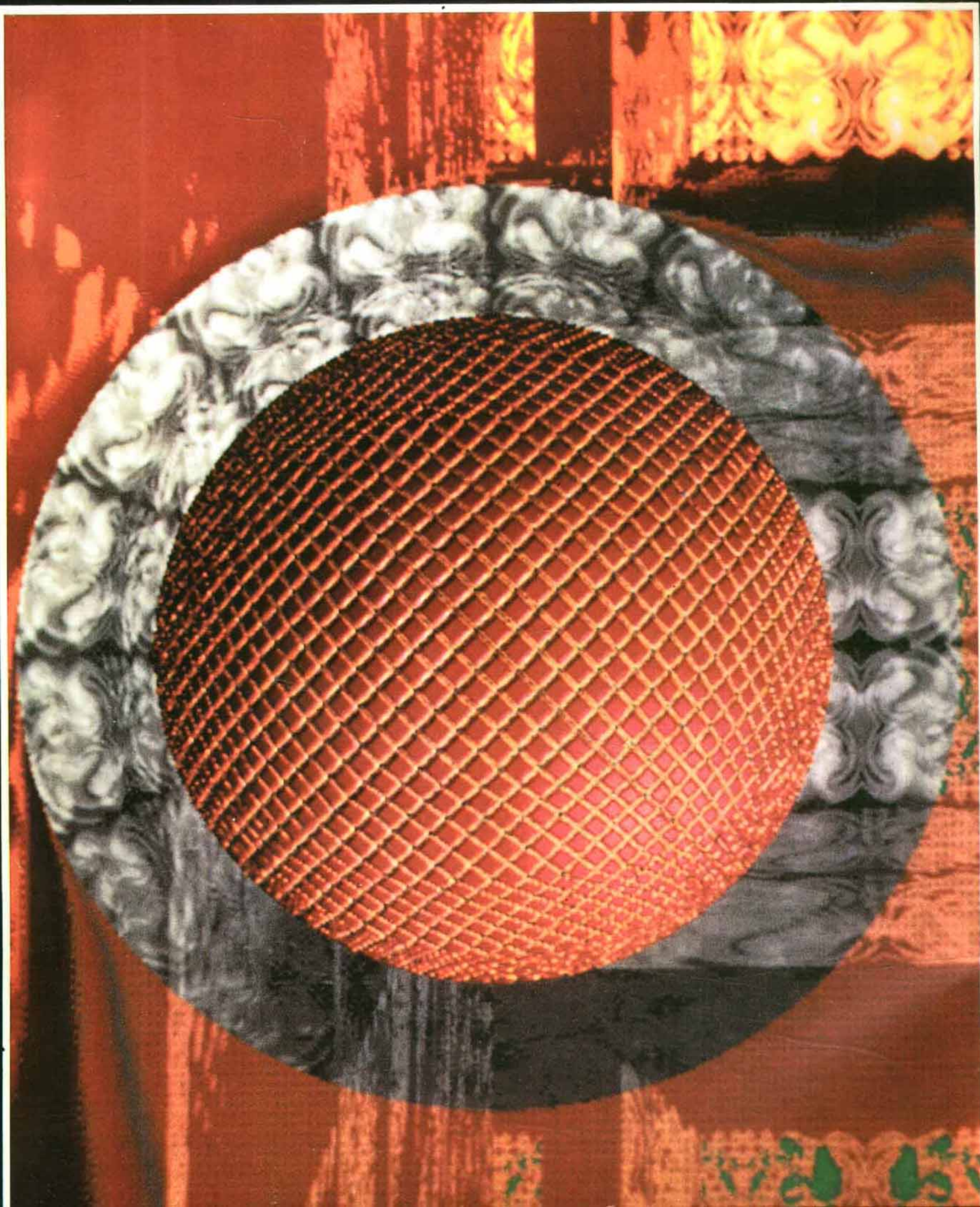
مجلهٔ ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۱۵

سال پنجم، پاییز ۱۳۷۴، شمارهٔ اول، بها ۱۵۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه وابسته به وزارت آموزش و پرورش

❑ صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه ❑ مدیر مسئول: محمود ابراهیمی ❑ سردبیر: حمیدرضا امیری
❑ اعضای هیئت تحریریه: آقایان: ❑ حمیدرضا امیری ❑ محمدهاشم رستمی ❑ احمد قندهاری ❑ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
❑ غلامرضا یاسی‌پور (باتشکر از همکاری ارزندهٔ آقای پرویز شهریاری و باتشکر از آقای حسین ابراهیم‌زاده قُلزم در بخش کامپیوتر مجله)
❑ مدیر فنی: هوشنگ آشتیانی ❑ طراح و صفحه آرا: احمد پیرحسینلو ❑ چاپ و صحافی: چاپخانه مدرسه

مطالب این شماره

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱- نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی راهنمایی) ۲- طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به‌همراه حل آن ۳- طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان) به‌همراه حل آن ۴- طرح معماهای ریاضی ۵- نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

- هیئت تحریریه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.
- مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
- مقالات مجله با رسم‌الخطِ انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.
- مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

نشانی: تهران، خیابان سپهبد قرنی، پل کریمخان زند، کوچه شهید محمود حقیقت طلب، پلاک ۳۶
تلفن: ۴-۸۸۹۷۷۷۳، ۸۹۳۸۰۹، ۸۸۰۲۳۳۶، ۸۸۰۲۳۴۷ فاکس: ۸۸۲۰۵۹۹
صندوق پستی: ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹

حرف اوّل

لزوم توجه به مسائل سیاسی و اجتماعی از سوی دانش‌آموزان، بارها از طرف امام خمینی(ره) و مقام معظم رهبری حضرت آیةا... خامنه‌ای و اولیاء مسائل آموزشی و تربیتی تأکید شده است. این سخن به این معنی است که دانش‌آموزان ما در عرصهٔ فعالیتهای علمی خود سایر فعالیتهای اجتماعی را نیز در نظر داشته باشند و آنها را جزو ضرورتهای زندگی و شکل‌دهندهٔ شخصیتهای فردی قلمداد کنند.

رشد یک بعدی و دانش‌اندوزی بدون تهذیب نفس، هر چند انسان را به مدارج علمی قابل توجهی می‌رساند، اما فرایند آن چیزی جز افسارگسیختگی و نارساییهای اجتماعی را به دنبال نخواهد داشت.

دانش‌آموزان ما از دیرباز آموخته‌اند که تنها، گنجینهٔ متحرک علوم بشری نباشند، بلکه همسوی جامعه به عنوان فردی مفید از آن جامعه برای سایر نیازهای فطری خویش پاسخی شایسته داشته باشند. به همین دلیل بسیاری از دانش‌آموزان کوشا و ساعی در عرصهٔ علوم، دانش‌آموزانی هستند که در سایرمباحث اجتماعی و سیاسی فعال هستند. شرکت دانش‌آموزان در مجامعی چون بسیج دانش‌آموزی، انجمنهای اسلامی، راهپیماییها و تظاهرات سیاسی مبیّن این نکته است که ما، دانش‌آموزان اندیشمند و متفکر، فراوان داریم و این امر ریشه در تاریخ معاصر کشور ما دارد.

حضور فراگیر و گستردهٔ دانش‌آموزان در مبارزات انقلابی مردم در سال ۵۷ و حماسه‌آفرینی آنها در روز ۱۳ آبان همان سال نقش تعیین‌کننده‌ای در سقوط رژیم شاه داشت و این روند را می‌توان در سالهای جنگ تحمیلی به خاطر آورد و از دانش‌آموزی چون شهید حسین فهمیده یادکرد که مراتب والایی از حضور دانش‌آموزان را در دفاع مقدس به نمایش گذاشت. او تا جایی پیش رفت که رهبر کبیر انقلاب حضرت امام خمینی (ره) از او به عنوان «رهبر ما» یاد کردند. امروز بسیاری از همان دانش‌آموزان، در عرصهٔ علم و دانش از متخصصان و دانشمندان این جامعه هستند و آنهایی که به شهادت رسیده‌اند، با شهادت خویش امنیت و آرامش را برای علم‌آموزی سایرین هموار نمودند و خود در بهشتِ زیبای خداوند همنشین پاکان و دوستان خدا شدند.

والسلام ـ سردبیر

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۱۵)

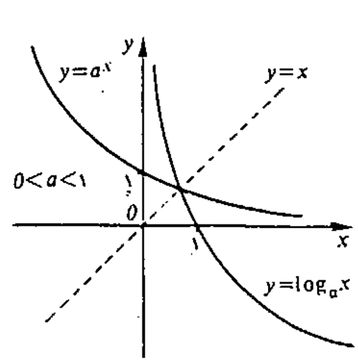
پرویز شهریاری

مثال ۱۱: این معادله، چند ریشه دارد:

$$\left(\frac{1}{16}\right)^x=\log_{\frac{1}{16}}x \qquad (1)$$

اگر طرح نمودار تابعهای $y=a^x$ و $y=\log_a x$ را، با شرط $0<a<1$ رسم کنیم (شکل ۱)، روشن می‌شود که، این نمودارها، همیشه، یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند؛ در ضمن، این نقطه، روی خط راست $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم) قرار دارد.

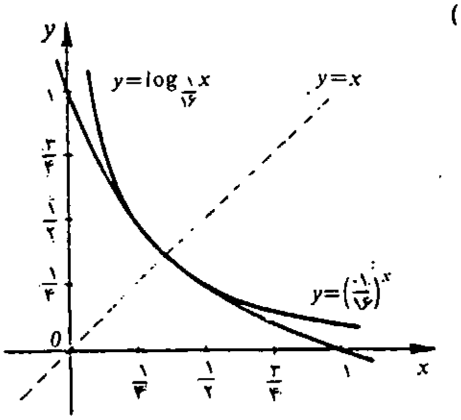
شکل (۱)



ولی به طور مستقیم دیده می‌شود که معادلهٔ (۱)، دو جواب دارد: $x=\frac{1}{4}$ و $x=1$ (آزمایش کنید!)؛ در ضمن، نقطه های متناظر این ریشه‌ها در روی نمودار، روی خط راست $y=x$ نیستند. به این ترتیب، معادلهٔ (۱)، دست کم سه جواب دارد.

این حقیقت، موجب شگفتی بسیاری از دانش‌آموزان و، به احتمالی، دبیران آن‌ها می‌شود. ولی این، مسألهٔ تازه‌ای نیست و، به عنوان نمونه، می‌تواند ما را قانع کند که، در حل نموداری معادله‌ها و استفاده از شکل، باید احتیاط کامل را رعایت کنیم تا گمراه نشویم. راز کار روشن است: شکل ۱، تنها طرحی و مُدلی تقریبی از نمودار تابعهاست و در مورد معادلهٔ (۱)، منجر به اشتباه می‌شود[1].

شکل (۲)

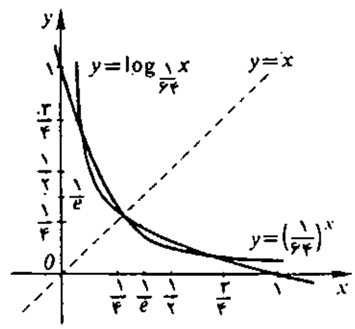


---

۱ ــ مجله «کوانت» چاپ مسکو، شمارهٔ ۵، سال ۱۹۹۰ میلادی (صفحه‌های ۵۸ تا ۶۲).

شکل ۲، دقیق‌تر و به کمک کامپیوتر رسم شده است. روی این شکل هم نمی توان، تعداد ریشه‌های معادلهٔ (۱) را، مشخص کرد، زیرا به دلیل ضخامت خط‌های منحنی، دو نمودار در فاصله‌ای، روی هم قرار گرفته‌اند.

شکل (۳)



شکل ۳ هم، به همان دقت شکل ۲ و با کامپیوتر رسم شده است. ولی روی آن، به روشنی دیده میْ شود که معادلهٔ زیر دارای سه ریشه است:

$$\left(\frac{1}{64}\right)^x = \log_{\frac{1}{64}} x$$

اگر نمودارهای دو تابع $y=\left(\frac{1}{16}\right)^x$ و $y=\log_{\frac{1}{16}} x$ را، با همان دقت قبلی، و به طور مثال با واحد برابر 10° سانتیمتر، رسم می‌کردیم، آن وقت شبیه شکل ۳ به دست می‌آمد و قانع می‌شدیم که معادلهٔ (۱) هم، دارای سه ریشه است. ولی دریغ که، در این جا، نمی‌توانیم این شکل را، با توجه به بُعدهای بزرگ خود نشان دهیم. درست است که شکل‌های ۲ و ۳ با کامپیوتر رسم شده اند، ولی هیچ کامپیوتری نمی‌تواند نمودارهای دقیق ایده‌آلی رسم کند. بنابراین، نمی‌توان با استناد به شکل، مساله را مورد تحقیق قرار داد و با تکیه به شکل، آن را حل شده دانست. برای حل مسأله، استدلال دقیق ریاضی لازم است.

حالت کلی معادله را در نظر می گیریم:

$$a^x = \log_a x \qquad (۲)$$

که در آن، a می‌تواند هر عدد مثبتی به جز واحد باشد.

یادآوری می‌کنیم که، معادلهٔ (۲)، با معادلهٔ

$$a^{a^x} = x \qquad (۲')$$

هم ارز است. به جای معادلهٔ (۲′) ، معادلهٔ

$$a^x = x \qquad (۳)$$

را در نظر می‌گیریم. اگر $x_\circ$ ، ریشه‌ای از معادلهٔ (۳) باشد، آن وقت:

$$a^{a^{x_\circ}} = a^{x_\circ} = x_\circ$$

یعنی $x_\circ$ ، در ضمن ریشهٔ معادلهٔ (۲) یا (۲′) هم هست.

به این ترتیب، اگر معادلهٔ (۳)، دست کم یک ریشه داشته باشد، معادله (۲) هم دارای ریشه خواهد بود. نکته دیگری را هم یادآوری می‌کنیم. به ازای $a > 1$ ، تابع $f(x) = a^x$ صعودی است. معادلهٔ (۲′) را می‌توان به صورت $f(f(x)) = x$ نوشت که ، در این صورت، معادلهٔ (۳) به صورت $f(x) = x$ در می‌آید.

پیش قضیه، اگر تابع $y = f(x)$ صعودی باشد، آن وقت معادله‌های زیر هم ارزند:

$$f(f(x)) = x \quad \text{و} \quad f(x) = x$$

اثبات: $x_\circ$ را ریشهٔ معادلهٔ $f(x) = x$ می‌گیریم. در این صورت:

$$f(f(x_\circ)) = f(x_\circ) = x_\circ$$

یعنی $x_\circ$ ، ریشهٔ معادلهٔ $f(f(x)) = x$ هم هست. بر عکس، فرض کنید $f(f(x_\circ)) = x_\circ$ و، در ضمن $x_\circ \neq f(x_\circ)$ ، در این صورت یا $x_\circ > f(x_\circ)$ و یا $x_\circ < f(x_\circ)$ ؛ ولی از آن جا که تابع f صعودی است، در حالت اول به دست می‌آید:

$$f(x_\circ) > f(f(x_\circ)) = x_\circ$$

و در حالت دوم:

$$f(x_\circ) < f(f(x_\circ)) = x_\circ$$

و این یک تناقض است، زیرا با شرط $x_\circ > f(x_\circ)$ به دست می‌آید $x_\circ < f(x_\circ)$ و بر عکس.

از این پیش قضیه و یادآوری قبلی، نتیجه می‌شود که، به ازای $a > 1$ ، معادلهٔ (۲) با معادلهٔ $a^x = x$ هم ارز است.

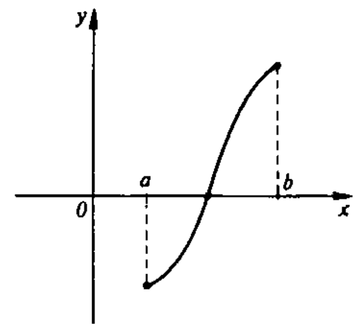
بررسی معادلهٔ $a^x = x$

ابتدا از قضیهٔ مهمی یاد می کنیم که، به احتمال زیاد، از آن اطلاع دارید.

قضیه: (بولتسانو ـ وایراشتراس). اگر تابع $y = f(x)$ ، در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ ، معین و پیوسته باشد، در ضمن $f(a) < \circ$ و $f(b) > \circ$ ، آن وقت معادلهٔ $f(x) = \circ$ ، ریشه‌ای در بازهٔ (a,b) دارد.

اثبات این قضیه در دورهٔ آنالیز ریاضی داده می‌شود. با وجود این، درک عینی آن روشن است: منحنی پیوسته‌ای که در شکل ۴ داده شده است، به ناچار، محور Ox را قطع می‌کند. از این قضیه، در این جا، بارها استفاده خواهیم کرد.

شکل (۴)



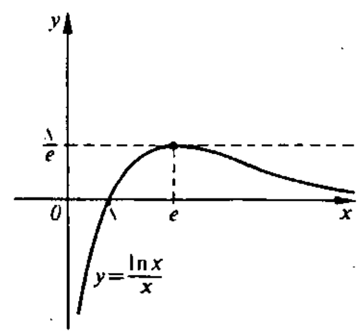
در حالت خاصی که، تابع $f(x)$، در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$، همه جا صعودی یا همه جا نزولی باشد، معادله $f(x)=0$، در بازهٔ (a,b)، یک ریشهٔ منحصر دارد.

اکنون، معادلهٔ (۳) را بررسی می‌کنیم. این معادله، با معادلهٔ

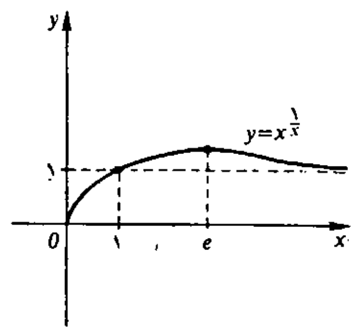
$$\mathrm{Ln}a = \frac{\mathrm{Ln}x}{x} \qquad (3')$$

هم ارز است. نمودار تابع $h(x)=\frac{\mathrm{Ln}x}{x}$ را رسم می‌کنیم. چون $h'(x)=\frac{1-\mathrm{Ln}x}{x^2}$، پس تابع $h(x)$، به ازای $x<e$ صعودی، و به ازای $x>e$ نزولی است و در نقطهٔ $x=e$، ماکزیممی برابر $\frac{1}{e}$ دارد (شکل ۵). بنابراین معادلهٔ (۳′)، به ازای $\mathrm{Ln}a>\frac{1}{e}$ (یعنی به ازای $a>e^{\frac{1}{e}}$) ریشه ندارد و به ازای $a=e^{\frac{1}{e}}$، تنها یک ریشه دارد: $x=e$.

شکل (۵).



شکل (۶)



بر اساس بحث‌های بالا، این سه تمرین را حل کنید:

تمرین ۱. ثابت کنید به ازای $0<\mathrm{Ln}a<\frac{1}{e}$، یعنی به ازای $1<a<e^{\frac{1}{e}}$، معادلهٔ (۳′)، درست دو ریشه دارد.

تمرین ۲. با استفاده از نمودار شکل ۵، ثابت کنید، نمودار تابع $y=x^{\frac{1}{x}}$ به صورت شکل ۶ در می‌آید و، از آن جا، معادلهٔ $x^{\frac{1}{x}}=a$ را مورد بررسی قرار دهید.

تمرین ۳. نمودار تابع $y=x^x$ را رسم و معادلهٔ $x^x=a$ را بررسی کنید.

به این ترتیب، معادلهٔ (۲)، به ازای $1<a<e^{\frac{1}{e}}$، درست دو ریشه؛ به ازای $a=e^{\frac{1}{e}}$، یک ریشهٔ $x=e$ دارد؛ و به ازای $a>e^{\frac{1}{e}}$، ریشه‌ای ندارد.

حالت $0<a<1$

معادلهٔ $a^x=x$، به ازای $0<a<1$، دارای یک ریشهٔ منحصر x است.

این تابع را در نظر می‌گیریم:

$$f(x)=a^x-\log_a x$$

و رفتار آن را مطالعه می کنیم. برای این منظور، مشتق آن را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=a^x\mathrm{Ln}a-\frac{1}{x\mathrm{Ln}a}=\frac{xa^x\mathrm{Ln}^2a-1}{x\mathrm{Ln}a}$$

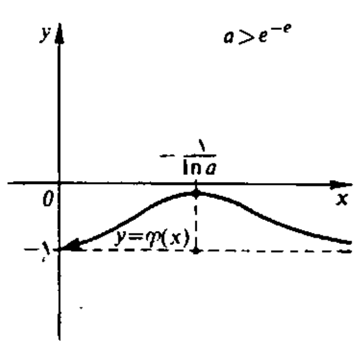
صورت کسر مشتق را $\varphi(x)$ می‌نامیم:

$$\varphi(x)=xa^x\mathrm{Ln}^2a-1$$

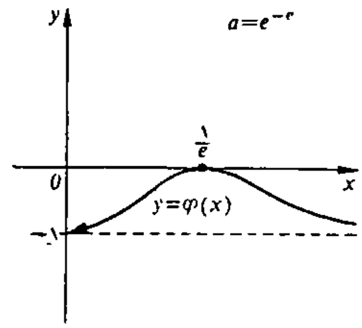
مخرج کسر مشتق منفی است (به ازای هر $x>0$)، و بنابراین، علامت $f'(x)$، مخالف علامت $\varphi(x)$ است.

تمرین ۴. ثابت کنید، تابع $\varphi(x)$، به ازای $x<-\frac{1}{\mathrm{Ln}a}$ نزولی و به ازای $x>-\frac{1}{\mathrm{Ln}a}$ صعودی است و حداکثر مقدار $\varphi(x)$ به ازای $x=-\frac{1}{\mathrm{Ln}a}$ به دست می‌آید.

شکل (۷)



شکل (۸)

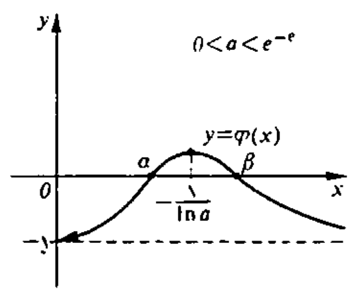


از تمرین۴، نتیجه می‌شود، اگر حداکثر مقدار $\varphi(x)$، به ازای همهٔ مقدارهای x، غیر مثبت باشد ($\varphi_{max} \le 0$)، آن وقت تابع $f(x)$، به ازای هر $x > 0$، صعودی است، به نحوی که x_0، تنها ریشهٔ معادلهٔ (۲) خواهد بود (شکلهای ۷ و ۸).

اگر نامعادلهٔ
$$\varphi_{max} = -\frac{Lna}{e} - 1 \le 0$$
را حل کنیم، به دست می‌آید: $a \ge e^{-e}$. بنابراین معادلهٔ (۲)، به ازای $e^{-e} \le a < 1$ درست یک ریشهٔ دارد: $x = x_0$.

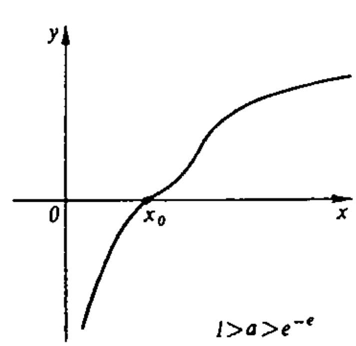
در حالت $0 < a < e^{-e}$ داریم: $\varphi_{max} > 0$ و نمودار تابع φ بصورتی است که در شکل ۹ نشان داده شده است. برای روشن شدن مطلب، کافی است توجه کنیم که
$$\varphi(0) = -1 \;,\quad \varphi(1) < 0$$

شکل (۹)

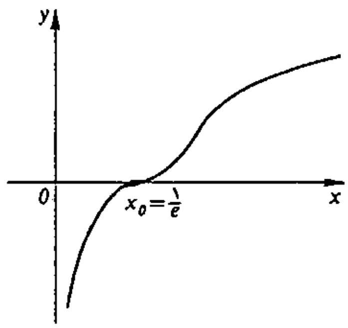


در ضمن نمودار تابع $f(x) = a^x - \log_a x$، به ازای $e^{-e} < a < 1$ در شکل ۱۰ و به ازای $a = e^{-e}$ در شکل ۱۱ نشان داده شده است.

شکل (۱۰)



شکل (۱۱)

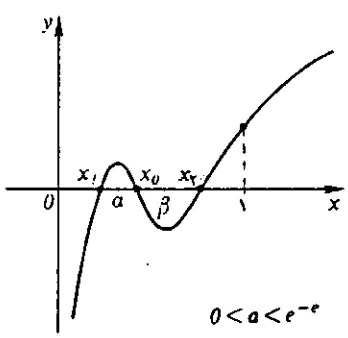


تمرین ۵. ثابت کنید، به ازای $0 < a < e$، داریم:
$$\varphi(1) = a\mathrm{Ln}^2 a - 1 < 0$$

راهنمایی. ماکزیمم تابع $g(a) = a\mathrm{Ln}^2 a$ را پیدا کنید.

از تمرین ۵ نتیجه می‌شود که، تابع $\varphi(x)$، در دو نقطهٔ α و β برابر صفر می‌شود و، در ضمن
$$0 < \alpha < -\frac{1}{Lna} \;,\quad -\frac{1}{Lna} < \beta < 1$$

شکل (۱۲)



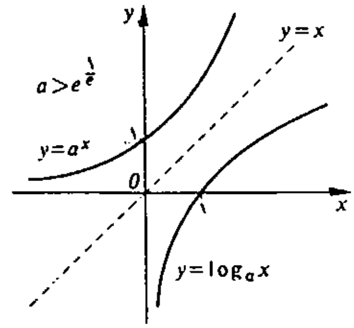
و این، به معنای آن است که تابع f، به ازای $x \in (0,\alpha)$ صعودی، به ازای $x \in (\alpha,\beta)$ نزولی و دوباره به ازای $x \in (\beta,1)$ صعودی است. بنابراین، α نقطهٔ ماکزیمم و β نقطهٔ می‌نیمم تابع f است (نمودار این تابع، در شکل ۱۲ داده شده است).

برای کامل کردن بررسی خود، ثابت می‌کنیم: $\alpha < x_0 < \beta$

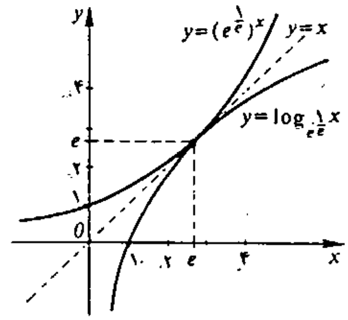
تمرین۶. ثابت کنید، به ازای $0 < a < e^{-e}$، داریم $x_0 < \frac{1}{e}$.

راهنمایی. اگر فرض کنید $x_0 > \frac{1}{e}$، بدست می‌آورید:
$$x_0 = a^{x_0} < a^{\frac{1}{e}} < \frac{1}{e}$$
که فرض $x_0 > \frac{1}{e}$ را نقض می‌کند.

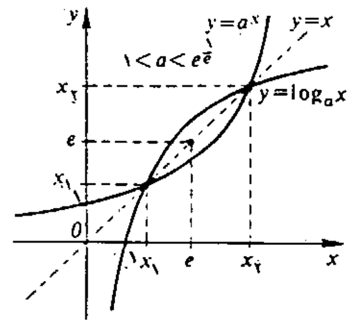
شکل (۱۳)



شکل (۱۴)



شکل (۱۵)



اکنون به محاسبه می‌پردازیم:

$$\varphi(x_0) = x_0^2 \operatorname{Ln}^2 a - 1 = \operatorname{Ln}^2 a^{x_0} - 1 = \operatorname{Ln}^2 x_0 - 1$$

چون $\operatorname{Ln} x_0 < -1$، بلافاصله نتیجه می‌شود: $\varphi(x_0) > 0$، به نحوی که $f'(x_0) < 0$، یعنی $\alpha < x_0 < \beta$.

از این جا نتیجه می‌شود: $f(\alpha) > 0$ و $f(\beta) < 0$ و با توجه به یکنوا (مونوتون) بودن تابع f، سرانجام، روشن می‌شود که معادلهٔ (۲)، در هر یک از بازه‌های $(0 , \alpha)$، (α , β) و $(\beta , 1)$ دارای یک ریشه است و در بازهٔ $(1 , \infty)$ ریشه ندارد.

نتیجه بررسی: معادله $a^x = \log_a x$، در بازهٔ $0 < a < e^{-e}$ سه ریشه دارد و در بازهٔ $e^{-e} \le a < 1$ دارای یک ریشه است.

تمرین ۷. ثابت کنید، به ازای مقدارهای مختلف a، موقعیت نمودار تابعهای $y = a^x$ و $y = \log_a x$، نسبت به یکدیگر، به صورتی است که در شکلهای ۱۳، ۱۴ و ۱۵ نشان داده‌ایم، برای حالتهای $e^{-e} < a < 1$، $a = e^{-e}$ و $0 < a < e^{-e}$، خودتان نمودارها را رسم کنید.

بحث مربوط به «شکل» و دشواریهای ناشی از آن را در حل مساله‌های هندسی، در شمارهٔ بعد ادامه می‌دهیم.

ادب ریاضی

علم حِیَل عبارت است از شناختن راه تدبیری که انسان با آن بتواند تمام مفاهیمی را که وجود آنها در ریاضیات با برهان ثابت شده است بر اجسام خارجی منطبق سازد، و به ایجاد و وضع آنها در اجسام خارجی فعلیت بخشند. توضیح آنکه در علوم ریاضی خطوط و سطوح و مجسمات و اعداد، و دیگر مفاهیم ریاضی ـ تنها از لحاظ عقلی و جدا از اجسام خارجی ـ بررسی می‌شوند، ولی ما هنگام ایجاد این مفاهیم ریاضی در خارج ـ یعنی در اجسام طبیعی و محسوسات به طریق ارادی و به‌وسیلهٔ صنعت ـ به نیرویی نیاز داریم که راه و تدبیر تحقق بخشیدن به مفاهیم ریاضی را روشن سازد و مطابقهٔ آنها را بر مواد و اجسام خارجی ممکن نماید، زیرا مواد و اجسام خارجی دارای احوال و کیفیاتی هستند، که آن احوال مانع می‌شوند از این‌که مفاهیمی که در ریاضیات ثابت شده است، به آسانی و هرطور که هست، بر این اجسام منطبق گردد، بلکه نیرویی لازم است که بتواند اجسام طبیعی را آنچنان آماده کند که این صورتهای ذهنی و مفاهیم ریاضی را در خود پذیرا شوند، و در برطرف ساختن عوایق و موانع رام دست باشد.

علم حِیَل همان علمی است که راههای شناخت این تدابیر و شیوه‌های دقیق عملی کردن این مفاهیم را به‌وسیلهٔ صنعت مشخص می‌سازد، و نشان می‌دهد که چگونه می‌توان مفاهیم عقلی ریاضی را در اجسام طبیعی محسوس، آشکار نمود.

«احصاء العلوم»

مبحث تقارن

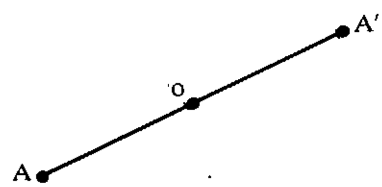
(بخش دوم و بخش سوّم مربوط به ریاضیات (۳) نظام جدید)

● احمد قندهاری

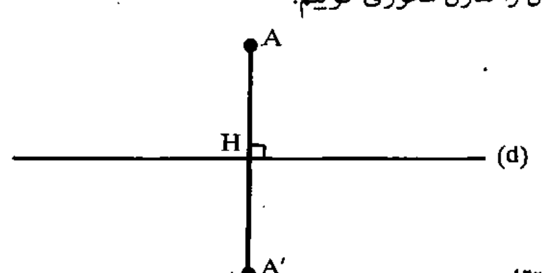
□ مقدمه

۱ ـ تعریف تقارن مرکزی: هرگاه دو نقطهٔ A و o در صفحه‌ای مفروض باشند. اگر نقطهٔ A را به نقطهٔ o وصل کنیم و آن را به اندازهٔ خودش امتداد دهیم، نقطه‌ای مانند A' به‌وجود می‌آید که نقطهٔ A' را قرینهٔ مرکزی نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ o گوییم. نقطهٔ o را مرکز تقارن نامیم و این تقارن را تقارن مرکزی گوییم.

$$Ao = oA'$$



۲ ـ تعریف تقارن محوری: هرگاه نقطه‌ای مانند A و خطّی مانند خط (d) در صفحه‌ای مفروض باشد. چنانچه از نقطهٔ A عمودی مانند AH بر خط (d) رسم کنیم و این عمود را به اندازهٔ AH امتداد دهیم، نقطه‌ای مانند A' به‌وجود می‌آید که نقطهٔ A' را قرینهٔ محوری نقطهٔ A نسبت به خط (d) گوییم. خط (d) را محور تقارن نامیم و این تقارن را تقارن محوری گوییم.



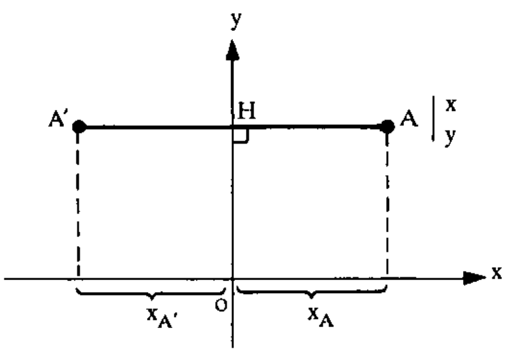
□ تقارن

۱ ـ قرینه نسبت به محور yها:

اگر نقطه $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ در صفحه محورهای مختصات مفروض باشد چنانچه نقطهٔ A' قرینه نقطهٔ A نسبت به محور yها باشد خواهیم داشت:

$$AH = A'H$$

پس x_A و $x_{A'}$ از نظر فاصله هندسی مساوی‌اند ولی از نظر جبری مختلف‌العلامه‌اند.



نتیجهٔ ۱: قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ نسبت به محور yها نقطه $A'\left|\begin{matrix}-x\\y\end{matrix}\right.$ است.

مثلاً قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}۲\\۵\end{matrix}\right.$ نسبت به محور yها نقطهٔ $A'\left|\begin{matrix}-۲\\۵\end{matrix}\right.$ است.

مثال: اگر نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}۲m-۱\\۳\end{matrix}\right.$ و $A'\left|\begin{matrix}-m+۵\\۳\end{matrix}\right.$ قرینه یکدیگر نسبت به محور yها باشند، مقدار m را بیابید.

$$x_A = -x_{A'} \implies ۲m - ۱ = -(-m + ۵)$$

$$۲m - ۱ = m - ۵ \implies \boxed{m = -۴}$$

نتیجهٔ ۲: اگر در معادله یک خط یا یک منحنی x را به (x−) تبدیل کنیم، معادله خط یا منحنی جدیدی به‌دست می‌آید که نمودار آنها

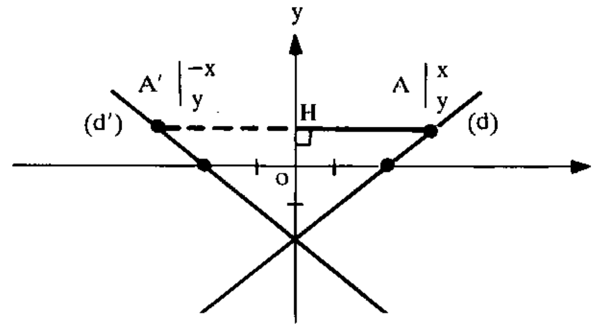
قرینه نمودار خط یا منحنی اوّلیّه نسبت به محور y ها است.

مثال: معادله قرینهٔ خط (d) به معادله $y = x - ۲$ را نسبت‌به محور y ها بیابید و هر دو را در یک شکل رسم کنید.

حل: باید x را به (−x) تبدیل کنیم پس معادله خط (d′) به صورت $y = -x-۲$ است.

$$d: y = x - ۲ \qquad \left|\begin{matrix}۰\\-۲\end{matrix}\right. \qquad \left|\begin{matrix}۲\\۰\end{matrix}\right.$$

$$d': y = -x - ۲ \qquad \left|\begin{matrix}۰\\-۲\end{matrix}\right. \qquad \left|\begin{matrix}-۲\\۰\end{matrix}\right.$$

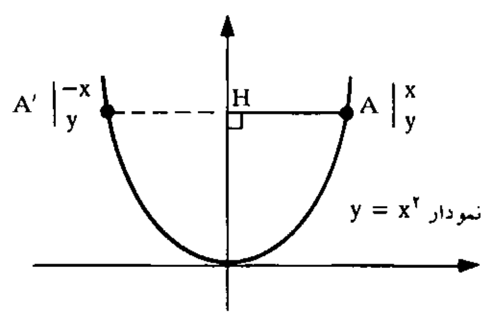


نتیجهٔ ۳: اگر در معادله یک منحنی x را به (−x) تبدیل کنیم و معادله منحنی تغییر نکند، نمودار آن نسبت به محور y ها قرینه است.

مانند: منحنی $y = x^۲$

که اگر در معادله فوق به‌جای x، (−x) قرار دهیم، معادله آن تغییر نمی‌کند. پس محور y ها محور تقارن منحنی آن است.

$$y = (-x)^۲ \Longrightarrow y = x^۲$$

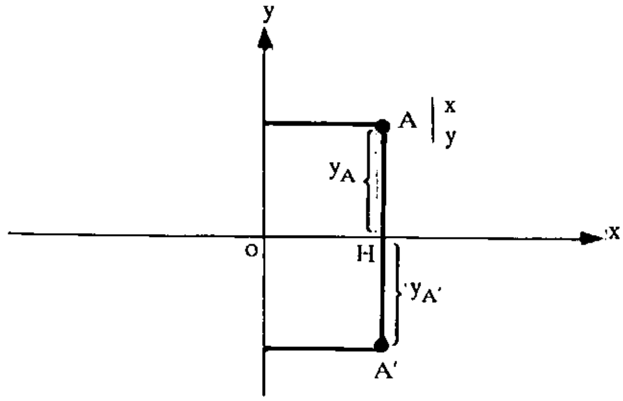


۲ ـ قرینه نسبت به محور x ها:

اگر نقطه $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ در صفحه محورهای مختصات مفروض باشد چنانچه نقطهٔ A′ قرینه نقطهٔ A نسبت به محور x ها باشد خواهیم داشت:

$$AH = A'H$$

پس y_A و $y_{A'}$ از نظر فاصله هندسی مساوی‌اند ولی از نظر جبری مختلف‌العلامه‌اند.



نتیجهٔ ۱: قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ نسبت به محور x ها نقطه $A'\left|\begin{matrix}x\\-y\end{matrix}\right.$ است.

مثلاً قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}۲\\۳\end{matrix}\right.$ نسبت به محور x ها نقطهٔ $A'\left|\begin{matrix}۲\\-۳\end{matrix}\right.$ است.

مثال: اگر نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}۳\\m^۲-m\end{matrix}\right.$ و نقطهٔ $A'\left|\begin{matrix}۳\\-۲\end{matrix}\right.$ قرینه یکدیگر نسبت‌به محور x ها باشند، مقدار m را بیابید.

$$y_A = -y_{A'} \Rightarrow m^۲ - m = ۲$$

$$\Rightarrow m^۲ - m - ۲ = ۰ \Rightarrow (m+۱)(m-۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = -۱ \\ m = ۲ \end{cases}$$

نتیجهٔ ۲: اگر در معادله یک خط یا یک منحنی y را به (−y) تبدیل کنیم معادله خط یا منحنی جدیدی به دست می‌آید که نمودار آنها قرینه نمودار خط یا منحنی اولیّه نسبت به محور x ها است.

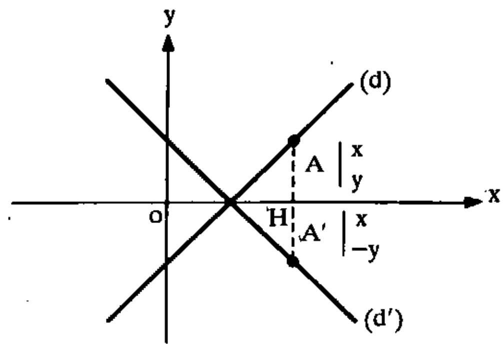
مثال: معادلهٔ قرینهٔ خط (d) به معادله $y=x-۱$ را نسبت به محور x ها بیابید. و هر دو را در یک شکل رسم کنید.

حل: y را به (−y) تبدیل می‌کنیم. پس: $\quad -y = x - ۱$

معادله خط (d′) $\quad \Longrightarrow y = -x + ۱$

$$(d): y = x - ۱ \Longrightarrow \left|\begin{matrix}۰\\-۱\end{matrix}\right. \qquad \left|\begin{matrix}۱\\۰\end{matrix}\right.$$

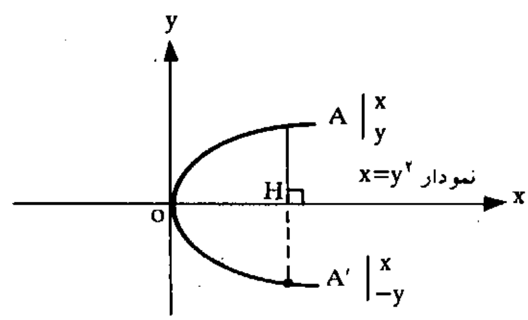
$$(d'): y = -x + ۱ \Longrightarrow \left|\begin{matrix}۰\\۱\end{matrix}\right. \qquad \left|\begin{matrix}۱\\۰\end{matrix}\right.$$



نتیجهٔ ۳: اگر در معادله یک منحنی y را به (y−) تبدیل کنیم و معادله منحنی تغییر نکند آنگاه محور x ها محور تقارن نمودار آن منحنی است. مانند: $x = y^{۲}$

که اگر در معادله فوق به‌جای y، (y−) را قرار دهیم، معادله آن تغییر نمی‌کند. پس محور x ها، محور تقارن منحنی آن است:

$$x = (-y)^{۲} \implies x = y^{۲}$$



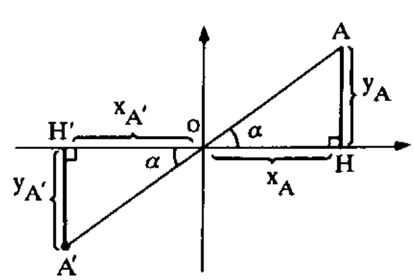
۳ـ قرینه نسبت به مبدأ مختصات:

اگر نقطه $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ در صفحه محورهای مختصات مفروض باشد. چنانچه نقطهٔ A' قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به مبدأ مختصات باشد خواهیم داشت:

دو مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{AoH}$ و $\overset{\Delta}{A'oH'}$ (به حالت وتر و یک زاویه حادّه) مساوی‌اند $(Ao = A'o \text{ و } \alpha = \alpha)$

$$\implies oH = oH' \implies x_{A'} = -x_A$$

$$\implies AH = A'H' \implies y_{A'} = -y_A$$



نتیجهٔ ۱: $\boxed{\text{قرینهٔ نقطهٔ } A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right. \text{ نسبت به مبدأ مختصات نقطه } A'\left|\begin{matrix}-x\\-y\end{matrix}\right. \text{ است.}}$

مثلاً قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}۲\\۳\end{matrix}\right.$ نسبت به مبدأ مختصات نقطهٔ $A'\left|\begin{matrix}-۲\\-۳\end{matrix}\right.$ است.

مثال: m و n را چنان بیابید تا دو نقطه $A\left|\begin{matrix}۲m-۴\\n+۲\end{matrix}\right.$ و $A'\left|\begin{matrix}n-۳\\m-۵\end{matrix}\right.$ قرینهٔ یکدیگر نسبت به مبدأ مختصات باشند.

حل:

$$\begin{cases}x_A = -x_{A'}\\ y_A = -y_{A'}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}۲m-۴ = -n+۳\\ n+۲ = -m+۵\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}۲m+n = ۷\\ n+m = ۳\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}۲m+n = ۷\\ -n-m = -۳\end{cases} \Rightarrow$$

(−۱)

$$\boxed{m = ۴ \text{ و } n = -۱}$$

نتیجهٔ ۲: اگر در معادله یک خط یا یک منحنی، x را به (x−) و y را به (y−) تبدیل کنیم، معادله خط یا منحنی جدیدی به دست می‌آید که نمودار آنها قرینه نمودار خط یا منحنی اولیّه نسبت به مبدأ مختصات است.

مثال: معادله قرینهٔ خط (d) به معادله $y = x + ۱$ را نسبت به مبدأ مختصّات بیابید و هر دو را در یک شکل رسم کنید.

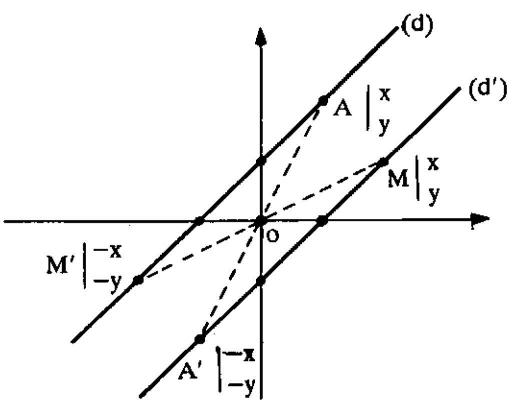
حل: باید x را به (x−) و y را به (y−) تبدیل کنیم: پس معادله خط (d′) چنین است:

$$-y = -x + ۱ \implies y = x - ۱$$

معادلهٔ خط d′ :

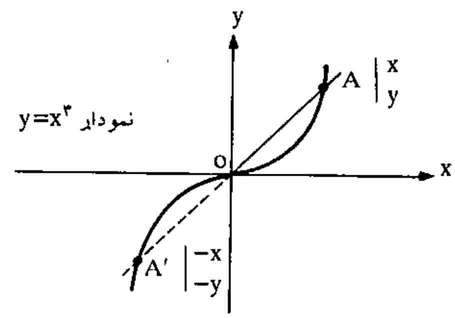
$$(d) : y = x + ۱ \implies \left|\begin{matrix}۰\\۱\end{matrix}\right. \quad \left|\begin{matrix}-۱\\۰\end{matrix}\right.$$

$$(d') : y = x - ۱ \implies \left|\begin{matrix}۰\\-۱\end{matrix}\right. \quad \left|\begin{matrix}۱\\۰\end{matrix}\right.$$



نتیجهٔ ۳: اگر در معادله یک منحنی x را به $(-x)$ و y را به $(-y)$ تبدیل کنیم و معادله منحنی تغییر نکند، آنگاه نمودار آن منحنی نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. مانند: نمودار $y = x^3$ که اگر x را به $(-x)$ و y را به $(-y)$ تبدیل کنیم، معادله منحنی تغییر نمی‌کند.

$$-y = (-x)^3 \Longrightarrow -y = -x^3 \Longrightarrow y = x^3$$

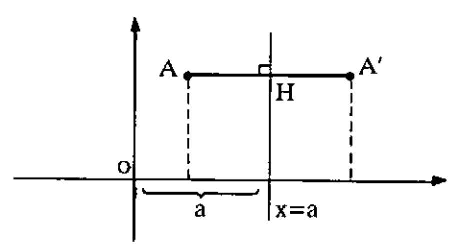


۴ـ قرینهٔ نسبت به خط $x = a$:

باتوجه به شکل اگر نقطه A' قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خط $x = a$ باشد داریم: $y_A = y_{A'}$ و نقطهٔ H وسط AA' است پس می‌توان نوشت:

$$x_H = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Rightarrow a = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Rightarrow$$

$$x_A + x_{A'} = 2a \Rightarrow x_{A'} = 2a - x_A$$



بنابراین اگر $A\left|\begin{array}{l}x\\y\end{array}\right.$ باشد نقطهٔ $A'\left|\begin{array}{l}2a-x\\y\end{array}\right.$ است.

نتیجهٔ ۱: قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{array}{l}x\\y\end{array}\right.$ نسبت به خط $x=a$، نقطه $A'\left|\begin{array}{l}2a-x\\y\end{array}\right.$ است.

مثال: قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{array}{l}3\\1\end{array}\right.$ نسبت به خط $x = 1$ چنین است:

$$A\left|\begin{array}{l}3=x\\1=y\end{array}\right. \quad \text{و} \quad a = 1 \Longrightarrow A'\left|\begin{array}{l}2a-x=2(1)-3\\y=1\end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow A'\left|\begin{array}{l}-1\\1\end{array}\right.$$

پس نقطهٔ $A'\left|\begin{array}{l}-1\\1\end{array}\right.$ قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{array}{l}3\\1\end{array}\right.$ نسبت به خط $x = 1$ است.

نتیجهٔ ۲: اگر بخواهیم معادلهٔ قرینهٔ یک خط یا یک منحنی را نسبت به خط $x = a$ پیدا کنیم، باید به‌جای x، $(2a - x)$ را قرار دهیم.

مثال: قرینهٔ خط (d) به معادله $y=x-2$ را نسبت به خط $x=2$ بیابید.

$$a = 2 \Longrightarrow 2a - x = 4 - x$$

در معادله $y = x - 2$ به‌جای x، $(4 - x)$ را قرار می‌دهیم.

معادله خط (d'): $\Longrightarrow y = 4 - x - 2 \Longrightarrow y = -x + 2$

نتیجهٔ ۳: اگر در معادله یک منحنی به‌جای x، $(2a - x)$ را قرار دهیم و معادله منحنی تغییر نکند نتیجه می‌گیریم که خط $x = a$، معادله محور تقارن منحنی است.

مثال: نشان دهید که خط $x = 1$ معادله محور تقارن منحنی به معادلهٔ $y = x^2 - 2x$ است.

$$a = 1 \Longrightarrow 2a - x = 2 - x$$

در معادله $y = x^2 - 2x$ به‌جای x، $(2 - x)$ را قرار می‌دهیم.

$$\Longrightarrow y=(2-x)^2-2(2-x) \Longrightarrow y=4+x^2-4x-4+2x$$

$$\Longrightarrow y=x^2-2x$$

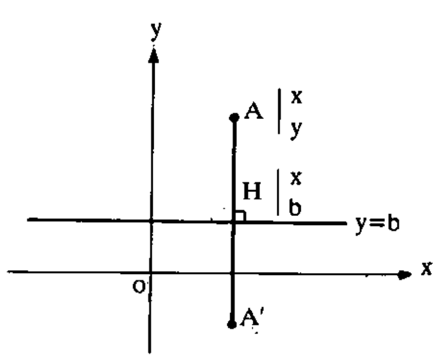
چون معادله حاصل همان معادلهٔ اولیّه است پس خط $x = 1$ معادله محور تقارن منحنی است.

۵ـ قرینه نسبت به خط $y = b$:

با توجه به شکل، اگر نقطهٔ A' قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خط $y = b$ باشد، داریم: $x_A = x_{A'}$ و نقطه H وسط AA' است.

$$\Rightarrow y_H = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \Rightarrow b = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \Rightarrow$$

$$y_A + y_{A'} = 2b \Rightarrow y_{A'} = 2b - y_A$$



بنابراین اگر $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ باشد نقطهٔ $A'\left|\begin{matrix}x\\۲b-y\end{matrix}\right.$ است.

نتیجهٔ ۱: قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ نسبت به خط $y=b$، نقطه $A'\left|\begin{matrix}x\\۲b-y\end{matrix}\right.$ است.

مثال: قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}-۱\\-۲\end{matrix}\right.$ نسبت به خط $y=۲$ چنین به‌دست می‌آید:

$$A\left|\begin{matrix}-۱=x\\-۲=y\end{matrix}\right. \text{ و } b=۲ \Longrightarrow A'\left|\begin{matrix}x\\۲b-y\end{matrix}\right. \Longrightarrow A'\left|\begin{matrix}-۱\\۴+۲\end{matrix}\right.$$

$$\Longrightarrow A'\left|\begin{matrix}-۱\\۶\end{matrix}\right.$$

پس نقطهٔ $A'\left|\begin{matrix}-۱\\۶\end{matrix}\right.$ قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}-۱\\-۲\end{matrix}\right.$ نسبت به خط $y=۲$ است.

نتیجهٔ ۲: اگر بخواهیم معادلهٔ قرینهٔ یک خط یا یک منحنی را نسبت به خط $y=b$ پیدا کنیم باید به‌جای y، $(۲b-y)$ را قرار دهیم.

مثال: قرینه خط (d) به معادله $y=۴x-۱$ را نسبت به خط $y=۲$ بیابید.

$$b=۲ \Longrightarrow ۲b-y=۴-y$$

در معادله $y=۴x-۱$، به‌جای y باید $(۴-y)$ را قرار دهیم.

$$\Longrightarrow ۴-y=۴x-۱ \Longrightarrow -y=۴x-۵ \Longrightarrow$$

$y=-۴x+۵$ معادله خط (d')

نتیجهٔ ۳: اگر در معادله یک منحنی به‌جای y، $(۲b-y)$ را قرار دهیم و معادله منحنی تغییر نکند، نتیجه می‌گیریم که خط $y=b$ معادله محور تقارن منحنی است.

مثال: نشان دهید خط $y=۲$ معادله محور تقارن منحنی به معادله $x=y^۲-۴y$ است.

$$b=۲ \Longrightarrow ۲b-y=۴-y$$

در معادله $x=y^۲-۴y$، به‌جای y، $(۴-y)$ را قرار می‌دهیم.

$$x=(۴-y)^۲-۴(۴-y) \Longrightarrow x=۱۶+y^۲-۸y-۱۶+۴y$$

$$\Longrightarrow x=y^۲-۴y$$

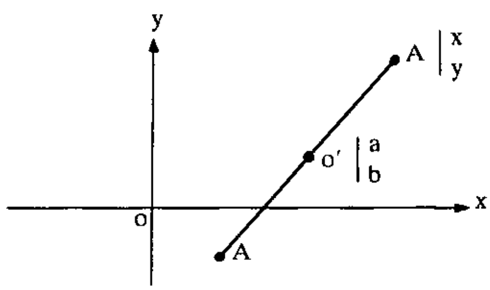
چون معادله حاصل همان معادلهٔ اوّلیّه منحنی است پس خط $y=۲$ معادله محور تقارن منحنی است.

۶ـ قرینه نسبت به نقطهٔ $o'\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$:

با توجه به شکل، اگر نقطهٔ A' قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ $o'\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$ باشد، می‌توان گفت که نقطهٔ o' وسط AA' است پس می‌توان نوشت:

$$x_{o'}=\frac{x_A+x_{A'}}{۲} \Rightarrow a=\frac{x_A+x_{A'}}{۲} \Rightarrow$$
$$x_A+x_{A'}=۲a \Rightarrow x_{A'}=۲a-x_A$$

$$y_{o'}=\frac{y_A+y_{A'}}{۲} \Rightarrow b=\frac{y_A+y_{A'}}{۲} \Rightarrow$$
$$y_A+y_{A'}=۲b \Rightarrow y_{A'}=۲b-y_A$$



بنابراین اگر $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ باشد نقطهٔ $A'\left|\begin{matrix}۲a-x\\۲b-y\end{matrix}\right.$ است.

نتیجهٔ ۱: قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ نسبت به نقطهٔ $o'\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$، نقطه $A'\left|\begin{matrix}۲a-x\\۲b-y\end{matrix}\right.$ است.

مثال: قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}۱\\۵\end{matrix}\right.$ را نسبت به نقطه $o'\left|\begin{matrix}-۲\\۳\end{matrix}\right.$ **بیابید.**

$$A\left|\begin{matrix}۱=x\\۵=y\end{matrix}\right. \text{ و } \begin{cases}a=-۲\\b=۳\end{cases} \Rightarrow A'\left|\begin{matrix}۲a-x\\۲b-y\end{matrix}\right.$$

$$\Rightarrow A'\left|\begin{matrix}-۴-۱\\۶-۵\end{matrix}\right. \Rightarrow A'\left|\begin{matrix}-۵\\+۱\end{matrix}\right.$$

پس نقطهٔ $A'\left|\begin{matrix}-۵\\۱\end{matrix}\right.$ قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}۱\\۵\end{matrix}\right.$ نسبت به نقطهٔ $o'\left|\begin{matrix}-۲\\۳\end{matrix}\right.$ است.

نتیجهٔ ۲: اگر بخواهیم قرینه یک خط یا یک منحنی را نسبت به نقطه

$o'\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$ به‌دست آوریم باید به‌جای x، $(۲a - x)$ و به‌جای y، $(۲b - y)$ را قرار دهیم.

مثال: قرینه خط (d) به معادله $y=۲x+۱$ را نسبت به نقطهٔ $o'\left|\begin{matrix}-۱\\۲\end{matrix}\right.$ را بیابید.

$$\begin{cases}a=-۱\\b=۲\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}۲a-x=-۲-x\\۲b-y=۴-y\end{cases}$$

باید به‌جای x، $(-۲-x)$ و به‌جای y، $(۴-y)$ را در معادله $y = ۲x + ۱$ قرار دهیم.

$$\Longrightarrow\ ۴-y=۲(-۲-x)+۱ \ \Longrightarrow\ ۴-y=-۴-۲x+۱$$

$$\Longrightarrow\ -y=-۲x-۷ \ \Longrightarrow\ y=۲x+۷ \quad :(d') \text{ معادله خط}$$

نتیجهٔ ۳: اگر در معادله یک منحنی به‌جای x، $(۲a - x)$ و به‌جای y، $(۲b - y)$ را قرار دهیم و معادله منحنی تغییر نکند، آنگاه نقطه $o'\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$ مرکز تقارن منحنی تابع است.

مثال: نشان دهید نقطهٔ $o'\left|\begin{matrix}۲\\۳\end{matrix}\right.$ مرکز تقارن منحنی تابع $y = x^۳ - ۶x^۲ + ۱۹$ است.

$$o'\left|\begin{matrix}۲\\۳\end{matrix}\right. \Rightarrow \begin{cases}a=۲\\b=۳\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}۲a-x=۴-x\\۲b-y=۶-y\end{cases}$$

باید در معادله منحنی به معادله $y = x^۳ - ۶x^۲ + ۱۹$ به‌جای x، $(۴ - x)$ و به‌جای y، $(۶ - y)$ را قرار دهیم.

$$۶-y=(۴-x)^۳-۶(۴-x)^۲+۱۹$$

$$۶-y=۶۴-x^۳-۴۸x+۱۲x^۲-۶(۱۶+x^۲-۸x)+۱۹$$

$$۶-y=-x^۳+۶x^۲-۱۳ \ \Rightarrow\ -y=-x^۳+۶x^۲-۱۹$$

$$\Rightarrow\ y=x^۳-۶x^۲+۱۹$$

چون معادله حاصل همان معادله اولیّه است پس نقطهٔ $o'\left|\begin{matrix}۲\\۳\end{matrix}\right.$ مرکز تقارن منحنی است.

۷ـ قرینه نسبت به خط $y = x$:

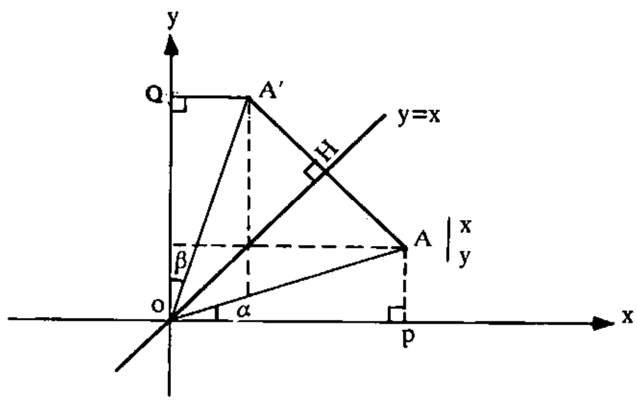
اگر نقطهٔ A' قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خط $y = x$ باشد می‌توان گفت که: خط $y = x$ عمود منصف AA' است. پس: $oA = oA'$

$$\Longrightarrow\ \angle A'oH = \angle AoH \ \Longrightarrow\ \alpha = \beta$$

دو مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{oPA}$ و $\overset{\Delta}{oQA'}$ (به حالت وتر و یک زاویه حادّه مساوی‌اند.

$$\Rightarrow\ \overline{oP}=\overline{oQ} \ \Rightarrow\ x_A=y_{A'}$$

$$\Rightarrow\ \overline{AP}=\overline{A'Q} \ \Rightarrow\ y_A=x_{A'}$$



نتیجهٔ ۱: قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ نسبت به خط $y=x$، نقطه $A'\left|\begin{matrix}y\\x\end{matrix}\right.$ است.

مثال: قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}۲\\۵\end{matrix}\right.$ نسبت‌به خط $y=x$، نقطهٔ $A'\left|\begin{matrix}۵\\۲\end{matrix}\right.$ است.

نتیجه ۲: اگر بخواهیم قرینه یک خط یا یک منحنی را نسبت به خط $y = x$ بیابیم باید در معادله خط یا منحنی جای x و y را با هم عوض کنیم.

مثال: قرینه خط (d) به معادله $y = ۲x + ۳$ را نسبت به خط $y = x$ بیابید.

باید جای x و y را با هم عوض کنیم.

$$\Longrightarrow\ x = ۲y + ۳ \ \Longrightarrow\ ۲y = x - ۳$$

$$\Longrightarrow\ y=\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲} \qquad :(d') \text{ معادله خط}$$

نتیجهٔ ۳: اگر در معادله یک منحنی جای x و y را باهم عوض کنیم و معادله منحنی تغییر نکند می‌گوییم خط $y = x$ معادله محور تقارن آن منحنی است.

مثال: نشان دهید که خط $y = x$ معادلهٔ محور تقارن منحنی به معادله $x^۲ + y^۲ + ۳xy = ۱$ است.

حل: جای x و y را باهم عوض می‌کنیم.

$$\Longrightarrow y^۲ + x^۲ + ۳yx = ۱$$

ملاحظه می‌کنیم که معادله اصلی تغییر نکرده است. پس خط $y = x$ معادله محور تقارن این منحنی است.

۸ـ قرینه نسبت به خط $y = -x$:

اگر نقطهٔ A' قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خط $y = -x$ باشد می‌توان گفت که خط $y = -x$ عمودمنصف AA' است.

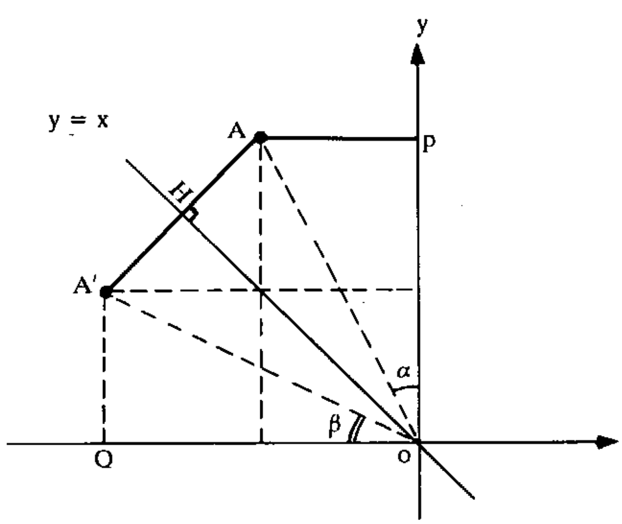
پس: $\angle A'oH = \angle AoH$ و $oA = oA'$

در نتیجه: $\alpha = \beta$

و دو مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{APo}$ و $\overset{\Delta}{A'Qo}$ (به حالت وتر و یک زاویه حادّه مساوی‌اند).

در نتیجه، با توجه به علامت:

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{oP} = -\overline{oQ} \Rightarrow y_A = -x_{A'} \\ \overline{AP} = -\overline{A'Q} \Rightarrow x_A = -y_{A'} \end{cases}$$



نتیجهٔ ۱: قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ نسبت به خط $y=-x$، نقطهٔ $A'\left|\begin{matrix}-y\\-x\end{matrix}\right.$ است.

مثال: قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}۲\\۵\end{matrix}\right.$ نسبت به خط $y=-x$، نقطهٔ $A'\left|\begin{matrix}-۵\\-۲\end{matrix}\right.$ است.

نتیجهٔ ۲: اگر بخواهیم قرینه یک خط یا یک منحنی را نسبت به خط $y = -x$ پیدا کنیم باید در معادله آنها به‌جای x، (−y) و به‌جای y، (−x) را قرار دهیم.

مثال: قرینه خط (d) به معادله $y = ۲x - ۱$ را نسبت به خط $y = -x$ بیابید. باید x را به (−y) و y را به (−x) تبدیل کنیم.

$$-x = -۲y - ۱ \Longrightarrow ۲y = x - ۱$$

معادله خط (d'): $\Longrightarrow \boxed{y = \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۲}}$

نتیجهٔ ۳: اگر در معادله یک منحنی به‌جای x، (−y) و به‌جای y، (−x) را قرار دهیم و معادله آن تغییر نکند می‌گوییم خط $y = -x$ معادله محور تقارن آن است.

مثال: نشان دهید که خط $y = -x$ معادله محور تقارن منحنی به معادله $x^۲y^۲ + (x - y)^۲ = ۱$ است.

حل: به‌جای x، (−y) و به‌جای y، (−x) را قرار می‌دهیم.

$$(-y)^۲(-x)^۲ + (-y + x)^۲ = ۱ \Longrightarrow y^۲+x^۲+(x-y)^۲ = ۱$$

معادله منحنی تغییر نکرده است پس خط: $y = -x$ معادله محور تقارن منحنی است.

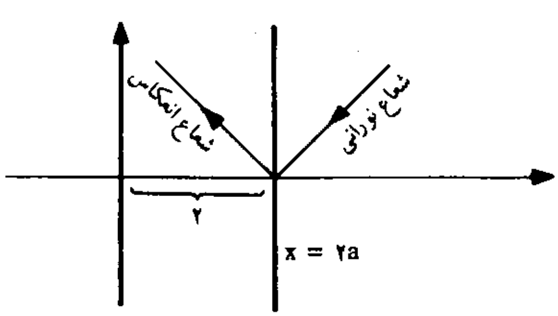
مساله: یک شعاع نورانی به معادله $y = ۲x - ۴$ به محور x ها می‌تابد، معادله شعاع انعکاس را بیابید.

حل: این شعاع نورانی محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۲ $x = ۲$ قطع می‌کند ($y = ۰ \Rightarrow x = ۲$). باتوجه به درس آئینه‌ها در فیزیک برای تعیین معادله شعاع انعکاس باید قرینه معادله شعاع نورانی را نسبت به خط $x=۲$ پیدا کرد (شمارهٔ (۴) درس همین مقاله).

$$a = ۲ \Longrightarrow ۲a - x = ۴ - x$$

باید در معادله شعاع نورانی به‌جای x، $(۴ - x)$ را قرار داد.

معادله شعاع انعکاس: $\Longrightarrow y=۲(۴-x)-۴ \Longrightarrow y=۴-۲x$



مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۱۳)

آیا یک عدد، به حاصلضرب عوامل اول یکتا تجزیه می‌شود؟

(اقتباس)

از مجلهٔ: QUANTOM

■ ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

۱. هر عدد معلوم را می‌توان به حاصلضرب عوامل اول چنان تجزیه کرد که در آخر تنها عوامل اول در حاصلضرب موجود باشند. به‌عنوان مثال، ۶۰ را می‌توان به صورت 6×10، ۶ را به‌صورت 2×3، و ۱۰ را به‌صورت 2×5 تجزیه کرد و به این ترتیب خواهیم داشت:

$$60=2\times 3\times 2\times 5$$

و همان‌طور که معلوم است تمام این عوامل اولند.

به طریقی دیگر می‌توانیم این عدد را ابتدا به‌صورت:

$$60=4\times 15 \quad \text{و} \quad 4=2\times 2 \quad \text{و} \quad 15=3\times 5$$

تجزیه کنیم و از آن:

$$60=2\times 2\times 3\times 5$$

را به‌دست آوریم. همان‌طور که مشاهده می‌شود در هر دو حالت در تجزیه عوامل یکسان ظاهر شده‌اند و تعداد این عوامل نیز در هر دو حالت یکی است. با به ترتیب اندازه نوشتن این عوامل اول در هردو حالت داریم:

$$60=2^2\times 3\times 5$$

این حقیقت که در هر دو این حالات به یک نتیجه می‌رسیم بسیار واضح به‌نظر می‌رسد و این بدان علت است که چنان عادت کرده‌ایم. چه، در حساب چنین فرض کرده‌ایم که چون عددی را تا آنجا که ممکن است به حاصلضرب عوامل اول تجزیه کنیم، همواره ــ بی‌توجه به اینکه کار را چگونه آغاز کرده‌ایم ــ عوامل یکسان به‌دست می‌آوریم.

این گزاره راست است، اما حقیقتاً آن‌طور که به‌نظر می‌رسد واضح است؟ عدد بزرگی چون ۳۰۰۳۱ را درنظر می‌گیریم و ملاحظه می‌کنیم که برای تجزیهٔ آن به‌کار قابل ملاحظه‌ای نیاز داریم. و ممکن است پس از آزمایشهای بسیار کشف کنیم که این عدد را می‌توان به حاصلضرب 59×509 که هر دو اولند تجزیه کرد. اکنون تحت چه مبنایی به‌طور مسلم می‌توان گفت که واضح است آزمایشهای دیگر، عوامل دیگری را که با این عوامل متفاوتند به‌دست نمی‌دهد؟

این مطلب با تمام مفاهیمی که در پذیرفتن این‌که حاصلضرب اعداد اول مشخصی به یک عدد مشخص تبدیل می‌شود، آموخته‌ایم مغایرت دارد. در این بحث غرض از قسمتهای ۲ و ۳ این است که نشان داده شود این مفاهیم شهودی مبنای صحیحی ندارند. پس از آن با نشان دادن این موضوع که در این مورد، به حقیقت، مسأله‌ای مطرح است، در باقیماندهٔ مقاله به اثبات این مطلب می‌پردازیم که «تجزیهٔ اعداد به عوامل اول واقعاً یکتاست».

۲. برای این‌که خویش را از مفاهیم از پیش‌داوری شده برکنار کنیم دستگاه عددی ناآشنایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم، و اعداد به‌صورت $a+b\sqrt{6}$ را که در آنها a و b اعداد صحیح‌اند، درنظر می‌گیریم. به‌عنوان مثال، $12+5\sqrt{6}$، $2-\sqrt{6}$ و $3\sqrt{6}$ از چنین اعدادی هستند. درحالی که $2+3\sqrt{12}$ نیست. در این دستگاه اعداد صحیح را کنار نگذاشته‌ایم، این اعداد در حقیقت b را مساوی صفر دارند و قسمتی از دستگاه عددیمان را تشکیل می‌دهند و بنابراین، این دستگاه جدید نگاشت مجموعهٔ اعداد صحیح است.

محاسبه با این اعداد درست به همان طریق که طبیعتاً انتظار می‌رود انجام می‌گیرد و تمام اعمال با استفاده از جبر، آشنا هستند. طریق جمع و تفریق دو عدد از این اعداد از مثال زیر معلوم می‌شود.

$$(3+\sqrt{6})+(5+\sqrt{6})=8+2\sqrt{6}$$

ضربهای زیر که توسط قواعد معمول جبر انجام شده‌اند، چگونگی عمل ضرب هر دو عدد از این اعداد را نشان می‌دهند.

$$(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})=9-6=3$$

$$(\sqrt{۶}+۲)(\sqrt{۶}-۲)=۶-۴=۲$$
$$(۳+\sqrt{۶})(\sqrt{۶}-۲)=۳\sqrt{۶}-۶+۶-۲\sqrt{۶}=\sqrt{۶}$$
$$(۳-\sqrt{۶})(\sqrt{۶}+۲)=\sqrt{۶}$$
$$(۳+\sqrt{۶})(۲+\sqrt{۶})=۱۲+۵\sqrt{۶}$$
$$(۳-\sqrt{۶})(\sqrt{۶}-۲)=-۱۲+۵\sqrt{۶}$$

در مورد تقسیم نیازی نیست که سخنی گفته شود. چه، درست مانند مورد اعداد صحیح، گاهی عددی بر عدد دیگر تقسیم می‌شود و گاهی نمی‌شود.

در این دستگاه عددی، ۶ را می‌توان چون طریق معمول، به $\sqrt{۶}\,\sqrt{۶}$ تجزیه کرد.

$$۶=۲\times۳=\sqrt{۶}\sqrt{۶} \qquad (۱)$$

در این مثال، ۶ به ظاهر به دو طریق متفاوت تجزیه می‌شود. و این مطلب منجر به این می‌شود که سؤال قبل، یعنی آیا ۳۰۰۳۱ تجزیه‌ای متفاوت با ۵۰۹×۵۹ دارد یا خیر، را به خاطر بیاوریم. چنین می‌نماید که (۱) وضعیتی مشابه این وضعیت را نمایش می‌دهد.

اما این حالت را می‌توان به روشی بسیار طبیعی توضیح داد و آن به این طریق است که اعداد ۲ و ۳ اعدادی اولند و نمی‌توانند در دستگاه عددی معمولی تجزیه شوند، اما می‌توان آنها را در دستگاه جدید تجزیه کرد. درحقیقت، با استفاده از مثالهای ضربمان داریم:

$$۲=(\sqrt{۶}+۲)(\sqrt{۶}-۲) \quad , \quad ۳=(۳+\sqrt{۶})(۳-\sqrt{۶})$$

در این صورت، با ادامه دادن به تجزیهٔ ۳×۲=۶ خواهیم داشت

$$۶=(\sqrt{۶}+۲)(\sqrt{۶}-۲)(۳+\sqrt{۶})(۳-\sqrt{۶}) \qquad (۲)$$

دو تجزیهٔ (۱) صرفاً همان (۲) با جفتهای عوامل متفاوتند. چه، تجزیهٔ اول (۱) از ترکیب دو عامل اول و دو عامل آخر (۲) به‌دست می‌آید، و تجزیهٔ دوم آن از ترکیب عوامل اول و چهارم، همین‌طور دوم و سوم (۲) حاصل می‌شود.

واضح است که در این مورد ترکیبات دیگری نیز وجود دارد. به‌عنوان مثال، اگر عوامل اول و سوم و عوامل دوم و چهارم را ترکیب کنیم خواهیم داشت:

$$۶=(۱۲+۵\sqrt{۶})(-۱۲+۵\sqrt{۶})$$

درستی این تجزیه را می‌توان با استفاده از ضرب اثبات کرد.

این وضع با وضعی که با آن آشناییم تفاوت ندارد. چه، در توضیح آن مجبورنبودیم که بدانیم عوامل واقع در (۲) اولند. واضح است که اکنون از اعداد اول عددی را درنظر می‌گیریم که نتواند در دستگاهمان تجزیه شود، و نشان دادن این‌که چهار عامل مورد بحث اولند مشکل نیست.

۳. اکنون دستگاه عددی دیگری را درنظر می‌گیریم. این دستگاه مجموعهٔ اعداد به‌صورت $a+b\sqrt{-۶}$ است که در آن بار دیگر a و b اعداد صحیح معمولیند. در این حالت نیز وضعیتی نظیر (۱) پیدا می‌کنیم، اما این مرتبه نمی‌توانیم آن را آن‌گونه که (۱) را با (۲) توضیح دادیم توضیح دهیم. محاسبات در این دستگاه به همان سادگی محاسبه در دستگاه $a+b\sqrt{۶}$ است و قواعد جبر درست به همان ترتیب که قبلاً به‌کار می‌رفتند، به‌کار می‌روند. در این صورت متناظر با (۱) داریم:

$$۶=۲\times۳=-\sqrt{-۶}\sqrt{-۶} \qquad (۳)$$

مشابه با حالت دیگر، سعی می‌کنیم که ۲، ۳ و $\sqrt{-۶}$ را تجزیه کنیم. اما این‌بار چنان معلوم می‌شود که این اعداد در این دستگاه اولند و نمی‌توانیم آنها را تجزیه کنیم.

بهتر است که در این بحث از مفهوم «نُرم[۱]» یک عدد استفاده کنیم. نرم عدد $a+b\sqrt{-۶}$ حاصلضرب این عدد با $a-b\sqrt{-۶}$ است، یعنی

$$N(a+b\sqrt{-۶})=(a+b\sqrt{-۶})(a-b\sqrt{-۶})=a^۲+۶b^۲$$

به عبارت دیگر، در این دستگاه، نرم یک عدد حاصلضرب آن عدد در عددی است که با قرار دادن $-\sqrt{-۶}$ به جای $\sqrt{-۶}$ در آن عدد به‌دست می‌آید. به این ترتیب نرم یک عدد همواره یک عدد صحیح و مثبت معمولی است. همچنین نرم حاصلضرب دو عدد، برابر با حاصلضرب نرمهای آن دو عدد است. زیرا، بنا به قاعده، داریم:

$$N\ (a+b\sqrt{-۶})(c+d\sqrt{-۶})$$
$$=\left[(a+b\sqrt{-۶})(c+d\sqrt{-۶})\right]\left[(a-b\sqrt{-۶})(c-d\sqrt{-۶})\right]$$

این چهار عامل را می‌توان به‌صورت:

$$(a+b\sqrt{-۶})(a-b\sqrt{-۶})(c+d\sqrt{-۶})(c-d\sqrt{-۶})$$

نوشت که طبق قاعده دقیقاً:

$$N(a+b\sqrt{-۶})N(c+d\sqrt{-۶})$$

است.

اگر در این دستگاه بتوان ۲ را به‌صورت دو عامل تجزیه کرد، داریم:

$$۲=(a+b\sqrt{-۶})(c+d\sqrt{-۶})$$

و درنتیجه:

$$N(۲)=N(a+b\sqrt{-۶})N(c+d\sqrt{-۶})$$

اما نرم ۲ عبارت است از

$$N(2) = (2 + 0\sqrt{-6})(2 - 0\sqrt{-6}) = 2 \times 2 = 4$$

بنابراین داریم:

$$4 = (a^2 + 6b^2)(c^2 + 6d^2)$$

یعنی، باید ۴ به حاصلضرب دو عدد صحیح معمولی هر یک به صورت $x^2 + 6y^2$ تجزیه شود. اما تنها به دو طریق است که می‌توان ۴ را با استفاده از اعداد معمولی تجزیه کرد، در یکی از این دو، هر دو عامل ۲ و در دیگری یکی ۴ و دیگری یک است، و هیچ یک از این دو به کارمان نمی‌آید؛ چرا که ۲ را نمی‌توان به‌صورت x^2+6y^2 درآورد و ۱ تنها به‌ازای $x = 1$ ، $y = 0$ به این صورت درمی‌آید. بنابراین تنها طریقی که طبق آن ۲ را می‌توان در این دستگاه به دو عامل تجزیه کرد، این است که یکی از عوامل $1 = 1 + 0\sqrt{-6}$ باشد. ولی ما این تجزیه را در دستگاهمان به‌عنوان تجزیه درنظر نمی‌گیریم، همان‌طور که $5 = 1 \times 5$ را در دستگاه عددی معمولی به‌عنوان یک تجزیه درنظر نمی‌گرفتیم.

با روشی دقیقاً شبیه این روش می‌توان دریافت که ۳ و $\sqrt{-6}$ در این دستگاه اولند. درحالی که به جای نرم ۴، نرمهای ۹ و ۶ باید به صورت $x^2 + 6y^2$ تجزیه شوند.

یادداشت:

1. Norm

ادب ریاضی

فیثاغورث

کتابی که به اقلیدس فیثاغوری منسوب است، شامل اصول هندسه و عدد می‌باشد، این کتاب به‌نام اُسطُقُسّات معروف شده، و مطالعه در این اصول از دو راه است: راه تحلیل، و راه ترکیب.

دانشمندان پیشین این رشته ــ غیر از اقلیدس ــ در کتابهای خود، راه تحلیل و ترکیب را با هم آورده‌اند، اما اقلیدس مطالب کتاب خود را تنها براساس ترکیب، تألیف کرده است.

«احصاء العلوم»

آموزش ترجمه متون ریاضی (۱۱)

(جبر و احتمال نظام جدید و ریاضیات جدید سال چهارم)

● حمید رضاامیری

✱ PRINCIPLE OF MATHEMATICAL INDUCTION

Let us try to answer the following question: What is the sum of all integers from one through n, for any positive integer n? If $n=1$, the sum equals 1 because 1 is the only summand. The answer we seek is a formula that will enable us to determine this sum for each value of n without having to add the summands.

✱ اصل استقرای ریاضی

اجازه بدهید به سؤال زیر پاسخ دهیم: مجموعِ همهٔ اعداد صحیح و مثبت از ۱ تا n چقدر است؟ اگر $n=۱$، مجموع، مساوی ۱ است زیرا ۱ تنها «جمع وند»، در مجموع، مورد نظر است. پاسخی که به دنبال آن هستیم فرمولی است که به ما توانایی می‌دهد تا این مجموع را، بدون آن که لزومی برای افزایش «جمع وندها» باشد، به ازای هر مقدار n، معین کنیم.

Table 1-1 lists the sum S_n of the first n consecutive positive integers for values of n from 1 through 10. Notice that in each case S_n equals one-half the product of n and the next integer; that is,

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (1\text{-}1\text{-}1)$$

for $n = 1, 2, 3, \ldots, 10$. Although this formula gives the correct value of S_n for the first ten values of n, we cannot be sure that it holds for n greater than 10.

جدول ۱ ــ ۱ لیست (یا فهرست) مجموعِ S_n از اولین n عدد صحیح و مثبتِ متوالیِ مورد نظر را به ازای مقادیر از ۱ تا ۱۰ برای n به دست می‌دهد. توجه دارید که در هر حالت S_n برابر است با نصف (یک دوم) حاصل ضرب n در عدد صحیحِ بعدیِ آن یعنی، به ازای $n=۱,۲,۳,\ldots\ldots,۱۰$،

$$S_n = \frac{n(n+۱)}{۲} \qquad (۱-۱-۱)$$

با این که این فرمول مقدار صحیحی برای S_n در مورد ده مقدار اولیهٔ n برای ما حاصل می‌کند، ما نمی‌توانیم مطمئن باشیم که به ازای n بزرگتر از ۱۰ نیز برقرار است.

To construct Table 1-1, we do not need to compute S_n each time by adding the first n positive integers. Having obtained values of S_n

TABLE 1-1: SUM S_n OF THE FIRST n CONSECUTIVE POSITIVE INTEGERS.

n	S_n	n	S_n
1	1	6	21
2	3	7	28
3	6	8	36
4	10	9	45
5	15	10	55

for n less than or equal to some integer k, we can determine S_{k+1} simply by adding $(k+1)$ to S_k:

$$S_{k+1} = S_k + (k+1).$$

برای ساختن جدول ۱ ــ۱، لازم نیست که S_n را هر دفعه، با جمع کردنِ اولین n عدد صحیح و مثبت، حساب کنیم. با به دست آوردن مقادیر S_n برای n های کوچکتر یا مساوی با عددی چون K، می‌توانیم S_{K+1} را بسادگی با افزودن $K+۱$ به S_K معین کنیم:

$$S_{K+1} = S_K + (K+۱)$$

This last approach suggests a way of verifying equation (1-1-1). Suppose we know that formula (1-1-1) is true for $n \le k$, where k is a positive integer. Then we know that

$$S_k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

and so

$$
\begin{aligned}
S_{k+1} &= S_k + (k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\
&= \left(\frac{k}{2}+1\right)(k+1) \\
&= \frac{(k+2)(k+1)}{2},
\end{aligned}
$$

that is,

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

این رهیافت اخیر راهی برای برقراری تساوی (۱ ـ ۱ ـ ۱) ارائه می‌دهد. فرض کنید بدانیم که فرمول (۱ ـ ۱ ـ ۱) به ازای $n \le K$، که در آن K عددی صحیح و مثبت است، درست باشد. در این صورت می‌دانیم که

$$S_K = \frac{K(K+۱)}{۲}$$

بنابراین

$$
\begin{aligned}
S_{K+۱} &= S_K + (K+۱) \\
&= \frac{K(K+۱)}{۲} + (K+۱) = (\frac{K}{۲}+۱)(K+۱) \\
&= \frac{(K+۲)(K+۱)}{۲}
\end{aligned}
$$

یعنی

$$S_{K+۱} = \frac{(K+۱)((K+۱)+۱)}{۲}$$

The last equation is the same as equation (1-1-1) except that n is replaced by $k+1$.

We have proved that if equation (1-1-1) holds for $n \le k$, then it holds for $n = k+1$, and we have already verified that equation (1-1-1) holds for $n = 1,2,\ldots,10$. Therefore, by the preceding argument, we conclude that equation (1-1-1) is also correct for $n = 11$. Since it holds for $n = 1,2,\ldots,11$, the same process shows that it is correct for $n = 12$. Since it is true for $n = 1,2,\ldots,12$, it is true for $n = 13$, and so on.

تساوی اخیر همان تساوی (۱ ـ ۱ ـ ۱) است که به جای n، (K+۱) قرار داده شده است.

ثابت کردیم که اگر تساوی (۱ ـ ۱ ـ ۱) به ازای $n \le K$ برقرار باشد، آن گاه به ازای $n = K+۱$ نیز برقرار است، پیش از این بررسی کردیم که تساوی (۱ ـ ۱ ـ ۱) به ازای $n = ۱,۲,\ldots,۱۰$ برقرار است. پس، بنا به استدلالی مشابه قبل، می‌توانیم نتیجه‌گیری کنیم که تساوی (۱ ـ ۱ ـ ۱) به ازای $n = ۱۱$ نیز صحیح است، و چون به ازای $n = ۱,۲,\ldots,۱۱$ برقرار است، فرایندی مشابه نشان می‌دهد که به ازای $n = ۱۲$ برقرار است. و از آنجا که برای $n = ۱,۲,\ldots,۱۲$ درست است، به ازای $n = ۱۳$ نیز صحیح خواهد بود و غیره.

✱ **Principle of mathematical induction:** *A statement about integers is true for all integers greater than or equal to 1 if*
- (i) *it is true for the integer 1, and*
- (ii) *whenever it is true for all the integers $1,2,\ldots,k$, then it is true for the integer $k+1$.*

By "a statement about integers" we do not necessarily mean a formula. A sentence such as "$n(n^2-1)(3n+2)$ is divisible by 24" is also acceptable (see Exercise 17 of this section). The assumption that "the statement is true for $n = 1,2,\ldots,k$" will often be referred to as the *induction hypothesis*. Sometimes the role 1 plays in the Principle will be replaced by some other integer, say b; in such instances the principle of mathematical induction establishes the statement for all integers $n \ge b$.

✱ **اصل استقرای ریاضی:** گزاره‌ای راجع به اعداد صحیح و به ازای هر عدد صحیح بزرگتر یا مساوی با یک، راست است اگر

I) به ازای عدد صحیح ۱ راست باشد، و

II) اگر به ازای هر عدد صحیح ۱ و ۲ و ... K راست باشد، آنگاه به ازای عدد صحیح K+۱ نیز راست باشد.

منظور ما از «گزاره‌ای راجع به اعداد صحیح» الزاماً اشاره به یک فرمول نیست، و شامل جمله‌ای مانند «$n(n^۲-۱)(۳n+۲)$ بر ۲۴ بخش‌پذیر است» نیز شده و مورد قبول است. معمولاً به این جمله که «گزاره به ازای $n = ۱,۲,\ldots,K$ راست است» فرض استقراء گفته می‌شود. گاهی اوقات نقشی که عدد ۱ در اصل مزبور بازی می‌کند، با عدد صحیح دیگری مانند b جایگزین می‌شود که در چنین نمونه‌هایی اصل استقرای ریاضی گزاره مزبور را به ازای جمیع اعداد صحیح $n \ge b$ برقرار می‌کند.

☐ اصطلاحات

Principle	اصل
Mathematical Induction	استقرای ریاضی
Sum	مجموع
Integer	عدد صحیح
One	یک
Positive Integer	عدد صحیح و مثبت

برابر بودن، مساوی بودن	To Equal
جمع وند	Summand
فرمول	Formula
افزایش دادن، اضافه کردن	To Add
جدول	Table
متوالی	Consecutive
حاصل ضرب	Product
مقدار	Value
حساب کردن	To Compute
رهیافت	Approach
تحقیق کردن	To Verify
برابری، تساوی	Equation
استدلال، برهان	Argument
فرایند	Process
تنظیم	Formulation

گزاره	Statement
بزرگتر	Greater
برابر، مساوی	Equal
راست	True
بخش‌پذیر	Divisible
مفروض	Assumption
فرض استقراء	Induction Hypothesis
شرط	Condition
نتیجه	Result
قضیه	Theorem
عدد حقیقی	Real Number
تبصره	Remark
اثبات	Proof
قضیهٔ فرعی	Corollary

تفریح اندیشه ۱

ماشینی که از لحاظ سوخت در وضعیت ویژه‌ای است و به‌ازای هر ۳۲ مایل یک بشکه گازوییل می‌سوزاند درمقابل ماشینی که به‌ازای هر مایل یک بشکه گازوییل مصرف می‌کند، در طی یک سال تا چه حد می‌تواند در مصرف گازوییل صرفه‌جویی کند؟ فرض کنید میانگین مسافتی که یک ماشین در هر سال می‌پیماید ۹۰۰۰ مایل است.

جواب در صفحهٔ ۸۸

ادب ریاضی

کسی که به تحصیل حکمت* می‌پردازد باید جوان و تندرست باشد، آداب اخیار را از دست ندهد، علوم شرع و قرآن و لغت را پیش از آن آموخته باشد. عفیف و راستگو باشد. غدّار و خائن نباشد. به گرم کردن بازار خود و حیله و مکر نپردازد. مصالح زندگانی را فراهم کرده، وظایف شرعی را انجام دهد. هیچیک از آداب و ارکان شریعت را ترک نگوید. علم و علما را بزرگ دارد. جز علم و علما را محترم نشمارد و حکمت را حرفه نکند. هر که به خلاف این صفات باشد، حکیم دروغین است.

«احصاء العلوم»

* حکمت نظری به سه قسمت الهیات، ریاضیات و طبیعیات تقسیم می‌شده است.

تاریخچهٔ مجلات ریاضی در ایران (۱۴)

□ در مقالهٔ **علم و منطق** شمارهٔ ۸ یکان چنین می‌خوانیم:

دربارهٔ آنکه در آینده چه خواهد شد، پا را از حدود حدس نمی‌توان فراتر گذاشت.

در زمان حاضر، آینده را به یکی از این دو صورت در پیش داریم: یا آینده‌ای که در آن علم با همین سرعت بسط و توسعه یابد، یا جهانی که پیشرفتهای جدید علم برایش فرجامی بد و عاقبتی شوم داشته باشد.

برنامه‌های مدارس زیر تأثیر این‌گونه عاملهای خارجی دگرگون می‌شود و برای آنکه نسل آینده برای رو به‌رو شدن با وضع زمان آماده گردد به بعضی دروس توجه بیشتری می‌شود و به محتویات برخی از آنها افزوده می‌گردد و مواد تازه‌ای هم جای خود را در برنامه‌های تحصیلی باز می‌کند.

در توجه جدی به علوم منطق هم مورد توجه خاص واقع گردیده است. و ما در این سطور خواهیم دید که چگونه علم و منطق با هم کار می‌کنند.

غالباً منطق به کمک ریاضیات عملی در علوم دیگر مداخله داده می‌شود و گاهی هم در خود ریاضی به‌کار می‌رود تا شاخه‌ای از ریاضیات محض، به‌خاطر خود آن، به‌وجود آید. اما بر روی هم طرز استفاده از منطق در شاخه‌های مختلف علم یکسان است.

□ در مقالهٔ **خدمات ریاضیدانان ایرانی** چنین آمده است:

اولین ریاضیدان بزرگ ایرانی **محمدبن موسی خوارزمی** است که در ایام جوانی در دربار **مأمون** خلیفهٔ عباسی می‌زیسته و سپس در قرن نهم برای تحصیل به **هند** اعزام شده است و پس از بازگشت مسئول کتابخانهٔ مأمون بوده است وی کتابی در جبر و حساب تألیف کرد، که ترجمهٔ لاتین قسمت مربوط به حساب آن درسال ۱۸۵۷ کشف گردیده است. در این کتاب برای اولین بار ارقام هندی یعنی ارقام متداول امروزی در محاسبات به‌کار برده شده که در اثر ترجمه آن اروپائیان نیز ارقام فوق را مورد استفاده قرار داده‌اند و چون در ترجمه به لاتین اسم خوارزمی الگاریتمی نوشته شده کلمهٔ الگوریتم که به معنای محاسبه است اصطلاحی برای محاسبه با پایهٔ ده گردید.

امروزه آنهایی که با داشتن ده رقم قادر به نوشتن بزرگترین اعداد هستند قدر و موهبت این خدمت خوارزمی را هرگز نمی‌دانند. توجه به دو سطر زیر که یکی مربوط به قدیمیترین اثر خطی اروپائیان در سال ۹۷۶ و دیگری کهنترین ارقام مسلمین به سال ۹۷۰ میلادی است دو موضوع مهم را برای ما روشن می‌سازد.

نخست آنکه ارقام فعلی اروپائیان همان ارقام مأخوذ از کتاب **خوارزمی** است که فقط در اثر مرور زمان کمی تغییر شکل پیدا کرده است دوم اینکه استفاده از صفر در عددنویسی تا سال ۹۷۶ میلادی در بین آنان معمول نبوده و درنتیجهٔ ترجمهٔ آثار **خوارزمی** و دانشمندان اسلامی دیگر توجه به اصل ارزش ارقام در آنها پیدا شده است.

در بخش جبر کتاب **خوارزمی** برای اولین مرتبه لفظ **جبر و مقابله** تظاهر می‌کند که منظور از جبر نقل جملات از یک‌طرف به طرف دیگر و قصد از مقابله جمع جملات متشابه است. بدون شک این کتاب بزرگترین و مهمترین کتابی است که تا آن زمان در جبر نوشته شده است. البته بابلیها و هندیان و حتی یونانیان نیز چیزی شبیه به جبر داشتند. ولی آنها هرگز بیش از ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم را به حساب نمی‌آوردند. بعلاوه از علائم اختصاری، که اساس علم جبر است، استفاده نمی‌کردند. کتاب فوق که کلمهٔ جبر را برای این علم در میان اروپائیان معمول کرد، هفت قرن و نیم مهمترین کتاب جبر در دنیا بود.

اواخر قرن دوازدهم جبر خوارزمی به‌وسیلهٔ **ژرارد ایتالیایی**، به زبان لاتین ترجمه گردید و مدت چهارصد سال برنامهٔ عمدهٔ جبر و مقابلهٔ دانشگاههای اروپا شد. پس از آن هم کتاب خوارزمی در قرن نوزدهم در **رم** و **لندن** و در قرن بیستم در **نیویورک** به چاپ رسید.

یکی دیگر از افتخارات ایرانیان **ابوالوفای بوزجانی** است که در سال ۹۴۰ میلادی در شهر **بوزجان** از توابع **نیشابور** به دنیا آمد. وی پس از تحصیلات ریاضی و نجوم به دربار **عضدالدوله دیلمی** بار یافت و به تألیف و تصنیف کتب متعددی در علوم عصر خویش پرداخت. از جملهٔ آنها کتابی است در جبر و حساب که در آنها کتب ریاضیدانان سلف خود مانند **دیوفانتس** یونانی و **خوارزمی** را تفسیر کرده، و بعضی از قضایایی را که دانشمندان فوق‌الذکر بدون اثبات ذکر کرده‌اند به طرق جالبی اثبات کرده است.

دقت او در تنظیم جدولی برای جیب و ظل (سینوس و تانژانت) که مقادیر آنها را دقیقه به دقیقه تا نه رقم اعشار محاسبه کرده است مورد تحسین کلیهٔ دانشمندان ریاضی است به علاوه وی واضع دو نسبت قطر ظل و قطر ظل تمام (سکانت و کسکانت) نیز می‌باشد. ولی شهرت و عظمت **ابوالوفا** بیشتر در علم نجوم است. او درنتیجهٔ مطالعات خود به جز حرکات وضعی و انتقالی ماه یک حرکت جالب دیگر وی را که فعلاً واریاسیون می‌گویند کشف نمود ولی هزار افسوس که کشف او به اطلاع مغرب زمین نرسید و به همین جهت این ابداع را به **تیکوبراهه** منجم هلندی که ششصد سال بعد از او این نظریه را اظهار کرده است نسبت می‌دهند.

□ در شمارهٔ نهم قسمت کوتاهی تحت عنوان **مسألهٔ بوفون** ملاحظه می‌کنیم که در آن چنین آمده است:

روش دیگری برای تعیین عدد π پس از به‌وجود آمدن علم احتمالات با طرح مسألهٔ سوزن به‌وجود آمد. اگر صفحهٔ مستوی را با خطوط نازک و متوازی و متساوی‌الفاصله و به فاصلهٔ $2l$ خط‌کشی کنیم و سوزنهای یکنواخت (یا چوب‌کبریتهای استوانه‌ای شکل) به طول h را برحسب تصادف (نه به قصد معین) روی این صفحه بریزیم، احتمال تعداد دفعاتی که این سوزنها خطوط را قطع می‌کنند، به تعداد دفعاتی که سوزنها را روی صفحه ریخته‌ایم برابر $P=\frac{2l}{\pi h}$ است. این مسأله را اولین بار **بوفون** طبیعیدان فرانسوی درسال ۱۷۳۳ میلادی مطرح و درسال ۱۷۷۷ آن را حل نمود.

درسالهای ۱۸۵۲ــ ۱۸۵۰ میلادی **ولف** منجم و ریاضیدان سوئیسی این آزمایش را با خطوطی به فواصل $l=4/5\,cm$ و سوزنهایی به بلندی $h=3/6\,cm$ انجام داد. طبق فرمول فوق $P=\frac{2\times 3/6}{4/5\pi}=\frac{72}{45\pi}$ است. ولف در این تجربه ۵۰۰۰ بار سوزن را روی صفحهٔ مذکور انداخت و ملاحظه کرد ۲۵۳۲ بار سوزن خطوط را قطع کرده یا مماس بر آن بود. بنابراین فرمول زیر حاصل شد:

$$P=\frac{\text{تعداد دفعاتی که سوزن خطها را قطع کرده}}{\text{تعداد کلیهٔ دفعات}}=\frac{2532}{5000}=0/5064$$

حال از فرمول $\frac{72}{45\pi}=0/5064$ عدد π برابر با $\pi=3/1596$ که باعدد π حقیقی $3/1596-3/1415=0/0181$ اختلاف دارد به‌دست می‌آید.

درسال ۱۸۵۵ نیز همین آزمایش تکرار شد. البته با سوزنهایی به طول ۳ سانتیمتر و خطوطی به فاصلهٔ ۵ سانتیمتر، و مقداری که برای π به‌دست آمد ۳/۱۴۱۲ بود.

پس به‌طور خلاصه اگر صفحه‌ای را با خطوط نازک و متساوی‌الفاصله خط‌کشی کنیم و تعدادی سوزن، به بلندی فاصلهٔ خطوط، را بر این صفحه بریزیم و تعداد کلیهٔ دفعات ریختن سوزنها را بر تعداد دفعاتی که سوزنها خطوط را قطع کرده‌اند تقسیم کنیم، عدد $\frac{\pi}{2}$ حاصل می‌شود. شک نیست هر اندازه تجربه را تکرار کنیم طبق قوانین احتمالات مقدار π دقیقتر به دست خواهد آمد. فعلاً با ۵۰۰ سوزن عمل را یکهزار بار تکرار کرده، عدد π را مساوی ۳/۱۴۱۵۹۲۶۶ به‌دست آورده‌اند که تا هفت رقم بعد از ممیز صحیح است.

□ همان‌طور که قبلاً هم خاطر نشان شد یکی از بحثهای مورد توجه مجلهٔ **یکان** بحث معماهای ریاضی و منطقی است در این شماره به دو مسألهٔ زیر برخورد می‌کنیم:

سه قوطی است که در هر یک دو سنگ مرمر قرار دارد. در یکی هر دو سنگ سفید و در دیگری هر دو سنگ مشکی و در سومی یکی سفید و دیگری مشکی است. روی در هر قوطی برچسبی نصب شده است که رنگ سنگهای داخل قوطی را معلوم می‌کند. مثلاً روی در آن قوطی که داخلش دو سنگ مرمر سفید است برچسب س.س و روی در آن قوطی که در داخلش دو سنگ مشکی است برچسب م.م و بالاخره بر روی در قوطی سوم برچسب س. م چسبانده شده است. حال اگر درهای قوطیها را با هم عوض کنیم به‌طوری که از برچسب هیچ دری نتوان فهمید که در داخل آن قوطی چه رنگ سنگ قرار دارد، معلوم کنید که چند سنگ از قوطیها باید درآوریم و رنگ آن را ببینیم تا رنگ بقیهٔ سنگهای داخل قوطیها را ندیده تشخیص بدهیم؟

چند نفر به باغی رفته، مقداری گردو چیدند و در گوشهٔ اطاق انبار

نمودند و شب به استراحت پرداختند. یکی از آنها نصف شب بیدار شد و به تصور آنکه دیگران ممکن است در تقسیم او را مغبون کنند، گردوها را به تعداد نفرات تقسیم نمود، یک گردو زیاد آمد، آن را به موجب حکم وجدان که نمی‌خواست بیشتر از دیگران سهمی برده باشد، به خارج پرتاب کرد و سهم خود را پنهان ساخت و به بستر خود رفت. بلافاصله نفر دوم بیدار شد و با همین تصور باقیمانده را به تعداد نفرات تقسیم کرد و یک گردو اضافه آمد، آن را به خارج پرتاب کرده، سهم خود را پنهان کرد و به رختخواب رفت. نفر سوم، نفر چهارم الی آخر به ترتیب بیدار شدند و این عمل را تکرار کردند. تعیین کنید تعداد گردوها را.

مسأله را برای ۳ نفر و ۵ نفر حل کنید.

☐ در مقالهٔ کوتاه **آیا ارشمیدس هرگز می‌توانست زمین را بلند کند؟** چنین می‌خوانیم که:

«یک نقطهٔ اتکا به من بدهید من زمین را بلند خواهم کرد.»

این گفته‌ای است که به ارشمیدس یا نابغه‌ای که قانون اهرمها را کشف کرد نسبت می‌دهند.

«اگر زمین دیگری وجود داشت من به آنجا می‌رفتم و سیارهٔ خودمان را بلند می‌کردم.»

ارشمیدس می‌دانست که با نیرویی ضعیف می‌توان وزنهٔ سنگینی را با استفاده از یک اهرم بلند کرد. کافی است که این نیروی کم به انتهای بازوی کارگر وارد آید و سبب حرکت نیروی مقاوم که در انتهای بازوی ایستادگی قرار دارد، گردد. بنابراین ارشمیدس تصور می‌کرد که با فشار وارد آوردن به بازوی یک اهرم خیلی طویل قادر خواهد بود وزنه‌ای را که جرم آن معادل جرم کرهٔ زمین است بلند کند.

برای ساده شدن موضوع فرض می‌کنیم که منظور از بلند کردن زمین یعنی آن که وزنه‌ای را که جرمش به اندازهٔ جرم کرهٔ زمین باشد از روی سطح کرهٔ زمین بلند کرد.

بدون شک اگر ارشمیدس از تودهٔ عظیم زمین اطلاع داشت هرگز چنین سخنی نمی‌گفت. حال فرض کنیم که ارشمیدس روی سیارهٔ دیگری قرار داشت و اهرم دراز مورد لزوم در اختیارش بود. آیا می‌توانید حدس بزنید که چه زمانی طول می‌کشید تا ارشمیدس زمین را فقط یک سانتیمتر بلند کند؟

۳۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ سال، حتماً تعجب کرده‌اید؟ پس اجازه بدهید که با یک حساب ساده درستی این عدد را ثابت کنیم:

اگر وزنه‌ای به اندازهٔ کرهٔ زمین در روی سطح زمین قرار داشت با حسابی که کرده‌اند این وزنه به اندازهٔ ۶,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ تن وزن خواهد داشت.

حال فرض می‌کنیم که یک نفر بتواند یک وزنهٔ ۶۰ کیلوگرمی را به طور مستقیم از سطح زمین بلند کند. اگر او بخواهد وزنه‌ای را که به اندازهٔ کرهٔ زمین جرم دارد بلند کند، به اهرمی احتیاج خواهد داشت که طول بازوی کارگر آن، ۱۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ مرتبه بزرگتر از طول بازوی ایستادگیش باشد.

شما می‌توانید به سادگی حساب کنید که اگر انتهای بازوی کوتاهتر (بازوی مقاوم) به اندازهٔ ۱ سانتیمتر بالا رود انتهای دیگر اهرم یعنی انتهای بازوی کارگر قوسی به اندازهٔ:

۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰

کیلومتر طی می‌کند یعنی ارشمیدس برای فشار وارد آوردن به اهرم می‌بایستی این فاصله را می‌پیمود تا اهرم، کرهٔ زمین را به اندازهٔ یک سانتیمتر، فقط یک سانتیمتر بلند کند و اما پیمودن این فاصله چه مدت زمان طول می‌کشید؟

فرض کنیم که ارشمیدس می‌توانست ۶۰ کیلوگرم را در یک ثانیه، یک متر بلند کند. بنابراین برای بلند کردن تودهٔ زمین به اندازهٔ فقط یک سانتیمتر زمانی برابر:

۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰

ثانیه یا

۳۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰

سال لازم داشت. ملاحظه می‌شود که این زمانی است فوق‌العاده طولانی و ارشمیدس وسیله‌ای که به کمک آن این زمان را به مقدار قابل توجهی کوتاه کند، در اختیار نداشت. از این گذشته به فرض این‌که ارشمیدس قادر بود که اهرم را با سرعت نور یعنی ۳۰۰,۰۰۰ کیلومتر در ثانیه حرکت دهد برای بلند کردن تودهٔ زمین به اندازهٔ یک سانتیمتر، ده میلیون سال وقت لازم داشت. آیا اگر جای پایی هم به ارشمیدس داده می‌شد او می‌توانست زمین را بلند کند؟

نگرشی به چند مفهوم اساسی در نظریه مجموعه‌ها

(ریاضی ۱ و ریاضیات جدید سال اوّل)

● شهرام صدر

آنچه امروز به نام «ریاضیات جدید» خوانده می‌شود، همان علم ساختمانهای ریاضی است و زبان ریاضیات جدید تئوری مجموعه ها می‌باشد. ریاضیات جدید در واقع چندان جدید نیست، زیرا قسمت عمده‌ای از آن از حدود یک قرن پیش به وجود آمده است؛ بلکه تأثیر عمیق آن در امر تعلیم و تعلّم ریاضیات در سالهای اخیر سبب گشته تا آن را «ریاضیات جدید» بنامند. نظریهٔ مجموعه‌ها که نزدیک به یک قرن پیش به وسیله ژرژکانتور (۱۹۱۸ ــ ۱۸۴۵) پایه‌گذاری شد، به بررسی خواص کلی مجموعه، بدون توجه به طبیعت اشیایی که مجموعه را تشکیل داده‌اند، می‌پردازد.

نظریه مجموعه‌ها، اساس تجزیه و تحلیل ریاضی جدید شناخته شده است و اطلاع در مورد آن برای هر ریاضیدانی لازم است. نظریه مجموعه‌ها پایه و اساس بسیاری از گرایشهای ریاضی، از جمله احتمالات، آنالیز، توپولوژی و جبر مجرد می‌باشد. در این مقاله سعی بر آن است که چند مفهوم اساسی نظریه مجموعه‌ها مطرح شود.

۱ــ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

شما با اصطلاحات مجموعهٔ متناهی و مجموعهٔ نامتناهی آشنایی دارید. مجموعه انگشتان یک دست خود را مجموعه‌ای متناهی و مجموعهٔ اعداد طبیعی و مجموعه نقاط واقع بر یک قطعه خط مستقیم را نامتناهی می‌شمارید. در حالت کلی مجموعه‌ای متناهی است که یا تهی و یا به طور دقیق شامل n عضو باشد، که n عدد صحیح مثبت می‌باشد؛ یا به عبارت دیگر مجموعه‌ای متناهی است که شامل تعداد معینی عضو مختلف باشد و در شمارش عضوهای مختلف مجموعه کار شمارش به پایان برسد. در غیر این صورت مجموعه نامتناهی است.

مثال:

۱ ــ فرض کنیم مجموعه M روزهای هفته باشد، آنگاه M متناهی است.

M={شنبه، یکشنبه، دوشنبه، سه‌شنبه، چهارشنبه، پنج‌شنبه، جمعه}

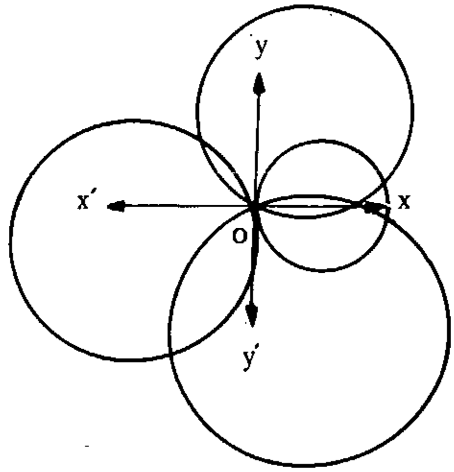
۲ ــ فرض کنیم {x رودخانه‌ای در دنیا | x} = P اگر چه شمردن رودخانه‌های دنیا مشکل است، اما با توجه به تعریف، مجموعهٔ P متناهی است.

۳ ــ مجموعه انسانهای روی کره زمین مجموعه متناهی است.

۴ ــ مجموعه دایره‌هایی که از مبداء مختصات می‌گذرند، مجموعه‌ای نامتناهی است.

۵ ــ مجموعه جوابهای معادله $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ متناهی است. زیرا معادله دارای مجموعه جواب $\{-3, -1, 1, 3\}$ می‌باشد.

۶ ــ مجموعه اعداد طبیعی زوج و مجموعه خطوط گذرنده از یک نقطه ثابت مجموعه‌هایی نامتناهی می‌باشند.



عدد اصلی یک مجموعه

فرض کنیم، A مجموعه‌ای متناهی باشد؛ با توجه به تعریفی که از مجموعه متناهی بیان شد؛ اعضای مجموعه A قابل شمارش می‌باشد. تعداد اعضای مجموعه A را عدد اصلی مجموعه A گوییم و با نماد $n(A)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱: فرض کنیم A مجموعه اعداد اول بزرگتر از ۳۰ و کوچکتر از ۵۰ باشد:

$$A = \{۳۱, ۳۷, ۴۱, ۴۳, ۴۷\}$$

مجموعه متناهی A دارای ۵ عضو می‌باشد. بنابراین عدد اصلی مجموعه A برابر با ۵ می‌باشد؛ یعنی $n(A) = ۵$.

مثال۲ : عدد اصلی مجموعه انگشتان دست راست شما برابر با ۵ می‌باشد.

مثال ۳: عدد اصلی مجموعه وجوه یک مکعب مستطیل برابر با ۶ می‌باشد، زیرا هر مکعب مستطیل دارای ۶ وجه یا شش مستطیل است.

عدد اصلی هر یک از مجموعه‌های $\varnothing$، $\{a_۱\}$، $\{a_۱, a_۲\}$، $\{a_۱, a_۲, a_۳\}$، $\{a_۱, a_۲, a_۳, a_۴\}$ و ... به ترتیب برابر با ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ و ... می‌باشد. بنابراین عدد اصلی هر مجموعه متناهی مانند A ، عدد صحیح و نامنفی $n(A)$ می‌باشد. به طوری که $۰ \leq n(A) \leq K \;;\; K \in \mathbb{N}$

درباره عدد اصلی مجموعه‌های نامتناهی به طور مفصل در مبحث مجموعه‌های «شمارا» و «ناشمارا» گفتگو خواهیم کرد.

مجموعه‌های هم عدد

برای بیان این مفهوم به مثال زیر توجه کنید:

فرض کنید دو بسته مداد داشته باشیم. در یکی مدادهای قرمز و در دیگری مدادهای سیاه باشد، از هر بسته یک مداد بر می‌داریم (یعنی یک مداد قرمز و یک مداد سیاه) و کنار می‌گذاریم. دوباره یک مداد از هر بسته خارج می‌کنیم و کنار می‌گذاریم. اگر به همین ترتیب از هر بسته یک مداد خارج کنیم، یا هر دو بسته مداد با هم خالی می‌شوند یا یکی از بسته‌ها خالی می‌شود، در حالی که در دیگری هنوز مداد باقی مانده است. واضح است که حالت اول تنها هنگامی رخ می‌دهد که در دو قوطی به تعداد مساوی مداد وجود داشته باشد و در حالت دوم بسته‌ای که خالی شده است شامل تعداد کمتری مداد بوده است.

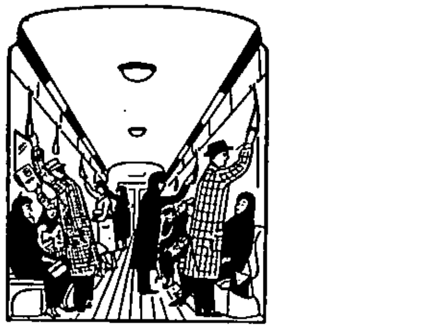
بنابراین دو مجموعه را هم عدد گوییم، هرگاه تعداد اعضای آنها با هم برابر باشند. به این ترتیب بدون شمردن عضوهای دو مجموعه، می‌توانیم معلوم کنیم که آیا دو مجموعه هم عدد هستند یا نه ؟ کافی است به طور متوالی از هر مجموعه یک عضو انتخاب کرده، با هم جفت کنیم. دو مجموعه را تنها وقتی «هم عدد» گوییم که اگربه طور متوالی یک عضو از هر مجموعه انتخاب و با هم جفت شوند، عضوهای دو مجموعه با هم تمام شوند. نتیجه‌ای که به دست می‌آید بستگی به ترتیب انتخاب عضوها در هر یک از دو مجموعه ندارد.

مجموعه‌های هم ارز

فرض کنید کلاسی که شما در آن درس می خوانید ۳۰ دانش‌آموز دارد. یک روز معلم ریاضی وارد کلاس می شود و به هر یک از دانش‌آموزان یکی از اعداد ۱ تا ۳۰ را نسبت می‌دهد؛ به طوری که اگر هر عددی بین ۱ تا ۳۰ انتخاب شود، دانش‌آموزی هست که منتسب به آن عدد باشد. و بر عکس اگر دانش‌آموزی را در نظر بگیریم، یکی از اعداد ۱ تا ۳۰ منتسب به آن دانش‌آموز باشد. در این حالت می‌گوییم ، مجموعهٔ دانش‌آموزان و مجموعهٔ اعداد ۱ تا ۳۰هم ارز می‌باشند. بنابراین مجموعه ناتهی A را هم‌ارز با مجموعه ناتهی B گوییم هرگاه هر عضو A فقط و فقط با یک عضو B و هر عضو B فقط و فقط با یک عضو A مرتبط باشد. و می‌نویسیم $A \sim B$.

مثال: مجموعه ماشینهای سواری موجود در سطح شهر تهران با مجموعه شماره پلاکهای آنها هم‌ارز می‌باشند.

مثال: شکل زیر نشان می‌دهد که مجموعه صندلیهای اتوبوس و مجموعه مسافران هم‌ارز نیستند زیرا تعدادی از مسافران ایستاده‌اند و صندلی خالی برای نشستن موجود نمی‌باشد.



مثال: اگر فرض کنیم $\mathbb{N}_K = \{۱, ۲, ۳, ..., K\}$ طبق تعریف داریم:

$A \Leftrightarrow A = \varnothing \;\vee\; A \sim \mathbb{N}_K$ مجموعه‌ای متناهی است.

اکنون این سؤال پیش می‌آید که آیا در مورد هر دو مجموعهٔ دلخواه می‌توان گفت تعداد عضوهایشان مساوی است یا نه. در مورد

مجموعه‌های متناهی با شمردن عضوها و یا جفت کردن اعضای آن می‌توان به این سؤال پاسخ داد اما در مورد مجموعه‌های نامتناهی، جواب سؤال بستگی به این دارد که تعداد مساوی عضو داشتن را چگونه تعریف کنیم تا بگوییم دو مجموعه «هم‌عددند». با تعریفی که گذشت می‌توان هم ارزی بین دو مجموعه متناهی را بررسی کرد. اکنون وقت آن رسیده است که برای بررسی هم ارزی بین دو مجموعه نامتناهی تعریف زیر را که نظریه مجموعه‌ها را دگرگون کرده است، و به ریاضیدان آلمانی ژرژ کانتور منسوب است، مطرح کنیم.

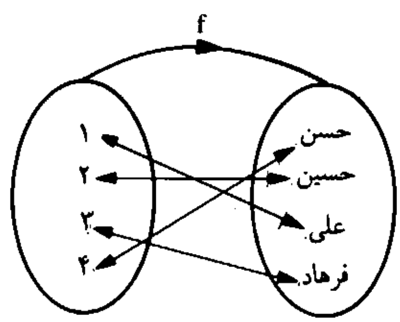
مجموعه A هم‌ارز با مجموعه B است اگر تابعی چون $f:A \to B$ موجود باشد به‌طوری که f هم یک به یک و هم پوششی[1] باشد. در این صورت می‌گویند تابع f تناظری یک به یک بین مجموعه‌های A و B تعریف می‌کند.

مثال:

۱ــ فرض کنیم

$A = \{1,2,3,4\}$ { فرهاد و علی و حسین و حسن } $= B$

نمودار زیر تابعی از A به B تعریف می‌کند که یک به یک و پوششی است. پس $A \sim B$.



$f(1) =$ علی

$f(2) =$ حسین

$f(3) =$ فرهاد

$f(4) =$ حسن

۲ــ فرض کنیم $M = \{1,2,3\}$ و $N = \{1,2\}$، اگر همه تابعهایی که از M در N است را بنویسیم، هیچ‌یک از آنها یک به یک و پوششی نیست، زیرا M و N «هم‌عدد» نیستند پس $M \nsim N$.

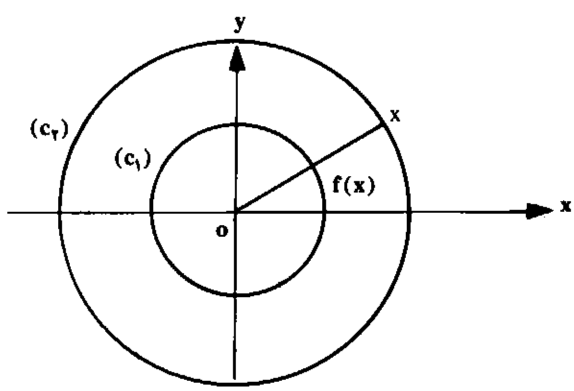
از بررسی این دو مثال به آسانی می‌توان دریافت که به طور کلی، یکی از شرایطی که دو مجموعه متناهی را هم‌ارز می‌کند، این است که تعداد عضوهای یکی با دیگری برابر باشد.

۳ــ فرض کنیم $G = [0,1]$ و $H = [2,5]$ ملاحظه می‌کنیم که دو مجموعه H و G نامتناهی می‌باشند؛ تابع $f:G \to H$ با ضابطه $f(x) = 3x + 2$ را در نظر می‌گیریم. با کمی دقت ملاحظه می‌کنیم که f هم یک به یک است و هم پوششی، پس $G \sim H$ یعنی G هم‌ارز H می‌باشد.

۴ــ فرض کنیم $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\ldots\}$ و $\mathbb{E} = \{2,4,6,8,\ldots\}$ تابع $f:\mathbb{N} \to \mathbb{E}$ با ضابطه $f(x) = 2x$ هم یک به یک و هم پوششی می‌باشد پس $N \sim E$. با توجه به مثال ۴ درمی‌یابیم که مجموعه نامتناهی اعداد طبیعی با مجموعه اعداد زوج که زیرمجموعه $\mathbb{N}$ می‌باشد، هم‌ارز است. بنابراین یک مجموعه نامتناهی می‌تواند با زیرمجموعه‌ای نامتناهی از خود هم‌ارز باشد. این خاصیت، ویژهٔ مجموعه‌های نامتناهی است.

۵ــ دو دایره متحدالمرکز را در نظر بگیرید. تناظری یک به یک بین نقاط روی دو دایره به طریق هندسی برقرار کنید.

حل: دو دایره (C_1) و (C_2) را به مرکز مبداء مختصات و شعاعهای دلخواه و نابرابر در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم x نقطه‌ای بر دایره (C_2) باشد یعنی $x \in (C_2)$ تابع $f:C_2 \to C_1$ را در نظر می‌گیریم. اگر از مرکز، شعاعی به x وصل کنیم، دایره (C_1) را در نقطه $f(x)$ قطع خواهد کرد (مطابق شکل)، بنابراین f هم یک به یک است و هم پوششی پس f تناظری یک به یک بین (C_1) و (C_2) برقرار می‌کند.

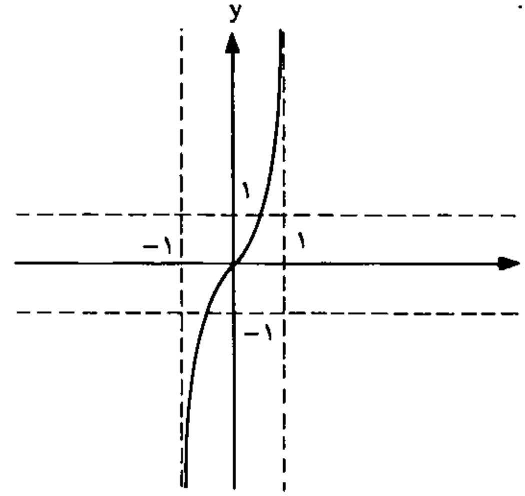


۶ــ تابع $f:(-1,1) \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$ یک به یک و پوشا می‌باشد. بنابراین بازه $(-1,1)$ هم ارز مجموعه اعداد حقیقی می‌باشد یعنی مجموعه اعداد حقیقی و بازه $(-1,1)$ «هم‌عدد» می‌باشند. چون تابع $f(x)$ دارای قدر مطلق می‌باشد، بنابراین $f(x)$ تابعی دو ضابطه‌ای، به صورت زیر می‌باشد:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1-x} & x \geq 0 \\ \dfrac{x}{1+x} & x < 0 \end{cases}$$

۱ــ مجموعه‌های یک به یک و پوشا را می‌توانید از کتاب ریاضیات جدید سال دوم ریاضی و یا مجله‌های برهان به شماره‌های ۴ و ۶ مطالعه فرمایید.

با توجه به دامنه و ضوابط تابع f نمودار آن به شکل زیر می‌باشد.
با توجه به نمودار به آسانی ملاحظه می‌شود که f یک به یک و پوششی می‌باشد.

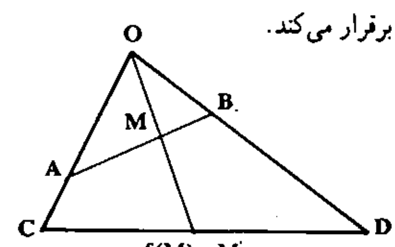


۷ــ برای برقرار کردن تناظر یک به یک بین همه عددهای مثبت فرد و همه عددهای زوج بزرگتر از صد، کافی است هر عدد فرد n را متناظر با عدد زوج $n+۱۰۱$ قرار دهیم.

$$۱ \xrightarrow{f} ۱+۱۰۱$$
$$۳ \xrightarrow{f} ۳+۱۰۱$$
$$۵ \xrightarrow{f} ۵+۱۰۱$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$n \xrightarrow{f} n+۱۰۱$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

۸ــ مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N} = \{۱,۲,۳,\ldots\}$ و $M = \{۱,۱۰,۱۰۰,۱۰۰۰,\ldots\}$ مفروضند برای برقراری تناظر یک به یک بین M و $\mathbb{N}$ تابع $f:\mathbb{N} \to M$ را با ضابطه $f(n) = ۱۰^{n-۱}$ که یک به یک و پوششی می‌باشد، در نظر می‌گیریم. بنابراین: $\mathbb{N} \sim M$.

۹ــ فرض کنیم AB پاره‌خط مستقیمی به طول یک سانتیمتر و CD قطعه خطی مستقیم به طول دلخواه باشد. مطابق شکل زیر، تابع f را بر مجموعه نقاط AB با این ضابطه تعریف می‌کنیم که f(M) یا M′ نقطهٔ تقاطع خط OM با CD می‌باشد. به وضوح می‌توان دید که f تناظر یک به یک بین مجموعه نقاط پاره خط AB و مجموعه نقاط پاره خط CD برقرار می‌کند.



۱۰ــ بین مجموعه اعداد طبیعی و مجموعه اعداد طبیعی که مجذور کامل هستند توسط تابع f تناظری یک به یک موجود می‌باشد.

$\mathbb{N} = \{۱,۲,۳,\ldots\}$ $A = \{۱,۴,۹,۱۶,۲۵,۳۶,\ldots\}$

مجموعه اعداد طبیعیِ مجذور کامل

$f:\mathbb{N} \to A$

$f(x) = x^۲$

تابع f با ضابطه فوق یک به یک و پوششی می‌باشد لذا: $\mathbb{N} \sim A$.

منابع

۱ ــ نظریه مجموعه‌ها نوشته سیمورلیپ شوتس، ترجمهٔ محمود مهدی‌زاده.

۲ ــ نظریه مجموعه‌ها نوشته واستلا وسرپینکی، ترجمه پرویز شهریاری.

۳ ــ آنالیز ریاضی تألیف دکتر غلامحسین مصاحب.

۴ ــ توپولوژی عمومی (مبحث نظریه مجموعه‌ها) نوشته سیمورلیپ شوتس، ترجمه دکتر علی اکبر عالم زاده.

۵ ــ تئوری مسائل احتمالات (مبحث نظریه مجموعه‌ها) نوشته سیمورلیپ شوتس ــ ترجمه عادل ارشقی

۶ ــ مقدمه‌ای بر منطق و نظریه مجموعه‌ها، تألیف محمد رجبی طرخورانی.

۷ – INTRODUCTION, TO THE THEORY OF SETS . JOSEPH BREUER

۲ ــ مجموعه‌های شمارا و ناشمارا (شمارش‌پذیر و شمارش ناپذیر)

●حمید رضا امیری

فرض کنید می‌خواهیم اعضای مجموعهٔ $A = \{۲,۳,۵,۷,۱۱\}$ را شماره‌گذاری کرده، به طور مثال بر روی آنها برچسب بزنیم. برای این کار برچسب‌هایی که اعداد طبیعیِ ۱ و ۲ و ۳ و ... روی آنها نوشته شده‌اند در اختیار داریم، واضح است که برچسبهای شمارهٔ ۱ تا ۵ را برای اعضای این مجموعه مصرف می‌کنیم.

حال اگر بخواهیم مجموعهٔ اعداد طبیعیِ زوج یعنی مجموعهٔ $۲\mathbb{N}=\{۲,۴,۶,۸,\dots\}$ ، را برچسب‌گذاری (شمارش) کنیم، برچسب شمارهٔ ۱ را به ۲ اختصاص می‌دهیم و برچسب شمارهٔ ۲ را به ۴ و ۳ را به ۶ و ۴ را به ۸ و ... یعنی تمام اعضای $۲\mathbb{N}$ را می‌توان با خیال راحت برچسب‌گذاری کرد، منظور از خیال راحت این است که ما اطمینان داریم بین عدد ۲ و ۴ ، عدد زوج دیگری وجود نداشته و براحتی برچسب شمارهٔ ۲ را برای ۴ در نظر می‌گیریم و به همین ترتیب پیش می‌رویم، البته تا هر کجا که دلمان بخواهد و محدودیت زمانی به ما اجازه دهد!

بنابراین اصطلاحاً می‌گویند مجموعه $۲\mathbb{N}$ ، قابل شمارش یا شمارش‌پذیر یا شمارا می‌باشد.

حال فرض کنیم مجموعهٔ اعداد حقیقی بین ۲ و ۳ (شامل خودِ ۲ و خودِ ۳) دردست باشد و بخواهیم این مجموعه یعنی، $A=\{x\in\mathbb{R}|۲\le x\le ۳\}$ را برچسب‌گذاری کنیم، واضح است که اولین عضو این مجموعه را می‌توان عدد ۲ در نظر گرفت و برچسب شمارهٔ ۱ را به عدد ۲ اختصاص داد، بلافاصله به دنبال دومین عدد بعد از ۲ می‌گردیم تا برچسب شمارهٔ ۲ را که آماده کرده‌ایم روی آن بچسبانیم، آیا می‌توان یک عدد حقیقی بلافاصله بعد از ۲ نام برد؟ جواب منفی است، ما نمی‌توانیم عدد حقیقی بلافاصله پس از ۲ را معرفی یا پیدا کنیم. که بین آن عدد و عدد ۲ هیچ عدد حقیقیِ دیگری وجود نداشته باشد. زیرا ثابت شده که «همواره بین هر دو عدد حقیقیِ متمایز، بی‌نهایت عدد حقیقی وجود دارد» بنابراین همچنان در به کار بردن برچسب شمارهٔ ۲ ناتوان مانده‌ایم، پس، مجموعهٔ فوق شمارش‌ناپذیر یا ناشمارا می‌باشد.

اکنون می‌خواهیم با توجه به این مثالها و تعریفهایی که پیش از این خواندید، مجموعه‌های «شمارا» و «ناشمارا» را دقیقتر تعریف کنیم:

تعریف: مجموعهٔ A را شمارش‌پذیر می‌نامیم هرگاه متناهی بوده یا با مجموعهٔ اعداد طبیعی، یعنی $\mathbb{N}$ ، تناظر یک به یک داشته باشد پس:

A شمارش‌پذیر است $\Leftrightarrow$ (A متناهی است) $\vee\, A\simeq\mathbb{N}$

(در حقیقت $\mathbb{N}$ همان مجموعهٔ بر چسب‌گذار است)

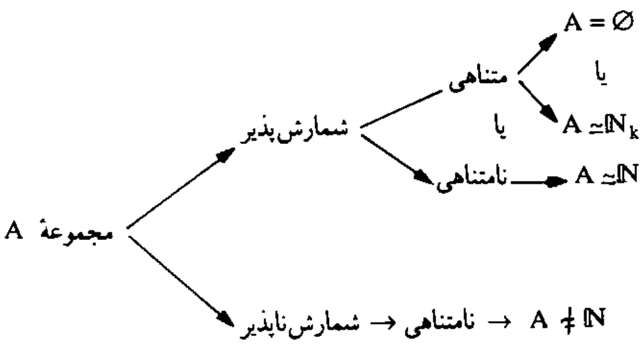
مثال: تعدادی از این مجموعه‌های شمارش‌پذیر و نامتناهی عبارتند از، $\mathbb{N}$ و Z و تمام زیر مجموعه‌های نامتناهی $\mathbb{N}$ و Z .

تعریف: مجموعهٔ A را شمارش‌ناپذیر می‌نامیم هرگاه، شمارش‌پذیر نباشد به عبارت دیگر «متناهی نباشد و با $\mathbb{N}$ معادل یا هم‌ارز نباشد». پس:

A شمارش ناپذیر است. $\Leftrightarrow$ (A نامتناهی است) $\wedge\, A\not\simeq\mathbb{N}$

مثال: مجموعهٔ اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{R}$ و تمام زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ به شکل $A=\{x\in\mathbb{R}|a\le x\le b\}$ (که نقاط ابتدایی و انتهاییِ مجموعهٔ A تأثیری در «ناشمارایی» ندارند.) و مجموعهٔ اعداد گنگ «ناشمارا» یا شمارش ناپذیر هستند.

با توجه به این تعریفها و مثالها، می‌توان نمودار زیر را رسم کرد:



در انتها فقط به ذکر این نکته اکتفا می‌کنیم که عدد اصلی مجموعه‌های شمارش پذیر نامتناهی و عدد اصلی مجموعه‌های شمارش‌ناپذیر با هم برابر در نظر گرفته نمی‌شوند.

ادب ریاضی

تعمق در استدلالهای ریاضی برای پی‌بردن به کنه آنها و به عمق احکام ریاضی نیز منتهای ضرورت را دارد از این راه است که تیزبین می‌شوید و فکر شما بیدار می‌شود، و صاحب نیروی ابتکار و آماده برای تحقیق می‌گردید.

مرحوم دکتر غلامحسین مصاحب

«دلیل محسوس» در کنار «برهان»

دکتر احمد شرف‌الدین

مقدمه :

در سطور زیر دو حکم ریاضی ذکر کرده‌ام و برای هر یک از آنها برهانهایی را که در کتابهای ریاضی ذکر شده‌است آورده‌ام. سپس برای نشان دادن درستی این دو حکم دو شیوه کاملاً محسوس و ملموس عرضه کرده‌ام و این دو شیوه را تحت عنوان «دلیل محسوس» ذکر کرده‌ام. این گونه دلیلها باوجود آن که به‌نظر می‌آید «برهان» می‌باشند برهان نیستند اما علاوه بر آن که در تشریح و تفهیم مطلب نقش مهمی دارند دارای جاذبه خاصی می‌باشند و شایسته است در کنار برهان ذکر شوند. از این جهت است که عنوان مقاله را («دلیل محسوس» در کنار «برهان») گذاشته‌ام. مطالعه این مقاله نه تنها برای دانش‌آموزان مفید است که برای دبیران نیز مفید است.

حکم ۱

n کسر $\frac{a_1}{b_1}$، $\frac{a_2}{b_2}$، ...، و $\frac{a_n}{b_n}$ را که صورتها و مخرجهای آنها اعداد مثبتند درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که نامساویهای زیر برقرار باشند:

$$(۱) \qquad \frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \dots < \frac{a_n}{a_n}$$

ثابت کنید نامساویهای زیر برقرار است:

$$(۲) \quad \frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_1 + \dots + b_n} < \frac{a_n}{b_n}$$

برهان :

قرار می‌دهیم:

$$(۳) \quad \frac{a_1}{b_1} = q_1 , \quad \frac{a_2}{b_2} = q_2 , \dots , \quad \frac{a_n}{b_n} = q_n$$

از نامساویهای (۱) و (۳) رابطه‌های زیر نتیجه می‌شود:

$$(۴) \quad q_1 < q_2 < \dots < q_n$$

همچنین از رابطه‌های (۳)، رابطه‌های زیر حاصل می‌شود:

$$(۵) \quad a_1 = b_1q_1 , a_2 = b_2q_2 , \dots , a_n = b_nq_n$$

ار رابطه‌های (۴) و (۵) حاصل می‌شود:

$$(٦) \quad a_1 = b_1q_1 , a_2 > b_2q_1 , a_3 > b_3q_3 , \dots , a_n > b_nq_1$$

از رابطه‌های (٦) رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$(۷) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n > (b_1 + b_2 + \dots + b_n)\, q_1$$

ازرابطه (۷) باتوجه به این که $q_1 > 0$ است رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$(۸) \quad q_1 < \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$$

از رابطه (۸) باتوجه به‌آن که $\frac{a_1}{b_1} = q_1$ (رابطهٔ اوّل از رابطه‌های (۳)) نامساوی زیر حاصل می‌شود:

$$(۹) \quad \frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$$

باهمین شیوه استدلال ثابت می‌کنیم که

$$(۱۰) \quad \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} < \frac{a_n}{b_n}$$

دو نامساوی (۹) و (۱۰) همان نامساویهایی هستند که می‌خواستیم ثابت کنیم (یعنی دو نامساوی مذکور در (۲)). در سطور زیر برای نشان دادن درستی نامساویهای (۲) یک دلیل ملموس عرضه می‌کنیم.

دلیل محسوس

اکنون برای نشان دادن درستی رابطه (۲)، شیوه‌ای کاملاً ملموس و محسوس به‌کار می‌بریم. بدین قرار: n ظرف c_1، c_2، ...، و c_n درنظر می‌گیریم و در آنها به‌ترتیب به‌اندازه‌های b_1، b_2، ...، و b_n آب و به‌اندازه‌های a_1، a_2، ...، و a_n شکر می‌ریزیم. هریک از مخلوطها را به‌هم می‌زنیم تا شکرها در آب حل شوند و n شربت در ظرفهای c_1، c_2، ...، و c_n حاصل شود.

می‌دانیم که در یک شربت هر قدر نسبت مقدار شکر به مقدار آب بیشتر باشد آن شربت شیرینتر است. چون بنا به فرض: $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2}$ است (رجوع کنید به رابطه‌های (۱)). پس شیرینی شربت ظرف c_2 بیشتر از شیرینی شربت ظرف c_1 است. همچنین چون $\frac{a_2}{b_2} < \frac{a_3}{b_3}$ است (رجوع کنید به‌همان رابطه‌های (۱)). پس شیرینی شربت ظرف c_3 بیشتر از شیرینی شربت ظرف c_2 است و به همین ترتیب.

اکنون تمام شربتها را در یک ظرف بزرگ که آن را c می‌نامیم می‌ریزیم و مخلوط را به‌هم می‌زنیم تا یک شربت همگن حاصل شود. مقدار آب و شکر در شربت ظرف c به‌ترتیب به‌اندازه‌های $(b_1 + b_2 + ... + b_n)$ و $(a_1 + a_2 + ... + a_n)$ است. پس اندازه شیرینی ظرف c با مقدار کسر

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{b_1 + b_2 + ... + b_n}$$

مشخص می‌شود.

اما شیرینی شربت ظرف c از شیرینی شربت ظرف c_1 بیشتر است پس چنین داریم:

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{b_1 + b_2 + ... + b_n} \quad (۱۱)$$

همچنین شیرینی شربت ظرف c از شیرینی شربت ظرف c_n کمتر است پس:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{b_1 + b_2 + ... + b_n} < \frac{a_n}{b_n} \quad (۱۲)$$

بدین‌سان نایل آمدیم تا درستی نامساویهای (۱۱) و (۱۲) را با دلیل ساده‌ای که کاملاً محسوس و ملموس است نشان دهیم.

تبصره. به‌طور کلی اگر اعداد b_1، b_2، ...، و b_n (یعنی مخرجهای کسرها) مثبت باشند و اعداد a_1، a_2، ...، و a_n (یعنی صورتهای کسرها) اعداد جبری باشند بازهم نامساویهای (۱) برقرار است.

حکم ۲

ثابت کنید تابع بولی سه متغیری

$$(۱۳) \quad f(x, y, z) = x y z' + y z x' + z x y' + x y z$$

دارای خاصیت «اکثریت» است یعنی این که اگر مقدار دو متغیر از سه متغیر و یا هر سه متغیر برابر a باشند آنگاه مقدار تابع برابر a خواهدبود.

برهان

چون تابع (۱۳) نسبت به سه متغیر متقارن است پس کافی است ثابت کنیم که:

الف) اگر مقدار دو متغیر x و y برابر a باشند آنگاه مقدار تابع برابر a است یعنی:

$$(۱۴) \quad f(a, a, z) = a$$

ب) اگر مقدار هر سه متغیر برابر a باشند آنگاه مقدار تابع برابر a است یعنی:

$$(۱۵) \quad f(a, a, a) = a$$

اثبات قسمت الف. چنین می‌نویسیم:

$$(۱٦) \quad f(a, a, z) = a . a . z' + a . z . a' + z . a . a' + a . a . a$$

با رعایت آن که $a . a = a$ و $a . a' = ۰$ از رابطهٔ (۱٦) نتیجه می‌شود:

$$(۱۷) \quad f(a, a, z) = a . z + ۰ + ۰ + a$$

اگر $z = ۱$ باشد از رابطهٔ (۱۷) نتیجه می‌شود:

$$f(a, a, z) = a . ۱ + a = a + a = a$$

و اگر $z = ۰$ باشد از رابطهٔ (۱۷) حاصل می‌شود:

$$f(a, a, z) = a . ۰ + a = ۰ + a = a$$

اثبات قسمت ب. چنین می‌نویسیم:

$$f(a, a, a) = a . a . a' + a . a . a' + a . a . a' + a . a . a$$
$$= ۰ + ۰ + ۰ + a = a$$

بدین‌سان آنچه می‌خواستیم ثابت کنیم ثابت شد. اکنون یک دلیل ساده کاملاً ملموس برای حکم مورد نظر عرضه می‌کنیم.

دلیل محسوس

سه تن به نامهای X، Y، و Z باید در یک جلسه مشورتی که از این سه‌تن تشکیل می‌شود شرکت کنند. می‌خواهیم حضور اکثریت آنها را در جلسه با یک تابع بولی بنویسیم. حضور افراد X، Y، و Z را در جلسه مشورتی به ترتیب با x، y، و z و عدم حضور آنها را با x′، y′، و z′ نشان می‌دهیم.

اکثریت این افراد هنگامی در جلسه حضور دارند که دو تن یا هر سه تن در جلسه حضور یابند. اکثریت هنگامی حاصل می‌شود که یکی از چهار حالت زیر پیش‌آید.

الف. x و y در جسه حضور داشته باشند ولی z غایب باشد. این امر را با عبارت بولی زیر نشان می‌دهیم:

$$z\,y\,z'$$

یعنی X حاضر است وَ Y حاضر است وَ Z غایب است.

ب. y و z در جلسه حضور داشته باشند ولی X غایب باشد. این امر را با عبارت بولی زیر نشان می‌دهیم:

$$y\,z\,x'$$

پ. Z و X در جلسه حضور داشته باشند ولی Y غایب باشد. این امر باعبارت زیر نشان داده می‌شود:

$$x\,y'z$$

ت. X، Y، و Z هر سه در جلسه حضور داشته‌باشند. این امر باعبارت زیر بیان می‌شود:

$$x\,y\,z$$

اما برای حضور اکثریت در جلسه باید حالت الف **یا** حالت ب **یا** حالت پ **یا** حالت ت اتفاق بیفتد. پس حضور اکثریت با تابع زیر بیان می‌شود:

$$f(x, y, z) = x y z' + y z x' + z x y' + x y z$$

تبصره. تابع (۱۳) یعنی تابع اکثریت را می‌توان به‌صورت زیر به‌طور خلاصه نوشت:

$$f(x, y, z) = x y + y z + z x$$

برهان. بنابر خاصیت همتوانی می‌توان نوشت:

$$(18)\quad x y z = x y z + x y z + x y z$$

با رعایت رابطهٔ (۱۸) چنین می‌نویسیم:

$$f(x, y, z) = x y z' + y z x' + z x y' + x y z + x y z + x y x$$
$$= x y (z' + z) + y z (x' + x) + z x (y' + y)$$
$$= x y \times 1 + y z \times 1 + z x \times 1$$
$$= x y + y z + z x$$

حکم ۳. مثالی که در زیر می‌آوریم یکی از قضیه های مهم آنالیز ریاضی مربوط به بسط فوریه است. اثبات قضیه در ریاضیات عالی توضیح داده می‌شود و با یک «دلیل محسوس»، صحّت قضیّه نشان داده می‌شود. این مطلب طوری شرح داده شده است که مطالعه آن برای دانش‌آموزان کاملاً قابل فهم و مفید خواهد بود.

بسط فوریه. اگر تابع f متناوب باشد و دوره تناوب آن 2π باشد می‌توان تابع را در x به‌صورت بسط زیر نوشت:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \qquad (1)$$
$$a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots + a_k \cos kx + b_k \sin kx + \ldots$$

در بسط بالا a_0، a_1، b_1، a_2، b_2، ....، a_k، b_k، ... اعداد جبری ثابتند. این اعداد را می‌توان به کمک دستورهای زیر به‌دست آورد.

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\cos nt \, dt \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\sin nt \, dt \end{cases}$$

مثال: بسط فوریه تابع $f(x) = |\sin \omega t|$ چنین است:

$$|\sin \omega t| = \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{2}{3}\cos 2\omega t - \frac{2}{15}\cos 4\omega t - \frac{2}{35}\cos 6\omega t + \ldots\right)$$

در زیر صورت یکی از قضیه‌های بسط فوریه را ذکر می کنیم.

قضیه. مجموع

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)$$

هنگامی که n به‌سوی بی نهایت میل می‌کند دارای حد متناهی است.

اثبات قضیه. اثبات قضیه در کتابهای آنالیز ریاضی عالی به‌طور مشروح آمده است.

«دلیل محسوس» برای تأیید درستی قضیه: ابتدا چند مطلب ساده فیزیکی ذکر می‌کنیم و سپس این مطالب را به‌کار می‌گیریم.

الف ــ اگر یک جریان الکتریکی با شدت ثابت I آمپر از سیمی با مقاومت R اهم بگذرد، مقدار انرژی که در واحد زمان در سیم مصرف می‌شود، چنین است:

RI^2 وات

ب ــ اگر یک جریان الکتریکی با شدت ثابت I آمپر از مقاومت R اهم در مدت T ثانیه بگذرد مقدار انرژی مصرف شده در مقاومت، چنین است:

RI^2T ژول

پ ــ اگر یک جریان الکتریکی متغیّر $i = I\sin\omega t$ از مقاومت R بگذرد، مقدار انرژی مصرف شده در مقاومت از لحظه t_1 تا لحظهٔ t_2، چنین است:

$\int_{t_1}^{t_2} RI^2 \sin^2 \omega t \;\; dt$ ژول

بخصوص انرژی مصرف شده از لحظه $-\pi$ تا لحظه $+\pi$ (یا از لحظه $t=0$ تا لحظه $t=2\pi$) چنین است:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} RI^2 \sin^2 \omega t \;\; dt = RI^2\pi$$

زیرا می‌دانیم که

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 \omega t \;\; dt = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1-\cos 2\omega t}{2} dt$$
$$= \pi$$

ت ــ اگر یک جریان الکتریکی متغیّر $i = I\cos\omega t$ از مقاومت R بگذرد انرژی مصرف شده از لحظه $-\pi$ تا لحظه $+\pi$ چنین است:

$RI^2\pi$

اکنون با استفاده از مطالبی که هم اکنون درالف، ب، پ، و ت ذکر کردیم، یک دلیل محسوس برای درستی قضیهٔ مورد نظر ارائه می‌دهیم:

جریان الکتریکی ثابت $\frac{1}{2}a_0$ و جریانهای الکتریکی متغیّر: $a_1\cos x$، $b_1\sin x$، $a_2\cos x$، $b_2\sin x$، .... را درنظر می‌گیریم (این عبارتهای ریاضی ضرایب بسط فوریه‌اند که در دستور (۱) ذکر کردیم). در این عبارتها x را متغیّر زمان تلقی می‌کنیم.

ث ــ اگر جریان الکتریکی ثابت $\frac{1}{2}a_0$ از سیمی با مقاومت R بگذرد انرژی مصرف شده از لحظه $-\pi$ تا لحظه $+\pi$ چنین است (بنابر مطلب مذکور در الف)

$$A_0 = R(\frac{1}{2}a_0)^2 \times 2\pi = \frac{1}{2}Ra_0^2\pi$$

ج ــ اگر جریان الکتریکی متغیّر $a_1\cos x$ از سیمی با مقاومت R بگذرد، انرژی مصرف شده از لحظه $-\pi$ تا لحظه $+\pi$ چنین است (بنابر مطلب مذکور در ت):

$$A_1 = Ra_1^2\pi$$

چ ــ اگر جریان الکتریکی متغیّر $b_1\sin x$ از سیمی با مقاومت R بگذرد انرژی مصرف شده در فاصله $[-\pi,+\pi]$، چنین است:

$$B_1 = Rb_1^2\pi$$

ح ــ اگر جریان الکتریکی متغیر $a_k\cos kx$ از سیمی با مقاومت R بگذرد انرژی مصرف شده در فاصله زمانی $[-\pi,+\pi]$ چنین است:

$$A_k = Ra_k^2\pi$$

و همچنین ....

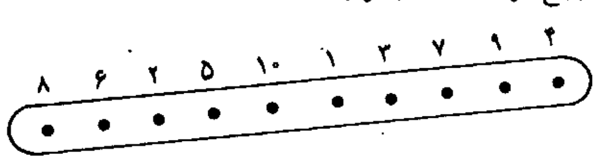
پس مجموع انرژیهای مصرف شده به‌وسیله جریانهای مذکور از سیمهایی با مقاومت R در فاصله زمانی $[-\pi,+\pi]$ چنین است:

$$\frac{1}{2}Ra_0^2\pi + \underset{k\to\infty}{\text{حد}} \sum_{k=1}^{\infty} R(a_k^2+b_k^2)\pi \qquad (2)$$

اکنون یک جریان الکتریکی $i = f(x)$ درنظر می‌گیریم ($f(x)$ همان تابعی است که بسط فوریهٔ آن مورد مطالعه است و در دستور (۱) ذکر کردیم). انرژی مصرف شده از عبور جریان $i = f(x)$ از سیمی با مقاومت R در فاصله زمانی $[-\pi,+\pi]$ مقداری است محدود؛ زیرا تابع $f(x)$ پیوسته است. مقدار این انرژی مساوی است با مقدار انرژی که در عبارت (۲) ذکر شد پس $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)$ هنگامی که $k\to\infty$ دارای حد متناهی است.

تفریح اندیشه ۲

به ترتیب نشان داده شده، ده جعبه روی یک استوانهٔ شیبدار متحرک چیده شده است. برای مرتب کردن این جعبه‌ها به ترتیب اعداد و از چپ به راست از یک بازوی مکانیکی استفاده می‌شود که برای این منظور می‌تواند هر بار، حداکثر سه جعبه را که کنار هم قرار دارند به منتهی‌الیه ریل منتقل کرده، آنها را در جای خود بیندازد. آیا می‌توانید در پنج حرکت جعبه‌ها را مرتب کنید؟



جواب در صفحهٔ ۸۸

فضای بـــــردازی[1] (قسمت اول)

(ریاضیات جدید سوّم ریاضی)

• حمیدرضا امیری

پیش از این با مفهوم گروه آشنا شده‌ایم و می‌دانیم، گروه، یک دستگاهی ریاضی متشکل از یک مجموعهٔ ناتهی مانند G است و یک عمل دو تایی مانند $*$ که ۳ خاصیت یا ویژگیِ شرکت پذیری، عضو خنثی و عضو متقابل بر این دستگاه حاکم می‌باشد. و به یاد داریم که اگر گروه (G و $*$) علاوه بر خواص گروه دارای خاصیت جابه‌جایی نیز باشد، آن را یک گروه جابه‌جایی یا آبلی می‌نامیدیم. به عنوان مثال و به عنوان یادآوری، ثابت می‌کنیم، Q^+ به همراه عملِ $*$ که در زیر تعریف می‌شود یک گروه آبلی است:

$$\forall\ a,b \in Q^+ \quad , \quad a*b = \frac{a.b}{۳}$$

$$۱)\ \ a*(b*c) = a*(\frac{b.c}{۳}) = \frac{a.(\frac{b.c}{۳})}{۳} = \frac{a.(b.c)}{۹} \quad (۱)$$

$$(a*b)*c = (\frac{a.b}{۳})*c = \frac{(\frac{a.b}{۳}).c}{۳} = \frac{(a.b).c}{۹} = \frac{a.(b.c)}{۹} \quad (۲)$$

شرکت پذیری $\quad (۱),(۲) \Rightarrow a*(b*c) = (a*b)*c$

تعریف عضو خنثی $\quad ۲)\ \exists! e \in G; \forall a \in G; a*e = e*a = a$

طبق تعریف عضو خنثی داریم:

$$a*e = e*a = a$$

$$a*e = a \Rightarrow \frac{a.e}{۳} = a \Rightarrow a.e = ۳a \xrightarrow{a \neq ۰} e = ۳$$

اگر e را از رابطهٔ $e*a = a$ نیز به دست آوریم، خواهیم داشت:

$$\boxed{e = ۳}$$

تعریف عضو متقابل $\quad ۳)\ \forall a \in G, \exists! a' \in G, a*a' = a'*a = e$

$$a*a' = e = ۳ \Rightarrow \frac{a.a'}{۳} = ۳ \Rightarrow a.a' = ۹ \xrightarrow{a \neq ۰} a' = \frac{۹}{a}$$

اگر از رابطهٔ $a'*a = e$ نیز استفاده کنیم a' بر حسب a همان $\frac{۹}{a}$ خواهد بود. بنابراین تا این مرحله ثابت شد که $(Q^+,*)$ یک گروه است و چون داریم: (به ازای هر $a,b \in Q^+$)

$$a*b = \frac{a.b}{۳} = \frac{b.a}{۳} = b*a$$

پس، گروه $(Q^+,*)$ آبلی می‌باشد.

همچنین در یکی دیگر از شماره‌های برهان (برهان ۸) به اندازهٔ کافی بر روی مفاهیم **حلقه** و **میدان** صحبت شد و شما بخصوص با مفهوم میدان آشنا هستید و می‌دانید میدان نیز دستگاهی است ریاضی متشکل از مجموعه‌ای ناتهی مانند F و دو عمل مانند $+$ و $\times$ که اگر اولاً، $(F,+)$ گروه آبلی باشد. ثانیاً، $(F-\{۰\},\times)$ گروه آبلی باشد و ثالثاً، عمل دوم یعنی $\times$ نسبت به عمل اول یعنی $+$ از چپ و راست توزیع‌پذیر باشد، در این صورت $(F,+,\times)$ را یک میدان می‌نامند.

به عنوان مثال اگر فرض کنیم، $F = \mathbb{R}$ (مجموعهٔ اعداد حقیقی) وعمل اول را جمع معمولی و عمل دوم را ضرب معمولی در نظر بگیریم، در این صورت مجموعهٔ اعداد حقیقی به همراه جمع و ضرب معمولی تشکیل یک میدان می‌دهد.

حال می‌خواهیم بین اعضای یک **گروه جابجایی** و یک **میدان**، عملی که آن را عمل ضرب اسکالر می‌نامیم، تعریف کرده و با بیان چهار شرط دیگر بر روی اعضای این دو مجموعه (گروه آبلی و میدان) ، یک دستگاه ریاضی به نام **فضای برداری** تعریف می‌کنیم.

---

۱. Vector Space

تعریف: فرض کنیم $(V,\oplus)$ یک گروه آبلی باشد و فرض کنیم F یک میدان بوده، عمل ضرب اسکالر بین اعضای F و V به صورتی تعریف شده باشد، که این عمل در V بسته باشد یعنی،

$$\forall a\in F, \forall v\in V, a.v\in V$$

در این صورت هرگاه چهار شرط زیر نیز همگی برقرار باشند، می‌گوییم مجموعهٔ V یک **فضای برداری** روی میدان $(F,+,\times)$ تشکیل داده است.

1) $\forall v\in V, 1.V=V$

(در این شرط، ۱ عضو خنثی در میدان F نسبت به عمل دوم یا ضرب می باشد)

2) $\forall a,b\in F, \forall v\in V, (a+b).V=a.v\oplus b.v$

3) $\forall a\in F, \forall v_1,v_2\in V, a.(v_1\oplus v_2)=a.v_1\oplus a.v_2$

4) $\forall a,b\in F, \forall v\in V, (a\times b).v=a.(b.v)$

تذکر: از این به بعد در سراسر این مقاله میدانِ F را میدان اعداد حقیقی همراه با جمع و ضرب معمولی در نظر گرفته، فضاهای برداری روی این میدان یعنی، $\mathbb{R}$ را، *فضای برداریِ حقیقی* می‌نامیم.

قرارداد: برای راحتی، عملِ تعریف شده روی گروهِ V را به صورت + نمایش می‌دهیم که نماد + لزوماً جمع معمولی نیست زیرا ممکن است V به طور مثال مجموعهٔ ماتریسها باشد که در این صورت بدیهی است منظور از گروهِ $(V,+)$، گروه ماتریسها همراه با عمل جمع ماتریسی خواهد بود.

پس هرگاه V روی $\mathbb{R}$ یک فضای برداری باشد می‌نویسیم (ض ا و + و V) یک فضای برداریِ حقیقی است. (ض ا ، یعنی ضرب اسکالر) .

مثال ۱: اگر فرض کنیم $V=\{(a,b,c)|a,b,c\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}^3$ در این صورت با تعاریف جمع و ضرب اسکالر که در ذیل می‌آید، V روی $\mathbb{R}$ یک فضای برداری تشکیل می‌دهد.

$$(a,b,c)+(a',b',c')=(a+a',b+b',c+c')$$

$$r.(a,b,c)=(ra,rb,rc)$$

۱ ــ واضح است که عمل + در V شرکت پذیر است.

۲ ــ عضو خنثی در V نسبت به + سه تاییِ مرتبِ $(0,0,0)$ می‌باشد.

۳ ــ متقابلِ جمعی (a,b,c) عبارت است از $(-a,-b,-c)$ زیرا: $(a,b,c)+(-a,-b,-c)=(0,0,0)=$ عضو خنثی

۴ ــ عمل + در V تعویض‌پذیر است زیرا:

$$(a,b,c)+(a',b',c')=(a+a',b+b',c+c')=$$
$$(a'+a,b'+b,c'+c)=(a',b',c')+(a,b,c)$$

۵ ــ عمل ضرب اسکالر در V بسته است یعنی

$$r(a,b,c)=(ra,rb,rc)\in V$$

۶ ــ اگر (a,b,c) عضو دلخواهی از V باشد داریم:

$$1.(a,b,c)=(1a,1b,1c)=(a,b,c)$$

7) $(r_1+r_2).\underbrace{(a,b,c)}_{V}=((r_1+r_2)a,(r_1+r_2)b,(r_1+r_2)c)$

$$=((r_1a+r_2a),(r_1b+r_2b),(r_1c+r_2c))$$
$$=(r_1a,r_1b,r_1c)+(r_2a,r_2b,r_2c)$$
$$=r_1.\underbrace{(a,b,c)}_{V}+r_2.\underbrace{(a,b,c)}_{V}$$

8) $r[\underbrace{(a,b,c)}_{V_1}+\underbrace{(a',b',c')}_{V_2}]$

$$=r((a+a'),(b+b'),(c+c'))$$
$$=(r(a+a'),r(b+b'),r(c+c'))$$
$$=((ra+ra'),(rb+rb'),(rc+rc'))$$
$$=(ra,rb,rc)+(ra',rb',rc')$$
$$=r.\underbrace{(a,b,c)}_{V_1}+r.\underbrace{(a',b',c')}_{V_2}$$

9) $(r_1r_2).\underbrace{(a,b,c)}_{V}=((r_1r_2)a,(r_1r_2)b,(r_1r_2)c)$

$$=(r_1(r_2a),r_1(r_2b),r_1(r_2c))$$
$$=r_1.(r_2a,r_2b,r_2c)=r_1.[r_2.\underbrace{(a,b,c)}_{V}]$$

بنابراین V روی $\mathbb{R}$ یک فضای برداری تشکیل می‌دهد.

(در حالت کُلی نیز می‌توان ثابت کرد مجموعهٔ همهٔ n تایی‌های مرتب با درآیه‌های حقیقی یعنی $\mathbb{R}^n$ یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ تشکیل می‌دهد).

مثال ۲: آیا $V=\{(a,b,c)|a,b,c\in Q\}$ روی $\mathbb{R}$ فضای برداری تشکیل می‌دهد؟

خیر، علی‌رغم آن که همهٔ خواص گروه و شرایط چهارگانهٔ فضای‌برداری برقرار است، اما به دلیل این که ضرب اسکالر در V بسته نیست، V تشکیل فضای برداری نمی‌دهد به طور مثال:

$$\sqrt{2}\in\mathbb{R}, (1,2,3)\in V$$
$$\sqrt{2}(1,2,3)=(\sqrt{2},2\sqrt{2},3\sqrt{2})\notin V$$

(درآیه‌های سه‌تایی‌های مرتب در V باید اعداد گویا باشند).

مثال ۳: اگر فرض کنیم $V=\mathbb{R}$ واضح است که مجموعهٔ اعداد حقیقی همراه با عمل جمع معمولی گروه آبلی می‌باشد، یعنی $(\mathbb{R},+)$ گروه جابه‌جایی است؛ و در این مثال چون ضرب اسکالر بین اعضای $\mathbb{R}$ و خودش تعریف می‌شود، همان ضرب معمولی است که همهٔ خواص دیگر نیز جزو خواص دستگاه اعداد حقیقی است. پس $\mathbb{R}$ روی خودش یک فضای برداری تشکیل می‌دهد.

مثال ۴: اگر فرض کنیم $V=Q$ در این صورت Q (مجموعهٔ اعداد گویا) روی $\mathbb{R}$ فضای برداری تشکیل نمی‌دهد، زیرا ضرب اسکالری که بین $\mathbb{R}$ و Q تعریف می‌شود همان ضرب معمولی است و این ضرب در Q بسته نیست، به طور مثال $\sqrt{2}\in\mathbb{R}$ و $1\in Q$ ولی $\sqrt{2}\times 1=\sqrt{2}\notin Q$.

مثال ۵: با فرض $V=\mathbb{R}$ مشاهده می‌شود که $\mathbb{R}$ روی میدان اعداد گویا یعنی Q یک فضای برداری تشکیل می‌دهد.

مثال ۶: اگر $V=Q$ در این صورت Q روی خودش یک فضای‌برداری تشکیل می‌دهد ($(Q,+,\cdot)$ یک میدان است).

تمرین: ثابت کنید هر میدان مانند F روی خودش یک فضای‌برداری تشکیل می‌دهد.

مثال ۷: اگر فرض کنیم $V=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix} \middle| a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$ در این صورت V (مجموعهٔ ماتریسهای 2×2 با درایه‌های حقیقی) روی $\mathbb{R}$ تشکیل فضای برداری می‌دهد. (این مثال به طورمشروح در کتاب درسی بررسی شده است) البته در حالت کلی نیز می‌توان ثابت کرد مجموعهٔ ماتریسهای $m\times n$ روی $\mathbb{R}$ یک فضای برداری تشکیل می‌دهند.

در این قسمت توجه شما را به زیرمجموعه‌های خاصی از یک فضای برداری جلب می‌کنیم، فرض کنیم V یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد، و V' زیر مجموعه‌ای ناتهی از V بوده و با همان دو عمل جمع و ضرب اسکالری که V فضای برداری تشکیل داده، V' نیز یک فضای برداری تشکیل دهد، در این صورت V' را یک **زیر فضای**، فضای برداری V می‌نامند.

با توجه به تعریف زیر فضا، مشاهده می‌شود که زیر فضای یک فضای برداری خودش یک فضای برداری است.

از طرفی اگر V' زیر فضای، فضای برداری V باشد بسیاری از خواص فضای برداری V به دلیل آن که روی همهٔ اعضای V و بخصوص اعضای V'، تعریف شده است، به V' القاء می شود، مانند خواص شرکت‌پذیری و جابجایی در گروه و چهار خاصیت فضای‌برداری، از طرفی سه خاصیت بسته بودن نسبت به جمع، عضو خنثی و عضو متقابل در گروه و همچنین خاصیت بسته بودن نسبت به ضرب اسکالر از V به V' القاء نمی‌شود، که اگر دو خاصیت بسته بودن نسبت به جمع و ضرب اسکالر را برای V' در نظر بگیریم، می‌توانیم ثابت کنیم دو خاصیت دیگر یعنی عضو خنثی و متقابل را براحتی می‌توان از آن دو نتیجه گرفت که بر این اساس قضیهٔ زیر بیان شده و اثبات زیر فضا بودن را ساده می‌کند.

قضیه: اگر V یک فضای برداری بوده و V' زیر مجموعهٔ ناتهی V باشد، در این صورت «شرط لازم و کافی برای آن که V' زیرفضای V باشد، آن است که V' نسبت به هر دو عمل جمع و ضرب اسکالر بسته باشد» (اثبات در کتاب درسی موجود است)

مثال ۸: ثابت کنید $H=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c\end{bmatrix} \middle| a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$ یک زیر فضای فضای برداری ماتریسهای 2×2 همراه با دو عمل جمع ماتریسی و ضرب عدد در ماتریس، است. برای اثبات کافی است ثابت کنیم H، که زیر مجموعهٔ ماتریسهای 2×2 و ناتهی نیز هست، نسبت به جمع و ضرب‌اسکالر بسته است.

(در این جا ضرب اسکالر همان ضرب عدد در ماتریس است)

$$H\subseteq M_{2\times 2},\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}\in H\Rightarrow H\neq\varnothing$$

الف) $$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ 0+0 & c_1+c_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & c_3\end{bmatrix}\in H$$

ب) $$r\in\mathbb{R},\ r\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ra & rb \\ r0 & rc\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1\end{bmatrix}\in H$$

مثال ۹: نشان دهید مجموعهٔ $H=\{(x,y,z)|2x-y+z=0\}$ یک زیر فضای $\mathbb{R}^3$ است.

واضح است که $H\subseteq\mathbb{R}^3,(0,0,0)\in H\Rightarrow H\neq\varnothing$

الف) $$(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\in H\Rightarrow$$

$$2x_1-y_1+z_1=0\wedge 2x_2-y_2+z_2=0$$

$$(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)\in H$$

زیرا: $$2(x_1+x_2)-(y_1+y_2)+(z_1+z_2)=$$

$$(2x_1-y_1+z_1)+(2x_2-y_2+z_2)=0+0=0$$

(شرط این که سه تایی مرتبی در H باشد با توجه به تعریف مجموعهٔ H، می‌بایست دو برابر مؤلفهٔ اول منهای مؤلفهٔ دوم بعلاوهٔ مؤلفهٔ سوم آن، مساوی با صفر شود)

ب) فرض کنیم $r \in \mathbb{R}, (x,y,z) \in H \Rightarrow 2x - y + z = 0$

$r.(x,y,z) = (rx, ry, rz) \in H$

زیرا: $2(rx) - (ry) + (rz) = r(2x - y + z) = r0 = 0$

مثال ۱۰: نشان دهید، اگر H و K هر دو زیر فضای، فضای برداری V باشند در این صورت $(H\cap K)$ نیز زیر فضای V است. با یک مثال نقض این حکم را در مورد $(H\cup K)$ (در حالت کلی) رد کنید.

فرض کنیم H و K زیر فضای V باشند پس هردو فضای برداری بوده و می‌بایست شامل بردار صفر یعنی $\bar{o}$ باشند (بردار صفر یا $\bar{o}$ همان عضو خنثی در گروه آبلی است).

$\bar{o} \in H, \bar{o} \in K \Rightarrow \bar{o} \in (H\cap K) \Rightarrow (H\cap K) \neq \varnothing$

H زیر فضای V است $\Rightarrow H \subseteq V, H\cap K \subseteq H \Rightarrow (H\cap K) \subseteq V$

الف) فرض کنیم $x,y \in (H\cap K) \Rightarrow x,y \in H \wedge x,y \in K$

$\xRightarrow{\text{H و K زیر فضا هستند}} x+y \in H \wedge x+y \in K \Rightarrow (x+y) \in (H\cap K)$

ب) فرض کنیم $r \in \mathbb{R}, x \in (H\cap K) \Rightarrow x \in H \wedge x \in K$

H و K زیر فضا هستند $\Rightarrow rx \in H \wedge rx \in K \Rightarrow rx \in (H\cap K)$

مثال نقض در حالت اجتماع دو زیر فضا: مشابه آنچه در مثال ۹ ثابت کردیم براحتی می‌توان نشان داد که $H = \{(x,y) | 2x - y = 0\}$ و $K = \{(x,y) | x + 2y = 0\}$ هر دو زیر فضای $\mathbb{R}^2$ هستند. حال $(H\cup K)$ را تشکیل می‌دهیم که خواهیم داشت:

$$H\cup K = \{(x,y) | (x,y)\in H \vee (x,y)\in K\}$$
$$= \{(x,y) | 2x - y = 0 \vee x + 2y = 0\}$$

حال کافی است دو عضو از $(H\cup K)$ طوری انتخاب کنیم که حاصل جمع آن دو عضو، عضو $(H\cup K)$ نباشد (یعنی نسبت به عمل جمع بسته نباشد) و با توجه به تعریف $(H\cup K)$ اگر زوج مرتبی یکی از دو خاصیت $2x - y = 0$ یا $x + 2y = 0$ را داشته باشد عضو آن بوده و در صورتی که هیچ کدام از این دو خاصیت را نداشته باشد، عضو $(H\cup K)$ نیست.

$(1,2) \in (H\cup K)$ (زیرا: $2\times 1 - 2 = 0$)

$(-2,1) \in (H\cup K)$ (زیرا: $-2 + 2\times 1 = 0$)

$(1,2) + (-2,1) = (-1,3) \notin (H\cup K)$

زیرا: $2\times(-1) - 3 = -5 \neq 0$ و $-1 + 2\times 3 = 5 \neq 0$

مثال ۱۱: اگر B_0 ماتریسی ثابت از مجموعهٔ ماتریسهای $n\times n$ باشد، نشان دهید مجموعهٔ $H = \{A | AB_0 = B_0A\}$ یک زیر فضای، فضای برداری ماتریسهای $n\times n$ است. (ضرب ماتریسها در جمع آنها توزیع‌پذیر است.) واضح است که $H \neq \varnothing$ زیرا $\bar{o} = \bar{o}B_0 = B_0\bar{o}$ پس $\bar{o} \in H$.

از طرفی همواره $H \subseteq M_{n\times n}$ بنابراین کافی است ثابت کنیم H نسبت به جمع و ضرب اسکالر (ضرب عدد در ماتریس) بسته است.

الف) فرض کنیم $A_1, A_2 \in H \Rightarrow \begin{cases} A_1B_0 = B_0A_1 \\ A_2B_0 = B_0A_2 \end{cases}$

$(A_1 + A_2)B_0 = A_1B_0 + A_2B_0 =$

$B_0A_1 + B_0A_2 = B_0(A_1 + A_2) \Rightarrow (A_1 + A_2) \in H$

ب) فرض کنیم $r \in \mathbb{R}, A \in H \Rightarrow AB_0 = B_0A$

$\underline{(rA)B_0} = r(AB_0) = r(B_0A) = (rB_0)A = (B_0r)A = \underline{B_0(rA)}$

$\Rightarrow rA \in H$

مثال ۱۲: نشان دهید خاصیت جابه‌جایی نسبت به عمل جمع در یک فضای برداری را می‌توان از سایر اصول نتیجه گرفت.

فرض کنیم V یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد و فرض کنیم x و y دو عضو دلخواه از V باشند، داریم:

(1) $(1+1)(x+y) = (1+1)x + (1+1)y = x + x + y + y$

از طرف دیگر داریم:

(2) $(1+1)(x+y) = 1(x+y) + 1(x+y) = x + y + x + y$

$(1),(2) \Rightarrow x + x + y + y = x + y + x + y$

و با توجه به قانون حذف در گروه $(V,+)$ داریم:

$x + y = y + x$

حال که خواص فضای برداری را بررسی کرده، زیر فضاها را نیز تا حدودی شناختیم، آمادگی داریم تا به داخل این ساختمان ریاضی قدم گذاشته و اجزای تشکیل دهندهٔ این فضا را که همان بردارهای فضای‌برداری هستند مورد تجزیه و تحلیل قرار دهیم؛ و این خود مستلزم مقاله‌ای مفصل و مجزا است که ان‌شاء ا... در شمارهٔ بعد خواهد آمد.

خطهای راست و صفحه‌های عمود بر هم در فضا

پرویز شهریاری

برای این که به درس هندسهٔ فضایی مسلط باشیم و از عهدهٔ حل مسأله‌های مربوط به آن برآییم، باید به سه نکتهٔ اصلی توجه کنیم: تمرین ذهنی برای تجسم شکلهای فضایی؛ رسم کم وبیش درست شکل فضایی برصفحه و، سرانجام، تسلط براثبات قضیه‌ها. یکی از اساسیترین بحثهای کلیدی در هندسهٔ فضایی، بحث مربوط به «عمودبودن» در فضاست و، این مقاله کوتاه، به همین موضوع اختصاص دارد. استدلالها را تعقیب کنید، هر جا لازم است، شکل مربوط را رسم کنید (در برخی موردها، شکل را رسم نکرده‌ایم) و برای حل مسأله‌هایی که در این جا حل نکرده‌ایم، تلاش کنید. مقاله، باشیوه‌ای متفاوت باکتاب درستی تنظیم شده است و، بنابراین می‌تواند سودمند باشد.

۱. معیار شناسایی، درحالتی‌که خط راستی بریک صفحه عمود است

تعریف. خط راست را وقتی عمود برصفحه گویند که برهر خط راستی از صفحه عمودباشد.

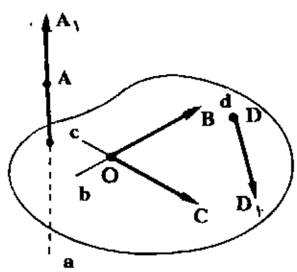
وقتی که خط راست a و صفحهٔ α برهم عمود باشند، آن را بانماد $a \perp \alpha$ یا $\alpha \perp a$ نشان می‌دهند.

قضیه ۱.(معیار عمود بودن خط راست وصفحه بریکدیگر). اگر خط راستی بردوخط راست متقاطع واقع برصفحه عمود باشد، آن وقت برصفحه عمود است.

فرض: $b \cap c = 0$ ،$b \subset \alpha$ ،$c \subset \alpha$ ،$a \perp b$ ،$a \perp c$

حکم: $a \perp \alpha$

شکل (۱)



اثبات. خط راست دلخواه d را، واقع برصفحهٔ α، درنظر می‌گیریم (شکل ۱). روی خطهای راست b و c نقطه‌های B و C، متفاوت بانقطهٔ O ، و روی خطهای راست a و d، به‌ترتیب، نقطه‌های متمایز A و A_1، D و D_1 را انتخاب می‌کنیم. این بردارها را درنظر می‌گیریم:

$$\vec{AA_1} = \mathbf{a},\ \vec{OB} = \mathbf{b},\ \vec{OC} = \mathbf{c},\ \vec{DD_1} = \mathbf{d}$$

بردار **d** را برمبنای **(b,c)** تجزیه می‌کنیم، یعنی بردار **d** را به دوبرداری تجزیه می‌کنیم که، یکی از آنها درجهت بردار **b** و دیگری درجهت‌بردار **c** باشد:

$$\mathbf{d} = x\mathbf{b} + y\mathbf{c}$$

دوطرف این برابری را، دربردار **a**، ضرب اسکالر (عددی) می‌کنیم:

$$\mathbf{d.a} = x\mathbf{b.a} + y\mathbf{c.a} \qquad (1)$$

چون بنابر فرض $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ و $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}$، بنابراین $\mathbf{b.a} = 0$ و $\mathbf{c.a} = 0$. بنابراین، برابری (۱) به‌صورت $\mathbf{d.a} = 0$ درمی‌آید و این به‌معنای آن است که $\mathbf{a} \perp \mathbf{d}$ یا $a \perp d$؛ درنتیجه، باتوجه به تعریف خط راست عمود برصفحه، داریم $a \perp \alpha$.

مسأله. ثابت کنید، بتغییر مکان فضای عمود بودن خط راست

برصفحه را حفظ می‌کند.

حل. خط راست a و صفحه α را عمودبرهم در نظر می‌گیریم. هر تغییر مکان F، موجب می‌شود تا خط راست a به خط راست a_1، و صفحهٔ α به صفحه α_1 تبدیل شود. باید ثابت کنیم $a_1 \perp \alpha_1$.

دوخط راست متقاطع b و c را روی صفحهٔ α رسم می‌کنیم. ضمن تغییر مکان F، این دوخط راست، به صورت خطهای راست متقاطع b_1 و c_1 درمی‌آیند. بنابر تعریف خط راست عمود برصفحه داریم: $a \perp b$ و $a \perp c$. تغییر مکان، زاویهٔ بین خطهای راست را تغییر نمی‌دهد، بنابراین $a_1 \perp b_1$ و $a_1 \perp c_1$. به این ترتیب، بنابر معیار عمود بودن خط راست و صفحه $a_1 \perp \alpha_1$.

پرسشها و مسأله‌ها

۱. ۱) وجه‌های DAB و DAC از چهار وجهی ABCD، مثلثهای قائم الزاویه‌ای، بازاویهٔ قائمه در رأس A، هستند. ثابت کنید، یالهای BC و AD برهم عمودند.

۲) مربع ABCD و خط راست SD عمود برصفحهٔ مربع مفروض‌اند. اگر بدانیم:

$$|AB| = |SD| = a$$

فاصلهٔ نقطهٔ S را از نقطه‌های A، B وC پیدا کنید.

۲. ۱) مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ مفروض است. ثابت کنید، صفحه‌ای که از نقطه‌های A، B_1 و D_1 می‌گذرد، برخط راست A_1C (قطر مکعب) عمود است.

۲) مکعب مستطیل $ABCDA_1B_1C_1D_1$ مفروض است؛ درضمن

$$|AB| = 2|BC|,\ |AA_1| = |BC|$$

آیا خط راست BD_1 برصفحهٔ A_1C_1D عموداست؟

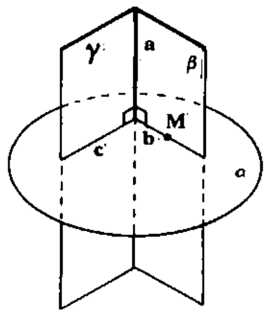
۳. ۱) ازنقطه‌ای واقع بریک خط راست، سه خط راست گذرانده‌ایم که، هر یک از آنها، برخط راست مفروضی عمود است. ثابت کنید، این سه خط راست، روی یک صفحه واقع‌اند.

۲) مکان خطهای راستی را پیدا کنید که از نقطه‌ای واقع بریک خط راست، عمود برآن رسم شده‌اند.

۲. وجود خط راست و صفحهٔ عمود برهم

مسألهٔ ۱. ثابت کنید، صفحه‌ای وجوددارد که از نقطهٔ مفروض می‌گذرد و برخط راست مفروض عموداست.

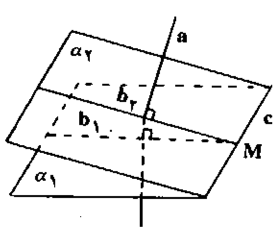
شکل (۲)



حل. نقطهٔ M و خط راست a را در نظر می‌گیریم (شکل ۲). صفحهٔ β را از M و a می‌گذرانیم (اگر $M \in a$، آن وقت β، صفحهٔ دلخواهی است که از a می‌گذرد). به‌جز این، صفحهٔ γ راهم، غیراز β، از خط راست a عبور می‌دهیم. از نقطهٔ M و در صفحهٔ β، خط راست b را عمود بر a، و از نقطه $O=b\cap a$ و درصفحه γ، خط راست c را، بازهم عمود بر a، رسم می‌کنیم. سپس، از b و c صفحه α را می‌گذرانیم. بنابر معیارعمود بودن خط راست و صفحه داریم $a \perp \alpha$. یعنی وجود خط راست و صفحهٔ عمود برهم، ثابت شد.

یادداشت. آیا ازنقطه M می‌توان صفحهٔ دیگری، غیراز صفحهٔ α، عمود برخط راست a رسم کرد؟ فرض می‌کنیم بتوان دوصفحه متمایز α_1 و α_2 را، از نقطهٔ M، عمود برخط راست a رسم کرد.

شکل (۳)

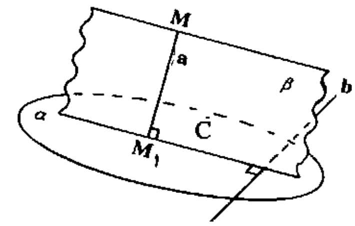


(شکل ۳)؛ c را خط راست فصل مشترک این دو صفحه می‌گیریم. از خط راست a ونقطه M ($M\in c$) صفحهٔ β را می‌گذرانیم و فصل مشترک آن را باصفحه‌های α_1 و α_2، به‌ترتیب، b_1 و b_2 می‌نامیم. بنابر تعریف خط راست عمود برصفحه، باید خط راست a بردوخط راست b_1 و b_2 عمود باشد؛ یعنی درصفحهٔ β، توانسته‌ایم از نقطهٔ M، دوخط راست عمود برخط راست a رسم کنیم و از هندسهٔ مسطحه می‌دانیم که این، ممکن نیست. به این ترتیب، به این نتیجه می‌رسیم که از هر نقطه، تنها یک صفحه می‌توان برخط راست مفروض، عمود کرد.

مسألهٔ ۲. ثابت کنید، از هرنقطه، تنها یک خط راست می‌توان

بر صفحه مفروض، عمود کرد.

شکل (۴)



حل. نقطه M وصفحهٔ α را مفروض می‌گیریم (شکل ۴). خط راست مجهول باید از نقطه M بگذرد و بردوخط راست متقاطع از صفحه α عمودباشد.

در صفحهٔ α، خط راست دلخواه b را رسم می‌کنیم و از نقطه M، صفحهٔ β را عمود برخط راست b درنظر می‌گیریم (مسألهٔ ۱)، و فرض می‌کنیم: $\alpha \cap \beta = c$. درصفحهٔ β و از نقطهٔ M، خط راست a را، عمودبرخط راست c رسم می‌کنیم.

چون $b \perp \beta$ و $a \subset \beta$، پس $b \perp a$، به جز این $a \perp c$. درنتیجه $a \perp \alpha$، a، خط راست مجهول است.

یادداشت. اکنون منحصر به فرد بودن خط راست a را ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم، از نقطهٔ M، دو خط راست مختلف a و a_1، عمود برصفحهٔ α رسم شده باشند. از a و a_1، صفحهٔ β را می‌گذرانیم تا صفحهٔ α را در خط راست c قطع کند. دراین صورت، در صفحهٔ β، از یک نقطه، دوخط راست مختلف a و a_1 عمود بر c رسم شده‌اند که باآنچه در هندسهٔ مسطحه خوانده‌ایم، متناقض است.

به این ترتیب، از نقطه مفروض می‌توان یک، و تنها یک خط راست، عمود برصفحهٔ مفروض رسم کرد.

خط راست عمود برصفحه را، به‌صورت کوتاه، عمود برصفحه می‌نامیم.

پرسشها و مسأله‌ها

۴. مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ و نقطهٔ M متعلق به پاره‌خط راست AC مفروض‌اند. مقطع مکعب را، باصفحه‌ای که از نقطهٔ M و خط راست عمود بر AC می‌گذرد، پیدا کنید.

۵. چهار وجهی ABCD داده‌شده‌است که در آن

$$\hat{ACD} = \hat{BCD} = 90^\circ$$

۱) مقطع چهاروجهی را باصفحه‌ای پیدا کنید که از نقطهٔ $M \in [DC]$ و عمود براین یال می‌گذرد.

۲) مساحت این مقطع را محاسبه کنید، به‌شرطی که M، وسط یال DC باشد و درضمن، داشته باشیم:

$$|AB| = |BC| = |AC| = a$$

۶. مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ داده‌شده‌است. ۱) ثابت کنید، خط راست AC، برصفحهٔ BDD_1 عمود است.

۲) خط راستی بسازید که از نقطهٔ M واقع برپاره خط راست BC بگذرد و بر صفحهٔ ACC_1 عمود باشد.

۷. قاعدهٔ منشور قائم $ABCA_1B_1C_1$، مثلث متساوی الساقینی است که درآن $|AC| = |AB|$. ۱) ثابت کنید، ارتفاع این مثلث برصفحهٔ BCC_1 عموداست.

۲) خط راستی بسازید که از نقطهٔ $M \in [AB]$ بگذرد و برصفحهٔ BCC_1 عمود باشد.

۳. رابطهٔ بین عمود بودن و موازی بودن درفضا

در هندسهٔ مسطحه، قضیه‌هایی را دیده‌ایم که به رابطهٔ بین عمود بودن و موازی بودن خطهای راست مربوط می‌شدند. مثلاً، اگر دوخط راست، برخط راست سوم عمود باشند، این دوخط راست باهم موازی‌اند. قضیه‌های مشابهی، درهندسهٔ فضایی، برای خطهای راست و صفحه وجود دارد.

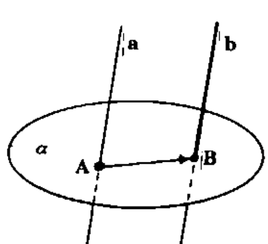
قضیهٔ ۲. اگر یکی از دوخط راست موازی، برصفحه‌ای عمود باشد، آن وقت خط راست دیگر هم براین صفحه عمود است.

فرض: $a \parallel b$، $a \perp \alpha$.

حکم: $b \perp \alpha$.

اثبات. فرض کنید $a \cap \alpha = A$ و $b \cap \alpha = B$ (شکل ۵). انتقال به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{AB}$، صفحهٔ α رابرخودش و خط راست a را برخط

شکل (۵)



راست b می‌نگارد. ولی انتقال، یک جابجایی (= تغییرمکان) است و،

بنابراین، عمود بودن خط راست و صفحه را برهم، حفظ می‌کند (بند ۱، مسأله) ؛ یعنی $b \perp \alpha$.

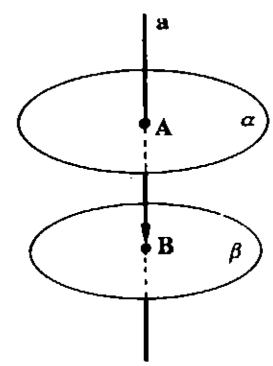
قضیهٔ ۳. اگر خط راستی، بریکی از دوصفحه موازی عمود باشد، بردیگری هم عموداست.

فرض: $a \perp \alpha$ ، $\alpha \parallel \beta$.

حکم: $a \perp \beta$.

اثبات. فرض کنید $a \cap \alpha = A$ و $a \cap \beta = B$ (شکل ۶). انتقال به‌اندازهٔ بردار $\overrightarrow{AB}$ ، خط راست a رابرخودش و صفحهٔ α را برصفحهٔ β می‌نگارد؛ و عمود بودن خط و صفحه بریکدیگر، ضمن انتقال، محفوظ می‌ماند، یعنی $a \perp \beta$.

شکل (۶)



قضیه‌های عکس این دوقضیه هم درست‌اند.

قضیه ۴. اگر دوخط راست بریک صفحه عمود باشند، باهم موازی‌اند (شکل ۵).

قضیه ۵. اگر دو صفحه بریک خط راست عمود باشند، باهم موازی‌اند (شکل ۶). اثبات این دوقضیه، شبیه اثبات قضیه‌های ۲ و ۳اند.

پرسشها و مسأله‌ها

۸. ۱) منشور قائم $ABCA_1B_1C_1$ مفروض است. از نقطه‌ای واقع برضلع مثلث $A_1B_1C_1$ ،عمودی برصفحهٔ ABC رسم کنید. ثابت کنید، این عمود، ضلع مثلث ABC راقطع می‌کند.

۲) مقطع این منشور را باصفحه‌ای پیداکنید که از نقطه‌ای واقع بریال جانبی آن وخط راستی عمود به‌این یال می‌گذرد.

۹. از نقطه‌های A وB ، که در دوطرف صفحهٔ α واقع‌اند، عمودهای $[AA_1]$ و $[BB_1]$ را برصفحهٔ α رسم کرده‌ایم ($A_1 \in \alpha$ ، $B_1 \in \alpha$ ، $A_1 \neq B_1$). مطلوب است فاصلهٔ از نقطهٔ $M=(AB)\cap(A_1B_1)$ تانقطه‌های A و B_1 ، به شرطی که $|AA_1|=a$ ، $|BB_1|=b$ ، $|AB|=c$.

۱۰. صفحه‌های متمایز α و β، موازی با هم‌اند. از دو نقطهٔ M و N واقع برصفحهٔ α، عمودهایی برصفحهٔ βرسم کرده‌ایم که آن را، به ترتیب، در M_1 و N_1 قطع کرده‌اند. ثابت کنید $|MM_1| = |NN_1|$.

ادب ریاضی

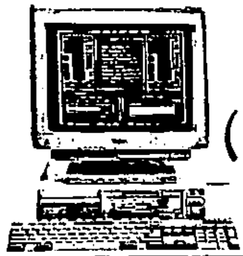
به‌نام خداوند بخشایندهٔ مهربان. این کتابی است که محمدبن موسی خوارزمی پی افکنده و در سرآغاز چنین گوید: خدای را سپاس بر نعمتهایش، بدان گونه که شایستهٔ او است؛ سپاس آن چنان که اگر برآیینی که بر بندگان ستایشگر او فرض شده انجام شود، «شکر» نامیده می‌شود و باعث افزونی نعمت می‌گردد و ...

چون به مشکلات و نیازمندیهای مردم در مورد علم حساب نگریستم، دریافتم که تمام آن مشکلات در عدد خلاصه شده؛ و فهمیدم که تمام اعداد از واحد ترکیب می‌شوند، و این واحد در تمام اعداد موجود است؛ و دانستم که تمام اعداد، از یک تا ده، از طریق واحد به دست می‌آید، و آنگاه عدد ده را، به همان شیوه‌ای که در واحد عمل می‌شود، دو چندان و سه چندان می‌کنند تا بیست و سی به‌دست آید، و بر همین قیاس به صد می‌رسد. سپس صد را مانند یکان و دهگان دو چندان و سه چندان می‌کنند تا به هزار برسد، و پس از آن، مرتبهٔ هزار را بر همین قیاس بالا می‌برند، یعنی در رأس هر عقدی افزون می‌شود تا به آخرین عدد قابل ادراک برسد.

و نیز دریافتم که اعدادی که در حساب جبر و مقابله به وجود آنها نیاز است، سه نوع هستند: جذرها و مالها و عدد مفردی که به جذری یا مالی نسبت ندارد. جذر هر چیزی است که در یک یا چند برابر خود یا در کسری از خود ضرب شده باشد؛ مال چیزی‌است که از حاصل‌ضرب این جذر درخودش به‌دست آید؛ و عدد مفرد هر عددی‌است که بدون نسبت به‌جذر یا مال برزبان آید.

گزیده‌ای از فصل اول کتاب جبر خوارزمی

مبانی کامپیوتر و برنامه‌نویسی با BASIC (۴)



(سوّم ریاضی نظام جدید و قدیم)

● حسین ابراهیم‌زادهٔ قُلزم

تبدیلات و محاسبات ریاضی در مبناهای ۲ و ۸ و ۱۶

دومین و آخرین قسمت از سلسله مطالب تبدیلات و محاسبات ریاضی در مبناهای ۸،۲ و غیره را با جمع اعداد در مبنای ۲ شروع می‌کنیم:

❑ جمع دو یا چند عدد در مبنای ۲

جمع[1] دو یا چند عدد در مبنای ۲[2] کاملاً شبیه جمع اعداد در مبنای ۱۰ است. مانند جمع در مبنای ۱۰[3] در مبنای ۲ ابتدا ارقام یکان اعداد را با هم جمع می‌کنیم. بدنبال آن در صورت وجود رقم انتقالی[4]،آن‌را به ستون دوگان منتقل می‌کنیم. سپس جمع ارقام دوگان را در مبنای ۲ انجام می‌دهیم و عملیات مشابه را در مورد ستون چهارگان و هشتگان و غیره تکرار می‌کنیم. بدین ترتیب جمع اعداد در مبنای ۲ انجام می‌شود[5]. در جمع اعداد در مبنای ۲، توجه به چهار قاعدهٔ[6] زیر حائز اهمیت است:

۰+۰=۰

۰+۱=۱

۱+۰=۱

۱+۱=۰

و ۲ بر یک که رقم انتقالی به ستونِ[7] مرتبهٔ بلافاصله بالاتر است.

مثال: جمع زیر را در مبنای ۲ انجام دهید:

۱۱۱+
۱۰۱
۱۰۰

حل: ابتدا مجموع ارقام یکان را در مبنای ۱۰ به‌دست آورده، نتیجه را به مبنای ۲ تبدیل[8] می‌کنیم. چنانچه مجموع، رقم انتقالی داشته باشد آن‌را به ستونِ مرتبهٔ بالاترش منتقل می‌کنیم. این عمل را در مورد رقمهای ستونهای دیگر با روش مشابه تکرار می‌کنیم. بنابراین:

۱۱
۱۱۱+
۱۰۱
۱۰۰
۱۰۰۰۰

مثال: جمع زیر را در مبنای ۲ انجام دهید:

$$\begin{pmatrix} ۱۱۱۱۰۱۰ \\ ۱۰۱۱ \\ ۱۰۰۱۱۰ \\ ۱۱۰۰۰۱ \\ ۱۱۱۰۰ \end{pmatrix}_۲^+$$

داریم:

$$\begin{pmatrix} ۲۲۲۲۲۱ \\ ۱۱۱۱۰۱۰ \\ ۱۰۱۱ \\ ۱۰۰۱۱۰ \\ ۱۱۰۰۰۱ \\ ۱۱۱۰۰ \end{pmatrix}_۲^+$$

۱۱۱۱۱۰۰۰

مثال: جمع زیر را در مبنای ۲ انجام دهید:

۱۰۱۰۱/۰۱۰۱+
۱۰۱۰۰/۰۰۱

حل: همانطور که می‌دانید، چنانچه در سمت راست رقمِ[9] قسمت

اعشاری یک عدد در مبنای ۱۰ یا قسمت کسری در هر مبنای دیگر، هر تعداد صفر اضافه کنیم، تغییری در عدد ایجاد نمی‌شود.

با این توضیحات عدد ۱۰۱۰۰/۰۰۱۰ معادل عدد ۱۰۱۰۰/۰۰۱ است. درنتیجه:

$$\begin{array}{r} \overset{1}{1}0101/0101+ \\ 10100/0010 \\ \hline 101001/0111 \end{array}$$

تمرین ــ ثابت کنید[10] که:

الف: $(110110)_2+(11111)_2+(10111)_2+(10011)_2$
$=(1111111)_2$

ب: $(111100)_2+(11000)_2+(1111000)_2+(100)_2$
$=(11010000)_2$

❏ تفاضل دو یا چند عدد در مبنای ۲

برای تفاضل[11] دو یا چند عدد در مبنای ۲، کافی است چهارقاعدهٔ زیر را درنظر بگیرید. عمل تفاضل در مبنای ۲، کاملاً مشابه تفریق در مبنای ۱۰ است:

$0-0=0$
$1-0=1$
$1-1=0$
$0-1=1$

و یک رقم قرضی[12] که به مفروق ستون مرتبهٔ بالاتر اضافه می‌شود. توجه دارید که در تفاضل $a-b$، عدد a را مفروقٌ منه و عدد b را مفروق می‌نامند.

مثال: تفاضل زیر را در مبنای ۲ انجام دهید:

$$\begin{pmatrix} 11011010 \\ 10100010 \end{pmatrix}_2^{-}$$

حل: ابتدا رقم یکان بعد دوگان سپس چهارگان و الی آخر اعداد داده‌شده را به ترتیب[13] از هم کم می‌کنیم، داریم:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1\overset{2}{\not{1}}011010 \\ 10100010 \end{pmatrix}_2^{-} \\ \hline 00111000 \end{array}$$

$\Rightarrow (11011010)_2-(10100010)_2=(111000)_2$

مثال: تفاضل زیر را در مبنای ۲ انجام دهید:

$$\begin{pmatrix} 1100101 \\ 111100 \\ 10101 \\ 1111 \end{pmatrix}_2^{-}$$

حل: با درنظر گرفتن رقم قرضی داریم:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1100\overset{2}{\not{1}}01 \\ 111100 \\ 10101 \\ 1111 \end{pmatrix}_2^{-} \\ \hline 0000101 \end{array}$$

درنتیجه:

$(1100101)_2-(111100)_2-(10101)_2-(1111)_2=(101)_2$

تمرین ــ ثابت کنید که:

الف: $(111110100)_2-(100101100)_2-(1100100)_2$
$-(110011)_2=(110001)_2$

ب: $(111101011)_2-(100101100)_2-(1010000)_2$
$-(1000111)_2-(10100)_2=(10100)_2$

❏ ضرب دو عدد در مبنای ۲

ضرب[14] دو عدد در مبنای ۲ به طور دقیق مشابه ضرب دو عدد در مبنای ۱۰ است. برای ضرب دو عدد در مبنای ۲ کافی است چهار قاعدهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$0\times0=0$
$0\times1=0$
$1\times0=0$
$1\times1=1$

مثال: ضرب زیر را در مبنای ۲ انجام دهید:

$$\begin{pmatrix} 1101111 \\ 100 \end{pmatrix}_2^{\times}$$

حل: مانند ضرب در مبنای ۱۰، کافی است حاصل ضرب دو عدد $\begin{pmatrix} 1101111 \\ 1 \end{pmatrix}_2^{\times}$ را به دست آورده، دو صفر عدد ۱۰۰ را به انتهای حاصلضرب اضافه کنیم. بدین ترتیب داریم:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1101111 \\ 1 \end{pmatrix}_2^{\times} \\ \hline 1101111 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1101111 \\ 100 \end{pmatrix}_2^{\times} \\ \hline 110111100 \end{array}$$

مثال: ضرب زیر را در مبنای ۲ انجام دهید:

$$\left(\begin{array}{r} ۱۱۰۱۱۰۱ \\ ۱۰۱۱۰۱ \end{array}\right)_{۲}^{\times}$$

حل: مانند ضرب دو عدد در مبنای ۱۰، ارقام عامل[15] دوم ضرب را از راست به چپ در عامل اول ضرب، ضرب کرده سپس حاصل را همانند مبنای ۱۰، با یک ستون جابه‌جایی به سمت چپ، به ترتیب، زیر هم می‌نویسیم آنگاه عمل جمع را انجام می‌دهیم، نتیجهٔ عمل جمع، حاصلضرب دو عدد خواهد بود! بنابراین داریم:

$$\begin{array}{r} \left(\begin{array}{r} ۱۱۰۱۱۰۱ \\ ۱۰۱۱۰۱ \end{array}\right)_{۲}^{\times} \\ \hline ۱۱۰۱۱۰۱ \\ ۰۰۰۰۰۰۰ \\ ۱۱۰۱۱۰۱ \\ ۱۱۰۱\ ۱۰۱ \\ ۰۰۰۰۰۰۰ \\ ۱۱۰۱۱۰۱ \\ \hline ۱۰۰۱۱۰۰۱۰۱۰۰۱ \end{array}$$

قبل از انجام عمل تقسیم[16] در مبنای ۲، لازم است مقایسه‌ای بین اعدد در این مبنا از نظر بزرگ و کوچک بودن به عمل آوریم:

❑ مقایسهٔ دو عدد مبنای ۲

هنگام مقایسهٔ[17] دو عدد مبنای ۲ از نظر بزرگ و کوچک بودن نسبت به یکدیگر، دو حالت پیش می‌آید **الف ـ** تعداد ارقام دوعدد مساوی نباشد. **ب ـ** تعداد ارقام دو عدد مساوی باشند.

الف ـ هرگاه تعداد ارقام دو عدد مساوی نباشد، آن عددی بزرگتر است که تعداد رقم‌هایش بیشتر از عدد دیگر باشد. درنتیجه عدد دیگر کوچکتر است.

مثال: بین دو عدد ۱۰۱۱۰۱ و ۱۱۱۱۱ کدامیک بزرگتر است؟

حل: چون عدد ۱۰۱۱۰۱ شش رقمی ولی عدد ۱۱۱۱۱ پنج رقمی است از این رو عدد ۱۰۱۱۰۱ بزرگتر از عدد ۱۱۱۱۱ است.

ب ـ هرگاه تعداد ارقام دو عدد مساوی باشند، دو عدد داده شده را از چپ به راست دو بدو با هم مقایسه می‌کنیم، هر عددی که برای اولین بار، در مقام[18] هم مرتبه‌اش یک داشته باشد و دیگری صفر، آن عدد بزرگتر است.

مثال: بین دو عدد ۱۱۱۰۱۰۰۱ و ۱۰۱۱۰۱۰۱ کدامیک بزرگتر است؟

حل: از آنجا که تعداد ارقام دو عدد داده شده برابر و هریک ۸رقمی می‌باشند بنابراین آنها را از چپ به راست با هم مقایسه می‌کنیم و ظهور[19] اولین یک در مقام هم مرتبه در یک عدد و صفر در عدد دیگر، عدد بزرگتر را مشخص می‌کند. بدین ترتیب داریم:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}\begin{matrix} ۱۰۱۰۰۱ \\ ۱۱۰۱۰۱ \end{matrix} \\ \uparrow & \uparrow \\ \text{مساوی} & \text{نامساوی} \end{array}$$

نامساوی[20]

چون عدد بالایی در ستون دوم از چپ یک و عدد پایینی در همین ستون صفر دارد و از این رو عدد ۱۱۱۰۱۰۰۱ بزرگتر از عدد ۱۰۱۱۰۱۰۱ است.

از مقایسهٔ دو عدد، در عملِ تقسیم مبنای ۲ استفادهٔ زیاد می‌شود.

❑ تقسیم دو عدد در مبنای ۲

برای تقسیم دو عدد درمبنای ۲، مشابه تقسیم دو عدد در مبنای ۱۰ عمل می‌کنیم. هنگام عمل تقسیم مراحل کار را مرحله به مرحله توضیح می‌دهیم:

مثال: تقسیم زیر را در مبنای ۲ انجام دهید:

$$(۱۰۱۱۱۰۱۱)_{۲}:(۱۱۰۱)_{۲} = (?)_{۲}$$

$$\begin{array}{r|l} ۱۰۱۱'۱۰۱۱ & ۱۱۰۱ \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

حل: برای انجام عمل تقسیم، ابتدا به تعداد ارقام مقسوم علیه که‌در اینجا ۴ است، چهار رقم در مقسوم جدا می‌کنیم. از آنجا که با جدا کردن ۴ رقم در مقسوم، مقسوم[21] جدید یعنی۱۰۱۱ از مقسوم علیه[22] ۱۱۰۱ کوچکتر می‌شود، همانند تقسیم در مبنای ۱۰، یک رقم دیگر نیز به مقسوم اضافه می‌کنیم. بدین ترتیب تعداد ارقام جدا شده در مقسوم ۵ می‌شود که بزرگتر از عدد مقسوم علیه است. اکنون در این مرحله می‌توانیم عمل تقسیم را براحتی انجام دهیم. در هر مرحله از تقسیم[23]، خارج قسمت یا صفر است یا یک.

$$\begin{array}{r|l} ۱۰۱۱۱'۰۱۱ & ۱۱۰۱ \\ \cline{2-2} ۱۱۰۱ & ۱ \\ \cline{1-1} ۱۰۱۰ & \end{array}$$

پس از این مرحله، اکنون یک رقم از مقسوم را پایین می‌آوریم: ۱۰۱۰۰، چون ۱۱۰۱<۱۰۱۰۰، از این‌رو، عمل تقسیم امکان‌پذیر است:

```
۱۰۱۱۱′۰′۱۱ | ۱۱۰۱
            | ۱۱
 ۱۱۰۱
 ------
 ۱۰۱۰۰
  ۱۱۰۱
  -----
   ۱۱۱
```

در مرحلهٔ سوم چون ۱۱۰۱<۱۱۱۱ است، عمل تقسیم امکان‌پذیر است و داریم:

```
۱۰۱۱۱′۰′۱′۱ | ۱۱۰۱
             | ۱۱۱
 ۱۱۰۱
 ------
 ۱۰۱۰۰
  ۱۱۰۱
  -----
  ۱۱۱۱
  ۱۱۰۱
  -----
   ۱۰۱
```

در مرحله چهارم چون ۱۱۰۱>۱۰۱ است به خارج قسمت یک صفر اضافه می‌کنیم و عمل تقسیم متوقف می‌شود بدین ترتیب:

```
۱۰۱۱۱′۰′۱′۱ | ۱۱۰۱
             | ۱۱۱۰
 ۱۱۰۱
 ------
 ۱۰۱۰۰
  ۱۱۰۱
  -----
  ۱۱۱۱
  ۱۱۰۱
  -----
   ۱۰۱
```

درنتیجه:

$(۱۰۱۱۱۰۱۱)_۲:(۱۱۰۱)_۲=(۱۱۱۰)_۲$ و $(۱۰۱)_۲$ = باقیمانده

به عبارت دیگر:

$(۱۰۱۱۱۰۱۱)_۲=(۱۱۰۱)_۲\times(۱۱۱۰)_۲+۱۰۱$

مطلب بالا را تحقیق کنید[۲۴].

تمرین ـ ثابت کنید:

الف: $(۱۰۱۱۱)_۲\times(۱۰۱۰۱)_۲=(۱۱۱۱۰۰۰۱۱)_۲$

ب: $(۱۱۰۰)_۲\times(۱۰۱۱۰۱)_۲=(۱۰۰۰۰۱۱۱۰۰)_۲$

ج: $(۱۱۱۱۱۱۰۰۰)_۲:(۱۰۰۱)_۲=(۱۱۱۰۰۰)_۲$

د: $(۱۱۰۰۱۱)_۲:(۱۱۱۱)_۲=(۱۱)_۲$ و $(۱۱۰)_۲$ = باقیمانده

عملیات جمع، تفریق، ضرب و تقسیم درمبناهای ۸ و ۱۶ کاملاً مشابه عملیات فوق در مبنای ۱۰ و ۲ است که شرح آن در بالا آمده است.

❑ تبدیل اعداد از مبنای ۱۰ به مبنای ۱۶

الف ـ روش تقسیمهای متوالی:

در این روش به همان صورتی عمل می‌کنیم که در تبدیل یک عدد از مبنای ۱۰ به مبنای ۲ عمل می‌کردیم. دانش‌آموزان توجه دارند که معادل اعداد اعشاری ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، در مبنای ۱۶ به ترتیب F ،E ،D ،C ،B ،A است.

مثال: معادل عدد $(۲۹۹)_{۱۰}$ را در مبنای ۱۶ [۲۵] به دست آورید.

حل: با استفاده از روش تقسیمهای متوالی می‌توان نوشت:

۲۹۹:۱۶=۱۸   باقیمانده $=(۱۱)_{۱۶}=B$

۱۸:۱۶=۱   باقیمانده $=(۲)_{۱۶}$

چون خارج قسمت یعنی ۱ کمتر از ۱۶ است ۱۶>۱ . بدین ترتیب عمل تقسیم را متوقف می‌کنیم درنتیجه:

$(۲۹۹)_{۱۰}=(۱۲B)_{۱۶}$

تمرین ـ ثابت کنید

$(۴۳۹۶۹)_{۱۰}=(ABC\ ۱)_{۱۶}$

$(۷۰۰۶۷۱)_{۱۰}=(AB۰FF)_{۱۶}$

ب ـ روش تفریقهای متوالی:

در این روش نیز به همان صورتی عمل می‌کنیم که در تبدیل یک عدد از مبنای ۱۰ به مبنای ۲ عمل کردیم. برای این منظور، ابتدا توانهای[۲۶] مختلف عدد ۱۶ را می‌نویسیم:

$۱۶^۰=۱$	$۱۶^۴=۶۵۵۳۶$
$۱۶^۱=۱۶$	$۱۶^۵=۱۰۴۸۵۷۶$
$۱۶^۲=۲۵۶$	$۱۶^۶=۱۶۷۷۷۲۱۶$
$۱۶^۳=۴۰۹۶$	$۱۶^۷=۲۶۸۴۳۵۴۵۶$

مثال: معادل عدد $(۱۱۹۴۶۸۴)_{۱۰}$ را با روش تفریقهای متوالی به مبنای ۱۶ به دست آورید:

حل: ملاحظه می‌شود که عدد ۱۱۹۴۶۸۴ بین دو عدد $۱۶^۵=۱۰۴۸۵۷۶$ و $۱۶^۶=۱۶۷۷۷۲۱۶$ قرار دارد. از عدد با توان کوچکتر شروع می‌کنیم و عدد داده شده را از $۱۶^۵=۱۰۴۸۵۷۶$ و توانهای پایین‌تر از ۵ عدد ۱۶ کم می‌کنیم و در هر قسمت که مفروقٌ منه از مفروق بیشتر باشد عمل تفریق را انجام می‌دهیم و برای آن مرحله ضریب[۲۷] توان را درنظر می‌گیریم درغیر این‌صورت عمل تفریق را انجام نمی‌دهیم و برای آن قسمت عدد صفر منظور می‌کنیم[۲۸]. این عمل را تا آنجا ادامه می‌دهیم که به پایین‌ترین توان غیر منفی[۲۹] عدد ۱۶، یعنی صفر برسیم. در پایان، ارقام ثبت شده در هر مرحله را به ترتیب از سمت چپ

کنار هم قرار می‌دهیم، عدد حاصل، معادل عدد داده شده در مبنای ۱۶ است.

سمت چپ ترین رقم ↓

۱ = عدد ثبت شده

$$۱۱۹۴۶۸۴ - ۱ \times ۱۶^{۵} = ۱۱۹۴۶۸۴ - ۱۰۴۸۵۷۶ = ۱۴۶۱۰۸$$

۲ = عدد ثبت شده

$$۱۴۶۱۰۸ - ۲ \times ۱۶^{۴} = ۱۴۶۱۰۸ - ۱۳۱۰۷۲ = ۱۵۰۳۶$$

۳ = عدد ثبت شده

$$۱۵۰۳۶ - ۳ \times ۱۶^{۳} = ۱۵۰۳۶ - ۱۲۲۸۸ = ۲۷۴۸$$

A = ۱۰ = عدد ثبت شده

$$۲۷۴۸ - ۱۰ \times ۱۶^{۲} = ۲۷۴۸ - ۲۵۶۰ = ۱۸۸$$

B = ۱۱ = عدد ثبت شده

$$۱۸۸ - ۱۱ \times ۱۶ = ۱۸۸ - ۱۷۶ = ۱۲$$

سمت راست‌ترین رقم ↓

C = ۱۲ = عدد ثبت شده

$$۱۲ - ۱۲ \times ۱۶^{۰} = ۱۲ - ۱۲ = ۰$$

درنتیجه: $(۱۱۹۴۶۸۴)_{۱۰} = (۱۲۳ABC)_{۱۶}$

تمرین ــ ثابت کنید که:

الف: $(۱۱۲۵۶۰۹۹)_{۱۰} = (ABC۱۲۳)_{۱۶}$

ب: $(۱۷۱۵۰۰۴)_{۱۰} = (۱A۲B۳C)_{۱۶}$

تبدیل یک عدد از مبنای ۲ به مبنای ۱۶ بدون استفاده از مبنای ۱۰

در تمام عملیات تبدیل مبنا بدون استفاده از مبنای ۱۰، ابتدا بایستی سعی کنید رابطه‌ای بین مبناهای مورد بررسی[30] در مسأله پیدا کنید. به‌طور مثال در تبدیل مبنای ۲ به ۱۶ و برعکس، رابطهٔ $۱۶^{۱} = ۲^{۴}$ بین دو عدد ۲ و ۱۶ برقرار است[31]. معنی این تساوی، آن است که هر چهار بیت[32] (رقم) در مبنای ۲، معادل یک رقم در مبنای ۱۶ است. از این‌رو برای تبدیل یک عدد از مبنای ۲ به مبنای ۱۶، ابتدا عدد داده شده در مبنای ۲ را از راست به چپ به دسته‌های چهارتایی تقسیم‌بندی کرده سپس هر دستهٔ چهارتایی را به‌طور مستقل به یک عدد در مبنای ۱۰ تبدیل می‌کنیم. بدنبال آن معادل عدد حاصلِ دسته را در مبنای ۱۶ می‌نویسیم و با همان ترتیب در جای خودش در دسته قرار می‌دهیم.

مثال: معادل عدد $(۱۱۰۰۰۱۰۱۰۱۰۱۱)_{۲}$ را بدون استفاده از مبنای ۱۰، به مبنای ۱۶ به دست آورید:

حل: ابتدا عدد داده شده را به دسته‌های چهارتایی تقسیم بندی می‌کنیم:

$$(۱۱۰۰۰۱۰۱۰۱۰۱۱)_{۲} = [۱(۱۰۰۰)(۱۰۱۰)(۱۰۱۱)]_{۲}$$

می‌دانیم:

$(۱۰۱۰)_{۲} = ۱۰ = (A)_{۱۶}$ $\qquad$ $(۱۰۱۱)_{۲} = ۱۱ = (B)_{۱۶}$

$(۱)_{۲} = ۱ = (۱)_{۱۶}$ $\qquad$ $(۱۰۰۰)_{۲} = ۸ = (۸)_{۱۶}$

درنتیجه پس از جایگذاری[33]:

$$(۱۱۰۰۰۱۰۱۰۱۰۱۱)_{۲} = (۱۸AB)_{۱۶}$$

مثال: بدون استفاده از مبنای ۱۰، معادل عدد $(۱۰۱۰۱۱۰۰۰۱۱۱۱۱)_{۲}$ را در مبنای ۱۶ به دست آورید:

حل: با توضیحات ارائه شده داریم:

$$(۱۰۱۰۱۱۰۰۰۱۱۱۱۱)_{۲} = [(۱۰)(۱۰۱۱)(۰۰۰۱)(۱۱۱۱)]_{۲}$$

$(۰۰۰۱)_{۲} = (۱)_{۱۶}$ $\qquad$ $(۱۱۱۱)_{۲} = (F)_{۱۶}$

$(۱۰)_{۲} = (۲)_{۱۶}$ $\qquad$ $(۱۰۱۱)_{۲} = (B)_{۱۶}$

درنتیجه پس از جایگذاری داریم:

$$(۱۰۱۰۱۱۰۰۰۱۱۱۱۱)_{۲} = (۲B۱F)_{۱۶}$$

تمرین ــ ثابت کنید که:

الف: $(۱۰۱۱۰۰۱۱۱)_{۲} = (۱۶۷)_{۱۶}$

ب: $(۱۰۱۰۱۰۱۱۱۱۰۰۱۱۰۱۱۱۱۰۱۱۱۱۱۰۰۰۱)_{۲} = (ABCDEF۱)_{۱۶}$

تبدیل یک عدد از مبنای ۱۶ به مبنای ۲ بدون استفاده از مبنای ۱۰

از آنجا که $۲^{۴} = ۱۶^{۱}$ تعبیر این تساوی آن است که هر رقم در مبنای ۱۶ قابل تبدیل به چهار رقم در مبنای ۲ است. بدین منظور برای تبدیل یک عدد از مبنای ۱۶ به مبنای ۲، کافی است هر رقمِ عدد داده شده درمبنای ۱۶ را به‌طور مستقل به مبنای ۲ با چهار رقم نمایش داده سپس با همان ترتیبِ ارقام در مبنای ۱۶، معادل مبنای ۲ ارقام را در جای خودش می‌نویسیم. بدین ترتیب تبدیل مبنا از ۱۶ به ۲ انجام شده است.

مثال: بدون استفاده از مبنای ۱۰، معادل عدد $(۱۲۳)_{۱۶}$ را در مبنای ۲ به‌دست آورید:

حل:

$(۱۲۳)_{۱۶} = (?)_۲$

نخست لازم است هر رقم عدد داده شده در مبنای ۱۶ را به معادلش در مبنای ۲ با چهار رقم بیان کنیم. در مورد ارقامی مانند ۱ در مبنای ۱۶، سمت چپ این‌گونه ارقام را با صفر پر می‌کنیم تا چهار رقم کامل شود یعنی

$(۱)_{۱۶} = (۰۰۰۱)_۲$

بدین ترتیب:

$(۲)_{۱۶} = (۱۰)_۲ = (۰۰۱۰)_۲$

$(۳)_{۱۶} = (۱۱)_۲ = (۰۰۱۱)_۲$

درنتیجه پس از جایگذاری داریم:

$$(۱۲۳)_{۱۶} = [(۰۰۰۱)(۰۰۱۰)(۰۰۱۱)]_۲ = (۰۰۰۱۰۰۱۰۰۰۱۱)_۲ = (۱۰۰۱۰۰۰۱۱)$$

مثال: بدون استفاده از مبنای ۱۰، معادل عدد $(ABCDEF۱)_{۱۶}$ را در مبنای ۲ به‌دست آورید:

حل:

$(ABCDEF۱)_{۱۶} = (?)_۲$

می‌دانیم:

$(A)_{۱۶} = (۱۰۱۰)_۲ \quad (B)_{۱۶} = (۱۰۱۱)_۲ \quad (C)_{۱۶} = (۱۱۰۰)_۲$

$(D)_{۱۶} = (۱۱۰۱)_۲ \quad (E)_{۱۶} = (۱۱۱۰)_۲ \quad (F)_{۱۶} = (۱۱۱۱)_۲$

و بالاخره:

$(۱)_{۱۶} = (۰۰۰۱)_۲$

درنتیجه پس از جایگذاری داریم:

$$(ABCDEF۱)_{۱۶} = [\underset{\substack{\downarrow\\A}}{(۱۰۱۰)}\underset{\substack{\downarrow\\B}}{(۱۰۱۱)}\underset{\substack{\downarrow\\C}}{(۱۱۰۰)}\underset{\substack{\downarrow\\D}}{(۱۱۰۱)}\underset{\substack{\downarrow\\E}}{(۱۱۱۰)}\underset{\substack{\downarrow\\F}}{(۱۱۱۱)}\underset{\substack{\downarrow\\۱}}{(۰۰۰۱)}]_۲$$

$$= (۱۰۱۰۱۰۱۱۱۱۰۰۱۱۰۱۱۱۱۰۱۱۱۱۰۰۰۱)_۲$$

تمرین ــ ثابت کنید که:

الف:

$(۸۷۵ABF)_{۱۶} = (۱۰۰۰,۰۱۱۱,۰۱۰۱۱۰۱۰۱۰۱۱۱۱۱۱)_۲$

ب: $(۱۰۲CD)_{۱۶} = (۱۰۰۰۰۰۰۱۰۱۱۰۰۱۱۰۱)_۲$

تبدیل اعداد از مبنای ۱۶ به مبنای ۸ بدون استفاده از مبنای ۱۰

به منظور تبدیل یک عدد از مبنای ۱۶ به مبنای ۸، ابتدا معادل عدد داده شده در مبنای ۱۶ را به مبنای ۲ تبدیل کرده، سپس عدد تولید شده[۳۴] در مبنای ۲ را طبق قاعدهٔ گفته شده از مبنای ۲ به مبنای ۸ تبدیل می‌کنیم.

مثال: بدون استفاده از مبنای ۱۰، معادل عدد $(A۲۳C)_{۱۶}$ را درمبنای ۸ به دست آورید.

حل: ابتدا معادل عدد $(A۲۳C)_{۱۶}$ را در مبنای ۲ به‌دست می‌آوریم. با توجه به مثال حل شده در قسمت تبدیل مبنا از ۱۶ به مبنای ۲ داریم:

$(A۲۳C)_{۱۶} = (۱۰۱۰,۰۰۱۰,۰۰۱۱,۱۱۰۰)_۲$

حال معادل عدد $(۱۰۱۰۰۰۱۰۰۰۱۱۱۱۰۰)_۲$ را در مبنای ۸ می‌نویسیم.

$$(۱۰۱۰۰۰۱۰۰۰۱۱۱۱۰۰)_۲ = [۱(۰۱۰)(۰۰۱)(۰۰۰)(۱۱۱)(۱۰۰)]_۲ = (۱۲۱۰۷۴)_۸$$

درنتیجه داریم: $(A۲۳C)_{۱۶} = (۱۲۱۰۷۴)_۸$

مثال: بدون استفاده از مبنای ۱۰، معادل عدد $(۹۸EDA)_{۱۶}$ را در مبنای ۸ به‌دست آورید.

حل: داریم:

$(۹۸EDA)_{۱۶} = (۱۰۰۱۱۰۰۰۱۱۱۰۱۱۰۱۱۰۱۰)_۲$

$(۱۰۰۱۱۰۰۰۱۱۱۰۱۱۰۱۱۰۱۰)_۲ = (۲۳۰۷۳۳۲)_۸$

درنتیجه:

$(۹۸EDA)_{۱۶} = (۲۳۰۷۳۳۲)_۸$

تمرین ــ ثابت کنید که:

الف: $(۵۳۹۷۷)_{۱۶} = (۱۲۳۴۵۶۷)_۸$

ب: $(۱F۵۸D۱)_{۱۶} = (۷۶۵۴۳۲۱)_۸$

تبدیل اعداد از مبنای ۸ به مبنای ۱۶ بدون استفاده از مبنای ۱۰

برای تبدیل یک عدد از مبنای ۸ به مبنای ۱۶ بدون استفاده از مبنای ۱۰، ابتدا معادل عدد داده شده[۳۵] در مبنای ۸ را به مبنای ۲ به دست آورده سپس عدد ایجاد شده در مبنای ۲ را طبق قاعده گفته شده از مبنای ۲ به مبنای ۱۶ تبدیل می‌کنیم.

مثال: بدون استفاده از مبنای ۱۰، معادل عدد $(۲۳۴۵۷)_۸$ را در

مبنای ۱۶ به دست آورید.

حل:

$$(23457)_8 = [(010)(011)(100)(101)(111)]_2$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 7$$
$$=(10011100101111)_2$$
$$(10,0111,0010,1111)_2 = (272F)_{16}$$

درنتیجه:

$$(23457)_8 = (272F)_{16}$$

مثال: بدون استفاده از مبنای ۱۰، معادل عدد $(7700125)_8$ را در مبنای ۱۶ به‌دست آورید.

حل:

$$(7700125)_8 = [(111)(111)(000)(000)(001)(010)(101)]_2$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$7 \quad 7 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 5$$
$$=(111111000000001010101)_2$$
$$(111111000000001010101)_2 = (1F8055)_{16}$$

درنتیجه:

$$(7700125)_8 = (1F8055)_{16}$$

تمرین ــ ثابت کنید که:

الف: $(172635)_8 = (F59D)_{16}$

ب: $(702561437)_8 = (70AE31F)_{16}$

با حل چند تمرین مختلف[36]، بحث تبدیل مبناها را به پایان می‌بریم[37]

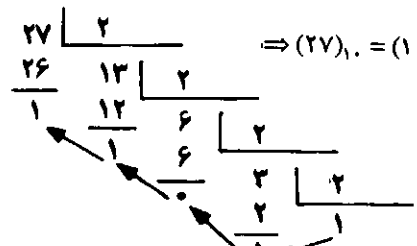
مسائل تکمیلی با جواب

۱ــ الف: با استفاده از روش تقسیمهای متوالی، اعداد زیر را در مبنای ۲ بنویسید.

۲۷ ، ۱۲۷ ، ۲۵۶

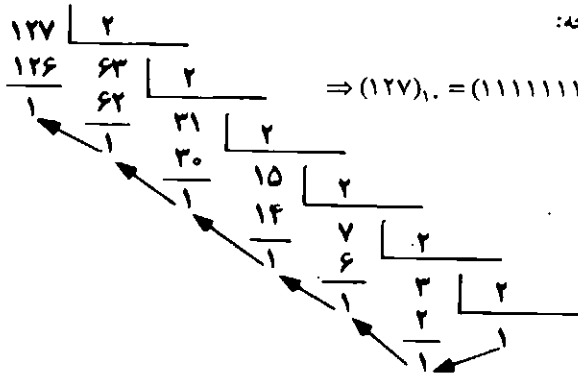
حل:

در نتیجه:



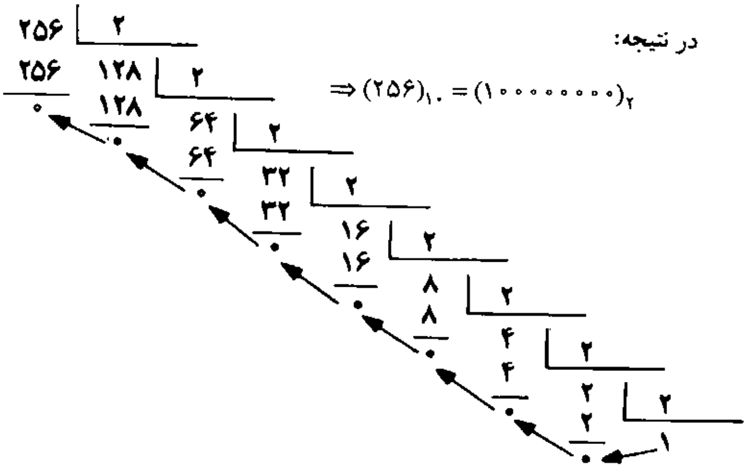
$$\Rightarrow (27)_{10} = (11011)_2$$

در نتیجه:



$$\Rightarrow (127)_{10} = (1111111)_2$$

در نتیجه:



$$\Rightarrow (256)_{10} = (100000000)_2$$

ب: با استفاده از روش تفریقهای متوالی، اعداد زیر را در مبنای ۲ بنویسید.

۵۹۳ ، ۷۵۸

حل: با توجه به اینکه عدد ۵۹۳ بین $512 = 2^9$ و $1024 = 2^{10}$ قرار دارد از این‌رو عمل تفریق را از عدد $512 = 2^9$ شروع می‌کنیم.

درنتیجه

سمت چپ‌ترین رقم
↓

۱ = عدد ثبت شده[38] $\quad 593 - 1\times 2^9 = 593 - 512 = 81$

۰ = عدد ثبت شده $\quad 81 - 0\times 2^8 = 81 - 0 = 81$

۰ = عدد ثبت شده $\quad 81 - 0\times 2^7 = 81 - 0 = 81$

۱ = عدد ثبت شده $\quad 81 - 1\times 2^6 = 81 - 64 = 17$

۰ = عدد ثبت شده $\quad 17 - 0\times 2^5 = 17 - 0 = 17$

۱ = عدد ثبت شده $\quad 17 - 1\times 2^4 = 17 - 16 = 1$

۰ = عدد ثبت شده $\quad 1 - 0\times 2^3 = 1 - 0 = 1$

۰ = عدد ثبت شده $\quad 1 - 0\times 2^2 = 1 - 0 = 1$

۰ = عدد ثبت شده $\qquad ۱-۰\times ۲^{۱} = ۱-۰ = ۱$

سمت راست‌ترین رقم ↓

۱ = عدد ثبت شده $\qquad ۱-۱\times ۲^{۰} = ۱-۱ = ۰$

درنتیجه:

$$(۵۹۳)_{۱۰} = (۱۰۰۱۰۱۰۰۰۱)_{۲}$$

اما در مورد عدد ۷۵۸، با توجه به اینکه ۱۰۲۴>۷۵۸>۵۱۲، از این‌رو عمل تفریق را از عدد کوچکتر یعنی $۵۱۲ = ۲^{۹}$ شروع می‌کنیم. داریم:

سمت چپ‌ترین رقم ↓

۱ = عدد ثبت شده $\qquad ۷۵۸-۱\times ۲^{۹} = ۷۵۸-۵۱۲ = ۲۴۶$

۰ = عدد ثبت شده $\qquad ۲۴۶-۰\times ۲^{۸} = ۲۴۶-۰ = ۲۴۶$

۱ = عدد ثبت شده $\qquad ۲۴۶-۱\times ۲^{۷} = ۲۴۶-۱۲۸ = ۱۱۸$

۱ = عدد ثبت شده $\qquad ۱۱۸-۱\times ۲^{۶} = ۱۱۸-۶۴ = ۵۴$

۱ = عدد ثبت شده $\qquad ۵۴-۱\times ۲^{۵} = ۵۴-۳۲ = ۲۲$

۱ = عدد ثبت شده $\qquad ۲۲-۱\times ۲^{۴} = ۲۲-۱۶ = ۶$

۰ = عدد ثبت شده $\qquad ۶-۰\times ۲^{۳} = ۶-۰ = ۶$

۱ = عدد ثبت شده $\qquad ۶-۱\times ۲^{۲} = ۶-۴ = ۲$

۱ = عدد ثبت شده $\qquad ۲-۱\times ۲^{۱} = ۲-۲ = ۰$

سمت راست‌ترین رقم ↓

۰ = عدد ثبت شده $\qquad ۰-۰\times ۲^{۰} = ۰-۰ = ۰$

درنتیجه:

$$(۷۵۸)_{۱۰} = (۱۰۱۱۱۱۰۱۱۰)$$

۲ــ معادل اعداد زیر را در مبنای ۱۰ به دست آورید.

$(۱۰۰۰۱)_{۲}$ ، $(۱۰۰۰۰۰۱)_{۲}$ ، $(۱۱۱۱۰۱۱۱۱)_{۲}$

$(۱۰۰۱۰۰۱۰۰)_{۲}$ ، $(۱۰۱۱۰۱۱۰۱۱۰۱)_{۲}$

حل: داریم:

$$(۱۰۰۰۱)_{۲} = ۱\times ۲^{۴}+۰\times ۲^{۳}+۰\times ۲^{۲}+۰\times ۲^{۱}+۱\times ۲^{۰} = ۱۷ = (۱۷)_{۱۰}$$

$$(۱۰۰۰۰۰۱)_{۲} = ۱\times ۲^{۶}+۰\times ۲^{۵}+\cdots+۰\times ۲^{۱}+۱\times ۲^{۰} = ۶۵ = (۶۵)_{۱۰}$$

$$(۱۱۱۱۰۱۱۱۱)_{۲} = ۱\times ۲^{۸}+۱\times ۲^{۷}+\cdots+۰\times ۲^{۴}+ ۱\times ۲^{۳}+\cdots+۱\times ۲^{۰} = ۴۹۵ = (۴۹۵)_{۱۰}$$

$$(۱۰۰۱۰۰۱۰۰)_{۲} = ۱\times ۲^{۸}+۰\times ۲^{۷}+۰\times ۲^{۶}+۱\times ۲^{۵}+ ۰\times ۲^{۴}+۰\times ۲^{۳}+۱\times ۲^{۲}+۰\times ۲^{۱}+۰\times ۲^{۰}$$

$$= ۲۹۲ = (۲۹۲)_{۱۰}$$

$$(۱۰۱۱۰۱۱۰۱۱۰۱)_{۲} = ۱\times ۲^{۱۱}+۰\times ۲^{۱۰}+۱\times ۲^{۹}+ ۱\times ۲^{۸}+۰\times ۲^{۷}+۱\times ۲^{۶}+۱\times ۲^{۵}+۰\times ۲^{۴}+۱\times ۲^{۳}+۱\times ۲^{۲} +۰\times ۲^{۱}+۱\times ۲^{۰} = ۲۹۲۵ = (۲۹۲۵)_{۱۰}$$

۳ــ اگر واحد خانه‌های حافظه کلمه باشد یک کامپیوتر با ظرفیتهای زیر دارای چند کلمه است؟

الف ــ128K $\qquad$ ب ــ256K $\qquad$ ج ــ640K

حل: در کامپیوترهای شخصی سازگار با IBM، هر کلمه حافظه از ۱۶ بیت یا دو بایت تشکیل شده است. از این‌رو با فرض 1Word = 2Byte داریم:

1K= 1 Kilo Byte = 1024 Byte

الف: بایت $\qquad$ 128K = 128 × 1024Byte = 131072 Byte

کلمه $\qquad$ 131072Byte : 2 = 65536 word

ب: بایت $\qquad$ 256K = 256 × 1024 Byte = 262144 Byte

کلمه $\qquad$ 262144Byte : 2 = 131072 word

ج: بایت $\qquad$ 640K = 640 × 1024Byte = 655360 Byte

کلمه $\qquad$ 655360Byte : 2 = 327680 word

در کامپیوترهای بزرگ IBM 360/370، هر کلمهٔ حافظه از ۳۲ بیت یا چهار بایت تشکیل شده است. از این‌رو با فرض 1word=4 Byte داریم:

کلمه $\qquad$ 128K = 128 × 1024Byte : 4 = 32760word

کلمه $\qquad$ 256K = 256 × 1024Byte : 4 = 65536word

کلمه $\qquad$ 640K = 640 × 1024Byte : 4 = 163840word

هرگاه هر کلمهٔ حافظه از یک بایت تشکیل شده باشد، از این رو با فرض 1word = 1Byte داریم:

کلمه $\qquad$ 128K = 128 × 1024Byte = 131072 Byte یا Word

کلمه $\qquad$ 256K = 256 × 1024Byte = 262144 Byte یا Word

کلمه $\qquad$ 640K = 640 × 1024Byte = 655360 Byte یا Word

۴ــ اگر هر کلمهٔ حافظه از ۱۶ بیت تشکیل شده باشد نمایش هریک از اعداد صحیح زیر را در یک کلمه بنویسید.

الف) ۹۷ــ $\qquad$ ب) $۲^{۱۳}-۱$ $\qquad$ ج) $۲^{۱۳}-۲^{۹}+۱$

حل: الف: چون عدد ۹۷− یک عدد منفی است از این‌رو، این عدد به جزء بیت علامت دارای همان نمایش عدد ۹۷ است. درنتیجه

$$(۹۷)_{۱۰} = (۱۱۰۰۰۰۱)_{۲}$$

$$\Rightarrow -(۹۷)_{۱۰} = -(۱۱۰۰۰۰۱)_{۲}$$

نمایش بیتی [۴۱] عدد صحیح ۹۷- در دو بایت حافظه به صورت زیر است:

۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰
۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۱

↑
بیت علامت

ب ــ داریم:

$$۲^{۱۳}-۱=(۲-۱)(۲^{۱۲}+۲^{۱۱}+۲^{۱۰}+...+۲^{۱}+۱)$$
$$=۲^{۱۲}+۲^{۱۱}+۲^{۱۰}+...+۲^{۱}+۱=۱\times۲^{۱۲}+۱\times۲^{۱۱}$$
$$+۱\times۲^{۱۰}+...+۱\times۲^{۱}+۱\times۲^{۰}$$
$$=(\underbrace{۱۱۱...۱۱}_{۱۳\ \text{رقم}})$$

نمایش بیتی عدد صحیح مثبت $۲^{۱۳}-۱$ در دو بایتِ حافظه به صورت زیر است:

۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰
۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

↑
بیت علامت

ج ــ

$$۲^{۱۳}-۲^{۹}+۱=۲^{۹}(۲^{۴}-۱)+۱=۲^{۹}(۲-۱)(۲^{۳}+۲^{۲}+۲^{۱}+۱)+۱$$
$$=۲^{۹}(۲^{۳}+۲^{۲}+۲^{۱}+۱)+۱=۲^{۱۲}+۲^{۱۱}+۲^{۱۰}+۲^{۹}+۱$$
$$=۱\times۲^{۱۲}+۱\times۲^{۱۱}+۱\times۲^{۱۰}+۱\times۲^{۹}+۰\times۲^{۸}+$$
$$۰\times۲^{۷}+...+۰\times۲^{۱}+۱\times۲^{۰}$$
$$=(۱۱۱۱۰۰۰۰۰۰۰۰۱)_{۲}$$

درنتیجه:

$$۲^{۱۳}-۲^{۹}+۱=(۱۱۱۱۰۰۰۰۰۰۰۰۱)_{۲}$$

نمایش بیتی عدد صحیح مثبت $۲^{۱۳}-۲^{۹}+۱$ در دو بایتِ حافظه به‌صورت زیر است:

۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰
۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱

۵ ــ با توجه به اینکه هریک از ارقام ۰ تا ۷ را که در مبنای ۸ به کار می‌روند می‌توان حداکثر با سه رقم در مبنای ۲ نوشت، هریک از اعداد زیر را از مبنای ۲ به ۸ یا از مبنای ۸ به مبنای ۲ تبدیل کنید.

الف) $(۳۶)_{۸}=(?)_{۲}$ ، $(۶۴۲)_{۸}=(?)_{۲}$ ، $(۷۵۲)_{۸}=(?)_{۲}$

ب) $(۱۰۱۱۱۱)_{۲}=(?)_{۸}$ ، $(۱۰۱۱۰۰۱۱)=(?)_{۸}$ ،
$(۱۰۰۰۰۱۰۱۰۰)_{۲}=(?)_{۸}$

حل: دربارهٔ شیوهٔ تبدیل یک عدد از مبنای ۲ به مبنای ۸ بدون استفاده از مبنای ۱۰ و بالعکس به برهان شمارهٔ ۱۴ مراجعه کنید [۴۲]. با استفاده از مطالب گفته شده و توجه به نکتهٔ زیر داریم:

$(۰)_{۸}=(۰۰۰)_{۲}$ $\quad$ $(۵)_{۸}=(۱۰۱)_{۲}$
$(۱)_{۸}=(۰۰۱)_{۲}$ $\quad$ $(۶)_{۸}=(۱۱۰)_{۲}$
$(۲)_{۸}=(۰۱۰)_{۲}$ $\quad$ $(۷)_{۸}=(۱۱۱)_{۲}$
$(۳)_{۸}=(۰۱۱)_{۲}$
$(۴)_{۸}=(۱۰۰)_{۲}$

الف)

$$(۳۶)_{۸}=[\underset{۳}{\underset{\uparrow}{(۰۱۱)}}\underset{۶}{\underset{\uparrow}{(۱۱۰)}}]_{۲}=(۱۱۱۱۰)_{۲}$$

$$(۶۴۲)_{۸}=[\underset{۶}{\underset{\uparrow}{(۱۱۰)}}\underset{۴}{\underset{\uparrow}{(۱۰۰)}}\underset{۲}{\underset{\uparrow}{(۰۱۰)}}]_{۲}=(۱۱۰۱۰۰۰۱۰)_{۲}$$

$$(۷۵۲)_{۸}=[\underset{۷}{\underset{\uparrow}{(۱۱۱)}}\underset{۵}{\underset{\uparrow}{(۱۰۱)}}\underset{۲}{\underset{\uparrow}{(۰۱۰)}}]_{۲}=(۱۱۱۱۰۱۰۱۰)_{۲}$$

ب)

$$(۱۰۱۱۱۱)_{۲}=[(۱۰۱)(۱۱۱)]_{۲}=(۵۷)_{۸}$$
$$(۱۰۱۱۰۰۱۱)_{۲}=[(۱۰)(۱۱۰)(۰۱۱)]_{۲}=(۲۶۳)_{۸}$$
$$(۱۰۰۰۰۱۰۱۰۰)_{۲}=[(۱)(۰۰۰)(۰۱۰)(۱۰۰)]_{۲}=(۱۰۲۴)_{۸}$$

۶ــ تمرینهای ۱ و ۲ را به کمک تمرین ۵ حل کنید.

حل: در تمرین ۱ از ما خواسته شده است که اعداد مبنای ۱۰ را در مبنای ۲ بنویسیم. برای این منظور ابتدا اعداد داده شده را از مبنای ۱۰ به مبنای ۸ تبدیل کرده، آنگاه تبدیل از مبنای ۸ به مبنای ۲ را انجام می‌دهیم.

بدین ترتیب داریم:

الف) $(۲۷)_{۱۰}=(۳۳)_{۸}$

$(۳۳)_{۸}=[(۰۱۱)(۰۱۱)]_{۲}=(۱۱۰۱۱)_{۲}$

درنتیجه: $(۲۷)_{۱۰}=(۳۳)_{۸}=(۱۱۰۱۱)_{۲}$

ب) $(۱۲۷)_{۱۰}=(۱۷۷)_{۸}$

$(۱۷۷)_{۸}=[(۰۰۱)(۱۱۱)(۱۱۱)]_{۲}=(۱۱۱۱۱۱۱)_{۲}$

درنتیجه: $(۱۲۷)_{۱۰}=(۱۷۷)_{۸}=(۱۱۱۱۱۱۱)_{۲}$

ج) $(۲۵۶)_{۱۰}=(۴۰۰)_{۸}$

$(۴۰۰)_{۸}=[(۱۰۰)(۰۰۰)(۰۰۰)]_{۲}=(۱۰۰۰۰۰۰۰۰)_{۲}$

درنتیجه: $(۲۵۶)_{۱۰} = (۴۰۰)_{۸} = (۱۰۰۰۰۰۰۰۰)_{۲}$

د) $(۵۹۳)_{۱۰} = (۱۱۲۱)_{۸}$

$(۱۱۲۱)_{۸} = [(۰۰۱)(۰۰۱)(۰۱۰)(۰۰۱)]_{۲} = (۱۰۰۱۰۱۰۰۰۱)_{۲}$

درنتیجه: $(۵۹۳)_{۱۰} = (۱۱۲۱)_{۸} = (۱۰۰۱۰۱۰۰۰۱)_{۲}$

هـ) $(۷۵۸)_{۱۰} = (۱۳۶۶)_{۸}$

$(۱۳۶۶)_{۸} = [(۰۰۱)(۰۱۱)(۱۱۰)(۱۱۰)]_{۲} = (۱۰۱۱۱۱۰۱۱۰)_{۲}$

در نتیجه: $(۷۵۸)_{۱۰} = (۱۳۶۶)_{۸} = (۱۰۱۱۱۱۰۱۱۰)_{۲}$

در تمرین ۲ از ما خواسته شده است که اعداد مبنای ۲ را در مبنای ۱۰ بنویسیم. برای این منظور ابتدا اعداد داده شده را از مبنای ۲ به مبنای ۸ تبدیل کرده، آنگاه تبدیل از مبنای ۸ به مبنای ۱۰ را انجام می‌دهیم. بدین ترتیب داریم:

الف) $(۱۰۰۰۱)_{۲} = [(۱۰)(۰۰۱)]_{۸} = (۲۱)_{۸}$

$(۲۱)_{۸} = ۲ \times ۸^{۱} + ۱ \times ۸^{۰} = ۱۶ + ۱ = (۱۷)_{۱۰} = ۱۷$

درنتیجه: $(۱۰۰۰۱)_{۲} = (۲۱)_{۸} = (۱۷)_{۱۰} = ۱۷$

ب) $(۱۰۰۰۰۰۱)_{۲} = [(۱)(۰۰۰)(۰۰۱)]_{۸} = (۱۰۱)_{۸}$

$(۱۰۱)_{۸} = ۱ \times ۸^{۲} + ۰ \times ۸^{۱} + ۱ \times ۸^{۰} = (۶۵)_{۱۰} = ۶۵$

درنتیجه: $(۱۰۰۰۰۰۱)_{۲} = (۱۰۱)_{۸} = (۶۵)_{۱۰} = ۶۵$

ج) $(۱۱۱۱۰۱۱۱۱)_{۲} = [(۱۱۱)(۱۰۱)(۱۱۱)]_{۸} = (۷۵۷)_{۸}$

$(۷۵۷)_{۸} = ۷ \times ۸^{۲} + ۵ \times ۸^{۱} + ۷ \times ۸^{۰} = (۴۹۵)_{۱۰} = ۴۹۵$

درنتیجه: $(۱۱۱۱۰۱۱۱۱)_{۲} = (۷۵۷)_{۸} = (۴۹۵)_{۱۰} = ۴۹۵$

د) $(۱۰۰۱۰۰۱۰۰)_{۲} = [(۱۰۰)(۱۰۰)(۱۰۰)]_{۸} = (۴۴۴)_{۸}$

$(۴۴۴)_{۸} = ۴ \times ۸^{۲} + ۴ \times ۸^{۱} + ۴ \times ۸^{۰} = (۲۹۲)_{۱۰} = ۲۹۲$

درنتیجه: $(۱۰۰۱۰۰۱۰۰)_{۲} = (۴۴۴)_{۸} = (۲۹۲)_{۱۰} = ۲۹۲$

هـ) $(۱۰۱۱۰۱۱۰۱۱۰۱)_{۲} = [(۱۰۱)(۱۰۱)(۱۰۱)(۱۰۱)]_{۸}$
$= (۵۵۵۵)_{۸}$

$(۵۵۵۵)_{۸} = ۵ \times ۸^{۳} + ۵ \times ۸^{۲} + ۵ \times ۸^{۱} + ۵ \times ۸^{۰}$
$= (۲۹۲۵)_{۱۰} = ۲۹۲۵$

درنتیجه:

$(۱۰۱۱۰۱۱۰۱۱۰۱)_{۲} = (۵۵۵۵)_{۸} = (۲۹۲۵)_{۱۰} = ۲۹۲۵$

* واژه‌نامهٔ ریاضی و کامپیوتر

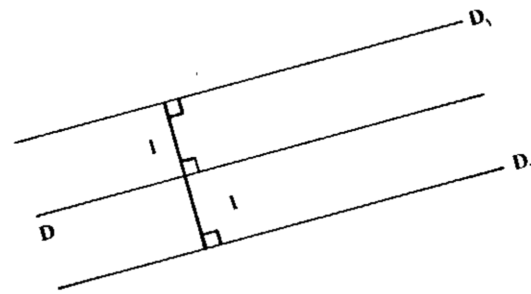
1- Sum
2- Binary Base
3- Decimal Base
4- Carry
5- Perform
6- Rule
7- Column
8- Convert
9- Rightmost Digit
10 - Prove That
11- Difference
12 - Borrowing Digit
13 - Respectively
14 - Multiplication
15 - Factor
16 - Division
17 - Comparision
18 - Place
19 - Presence
20 - Unequal
21- Dividend
22- Divisor
23- Quotient
24- Verify
25- Hexadecimal
26 - Power
27 - Coefficient
28 - Take on
29 - Nonnegative
30 - In Question
31- Fulfill
32 - Nibble
33 - By Substitution
34 - Generated
35 - Given Number
36 - Miscellaneous
37 - Terminate
38 - Registered Number
39 - Word
40 - Allocate
41 - Bit Representation
42 - Refer To

مکان هندسی (قسمت ششم)

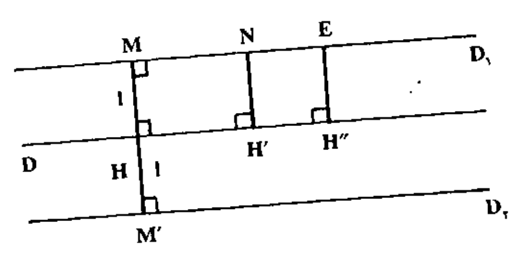
(اوّل، دوم، سوم، چهارم دبیرستان)

محمدهاشم رستمی

۷ ـ مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که از خط D واقع در آن صفحه به فاصلهٔ معین l باشد، دو خط راست D_1 و D_2 موازی خط D است، که در طرفین این خط واقعند.



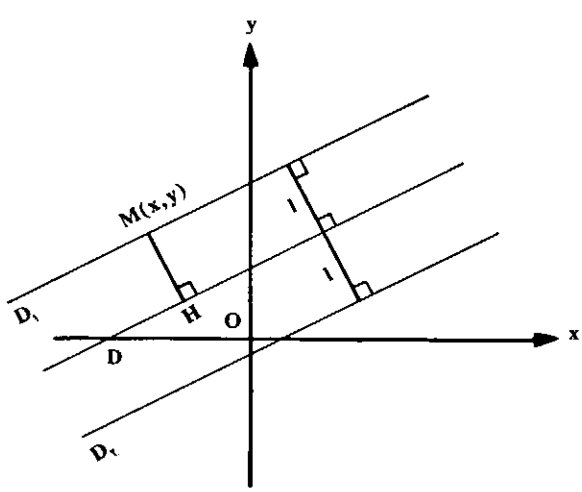
اثبات به روش هندسی ـ خط D را در صفحهٔ P درنظر می‌گیریم و دو خط D_1 و D_2 را به فاصلهٔ l از آن رسم می‌کنیم. برای این کار از نقطهٔ H واقع بر خط D، خط راستی عمود بر این خط رسم کرده، روی آن در دو طرف نقطهٔ H، پاره‌خطهای HM و HM′ را به طول l جدا می‌کنیم، و از نقاط M و M′ خطهای D_1 و D_2 را به موازات خط D رسم می‌نماییم. این دو خط مکان هندسی نقطه‌ای می‌باشند که از خط D به فاصلهٔ معین l واقع است. زیرا:



اولاً: هر نقطه مانند N که روی یکی از دو خط D_1 یا D_2 قرار داشته باشد، از خط D به فاصله l واقع است، چون اگر پای عمود مرسوم از نقطهٔ N بر خط D را H′ بنامیم، چهارضلعی MHH′N که اضلاعش دو به دو موازیند، متوازی‌الاضلاع است که چون زاویه‌هایش قائمه‌اند، مستطیل می‌باشد. پس $NH' = MH = L$ است.

ثانیاً: هر نقطه‌ای مانند E از صفحهٔ P که از خط D به فاصلهٔ l قرار داشته باشد، بر یکی از دو خط D_1 یا D_2 واقع است، زیرا با توجه به اینکه $MH = EH'' = l$ و $MH \| EH''$ و $\hat{H} = \hat{H'} = 90^\circ$ است، چهارضلعی MHH″E مستطیل، و درنتیجه $ME \| HH''$ یا $ME \| D$ است. پس نقطهٔ E روی خط D_1 قرار دارد (از نقطهٔ M تنها یک خط راست به موازات خط راست D می‌توان رسم کرد).

اثبات به روش تحلیلی ـ خط $D: ax + by + c = 0$ را در دستگاه مختصات xoy درنظر می‌گیریم. اگر M(x,y) یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر باشد، داریم:



$$MH = d = l \Rightarrow l = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Rightarrow |ax + by + c| = l\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow D_1 : ax + by + c + l\sqrt{a^2 + b^2} = 0\ ,$$

$$D_2 : ax + by + c - l\sqrt{a^2 + b^2} = 0$$

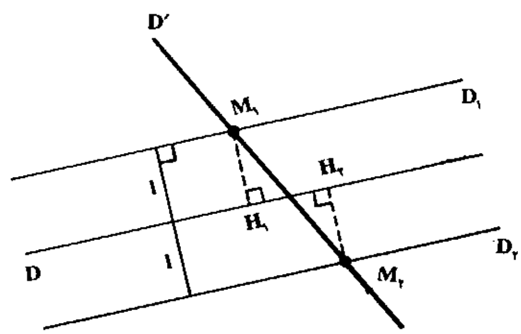
به‌طوری که دیده می‌شود، دو خط D_1 و D_2 خطهای راستی هستند که با خط D موازیند. زیرا:

$$m/D_1 = m/D_2 = m/D = -\frac{a}{b}$$

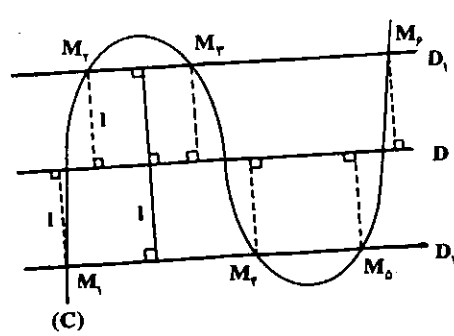
به عکس، مشخص است هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادلهٔ یکی از دو خط D_1 یا D_2 صدق کند، از خط $D: ax + by + c = 0$ به فاصلهٔ l قرار دارد، بنابراین:

مکان هندسی نقطه‌ای که از خط ثابت D به فاصلهٔ معین l واقع است، دو خط راست موازی این خط است که در طرفین آن واقعند.

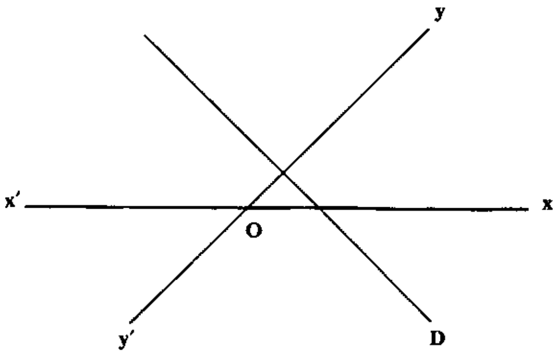
مثال ۱ ــ خط D و خط D' (یا منحنی (C)) در یک صفحه مفروضند. نقطه‌ای روی خط D' (یا منحنی (C)) تعیین کنید که از خط D به فاصلهٔ معلوم l قرار داشته باشد.



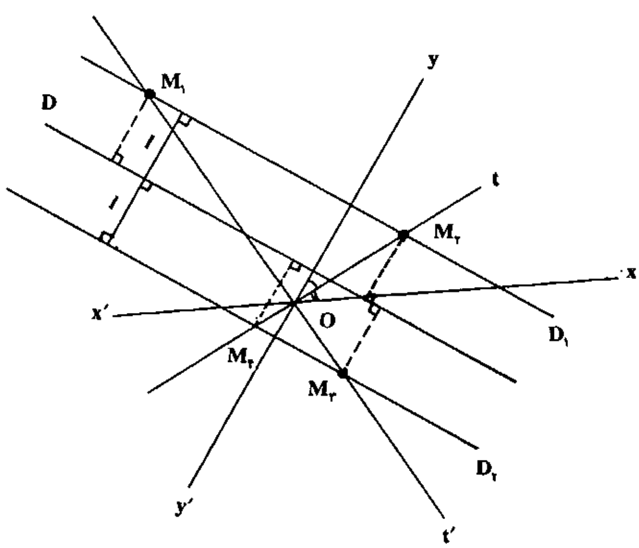
حل ــ دو خط D_1 و D_2 مکان هندسی نقطه‌ای را که از خط D به فاصلهٔ معلوم l قرار دارد، رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد خطهای D_1 و D_2 با خط D' (یا منحنی (C)) جواب مسأله است و تعداد جوابهای مسأله، به تعداد نقاط برخورد می‌باشد.



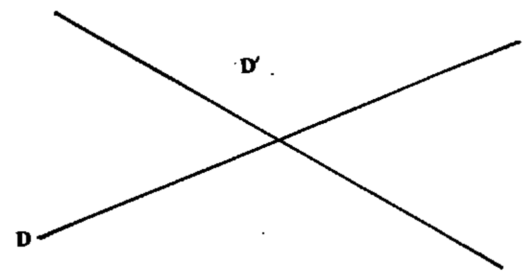
مثال ۲ ــ دو خط راست $x'ox$ و $y'oy$ و خط راست D در یک صفحه مفروضند. نقطه‌ای از این صفحه را تعیین کنید که از دو خط راست $x'ox$ و $y'oy$ به یک فاصله، و از خط D نیز به فاصلهٔ معین l قرار داشته باشد.



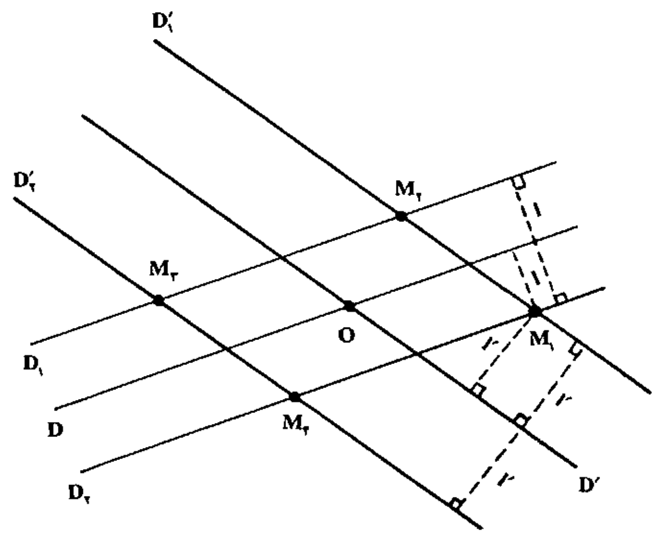
حل ــ خطهای D_1 و D_2 مکان هندسی نقطه‌ای را که از خط D به فاصلهٔ معین l قرار دارد رسم می‌کنیم. از طرفی می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که از دو خط راست متقاطع به یک فاصله است، نیمسازهای زوایای بین آن دو خط است، بنابراین خطهای ot و ot' نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط راست متقاطع $x'ox$ و $y'oy$ رانیز رسم می‌کنیم، نقاط تقاطع خطهای D_1 و D_2 با خطوط ot و ot'، جواب مسأله هستند. این مسأله حداقل دو جواب دارد.



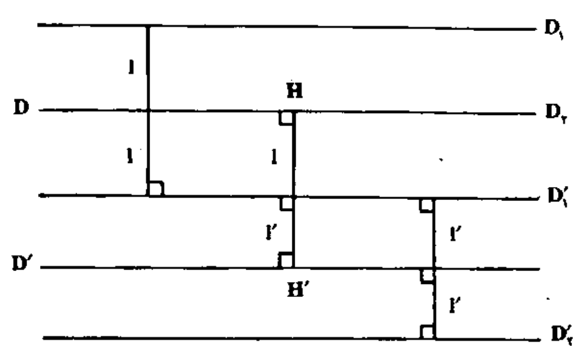
مثال ۳ ــ دو خط راست متمایز D و D' در یک صفحه مفروضند. نقطه‌ای از این صفحه را بیابید که از خط D به فاصلهٔ l و از خط D' به فاصلهٔ l' باشد.(بحث کنید).



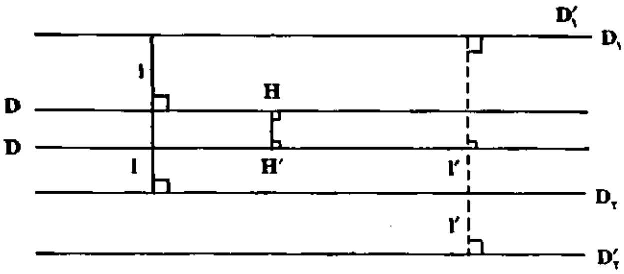
حل — خطهای D_1 و D_2 مکان هندسی نقطه‌ای را که از خط D به فاصلهٔ l قرار دارند و سپس خطهای D'_1 و D'_2 مکان هندسی نقطه‌ای را که از خط D' به فاصلهٔ معین l' است، رسم می‌کنیم:

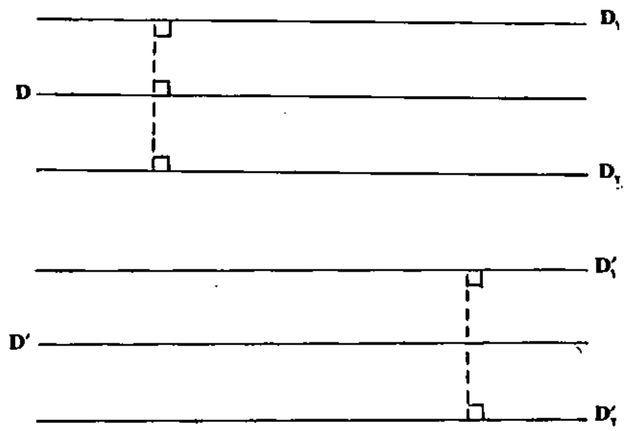


اگرخطهای D و D′ متقاطع باشند، چهار خط D_1 و D_2 و D'_1 و D'_2 در چهار نقطهٔ M_1 و M_2 و M_3 و M_4 یکدیگر را قطع می‌کنند که این چهار نقطه جواب مسأله می‌باشند. درصورتی که دو خط D و D′ متوازی باشند، خطهای D_1 و D_2 و D'_1 و D'_2 نیز متوازی خواهند بود. و دو حالت پیش می‌آید:



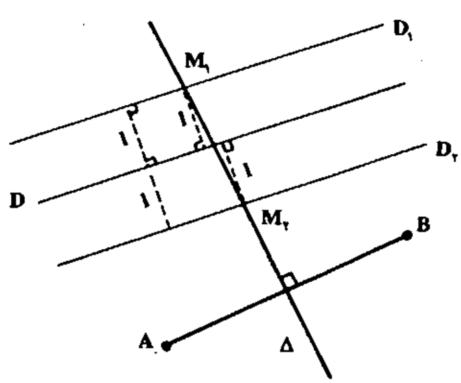
حالت اول: اگر یکی از دو خط D_1 و D_2 بریکی ازخطهای D'_1 یا D'_2 منطبق شوند، مسأله بی‌شمار جواب دارد، و این درصورتی است که فاصلهٔ بین دو خط متوازی D و D′ برابر $l+l'$ یا $|l-l'|$ باشد.





حالت دوم: اگر هیچ‌یک از خطوط D_1 و D_2 بر خطهای D'_1 و D'_2 منطبق نشوند، معادله جواب ندارد. و این در صورتی است که فاصلهٔ بین دوخط متوازی D و D′ برابر $l+l'$ یا $|l-l'|$ نباشد.

مثال ۴ — دو نقطهٔ A و B و خط D در یک صفحه مفروضند. نقطه‌ای از این صفحه را تعیین کنید که از خط D به فاصلهٔ معین l واقع بوده، از دو نقطهٔ A و B نیز به یک فاصله باشد.



حل ــ می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که از خط مفروض D به فاصله معین l واقع است دو خط D_1 و D_2 موازی این خط و در طرفین آن است. بنابراین، این دو خط را رسم می کنیم. از طرفی مکان هندسی نقطهٔ متساوی‌الفاصله از دو نقطهٔ ثابت A و B عمود منصف پاره خط AB است، لذا این عمود منصف را رسم می‌کنیم و آنرا Δ می‌نامیم. نقاط تقاطع خط Δ با خطهای D_1 و D_2 جواب مسأله است و تعداد جوابهای مسأله عبارت است از:

الف) دو جواب، درصورتی که خط Δ غیرموازی با خط D باشد.

ب) بی‌شمار جواب، درصورتی که خط Δ بر یکی از دو خط D_1 یا D_2 منطبق شود.

ج) بدون جواب، درصورتی که خط Δ موازی خط D و متمایز با خطهای D_1 و D_2 باشد.

مثال ۵ ــ دو خط $D: 3x-4y-5=0$ و $D': 2x+4y+5=0$ مفروضند. نقطه ای روی خط 'D مشخص کنید که از خط D به فاصله ۲ سانتیمتر باشد.

حل ــ معادلهٔ خطهای D_1 و D_2 را که از خط D به فاصلهٔ ۲ سانتیمتر قرار دارند، به دست می‌آوریم. نقطه‌های تقاطع این دو خط با خط 'D، جواب مسأله است.

$$l=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow 2=\frac{|3x-4y-5|}{\sqrt{9+16}} \Rightarrow$$

$$|3x-4y-5|=10 \Rightarrow D_1: 3x-4y+5=0 \text{ و } D_2: 3x-4y-15=0$$

$$\begin{matrix} D_1: \\ D': \end{matrix}\begin{cases} 3x-4y+5=0 \\ 2x+4y+5=0 \end{cases} \Rightarrow x=-2 \Rightarrow y=-\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow M_1(-2,-\frac{1}{4})$$

$$\begin{matrix} D_2: \\ D': \end{matrix}\begin{cases} 3x-4y-15=0 \\ 2x+4y+5=0 \end{cases} \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=-\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow M_2(-2,-\frac{9}{4})$$

نقاط جواب مسأله.

مثال ۶ ــ نقطه‌ای روی منحنی (C) به معادلهٔ $y=\frac{x+7}{x-1}$ تعیین کنید که از خط $D: 2x+y-3=0$ به فاصلهٔ $2\sqrt{5}$ قرار داشته باشد.

حل ــ نقطهٔ تقاطع منحنی فوق با دو خط D_1 و D_2 که به فاصلهٔ $2\sqrt{5}$ از خط D واقعند، جواب مسأله است.

$$l=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow 2\sqrt{5}=\frac{|2x+y-3|}{\sqrt{4+1}} \Rightarrow$$

$$|2x+y-3|=10 \Rightarrow D_1: 2x+y+7=0 \text{ و } D_2: 2x+y-13=0$$

$$\begin{matrix} D_1: \\ (C): \end{matrix}\begin{cases} 2x+y+7=0 \\ y=\frac{x+7}{x-1} \end{cases} \Rightarrow 2x^2+6x=0 \Rightarrow x=0, x=-3$$

$$\Rightarrow M_1\left|\begin{matrix}0\\-7\end{matrix}\right. ,\ M_2\left|\begin{matrix}-3\\-1\end{matrix}\right.$$

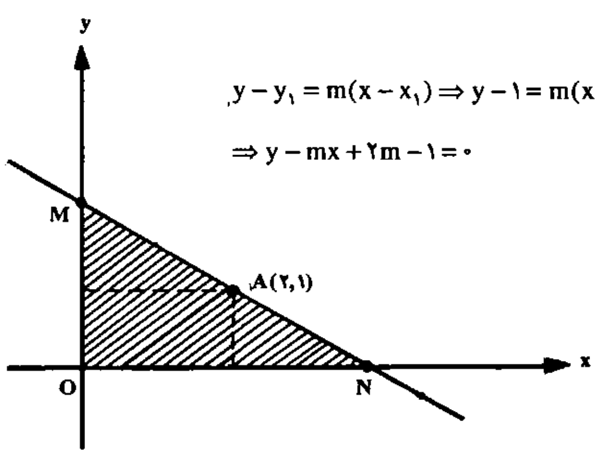
$$\begin{matrix} D_2: \\ (C): \end{matrix}\begin{cases} 2x+y-13=0 \\ y=\frac{x+7}{x-1} \end{cases} \Rightarrow 2x^2-14x+20=0 \Rightarrow x=2, x=5$$

$$\Rightarrow M_3\left|\begin{matrix}2\\9\end{matrix}\right. ,\ M_4\left|\begin{matrix}5\\3\end{matrix}\right.$$

پس چهار نقطه M_1 و M_2 و M_3 و M_4 روی منحنی (C) وجود دارد که از خط D به فاصلهٔ $2\sqrt{5}$ می‌باشند.

مثال ۷ ــ نقطهٔ $A(2,1)$ در دستگاه مختصات xoy مفروض است. اولاً ــ معادلهٔ خط D را که از نقطهٔ A می‌گذرد و با محورهای مختصات مثلثی به مساحت ۴ سانتی‌متر مربع ایجاد می‌کند، بنویسید. ثانیاً ــ مختصات نقاطی از بیضی به معادلهٔ $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$ را بیابید که از خط D به فاصلهٔ $\sqrt{5}$ قرار داشته باشند.

حل ــ ضریب زاویهٔ خط D را برابر m فرض می‌کنیم داریم:



$$y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow y-1=m(x-2)$$

$$\Rightarrow y-mx+2m-1=0$$

$$x=۰ \Rightarrow y=-۲m+۱ \text{ عرض ازمبداء خط } \Rightarrow M(۰,-۲m+۱)$$

$$y=۰ \Rightarrow x=\frac{۲m-۱}{m} \text{ طول از مبداء خط } \Rightarrow N(\frac{۲m-۱}{m},۰)$$

$$S_{OMN}=\frac{۱}{۲}|pq| \Rightarrow ۴=\frac{۱}{۲}\left|(\frac{۲m-۱}{m})\ (-۲m+۱)\right|$$

$$\Rightarrow (۲m-۱)^۲=۸|m| \Rightarrow ۴m^۲+۱-۴m=-۸m$$

$$\Rightarrow ۴m^۲+۴m+۱=۰ \Rightarrow \boxed{m=-\frac{۱}{۲}}$$

$$۴m^۲+۱-۴m=۸m \Rightarrow ۴m^۲-۱۲m+۱=۰$$

$$\Rightarrow m=\frac{۶\pm\sqrt{۳۲}}{۴}$$

$$\Rightarrow \boxed{m=\frac{۳}{۲}+\sqrt{۲}}\ ,\ \boxed{m=\frac{۳}{۲}-\sqrt{۲}}$$

مسأله را با $m=-\frac{۱}{۲}$ حل می کنیم، محاسبهٔ در مورد دو مقدار دیگر m نیز، شبیه این محاسبه است.

$$m=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow D: y+\frac{۱}{۲}x-۱-۱=۰ \Rightarrow D: ۲y+x-۴=۰$$

حال معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را که از خط D به فاصلهٔ $\sqrt{۵}$ واقع است می‌نویسیم و نقطهٔ برخورد آن را با منحنی (C) به دست می‌آوریم.

$$l=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}} \Rightarrow \sqrt{۵}=\frac{|۲y+x-۴|}{\sqrt{۵}} \Rightarrow$$

$$|۲y+x-۴|=۵ \Rightarrow ۲y+x-۴=+۵ \Rightarrow D_۱: x+۲y-۹=۰$$

$$۲y+x-۴=-۵ \Rightarrow D_۲: x+۲y+۱=۰$$

$$\begin{matrix} D_۱: \\ (C): \end{matrix}\begin{cases} x+۲y-۹=۰ \\ \frac{(x-۲)^۲}{۹}+\frac{(y-۱)^۲}{۴}=۱ \end{cases} \Rightarrow M_۱(\frac{۱۹}{۵},\frac{۱۳}{۵})$$

$$\begin{matrix} D_۲: \\ (C): \end{matrix}\begin{cases} x+۲y+۱=۰ \\ \frac{(x-۲)^۲}{۹}+\frac{(y-۱)^۲}{۴}=۱ \end{cases} \Rightarrow M_۲(\frac{۱}{۵},-\frac{۳}{۵})$$

※ نام کسانی که حل درست یک یا دو مسأله هندسهٔ مسابقه‌ای برهان ۱۳ را فرستاده‌اند:

۱ـ آقای بهمن اصلاح پذیر دبیر ریاضی منطقهٔ ۱۷ تهران

۲ـ آقای امین سعیدفر دانش آموز سال چهارم ریاضی‌فیزیک از تهران

۳ـ آقای مهران نقی‌زاده دانش‌آموز سال چهارم ریاضی فیزیک از شهر ری

۴ـ آقای علی ازدری راد دانش‌آموز سال سوم ریاضی فیزیک از مشهد

۵ـ آقای رضا تقی پور از شیراز

۶ـ آقای محمود تدین دانش‌آموز سال دوم ریاضی فیزیک از ساری (دبیرستان دکتر بهشتی)

۷ـ آقای عبداله شعبانی از مراغه

۸ـ آقای امیرمنصور خان محمد از تهران

۹ـ آقای رضا سالم از دبیرستان کمال تهران

۱۰ـ آقای علی مسگری دانش‌آموز سال چهارم ریاضی فیزیک از گرگان (دبیرستان شهید بهشتی)

۱۱ـ آقای رضا بردباری دانش‌آموز سال چهارم ریاضی فیزیک از شیراز

۱۲ـ آقای محمد بیشنماز دانش‌آموز سال دوم ریاضی‌فیزیک از تهران

۱۳ـ آقای علی مقدم دانش‌آموز سال چهارم ریاضی فیزیک از منطقهٔ ۱۱ تهران (دبیرستان شهید مفتح)

۱۴ـ آقای علی نخودچی دانش‌آموز سال چهارم ریاضی فیزیک ازمشهد (دبیرستان شهید جباریان)

۱۵ـ آقای علی نصیری امینی دانش‌آموز سال چهارم ریاضی فیزیک از منطقه ۷ تهران (دبیرستان صالح)

۱۶ـ آقای میثم نصیری دانش‌آموز سال سوم ریاضی فیزیک از تهران

۱۷ـ آقای محمدرضا ضرابی از تهران

۱۸ـ آقای شبگیر حسنی دانش‌آموز سال سوم ریاضی فیزیک از تهران

۱۹ـ آقای عبداله قهقایی (آرش) دانش‌آموز سال سوم ریاضی فیزیک از آمل

۲۰ـ آقای علی قاسمی دانش‌آموز سال اول از مشهد مقدس

۲۱ـ آقایان علی‌هزاری و علی‌جلوه‌دار سال سوم ریاضی از تهران

در پیرامون منظومهٔ شمسی

(یک معمای شگفت‌انگیز)

(دنبالهٔ مطلب شمارهٔ قبل)

● نوشتهٔ مارتین گاردنر ● ترجمهٔ حسن نصیرنیا

توجه داشته باشید که تعداد حروف اسمهای خانه های خاکستری فرد و تعداد حروف اسمهای خانه‌های سفید زوج است. ریاضیدانان می‌گویند که این دو مجموعه خانه، همراه با اسمهای مربوط دارای همپایگی متقابل‌اند؛ بدین معنی که یکی همپایگی زوج دارد و دیگری همپایگی فرد. هربار که سکه‌ای به خانهٔ مجاور حرکت می‌کند، همپایگی آن تغییر می‌یابد.

چنانچه کار گذاشتن سکهٔ پنج ریالی روی ماتریس را از هریک از خانه‌ها شروع و آن‌را به تعداد حروف همان خانه جابه‌جا کنید، بی‌تردید سکه سرانجام روی یک خانهٔ سفید قرار خواهد گرفت. سبب آن است که حالا باید سکه همپایگی زوج خود را حفظ کند و همهٔ خانه‌های خاکستری خالی بماند. از این‌رو می‌توان با اطمینان خاطر از بازیکن خواست که سکهٔ دو ریالی را روی خانهٔ خاکستری Venus بگذارد.

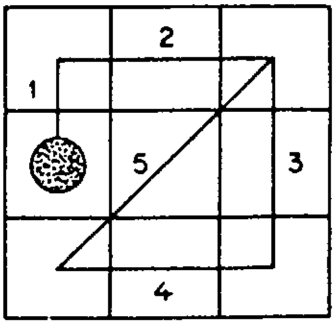
از این مرحله به بعد، سکهٔ پنج ریالی در هر دور از گردش خود به تعداد دفعات فرد حرکت خواهد کرد. از این‌رو تفاوت نمی کند که در هر مرحله هفت بار (یا هر تعداد فرد بار)، به تعداد حروف s-e-v-e-n یا به تعداد حروف هر کلمهٔ دارای حرفهای فرد حرکت کند. حتی اگر تعداد حرفهای تشکیل دهندهٔ نام یکی از ناظران حاضر در بازی فرد باشد، می‌توان به هنگام جابه‌جایی سکه نام او را بر زبان آورد. هربار که سکهٔ پنج ریالی به خانهٔ جدید منتقل می‌شود، همپایگی آن تغییر می‌یابد.

این امر به شما امکان می‌دهد که یک سکهٔ دوریالی را چنان هدایت کنید که در یک خانهٔ خالی دارای همپایگی متقابل با همپایگی سکهٔ پنج ریالی قرار گیرد. پس از هشت حرکت، تنها خانهٔ خالی، خانهٔ Moon خواهد بود و سکهٔ پنج ریالی در خانهٔ Pluto جای خواهد داشت.

اگر بخواهید حقهٔ بازی را برای رسیدن با یک نتیجهٔ نهایی دیگر تکرار کنید، باید یک مجموعه دستورهای جدید بیندیشید. البته با دادن دستورهای مناسب می‌توانید ترتیبی بدهید که سکهٔ پنج ریالی سرانجام در یکی از خانه‌های خاکستری بنشیند. با این حال، دقت کنید که کار حذف خانه‌ها به ترتیبی صورت گیرد که «سفینهٔ فضایی» در حال حرکت، همواره به همهٔ خانه‌های اشغال نشدهٔ باقیمانده دسترسی داشته باشد.

حال به یک مسألهٔ ساده، اما کوچک و اندکی دشوار توجه کنید که به نوع دیگری از حرکت سکه روی ماتریس مربوط می‌شود.

سکه ای را بر خانهٔ Mars بگذارید. سپس با ترسیم یک رشته پاره‌خطهای پیوسته و مستقیم (اندازهٔ طول پاره‌خطها و تعیین جهت حرکت خطها در راستای افقی، عمودی یا قطری دلخواه است.) و انتقال سکه در امتداد آنها ترتیبی بدهید که سکه با کمترین تعداد حرکت از هر هشت خانهٔ دیگر عبور کند. برای مثال، در تصویر می‌بینید که این کار با پنج حرکت امکانپذیر می‌شود. شاید باور نکنید که در صورت داشتن دقت نظر و به کار انداختن فکر خود خواهید توانست آن‌را با چهار حرکت انجام دهید. دشواری حل این مسأله برای اکثر مردم دیوانه‌کننده است، اما برای یافتن راه حل، نهایت کوشش خود را بکنید و با مراجعه نکردن به «قسمت سوم پاسخها» لذّت اندیشیدن دربارهٔ این معمای ظریف ترکیباتی را از بین نبرید. به یاد داشته باشید که سکه را یک نقطه فرض می‌کنیم و مسیر حرکت را چنان تنظیم می‌کنیم که سکه از مرکز هر یک از خانه‌های مورد نظر بگذرد.



بـــردارهـــا

(قسمت چهارم)

(ریاضی ۴ نظام جدید و ریاضیات جدید دوم ریاضی)

سید محمدرضا هاشمی موسوی

➤ ضرب برونی (برداری) دو بردار

حاصل‌ضرب خارجی دوبردار غیر صفر $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ را برداری مانند: $\vec{W}$ تعریف می‌کنیم هرگاه:

۱. راستای $\vec{W}$ برراستای $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ عمود باشد.

۲. جهت $\vec{W}$ طوری باشد که کنج $(\vec{V}_1 , \vec{V}_2 , \vec{W})$ مستقیم باشد.

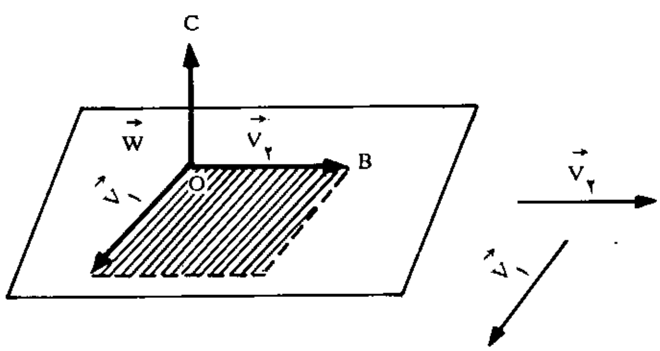
۳. اندازهٔ $\vec{W}$ برابر باشد با:

$$|\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| \cdot |\sin (\vec{V}_1 , \vec{V}_2)|$$

حاصل‌ضرب خارجی دوبردار را حاصل‌ضرب برداری دوبردار نیز نامیده و با یکی از نمادهای $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ یا $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$ نمایش می‌دهیم:

$$\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$$

باتوجه به قسمت (۳) می‌توان گفت اندازهٔ حاصل‌ضرب برونی دوبردار $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ مساوی عدد مساحت متوازی الاضلاعی است که روی این دوبردار بنامی‌شود. برای نمایش حاصل‌ضرب برونی دوبردار $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ از نقطهٔ اختیاری O بردارهای $\vec{OA}$ و $\vec{OB}$ را به‌ترتیب مساوی دو بردار $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ رسم می‌کنیم، آنگاه از نقطهٔ O خطی عمود برصفحهٔ AOB رسم می‌کنیم و روی این خط بردار $\vec{OC}$ را چنان اختیار می‌کنیم که کنج (O − ABC) یک کنج مستقیم و اندازهٔ بردار $\vec{OC}$ مساوی $|\vec{V}_1| \; |\vec{V}_2| \sin (\vec{V}_1 , \vec{V}_2)$ باشد. بردار $\vec{OC}$ که بدین ترتیب به‌دست می‌آید و آن‌را با $\vec{W}$ نمایش می‌دهیم؛ حاصل‌ضرب برونی دو بردار $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ است.



➤ ویژگیهای ضرب برونی دو بردار

بسادگی ثابت می‌شود که حاصل‌ضرب برونی بردارها دارای ویژگیهای زیر است:

(توجه‌کنید: $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$)

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$$

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3$$

$$\forall a \in \mathbb{R} : (a\vec{V}_1) \wedge \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \wedge (a\vec{V}_2) = a(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$$

$$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0}) \Leftrightarrow (\vec{V}_1 = \vec{0} \vee \vec{V}_2 = \vec{0} \vee \vec{V}_1 \parallel \vec{V}_2)$$

➤ حاصل‌ضرب برونی دو بردار برحسب تصویرهای آنها

در دستگاه مختصات قائم o.xyz بردارهای $\vec{V}_1 (x_1 , y_1 , z_1)$ و $\vec{V}_2 (x_2 , y_2 , z_2)$ را درنظر می‌گیریم؛ دراین‌صورت داریم:

$$\vec{V}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

$$\vec{V}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

و بنابراین ضرب برونی دو بردار چنین می‌شود:

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \wedge (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k})$$

اما باتوجه به تعریف ضرب برونی بردارها می‌توان نوشت:

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = 0$$

و $\vec{i} \wedge \vec{j} = -\vec{j} \wedge \vec{i} = \vec{k}$

و $\vec{j} \wedge \vec{k} = -\vec{k} \wedge \vec{j} = \vec{i}$

و $\vec{k} \wedge \vec{i} = -\vec{i} \wedge \vec{k} = \vec{j}$

بنابراین پس از ضرب برونی و استفاده از تساویهای اخیر و اختصار لازم داریم:

$$V_1 \wedge V_2 = (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)k$$

ویا: $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$

که تصویرهای حاصل‌ضرب خارجی دوبردار مفروض برمحورهای قائم مختصات چنین است:

$X = y_1z_2 - z_1y_2$ و $Y = z_1x_2 - x_1z_2$ و $Z = x_1y_2 - x_2y_1$

درنتیجه اندازهٔ حاصل‌ضرب برونی دو بردار برحسب تصویرهای آن بردارها به صورت زیر است: $\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$

$$|\vec{V}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

برای سادگی می‌توان حاصل‌ضرب خارجی دو بردار را به‌صورت زیر نیز نشان داد:

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

مثال ۱: اندازهٔ بردار $\vec{V} = 2\vec{V}_1 \wedge 2\vec{V}_2$ را بافرض آن که $|\vec{V}_1| = 4$ و $|\vec{V}_2| = 3$ و $(\vec{V}_1 \text{ و } \vec{V}_2) = \frac{\pi}{6}$ باشد، حساب کنید.

حل:

$$|\vec{V}| = |2\vec{V}_1 \wedge 2\vec{V}_2| = |4\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2| = 4|\vec{V}_1|\,|\vec{V}_2| \sin(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$$

$$|\vec{V}| = 4 \times 4 \times 3 \sin\frac{\pi}{6} = 24 \Rightarrow |\vec{V}| = 24$$

مثال ۲: اگر $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ دو بردار مفروض، و $|\vec{V}_1| = 4$ و $|\vec{V}_2| = 3$ و $(\vec{V}_1 \text{ و } \vec{V}_2) = \frac{\pi}{4}$ باشد، اندازهٔ بردار $\vec{V} = 3\vec{V}_1 \wedge 4\vec{V}_2$ را حساب کنید.

حل:

$$|\vec{V}| = |3\vec{V}_1 \wedge 4\vec{V}_2| = 3|\vec{V}_1| . 4|\vec{V}_2| \sin\frac{\pi}{4} = 72\sqrt{2}$$

مثال ۳: بردارهای $\vec{V}_1$ (۱− و ۲ و ۳−) و $\vec{V}_2$ (۱ و ۳− و ۱) مفروضند، تصاویر $\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ را برمحورهای مختصات و همچنین اندازهٔ بردار $\vec{V}$ را حساب کنید.

حل: داریم:

$$\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (2 - 9)\vec{i}$$

$$+ (1 - 3)\vec{j} + (3 - 2)\vec{k} \Rightarrow \vec{V} = -7\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

$\Rightarrow X = -7$ و $Y = -2$ و $Z = 1$

$$|\vec{V}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \Rightarrow$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{(-7)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

مثال ۴: دو بردار $\vec{V}_1 = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ و $\vec{V}_2 = -2\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}$ مفروضند، بردارهای یکه‌ای همراستا با $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$ و $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$، پیدا کنید.

حل: داریم:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (5\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}) + (-2\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k})$$
$$= 3\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$$

اگر $\vec{U}_1$ برداریکه‌ای همراستا با $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$ باشد، خواهیم داشت:

$$\vec{U}_1 = \pm \frac{\vec{V}_1 + \vec{V}_2}{|\vec{V}_1 + \vec{V}_2|}$$

و چون:

$$|\vec{V}_۱ + \vec{V}_۲| = \sqrt{۹+۳۶+۴} = \sqrt{۴۹} = ۷$$

پس:

$$\vec{U}_۱ = \pm \frac{۱}{۷}(۳\vec{i} - ۶\vec{j} + ۲\vec{k})$$

همچنین:

$$\vec{V}_۱ \wedge \vec{V}_۲ = (۵\vec{i} - ۲\vec{j} + ۳\vec{k}) \wedge (-۲\vec{i} - ۴\vec{j} - \vec{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۵ & -۲ & ۳ \\ -۲ & -۴ & -۱ \end{vmatrix}$$

$$= (۲ + ۱۲)\,\vec{i} - (-۵ + ۶)\,\vec{j} + (-۲۰ - ۴)\,\vec{k}$$

$$= ۱۴\,\vec{i} - \vec{j} - ۲۴\,\vec{k}$$

به‌طریق مشابه اگر $\vec{U}_۲$ برداریکه‌ای همراستا با $\vec{V}_۱ \wedge \vec{V}_۲$ باشد، خواهیم داشت:

$$\vec{U}_۲ = \pm \frac{\vec{V}_۱ \wedge \vec{V}_۲}{|\vec{V}_۱ \wedge \vec{V}_۲|}$$

و چون:

$$|\vec{V}_۱ \wedge \vec{V}_۲| = \sqrt{۱۴^۲ + ۱ + ۲۴^۲} = \sqrt{۱۹۶+۱+۵۷۶}$$
$$= \sqrt{۷۷۳}$$

پس:

$$\vec{U}_۲ = \pm \frac{\sqrt{۷۷۳}}{۷۷۳}(۱۴\vec{i} - \vec{j} - ۲۴\vec{k})$$

مثال ۵: دو بردار $\vec{a} = ۲\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{b} = ۳\vec{i} + ۴\vec{j} - ۲\vec{k}$ مفروضند. برداری را به‌دست آورید که برهر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود بوده و قدر مطلق آن برابر $\sqrt{۲۹}$ باشد.

حل: بردار مطلوب $\vec{C}$ به‌صورت زیر است:

$$\vec{C} = \lambda(\vec{a} \wedge \vec{b})$$

اما داریم:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (۲\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) \wedge (۳\vec{i} + ۴\vec{j} - ۲\vec{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۲ & -۱ & ۱ \\ ۳ & ۴ & -۲ \end{vmatrix} = (۲-۴)\vec{i} - (-۴-۳)\vec{j} + (۸+۳)\vec{k}$$

$$= -۲\vec{i} + ۷\vec{j} + ۱۱\vec{k}$$

پس:

$$|\vec{C}| = |\lambda| . |\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\lambda|\sqrt{۴+۴۹+۱۲۱} = |\lambda|\sqrt{۱۷۴}$$

بنابراین داریم:

$$|\lambda|\sqrt{۱۷۴} = \sqrt{۲۹} \Rightarrow |\lambda| = \frac{\sqrt{۲۹}}{\sqrt{۱۷۴}} = \frac{۱}{\sqrt{۶}} = \frac{\sqrt{۶}}{۶}$$

$$\Rightarrow |\lambda| = \frac{\sqrt{۶}}{۶} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{۶}}{۶}$$

پس مسأله دارای دو جواب به‌صورت زیر است:

$$\vec{C} = \pm\frac{\sqrt{۶}}{۶}(-۲\vec{i} + ۷\vec{j} + ۱۱\vec{k})$$

مثال ٦: سه بردار $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$ و $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{c} = \vec{i} - \vec{k}$ مفروضند، مقدار بردار $(\vec{a} \wedge \vec{b}) . (\vec{b} . \vec{c})$ را حساب کنید.

حل: داریم:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = (-۱)\vec{i} - (۱)\,\vec{j} + (۱)\,\vec{k}$$

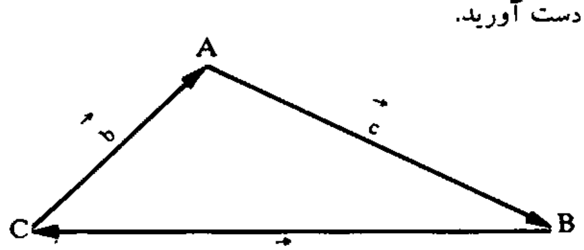
$$\vec{b} . \vec{c} = (۰) + (۰) + (-۱) = -۱$$

$$\Rightarrow (\vec{a} \wedge \vec{b}) . (\vec{b} . \vec{c}) = (-\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})(-۱)$$

$$\Rightarrow (\vec{a} \wedge \vec{b}) . (\vec{b} . \vec{c}) = i + j - k$$

$$\Rightarrow |(\vec{a} \wedge \vec{b}) . (\vec{b} . \vec{c})| = \sqrt{۱+۱+۱} = \sqrt{۳}$$

مثال ۷: در سه‌بر ABC فرمول: $\dfrac{a}{\sin \hat{A}} = \dfrac{b}{\sin \hat{B}} = \dfrac{c}{\sin \hat{C}}$ را به‌دست آورید.



حل: باتوجه به شکل داریم:

$$\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CA}=\vec{۰} \qquad (۱)$$

اگرطرفین رابطهٔ (۱) رایکبار در $\vec{AB}$ و باردیگردر $\vec{BC}$ ضرب برداری کنیم، خواهیم داشت:

$$\vec{AB}\wedge(\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CA})=\vec{۰} \text{ یا } \vec{AB}\wedge\vec{BC}+\vec{AB}\wedge\vec{CA}=\vec{۰} \qquad (۲)$$

و همچنین:

$$\vec{BC}\wedge(\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CA})=\vec{۰} \text{ یا } \vec{BC}\wedge\vec{AB}+\vec{BC}\wedge\vec{CA}=\vec{۰} \qquad (۳)$$

که از روابط (۲) و (۳) نتیجه می‌شود:

$$\vec{AB}\wedge\vec{BC}=-(\vec{AB}\wedge\vec{CA})=\vec{CA}\wedge\vec{AB} \qquad (۴)$$

$$\vec{BC}\wedge\vec{CA}=-(\vec{BC}\wedge\vec{AB})=\vec{AB}\wedge\vec{BC} \qquad (۵)$$

و باتوجه به روابط (۴) و (۵) می‌توان نوشت:

$$\vec{AB}\wedge\vec{BC}=\vec{BC}\wedge\vec{CA}=\vec{CA}\wedge\vec{AB}$$

و یا:

$$\vec{BC}\wedge\vec{BA}=\vec{CA}\wedge\vec{CB}=\vec{AB}\wedge\vec{AC}$$

پس داریم:

$$|\vec{BC}\wedge\vec{BA}|=|\vec{CA}\wedge\vec{CB}|=|\vec{AB}\wedge\vec{AC}|$$

و باتوجه به زاویه‌های بین بردارها که همه از π کوچکترند نتیجه می‌شود:

$$a\,.\,c\sin\hat{B}=b\,.\,a\sin\hat{C}=c\,.\,b\sin\hat{A}$$

که از آن فرمول: $\dfrac{a}{\sin\hat{A}}=\dfrac{b}{\sin\hat{B}}=\dfrac{c}{\sin\hat{C}}$ به‌دست می‌آید.

مثال ۸: مساحت سه‌بری که به‌وسیلهٔ سه نقطهٔ A و B و C پدید می‌آید را به‌دست آورید، درصورتی که داشته‌باشیم:

$$\vec{OA}\,(۱,-۱,۱),\ \vec{OB}\,(-۱,۲,۱),\ \vec{OC}\,(۱,-۲,-۱)$$

حل: داریم:

$$S=\frac{۱}{۲}|\vec{AB}\wedge\vec{AC}|$$

و یا:

$$S=\frac{۱}{۴}(\vec{AB}\wedge\vec{AC})^{۲}$$

از طرفی، می‌توان نوشت:

$$\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=(-۱-۱)\vec{i}+(۲-(-۱))\vec{j}+(۱-۱)\vec{k}$$
$$=-۲\vec{i}+۳\vec{j}$$

$$\vec{AC}=\vec{OC}-\vec{OA}=(۱-۱)\vec{i}+(-۲-(-۱))\vec{j}+(-۱-۱)\vec{k}$$
$$=-\vec{j}-۲\vec{k}$$

$$\vec{AB}\wedge\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -۲ & ۳ & ۰\\ ۰ & -۱ & -۲\end{vmatrix}=(-۶)\vec{i}-(۴)\vec{j}+۲\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{AB}\wedge\vec{AC}=-۶\vec{i}-۴\vec{j}+۲\vec{k}$$

$$\Rightarrow S^{۲}=\frac{۱}{۴}((-۶)^{۲}+(-۴)^{۲}+(۲)^{۲})=\frac{۱}{۴}(۳۶+۱۶+۴)$$

$$\Rightarrow S^{۲}=\frac{۵۶}{۴}\Rightarrow S^{۲}=۱۴\Rightarrow \boxed{S=\sqrt{۱۴}}$$

تمرین: اگر برای بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ داشته باشیم:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=۰$$

ثابت کنید:

$$\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{b}\wedge\vec{c}=\vec{c}\wedge\vec{a}$$

(راهنمایی: حل مثال ۷ را مشاهده کنید.)

تمرین: نقاط L و M و N به‌ترتیب روی اضلاع AB و BC و CA از سه‌بر ABC داده شده‌اند و داریم:

$$\vec{AL}=\frac{۱}{۵}\vec{AB},\ \vec{BM}=\frac{۱}{۵}\vec{BC},\ \vec{CN}=\frac{۱}{۵}\vec{CA}$$

اگر مساحت سه بر ABC را با S و مساحت سه بر LMN را با S' نشان دهیم نسبت $\frac{S}{S'}$ را به‌دست آورید.

(راهنمایی: از حل مثال ۸ و تساویهای زیر استفاده کنید:

$$\vec{LM}=\vec{LB}+\vec{BM}=\frac{۴}{۵}\vec{AB}+\frac{۱}{۵}\vec{BC}$$

$$\vec{LN}=\vec{LA}+\vec{AN}=-\frac{۱}{۵}\vec{AB}+\frac{۴}{۵}\vec{AC}$$

$$(\vec{AB}\wedge\vec{AC}=\vec{BC}\wedge\vec{BA}=\vec{CA}\wedge\vec{CB}$$

➤ رابطهٔ بین حاصلضربهای درونی و برونی دو بردار

اگر زاویهٔ بین دو بردار داده شدهٔ $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ را φ بگیریم، برابریهای زیر را داریم:

$$\vec{V}_1(x_1, y_1, z_1), \ \vec{V}_2(x_2, y_2, z_2)$$

و $$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| \cos\varphi$$

$$|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2| = |\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| \cdot |\sin\varphi|$$

و در این‌جا خواهیم داشت:

$$(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)^2 + (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)^2 = |\vec{V}_1|^2 \cdot |\vec{V}_2|^2 (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)$$

و یا:

$$(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)^2 + (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)^2 = |\vec{V}_1|^2 \cdot |\vec{V}_2|^2 = (\vec{V}_1^{\,2}) \cdot (\vec{V}_2^{\,2})$$

و یا:

$$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)^2 = (\vec{V}_1)^2 \cdot (\vec{V}_2)^2 - (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)^2$$

که بادرنظر گرفتن مؤلفه‌های دو بردار $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت:

$$(y_1z_2 - z_1y_2)^2 + (z_1x_2 - x_1z_2)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 =$$

$$(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) \cdot (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2$$

که به اتحاد لاگرانژ معروف است.

مثال ۹: بافرض $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 3$ و $|\vec{V}_1| = 1$ و $|\vec{V}_2| = 5$، مقدار $|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2|$ را حساب کنید.

حل: باتوجه به اتحاد لاگرانژ داریم:

$$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)^2 = (1)^2 (5)^2 - (3)^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow$$

$$|\vec{V}_1 + \vec{V}_2| = 4$$

تصویر[2] متعامد یک بردار برروی برداری دیگر

تصویر متعامد بردار $\vec{V}_1 = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$ روی بردار $\vec{V}_2 = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$ را بانماد $\mathrm{PROJ}_{\vec{V}_2}^{\vec{V}_1}$ نمایش می‌دهیم و به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{PROJ}_{\vec{V}_2}^{\vec{V}_1} = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{V}_2|}$$

درحقیقت عدد بالا تصویر متعامد $\vec{V}_1$ روی محوری است که بردار یکهٔ آن $\dfrac{\vec{V}_2}{|\vec{V}_2|}$ است.

عبارت $\mathrm{PROJ}_{\vec{V}_2}^{\vec{V}_1}$ برحسب مؤلّفه‌های دو بردار چنین است:

$$\mathrm{PROJ}_{\vec{V}_2}^{\vec{V}_1} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

مثال: تصویر متعامد بردار $\vec{V}_1 = 3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ را روی بردار $\vec{V}_2 = 7\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}$ پیدا کنید.

حل: داریم:

$$\mathrm{PROJ}_{\vec{V}_2}^{\vec{V}_1} = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{V}_2|} =$$

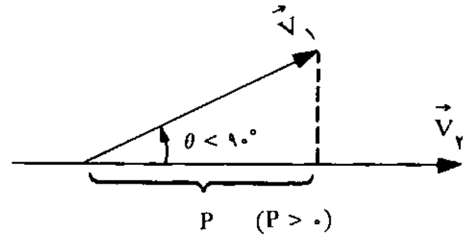
$$\frac{3(7) + 4(4) + (-1)(-4)}{\sqrt{7^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{41}{\sqrt{81}} = \frac{41}{9}$$

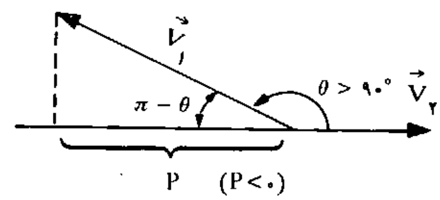
$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{PROJ}_{\vec{V}_2}^{\vec{V}_1} = \frac{41}{9}}$$

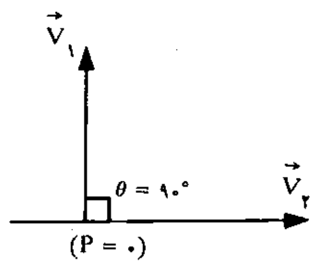
لازم است توضیح دهیم که منظور از تصویر (مؤلفه) بردار $\vec{V}_1$ بر بردار غیرصفر $\vec{V}_2$ و یا در سوی بردار غیر صفر $\vec{V}_2$؛ عددی است

2- project

مانند: $P = |\vec{V}_1| \cos\theta$ که در آن θ زاویهٔ بین $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ است. همانطور که در شکلهای زیر مشاهده می‌شود، P می‌تواند عددی مثبت، منفی یا مساوی صفر باشد:







باتوجه به شکلهای بالا می‌توان نوشت:

$$P = |\vec{V}_1| \cos\theta$$

از طرفی داریم:

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |\vec{V}_1|\,|\vec{V}_2| \cos\theta$$

و یا:

$$\cos\theta = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{V}_1|\,|\vec{V}_2|}$$

پس خواهیم داشت:

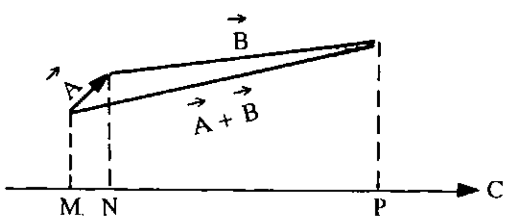
$$p = |\vec{V}_1| \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{V}_1|\,|\vec{V}_2|} = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{V}_2|}$$

و یا:

$$\mathrm{PROJ}_{\vec{V}_2}\vec{V}_1 = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{V}_2|}$$

بنابراین برای یافتن مؤلّفهٔ $\vec{V}_1$ در سوی $\vec{V}_2$ کافی است بردار $\frac{\vec{V}_2}{|\vec{V}_2|}$ را در $\vec{V}_1$ ضرب عددی (اسکالر) کنیم. $\frac{\vec{V}_2}{|\vec{V}_2|}$ را که برداری است به‌طول واحد و در سوی $\vec{V}_2$، بردار سوی $\vec{V}_2$ می‌نامند.

تمرین: باتوجه به شکل‌زیر:



ثابت کنید:

$$\frac{(\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C}}{|\vec{C}|} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{C}}{|\vec{C}|} + \frac{\vec{B} \cdot \vec{C}}{|\vec{C}|}$$

(**راهنمایی**: از تساوی $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP}$ استفاده کنید.)

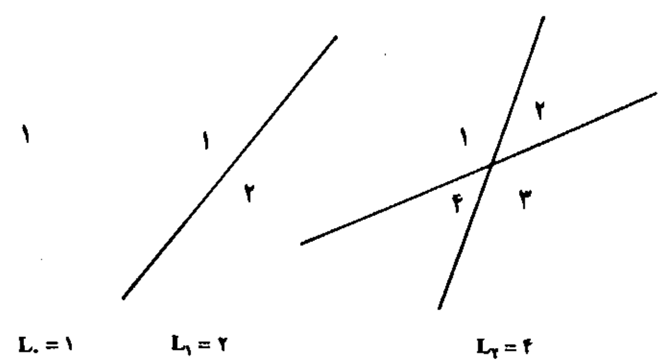
طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۱۳)

خطوط واقع در صفحه

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور —— از: Concrete Mathematics by Knot

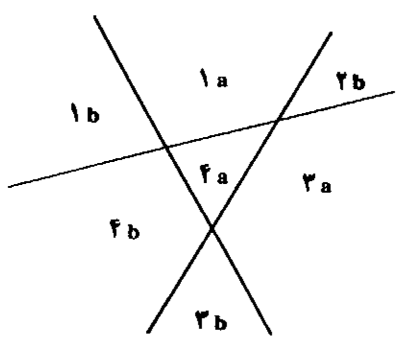
با n برش مستقیم کارد پیتزابری بر یک پیتزا، شخص می‌تواند چند تکه پیتزا به دست آورد؟ یا به صورت عالمانه‌تر آن: بیشترین تعداد، L_n، نواحی تعریف شده با n خط واقع در صفحه چیست؟ این مسأله ابتدا در ۱۸۲۶، توسط یاکوب اشتینر[1]، ریاضیدان سویسی حل شد.

حل: باز هم کار را با توجه به حالات ساده، با شروع از ساده‌ترین آنها، آغاز می‌کنیم. صفحهٔ بدون خط یک ناحیه دارد؛ با یک خط دو ناحیه دارد؛ و با دو خط دارای چهار ناحیه است:



(هر خط از دو طرف تا بی‌نهایت ادامه دارد.)

خوب، بیندیشیم، البته که $L_n = ۲^n$! افزایش خطی تازه، خیلی ساده، تعداد نواحی را دو برابر می‌کند. متأسفانه غلط رفته‌ایم. درصورتی که خط n ام هر یک از نواحی قدیم را به دو ناحیه تقسیم کند به دو برابر شدن نواحی می‌رسیم؛ محققاً، خط دوم می‌تواند یک ناحیهٔ قدیمی را، از آنجا که هر ناحیهٔ قدیمی محدب است، حداکثر به دو ناحیه تقسیم کند. (یک خط مستقیم می‌تواند ناحیه‌ای محدب را به حداکثر دو ناحیهٔ جدید، که خود نیز محدبند تقسیم کند.) اما هنگامی که خط سوم را بیفزاییم (خط ضخیم واقع در ترسیم زیر) بزودی درخواهیم یافت که، بی‌توجه به چگونگی قرار گرفتن دو خط اول، می‌تواند حداکثر سه ناحیهٔ قدیمی را تقسیم کند:



به این ترتیب $L_3 = ۴ + ۳ = ۷$ بهترین هنری است که از ما سر می‌زند.

و پس از اندکی تأمل تعمیم مناسب را درمی‌یابیم. خط n ام (به ازای $n > ۰$) تعداد نواحی را به اندازهٔ k افزایش می‌دهد اگر و تنها اگر k ناحیهٔ قدیمی را تقسیم کند، و k ناحیه قدیمی را تقسیم می‌کند اگر و تنها اگر با خطوط پیشین در $k - ۱$ محل مختلف برخورد کند. دو خط می‌توانند حداکثر در یک نقطه تلاقی کنند. بنابراین خط تازه می‌تواند $n - ۱$ خط قدیم را حداکثر در $n - ۱$ نقطهٔ متفاوت قطع کند، و باید داشته باشیم $k \le n$. به این ترتیب حد زیرینمان را مشخص کرده‌ایم.

$$L_n \le L_{n-1} + n \qquad \text{به‌ازای } n > ۰$$

از این گذشته، با استفاده از استقرا، بسادگی نشان داده می‌شود که می‌توان به تساوی واقع در این فرمول رسید. به این ترتیب که خط n ام را به چنان طریقی مستقر می‌کنیم که با هیچ یک از خطوط دیگر موازی نباشد (و درنتیجه جمیع آنها را قطع کند)، و چنان که از هیچ یک از نقاط تقاطع موجود نگذرد (و درنتیجه جمیع آنها را در مواقع مختلف

قطع کند)، بنابراین فرمول بازگشتی مورد نظر عبارت است از:

$$L_0 = 1\ ;$$

$$L_n = L_{n-1} + n \qquad \text{به‌ازای}\ n > 0 \qquad (۱.۱)$$

مقادیر مشخص L_1، L_2 و L_3 در این مورد به‌طور کامل بررسی شده‌اند و بنابراین آنها را به کار می‌گیریم.

اکنون به جوابی بسته‌ـ صورت نیاز داریم. در این مورد می‌توانیم بار دیگر به بازیچهٔ گمانه‌زنی بپردازیم، اما ۱، ۲، ۴، ۷، ۱۱، ۱۶، ... آشنا به نظر نمی‌رسند؛ بنابراین روشی دیگر در پیش می‌گیریم. اغلب یک فرمول بازگشتی را با «فصل کردن» یا «باز کردن» آن به طریق زیر، یعنی از ابتدا تا انتها، درک می‌کنیم:

$$\begin{aligned} L_n &= L_{n-1} + n \\ &= L_{n-2} + (n-1) + n \\ &= L_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n \\ &\ \vdots \\ &= L_0 + 1 + 2 + \dots + (n-2) + (n-1) + n \\ &= 1 + S_n \qquad \text{با}\quad n + (n-1) + \dots + 3 + 2 + 1 = S_n \end{aligned}$$

به‌عبارت دیگر، L_n یکی بیش از S_n مجموع n عدد صحیح و مثبت اولیه است.

اندازهٔ S_n گاه‌گاه دیدار می‌نماید، و بنابراین ارزش این را دارد که جدول مقادیر اولیهٔ آن را تشکیل دهیم. در این صورت می‌توانیم چنین اعدادی را، چون بار دیگر به آنها برخورد کنیم، بآسانی به‌جا بیاوریم:

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴
S_n	۱	۳	۶	۱۰	۱۵	۲۱	۲۸	۳۶	۴۵	۵۵	۶۶	۷۸	۹۱	۱۰۵

این مقادیر به *اعداد مثلثی*[۲] نیز موسومند، زیرا S_n تعداد سنجاقهای ته‌گرد واقع در یک جدول n سطری مثلث شکل است. به‌طور مثال، جدول چهار سطری معمولی ⁘ $S_4 = 10$ سنجاق دارد.

در محاسبهٔ S_n می‌توانیم از حیله‌ای که، بنا به گزارشها، گوس در ۱۷۸۶، هنگامی که نه ساله بوده به‌کار برده است، استفاده کنیم:

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n \\ +S_n &= n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 \\ \hline 2S_n &= (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) \end{aligned}$$

در این مورد صرفاً S_n را به واورنش می‌افزاییم، و به این ترتیب جمع هر یک از n ستون واقع در سمت راست، $n+1$ می‌شود. و با ساده کردن،

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{به‌ازای}\ n \ge 0 \qquad (۲.۱)$$

بسیار خوب، به جوابمان رسیدیم:

$$L_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1 \qquad \text{به‌ازای}\ n \ge 0 \qquad (۳.۱)$$

به‌عنوان متخصص، ممکن است که از این استخراج رضایت حاصل کرده باشیم و آن را اثبات در نظر بگیریم، گرچه هنگامی که عمل بازکردن و برگرداندن را انجام می‌دادیم کمی سهل‌انگاری کرده‌ایم. اما دانشجویان باید مبناهای دقیقتری را درنظر بگیرند؛ بنابراین بد نیست که با استفاده از استقرا اثبات دقیقی را بنا کنیم. در این صورت مرحلهٔ استقرائی کلیدی مورد نیاز عبارت است از:

$$L_n = L_{n-1} + n = \left(\tfrac{1}{2}(n-1)n + 1\right) + n = \tfrac{1}{2}n(n+1) + 1$$

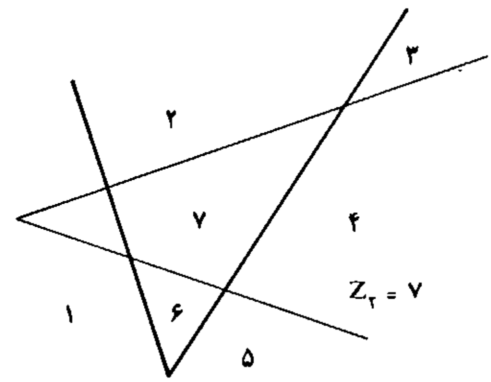
اکنون شکی در مورد بستهٔ (۳.۱) وجود ندارد.

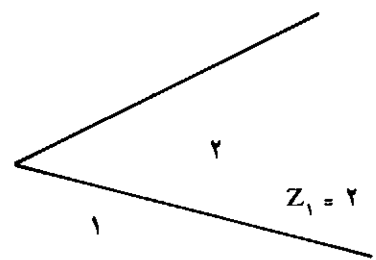
درضمن در مورد «صور بسته»، بدون این‌که مقصودمان را از معنی آن صریحاً بیان کرده باشیم، صحبت کرده‌ایم. معمولاً معنی آن تا اندازه‌ای واضح است. بازگشتیهایی چون (۱.۱) درصورت بسته نیستند‌ـ کمیتی را برحسب خودش بیان می‌کنند؛ اما پاسخهایی چون (۳.۱) هستند. مجموعهایی چون $1+2+\dots+n$ درصورت بسته نیستند‌ـ آنها با به‌کار بردن «...» کلک می‌زنند؛ اما عباراتی چون $n(n+1)/2$ هستند. می‌توانیم تعریفی تقریبی به‌صورت زیر بدهیم: عبارتی در مورد مقدار $f(n)$ درصورت بسته است اگر بتوانیم آن را حداکثر با استفاده از تعداد ثابتی از اعمال استاندارد «خوش تعریف[۳]»، مستقل از n محاسبه کنیم. به‌عنوان نمونه، $2^n - 1$ و $n(n+1)/2$ صور بسته‌اند زیرا تنها شامل جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، نما، در طرقی صریحند.

تعداد کل صور بستهٔ ساده محدود است، و بازگشتیهایی موجودند که صور بستهٔ ساده ندارند. هنگامی که چنین بازگشتیهایی، به‌علت این‌که مکرر رخ می‌دهند، مهم جلوه کنند، اعمال جدیدی به مقدوراتمان می‌افزاییم؛ این‌کار می‌تواند به مقدار زیادی حوزهٔ مسایل قابل حل در صورت بستهٔ «ساده» را توسیع دهد. به‌عنوان مثال، ثابت شده است که حاصلضرب n عدد صحیح اولیه، $n!$، آن‌قدر اهمیت دارد که اکنون آن را عملی مبنایی درنظر بگیریم. بنابراین فرمول «$n!$» در صورت بسته است، گرچه معادلش «$1.2.\dots.n$» نیست.

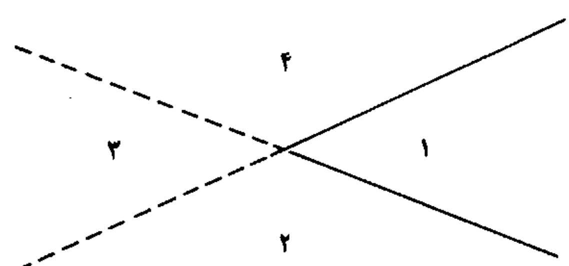
و اینک، تغییر مختصری در مسألهٔ خطوط واقع در صفحه: فرض می‌کنیم که به‌جای خطوط مستقیم از خطوط خمیده، هر یک شامل یک «پیچ»، استفاده کنیم. در این صورت، Z_n، بیشترین تعداد نواحی مشخص با n خط از چنین خطوط خمیده‌ای واقع در صفحه چیست؟

ممکن است انتظار داشته باشیم که بزرگی Z_n دو برابر L_n، یا شاید سه برابر آن باشد. بررسی می‌کنیم:





از حالات سادهٔ فوق، و بعد از پاره‌ای تأمل، درمی‌یابیم که هر خط خمیده مانند دو خط مستقیم است جز اینکه چون «دو» خط مورد بحث از نقطهٔ تقاطعشان به بعد امتداد نمی‌یابند ناحیه‌ها از بین می‌روند.



نواحی ۲، ۳ و ۴ متمایز با دو خط، چون خط خمیده‌ای موجود باشد به ناحیه‌ای منفرد تبدیل می‌شوند، و به این ترتیب، دو ناحیه را از دست می‌دهیم. اما، اگر کارها را به درستی ترتیب دهیم ــ نقطهٔ پیچی باید «ماورای» تقاطعات با خطوط دیگر قرار گیرد ــ کل زیانمان همین می‌شود؛ یعنی، به‌ازای هر خط تنها دو ناحیه را از دست می‌دهیم. به‌این ترتیب:

$$Z_n = L_{2n} - 2n = 2n(2n+1)/2+1-2n$$

$$= 2n^2 - n + 1 \qquad n \geq 0 \text{ به‌ازای } \qquad (4.1)$$

با مقایسهٔ صور بستهٔ (۳.۱) و (۴.۱)، درمی‌یابیم که به‌ازای n های بزرگ،

$$L_n \sim \frac{1}{2} n^2$$
$$Z_n \sim 2n^2$$

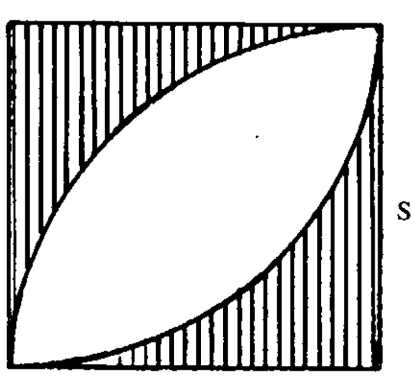
و به این ترتیب با خطوط خمیده چهار برابر تعدادی که با خطوط مستقیم ناحیه به‌دست می‌آید ناحیه حاصل می‌کنیم.

یادداشتها:

1. Jacob Steiner
2. Triangular numbers
3. Well - known

تفریح اندیشه ۳

کمانهایی که در شکل مشاهده می‌کنید، هر یک ربعی از یک دایره هستند. مساحت سطح هاشور خورده را بیابید.



جواب در صفحهٔ ۸۸

صورت قطبی (مثلثاتی) و نمایش هندسی اعداد مختلط

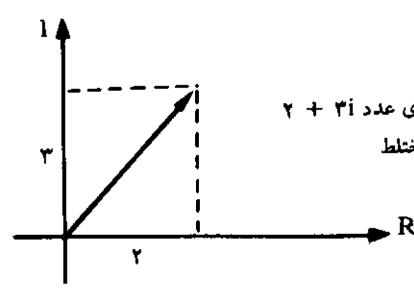
جبر و احتمال سوّم ریاضی نظام جدید

● روح‌الله جهانی‌پور

۲§. نمایش مثلثاتی و تعبیر هندسی

دیدیم که هر عدد مختلط را می‌توان به صورت زوج مرتبی از اعداد حقیقی نشان داد. از جبر دبیرستانی می‌دانیم که بین نقاط صفحهٔ دکارتی و زوجهای مرتب اعداد حقیقی یک تناظر یک به یک برقرار است؛ یعنی به ازای هر زوج از این نوع یک نقطه از صفحهٔ دکارتی و به ازای هر نقطه زوجی از اعداد حقیقی را به دست می‌آوریم. بنابراین اعداد مختلط را می‌توانیم برروی صفحه‌ای موسوم به صفحهٔ مختلط نشان دهیم. این صفحه همان صفحهٔ دکارتی IR^2 است منتها به جای محور x، محور حقیقی و به جای محور y، محور موهومی را داریم. ولی تعبیر دیگری نیز از نقاط صفحه یا زوج مرتبها آموخته‌ایم و آن این‌که هر زوج مرتب از اعداد حقیقی نمایش یک بردار است، برداری که ابتدای آن مبدأ مختصات و انتهای آن نقطهٔ متناظر با آن زوج مرتب در صفحه است. بنابراین مثلاً عدد مختلط ۳i + ۲ را که متناظر با زوج مرتب (۳ و ۲) است را می‌توان با برداری که ابتدای آن‌مبدأ (۰ و ۰) وانتهای آن‌نقطهٔ (۳ و ۲)است، نشان داد. (شکل ۱)

شکل (۱)



نمایش برداری عدد ۳i + ۲
در صفحهٔ مختلط

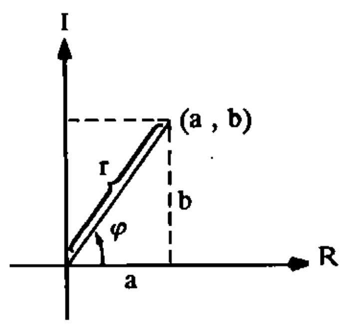
حال فرض کنید $z = (a , b)$ عدد مختلط دلخواهی باشد، طول و عرض نقطهٔ متناظر با این عدد مختلط در صفحه به ترتیب a و b می‌باشند. برداری را که مبدأ را به (a , b) متصل می‌کند رسم می‌کنیم و فرض می‌کنیم φ زاویهٔ بین این بردار و جهت مثبت محور حقیقی در جهت مثلثاتی، یعنی خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد. به کمک قضیهٔ فیثاغورس طول بردار مذکور به راحتی به دست می‌آید و برابر است با $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. لذا تعبیر هندسی قدر مطلق عدد مختلط z همان طول بردار نمایش این عدد در صفحهٔ مختلط است، به کمک روابط هندسی داریم :

$$a = r\cos\varphi \quad \text{و} \quad b = r\sin\varphi$$

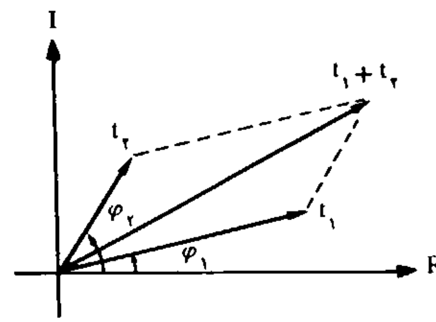
لذا z را می‌توان به این صورت نشان داد :

$$t = a + bi = r\cos\varphi + i\,r\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

شکل (۲)



این شکل نمایش عددهای مختلط را نمایش مثلثاتی می‌نامیم. با این طرز نماش اعداد مختلط یعنی به صورت بردار در صفحه، جمع دو عدد مختلط به صورت جمع برداری دو بردار درمی‌آید و برای به دست آوردن مجموع دو عدد مختلط می‌توان از قانون متوازی‌الاضلاع برای جمع دو بردار استفاده نمود. این روش در شکل ۳ نشان داده شده است. کافی است ابتدای بردار دوم را بر انتهای بردار اول منطبق نموده، از ابتدای بردار اول به انتهای بردار دوم متصل کنیم. بردار حاصل مجموع دو عدد مختلط مفروض را به دست می‌دهد.



شکل (۳)

برای عدد مختلط $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

زاویهٔ φ را آرگومان یا آوند z می‌نامیم و با $\mathrm{Arg}\, z = \varphi$ نشان می‌دهیم. دقت کنید که با قرار دادن فوق مبنی بر این‌که φ زاویهٔ بردار z با قسمت مثبت محور حقیقی در جهت مثلثاتی است، داریم $0 \le \mathrm{Arg}\, z < 2\pi$ و آن را زاویهٔ اصلی یا آرگومان اصلی z می‌نامیم.

حال ببینیم در این نمایش ضرب و تقسیم دو عدد مختلط به چه صورت درمی‌آیند. گیریم

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$
$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

دو عدد مختلط دلخواه با آرگومانهای φ_1 و φ_2 باشند. آنگاه طبق فرمول ضرب دو عدد مختلط داریم:

$$z_1z_2 = r_1r_2\left[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\right]$$
$$= r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

یعنی؛ آرگومان حاصل ضرب برابر است با مجموع آرگومانهای دو عدد مختلط مفروض و قدر مطلق آن برابر حاصل ضرب قدر مطلقهای z_1 و z_2 است و به این ترتیب مطلبی که قبلاً تحقیق کرده بودیم، مجدداً ثابت می‌شود؛ یعنی:

$$|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|$$

بویژه اگر $z_1 = z_2$، آنگاه $r_1 = r_2$ و $\varphi_1 = \varphi_2$، لذا

$$z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

اگر این مطلب را تعمیم دهیم، براحتی می‌توان به استقرا ثابت کرد که برای هر $n \ge 2$:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

این فرمول به فرمول دو مواور موسوم است.

حال فرض کنید $z \neq 0$ یک عدد مختلط دلخواه و

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

آنگاه

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{r^2}(r\cos\varphi\,,\,-r\sin\varphi)$$
$$= \frac{1}{r}(\cos\varphi\,,\,-i\sin\varphi)$$

بنابراین برای z_1 و z_2 فوق داریم:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1z_2^{-1} = \frac{r_1}{r_2}\left[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(-\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\right]$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)$$

تبصرهٔ ۱: گفتیم که $\mathrm{Arg}\, z$ یعنی؛ آرگومان اصلی z بین ۰ و 2π است. لیکن می‌دانیم که اگر برداری را به اندازهٔ 2π رادیان یا به طور کلی $2k\pi$ رادیان که $k \in Z$ دوران دهیم بر روی خود منطبق می‌شود و به این ترتیب با دوران هر بردار مختلط آرگومانهای متفاوت آن را به دست می‌آوریم. هر آرگومان دلخواهی از z غیر از آرگومان اصلی آن را با $\arg z$ نشان می‌دهیم. به طور دقیقتر

$$\arg z = \{\varphi : \varphi = \mathrm{Arg}\, t + 2k\pi \;;\; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$$

نکته، این است که روابط بالا مربوط به z_1z_2 و $\frac{z_1}{z_2}$ برای آرگومانهای دلخواه برقرارند و ممکن است به ازای آرگومان اصلی برقرار نباشند. در واقع داریم:

$$\arg z_1z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$

و

$$\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$$

در این‌جا یک نمادگذاری را معرفی می‌کنیم که هر چند منشأ ریاضی دقیقی دارد لیکن بهتر است فعلاً فقط به صورت یک نماد پذیرفته شود. عبارت $\cos\varphi + i\sin\varphi$ را به صورت $e^{i\varphi}$ نشان می‌دهیم. ملاحظه می‌کنیم که به ازای هر عدد مختلط z، داریم:

$$z = re^{i\varphi} \quad , \quad r = |z| \quad , \quad \varphi = \mathrm{Arg}\, z$$

به این ترتیب روابط ضرب و تقسیم در بالا به این صورت درمی‌آیند:

$$z_1z_2 = r_1e^{i\varphi_1}r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i\varphi_1}.e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}}=\frac{r_1}{r_2}\ e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

بنابراین برای این نمایش، قانون نماها برقرار است.

مطلب را با ارائه چند مثال ادامه می‌دهیم.

مثال ۱ :ثابت کنید اگر $z \neq 1$، آنگاه

$$1+z+z^2+\dots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

حل : قرار می‌دهیم :

$$S=1+z+z^2+\dots+z^n$$

حال دو طرف را در z ضرب می‌کنیم :

$$zS=z+z^2+\dots+z^{n+1}=S+z^{n+1}-1$$

بنابراین :

$$1-z^{n+1}=S(1-z) \quad \Rightarrow \quad S=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

مثال ۲ : فرمولی برای مجموع

$A = 1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \dots + \cos n\varphi$ بیابید.

حل : در فرمول مثال ۱ ، قرار می‌دهیم :

$z = \cos\varphi + i \sin\varphi$

و از فرمول دو مواور استفاده می‌کنیم. توجه می‌کنیم که اگر $\varphi=2k\pi$، $k \in Z$، آنگاه $A = n + 1$، بنابراین فرض می‌کنیم $\varphi \neq 2k\pi$ یا $z\neq 1$. آنگاه

$$\frac{1-\left(\cos(n+1)\varphi+i\sin(n+1)\varphi\right)}{1-(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=$$
$$1+\sum_{k=1}^{n}(\cos k\varphi+i\sin k\varphi)$$

حال بخشهای حقیقی دو طرف را برابر هم قرار می‌دهیم. قسمت حقیقی طرف راست همان A است. بنابراین باید بخش حقیقی طرف چپ را به دست آوریم. اما طرف چپ برابر است با:

$$\frac{1}{2-2\cos\varphi}\left\{[(1-\cos(n+1)\varphi)+i\sin(n+1)\varphi]\,.\right.$$
$$\left.[(1-\cos\varphi)-i\sin\varphi]\right\}$$

بنابراین :

$$\mathrm{Re}(\text{چپ})=\frac{1}{2(1-\cos\varphi)}(1-\cos\varphi-\cos(n+1)\varphi+\cos n\varphi)$$
$$=\frac{2}{2\times 2\sin\varphi/2}\left(\sin\frac{\varphi}{2}-\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\right)$$
$$=\frac{-2}{2\sin\varphi/2}2\cos\frac{n+1}{2}\varphi\sin\frac{\varphi n}{2}$$
$$=\frac{-2\sin\frac{n\varphi}{2}\cos\frac{n+1}{2}\varphi}{2\sin\varphi/2}=-\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\cos\frac{n+1}{2}}{\sin\varphi/2}$$

مثال ۳ : هر یک از اعداد زیر را به صورت نمایی نشان دهید :

(الف) $a > 0$ و $z = a$ ، داریم :

$$|z|a \quad , \quad \mathrm{Arg}\, z = 0 \Longrightarrow z = ae^{i0}$$

(ب) $a < 0$ و $z = a$ ، داریم :

$$|z| = -a \quad , \quad \mathrm{Arg} z = \mathrm{Arc}\cos\frac{a}{|z|} = \mathrm{Arc}\cos(-1) = \pi$$

پس : $z = -ae^{\pi i}$.

(ج) $z = 1 + i$ ، داریم :

$$|z|=\sqrt{2}\,,\ \mathrm{Arg}\, z=\mathrm{Arc}\cos\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow z=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

(د) $z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، آنگاه

$$|z| = 1 \ , \ \cos\varphi=\frac{1}{2}\Longrightarrow\varphi=\frac{\pi}{3}\Longrightarrow z=e^{i\frac{\pi}{3}}$$

مثال ۴ : ثابت کنید به ازای هر عدد حقیقی $z \neq 0$ داریم :

$$\mathrm{Arg}\frac{1}{z}=\begin{cases}\mathrm{Arg}\, z=0 & z\in \mathrm{IR}\,,\ z>0\\ 2\pi-\mathrm{Arg}\, z & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

حل :اگر $z \in \mathrm{IR}$ و $z > 0$، آنگاه طبق مثال ۳ ، $\mathrm{Arg}\, z = 0$ و چون $\frac{1}{z} \in \mathrm{IR}$ و $\frac{1}{z} > 0$ بنابراین $\mathrm{Arg}\frac{1}{z} = 0$. اگر z عدد حقیقی مثبت نباشد، آنگاه

$$0 < \mathrm{Arg}\, z < 2\pi \quad \text{و} \quad 0 < \mathrm{Arg}\frac{1}{z} < 2\pi$$

از طرفی

$$\mathrm{Arg}\, z + \mathrm{Arg}\frac{1}{z} \in \arg 1 = \{2k\pi \ : \ k \in Z\}$$

بنابراین $k_\circ \in Z$ موجود است که

$$\mathrm{Arg}\,\frac{1}{z} = 2k_\circ\pi - \mathrm{Arg}\,z$$

اما

$$0 < \mathrm{Arg}\,z + \mathrm{Arg}\,\frac{1}{z} = 2k_\circ\pi < 4\pi \Rightarrow k_\circ = 1$$

بنابراین $\mathrm{Arg}\,\frac{1}{z} = 2\pi - \mathrm{Arg}\,z$.

۳§ . ریشهٔ عددهای مختلط

در مجموعهٔ اعداد حقیقی می‌توانیم ریشهٔ n ام مثبت عددهای حقیقی را گه‌گاه همراه با شرایط اضافی به دست آوریم. مثلاً اگر n زوج باشد، باید x در $\sqrt[n]{x}$ در شرط $x \geq 0$ صدق کند. در هر صورت ریشه n ام یک عدد دارای این ویژگی است که اگر آن را به توان n برسانیم خود عدد به دست می‌آید. همین ویژگی را می‌توان تعریف توان $\frac{1}{n}$ یا ریشهٔ n ام عدد مختلط z نیز دانست بنابراین $\sqrt[n]{z}$ یا $z^{\frac{1}{n}}$ را (البته بین این دو نماد تفاوت ظریفی وجود دارد.) به صورت عدد مختلط w تعریف می‌کنیم، طوری که :

$$w^n = z$$

فرض کنیم :

$$z = r\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$$

$$w = \rho\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$$

برای یافتن w کافی است ρ و θ را تعیین کنیم. بنابر فرمول دوموавر داریم:

$$\rho^n\,(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$$

حال دو عدد مختلط داریم که با هم مساویند، در نتیجه :

$$\rho^n = r \quad \text{و} \quad \cos n\theta = \cos\varphi \quad \text{و} \quad \sin n\varphi = \sin\varphi$$

از مجموع معادلات فوق نتیجه می‌گیریم که

$$\rho = \sqrt[n]{r} \qquad r > 0$$

و

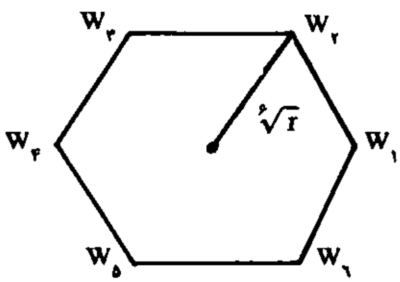
$$n\theta = \varphi + 2k\pi \quad \text{و} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

بنابراین تفاوت بسیار عمده‌ای که بین ریشهٔ n ام مختلط با حقیقی وجود دارد این است که هر عدد مختلط، n تا ریشهٔ n ام دارد، که به ازای $k = 0$ تا $k = n-1$ از بالا حاصل می‌شوند و به صورت

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

هستند. اگر بار دیگر به تعبیر هندسی اعداد مختلط به صورت بردار بازگردیم، مشاهده می‌کنیم که این w_k ها بردارهایی با طول ثابت $\sqrt[n]{r}$ و زوایایی هستند که هریک به اندازهٔ ثابت $\frac{2\pi}{n}$ با هم اختلاف زاویه دارند. به عبارت دیگر نقاط انتهایی این بردارها رؤوس یک n ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع $\rho = \sqrt[n]{r}$ هستند. به ازای $n = 6$، این شش ضلعی در شکل ۴ رسم شده است.

(شکل ۴)



ریشه‌های ٦ ام z روی یک ٦ ضلعی منتظم

مثال ۵ : ریشه‌های n ام واحد را به دست آورید.

حل : به ازای $z = 1$، داریم :

$$r = 1 \quad \text{و} \quad \varphi = 0$$

بنابراین طبق فرمول فوق داریم :

$$w_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\sin\frac{2k\pi}{n}$$

$$(K = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

مثال ٦ : معادلهٔ $z^3 + 1 = 0$ را حل کنید و ریشه‌های آن را به صورت هندسی نمایش دهید.

حل : حل این معادله یعنی یافتن اعداد مختلط z به طوری که

$$z^3 = -1$$

یعنی یافتن ریشه‌های سوم عدد ۱ - . فرم مثلثاتی ۱ - به صورت زیر است:

$$-1 = \cos\pi + i\sin\pi$$

بنابراین به ازای $r = 1$ و $\varphi = \pi$ و $n = 3$ در فرمول ریشهٔ n ام داریم :

$$w_k = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\,\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3} \quad k = 0, 1, 2$$

بنابراین :

$$k = 0 \;\Rightarrow\; w_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k = 1 \;\Rightarrow\; w_2 = -1$$

$$k = 2 \;\Rightarrow\; w_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

این ریشه‌ها را در شکل ۵ نشان داده‌ایم. اینها رؤوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایرهٔ واحد هستند.

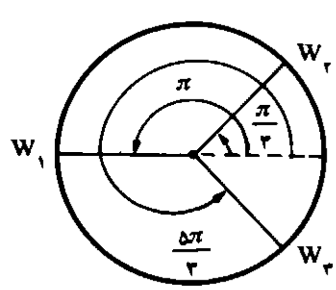
مثال ۷: محاسبه کنید:

(الف) $e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

(ب) $e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

(ج) $k \in Z$ $\quad e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = 1$

شکل (۵)



مثال ۸: با توجه به این‌که اگر ریشه‌های معادلهٔ چند جمله‌ای

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

را به ترتیب z_1، . . . ،z_n بنامیم آنگاه

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$ ، ثابت کنید :

(الف) $1 + \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$

(ب) $\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$

حل: ریشه‌های n ام واحد در واقع ریشه‌های معادلهٔ

$$z^n - 1 = 0$$

هستند که برای آن مطابق نمادگذاری بالا داریم :

$$a_{n-1} = 0 \quad \text{و} \quad a_n = 1$$

از طرفی ریشه‌های nام واحد را قبلاً یافته بودیم. اینها عبارت بودند از:

$$w_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n};\; k = 0, 1, \ldots, n-1$$

بنابراین مطابق مطلب فوق

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} = 0$$

یا:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n} = 0$$

پس (الف) و (ب) با مساوی صفر قرار دادن دو مجموع فوق به دست می‌آیند.

§ ۴. کاربردهای هندسی

مجدداً باز می‌گردیم به تعبیر اعداد مختلط به عنوان نقاط صفحه. این تعبیر ایدهٔ نمایش جبری اشکال هندسی گوناگون توسط روابط متضمن اعداد مختلط را در ذهن تقویت می‌کند. پیش از این قدر مطلق یک عدد مختلط را، فاصلهٔ نقطهٔ نمایش دهندهٔ آن عدد در صفحه تا مبدأ تعریف کردیم. حال اگر $z_1 = (a_1, b_1)$ و $z_2 = (a_2, b_2)$ دو عدد مختلط باشند، آنگاه

$$|z_2 - z_1| = |(a_2 - a_1, b_2 - b_1)| = \left[(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

که همان فرمول آشنای فاصلهٔ دو نقطه در صفحه است. این مطلب اهمیت قدرمطلق را از نظر نمایش جبری مذکور در فوق نشان می‌دهد. مثلاً فرض کنید بخواهیم دایره را به این طریق نشان دهیم. خوب! دایره مجموعهٔ نقاطی است که فاصلهٔ آنها از یک نقطهٔ ثابت موسوم به مرکز برابر مقدار ثابتی موسوم به شعاع است. اگر این نقطهٔ ثابت را z_0 بنامیم، و شعاع را R آنگاه دایرهٔ C به مرکز z_0 و شعاع R ، عبارت است از:

$$C = \{z \in C : |z - z_0| = R\}$$

به عنوان مثال دیگر، می‌خواهیم معادلهٔ بیضی افقی به مرکز مبدأ مختصات را بیابیم. اگر محور اصلی این بیضی محور xها و z_0 یک کانون آن باشد، $-z_0$ کانون دیگر آن خواهد بود. بنابراین طبق تعریف بیضی، این بیضی دارای معادلهٔ

$$|z - z_0| + |z + z_0| = a = \text{ثابت}$$

است. سعی کنید مثالهای دیگری از این دست را بررسی کنید.

جــــواب نامــه‌هـــا

آقای فریدون عبدی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (کامیاران)

ضمن تشکر از مقالهٔ ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که سعی کنید مقالات و مسائلی را ارسال کنید که مورد استفاده دانش‌آموزان دبیرستان باشد.

❑ آقای فرزاد نصیری؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (اراک)

از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. امید است از آنان در شماره‌های آتی مجله استفاده کنیم.

❑ آقای سعید اشرفی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (ساوه)

از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. امید است برای شماره‌های آینده مجله از آنان استفاده کنیم.

❑ خانم نیکتا محتاج؛ دانش آموز رشته ریاضی (تهران):

از نامهٔ محبت آمیز شما متشکریم. در مورد کتابهای کمک درسی ریاضی می توانید به انتهای مجلات ریاضی برهان قسمت معرفی کتاب رجوع کنید. ضمناً به عرض می‌رسانیم که مجلهٔ ریاضی برهان از پاسخ دادن به سؤالات و مسایل خصوصی معذور است. از مسألهٔ ارسالی حل شده شما در صورت لزوم، در جای مناسب استفاده خواهد شد.

❑ آقای حمید جلالی فراهانی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران):

از مقالهٔ ارسالی شما تحت عنوان «عددهای فیثاغورثی» متشکریم. در صورت امکان، در جای مناسب از آن استفاده خواهیم کرد. در ضمن به عرض می رسانیم که اگر k و u و v اعداد دلخواه صحیح باشند، تمام اعداد فیثاغورثی از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$a = 2kuv\ ,\ \ b = k(u^2 - v^2)\ ,\ \ c = k(u^2 + v^2)$$
$$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

روابطی که شما به دست آورده‌اید، حالت خاصی از روابط اخیر می‌باشند.

❑ آقای علیرضا سبزعلیزاده؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران):

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. از آنها در قسمت مسایل برای حل، استفاده خواهیم کرد.

❑ آقای علی انگوتی؛ دیپلمه ریاضی (میانه):

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. از آنها در قسمت مسایل برای حل، استفاده خواهیم کرد.

❑ آقای سیاوش صادقی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران):

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. از آنها در شماره‌های آینده استفاده می کنیم.

❑ آقای عباس نیرومندی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (مرودشت):

از مطلب ارسالی شما متشکریم. در صورت امکان از آن استفاده خواهیم کرد.

❑ آقای اثلدار آبیار؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (ارومیه):

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. در صورت امکان از آنها استفاده خواهیم کرد.

آقای محمد رضا نیکسار؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (بندر انزلی):

از ارسال سرگرمیهای ریاضی و مسایل حل شدهٔ شما متشکریم. از آنها در شماره های آینده استفاده می کنیم.

خانم شبنم افسری؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران):

ضمن تشکر از ارسال حل مسایل برهان به عرض می‌رسانیم که ارسال حل مسایل برهان لزومی ندارد و فقط ارسال حل مسایل مسابقه‌ای قبل از موعد مقرر مورد نظر است. بنابراین سعی کنید حل مسایل مسابقه‌ای را در زمان مقرر ارسال دارید تا پس از بررسی در صورت صحیح بودن جواب، جایزه‌ای به رسم یادبود به شما تعلق بگیرد و نام شما نیز در مجله ذکر شود.

آقای مهدی رسولی؛ دانشجوی رشته پتروشیمی (اراک):

ضمن تشکر و قدردانی متقابل از شما به عرض می‌رسانیم که از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما که برخی از آنان در سطح دانشگاه مطرح است، برای دانش‌آموزان دبیرستان انتخاب کرده، در شماره‌های آینده در صورت لزوم و در جای مناسب می‌آوریم.

آقای ابراهیم کریمی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (سقز):

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. از آنها در قسمت مسایل برای حل، استفاده خواهیم کرد.

آقای نادر صادقی؛ دانش‌آموز رشته تجربی (شاهین دژ):

از مسایل و تستها و مطلب ارسالی شما تحت عنوان «بررسی خاصیتهای یک به یکی و پوشایی در توابع کثیرالجمله» متشکریم. در صورت لزوم و در جای مناسب از آنها استفاده خواهیم کرد.

آقای ابوالفضل کریمایی (شهریار):

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. در صورت لزوم از آنان استفاده خواهیم کرد.

آقای مجید بالو؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (آمل):

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. در صورت لزوم از آنان استفاده خواهیم کرد.

آقای سعید چهرازی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران):

از مسألهٔ حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. در قسمت مسایل برای حل، از آن استفاده خواهیم کرد.

آقای مهدی وحیدی اربابی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران):

از مطلب ارسالی شما تحت عنوان «محاسبهٔ عدد پی تا ۲۹ میلیون رقم اعشار» متشکریم. از آن در جای مناسب استفاده می‌کنیم.

آقای محسن رفیعی؛ دانش آموز رشته ریاضی (اصفهان):

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. از آنها در شماره‌های آینده استفاده می کنیم.

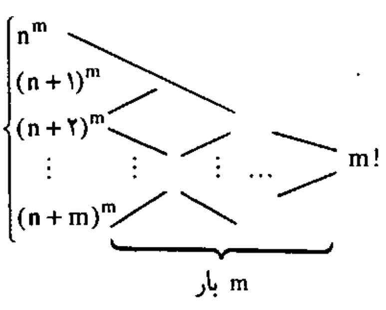
آقای حسین موسوی؛ دانش‌آموز مرکز آموزش راهنمایی علامه حلی (تهران):

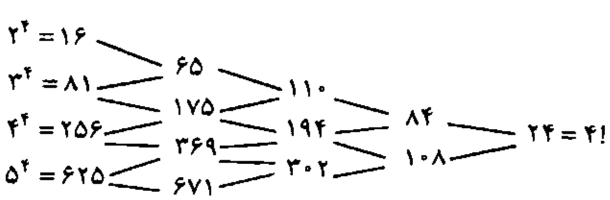
از شما برای ارسال مطلبی مربوط به « روش تفاضلات متناهی برای یافتن $m!$ » متشکریم. برای اطلاع خوانندگان در این جا خلاصه‌ای از آن را می آوریم:

اگر از عدد صحیح n تا $(n+m)$ را به‌طور جداگانه به توان m برسانیم و سپس به‌طور متناوب اختلاف آنها را تا آنجا که تنها یک عدد باقی بماند، به دست آوریم، عدد به دست آمده $m!$ خواهد بود. قابل ذکر است که این اختلاف تناوبی m بار می‌باشد. به طور مثال داریم:

$n=۲\ ,\ m=۴$

ودر حالت کلی خواهیم داشت:





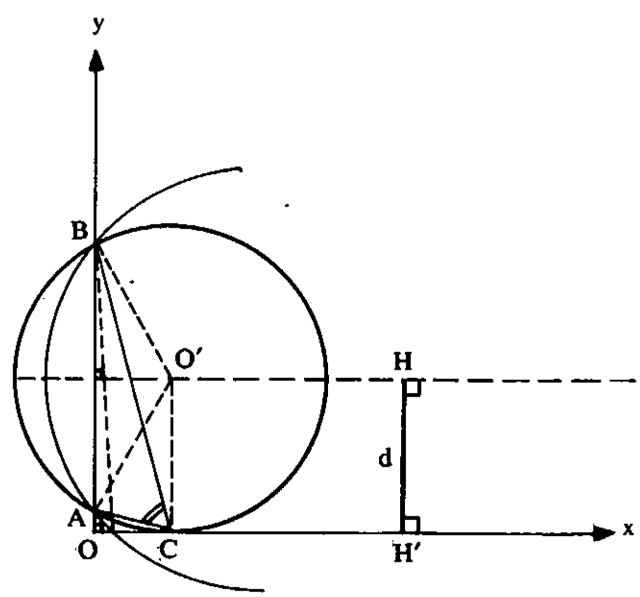
حل مسائل هندسه
مسابقه ای برهان ۱۳

حل۱ـ راه حل اوّل: از آقای عبداله شعبانی از شهرستان مراغه

با فرض $OA = a$ و $OB = b$ نقطهٔ C را روی نیم خط Ox اختیار کرده از C به A و B وصل می‌کنیم و دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم می‌نماییم. مرکز این دایره بر عمود منصف پاره‌خط AB واقع است و زاویهٔ ACB زاویه‌ای محاطی از این دایره است. این زاویه درصورتی کمترین مقدار خود را دارا است که وتر AB متعلق به کوچکترین دایرهٔ گذرنده از A و B و شامل C باشد. در مثلث ABC طبق رابطهٔ سینوسها می‌توان نوشت: (R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ACB):

$$\frac{AB}{\sin A\hat{C}B} = ۲R$$

$$\Rightarrow \sin A\hat{C}B = \frac{AB}{۲R} = \frac{b-a}{۲R}$$



با توجه به اینکه ACB زاویه‌ای حاده است، درصورتی این زاویه بیشترین مقدار خود را خواهد داشت که $\sin A\hat{C}B$ بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد و با توجه به اینکه $b-a$ مقدار ثابتی است، $\sin A\hat{C}B$ در صورتی Max است که R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ACB حداقل مقدار ممکن را داشته باشد. امّا کمترین مقدار R برابر است با:

$$R_{Min} = HH' = \frac{OA + OB}{۲} = \frac{a+b}{۲} \Rightarrow ۲R = a+b$$

پس:

$$\text{Max} \sin A\hat{C}B = \frac{b-a}{b+a} \Rightarrow \text{Max}\, A\hat{C}B = \text{Arc}\sin\frac{b-a}{b+a}$$

در این صورت اگر مرکز دایرهٔ به شعاع می‌نیمم را O' بنامیم داریم $O'A = O'B = O'C = d$ بنابراین برای حل مسأله به مرکزهای دو نقطهٔ A و B و به شعاع $d = \frac{a+b}{۲}$ دو دایره رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ O' قطع کنند از O' عمود OC را بر نیم خط Ox رسم می‌کنیم. نقطهٔ C، نقطهٔ جواب مسأله است یعنی زاویه ACB بیشترین مقدار ممکن را دارا است. واضح است که در این صورت دایرهٔ محیطی مثلث ABC در نقطهٔ C بر Ox مماس است و $OC = \sqrt{ab}$ یا $OC^۲ = OA.OB$ است.

راه حل دوم: از آقای امین سعید فر دانش‌آموز سال چهارم ریاضی فیزیک از تهران

فرض می‌کنیم $A\hat{C}B = \alpha$ ، $O\hat{C}B = \beta$ و $O\hat{C}A = \gamma$ باشد می‌خواهیم زاویهٔ α بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد با توجه به اینکه α زاویه‌ای حاده است داریم:

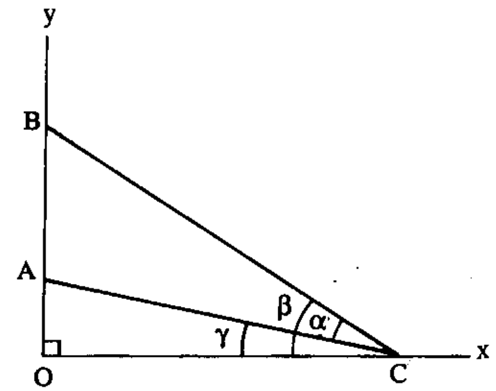
$$\alpha = \beta - \gamma \Rightarrow tg\alpha = tg(\beta - \gamma) = \frac{tg\beta - tg\gamma}{۱ + tg\beta tg\gamma}$$

امّا با فرض $OA = a$ و $OB = b$ و $OC = x$:

$$tg\beta = \frac{b}{x}\ ,\ \ tg\gamma = \frac{a}{x}$$

از آنجا خواهیم داشت:

$$tg\alpha = \frac{\frac{b}{x} - \frac{a}{x}}{۱ + \frac{ab}{x^۲}} = \frac{b-a}{x + \frac{ab}{x}}$$



برای آنکه زاویهٔ حادهٔ α ماگزیمم باشد، باید tgα ماگزیمم باشد و برای اینکه tgα حداکثر مقدار خود را داشته باشد، باید $x+\frac{ab}{x}$ کمترین مقدار ممکن را دارا باشد. امّا در عبارت $x+\frac{ab}{x}$ حاصل‌ضرب دو مقدار x و $\frac{ab}{x}$ مقدار ثابتی است. ($x\times\frac{ab}{x}=ab$). بنابراین وقتی $x+\frac{ab}{x}$ کمترین مقدار خود را دارا است، که دو مقدار x و $\frac{ab}{x}$ برابر باشند یعنی $x=\frac{ab}{x}$ و یا $x^{2}=ab$ و یا $x=\sqrt{ab}$ باشد.

به این ترتیب با محاسبهٔ مقدار x جای نقطهٔ C روی نیم خط Ox را می‌توان مشخص نمود (به وسیلهٔ محاسبه و یا ترسیم).

نکته ــ اگر حاصل ضرب چند کمیت مقدار ثابتی باشد، مجموع آن کمیتها وقتی کمترین مقدار خود را دارا است که آن کمیتها با هم برابر باشند.

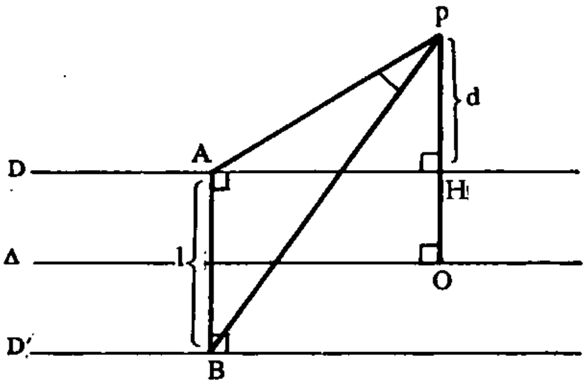
حل مسأله ۲ ــ از آقای عبداله شعبانی از شهرستان مراغه.

مانند مسأله اول نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث PAB بر عمود منصف پاره خط AB واقع است. و درصورتی زاویهٔ APB بیشترین مقدار ممکن را دارا است که وتر AB متعلق به کوچکترین دایرهٔ گذرنده بر A و B و شامل P باشد. و این در صورتی است که نقطهٔ O بر خط متساوی‌الفاصله از دو خط D و D′ واقع باشد. زیرا با فرض $AB=l$ و $PH=d$ داریم:

$$\Delta APB:\ \frac{AB}{\sin A\hat{P}B}=2R$$

(R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث APB)

$$\Rightarrow \sin A\hat{P}B=\frac{AB}{2R}$$



با توجه به اینکه AB مقدار ثابتی است، زاویهٔ P وقتی حداکثر مقدار خود را دارد که R کمترین مقدار خود را داشته باشد. امّا R درصورتی کمترین مقدار خود را دارد که PO عمود بر خط Δ (خط Δ که موازی و متساوی‌الفاصله از دو خط D و D′ است مکان هندسی مرکز دایره هایی است که بر دو نقطهٔ A و B در این مسأله می‌گذرند) باشد یعنی:

$$R=PO=PH+HO=d+\frac{l}{2}=\frac{2d+l}{2}$$

که از آنجا:

$$\operatorname{Max}\sin A\hat{P}B=\frac{l}{2d+l}\Rightarrow \operatorname{Max}A\hat{P}B=\operatorname{Arcsin}\frac{l}{2d+l}$$

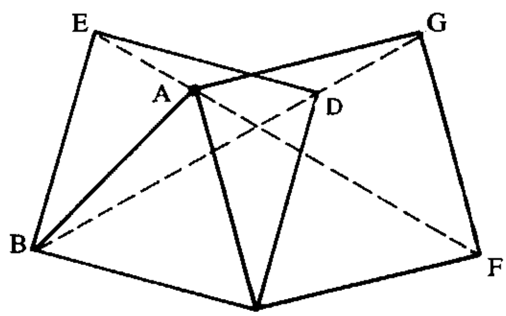
بنابراین برای حل مسأله، خط Δ را که متساوی‌الفاصله از دو خط موازی D و D′ است رسم می‌کنیم. از نقطهٔ P عمود PO را بر خط Δ فرود می‌آوریم. به مرکز O و به شعاع PO دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دو خط D و D′ را در نقاط A و B قطع کند. پاره‌خط AB جواب مسأله است.

مسائل برای حل

- هندسه: محمدهاشم رستمی
- ریاضیات جدید: حمیدرضا امیری
- جبر و مثلثات: احمد قندهاری ـ محمدرضا هاشمی ـ مهدی قمصری
- کامپیوتر: حسین ابراهیم‌زاده قلزم

مسائل ریاضیات سال اول

۱ ـ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC مفروض است. روی ضلع BC و در طرفی که مثلث واقع است، مربع BCDE و روی ضلع AC و در خارج مثلث، مربع ACFG را می‌سازیم. ثابت کنید که سه نقطهٔ E و A و F روی یک خط راست قرار دارند، همچنین سه نقطهٔ B و D و G بر یک استقامت‌اند.



۲ ـ الف) O را مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC و D را نقطهٔ برخورد AO با دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌گیریم $(D \neq A)$. ثابت کنید:

$$DB = DC = DO$$

ب) ثابت کنید، اگر ABCD، یک چهارضلعی محاطی باشد، آن‌وقت نقطه‌های A_1، B_1، C_1 و D_1 به ترتیب مرکزهای دایره‌های محاطی مثلثهای BCD، CDA، DAB و ABC، رأسهای یک مستطیل‌اند. از مسائل المپیادهای ریاضی کشور آلمان

۳ ـ ثابت کنید: اگر داشته باشیم $\begin{cases} p \vee q \equiv p \vee r \\ p \wedge q \equiv p \wedge r \end{cases}$ در این صورت $q \equiv r$.

جبر راحل

۴ ـ ثابت کنید: اگر $(A - B) = (A \cap B)$ در این صورت $A \subseteq B$.

۵ ـ دستگاه را حل کنید.

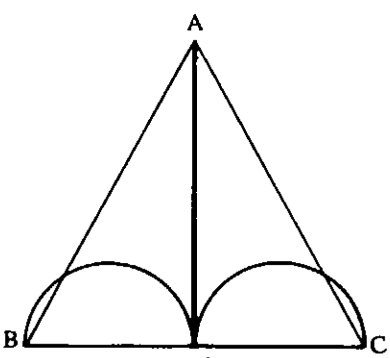
$$\begin{cases} \frac{۲}{۲x-۳} + \frac{۱}{y-۲} = ۷ \\ \frac{۲}{y-۲} + \frac{۲}{z-۱} = ۱۰ \\ \frac{۴}{z-۱} + \frac{۱}{۲x-۳} = ۷ \end{cases}$$

۶ ـ اگر $x, y, z > ۰$ دستگاه مقابل را حل کنید.

$$\begin{cases} x^۲(y+z) = ۱۶ \\ y^۲(z+x) = ۱۶ \\ z^۲(x+y) = ۱۶ \end{cases}$$

مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱ ـ در مثلث متساوی الاضلاع ABC، میانهٔ AA' را رسم می‌کنیم. دایره‌های به قطر BA' و $A'C$ را رسم می‌نمائیم. شعاع دایره‌ای به مرکز A را بیابید که براین دو دایره مماس باشد.

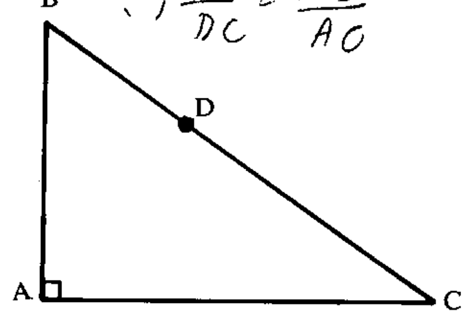


۲ ـ نقطه‌ای روی وتر مثلث قائم‌الزاویه که از اضلاع زاویهٔ قائمه به یک فاصله است، وتر را به دو قطعه به طولهای ۳۰ cm و ۴۰ cm تقسیم می‌کند. طول اضلاع زاویهٔ قائمهٔ مثلث را به دست آورید.

راهنمایی

فرستنده: خانم شبنم افسری از دبیرستان نمونهٔ مردمی فرزانگان منطقه ۱۴ تهران.

$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}$



۳ ـ ثابت کنید: اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند در این صورت،

$$n[(A\times B)-(B\times A)] = n(A)\times n(B)-[n(A\cap B)]^2$$

۴ ـ هرگاه داشته باشیم، $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-y^2=1\}$، ثابت کنید رابطهٔ R تابع نیست.

۵ ـ اگر f یک تابع و g رابطه باشد ثابت کنید $(f\cap g)$ تابع است.

۶ ـ اگر y مجهول باشد، حدود x را چنان بیابید تا معادله زیر جواب حقیقی داشته باشد.

$$5x^2-12xy+4y^2+54x-4y-139=0$$

۷ ـ از مبدأ مختصات عمود OH را بر خط $2x+y-5=0$ رسم نمودیم، مختصات نقطه H کدام است؟

۸ ـ اگر $\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد، مقدار عبارت $\sin^4 x+\cos^4 x$ را محاسبه کنید.

فرستنده: آقای ابراهیم کریمی دانش‌آموز رشته ریاضی (سقز)

۹ ـ ضرایب a و b و c را چنان تعیین کنید که تساوی زیر همواره برقرار باشد.

$$\frac{1}{\sin x\cos x(\sin x+\cos x)}=\frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\cos x}+\frac{c}{\sin x+\cos x}$$

فرستنده: آقای علیرضا سبزعلیزاده دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران)

۱۰ ـ اگر در مثلثی رابطهٔ $(a^2-b^2)c^2-b^2(a^2-c^2)=c^4-b^4$ برقرار باشد، زاویهٔ $\hat{A}$ را حساب کنید.

فرستنده: آقای علی انگوتی دیپلمه ریاضی (میانه)

۱۱ ـ معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\sin(\pi\log x)+\cos(\pi\log x)=1$$

فرستنده: آقای سعید اشرفی دانش‌آموز رشته ریاضی (ساوه)

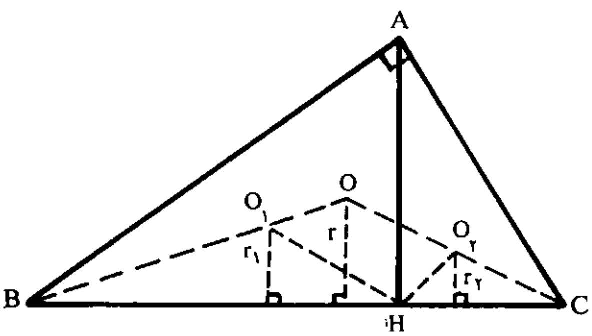
مسائل ریاضیات سال سوم ریاضی

۱ ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\hat{A}=90^\circ)$، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. اگر r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC و r_1 و r_2 شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلثهای ABH و ACH باشند، ثابت کنید:

$$r^2=r_1^2+r_2^2$$

راهنمایی، در هر مثلث $\frac{S}{P}=r$ است.

فرستنده: آقای امیرحسین بسطامی از تهران.



۲ ـ در مثلث ABC، $\hat{A}=120^\circ$ است:

الف) ثابت کنید $r_a-r=3R$

ب) ثابت کنید $\frac{1}{d_a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

پ) اگر اندازه ضلع a و اندازهٔ مساحت این مثلث معلوم باشد، مثلث را رسم کنید.

۳ ـ اگر در فضای برداری V، بردارهای V_1 و V_2 و V_3 مستقل خطی باشند و داشته باشیم $u_1=V_1-V_3$ و $u_2=2V_1+V_2-2V_3$ و $u_3=-V_1-V_2+V_3$ نشان دهید که بردارهای u_1 و u_2 و u_3 وابستهٔ خطی‌اند.

۴ ـ سه مکعب را با هم پرتاب می‌کنیم مطلوب است احتمال آن که اولاً حداقل ۲ عدد از اعداد ظاهر شده مثل هم باشند، ثانیاً احتمال آن که اعداد مثل هم نباشند.

۵ ـ ۲ عددی حقیقی به تصادف از بازهٔ (۲ و ۱) انتخاب می‌کنیم مطلوب است احتمال آن که مجموع دو عدد بین ۳ و ۴ باشد.

۶ ـ معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\cos x = \cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7}$$

فرستنده: آقای مسعود فلاح دانش‌آموز رشته ریاضی (اصفهان)

۷ ـ درستی رابطهٔ زیر را ثابت کنید.

$$b\cos^2\frac{\hat{C}}{2} + c\ \ \cos\frac{\hat{B}}{2} = P$$

فرستنده: آقای مسعود فلاح دانش‌آموز رشته ریاضی (اصفهان)

۸ ـ معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\cos 3x + 2\cos 2x + 7\cos x = 10$$

فرستنده: آقای حمیدرضا محمدی دانش‌آموز رشته ریاضی (اراک)

۹ ـ a و b و c و d را چنان بیابید تا عبارت زیر مکعب کامل شود.

$$8x^6 + 12x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx^{-1}$$

۱۰ ـ نماد [ ] ، علامت جزء صحیح است.

$$\left\{\lim_{x\to\infty}\left[\frac{5x^2-7}{x^2+1}\right]\right\} = ?$$

۱۱ ـ برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا فاکتوریل اعداد از ۱ تا ۲۷ را حساب کرده و در خروجی عدد و فاکتوریل آن را با پیغام مناسب چاپ کند.

۱۲ ـ برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا دو عدد M و N را از روی ورودی بخواند و کوچکترین مضرب مشترک دو عدد را به دست آورده، همراه با دو عدد در خروجی چاپ کند.

مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱ ـ بردار $\vec{V}$ را چنان تعیین کنید که بر بردارهای $\vec{u_1} = 2\vec{i} + 1\vec{j} - 3\vec{k}$ و $\vec{u_2}(-1,2,1)$ عمود باشد، با محور y ها زاویهٔ منفرجه بسازد و اندازه‌اش مساوی $5\sqrt{3}$ باشد.

۲ ـ نقاط $A(3,0,0)$ و $B(0,4,0)$ و $C(0,0,2)$ رأسهای مثلث ABC می‌باشند. معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که بر میانهٔ AA' از این مثلث می‌گذرد و با صفحهٔ $P: x + 2y - 2z = 5$ زاویهٔ $\mathrm{Arc}\ \cos\frac{2}{3}$ می‌سازد.

۳ ـ دو نقطهٔ $A(2,-1,0)$ و $B(-1,1,4)$ مفروضند. نقاط M و M' را روی خط AB چنان بیابید که $(MM'AB)$ یک تقسیم توافقی با نسبت توافقی ۲ باشد. سپس معادلهٔ کرهٔ به قطر MM' را بنویسید.

۴ ـ معادلهٔ کانونیک تصویر قائم خط $D:(x = t, y = t, z = 2t - 1)$، روی صفحهٔ $P: 2x - y + z - 5 = 0$ را به دست آورید.

۵ ـ درستی استنتاج زیر را بررسی کنید.

$$\begin{array}{l} (p\vee \sim q) \Rightarrow \sim r \\ q \Rightarrow s \\ p \vee \sim s \\ \hline \therefore u \Rightarrow \sim r \end{array}$$

۶ ـ اولاً ثابت کنید در هر میدان مقسوم‌علیه صفر وجود ندارد ثانیاً اگر در میدان F، x و y اعضای ناصفر از F بوده و داشته باشیم، $x^{-1} + y = -1$ و $x + y^{-1} = 1$ در این صورت، $x + y = 0$

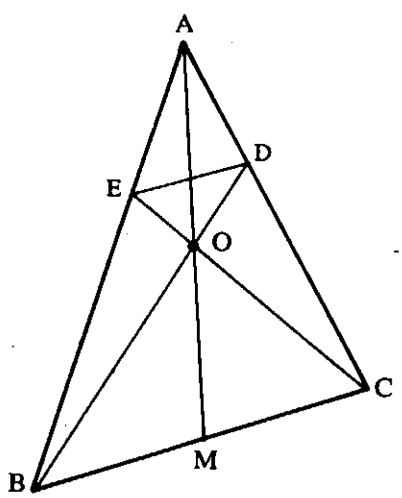
۷ ـ به کمک استقرای ریاضی ثابت کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$، $8^n - 1$ بر ۷ بخش‌پذیر است.

۸ ـ مطلوب است محاسبهٔ، $\int\frac{dx}{(x\,tgx + 1)^2}$

۹ ـ مطلوب است محاسبهٔ انتگرال زیر: $\int\frac{\sqrt{2}dx}{\cos x\sqrt{\sin 2x}}$ $\quad \cos x > 0$

مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

۱ ـ در مثلث ABC رئوس B و C را به نقطهٔ O وسط میانه AM وصل می‌کنیم و نقطهٔ برخورد BO و CO با اضلاع AC و AB را به ترتیب D و E می‌نامیم. ثابت کنید که $DE \parallel BC$ است و اندازهٔ نسبت $\frac{DE}{BC}$ را محاسبه کنید.



۲ ــ محیط یک لوزی ۲۰ سانتی‌متر و مجموع قطرهای ان ۱۴ سانتی‌متر است. مساحت لوزی را بیابید.

فرستنده: آقای علی‌لاری از دبیرستان کمال (تهران)

۳ ــ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ زیر باشند:

$$x^2+3x-3=0$$

حاصل عبارت زیر را به دست آورید:

$$A=\frac{\alpha^2+\beta^2}{(\alpha+\beta)(\alpha^4+6\alpha^3+9\alpha^2+1)}$$

فرستنده: آقای همایون نادرشاهی دانش‌آموز رشته ریاضی (کرمانشاه)

۴ ــ اگر $a^2+b^2+8=4a+4b$ باشد، حاصل عبارت $p=\frac{a^2+b^2}{a+b}$ را حساب کنید.

فرستنده: آقای سیدمحمد شعاری شعار دانش‌آموز رشته ریاضی (رشت)

۵ ــ معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ریشه‌هایش $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ و $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ باشد.

فرستنده: خانم الهه شهپری دانش‌آموز رشته ریاضی (خراسان)

۶ ــ ثابت کنید اگر در یک تصاعد عددی $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}$ باشد، آنگاه $\frac{a_m}{a_n}=\frac{2m-1}{2n-1}$ است.

۷ ــ ثابت کنید: $(\log_{12}19)^{-1}+(\log_{28}19)^{-1}>2$

۸ ــ اگر $\log_a 27=b$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $\log_{\sqrt{3}}\sqrt[4]{a}$ را حساب کنید.

فرستنده مسایل ۶ و ۷ و ۸: خانم لاله تراب نژاد دانش‌آموز رشته ریاضی (تبریز)

۹ ــ به فرض آن‌که $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi$ و $\cos\hat{A}=\cos\hat{B}\ \cos\hat{C}$ باشد، ثابت کنید:

$$\cot g\hat{B}\ \cot g\hat{C}=\frac{1}{2}$$

فرستنده: خانم لاله تراب نژاد دانش‌آموز رشته ریاضی (تبریز)

۱۰ ــ تحقیق کنید عبارت زیر به x بستگی ندارد.

$$A=\frac{\cot g^2x}{1+\cot g^2x}+\frac{tg^2x}{1+tg^2x}\quad (x\neq\frac{k\pi}{2})$$

فرستنده: آقای علی انگوتی دیپلمه ریاضی (میانه)

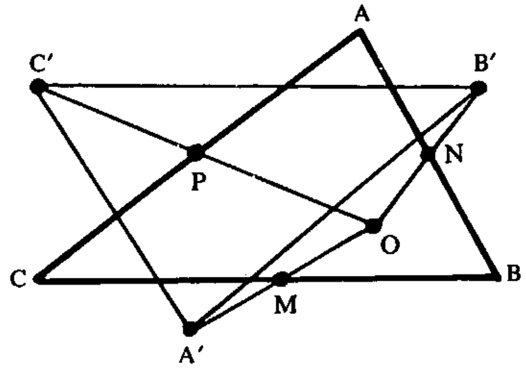
۱۱ ــ معادله زیر را حل کنید.

$$8\cos x\ \cos 2x\ \cos 4x=1$$

فرستنده: آقای سعید چهرازی دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران)

مسائل ریاضیات سال سوم تجربی

۱ ــ مثلث ABC و نقطهٔ O در صفحه آن داده شده‌اند. قرینهٔ نقطهٔ O را نسبت به نقاط M و N و P که به ترتیب وسط اضلاع BC و AC و AB می‌باشند، نقطه‌های ′A و ′B و ′C می‌نامیم.



الف) ثابت کنید که اضلاع مثلث $A'B'C'$ با اضلاع متناظر از مثلث ABC موازی و مساوی است.

ب) ثابت کنید که چهار ضلعیهای $ABA'B'$ و $BCB'C'$ و $ACA'C'$ متوازی الاضلاع‌اند و از آنجا نتیجه بگیرید که خطهای AA'، BB' و CC' از یک نقطه مانند Q می‌گذرند. جای نقطهٔ Q بر روی این پاره‌خطها را مشخص سازید.

۲ ــ اگر $|\vec{a}|=5k+1$ ، $|\vec{b}|=3k-2$ ، $(\vec{a},\vec{b})=\frac{2\pi}{3}$ و $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=35$ باشد، مقدار k را تعیین کنید. اگر $(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{4}$ باشد، مسأله چگونه است؟

۳ ــ حد زیر را حساب کنید.

$$\underset{x\to 5^+}{\text{حد}}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}+\sqrt{x-5}}{\sqrt{x^2-25}}\right)=?$$

۴ ــ پیوستگی تابع f با قانون زیر را در نقطه‌ای به طول $x_\circ=-1$ بررسی کنید.

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x^2+1} & x\neq -1\\[2mm] \dfrac{1}{3} & x=-1\end{cases}$$

۵ ــ برای تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ ، ثابت کنید:

$$yy''+y'^2=3(y^2-1)^2$$

فرستنده مسایل ۳ و ۴ و ۵: شهرزاد توفیقیان دانش‌آموز رشته ریاضی (رامسر)

۶ـ مشتق n ام تابع با ضابطهٔ $y = a^x \sin mx$ را حساب کنید.

فرستنده: آقای علیرضا فاضلی دانش‌آموز رشته ریاضی (رامسر)

۷ـ نقطه‌ای بر منحنی تابع با ضابطهٔ $y = x^2 + 3x$ تعیین کنید که خط مماس در آن نقطه با خط Δ به معادلهٔ $x + 2y = 1$ زاویهٔ 45° بسازد.

۸ـ فاصلهٔ مرکز تقارن منحنی تابع با ضابطهٔ $y = x^3 - 3x^2 + 1$ را از مجانب افقی منحنی تابع با ضابطهٔ $y = \frac{1-4x}{2x+4}$ بیابید.

۹ـ حداقل و حداکثر عبارت زیر را به دست آورید.

$$A = \cos\alpha(2\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha + 1)$$

فرستنده: آقای همایون نادرشاهی دانش‌آموز رشته ریاضی (کرمانشاه)

۱۰ـ ثابت کنید رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\cos\frac{13\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9} = \frac{1}{8}$$

۱۱ـ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$tg\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sin x\right) = \cot g\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cos x\right)$$

فرستنده مسایل ۱۰ و ۱۱: خانم نیکتا محتاج دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران)

□ مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱ـ نقاط $A(4,3)$ و $B(3,-4)$ و مبدأ مختصات سه رأس مثلثی هستند، طول ارتفاع BH از این مثلث را حساب کنید.

۲ـ اگر $F(x) = 3tg^7 5x$ باشد، $F'(\frac{-\pi}{4})$ را حساب کنید.

۳ـ معادلهٔ خط مماس برمنحنی تابع با ضابطهٔ $y = 3\cos x + 2\sin x$ را در محل تلاقی منحنی با محور yها بنویسید.

۴ـ تابع با ضابطهٔ $y = x^3 + px + q$ مفروض است، مقادیر p و q را چنان تعیین کنید که منحنی تابع روی محور yها با خط $y = -3x - 2$ مماس باشد.

۵ـ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که نقطهٔ $C(-4,4)$ مرکز آن بوده و با دایره به معادلهٔ $x^2 + y^2 + 2x = 0$ مماس خارج باشد.

۶ـ مقدار m را چنان تعیین کنید که خط $y - mx - 1 = 0$ بر منحنی تابع با ضابطهٔ $y = \frac{1-x}{-x-1}$ مماس باشد.

۷ـ معادله‌های مثلثاتی زیر را حل کرده و جوابهای عمومی آنها را بنویسید.

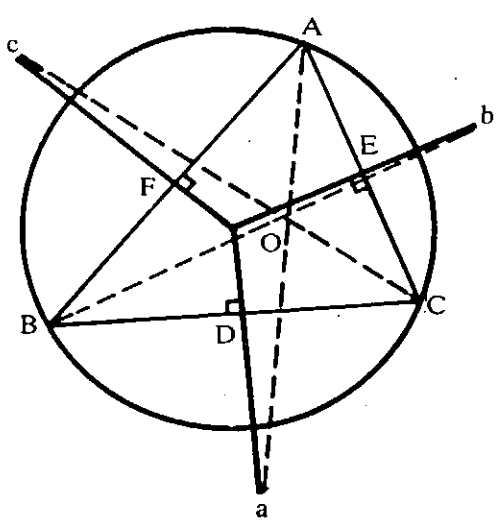
الف) $4\sin^2 x + 2\sin 2x + 12\cos^2 x = 10$

ب) $\cos x \ \sin 2x = \sin x$

۸ـ در مثلث ABC رابطهٔ $\cos\frac{\hat{C}}{2} = \frac{a+b}{4R}$ برقرار است، تحقیق کنید مثلث متساوی‌الساقین است (R شعاع دایره محیطی است).

مسائل مسابقه‌ای

از نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC عمودهای OD، OE و OF را به ترتیب بر اضلاع BC ، CA و AB فرود می‌آوریم. سپس روی نیمخطهای به مبدأ Oی OD، OE و OF و به طرف خارج مثلث پاره‌خطهای $Da = Eb = Fc$ را جدا می‌کنیم. ثابت کنید که خطهای Aa و Bb و Cc متقاربند.

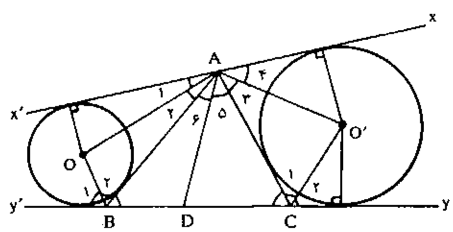


حل مسائل برهان شمارهٔ ۱۴

◆ حل مسائل ریاضیات سال اوّل

۱ ــ نقطه O محل تقاطع نیمسازهای دو زاویهٔ $x'AB$ و ABy' است، همچنین نقطه محل تلاقی O' نیمسازهای دو زاویهٔ xAC و ACy می‌باشد پس $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{A}_3 = \hat{A}_4$ و $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{C}_1 = \hat{C}_2 = 60^\circ$ می‌باشد (چون $A\hat{B}C = A\hat{C}B = 60^\circ$). از طرفی $B\hat{A}C = 60^\circ$ است. بنابراین:

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{A}_4 = 120^\circ \Rightarrow 2\hat{A}_2 + 2\hat{A}_3 = 120^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 60^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 = 60^\circ - \hat{A}_3 \qquad (1)$$



حال خط AD را از رأس A داخل مثلث چنان رسم می‌کنیم که $\hat{A}_5 = D\hat{A}C = \hat{A}_3$ باشد. در این صورت زاویهٔ $\hat{A}_6 = \hat{A}_2$ خواهد بود زیرا:

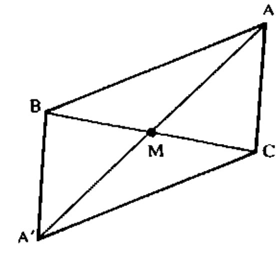
$$\hat{A}_6 = B\hat{A}C - \hat{A}_5 = 60^\circ - \hat{A}_5 = 60^\circ - \hat{A}_3 \quad (2)$$
$$(1)\text{و}(2) \Rightarrow \hat{A}_6 = \hat{A}_2$$

در نتیجه دومثلث $AO'C$ و ACD همچنین دو مثلث AOB و ABD به حالت برابری دو زاویه و ضلع بین برابرند. ($AC = AC, \hat{A}_3 = \hat{A}_5$ ، $\hat{C}_1 = A\hat{C}B = 60^\circ$ و ...). از تساوی این مثلثها نتیجه می‌شود $O'C = CD$ و $OB = BD$. از جمع این دو رابطه خواهیم داشت:

$$OB + O'C = BD + CD = BC = C^{te}$$

(حل از آقای محمدمعصومی از اراک)

۲ ــ حل اولاً: مثلث ABC را در نظر گرفته، میانهٔ AM را به اندازهٔ خود تا نقطهٔ A' امتداد می‌دهیم و از A' به رئوس B و C وصل می‌کنیم چهار ضلعی $ABA'C$ که اقطارش منصف یکدیگرند متوازی الاضلاع است. پس $AB = A'C$ و $BA' = AC$ است.

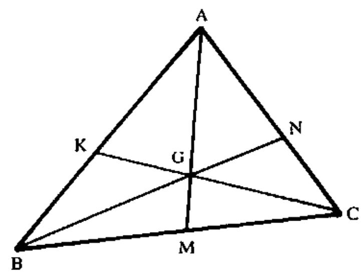


در مثلث ABA' می‌توان نوشت:

$$|AB - BA'| < AA' < AB + BA' \Rightarrow$$
$$|AB - AC| < 2AM < AB + AC$$
$$\Rightarrow \frac{|AB - AC|}{2} < AM < \frac{AB + AC}{2} \text{ یا } \frac{|b-c|}{2} < m_a < \frac{b+c}{2}$$

حل ثانیاً ــ میانه‌های AM و BN و CK از مثلث ABC را رسم می‌کنیم و نقطه تقاطع آنها را G می‌نامیم. بنا به رابطه بالا می‌توان نوشت:

$$m_a < \frac{b+c}{2}\ ,\ m_b < \frac{a+c}{2}\ ,\ m_c < \frac{a+b}{2} \Rightarrow$$
$$m_a + m_b + m_c < a+b+c \Rightarrow m_a + m_b + m_c < 2p\,(1)$$



از طرفی در مثلثهای GBC و GAB و GAC می‌توان نوشت:

$$BC < BG + GC \text{ یا } a < \frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_c \text{ و } b < \frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_c$$
$$\text{و}\ \ c < \frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b \Rightarrow a+b+c =$$
$$2p < \frac{4}{3}(m_a + m_b + m_c)$$
$$\Rightarrow \frac{3p}{2} < m_a + m_b + m_c \qquad (2)$$
$$(1)\text{و}(2) \Rightarrow \boxed{\frac{3p}{2} < m_a + m_b + m_c < 2p}$$

۳ ــ برای اثبات این که گزارهٔ $[p \Rightarrow (q \Rightarrow p)]$ همواره ارزش درست دارد، دو حالت در نظر می‌گیریم.

I) اگر $p \equiv F$ در این حالت ترکیب شرطی فوق به انتفای مقدم همواره ارزش درست داشته و حکم به اثبات می‌رسد.

II) اگر $p \equiv T$ در این حالت گزارهٔ $(q \Rightarrow p)$ همواره ارزش درست داشته و در نتیجه ترکیب شرطی $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ در حالتی که مقدم و تالی هر دو ارزش درست دارند، همواره ارزش درست خواهد داشت.

۴ ــ طبق فرض گزارهٔ $[p \Leftrightarrow (r \Leftrightarrow p)]$ ارزش درست دارد لذا باید همواره، $p \equiv (r \Leftrightarrow p)$ که اگر $p \equiv T$ نتیجه می‌گیریم برای آنکه $(r \Leftrightarrow p)$ نیز درست باشد باید $r \equiv T$ و اگر $p \equiv F$ باید $(r \Leftrightarrow p) = F$ که باز نتیجه می‌شود $r \equiv T$ یعنی در هر حالت می‌بایست $r \equiv T$ یا $\sim r \equiv F$ پس، $(\sim r \Rightarrow \sim p)$ به انتفای مقدم ارزش درست داشته و با توجه به فرض نادرست بودن $(s \vee q)$ در مسأله و اینکه $q \equiv F$ یا $\sim q \equiv T$ در کلّ نتیجه می‌شود $(\sim r \Rightarrow \sim p) \Leftrightarrow \sim q$ ارزش نادرست دارد.

۵ ــ الف ــ با فرض اینکه $A \subseteq B$ می‌خواهیم ثابت کنیم $P(A) \subseteq P(B)$ که $P(A)$ مجموعهٔ همهٔ زیر مجموعه‌های A است.

$$\Big[\ \text{فرض کنیم}\quad X \in P(A) \Rightarrow X \subseteq A \overset{A\subseteq B}{\Rightarrow} X \subseteq B$$
$$\Rightarrow X \in P(B)\Big] \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$$

ب ــ می‌خواهیم ثابت کنیم

$$P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$$

$$\Big[\ \text{فرض کنیم}\quad X \in P(A\cap B) \Leftrightarrow X \subseteq (A \cap B)$$
$$\Leftrightarrow X \subseteq A \wedge X \subseteq B \Leftrightarrow X \in P(A) \wedge X \in P(B)$$
$$\Leftrightarrow X \in P(A) \cap P(B)\Big]$$
$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$$

(توجه دارید که در اثبات مسألهٔ فوق $P(A)$ و $P(B)$ مجموعه‌هایی هستند که اعضای آنها به ترتیب زیر مجموعه‌های A و B بوده و خود، مجموعه می‌باشند و x مجموعه‌ای دلخواه می‌باشد.)

۶ ــ
$$A - (B \cap C) = A \cap (B \cap C)' = A \cap (B' \cup C')$$
$$= (A \cap B') \cup (A \cap C') = (A - B) \cup (A - C)$$

۷ ــ
$$\frac{2}{2(\sqrt[3]{2}+1) + \sqrt[3]{4}} = \frac{2}{2\sqrt[3]{2} + 2 + \sqrt[3]{4}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{4} + 2}\left\{\begin{matrix} a=4 \\ b=2\end{matrix}\right. \Rightarrow \frac{2}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{ab}}$$

برای گویا کردن این کسر صورت و مخرج را در $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{8}} \times \frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}} = \frac{2(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2})}{4-2} = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$$

۸ ــ
$$(x-1)m^2 - (3x-5)m + (2x-6) = 0$$
$$m^2x - m^2 - 3mx + 5m + 2x - 6 = 0$$
$$(m^2 - 3m + 2)x = m^2 - 5m + 6$$
$$(m-1)(m-2)x = (m-2)(m-3)$$

الف) اگر $m = 1 \Rightarrow 0 \times x = 2 \Rightarrow$

معادله غیرممکن است و جواب ندارد.

ب) اگر $m = 2 \Rightarrow 0 \times x = 0$

معادله به اتحاد تبدیل شده است و بی‌شمار جواب دارد.

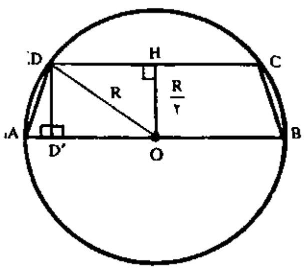
ج) اگر $m \neq 1\ ,\ m \neq 2 \Rightarrow x = \frac{m-3}{m-1}$ جواب معادله.

◆ حل مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱ ــ از O به D وصل می‌کنیم در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHD داریم:

$$HD^2 = OD^2 - OH^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4} \Rightarrow$$

$$HD=\frac{R\sqrt{3}}{2}\Rightarrow CD=2HD=R\sqrt{3}\ .$$



در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADD' داریم:

$$AD'=AO-OD'=R-\frac{R\sqrt{3}}{2}=R(1-\frac{\sqrt{3}}{2})\quad \text{و}$$
$$DO'=OH=\frac{R}{2}$$

$$\Rightarrow AD^2=AD'^2+DD'^2=R^2(1-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{R^2}{4}=$$
$$R^2(2-\sqrt{3})\Rightarrow$$

اندازهٔ هر ساق ذوزنقه $AD=R\sqrt{2-\sqrt{3}}=BC$

پس: محیط ذوزنقه $=2R+2R\sqrt{2-\sqrt{3}}+R\sqrt{3}$
$$=R(2+\sqrt{3}+2\sqrt{2-\sqrt{3}})$$

مساحت ذوزنقه $=\frac{1}{2}OH(AB+CD)=\frac{1}{2}\times\frac{R}{2}(2R+R\sqrt{3})$
$$=\frac{R^2}{4}(2+\sqrt{3})$$

۲ ــ اگر (O',x) یکی از این دایره‌ها باشد، از O به O' وصل می‌کنیم و نقطهٔ تقاطع AB و OO' را H می‌نامیم واضح است که OO' عمود منصف پاره‌خط AB است. مثلث AOO' در رأس A قائم‌الزاویه است و داریم:

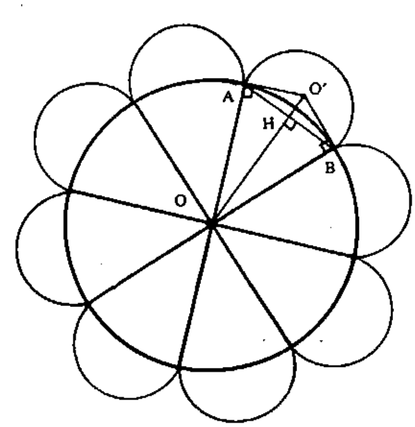
$$AB=C_8=R\sqrt{2-\sqrt{2}}\Rightarrow AH=\frac{R}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$OO'=\sqrt{R^2+x^2}\ ,\ \Delta OO'A:OO'.AH=O'A.OA$$

$$\Rightarrow\sqrt{R^2+x^2}.\frac{R}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}=Rx\Rightarrow x=\frac{R\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{2}$$

$\Rightarrow$ طول قوس یک دایره $=\frac{5}{8}\times 2\pi x=\frac{5}{8}\pi R\sqrt{2}(2-\sqrt{2})$

$\Rightarrow$ محیط شکل مورد نظر $=5\pi R\sqrt{2}(2-\sqrt{2})$



۳ ــ روش اول:

فرض کنیم $(x_1,y)\wedge(x_2,y)\in(f_1\cap...\cap f_n)\Rightarrow$

$$[(x_1,y)\wedge(x_2,y)\in f_1]\wedge[(x_1,y)\wedge(x_2,y)\in f_2]\wedge...$$
$$\wedge[(x_1,y)\wedge(x_2,y)\in f_n]$$

$$\xrightarrow{\text{ها یک به یک هستند } f_i}(x_1=x_2)\wedge(x_1=x_2)\wedge...$$
$$\wedge(x_1=x_2)\Rightarrow x_1=x_2$$

روش دوم: با توجه به این که اشتراک دو تابع و درنتیجه اشتراک چند تابع حقیقی همواره تابع است و با توجه به رابطهٔ $(f\cap g)^{-1}=f^{-1}\cap g^{-1}$ و تعمیم آن و با توجه به قضیهٔ کتاب کافی است ثابت کنیم وارون $(f_1\cap...\cap f_n)$ تابع است (شرط لازم و کافی برای آنکه تابعی یک به یک باشد آن است که وارون آن تابع باشد)

$$(f_1\cap f_2\cap...\cap f_n)^{-1}=f_1^{-1}\cap f_2^{-1}\cap...\cap f_n^{-1}$$

چون f_1 و ... و f_n توابعی یک به یک هستند پس وارون آنها تابع است و اشتراک چند تابع نیز تابع است و حکم ثابت می‌شود.

۴ ــ اگر
$$A=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$$

و

$$B=\{x\in\mathbb{R}\mid 0<x<1\}$$

در این صورت تعریف می‌کنیم: $f:B\to A$ که به راحتی می‌توان ثابت کرد $f(x)=a+(b-a)x$

f تابعی یک به یک و پوششی می‌باشد (دوسویی). بنابراین بین دو مجموعهٔ A و B یک تناظر یک به یک برقرار است.

(اثبات دوسویی بودن تابع فوق به عهده خواننده)

۵ ــ چون $ad-bc=0$ پس $ad=bc$ از طرفی:

$$A^2=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ac+dc&bc+d^2\end{bmatrix}$$

$$\overset{ad=bc}{\Longrightarrow}A^2=\begin{bmatrix}a^2+ad&ab+bd\\ac+dc&ad+d^2\end{bmatrix}\qquad(1)$$

$$(a+d)A=(a+d)\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2+ad&ab+bd\\ac+dc&ad+d^2\end{bmatrix}\qquad(2)$$

$$(1)\ \text{و}\ (2)\Rightarrow A^2=(a+d)A$$

۶ ــ برای اثبات این که هر گروه ۴ عضوی باید حتماً آبلی باشد از جدول استفاده می‌کنیم و برای تکمیل جدول به نکات زیر توجه می‌کنیم:

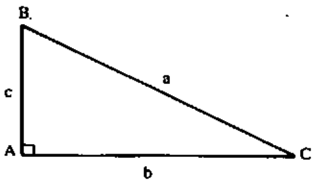
I) چون گروه $(G,*)$، ۴ عضوی فرض شده پس طبق تعریف گروه حتماً باید $e\in G$ و بنابراین $G=\{e,a,b,c\}$

II) چون در هر گروه طبق قضیه عضو خنثی از چپ و راست خنثی بوده و منحصر به فرد است و نیز عضو متقابل منحصر به فرد است و قانون حذف برقرار است لذا در هر سطر یا ستون جدول هر عضو گروه بیش از یک بار نمی‌تواند واقع شده باشد، (مثلاً اگر $a*b=c$ و $a*c=c$ بلافاصله نتیجه می‌گیریم $a*c=a*b$ و طبق قانون حذف $b=c$ که با متمایز بودن اعضاء تناقض دارد)

با توجه به نکات فوق اگر بخواهیم جدول را تشکیل دهیم فقط به صورت زیر می‌تواند جدول مرتب شود که از روی جدول مشاهده می‌شود گروه یک گروه آبلی خواهد بود.

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

۷ ــ
$$\begin{cases}a=13\\a+b+c=30\end{cases}$$
$$\Rightarrow b+c=30-a$$
$$\boxed{b+c=17}$$



زیرا مثلث قائم‌الزاویه است: $b^2+c^2=a^2$

$$\Rightarrow(b+c)^2-2bc=(13)^2$$
$$(17)^2-2bc=169\Rightarrow 289-2bc=169$$
$$\Rightarrow\boxed{bc=60}$$

مجموع دو عدد $S=17$ و حاصل‌ضرب دو عدد $P=60$

$$x^2-Sx+p=0$$
$$x^2-17x+60=0\Rightarrow x=\frac{17\pm\sqrt{289-240}}{2}=\frac{17\pm7}{2}<^{12}_{5}$$
$$\Rightarrow\boxed{b=12}\ ,\ \boxed{c=5}$$

۸ ــ $ax^4+bx^2+c=0$

فرض می‌کنیم: $x^2=y$

$$\Rightarrow ay^2+by+c=0$$

معادله y باید دو ریشه مثبت داشته تا معادله x بتواند چهار ریشهٔ حقیقی داشته باشد که تصاعد عددی بسازند.

اگر معادله (y) دو جواب مثبت داشته باشد. آنها را y_1 و y_2 می‌نامیم و $y_1<y_2$ پس ریشه‌های معادله x عبارتند از:

$$-\sqrt{y_2}\ ,\ -\sqrt{y_1}\ ,\ \sqrt{y_1}\ ,\ \sqrt{y_2}$$

چون باید این چهار عدد تصاعد عددی بسازند، سه جمله متوالی آن را در نظر می‌گیریم و خواهیم داشت:

$$2\sqrt{y_1}=\sqrt{y_2}-\sqrt{y_1}\ \text{و}\ -\sqrt{y_1}\ ,\ \sqrt{y_1}\ ,\ \sqrt{y_2}$$
$$\Rightarrow\sqrt{y_2}=3\sqrt{y_1}\Rightarrow y_2=9y_1$$

نتیجه: اگر ریشه‌های معادله $ax^4+bx^2+c=0$ تصاعد عددی بسازند، یک ریشه معادله $ay^2+by+c=0$ باید (۹) برابر ریشه دیگر باشد.

$$y_2=9y_1\ ,\ y_1+y_2=-\frac{b}{a}\Rightarrow y_1+9y_1=-\frac{b}{a}$$
$$\Rightarrow y_1=\frac{-b}{10a}\ ,\ y_2=\frac{-9b}{10a}$$

از طرفی داریم: $y_1.y_2=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{-b}{10a}\times\frac{-9b}{10a}=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{9b^2}{100a^2}=\frac{c}{a}$

$$\Rightarrow\frac{9b^2}{100a}=\frac{c}{1}\Rightarrow\boxed{9b^2=100ac}$$

۹ ــ داریم:

$$\frac{tg\alpha+\sin\alpha}{\cot g\alpha+\cos\alpha}=\frac{tg\alpha+tg\alpha\cos\alpha}{\cot g\alpha+\cot g\alpha\sin\alpha}=\frac{tg\alpha(1+\cos\alpha)}{\cot g\alpha(1+\sin\alpha)}$$

$$=\frac{tg\alpha(1+\cos\alpha)}{\frac{1}{tg\alpha}(1+\sin\alpha)}=tg^2\alpha\left(\frac{1+\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\right)$$

می‌دانیم $tg^2\alpha\geq0$ و $-1\leq\cos\alpha\leq1$ و $-1\leq\sin\alpha\leq1$، پس خواهیم داشت:

$$tg^2\alpha>0\ ,\ \sin\alpha+1\geq0\ \text{و}$$
$$\cos\alpha+1\geq0\Rightarrow tg^2\alpha\left(\frac{1+\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\right)>0$$

۱۰ ــ داریم:

$$A=\cos\alpha(2\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha+1)$$
$$=\cos\alpha(2(1-\cos^2\alpha)-2\cos^2\alpha+1)$$
$$=\cos\alpha(2-2\cos^2\alpha-2\cos^2\alpha+1)$$

$=\cos\alpha(3-4\cos^2\alpha)=3\cos\alpha-4\cos^3\alpha=-\cos3\alpha$

$\Rightarrow A=\cos(\pi-3\alpha)-1\le\cos(\pi-3\alpha)\le1\Rightarrow-1\le A\le1$

۱۱ ــ داریم:

$$\text{طرف اول}=\frac{1}{\sin10°}-\frac{\sqrt3}{\cos10°}=2\left(\frac{\frac12}{\sin10°}-\frac{\frac{\sqrt3}{2}}{\cos10°}\right)$$
$$=2\left(\frac{\sin30°}{\sin10°}-\frac{\cos30°}{\cos10°}\right)$$
$$=2\left(\frac{\cos10°\sin30°-\cos30°\sin10°}{\sin10°\cos10°}\right)$$
$$=2\left(\frac{\sin(30°-10°)}{2\sin10°\cos10°}\right)=4\left(\frac{\sin20°}{\sin20°}\right)$$
$$=4\Rightarrow\frac{1}{\sin10°}-\frac{\sqrt3}{\cos10°}=4$$

۱۲ ــ با توجه به اتحاد مثلثاتی، $tg2x=\frac{2tgx}{1-tg^2x}$ داریم:

$tg_x^{73}tg_{2x}^{73}+1=0\Rightarrow tg_x^{73}tg_{2x}^{73}=-1$

از طرفین معادله ریشهٔ ۷۳ام می‌گیریم:

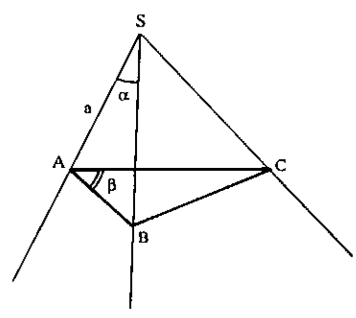
$tgx\ \ tg2x=-1\Rightarrow tgx\left(\frac{2tgx}{1-tg^2x}\right)=-1$

$\Rightarrow2tg^2x=tg^2x-1\Rightarrow tg^2x=-1$

معادله اخیر در مجموعهٔ اعداد حقیقی جواب ندارد و در نتیجه معادله مورد نظر در فاصلهٔ $[0,2\pi]$ جواب حقیقی ندارد.

◆ حل مسائل ریاضیات سال سوم ریاضی

۱ ــ (حل از آقایان: علی صبحی‌پور و علیرضا رمضانی فر)
روی یال Sx پاره‌خط $SA=a$ را اختیار می‌کنیم و در نقطهٔ A صفحه‌ای عمود بر یال Sx رسم می‌کنیم تا یالهای Sy و Sz را به ترتیب در نقاط B ، C قطع کند. نقاط A و B و C را به هم وصل می‌کنیم زاویهٔ $B\hat{A}C=\beta$ زاویهٔ مسطحهٔ یک فرجه از کنج منتظم داده شده است. و مثلثهای SAB ، SAC در رأس A قائم‌الزاویه‌اند.



چون بنا به فرض $A\hat{S}B=A\hat{S}C=B\hat{S}C=\alpha$ است، لذا داریم:

$$\begin{cases}SC=SB=\frac{A}{\cos\alpha}\\AB=AC=atg\alpha\end{cases}$$

$\Delta SBC: BC^2=SC^2+SB^2-2SB.SC\ \ \cos\alpha\Rightarrow$

$BC^2=2SC^2-2SC^2\cos\alpha=2SC^2(1-\cos\alpha)\ (1)$

$\Delta ABC: BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC\cos\beta\Rightarrow$

$BC^2=2AB^2-2AB^2\cos\beta=2AB^2(1-\cos\beta)\ \ (2)$

(۱) و (۲) $\Rightarrow2SC^2(1-\cos\alpha)=2AB^2(1-\cos\beta)$

با جایگزینی SC و AB برحسب a و نسبتهای زاویهٔ α داریم:

$$\frac{a^2}{\cos^2\alpha}(1-\cos\alpha)=a^2tg^2\alpha(1-\cos\beta)\Rightarrow\sin^2\alpha=\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\beta}$$

$$\Rightarrow(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)=\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\beta}\Rightarrow1-\cos\beta=\frac{1}{1+\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow\boxed{\cos\beta=\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

۲ ــ می‌دانیم که در هر مثلث قائم‌الزاویه به رأس A داریم:

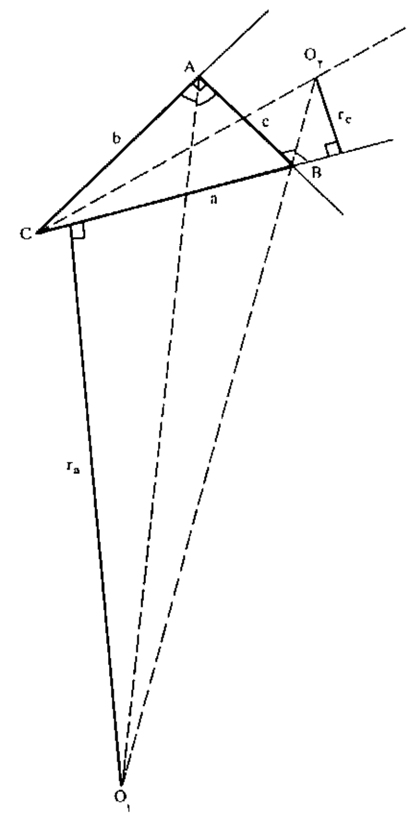
$S=p(p-a)=(p-b)(p-c)$

از طرفی $r_a=\frac{S}{p-a}$ پس:

$r_a=\frac{p(p-a)}{p-a}=p\Rightarrow\boxed{r_a=P}$

لذا: $r_c=\frac{S}{p-c}=\frac{(p-b)(p-c)}{p-c}=p-b$

$\Rightarrow r_c=6-3=3$



۳ ــ می‌دانیم که وقتی در مثلث ABC اندازهٔ زاویهٔ A برابر ۱۲۰° است $a^2=b^2+c^2+bc$ است. از طرفی داریم:

$$d_b=\frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-c)}$$

$$d_c=\frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}$$

$$R=\frac{abc}{4s}=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

$$d_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$$

این مقادیر را در رابطهٔ $d_bd_c=3Rda$ قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$\frac{4\sqrt{p^2a^2bc(p-b)(p-c)}}{(a+c)(a+b)}=$$
$$\frac{3abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}\times\frac{2\sqrt{pbc(p-a)}}{b+c}$$

$(a+c)(a+b)=a^2+a(b+c)=$

اما $b^2+c^2+bc+a(b+c)+bc$

$=(b+c)^2+a(b+c)=(b+c)(a+b+c)=2p(b+c)$

پس

$$\frac{4pa\sqrt{bc(p-b)(p-c)}}{2p(b+c)}=\frac{3abc\sqrt{bc}}{2(b+c)\sqrt{(p-b)(p-c)}}$$

$4(p-b)(p-c)=3bc\Rightarrow4(\frac{a+c-b}{2})(\frac{a+b-c}{2})=3bc$

$a^2-c^2-b^2+2bc=3bc\Rightarrow$

$b^2+c^2+bc-c^2-b^2+2bc=3bc$

$\Rightarrow\boxed{3bc=3bc}$

حل ب) در هر مثلث داریم:

$m_a=\frac12\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}\Rightarrow m_b=\frac12\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$

$m_c=\frac12\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$

با قرار دادن این مقادیر در رابطهٔ $8(m_b^2+m_c^2)-4m_a^2=9a^2$ داریم:

$$8\left[\frac14(2a^2+2c^2-b^2)+\frac14(2a^2+2b^2-c^2)\right]-$$
$$(2b^2+2c^2-a^2)=9a^2$$
$$4a^2+4c^2-2b^2+4a^2+4b^2-2c^2-2b^2-2c^2+a^2=9a^2$$
$$\Rightarrow9a^2=9a^2$$

بنابراین رابطهٔ (ب) در هر مثلثی برقرار است.

۴ ــ ابتدا یک ترکیب خطی از بردارهای داده شده تشکیل و مساوی با بردار صفر قرار می‌دهیم:

$$x(\underbrace{V_1-V_2-V_3}_{u_1})+y(\underbrace{aV_1+bV+V_3}_{u_2})+$$
$$z(\underbrace{V_1-2aV_2+bV_3}_{u_3})=\vec0$$
$$\Rightarrow(x+ay+z)V_1+(-x+by-2az)V_2+$$
$$(-x+y+bz)V_3=\vec0$$

چون طبق فرض بردارهای V_1 و V_2 و V_3 مستقل خطی هستند بنابراین باید ضرایب این ترکیب خطی همگی صفر باشند. که دستگاهی با سه معادله و سه مجهول حاصل می‌شود که اگر بخواهیم بردارهای u_1 و u_2 و u_3 مستقل خطی باشند از حل آن دستگاه باید به جواب $x=y=z=0$ برسیم یعنی:

$$\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\begin{cases}x+ay+z=0\\-x+by-2az=0\\-x+y+bz=0\end{cases}$$

۲ و ۱ $\Rightarrow$ $(a+b)y+(1-2a)z=0$ ← ضرب $-(a+1)$ در

۳ و ۱ $\Rightarrow$ $(a+1)y+(1+b)z=0$ ← ضرب $(a+b)$ در

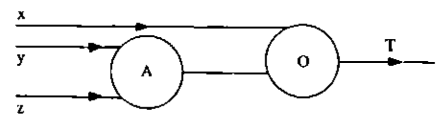
$\Rightarrow(b^2+2a^2+b+2a+ab-1)z=0$

شرط این که $z=0$ آن است که ضریب آن مخالف صفر باشد. پس، $(b^2+2a^2+b+2a+ab-1)\neq0$ که همان رابطهٔ بین a و b است.

۵ ــ اگر فرض کنیم $A=xyz+xyz'+xy'z+x'yz$ در این

صورت عبارت بولی داده شده یعنی T به شکل $T = A + xy'z'$ ظاهر می‌شود و چون داریم:

$$A = \overbrace{(xyz + xyz + xyz)}^{xyz} + xyz' + xy'z + x'yz$$
$$= xy\underbrace{(z+z')}_{1} + xz\underbrace{(y+y')}_{1} + yz\underbrace{(x+x')}_{1}$$
$$= xy + xz + yz$$
$$\Rightarrow T = xy + xz + yz + xy'z'$$
$$= x(y + y'z') + xz + yz = x(y+z') + xz + yz$$
$$= xy + xz' + xz + yz = xy + x\underbrace{(z'+z)}_{1} + yz$$
$$= \underbrace{xy + x}_{x} + yz = x + yz$$



۶ ـ الف) کلمهٔ کمال‌الملک دارای ۹ حرف است که عبارتند از ۲حرف (ک)، ۲ حرف (م)، ۲حرف (الف) و ۳ حرف (ل) که کل حالتهای ممکن در کنار هم قرار گرفتن این ۹ حرف عبارت است از $\frac{9!}{2!\times 2!\times 2!\times 3!}$ که همان n(S) می‌باشد حال اگر ۳ حرف (ل) را یک حرف فرض کنیم با ۶ حرف دیگر روی هم ۷ حرف شده و حالتهای ممکن که می‌توانند این ۳ حرف همواره کنار هم باشند عبارت است از $\frac{7!}{2!\times 2!\times 2!}$ که همان n(A) می‌باشد پس:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3!\times 7!}{9!}$$

ب) فضای نمونه تغییر نمی‌کند و مانند قسمت الف می‌باشد اما برای این که ۳ حرف بین ۲ حرف (ک) واقع شود ۷ حالت متمایز ایجاد می‌شود که عبارتند از:

I) ۳حرف (ل) بین آنها قرار بگیرند $\rightarrow (3^3)\times\frac{5!}{2!\times 2!} = 30$

توضیح این که ۳ حرف (ل) و ۲ حرف (ک) را یک حرف فرض کرده و با ۴ حرف دیگر جمعاً ۵ حرف شده که چون ۲ حرف (م) و ۲ حرف (ا) تکراری هستند $\frac{5!}{2!\times 2!}$ جابجایی دارند.

II) ۲ حرف (ل) و ۱ حرف (م) $\rightarrow \frac{3!}{2!}\times\frac{5!}{2!} = 180$

توضیح اینکه ۲ حرف (ل) و ۱ حرف (م) در بین ۲ حرف (ک) $\frac{3!}{2!}$ حالت جایگشت داشته و فقط ۲ حرف (الف) تکراری غیر از آنها داریم که $\frac{5!}{2!}$ از آنجا حاصل شده.

III) ۲ حرف (ل) و ۱ حرف (الف) $\rightarrow \frac{3!}{2!}\times\frac{5!}{2!} = 180$

IV) ۲ حرف (م) و ۱ حرف (ل) $\rightarrow \frac{3!}{2!}\times\frac{5!}{2!\times 2!} = 90$

V) ۲ حرف (الف) و ۱ حرف (ل) $\rightarrow \frac{3!}{2!}\times\frac{5!}{2!\times 2!} = 90$

VI) ۲ حرف (الف) و ۱ حرف (م) $\rightarrow \frac{3!}{2!}\times\frac{5!}{3!} = 60$

VII) ۲ حرف (م) و ۱ حرف (الف) $\rightarrow \frac{3!}{2!}\times\frac{5!}{3!} = 60$

توضیح اینکه در دو حالت آخر مثلاً در حالت VII یکی از حالتها به صورت (ل «ک م م ا ک» ل ا ل) می‌باشد که اگر ۲ حرف (ک) و ۳ حرف ما بین آنها را یک حرف فرض کرده، با ۴ حرف باقی مانده ۵ حرف تشکیل می‌دهند که !۵ جابجایی داشته و چون حرف (ل) ۳ بار تکرار شده تعداد جایگشتها عبارت است از $\frac{5!}{3!}$

VIII) ۱حرف (ل) و ۱حرف (م) و ۱حرف (الف) $\rightarrow \frac{5!}{2!}\times 3! = 360$

تعداد کل حالتها در ۸ حالت ذکر شده یعنی $n(A) = 1050$ و n(S) پس از ساده کردن عبارت است از:

$$n(S) = \frac{9!}{2!\times 2!\times 2!\times 3!} = 7760$$

پس:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1050}{7760} = \frac{105}{776}$$

۷ ـ m کتاب تاریخ متمایز و n کتاب جغرافیای متمایز داریم. با توجه به صورت مسأله واضح است که تعداد کتابهای جغرافیا حداکثر می‌تواند یک واحد از تعداد کتابهای تاریخ بیشتر باشد و در بقیه حالتها یا با آن مساوی یا از آنها کمتر می‌باشند. این شرط را نیز با حل مسئله استخراج می‌کنیم:

می‌دانیم چون هیچ یک از کتابهای جغرافیا نباید در کنار یکدیگر باشند بدیهی به نظر می‌رسد که جای این کتابها باید لابه‌لای کتابهای تاریخ باشند یعنی حتی می‌توان بین دو کتاب جغرافیا مثلاً ۲ یا بیشتر کتاب تاریخ قرار داد. برای این منظور ابتدا کتابهای تاریخ را در کنار یکدیگر با ترتیب قرار می‌دهیم تا مکان قرار گرفتن کتابهای جغرافیا مشخص شود.

m! = تعداد حالتهای قرار گرفتن کتابهای تاریخ در کنار یکدیگر

مکان قرار گرفتن کتابهای جغرافیا را لابه‌لای کتابهای تاریخ در نظر می‌گیریم. بنابراین m+1 مکان خالی برای قراردادن کتابهای جغرافیا داریم. برای قرار دادن کتابهای جغرافیا در این m+1 مکان می‌توان n مکان از این m+1 مکان خالی را با جایگشت انتخاب کرد.

$(m+1)_n$ = تعداد مکان‌های قرار دادن کتابهای جغرافیا

واضح است که همواره باید $m+1 \ge n$ درنتیجه بنا به اصل ضرب داریم:

$$\text{تعداد کل حالتها} = m!\times(m+1)_n = m!\times\frac{(m+1)!}{(m+1-n)!}$$
$$= \frac{m!\times(m+1)!}{(m+1-n)!}$$

برای توضیح بیشتر مثلاً ۲ کتاب متمایز جغرافیا و ۳ کتاب متمایز تاریخ را می‌توان بنا به خواسته مسأله به صورت‌های زیر در کنار یکدیگر قرار داد.

(I)	ت ج ت ج ت	تعداد جایگشتها		$= 2!\times 3!$
(II)	ت ت ج ت ج	»	»	$= 2!\times 3!$
(III)	ت ج ت ت ج	»	»	$= 2!\times 3!$
(IV)	ج ت ت ت ج	»	»	$= 2!\times 3!$
(V)	ج ت ج ت ت	»	»	$= 2!\times 3!$
(VI)	ج ت ت ج ت	»	»	$= 2!\times 3!$

$$\text{تعداد کل حالتها} = 6\times 2!\times 3! = 72$$

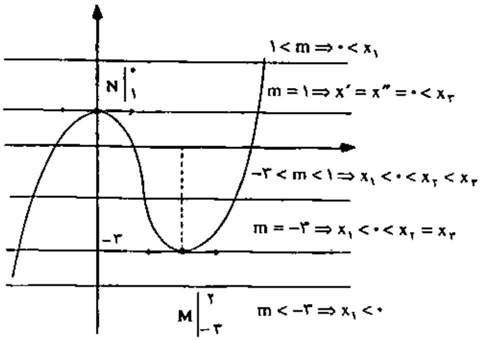
حل: بنا به فرمول داریم $m = 3$ و $n = 2$ درنتیجه

$$\text{تعداد کل حالتها} = \frac{3!\times 4!}{2!} = 72$$

۸ ـ

$$x^3 - 3x^2 + 1 - m = 0$$
$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 1 = m \\ y = m \end{cases} \Rightarrow y = x^3 - 3x^2 + 1$$
$$y' = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	1	↘	−3	↗	$+\infty$



۹ ـ نسبت به x مشتق می‌گیریم.

$$y^2 = \frac{1}{\cos 2x} \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{y^2}$$

نسبت به x مشتق می‌گیریم.

$$-2\sin 2x = \frac{-2y'}{y^3} \Rightarrow \sin 2x = \frac{y'}{y^3} \Rightarrow y' = y^3\sin 2x$$
$$y'' = 3y'y^2\sin 2x + 2y^3\cos 2x$$
$$y'' = 3(y^3\sin 2x)(y^2\sin 2x) + 2y^3(\cos 2x)$$
$$y'' = 3y^5(\sin^2 2x) + 2y^3\left(\frac{1}{y^2}\right)$$
$$y'' = 3y^5(1 - \cos^2 2x) + 2y$$
$$y'' = 3y^5\left(1 - \frac{1}{y^4}\right) + 2y$$
$$y'' = 3y^5\left(\frac{y^4 - 1}{y^4}\right) + 2y$$
$$y'' = 3y^5 - 3y + 2y \Rightarrow y'' + y = 3y^5$$

۱۰ ـ داریم:

$$f(12^\circ) = \sin 12^\circ + \cos 12^\circ + \sin 36^\circ + \cos 36^\circ$$
$$= (\sin 12^\circ + \sin 36^\circ) + (\cos 12^\circ + \cos 36^\circ)$$
$$= 2\sin\frac{12^\circ + 36^\circ}{2}\cos\frac{12^\circ - 36^\circ}{2} + 2\cos\frac{12^\circ + 36^\circ}{2}\cos\frac{12^\circ - 36^\circ}{2}$$
$$= 2\sin 24^\circ\cos 12^\circ + 2\cos 24^\circ\cos 12^\circ$$
$$= 2\cos 12^\circ(\sin 24^\circ + \cos 24^\circ)$$
$$= 2\cos 12^\circ\left(\sqrt{2}\cos(24^\circ - 45^\circ)\right) = 2\sqrt{2}\cos 12^\circ\cos 21^\circ$$

۱۱ ـ داریم:

$$x + y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - y$$
$$\sin x\sin y = 1 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\sin y = 1$$
$$\Rightarrow \cos y\ \sin y = 1 \Rightarrow 2\sin y\ \cos y = 2 \Rightarrow \sin 2y = 2$$

چون $-1 \le \sin 2y \le 1$ می‌باشد، بنابراین معادلهٔ اخیر و در نتیجه دستگاه مورد نظر در مجموعهٔ اعداد حقیقی جواب ندارد و همچنین در فاصلهٔ $[0, 2\pi]$ نیز جواب حقیقی ندارد.

۱۲ ـ می‌دانیم:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2R$$
$$\Rightarrow b = 2R\sin\hat{B} \text{ و } c = 2R\sin\hat{C}$$

پس خواهیم داشت:

$$b + c = 2R\sin\hat{B} + 2R\sin\hat{C} = 4R\cos\frac{\hat{A}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\hat{B}+\sin\hat{C}=۲\cos\frac{\hat{A}}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲\sin\frac{\hat{B}+\hat{C}}{۲}\cos\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲}=۲\cos\frac{\hat{A}}{۲}$$

از طرفی می‌دانیم، در هر مــثلث رابطهٔ $\sin\frac{\hat{B}+\hat{C}}{۲}=\cos\frac{\hat{A}}{۲}$ برقرار است، پس:

$$۲\cos\frac{\hat{A}}{۲}\cos\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲}=۲\cos\frac{\hat{A}}{۲}\Rightarrow\cos\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲}=۱$$

$$\Rightarrow\cos\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲}=\cos(۰)\Rightarrow\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲}=۰\Rightarrow\hat{B}-\hat{C}=۰$$

$$\Rightarrow\boxed{\hat{B}=\hat{C}}$$

بنابراین مثلث متساوی‌الساقین است.

۱۳ ــ داریم:

$$۱۵tg^۲x+۸\cos۲x=۹\Rightarrow ۱۵(\frac{۱-\cos۲x}{۱+\cos۲x})+۸\cos۲x=۹$$

$$\overset{(۱+\cos۲x\neq۰)}{\Rightarrow} ۱۵-۱۵\cos۲x+۸\cos۲x+۸\cos^۲۲x$$

$$=۹+۹\cos۲x$$

$$\Rightarrow\quad ۸\cos^۲۲x-۱۶\cos۲x+۶=۰$$

$$\Rightarrow\quad ۴\cos^۲۲x-۸\cos۲x+۳=۰$$

$$\Rightarrow\quad (۲\cos۲x-۱)(۲\cos۲x-۳)=۰$$

$$\Rightarrow\quad ۲\cos۲x-۱=۰ \text{ یا } ۲\cos۲x-۳=۰$$

$$\Rightarrow\cos۲x=\frac{۱}{۲} \text{ یا } \cos۲x=\frac{۳}{۲}>۱ \text{ (قابل قبول نیست)}$$

$$\Rightarrow\quad \cos۲x=\cos\frac{\pi}{۳}\Rightarrow ۲x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

جواب عمومی معادله: $\Rightarrow\quad\boxed{x=k\pi\pm\frac{\pi}{۶}}$

۱۴ ــ داریم:

$$\sin^۳x+\cos^۳x=۱$$

$$\Rightarrow\quad \sin^۳x+\cos^۳x=\sin^۲x+\cos^۲x$$

$$\Rightarrow\quad \sin^۳x-\sin^۲x+\cos^۳x-\cos^۲=۰$$

$$\Rightarrow\quad \sin^۲x(\sin x-۱)+\cos^۲x(\cos x-۱)=۰$$

$$\Rightarrow\quad (۱-\cos^۲x)(\sin x-۱)+$$
$$(۱-\sin^۲x)(\cos x-۱)=۰$$

$$\Rightarrow\quad (۱-\cos x)(۱+\cos x)(\sin x-۱)+$$
$$(۱-\sin x)(۱+\sin x)(\cos x-۱)=۰$$

$$\Rightarrow\quad (۱-\cos x)(\sin x-۱)(۱+\cos x+۱+\sin x)=۰$$

$$\Rightarrow\quad ۱-\cos x=۰ \text{ یا } \sin x-۱=۰ \text{ یا } \cos x+\sin x+۲=۰$$

$$۱-\cos x=۰\Rightarrow\cos x=۱=\cos(۰)\Rightarrow\boxed{x=۲k\pi}$$

$$\text{یا } \sin x-۱=۰\Rightarrow\sin x=۱=\sin\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\boxed{x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}}$$

می‌دانیم: $-\sqrt{۲}\le\cos x+\sin x\le\sqrt{۲}$، بنابراین تســـاوی $\cos x+\sin x=-۲$ قابل قبول نیست.

۱۵ ــ در این برنامــه فرض بر این است که از عــملکرد توان در BASIC استفاده شود.

```
LET A = 1
INPUT "ENTER NUMBERS FOR X & N "; X, N
FOR I = 1 TO N
  LET A = A * X
NEXT
FOR I = -1 TO N STEP -1
  LET A = A * 1 / X
NEXT
PRINT X; "^"; N; "="; A
```

خروجی برنامه:

```
ENTER NUMBERS FOR X & N ? 2,10
 2 ^ 10 = 1024

ENTER NUMBERS FOR X & N ? 4,-2
 4 ^-2 = .0625
```

۱۶ــ

```
INPUT "ENTER NUMBERS FOR X & N"; X, N
IF X < 0 OR N < 0 OR N <> INT(N) THEN PRINT "ERROR IN INPUT DATA": GOTO 10
LET Y = 0
FOR I = 1 TO N
  LET Y = SQR(Y + X)
NEXT
PRINT "SQR("; X; "+SQR("; X; "+SQR("; X; "+...)))="; Y
END
```

خروجی برنامه:

```
ENTER NUMBERS FOR X & N? 4,7
SQR( 4 +SQR( 4 +SQR( 4 +...)))= 2.561521
```

۱۷ ــ روش اول

ــ بسط دو جمله‌ای $(x+y)^N$ با استفاده از سابروتین

```
INPUT "ENTER A NUMBER FOR N"; N
PRINT "(X+Y)^"; N; "=";
PRINT "X^"; N; "+";
LET K = N: GOSUB 200: NFACT = FACT
FOR T = 1 TO N - 1
  LET K = T: GOSUB 200: KFACT = FACT
  LET K = N - T: GOSUB 200: NKFACT = FACT
  LET A = NFACT / (KFACT * NKFACT)
  PRINT A; "X^"; N - T; ".Y^"; T; "+";
NEXT T
PRINT "Y^"; N
END
REM /*** SUBROUTINE SECTION ***/
LET FACT = 1
FOR I = 1 TO K
  LET FACT = FACT * I
NEXT I
RETURN
END
```

خروجی برنامه:

```
ENTER A NUMBER FOR N? 3
(X+Y)^ 3 =X^ 3 + 3 X^ 2 .Y^ 1 + 3 X^ 1 .Y^ 2 +Y^ 3
```

۱۷ ــ روش دوم

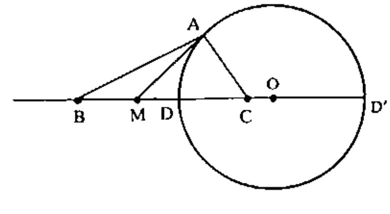
ـ برنامه بسط دوجمله‌ای $(x+y)^N$

```
INPUT "ENTER A NUMBER FOR N"; N
PRINT "(X+Y)^"; N; "=";
PRINT "X^"; N;
LET A = 1
FOR I = 1 TO N - 1
  LET A = ((N - I + 1) * A) / I
  PRINT "+"; A; "X^"; N - I; ".Y^"; I;
NEXT
PRINT "+Y^"; N
END
```

◆ حل مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱ ـ می‌دانیم که $BCDD'$ تقسیم توافقی و نقطهٔ M وسط پاره‌خط BC است. پس:

$$MB^2 = MC^2 = MD.MD' \qquad (1)$$



از طرفی MA بر دایرهٔ O مماس است پس:

$$MA^2 = MD.MD' \qquad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $MB^2 = MC^2 = MA^2$ و یا $MA = MB = MC$. بنابراین مثلث ABC که میانه وارد بر BC نصف آن است در رأس A قائم‌الزاویه است.

۲ ـ نقاط برخورد این کره با محورهای مختصات را به دست می‌آوریم:

$$(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9 \Rightarrow$$

$$A: y = 0 \,,\; z = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{5} \Rightarrow A(1+\sqrt{5} \,,\, 0 \,,\, 0)$$

$$B: x = 0 \,,\; z = 0 \Rightarrow y = \pm 2 \Rightarrow B(0 \,,\, 2 \,,\, 0)$$

$$C: x = 0 \,,\; y = 0 \Rightarrow z = -2 \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow C(0 \,,\, 0 \,,\, -2+2\sqrt{2})$$

$\vec{AB}(-1-\sqrt{5} \,,\, 2 \,,\, 0)$ و $\vec{AC}(-1-\sqrt{5} \,,\, 0 \,,\, -2+2\sqrt{2})$

$$\Rightarrow \vec{AB} \wedge \vec{AC}\left(-4+4\sqrt{2}, (1+\sqrt{5})(2\sqrt{2}-2), 2(1+\sqrt{5})\right)$$

$$\Rightarrow \left|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\right| = \sqrt{16(-1+\sqrt{2})^2 + (1+\sqrt{5})^2(2\sqrt{2}-2)^2 + 4(1+\sqrt{5})^2}$$

$$\Rightarrow \left|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\right| = 4\sqrt{9 - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{5} - \sqrt{10}}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\right| = 2\sqrt{9 - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{5} - \sqrt{10}}$$

۳ ـ معادلهٔ دو صفحهٔ مصور خط D را پیدا می‌کنیم.

$$D: \begin{cases} x = t-1 & \Rightarrow t = x+1 \\ y = 3-2t & \Rightarrow y = 3-2(x+1) \Rightarrow \boxed{2x+y-1=0} \\ z = 3t+4 & \Rightarrow z = 3(x+1)+4 \Rightarrow \boxed{3x-z+7=0} \end{cases}$$

$$\alpha(2x+y-1) + \beta(3x-z+7) = 0$$

$$\boxed{(2\alpha+3\beta)x + \alpha y - \beta z - \alpha + 7\beta = 0}$$

معادلهٔ دسته صفحه گذرنده بر خط D.

$$P: 2x - y - 2z = 3 \Rightarrow$$

$\vec{V}_{\text{دسته صفحه}}(2\alpha+3\beta, \alpha, -\beta)$ و $\vec{V}_P(2,-1,-2)$

$$\cos(\vec{V}, \vec{V'}) = \pm \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \,.\, \sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$$

$$\Rightarrow \cos 60^\circ = \pm \frac{2(2\alpha+3\beta) - \alpha + 2\beta}{\sqrt{(2\alpha+3\beta)^2 + \alpha^2 + \beta^2} \;.\; \sqrt{4+1+4}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \pm \frac{3\alpha + 8\beta}{3\sqrt{5\alpha^2 + 10\beta^2 + 12\alpha\beta}}$$

$$\Rightarrow 45\alpha^2 + 90\beta^2 + 108\alpha\beta = 36\alpha^2 + 256\beta^2 + 192\alpha\beta$$

$$\Rightarrow 9\alpha^2 - 84\alpha\beta - 166\beta^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{42\beta \pm \sqrt{3258\beta^2}}{9}$$

$$\alpha = \beta\left(\frac{14 \pm \sqrt{362}}{3}\right) \xrightarrow{\text{در معادلهٔ دسته صفحه}}$$

با قرار دادن α بر حسب β در معادلهٔ دسته صفحه و حذف β معادلهٔ دو صفحه جواب مسأله به دست می‌آید.

۴ ـ می‌خواهیم ثابت کنیم $(p \Leftrightarrow q) \equiv (\sim q \Leftrightarrow \sim p)$

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

$$\equiv (\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge (\sim p \Rightarrow \sim q) \equiv (\sim q \Leftrightarrow \sim p)$$

۵ ـ چون a پوچ توان از مرتبهٔ ۳ است پس $a^3 = 0$ بنابراین:

$$1 - a^3 = 1 - 0 = 1 \qquad (1)$$

از طرفی $(1-a^3) = (1-a)(a^2+a+1) \qquad (2)$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow (1-a)(a^2+a+1) = 1$$

$$\Rightarrow (1-a)^{-1} = (a^2+a+1) = 1$$

(توضیح این که «یک حلقه» با هر عضو حلقه مانند a خاصیت جابجایی دارد و کلیهٔ اتحادهای جبری برای آنها برقرار بوده و نیز از این مطلب استفاده شد که اگر $ab = 1$ در این صورت، $b = a^{-1}$.)

۶ ـ می‌خواهیم به استقراء ثابت کنیم که تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با 2^n . قبل از بیان اثبات به این نکته توجه می‌کنیم که اگر به تعداد اعضای یک مجموعه، یک عضو اضافه کنیم تعداد زیر مجموعه‌های آن دو برابر می‌شود، زیرا از تمام زیرمجموعه‌های قبل و اضافه کردن آن عضو جدید به هر یک از آنها یک مجموعهٔ جدید تولید می‌شود. مثلاً، اگر $A = \{2,4\}$ در این صورت زیرمجموعه‌های A عبارتند از $\{2\}$، $\{4\}$، $\{2,4\}$، $\{\ \}$ حال اگر عضو جدیدی مانند ۶ به A اضافه کنیم خواهیم داشت، $B = \{2,4,6\}$ که زیر مجموعه‌های آن عبارتند از:

$$\underbrace{\{\ \}, \{2,4\}, \{4\}, \{2\},}_{\text{زیر مجموعه‌های A}} \{6\}, \{2,4,6\}, \{4,6\}, \{2,6\}$$

که تعداد آنها ۲ برابر تعداد زیرمجموعه‌های A است.

$n = 1 \rightarrow$ تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ یک عضوی $= 2^1 = 2$

$A = \{a\} \Rightarrow$ زیر مجموعه‌های A : $\{a\}, \{\ \}$

$n = k \rightarrow$ تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ k عضوی $=$ فرض استقراء 2^k

$n = k+1 \rightarrow$ تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ $(k+1)$ عضوی $=$ حکم استقراء 2^{k+1}

تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $(k+1)$ عضوی $\Rightarrow$ طبق مطالب فوق

$=$ تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ k عضوی $\times 2$

حکم ثابت شد $= 2^k \times 2 = 2^{k+1}$

۷ ـ می‌خواهیم ثابت کنیم $A = \overline{xyxy}$ مربع کامل نیست.

$$A = 100\overline{xy} + \overline{xy} = 101\overline{xy}$$

حال اگر A بتواند مربع کامل باشد باید عوامل اول در آن توانهای زوج داشته باشند و چون ۱۰۱ اول است لذا A باید بر 101^2 بخش‌پذیر باشد و این غیرممکن است زیرا 101^2 پنج رقمی است.

۸ ـ برای آن که ثابت کنیم a^n و a^{n+4} رقم یکان برابر دارند کافی است ثابت کنیم $A = (a^{n+4} - a^n)$ بر ۱۰ بخش‌پذیر است (رقم یکان آن صفر است) و برای این منظور با توجه به این که $(2,5) = 1$ کافی است ثابت کنیم A بر ۲ و بر ۵ بخش‌پذیر است:

$$A = a^{n+4} - a^n = a^n(a^4-1) = a^n(a^2-1)(a^2+1)$$

$$= a^n(a-1)(a+1)(a^2+1)$$

I) اگر a زوج باشد a^n نیز زوج بوده پس A بر ۲ بخش‌پذیر است و اگر a فرد باشد $(a-1)$ و $(a+1)$ زوج بوده و A بر ۲ بخش‌پذیر خواهد بود.

II) برای بخش‌پذیری بر ۵ می‌گوییم، اگر a بر ۵ بخش‌پذیر باشد a^n بر ۵ بخش‌پذیر بوده و اگر a بر ۵ بخش‌پذیر نباشد در این صورت یکی از اعداد $a^2 - 1$ و $a^2 + 1$ بر ۵ بخش‌پذیر خواهد بود.

اگر a مضرب ۵ نباشد $\Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{matrix} a = 5k+1 \\ a = 5k-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a^2 - 1 = 5m \\ \left.\begin{matrix} a = 5k+2 \\ a = 5k-2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a^2 + 1 = 5n \end{cases}$

۹ ـ به استقراء می‌توان ثابت کرد که اگر A ماتریسی $n \times n$ و C ماتریسی $n \times n$ وارون‌پذیر باشند در این صورت $(CAC^{-1})^n = CA^nC^{-1}$ حال طبق فرض $f(x) = x^5 - 3x^2 + 7x - 1$ و M وارون‌پذیر و D هم مرتبهٔ M است لذا داریم:

$$f(MDM^{-1}) = (MDM^{-1})^5 - 3(MDM^{-1})^2 + 7(MDM^{-1}) - I$$

$$= MD^5M^{-1} - 3MD^2M^{-1} + 7MDM^{-1} - MIM^{-1}$$

$$= MD^5M^{-1} + M(-3D^2)M^{-1} + M(7D)M^{-1} - MIM^{-1}$$

$$= M(D^5 - 3D^2 + 7D - I)M^{-1} = Mf(D)M^{-1}$$

۱۰ ـ

$$y^2 + x^4 = a^2x^2$$

$$y^2 = a^2x^2 - x^4$$

$$y^2 = x^2(a^2 - x^2)$$

$$y = \pm x\sqrt{a^2 - x^2}$$

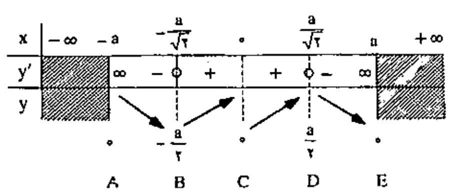
ابتدا منحنی تابع به معادله $y = x\sqrt{a^2 - x^2}$ را رسم می‌کنیم. سپس قرینهٔ شکل را نسبت به محور xها رسم می‌کنیم.

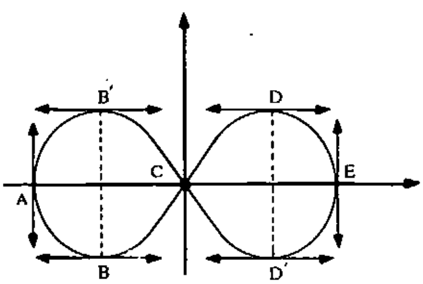
$$y = x\sqrt{a^2 - x^2} \qquad a > 0$$

$$a^2 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq a^2 \Rightarrow -a \leq x \leq a \Rightarrow D_f = [-a, +a]$$

$$y' = \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{-x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0$$

$$a^2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow \boxed{x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}} \in D_f$$





۱۱ ـ $y = \dfrac{\sin 2x}{1 - \sin x} \qquad 0 \leq x \leq 2\pi$

(منحنی انفصال مضاعف دارد.) ریشه مضاعف

$$1 - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$y' = \frac{2\cos 2x(1 - \sin x) + \cos x \sin 2x}{V^2} = 0$$

$$2(1 - 2\sin^2 x)(1 - \sin x) + 2\cos^2 x \sin x = 0$$

$\Rightarrow \sin^3 x - 2\sin x + 1 = 0$

مجموع ضرایب صفر است. معادله را بر $(\sin x - 1)$ تقسیم می‌کنیم:

$\Rightarrow (\sin x - 1)(\sin^2 x - \sin x - 1) = 0$

$\sin x = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2}}$,

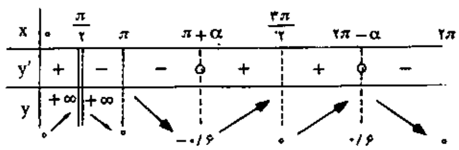
$\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \# -0/6$

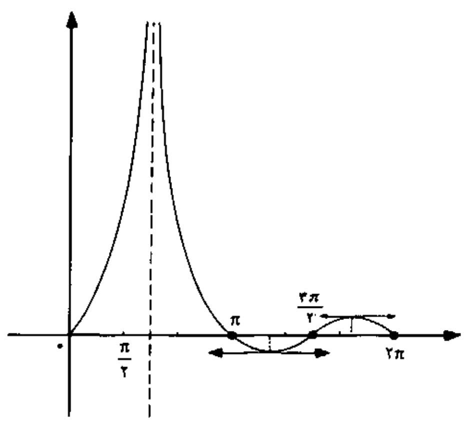
$= \sin(-\alpha)$

$\alpha \# 40^\circ, \begin{cases} x = \pi + \alpha \\ x = 2\pi - \alpha \end{cases}$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

$y = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \Rightarrow x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$



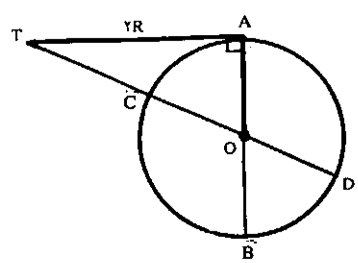


◆ حل مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

۱ ـ بنا به روابط طولی در دایره داریم:

$TC.TD = TA^2 = 4R^2$

اما $TD - TC = CD = 2R$ پس:



$(TD+TC)^2 = (TC-TD)^2 + 4TC.TD$

$\Rightarrow TD + TC = 4R^2 + 4\times 4R^2 = 20R^2$

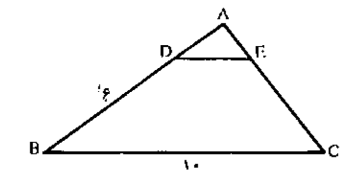
$\Rightarrow TD + TC = 2R\sqrt{5}$

$\Rightarrow \begin{cases} TD + TC = 2R\sqrt{5} \\ TD - TC = 2R \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{TD = R(\sqrt{5}+1)}\ ,\ \boxed{TC = R(\sqrt{5}-1)}$

۲ ـ اولاً بنابه قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{\frac{a}{5}}{6} = \frac{\frac{a}{10}+\frac{1}{2}}{\frac{2a}{5}+\frac{1}{2}}$$



$\Rightarrow \frac{2a^2}{25} + \frac{a}{10} = \frac{3a}{5} + 3 \Rightarrow 4a^2 - 25a - 150 = 0$

$\Rightarrow a = \frac{25 \pm 55}{8} \Rightarrow a = 10\ ,\ a = \frac{-15}{4}$

ثانیاً: $a = 10 \Rightarrow AD = 2, AE = 1/5, EC = 4/5$

$\Rightarrow AB = 2 + 6 = 8, AC = 1/5 + 4/5 = 6, BC = 10$

$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 64 + 36 = 100$

$\Rightarrow 100 = 100$

پس مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است. درنتیجه مثلث ADE نیز قائم‌الزاویه در رأس A می‌باشد.

ثالثاً: برای محاسبهٔ مساحت ذوزنقهٔ BCED داریم:

$S_{BCED} = S_{ABC} - S_{ADE} = \frac{1}{2}\times 6\times 8 - \frac{1}{2}\times 2\times 1/5$

$\Rightarrow S_{BCED} = 24 - 1/5 = 22/5$

۳ ـ

$6m^2x - 2m^4 = 54x \Rightarrow 6m^2x - 54x = 2m^4$

$\Rightarrow (6m^2 - 54)x = 2m^4 \Rightarrow x = \frac{2m^4}{6m^2 - 54}$

اگر مخرج کسر صفر شود معادله ریشهٔ حقیقی ندارد:

$6m^2 - 54 = 0$

$6m^2 = 54 \Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow m = \pm 3$

۴ ـ داریم:

$x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = -2 \end{cases}$

$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2x_2^2} = \frac{(x_1+x_2)^2 - 2(x_1x_2)}{(x_1x_2)^2} =$

$\frac{2^2 - 2(-2)}{(-2)^2} = \frac{8}{4} = 2$

$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^3x_2^3} = \frac{(x_1+x_2)^3 - 3(x_1x_2)(x_1+x_2)}{(x_1x_2)^3} =$

$= \frac{2^3 - 3(-2)(2)}{(-2)^3} = \frac{8+12}{-8} = \frac{20}{-8} = \frac{-5}{2}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}\right)\left(\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}\right) = 2\left(\frac{-5}{2}\right) = -5$

۵ ـ طرف اول معادله همواره مثبت است، بنابراین وقتی معادله جواب حقیقی دارد که تمام عبارتها برابر صفر باشند:

$\sqrt{(2x - 2x^5)^{72}} = 0\ ,\ (x - x^{73})^{72} = 0,$

$|x^3 + 3x^2 + 2x| = 0$

$2x - 2x^5 = 0 \Rightarrow 2x(1 - x^4) = 0 \Rightarrow 2x = 0$ یا $1 - x^4 = 0$

$\Rightarrow x = 0$ یا $x^4 = 1 \Rightarrow \boxed{x = 0}$ یا $\boxed{x = \pm 1}$

$x - x^{73} = 0 \Rightarrow x(1 - x^{72}) = 0 \Rightarrow x = 0$ یا $x^{72} = 1$ و

$\Rightarrow \boxed{x = 0}$ یا $\boxed{x = \pm 1}$

$x^3 + 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 + 3x + 2) = 0$ و

$\Rightarrow x(x+1)(x+2) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$ یا $\boxed{x = -1}$ یا $\boxed{x = -2}$

از اشتراک مجموعه جوابهای معادلات نتیجه می‌شود که معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد: $x = 0$ یا $x = -1$ (ریشه‌های حقیقی معادله)

۶ ـ $2x^2 - 4mx + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2mx + 1 = 0$

اگر معادله ریشه حقیقی نداشته باشد، داریم:

$\Delta' = m^2 - 1 < 0 \Rightarrow m^2 < 1 \Rightarrow -1 < m < 1$

۷ ـ $(5x^{32} - 5)(2 - 2x^{16}) \ge 0$

$5(-2)(x^{16} - 1)(x^{32} - 1) \ge 0$

$\Rightarrow -10(x^{16} - 1)(x^{16} - 1)(x^{16} + 1) \ge 0$

$-10(x^{16} - 1)^2(x^{16} + 1) \ge 0$

عبارتهای $x^{16} + 1$ و $(x^{16} - 1)^2$ همواره مثبت می‌باشند. بنابراین داریم:

$x^{16} - 1 = 0 \Rightarrow x^{16} = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

مجموعه جواب $= \{-1, 1\}$

۸ ـ داریم:

$$\begin{cases} 18x^2 + 24x + 6 > 0 \\ 24x - 12x^2 < 0 \\ 0 < x + 1 < 3 \end{cases}$$

نامعادلات دستگاه اخیر را ساده می‌کنیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 4x + 1 > 0 \\ -x^2 + 2x < 0 \\ -1 < x < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3x+1)(x+1) > 0 \\ -x(x-2) < 0 \\ -1 < x < 2 \end{cases}$$

$(3x+1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$ یا $x = -1$

$-x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$ یا $x = 2$

x	$-\infty$ تا -1	-1 تا $-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$ تا 0	0 تا 2	2 تا $+\infty$
$(3x+1)(x+1)$	+	−	+	+	+
$-x(x-2)$	−	−	−	+	−
با شرط $-1<x<2$			جواب $-\frac{1}{3}<x<0$		

بنابراین با شرط $-1 < x < 2$ مجموعه جواب مشترک چنین است:

مجموعه جواب مشترک $= \left\{x \middle| -\frac{1}{3} < x < 0\right\}$

۹ ـ سه عدد متوالی را به $x - 1$ و x و $x + 1$ نمایش می‌دهیم. بنابراین داریم:

$(x-1) + x + (x+1) = (x-1)x(x+1) \Rightarrow 3x = x^3 - x$

$\Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0$ یا $x = \pm 2$

$x = 2:\ 1,\ 2,\ 3 \quad x = -2:\ -3,\ -2,\ -1$ ،

$x = 0:\ -1,\ 0,\ 1$

بنابراین سه عدد متوالی طبیعی ۱ و ۲ و ۳ می‌باشند و معدل آنان چنین است:

معدل $= \frac{1+2+3}{3} = \frac{6}{3} = 2$

۱۰ ـ (جملهٔ عمومی تصاعد) $a_n = \frac{1}{2^{n-2}}$

$n = 1:\ a_1 = \frac{1}{2^{1-2}} = \frac{1}{2^{-1}} = 2$ و

$n=2:\ a_2 = \frac{1}{2^{2-2}} = \frac{1}{2^0} = \frac{1}{1} = 1$

(قدر نسبت) $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{2}$

$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$

$\Rightarrow \boxed{S = 4 \text{ (حد مجموع جملات تصاعد)}}$

۱۱ ـ جملهٔ عمومی تصاعد حسابی:

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$\Rightarrow \begin{cases} n=2: & a_2 = a_1 + d = 23 \\ n=5: & a_5 = a_1 + 4d = 38 \end{cases} \Rightarrow$

$4d - d = 38 - 23$

$3d = 15$

$\boxed{d = 5 \quad \text{(قدر نسبت)}}$

$a_1 = 23 - d = 23 - 5 = 18 \Rightarrow \boxed{a_1 = 18 \quad \text{(جملهٔ اول)}}$

$a_{20} = a_1 + 19d = 18 + 19\times 5 = 18 + 95 = 113$

$\Rightarrow \boxed{a_{20} = 113 \quad \text{(جملهٔ بیستم)}}$

۱۲ ـ با فرض $\log 7 = a$ داریم:

$\log \sqrt[2k]{4900} = \frac{1}{2k}\log 4900 = \frac{1}{2k}(\log 49 + \log 100)$

$= \frac{1}{2k}(2\log 7 + 2) = \frac{2k+2}{2k} = \frac{k+1}{k}$

۱۳ ـ داریم:

$\log\left(\sin 3^\circ \log_9 (9)^{20}\right)^x =$ طرف اول معادله

$+ \log\left(\cos 6^\circ \log_8 (8)^{10}\right)^x$

$= \log(\sin 60^\circ)^x + \log(\cos 60^\circ)^x$

$= \log(\sin 60^\circ \cos 60^\circ)^x = \log\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^x$

$\Rightarrow \log\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^x = \log\left(\frac{3\sqrt{3}}{64}\right)^{x-1}$

$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^x = \left(\frac{3\sqrt{3}}{64}\right)^{x-1}$

$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^x = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{3x-3} \Rightarrow x = 3x - 3$

$\Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}}$

۱۴ ـ داریم: $(\log 2 = 0/301)$

$\log 8^{10} = \log(2^3)^{10} = \log 2^{30} = 30\log 2 = 30(0/301)$

$\Rightarrow \log 8^{10} = 9/03 \Rightarrow$ تعداد ارقام عدد 8^{10}

$= 1 +$ مفسر $= 1 + 9 = 10$

بنابراین عدد 8^{10} یک عدد ده رقمی است.

۱۵ ـ با فرض $y = \sin x + \cos x$ داریم:

$y^2 = \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} + 2\sin x\cos x = 1 + 2\sin x\cos x$

$\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{y^2-1}{2} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{y^2-1}{2} = \frac{1}{6}$

$y^2 - 1 = \frac{1}{3} \Rightarrow y^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} \Rightarrow \boxed{y = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

۱۶ ـ با استفاده از اتحاد:

$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$

خواهیم داشت:

$P = (\cos\theta + \sin\theta)^4 - (\cos\theta - \sin\theta)^4$

$= \left((\cos\theta+\sin\theta)^2 - (\cos\theta - \sin\theta)^2\right)$
$\left((\cos\theta+\sin\theta)^2 + (\cos\theta-\sin\theta)^2\right)$

$= (1 + 2\sin\theta\cos\theta - 1 + 2\sin\theta\cos\theta)$
$(1 + 2\sin\theta\cos\theta + 1 - 2\sin\theta\cos\theta)$

$= (4\sin\theta\cos\theta)(2) = 4(2\sin\theta\cos\theta) = 4\sin 2\theta$

$\Rightarrow P = 4\sin 2\theta\ ,\ \theta = \frac{\pi}{8} : P = 4\sin 2(\frac{\pi}{8}) = 4\sin\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow P = 4\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{P = 2\sqrt{2}}$

۱۷ ـ با توجه به اتحاد مثلثاتی:

$tg 2x = \frac{2tgx}{1 - tg^2 x}$ داریم:

$tgx \cdot tg2x = tgx\left(\frac{2tgx}{1-tg^2x}\right) = \frac{2tg^2x}{1-tg^2x} = -1$

$\Rightarrow 2tg^2x = tg^2x - 1 \Rightarrow tg^2x = -1$

معادلهٔ اخیر در مجموعهٔ اعداد حقیقی جواب ندارد. بنابراین معادله مورد نظر در فاصلهٔ $[0, 2\pi]$ دارای جواب نیست.

◆ حل مسائل ریاضیات سال سوّم تجربی

۱ ـ با استفاده از توزیع‌پذیری ضرب درونی نسبت به جمع بردارها داریم:

$\vec{a}.(\vec{a}+\vec{b}) = 16 \Rightarrow \vec{a}.\vec{a} + \vec{a}.\vec{b} = 16 \Rightarrow$

$|\vec{a}|^2 + \vec{a}.\vec{b} = 16 \Rightarrow 25 + \vec{a}.\vec{b} = 16 \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = -9$

$|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b}) = -9 \Rightarrow 5|\vec{b}|\cos\frac{2\pi}{3} = -9 \Rightarrow$

$-\frac{5}{2}|\vec{b}| = -9 \Rightarrow \boxed{|\vec{b}| = \frac{18}{5}}$

۲ ـ مساحت صفحهٔ قطری در مکعب به یال a، برابر $a^2\sqrt{2}$ است. پس:

$a^2\sqrt{2} = 9\sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$ اندازهٔ یال مکعب

$\Rightarrow V = a^3 = 3^3 = 27$ حجم مکعب

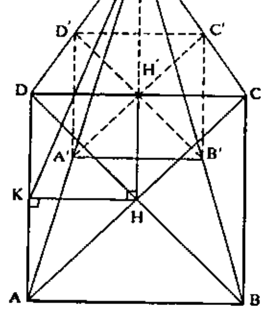
۳ ـ برای محاسبهٔ حجم این هرم، اندازهٔ ضلع قاعده و ارتفاع آن را به دست می‌آوریم می‌دانیم که:

قطر مربع به ضلع $a = a\sqrt{2} \Rightarrow 16\sqrt{2} = a\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{a = 16}$

$\Rightarrow HK = \frac{16}{2} = 8\ ,$

$SK = 10 \Rightarrow SH = \sqrt{SK^2 - HK^2} = \sqrt{100 - 64} = 6$

$\Rightarrow SH = h = 6$ اندازهٔ ارتفاع هرم



(حجم هرم) $V = \frac{1}{3}$ سطح قاعده × ارتفاع $\Rightarrow V = \frac{1}{3}(16^2)(6)$
$= 512$ واحد حجم

اگر نقطهٔ تقاطع صفحه‌ای که موازی قاعده و به فاصله $\frac{1}{4}$ ارتفاع از قاعده (در نتیجه $\frac{3}{4}$ ارتفاع از رأس هرم) رسم می‌شود با ارتفاع SH را H' ، و مقطع این صفحه با هرم را A'B'C'D' بنامیم می‌دانیم که: $\frac{V_{SA'B'C'D'}}{V_{SABCD}} = (\frac{3}{4})^3 = \frac{27}{64}$ پس داریم:

$\frac{V_{SA'B'C'D'}}{512} = \frac{27}{64} \Rightarrow V_{SA'B'C'D'} = 216$

$\Rightarrow V$ هرم ناقص $= 512 - 216 = 296$ حجم هرم ناقص بالایی

۴ ـ داریم:

$D: 4x - 2y + 3 = 0$

$D': 6y - 12x - 12 = 0$ یا $D': 4x - 2y + 4 = 0$

فاصلهٔ دو خط موازی D و D' چنین است:

$d = \frac{|4-3|}{\sqrt{16+4}} = \frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \Rightarrow d = \frac{\sqrt{5}}{10}$

(طول یک ضلع مربع)

بنابراین داریم:

$R^2 = 2d^2 = 2\left(\frac{1}{20}\right) = \frac{1}{10} \Rightarrow R\,\frac{\sqrt{10}}{10}$

(طول قطر مربع)

۵ ـ داریم:

$m_{AB} = tg\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-3}{4-5} = \frac{1}{-1} = -1$

$tg\alpha = -1 = tg135^\circ \Rightarrow \alpha = 135^\circ$ یا $\boxed{\alpha = \frac{3\pi}{4}}$

۶ ـ می‌دانیم، شرایط پیوستگی چنین است:

$\lim_{x\to x_0^+} F(x) = \lim_{x\to x_0^-} F(x) = F(x_0)$

بنابراین داریم:

$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx} - 4\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2\sin^2\frac{ax}{2}}{2\sin^2\frac{bx}{2}} - 4\right)$

$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{a^2x^2}{4}\left(\frac{\sin\frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}}\right)^2}{\frac{b^2x^2}{4}\left(\frac{\sin\frac{bx}{2}}{\frac{bx}{2}}\right)^2} - 4\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{a^2x^2}{4}(1)}{\frac{b^2x^2}{4}(1)} - 4\right)$

$= \frac{a^2}{b^2} - 4$ (حد راست)

$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x^3 - a^3}{x-a} - 1\right) = \frac{-a^3}{-a} - 1 \overset{(a\neq 0)}{=} a^2 - 1$ (حد چپ)

$F(0) = 0$ (مقدار تابع) $\Rightarrow \begin{cases} a^2 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = \pm 1} \\ \frac{a^2}{b^2} - 4 = 0 \Rightarrow b^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{b = \pm\frac{1}{2}} \end{cases}$

۷ ـ داریم:

$y = \frac{1}{ax+b} \Rightarrow y' = \frac{-a}{(ax+b)^2}$ (مشتق اول)

$\Rightarrow y'' = \frac{2a^2}{(ax+b)^3} = \frac{(-1)^2 2!a^2}{(ax+b)^{2+1}}$ (مشتق دوم)

$\Rightarrow y''' = \frac{(-1)^3 3\times 2a^3}{(ax+b)^{3+1}} = \frac{(-1)^3 3! a^3}{(ax+b)^{3+1}}$ (مشتق سوم)

$\Rightarrow y^{(4)} = \frac{(-1)^4 4\times 3\times 2a^4}{(ax+b)^{4+1}} = \frac{(-1)^4 4! a^4}{(ax+b)^{4+1}}$

(مشتق چهارم)

(مشتق پنجم) $\Rightarrow y^{(5)} = \frac{(-1)^5 5! a^5}{(ax+b)^{5+1}}$

و بالاخره مشتق nام برابر است با:

داریم: $\Rightarrow y^{(n)} = \frac{(-1)^n n! a^n}{(ax+b)^{n+1}}$,

$(n! = n\times(n-1)\times....\times 2\times 1)$

۸ ـ نقطهٔ تقاطع خط با محور طولها چنین است:

$y = 0: x + y + 2 = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2, A(-2,0)$

می‌دانیم ضریب زاویهٔ خط مماس چنین است:

$m = F'(-2)$

پس داریم:

$$F(x) = \sqrt[5]{x^3+9} \Rightarrow F'(x) = \frac{3x^2}{5\sqrt[5]{(x^3+9)^4}} \Rightarrow m = F'(-2)$$

$$= \frac{3(-2)^2}{5\sqrt[5]{(-8+9)^4}} \Rightarrow \boxed{m = \frac{12}{5} \text{ (ضریب زاویهٔ خط مماس)}}$$

۹ ـ در حالت کلی داریم:

$$c - \sqrt{a^2+b^2} \le a\sin kx + b\cos kx + c \le c + \sqrt{a^2+b^2}$$

پس برای عبارت $A = 4\sin x - 2\sqrt{5}\cos x + 3$ خواهیم داشت:

$$3 - \sqrt{16+20} \le 4\sin x - 2\sqrt{5}\cos x + 3 \le 3 + \sqrt{16+20}$$

$$3 - 6 \le A \le 3 + 6$$

$$-3 \le A \le 9$$

بنابراین کمترین و بیشترین مقدار عبارت A به ترتیب ۳- و ۹ می‌باشد.

۱۰ ـ معادله را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$(\sin x - \cos x) + (\sin^2 x - \cos^2 x) + (\sin^3 x - \cos^3 x) + (\sin^4 x - \cos^4 x) = 0$$

و یا:

$$(\sin x - \cos x)\ [1 + \sin x + \cos x + \sin^2 x + \sin x\cos x + \cos^2 x + (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin x + \cos x)] = 0$$

و یا:

$$(\sin x - \cos x)\ \ (2(\sin x + \cos x) + \sin x\cos x + 2) = 0$$

بنابراین داریم:

$\sin x - \cos x = 0$ یا $2(\sin x + \cos x) + \sin x\cos x + 2 = 0$

$$\Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow tgx = 1 \Rightarrow \boxed{x_1 = k\pi + \frac{\pi}{4}}$$

معادلهٔ دوم یک معادلهٔ کلاسیک است که می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$2\cos^2(x - \frac{\pi}{4}) + 4\sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}) + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{-\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{3\pi}{4}$$

$\Rightarrow \boxed{x_2 = 2k\pi + \pi}$ یا $\boxed{x_3 = 2k\pi - \frac{\pi}{2}}$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر سه دسته جواب عمومی دارد.

۱۱ ـ داریم:

$$A = \sin^2 18° + \sin^2 54°$$

$$2A = 2\sin^2 18° + 2\sin^2 54° \quad , \quad \alpha = 18° \quad , \beta = 54°$$

$$2A = 2\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta = 1 - \cos 2\alpha + 1 - \cos 2\beta$$

$$2 - 2A = \cos 2\alpha + \cos 2\beta = 2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$$

با توجه به:

$$\alpha + \beta = 72° \quad , \quad \alpha - \beta = 36° \quad , \quad \cos(-x) = \cos x$$

خواهیم داشت:

$$\Rightarrow 2 - 2A = 2\cos 72°\cos 36° \Rightarrow 1 - A = \cos 72°\cos 36°$$

همچنین می‌دانیم:

$$\cos 72° = \sin(90° - 72°) = \sin 18°$$

پس می‌توان نوشت:

$$1 - A = \sin 18°\cos 36° = \frac{2\sin 18°\cos 36°\cos 18°}{2\cos 18°}$$

$$= \frac{2\sin 18°\cos 18°\cos 36°}{2\cos 18°}$$

$$= \frac{\sin 36°\cos 36°}{2\cos 18°} = \frac{\sin 72°}{4\cos 18°} \Rightarrow 1 - A = \frac{\cos 18°}{4\cos 18°} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 1 - A = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{A = \frac{3}{4}}$$

۱۲ ـ فرض می‌کنیم:

$$Arc\cos(1 - 2t^2) = \alpha \ , \ Arc\sin t^2 = \beta$$

پس داریم:

$$\cos\alpha = 1 - 2t^2 \ , \ \sin\beta = t^2 \ , \ \alpha = 2\beta$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\Rightarrow \cos 2\beta = 1 - 2\sin^2\beta$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\cos\alpha = \cos 2\beta \Rightarrow 1 - 2t^2 = 1 - 2t^4$$

$$\Rightarrow t^4 - t^2 = 0 \Rightarrow t^2(t^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow t^2 = 0 \Rightarrow \boxed{t = 0}$$

یا $t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow \boxed{t = \pm 1}$

◆ حل مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱ ـ معادلهٔ نیمساز ناحیهٔ اول و سوم یعنی $y = x$ با خطوط $6x + 2y = 40$ و $kx + y = 2$ متقاطع است. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} y = x \\ 6x + 2y = 40 \end{cases} \Rightarrow 6x + 2x = 40 \Rightarrow 8x = 40$$

نقطهٔ تقاطع: $\Rightarrow x = 5 \ , \ y = 5 \Rightarrow A(5,5)$

$$A\begin{vmatrix} x = 5 \\ y = 5 \end{vmatrix} : kx + y = 2 \Rightarrow 5k + 5 = 2$$

$$\Rightarrow 5k = -3 \Rightarrow \boxed{k = -\frac{3}{5}}$$

۲ ـ داریم:

$$x = 0: y = 2\sin x - \cos 3x \Rightarrow y = -1, \boxed{A(0,-1)}$$

نقطهٔ تلاقی:

$$y' = 2\cos x + 3\sin 3x \Rightarrow m = 2\cos(0) + 3\sin 3(0)$$

$$\Rightarrow \boxed{m = 2} \ , \ y - y_A = m(x - x_A)$$

$$\Rightarrow y + 1 = 2(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = 2x - 1 \ \text{(معادلهٔ خط مماس)}}$$

۳ ـ داریم: $y = x + 1$ و $y = x^3 + ax + b$ خط و منحنی روی محور yها بر هم مماس می‌باشند. از آنجا که نقطهٔ تماس متعلق به هر دو نمودار می‌باشد، مختصات آن در هر دو معادله صدق می‌کند:

نقطه تماس: $x = 0: \ y = (0) + 1 = 1 \Rightarrow A(0 \ , \ 1)$

$$x = 0: \ y = (0)^3 + a(0) + b = 1 \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

$$y = x + 1 \Rightarrow \boxed{\text{ضریب زاویه خط مماس: } m = 1}$$

$$y' = 3x^2 + a \Rightarrow m = 3(0)^2 + a = 1 \Rightarrow \boxed{a + 1}$$

۴ ـ داریم:

$$9x^2 - 16y^2 = 64y + 18x - 89$$

$$\Rightarrow 9x^2 - 18x - 16y^2 - 64y = -89$$

$$\Rightarrow 9(x^2 - 2x) - 16(y^2 + 4y) = -89$$

$$\Rightarrow 9(x^2 - 2x + 1) - 9 - 16(y^2 + 4y + 4) + 64 = -89$$

$$\Rightarrow 9(x - 1)^2 - 16(y + 2)^2 = -144$$

$$\Rightarrow 16(y + 2)^2 - 9(x - 1)^2 = 144$$

$\Rightarrow \frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{16} = 1$ (هذلولی قائم)

مرکز هذلولی: $C(\alpha = 1 \ , \ \beta = -2)$

$$a = 3 \ , \ b = 4 \ \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2$$

$$\Rightarrow c^2 = 25 \ \Rightarrow c = 5$$

$$A\begin{vmatrix}\alpha \\ \beta + a\end{vmatrix} \Rightarrow A\begin{vmatrix}1 \\ 1\end{vmatrix} , \ A'\begin{vmatrix}\alpha \\ \beta - a\end{vmatrix} \Rightarrow A'\begin{vmatrix}1 \\ -5\end{vmatrix}$$

$$F\begin{vmatrix}\alpha \\ \beta + c\end{vmatrix} \Rightarrow F\begin{vmatrix}1 \\ 3\end{vmatrix} , \ F'\begin{vmatrix}\alpha \\ \beta - c\end{vmatrix} \Rightarrow F'\begin{vmatrix}1 \\ -7\end{vmatrix}$$

۵ ـ داریم:

$$f(x) = 72\cos 7x\sin 3x =$$

$$\frac{72}{2}(\sin(3x + 7x) + \sin(3x - 7x))$$

$$= 36(\sin 10x - \sin 4x)$$

$$\Rightarrow F(x) = 36(-\frac{\cos 10x}{10} + \frac{\cos 4x}{4}) + c$$

$$\Rightarrow F(x) = -\frac{18}{5}\cos 10x + 9\cos 4x + c$$

۶ ـ

$$1) tg(\frac{\pi}{2} - 2x) - \cot g(\frac{3\pi}{4} - x) = 0$$

$$\Rightarrow \cot g 2x = \cot g(\frac{3\pi}{4} - x) \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{3\pi}{4} - x$$

$$\Rightarrow 3x = k\pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}}$$

$$2) \cos(\frac{\pi}{2} - 2x) - \cot g(\frac{\pi}{2} - x) = 0$$

$$\sin 2x = tgx \Rightarrow 2\sin x\cos x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\xrightarrow{(x \ne k\pi + \frac{\pi}{2})} 2\sin x\cos^2 x - \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x(2\cos^2 x - 1) = 0$$

$\Rightarrow \sin x\cos 2x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$ یا $\cos 2x = 0$

$\sin x = 0 \Rightarrow \boxed{x = k\pi}$ یا $\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}}$$

$$3) 4\sin^2 x + 2\sin 2x + 12\cos^2 x = 10$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 x + \sin 2x + 6\cos^2 x = 5$$

$$\Rightarrow ۲\sin^۲ x + ۲\sin x\cos x + ۶\cos^۲ x = ۵$$

اگر طرفین معادله را بر $\cos^۲ x$ تقسیم کنیم و از اتحاد $۱+tg^۲x = \frac{۱}{\cos^۲ x}$ نیز استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$۲tg^۲x + ۲tgx + ۶ = ۵(۱+tg^۲x)$$

$$\Rightarrow ۳tg^۲x - ۲tgx - ۱ = ۰ \Rightarrow \left| \begin{array}{l} tgx = ۱ \Rightarrow \boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{۴}} \\ \text{یا} \\ tgx = -\frac{۱}{۳} \end{array} \right.$$

$$tgx = tg\alpha \ \ (\alpha = Arctg(-\frac{۱}{۳})) \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{x = k\pi - Arctg(\frac{۱}{۳})}$$

۷ ـ داریم:

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - bc \ , \ a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos\hat{A}$$

$$\Rightarrow b^۲ + c^۲ - bc = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos\hat{A} \Rightarrow ۲\cos\hat{A} = ۱$$

$$\Rightarrow \cos\hat{A} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos\hat{A} = \cos ۶۰^\circ \Rightarrow \boxed{\hat{A} = ۶۰^\circ}$$

همچنین داریم:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = ۲R \Rightarrow a = ۲R\sin\hat{A} \ , \ R = \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow a = ۲(\sqrt{۳})\sin ۶۰^\circ = ۲\sqrt{۳}(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = ۳ \Rightarrow \boxed{a = ۳}$$

جوابهای تفریح اندیشه

*** جواب ۱:** ۳۶۱/۶ =

*** جواب ۲:** بله، جعبه‌های مشخص شده را آن‌طور که نشان داده شده است جابه‌جا کنید.

۴	۹	۷	۳	۱	۱۰	۵	۲	۶	۸
۱	۱۰	۵	۴	۹	۷	۳	۲	۶	۸
۳	۲	۱	۱۰	۵	۴	۹	۷	۶	۸
۵	۴	۳	۲	۱	۱۰	۹	۷	۶	۸
۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۱۰	۹	۸
۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱

*** جواب ۳:** $(\frac{S^۲}{۲})(۴-\pi)$. هر یک از قسمتهای هاشور خورده مساحتی دارد معادل سطح مربع منهای سطح یک ربع از دایره یا $S^۲ - (\frac{\pi S^۲}{۴})$. مساحت دو تا از این ربع دایره‌ها جمع مساحت قسمتهای هاشور خورده را به‌دست می‌دهد.

Borhan
Vol. 5 No. 1
Serial numbers: 15 Autumn 1995

In the name of God

Borhan is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:
Madrasse Publication - No. 36. Haghighat talab Street, Sepahbod gharany Ave, Tehran, Iran
Post code: 14155/1949

Contents:

مسأله نیزه

از غیاث‌الدین جمشید کاشانی

غیاث‌الدین جمشید کاشانی، ریاضی‌دانی عالی مقام و محاسبی ماهر و منجمی زبردست و مؤلفی توانا و مخترع آلات دقیق رصد بود و به حق می‌توان او را از برجسته‌ترین ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی دانست. تاریخ تولدش دقیق معلوم نیست ولی می‌دانیم که او از حدود سال ۸۰۸ هجری قمری تا پایان عمرش یعنی سال ۸۳۲، فعالیت علمی داشته است. وی در ۱۹ رمضان سال ۸۳۲ در خارج شهر سمرقند درگذشت. وی در محاسبهٔ جذر و کعب پیشقدم بوده و مخترع کسرهای اعشاری می‌باشد. شاهکار او ساختن رصدخانه سمرقند بود. طریقهٔ محاسبهٔ حجم گنبدهای مُجوّف که از فرمولهای مشکل ریاضی است از کارهای او می‌باشد.

این ریاضی‌دان مسلمان دو رسالهٔ مهم دارد: «مفتاح‌الحساب» و «رسالة‌المحیطیه». وی در «رسالة‌المحیطیه» مقدار عدد π را تا ۱۷ رقم اعشار محاسبه کرده است که دقیق‌ترین مقدار π تا آن زمان است. مسألهٔ زیر یکی از مسائلی است که او طرح و حل نموده است.

مسأله: نیزه‌ای به طور عمودی در آب قرار گرفته و به اندازهٔ ۳ آرش* از آب بیرون است. باد نیزه را منحرف کرده و آن را در آب، به این ترتیب غرق کرد که رأس آن بر آب قرار گرفت و پای آن برجای سابق خود باقی ماند. فاصلهٔ بین موقعیت اول و دومِ آن، برابر ۵ آرش است، ارتفاع نیزه را محاسبه‌کنید.

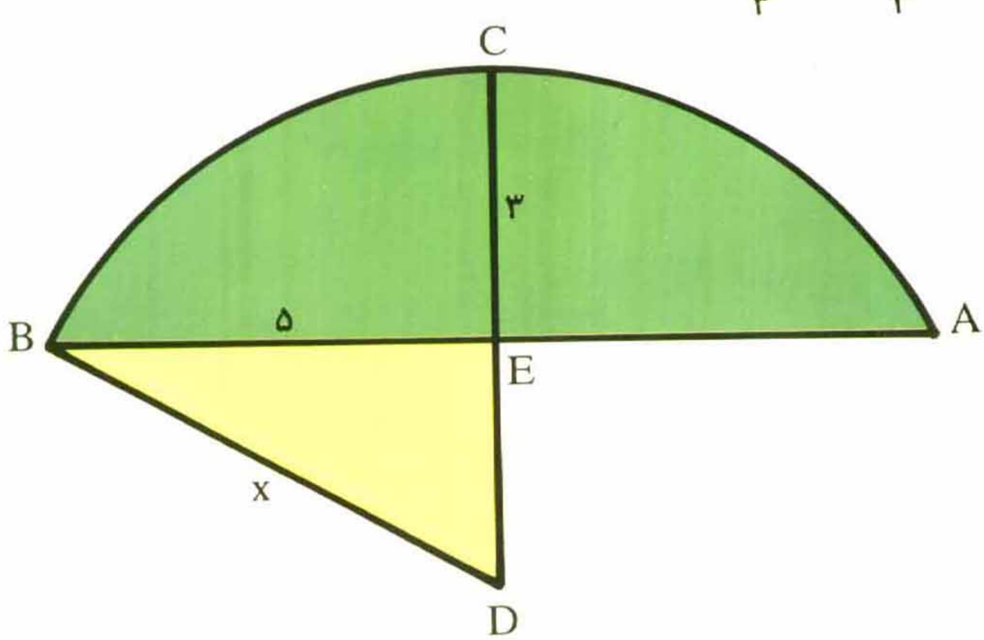
حل: از مثلث قائم‌الزاویهٔ BED (مطابق شکل) به دست می‌آید:

$$(x - ۳)^۲ + ۵^۲ = x^۲$$

$$x^۲ - ۶x + ۹ + ۲۵ = x^۲$$

$$۶x = ۳۴ \Rightarrow ۳x = ۱۷$$

$$x = \frac{۱۷}{۳} = ۵\frac{۲}{۳} \quad \text{(آرش)}$$



---

* آرَش: واحد اندازه‌گیری طول در قدیم بوده که معادل از آرنج تا سر انگشت است. به آن راع نیز می‌گویند.