام نیروهای خدماتی در همهٔ شرکت‌ها ۱۵۰ عدد باشـــد و ۱۵۰ نفر هـــم متقاضی اســـتخدام در این فرصت‌ها باشند، بازار عرضه و تقاضا متعادل می‌شود و دستمزد تعادلی اســـت. این یعنی همهٔ ۱۵۰ نفر در محل شغل خود با دستمزد پیشنهادی مشغول به کار شده‌اند. در این حالت میزان تقاضای کار و عرضـــه نیروی کار با هم برابر شـــده و بـــازار به اصطلاح تسویه شده است. ولی اگر نیروی کار درخواست دستمزد بالاتر داشـــته باشد و کارفرما حاضر به پرداخت آن نباشد، نیروی کار به جای کارکردن، اســـتراحت می‌کند و اگر کارفرما دستمزدی کمتر از دستمزد تعادلی پیشنهاد دهد، نیروی کار پیدا نخواهد کرد. اگر شـــما کارفرما و صاحب یک شرکت رایانه‌ای باشید، و دستمزد تعادلی استخدام یک مهندس رایانه با سابقهٔ کار بالای پنج ســـال ماهانه ۳۰ میلیون تومان باشد، آیا شما با پیشنهاد ماهانه ۱۵ میلیون تومان دســـتمزد می‌توانید یک مهندس با ویژگی بالا استخدام کنید؟

برای اینکه بتوانید در آینده شـــغلی متناســـب با تحصیلات و مهارت‌های خود پیدا کنید، باید از بازار کار و داده‌های آن، مثل نرخ دستمزد و میزان عرضه‌وتقاضای نیروی کار ماهر اطلاعاتی داشته باشید و بتوانید با محاسبه‌های ریاضی، تحلیلی از بازار کار خود پیدا کنید.

ریاضی و مسئله ۲۵
دورهٔ ۲۹ | شمارهٔ ۶

جور دیگر باید دید

تمرین‌های متفاوت

خسرو داودی
آرش رستگار

در ایران و اکثر کشورهای جهان «آموزش ریاضیات به سبک تصویری» مغفول مانده یا به آن کم‌توجهی شده است؛ از موارد استثنا می‌توان به نظام آموزش ریاضی در کشور سنگاپور اشاره کرد. در این سلسله مقاله‌ها تلاش شده است این نقیصه با طرح تمرین‌هایی متفاوت تا حدی جبران شود.

هفتمی‌ها

مسئلهٔ ۱. برای نماد توان می‌توانستیم از نمادهای دیگری استفاده کنیم. مثلاً به جای $2\times2\times2=2^3$ بنویسیم: 2_3 یا ${}^3 2$ یا ${}_3 2$. اما نماد ${}_3 2$ را برای کار دیگری رزرو کرده‌ایم. مثلاً در سال‌های بعد با مفهوم دنباله آشنا می‌شوید که جملهٔ سوم آن مثلاً با نماد a_3 مشخص می‌شود. حال که نماد 2^3 را برای توان به کار می‌بریم، به کاربردن نماد ${}^3 2$ ممکن است مشکل‌ساز باشد. چون در ${}^3 2^3$ معلوم نیست عدد ۳ اندیس بالای چپ است برای یک ۲ یا اندیس بالای راست است برای ۲ دیگری. بنابراین در ساختن نمادها باید نکاتی کاربردی را در نظر داشت.

حال نماد دیگری تعریف می‌کنیم:

$${}_3 2 = 2^{2^2}$$

برای تعریف 2^{2^2} از بالا پرانتزگذاری می‌کنیم؛ یعنی: $2^{2^2} = 2^{(2^2)}$.

همین‌طور برای ${}_4 2$ و توان‌های بالاتر.

الف) یک قانون بنویسید که نماد ${}_n 2$ در آن صدق کند.

ب) تعریف کنید: $[[x]]=x^x$. آیا می‌توانید قانونی برای نماد $[[x]]$ پیدا کنید؟

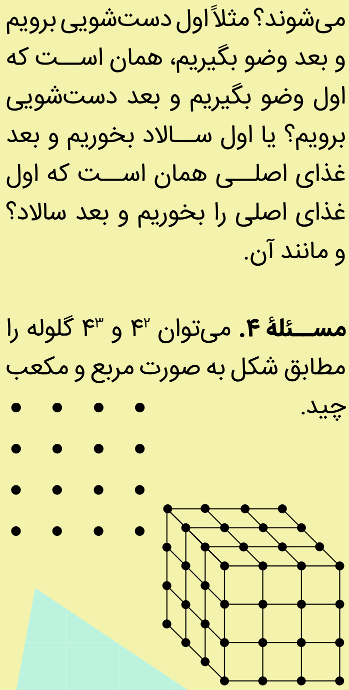
ج) به جای نماد 2^n از نماد $2]n[$ استفاده کنید و فرمول $2^m.2^n=2^{m+n}$ را به این زبان جدید بازنویسی کنید.

مسئلهٔ ۲. برای $\sqrt{2}$ نماد $2^{\frac{1}{2}}$ هم در دسترس است. در حالت کلی $\sqrt[n]{2}$ همان $2^{\frac{1}{n}}$ می‌باشد. نماد $\sqrt[n]{2}$ برای n عدد گویا را چطور تعریف می‌کنید؟

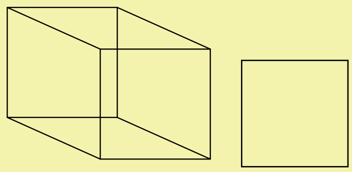
آیا این توسعهٔ شما با نمادهای قبلی سازگار است؟ آیا می‌توانید $\sqrt[x]{2}$ را برای عدد اعشاری x تعریف کنید؟ با این کار نماد جدیدی برای مفهوم توان ساخته‌اید. آیا این نماد جدید برای شما ترجیح دارد یا نماد قدیمی 2^x؟ چرا؟

مسئلهٔ ۳. عبارت $2^{(3+5)}$ را با عبارت 2^3+2^5 مقایسه کنید و بعد تصمیم بگیرید آیا به توان رساندن عدد ۲ و ساختن 2^n به عمل جمع احترام می‌گذارد؟ یعنی آیا اول دو عدد را جمع کنیم و ۲ را به توان حاصل‌جمع برسانیم، همان است که اول ۲ را به توان هر یک برسانیم و بعد جمع کنیم؟ آیا این دو عمل جابه‌جا می‌شوند؟ مثلاً اول دست‌شویی برویم و بعد وضو بگیریم، همان است که اول وضو بگیریم و بعد دست‌شویی برویم؟ یا اول سالاد بخوریم و بعد غذای اصلی همان است که اول غذای اصلی را بخوریم و بعد سالاد؟ و مانند آن.

مسئلهٔ ۴. می‌توان 4^2 و 4^3 گلوله را مطابق شکل به صورت مربع و مکعب چید.



می‌توان تصور کرد که یک پاره‌خط I را به توان برسانیم. I^2 می‌شود یک مربع و I^3 می‌شود یک مکعب. مطابق شکل آیا می‌توانید تصور کنید که $(\text{دایره})^2$ به چه شکلی خواهد بود؟



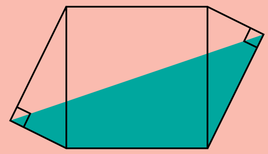
مسئلهٔ ۵. برای توان‌های صحیح مثبت عبارت 2^n تعریف می‌شود و در رابطهٔ $2^m.2^n=2^{m+n}$ صدق می‌کند. ما برای عبارت‌های گویا $2^{\frac{p}{q}}$ را چنان تعریف می‌کنیم که اتحاد بالا باز هم برقرار بماند. برای تعریف 2^0 هم اتحاد بالا راهگشاست. بعد از آن برای تعریف 2^{-n} باز هم می‌توان از تعریف 2^0 و از اتحاد بالا کمک گرفت. در مورد $2^{-\frac{p}{q}}$ هم به همین صورت. برای توان‌های اعشاری منفی نیز همین روال قابل استفاده است. این مسیر فکری را به صورت دقیق ریاضی پیاده‌سازی کنید.

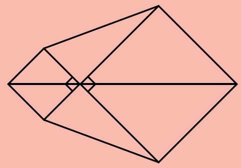
مسئلهٔ ۶. دنبالهٔ $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots$ را در نظر بگیرید و در کنار دنبالهٔ $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots$ قرار دهید. هر دو به کمک ایدهٔ به توان رساندن درست شده‌اند. اما در یکی پایه را ثابت گرفته‌ایم و توان را تغییر داده‌ایم و در دیگری دنبالهٔ اول در حال رشد کردن و بزرگ‌شدن است. اما رشد دنبالهٔ دوم بسیار سریع‌تر است. دنبالهٔ اول را در سال‌های بعد دنباله‌ای چندجمله‌ای و دنبالهٔ دوم را دنباله‌ای توانی خواهیم نامید. رشد دنباله‌های توانی بسیار سریع‌تر از دنباله‌های چندجمله‌ای است. حال دنبالهٔ $1^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{2}}, 4^{\frac{1}{2}}, \ldots$ را با دنبالهٔ $(\frac{1}{2})^1, (\frac{1}{2})^2, (\frac{1}{2})^3, (\frac{1}{2})^4, \ldots$ مقایسه کنید. در مورد رشد آن‌ها چه می‌توانید بگویید؟

هشتمی‌ها

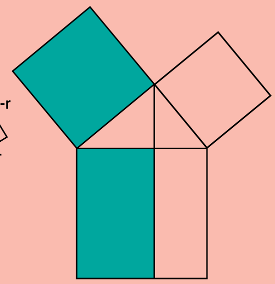
مسئلهٔ ۱. به کمک شکل‌های زیر اثباتی هندسی از قضیهٔ فیثاغورس ارائه دهید.

الف)

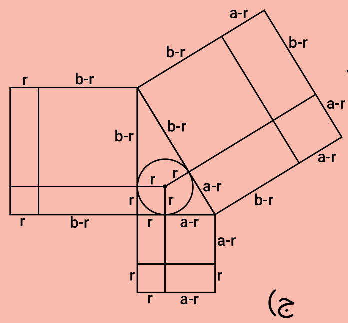




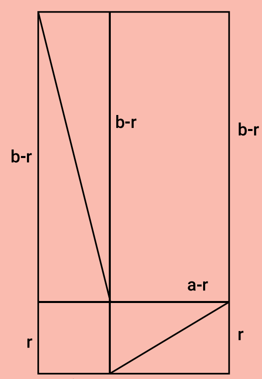
ب)

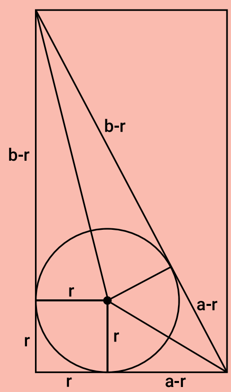


ج)



د)

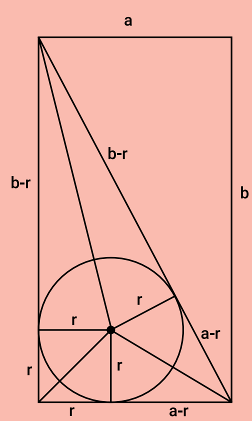




$$r^2+r(a-r)+r(b-r)=\frac{ab}{2} \qquad (a-r)(b-r)=\frac{ab}{2}$$

$$r(a+b-r)=\frac{ab}{2}$$

مسئلهٔ ۲. بگویید چرا مرحله‌های اثبات قضیهٔ فیثاغورس که در ادامه آمده صحیح هستند.



$pr =$ مساحت

$p =$ نصف محیط $=\frac{a+b+c}{2}$

از شکل می‌دانیم: $c=(a-r)+(b-r)$

پس: $r=p-c$

$p(p-c)=$ مساحت $=\frac{ab}{2}$

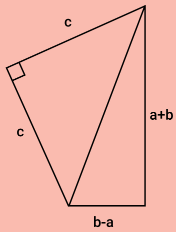
$(a+b+c)(a+b-c)=2ab$

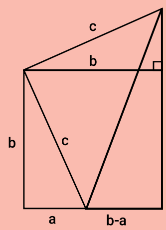
$(a+b)^2-c^2=2ab$

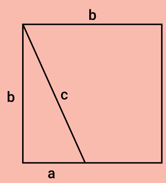
$a^2+b^2-c^2=0$

مسئلهٔ ۳. از شکل‌های زیر اثباتی برای قضیهٔ فیثاغورس بسازید.

الف)

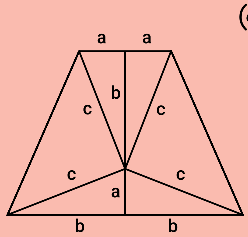




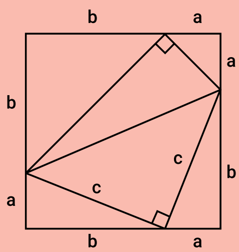


$$\frac{c^2}{2}+\frac{(b^2-a^2)}{2}=b^2$$

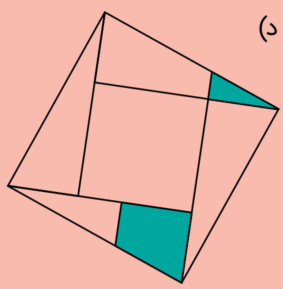
ب)

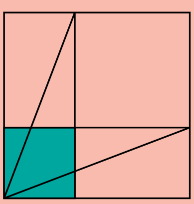


ج)

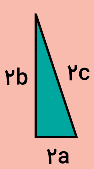


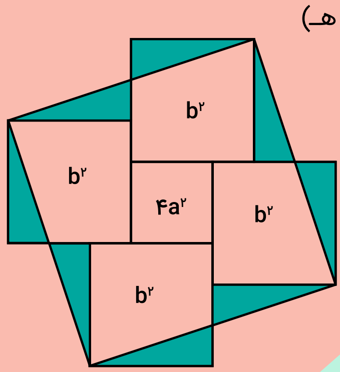
د)





هـ)





نهمی‌ها

مسئلهٔ ۱. در معادلهٔ $ax+by=c$ ضریب‌های $\frac{c}{b}$ و $\frac{c}{a}$ نقطه‌های تقاطع خط با محورها هستند. برای اطمینان قرار دهید: $x=0$ و همچنین بار دیگر: $y=0$. پس یک خط را می‌توان با نقطه‌های تقاطعش با دو محور مشخص کرد.

الف) آیا با این روش همهٔ خط‌ها مشخص می‌شوند؟

ب) آیا می‌توان یک خط را با تقاطعش با محور xها و زاویهٔ آن‌ها مشخص کرد؟ آیا با این روش همهٔ خط‌ها مشخص می‌شوند؟

ج) آیا می‌توان یک خط را با شعاع دایره‌ای به مرکز مبدأ که بر آن مماس است و نقطهٔ تماس به‌طور یگانه مشخص کرد؟ آیا با این روش همهٔ خط‌ها مشخص می‌شوند و تناظر یک‌به‌یکی به‌دست می‌آید؟

مسئلهٔ ۲. یک سؤال تحلیلی: اگر چشم ما به جای نقطه‌ها به خط‌ها نگاه می‌کرد و تنها خط‌ها را می‌دید، یعنی به جای اینکه خط را خانواده‌ای از نقطه‌ها ببیند، یک نقطه را تقاطع خانواده‌ای از خط‌ها می‌دید، در این‌صورت تصویرها چگونه به نظر می‌رسیدند؟ به چشمان یک گربه نگاه کنید. انگار برای دیدن یک خط طراحی شده‌اند!

مسئلهٔ ۳. شیب جاده را در تابلوهای راهنمایی رانندگی با درصد نمایش می‌دهند. به نظر شما شیب ۱۰٪ یعنی چه؟ می‌توانید پاسخ را در اینترنت جست‌وجو کنید.

مسئلهٔ ۴. دو معادلهٔ خط را در نظر بگیرید؛ مثلاً $ax+by=c$ و $dx+ey=f$. حال بین این معادله‌ها میانگین بگیرید.

$$\frac{1}{2}(ax+by+dx+ey)=\frac{1}{2}(c+f)$$

این معادلهٔ خط چه تعبیر هندسی‌ای دارد؟

برای سادگی ابتدا با خط گذرنده از مبدأ شروع کنید. میانگین $y=mx$ و $y=nx$ خط $y=(\frac{m+n}{2})x$ خواهد بود. آیا این خط تعبیری هندسی دارد؟

مسئلهٔ ۵. زاویهٔ بین دو خط و فاصلهٔ بین دو نقطه هر دو عدد هستند. چه تفاوت‌ها و شباهت‌هایی دارند؟ مثلاً زاویهٔ صفر و فاصلهٔ صفر هر دو به انطباق منجر می‌شوند. البته ریزه‌کاری‌هایی هم داریم. مثلاً دو خط متقاطع اگر زاویهٔ صفر داشته باشند، منطبق‌اند. اما ممکن است موازی باشند و زاویهٔ صفر داشته باشند، اما منطبق نباشند که در آن صورت هم مفهوم فاصله بین خط‌ها مطرح می‌شود:

الف) آیا می‌توانید مفهوم فاصلهٔ بین دو دایره را چنان تعریف کنید که خواص خوبی داشته باشد؟

ب) آیا می‌توانید زاویهٔ بین دو دایرهٔ متقاطع را تعریف کنید؟ آیا می‌توان زاویهٔ بین دو دایرهٔ غیرمتقاطع را هم تعریف کرد؟

مسئلهٔ ۶. آیا می‌توانید توازی و تقاطع دایره‌ها را چنان تعریف کنید که شبیه توازی و تقاطع خط‌ها باشد؟ آیا هر دو خط یا موازی هستند یا متقاطع؟ آیا هر دو دایره یا موازی هستند یا متقاطع؟ آیا هر دو خط در فضا یا موازی هستند یا متقاطع؟ توازی و تقاطع کرات در فضا را شبیه توازی و تقاطع دایره‌ها در صفحه تعریف کنید. آیا هر دو کره یا موازی هستند یا متقاطع؟ توازی و تقاطع دو صفحه در فضا را چطور تعریف می‌کنید؟ آیا دو صفحه در فضا یا موازی هستند یا متقاطع؟ در مورد تقاطع دو صفحه در فضا چه می‌توانید بگویید؟

مسئلهٔ ۷. مثلث هم با سه خط دوبه‌دو متقاطع مشخص می‌شود و هم با سه نقطه که بر یک خط قرار نداشته باشند. اگر سه خط تصادفی در نظر بگیرید، به احتمال زیاد دوبه‌دو متقاطع هستند. بعید است دو تا از آن‌ها موازی شوند. اگر سه نقطهٔ تصادفی در نظر بگیرید، به احتمال زیاد روی یک خط قرار نمی‌گیرند. بعید است هر سه روی یک خط باشند. حال یک مثلث حدی در نظر بگیرید که دو ضلع آن موازی باشند. یعنی یک رأس به بی‌نهایت رفته باشد. آیا می‌توانید با این مثلث همهٔ صفحه را کاشی‌کاری کنید؟ با یک مثلث با سه رأس در صفحه، که همان مثلث معمولی است، چطور؟ این کاشی‌کاری‌ها را با هم مقایسه کنید.

▲ آموزش معلمان

▲ پاسخ‌ها

مریم جعفرآبادی

کشف یا اختراع
کاربرد ریاضیات در زندگی

آیا مفهوم‌های ریاضی بوده‌اند و انسان‌ها آن‌ها را کشف کرده‌اند یا چیزی به اسم ریاضی وجود نداشته و مفهوم‌های ریاضی ساخته و پرداختهٔ ذهن انسان‌اند؟ اگر انسان‌ها وجود نداشتند، آیا همچنان علم ریاضیات وجود داشــت؟ از دوران باســتان همواره این سؤال مطرح بوده که ریاضیات کشف شده است یا اختراع؟

آیا ما مفهوم‌های ریاضیات را ســاخته‌ایم تا به کمک آن‌ها بتوانیم بهتر محیط پیرامونمان را بشناسیم یا اصلاً ریاضیات خودش زبان اصلی جهان اســت که ما، چه آن را بشناسیم چه نشناسیم، وجود داشته و دارد؟ آیا عددها، چندضلعی‌ها و معادله‌ها چیزهایی واقعی هستند؟ یا نمادهایی فرضی و غیرواقعی از چیزهایی هستند که ما با آن‌ها مواجه می‌شویم؟

در طول تاریخ افرادی بوده‌اند که فکر می‌کردند ریاضیات مســتقل از وجود انسان‌هاســت و انسان آن را کشــف کرده است. پیروان **فیثاغورس** در قرن پنجم قبل از میلاد معتقد بودند، عددها موجوداتی زنده‌اند و همهٔ دنیا و هر چه در آن است، از عددها ساخته شده‌اند. آن‌ها عــدد ۱ را مولد یا جوهر همهٔ عددها و ریشــهٔ همهٔ آفرینش می‌دانستند. در نگاه پیروان این مکتب فکری، عددها عناصری فعال در طبیعت بودند.

افلاطون استدلال کرد که مفهوم‌های ریاضی، چه ما آن‌ها را بفهمیم و چه نفهمیم، مفهوم‌هایی واقعی هستند. درست همان‌طور که دنیایی که می‌بینیم واقعی اســت، مفهوم‌های ریاضی هــم وجود دارند و واقعی‌اند. همچنین اقلیدس، پدر هندسه، معتقد بود قوانین ریاضی بر طبیعت حاکم است.

در ایــن میان، افراد دیگری هم بودند که باور داشــتند قضیه‌های ریاضی حتماً چیزهایــی فرضی و غیرواقعی و ســاخته‌وپرداختهٔ ذهن انسان هســتند و ارزش و حقیقتی که پیدا کرده‌اند به‌خاطر قراردادهایی است که انسان‌ها به وجود آورده‌اند. در نظر این گروه، ریاضی مهارتی ذهنی است که وجود خارجی ندارد و مغز انسان آن را تولید کرده است تا رابطه‌های بین الگوها را بهتر درک کند. انگار آدم‌ها در میان همهٔ بی‌نظمی‌های اطرافشــان، کوشیده‌اند نظمی مصنوعی ولی مفید به وجود آورند و از آن استفاده کنند.

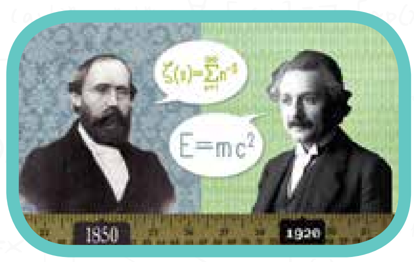
یکی از طرف‌داران این نظریه، **لئوپولــد کرانکر**، ریاضی‌دان آلمانی قرن نوزدهم بود. جملهٔ معروف او بیانگر نظرش در این‌باره اســت: «خداوند عددهای طبیعی را آفرید و بقیه‌اش کار انسان است.»

در زمــان **هیلبــرت** گفته می‌شــد ریاضــی فرضیه‌هایی منطقی است. هیلبرت کوشــید ریاضیات را در قالب «اصول موضوعه» یا «آکسیوم[1]»هایی توضیح دهد؛ همان کاری که اقلیدس با هندسه کــرده بود. او و دیگر هم‌فکرانش به ریاضیات به چشــم یک بازی فلسفی نگاه می‌کردند که با همهٔ جدی‌بودنش، باز هم نوعی «بازی» است.

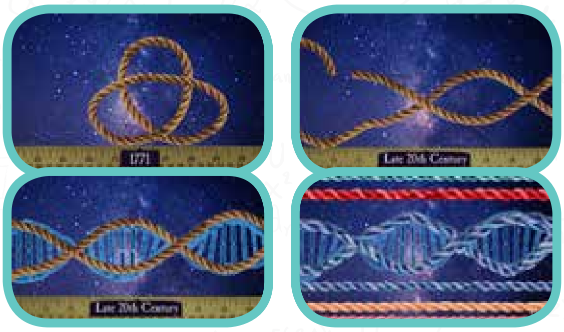
هنری پوآنکاره، یکی از بنیان‌گذاران هندسهٔ نااقلیدسی باور داشت که هندسهٔ نااقلیدسی که دربارهٔ سطح‌های غیرمسطح شبه هذلولی و بیضوی اســت، ثابت می‌کند که هندسهٔ اقلیدسی که مربوط به ســطح‌های تخت است، واقعیتی جهان‌شــمول نیست و نتیجهٔ استفاده‌کردن از مجموعه‌ای از قوانین است.

در سال ۱۹۶۰، **اوژن ویگنر**، برندهٔ جایزهٔ نوبل در رشتهٔ فیزیک، عبارت «اثرگــذاری خارق‌العادهٔ ریاضیات» را مطرح کرد و کوشــید بگوید ریاضیات واقعیتی بوده اســت که انسان‌ها آن را کشف کرده‌اند نه اختراع. او می‌گفت: انســان‌ها بسیاری از قضیه‌های ریاضی را در فضایی مجرد و انتزاعی بسط داده‌اند و سال‌ها بعد برای اثبات اینکه ســازوکار جهان چگونه است، از آن‌ها بهره گرفته‌اند. انگار می‌بینند قوانینی که روی کاغذ به آن‌ها رسیده‌اند، ازخیلی پیش‌تر در طبیعت وجود داشــته‌اند. مثلاً **گاتفرید هاردی**، ریاضی‌دان انگلیسی که در نظریهٔ اعداد کارهای مهمی کرده است، می‌گفت کارهایش در جهان واقعی، کاربــردی ندارند. اقدامات او به بحث‌های رمزنگاری کمک بسیاری کرد. بخش دیگری از کارهایش، با عنوان «قانون هاردی-واینبرگ» در ژن‌شناسی استفاده شد و او را برندهٔ جایزهٔ نوبل کرد. فیبوناچی وقتی داشت رشد جمعیت خرگوش‌ها و جمعیت آرمانی (ایدئال) آن‌ها را مطالعه می‌کرد، به‌طور تصادفی به دنبالهٔ معروف فیبوناچی رسید و بعدتر این دنباله را در جاهای متفاوتی از طبیعت پیدا کرد؛ از گل‌های آفتاب‌گردان و شــکل (فرم) آناناس، تا شاخه شاخه‌های نایژه‌ها در شش انسان.

یا کارهای **برنارد ریمان** در دههٔ ۱۸۵۰ در زمینهٔ هندســهٔ نااقلیدسی که حدود یک قرن بعـد، در ســال ۱۹۲۰، **اینشتین** از آن‌ها در مدل نســبیت عام اســتفاده کــرد. یا مثلاً در ســال ۱۷۷۱ نظریــه‌ای دربــارهٔ



گره‌ها در ریاضیات مطرح شد و در اواخر قرن بیستم، برای توضیح ساختار «دنا» (دی‌ان‌ای) و شبیه‌سازی آن، مورد استفاده قرار گرفت. همین نظریه شاید بخشی کلیدی در نظریهٔ ریسمان هم باشد.

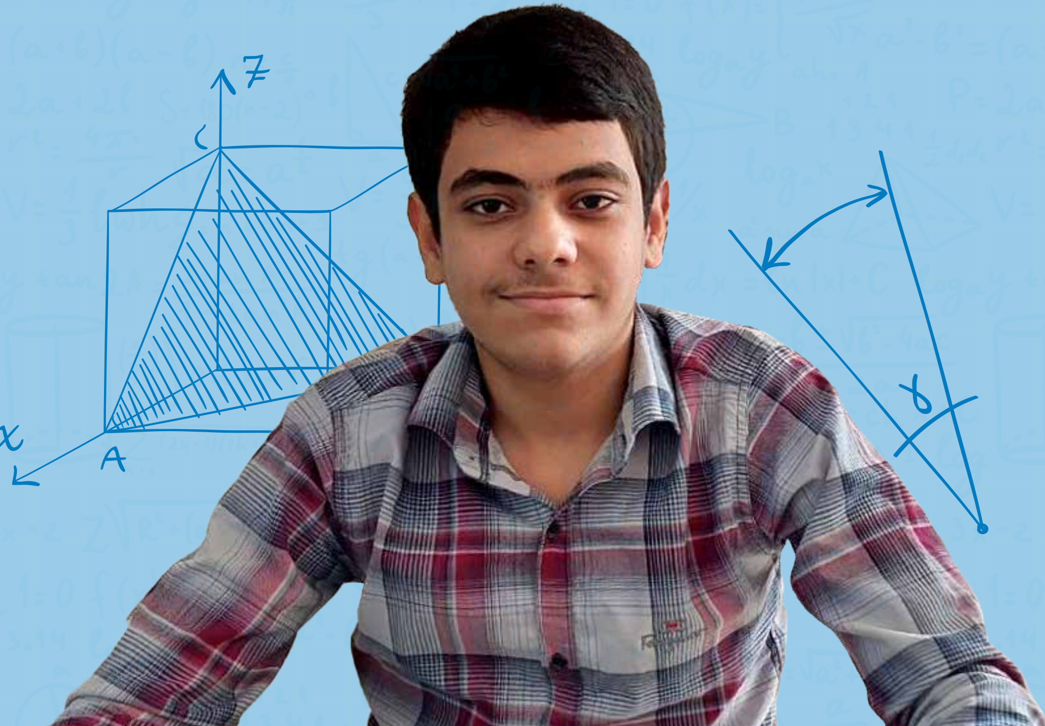


ریاضی‌دانان بسیار زیادی در طول تاریخ به بحث کشف یا اختراع ریاضیات پرداخته‌اند. بالاخره ریاضیات کشف شده است یا اختراع؟ ســاختگی است یا حقیقت دارد و انســان فقط تلاش کرده است آن را بفهمد؟ ســاختهٔ انسان است یا چیزی مقدس و الهی است؟ پاسخ‌دادن به این پرسش‌های پیچیده گاهی وابسته به موضوعی است که داریم دربارهٔ آن صحبت می‌کنیم. مثلاً اگر تعدادی درخت در جنگلی باشند و کسی نباشــد که آن‌ها را بشمارد، آیا «تعداد» درخت‌ها وجود خارجی دارد؟ یا چون نتوانسته‌ایم آن‌ها را بشماریم، پس چنین عددی اصلاً وجود هم ندارد؟

اگر این موضــوع برایتان جالب بود، کتاب «گفت‌وشــنودهایی در ریاضیات» را بخوانید. این کتاب شــامل سه گفت‌وشنود دربارهٔ معنا و کاربرد ریاضیات است. نویســندهٔ این کتاب، ریاضی‌دان و آموزگار ماهر ریاضی بوده اســت. او برای آنکه خوانندگان با هر ســطحی از دانش، معنا و مفهــوم، و اهمیت و کاربرد ریاضیات را توضیح دهد، این گفت‌وشنودها را با قدرت تخیل خود در بستر تاریخی مناسب و از زبان شخصیت‌های نامدار و صاحب سبک تاریخ ریاضیات بیان کرده است. در هر گفت‌وشنودی، ریاضی‌دانی بزرگ با شخصی تازه‌کار ولی علاقه‌مند به ریاضیات صحبت می‌کند. حرف‌هایشان گرچه ساده و قابل فهم هستند، با این حال مفهوم‌های بیان شده در آن‌ها، موضوع‌های عمیق و بنیادی ریاضیات‌اند. این کتاب سال‌هاست تجدید چاپ نشده و می‌توانید نســخهٔ «پی‌دی‌اف» آن را پیدا کنید و بخوانید. در اولین گفت‌وشنود این کتاب، گفت‌وگویی بین **سقراط** و **بقراط** را می‌خوانید که صحبتشان به کشف یا اختراع ریاضیات هم می‌رسد.

پی‌نوشت

1. Axiom



مهدیه مسیبی

مطالعهٔ دقیق، حل تمرین و تثبیت مطلب

گفت‌وگو با امیرمحمد کاظمی‌نسب، دانش‌آموز برگزیدهٔ مسابقات مختلف ریاضی از یزد

امیرمحمد کاظمی‌نسب‌هاشم‌آبادی، دانش‌آموز پایهٔ هشتم «دبیرستان استعدادهای درخشان شهیدصدوقی یزد» است. هر کسی برای تحصیل هدفی دارد و هدف او از تحصیل در این مدرسه این بوده است که پله‌های ترقی را راحت‌تر پشت سر بگذارد و به مدارج بالای علمی برسد. وقتی خواهرش نیز در آزمون تیزهوشان موفق شد، انگیزهٔ امیرمحمد هم دوچندان شد. البته خواهرش امروز در دانشگاه پزشکی یزد ادامهٔ تحصیل می‌دهد و او نیز مسیر خود را دنبال می‌کند. مادرش دکترای حسابداری و استاد دانشگاه و پدرش کارشناس ارشد ادبیات و دبیر این رشته است. با ما همراه باشید تا از این دانش‌آموز بیشتر بدانید.

● علاقهٔ شما به درس ریاضی از کجا شروع شد و عامل و ریشهٔ آن چه بود که تا امروز ریاضی را با علاقه دنبال می‌کنید؟

○ در سنین قبل از ابتدایی ضرب و جمع‌های یک‌رقمی و دورقمی را به‌راحتی و به صورت ذهنی انجام می‌دادم و تشویق اطرافیان باعث تشدید علاقه‌ام به مباحث ریاضی شد. در کلاس چهارم در دبستان جوادالائمه نیز علاقهٔ من به درس ریاضی بیشتر و بیشتر شد. وقتی که معلم سؤالاتی را در کلاس درس بیان می‌کرد و می‌گفت هرکس زودتر این سؤال را حل کند جایزه‌ای به انتخاب خودش دریافت می‌کند، من همیشه دوست داشتم نفر اول باشم و جایزه بگیرم. این وضعیت ادامه پیدا کرد تا جایی که درس ریاضی جزو نقاط قوتم قرار گرفت و شیرین‌ترین درس از نظر من شد.

● روال شما برای یادگیری درس ریاضی چگونه است و چقدر در خانه بیشتر از محتوای کتاب درسی مطالعه می‌کنید و این مطالعه از کدام منابع است؛ اینترنت، کتاب‌های اضافه، یا؟

○ روز قبل از تدریس معلم، نگاه کلی روی فصل دارم و سعی می‌کنم مطالب آن را روزنامه‌وار بخوانم تا با آمادگی ذهنی کامل سر کلاس درس و تدریس معلم بروم. سپس با دقت به تدریس معلم گوش می‌کنم و هر جایی از مطلب را که متوجه نشدم، آخر کلاس از معلم می‌پرسم و رفع اشکال می‌کنم. بعد از تدریس هم مطالعهٔ دقیق را شروع می‌کنم. ابتدا تمام تمرین‌های کتاب درسی را حل می‌کنم. بار دیگر جزوه را دقیق می‌خوانم. بعد از آن به سراغ کتاب‌های کمک‌درسی‌ام می‌روم و درس‌نامهٔ آن‌ها را مرور می‌کنم. هر روز هم مقداری سؤال چهارگزینه‌ای حل می‌کنم تا مطلب برایم جا بیفتد و در ذهنم تثبیت شود.

● شما در حوزهٔ ریاضی ظاهراً در مسابقه‌های متفاوت و متعددی شرکت کرده‌اید. ابتدا در مورد «جشنوارهٔ خوارزمی» برای ما بفرمایید که در رشتهٔ ریاضی در آن شرکت کردید. موضوع شما در بخش پژوهش این جشنواره چه بود و چطور این موضوع را انتخاب کردید؟ چقدر برای آن وقت گذاشتید و نتیجهٔ آن چه شد؟

○ موضوع پژوهش من در جشنوارهٔ نوجوان خوارزمی «تأثیر آموزش نوین ترکیبی روی خلاقیت دانش‌آموزان پسر دبیرستان‌های شهر یزد» بود. برای آن داده‌های بسیاری جمع‌آوری کردم، از آمار و ارقام زیادی بهره گرفتم و همچنین نمودارها و جدول‌های متفاوتی در نرم‌افزار اکسل رسم کردم.

بنده با توجه به شرایط روز جامعه که بیماری کرونا فراگیر شده بود و آموزش‌ها مجازی شـده بودند، این موضوع را انتخاب کردم. حدود ۹ ماه (از آذر ۱۴۰۰ تا شـهریور ۱۴۰۱) روی آن وقت گذاشتم و در مرحله‌های مدرسه، ناحیه، استان و کشور شرکت کردم. در نهایت در مرحلهٔ کشوری حائز رتبهٔ اول کشور شدم و در هفتهٔ پژوهش از من تقدیر کردند.

● شـما در المپیاد ریاضی هم حضور یافتید. چه سـالی در این المپیاد شـرکت کردید، تا کجا پیش رفتید، چه رتبه‌ای آوردید و برای سال‌های بعد در زمینهٔ المپیاد چه برنامه‌ای دارید؟

○ المپیاد متوسـطهٔ اول به نوعی شبیه‌سازی المپیاد متوسطهٔ دوم اسـت. هیچ منبع مطالعاتی نـدارد و فقط برای آمادگی اسـت. من در سـال هفتم در المپیاد شرکت کردم و توانستم رتبهٔ اول استان را کسب کنم. این موضوع مرا به شرکت در این المپیاد در سـال‌های بعد ترغیب کرد تا جایی که امسال (پایهٔ هشتم) در المپیاد ریاضی برای دومین بار حاضر شدم و موفق به کسب مدال نقرهٔ کشوری شدم. برنامهٔ من این است که در پایهٔ نهم نیز در آن شرکت کنم تا برای المپیاد ریاضی متوسطهٔ دوم آماده شوم و بتوانم در آن المپیاد موفقیت کسب کنم.

● یکی دیگر از رقابت‌هایی که شما در آن حضور داشتید، «مسابقهٔ جهانی کاریبو» است. دربارهٔ این مسابقه برای ما بیشتر بفرمایید. اینکه چطور با این مسابقه آشنا شدید، موضوع مسابقه چیست، چه شرایطی برای شرکت در آن وجود دارد و شما در چه زمینه‌ای شرکت کردید و چه رتبه‌ای آوردید؟

○ کاریبو مسابقه‌ای جهانی با هدف علاقه‌مندکردن دانش‌آموزان به ریاضیات اسـت که در کشـور کانادا برگزار می‌شود. در این مسابقه با فعالیت‌های سرگرم‌کننده و سؤال‌های جذاب، مهارت حل مسـئله در دانش‌آموزان تقویت می‌شود و آن‌ها با کاربرد ریاضیات در زندگی روزمره آشـنا می‌شوند. دانش‌آموزان برای شرکت در این مسابقه به آموزش ویژه‌ای نیاز ندارند و سؤال‌ها بر پایهٔ خلاقیت و مهارت تفکر، متناسـب با سن دانش‌آموزان طراحی می‌شوند. سؤال‌ها به صورت هفت‌گزینه‌ای هستند و در سه سطح ۳، ۴ و ۵ امتیازی مطرح می‌شوند تا دانش‌آموزان با هر سطحی بتوانند با توجه به پایهٔ تحصیلی خود در آن شرکت کنند. این مسـابقه از طرف مدرسه اعلام شده بود و بنده در آن شرکت کردم و حائز رتبهٔ اول جهان شدم.

● فعالیـت در حوزه‌هایی مانند تهیهٔ «وب‌آوا» (پادکسـت)، ویدیوکست و «اطلاع‌نگاشت» (اینفوگرافی)، با عنوان «ریاضی برای درک بهتر و بیشتر»، و به اشتراک گذاشتن آن با دوستان، از دیگر فعالیت‌های شما به شـمار می‌رود. دراین‌باره برای ما بیشتر توضیح بدهید که چه کار می‌کنید، این تولیدهای شما کجا ارائه می‌شـوند و دانش‌آموزان هم‌کلاسی چگونه از آن‌ها استفاده می‌کنند.

○ یکی دیگر از علاقه‌های من فعالیت در حوزهٔ پرورشـی است و دوست دارم تک‌بعدی نباشم. من با دوستانم سعی می‌کنیم مفهوم‌هایی از درس ریاضی را که درکشـان دشـوار است، در قالب‌هـای گوناگون و با جلوه‌های ویژه ارائه کنیم تا فهم آن‌ها آسان شـود و دانش‌آموزان از درس ریاضی بیشتر لذت ببرند. تولیداتمان را در سـاعت‌های کلاس به صورت ویدیوکسـت، وب‌آوا، اطلاع‌نگاشـت و «پرده‌نـگار» (پاورپوینت) با نورافکن (پروژکتور) روی تختهٔ کلاس ارائه می‌کنیم.

● از ماجرای کسب دیپلم افتخار مسابقهٔ جهانی کانگورو برای ما بفرمایید. این مسابقه را چطور شناختید و موضوع آن چه بود؟ چه چیزهایی به مسابقه گذاشته شـده بود و شما چه رتبه‌ای آوردید؟

○ مسـابقهٔ جهانی کانگورو، همانند مسـابقهٔ جهانی کاریبو، مسابقه‌ای با هدف علاقه‌مندشدن دانش‌آموزان به ریاضی است. منتها دیگر رتبه‌بندی صورت نمی‌گیرد و بالاترین درجهٔ آن کسب دیپلم افتخار جهانی است که من توانستم آن را کسب کنم. این مسابقه نیز از طرف مدرسه اطلاع‌رسانی شده بود.

● این‌طور که پیداسـت، شما تا امروز در مسابقه‌های متعددی به طور مستمر شـرکت کرده‌اید. نقش مدرسـه در این زمینه چیست؟ همچنین برای ما بفرمایید با توجه به مدت زمانی که برای این مسابقه‌ها می‌گذارید، به درس‌هایتان چطور می‌رسید و برنامه‌ریزی می‌کنید؟

○ خدا را شـاکرم که در مدرسه‌ای تحصیل می‌کنم که امکاناتی به‌روز و قوی دارد و اطلاع‌رسـانی آن بی‌نظیر است. یقیناً اگر این اطلاع‌رسـانی‌ها وجود نداشت بنده هم نمی‌توانستم این موفقیت‌ها را کسب کنم. جا دارد مراتب سپاس خود را از تلاش و زحمات کارکنان آموزشگاه، به‌خصوص مدیر و معاون محترم اعلام کنم.

بنده عقیده دارم اگر دانش‌آموزی به مفهوم‌های درسی تسلط کامل پیدا کند، می‌تواند در مسابقه‌ها شرکت کند و موفقیت‌های عدیده‌ای کسب کند. من سعی می‌کنم به مسابقه‌ها به چشم سـرگرمی و تفریح نگاه کنـم و از آن‌ها لذت ببـرم. بنابراین مسابقه‌ها وقت زیادی از من نمی‌گیرند و اولویت من درس‌های اصلی اسـت. از آنجا که علاقهٔ شدیدی به مفهوم‌های ریاضی دارم، طبیعتاً باید این مسیر را ادامه بدهم. اما از کودکی آرمان و آرزویم تحصیل در رشتهٔ پزشکی بوده و هنوز هم آرزویم همین است. البته قصد دارم علاوه بر مطالعهٔ درس‌ها و کسب آمادگی برای آزمون سراسری، در مسابقه‌های ریاضی نیز شرکت کنم.

● ممنون از حضورتان. بهترین‌هـا را برایتان از خالق لوح و قلم آرزومندیم.

محمدتقی طاهری‌تنجانی

در کلاس درس

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک

آقای رهنما (دبیر ریاضی): بچه‌ها درس امروز را با یک سؤال شروع می‌کنیم. می‌خواهیم ۷۲ لیتر آب میوه، ۴۰ لیتر شیر و ۴۸ لیتر دوغ را در یک نوع ظرف که گنجایش آن بر حسب لیتر یک عدد طبیعی است، دسته‌بندی کنیم. حداقل چه تعداد ظرف نیاز داریم؟

یکی از بچه‌ها: آقا اگر ظرف‌ها یک لیتری باشند ۱۴۰=۴۸+۲۰+۷۲ ظرف لازم است!

آقای رهنما: این حداکثر تعداد ظرف‌هاست. حداقل چند ظرف لازم است؟

احمدی: آقا اگر از ظرف‌های دو لیتری استفاده کنیم، تعداد ظرف‌ها برابر است با: ۷۰=۲۴+۱۰+۳۶.

آقای رهنما: آیا تعداد ظرف‌ها از این کمتر نمی‌شود؟ اینکه مرتب آزمایش کنیم راه مناسبی نیست. بهتر است فکر اساسی‌تری بکنیم. درحقیقت ما دنبال ظرفی هستیم که حجم آن بزرگ‌ترین عددی باشد که ۷۲، ۴۰ و ۴۸ بر آن بخش‌پذیر باشد.

مصطفوی: آقا اگر ما مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های هر کدام از عددها را بنویسیم، نمی‌توانیم به آن عدد مورد نظر برسیم؟

آقای رهنما: درست حدس زدید. ما دنبال بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک سه عدد ۷۲، ۴۰ و ۴۸ هستیم. حالا شما تشریف بیاورید مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌ها را بنویسید تا عدد مورد نظر را بیابیم.

مصطفوی روی تختهٔ کلاس می‌نویسد:

$$۷۲=\{۱,۲,۳,۴,۶,۸,۹,۱۲,۱۸,۲۴,۳۶,۷۲\}$$
$$۴۰=\{۱,۲,۴,۵,۸,۱۰,۲۰,۴۰\}$$
$$۴۸=\{۱,۲,۳,۴,۶,۸,۱۲,۱۶,۲۴,۴۸\}$$

آقای رهنما: حالا دنبال بزرگ‌ترین عددی هستیم که در هر سه مجموعه باشد. نگاه کنید کدام عدد در هر سه مجموعه مشترک است که از آن بزرگ‌تر نباشد.

مصطفوی: هر چند عددهای ۱، ۲ و ۴ هم مشترک‌اند، ولی ۸ بزرگ‌ترین عضو هر سه مجموعه است.

آقای رهنما: خب ما باید ظرف‌های ۸ لیتری داشته باشیم. در این صورت تعداد ظرف‌ها ۲۰=۶+۵+۹ می‌شود. حالا می‌توانیم تعریفی رسمی از بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد داشته باشیم:

اگر a و b دو عدد صحیح و دست‌کم یکی مخالف صفر باشد، عدد طبیعی d را بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب.م.م) این دو عدد گوییم، هرگاه دو شرط «الف» و «ب» برقرار باشد:

الف) a و b بر d بخش‌پذیر باشند.

ب) و هر عدد دیگری که a و b بر آن بخش‌پذیر باشند، از d کوچک‌تر باشد.

یعنی درحقیقت شرط الف مقسوم‌علیه مشترک‌بودن d را نشان می‌دهد و شرط ب بزرگ‌ترین‌بودن آن را تضمین می‌کند.

احمدی: آقا ببخشید، مطلبی هست که ذهن مرا درگیر کرده است. شما توی تعریف، شرط اینکه از a و b حداقل یکی صفر نباشد را بیان کردید. حالا اگر هر دو عدد صفر باشند ب.م.م ندارند؟!

آقای رهنما: چون صفر بر هر عددی بخش‌پذیر است، در اینجا بزرگ‌ترین عدد وجود ندارد. لذا باید حداقل یکی از عددها صفر نباشد. خب حالا می‌خواهیم یک راه ساده برای تعیین ب.م.م چند عدد یاد بگیریم.

احمدی: آقا یک راه یاد گرفتیم، همان مجموعه مقسوم‌علیه‌ها و پیداکردن بزرگ‌ترین عضو مشترک!

آقای رهنما: این روش در جای خودش خوب است، اما در عمل وقت‌گیر است و امکان دارد برخی از مقسوم‌علیه‌های عددها فراموش شوند. راه ساده‌تر استفاده از تجزیه به عامل‌های اول عددهاست؛ همان تجزیهٔ استاندارد. یادتان هست که؟!

بچه‌ها (یک صدا): بله آقا یادمان هست!

آقای رهنما: خب آقای محمودی شما تجزیهٔ سه عدد مسئلهٔ قبل را بنویس.

محمودی پای تختهٔ کلاس می‌رود. تخته‌پاک‌کن را برمی‌دارد، تخته را پاک می‌کند و می‌نویسد:

$۷۲=۲^۳\times۳^۲$

$۴۰=۵\times۲^۳$

$۴۸=۳\times۲^۴$

آقای رهنما: ممنون آقای محمودی. حالا بگو کدام عدد در تجزیه‌ها مشترک است؟

محمودی: آقا ۳ در دو جا و ۲ در هر سه عدد مشترک است.

آقای رهنما: در هر سه عدد باید مشترک باشد.

محمودی: آقا ۲.

آقای رهنما: این عدد ۲ باید با توان کم‌تر در نظر گرفته شود. یعنی $۲^۳$ و یا ۸ همان ب.م.م این سه عدد است که خودمان از طریق مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌ها به آن رسیده بودیم.

احمدی: آقا چرا عدد مشترک را با بیشترین توان در نظر نمی‌گیریم؟ مگر ما دنبال بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه نیستیم؟

آقای رهنما: اگر ما مثلاً $۲^{۴}$ را در نظر بگیریم، این عامل یعنی ۱۶ در عدد ۴۰ و یا ۷۲ وجود ندارد. باید در تجزیهٔ هر سه عدد به‌طور مشترک وجود داشته باشد. پس به‌طور خلاصه برای تعیین ب.م.م چند عدد ابتدا تک‌تک عددها را به‌صورت استاندارد تجزیه می‌کنیم. سپس عامل مشترک را با کم‌ترین توان در نظر می‌گیریم. اگر چند عامل مشترک بودند، حاصل‌ضرب عوامل مشترک را با کم‌ترین توان انتخاب می‌کنیم.
حالا شما ب.م.م دو عدد ۲۲۰ و ۷۲۰ را به‌دست آورید. یک نفر بیاید و راه‌حل را بنویسد تا مطمئن شوم خوب یاد گرفته‌اید.
حسینی: آقا اگر اجازه بفرمایید من بنویسم.
آقای رهنما: آقای حسینی لطفاً همهٔ مرحله‌های حل مسئله را بنویسید.
حسینی: آقا ابتدا عددها را تجزیه می‌کنیم:

۲۲۰	۲
۱۱۰	۲
۵۵	۵
۱۱	۱۱
۱	

۷۲۰	۲
۳۶۰	۲
۱۸۰	۲
۹۰	۲
۴۵	۳
۱۵	۳
۵	۵
۱	

$۲۲۰=۲^{۲}\times۵\times۱۱$

$۷۲۰=۲^{۴}\times۳^{۲}\times۵$

ب.م.م دو عدد ۲۲۰ و ۷۲۰ می‌شود: $۲۰=۲^{۲}\times۵$
آقای رهنما: کاملاً درســـت است. توجه کنید برای سهولت کار ب.م.م دو عدد a و b را به‌صورت (a,b) می‌نویســـند. در مثال قبل می‌توانیم بنویسیم: (۲۲۰و۷۲۰)=۲۰
حالا یک مســـئلهٔ دیگر طرح می‌کنم. امیدوارم در حل آن دقت کنید!
«سه زنگ در یک کارخانه برای موارد متفاوت نواخته می‌شود. اولین زنگ هـــر ۱۸ دقیقه یک‌بار، دومین زنگ هر ۲۴ دقیقه و سومین زنگ هر ۳۲ دقیقه یک بار زده می‌شوند. بعد از اولین بار که هر سه زنگ با هم زده می‌شوند، حداقل چند دقیقه باید بگذرد تا آن‌ها دوباره به صدا در بیایند؟»
حسینی: آقا چون $۱۸=۲\times۳^{۲}$، $۲۴=۳\times۲^{۳}$ و $۳۲=۲^{۵}$ پس بزرگ‌ترین عامل مشترک عدد ۲ است. پس هر ۲ دقیقه باید هر سه زنگ به صدا در بیایند! اما آقا اینکه نمی‌شود! یک جای کار می‌لنگد!
آقای رهنما: خوب است که خودت فهمیدی آقای حسینی. بهتر اســـت این‌طور به مسئله نگاه کنیم: زنگی که هر ۱۸ دقیقه یک بار نواخته می‌شود، در چه زمان‌های دیگری نواخته می‌شود؟ مجموعهٔ همهٔ حالت‌ها را می‌نویسیم.

$\{۰,۱۸,۳۶,۵۴,۷۲,۹۰,...\}$

برای دو زنگ دیگر هم این مجموعه حالت‌ها را می‌نویسیم:

$\{۰,۲۴,۴۸,۷۲,۹۶,...\}$

$\{۰,۳۲,۶۴,۹۶,۱۲۸,...\}$

حالا باید دنبال عضو مشـــترکی در این سه مجموعه باشیم که بعد از صفر برای اولین بار ظاهر می‌شود. کدام عدد است؟
محمودی: آقا عدد مشـــترک ندارنـــد. ۷۲ در دو مجموعهٔ اولی هست ولی در سومی نیســـت و ۹۶ در دومی و سومی هست ولی در اولی نیست!
آقای رهنما: خب پس باید عددهای مجموعه‌ها را آن‌قدر ادامه دهیم تا به عضو مشترک برسیم. حالا مشغول شوید تا به اولین عدد مشترک برسید.
بچه‌ها مشـــغول کار شـــدند و آقای رهنما فرصتی یافت تا با قـــدم‌زدن در کلاس بر فعالیت بچه‌ها نظارت کند. پس از چند دقیقه گفت: «خب عدد مشترک؟!»
احمدی: آقا یافتم. اگر درســـت ادامه داده باشـــم، اولین عدد مشترک ۲۸۸ است. درست پیدا کرده‌ام؟
آقای رهنما: یک روش واپایش (کنترل) آن است که ببینم عدد ۲۸۸ بر ۱۸، ۲۴ و ۳۲ بخش‌پذیر هســـت یا نه؟! خب واپایش کنید. اگر بخش‌پذیر نباشد اشتباه محاسباتی رخ داده است!
احمدی: آقا بخش‌پذیر است، چون: ۲۸۸÷۱۸=۱۶، ۲۸۸÷۲۴=۱۲ و ۲۸۸÷۳۲=۹.
آقای رهنما: درست است. به عدد ۲۸۸ می‌گویند کوچک‌ترین مضرب مشترک سه عدد ۱۸، ۲۴ و ۳۲. البته باید مطمئن شویم که ۲۸۸ کوچک‌ترین عددی اســـت که بر هر سه عدد تقسیم می‌شود. حالا تعریف رسمی از کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد ارائه می‌دهیم:
«کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد صحیح مخالف صفر عدد طبیعی c اســـت، هرگاه c بر a و b بخش‌پذیر باشد و اگر عدد دیگری مانند k بر a و b بخش‌پذیر باشد (c<k).»
کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد a و b را با نماد [a,b] نشان می‌دهند. در مسئلهٔ قبل باید بنویسیم:
[۱۸و۲۴و۳۲]=۲۸۸
یکی از بچه‌ها: آقا راه ساده‌ای برای یافتن کوچک‌ترین مضرب مشترک چند عدد نداریم؟
آقای رهنما: چرا که نه؟! مثل حالت ب.م.م، عددها را به‌صورت تجزیهٔ استاندارد می‌نویســـیم. سپس عامل‌های مشترک را با بیشترین توان در عامل‌های غیرمشـــترک ضرب می‌کنیم. در مسئلهٔ قبل داریم:

$۱۸=۲\times۳^{۲}$

$۲۴=۳\times۲^{۳}$

$۳۲=۲^{۵}$

$[۱۸و۲۴و۳۲]=۲^{۵}\times۳^{۲}=۲۸۸$

حالا شما کوچک‌ترین مضرب مشترک [ک.م.م] سه عدد ۱۵، ۳۵ و ۱۴۰ را به‌دست آورید. دست به کار شوید. آقای حمیدی شما هم راه‌حلتان را پای تابلو بنویســـید تا از فرصت بهتر استفاده شود.

حمیدی:

$۱۵=۳\times۵$

$۳۵=۵\times۷$

$۱۴۰=۲^۲\times۵\times۷$

$[۱۵،۳۵،۱۴۰]=۳\times۲^۲\times۵\times۷=۴۲۰$

آقای رهنما: خب حالا که با ب.م.م و ک.م.م دو عدد آشنا شدید، خوب است بدانید بین ب.م.م و ک.م.م دو عدد a و b این رابطه برقرار است: $ab=[a,b](a,b)$. اثبات این رابطه را در کتاب‌های نظریهٔ اعداد می‌توانید جست‌وجو کنید.

به‌عنوان یک نمونه مسئله: اگر ب.م.م و ک.م.م دو عدد طبیعی به ترتیب ۴۰ و ۲۴۰ و یکی از عددها ۸۰ باشد، عدد دیگر چیست؟

برای حل این مسئله از فرمولی که گفتم می‌شود استفاده کرد:

$۸۰\times b=۲۴۰\times۴۰$

$b=۱۲۰$

توجه کنید فرمولی که گفتم کار محاسبهٔ ک.م.م دو عدد را ساده می‌کند. کافی است حاصل‌ضرب دو عدد را بر ب.م.م آن دو تقسیم کنیم.

احمدی: آقا اجازه، این فرمول برای بیش از سه عدد هم برقرار است؟

آقای رهنما: این رابطه برای سه عدد برقرار نیست و شما فقط می‌توانید برای دو عدد طبیعی از آن استفاده کنید. حالا به‌عنوان حسن‌ختام جلسهٔ امروز به این سؤال پاسخ دهید: «کوچک‌ترین عدد طبیعی که بر همهٔ عددهای طبیعی از ۱ تا ۱۰ قابل تقسیم است، کدام است؟»

مصطفوی: آقا به درس امروز مربوط است؟

آقای رهنما: بله، یک جورهایی یک کاربرد از درس امروز است.

احمدی: آقا باید ک.م.م عددها ۱ تا ۱۰ را به‌دست آوریم؟

آقای رهنما: بله کاملاً درست حدس زده‌اید.

احمدی: آقا من می‌توانم راه‌حل را ارائه دهم.

آقای رهنما: بفرمایید.

احمدی: عددهای ۱، ۲، ۳، ۵ و ۷ در تجزیهٔ خودشان ظاهر می‌شوند. می‌ماند عددهای ۴، ۶، ۸، ۹ و ۱۰. داریم:

$۴=۲^۲$

$۶=۲\times۳$

$۱۰=۲\times۵$

$۹=۳^۲$

$۸=۲^۳$

حالا ک.م.م این عددها برابر است با: $۲^۳\times۳^۲\times۵$. درست است؟

آقای رهنما: نه معلوم است که درست نیست! این عدد بر ۷ بخش‌پذیر نیست!

احمدی: آقا یادمان رفت. پس جواب مسئله می‌شود:

$۲^۳\times۳^۲\times۵\times۷=۲۵۲۰$

آقای رهنما: آفرین این عدد بر همهٔ عددهای طبیعی ۱ تا ۱۰ بخش‌پذیر است. البته این کوچک‌ترین عدد طبیعی است و می‌دانیم که هر مضربی از این عدد بر همهٔ عددهای ۱ تا ۱۰ نیز بخش‌پذیر است.

برای تمرین روی درس امروز تعدادی مسئله در نظر گرفته‌ام که در منزل حل کنید. نمایندهٔ کلاس لطفاً برگهٔ مسئله‌ها را توزیع کنید!

تمرین

۱. می‌خواهیم مستطیلی به ابعاد ۱۲ و ۱۶ سانتی‌متر را با کاغذهای مربع‌شکل که اندازهٔ ضلع‌های آن‌ها عدد صحیح باشد، بپوشانیم. اندازهٔ ضلع مربع‌ها چه عددهای می‌تواند باشد؟ با استفاده از این عددها تعداد مربع‌ها در کدام حالت به کم‌ترین حد خود می‌رسد؟

۲. دو ظرف به گنجایش ۳۶ و ۵۴ لیتر داریم. می‌خواهیم پیمانه‌ای داشته باشیم که همهٔ مایع‌های دو ظرف را در هر بار در ظرف‌های خالی بریزیم. بزرگ‌ترین پیمانه چند لیتری است؟ (پیمانه بر حسب لیتر عددی طبیعی است.)

۳. محیط چرخ کوچک تراکتور ۳۶۰ سانتی‌متر و محیط چرخ بزرگ آن ۶۰۰ سانتی‌متر است. این تراکتور حداقل چه مسافتی را طی کند تا نقاط مشخص شده روی چرخ‌ها مجدداً با هم به زمین برسند؟

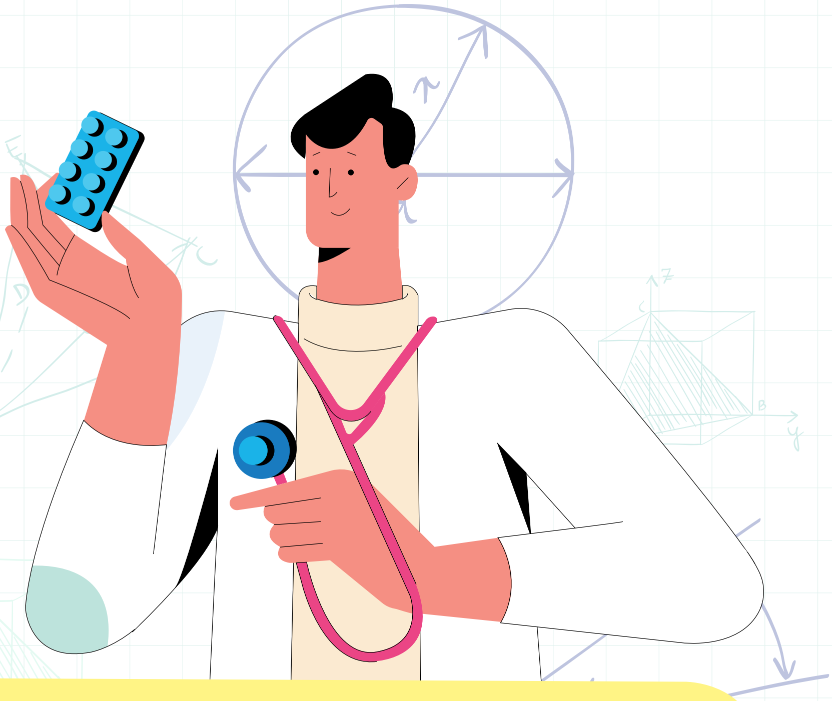
۴. شهرداری یک شهر از ابتدای یک خیابان در هر ۴ متر یک درخت کاشته و ادارهٔ برق منطقه نیز فاصلهٔ تیرهای چراغ برق را ۲۲ متر تعیین کرده است. اگر در ابتدای خیابان تیر چراغ برق کنار درخت قرار گرفته باشد، پس از چند متر دوباره یک درخت در کنار تیر چراغ برق قرار می‌گیرد؟

۵. اگر $(a,b)=۱$ و $\frac{a}{b}=\frac{۶۹۳}{۱۰۰۱}$ باشد، $[a,b]$ را به‌دست آورید.

۶. اگر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $a=۲^{k-۱}\times۳^۲\times۵^{m-۱}$ و $b=۳\times۲^{k+۱}\times۵^{m+۱}$ برابر ۳۰۰ باشد، $[a,b]$ را به دست آورید.

خطاهای فراگیر در محاسبات ریاضی

افشین خاصّه‌خان



درود و تهنیت خدمت دوستداران درمانگاه ریاضی. امیدوارم مفهوم‌های درسی را با حوصلهٔ تمام یاد گرفته و تمرین و تکرار لازم را انجام داده و آزمون نیم‌سال اول سال تحصیلی را با موفقیت پشت سر گذاشته باشید. «تکرار و تمرین» علاوه بر اینکه تسلط بر مفهوم‌های درسی را افزایش می‌دهد، سرعت انتقال آن‌ها را نیز بهبود می‌بخشد و مهم‌تر از همه، جرئت و قدرت ایده‌پردازی و حل مسئله را توسعه می‌دهد. طبق روال امسال، در این شماره هم به یکی از اشتباه‌های متداول دیگر می‌پردازیم که بسیاری از دانش‌آموزان به آن مبتلا هستند.

اشتباه متداول ۶: مجموع و تفاضل عبارت‌های جبری

از دانش‌آموزان دورهٔ اول و حتی دورهٔ دوم متوسطه کم نیستند که در مجموع دو عبارت جبری متشابه و غیرمتشابه دچار خطا می‌شوند. برای مثال، آن‌ها این اشتباه‌ها را انجام می‌دهند:

$3n+2n=5n^2$ $\qquad$ $3n^2+2n=5n^3$

تشخیص

علت اصلی این اشتباه نداشتن شناخت صحیح از مفهوم جمله‌های متشابه در عبارت‌های جبری و جمع و تفریق آن‌هاست. متأسفانه مفهوم عبارت جبری، جمله‌های متشابه و الگوهای جمع و تفریق آن‌ها، در ذهن دانش‌آموزان به عنوان قاعده‌هایی است که به صورت دستورالعمل بیان شده‌اند و به مرور زمان، به علت تکرارنکردن آن‌ها به فراموشی سپرده شده‌اند.

تجویز و درمان

برای درمان این مشکل لازم است مفهوم متغیر، ضریب عددی و در کل عبارت جبری، با حوصله برای دانش‌آموز توضیح داده شود. سپس مفهوم جمله‌های متشابه را تشریح و سرانجام با الگوهای مناسب، مجموع و تفاضل جمله‌های متشابه را تفهیم کنیم. این الگوها را می‌توان همانند فعالیت صفحهٔ ۳۲ کتاب ریاضی هفتم، با استفاده از میوه‌های سیب و گلابی برای جمع و تفریق شرح داد. یا در همان صفحه از مجموع مساحت‌های مستطیل‌های به‌هم‌چسبیده و مجزا که با هم برابرند، مثال‌هایی مطرح کرد. عینیت‌بخشی به این مفهوم‌ها، ماندگاری قاعده‌ها را در ذهن دانش‌آموزان افزایش می‌دهد. علاوه بر آن، قاعده‌های خشک ریاضی را در ذهن آن‌ها جذاب‌تر می‌کند و علاقه‌شان را به ریاضی بالا می‌برد.

نسخهٔ تکمیلی

بهتر است دانش‌آموزان فصل دوم از کتاب ریاضی هفتم را به‌دقت بخوانند، فعالیت‌ها را انجام دهند و با توجه به مثال‌ها، کار در کلاس‌ها را پاسخ بگویند. در پایان هم تمرین‌های آخر فصل را حل کنند و در صورت ناتوانی در پاسخ‌گویی به بعضی از تمرین‌ها، دوباره به متن کتاب مراجعه کنند و بعد از بازخوانی متن کتاب، برای حل آن‌ها چالش‌های جدیدی را انجام دهند.

آریان خلیلی

نگاهی به فرایند ترجمه در برنامه‌نویسی

ژرف و عمیق

فرایند تبدیـل یک زبان برنامه‌نویسی به زبان دیگر «ترجمه» نامیده می‌شود. در این فرایند یک زبان سطح بالا به زبانی سطح پایین‌تر تبدیل می‌شود. فرایند ترجمه سبب شده است طیف بسیار بیشتری از افراد علاقه‌مند بتوانند به برنامه‌نویسی روی بیاورند.

زبان‌های سطح بالا و سطح پایین

برای درک بهتر موضوع با یک مثال ساده شروع می‌کنیم. مدیران یک شرکت تولید مواد لبنی نیازی به دانستن تعداد پنیرهای ارسال‌شده به فروشگاه‌ها را ندارند. در عوض، آن‌ها موظف‌اند دیدگاهی سطح بالا داشته باشند و تصمیماتی بگیرند که برای آیندهٔ شرکت حیاتی است. به روشی مشابه، برنامه‌نویسان زبان‌های سطح بالا نیز نگران جزئیات نیستند. مدیریت حافظهٔ رایانه، تبدیل کدهای نوشته‌شده به بیت، چگونگی تغییر ولتاژ در مدارهای الکترونیکی و مثال‌هایی از این قبیل، همه جزئیاتی هستند که برای یک برنامه‌نویس امروزی اهمیتی ندارد. تمامی این اتفاقات به‌طور خودکار توسط برنامه‌های خاصی به نام «مترجم» مدیریت می‌شوند. این امر باعث می‌شود که برنامه‌نویسان فقط روی منطق و الگوریتم‌های برنامه‌نویسی تمرکز کنند؛ زیرا رایانه همهٔ جزئیات را مدیریت می‌کند.

مزیت‌ها و عیب‌های زبان‌های سطح بالا

مزیت‌ها

- آسان‌ترشدن یادگیری.
- آسان‌ترشدن خواندن و نوشتن برنامه‌ها. لازم نیست که خود برنامه‌نویس الگوریتم‌ها را به رشته‌هایی از عددهـای ۰ و ۱ تبدیل کند.
- آسان‌ترشـدن فهم و اصلاح آن‌هـا. کـد را می‌تـوان به اشتراک گذاشت تا برنامه‌نویسان دیگر آن را بررسی کننـد و اشکال‌هـای احتمالی آن را بر طرف کنند یا حتی آن را توسعه دهند.
- برای پروژه‌های بزرگ و مشترک عالی است.

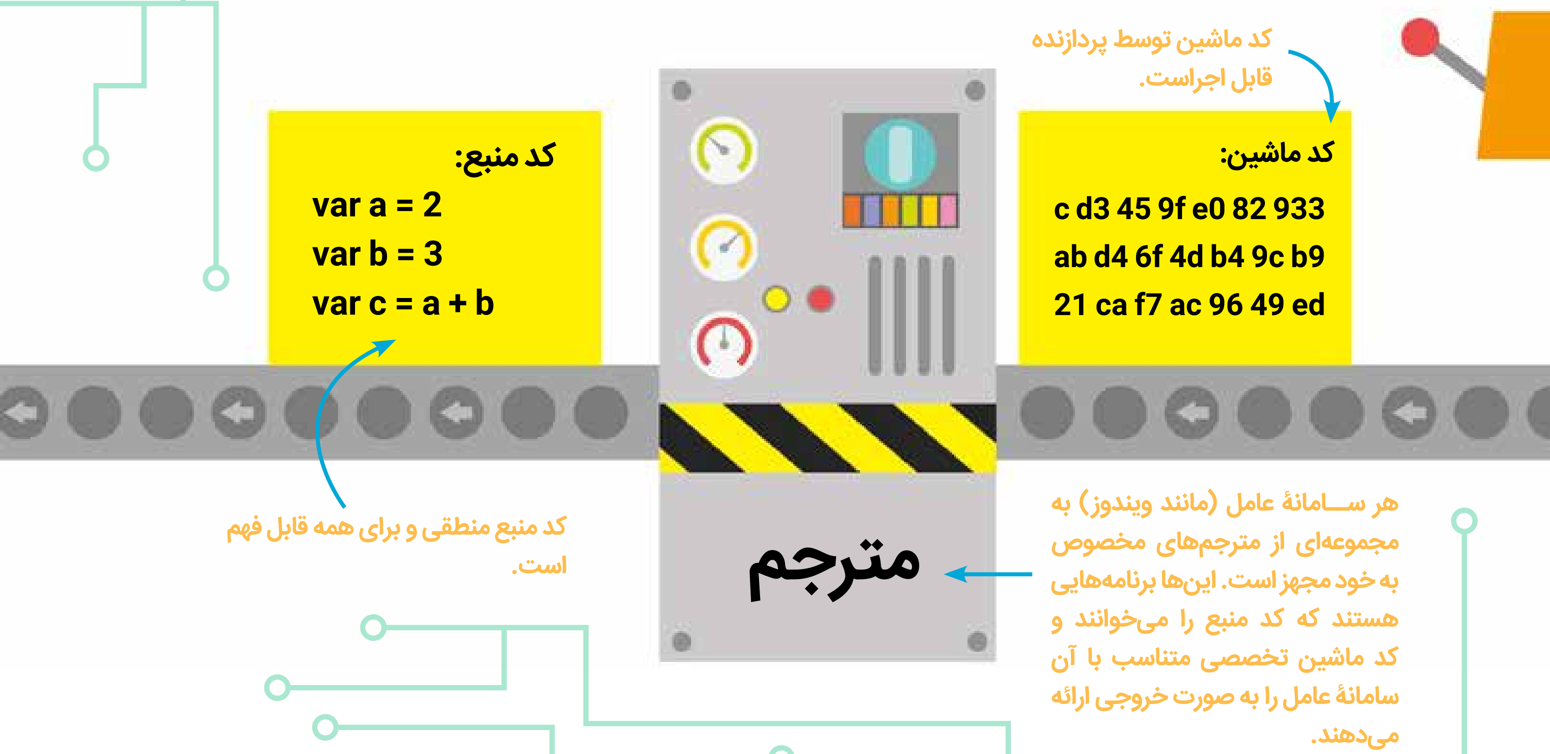
عیب‌ها

- چـون توسعه‌دهندگان به داده‌ها و عوامل اساسی کد دسترسی ندارند، ساده‌کردن برنامه‌ها دشوار است.
- توسعه‌دهندگان نمی‌توانند بررسـی کنند که آیا حافظه به‌طور ایمن پاک شده است یا نه. همین امر می‌تواند سبب خطرات امنیتی شود.
- بسیـاری از برنامه‌نویسان زبـان‌های سطـح بالا، سـامانهٔ (سیستم) عامل و سخت‌افزار رایانه را به‌طور کامل نمی‌شناسند. همین امر می‌تواند به نقـص در برنامـه‌نویسی و طراحی نرم‌افزار بینجامد.

- **زبان‌های انسانی** ← انسان‌ها به زبان‌های مختلفی صحبت می‌کنند که درک آن برای ماشین دشوار است.
- **زبان‌های سطح بالا** ← یک زبان سطح بالا برای انسان قابل خواندن است و می‌تواند توسط رایانه به کدهای قابل فهم برای ماشین تبدیل شود.
- **زبان‌های سطح پایین** ← یک زبان سطح پایین که به عنوان زبان اسمبلی نیز شناخته می‌شود، شباهت زیادی به کد ماشین دارد، اما از حافظه‌های کمکی به نام یادیار (نِمونیک[1]) استفاده می‌کند که خواندن آن برای انسان آسان‌تر است.
- **کد ماشین** ← اسمبلر (برنامهٔ مترجمی است که دستورهای نوشته‌شده به زبان اسمبلی را به زبان ماشین ترجمه می‌کند.)
- **سخت‌افزار** ← مجموعهٔ دستورات

مقایسهٔ کدهای برنامه‌نویسی (کد منبع) با کد ماشین

برنامه‌نویسان برنامه‌های مورد نظر خود را به زبان‌هایی مانند **جاوا**، **پایتون** یا **سی** می‌نویسند. با این حال، برای اینکه رایانه بتواند برنامـهٔ نوشته‌شده را اجرا کند، دستوراتی که برنامه‌نویسان می‌نویسند باید به مجموعه‌ای از بیت‌های خام ترجمه شوند. به این بیت‌ها کد ماشین گفته می‌شود که می‌توانند توسط «پردازندهٔ رایانه» (سی‌پی‌یو) پردازش شوند. اگر کد ماشین را در یک ویرایشگر متن باز کنید، مانند مجموعه‌ای از علامت‌های بدون معنا و پرابهام به نظر می‌رسد، اما رایانه آن‌ها را می‌فهمد.



کدهای دستور و عملوندها

در کد ماشـین، هر دستورالعمل از یک کد دستور[2] (مخفف کد عملیاتی) و یک یا چند عملونـد[3] تشکیل شده است. عملوندهـا داده‌هایی هسـتند که پردازش می‌شوند. «کد» دستور عددی مربوط به یک عمل خاص پردازنده است. برای مثال، کد دستوری **۰۴** مـی‌تواند به معنای افزودن دو قطعه داده باشد. برای شهودی‌ترکردن کدهای عملیاتی، نام‌های مستعار استانداردی به آن‌ها داده می‌شود که به عنوان یادیار نیز شناخته می‌شوند.

کدهای دستور	یادیار	دودویی	شرح
87	ADD A	۱۰۰۰۰۱۱۱	محتویات رجیستر (ثبات) A در انباره ذخیره شود.
3A	LDA	۰۰۱۱۱۰۱۰	داده‌های ذخیره‌شده در حافظهٔ جانبی به حافظهٔ اصلی منتقل شود.
79	MOVA C	۰۱۱۱۱۰۰۱	داده‌ها از رجیستر A به رجیستر C منتقل شود.
C3	JMP	۱۱۰۰۰۰۱۱	به دستورالعمل‌هایی بروید که در آدرس حافظه مشخص شده است.
C1	POP B	۱۱۰۰۰۰۰۱	داده‌ها برعکس ترتیبی که وارد شده‌اند خارج شده و در رجیسترهای حافظهٔ B+C کپی شوند.

برنامه‌نویسی در سطح ماشین

برنامه‌نویسی در سطح ماشین به برنامه‌نویسانی نیاز دارد که کدهای عملیاتی یک سامانهٔ عامل خاص را به‌خاطر بسپارند. گاهی آن‌ها حتی با بیت‌های منفرد کار می‌کنند.

پی‌نوشت‌ها

1. Mnemonic
2. Opcode
3. Operand

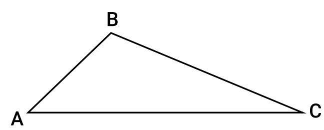
جعفر ربانی

همه جا ریاضی!

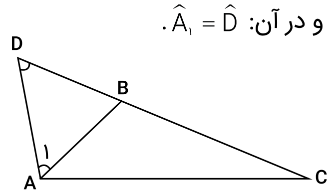
۱. دانش‌آموزان عزیز! شما از سال‌های ابتدایی به یاد دارید که همیشه معلمان ریاضی می‌گفتند: «کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه خط راست است» و هیچ دلیل و استدلالی هم برای آن نداشتند. شما هم قبول می‌کردید. آیا می‌دانید این حرف قابل اثبات است؟ پس توجه کنید!

در شمارهٔ قبل گفتیم در هندسه قضیه‌ای وجود دارد به نام «قضیهٔ حمار». آن قضیه همین حرف را ثابت می‌کند. بنابراین توجه کنید و ببینید چگونه ثابت می‌شود.

قضیه: ثابت کنید در مثلث ABC ضلع AC کوتاه‌تر از مجموع دو ضلع دیگر است:



برای اثبات، اول ضلع BC را امتداد می‌دهیم و روی آن به اندازهٔ ضلع AB جدا می‌کنیم تا نقطهٔ D به دست آید. از نقطهٔ D به A وصل می‌کنیم. مثلث ADB تشکیل می‌شود که متساوی‌الساقین است و در آن: $\hat{A}_1 = \hat{D}$.



اکنون در مثلث ABC داریم:

DB+BC=DC

در نتیجه: DC=AB+BC. از طرف دیگر داریم:

$$D\hat{A}C > \hat{A}_1 \Rightarrow D\hat{A}C > \hat{D}$$

و چون در مثلث هر چه زاویه بزرگ‌تر باشد، ضلع مقابل آن نیز بزرگ‌تر است، ضلع‌های مقابل این دو زاویه را می‌نویسیم:

$$DC > AC \Rightarrow AB + BC > AC$$

اکنون بگویید چرا به این قضیه «قضیهٔ حمار» گفته‌اند.

۲. بَرخال (فراکتال) چیست؟ آیا تاکنون کلمهٔ بَرخال را شنیده‌اید و چیزی درباره‌اش می‌دانید؟ اگر نمی‌دانید برایتان می‌گوییم.

فراکتال که به زبان فارسی «برخال» نامیده می‌شود، شکلی است با ساختار هندسی که با بزرگ‌کردن هر بخش از آن همان ساختار نخستین به‌دست آید. به عبارت دیگر اگر قسمتی از یک بَرخال را بزرگ کنیم خواهیم دید که شبیه به بَرخال اصلی است. مثلاً گل‌کلم نوعی بَرخال است. چون اگر یک شاخه‌اش را جدا کنیم، می‌بینیم همانند خود گل‌کلم است. بیش از این توضیح نمی‌دهیم. اما پیشنهاد می‌کنیم با استفاده از گوشی هوشمند کلمهٔ بَرخال را جست‌وجو کنید و ببینید چه دنیایی پشت این کلمه نهفته است.

۳. در شمارهٔ قبل بازی «به یک عدد فکر کن» را داشتیم. اکنون می‌خواهیم ببینیم راز این مسئله در کجاست! پس خوب دقت کنید. فرض کنید دوست شما به جای عدد واقعی یک عدد کلی به نام n را فکر می‌کند. به عبارت دیگر، فرض می‌کنیم آن عدد که هر کس فکر می‌کند n باشد. مرحله‌های بعدی آن چنین است:

- n در ۵ ضرب می‌شود: ۵n
- ۶ واحد به آن اضافه می‌شود: ۵n+۶
- حاصل در ۴ ضرب می‌شود:
۴(۵n+۶)=۲۰n+۲۴
- ۴ واحد از آن کم می‌شود:
۲۰n+۲۴-۴=۲۰n+۲۰
- حاصل در ۵ ضرب می‌شود؛
۵(۲۰n+۲۰)=۱۰۰n+۱۰۰
- این عددی است که دوست شما خواهد گفت: ۱۰۰(n+۱)

حالا شما این عدد را به ۱۰۰ تقسیم کنید که می‌شود n+۱ و اگر ۱ واحد از آن کم کنیم همان عدد اول، یعنی n به دست می‌آید. پس n هرگز گم نمی‌شود!

۴. آیا می‌توانید بگویید از عدد ۲۵ چند بار می‌توان عدد ۵ را کم کرد؟

۵. شمارهٔ خودرو را بگویید

- پنج رقم دارد.
- صفر ندارد.
- مجموع رقم اول و دوم (از سمت چپ) مساوی است با رقم سوم.

- رقم چهارم (از سمت چپ) چهار برابر رقم اول است.
- دو برابر رقم سوم، به علاوهٔ رقم دوم، مساوی رقم پنجم است. رقم دوم نصف رقم اول است.

۶.

۵۰	۱	ر	۵	۴۰۰
س		۶۰۰		۱
ت	۲۰		۴۰	ر
ر		۶۰		ی
۵۰	۱	۴	ن	۶۰۰

ما دربارهٔ حرف‌های الفبای ابجد قبلاً، یعنی در شماره‌های سال گذشته، برای شما گفته‌ایم که چگونه در این الفبا عددها را می‌توان به حرف نوشت و برعکس حرف‌ها و کلمه‌ها را به عدد تبدیل کرد.
اکنون در این جدول شما به جای عددهای خانه‌ها حرف معادل آن را در الفبای ابجدی بنویسید و جدول را کامل کنید تا بتوانید کلمه‌ها را بخوانید.

۷. به دوست خود بگویید یک عدد چندرقمی بنویسد و آن را معکوس کند. سپس عدد کوچک را از عدد بزرگ کم کند. از حاصل این تفریق یکی از رقم‌ها را بردارد و بقیه را به شما بگوید. اکنون شما می‌توانید با نگاه‌کردن به عددها در چند ثانیه بگویید که عدد حذف شده چیست؟ چگونه؟
راز این عمل در این است که بدانیم تفاضل دو عدد مقلوب همیشه مضربی از ۹ است. یعنی مجموع رقم‌های آن بر ۹ قابل تقسیم است. همین و بس! بنابراین شما باید رقم‌های عددی را که دوست شما می‌گوید جمع کنید و ببینید چه عددی باید به آن اضافه کنید که مضرب ۹ شود. امتحان می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} ۶۷۴ \\ -۴۷۶ \\ \hline ۱۹۸ \end{array}$$

اگر دوست شما رقم سمت راست را حذف کند و به شما عدد ۱۹ را بگوید، معلوم است که تا عدد ۲۷ شما ۸ عدد کم دارید. ۸ همان عدد حذف شده است. اکنون خودتان امتحان کنید.

۸. لابد شما داستان مخترع بازی شطرنج را می‌دانید که از حاکم درخواست کرد، به جای جایزه‌دادن به او، دانه‌های گندم بدهد، و هنگامی که کارگزاران حاکم خواستند دستور حاکم را اجرا کنند، دیدند همهٔ گندم‌های روی زمین هم آن‌طور که مخترع شطرنج درخواست کرده است، برای این کار کفایت نمی‌کند. تعداد دانه‌های گندمی را که مخترع درخواست کرده بود ابوریحان بیرونی حساب کرده است. او این عدد را به دست آورده بود (آیا می‌توانید عدد را بخوانید؟):
۱۸۴۴۶۷۴۴۰۷۳۷۰۹۵۵۱۶۱۵
ابوریحان برای اینکه بزرگی این عدد و مقدار گندم‌ها را به افراد غیر ریاضی‌دان نشان دهد، چنین گفته است:
اگر روی زمین ۲۳۰۵ کوه بلند و پربرف وجود داشته باشد و از هر کوه ۱۰۰۰۰ رود جاری شود و در طول هر رود ۱۰۰۰۰ قطار شتر باشد و هر قطار شامل ۱۰۰۰ شتر باشد و هر شتر ۸ کیسه گندم حمل کند و در هر کیسه ۱۰۰۰۰ دانه گندم باشد، باز هم تعداد همهٔ دانه‌های گندم کمتر از عدد بیست رقمی بالا خواهد بود!

۹. چیستان‌ها، لُغزها و معماها ریاضی نیستند، ولی به ریاضی نزدیک‌اند. زیرا با هوش، جست‌وجوگری و منطق و استدلال سر کار دارند و به همین دلیل افراد هوشمند و دوستداران ریاضی به آن‌ها علاقه دارند. اکنون در آخرین بخش این مطالب چند چیستان برای شما می‌آوریم.

در وصف انجیر

انجیرکش از شاخ بستدی تو
وصفش تو به یک بیت بشنو از من
چون برگ گل زرد خرد کرده
سربسته و کرده میان پر ارزن
عسجدی

در وصف قلم

لنگ و دونده است، گوش نی و سخن‌یاب
گنگِ فصیح است، چشم نی و جهان‌بین
تیزی شمشیر دارد و روش مار
کالبد عاشقان و گونهٔ غمگین
رودکی

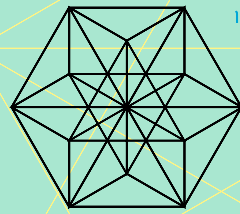
باید دانست که رودکی در اینجا قلمی را توصیف کرده که هزار سال پیش به کار می‌رفته و با مرکب می‌نوشته است.

سخن آخر، جواب سؤال ۴ «یک بار» است. چون وقتی یک بار عدد ۵ را از آن کم کنیم، دیگر ۲۵ وجود ندارد.

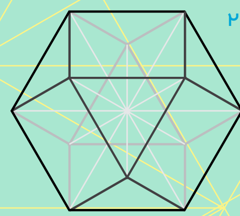
چگونه رسم می‌شود؟

عباس قلعه‌پوراقدم

شکل‌های زیر چگونه رسم می‌شوند؟



شکل ۱

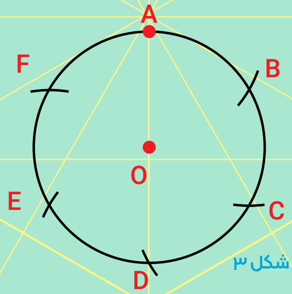


شکل ۲

شکل‌های ۱ و ۲ در واقع یک شکل هستند با این تفاوت که در شکل ۲، برای اینکه سه‌بعدی بودن شکل و وجوه آن مشخص شود، برخی پاره‌خط‌ها به‌صورت کم‌رنگ نمایش داده شده‌اند. این یک چهارده‌وجهی است که شامل ۸ وجه مثلثی و ۶ وجه مستطیلی است.

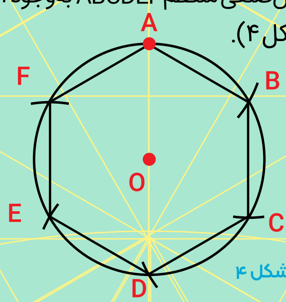
روش رسم

مرحلهٔ ۱. ابتدا باید یک شش‌ضلعی منتظم رسم کنیم. به این منظور دایره‌ای رسم می‌کنیم و مرکز آن را O می‌نامیم. سپس نقطه‌ای را روی دایره انتخاب می‌کنیم (در شکل ۳ نقطهٔ A). به مرکز A و همان شعاع دایره، کمانی می‌زنیم تا دایره را در نقطه‌ای که آن را B می‌نامیم، قطع کند. دوباره همین کار را به مرکز B انجام می‌دهیم و همین‌طور ادامه می‌دهیم تا شش نقطهٔ A، B، C، D، E و F روی دایره پدید آیند (شکل ۳).



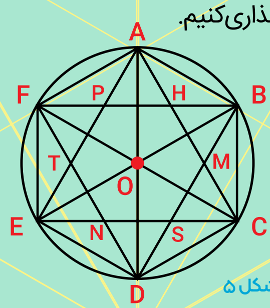
شکل ۳

نقطه‌ها را به هم وصل می‌کنیم تا شش‌ضلعی منتظم ABCDEF به‌وجود آید (شکل ۴).



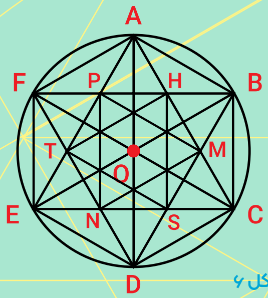
شکل ۴

مرحلهٔ ۲. حالا نوبت رسم قطرهای شش‌ضلعی است. آیا می‌دانید شش‌ضلعی چند تا قطر دارد؟ در حالت کلی، تعداد قطرهای هر چندضلعی از رابطهٔ $\frac{n(n-۳)}{۲}$ به‌دست می‌آید که در آن n تعداد ضلع‌ها را نشان می‌دهد. اگر در این رابطه به جای n، ۶ قرار بدهیم، تعداد قطرهای چندضلعی به‌دست می‌آید که برابر ۹ است. حالا باید در شکل ۴ قطرهای شش‌ضلعی را رسم کنیم و برخی از نقطه‌های برخورد قطرها را به صورتی که در شکل ۵ می‌بینید، نام‌گذاری کنیم.



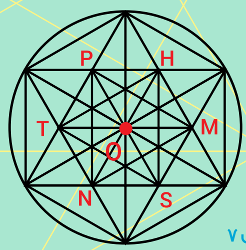
شکل ۵

مرحلهٔ ۳. نقطهٔ S را به H، N را به P، M را به P و N، N را به P، S را به H و T، و H را به T وصل می‌کنیم تا شکل ۶ به‌دست آید.



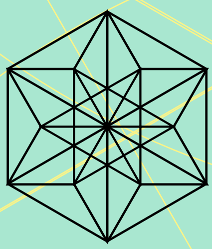
شکل ۶

مرحلهٔ ۴. S را به P، H را به N و M را به T وصل می‌کنیم تا شکل ۷ به‌دست آید.



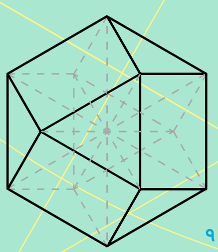
شکل ۷

مرحلهٔ ۵. اگر قسمت‌های اضافی را پاک کنیم، به شکل ۸ می‌رسیم که همان شکل یک است.



شکل ۸

مرحلهٔ ۶. برای اینکه سه‌بعدی بودن و وجوه مثلثی و مستطیلی شکل مشخص شوند، برخی از قسمت‌ها را به‌صورت خط‌چین یا کم‌رنگ درمی‌آوریم تا شکل ۹ به‌دست آید که همان شکل ۲ است.



شکل ۹

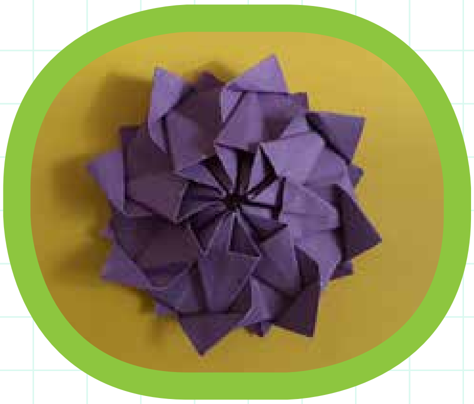
علیرضا محمدصالحی

کاغذتایی

اوریگامی

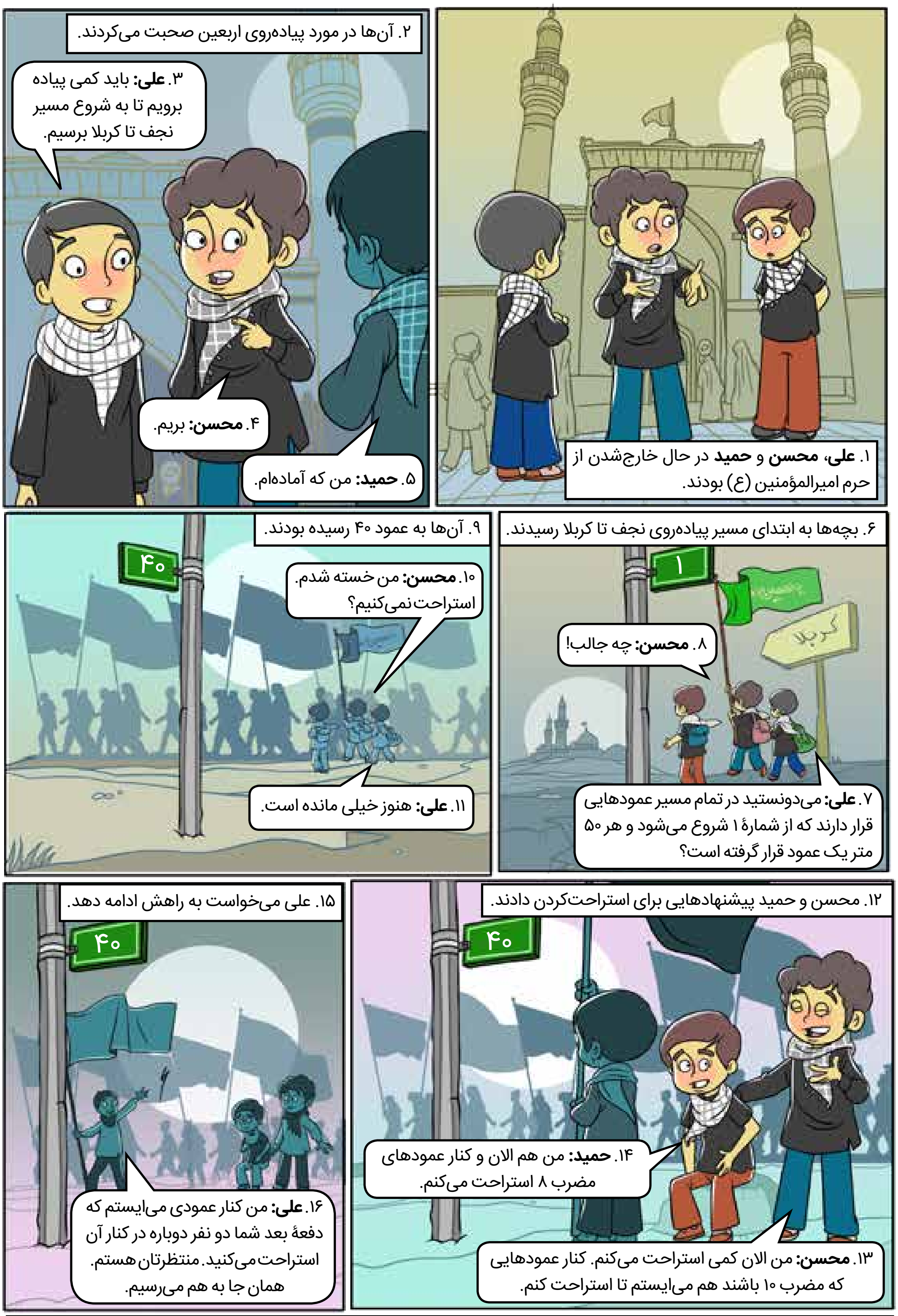
گل‌های چندوجهی

برای مشاهدهٔ مراحل ساخت، رمزینه را پویش کنید.



عمودهای عاشقانه

خسرو داودی تصویرگر: شهرام شیرزادی



۱۷. محسن و حمید داشتند حساب می‌کردند کنار کدام عمود دوباره همدیگر را می‌بینند که علی از آن‌ها دور شده بود. شما حساب کنید این سه نفر در کنار کدام عمود دوباره به هم می‌رسند؟

برای دیدن پاسخ رمزینه را پویش کنید.