

# مسائل برای حل



## ریاضیات ۱

فرخ فرشیان

۱. حاصل عبارت

$$\frac{3^5 + 3^7 + \dots + 3^{17} + 3^{19}}{3^{21} - 3^5}$$

را به دست آورید.

۲. اگر  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$  باشد، ثابت کنید

$$\sqrt{\frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{ac}{b}} + \sqrt{\frac{bc}{a}} = \sqrt{abc}$$

۳. درجه‌ی چندجمله‌ای

$$x(x+x^2)(2x^2+2x^3)(3x^3+3x^4) \dots (10 \cdot x^{10} + 10 \cdot x^{11})$$

را به دست آورید.

۴. حاصل را به کمک اتحاد به دست

آورید.

$$\text{الف) } (\sqrt{y} + \sqrt{z})(9 - \sqrt{14})(\sqrt{y}\sqrt{z} - 2\sqrt{z})$$

$$\text{ب) } \frac{x^n(x^2 - x^2)(x^{2n} + x^{2n+1})}{(x^2 + x^2)^{15n-2n}}$$

۵. عبارات زیر را تجزیه کنید.

$$\text{الف) } x^{16} - 14x^4 + 49x^2 - 36$$

$$\text{ب) } (x+a)(x+b) - (y+a)(y+b)$$

۶. نقاط  $C = (-1, 0)$  و  $B = (0, 1)$  رأس‌های

مثلث متساوی‌الساقین به رأس  $A$  هستند.

در صورتی که طول ساق مثلث  $\sqrt{5}$  باشد،

مختصات رأس  $A$  را به دست آورید. مسئله چند جواب دارد؟

۷. علی ۵۰۰ تومان پس‌انداز دارد و هر

روز ۲۰۰ تومان به آن اضافه می‌کند. حسن

۲۰۰۰ تومان پس‌انداز دارد و هر روز ۲۰۰

تومان آن را خرج می‌کند.

الف) اگر  $x$  تعداد روزهای گذشته و  $y$

پس‌انداز علی باشد، رابطه‌ی بین  $x$  و  $y$  را

به دست آورید.

ب) اگر  $x$  تعداد روزهای گذشته و  $z$

پولی باشد که حسن خرج می‌کند، رابطه‌ی

بین  $x$  و  $z$  را به دست آورید.

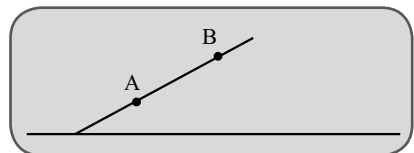
۸. در یک جاده‌ی شیب‌دار، اگر ۵۰۰ متر

حرکت کنیم از  $A$  به  $B$  می‌رسیم. اگر ارتفاع

دو نقطه‌ی  $A$  و  $B$  از سطح دریا به ترتیب

۱۰۰۰ و ۱۳۰۰ متر باشد، شیب این جاده را

به دست آورید.



سطح دریا

۹. اگر  $x - 2y = 0$  و  $x - 2y = -15$

معادلات دو ضلع یک مستطیل و  $7x + y = 15$

معادله‌ی یکی از قطرهای مستطیل باشد،

مختصات رأس‌های مستطیل را تعیین کنید.

۱۰. حاصل عبارت

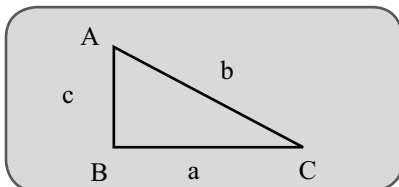
$$\frac{\sin^2 20 + \sin^2 70}{\sin 26} + \frac{\sin 28}{\cos 64} + \frac{\sin 30 - \tan 45}{\cos^2 - \tan 45}$$

را به دست آورید.

۱۱. در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$

اندازه‌ی ضلع  $C$  و  $\tan C = \frac{3}{\sqrt{3}}$  و  $b = 4$  است.

را به دست آورید.



۱۲. حاصل عبارت زیر را به دست

آورید.

$$\text{الف) } \left( \frac{x+3}{3x-9} - \frac{x-3}{3x+9} - \frac{12}{x^2-9} \right) \div \left( \frac{2x+3}{x+3} - 1 \right)$$

$$\text{ب) } \frac{1}{1+x^{a-b}} + \frac{1}{1+x^{a-c}} + \frac{1}{1+x^{b-c}} + \frac{1}{1+x^{c-a}} + \frac{1}{1+x^{c-b}}$$

۱۳.  $a$  و  $b$  و  $c$  را طوری تعیین کنید

که باقی‌مانده‌ی تقسیم  $x^4 + ax^2 + b + x$  بر

عبارت  $3x^2 - 4x + 1$  برابر  $x^2 + 2x^2 - 4x + 1$

باشد.

۱۴. مخرج کسر  $\frac{8\sqrt{21}}{2\sqrt{3} + \sqrt{19} + \sqrt{7}}$  را

گویا کنید.

۱۵. خط زیر دارای معادله‌ی  $y = ax + b$

۵ چند عدد چهاررقمی می‌توان ساخت؛ به شرطی که تکرار مجاز نباشد و عدد حاصل از ۴۰۰۰ بزرگ‌تر باشد.

۱۷. به چند طریق می‌توان از بین ۱۰ نفر دانش‌آموز که ۳ نفر آن‌ها عضو تیم فوتبال مدرسه هستند، هیأتی سه‌نفری انتخاب کرد، به شرط آن‌که:

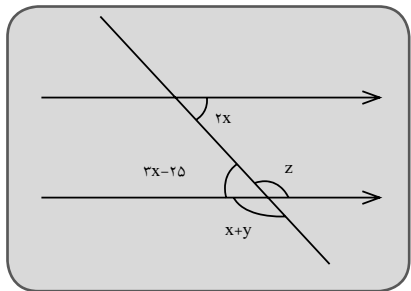
(الف) رئیس هیأت عضو تیم فوتبال باشد.

(ب) یک نفر آن‌ها عضو تیم فوتبال و ۲ نفر دیگر عضو تیم فوتبال نباشند.

## هندسه ۱

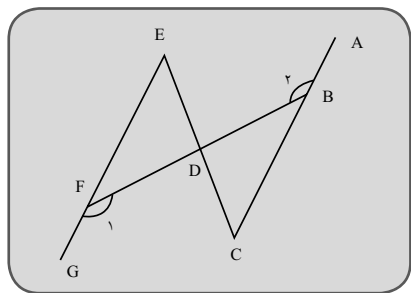
محمد هاشم رستمی

۱. با توجه به شکل، اندازه‌ی  $x$ ،  $y$  و  $z$  را تعیین کنید. خط‌های موازی، با پیکان‌های هم‌جهت مشخص شده‌اند.



۲. در شکل روبه‌رو:

(الف) اگر  $\hat{A} = 4^\circ$  و  $CE$  پاره‌خط  $BF$  را نصف کرده باشد، ثابت کنید که  $\hat{C} = \hat{E}$ .



(ب) اگر  $BF$  و  $CE$  یکدیگر را نصف کرده باشند، ثابت کنید:

$$BC = EF$$

۳. با استفاده از چهار پاره‌خط، خمی

$$s(x^2) - s(x)$$

$$s(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

۶. دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی زیر را

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x+1} - \frac{2-x}{1-x}}$$

۷. اگر  $a > 0$  ثابت کنید  $a + \frac{1}{a} \geq 2$ .

(ب) بیشترین مقدار کسر  $A = \frac{x}{1+x^2}$  را برای هر عدد حقیقی  $x > 0$  پیدا کنید.

۸. حدود  $m$  را چنان تعیین کنید که نابرابری زیر همواره برقرار باشد.

$$(m^2 + m - 2)x^2 + 2(m - 1)x - 2 < 0$$

۹. با استفاده از تعریف لگاریتم، دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 2^{3x-y} = 32 \\ 3^{x+2y} = 3 \end{cases}$$

۱۰. بدون استفاده از ماشین حساب،

حاصل عبارت زیر را محاسبه کنید.

$$A = \frac{\log_2^{14}}{\log_2^{16}} - \frac{\log_2^{192}}{\log_2^{17}}$$

۱۱. معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$1 + \log_7^{(x-1)} = \log_7^x$$

۱۲. بیشترین و کمترین مقدار عددی عبارت زیر را محاسبه کنید.

$$A = \sin^2 x - 2 \sin x + 5$$

۱۳. مقدار عددی عبارت زیر را محاسبه کنید.

$$A = \frac{\sin \frac{2\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{4\pi}{3} \cos \frac{4\pi}{3}}{\cos \frac{5\pi}{3} \cos \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{5\pi}{4} \sin \frac{7\pi}{4}}$$

۱۴. جواب‌های معادله‌ی زیر را بیابید.

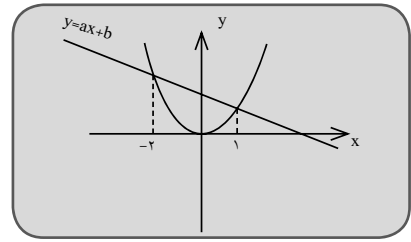
$$\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix} = 0$$

۱۵. اگر  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$  در این صورت

حاصل  $(A - 2A^{-1})$  را پیدا کنید.

۱۶. با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و

است. مقادیر  $a$  و  $b$  را با توجه به شکل به‌دست آورید.



۱۶. معادلات زیر را حل کنید.

$$(الف) x^2 - (3\sqrt{2} + 1)x + 4 + \sqrt{2} = 0$$

$$(ب) x^2 + \frac{1}{x^2} - 4x - \frac{4}{x} = -6$$

۱۷. مجموع ارقام یک عدد دو رقمی ۱۰

است. رقم دهگان آن ۲ واحد کم‌تر از مربع رقم یکان آن است. این عدد را پیدا کنید.

۱۸. مجموعه جواب نامعادله‌ی

$$x + 8 + a > \frac{4-x}{16}$$

به صورت  $x > -\frac{16}{3}$  است. مقدار  $a$  را به‌دست آورید.

## ریاضیات ۲

میرشهرام صدر

۱. نشان دهید که اگر زاویه‌های یک

مثلث را از کوچک به بزرگ (یا از بزرگ به کوچک) مرتب کنیم و تشکیل یک دنباله‌ی حسابی بدهند، آن‌گاه همواره زاویه‌ی وسطی برابر با  $60^\circ$  خواهد بود.

۲. اگر اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای

دنباله‌ی هندسی بسازند، قدر نسبت این دنباله را بیابید.

۳. اگر نمودار تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = x^2 -$

$3x + k$  بر محور  $x$  مماس باشد، مقدار  $k$  را محاسبه کنید.

۴. تابع با ضابطه‌ی زیر مفروض است،

در این صورت مقدار عددی  $f(f(f(1)))$  را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x > 0 \\ -2x^3 & x \leq 0 \end{cases}$$

۵. تابع با ضابطه‌ی زیر به نام تابع علامت

معروف است. مطلوب است محاسبه‌ی

رسم کنید که:

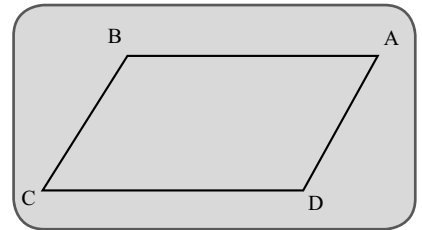
(الف) ساده و بسته باشد.

(ب) ساده باشد ولی بسته نباشد.

۴. چهارضلعی ABCD متوازی الاضلاع

است. (اندازه‌ی x و y را در هر یک از

حالت‌های زیر تعیین کنید:



(الف)  $CD=y$ ,  $AB=2x$ ,  $AD=5x$

و محیط متوازی الاضلاع مساوی ۸۴.

(ب)  $BC=3y+8$ ,  $AB=2x$

$AD=5y-10$  و  $CD=7x-25$

(پ)  $\hat{D}=x$  و  $\hat{C}=2y$ ,  $\hat{A}=4y-60$

(ت)  $\hat{A}=3x$ ,  $\hat{B}=10x-15$  و

$\hat{C}=y$

۵. چهارضلعی ABCD مستطیل است.

نقطه‌های E و F روی ضلع‌های BC و

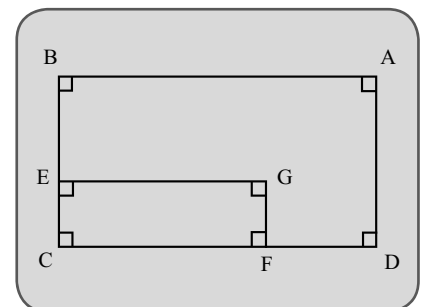
CD چنان اختیار شده‌اند که  $CE = \frac{5}{14}BC$

و  $\frac{CF}{CD} = \frac{7}{10}$  است. مستطیل CEGF را

می‌سازیم. اگر مساحت مستطیل CEGF

مساوی ۷۰ سانتی‌متر مربع باشد، اندازه‌ی

مساحت مستطیل ABCD را تعیین کنید.



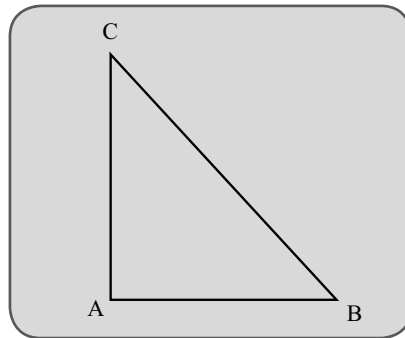
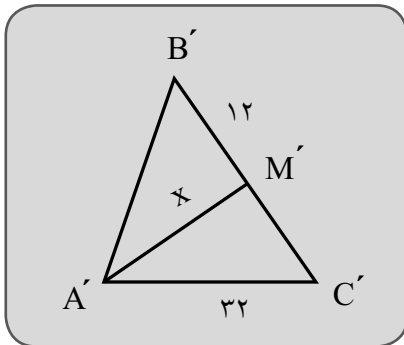
۶. اندازه‌ی مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ی

متساوی‌الساقین ABC ( $\hat{A}=90$ ,  $AB=AC$ )

۳۲ سانتی‌متر مربع است. اندازه‌ی وتر و

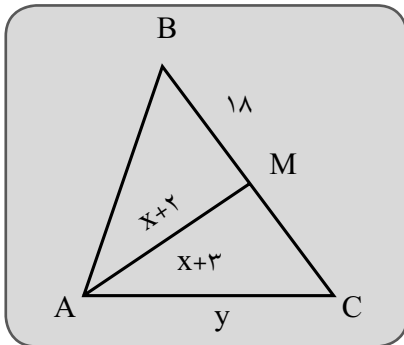
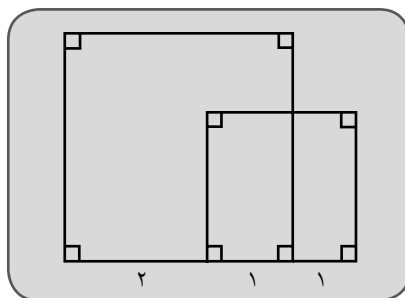
ساق‌های این مثلث را تعیین کنید.

مثلث‌اند. اندازه‌ی x و y را به دست آورید.



۷. با توجه به شکل، مساحت قسمت

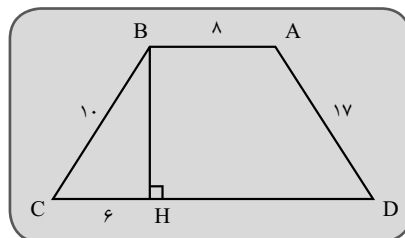
مشترک دو مربع را به دست آورید.



۸. چهارضلعی ABCD دوزنقه است. با

توجه به شکل، اندازه‌ی مساحت این دوزنقه

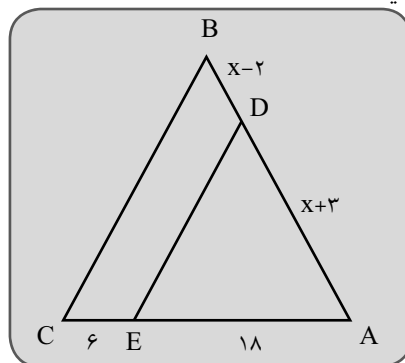
را تعیین کنید.



۹. در مثلث ABC، DE موازی BC

است. با توجه به شکل، اندازه‌ی x را تعیین

کنید.



۱۰. دو مثلث ABC و A'B'C' متشابه

و AM و A'M' میانه‌های نظیر از این دو

۱۱. در شکل AH ارتفاع نظیر رأس A

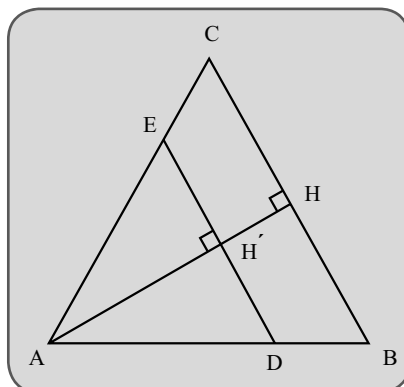
از مثلث ABC و DE موازی ضلع BC است

که ارتفاع AH را در H' قطع کرده است.

اگر  $AH=40$  و  $H'H=12$  باشد، نسبت

مساحت‌های دو مثلث ABC و ADE را

به دست آورید.



۱۲. منشور منتظم شش‌پهلوی

ABCDEF و A'B'C'D'E' به ضلع قاعده‌ی

۱۲ سانتی‌متر و ارتفاع ۳۰ سانتی‌متر داده

شده است. استوانه‌ای را که قاعده‌هایش

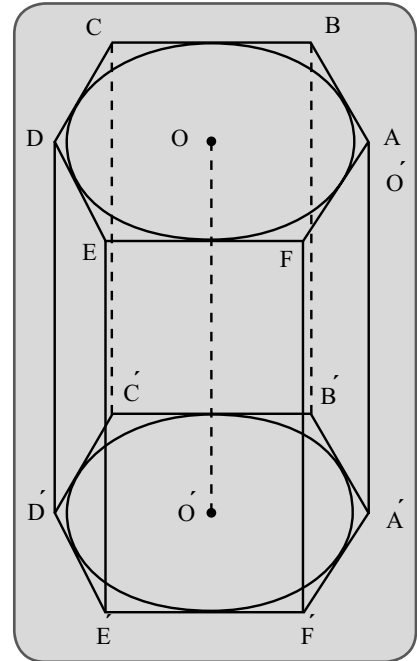
محاط در قاعده‌های این منشور هستند در

نظر می‌گیریم.

الف) آیا این کره به طور کامل درون این

مخروط جای می‌گیرد؟ بحث کنید.

ب) در صورتی که کره به طور کامل درون مخروط قرار بگیرد، حجم فضای بین مخروط و کره را تعیین کنید.

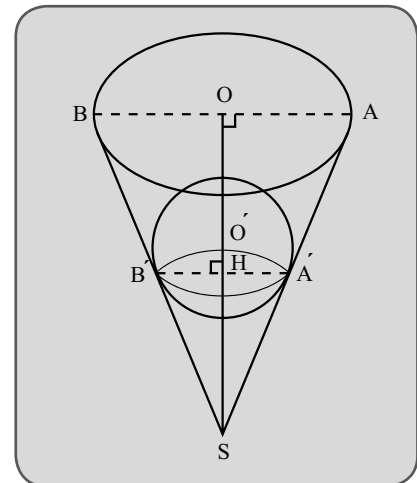


الف) حجم منشور منتظم داده شده را تعیین کنید.

ب) حجم فضای بین منشور منتظم و استوانه را به دست آورید.

۱۳. مکعب مستطیلی به قطر  $10\sqrt{29}$  سانتی‌متر را در نظر بگیرید که ابعاد آن متناسب با عددهای ۲ و ۳ و ۴ است. حجم این مکعب مستطیل را بیابید.

۱۴. مخروطی به شعاع قاعده‌ی ۸ سانتی‌متر و ارتفاع ۲۱ سانتی‌متر داده شده است (شکل). کره‌ای به سطح کل  $36\pi$  سانتی‌متر مربع را درون این مخروط قرار می‌دهیم. تعیین کنید:



پ) چند تابع ثابت موجود است؟

ت) چند تابع موجود است که  $f(a_1) \neq b_1$  باشد؟

۷. اگر دو تابع با ضابطه‌های

$$f(x) = \frac{1}{3x + \sqrt{9x^2 + 1}}$$

$$g(x) = \sqrt{ax^2 + 1} - bx^2$$

برابر باشند، a و b را تعیین کنید.

۸. چند تابع  $f: W \rightarrow W$  وجود دارد که

برای هر  $x$  متعلق به اعداد حسابی داشته باشیم:

$$f(f(n)) + f(n) = 2n + 3$$

۹. فرض کنید  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  دارای

این خاصیت است که  $f(x) - 3x$  و

$f(x) - x^2$  صعودی هستند. نشان دهید که

$f(x) - x^2 - x$  نیز صعودی است.

۱۰. نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی  $15^\circ$  را

به دست آورید.

۱۱. معادله‌ی  $\frac{\sin 3x - \sin x}{\sin 3x} = 2$  را حل کنید.

۱۲. وتر AB مطابق شکل مقابل به سمت

مرکز دایره در حال حرکت است.

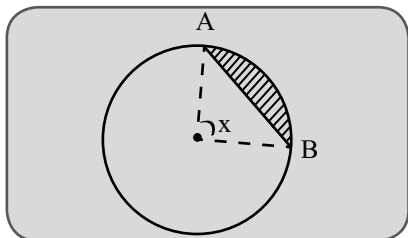
الف) تابعی بسازید که مساحت قطاع

دایره را برحسب زاویه‌ی  $x$  نمایش دهد.

ب) تابع تغییرات وتر برحسب  $x$  را

بسازید.

پ) تابع تغییر  $x$  برحسب وتر را بیابید.



۱۳. مجموعه جواب نامعادله‌ی زیر را به

صورت یک همسایگی محذوف بنویسید.

$$\frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x^2 - x + 1}} < 0$$

۱۴. a را طوری بیابید که

## حسابان

### مجتبی رفیعی

۱. محیط یک دایره به شعاع «۱» را

به شش قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و با

نقاط به دست آمده یک شش ضلعی منتظم

می‌سازیم. سپس وسط‌های این شش ضلعی

را به هم وصل می‌کنیم و یک شش ضلعی

دیگر می‌سازیم و این کار را تا بی‌نهایت

مرحله ادامه می‌دهیم. حد مجموع مساحت‌ها

و محیط‌های این شش ضلعی‌ها را بیابید.

۲. معادله‌ی زیر چند جواب حقیقی

دارد؟

$$(x+1)^{1382} + (x+1)^{1381}(x-2) + (x+1)^{1380}(x-2)^2 + \dots + (x+1)(x-2)^{1381} + (x-2)^{1382} = 0$$

۳. در بسط  $(x+2y)^4$  مطلوب است:

الف) تعداد جملات

ب) مجموع ضرایب

پ) جمله‌ی پنجم بسط

۴. به چند صورت می‌توان یک چند

جمله‌ای از درجه‌ی پنج ساخت که ضرایب

آن با ترتیبی دلخواه، اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ... و

۶ و بر چند جمله‌ای  $1+x+x^2$  بخش پذیر

باشد.

۵. تعداد ریشه‌های معادله‌ی  $\sin x = \frac{2x}{5\pi}$

را به روش هندسی به دست آورید.

۶. اگر دو مجموعه‌ی  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

و  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  را داشته باشیم و

$f: A \rightarrow B$ ، آن‌گاه:

الف) به طور کلی چند تابع  $f$  موجود

است؟

ب) چند تابع  $f$  موجود است که در آن‌ها

که احتمال وقوع هر عدد اول در پرتاب آن ۳ برابر احتمال وقوع عدد غیر اول است. اگر در یک بار پرتاب این تاس، A پیشامد وقوع عددی کوچک‌تر از ۴ باشد، P(A) را به دست آورید.

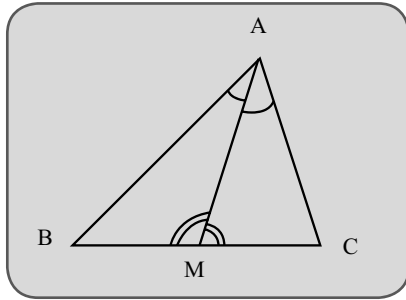
۱۲. از بین مستطیل‌هایی که ابعاد آن‌ها کوچک‌تر از ۴ واحد است، یکی را به تصادف انتخاب کرده‌ایم. احتمال انتخاب مستطیل‌هایی با محیط بزرگ‌تر از ۶ را به دست آورید.

۱۳. احتمال قبولی نرگس و مردودی مژده در امتحان جبر و احتمال ۰/۳ است، ولی شانس قبولی یکی از آن‌ها در این امتحان ۰/۷ است. احتمال قبولی مژده در این امتحان را به دست آورید.

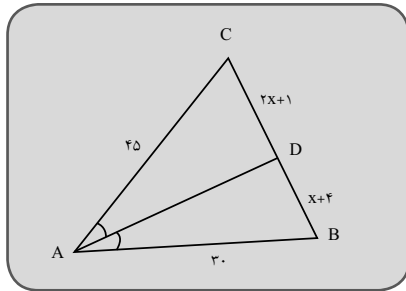
## مسائل هندسه‌ی ۲

محمد هاشم رستمی

۱. در مثلث ABC میان‌بندی AM را رسم کرده‌ایم. اگر  $AB > AC$  باشد، ثابت کنید:  
الف)  $\widehat{MAB} < \widehat{MAC}$   
ب)  $\widehat{AMB} < \widehat{AMC}$



۲. در شکل، AD نیمساز زاویه‌ی درونی A از مثلث ABC است. اندازه‌ی ضلع BC را تعیین کنید.



۳. می‌دانیم  $\sqrt{5}$  عددی گنگ است. ثابت کنید  $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$  نیز عددی گنگ است.

۴. برای هر دو عدد حقیقی x و y ثابت کنید:  
 $1+x^2+2y^2 \geq 2y(x+1)$

۵. در یک فروشگاه لباس، لباس‌های بچه‌گانه، زنانه و مردانه در سه اندازه‌ی کوچک و بزرگ و متوسط فروخته می‌شود. شخصی از این فروشگاه ده دست لباس خرید. ثابت کنید دست کم دو تا از لباس‌های او از یک نوع و یک اندازه بوده‌اند.

۶. با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subset A$

۷. اگر  $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |2x-1| \leq 2\}$  و  $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, n \leq \sqrt{x}\}$  مجموعه‌ی  $A' - A \times B$  را تشکیل دهید.

۸. رابطه‌ی زیر روی  $\mathbb{R} - \{-1\}$  به صورت زیر تعریف شده است:  
 $(x, y)R(z, t) \Leftrightarrow x+t+xt = y+z+yz$   
ثابت کنید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است و سپس کلاس هم‌ارزی (-۲ و ۱) را به دست آورید.

۹. تاسی را پرتاب می‌کنیم. اگر زوج بیاید، یک سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر فرد بیاید، سکه را دو بار پرتاب می‌کنیم. مطلوب است:  
الف) فضای نمونه‌ی این پیشامد.  
ب) پیشامد A که در آن سکه دست کم یک بار پشت بیاید.  
ج) پیشامد B که در آن تاس مضرب ۳ بیاید.  
د) پیشامد  $A \cap B'$ .

۱۰. در یک کیسه شامل ۵ مهره‌ی قرمز و ۳ مهره‌ی سفید و تعدادی مهره‌ی آبی دو مهره به تصادف خارج می‌کنیم. اگر احتمال هم‌رنگ بودن دو مهره مساوی  $\frac{14}{45}$  باشد، تعداد مهره‌های آبی را به دست آورید.

۱۱. تاسی به گونه‌ای ساخته شده است

$$f(x) = \begin{cases} ax[\frac{1}{x}] & x \geq \frac{1}{2} \\ \cos \frac{\pi}{2}x & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

در  $x = \frac{1}{2}$  حد داشته باشد.  
۱۵. حاصل حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - \cos^2 x}{x \tan x}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1-2\cos x}{2x-\pi}$

۱۶. تانژانت زاویه‌ی بین دو نیم‌مماس تابع  $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{\cos ax}}$  در مبدأ مختصات برابر  $\frac{4}{3}$  است. چند مقدار برای a وجود دارد؟

۱۷. برای تصفیه‌ی یک محلول از یک ظرف مخروطی که در رأس آن سوراخ بسیار ریزی تعبیه شده است، استفاده می‌کنیم. با فرض این که ارتفاع مخروط ۱۶cm و شعاع آن ۴cm باشد و محلول با سرعت ثابت  $\frac{2cm^3}{s}$  از ظرف خارج شود، هنگامی که ارتفاع محلول ۸cm است، سرعت کاهش ارتفاع محلول در ظرف چه قدر است؟

۱۸. مشتق تابع زیر را بگیرید.

$$\frac{x+8}{16} + a > \frac{4-x}{8}$$

۱۹. تابع  $x > -\frac{16}{3}$  را در نظر بگیرید. اگر از هر نقطه‌ی روی تابع خطی به مبدأ مختصات وصل کنیم و شیب آن را m بنامیم، تغییرات زاویه‌ی خط با محور xها ( $\alpha$ ) را نسبت به تغییرات x به دست آورید.

## جبر و احتمال

هوشنگ شرقی

۱. با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید:  
 $(1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\dots(1+\frac{1}{n}) = n+1$

۲. به کمک استدلال استنتاجی ثابت کنید که مکعب هر عدد فرد، عددی فرد است.

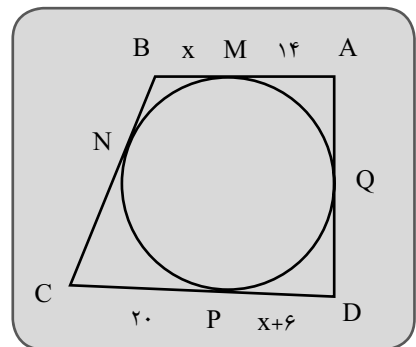
۳. مثلث ABC به ضلع‌های  $AB=AC=10$  و  $BC=12$  داده شده است. اگر M نقطه‌ای واقع بر قاعده BC از این مثلث باشد، مجموع فاصله‌ی آن از دو ضلع AB و AC را تعیین کنید.

۴. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع  $R'$  را بیابید که بر دایره‌ی ثابت  $C(O, R)$  مماس برون باشند.

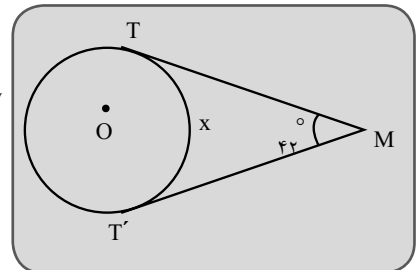
۵. مثلث ABC را با معلوم بودن ضلع  $BC=a$ ، زاویه‌ی  $\hat{A} = \alpha$  و ارتفاع  $AH=h_a$  رسم کنید.

۶. در دایره‌ی  $C(O, 10)$ ، مکان هندسی وسط وترهایی از این دایره را تعیین کنید که طولشان مساوی ۱۶ باشد.

۷. چهارضلعی ABCD در نقطه‌های M، N، P، Q بر دایره‌ای به مرکز O مماس است. اگر محیط این چهارضلعی محیطی ۱۲۰ باشد، اندازه‌ی x را تعیین کنید.



۸. اندازه‌ی x و y را با توجه به شکل داده شده تعیین کنید. MT و MT' در نقطه‌های T و T' بر دایره مماس‌اند.

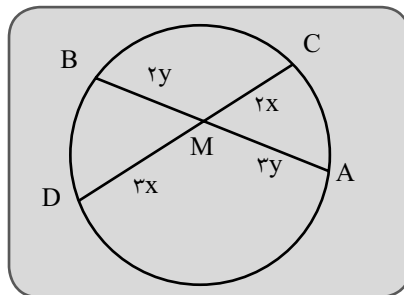


۹. کمان درخور زاویه‌ی  $60^\circ$  روبه‌رو به پاره‌خط AB به طول  $4\sqrt{3}$  را رسم کرده‌ایم.

الف) اندازه‌ی شعاع دایره‌ای را که این کمان درخور بخشی از آن است، بیابید.

ب) فاصله‌ی مرکز این دایره از وتر AB را تعیین کنید.

۱۰. AB و CD دو وتر از دایره‌ی (C) هستند که در نقطه‌ی M یکدیگر را قطع کرده‌اند. با توجه به شکل، اندازه‌ی وترهای AB و CD را به دست آورید، در صورتی که  $AB=2CD-10$  باشد.



۱۱. در تبدیل  $T(x, y) = (2x+5, y-3)$ ، نقطه‌ی  $M' = (3, 1)$  تصویر چه نقطه‌ای است؟

۱۲. تحت یک بازتاب محوری، تصویر خط  $D: 3x-4y-1=0$  خط

این بازتاب را تعیین کنید.  $D': 4x+3y+7=0$  است. معادله‌ی محور

۱۳. تصاویر نقطه‌های  $A = (2, 0)$ ،  $B = (0, 4)$  و  $C = (4, 5)$  تحت تبدیل  $T(x, y) = (2x, 2y)$  را به ترتیب  $A'$ ،  $B'$  و  $C'$  می‌نامیم.

الف) مختصات نقطه‌های  $A'$ ،  $B'$  و  $C'$  را به دست آورید.

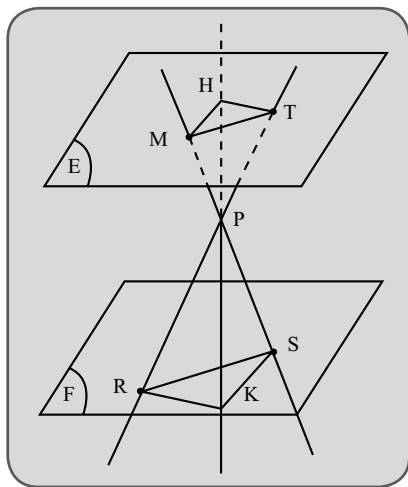
ب) شیب خط‌های AB، BC، CA،  $A'B'$ ،  $B'C'$  و  $C'A'$  را به دست آورید و شیب خط‌های متناظر را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

پ) طول ضلع‌های دو مثلث ABC و  $A'B'C'$  را محاسبه و ضلع‌های متناظر آن‌ها را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ این تبدیل چیست؟

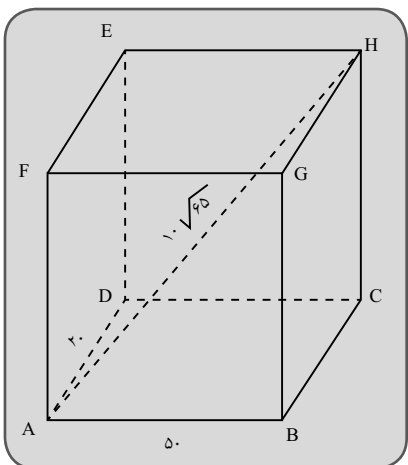
۱۴. دو خط متمایز d و d' با خط  $\delta$  از صفحه‌ی P موازی‌اند. صفحه‌ی P' را بر دو خط d و d' می‌گذرانیم. در وضع این صفحه

با صفحه‌ی P بحث کنید. ۱۵. دو صفحه‌ی (E) و (F) با هم موازی‌اند. از نقطه‌ی P غیر واقع بر این دو صفحه، سه خط هم‌رس در نقطه‌ی P رسم می‌کنیم تا دو صفحه‌ی (E) و (F) را در نقطه‌های P، K، S، M، T قطع کنند.

مثلث‌های RKS و MHT را رسم می‌کنیم. آیا این دو مثلث با هم متشابه‌اند؟ دلیل بیاورید.



۱۶. مکعب مستطیل ABCDEFGH داده شده است. اگر  $AB=50$ ،  $AD=20$  و قطر  $AH=10\sqrt{65}$  باشد:



الف) اندازه‌ی ضلع AF از این مکعب مستطیل را تعیین کنید.

ب) طول عمود مشترک دو خط متناظر EF و BG را تعیین کنید.