

بخش دوم

پیشامدهای تصادفی و احتمال در فضاهای نمونه گسسته و پیوسته

پیشامدهای مستقل و وابسته

(این قضیه با استفاده از فرمول احتمال شرطی به اثبات می‌رسد.)

مثال: در هر یک از حالت‌های زیر مستقل یا وابسته بودن پیشامدهای داده شده را بررسی کنید:

(I) ریختن ۲ تاس با هم یا یک تاس ۲ بار $S =$

پیشامد آنکه تاس اول ۵ بیاید $A =$

پیشامد آنکه مجموع دو تاس ۹ باشد $B =$

حل: عدم رخداد A در بعضی از حالت‌ها مانع رخداد B می‌شود. مثلاً اگر تاس اول ۱ یا ۲ بیاید، امکان اینکه مجموع دو تاس ۹ باشد، وجود ندارد. پس دو پیشامد وابسته هستند. حال از طریق قضیه این نتیجه را تأیید می‌کنیم:

$$n(B) = 4 \text{ و } n(A) = 6 \text{ و } (A \cap B) = \{(5, 4)\}$$

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

تعریف: دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S را مستقل از هم می‌نامیم هرگاه وقوع یا عدم وقوع هر یک روی وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد. (A رخ بدهد یا رخ ندهد، B بتواند رخ بدهد.)

تذکر مهم: اگر A و B در دو فضای نمونه‌ای متفاوت مانند S_1 و S_2 تعریف شده باشند، همواره مستقل هستند و واضح است که رخداد یا عدم رخداد هر یک هیچ تأثیری بر رخداد دیگری ندارد. مثلاً انداختن یک تاس و یک سکه با فضاهای نمونه‌ای $S_1 = \{1, 2, \dots, 6\}$ و $S_2 = \{H, T\}$ دو پیشامد مستقل از هم هستند.

قضیه: شرط لازم و کافی برای آنکه دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S مستقل باشند آن است که:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

تذکره: تعریف فوق برای n پیشامد A_1, A_2, \dots, A_n از فضای نمونه‌ای S قابل تعمیم است. یعنی اگر پیشامدهای A_1 تا A_n دوه‌دو مستقل باشند و داشته باشیم: $P(\bigcap_{i=1}^n A_i) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$ در این صورت این پیشامدها مستقل از یکدیگرند.

تذکره: دو پیشامد A و B از فضای S می‌توانند:

- (I) سازگار و مستقل باشند.
- (II) سازگار و وابسته باشند.
- (III) ناسازگار $((A \cap B) = \emptyset)$ و مستقل باشند که در این صورت: $P(A) = 0$ یا $P(B) = 0$.
- (IV) ناسازگار و وابسته باشند.

تذکره: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، در این صورت A' و B' مستقل‌اند، A و B' نیز مستقل‌اند.

نکته مهم: اگر $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ فضای نمونه‌ای یک پدیده تصادفی باشد، همواره داریم:

- ۱) $\forall 1 \leq i \leq n; 0 \leq P(\{a_i\}) \leq 1$
- ۲) $\sum_{i=1}^n P(\{a_i\}) = 1$
- یا $P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + \dots + P(\{a_n\}) = 1$
- (برای راحتی در نگارش از این به بعد به جای $P(\{a_i\})$ می‌نویسیم: $P(a_i)$).

تعریف: اگر $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ و در این فضای نمونه‌ای داشته باشیم: $P(a_1) = P(a_2) = \dots = P(a_n) = \frac{1}{n}$ ، در این صورت فضای S را فضای نمونه‌ای هم‌شانس و در غیر این صورت آن را فضای غیرهم‌شانس می‌نامیم. (اگر در یک فضای نمونه‌ای حداقل ۲ برآمد ساده، احتمال نابرابر داشته باشند، آن فضا غیرهم‌شانس است.)

مثال: یک تاس طوری ساخته شده که احتمال وقوع هر وجه آن متناسب است با دو برابر عدد حک شده روی همان وجه. اگر این تاس را بیندازیم چه قدر احتمال دارد عدد حاصل فرد باشد؟
حل: طبق فرض داریم:

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \quad \text{و} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{6} \times \frac{1}{9}$$

(II) ریختن دو تاس با هم یا یک تاس، دو بار $S =$ پیشامد آنکه تاس اول ۵ بیاید $A =$ پیشامد آنکه مجموع دو تاس ۷ باشد $B =$

حل: A رخ بدهد یا رخ ندهد، همواره B می‌تواند رخ بدهد. پس دو پیشامد مستقل هستند و از طریق قضیه داریم:
 $n(S) = 36$ و $n(A) = 6$ و $n(B) = 6$ و $n(A \cap B) = 1$

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad \text{و} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{36} = P(A) \times P(B)$$

تعریف: ۳ پیشامدهای A, B, C از فضای نمونه‌ای S را مستقل از یکدیگر می‌نامیم هرگاه: اولاً دوه‌دو مستقل باشند، ثانیاً داشته باشیم:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$$

تذکره: ممکن است سه پیشامد A, B, C از فضای نمونه‌ای S طوری تعریف شوند که شرط دوم را داشته باشند، ولی دوه‌دو مستقل نباشند (در واقع شرط دوم شرط اول را نتیجه نمی‌دهد).

مثال: فرض کنیم: $S = \{1, 2, \dots, 7, 8\}$ ، $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $B = \{4, 5, 6, 7\}$ و $C = \{4, 8, 7, 6\}$. در این صورت داریم:

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad P(B) = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad P(C) = \frac{1}{2}$$

شرط دوم برقرار است:

$$P(A \cap B \cap C) = P(\{4\}) = \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$(A \cap B) = \{4\} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{8} \neq P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$(A \cap C) = \{4\} \rightarrow P(A \cap C) = \frac{1}{8} \neq P(A) \times P(C) = \frac{1}{4}$$

$$(B \cap C) = \{4, 6, 7\}$$

$$\rightarrow P(B \cap C) = \frac{3}{8} \neq P(B) \times P(C) = \frac{1}{4}$$

باشند، بیشتر از $\frac{1}{3}$ باشد؟

حل: اگر A را پیشامد مورد نظر فرض کنیم، متمم A یا A' آن است که روز تولد هر k نفر متمایز باشد.

$$P(A) > \frac{1}{3} \rightarrow 1 - P(A') > \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow P(A') < 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{7}{7} \times \frac{6}{7} \times \dots \times \frac{7-k}{7} < \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow k_{\min} = 3$$

مثال: در جعبه‌ای ۳ مهره قرمز، ۴ مهره آبی و ۳ مهره سبز وجود دارد. سه مهره به تصادف از این جعبه خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال آنکه:

(I) هر سه مهره آبی باشند.

(تعداد کل حالت‌هایی که می‌توان سه مهره را از بین ۱۰

$$n(S) = \binom{10}{3} = 120$$

$$P(A) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

(II) هر سه مهره هم‌رنگ باشند (یا هر سه قرمز یا هر سه آبی یا هر سه سبز).

$$P(A) = \frac{\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{3}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1+4+1}{120} = \frac{1}{20}$$

(III) هیچ دو مهره‌ای هم‌رنگ نباشند (۱ مهره قرمز، ۱ مهره آبی و ۱ مهره سبز).

$$P(A) = \frac{\binom{3}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{10}$$

(IV) حداقل ۱ مهره سبز باشد.

پیشامد آنکه هیچ مهره‌ای سبز نباشد = A'

$$\rightarrow n(A') = \binom{7}{3} = 35$$

$$P(A') = \frac{35}{120} \rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{35}{120} = \frac{85}{120} = \frac{17}{24}$$

(V) حداکثر ۲ مهره آبی باشد.

پیشامد آنکه هر سه مهره آبی باشند = A'

$$\rightarrow P(A') = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4}{120} \rightarrow P(A) = 1 - \frac{4}{120} = \frac{29}{30}$$

(VI) فقط ۲ مهره قرمز باشد (دو مهره قرمز و ۱ مهره

$$P(1) = 2x \text{ و } P(2) = 4x \text{ و } P(3) = 6x$$

$$\text{و } P(4) = 8x \text{ و } P(5) = 10x \text{ و } P(6) = 12x$$

$$\sum_{i=1}^6 P(i) = 1 \rightarrow 2x + 4x + \dots + 12x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{42}$$

$$P(\{1, 3, 5\}) = P(1) + P(3) + P(5)$$

$$= \frac{2}{42} + \frac{6}{42} + \frac{10}{42} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}$$

پیشامدهای مربوط به تولد

به دنیا آمدن و تولد اشخاص پیشامدهایی مستقل از یکدیگر در نظر گرفته می‌شوند. برای مثال، احتمال آنکه دو نفر در روز شنبه به دنیا آمده باشند برابر است با:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{49}$$

مثال: در یک تیم ۵ نفری، چه قدر احتمال دارد:

(الف) هر پنج نفر روز شنبه به دنیا آمده باشند؟

(ب) هر پنج نفر در یک روز از هفته به دنیا آمده باشند؟

(ج) روز تولد هر پنج نفر متمایز باشد (تولد در یکی از روزهای هفته).

(د) حداقل ۲ نفر در یک روز از ایام هفته متولد شده باشند؟

حل:

$$(الف) P(A) = \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{7^5}$$

$$(ب) P(B) = 7 \times \frac{1}{7^5} = \frac{1}{7^4}$$

$$(ج) P(C) = \frac{7}{7} \times \frac{6}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{360}{7^4}$$

$$(د) P(D) = 1 - \frac{360}{7^4}$$

تذکره: احتمال آنکه n نفر ($n \leq 365$) همگی در یک روز

از سال متولد شده باشند برابر است با: $\frac{365}{365^{n-1}}$ یا: $\frac{365}{365^n}$

و احتمال آنکه روز تولد هیچ دو نفری در سال یکی نباشد،

از این رابطه به دست می‌آید:

$$P(A) = \frac{P(365, n)}{365^n}$$

یا:

$$P(A) = \frac{365 \times 364 \times \dots \times (365 - (n-1))}{365^n}$$

مثال: در جمعی k نفره حداقل مقدار برای k کدام است

تا احتمال اینکه حداقل ۲ نفر در یک روز از هفته متولد شده

غیرقرمز).

$$P(A) = \frac{\binom{3}{2} \times \binom{7}{1}}{120} = \frac{21}{120} = \frac{7}{40}$$

(VII) هیچ مهره‌ای سبز نباشد.

$$P(A) = \frac{\binom{7}{3}}{120} = \frac{35}{120} = \frac{7}{24}$$

مثال: دو تاس را با هم می‌ریزیم. مطلوب است احتمال

آنکه:

(I) هر دو تاس زوج باشند.

$$n(S) = 6^2$$

$$A = \{2, 4, 6\} \times \{2, 4, 6\} \rightarrow n(A) = 3 \times 3 = 9$$

$$\rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

(II) هر دو تاس بزرگ‌تر از ۲ باشند.

$$n(S) = 6^2 \text{ و } A = \{3, 4, 5, 6\} \times \{3, 4, 5, 6\}$$

$$\rightarrow n(A) = 4 \times 4 = 16 \rightarrow P(A) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

(III) تاس اول ۲ بیاید.

$$A = \{(2, 1), (2, 2), \dots, (2, 6)\} \rightarrow n(A) = 6$$

$$\text{و } P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(IV) هر دو با هم اول نباشند.

$$A' = \{2, 3, 5\} \times \{2, 3, 5\}$$

$$\rightarrow n(A') = 3 \times 3 = 9 \text{ و } P(A') = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$\text{و } P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

(V) هیچ کدام از دو تاس مضرب ۳ نباشند.

$$A = \{1, 2, 4, 5\} \times \{1, 2, 4, 5\} \rightarrow n(A) = 4 \times 4 = 16$$

$$\rightarrow P(A) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

(VI) مجموع دو تاس بر ۹ بخش پذیر باشد.

$$A = \{(3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4)\} \rightarrow n(A) = 4$$

$$\text{و } P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

(VII) حاصل ضرب دو تاس بر ۱۰ بخش پذیر باشد.

$$A = \text{حاصل ضرب دو تاس } 10 \text{ یا } 20 \text{ یا } 30 \text{ باشد}$$

$$\rightarrow A = \{(2, 5), (5, 2), (4, 5), (5, 4), (6, 5), (5, 6)\}$$

$$n(A) = 6 \rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

مثال: ۳ تاس را با هم می‌ریزیم. مطلوب است احتمال آنکه:

(I) هر سه بر ۳ بخش پذیر باشند.

$$n(S) = 6 \times 6 \times 6 = 216$$

$$A = \{3, 6\} \times \{3, 6\} \times \{3, 6\} \rightarrow n(A) = 2^3 = 8$$

$$\rightarrow P(A) = \frac{8}{216} = \frac{1}{27}$$

(II) مجموع سه تاس بزرگ‌تر از ۵ باشد.

پیشامد آنکه مجموع ۳ تاس کوچک‌تر یا مساوی ۵ باشد A'

$$A' = \{(1, 1, 1), (2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2), (2, 2, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2), (3, 1, 1), (1, 3, 1), (1, 1, 3)\}$$

$$\rightarrow n(A') = 10$$

$$\text{و } P(A') = \frac{10}{216} = \frac{5}{108} \rightarrow P(A) = 1 - \frac{5}{108} = \frac{103}{108}$$

(III) سه عدد رو شده یک دنباله هندسی صعودی با

قدرنسبت صحیح تشکیل بدهند.

$$A = \{ \underbrace{(1, 1, 1)}, \underbrace{(2, 2, 2)}, \dots, \underbrace{(6, 6, 6)} \} \quad \begin{matrix} \text{قدرنسبت ۱} & \text{قدرنسبت ۲} \end{matrix}$$

$$\rightarrow n(A) = 7 \text{ و } P(A) = \frac{7}{216}$$

(V) سه عدد رو شده بتوانند یک دنباله عددی با قدرنسبت

صحیح تشکیل بدهند.

توجه داریم که اگر قدرنسبت، $d = 0$ باشد، هر سه عدد

با هم برابر هستند که ۶ حالت امکان دارد. همچنین اگر

$d = 1$ ، اعداد ۱، ۲ و ۳ یا ۲، ۳ و ۴ یا ۳، ۴ و ۵ یا ۴، ۵ و ۶

می‌توانند تشکیل دنباله عددی یا حسابی بدهند که در هر

حالت دارای $3! = 6$ جایگشت هستند. اگر $d = 2$ باشد، اعداد

۱، ۳ و ۵ تشکیل دنباله عددی می‌دهند که $3! = 6$ جایگشت

دارند و نیز اعداد ۲، ۴ و ۶ که آن‌ها نیز $3! = 6$ جایگشت

دارند. اگر هم $d \geq 3$ فرض شود، اعداد نمی‌توانند دنباله

عددی تشکیل بدهند. بنابراین تعداد حالت‌های مطلوب برابر

است با:

$$n(A) = 4 \times 6 + 6 + 6 = 36 \rightarrow P(A) = \frac{36}{216} = \frac{1}{6}$$

مثال: در جعبه‌ای ۳ مهره قرمز، ۴ مهره آبی و ۴ مهره سبز

وجود دارد. ۱ مهره به تصادف از این جعبه خارج می‌کنیم و

بدون نگاه کردن به رنگش، آن را کنار می‌گذاریم. سپس مهره

دیگری از جعبه خارج می‌کنیم. چه قدر احتمال دارد مهره دوم

آبی باشد؟

نکته مهم و عجیب: اگر در جعبه‌های n مهره از رنگ‌های متفاوت وجود داشته باشد و ۱ مهره یا ۲ مهره ... یا (n-1) مهره به تصادف از جعبه خارج کرده و بدون نگاه کردن به رنگشان آن‌ها را کنار بگذاریم و سپس مهره دیگری به تصادف خارج کنیم، در این صورت احتمال آنکه مهره برداشته شده در مرحله دوم از رنگ خاصی از رنگ‌های موجود در جعبه باشد، با احتمال آنکه ابتدا مهره‌ای از جعبه خارج کنیم که از همان رنگ باشد، برابر است.

در مثال فوق، احتمال آنکه مهره‌ای از جعبه خارج کنیم و رنگ آن آبی باشد برابر است با تقسیم تعداد مهره‌های آبی بر تعداد کل مهره‌های جعبه؛ یعنی: $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ (آبی) P. اگر

بخواهیم از این نکته استفاده نکنیم، برای مهره خارج شده باید دو حالت در نظر بگیریم: یکی اینکه مهره اولی آبی نباشد و دومی آبی باشد، و حالت دیگر اینکه مهره اولی آبی باشد و دومی نیز آبی باشد. جمع این دو احتمال باید همان $\frac{2}{5}$ شود:

$$P(\text{مهره دوم آبی}) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{24}{90} + \frac{12}{90} = \frac{36}{90} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

اولی آبی و دومی آبی اولی غیرآبی و دومی آبی

مثال: در جعبه‌ای ۳ مهره قرمز، ۴ مهره آبی و ۳ مهره سفید وجود دارد. ۳ مهره از این جعبه به تصادف و یکی پس از دیگری و بدون جای گذاری انتخاب می‌کنیم. چه قدر احتمال دارد:

(I) اولی سفید، دومی آبی و سومی قرمز باشد؟

$$P(A) = \frac{3}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{20}$$

(II) مهره اول آبی و مهره دوم قرمز باشد؟

$$P(A) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{2}{15}$$

(توجه دارید که مهره سوم تأثیری بر مهره‌های اول و دوم ندارد و هر مهره‌ای باشد، مطلوب است.)

(III) مهره اول آبی و مهره سوم سفید باشد؟

روش اول: برای مهره دوم که روی سومی تأثیرگذار است، دو حالت در نظر می‌گیریم: دومی یا سفید بوده یا سفید نبوده است:

$$P(A) = \left(\frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} \right) + \left(\frac{4}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} \right) = \frac{2}{15}$$

روش دوم: چون روی مهره دوم قیدی گذاشته نشده

است، می‌توانیم پس از برداشت مهره اول یک مهره به تصادف برداریم و بدون نگاه کردن به رنگش، آن را کنار بگذاریم که در این صورت طبق نکته قبل برای مهره سوم فضای نمونه تغییری نکرده است. در واقع مهره سوم را می‌توان در حکم مهره دوم فرض کرد و در این صورت خواهیم داشت:

$$P(A) = \left(\frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \right) = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$$

(IV) مهره دوم قرمز و مهره سوم سفید باشد.

چون روی مهره اول قید گذاشته نشده است، پس یک مهره برمی‌داریم و بدون نگاه کردن به رنگش، آن را کنار می‌گذاریم که در این صورت مهره‌های دوم و سوم در حکم اول و دوم به حساب می‌آیند و داریم:

$$P(A) = P(\text{اولی قرمز و دومی سفید}) = \frac{3}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{1}{10}$$

اگر بخواهیم مسئله را به روش معمول حل کنیم، باید برای مهره اول سه حالت در نظر بگیریم:

$$P(A) = \left(\frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{3}{8} \right) + \left(\frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{3}{8} \right) + \left(\frac{3}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} \right)$$

اولی سفید اولی آبی اولی قرمز

$$= \frac{1}{10}$$

تمرین

۱. سکه سالمی را ده بار پرتاب می‌کنیم. مطلوب است

تعیین احتمال آنکه:

(الف) دقیقاً پنج بار رو بیاید.

(ب) دقیقاً شش بار رو بیاید.

(ج) حداقل شش بار رو بیاید.

۲. چهار دانش‌آموز کلاس دوم و هفت دانش‌آموز کلاس

سوم داوطلب بازی در تیم والیبال مدرسه شده‌اند، در

صورتی که بازی در تیم برای ۶ نفر از آن‌ها امکان دارد.

مطلوب است تعیین احتمال آنکه حداقل ۳ نفر از کلاس

سوم باشند.

۳. در کیسه‌ای ۴ مهره قرمز و ۵ مهره سفید وجود دارد. ۳

مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. مطلوب است

تعیین احتمال آنکه:

(الف) هر سه مهره هم‌رنگ باشند.

(ب) فقط دو مهره هم‌رنگ باشند.

(ج) لااقل دو مهره هم‌رنگ باشند.