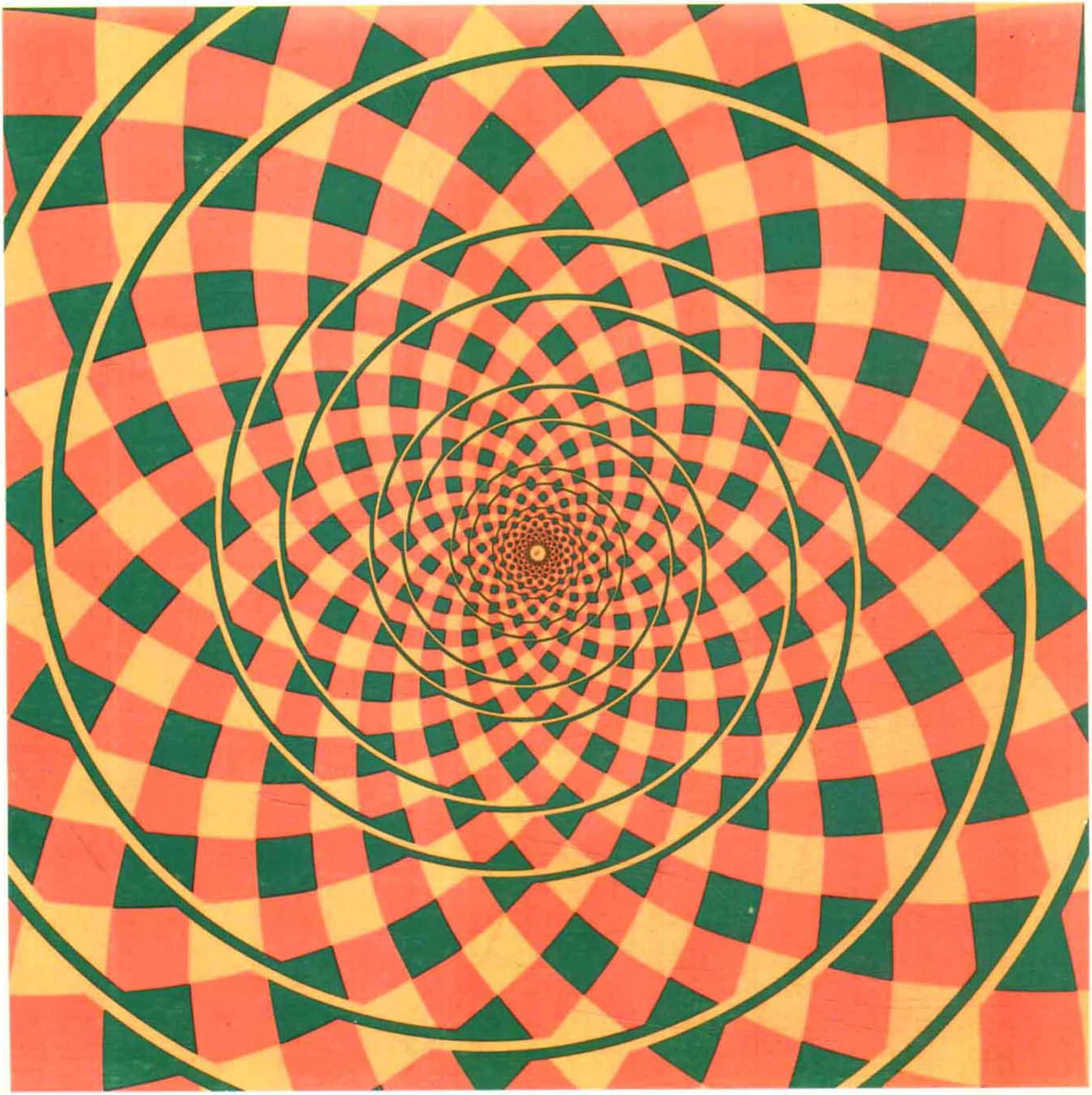
مجله ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۱۰

سال سوم، بهار ۱۳۷۳، شماره سوم، بها ۱۰۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

• صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه

• مدیر مسئول: محمود ابراهیمی • سردبیر: حمیدرضا امیری

اعضای هیئت تحریریه:

آقایان: • حمیدرضا امیری • محمدهاشم رستمی
• احمد قندهاری • سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
• غلامرضا یاسی‌پور

(با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقایان پرویز شهریاری و محمد عابدی و مهدی قمصری و با تشکر از آقای حسین ابراهیم‌زاده قُلزم در بخش کامپیوتر مجله)

• مسئول فنی: هوشنگ آشتیانی • صفحه‌آرا: مهرزاد طاهری
• رسام: فرخ نیکزاد • حروفچینی: یگانه

سال سوم، بهار ۱۳۷۳، شمارهٔ سوم

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱ـ نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی دبیرستان)

۲ـ طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن

۳ـ طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن

۴ـ طرح معماهای ریاضی

۵ـ نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

• هیئت تحریریه درحکّ واصلاح وحذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.
• مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
• مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

مطالب این شماره

نشانی: تهران، خیابان ایرانشهرشمالی، کوچه بهرام‌چوبینی، پلاک ۱۷ تلفن: ۸۸۲۵۹۶۴، ۸۸۲۳۱۴۹، ۵۲ ــ ۸۸۴۳۹۵۰، فاکس: ۸۸۲۰۵۹۹

حرف ا اول

کشتی نشستگان

گروهی مسافر سوار کشتی شدند و هرکدام در جایگاه خود نشستند. پس از مدتی صدای کوبیده شدن چیزی به بدنهٔ کشتی، توجه مسافران را به خود جلب کرد. آنها دیدند مردی با تیشه‌ای کوچک در حال سوراخ کردن کشتی است. با تعجّب به او گفتند: «چه می‌کنی ای مرد؟» مرد با خونسردی سرش را بلند کرد و گفت: «اینجا جای من است و هر کاری که دلم بخواهد با آن می‌کنم.»

اگر دست مرد را بگیرند و مانع کار او شوند، هم خود را از هلاکت نجات می‌دهند و هم او را، ولی اگر او را رها کنند و بگویند: خُب راست می‌گوید جای خودش است و هرکس اختیار کار خود را دارد، هم او را و هم خود را به هلاکت می‌رسانند.

این داستان حکیمانه که از پیامبر عزیز اسلام حضرت محمد(ص) نقل شده است، به خوبی اهمیت امربه معروف و نهی از منکر در یک جامعه را نشان می‌دهد. زیرا سرنوشت جامعه و مردم مانند آن کشتی و مسافرانش، به نوعی با یکدیگر گره خورده است.

این مطلب آن‌قدر مهم است که شخصیت والا و بی‌همتایی همچون امام حسین علیه‌السلام، اساس حرکت و قیام خونبار خود را امربه‌معروف و نهی از منکر اعلام می‌کنند و جان خود و فرزندان و یاران باوفایشان را قربانی می‌کنند تا معروف شناخته شده، پایدار بماند و منکر نیز برمَلا و ریشه‌کن شود.

ما که هر سال و هرگاه مراسم عزای سیدالشهداء علیه‌السلام و دیگر معصومین(ع) را با جدیت و شور و شوق برپا می‌کنیم و اشک عشق و ارادت را از دیده جاری می‌سازیم، درواقع به این مطلب مهم اعتراف می‌کنیم که ما ناآشنا به رسالت عظیم امربه معروف و نهی از منکر نیستیم زیرا درحالی که جگر گوشهٔ پیامبر(ص) و عزیز دل علی(ع) و زهرا (س) و آقای جوانان اهل بهشت، برای امربه معروف و نهی از منکر از خون خود و عزیزانش می‌گذرند، ما که حداقل از دوستداران آن عزیزان هستیم، باید در این راه با جدیت گام برداریم؛ هر کجا زشتی و پلیدی دیدیم یا شنیدیم با تمام توان و به هرشکل که صلاح است، در مقابل آن بایستیم تا از بین برود و همواره از خودمان و نزدیکترین افراد به خودمان گرفته تا دورترین آدمها را دعوت به عقاید و اعمال خیر کنیم و اهل خیر و نیکیها را با جان و مال و زبان تشویق و حمایت کنیم.

اگر چنین باشیم، از مسافران کشتی حسین(ع) خواهیم بود که در دریای طوفانی و متلاطم آشوبها، با آرامش و اطمینان و به سرعت سرنشینانش را به ساحل نجات می‌رساند.

کشتی نشستگانیم ای باد شرطه برخیز باشد که باز بینیم دیدار آشنا را

والسلام

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۱۰)

پرویز شهریاری

نمونه کار در منزل و حل تمرینها

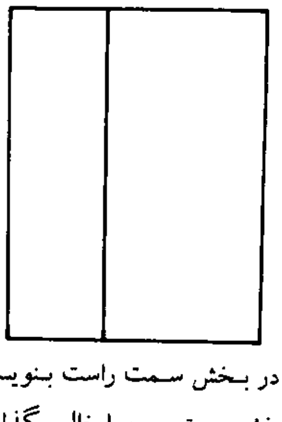
هدف توصیهٔ خاصی، برای نمونهٔ دفتر تمرینهای ریاضی شما نیست. هرکسی می‌تواند به سلیقهٔ خود، روشی را برای کار در منزل انتخاب کند. شکل دفتر یا شیوهٔ نوشتن شما، هیچ تأثیری در پیشرفت کار و رشد خلاقیت ذهنی شما ندارد. با وجود این، توصیه می‌کنم دفتر حل تمرینها را طوری تنظیم کنید که پاسخگوی این شرطها باشد:

۱) همهٔ تلاش ذهنی شما در آن منعکس شود؛ یعنی با مراجعهٔ دوباره به آن، بسادگی متوجه شوید چگونه اندیشیده‌اید؟ چرا نتوانسته‌اید به نتیجه برسید؟ چرا و در کجا اشتباه کرده‌اید؟ کوتاه سخن، بتوانید راه حل یا راه حلهای درست را با راه حل خودتان مقایسه کنید. این یکی از راههایی است که موجب رشد ذهن شما می‌شود و، به‌تدریج، درجهت درست می‌افتد. بنابراین، ضمن حل تمرینها، چیزی را حذف نکنید و از بین نبرید. اگر ضمن حل، به اشتباه خود پی بردید، دور عملهای نادرست (و نه روی آنها) را خط بکشید و راه حل تازه‌ای را که به ذهنتان رسیده است، به‌دنبال نوشته‌های قبلی خود بیاورید.

۲) در هر مسأله، جایی برای یادداشت نکته‌ها یا راه حلهای تازه‌ای که سر کلاس مطرح می‌شود و یا، ضمن مشورت با دوستتان، به آنها پی می‌برید، باز بگذارید.

۳) پیش از حل تمرینها، کوتاه شدهٔ درس را بنویسید (در همان دفتر تمرینها). دربارهٔ درس و مفهومهای آن بیندیشید. آیا نکته‌ای وجود دارد که نفهمیده‌اید؟ آیا دربارهٔ چیزی تردید دارید؟ تنها وقتی حل تمرینها را آغاز کنید که، دربارهٔ درس، هیچ اشکالی نداشته باشید. برای رفع اشکال درسی خود می‌توانید به کتاب (چه کتاب درسی یا کتابهای دیگر) مراجعه کنید، ولی چیزی را نفهمیده نقل نکنید. بویژه دربارهٔ مفهومها و استدلالها، تند رد نشوید. برای هر مفهوم یا هر نتیجه‌گیری، مثال یا مثالهایی پیدا کنید.

نمونهٔ دفتر کار را می‌توان به این ترتیب تنظیم کرد (دوباره تأکید می‌کنم، این، تنها یک توصیه است و شما می‌توانید راه دیگری را برای دفتر تمرینهای خود انتخاب کنید). هر صفحهٔ دفتر خود را به دو بخش نابرابر تقسیم کنید (به‌صورتی که در شکل می‌بینید)، به‌نحوی که بخش سمت راست دو برابر بخش سمت چپ باشد. کوتاه شدهٔ درس



و حل تمرینها را در بخش سمت راست بنویسید (مثلاً بامداد یا خودکار آبی) و بخش سمت چپ را خالی بگذارید. اگر مسأله‌ای را اشتباه حل کرده‌اید، اگر نتوانسته‌اید آن را حل کنید یا اگر بعدها، راه حل تازه و جالبی برای مسأله پیدا کردید، آن‌وقت، آن را با رنگ

دیگری (و مثلاً خودکار قرمز) در بخش سمت چپ یادداشت کنید.
اگر دفتر تمرینهای ریاضی خود را به این صورت تنظیم کنید، دست‌کم دو فایدهٔ عمده دارد:

اوّل این که، هر وقت به آن مراجعه کنید، ضعف و قوت گذشتهٔ خود را به روشنی می‌بینید؛ درضمن، در می‌یابید تا چه اندازه پیش رفته‌اید و ذهن ریاضی شما تا چه حد شکوفاتر شده است. اگر هم، زمانی بخواهید ـ مثلاً برای امتحان ـ تمرینها را مرور کنید، دفتر شما مشخص می‌کند، در چه زمینه‌هایی و دربارهٔ چه مسأله‌هایی اشکال داشته‌اید و، درنتیجه، وقت خود را برای حل دوبارهٔ تمرینهایی که، به‌موقع خود، براحتی حل کرده‌اید، تلف نمی‌کنید.

دوم، اگر دبیر ریاضی شما، گاه‌به‌گاه دفترهای کار دانش‌آموزان را ورق بزند، می‌تواند به نقطه‌های ضعف کلاس (در مجموع) پی ببرد و برای برطرف کردن آنها چاره‌ای بیندیشد.

بهتر است، با آوردن چند مثال، روش حل تمرینها و شیوهٔ یادداشت آنها در دفتر، روشن شود.

در این‌جا، سه مسأله، در سطحهای مختلف، مطرح شده است، چه بسا که خود مسأله‌ها هم، برای شما، جالب و آموزنده باشد، ولی نیت اصلی از آوردن آنها در این‌جا، آشنا کردن شما با روش حل مسأله و نحوهٔ تلاش، برای دست یافتن به راه‌حل است. ذهن آدمی بسیار پیچیده است و، بسته به میزان تجربه‌ای که در کار حل مسأله‌های ریاضی دارد، می‌تواند در جهتهای گوناگون حرکت کند. بنابراین چه بسا، وقتی شما به یکی از این مسأله‌ها برخورد کنید، به‌دنبال روشها و راه حلهای دیگری بروید. این مهم نیست. مهم این است که گمان نکنید، وقتی با یک مسألهٔ تازه روبرو می‌شوید، باید بتوانید بلافاصله آن را حل کنید. هیچ کس چنین قدرتی ندارد و نمی‌تواند ادعا کند، از عهدهٔ حل فوری هر مسألهٔ تازه‌ای برمی‌آید. البته، هرچه تجربهٔ بیشتری داشته باشید، زودتر می‌توانید خودتان را از «بن‌بست» نجات دهید.

تنها باید از میدان در نروید و برای حل مسأله، راههای تازه و تازه‌تری را مورد آزمایش قرار دهید. بارها این مطلب را تکرار کرده‌ام: اگر تنها روی یک مسأله، ساعتها کار کنید، روشهای مختلف حل را مورد آزمایش قرار دهید و از سمتهای گوناگون به آن حمله کنید، ولو این که نتوانسته باشید آن را به نتیجهٔ کامل برسانید، برای شما بسیار مفیدتر از زمانی است که راه‌حل دهها مسأله را از روی تختهٔ سیاه وارد دفتر خود کنید یا با مراجعه به کتابهای حل مسأله، راه حلها را به‌خاطر بسپارید.

خیلی از جمله‌هایی را که، ضمن حل مسأله، در این‌جا می‌بینید، برای نوشتن لازم نیست، بیشتر آنها، چیزهایی است که از ذهن شما می‌گذرد، گرچه نوشتن آنها هم، زیانی به شما نمی‌رساند.

هرجا، ضمن حل مسأله، سه نقطه پشت سرهم می‌بینید (...)، به‌معنای این است که فکر می‌کنید.

اینک مسأله‌ها:

مسألهٔ ۱. باقی ماندهٔ حاصل از تقسیم عدد

$$A = 1^{19} + 2^{19} + 3^{19} + \dots + 40^{19}$$

را بر ۴۲ پیدا کنید.

حل. اوّل ببینیم، چه بخشی از این عدد بر ۴۲ بخش‌پذیر است؟ $a^n + b^n$ (برای عدد طبیعی n) تنها وقتی بر $a + b$ بخش‌پذیر است که n، عددی فرد باشد. ۱۹ عددی فرد است، بنابراین هریک از عددهای
$2^{19}+40^{19};\ 3^{19}+39^{19};\ 4^{19}+38^{19};\ \dots;\ 20^{19}+22^{19}$
بر ۴۲ بخش‌پذیر است. از عدد A، چه می‌ماند؟

$1 + 21^{19}$

بنابراین، کافی است باقی ماندهٔ حاصل از تقسیم 21^{19} را بر ۴۲ پیدا کنیم. اگر این باقی‌مانده برابر r باشد، آن‌وقت باقی مانده حاصل از تقسیم A بر ۴۲، برابر $r + 1$ می‌شود.

برای پیدا کردن باقی ماندهٔ حاصل ضربی مثل abc بر عددی طبیعی مثل m، باید باقی ماندهٔ تقسیم هریک از عاملهای ضرب بر m را پیدا کرد و، سپس، این باقی مانده‌ها را در هم ضرب کرد؛ و اگر این

حاصل‌ضرب از m بزرگتر باشد، دوباره باقی ماندهٔ حاصل از تقسیم آن بر m را به‌دست آورد، داریم:

$$۲۱^{۱۹} = ۲۱ (۲۱^{۳})^{۶} = ۲۱ \times ۹۲۶۱^{۶}$$

باقی ماندهٔ تقسیم ۹۲۶۱ بر ۴۲ برابر است با ۲۱. پس باید باقی ماندهٔ تقسیم عدد

$$۲۱ \times ۲۱^{۶} = ۲۱ (۲۱^{۳})^{۲} = ۲۱ \times ۹۲۶۱^{۲}$$

و یا باقی ماندهٔ حاصل از تقسیم عدد

$$۲۱ \times ۲۱^{۲} = ۲۱^{۳} = ۹۲۶۱$$

را بر ۴۲ به‌دست آورد که برابر ۲۱ می‌شود. یعنی از تقسیم A بر ۴۲، باقی مانده‌ای برابر ۲۲ به‌دست می‌آید.

ولی دقت کنم. آیا لازم بود ۲۱ را به‌توان ۳ برسانم؟ $۲۱^{۲}$ برابر ۴۴۱ است و در تقسیم ۴۴۱ بر ۴۲ به‌همان باقی‌ماندهٔ ۲۱ می‌رسیم؛ یعنی از تقسیم هر توانی از ۲۱ بر ۴۲، باقی مانده‌ای برابر ۲۱ به‌دست می‌آید.

چه‌قدر جالب بود؟ ضمن تقسیم توانی از یک عدد بر ۲ برابر آن عدد، خود عدد به‌عنوان باقی‌مانده به‌دست آمد. آیا همیشه این‌طور است؟ آیا مثلاً از تقسیم $۲^{۷}$ بر ۴، باقی‌مانده‌ای برابر ۲ به‌دست می‌آید؟ $۲^{۷}$ برابر است با ۱۲۸ و ۱۲۸ بر ۴ بخش‌پذیر است. پس قانون، کلی نیست. ببینم، شاید باید پایه عدد فرد باشد! مثلاً $۸۱ = ۳^{۴}$ و در تقسیم ۸۱ بر ۶، باقی‌مانده برابر ۳ می‌شود ... ولی اگر این قانون، کلی باشد، باید بتوانیم آن را درحالت کلی ثابت کنیم. عدد فرد را $۲n + ۱$ می‌گیریم. داریم:

$$(۲n + ۱)^{۲} = ۴n^{۲} + ۴n + ۱ = n\,(۴n + ۲) + ۲n + ۱$$

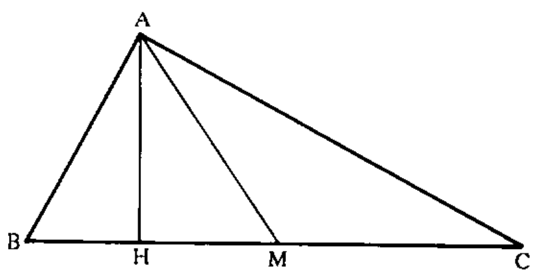
درست شد. از تقسیم $(۲n + ۱)^{۲}$ بر $۴n + ۲$ (یعنی دو برابر $۲n + ۱$)، باقی‌مانده برابر $۲n + ۱$ شد. یک قانون کلی پیدا کردم:

هر توانی از یک عدد فرد را، بر دو برابر آن عدد فرد تقسیم کنیم، باقی مانده‌ای برابر همان عدد فرد به‌دست می‌آید.

و سر کلاس درس، دانش‌آموزی این‌طور استدلال می‌کند: اگر مقسوم و مقسوم‌علیه (بخشی و بخشیاب) را بر عددی تقسیم کنیم، خارج قسمت تغییر نمی‌کند، ولی باقی مانده، بر همان عدد تقسیم می‌شود. در تقسیم $۲۱^{۱۹}$ بر ۴۲، هر دو عدد را بر ۲۱ تقسیم می‌کنیم؛ باقی‌مانده تقسیم عدد فرد $۲۱^{۱۸}$ بر ۲ برابر است با ۱. پس باقی‌ماندهٔ تقسیم $۲۱^{۱۹}$ بر ۴۲ برابر است با ۲۱×۱ یعنی ۲۱. همین استدلال را می‌توان در حالت کلی، برای تقسیم $(۲n + ۱)^{k}$ بر $۲(۲n + ۱)$ به کاربرد.

خیلی جالب بود. این استدلال، هم ساده‌تر است و هم قانع‌کننده‌تر ... خوب، عیبی ندارد. من هم، به هر حال، به‌نتیجهٔ درست رسیده بودم.

مسألهٔ ۲. ثابت کنید، اگر از رأس A در مثلث غیر مشخص ABC، میانهٔ AM، نیمساز AD و ارتفاع AH را رسم کنیم، نیمساز AD همیشه بین ارتفاع AH و میانهٔ AM قرار می‌گیرد.

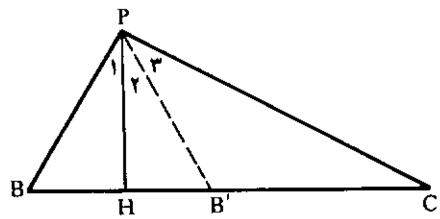


حل. در مثلث ABC، فرض می‌کنیم طول ضلع AB از طول ضلع AC کوچکتر باشد. در این‌صورت روشن است که نقطهٔ H به B نزدیکتراست تابه C (چون $|AB| < |AC|$ پس $|HC| < |BH|$). نقطهٔ M، پای میانه، درست در وسط ضلع BC قرار دارد. به این ترتیب، باید ثابت کنیم، نقطهٔ D، پای نیمساز، بین H و M قرار دارد. ولی چه‌طور؟

ظاهراً در این‌جا، بن‌بست است ... باید راه دیگری بیندیشیم [اگر از این قضیه اطلاع داشته باشیم که نیمساز داخلی هر زاویهٔ مثلث، ضلع روبرو را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کند، می‌توانیم در این جا هم، خودمان را از بن‌بست خارج کنیم. ولی فرض را بر این می‌گیریم که از این قضیه اطلاعی نداریم].

از طریق ضلع BC به‌نتیجه‌ای نرسیدیم. به سراغ زاویهٔ A برویم. نیمساز AD، زاویهٔ A را نصف می‌کند، یعنی زاویهٔ بین نیمساز AD به ضلع AB، با زاویهٔ بین همین نیمساز با ضلع AC برابر است. ببینیم ارتفاع AH چه وضعی دارد. طول HC از طول HB بیشتر است، پس اگر HB' را برابر HB جدا کنیم، نقطهٔ B' بین H و C قرار می‌گیرد. مثلث ABB' متساوی‌الساقین است و بنابراین $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$؛ ولی زاویهٔ A_2 جزئی از زاویهٔ HAC است، یعنی:

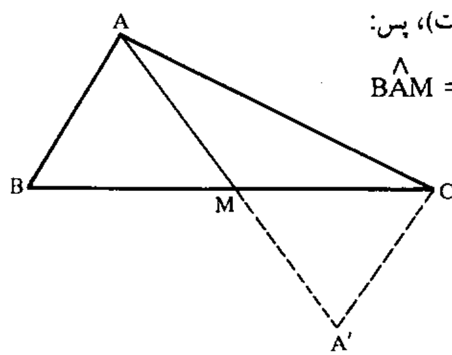
$$H\hat{A}B < H\hat{A}C$$



بله، درست است، با مقایسهٔ زاویه‌های دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH و AHC هم، می‌توانستیم به همین نتیجه برسیم. به این ترتیب، ارتفاع AH نسبت به نیمساز AD در سمت ضلع کوچکتر AB قرار دارد.

با میانه چه کنم؟ از مقایسهٔ زاویه‌های دو مثلث ABM و AMC به‌جایی نمی‌رسیم ... آهان، یادم آمد. دبیر هندسه توصیه کرده بود، بسیاری از مسأله‌های مربوط به میانه با ادامه دادن میانه به‌اندازهٔ خودش، حل می‌شوند. دو مثلث ABM و $MA'C$ با هم برابرند (واضح است)، پس:

$$B\hat{A}M = M\hat{A'}C$$



ولی در مثلث $AA'C$، طول ضلع AC از طول ضلع $A'C$ بیشتر است ($A'C$ طولی برابر طول AB دارد)، پس:

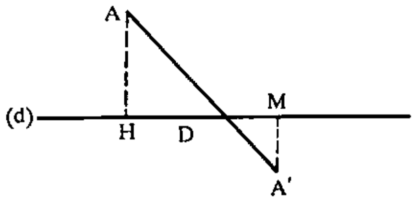
$$A\hat{A'}C > M\hat{A}C$$

که اگر به‌جای $A\hat{A'}C$، برابرش $B\hat{A}M$ را قرار دهیم:

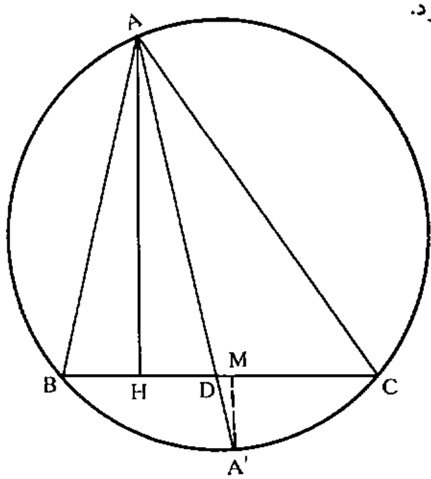
$$B\hat{A}M > M\hat{A}C$$

تمام شد. میانهٔ AM با ضلع بزرگتر، زاویهٔ کوچکتری می‌سازد، یعنی میانه AM نسبت به نیمساز AD، به ضلع بزرگتر نزدیکتر است. نیمساز AD، بین ارتفاع AH و میانهٔ AM واقع است.

و در کلاس درس، دانش‌آموزی، مسأله را این‌طور حل کرد.



اوّل توضیح داد: اگر پاره خط راست AA'، خط راست d را در نقطهٔ D قطع کرده باشد و از نقطه‌های A و A'، عمودهای AH و $A'M$ را بر (d) رسم کنیم، روشن است که D بین دو نقطهٔ H و M واقع می‌شود.



بعد برای حل مسأله، دایرهٔ محیطی مثلث را رسم کرد و نیمساز AD را ادامه داد تا دایره محیطی را در A' قطع کند. A' وسط کمان BC است بنابراین اگر از A' بر BC عمود کنیم، نقطهٔ M (پای عمود) در وسط ضلع BC قرار می‌گیرد، یعنی AM میانه مثلث است. طبق آن چه در ابتدا گفته شد، D بین M و H، یعنی نیمساز AD بین

ارتفاع AH و میانهٔ AM قرار دارد.

چه‌راه‌حل‌ساده و زیبایی؟ همه‌چیز باهم و در یک شکل ثابت شد.

مسألهٔ ۳. **می‌دانیم سه جمله‌ای درجه دوم**

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

دست‌کم یک ریشهٔ درست دارد. a و b و c عددهایی حقیقی و k عددی طبیعی است. چند عدد طبیعی n می‌توان پیدا کرد، به‌نحوی که f(n) بر k بخش‌پذیر باشد؟

حل. دبیر جبر توضیح داد، این مسأله ساده نیست و هرکسی نمی‌تواند آن را حل کند. کاش این حرف را نمی‌زد. اگر از دشوار بودن مسأله اطلاع نداشتم، با اطمینان بیشتری آغاز می‌کردم ... دست و دلم می‌لرزد. آیا می‌توانم مسأله را حل کنم؟ ... ولی نباید اعتماد به نفس را از دست بدهم. دشوار باشد. مگر کارهای دشوار را چه کسی باید انجام دهد؟ من هم یکی از آنها. شروع کنم ... ولی از کجا؟ ...

f(x) یک ریشهٔ درست دارد. آن را α می‌نامیم، یعنی $f(\alpha) = 0$.

پس α یکی از عددهای n است: صفر بر هر عددی بخش‌پذیر است ... نه، نشد! درصورت مسأله گفته شده، α عددی درست است، نه عددی طبیعی. ممکن است α عددی منفی باشد؛ تنها وقتی $n = \alpha$ یکی از جوابهای مسأله است که α، عددی درست و مثبت باشد، یعنی یک عدد طبیعی ...

فرض کنیم، m عددی طبیعی باشد که، به ازای آن، f(m) بر k بخش‌پذیر است:

$$f(m) = am^2 + bm + c$$
$$f(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c$$

α هر عددی باشد، $f(\alpha)$ بر k بخش‌پذیر است. پس باید:

$$f(m) - f(\alpha) = a(m^2 - \alpha^2) + b(m - \alpha)$$

بر k بخش‌پذیر باشد. چون $m - \alpha$ در حالت کلی بر k بخش‌پذیر نیست، پس:

$$a(m + \alpha) + b$$

بر k بخش‌پذیر است ... خوب، بعد چی؟ ... نمی‌شود ادامه داد ...

بهتر است در حالتهای خاص امتحان کنم، شاید راهی برای حل مسأله در حالت کلی پیدا شود. اگر داشته باشیم:

$$f(x) = \sqrt{3}\,(x^2 - 3x + 2)$$

وقتی n عددی طبیعی باشد، f(n) تنها به ازای $n = 1$ و $n = 2$ بر هر عدد طبیعی بخش‌پذیر است. برای هر عدد طبیعی دیگری، غیر از ۱ و ۲، مقدار داخل پرانتز عددی طبیعی و، درنتیجه، f(n) عددی گنگ می‌شود و بخش‌پذیری عدد گنگ بر عدد طبیعی، بی‌معنی است. این‌جا، مسأله دو جواب دارد: $n = 1$ و $n = 2$. ولی مثلاً برای:

$$f(x) = \sqrt{3}\,(x + 1)\left(x - \sqrt{2}\right).$$

به ظاهر، مسأله جواب ندارد و برای

$$f(x) = \sqrt{5}\,(x^2 - 4)$$

تنها $n = 2$ جواب مسأله است.

خوب است، ضریبهای a و b و c را گویا (یا درست) بگیریم. k را هم، عددی مشخص فرض کنم. ببینیم، مسألهٔ زیر را چگونه باید حل کرد:

عدد طبیعی n را طوری پیدا کنید که، برای سه جمله‌ای درجه دوم

$$f(x) = 2x^2 - x - 1$$

عدد f(n) بر ۵ بخش‌پذیر باشد.

عدد طبیعی x، در تقسیم بر ۵، به یکی از این باقی مانده‌ها می‌رسد:

$$0, 1, 2, 3, 4$$

ببینیم در هر یک از این‌حالتها، باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم $f(x)$ بر ۵ چه‌قدر است. جدولی تشکیل می‌دهیم. در ستون سمت چپ، عبارتی را می‌گذاریم (نسبت به x) و، در برابر آن، باقی‌مانده‌های حاصل از تقسیم این عبارت را بر ۵ قرار می‌دهیم.

x:	۰	۱	۲	۳	۴
$x^۲$:	۰	۱	۴	۴	۱
$۲x^۲$:	۰	۲	۳	۳	۲
$-x$:	۰	−۱	−۲	−۳	−۴
$f(x)$:	−۱	۰	۰	−۱	−۳

$f(x)$ در دو حالت بر ۵ بخش‌پذیر است: وقتی که باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم x بر ۵، برابر ۱ یا ۲ باشد، یعنی در این مسأله، n می‌تواند به یکی از این دوصورت باشد:

$n = ۵p + ۱$ یا $n = ۵p + ۲$

که در آنها، p عددی است درست و غیرمنفی. آزمایش کنم، نکند اشتباه کرده باشم.

$$n = ۵p + ۱ \Rightarrow f(n) = ۲(۵p + ۱)^۲ - (۵p + ۱) - ۱$$
$$= ۵۰p^۲ + ۲۰p + ۲ - ۵p - ۱ - ۱ = ۵(۱۰p^۲ + ۳p);$$
$$n = ۵p + ۲ \Rightarrow f(n) = ۲(۵p + ۲)^۲ - (۵p + ۲) - ۱$$
$$= ۵۰p^۲ + ۴۰p + ۸ - ۵p - ۲ - ۱ = ۵(۱۰p^۲ + ۷p + ۱)$$

بنابراین، در این مسأله، بی‌نهایت جواب برای n به‌دست می‌آید. پس مسأله می‌تواند جواب نداشته باشد، یک یا دو جواب داشته باشد و یا تعداد جوابها بی‌نهایت باشد.

ولی در حالت کلی، چه وضعی پیش می‌آید؟ ...

و دبیر جبر، مسأله را این‌طور حل می‌کند:

m را ریشهٔ درست $f(x)$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم، به‌ازای دو عدد درست و مختلف p و q، غیر از m، $f(p)$ و $f(q)$ بر k بخش‌پذیر باشند. یعنی عددهای درست

$$am^۲ + bm + c = ۰\ ,\ ap^۲ + bp + c \in z\ ,\ aq^۲ + bq + c \in z$$

بر k بخش‌پذیرند. در این‌صورت خواهیم داشت:

$a(p^۲ - m^۲) + b(p - m) \in z$ و $a(q^۲ - m^۲) + b(q - m) \in z$

در نتیجه، $a(p + m) + b$ و $a(q + m) + b$ عددهایی گویا هستند و از آن‌جا باید داشته باشیم:

$$a(p - q) \in Q\ ,\ a \in Q\ ,\ b \in Q\ ,\ c = -am^۲ - bm \in Q$$

فرض می‌کنیم: $a = \frac{r}{s}\ ,\ b = \frac{t}{u}\ ,\ c = \frac{v}{w}$

$$g(x) = suwf(x) = ruwx^۲ + tswx + suv$$

ضریبهای چندجمله‌ای $g(x)$، عددهایی درستند و به ازای هر $l \in z$ عدد $g(m + klsuw) = g(m + klsuw) - g(m)$ بر عدد $klsuw$ بخش‌پذیر است. یعنی به ازای $n = m + klsuw$ $(l \in z)$، $g(n)$ بر $ksuw$ و، در این‌صورت، $f(n)$ بر kl، یعنی بر k بخش‌پذیر است.

بنابراین، اگر دو عدد $n \neq m$ وجود داشته باشد که، به‌ازای هریک از آنها، $f(n)$ بر k بخش‌پذیر باشد، آن‌وقت تعداد این عددها بی‌نهایت است.

...

گمان می‌کنم نباید نگران باشم. باوجودی که مسأله دشوار بوده و راه حل ویژه‌ای، تا جاهایی پیش رفته بودم ولی باید سر فرصت، دربارهٔ این راه حل فکر کنم. هنوز بعضی نکته‌های مبهم برایم باقی مانده است. باوجود این معلوم شد، وقتی مسأله دارای بی‌نهایت جواب می‌تواند باشد که، ضریبهای a و b و c ، عددهایی گویا باشند. در مثالی که، درحالت خاص، حل کرده بودم، ضریبها را عددهایی درست گرفته بودم، یعنی در مثال من

$s = u = w = ۱$

یعنی در آن مثال $n = m + klsuw$ به‌صورت $n = m + ۵l$ در می‌آید و چون m، یعنی ریشه‌های درست معادله، برابر ۱ و ۲ بود، جوابها به‌صورت $n = ۵l + ۱$ و $n = ۵l + ۲$ $(l \in Z)$ درآمد

... ولی همان‌طور که گفتم، باید دربارهٔ این راه حل و استدلالهای آن بیشتر فکر کنم. مسألهٔ جالبی بود.

تا بعد

خطوط مجانب

● احمد قندهاری

۱ـ شاخهٔ بی‌نهایت منحنی: می‌گوییم منحنی نمایش تابع به‌معادلهٔ $y = f(x)$ دارای شاخه بی‌نهایت است هرگاه، نقطه یا نقاطی روی منحنی وجودداشته باشد که لااقل یکی از مختصات آن به سمت بی‌نهایت میل کند.

مثال (۱): منحنی نمایش تابع به‌معادلهٔ $y = \frac{۲x - ۱}{x - ۵}$ دارای شاخهٔ بی‌نهایت است زیرا:

$$\begin{cases} \lim \frac{۲x - ۱}{x - ۵} = ۲ \\ x \to \pm\infty \end{cases}$$

مثال (۲): منحنی نمایش تابع به‌معادلهٔ $y = \frac{x^۲ - ۴x}{x - ۱}$ دارای شاخهٔ بی‌نهایت است زیرا:

$$\begin{cases} x \to ۱ \\ y \to \pm\infty \end{cases} \qquad \begin{cases} x \to \pm\infty \\ y \to \pm\infty \end{cases}$$

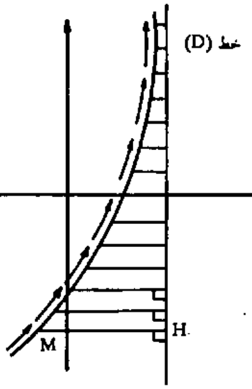
مثال (۳): منحنی نمایش تابع به‌معادلهٔ $y = \frac{۴x + ۱}{x - ۴}$ دارای شاخهٔ بی‌نهایت است زیرا:

$$\begin{cases} x \to ۴ \\ y \to \pm\infty \end{cases} \qquad \begin{cases} x \to \pm\infty \\ y \to ۴ \end{cases}$$

مثال (۴): منحنی‌نمایش‌تابع به‌معادلهٔ $y = \sqrt{۴ - x^۲}$ دارای شاخهٔ بی‌نهایت نیست. زیرا: $D_f = [-۲ , ۲]$

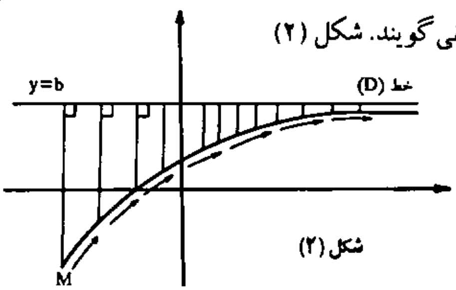
۲ـ تعریف خط مجانب: هرگاه منحنی (C) نمایش تابع به‌معادلهٔ $y = f(x)$ دارای شاخهٔ بی‌نهایت باشد، خط (D) را مجانب آن شاخه منحنیَ گوییم. در صورتی که فاصله نقطهٔ متغیر M روی آن شاخه تا آن خط، وقتی نقطه M روی آن شاخه بی‌نهایت دور شود به سمت صفر میل کند.

تذکر: اگر خط مجانب موازیِ محور عرضها باشد؛ در اصطلاح آن را مجانب قائم گویند. شکل (۱)



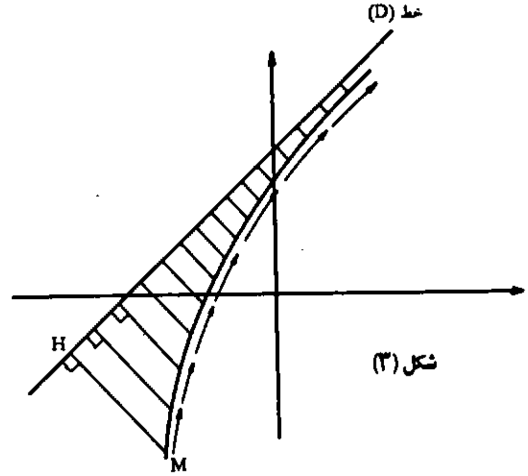
شکل (۱)

اگر خط مجانب موازی محور طولها باشد، در اصطلاح آن را مجانب افقی گویند. شکل (۲)



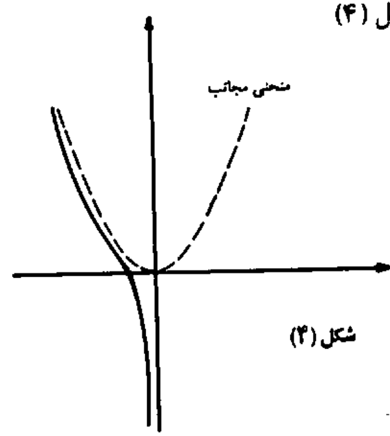
شکل (۲)

اگر خط مجانب محورهای مختصات را قطع کند، دراصطلاح آن را مجانب مایل گویند. شکل (۳)



شکل (۳)

ممکن است مجانب منحنی تابع به معادلهٔ $y = f(x)$، خودش یک منحنی باشد که در آن صورت در اصطلاح آن‌را منحنی مجانب گویند. شکل (۴)



شکل (۴)

۳ـ خط مجانب قائم

قضیه I: اگر درتابع به معادلهٔ $y = f(x)$، حدّ چپ یا حدّ راست یا حدّ تابع وقتی که x به سمت a میل می‌کند، برابر $(+\infty)$ یا $(-\infty)$ شود. در این صورت خطِ D به معادلهٔ $\boxed{x = a}$ را مجانب قائم منحنی تابع به‌معادله $y = f(x)$ گویند. (اثبات درکتاب جبر و آنالیز سال چهارم مبحث مجانبها هست.)

مثال ۱: منحنی نمایش تابع به معادلهٔ $y = \dfrac{4}{\sqrt{x-2}}$ دارای مجانب‌قائمی‌به‌معادلهٔ $\boxed{x = 2}$ است‌زیرا: $x \to 2^+ \Rightarrow y \to +\infty$

مثال ۲: منحنی نمایش تابع به معادلهٔ $y = \dfrac{5x+4}{\sqrt{-x}}$ دارای مجانب‌قائمی‌به‌معادلهٔ $\boxed{x = 0}$ است زیرا: $x \to 0^- \Rightarrow y \to +\infty$

مثال ۳: منحنی نمایش تابع به معادلهٔ $y = \dfrac{-x^2-1}{(x-1)^2}$ دارای مجانب قائمی به معادلهٔ $\boxed{x = 1}$ است زیرا: $x \to 1 \Rightarrow y \to -\infty$

نکته: اگر $x = a$ مجانب قائم منحنی نمایش تابع به معادلهٔ $y = f(x)$ باشد، آنگاه $x = a$ عضو دامنهٔ تعریف تابع نیست ولی لااقل یکی از دو مقدار $a + \varepsilon$ یا $a - \varepsilon$ باید عضو دامنه تعریف تابع باشد.

سؤال: آیا تابع به‌معادلهٔ $y = \dfrac{|x-2|}{x-2}$ خط مجانب قائم دارد؟

جواب: خیر، زیرا:

اگر $x \to 2^+ \Rightarrow y \to 1$

اگر $x \to 2^- \Rightarrow y \to -1$

مثال (۴): آیا منحنی تابع به معادلهٔ $y = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ خط مجانب قائم دارد؟

جواب: خیر، زیرا: دامنهٔ تابع برابر است با:

$(-\infty , -1] \cup [1 , +\infty)$

و جواب مخرج $\boxed{x = 0}$ است و هیچ‌یک از دو مقدار 0^+ یا 0^- عضو دامنهٔ تابع نیست.

مسأله (۱): m را چنان بیابید تا منحنی تابع به معادلهٔ $y = \dfrac{x^2+1}{x^2+mx+4}$ فقط یک مجانب قائم داشته باشد.

حل: باید معادلهٔ $x^2 + mx + 4 = 0$ فقط یک ریشه حقیقی

داشته باشد. پس لازم است $\Delta = ۰$.

$$\Rightarrow \Delta = b^۲ - ۴ac = m^۲ - ۱۶ = ۰ \Rightarrow \boxed{m = \pm ۴}$$

یعنی هر یک از توابع به معادلات $y_۱ = \frac{x^۲ + ۱}{x^۲ + ۴x + ۴}$ و $y_۲ = \frac{x^۲ + ۱}{x^۲ - ۴x + ۴}$ فقط یک مجانب قائم دارد.

مسأله (۲): m را چنان بیابید تا منحنی تابع به معادلهٔ $y = \frac{x - ۱}{x^۲ + mx - ۴}$ فقط یک مجانب قائم داشته‌باشد.

حل: راه‌حل مسأله (۱) درحل این مسأله مقدور نیست زیرا دلتای معادلهٔ $x^۲ + mx - ۴ = ۰$ همواره مثبت است ($\Delta = m^۲ + ۱۶ > ۰$).

برای حل این مسأله باید جواب معادله صورت $x - ۱ = ۰$ را در مخرج قرار بدهیم.

$$x = ۱ \Rightarrow x^۲ + mx - ۴ = ۰ \Rightarrow ۱ + m - ۴ = ۰ \Rightarrow \boxed{m = ۳}$$

وضع جدید تابع به‌صورت: $y = \frac{x - ۱}{x^۲ + ۳x - ۴}$ است.

$$x^۲ + ۳x - ۴ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۴ \end{cases}$$

اگر $x \to ۱ \Rightarrow$ حد $y =$ حد $\frac{x - ۱}{(x - ۱)(x + ۴)} =$ حد $\frac{۱}{x + ۴} = \frac{۱}{۵}$

اگر $x \to -۴ \Rightarrow y \Rightarrow \pm \infty$

پس منحنی این تابع فقط یک مجانب قائم به‌معادلهٔ $\boxed{x = -۴}$ دارد.

مسأله (۳): در تابع به معادلهٔ $y = \frac{x^۲ + x + ۱}{mx^۲ + (m + n)x + mn}$، m و n را چنان بیابید تا خطوط $x = ۱۰$ و $x = ۱۰۰$ معادلات مجانبهای قائم منحنی تابع باشد.

حل: ریشه‌های معادله $mx^۲ + (m + n)x + mn = ۰$ اعداد (۱۰) و (۱۰۰) است پس:

$$x'.x'' = \frac{c}{a} \Rightarrow ۱۰۰۰ = \frac{mn}{m} \Rightarrow \boxed{n = ۱۰۰۰}$$

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} \Rightarrow ۱۱۰ = -\frac{m+n}{m} \Rightarrow ۱۱۰ = -\frac{m + ۱۰۰۰}{m}$$

$$\Rightarrow ۱۱۱m = -۱۰۰۰ \Rightarrow \boxed{m = -\frac{۱۰۰۰}{۱۱۱}}$$

مسأله (۴): معادلات مجانبهای قائم منحنی مکان هندسی نقطهٔ $M \left| \begin{array}{l} x = \frac{\sqrt{۲}}{t} \\ y = \frac{t}{t^۲ - ۲} \end{array} \right.$ را وقتی t تغییر می‌کند بیابید.

$$y \to \infty \Rightarrow \frac{t}{t^۲ - ۲} \to \infty \Rightarrow t^۲ - ۲ \Rightarrow ۰ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t \to \sqrt{۲} \Rightarrow \text{حد } x = ۱ \\ t \to -\sqrt{۲} \Rightarrow \text{حد } x = -۱ \end{cases}$$

بنابراین خطوط $x = ۱$ و $x = -۱$ معادلات مجانبهای قائم است.

مسأله (۵): معادلات مجانبهای قائم منحنی نمایش تابع به معادلهٔ $y = \frac{\sin ۲x}{\cos ۳x}$ را در فاصله $[۰ , ۲\pi]$ بیابید.

حل:

$$y = \frac{۲ \sin x \cos x}{۴ \cos^۳ x - ۳\cos x} = \frac{۲ \sin x \cos x}{\cos x (۴ \cos^۲ x - ۳)}$$

$$y \to \infty \Rightarrow ۴\cos^۲ x - ۳ = ۰ \Rightarrow \cos^۲ x = \frac{۳}{۴} \Rightarrow$$

$$\cos x = \pm \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

الف) $\cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \cos \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶} \Rightarrow$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{۶}, \frac{۱۱\pi}{۶}}$$

ب) $\cos x = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \cos \frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow$

$$\boxed{x = \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}}$$

پس خطوط $x = \frac{\pi}{6}$ و $x = \frac{11\pi}{6}$ و $x = \frac{5\pi}{6}$ و $x = \frac{7\pi}{6}$ معادلات مجانبهاست.

تذکر مهم: اگر در معادلهٔ درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$، a به سمت صفر میل کند، آنگاه قدر مطلق یک ریشه به سمت ∞ میل می‌کند و ریشه دیگر به سمت $(-\frac{c}{b})$ میل می‌کند. چنانچه، a و b هر دو به سمت صفر میل کند، آنگاه قدر مطلق هر دو ریشه به سمت ∞ میل می‌کند.

اثبات: $x = \frac{1}{y}$ فرض می‌شود: $\Rightarrow \frac{a}{y^2} + \frac{b}{y} + c = 0$

$$\Rightarrow cy^2 + by + a = 0$$

اگر $a \to 0 \Rightarrow cy^2 + by \to 0 \Rightarrow y(cy + b) \Rightarrow 0$

$$\Rightarrow y \to 0 , y \to -\frac{b}{c}$$

$$x = \frac{1}{y} \Rightarrow \begin{cases} y \to 0 \Rightarrow & \boxed{|x'| \to \infty} \\ y \to -\frac{b}{c} \Rightarrow & \boxed{x'' \to -\frac{c}{b}} \end{cases}$$

اگر $a \to 0 \Rightarrow \begin{cases} |x'| \to \infty \\ x'' \to -\frac{c}{b} \end{cases}$

اگر $a , b \to 0 \Rightarrow \begin{cases} |x'| \to \infty \\ |x''| \to \infty \end{cases}$

مسأله (۶): معادلات مجانبهای قائم منحنی به معادله $x^2y^2 - 4yx - 4x^2 + 5x - y^2 = 0$ را بیابید.

حل: $(x^2 - 1)y^2 - 4yx + (5x - 4x^2) = 0$

$$y \to \infty \Rightarrow a \to 0 \Rightarrow x^2 - 1 \to 0 \Rightarrow x \to \pm 1$$

پس خطوط $x = 1$ و $x = -1$ معادلات مجانبهای قائم منحنی فوق است.

قضیهٔ II: اگر در یک تابع، $x \to +\infty$ یا $x \to -\infty$ یا $x \to \pm\infty$، آنگاه حدّ تابع برابر عدد (b) شود، خطّ $y = b$ را مجانب افقی منحنی گویند. (اثبات درکتاب سال چهارم مبحث مجانبهاهست).

مثال: معادلات مجانبهای افقی هریک از توابع به‌معادلات زیر را بیابید:

الف) $y = \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$

$$x \to \pm\infty \Rightarrow \text{حد}\, y = \text{حدّ} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$\boxed{y = \frac{1}{2}}$ معادلهٔ مجانب افقی

ب) $y = \frac{x - 1}{x^2 + 4x}$

$$x \to \pm\infty \Rightarrow \text{حد}\, y = \text{حد} \frac{x}{x^2} = \text{حدّ} \frac{1}{x} = \frac{1}{\pm\infty} \to 0 \Rightarrow$$

$\boxed{y = 0}$ معادلهٔ مجانب افقی

نتیجه: یک تابع کسری وقتی مجانب افقی دارد که یا صورت و مخرج همدرجه باشند یا درجه مخرج بیشتر باشد.

هم ارزی رادیکالها

$$\sqrt[p \text{ زوج}]{ax^p + bx^{p-1} + \ldots} \sim \pm \sqrt[p]{a}\left(x + \frac{b}{ap}\right)$$

$x \to \pm\infty$

اگر p فرد باشد سمت راست $(\pm)$ لازم نیست.

اثبات: طرفین را به توان p می‌رسانیم:

$$\Rightarrow ax^p + bx^{p-1} + \ldots \sim a\left(x + \frac{b}{ap}\right)^p$$

$$\Rightarrow ax^p + bx^{p-1} + \dots \sim a\left(x^p + \frac{pb}{ap}x^{p-1} + \dots\right)$$

$$\Rightarrow ax^p + bx^{p-1} + \dots \sim ax^p + bx^{p-1} + \dots$$

مثال (۱):

$$\sqrt[4]{16x^4+64x^3+1} \sim \pm\sqrt[4]{16}\left(x+\frac{64}{4\times 16}\right) = \pm 2(x+1)$$
$$x \to \pm\infty$$

مثال (۲):

$$\sqrt[3]{8x^3-48x^2+5} \sim \sqrt[3]{8}\left(x+\frac{-48}{3\times 8}\right) = 2(x-2)$$
$$x \to \pm\infty$$

مثال (۳):

$$\sqrt{4x^2-24x+2} \sim \pm\sqrt{4}\left(x+\frac{-24}{2\times 4}\right) = \pm 2(x-3)$$
$$x \to \pm\infty$$

مسألهٔ (۷): معادلات مجانبهای افقی منحنی تابع به معادلهٔ $y = \operatorname{Arc\,cos}\dfrac{x+\sqrt{x^2-2x}}{2x+1}$ را بیابید.

الف) $x \to +\infty \Rightarrow$ حد $y =$ حد $\operatorname{Arc\,cos}\dfrac{x+(x-1)}{2x+1}$

$= $ حد $\operatorname{Arc\,cos}\dfrac{2x-1}{2x+1} = \operatorname{Arc\,cos} 1 = 0$

پس خط $\boxed{y=0}$ معادلهٔ مجانب افقی است.

ب) $x \to -\infty \Rightarrow$ حد $y =$ حدّ $\operatorname{Arc\,cos}\dfrac{x-(x-1)}{2x+1}$

$= $ حدّ $\operatorname{Arc\,cos}\dfrac{1}{2x+1} = \operatorname{Arc\,cos} = \dfrac{\pi}{2}$

پس خط $\boxed{y=\dfrac{\pi}{2}}$ هم معادلهٔ مجانب افقی است.

مسأله (۸): معادلات مجانبهای افقی منحنی تابع به معادلهٔ $y = \dfrac{2x+\sqrt{4x^2-24x+1}}{\sqrt{x^2-2x}+x}$ را بیابید.

حل:

الف) $x \to +\infty \Rightarrow$ حد $y =$ حدّ $\dfrac{2x+\sqrt{4}\left(x+\frac{-24}{8}\right)}{+\left(x-\frac{2}{2}\right)+x}$

$= $ حد $\dfrac{4x-6}{2x-1} = 2$

پس خط $\boxed{y=2}$ معادله مجانب افقی است.

ب) $x \to -\infty \Rightarrow$ حد $y =$ حد $\dfrac{2x-\sqrt{4}\left(x+\frac{-24}{8}\right)}{-\left(x-\frac{2}{2}\right)+x} = \dfrac{6}{1} = 6$

پس خط $\boxed{y=6}$ معادله مجانب افقی است.

مسأله (۹): اگر خط $y = 2$ معادلهٔ مجانب افقی منحنی تابع به معادله $y = \dfrac{(a-2)x^3+(b-a)x^2+cx-1}{4x+1}$ باشد، a، b و c را بیابید.

حل: منحنی این تابع وقتی مجانب افقی دارد که درجه صورت از درجهٔ مخرج بیشتر نباشد پس باید ضرایب x^2 و x^3 مساوی صفر باشد.

$$\Rightarrow a-2=0 \Rightarrow \boxed{a=2}$$

$$b-a=0 \Rightarrow b=a \Rightarrow \boxed{b=2}$$

$\Rightarrow$ وضع جدید تابع: $y = \dfrac{cx-1}{4x+1}$

معادلهٔ مجانب افقی: $x \to \pm\infty \Rightarrow$ حد $y = \dfrac{c}{4}$

$$\Rightarrow \frac{c}{4} = 2 \Rightarrow \boxed{c=8}$$

مسأله (۱۰): معادلات مجانبهای افقی منحنی مکان نقطهٔ

$$M \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{t^3}{t^2 - 4} \\ y = \dfrac{8}{t} \end{array} \right.$$ را بیابید.

حل:

$$x \to \pm\infty \Rightarrow \frac{t^3}{t^2 - 4} \to \pm\infty \Rightarrow \begin{cases} t \to 2 & \Rightarrow \lim y = 4 \\ t \to -2 & \Rightarrow \lim y = -4 \\ t \to \infty & \Rightarrow \lim y = 0 \end{cases}$$

پس خطوط $y = 4$ و $y = -4$ و $y = 0$ معادلات مجانبهای افقی است.

توجه: به‌جای آنکه بنویسیم $x \to +\infty$ و $x \Rightarrow -\infty$ می‌توان نوشت: $x \Rightarrow \infty$.

مسأله (۱۱): معادلات مجانبهای افقی منحنی به معادلهٔ $(y^2 - 4)x^2 - 5yx - 1 = 0$ را بیابید.

حل: $x \to \infty \Rightarrow a \to 0 \Rightarrow y^2 - 4 \to 0 \Rightarrow y \to \pm 2$

پس خطوط $y = 2$ و $y = -2$ معادلات مجانبهای افقی است.

مسأله (۱۲): در تابع به‌معادله $y = ax + b + \sqrt{4x^2 - 48x + 5}$ وقتی $x \to +\infty$، خط $y = 2$ معادله مجانب افقی است، a و b را بیابید.

$$x \to +\infty \Rightarrow \lim y = \lim \left[ax + b + \sqrt{4}\left(x + \frac{-48}{8}\right)\right]$$

$$= \lim \left[(a + 2)x + (b - 12)\right] \equiv 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 2 = 0 \\ b - 12 = 2 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \boxed{\begin{array}{l} a = -2 \\ b = 14 \end{array}} \right.$$

۳ـ مجانب مایل

اگر در تابع به معادلهٔ $y = f(x)$ وقتی $x \to \infty$ آنگاه $y \to \infty$ می‌گوییم ممکن است منحنی تابع به‌معادلهٔ $y = f(x)$ دارای مجانب مایلی به‌معادلهٔ $y = mx + h$ باشد.

شرط $\begin{cases} x \to \infty \\ y \to \infty \end{cases}$ برای وجود معادلهٔ مجانب مایل در یک تابع، شرط لازم است و کافی نیست.

قضیّهٔ III: اگر خط (D) به معادلهٔ $Y = mx + h$ معادله مجانب مایل منحنی تابع به معادلهٔ $y = f(x)$ باشد داریم:

$$\begin{cases} \lim (y - Y) = 0 \\ x \to + \text{یا} - \infty \end{cases}$$

عکس قضیّهٔ III: هرگاه تابع به معادلهٔ $y = f(x)$ و خطِ (D) به معادله $Y = mx+h$ را داشته‌باشیم به‌طوری‌که $\lim\limits_{x \to + \text{یا} - \infty} (y - Y) = 0$ آنگاه خط (D) مجانب مایل منحنی است.

(اثبات هردو قضیه در کتاب سال چهارم هست.)

روشهای تعیین معادلهٔ مجانب مایل

روش اوّل: (روش حد):

فرض می‌کنیم خط (D) به معادلهٔ $Y = mx + h$ معادله مجانب مایل منحنی تابع به‌معادله $y = f(x)$ باشد. در این صورت داریم:

$$mx = Y - h$$

$$\Rightarrow m = \frac{Y}{x} - \frac{h}{x}$$

چون شرط لازم مجانب آن است که $x \to \infty$ و $y \to \infty$ پس:

$$m = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{Y}{x} - \frac{h}{x} \right)$$

وقتی $x \to \infty$ عبارت $\frac{h}{x}$ به سمت صفر میل می‌کند. پس:

$$\boxed{m = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x}} \qquad \text{زیرا:} \quad \begin{cases} \lim (y - Y) = 0 \\ x \to \infty \end{cases}$$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{Y}{x}$$ یا

نوع ابهام فوق $\frac{\infty}{\infty}$ است که پس از رفع ابهام مقدار m به‌دست می‌آید. به‌همین ترتیب: $Y = mx + h \Rightarrow h = (Y - mx)$

$$\Rightarrow \left\{ h = \lim_{x \to \infty} (Y - mx) \right. \quad \text{یا} \quad \boxed{h = \lim_{x \to \infty} (y - mx)}$$

ابهام این حدّ $(+\infty \, , \, -\infty)$ است که پس از رفع ابهام مقدار h به‌دست می‌آید.

مثال: معادله مجانب مایل منحنی تابع به معادلهٔ $y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 1}$ را بیابید.

حل: فرض می‌کنیم $y = mx + h$ معادله مجانب مایل منحنی تابع فوق باشد:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2 - 4x + 1}{x - 1}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2 - x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \Rightarrow \boxed{m = 1}$$

$$h = \lim_{x \to \infty} (y - mx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 4x + 1}{x + 1} - x \right)$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-5x + 1}{x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{-5x}{x} = -5 \Rightarrow \boxed{h = -5}$$

معادلهٔ خط مجانب مایل منحنی: $\Rightarrow \boxed{y = x - 5}$

توجه:

۱) اگر $m = 0$ و h حدّ معینی داشته باشد، می‌گوییم خط مجانب مایل به خط مجانب افقی تبدیل شده است.

۲) اگر m یک عدد حقیقی باشد و حدّ (h) بی‌نهایت شود بنا به تعریف می‌گوییم منحنی دارای شاخهٔ سهمی شکل در امتداد خطّ D به ضریب زاویه (m) است.

مثال: در تابع به معادلهٔ $y = 2x + \sqrt{x + 2}$ داریم:

$$x \to +\infty \Rightarrow y \Rightarrow +\infty$$

$$\left\{ m = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x + \sqrt{x + 2}}{x} \right.$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x} = 2 \Rightarrow m = 2$$

$$\left\{ h = \lim_{x \to +\infty} (y - mx) = \lim_{x \to +\infty} (2x + \sqrt{x + 2} - 2x) \right.$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x + 2} = +\infty$$

بنابه شماره (۲)، منحنی دارای شاخه سهمی شکل در راستای خط $y = 2x$ است.

۳) اگر m یک عدد حقیقی باشد و (h) حدّ معینی نداشته باشد، در این صورت می‌گوییم منحنی در راستای $y = mx$ به بی‌نهایت می‌رود ولی دارای شاخهٔ سهمی مانند نیست.

مثال: در تابع به معادلهٔ $y = 2x + \cos x$ داریم:

$$x \to \infty \Rightarrow y \to \infty$$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x + \cos x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\to \boxed{m = 2}$$

$$h = \lim_{x \to \infty} (y - mx) = \lim_{x \to \infty} (2x + \cos x - 2x) = \lim_{x \to \infty} \cos x$$

حدّ $(\cos x)$ وقتی $x \to \infty$ عددی است نامشخص درفاصلهٔ $[-1 \text{ و } 1]$ پس h حدّ معینی ندارد.

۴) اگر حدّ (m)، بی‌نهایت شود، منحنی شاخه سهمی مانند در امتداد محور yها دارد.

مثال: در تابع $y = x^2 + 1$ داریم:

$$x \to \pm\infty \Rightarrow y \to +\infty$$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{y}{x}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x} = \pm\infty$$

مسأله ۱۳: معادله مجانب مایل منحنی مکان نقطهٔ M $\left| \begin{array}{l} x = \dfrac{t+2}{t(t-1)} \\ y = \dfrac{t+3}{t(t^2+1)} \end{array}\right.$ را بیابید.

حل: اوّل باید (t) ای پیدا کرد تا هم x و هم y را به سمت ∞ میل دهد و آن وقتی است که $t \to 0$ پس:

$$t \to 0 \Rightarrow \begin{cases} x \to \infty \\ y \to \infty \end{cases}$$

فرض می‌کنیم خط $y = mx + h$ معادله مجانب مایل منحنی فوق باشد.

$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t+3}{t(t^2+1)}}{\frac{t+2}{t(t-1)}} = \lim_{t\to 0}\frac{t(t-1)(t+3)}{t(t+2)(t^2+1)}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{(t-1)(t+3)}{(t+2)(t^2+1)} = \frac{-3}{2} \Rightarrow \boxed{m = -\frac{3}{2}}$$

$$h = \lim_{x\to\infty}(y - mx) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{t+3}{t(t^2+1)} + \frac{3}{2}\times\frac{t+2}{t(t-1)}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{2(t-1)(t+3) - 3(t+2)(t^2+1)}{2t(t-1)(t^2+1)}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{-3t^3 - 4t^2 + t}{2t(t-1)(t^2+1)} = \lim_{t\to 0}\frac{t(-3t^2 - 4t + 1)}{2t(t^2+1)(t-1)}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{-3t^2 - 4t + 1}{2(t^2+1)(t-1)} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{h = -\frac{1}{2}}$$

معادله مجانب: $\Rightarrow \boxed{y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}}$

تذکر: اگر در تابع به‌معادلهٔ $y = ax + b + \frac{h(x)}{g(x)}$، درجه h(x)، کمتر از درجه g(x) باشد، خط $y = ax + b$ را معادله مجانب مایل منحنی تابع فوق گوییم.

روش دوّم؛ روش تقسیم: اگر در تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$، درجه f(x) یک واحد از درجه g(x) بیشتر باشد و خارج قسمت f(x) بر g(x) به‌صورت $(ax + b)$ باشد، خط $y = ax + b$ را معادله مجانب مایل منحنی تابع فوق گوییم. بنابراین در این روش صورت کسر را بر مخرج کسر تقسیم می‌کنیم اگر خارج قسمت به فرم $(ax + b)$ باشد، خط $y = ax + b$ را معادله مجانب مایل منحنی تابع گوییم.

مثال: معادلهٔ مجانب مایل منحنی تابع به معادلهٔ $y = \frac{2x^2 - 7x - 1}{x - 1}$ را بیابید.

حل:

$$\begin{array}{l|l} 2x^2 - 7x - 1 & x - 1 \\ \hline -6 & 2x - 5 \end{array} \Rightarrow y = 2x - 5 + \frac{-6}{x-1}$$

باتوجه به‌تذکر فوق درنتیجه خط $\boxed{y = 2x - 5}$ معادله مجانب مایل منحنی تابع فوق است.

مسأله ۱۴: در تابع $y = \frac{ax^2 + bx + 5}{x + 1}$، a و b را چنان بیابید تا خط $y = 2x + 3$ معادله مجانب مایل منحنی تابع فوق باشد.

حل:

$$\begin{array}{l|l} ax^2 + bx + 5 & x + 1 \\ \hline a - b + 5 & ax + (b - a) \end{array}$$

معادلهٔ مجانب مایل است. $\Rightarrow y = ax + (b - a)$

معادلهٔ مجانب مایل منحنی $y = 2x + 3$

$$\Rightarrow \boxed{a = ۲} \text{ و } b - a = ۳ \Rightarrow \boxed{b = ۵}$$

سؤال: آیا منحنی تابع به‌معادلهٔ $y = \frac{x\sqrt{x} + ۴}{\sqrt{x} + ۱}$ خط مجانب مایل دارد؟

جواب: خیر، زیرا: اگر صورت کسر را بر مخرج کسر تقسیم کنیم خارج قسمت به‌فرم $(ax + b)$ نمی‌باشد.

$$\begin{array}{l|l} x\sqrt{x} + ۴ & \sqrt{x} + ۱ \\ \hline ۳ & x - \sqrt{x} + ۱ \end{array}$$

به‌طوری‌که ملاحظه می‌شود: $y_۱ = x - \sqrt{x} + ۱$ است که معادله مجانب مایل نیست.

پس نمودار $y_۱ = x - \sqrt{x} + ۱$ چیست؟ و نسبت به منحنی چه نام دارد؟

جواب: نمودار تابع $y_۱ = x - \sqrt{x} + ۱$ یک نیم سهمی است و مجانب منحنی تابع (y) است و آن را منحنی مجانب تابع y گوییم.

تذکر: اگر در تابع به معادله $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ درجه f بیش از یک واحد از درجه $g(x)$ بیشتر باشد، مجانب مایل منحنی تابع y به منحنی تبدیل می‌شود.

ممکن است درجه $f(x)$ فقط یک واحد از درجه $g(x)$ بیشتر باشد ولی خارج قسمت $f(x)$ بر $g(x)$ به‌فرم $(ax + b)$ نباشد. (مانند سؤال قبل) می‌گوییم مجانب مایل به منحنی تبدیل شده است.

روش سوّم: روش تقاطع

فرض می‌کنیم خط $y_۱ = ax + b$ معادلهٔ مجانب مایل منحنی تابع به معادلهٔ $y = f(x)$ باشد. معادلهٔ این خط را با معادلهٔ منحنی تقاطع می‌دهیم (y ها حذف). معادلهٔ تقاطع حاصل را برحسب x مرتب می‌نویسیم، چون خط $y_۱$ بر منحنی y در بی‌نهایت مماس است، بنابراین معادلهٔ تقاطع باید ریشه مضاعف (∞) داشته باشد. بنابراین باید دو ضریب متوالی از بزرگترین درجات معادلهٔ تقاطع حاصل را مساوی صفر قراردهیم. از آن‌جا a و b به‌دست می‌آید.

تذکر مهم: اگر از این روش در توابع رادیکالی باعدد فرجه زوج استفاده کنیم، مجانبهای مایلی که بدین روش به‌دست می‌آید وقتی قابل قبول است که حدّاقل یک دسته از بی‌نهایتهای تابع و متغیر (شرط لازم مجانب مایل) در آن صدق کند. (به‌مسألهٔ ۱۵ دقت کنید.)

مسألهٔ: معادلهٔ مجانب مایل منحنی به معادلهٔ $y = \frac{۲x^۲ - ۷x - ۱}{x - ۱}$ را به‌طریقهٔ تقاطع بیابید.

$$x \to \pm\infty \Rightarrow y \to \pm\infty$$

حل: فرض می‌کنیم $y = ax + b$ معادله مجانب مایل باشد.

$$\begin{cases} y = \frac{۲x^۲ - ۷x - ۱}{x - ۱} \\ y = ax + b \end{cases} \Rightarrow \frac{ax + b}{۱} = \frac{۲x^۲ - ۷x - ۱}{x - ۱}$$

$$\Rightarrow (a - ۲)x^۲ + (b - a + ۷)x + (۱ - b) = ۰$$

$$\begin{cases} a - ۲ = ۰ \\ b - a + ۷ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ b = -۵ \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = ۲x - ۵}$$

معادلهٔ مجانب مایل:

مسأله ۱۵: معادلهٔ مجانب مایل منحنی تابع به معادلهٔ $y = x\sqrt{\frac{x - ۲}{x + ۲}}$ را بیابید.

حل: شرط لازم‌مجانب‌مایل: $\begin{cases} x \to -\infty \\ y \to -\infty \end{cases}$ $\begin{cases} x \to +\infty \\ y \to +\infty \end{cases}$

فرض می‌کنیم $y = ax + b$ معادله مجانب مایل باشد.

$$\begin{cases} y = x\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}} \\ y = ax+b \end{cases} \Rightarrow \quad ax+b = x\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$$

$$\Rightarrow a^2x^2 + 2abx + b^2 = \frac{x^2(x-2)}{x+2}$$

$$\Rightarrow (a^2-1)x^3+(2a^2+2ab+2)x^2+(4ab+b^2)x+2b^2=0$$

$$\begin{cases} a^2-1=0 \\ 2a^2+2ab+2=0 \end{cases} \Rightarrow \quad a=\pm 1$$

۱- اگر $a=1 \Rightarrow 2b+4=0 \Rightarrow b=-2 \Rightarrow \boxed{y=x-2}$

۲- اگر $a=-1 \Rightarrow -2b+4=0 \Rightarrow b=2 \Rightarrow \boxed{y=-x+2}$
غ ق ق

زیرا هیچ دسته از بی‌نهایتهای شرط لازم مجانب مایل در آن صدق نمی‌کند. پس فقط $\boxed{y=x-2}$ معادله‌مجانب‌مایل منحنی تابع فوق است.

روش چهارم: (هم ارزی رادیکالها)

به کمک هم‌ارزی رادیکالها، مجانبهای افقی و مایل بسیاری از توابع به دست می‌آید.

مثال (۱): معادلات مجانبهای منحنی تابع به معادلهٔ $y=2x-1+\sqrt{4x^2+8x-1}$ را بیابید.

$$x\to+\infty \Rightarrow \lim y=\lim\left[2x-1+2\left(x+\frac{8}{8}\right)\right] \Rightarrow \boxed{y=4x+1}$$
معادلهٔ مجانب مایل

$$x\to-\infty \Rightarrow \lim y=\lim\left[2x-1-2\left(x+\frac{8}{8}\right)\right] \Rightarrow \boxed{y=-3}$$
معادلهٔ مجانب افقی

مثال (۲): معادلات مجانبهای تابع به معادله $y=4x+1-\sqrt{x^2-6x+1}$ را بیابید.

حل: معادله مجانب مایل:

$$x\to+\infty \Rightarrow \lim y=\lim[4x+1-(x-3)] \Rightarrow y=3x+4$$

معادله مجانب مایل:

$$x\to-\infty \Rightarrow \lim y=\lim[4x+1+(x-3)] \Rightarrow y=5x+2$$

روش پنجم: روش ترکیبی تقسیم و هم ارزی رادیکالها

به‌کمک این روش هم مجانبهای مایل بعضی از توابع به دست می‌آید.

مثال: معادلات مجانبهای منحنی تابع به معادلهٔ $y=\sqrt{\dfrac{x^3-1}{x-2}}$ را بیابید.

معادلهٔ مجانب قائم: $y\to+\infty \Rightarrow x-2\to 0 \Rightarrow \boxed{x=2}$

شرط لازم مجانب مایل: $x\to\pm\infty \Rightarrow y\to+\infty$

$$\begin{array}{l|l} x^3-1 & x-2 \\ \hline 7 & x^2+2x+4 \end{array}$$

$$y=\sqrt{\frac{x^3-1}{x-2}}=\sqrt{x^2+2x+4+\frac{7}{x-2}}$$

$$x\to\pm\infty \Rightarrow \lim y=\lim \pm(x+1) \Rightarrow \boxed{y=\pm(x+1)}$$

معادلات مجانبهای منحنی تابع فوق

مسأله ۱۶: تابع $y=2x-1+\sqrt{ax^2-24x+1}$ مفروض است. اگر منحنی این تابع مجانب افقی داشته‌باشد، معادله مجانب مایل آن را بیابید.

حل: منحنی تابع فوق وقتی مجانب افقی دارد که جمله ax^2، وقتی از رادیکال خارج شود، مساوی $(-2x)$ شود بنابراین باید $\boxed{a=4}$ و $x\to-\infty$

وضع جدید تابع $\Rightarrow y = 2x - 1 + \sqrt{4x^2 - 24x + 1}$

$$x \to +\infty \Rightarrow \lim y = \lim \left[2x - 1 + 2\left(x + \frac{-24}{8}\right)\right]$$

$$= \lim [2x - 1 + 2x - 6]$$

$y = 4x - 7$ معادلهٔ مجانب مایل است.

مسأله ۱۷: در تابع $y = -3x - 1 + \sqrt{ax^2 + bx - 1}$ اگر $x \to +\infty$، خط $y = 2x + 1$ معادلهٔ مجانب مایل است. معادلهٔ مجانب مایل دیگر تابع را بیابید.

$$x \to +\infty \Rightarrow \lim y = \lim \left[-3x - 1 + \sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = (\sqrt{a} - 3)x + \left(\dfrac{b\sqrt{a}}{2a} - 1\right) \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} - 3 = 2 \\ \dfrac{b\sqrt{a}}{2a} - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 25 \\ b = 20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = -3x - 1 + \sqrt{25x^2 + 20x - 1}$$

$$x \to -\infty \Rightarrow \lim y = \lim \left[-3x - 1 - 5\left(x + \frac{20}{50}\right)\right]$$

معادلهٔ مجانب دیگر $\boxed{y = -8x - 3}$

مسأله ۱۸: وضعیت منحنی تابع به معادلهٔ $y = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x}$ را باخط مجانب مایل آن درشروع و پایان شکل بررسی کنید.

حل: منظور از حل مسأله آن است که می‌خواهیم بدانیم در شروع شکل منحنی فوق، منحنی بالای خط مجانب است یا بالعکس. همچنین در پایان شکل منحنی فوق، منحنی بالای خط مجانب است یا بالعکس.

معادلهٔ خط مجانب مایل منحنی تابع فوق به‌صورت $y_1 = x - 4$ است. برای بررسی درشروع شکل رابررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x \to -\infty} (y - y_1)$$

$$\lim_{x \to -\infty} (y - y_1) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2 - 4x + 4}{x} - x + 4\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x} = 0^-$$

از این‌جا نتیجه می‌گیریم که y_1 بزرگتر از y است یعنی درشروع شکل خط مجانب مایل بالای منحنی است.

برای بررسی در پایان شکل $\lim_{x \to +\infty} (y - y_1)$ را بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x \to +\infty} (y - y_1) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - 4x + 4}{x} - x + 4\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x} = 0^+$$

از این‌جا نتیجه می‌گیریم که y بزرگتر از y_1 است یعنی در پایان شکل منحنی بالای خط مجانب مایل است.

مسأله ۱۹: در تابع $y = \dfrac{ax^2 + bx}{\sqrt{x^2 + 1}}$، a و b را چنان بیابید تا وقتی $x \to -\infty$، $y = 2x - 1$ معادلهٔ خط مجانب مایل منحنی تابع فوق باشد.

حل: $x \to -\infty \Rightarrow \lim y = \lim \dfrac{ax^2 + bx}{-(x)} \Rightarrow y = -ax - b$

$$\begin{cases} y = -ax - b \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = -2} \text{ و } \boxed{b = 1}$$

مسأله ۲۰: در تابع $y = \sqrt{\dfrac{ax^3 + bx^2 + 5}{x + 2}}$، a و b را چنان بیابید تا وقتی $x \to +\infty$، $y = 2x + 1$ معادلهٔ مجانب مایل منحنی تابع فوق باشد.

حل:

$$\begin{cases} y = \sqrt{\dfrac{ax^3 + bx^2 + 5}{x + 2}} \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\frac{ax^3 + bx^2 + 5}{x + 2}} = 2x + 1$$

$$\Rightarrow \frac{ax^3+bx^2+5}{x+2}=\frac{4x^2+4x+1}{1}$$

$$\Rightarrow (a-4)x^3+(b-12)x^2-9x+3=0 \Rightarrow \left\{\boxed{\begin{matrix} a=4 \\ b=12 \end{matrix}}\right.$$

مسأله ۲۱: معادلهٔ مجانب مایل منحنی تابع به معادلهٔ $y = x\,\text{Arc}\cos\frac{1}{x}$ را بیابید.

حل: شرط لازم مجانب مایل. $x\to\infty \Rightarrow y\to\infty$

$$m=\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\left(\frac{y}{x}\right)=\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\frac{x\,\text{Arc}\cos\frac{1}{x}}{x}=\text{Arc}\cos 0=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{m=\frac{\pi}{2}}$$

$$h=\underset{x\to\infty}{\text{حد}}(y-mx)=\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\left(x\,\text{Arc}\cos\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$=\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\,x\left(\text{Arc}\cos\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}\right)=\infty\times 0$$

$$\Rightarrow h=\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\frac{\text{Arc}\cos\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}=\frac{0}{0}$$

هوپیتال : $\Rightarrow \underset{x\to\infty}{\text{حد}}\dfrac{\dfrac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}}{-\frac{1}{x^2}}=\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\dfrac{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{-1}=-1$

معادله خط مجانب مایل منحنی $\Rightarrow \boxed{y=\frac{\pi}{2}x-1}$

مسأله ۲۲: معادلهٔ مجانب مایل منحنی مکان نقطهٔ

$M\left|\begin{array}{l} x=t \\ y=t+\text{Arctg}\,t \end{array}\right.$ را وقتی t تغییر می‌کند بیابید.

شرط لازم مجانب مایل اگر $t\to\infty \Rightarrow \begin{cases} x\to\infty \\ y\to\infty \end{cases}$

حل:

$$m=\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\frac{y}{x}=\underset{t\to\infty}{\text{حد}}\frac{t+\text{Arc tg}\,t}{t}=1\rightarrow \boxed{m=1}$$

$$h=\underset{x\to\infty}{\text{حد}}(y-mx)=\underset{t\to\infty}{\text{حد}}(t+\text{Arc tg}\,t-t)$$

$$=\underset{t\to\infty}{\text{حد}}(\text{Arc tg}\,t)=\pm\frac{\pi}{2}$$

معادلات مجانبهای مایل $\Rightarrow \boxed{y=x\pm\frac{\pi}{2}}$

مسأله ۲۳: معادلهٔ مجانب مایل منحنی به‌معادلهٔ $x^3+y^3+3xy=0$ را بیابید.

$$\begin{cases} x\to\infty \\ y\to\infty \end{cases}$$

فرض می‌کنیم خط $y=ax+b$ معادلهٔ مجانب مایل باشد.

$$\begin{cases} x^3+y^3+3xy=0 \\ y=ax+b \end{cases} \Rightarrow x^3+(ax+b)^3+3x(ax+b)=0$$

$$(a^3+1)x^3+(3a^2b+3a)x^2+\dots=0$$

$$\boxed{a=-1}\Rightarrow 3b-3=0\Rightarrow \boxed{b=1}\Rightarrow \boxed{y=x+1}$$

معادله خط مجانب مایل

تذکر: اگر معادله یک منحنی به‌صورت $(ax+by+c)(a'x+b'y+c')=k\neq 0$ باشد هریک از پرانتزهای معادلهٔ مساوی صفر یک مجانب منحنی است.

آموزش ترجمه متون ریاضی (٦)

حمید رضامیری

5 Sequences and series

۵. دنباله‌ها و سریها

5.1 Sequences

Consider the following sets of numbers

$$2, 4, 6, 8, 10, \qquad (5.1)$$
$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots \qquad (5.2)$$

These are examples of *sequences* of numbers. In any sequence the numbers appear in a given order and, further, there is usually a definite law relating each member to other members. Each member is called a *term* of the sequence.

۵.۱ دنباله‌ها

رشته‌های اعداد زیر را درنظر می‌گیریم:

۲ , ۴ , ٦ , ۸ , ۱۰ , ...   (۵.۱)

۱ , ۴ , ۹ , ۱٦ , ۲۵ , ...   (۵.۲)

اینها مثالهایی هستند از دنباله‌هایی از اعداد. در هر دنباله از اعداد یک ترتیب خاصی وجود دارد و علاوه برآن، هرعضو معمولاً بایک قاعدهٔ مشخصی به‌اعضای دیگر مربوط است. هرعضو یک جمله از دنباله نامیده می‌شود.

The sequence (5.1) has just five terms and is an example of a *finite* sequence.

The sequence (5.2) may be written

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \ldots, \qquad (5.3)$$

where ... means 'and so on without limit'. This sequence has an infinite number of terms and is called an *infinite* sequence.

دنبالهٔ (۵.۱) دقیقاً دارای پنج جمله می‌باشد و مثالی از یک دنبالهٔ متناهی است.

دنبالهٔ (۵.۲) را می‌توان به‌صورت

۱

$$۱^۲ , ۲^۲ , ۳^۲ , ۴^۲ , ۵^۲ ,\ldots \quad (۵.۳)$$

نوشت که سه نقطه به‌معنی نامحدود بودن جملات است. این دنباله دارای تعدادی نامتناهی جمله است و یک دنبالهٔ نامتناهی نامیده می‌شود.

To define a sequence we require:
(i) the first term,
(ii) the number of terms,
(iii) the law (formula) by which the terms can be calculated.

The first term of a sequence is usually denoted by u_1 and the general term by u_r. Thus, sequence (5.1) is defined by $u_1 = 2$ and $u_r = 2r$. Since this is a finite sequence, the only values of r are 1, 2, 3, 4, 5. We define sequence (5.2) by $u_1 = 1$ and $u_r = r^2$. There is now no restriction on r, so that $r = 1, 2, 3, \ldots$.

برای مشخص کردن (یا تعریف) یک دنباله به اطلاعات زیر نیازمندیم:

(۱) جمله اول.

(۲) تعداد جمله‌ها.

(۳) قاعده‌ای (فرمولی) که توسط آن جمله‌ها قابل مقابله باشند.

جملهٔ اول یک دنباله معمولاً با نماد u_1 و جملهٔ عمومی آن با u_n نمایش داده‌می‌شود. بنابراین دنبالهٔ (۵.۱) توسط $u_1 = ۲$ و $u_r = ۲r$ مشخص می‌شود. از طرفی چون این دنباله یک دنبالهٔ متناهی است، تنها مقادیر برای r عبارتنداز ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ و ۵. مادنبالهٔ (۵.۲) را توسط $u_1 = ۱$ و $u_r = r^۲$ مشخص می‌کنیم. در این دنباله محدودیتی برای r وجود نداشته، به‌طوری که، $r = ۱ , ۲ , ۳ , \ldots$.

Example 1 The general term u_r of a sequence is of the form $u_r = ar + b$, where a and b are constants. Given that $u_1 = 5$ and $u_3 = 11$, find a and b and show that $u_9 = 29$.

$$(u_1 = 5) \Rightarrow (a + b = 5),$$
$$(u_3 = 11) \Rightarrow (3a + b = 11).$$

Solving these simultaneous equations, we obtain

$$(a = 3, \text{ and } b = 2) \Rightarrow (u_r = 3r + 2).$$

Substituting $r = 9$, we obtain $u_9 = 29$.

مثال ۱: جملهٔ عمومی دنباله‌ای به‌صورت $u_r = ar + b$، می‌باشد که a و b اعداد ثابت هستند. اگر فرض کنیم $u_۱ = ۵$ و $u_۳ = ۱۱$، دراین صورت مقادیر a و b را یافته و نشان دهید که $u_۹ = ۲۹$.

$$(u_۱ = ۵) \Rightarrow (a + b = ۵)$$
$$(u_۳ = ۱۱) \Rightarrow (۳a + b = ۱۱)$$

از حل این دستگاه معادلات، خواهیم داشت:

$$(a = ۳ \ , \ b = ۲) \Rightarrow u_r = ۳r + ۲$$

باقرار دادن $r = ۹$، $u_۹ = ۲۹$ به دست می‌آید.

Example 2 Write down the first five terms of the sequence in which the general term is given by $u_r = 2^r$.

$u_1 = 2^1 = 2,\ u_2 = 2^2 = 4,\ u_3 = 2^3 = 8,\ u_4 = 2^4 = 16,\ u_5 = 2^5 = 32.$

مثال ۲: اولین پنج جملهٔ دنبالهٔ زیر که باجملهٔ عمومی $u_r = ۲^r$ مشخص شده است را بنویسید.

$u_۱ = ۲^۱ = ۲$, $u_۲ = ۲^۲ = ۴$, $u_۳ = ۲^۳ = ۸$, $u_۴ = ۲^۴ = ۱۶$,
$u_۵ = ۲^۵ = ۳۲$

5.2 Series

When the terms of a sequence are added together, we obtain a *series*. For example, sequence (5.1) gives the series

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10, \qquad (5.4)$$

which is an example of a *finite series*.

Sequence (5.2) gives the series

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \cdots \qquad (5.5)$$

This is an example of an *infinite series*.

From the general finite sequence $u_1, u_2, \ldots, u_n$ we obtain the series

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n. \qquad (5.6)$$

This series may be written in a more concise form, using what is known as the '*sigma notation*'. Instead of sequence (5.6) we write

$$\sum_{r=1}^{n} u_r. \qquad (5.7)$$

۵.۲ سریها

وقتی که جملات یک دنباله را بایکدیگر جمع کنیم یک سری حاصل می‌شود. برای مثال دنبالهٔ (۵.۱) سری زیر را به ما می‌دهد.

$$۲ + ۴ + ۶ + ۸ + ۱۰ \qquad (۵.۴)$$

که این مثالی از یک سري متناهي است.

دنبالهٔ (۵.۲) سری زیر را حاصل می‌کند، که این سری مثالی از یک سری نامتناهی است:

$$۱ + ۴ + ۹ + ۱۶ + ۲۵ + \ldots \qquad (۵.۵)$$

مادرحالت کلی از دنبالهٔ متناهی u_n , ... , $u_۲$, $u_۱$، سری زیر را می‌توانیم داشته‌باشیم:

$$u_۱ + u_۲ + \ldots + u_n \qquad (۵.۶)$$

با استفاده از نماد *سیگما* امکان این هست که این سري را بتوان به‌صورت زیر نوشت. به جای سری (۵.۶) می‌نویسیم:

$$\sum_{r=۱}^{n} u_r \qquad (۵.۷)$$

The symbol Σ is a form of the Greek capital letter sigma, which corresponds to S, the first letter of the word 'sum'. In words, expression (5.7) reads 'sigma, r equals 1 to n, of u_r'. The word 'sigma' may be replaced by 'sum'. The expression indicates that a summation is to be carried out, the terms to be added being the u_r, where r is a counter which takes consecutive integral values from 1 to n. The lower limit of the sum is always written below the Σ and the upper limit above. Expression (5.7) is sometimes even further abbreviated to

$$\sum_{1}^{n} u_r.$$

نماد Σ یکی از حروف بزرگ یونانی است، و متناظر با S می‌باشد که S اولین حرف کلمهٔ sum است (به معنی جمع). عبارت (۵.۷) به‌صورت «سیگما r مساوی با یک تا n از u_r» خوانده می‌شود. کلمهٔ سیگما ممکن است به‌جای جمع بکار گرفته شود. عبارت (۵.۷) نشان می‌دهد که یک عمل جمع انجام پذیرفته است به‌صورتی که، وقتی r به طور متوالی اعداد صحیح ۱ تا n را می‌پذیرد، جملات توسط u_r باهم جمع می‌شوند.

معمولاً حد پایینی جمع را در پایینِ Σ و حد بالایی را در بالای آن قرار می‌دهیم. عبارت (۵.۷) حتی گاهی اوقات برای مختصر نویسی به‌صورت $\sum_{۱}^{n} u_r$ نوشته می‌شود.

Example 3 Write out explicitly the series

(a) $\sum_{r=1}^{4} \frac{(-1)^r}{r}$, (b) $\sum_{r=0}^{4} (-1)^{r+1} r(r+1)$, (c) $\sum_{r=2}^{4} r!$.

(a) $\sum_{r=1}^{4} \frac{(-1)^r}{r} = \frac{(-1)^1}{1} + \frac{(-1)^2}{2} + \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^4}{4} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.

(b) $\sum_{r=0}^{4} (-1)^{r+1} r(r+1) = 0 + (-1)^2 1 \times 2 + (-1)^3 2 \times 3 + (-1)^4 3 \times 4 + (-1)^5 4 \times 5 = 2 - 6 + 12 - 20.$

(c) $\sum_{r=2}^{4} r! = 2! + 3! + 4! = 2 + 6 + 24.$

[Remember that $r!$ denotes $r(r-1)(r-2) \dots 2.1$.]

Note that in (b) and (c) we have $\sum_{r=0}$ and $\sum_{r=2}$, respectively.

مثال ۳: سریهای زیر را به شکل صریح (باز شده) بنویسید:

(الف) $\sum_{r=۱}^{۴} \frac{(-۱)^r}{r}$

ب) $\sum_{r=۰}^{۴} (-۱)^{r+۱} r(r+۱)$

ج) $\sum_{r=۲}^{۴} r!$

(الف) $\sum_{r=۱}^{۴} \frac{(-۱)^r}{r} = \frac{(-۱)^۱}{۱} + \frac{(-۱)^۲}{۲} + \frac{(-۱)^۳}{۳} + \frac{(-۱)^۴}{۴} = -۱ + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴}$

ب) $\sum_{r=۰}^{۴} (-۱)^{r+۱} r(r+۱) = ۰ + (-۱)^۲ \times ۱ \times ۲ + (-۱)^۳ \times ۲ \times ۳ + (-۱)^۴ \times ۳ \times ۴ + (-۱)^۵ \times ۴ \times ۵ = ۲ - ۶ + ۱۲ - ۲۰$

ج) $\sum_{r=۲}^{۴} r! = ۲! + ۳! + ۴! = ۲ + ۶ + ۲۴$

[یادآوری می‌کنیم که، $r! = r(r-۱)(r-۲) \dots ۲ \times ۱$]

توجه دارید که درقسمت (ب) و (ج) ما به‌ترتیب از $\sum_{r=۰}$ و $\sum_{r=۲}$ استفاده کردیم.

Example 4 Write the following series in sigma notation:

(a) $1 - a + a^2 - a^3$,

(b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16}$.

(a) We note that the general term is of the form $\pm a^r$, with a positive sign when r is even (we regard $r = 0$ as even) and a negative sign when r is odd. The four terms correspond to $r = 0, 1, 2, 3$. Hence, we have

$$1 - a + a^2 - a^3 = \sum_{r=0}^{3} (-1)^r a^r.$$

Check that

$$\sum_{r=1}^{4} (-1)^{r-1} a^{r-1}$$

is an equivalent expression.

مثال ۴: سریهای زیر را به‌صورت نماد سیگما نمایش دهید:

(الف) $۱ - a + a^۲ - a^۳$

ب) $\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۱۶}$

الف) ماتوجه داریم که جملهٔ عمومی به شکل $\pm a^r$ است، که وقتی r زوج است علامت آن مثبت (ما صفر را مثبت درنظر می‌گیریم) و زمانی که r فرد است علامت آن منفی می‌باشد. چهار جملهٔ فوق متناظر با $r = ۰ , ۱ , ۲ , ۳$ است. بنابراین داریم:

$$۱ - a + a^۲ - a^۳ = \sum_{r=۰}^{۳} (-۱)^r a^r$$

و یااینکه به‌صورت دیگری داریم:

$$۱ - a + a^۲ - a^۳ = \sum_{r=۱}^{۴} (-۱)^{r-۱} a^{r-۱}$$

(b) We first notice that the series may be written

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4}.$$

ب) ما ابتدا سری را به شکل دیگری که امکان‌پذیر است نشان می‌دهیم یعنی:

$$\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۲^۳} - \frac{۱}{۲^۴}$$

The second numbers of the pairs are 4, 7, 10, 13, again differing by 3. Proceeding as above, we find these are obtained from $(3r + 1)$ by substituting the values $r = 1, 2, 3, 4$.
The general term in the series is $(3r - 2)(3r + 1)$ and, hence, the series may be written

$$\sum_{r=1}^{4} (3r - 2)(3r + 1).$$

دومین عددهای زوجهای فوق عبارتنداز ۴ و ۷ و ۱۰ و ۱۳ که دوباره دارای تفاضلی برابر با ۳ می‌باشند. بااقدامی مشابه فوق برای ما شکل (۱ + ۳r) حاصل‌می‌شودکه‌باجایگذاری ۴ , ۳ , ۲ , ۱ = r اعداد فوق به‌دست می‌آیند.

جملهٔ عمومی سری (۱ + ۳r) (۲ − ۳r) می‌باشد و بنابراین، سری می‌تواند به شکل زیر نوشته شود:

$$\sum_{r=۱}^{۴} (۳r - ۲)(۳r + ۱)$$

5.3 Arithmetic progressions (APs)

The sequence 2, 5, 8, 11, . . . , 26 is such that each term may be obtained from the previous one by adding a constant, in this case 3. Such a sequence is called an *arithmetic progression*, or AP. In general, if the first term of such a progression is a and a given term differs from the previous one by d, usually called the *common difference*, then the first n terms of the progression are

$$a, (a + d), (a + 2d), \ldots, [a + (n - 1)d]. \qquad (5.8)$$

The common difference d may be positive or negative.

۵.۳ تصاعدهای عددی (APS)[1]

دنبالهٔ ۲۶ , ... , ۱۱ , ۸ , ۵ , ۲ که هرجملهٔ آن بااضافه کردن مقدار ثابتی (دراین جا عدد ۳) به جملهٔ ماقبلش حاصل می‌شود، را درنظر می‌گیریم. به چنین دنباله‌هایک تصاعد عددی گفته می‌شود، که به اختصار به‌صورت AP نشان می‌دهیم. درحالت کلّی اگر جملهٔ اول یک تصاعد a باشد و اختلاف هرجمله از جملهٔ ماقبلش را d درنظر بگیریم، معمولاً d را قدر نسبت می‌نامند، دراین صورت اولین n جملهٔ تصاعد عبارت است از:

$$a , (a + d) , (a + ۲d) , \ldots , [a + (n - ۱)d] \qquad (۵.۸)$$

قدر نسبت می‌تواند مثبت یا منفی باشد.

1- Arithmetic progressions

The general term is now of the form $\pm\frac{1}{2^r}$ with a positive sign when r is odd and a negative sign when r is even. The general term can then be written

$$(-1)^{r+1}\frac{1}{2^r}$$

and the series

$$\sum_{r=1}^{4} (-1)^{r+1}\frac{1}{2^r}.$$

حال جملهٔ عمومی آن به شکل $\pm\frac{۱}{۲^r}$ می‌باشد. علامت آن مثبت است هرگاه r فرد باشد و منفی است هرگاه r زوج باشد. جملهٔ عمومی می‌تواند به شکل $(-۱)^{r+۱}\frac{۱}{۲^r}$ نوشته شده و سری آن به صورت

$$\sum_{r=۱}^{۴} (-۱)^{r+۱}\frac{۱}{۲^r}$$

Example 5 Write, in sigma notation, the series

$$1.4 + 4.7 + 7.10 + 10.13.$$

Note that the first numbers in the pairs are 1, 4, 7, 10. The difference is 3 in each case and therefore, since the difference is constant, this suggests a linear form such as $ar + b$.

$$r = 1, (ar + b = 1) \Rightarrow (a + b = 1),$$
$$r = 2, (ar + b = 4) \Rightarrow (2a + b = 4),$$
$$\Rightarrow (a = 3, b = -2).$$

Hence, we obtain 1, 4, 7, 10 by substituting the values $r = 1, 2, 3, 4$ in $(3r - 2)$.

مثال ۵: سری زیر را بانماد سیگما نمایش دهید:

$$۱ \times ۴ + ۴ \times ۷ + ۷ \times ۱۰ + ۱۰ \times ۱۳$$

دقت داریم که اولین عددهای، زوجهای فوق عبارتنداز ۱ و ۴ و ۱۰. تفاضل هریک از جملات با جملهٔ قبل ۳ است و بنابراین مادامی که تفاضل عددی ثابت است، یک شکل خطی به‌صورت ar + b ایجاب می‌کند.

$$r = ۱ , (ar + b = ۱) \Rightarrow (a + b = ۱)$$
$$r = ۲ , (ar + b = ۴) \Rightarrow (۲a + b = ۴)$$
$$\Rightarrow (a = ۳ , b = -۲)$$

بنابراین‌مااعداد ۱ و ۴ و ۷ و ۱۰ راباجانشین کردن ۴, ۳, ۲ , ۱ = r در (۲ − ۳r) به‌دست می‌آوریم.

Example 6 The seventh term of an AP is 15 and the tenth term is 21. Find a, the first term of the progression, and d, the common difference. Find also the nth term.

Since the seventh term is 15, $a + 6d = 15$.
Since the tenth term is 21, $a + 9d = 21$.
Solving these equations for a and d, we obtain

$$a = 3,\ d = 2.$$

The nth term is

$$a + (n - 1)d = 3 + (n - 1)2 = 2n + 1.$$

مثال ٦: هفتمین جمله از یک‌تصاعد عددی ۱۵ می‌باشد و دهـــمین جملهٔ آن ۲۱ است. اولین جمله و قدرنسبت و نیز n امین جملهٔ این تصاعد را پیدا کنید.

از آنجایی که جملهٔ هفتم، ۱۵ می‌باشد داریم، $a + ٦d = ۱۵$.
از آنجایی که جملهٔ دهم، ۲۱ می‌باشد داریم، $a + ۹d = ۲۱$.
از حل این معادلات برحسب a و d، خواهیم داشت:

$$a = ۳\ ,\ d = ۲$$

جملهٔ n ام عبارت است از:

$$a + (n - ۱)d = ۳ + (n - ۱)۲ = ۲n + ۱$$

Example 7 The nth term of an AP is $5 - n$. Find a, the first term of the sequence, and d, the common difference.

The first term is obtained by setting $n = 1$

$$\Rightarrow a = 5 - 1 = 4.$$

The second term is $5 - 2 = 3$ and therefore the common difference d is -1.
An alternative way of proceeding is to write $u_n = 5 - n$.
Then

$$u_{n+1} = 5 - (n + 1).$$

Clearly,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \text{common difference } d \\ &= [5 - (n + 1)] - (5 - n) = -1. \end{aligned}$$

مثال ۷: جمله n ام از تصاعدی عددی‌عبارت‌است از $(۵ - n)$. جملهٔ اول و قدر نسبت را بیابید.

باجایگذاری $n = ۱$ جملهٔ اول حاصل می‌شود:

$$n = ۱ \Rightarrow a = ۵ - ۱ = ۴$$

دومین جمله $۵ - ۲ = ۳$ می‌باشد و بنابراین قدر نسبت یعنی d برابر است با ۱ −.بااقدام به روش دیگری، می‌نویسیم $u_n = ۵ - n$ ، بنابـرایـن $u_{n+۱} = ۵ - (n + ۱)$ و واضــح است کـه، قـدر نسبت $= u_{n+۱} - u_n$ یعنی،

$$u_{n+۱} - u_n = [۵ - (n + ۱)] - (۵ - n) = -۱$$

Example 8 The eighth term of an AP is five times the second term and the first term is 1. Find the common difference d and the eleventh term.

Since $a = 1$ the eighth term is $1 + 7d$ and the second term is $1 + d$. The given relation between these two terms

$$\Rightarrow [(1 + 7d) = 5(1 + d)]$$
$$\Rightarrow (2d = 4) \Rightarrow (d = 2).$$

The eleventh term is $1 + 10d = 21$.

مثال ۸:جملهٔ هشتم یک تصاعد عددی پنج برابر جملهٔ دوم آن است و جملهٔ اول این تصاعد ۱ است. جملهٔ یازدهم و قدرنسبت را بیابید.

چون $a = ۱$ پس جملهٔ هشتم $(۱ + ۷d)$ و جملهٔ دوم $(۱ + d)$ می‌باشد. حال رابطهٔ بین این دو جمله را می‌نویسیم:

$$\Rightarrow [(۱ + ۷d) = ۵(۱ + d)] \Rightarrow (۲d = ۴) \Rightarrow d = ۲$$

جملهٔ یازدهم عبارت است از $۱ + ۱۰d = ۲۱$.

5.4 Arithmetic series

When the terms of an AP are added together, we obtain an *arithmetic series*. From the sequence (5.8) we obtain the series

$$a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + [a + (n - 1)d]. \qquad (5.9)$$

Using the sigma notation, we may write this as

$$\sum_{r=1}^{n} [a + (r - 1)d].$$

۵.۴ سری عددی

وقتی‌که جملات یک تصاعد عددی بایکدیگر جمع شوند، ما یک سری عددی خواهیم داشت. باتوجه به‌دنبالهٔ (۵.۸) ما سری زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$a + (a + d) + (a + ۲d) + ... + [a + (n - ۱)d] \quad (۵.۹)$$

که بااستفاده از نماد سیگما، می‌توان آن را به‌صورت زیر نمایش داد:

$$\sum_{r=۱}^{n} [a + (r - ۱)d]$$

تاریخچهٔ مجله‌های ریاضی در ایران (۹)

مجلهٔ یکان در بهمن‌ماه ۱۳۴۲ پا به‌عرصهٔ مطبوعات ایران گذاشت. عنوان کامل مجله، **یکان مجلهٔ ریاضیّات**، صاحب امتیاز، مدیر و سردبیر مجله عبدالحسین مصحفی و بهای هر شمارهٔ آن ۲۰ ریال است. هر ماه یکبار منتشر می‌شود، مقاله‌های وارده را مسترد نمی‌کند و طبع و نشر مندرجات و مقالات خود را بدون اجازه ممنوع می‌شمارد.

ادارهٔ موقت مجله: تهران، خیابان سرباز، شمارهٔ ۳۵۳ است و نشانی پستی آن: صندوق پستی ۲۴۶۳.

در مقدمهٔ شمارهٔ اول آن چنین می‌خوانیم:

تهیّه و انتشار یک مجله آن‌هم در زمینهٔ علوم ریاضی با اطلاعات و مآخذ وسیع و قابل اطمینانی که لازم دارد کاری است که در بادی امر غیرممکن به‌نظر می‌رسد اما بذل توجه و عنایت دانشمندان فرهنگ پروری که مقالات و آثار ایشان زینت بخش صفحه‌های مجله می‌باشد و مساعدتهای بی‌دریغ دیگر دانش دوستان امری تقریباً محال را عملی ساخت و ثمرهٔ مساعی این ذوات محترم مخصوصاً حمایتهای جناب استاد دکتر محسن هشترودی است که ماهنامهٔ یکان هم‌اکنون حیات خود را آغاز می‌کند.

سرمقاله از آقایان دکتر ناظر زاده کرمانی که در کسب امتیاز و دکتر محمد علی قینی که در تهیّه مطالب مفید بوده‌اند تشکر می‌کند.

مقاله نویسان شمارهٔ اوّل عبارتند از: دکتر محسن هشترودی، احمد بیرشک، حسین آزرم، غلامرضا عسجدی، پرویز شهریاری، محمد حسن رزاقی خمسی، و البته کسان دیگری که نامشان در مجله نیامده است.

مقالهٔ اوّل شمارهٔ اول از دکتر محسن هشترودی و تحت عنوان **بنیان ریاضیات جدید** است. در این مقاله چنین می‌خوانیم:

دسته‌بندی و اجتماع افرادی در یک طبقه همواره به‌صورت دلخواه ممکن است. اما مجموعه‌ای که به این صورت به‌دست می‌آید مجموعه‌ای نامشخص و کم و بیش مبهم است. اما با تعریفی خاص که شامل کلّیهٔ افراد مجموعه گشته و افراد غیر عضو را خارج سازد می‌توان مجموعه را مشخص و معین کرد (البته توجه شود که تعریف منطقی جامع و مانع در این مورد ضروری نیست. هر تعریفی که نتیجه را متضمن باشد در این مورد کفایت می‌کند و چنین تعاریفی معادلند) پیداست می‌توان مجموعه‌هایی تعریف کرد که علی‌الظاهر مجموعه خود نیز از افراد مجموعه باشد.

مثلاً اگر مجموعهٔ کلّیهٔ نامهای زبان فارسی را تشکیل دهیم و به این مجموعه نامی دهیم چنین به‌نظر می‌رسد که خود مجموعه عضو مجموعه است. بیشتر تعارضات منطقی در نظریّهٔ مجموعه‌ها از این نقطه شروع می‌شود و رفع چنین مشکلاتی که اکنون خیلی عادی به‌نظر می‌رسد دربادی امر موجب مشکلاتی برای ریاضی‌دانان بود که غلبه بر آن ممتنع می‌نمود.

بعدها روشن شد که این قبیل تعارضات به حوزهٔ ریاضی منحصر نیست و در حوزهٔ منطق نیز روی می‌دهد.

من باب مثال چند مورد از این تعارضات در حوزهٔ منطق در زیر ذکر می‌شود:

اوّل تعارض حکم منفرد: این تعارض از قدیم شناخته شده‌است و از ارسطو منقول است.

غیاث‌الدین جمشید کاشانی می‌گوید که «کاشانیان دروغگویند» بدیهی است که این حکم موجب دور می‌گردد چه قول مذکور از طرف کاشانی گفته شده است پس مشمول خود حکم می‌گردد و جمله صحیح نیست یعنی کاشانیان راستگویند و چون گوینده کاشانی است حکم صحیح خواهد بود و دور بارز می‌گردد.

باید متوجه بود که در حقیقت این حکم منفرد نیست و از دو حکم تشکیل شده است: غیاث‌الدین جمشید کاشانی است و مدعی است که کاشانیان دروغگویند. تعارض از این جهت پیدا می‌شود و موجب دور می‌گردد که دروغ گروه تشکیل نمی‌دهد چه دروغ دروغ معادل راست می‌باشد نه دروغ. اگر غیاث الدین جمشید کاشانی می‌گفت «کاشانیان راستگویند» تعارضی رخ نمی‌داد چه راست راست معادل راست و راست و گروه تشکیل می‌دهد.

دوم تعارض احکام مستند بر تعریف: برای هر عدد می‌توان تعریفی ریاضی ذکر کرد و همچنین می‌توان تعریف دیگری داد که بی‌آنکه ریاضی باشد آن عدد را مشخص کند. مثلاً عدد (الف) را چنین تعریف می‌کنیم «کوچکترین عددی که تعریف آن کمتر از ده کلمه لازم داشته باشد» بدیهی است اعدادی که باکمتر ازده کلمه تعریف می‌شوند مجموعه‌ای تشکیل می‌دهند (که ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد) که بین آنها با مقایسه، کوچکترین آنها را تعیین می‌کنیم و عدد «الف» مشخص می‌گردد. فی‌المثل عدد معروف (پی) چنین تعریف می‌شود «نسبت محیط دایره به قطر آن» و این جمله یا (حکم) شش کلمه دارد یعنی حکمی است که از ده کلمه کمتر است پس عدد (پی) از این قبیل اعداد است همچنین عدد ۹ (تعداد سیارات منظومه شمسی) از این قبیل اعداد است زیرا حکم «تعداد سیارات منظومهٔ شمسی» کمتر از ده کلمه دارد و از این قبیل احکام است و اگر به همین دو عدد قناعت شود عدد «الف» عدد (پی) خواهد بود که از دو عدد ۹ و (پی) کوچکترین آنها است. به‌هرحال اگر تعاریف دیگری نیز برای اعدادی از این قبیل ذکر شود همواره می‌توان عدد «الف» را مشخص ساخت. اکنون ملاحظه کنیم که عدد «الف» با جملهٔ «کوچکترین عددی که تعریف آن کمتر از ده کلمه لازم داشته باشد» تعریف شده است و حکم این تعریف دوازده کلمه دارد و تعارض رخ می‌دهد زیرا عدد «الف» بایستی با جمله‌ای (یا حکمی) که کمتر از ده کلمه داشته باشد تعریف شود یعنی بنا به مدلول تعریف فوق عدد «الف» وجود دارد و بنابر صورت حکم این عدد جزء مجموعه‌اعدادی‌که به موجب این تعریف مشخص می‌شوند نمی‌باشد. باکمی توجه می‌توان دریافت که مجموعه اعدادی که تعریف آنهاکمتر از ده کلمه لازم داشته باشد یک رشته عدد است (متناهی یا نامتناهی برحسب تعداد) و تعریف عدد «الف» در واقع چنین است «کوچکترین عدد این مجموعه» و تعارضی در کار نخواهد بود زیرا حکم اخیر داخل پرانتز کمتر از ده کلمه دارد.

در نظریهٔ مجموعه‌ها این تعارضها قبلاً مشهود شده بود و تعلق آنها به حوزهٔ منطق بعداً روشن شد و مبنی و پایهٔ منطق ریاضی براساس حساب احکام و قضایا و حساب طبقات است.

اگر در مجموعه‌ای (محدود یا نامحدود) بین افراد روابطی ایجاد شود به‌قسمی که حاصل به‌کار بستن این روابط برای دو فرد از مجموعه فردی دیگر از مجموعه را به دست دهد چنین مجموعه‌ای را یک سازمان می‌نامند.

مثلاً اگر مجموعهٔ اعداد صحیح را با عمل جمع در نظر بگیریم روشن است که مجموع دو عدد صحیح نیز عددی صحیح است در این صورت مجموعهٔ اعداد صحیح را با عمل جمع یک سازمان می‌نامند بی‌آن‌که بر کلیات سازمان در ریاضیات اشاره‌ای شود به همین مختصر قناعت می‌کنیم و به تعادل این سازمان با سازمان حاصل از مجموعهٔ اعداد صحیح و عمل ضرب قناعت می‌کنیم چه مجموعهٔ اعداد صحیح با عمل ضرب نیز یک سازمان تشکیل می‌دهد. (در عمل جمع و سازمان اوّل عدد صفر عنوان واحد دارد چه افزودن آن به هر عددی‌آن‌عدد را محفوظ نگه

می‌دارد. همچنان‌که در ضرب و سازمان دوم عدد یک عنوان واحد دارد و ضرب کردن آن در هر عددی آن عدد را محفوظ نگه می‌دارد.) ممکن است در سازمانی دو رابطه بین افراد مجموعه قابل تصور باشد (مانند مجموع اعداد صحیح و اعمال جمع و ضرب) در این صورت چنین سازمانی را حلقه می‌نامند. تعادل بین حلقه‌ها با سازمان دوگانهٔ جمع و ضرب همواره محقق است. سازمان معادل با رابطهٔ جمع را مدول و سازمان معادل با عمل ضرب را گروه می‌نامند و حلقه در حقیقت سازمانی است که مدول و گروه باشد. هیأت اعداد یا مجموعه‌ای است که حاصل اعمال چهارگانهٔ اصلی حساب در آن مجموعه را محفوظ نگه دارد (جز عمل تقسیم بر صفر مدول که استثنا می‌شود) مثلاً مجموعه اعداد گویا یک هیأت اعداد تشکیل می‌دهد. اعداد موهوم نیز یک هیأت اعداد است اگر عددی موهوم را که اجزای حقیقی و موهوم آن اعداد صحیحند عدد موهوم صحیح بنامیم مشاهده می‌شود که مجموع اعداد صحیح موهوم حلقه تشکیل می‌دهند. به این قسم سازمانهای اصلی نمونه‌بندی ریاضی عبارت است از:

۱ ـ Module که به آن گروه جمعی Groupe additif نیز گفته می‌شود و همچنین گروه Groupe (که مراد گروه ضربی است Groupe Multiflicatif که به‌طور خلاصه گروه نامیده می‌شود. در صورتی‌که در چنین سازمانی a.b = b.a باشد گروه را گروه آبلی Groupe abélien می‌نامند) تعادل بین مدول و گروه محقق است یعنی این دو سازمان در حقیقت متوازنند.

۲ ـ حلقه Anneou یا Ring سازمانی است که هم مدول است و هم گروه یعنی اعمال سه‌گانهٔ جمع و تفریق در آن میسر است.

۳ ـ هیأت اعداد Groupe de nombres یا Field که اعمال چهارگانهٔ اصلی حساب در آن میسر است. سازمان به دو دستهٔ اساسی سازمانهای جبری (آنچه که تاکنون اشاره شد سازمانهای جبری می‌باشند) و سازمانهای منطقی Structure Logique تقسیم می‌شوند برای هر سازمان منطقی محاسبهٔ خاص جبری وجود دارد که سازمان متناظر آن نامیده می‌شود. مثلاً جبر بول Boole اصول محاسبهٔ سازمان منطقی ارسطو (یعنی منطق دو ارزشی) می‌باشد.

اهمیت این سازمانها در ریاضیات جدید بسیار زیاد است و اصول ماشینهای الکترونیکی یا دستگاههای خودکار براین سازمانها است.

در مقالهٔ از اقلیدس تا کانتور نوشتهٔ حسین آزرم در مورد مجموعه‌ها که در آن زمان یعنی در سال ۱۳۴۲ تازه در ریاضیات دبیرستانی از آن سخن به میان آمده بود چنین می‌خوانیم:

کانتور «مجموعه» را به دو صورت زیر تعریف کرده است:

۱ ـ مجموعه عبارت است از اجتماع اشیایی که دارای صفت ممیزهٔ مشترک و معلومی باشند. هر یک از آن اشیا را «عنصر» مجموعه می‌گویند.

۲ ـ مجموعه عبارت است از اجتماع اشیایی مشخص و متمایز ولی ابتکاری و یا تصوری.

تعریف مجموعه به صورت اول بسیار مشخص و منطقی و فارغ از هر نوع تردید است زیرا هر شیء موجود در عالم نسبت به چنین مجموعه‌ای فقط یک وضع قطعی دارد یا این شیء جزء مجموعه است و یا به آن تعلق ندارد و اجتماع دو وضع مذکور در آن واحد ممکن نیست و نیز دو شیء متعلق به چنین مجموعه‌ای مشابه یکدیگرند هرچند به صورت ظاهر تفاوتهایی داشته باشند. مثلاً وقتی می‌گوییم مجموعه فرشهای یک خانه تمام فرشهای این خانه بی‌توجه به‌رنگ و ابعاد و جنس عناصر این مجموعه هستند.

از نقطه‌نظر تشکیل مجموعه‌ها تعاریف مذکور را می‌توان در یک «اصل کلی» خلاصه کرد و آن تشکیل مجموعه‌ای است که اشیا و عناصر آن دارای خاصیت مفروضی باشند. توسعهٔ فرضیهٔ مجموعه‌ها نشان داده است که با قبول این اصل تناقض دو تعریف از بین می‌رود و تصور مجموعه مفهوم بسیار وسیعی پیدا می‌کند.

همین که بگوییم «تمام اشیایی که....» یک مجموعه داریم،

مثلاً مجموعهٔ تمام کتابها، مجموعهٔ اعداد اوّل و امثال آن شاید در بادی امر قبول چنین تحولی در علم ریاضی آن هم بخصوص از یک نقطهٔ به کلی تاریک بعید به‌نظر می‌آید لکن گذشت زمان و سیر تاریخ ریاضیات کلاسیک قرون قبل لزوم چنین تحولی را به سوی فرضیهٔ کانتور به ثبوت رسانده، فرضیه‌ای که همان خدمت را به نحو بهتر و جالبتری انجام می‌دهد. در حوالی سال ۱۸۷۰ میلادی در حالی که علمای ریاضی آن عصر سردرگم تعاریف مبهم و استدلالهای پیچیده و مشکل بودند کانتور فرضیهٔ خود را در مورد مجموعه‌های فرعی و ساده روی اعداد حقیقی آزمایش می‌کرد و بتدریج به مجموعه‌های مجرد می‌پرداخت. این روش بتدریج به وسیله دیگران ابتدا در مورد اعداد حقیقی و منطق و بتدریج دربارهٔ رشته‌های دیگر ریاضی به‌کار می‌رفت و فکر وحدت رشته‌های مختلف علم ریاضی رفته رفته تحقق می‌یافت. در این مرحله بود که اعداد طبیعی رفته رفته در علم آنالیز دخالت نمود و گفتهٔ «کرنکر[1]» را تأیید کرد. **«خداوند اعداد طبیعی را خلق کرد و بقیه مخلوق بشر است»** و نیز اضافه نمود که **«تمام نتایج ریاضی باید به وسیلهٔ بسیار ساده خواص اعداد قابل تعبیر باشند.»**

اگر بخواهیم یک مراجعهٔ مختصر و سریع به فرضیّهٔ کانتور و نتایج ناشی از آن بنماییم باید از تعریف مجموعه و بستگی و تعلق عنصری به آن ـ مجموعهٔ خالی ـ مجموعه شامل فقط یک عنصر شروع کنیم و همچنین مجموعه‌های فرعی که از یک مجموعه تشکیل می‌شوند و عناصر متعلق به هر کدام دارای خاصیت مفروضی هستند و نیز مجموع دو یا چند مجموعه.

در خلال این مطالب به اصلی موسوم به **«آکسیوم انتخاب»** که به‌طور ضمنی به وسیلهٔ کانتور و دیگران به‌کار رفته و به نام **«آکسیوم زرملو[2]»** نیز نامیده می‌شود برخورد می‌کنیم که عبارت است از:

اگر Z مجموعهٔ غیرخالی از مجموعه‌های غیرخالی و فاقد عناصر مشترک y باشد در این صورت مجموعه‌ای مانند S وجود دارد که شامل منحصراً یک عنصر x متعلق به Z و مشترک با y است.

در مقالهٔ **هانری پوانکاره** دربارهٔ این ریاضی‌دان بزرگ فرانسوی چنین می‌خوانیم:

یکی از بزرگترین ریاضی‌دانان دوران که عدهٔ کمی از دانشمندان ریاضی را می‌توان با او مقایسه کرد بدون این که از او پیشی گیرند (هانری پوانکاره) است. در اواخر قرن نوزده کشور فرانسه توانست به خود ببالد که علاوه بر (کوشی) که در ثلث اوّل همان قرن می‌زیسته یکی دیگر از فرزندانش عنوان رکن اصلی ریاضی را به دست آورد و در تمام رشته‌های ریاضی نظری و عملی نبوغ خود را ظاهر سازد و به حل بسیاری از مسائل مشکل و پیچیدهٔ این علم موفق آید. (امیل پیکار) درباره وی به جا می‌گوید: (هر کجا ابزار کار برای تفوق بر مشکلات را از سر راه برمی‌داشت). پوانکاره در ۲۹ آوریل ۱۸۵۴ در شهر (نانسی) به‌دنیا آمد و در ۱۷ ژوئیه ۱۹۱۲ در پاریس درگذشت. هنوز بیش از سی‌وسه سال نداشت که به عضویت آکادمی علوم پذیرفته شد، در سال ۱۸۷۳ به مدرسهٔ معروف (پلی تکنیک) رفت و پس از فراغت از تحصیل به‌عنوان مهندس معدن در شهر (وزول) شروع به کار کرد ولی پرتو درخشان آثار اوّلیّه‌اش در ریاضیات خیلی زود او را متوجه آموزش این علم نمود و در دانشکده علوم (کان) به تدریس آنالیز پرداخت. سپس به پاریس رفت و در (سوربن) دانشگاه معروف پاریس معلم کنفرانسها شد (سال ۱۸۸۱) و بعد عهده‌دار تدریس مکانیک فیزیک و مکانیک تجربی شد. در سال ۱۸۸۵ به تدریس فیزیک ریاضی و حساب احتمالات و در ۱۸۸۶ به تدریس مکانیک سماوی پرداخت. در این اثنا مدرسهٔ پلی تکنیک پست تمرین و سپس کرسی استادی نجوم را به وی محول داشت که از ۱۹۰۴ تا ۱۹۰۸ میلادی بدان مشغول بود.

اوّلین اثرش دربارهٔ توابعی است که به وسیلهٔ معادلات فاصله مشخص می‌شوند و در ۱۸۸۷ ظاهر شده در این اثر نتایج (بریو)

و (بوکه) به وجه محسوسی تکامل یافته‌اند.

در همین سال پوانکاره تز دکترای خود را که متضمن موضوع جالبی درباره انتگراسیون معادلات با مشتقات جزئی با چند متغیر است گذراند. پوانکاره در این رساله مفاهیم تازه‌ای به کار برده است که بعداً جداگانه روی هر یک تحقیق نموده است. از این پس تحقیق در زمینه‌های بسیار و فوق‌العاده گوناگون پرداخت و در تمام آنها تنوع استثنایی خود را عیان ساخت. از آن جمله (معادلات دیفرانسیل) و (معادلات با مشتقات جزئی) و (توابع تحلیلی با یک یا چند متغیر)، (مکانیک تحلیلی)، (مکانیک سماوی) و (جبر و نظریهٔ اعداد) را می‌شود نام برد.

در ۱۸۸۰ میلادی نیروی خلاقه و فکر مبتکر او به مطالعه و بحث در شکل عمومی منحنیهای حقیقی جواب معادلات دیفرانسیل با ضرایب حقیقی متوجه شد و بررسی عمیقی دربارهٔ نقاط غیرعادی این منحنیها به عمل آورد. برای این نقاط اصطلاحات تازه‌ای از قبیل (گلو ـ گره ـ کانون ـ مرکز) ساخت که بلافاصله کلاسیک گشت.

در سال ۱۸۸۲ میلادی رسالهٔ دیگری دربارهٔ جوابهای حقیقی دستگاه معادلات دیفرانسیل با ضرایب حقیقی منتشر کرد. این جوابها عبارتند از دنباله‌های متقاربی از توانهای یک متغیر کمکی و زیباترین نتایجی است که بعد از (کشی) به‌دست آمده است.

ولی بدون شک بالاترین افتخار پوانکاره در آنالیز کشف توابعی است که بعضی را (فوکسین) و بعضی دیگر را (کلینین) نامیده است ۰ که بعداً توابع (اتومورف) نامیده شدند ۰ و منتهی به طرح انتگراسیون کلیهٔ معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب جبری می گردد. ا در مقابل کارهای عظیم این دانشمند به جد هرکسی دچار سرگیجه و لااقل اعجاب می‌شود ـ مغزی که هرگز از فعالیت و تجلی باز نایستاد تا آن‌جا که گاهی از زندگی عادی به دور می‌افتاد. حواس پرتی معروف او در هنگام سخنرانی تشریفاتی رئیس آکادمی در پذیرایی و تجلیل از او شاهد این مطلب است. مرگ زودرس پوانکاره در پنجاه‌وهشت سالگی اتفاق افتاد هنگامی که نبوغش هنوز با تمام قدرت و شدت می‌درخشید و اگر چنین نشده بود سهم این دانشمند در تحولات عظیمی که در تئوریهای فیزیک نوین پدید آمد تا چه پایه بود؟

به مقالهٔ **چرا معلم ریاضی شدم از غلامرضا عسجدی** می‌رسیم و در این مقاله که حکایتی از دوران گذشتهٔ یکی از معلمان ریاضی این مرزوبوم است چنین می‌خوانیم:

پدر وکسان پدری من بیشتر اهل داد و ستد و بازاری بوده‌اند و خود مرحوم پدرم عقیده داشت اگر من در آتیه شغل آزاد داشته باشم بهتر است در صورتی که خویشان مادری من کتابی و از دوستان علم بوده‌اند بین آنها چند تن روحانی بزرگ؛ چند تن طبیب یافت می‌شد. به خاطر دارم در ایام طفولیت گاهی به خانهٔ دایی خود که از مجتهدین طراز اوّل بود می‌رفتم. موقعی که بین آن مرحوم و شاگردانش بحث علمی درگرفته بود در آن زمان رسم چنین بود که استاد هر اندازه دانشمند و شاگرد، هر قدر حقیر و کم اطلاع باشد در بحث علمی خجالت و تعارف و مداهنه وجود نداشت. اگر شاگرد در گفتار استاد نکتهٔ ضعیفی به نظرش می‌رسید بی‌پروا اظهارمی‌کرد. این دیگر وظیفه استاد بود یا با منطق او را متقاعد سازد و یا خود تسلیم شود. این جریان ابداً و به‌قدر ذره‌ای از مقام استاد کم نمی‌کرد و حتی بر صفا و صدق مقام او می‌افزود. بارها به چشم خود دیده بودم این آقایان پس از بحث علمی مفصل که شبیه مشاجره بود یک دفعه فارغ شده و مشغول تناول ناهار که عبارت از یک غذای ساده ایرانی بود می‌شدند اگر کسی شوخیها و خنده‌های اینان را در این‌موقع می‌دید باور نمی‌کرد که همان کسانی هستند که لحظهٔ پیش در بحث علمی چنان سختگیر و بی‌گذشت بودند. این قبیل سجایا که منشأ ترقی قومی تواند بود متأسفانه در محیط فرهنگ جدید ما ضعیف شده است. گاهی انسان مشاهده می‌کند تسامح و چاپلوسی از یک طرف و افاده و تفرعن بی‌جا از طرف دیگر همه جا حتی به مجالس درس و تحقیق نیز راه یافته است.

ریاضیات گسسته

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

> با توجه به نقش مهم ریاضیات گسسته در علوم معاصر، به‌خصوص علوم کامپیوتری هیأت تحریریهٔ مجله تصمیم به نشر مطالبی در این زمینه گرفت. برای انجام این منظور مقالاتی را که از این پس تحت این عنوان می‌آوریم از کتاب مشهور و مهم
>
> Discrete and Combinatorial Mathematics.
> An Applied Introduction. Ralph P.Grimaldi
>
> که یکی از کتابهای مقدماتی این شاخه از ریاضیات است انتخاب کرده‌ایم. امیدواریم مطالعهٔ این مقاله‌ها خواننده را با این شاخه از ریاضیات آشنایی بیشتری دهد.

فصل ۱ ـ اصول اساسی شمارش

ممکن است شمارش، به‌نظر اشخاص به‌عنوان فرایند واضحی بیاید که دانش آموزان هنگامی که برای اوّلین بار حساب می‌آموزند با آن آشنا می‌شوند. اما از پس آن، چنین به‌نظر می‌رسد که چون دانش‌آموز به زمینه‌های «مشکلتر» ریاضیات، چون جبر، هندسه، مثلثات، و حساب دیفرانسیل و انتگرال رو آورد، توجه کمی به گسترش بیشتر شمارش مبذول می‌شود. نتیجتاً، فصل اوّل باید اخطاری چند در مورد جدی بودن و مشکل نمودن شمارش «صرف» ه دست دهد.

شمارش با حساب پایان نمی‌گیرد، و کاربردهایی در زمینه‌هایی چون نظریهٔ رمزنویسی، احتمال، و آمار (در ریاضیات) و در تحلیل الگوریتمها (در علوم کامپیوتری) نیز دارد. فصول بعدی به ارائهٔ بعضی از مثالهای خاص این کاربردها می‌پردازد.

هنگامی که به این حوزهٔ جذاب ریاضیات وارد می‌شویم، به مسائل بسیاری برخورد می‌کنیم که بیانشان بسیار ساده اما حلشان تا اندازه‌ای مشکل است. مواظب فورمولها باشید! چه استفادهٔ صرف از فرمول، بدون تحلیل مسأله، کاری عبث است. برعکس، در حل مسأله، کلنجار رفتن با مسائل غیرمتعارف یا مسائلی متفاوت با آنچه در گذشته با آنها مواجه شده‌اید، را خوش بدارید. راه‌حلها را بر مبنای جستجوی کامل و جامع خود جستجو کنید، و این کار را بی‌توجه به این که آیا موردی را که مؤلف به دست داده حاصل می‌کند یا خیر، انجام دهید.

۱.۱ ـ قواعد جمع و ضرب

مطالعهٔ ریاضیات ترکیبی و گسسته‌مان با دو اصل اساسی شمارش، یعنی، قواعد جمع و ضرب، آغاز می‌شود. صورت و کاربردهای اوّلیّهٔ این اصول کاملاً ساده ظاهر می‌شوند. در تحلیل مسائل بغرنجتر، شخص اغلب می‌تواند آنها را به اجزایی تقسیم کند که توان به انجام رساندن‌شان را با استفاده از این اصول اساسی داشته باشد. در این مسائل، خواستمان بر این است که قابلیت «تجزیهٔ» آنها و پهلوی هم قرار دادن راه‌حلهای جزیی‌مان، تا رسیدن به جواب نهایی، را گسترش دهیم. یکی از طرق صحیح انجام این کار تحلیل و حل مسائل شمارشی گوناگون بسیاری، با توجه به اصول به کار رفته در راه حلشان است، و این رهیافتی است که در این کتاب از آن پیروی می‌کنیم.

اصل اوّل شمارشمان را می‌توان به‌طریق زیر بیان کرد:

> **قاعدهٔ جمع.** اگر عمل اولی را بتوان به m طریق انجام داد، در حالی‌که عمل دومی را بتوان به n طریق انجام داد، و دو عمل مزبور نتوانند به‌طور همزمان انجام گیرند، در این صورت انجام هر یک از آنها را می‌توان به $m + n$ طریق انجام داد.

توجه داشته باشید زمانی که می‌گوییم واقعه‌ای خاص، به‌عنوان عمل اوّل، می‌تواند به m طریق انجام شود، فرضمان بر این است که m طریق مزبور متمایزند، و غیر این‌صورت را با گزاره‌ای بیان می‌کنیم. این موضوع در سراسر این متن صادق است.

مثال ۱.۱. کتابخانهٔ دانشکده‌ای دارای ۴۰ کتاب درسی جامعه‌شناسی و ۵۰ کتاب درسی مربوط به انسان شناسی است. بنا به قاعدهٔ مجموع، دانش‌آموز این دانشکده می‌تواند، برای آموختن مطالب بیشتری در مورد یکی از این دو موضوع، از میان $۹۰ = ۵۰ + ۴۰$ کتاب درسی، کتاب انتخاب کند. □

مثال ۲.۱. قاعدهٔ مزبور را می‌توان در مورد بیش از دو عمل، البته تا جایی که هیچ جفتی از عملها نتواند به‌طور همزمان رخ دهد، تعمیم داد. به عنوان نمونه، یک معلم علوم کامپیوتر که، مثلاً، برای هر یک از موارد **ای.پی.ال** «APL»، **بیسیک** «BASIC»، **فرترن** «FORTRAN»، **وپاسکال** «PASCAL» پنج کتاب مقدماتی دارد، می‌تواند هر یک از ۲۰ کتاب مزبور را، به دانش‌آموزی علاقه‌مند به آموختن زبان برنامه نویسی اوّلیه‌ای، سفارش کند. □

مثال ۳.۱. معلم علوم کامپیوتر مثال ۲.۱ دو همکار دارد. یکی از این همکاران دارای سه کتاب درسی در مورد تحلیل الگوریتم است، و دیگری پنج کتاب از این دست دارد. اگر n تعداد کتب مربوط به این موضوع را که معلم مزبور می‌تواند از آنها امانت بگیرد، نمایش دهد، آنگاه $۵ \le n \le ۸$، زیرا در این حالت هر دو همکار مزبور می‌توانند نسخه‌هایی از یک نوع کتاب(های) درسی داشته باشند. □

مثال زیر قاعدهٔ حاصل‌ضرب را معرفی می‌کند.

مثال ۴.۱. مدیر مؤسسه‌ای، برای اخذ تصمیم در مورد توسعهٔ دستگاههای ماشین‌آلات، ۱۲ نفر از کارمندان خود را به دو کمیته تخصیص می‌دهد. کمیتهٔ A شامل پنج عضو است و مأمور بررسی نتایج مطلوب ممکن حاصل از چنین توسعه‌ای است. هفت نفر دیگر، کمیتهٔ B، بازتابهای نامطلوب ممکن را مورد رسیدگی قرار می‌دهند. در صورتی که مدیر مورد بحث پیش از گرفتن تصمیم، مصمم به گفتگو با تنها یکی از اعضای کمیته‌ای باشد، در این صورت بنا به قاعدهٔ جمع ۱۲ کارمند برای انجام چنین کاری موجودند. اما برای بی‌طرفی بیشتر، بر آن شد که قبل از اخذ تصمیم، با عضوی از کمیتهٔ A در دوشنبه، و بعد با عضوی از کمیتهٔ B در چهارشنبه گفتگو کند. با استفاده از اصل زیر، در می‌یابیم که مدیر مزبور می‌تواند با دو عضو از چنین اعضایی به $۵ \times ۷ = ۳۵$ طریق گفتگو داشته باشد. □

> **قاعدهٔ حاصل‌ضرب:** اگر فرایندی را بتوان به مراحل اوّل و دوم تقسیم کرد، و اگر m نتیجهٔ ممکن برای مرحلهٔ اوّل و n نتیجهٔ ممکن برای مرحلهٔ دوم موجود باشند، در این صورت کل فرایند مزبور را می‌توان، در ترتیب مشخص شدهٔ مورد بحث، به mn طریق انجام داد.

گاهی به این قاعده به‌عنوان اصل انتخاب «Principle of choice» اشاره می‌شود.

مثال ۵.۱. کلوب نمایشنامهٔ دانشگاه مرکزی «Central University» آزمونهایی برای نمایشنامهٔ بهار خود انجام می‌دهد. کارگردان نمایشنامه، بنابه قاعدهٔ حاصل‌ضرب می‌تواند، از میان شش مرد و هشت زنی که صداهایشان برای نقشهای زن و مرد اصلی نمایشنامه مورد آزمایش قرار گرفته‌اند، زوج اصلی خود را به $۶ \times ۸ = ۴۸$ طریق انتخاب کند. □

مثال ۶.۱. در این‌جا توسیعات گوناگون قاعدهٔ مورد بحث را با

بررسی شماره‌ای اتومبیل شامل دو حرف از الفبای انگلیسی و چهار رقم پس از آنها، توضیح داده‌ایم.

a) اگر هیچ حرف یا رقمی نتواند تکرار شود:

$$۲۶ \times ۲۵ \times ۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ = ۳,۲۷۶,...$$

شمارهٔ مختلف ممکن موجودند.

b) با مجاز بودن تکرار حروف و ارقام:

$$۲۶ \times ۲۶ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ = ۶,۷۶۰,...$$

شمارهٔ مختلف ممکن موجودند.

c) در صورت مجاز بودن تکرار، در چند شمارهٔ قسمت (b) هر دو حرف صدا دارند (a,e,i,o,u) و جمیع ارقام زوجند (۰ رقمی زوج است.) □

مثال ۷.۱. در حافظهٔ اصلی کامپیوتری، اطلاعاتی را در سلولهای حافظه ذخیره کرده‌ایم. برای شناختن سلولهای واقع در حافظهٔ اصلی کامپیوتر، به هر سلول نامی یکتا موسوم به آدرس «address» تخصیص داده‌ایم. آدرس مزبور دربعضی از کامپیوترها به صورت فهرست مرتبی از هشت نماد نمایش داده شده است، که هر نماد آن یکی از بیتها «bits» ی ۰ یا ۱ است. فهرست هشت بیتی مزبور به بایت «byte» موسوم است. با استفاده از قاعدهٔ حاصل‌ضرب، در می‌یابیم که

$$۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۲^{۸} = ۲۵۶$$

بایت از چنین بایتهایی موجودند. در نتیجه، برای سلولهای حافظه ۲۵۶ آدرس داریم که در آنها می‌توان اطلاعات را ذخیره کرد.

بعضی از ماشینها (از جمله خانوادهٔ PDP ۱۱)[1] آدرسهای دوبایتی را به کار می‌برند. آدرسی چنین از دو بایت متوالی، یا ۱۶ بیت متوالی تشکیل شده است، بنابراین ذخیره کردن

$$۲۵۶ \times ۲۵۶ = ۲^{۸} \times ۲^{۸} = ۲^{۱۶} = ۶۵,۵۳۶$$

تکه اطلاعات در آنها امکان‌پذیر است. کامپیوترهای دیگر (از جمله IBM PC/RT)[2] از دستگاههای آدرس چهار بایتی استفاده می‌کنند. در این حالت، برای ذخیرهٔ اطلاعات در سلولهای حافظهٔ ماشین مزبور:

$$۲^{۸} \times ۲^{۸} \times ۲^{۸} \times ۲^{۸} = ۲^{۳۲} = ۴,۲۹۴,۹۶۷,۲۹۶$$

آدرس در دسترس است.

مثال ۸.۱. گاهی لازم می‌آید که در حال مسأله‌ای اصول شمارش متفاوت چندی را ترکیب کنیم. در این حالت درمی‌یابیم که هر دو قاعدهٔ جمع و ضرب برای به‌دست آوردن پاسخ مورد نیازند.

در صورتهای خاصی از زبان برنامه‌نویسی **بیسیک**، نام یک متغیر عبارت از حرفی منفرد (A، B، C،...) یا حرفی منفرد پیش از رقمی منفرد است. به‌علت این که کامپیوتر تمایزی بین حروف بزرگ و کوچک قائل نمی‌شود، a و A، چنان‌که EV و ev، نام متغیر یکسانی در نظر گرفته می‌شوند. بنا به قاعدهٔ حاصل‌ضرب

$$۲۶ \times ۱۰ = ۲۶۰$$

نام متغیر شامل حرفی بیش از یک رقم موجودند، و به علت این‌که ۲۶ نام متغیر شامل حرفی منفرد وجود دارند، بنا به قاعدهٔ جمع، در زبان برنامه‌نویسی مزبور، کلاً

$$۲۶ + ۲۶۰ = ۲۸۶$$

نام متغیر موجودند. □

۲.۱ ـ جایگشتها

اکنون در ادامهٔ بررسی کاربردهای قاعدهٔ حاصل‌ضرب، به شمارش ترتیبات اشیای متمایز در ترتیبی مشخص، رو می‌آوریم. عموماً اشیای مورد نظر را واقع در سطر، یا خطی مستقیم، در نظر می‌گیریم، و این کار به ترتیب خطی معینی می‌انجامد. این ترتیبات را اغلب جایگشت «Permutation» می‌نامیم، روشهای سیستماتیک

---

۱) خانواده‌های کامپیوترهای PDP 11 محصولی از Digital Equipment Corporation است.

۲) پروسسور IBM PC/RT توسط International Business Machines Corportation ساخته شده است.

چندی را برای انجامشان مطرح می‌کنیم. کار را با مثالی نمونه آغاز می‌کنیم.

مثال ۹.۱. در کلاسی با ۱۰ دانش آموز باید پنج نفر برای گرفتن عکس در ردیفی بنشینند. چند نوع از چنین ترتیباتی خطی ممکن‌اند؟

کلمهٔ کلیدی این مسأله ترتیب «*arrangement*» است، که اهمیت مرتب کردن را مشخص می‌کند. اگر A، B، C، ....، I، J ده دانش‌آموز مورد بحث را نمایش دهند، در این صورت BCEFI، CEFIB و ABCFG سه مورد از چنین ترتیباتی هستند، هرچند دو مورد اول شامل پنج دانش‌آموز یکسان باشند.

برای پاسخ دادن به‌سؤال مورد نظر، مکانها و تعداد ممکن دانش‌آموزانی را که برای پر کردن هر مکان، می‌توانیم از آنها انتخاب کنیم، در نظر می‌گیریم. پر کردن یک مکان مرحله‌ای از فرایندمان است.

$$۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶$$

مکان‌اول مکان‌دوم مکان‌سوم مکان‌چهارم مکان‌پنجم

در سطر فوق هر یک از ۱۰ دانش‌آموز می‌تواند مکان اول را اشغال کند. به‌علت این‌که در این حالت، تکرار ممکن نیست، می‌توان برای پر کردن مکان دوم تنها یکی از نه دانش‌آموز باقیمانده را اختیار کرد. با ادامه دادن به این مسیر، تنها شش دانش‌آموز را برای پر کردن مکان پنجم و نهایی پیدا می‌کنیم. این کار، کلاً ۲۴۰ و ۳۰ ترتیب ممکن انتخاب پنج دانش‌آموز از کلاسی ده نفری را به دست می‌دهد.

در صورتی که مکانهای مورد بحث به ترتیب مقابل $(۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶)$ پر شوند نیز همین پاسخ را به‌دست می‌آوریم. در صورتی که ترتیب در نظر گرفته شده سومی، اوّلی، چهارمی، پنجمی، و دومی باشد (یعنی، ابتدا مکان سوم، بعد مکان اول، سپس مکان چهارم، چهارم مکان پنجم، و بالاخره مکان دوم پر شود)، در این صورت پاسخ $۹ \times ۶ \times ۱۰ \times ۸ \times ۷$ است.□

تعریف ۱.۱. به ازای عدد صحیح $n \geq ۰$، فاکتوریل «*factorial*» n (که با $n!$ نمایش داده می‌شود.) با

$۰! = ۱$ و

$$n! = (n)(n-۱)(n-۲)\ldots(۳)(۲)(۱) \quad n \geq ۱$$ به ازای

تعریف می‌شود.

به این ترتیب درمی‌یابیم که

$۱! = ۱$ و $۲! = ۲$ و $۳! = ۶$ و $۴! = ۲۴$ و $۵! = ۱۲۰$

علاوه بر این، به ازای هر $n \geq ۰$،

$$(n+۱)! = (n+۱)(n)!$$

با استفاده از نماد فاکتوریل، درمی‌یابیم که پاسخ مسألهٔ ۹.۱ را می‌توان به صورتی فشرده‌تر، به‌طریق زیر بیان کرد:

$$۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ =$$
$$۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times \frac{۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}{۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} = \frac{۱۰!}{۵!}$$

تعریف ۲.۱. با معلوم بودن مجموعه‌ای از n شیء متمایز، هر ترتیب (خطی) از آنها به جایگشت «*Permutation*» موسوم است.

با آغاز از حرف a، b، c، درمی‌یابیم که شش طریق در ترتیب دادن این حروف موجودند:

در صورتی‌که به ترتیب تنها دو حرف در هر بار علاقه‌مند باشیم، شش جایگشت از چنین جایگشتهایی دو اندازه‌ای، از مجموعهٔ موردبحث وجود دارند: ab , ba , ac , ca , bc , cb

درحالت‌کلی، اگرشیء متمایز، نمایش‌داده‌شده‌با a_1، a_2، ...، a_n، موجود باشند، و r عددی صحیح باشد، با $۱ \leq r \leq n$، در این‌صورت بنا به قاعدهٔ حاصل‌ضرب، تعداد جایگشتهای r اندازه‌ای n شیء مزبور عبارت است از:

$$\underset{\text{مکان اول}}{(n)} \times \underset{\text{مکان دوم}}{(n-۱)} \times \underset{\text{مکان سوم}}{(n-۲)} \times \ldots \times \underset{\text{مکان } r\text{ام}}{(n-r+۱)} =$$

$$(n) \times (n-۱) \times (n-۲) \times \ldots \times (n-r+۱) \times \frac{(n-r)(n-r-۱)\ldots(۳)(۲)(۱)}{(n-r)(n-r-۱)\ldots(۳)(۲)(۱)} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

تعداد مورد بحث را با $P(n,r)$ نمایش می‌دهیم. به ازای $r = ۰$،

$$P(n , ۰) = ۱ = n! / (n - ۰)!$$

بنابراین:

$$P(n , r) = n! / (n - r)!$$

که در آن $۰ \le r \le n$. مثال ۹.۱ حالت خاصی از این مطلب است، که در آن $n = ۱۰$ ، $r = ۵$ و $P(۱۰ , ۵) = ۳۰$ و ۲۴۰.
چون جایگشت جمیع n شیء واقع در مجموعهٔ مورد بحث را در نظر بگیریم، $r = n$ را داریم و درمی‌یابیم که

$$P(n , n) = n! / ۰! = n!$$

تعداد جایگشتهای r اندازه‌ای، با $۰ \le r \le n$ ، از مجموعهٔ n شیء عبارت است از:

$$P(n, r) = n! / (n - r)!$$

اما، در صورت مجاز بودن تکرار، و بنا به قاعدهٔ حاصل‌ضرب n^r ترتیب ممکن با $r \ge ۰$ موجودند.

مثـــال ۱۰.۱. تـعداد جـایگشتهای حـروف واقـع در کـلمهٔ COMPUTER ‏!۸ است.

اگر تنها چهار حرف از آن‌را به‌کار بریم، تعداد جایگشتها (ی به اندازهٔ چهار) عبارت است از:

$$P(۸ , ۴) = ۸!(۸ - ۴)! = ۸! / ۴! = ۱۶۸۰$$

و اگر تکرار حروف مجاز باشد، تعداد دنباله‌های ۱۲ حرفی ممکن $۸^{۱۲} = ۶۰۸۷۲ \times ۱۰^{۱۰}$ است. □

مثـال ۱۱.۱. بـرخـلاف مثـال ۱۰.۱. تـعداد ترتیبـات حـروف کلمهٔ BA۱۱، ۱۲ و نه !۴ ، یا ۲۴ ، است. دلیل آن این است که در این مورد، برای انجام ترتیب، چهار حرف متمـایز نـداریـم. بـرای به‌دست آوردن ۱۲ ترتیب مورد بحث، می‌توانیم آنها را چنانچه در جدول ۱.۱ (a) نشان داده شده است، فهرست کنیم.

اگر دو L مزبور را به‌صورت $L_۱$ و $L_۲$ متمایز کنیم، مـی‌توانـیم اندیشه‌های قبلی‌مان، در مورد جایگشتهای اشیای متمـایز، را بـه‌کـار بریم، در این‌صورت، با چهار نماد متمایز B ، A ، $L_۱$ ، $L_۲$ ، ۲۴ = !۴ جـایگشت داریـم. ایـن جـایگشتها را در جـدول ۱.۱ (b) فـهرست کرده‌ایم. جدول ۱.۱ آشکار می‌کند که در مورد هر ترتیبی که، به ازای آن، L های مزبور تمیز ناپذیرند، یک جفت جایگشت با Lهای متمایز متناظر است.

نتیجتاً (تعداد ترتیبات نمادهای B ، A ، L ، L) × ۲
= (تعداد جایگشتهای نمادهای B ، A ، $L_۱$ ، $L_۲$)

و پـاسخ مسـألهٔ اصلـی یـافتن جمیع ترتیبـات حـروف BA۱۱ ، ۱۲ = ۲ / !۴ است. □

جدول ۱.۱

A B L L	A B $L_۱$ $L_۲$	A B $L_۲$ $L_۱$
A L B L	A $L_۱$ B $L_۲$	A $L_۲$ B $L_۱$
A L L B	A $L_۱$ $L_۲$ B	A $L_۲$ $L_۱$ B
B A L L	B A $L_۱$ $L_۲$	B A $L_۲$ $L_۱$
B L A L	B $L_۱$ A $L_۲$	B $L_۲$ A $L_۱$
B L L A	B $L_۱$ $L_۲$ A	B $L_۲$ $L_۱$ A
L A B L	$L_۱$ A B $L_۲$	$L_۲$ A B $L_۱$
L A L B	$L_۱$ A $L_۲$ B	$L_۲$ A $L_۱$ B
L B A L	$L_۱$ B A $L_۲$	$L_۲$ B A $L_۱$
L B L A	$L_۱$ B $L_۲$ A	$L_۲$ B $L_۱$ A
L L A B	$L_۱$ $L_۲$ A B	$L_۲$ $L_۱$ A B
L L B A	$L_۱$ $L_۲$ B A	$L_۲$ $L_۱$ B A
(a)	(b)	

مثال ۱۲.۱. اکـنون، بـا اسـتفـاده از ایـدهٔ مـطرح شـده در مثـال ۱۱.۱ ، به بررسی ترتیبات جمیع حروف PEPPER می‌پردازیم.

به ازای هر ترتیبی که در آن P ها متمایز نیستند، ۶ = !۳ ترتیب با P های متمایز موجودند. به عنوان مثال

$P_۲EP_۱P_۳ER$ و $P_۱EP_۳P_۲ER$ و $P_۱EP_۲P_۳ER$ و
$P_۳EP_۲P_۱ER$ و $P_۳EP_۱P_۲ER$ و $P_۲EP_۳P_۱ER$

چون اندیسهای P ها را حذف کنیم، جمیعاً متناظر با PEPPER اند.

علاوه براین، چون E ها متمایز شوند، جفت جایگشت $P_1E_2P_2P_3E_1R$ ، $P_1E_1P_2P_3E_2R$ ، متناظر با ترتیب $P_1EP_2P_3ER$ اند نتیجتاً:

$$(\text{تعداد ترتیبات حروف PEPPER})(3!)(2!)$$
$$= (\text{تعداد جایگشتهای نمادهای } P_1 ، E_1 ، P_2 ، P_3 ، E_2 ، R_1)$$

بنابراین تعداد ترتیبات حروف PEPPER عبارت است از:

$$6!/(2!3!) = 60$$ □

پیش از بیان اصل عمومی ترتیبات با نمادهای مکرر، مایل به خاطرنشان این نکته‌ایم که در دو مثال پیشین‌مان، نوع جدیدی از مسأله را، با ربط آن به اصول شمارش قبلی، حل کردیم. این‌کار عملی متعارف در ریاضیات در حالت عمومی است، و غالباً در استخراج فرمولهای گسسته و ترکیباتی به‌کار می‌رود.

> در حالت عمومی، اگر n شیء با n_1 شیء از نوع اول، n_2 شیء از نوع دوم، ...، و n_3 شیء از نوع rام ، با
>
> $$n_1 + n_2 + ... + n_r = n$$
>
> موجود باشند، در این صورت $\frac{n!}{n_1!n_2!...n_r!}$ ترتیب از n شیء داده شده وجود دارند. (اشیای از یک نوع تمایزناپذیرند.)

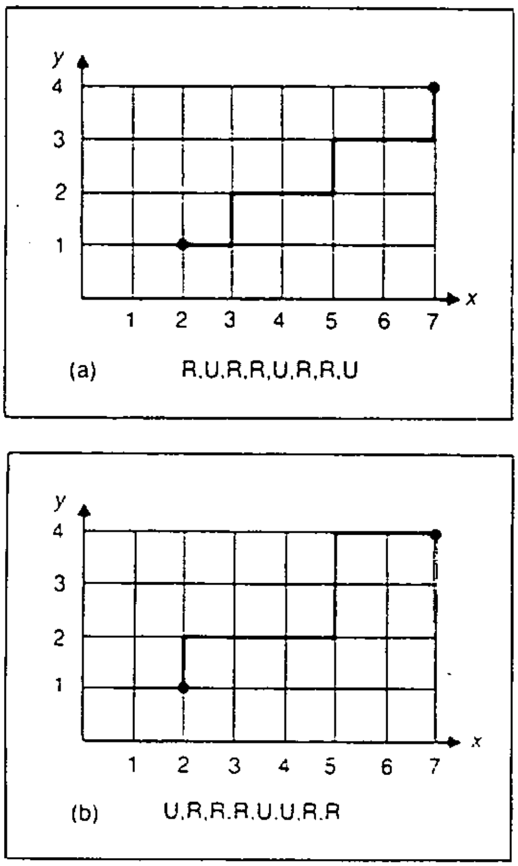
مثال ۱۳.۱. MASSASAUGA مار سمی قهوه‌ای و سیاه از خزنده‌های بومی آمریکای شمالی است. با ترتیب جمیع حروف MASSASAUGA ، در می‌یابیم که $\frac{10!}{4!1!1!1!1!} = 25,200$ ترتیب ممکن موجودند. در میان آنها $\frac{7!}{3!1!1!1!1!} = 840$ ترتیب وجود دارند که در آنها جمیع چهار A با هم‌اند. برای به‌دست آوردن نتیجهٔ اخیر، جمیع ترتیبات هفت‌نماد AAAA (یک‌نماد)، S ، S ، S ، M ، U ، G را در نظر گرفته‌ایم. □

مثال ۱۴.۱. تعداد مسیرهای (پلکانی) واقع در صفحهٔ xy از (۱ , ۲) به (۷ , ۴) را بیابید که در آنها هریک چنین مسیری از مراحلی فردی، که یک واحد به راست (R) یا یک واحد به بالا (U) می‌رود، تشکیل شده است. خطوط پررنگ واقع در شکل ۱.۱ دو مسیر از چنین مسیرهایی را نشان می‌دهند.

در زیر هر مسیر شکل ۱.۱ مراحل فردی مربوط به آن‌را فهرست کرده‌ایم. به عنوان مثال، در قسمت (a)ی شکل مزبور، فهرست

U , R , R ,U , R , R , U , R

مشخص می‌کند که با آغاز از نقطهٔ (۱ , ۲) ، ابتدا یک واحد به راست [به (۱ و ۳)]. سپس یک واحد به بالا [به (۲ , ۳)] ، پس از آن دو واحد به راست [به (۲ , ۵)] ، و غیره حرکت کرده تا به نقطه (۴ , ۷) رسیده‌ایم. مسیر مزبور شامل ۵ ، R برای حرکات به راست و ۳ ، U برای حرکات به بالاست.



شکل ۱.۱

مسیر واقع در قسمت (b) ی شکل مورد بحث نیز از ۵ ، R و ۳ ،

U تشکیل شده‌است. درحالت‌عمومی، کل سفر از (۱ , ۲) به (۴ , ۷) به ۵ = ۲ − ۷ حرکت افقی به راست و ۳ = ۱ − ۴ حرکت قائم به بالا نیازمند است. نتیجتاً، هر مسیر متناظر با فهرستی از ۵، R و ۳، U است، و جواب مربوط به تعداد مسیرها به عنوان تعداد ترتیبات ۵، R و ۳ ، U پدیدار می‌شود، که $\frac{۸!}{۵!۳!} = ۵۶$ است. □

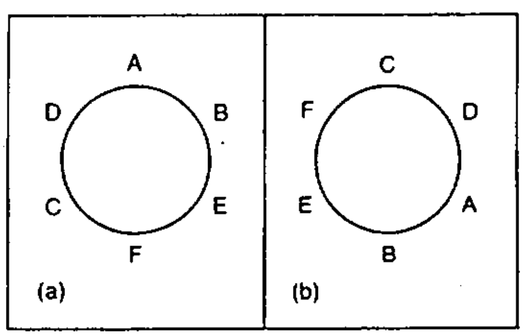
مثال ۱۵.۱. اکنون به‌عملی مجردتر دست می‌زنیم و اثبات می‌کنیم که اگر n و k اعدادی صحیح، با n = ۲k ، باشند، در این صورت $n! / ۲^k$ عددی صحیح است. این موضوع، از آن‌جا که استدلالمان متکی بر شمارش است، مثالی از اثبات ترکیباتی است.

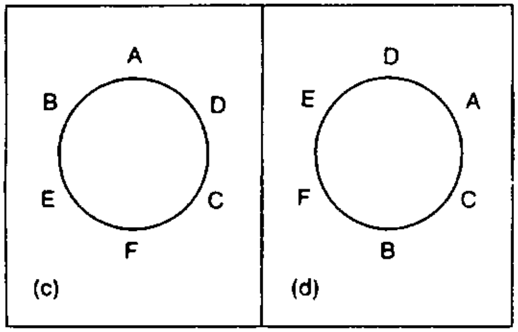
n نماد x_1 ، x_1 ، $x_۲$ ، $x_۲$ ،...، x_k ، x_k را در نظر می‌گیریم. تعداد طرقی که طبق آنها می‌توانیم جمیع این n = ۲k نماد را مرتب کنیم عددی صحیح است یعنی:

$$\frac{n!}{۲!۲!\,...\,۲!} = \frac{n!}{۲^k}$$ □

سرانجام، آنچه را تاکنون مطرح کرده‌ایم، در حالتی به کار ببریم که ترتیبات آن دیگر خطی نیستند.

مثال ۱۶.۱. اگر شش فرد، مشخص‌شده‌به‌صورت A ، B ، ... ، F ، دور میز گردی نشسته باشند، چند ترتیب دوری متفاوت ممکنند، در صورتی که ترتیبات را، هنگامی که یکی از آنها را بتوان با دوران از دیگری به دست آورد، یکسان به شمار آوریم؟ (در شکل ۲.۱. ترتیبات (a) و (b) یکسان در نظر گرفته می‌شوند، در حالی که (b) ، (c) ، و (d) سه ترتیب متمایزند.)





شکل ۲.۱

چون در مورد غالب وضعیات جدید سعی در ارتباط دادن با مفاهیم گذشته می‌کنیم. با ملاحظهٔ شکلهای ۲.۱ (a) و ۲.۱ (b)، و با آغاز از بالای دایره و حرکت ساعتگرد، ترتیبات خطی متمایز ABEFCD و CDABEF را که متناظر با ترتیب دوری یکسانی هستند، فهرست می‌کنیم. علاوه بر این دو، چهار ترتیب خطی دیگر - BEFCDA ، DABEFC ، EFCDAB ، EFCDAB و FCDABE - پیدا می‌کنیم که متناظر با همان ترتیب دوری واقع در (a) یا (b) اند. بنابراین، از آن‌جا که هر ترتیب دوری متناظر با شش ترتیب خطی است، داریم:

(تعداد ترتیبات دوری A ، B ،... ، F) × ۶ =

(تعداد ترتیبات خطی A ، B ،... ، F) = !۶

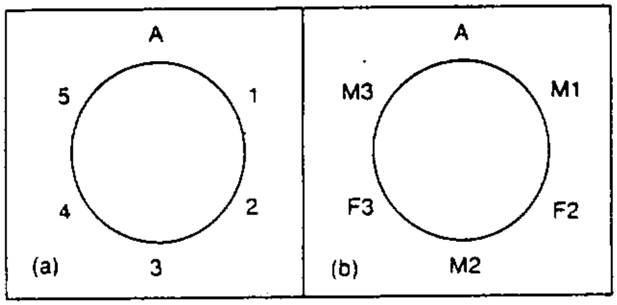
نتیجتاً ۱۲۰ = !۵ = ۶ / !۶ ترتیب از A ، B ،... ، F حول میزگردمان موجودند. □

مثال ۱۷.۱. اکنون فرض می‌کنیم که شش فرد مثال ۱۶.۱ شش زوجند و A ، B ، و C زنهای مربوطه‌اند. می‌خواهیم این شش فرد را حول میزگردی چنان قرار دهیم که زن و مردها یک درمیان باشند. (بار دیگر، ترتیبات را، در صورتی که یکی از آنها را بتوان با دوران از دیگری به دست آورد، یکسان در نظر می‌گیریم.)

پیش از حل این مسأله، مثال ۱۶.۱ را با روش دیگری که به حل مسألهٔ حاضر کمک می‌رساند، حل کنیم.

اگر A را، چنان که در شکل ۳.۱ (a) نشان داده‌ایم، پشت میز

مورد بحث قرار دهیم، پنج محل (ساعتگرد از A) برای پر شدن باقی می‌مانند. پر کردن مکانهای مزبور با B، C، ...، F به روشی خطی است، و این کار رامی‌توان به ۵! = ۱۲۰ انجام داد.



شکل ۳.۱

برای حل مسألهٔ جدید زن و مردهای یک درمیان، روش نشان داده شده در شکل ۳.۱ (b) را در نظر می‌گیریم. A (یکی از زنها) را، چون قبل، مکان می‌دهیم. مکان بعدی، ساعتگرد از A، نشان شده با M_1 (مرد اوّل)، می‌تواند به سه طریق پر شود. با ادامه دادن ساعتگرد از A، مکان F_2 (زن دوم) را می‌توان به دو طریق پر کرد. با حرکت به این طریق، و با قاعدهٔ حاصل‌ضرب ۱۲ = ۱ × ۱ × ۲ × ۲ × ۳ طریق موجودند که در آنها شش فرد مزبور را می‌توان، بدون این که هیچ دو مرد یا دو زنی کنار یکدیگر واقع شوند، گرد میز نشاند. □

ادب ریاضی

در پنجاه و یک سالگی لاگرانژ این احساس را داشت که به پایان قدرت خویش رسیده است. وضع او مثال بارزی از ایجاد ناتوانی کامل اعصاب در نتیجه کار فکری ممتد و مداوم بوده است.

پاریسیها او را هنگام معاشرت و مصاحبت آرام و مطبوع می‌دیدند، لیکن هرگز پیشقدم مباحثه و اقدامی نمی‌شد. بندرت حرف می‌زد و غالباً گیج و مبهوت و غوطه‌ور در مالیخولیایی عمیق به‌نظر می‌رسید. در اجتماعات دانشمندان که در منزل لاوازیه «Lavoisier» تشکیل می‌شد غالباً در کنار پنجره‌ای می‌ایستاد و به خارج می‌نگریست و پشت به مهمانانی می‌کرد که برای ادای احترام به او آمده بودند. غالباً اظهار می‌داشت که آتش شور، وی خاموش شده و ذوق ریاضیات رااز دست داده است. هنگامی که به او اطلاع می‌دادند که فلان ریاضی‌دان به فلان تجسس مهم پرداخته است جواب می‌داد: «چه خوب شد، من این کار را شروع کرده بودم و مجبور نیستم آن‌را خاتمه دهم.»

ریاضی‌دانهای نامی ـ حسن صفاری

تفریح اندیشه ۱

کلمهٔ چهار حرفی متداول انگلیسی‌ای را با این معلومات بیابید که با هر یک از چهار کلمهٔ زیر دو حرف مشترک، اما نه در مکان درست، داشته باشد:

EGIS

PLUG

LOAM

ANEW

جواب در صفحهٔ ۹۶

آیا تابعی جبری وجود دارد که متناوب باشد؟

دکتر احمد شرف‌الدین

در سطور زیر ثابت می‌کنیم که تنها تابع جبری متناوب، تابع ثابت است. مطالعهٔ این مقاله نه‌تنها برای دانش‌آموزان مفید است که برای دبیران و دانشجویان نیز مفید است.

ابتدا مقدمات لازم برای اثبات حکم مورد نظر را ذکر می‌کنیم و سپس به اثبات مطلب می‌پردازیم.

۱. قضیّه. معادلهٔ

$$(1)\quad a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

که در آن n عدد صحیح بزرگتر یا مساوی یک است، دارای n ریشه است.

در این قضیه اعداد مختلطی که در معادله (۱) صدق می‌کنند جواب محسوب می‌شوند و همچنین هر ریشه مکرر از مرتبه p، به‌عنوان p ریشه محسوب می‌شوند.

مثال ۱. معادله درجهٔ دوم $x^2 - 5x + 6 = 0$ دارای دو جواب حقیقی $x = 2, 3$ است. معادله درجهٔ دوم $x^2 - 3x + 4 = 0$ دارای دو جواب مختلط $x = \frac{-3\pm\sqrt{-7}}{2}$ است. معادله درجه دوم $x^2 - 2x + 1 = 0$ دارای دو جواب مساوی $x = 1$ است. معادله اخیر به‌صورت $(x-1)^2 = 1$ است. منظور ما از این مثال آن است که بگوییم یک معادله درجه دوم همواره دارای دو جواب است.

مثال ۲. معادلهٔ درجه سوم $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ دارای سه جواب حقیقی $x = -1, 2, 3$ است. معادلهٔ درجه سوم $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$ دارای یک جواب حقیقی $x = 1$ و دو جواب مختلط $x = -1\pm\sqrt{-4}$ است. معادلهٔ $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ دارای یک جواب ساده $x = 2$ و دو جواب مساوی $x = 1$ است. معادلهٔ $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$ دارای سه جواب مساوی $x = -1$ است (جواب مکرر از مرتبهٔ ۳). منظور ما از این مثال آن است که توضیح دهیم یک معادلهٔ درجه سوم همواره دارای سه جواب است.

۲. قضیّه. یک شرط لازم و کافی برای آن‌که معادلهٔ

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

دارای بی‌نهایت جواب باشد، آن است که ضرایب مساوی صفر باشند:

$$a_n = a_{n-1} = \dots = a_1 = a_0$$

۳. تعریف تابع متناوب. تابع f را متناوب با دوره تناوب T $(T \neq 0)$ می‌نامند، اگر $x \in Domf$ آنگاه

$$\begin{cases} x \pm T \in Dom f \\ f(x+T) = f(x) \end{cases} \quad \text{و}$$

۴. قضیّه. هرگاه تابع f متناوب با دوره تناوب T باشد، به ازای هر عدد صحیح مثبت یا منفی n چنین داریم:

$$f(x + nt) = f(x)$$

۵. تعریف تابع جبری. بنا به تعریف، y تابعی جبری از x است اگر در معادلهٔ جبری تجزیه ناپذیری به‌صورت:

$$P_n(x)y^n+P_{n-1}(x)y^{n-1}+\dots+P_1(x)y+P_0(x)=0 \qquad (۲)$$

صدق کند. در معادلهٔ بالا، n عدد است صحیح و نسبت و ضریبهای $p_n(x)$، $P_{n-1}(x)$،...، $P_1(x)$، $P_0(x)$ چند جمله‌ایهایی از x می‌باشند.

مثال ۱. $y=\sqrt{x}$ ، $(x>0)$ یک تابع جبری را تعریف می‌کند که عضوهای (x,y) آن در معادله تجزیه‌ناپذیر زیر صدق می‌کنند:

$$y^2-x=0$$

مثال ۲. $y=\frac{x}{\sqrt{x}+1}$ $(x>0)$ یک تابع جبری را تعریف می‌کند که عضوهای (x,y) آن در معادله تجزیه ناپذیر زیر صدق می‌کنند:

$$(x-1)y^2+2xy-x^2=0$$

تابع جبری را می‌توان به‌صورت ساده زیر نیز تعریف کرد:

تابع جبری تابعی است که از تعدادی متناهی عمل جبری بر تابع همانی (یعنی تابع x) و تابع ثابت حاصل شود. (اعمال جبری شامل جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، به توان رساندن، و ریشه گرفتن می‌شوند.)

۶. تعریف تابع غیرجبری. تابعی که جبری نباشد تابع غیر جبری یا متعالی نامیده می‌شود. تابعهای مثلثاتی و لگاریتمی از جمله تابعهای غیر جبری‌اند.

تابع $\sin x$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$$

تابع بالا با اعمال جبری بر تابع همانی و تابع ثابت حاصل شده است. اما باید توجه کرد که تعداد این اعمال متناهی نیست. لذا تابع $\sin x$ یک تابع جبری نیست.

۷. حکم. تابع ثابت تنها تابع جبری متناوب است.

برهان. تابع جبری

$$y=f(x) \qquad (۳)$$

را درنظر می‌گیریم. بنابر شمارهٔ (۵)، این تابع در معادلهٔ جبری تجزیه ناپذیری به‌صورت (۲) که در شمارهٔ (۵) ذکر شد، صدق می‌کند.

اکنون مقدار دلخواه y_0 متعلق به برد تابع (۳) را درنظر می‌گیریم. مقدار y_0 را در معادلهٔ (۲)، به‌جای y می‌گذاریم، معادلهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$P_n(x)y^n+P_{n-1}(x)y^{n-1}+\dots+P_1(x)y+P_0(x)=0 \qquad (۴)$$

معادلهٔ (۴) یک معادلهٔ جبری بر حسب x است. اگر درجه این معادله k باشد آنگاه بنا بر قضیّه (۱)، تعداد جوابهای آن در حالت کلی برابر k است.

جوابهای معادله:

$$y_0=f(x) \qquad (۵)$$

در معادله (۴) صدق می‌کنند پس تعداد جوابهای معادلهٔ (۵) متناهی است.

اکنون فرض می‌کنیم که تابع جبری (۳) متناوب باشد. می‌گوییم حداقل یک مقدار x_0 وجود دارد به‌طوری که $y_0=f(x_0)$ باشد. اگر دورهٔ تناوب تابع f برابر T باشد، آنگاه چنین داریم:

$$f(x_0+xt)=f(x_0)$$

n عددی صحیح است (مثبت یا منفی). پس اگر تابع $f(x)$ متناوب باشد معادلهٔ (۵) دارای بی‌نهایت جواب است. این نتیجه با نتیجه‌ای که قبلاً به‌دست آوردیم متناقض است. پس تابع جبری درحالت کلی متناوب نیست.

حالت خاص. اگر تابع $f(x)$ ثابت و برابر C می‌باشند چنین داریم:

$$y_0=c \qquad (۶)$$

زیرا y_0 متعلق به برد تابع اختیار شده است. چون در معادله (۶)، ضریبهای توانهای مختلف x صفرند و جمله ثابت یعنی: (y_0-c) نیز صفر است پس بنابر قضیّهٔ (۲)، این معادله دارای بی‌نهایت جواب است. لذا تنها تابع جبری متناوب، تابع ثابت است.

تابع ثابت دارای بی‌نهایت دورهٔ تناوب است. این تابع دارای کوچکترین دورهٔ تناوب نیست.

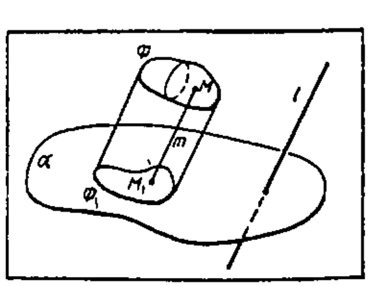
مفهومهای اصلی و اصل موضوعها در هندسه فضایی (۴)

پرویز شهریاری

۱۰. تصویر موازی شکلها. ویژگیهای تصویر موازی

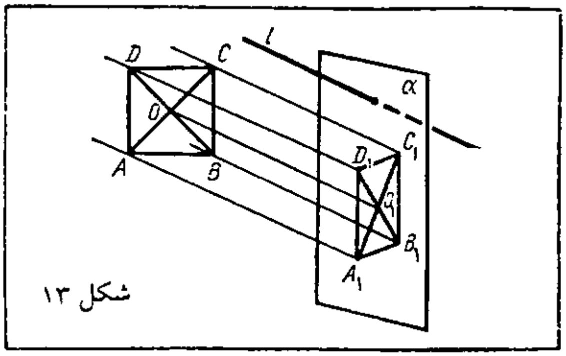
در این بخش و بخش بعد، قانونهایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که، در هندسهٔ فضایی، برای نشان دادن شکلها در روی صفحه، به کار می‌روند. ابتدا با نوع تازه‌ای از نگاشت شکلها، یعنی تصویر موازی آشنا می‌شویم.

صفحه α و خط راست l، متقاطع با صفحه α را، درنظر می‌گیریم (شکل ۱۲). اگر از نقطهٔ دلخواه M، متعلق به شکل مفروض ϕ، خط راست m را موازی باخط راست l رسم کنیم، نقطهٔ M_1، نظیر نقطهٔ M (یانگارهٔ M)، در محل برخورد خط راست m باصفحه α به‌دست می‌آید. این نگاشت f را، **تصویر شکل ϕ برصفحهٔ α، موازی باخط راست l** گویند. نقطهٔ $M_1 = f(M)$ را، **تصویر موازی نقطهٔ M**، m را **خط راست تصویرکننده**، شکل $\phi_1 = f(\phi)$ را **تصویر موازی شکل ϕ** و صفحه α را **صفحهٔ تصویر** نامند.



شکل ۱۲

تصویر دربارهٔ تصویر موازی را، می‌توان با سایه‌ای که از نمونهٔ مقوایی شکل، در اثر نور آفتاب، روی دیوار می‌افتد، مجسم کرد. به‌علت دوری خورشید از زمین، می‌توان پرتوهای خورشیدی را، به تقریب، موازی به حساب آورد.



شکل ۱۳

اگر مقوایی را به شکل مربع ABCD بریده باشیم، سایه آن روی دیوار، به شکل چهار ضلعی $A_1B_1C_1D_1$ (شکل ۱۳) در می‌آید. مطالعهٔ شکلهای ABCD و $A_1B_1C_1D_1$ در موقعیتهای مختلف صفحهٔ مربع، موجب می‌شود تا بتوانیم، فرضیّه‌هایی دربارهٔ ویژگیهای تصویر موازی، حدس بزنیم. این ویژگیها را، با این شرط تنظیم می‌کنیم که تصویر، موازی باخط راست l باشد، ولی خط راست l، با هیچ کدام از پاره‌خطها یا خطهای راستی که تصویر می‌شوند، موازی نباشد (شکل ۱۳).

الف) می‌بینیم که تصویر هرضلع یا قطر مربع، به‌صورت پاره‌خط راست در می‌آید.

ویژگی ۱. تصویر یک خط راست (پاره‌خط راست)، یک خط راست (پاره‌خط راست) است.

ب) در مربع $ABCD$ داریم: $[AB] \parallel [CD]$ و $[BC] \parallel [AD]$. در تصویر هم، «سایهٔ» این پاره‌خطهای راست، موازیند. $[C_1D_1] \parallel [A_1B_1]$ و $[B_1C_1] \parallel [A_1D_1]$.

ویژگی ۲. تصویرهای دو خط راست موازی، باهم موازیند.

ج) داریم: $|AO| : |AC| = \frac{1}{2}$ و $|AB| : |DC| = 1$. می‌توان توجه کرد که همین نسبتها، برای پاره‌خطهای تصویر هم وجود دارد، یعنی: $\frac{|AB|}{|DC|} = \frac{|A_1B_1|}{D_1C_1}$ و $\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|A_1D_1|}{A_1C_1}$.

ویژگی ۳. نسبت طولهای دو پاره‌خط راست موازی، برابر است با نسبت طولهای تصویرهای آنها.

پرسشها و مسأله‌ها

۸۶. سه نقطه مفروضند. ضمن تصویر موازی، چند نقطه روی صفحهٔ تصویر به‌دست می‌آیند؟

۸۷. در تصویر صفحه، نیم صفحه زاویه، چه شکلی به‌دست می‌آید؟

۸۸. طول یک پاره‌خط راست، با طول تصویر آن برابر شده است. این پاره‌خط راست، نسبت به صفحهٔ تصویر، چه وضعی می‌تواند داشته باشد؟

۸۹. دو خط راست، تصویرهایی موازی دارند. آیا این گزاره درست است: خود خطهای راستی که تصویر شده‌اند، موازیند؟

۹۰. ۱) ثابت کنید، تصویر نقطهٔ وسط یک پاره‌خط راست، در وسط پاره‌خط راست تصویر است؛ ۲) آیا می‌توان چهاروجهی $ABCD$ را، طوری بر یک صفحه تصویر کرد که در تصویر، یک متوازی‌الاضلاع به‌دست آید؟

۹۱. پاره‌خط راست AB، صفحهٔ تصویر را در نقطهٔ M قطع کرده است. تصویر آن را A_1B_1 می‌نامیم. می‌دانیم $|AB| = m$ و $\frac{|A_1M|}{|MB_1|} = \frac{p}{q}$. مطلوب است $|AM|$ و $|BM|$.

۹۲. ۱) تصویرهای دو نقطهٔ مفروض A و B بر صفحهٔ α را، A_1 و B_1 می‌نامیم. چگونه می‌توان نقطهٔ برخورد خط راست AB را با صفحهٔ α پیدا کرد؟؛ ۲) نقطه‌های A و B و C ـ که روی یک خط راست نیستند ـ و تصویرهای آنها، A_1 و B_1 و C_1، بر صفحهٔ α، داده شده است. خط راست فصل مشترک دو صفحهٔ ABC و α را، چگونه می‌توان پیدا کرد؟

۱۱. نمایش شکلها در هندسهٔ فضایی

تا این‌جا، بدون این‌که به چگونگی روش کار بپردازیم، شکلهایی مثل چهاروجهی و متوازی‌السطوح را، روی صفحه نشان داده‌ایم. اکنون می‌خواهیم دربارهٔ نمایش شکلها، اندکی دقیقتر، صحبت کنیم.

وقتی در هندسهٔ فضایی، از **نمایش یک شکل** صحبت می‌کنیم، **منظور شکلی است که با تصویر موازی شکل مفروض بر صفحه، متشابه باشد.**

در این بخش، قانونهای نمایش ساده‌ترین چندضلعیها و چند وجهیها را شرح می‌دهیم. وجه‌های یک چندوجهی، چندضلعیهایی هستند که روی صفحه‌های مختلف قرار گرفته‌اند و، بنابراین، طبیعی است ابتدا، به نمایش چند ضلعیهایی بپردازیم که صفحهٔ آنها، منطبق بر صفحهٔ تصویر و یا موازی با آن نیست. از حالتی که، صفحهٔ چندضلعی، با خط راست تصویر کننده (خط راستی که تصویر، موازی با آن انجام می‌شود) صرف‌نظر می‌کنیم، زیرا در این حالت، تصویر چند ضلعی، به‌صورت یک پاره‌خط راست درمی‌آید.

۱. مثلث. اگر سایهٔ یک مثلث مقوایی را روی دیوار، ضمن تغییر وضع مثلث، مورد مطالعه قرار دهیم، به این نتیجه می‌رسیم که، تصویر یک مثلث، می‌تواند مثلثی به هر شکل باشد: **تصویر یک مثلث مفروض بر یک صفحه (یعنی نمایش مثلث) می‌تواند مثلثی به شکل دلخواه**

باشد. مثلاً، مثلث متساوی‌الاضلاع، می‌تواند به‌صورت هرگونه مثلثی با ضلعهای مختلف درآید. درنتیجه: در تصویر موازی، مقدار زاویه‌ها و نسبت طول پاره‌خطهای راستی که با هم موازی نیستند، در حالت کلی، ثابت نمی‌ماند.

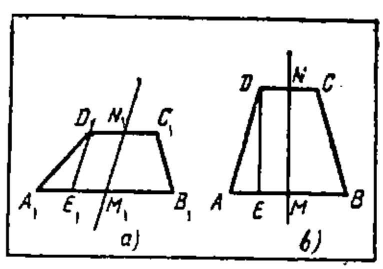
مسألهٔ ۱. در نمایش یک مثلث متساوی‌الاضلاع (یعنی در تصویر موازی این مثلث)، جای تصویر مرکز مثلث را پیدا کنید.

حل. مرکز هر مثلث، نقطهٔ برخورد میانه‌های آن است. با توجه به ویژگی ۳، تصویر هر میانه، به‌صورت میانهٔ تصویر به‌دست می‌آید. بنابراین، کافی است در مثلث تصویر، دو میانه را رسم کنیم؛ محل برخورد آنها، تصویر مرکز مثلث اصلی را به ما می‌دهد.

۲. متوازی‌الاضلاع. چون ضمن تصویر، موازی بودن دو خط راست حفظ می‌شود، بنابراین نمایش یک متوازی‌الاضلاع فضایی بر صفحه (و در حالت خاص، نمایش یک مستطیل، یک لوزی یا یک مربع)، یک متوازی‌الاضلاع است، ولی البته، طول ضلعها و اندازهٔ زاویه‌های تصویر، می‌تواند تغییر کند. در واقع، برای درک بیشتر این موضوع، می‌توان دو مثلثی را درنظر گرفت که به‌وسیلهٔ یکی از قطرهای متوازی‌الاضلاع اصلی، به‌وجود آمده‌اند و، سپس، به آن چه در مورد نمایش مثلث گفته‌ایم، توجه کرد.

۳. ذوزنقه. از ویژگیهای تصویر موازی نتیجه می‌شود که نمایش یک ذوزنقه، ذوزنقهٔ دیگری است که، در آن، نسبت طولهای دو قاعده، ثابت می‌ماند.

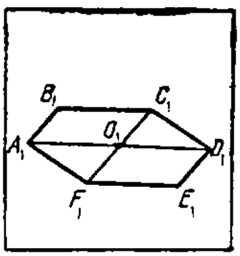
مسألهٔ ۲. روی تصویر یک ذوزنقه متساوی‌الساقین، تصویر ارتفاع را پیدا کنید.



شکل ۱۴

حل: ذوزنقهٔ $A_1B_1C_1D_1$ را نمایش یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین می‌گیریم (شکل ۱۴، a). در ذوزنقهٔ اصلی (شکل ۱۴، b)، ارتفاع DE موازی محور تقارن MN است (M و N، نقطه‌های وسط دو قاعده‌اند). چون در تصویر موازی، خطهای راست موازی، موازی باقی می‌مانند؛ در ضمن، نسبت پاره‌خطها، درحالت موازی بودن آنها، تغییر نمی‌کند، بنابراین ارتفاع ذوزنقهٔ $A_1B_1C_1D_1$ را می‌توان به این ترتیب ساخت: ۱) نقطه‌های M_1 و N_1، وسط پاره‌خطهای راست A_1B_1 و D_1C_1 را پیدا می‌کنیم؛ ۲) خط راست M_1N_1 را رسم می‌کنیم؛ ۳) پاره‌خط راست D_1E_1 را موازی (M_1N_1) رسم می‌کنیم.

۴. شش ضلعی منتظم. شش ضلعی منتظم $ABCDEF$ را درنظر می‌گیریم. محل برخورد قطرهای AD و FC، مرکز تقارن شش ضلعی است، بنابراین، لوزیهای $ABCD$ و $DEFO$ نسبت به نقطهٔ O قرینهٔ یکدیگرند.



شکل ۱۵

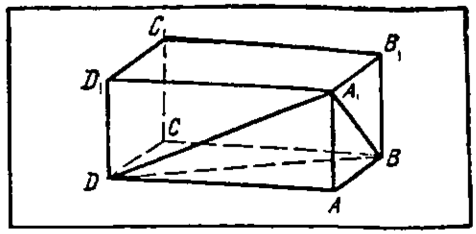
لوزی $ABCD$، در تصویر، به‌صورت متوازی‌الاضلاعی مثل $A_1B_1C_1D_1$ درمی‌آید (شکل ۱۵). نقطه‌هایی که نسبت به مرکز O قرینهٔ یکدیگرند، در تصویر، قرینهٔ هم، نسبت به نقطهٔ O_1 درمی‌آیند. (بخش ۱۰، ویژگی ۳). به این ترتیب، برای به‌دست آوردن بقیهٔ رأسهای تصویر، کافی است نقطه‌های D_1 (قرینهٔ A_1 نسبت به O_1)، E_1 (قرینهٔ B_1 نسبت به O_1) و F_1 (قرینهٔ C_1 نسبت به O_1) را پیدا کنیم. قرینهٔ یک نقطه نسبت به نقطهٔ دیگر را معمولاً با حرف Z نشان می‌دهند و این‌طور می‌نویسند:

$$D_1 = Z_{O_1}(A_1) \quad , \quad E_1 = Z_{O_1}(B_1) \quad , \quad F_1 = Z_{O_1}(C_1)$$

در این‌صورت، شش ضلعی $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$، نمایش مطلوب است.

۵. چهاروجهی. اگر مُدل یک چهاروجهی را، مثلاً با مقوا، تهیّه کنیم و سایهٔ آن را، با تغییر موقعیت چهاروجهی، روی دیوار، مورد مطالعه قرار دهیم، می‌توانیم قانون نمایش آن را به این صورت تنظیم کنیم: **یالهای یک چهاروجهی، در نمایش مسطحهٔ آن، به‌صورت ضلعها و قطرهای یک چهارضلعی درمی‌آیند.**

۶. متوازی‌السطوح. فرض می‌کنیم، متوازی‌السطوح AC_1 داده شده باشد. یالهای AB، AD و AA_1 را، که در یک رأس به هم رسیده‌اند، درنظر می‌گیریم و به چهاروجهی A_1ABD توجه می‌کنیم. با استفاده از قانون نمایش چهاروجهی، به این نتیجه می‌رسیم که نمایش یالهای AB، AD و AA_1 را می‌توان به‌صورت سه پاره‌خط راستی نشان داد که از یک نقطه آغاز شده‌اند (شکل ۱۶)؛ ولی هیچ دوتایی از آنها، روی یک خط راست نیستند.



شکل ۱۶

با مشخص کردن این سه پاره‌خط راست، وضع متوازی‌السطوح در نمایش مسطحهٔ خود، مشخص می‌شود. هریک از یالهای دیگر، با یکی از این سه پاره‌خط راست موازی است و طولی برابر آن دارد (ویژگیهای ۱ تا ۳ از بخش ۱۰).

پرسشها و مسأله‌ها

۹۳. $A_1B_1C_1$ را نمایش مثلث ABC می‌گیریم. آیا ارتفاع مثلث $A_1B_1C_1$، نمایش ارتفاع مثلث ABC است؟

۹۴. یک مثلث متساوی‌الساقین را طوری تصویر کنید که، در تصویر، به‌صورت یک مثلث متساوی‌الاضلاع درآید. در این تصویر، پیدا کنید: ۱) تصویر نیمساز زاویهٔ رأس؛ ۲) تصویر پاره‌خط راستی که از وسط ساق بر قاعده عمود شده است.

۹۵. در تصویر یک مثلث دلخواه، تصویر ارتفاع و تصویر مرکز دایرهٔ محیطی مثلث اصلی را پیدا کنید.

۹۶. ۱) در مثلث ABC می‌دانیم، نسبت طولهای دو ضلع AB و BC برابر $\frac{2}{3}$ است. نمایش این مثلث و نمایش نیمساز زاویهٔ B از آن را پیدا کنید؛ ۲) نسبت طول ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمهٔ AC و BC از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC برابر $\frac{3}{4}$ است. نمایش مرکز دایرهٔ محاطی این مثلث را پیدا کنید.

۹۷. ۱) آیا ممکن است نمایش یک چهارضلعی، یک چهارضلعی دلخواه باشد؟؛ ۲) آیا ممکن است نمایش یک ذوزنقه، یک متوازی‌الاضلاع باشد؟؛ ۳) آیا ممکن است نمایش یک لوزی، یک مربع باشد؟

۹۸. ۱) چه ویژگیهایی از لوزی، ضمن نمایش تصویری آن، حفظ می‌شود و چه ویژگیهایی از آن تغییر می‌کند؟؛ ۲) چه ویژگیهایی از مستطیل، ضمن نمایش تصویری آن، حفظ می‌شود؟

۹۹. مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی مفروض است. نمایش تصویری آن را پیدا کنید و، سپس، نمایش مربعی را پیدا کنید که ضلع آن: ۱) ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ مثلث مفروض؛ ۲) وتر مثلث مفروض باشد.

۱۰۰*. در چهارضلعی ABCD، طول همه یالها با هم برابرند و k، وسط یال BD است. ۱) خطهای راست KM و KN را، به‌ترتیب، بر (AD) و (DC) عمود کرده‌ایم (M و N، پای عمودها هستند)؛ ۲) نقطهٔ برخورد صفحهٔ KMN را با خط راستی که از نقطهٔ D به محل برخورد میانه‌های وجه مقابل وصل می‌کند، نشان دهید؛ ۳) مساحت مثلث KMN را پیدا کنید، به‌شرطی که طول هر یال چهاروجهی برابر a باشد.

۱۰۱. ۱) مقطع مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ را با صفحه‌ای که از وسط یالهای BC، AA_1 و CC_1 گذشته است، مشخص کنید؛ ۲)

* در این مسأله و برخی مسأله‌های دیگر، واژهٔ «نمایش» یا «نمایش تصویری» را انداخته‌ایم.

اگر طول هر یال مکعب برابر A باشد، طول ضلعهای مقطع را پیدا کنید.

۱۰۲. در مکعب مستطیل $ABCDA_1B_1C_1D_1$، طول یالهای AB ، BC ، BB_1 متناسبند با عددهای ۳، ۲، ۱. مطلوب است نقطهٔ برخورد ۱) یال AB با نیمساز زاویهٔ BB_1A ؛ ۲) خط راست CC_1 با نیمساز زاویهٔ BB_1C_1.

۱۲. مسأله‌های اضافی

اصل موضوعها و نتیجه‌های آن

۱۰۳. چهار نقطه را درنظر می‌گیریم که هیچ سه‌تایی از آنها، روی یک خط راست نباشند. چند خط راست متفاوت می‌توان رسم کرد که، هریک از آنها، از دو نقطهٔ مفروض بگذرد؟

۱۰۴. چهار نقطهٔ غیرواقع بر یک صفحه داده شده‌اند. چند صفحهٔ مختلف می‌توان رسم کرد به‌نحوی که، هریک از آنها، از سه نقطهٔ مفروض بگذرد؟

۱۰۵. آیااین گزاره‌درست است: ۱) هرسه نقطه‌ای به‌یک صفحه تعلق دارند، ۲) از هر سه نقطهٔ دلخواه، تنها یک صفحه عبور می‌کند؟

۱۰۶. آیا ممکن است، دو صفحه دارای دو خط راست مشترک باشند؟

۱۰۷. آیا این گزاره درست است: اگر خط راستی با هر یک از خطهای راست متقاطع، نقطهٔ مشترکی داشته باشد؛ با این خطهای راست، در یک صفحه قرار دارد؟

۱۰۸. نقطه‌های A ، B ، C ، و D ، غیرواقع بر یک صفحهٔ مفروضند. ثابت کنید، وسط پاره‌خطهای راست AB ، BC ، CD و DA روی یک صفحه‌اند. این نقطه‌ها، رأسهای چه شکلی را تشکیل می‌دهند؟

۱۰۹. در چهاروجهی ABCD ، نقطه‌های M و N ، به‌ترتیب، درون یالهای AC و BC قرار دارند، در ضمن، $(AB) \nparallel (MN)$. اگر نقطهٔ P ، در درون وجه ABD باشد، مقطع چهاروجهی ABCD را با صفحهٔ MNP پیدا کنید.

خطهای راست متنافر

۱۱۰. $[BC_1]$ قطر وجه BCC_1B_1 از منشور قائم $ABCA_1B_1C_1$ است. با استفاده از معیار شناسایی خطهای راست متنافر، خطهای راستی را نام ببرید که: ۱) با (BB_1) ؛ ۲) با (AC) ؛ ۳) با (BC_1) متنافر باشند.

۱۱۱. می‌دانیم دو خط راست p و q با هم متنافرند و خط راست r ، خط راست p را قطع می‌کند. موقعیت دو خط راست q و r ، نسبت به هم، چگونه می‌تواند باشد؟

۱۱۲. می‌دانیم $\alpha \cap \beta = m$ ، $a \subset \alpha$ ، $b \cap \alpha = a$. موقعیت خطهای راست a و b ، نسبت به هم، چگونه می‌تواند باشد؟

۱۱۳. دو خط متنافر a و b و نقطهٔ M ، که روی a یا b نیست، مفروضند. آیا خط راستی وجود دارد که از نقطهٔ M بگذرد و هریک از دو خط راست a و b را قطع کند؟

خطهای راست و صفحه‌های موازی

۱۱۴. مربع ABCD قاعدهٔ هرم قائم SABCD را تشکیل می‌دهد. M و N ، به‌ترتیب، وسط یالهای SB و SC هستند. نشان دهید: ۱) خطهای راست موازی با صفحهٔ ABC ؛ ۲) خطهای راست موازی با صفحهٔ ASD ؛ ۳) صفحه‌های موازی با خط راست AB.

۱۱۵. خط راست a ، صفحهٔ α را قطع می‌کند. آیا روی صفحهٔ α می‌توان خط راستی موازی با a رسم کرد؟

۱۱۶. موقعیت خط راست a ، نسبت به صفحهٔ α ، چگونه است، اگر خط راست a خط راستی واقع بر صفحهٔ α ، نسبت به هم متنافر باشند؟

۱۱۷. خط راست a با صفحهٔ α موازی است. ثابت کنید، اگر از نقطهٔ M واقع بر صفحهٔ α ، خط راستی موازی با a رسم کنیم، روی صفحهٔ α قرار دارد.

۱۱۸. یک صفحه و خط راستی موازی با آن، که روی صفحه نیست، مفروضند. ثابت کنید، پاره خطهای راست موازی با هم، که بر خط راست و صفحهٔ مفروض تکیه دارند، طولهایی برابر دارند.

۱۱۹. مقطع چهاروجهی $ABCD$ را با صفحه‌ای که از نقطهٔ M واقع در درون صفحهٔ ABC موازی با خطهای راست AB و DC رسم شده است، پیدا کنید.

۱۲۰. هرم منتظم $SABCD$ مفروض است. مطلوب است مقطع آن ۱) با صفحه‌ای که از (BC) و نقطهٔ M واقع بر مثلث SAD می‌گذرد؛ ۲) با صفحه‌ای که از نقطهٔ O واقع بر قاعده، موازی صفحهٔ SAB رسم شده است. اگر $|AB| = a$ و $|SA| = b$ باشد، محیط مقطع را پیدا کنید.

صفحه‌های موازی

۱۲۱. موقعیت دو صفحهٔ α و β، نسبت به هم، چگونه است، اگر: ۱) خط راستی واقع در صفحهٔ α، با صفحهٔ β موازی باشد؛ ۲) هر خط راست واقع در صفحهٔ α، با صفحهٔ β موازی باشد، ۳) خط راستی که صفحهٔ α را قطع کرده است، با صفحهٔ β موازی باشد؟

۱۲۲. آیا این گزاره‌ها درستند: ۱) اگر صفحه‌های α و β موازی باشند و خط راستی متعلق به صفحهٔ α باشد، آن‌وقت این خط راست با صفحهٔ β موازی است؛ ۲) اگر دو خط راستی که، یکی بر α و دیگری بر β قرار دارد، نقطهٔ مشترکی نداشته باشند، آن‌وقت دو صفحهٔ α و β موازیند؟

۱۲۳. متوازی‌السطوح $ABCDA_1B_1C_1D_1$ مفروض است. ثابت کنید: ۱) $(A_1DB) \parallel (D_1CB_1)$؛ ۲) $(ACD_1) \parallel (A_1BC_1)$.

۱۲۴. صفحه‌های موازی α و β مفروضند. از نقطهٔ M، که بر هیچ یک از این دو صفحه واقع نیست، خطهای راست a و b را، به‌نحوی رسم کرده‌ایم که صفحهٔ α را در نقطه‌های A_1 و B_1، و صفحهٔ β را در نقطه‌های A_2 و B_2 قطع کنند. می‌دانیم $|MA_1| = ۸$، $|A_1A_2| = ۱۲$، $|A_2B_2| = ۲۵$. مطلوب است محاسبهٔ $|A_1B_1|$.

۱۲۵. مقطع متوازی السطوح $ABCDA_1B_1C_1D_1$ را با صفحهٔ MNP پیدا کنید، به‌شرطی که نقطه‌های M و N و P، به‌ترتیب، متعلق به یال AB، وجه AA_1D_1D و وجه BB_1C_1C باشند.

۱۲۶. در چهاروجهی $ABCD$، رأس D را به نقطهٔ M، محل برخورد میانه‌های وجه ABC، وصل کرده‌ایم. ۱) مقطع چهاروجهی را با صفحه‌ای پیدا کنید که از نقطهٔ N وسط پاره‌خط راست DM، موازی با وجه BCD رسم شده است؛ ۲) مساحت این مقطع را محاسبه کنید، به‌شرطی که طول هر یال چهاروجهی برابر a باشد.

۱۲۷. روی سه یال دو به دو متنافر متوازی‌السطوح، سه نقطه انتخاب کرده‌ایم. مقطع متوازی‌السطوح را با صفحه‌ای که از این سه نقطه می‌گذرد، پیدا کنید.

۱۲۸. آیا ممکن است، مقطع مکعب: ۱) مثلثی متساوی‌الاضلاع؛ ۲) مربع؛ ۳) پنج ضلعی منتظم؛ ۴) شش‌ضلعی منتظم؛ ۵) هفت ضلعی منتظم باشد؟

تصویر موازی، نمایش شکلها

در مسأله‌های از ۱۲۹ تا ۱۳۱، حالتهایی را هم درنظر بگیرید که، خط راستی که تصویر موازی با آن صورت می‌گیرد، بتواند با صفحهٔ تصویر و یا با صفحهٔ شکل مسطحه، موازی باشد.

۱۲۹. در تصویر موازی، تصویر ۱) نقطه؛ ۲) خط راست؛ ۳) پاره‌خط راست؛ ۴) نیم خط راست؛ ۵) زاویه؛ ۶) صفحه، به چه صورتی درمی‌آید؟

۱۳۰. در تصویر موازی، تصویر ۱) مثلث؛ ۲) ذوزنقه؛ ۳) چهاروجهی؛ ۴) متوازی‌السطوح، چه شکلی می‌تواند باشد؟

۱۳۱. تصویر زاویهٔ ABC، ضمن تصویر موازی، به‌صورت ۱) نیم خط راست B_1A_1؛ ۲) خط راست A_1C_1؛ ۳) زاویهٔ $A_1B_1C_1$ درآمده است. در کدام یک از این حالتها، نگاشتی معکوس پذیر از شکل مفروض بر تصویر خود است؟

۱۳۲. خطهای راست متنافر a و b را، روی صفحه‌ای که هر دو خط راست را قطع کرده است، تصویر کرده‌ایم؛ درضمن، خط راست a را موازی با b و خط راست b را موازی با a. ثابت کنید تصویرها با هم موازیند.

فیثاغورس و هوش آزمایی فرزندان در تعطیلات تابستانی*

ترجمه: حسن نصیرنیا**

در یک تابستان که فیثاغورس و فرزندانش سرگرم گذراندن تعطیلات در جزیرهٔ «کِرت» بودند، او در ساحل نشسته بود و با نگاههای تحسین آمیز، به مثلث قائم‌الزاویه‌ای که روی شنها کشیده بود می‌نگریست. در همین هنگام، سه پسر او از کلبهٔ ساحلیِ محلِ اقامتشان شتابان به سوی پدر آمدند.

فیثاغورس با دیدن آنها به صدای بلند گفت: «پیش پایتان را ببینید، این قدر شلوغ و بی‌نزاکت نباشید.»

پسر بزرگ در حالی که غُرولند می‌کرد، گفت: «دیگر مثلثهای قائم‌الزاویه بس است، آخر ما داریم تعطیلاتمان را می‌گذرانیم!»

پدر گفت: کمی تأمل کنید، من یک مسأله برای شما دارم، درست از نوع مسائلی که برای فرزندان یک نابغه مناسب است.»

فرزند میانی که تسلیم خواستهٔ پدر شده بود، گفت: «باشد! مسأله را طرح کن چون اگر حالا آن را حل نکنیم، بعدها ناگزیر از انجام آن خواهیم شد.»

پدر گفت: «به عقیدهٔ من، شما نسبت به من و ریاضیات تکلیفی دارید که با انجام دادن آن، نام خانوادهٔ ما را زنده نگه خواهید داشت.»

پسر کوچک پرسید: «تکلیف؟ ما چه باید بکنیم؟»

پدر گفت: «به مثلثی که کشیده‌ام نگاه کنید. از شما می‌خواهم یک مثلث مختلف‌الاضلاع روی شن بکشید که با مثلث قائم‌الزاویه‌ای که من کشیده‌ام، و وجه تشابه داشته باشد. یعنی اولاً: با آن هم محیط باشد و ثانیاً: مجموع مساحتهای سه مربعی که بر روی سه ضلعِ آن می‌سازید، با کلِّ مساحتهای سه مثلثی که بر روی ضلعهای مثلث من ساخته می‌شود، برابر باشد. این بیش از یک راه حل دارد و من برای مثلثی که کوچکترین مساحت را داشته باشد، جایزه‌ای در نظر گرفته‌ام.»

دو پسر بزرگتر با بی‌میلی دست به کار شدند و گه‌گاه با حیرت، به برادر کوچک خود می‌نگریستند که تنها یک خط راست کشیده بود و موشکافانه به آن نگاه می‌کرد. وقتی هر یک از آن دو راه‌حلی یافتند، پدر را فراخواندند.

پدر که مثلثِ پسرِ بزرگ را بررسی کرده بود، به او گفت: «بسیار خوب، آفرین!» به پسر میانی نیز گفت: «عالی است! مساحت مثلث تو حتی کوچکتر از مساحت مثلثِ برادرت است.»

پسر میانی که تحسین پدر را شنید، پرسید: «جایزه به من تعلّق می‌گیرد؟»

پدر گفت: «بگذارید ببینم برادر کوچکتان چه کرده است؟»

دو پسرِ بزرگتر اعتراض‌کنان گفتند: «اما او فقط یک خطِّ راست کشیده است!»

پدر گفت «خاموش! بگذارید او هم حرف بزند.»

پسر کوچک که چشمانش برق می‌زد، گفت: «متأسفم از این که نتوانستم تکلیفم را نسبت به شما ادا کنم. مثلث من اصلاً مساحتی ندارد. می‌توانم ادعا کنم که دو شرط دیگر شما را برآورده کرده‌ام؟»

پدر با تردید پرسید: «چرا این سؤال را می‌کنی؟»

پسر گفت: «اگر چنین باشد، یک مثلث قائم‌الزاویهٔ حتی کوچکتر هست که به راه حلی مشابه منجر می‌شود. با این حال، مثلث قائم‌الزاویه

---

* برگرفته شده از کتاب: «سرگرمیهای علمی و آموزشی (جلد اوّل)»، گردآورنده و مترجم حسن نصیرنیا، انتشارات مدرسه، چاپ سوّم، زمستان ۱۳۷۰»

** منبع ترجمه: Mathematics in School Magazine

کوچکتر، این اشکال را دارد که آن نوع راه‌حلهایی را که برادرانم پیشنهاد کردند، به دست نمی‌دهد.»

برادر میانی گفت: «او دارد کَلَک می‌زند! چگونه می‌توان گفت یک خطِّ مستقیم یک مثلث است؟»

برادر بزرگ گفت: «البته که نمی‌توان چنین ادعایی کرد! همه می‌دانند که مجموع هر دو ضلع یک مثلث، باید از ضلع ثالث بزرگتر باشد. این آشکارا به معنای آن است که سه ضلع نمی‌توانند با هم برابر باشند.»

در تمام این مدّت، پدر فرزند کوچکش را تماشا می‌کرد که آرام ایستاده بود و رضایت و خرسندی خاصی در چهره‌اش دیده می‌شد.

سپس از او پرسید: «فرزندم، چیز دیگری داری که بگویی؟»

پسر با خنده گفت: «بلی، من در این مطلب پافشاری نخواهم کرد. اتفاقاً من می‌توانم برای مسأله دو راه حلّ درست ارائه دهم به طوری که مساحتهای هر دو مثلث من، کمتراز مساحتهای پیشنهادی برادرانم باشد. بنابراین، من هنوز می‌توانم مدّعی دریافت جایزه باشم.»

پدر گفت: «همهٔ شما بخوبی از عهدهٔ این کار برآمدید و مایهٔ سرافرازی و مباهات من هستید. اما زیاد در فکر جایزه نباشید، چون به قدر کافی آزموده هستید که هر کدام یک مثلث قائم‌الزاویه رسم کنید. حالا مثلثی بکشید (کوچکترین مثلث ممکن) که تنها یک راه‌حل پذیرفتنی برای مسألهٔ پیشنهادی من باشد.»

ساعتهای بعد، پس از آن‌که فیثاغورس نتیجه کار سه فرزند خسته و کسل خود را بررسی کرد، به پسر کوچک گفت: «تکبر عَزازیل را خوار کرد![1] این بار تو سربلند نشدی.»

پسر گفت: «امّا هر دو مثلث قائم‌الزاویه و مثلث مختلف‌الاضلاع من کوچکتر از مثلثهای برادرانم است.»

پدر گفت: «درست است، اما آنان قواعد خواسته شده را رعایت کرده‌اند و چندین راه‌حل یافته‌اند که در میان آنها، فقط یک پاسخ پذیرفتنی است و تو که از موفقیّت سرخوش بودی، فراموش کردی به این نکته توجه کنی که برای مثلث قائم‌الزاویه‌ات دو راه‌حل وجود دارد.»

فرزند کوچک با شنیدن سخنان پدر، دلگیر شد. امّا فیثاغورس به او گفت: «این قدر دل آزرده مباش! من براستی از همهٔ شما خشنودم.»

پسر گفت: «چه خوب! حالا می‌توانیم برویم شنا کنیم؟»

پدر گفت: «البته که می‌توانید! حال بروید استراحت کنید. امّا برای فردای شما مسأله‌ای دارم که در مقایسه با مسألهٔ امروز، چیزی بیش از صرفاً یک مسألهٔ انحرافی یا ابهام‌آمیز نیست. آن مسأله این است:

یک مثلث قائم الزاویه و یک مثلث مختلف‌الاضلاع با محیطهای نابرابر، چنان رسم کنید که مجموع مربعهای سه ضلع یکی، با مجموع مربعهای سه ضلعِ مربع دیگر برابر باشد. به یاد داشته باشید که طول هیچ یک از شش ضلع دو مثلث نباید با یکدیگر برابر باشد. حال می‌توانید بروید و خوش بگذرانید» (پاسخ معماها را در صفحه ۵۴ مجلّه ببینید.)

ادب ریاضی

ریمان یعنی موجد افکاری که موهای ریاضی‌دانان را روی سرشان بلند کرده بود از لحاظ ظاهر قیافهٔ شخص انقلابی را نداشت. وی جوان بیست و هشت ساله‌ای بود که حجب و حیا در او به مرتبهٔ مرض رسیده بود و از عایدات درسهای خصوصی که می‌داد با نهایت فقر و فلاکت زندگی می‌کرد. بعد از آن‌که در سال ۱۸۵۴ میلادی تتبعات خود را انتشار داد توانست اندکی کره روی نان خالی خود بمالد، اما افسوس که از این وضع استفاده شایانی نکرد زیرا از مرض سل رنج فراوان می‌برد و مجبور شد برای استراحت به ایتالیا رود و در آن‌جا هر وقت که از چنگ مرض فراغتی می‌یافت کار می‌کرد و آخرین روزهای عمر خود را در کنار دریاچهٔ ماژور گذرانید. روز ۲۰ ژوئیه ۱۸۶۶ میلادی در نهایت افتخار و در منتهای جوانی زندگی را بدرود گفت.

تاریخ علوم ـ حسن صفاری

---

[1] ـ در این جا فیثاغورس جمله‌ای قصار از کتاب مقدس را باز می‌گوید که معادل فارسی آن ـ که از سعدی برگرفته شده است ـ جملهٔ: «تکبر عزازیل را خوار کرد.» است. عزازیل، یا به قولی ابلیس، نام فرشته‌ای است که از اطاعت خداوند سرپیچی کرد و کافر شد. (م.)

مثلث ارتفاعیه

ساسان اسماعیلی شاهرودی (دبیرستان سروش)

مثلث ارتفاعیه چیست؟

تعریف: اگر پای ارتفاعهای یک مثلث را به هم وصل کنیم، مثلثی بوجود می‌آید که مثلث ارتفاعیه نام دارد و ویژگیهای زیر را داراست. (تذکر: مثلث ABC مثلث اصلی و مثلث HKL مثلث ارتفاعیه نام دارد)

ویژگی اوّل:

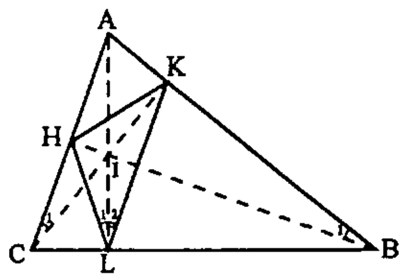
ارتفاعهای مثلث ABC، نیمسازهای زوایای مثلث ارتفاعیه‌اند.

چهارضلعی HKBC محاطی است زیرا نقاط H و K ضلع BC را با زاویه $\frac{\pi}{2}$ رؤیت می‌کنند. به‌همین ترتیب ثابت می‌شود چهارضلعیهای IKBL و HILC نیز محاطی هستند.

$$\text{محاطی } HKBC \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1$$

$$\text{محاطی } IKBL \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{L}_2 \Rightarrow \hat{L}_1 = \hat{L}_2$$

$$\text{محاطی } HILC \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{L}_1$$

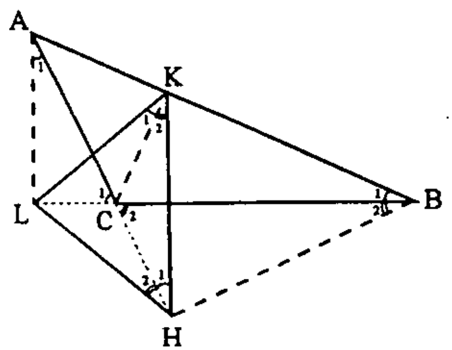


لذا AL نیمساز زاویهٔ L می‌باشد. برای دو رأس دیگر نیز به‌همین صورت اثبات می‌کنیم. این ویژگی در مثلث منفرجة الزاویه به‌صورت زیر است:

ارتفاع نظیر زاویه منفرجه و امتداد دو ضلع دیگر، نیمسازهای زوایای مثلث ارتفاعیه‌اند.

چهارضلعی AKCL محاطی است لذا:

$$\begin{cases} \hat{K}_1 = \hat{A}_1 \\ \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \\ \hat{A}_1 + \hat{C}_2 = \hat{B}_2 + \hat{C}_2 = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \hat{K}_1 = \hat{B}_2 \quad (I)$$



چهارضلعی KBHC محاطی است لذا:

$$\hat{K}_2 = \hat{B}_2 \quad (II)$$

$$(I), (II) \Rightarrow \hat{K}_1 = \hat{K}_2$$

پس ارتفاع نظیر زاویه منفرجه نیمساز زاویه مقابل خود است.

چون داریم $\hat{A}_1 = \hat{B}_2$ لذا چهارضلعی ABHL محاطی است پس:

$$\hat{B}_1 = \hat{H}_2 \quad (III)$$

چهارضلعی KBHC محاطی است پس:

$$\hat{B}_1 = \hat{H}_1 \quad (IV)$$

$$(III),(IV) \quad \Rightarrow \quad \hat{H}_1 = \hat{H}_2$$

لذا AH امتداد AC ، نیمساز زاویهٔ H می‌باشد. به همین ترتیب ثابت می‌شود امتداد ضلع BC نیز نیمساز زاویه سوم مثلث ارتفاعیه است.

ویژگی دوّم:

مرکز ارتفاعیه مثلث ABC بر مرکز دایره محاطی مثلث ارتفاعیه منطبق است.

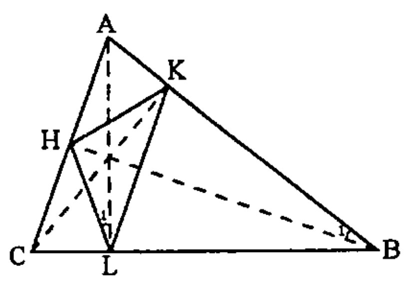
در ویژگی قبل اثبات شد که سه ارتفاع مثلث ABC نیمساز زوایای مثلث HKL هستند پس I که مرکز ارتفاعیه مثلث ABC است، مرکز دایره محاطی مثلث ارتفاعیه نیز می‌باشد. (در مثلث منفرجةالزاویه این ویژگی برقرار نیست.)

ویژگی سوّم:

اندازهٔ زوایای مثلث ارتفاعیه به‌ترتیب زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} 2\hat{L}_1 = \hat{L} \\ \hat{L}_1 = \hat{B}_1 \\ \hat{B}_1 = \dfrac{\pi}{2} - \hat{A} \end{cases} \Rightarrow \hat{L} = \pi - 2\hat{A}$$

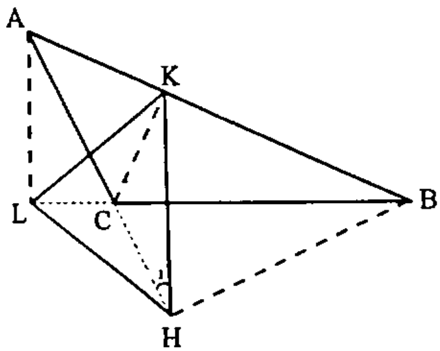
به همین ترتیب اثبات می‌شود: $\hat{K} = \pi - 2\hat{C}$ و $\hat{H} = \pi - 2\hat{B}$



حال به بررسی این ویژگی در مثلث منفرجةالزاویه می‌پردازیم.

$$\begin{cases} 2\hat{H}_1 = \hat{H} \\ \hat{H}_1 = \hat{B} \end{cases} \Rightarrow \hat{H} = 2\hat{B}$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود: $\hat{L} = 2\hat{A}$



و در مورد زاویهٔ دیگر داریم:

$$\hat{K} = \pi - \hat{L} - \hat{H}$$
$$= \pi - 2\hat{A} - 2\hat{B}$$
$$= \left(\pi - \hat{A} - \hat{B}\right) - \hat{A} - \hat{B}$$
$$\hat{K} = \hat{C} - \hat{A} - \hat{B}$$

ویژگی چهارم:

شعاع دایره محیطی مثلث ABC دو برابر شعاع دایره محیطی مثلث ارتفاعیه است.

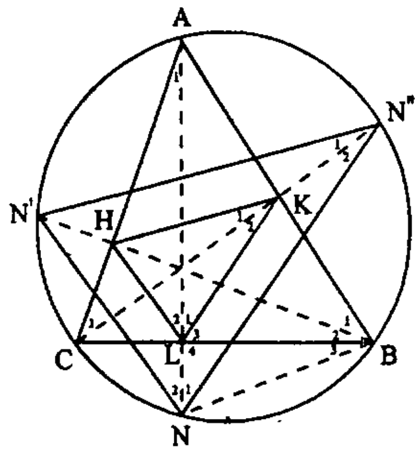
ارتفاعهای مثلث ABC را امتداد می‌دهیم تا دایره محیطی مثلث ABC را در نقاط N و N′ و N″ قطع کنند.

محاطی IKBL $\quad \Rightarrow \quad \hat{K}_2 = \hat{B}_2$

$$\hat{B}_2 = \hat{N''}_1 \quad \Rightarrow \quad \hat{K}_2 = \hat{N''}_1$$

محاطی AKIH $\quad \Rightarrow \quad \hat{K}_1 = \hat{A}_1$

$$\hat{A}_1 = \hat{N''}_2 \quad \Rightarrow \quad \hat{K}_1 = \hat{N''}_2$$



$\hat{K}_2 = \hat{N''}_1$

$\hat{K}_1 = \hat{N''}_2 \quad \Rightarrow \hat{N''}_1 = \hat{N''}_2 \ , \ \hat{K} = \hat{N''}$

$\hat{K}_1 = \hat{K}_2$

به همین ترتیب ثابت می‌کنیم $\hat{L} = \hat{N}$ و نتیجه می‌گیریم:

$\overset{\triangle}{NN'N''} \sim \overset{\triangle}{HKL}$

و از طرفی داریم:

$$\begin{cases} \hat{B}_2 = \hat{N''}_1 \\ \hat{B}_3 = \hat{N''}_2 \\ \hat{N''}_1 = \hat{N''}_2 \end{cases} \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{B}_3$$

$$\begin{cases} BL = BL \\ \hat{B}_2 = \hat{B}_3 \\ \hat{L}_1 + \hat{L}_3 = \hat{L}_4 = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{BLN} = \overset{\triangle}{BLI} \quad \Rightarrow LI = LN$$

$$LI = LN \quad \Rightarrow LI = \frac{NI}{2} \quad \Rightarrow \frac{LI}{NI} = \frac{1}{2} = m$$

(که m نسبت تشابه دو مثلث HKL و $NN'N''$ می‌باشد.)

$$m = \frac{1}{2} = \frac{R'}{R} \quad \Rightarrow \quad R' = \frac{R}{2}$$

(تذکر: R شعاع دایره محیطی مثلث ABC و R' شعاع دایره محیطی مثلث ارتفاعیه است.)

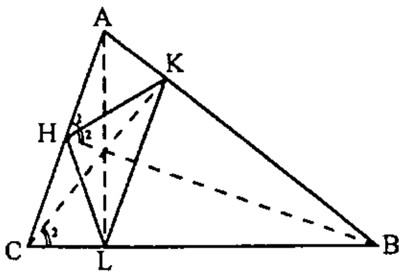
در اثبات این ویژگی نتیجه می‌گیریم قرینهٔ مرکز ارتفاعیه نسبت به اضلاع مثلث ABC بر روی دایره محیطی آن مثلث واقع است.

ویژگی پنجم:

با رسم مثلث ارتفاعیه سه مثلث به‌وجود می‌آیند که با مثلث ABC متشابه‌اند.

$$\begin{cases} \hat{H}_1 = \frac{\pi}{2} - \hat{H}_2 \\ \hat{C}_2 = \frac{\pi}{2} - \hat{B} \\ \text{محاطی } HKBC \Rightarrow \hat{H}_2 = \hat{C}_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \hat{H}_1 = \hat{B} \\ \hat{A} = \hat{A} \end{matrix} \quad \Rightarrow \overset{\triangle}{AKH} \sim \overset{\triangle}{ABC}$$



به همین ترتیب ثابت می‌شود:

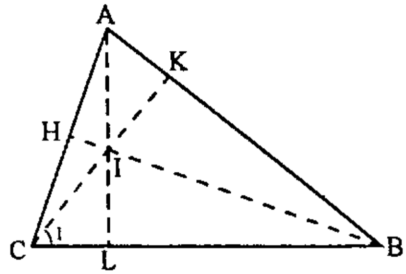
$\overset{\triangle}{HLC} \sim \overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{KBL} \sim \overset{\triangle}{ABC}$

اگر $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \frac{\pi}{3}$ باشد، آنگاه: $\overset{\triangle}{HKL} \sim \overset{\triangle}{ABC}$

ویژگی ششم:

مرکز ارتفاعیه هر مثلث اضلاع BC، AC، و AB را به‌ترتیب با زوایای $\pi - \hat{A}$ ، $\pi - \hat{B}$ و $\pi - \hat{C}$ رؤیت می‌کند.

$$\begin{cases} A\hat{I}C = \pi - L\hat{I}C \\ L\hat{I}C = \frac{\pi}{2} - \hat{C}_1 \\ \hat{C}_1 = \frac{\pi}{2} - \hat{B} \end{cases} \Rightarrow A\hat{I}C = \pi - \hat{B}$$

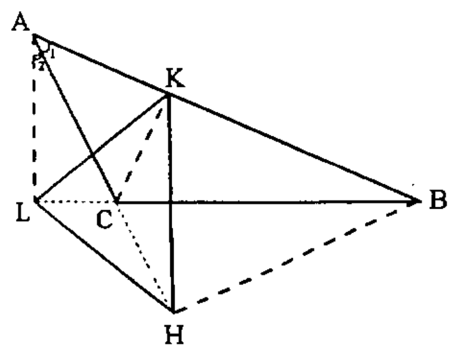


به همین ترتیب ثابت می‌کنیم:

$$A\hat{I}B = \pi - \hat{C} \quad \text{و} \quad B\hat{I}C = \pi - \hat{A}$$

این ویژگی در مثلث منفرجة الزاویه به‌صورت زیر مطرح است:

محاطی AKCL :
$$K\hat{C}L = \pi - \hat{A}_1 - \hat{A}_2 \quad (I)$$
$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \frac{\pi}{2} - \hat{B} \quad (II)$$
$$(I),(II) \Rightarrow K\hat{C}L = \frac{\pi}{2} + \hat{B}$$



به همین ترتیب ثابت می‌شود: $K\hat{C}H = \frac{\pi}{2} + \hat{A}$

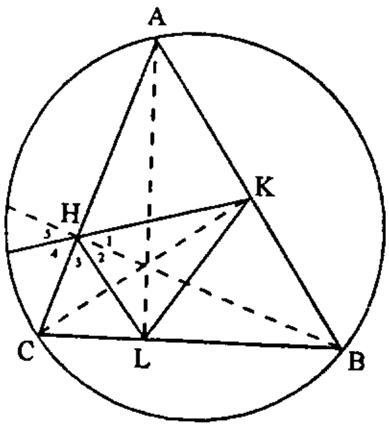
از طرفی $\hat{C}$ و $L\hat{C}H$ متقابل به رأسند پس: $L\hat{C}H = \hat{C}$

بنابراین در مثلث منفرجة‌الزاویه، رأس منفرجه سه ضلع HK ، KL و HL از مثلث ارتفاعیه را به‌ترتیب با زوایای $\frac{\pi}{2} + B$ ، $\frac{\pi}{2} + A$ و C می‌بینند.

ویژگی هفتم:

اضلاع مثلث ABC، نیمساز زوایای خارجی مثلث ارتفاعیه‌اند.

$$\begin{cases} \hat{H}_5 = \hat{H}_1 \\ \hat{H}_2 = \hat{H}_1 \\ \hat{H}_5 + \hat{H}_4 = \frac{\pi}{2} \\ \hat{H}_2 + \hat{H}_3 = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \hat{H}_3 = \hat{H}_4$$



لذا AC نیمساز زاویهٔ خارجی $\hat{H}$ از مثلث ارتفاعیه است. برای دو ضلع دیگر نیز به همین شکل ثابت می‌کنیم.

در مثلث منفرجة‌الزاویه ضلع مقابل به زاویه منفرجه و دو ارتفاع نظیر زوایای حاده، نیمساز خارجی زوایای مثلث ارتفاعیه‌اند.

ادامه دارد

توابع گزاره‌ای و سورها

غلامرضا یاسی‌پور

ادامهٔ شمارهٔ قبل

اوّلین آنها، یعنی قضیّهٔ A ، را می‌توان متوالیاً به صورت زیر تفسیر:

با معلوم بودن هر شیء فردی، اگر این (شیء) انسان باشد در این صورت میراست.

با معلوم بودن هر x ، اگر x انسان باشد در این صورت x میراست.

با معلوم بودن هر x، x انسان است $\subset x$ میراست

و بالاخره به صورت:

$$(x)\ [\ Hx \supset Mx\ ]$$

علامتی کرد.

تنظیم علامتی قضیّهٔ A مان تسویر عمومی تابع گزاره‌ای مختلط «$Hx \supset Mx$»ی است که به عنوان مثالهای جانشینش نه قضایای فردی بلکه قضایای شرطی‌ای که مقدم و تالیشان قضایای فردی‌ای هستند که موضوعات یکسانی دارند را داراست. در میان مثالهای جانشین تابع گزاره‌ای «$Hx \supset Mx$» شرطیهای «$Ha \supset Ma$» ، «$Hb \supset Mb$» ، «$Hc \supset Mc$» و غیره قرار دارند. در علامتی کردن قضیهٔ A از کروشه‌ها به عنوان علامات جداسازی، برای دلالت کردن به این‌که سور عمومی «(x)» در مورد تمام تابع گزاره‌ای مختلط « $Hx \supset Mx$ » به‌کار می‌رود یا تمام این تابع را در قلمرو خود دارد، استفاده می‌شود. علامت قلمرو یک سور بسیار مهم است، چه تفاوت در قلمرو متناظر با تفاوت در معنی است. عبارت « $(x)\ [Hx \supset Mx]$ » قضیه‌ای است که ادعا می‌کند تمام مثالهای جانشین تابع گزاره‌ای « $Hx \supset Mx$ » راست‌اند. در صورتی که عبارت « $(x)\ Hx \supset Mx$ » تابع گزاره‌ای‌ای است که در مثالهای جانشینش «$(x)\ Hx \supset Ma$» ، «$(x)\ Hx \supset Mb$» ، «$(x)\ Hx \supset Mc$» و غیره می‌باشد[1].

قضیّه E یعنی «هیچ انسانی میرا نیست» را می‌توان به همین ترتیب و متوالیاً به صورت زیر تفسیر:

با معلوم بودن هر شیء فردی، اگر آن (شیء) انسان است در این صورت میرا نیست.

با معلوم بودن هر x ،اگر x انسان‌است در این صورت x میرا نیست.

با معلوم بودن هر x، x انسان است $\subset x$ میرا نیست.

و سپس به صورت:

$$(x)\ [Hx \supset \sim Mx]$$

علامتی کرد. به همین ترتیب، قضیّهٔ I یعنی «بعضی انسانها میرا هستند» را می‌توان به صورت زیر تفسیر:

حداقل یک شیء وجود دارد که انسان و میراست.

حداقل یک شیء وجود دارد به‌طوری که آن (شیء) انسان و میراست.

حداقل یک x وجود دارد به‌طوری که آن x انسان و میراست.

حداقل یک x وجود دارد به طوری که x انسان است $\wedge\ x$ میراست.

و به‌طور کامل به صورت:

$$(\exists\ x)\ [\ Hx \wedge Mx\ ]$$

علامتی کرد. بالاخره، قضیّهٔ O یعنی «بعضی انسانها میرا نیستند» به

صورت:

حداقل یک شیء وجود دارد که انسان است اما میرا نیست.

حداقل یک شیء وجود دارد به طوری که آن (شیء) انسان است اما میرا نیست.

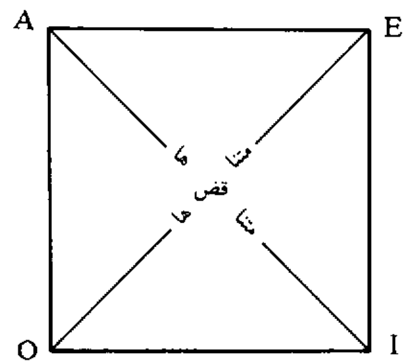
حداقل یک x وجود دارد به‌طوری که آن x انسان است و میرا نیست.

در می‌آید و سپس به صورت تسویر وجودی تابع مختلط:

$(\exists x)[\, Ex \wedge \sim Mx \,]$

علامتی می‌شود. چون حروف یونانی فی و پسی را برای نمایش هر علائم صفتی‌ای به‌کار بریم، چهار قضیهٔ موضوع محمولی عمومی منطق قدیم را می‌توان با جدول مربع شکل زیر نمایش داد.

$(x)(\varphi x \supset \psi x)$ $\qquad$ $(x)(\varphi x \supset \psi x)$



$(\exists x)(\varphi x \wedge \psi x)$ $\qquad$ $(\exists x)(\varphi x \wedge \sim \psi x)$

از این چهار، A و O متناقض، و E و I نیز متناقضند. اما هیچ یک از روابط دیگری که در رابطه با جدول مربع شکل واقع در شمارهٔ قبل مورد بحث قرار گرفت، حتی زمانی‌که فرض کنیم حداقل یک فرد در عالم موجود است، در مورد قضایای A ، E ، I، و O قدیم برقرار نیست. زمانی که « φx » تابع گزاره‌ای که مثالهای جانشین راست ندارد باشد، در این صورت بی‌توجه به‌این‌که چه صفتی توسط «φ» علامتی شده، توابع گزاره‌ای « $\varphi x \supset \psi x$ » و « $\varphi x \supset \sim \psi x$ » تنها مثالهای جانشین راست دارند، زیرا تمام مثالهای جانشینشان گزاره‌های شرطی با مقدمهای دروغند. در چنین حالاتی، قضایای A و E که تسویرات عمومی این توابع گزاره‌ای مختلطند، راستند، بنابراین، قضایای A و E متضاد نیستند. بار دیگر، وقتی «φx» تابع گزاره‌ای که مثالهای جانشین راست ندارد باشد، در این صورت بی‌توجه به این‌که «φx» چیست، توابع گزاره‌ای « $\varphi x \wedge \psi x$ » و « $\psi x \wedge \sim \psi x$ » تنها مثالهای جانشین دروغ دارند، زیرا مثالهای جانشینشان گزاره‌های عطفی‌ای هستند که منعطف اوّلشان دروغ است. در چنین حالاتی قضایای I و O که تسویرات وجودی این توابع گزاره‌ای مختلطند دروغند، و بنابراین قضایای I و O تحت متضاد نیستند. در تمام چنین حالاتی، از آن‌جا که قضایای A و E راست و قضایای I و O دروغند، راستی یک کلیه مستلزم راستی جزئیهٔ متناظرش نیست، و رابطهٔ استلزامی‌ای بین آنها برقرار نمی‌باشد.

اگر این فرض را داشته باشیم که حداقل یک فرد موجود است، در این صورت « $(x)[\varphi x \supset \psi x]$ » مستلزم « $(\exists x)[\varphi x \supset \psi x]$ » است. اما گزارهٔ اخیر قضیهٔ I نیست. قضیهٔ I به‌شکل «بعضی φها ψ هستند» به صورت « $(\exists x)[\varphi x \wedge \psi x]$ »، که ادعا می‌کند حداقل یک شیء موجود است که هر دو صفت φ و ψ را داراست، علامتی می‌شود. اما قضیهٔ « $(\exists x)[\varphi x \supset \psi x]$ » تنها ادعا می‌کند که حداقل یک شیء که یا صفت ψ را دارد یا صفت φ را ندارد موجود است که ادعایی بسیار متفاوت و ضعیفتر از اوّلی است.

چهار صورت موضوع محمولی سنتی A، E ، I و O تنها صورتهای قضایای عمومی نیستند، و قضایای عمومی دیگری که شامل تسویر توابع گزاره‌ای پیچیده‌تری هستند نیز وجود دارند. به این ترتیب قضیهٔ عمومی «تمام اعضا یا ولی یا معلم هستند» که به همان معنی «تمام اعضا ولی هستند یا تمام اعضا معلمند» نیست، به صورت « $(x)[Mx \supset (Px \vee Tx)]$ » علامتی می‌شود. و قضیهٔ عمومی «بعضی سناتورها یا خائن‌اند یا فریب خورده» به صورت «$(\exists x)[Sx \wedge (Dx \vee Mx)]$» علامتی می‌شود. باید توجه کرد که قضیه‌ای چون «سیب و موز مغذی است» را می‌توان یا به‌صورت ترکیب عطفی دو قضیهٔ A، «$\{(x)\,[Ax \supset Nx]\} \wedge \{(x)\,[Bx \supset Nx]\}$»، یا به‌صورت یک قضیهٔ عمومی نامرکب واحد

«$(x)[(Ax \vee Bx) \supset Nx]$» علامتی کرد، در حالی که نباید آن‌را به صورت:
«$(x)[(Ax \wedge Bx) \supset Nx]$» علامتی کرد، زیرا گفتن این‌که «سیب و موزمغذی است» مساوی این است که بگوییم چیزی مغذی است که یا سیب یا موز باشد، نه این‌که مساوی این است که بگوییم چیز (هر چه که باشد) مغذی است که هم سیب هم موز باشد. باید تأکید شود که هیچ قاعدهٔ مکانیکی‌ای که گزاره‌ها را از زبان طبیعی به علائم منطقیمان ترجمه کند موجود نیست، و در هر حالت شخص باید معنی جملهٔ زبان طبیعی را بداند، و بعد این معنی را برحسب توابع گزاره‌ای و سورها بیان کند.

یادداشتها

۱ ـ در این مورد همان قرارداد علامتی را که برای نقیض به‌کار می‌بردیم (هم در مورد سور عمومی هم در مورد سور وجودی) داریم، یعنی سور در مورد کوچکترین ترکیب کننده‌ای که جداسازی اجازه می‌دهد به‌کار می‌رود یا آن‌را در قلمرو دارد.

مرجع:

Symbolic Logic
Irving M. Copi

پاسخ معماهای فیثاغورس

۱ـ پاسخهای من به مسأله‌های پیشنهادی فیثاغورس به شرح زیر است:

الف: به نظر من سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه نخست او ۹۱، ۸۴ و ۳۵ واحد بود.

ب: سه ضلع مثلث مختلف‌الاضلاع پیشنهادی پسر بزرگ احتمالاً ۹۵، ۷۹ و ۳۶ واحد بود.

ج: سه ضلع مثلث مختلف‌الاضلاع پیشنهادی پسر دوّم تقریباً به‌طور حتم ۱۰۰، ۷۱ و ۳۹ واحد بود.

۲ـ الف: سه ضلع مثلثِ «شوخی‌آمیز» پیشنهادیِ پسر کوچک ۴۹، ۵۶ و ۱۰۵ واحد بود.

ب: سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه کوچکی که او از سَرِ طنز فکر کرده بود ۵، ۱۲ و ۱۳ واحد بود و همچنین ضلعهای مثلث مختلف‌الاضلاع او ۷، ۸ و ۱۵ واحد طول داشت!

۳ـ الف: نخستین راه‌حل جدی پیشنهادی پسر کوچک، مثلثی با ضلعهای ۱۰۱، ۶۹ و ۴۰ واحد بود. دومین راه‌حل او مثلثی بود به ضلعهای ۱۰۴، ۶۱ و ۴۵ واحد. احتمال می‌رود که راه حل پسر بزرگ برای دوّمین معمای فیثاغورس عبارت بود از:

ـ مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع ۶۵، ۵۶ و ۳۳ واحد.

ـ مثلث مختلف‌الاضلاع به اضلاع ۶۸، ۵۱ و ۳۵ واحد.

ب: و اما راه حل پسر دوّم:

ـ احتمالاً مثلث قائم‌الزاویه او دارای ضلعهای ۵۳، ۴۵ و ۲۸ و مثلث مختلف‌الاضلاع وی به ضلعهای ۵۶، ۳۹ و ۳۱ واحد بود.

ـ راه‌حل نادرستِ پسرِ کوچک ممکن است چنین بوده باشد:

مثلث قائم‌الزاویه با ضلعهای ۳۵، ۲۸ و ۲۱ واحد.

مثلث مختلف‌الاضلاع با ضلعهای ۳۶، ۲۵ و ۳۵ واحد.

دومین راه‌حل (که او آن را از نظر دور داشت)، مثلثی است مختلف‌الاضلاع با ضلعهای ۳۳، ۳۱ و ۲۰ واحد.

۴ـ من مطمئن نیستم که فیثاغورس با طرح مسألهٔ آخر قصد آن داشت که سربه سرِ فرزندان خویش بگذارد، بلکه به شخصه آن رایک مسألهٔ تفکربرانگیز می‌دانم. بهترین راه‌حلی که می‌توانم برای آن ارائه دهم، معادله‌ای است که در پی می‌آید:

$$(۲۷x^۲ + ۳۶۶x + ۱۱۲۰)^۲ + (۳۶x^۲ + ۶۷۸x + ۳۱۰۲)^۲ + (۴۵x^۲ + ۷۶۲x + ۳۲۹۸)^۲ = (۲۷x^۲ + ۳۵۸x + ۱۰۷۰)^۲ + (۳۶x^۲ + ۶۱۴x + ۲۷۰۲)^۲ + (۴۵x^۲ + ۸۱۸x + ۳۶۴۸)^۲$$

که در آن $x \geq ۰$ است.

بدین ترتیب ملاحظه می‌شود که فیثاغورس، به یک تعبیر، نیّت سَربه‌سَر گذاشتنِ آنها را داشت. امّا هیچ لازم نبود که من یک چنین راه‌حل پیچیده‌ای برای مسألهٔ آخر فیثاغورس ارائه دهم. در واقع کوچکترین (؟) راه حل که عملاً در محدودهٔ اشتباه و لغزش پسر کوچک قرار می‌گیرد، از این قرار است:

$$۳۵^۲ + ۲۸^۲ + ۲۱^۲ = ۲۰^۲ + ۲۳^۲ + ۳۹^۲$$

گزارشی از بیست و پنجمین کنفرانس ریاضی کشور

دانشگاه صنعتی شریف ـ تهران
۸ تا ۱۱ فروردین ۱۳۷۳

از: غلامرضا یاسی پور

بیست و پنجمین کنفرانس ریاضی کشور، روز دوشنبه ۸ فروردین ۱۳۷۳، ساعت ۹ صبح، در دانشگاه صنعتی شریف با سخنرانیهای مسؤولان مربوطه افتتاح شد.

هیأت امنای سازمان و تشکیلات کنفرانس عبارتند از:

محمد علی نجفی (رئیس)	وزیر آموزش و پرورش
محمد جواد لاریجانی	نمایندهٔ مجلس شورای اسلامی و رئیس مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات
علی اکبر صالحی	معاون آموزشی وزارت فرهنگ و آموزش عالی
سید محمد اعتمادی	رئیس دانشگاه صنعتی شریف
عباس مظفر	معاون مالی و اداری دانشگاه صنعتی شریف
علی اصغر اسکندربیاتی	رئیس دفتر برنامه و بودجه دانشگاه صنعتی شریف
احمد حقانی	دبیر انجمن ریاضی ایران
سیاوش شهشهانی	استاد دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف وقائم مقام مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات
محمد مهدوی هزاوه‌ای	رئیس دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف
یحیی تابش (دبیر)	معاون دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف

و کمیتهٔ علمی و برگزاری آن عبارت از:

یحیی تابش (دبیر)، سید عباداله محمودیان، محمود حصارکی، نظام‌الدین مهدوی امیری، بیژن زنگنه، محمد مهدوی هزاوه‌ای، داریوش شادمان، بهمن مهری، سیاوش شهشهانی، هدایت‌ا... یاسائی.

نشریات کنفرانس: علاوه بر مجموعهٔ خلاصهٔ مقالات، یادنامهٔ کنفرانس، و جزوهٔ تحلیل از پیشکسوتان که توسط کمیتهٔ برگزاری کنفرانس تهیّه شده است، کتابهای زیر نیز به مناسبت برگزاری کنفرانس و همزمان با آن انتشار یافته است:

۱. دفاعیّهٔ یک ریاضی‌دان اثر: گ.ه. هاردی، ترجمهٔ سیامک کاظمی.
ناشر: سازمان آموزش و انتشارات انقلاب اسلامی، ۱۳۷۳، تهران.

۲. گفت و شنودهایی در ریاضیات اثر: آلفرد رینی، ترجمهٔ سعید قهرمانی
ناشر: انتشارات خوارزمی (با همکاری دانشگاه صنعتی شریف)، ۱۳۷۳، تهران

۳. آزمون ریاضی فرهنگستان علوم جمهوری اسلامی ایران (مسائل، جوابها)، ناشر: انتشارات امیرکبیر، ۱۳۷۳، (تهران)

از دیگر برنامه‌های جنبی کنفرانس می‌توان از موارد زیر یاد کرد: مسابقهٔ ریاضی دانشجویی، مجمع عمومی انجمن ریاضی ایران، کارگاه آشنایی با نرم‌افزار مَتِمَتیکا، کارگاه آشنایی با TEX، نمایش فیلمهای ریاضی، برنامه‌های علمی کنفرانس شامل سخنرانیهای عمومی، کارگاهها و سخنرانیهای تخصصی به مسؤولیت اساتید زیر:

دکتر بیژن ظهوری زنگنه، دکتر سید عباداله محمودیان، دکتر محمد مهدوی هزاوه‌ای، نظام‌الدین مهدوی امیری، سیاوش شهشهانی، زهرا گویا، میزگردی به زبان انگلیسی تحت عنوان **«دورنمای ۲۵ سال آیندهٔ ریاضیات در جهان سوم»** با شرکت:

استیو اسمیل، مهدی رجبعلی‌پور، سزار کاماچو، عطارد کاویان، امیدعلی کرمزاد، ام.اس. نراسیمان و سیاوش شهشهانی (هماهنگ کننده).

و نمایشگاه کتاب با شرکت ناشران داخلی و ناشران بین‌المللی زیر:

اشپیرنگر فرلاگ، الزویر وکلوور، بیرک هویزر، جان وایلی، چاپمن اندمول، ورلد ساینتفیک.

در جزوهٔ خلاصهٔ مقالات کنفرانس خلاصهٔ مقالات ارائه شده به کنفرانس آورده شده است. خلاصهٔ بعضی از مقاله‌های فارسی ارائه شده به ترتیب زیر است:

معرفی کتاب لطائف‌الحساب قطب‌الدین لاهیجی

محمد باقری

بنیاد دایرةالمعارف اسلامی

دراین مقاله، کتابی که چهار قرن پیش یعنی در عهد صفویه به زبان فارسی و عربی (آمیخته) در لاهیجان نوشته شده، معرفی می‌شود و محتوای آن مورد بحث قرار می‌گیرد. قطب‌الدین لاهیجی فیلسوف و فقیه و ریاضی‌دان بود. تفسیر قرآن کریم وی با عنوان «تفسیر شریف لاهیجی» یکبار در هندوستان و یکبار در ایران به چاپ رسیده است. کتاب معروف او در تاریخ فلسفه «محبوب القلوب» نام دارد. قطب‌الدین لاهیجی کتاب لطائف‌الحساب خود را که در واقع نوعی کتاب سرگرمیهای ریاضی است در سال ۱۰۲۰ هجری هنگامی که از شهر اصفهان پایتخت حکومت صفویه به لاهیجان برگشته بود نگاشته است. نسخهٔ خطی منحصر به فرد این اثر در ۱۳۲ صفحه، در کتابخانهٔ آستان قدس رضوی (مشهد) نگهداری می‌شود. لطائف‌الحساب شامل دیباچه، مقدمه، دو مقاله و یک خاتمه است. مقالهٔ اول آن در دو باب است. در باب اوّل از خبایا (جمع خبی) سخن می‌رود یعنی در بیان آن‌که چیزی در دست پنهان کرده باشند و دانستن این‌که در دست راست است یا دست چپ. باب دوم در مضمرات است یعنی فهمیدن عددی که کسی در ذهن اختیار کرده است. مقالهٔ دوم در حل انواع مسائل حساب و خاتمه دربارهٔ نمایش اعداد یک تا ده‌هزار با انگشتان و حل انواع معماهاست.

بررسی وضعیت علمی فارغ‌التحصیلان دوره‌های کارشناسی ریاضی دانشگاه‌های مختلف

حسین پور کاظمی

دانشکدهٔ علوم ریاضی

دانشگاه شهید بهشتی

در ۲۱ دانشگاه دولتی کشور و همچنین در ۳۰ مرکز دانشگاه پیام‌نور رشته ریاضی در گرایشهای مختلف محض، کاربردی و دبیری دایراست. اکثریت فارغ‌التحصیلان رشته ریاضی این دانشگاه‌ها در آزمون سراسری کارشناسی ارشد شرکت می‌کنند. پنج سال است که این آزمون برگزار می‌شود، جدا از ایراداتی که ممکن است به این آزمون وارد باشد، این آزمون ملاک جالبی برای مقایسهٔ فارغ‌التحصیلان دانشگاه‌های مختلف به‌دست می‌دهد. با استفاده ازنتایج آزمون سراسری، وضعیت فارغ‌التحصیلان دانشگاه‌های مختلف در مجموع و در هر درس بررسی می‌شود. همچنین با توجه به معدل دورهٔ کارشناسی هر دانشگاه، ضریب همبستگی بین سطح معدل در دانشگاه‌های مختلف با نمرهٔ آزمون مشخص می‌شود. وابستگی عوامل موفقیت فارغ‌التحصیلان دانشگاه‌ها با متغیرهای ملاک (از جمله اساتید، وضعیت علمی ورودیها...) تعیین می‌گردد.

مسابقات ریاضی دانش‌آموزی در ایران

علی رجالی

دانشکدهٔ ریاضی

دانشگاه صنعتی اصفهان

در سال ۱۳۶۲، اوّلین مسابقهٔ ریاضی اصفهان توسط دانشگاه صنعتی اصفهان برگزار گردید و از فروردین ماه ۱۳۶۳ همزمان با پانزدهمین کنفرانس ریاضی کشور اولین المپیاد ریاضی ایران توسط

انجمن ریاضی ایران و با همکاری وزارت آموزش و پرورش برگزار شد.

از سال ۱۳۶۶ شورایی در دفتر تحقیقات وزارت آموزش‌وپرورش به این منظور تشکیل و همزمان تیمهای ایرانی به المپیاد بین‌المللی ریاضی راه یافته و موفقیتهای چشمگیری که حاصل تلاش دانش‌آموزان علاقه‌مند، دبیران محترم ریاضی، مسؤولان وزارت آموزش و پرورش و اعضای هیأت علمی ریاضی دانشگاه‌ها و نیز دانشجویان المپیادی بود به دست آمد.

اثرات مثبت برگزاری این مسابقات در آموزش ریاضی ایران بسیار واضح است.

در این سخنرانی نقاط ضعف، مسائل و مشکلات اجرایی مسابقات و تأثیرات منفی و راه‌های جلوگیری از اثرات نامفید این پدیدهٔ مهم فرهنگی مطرح و پیشنهاداتی جهت نظم‌بخشی بیشتر به این مسابقات و بررسی مسائل و نتایج آماری آن در جهت اصلاح نظام آموزشی ارائه خواهد شد.

برای آموزش ریاضی بنویسیم

هوشنگ شکرانیان
بخش ریاضی
دانشگاه رازی کرمانشاه

هدف ما طرح دشواریهای پرداختن به نگارش مطالب درسی ریاضی در دورهٔ کارشناسی ریاضی و تا حدودی دبیرستان و چگونگی فایق آمدن بر این دشواریها است. هم مشکلات و هم راه حل را در رابطه با «برنامهٔ‌ریزی آموزشی می‌دانیم».

چارهٔ کار را در «جزوه‌نویسی» دانسته‌ایم. جزوه را وسیله‌ای جهت ارتباط بین شاگرد، کتاب، مدرس و برنامه درسی می‌دانیم. کار را با نوشتن جزوه‌های کم حجم برای برطرف کردن پاره‌ای از دشواریهای کتابهای درسی و شرح وبسط برخی از مطالب آن آغاز می‌کنیم، البته کار را در سطح وسیعی مطرح می‌کنیم. با ادامهٔ کار جزوه‌های پرحجمتری به دست می‌آوریم و در ضمن به تبلیغ «ویرایش» می‌پردازیم. به‌تدریج بخشی از معلمین با «قلم» آشنا شده و در مورد برطرف کردن دشواریهای آموزشی «صاحب‌نظر» خواهند شد.

سمینارهایی در مورد دروس مهم دورهٔ کارشناسی برگزار می‌کنیم. در این جامی‌توان به نارساییهای برنامهٔ آموزشی و دشواریهای نگارش به طور جدی پرداخت و راه را برای مطالعهٔ تاریخی و فلسفی ریاضی هموار ساخت.

مراحل کار را تا آن‌جا شرح می‌دهیم که قادر به نوشتن کتابهایی باشیم که در سطح بین‌المللی قابل عرضه باشند. در آن زمان انبوهی از نویسندگان کتابهای درسی و افراد صاحب‌نظر در امور برنامه‌ریزی خواهیم داشت.

در مورد ضرورت پرداختن به ترجمهٔ متون تاریخی و فلسفی و کتابهای تخصصی و دشواریهای آن صحبت می‌کنیم و دراین مورد نیز راه‌حلی که مبتنی بر شرکت فعّال جمعی از مدرسین و مترجمین باشد ارائه می‌دهیم.

نشان می‌دهیم که برنامهٔ ما به نشریات ریاضی ایران تحرک می‌دهد و آموزش را پرمحتوی و مناسب حال خودمان می‌کند. دربارهٔ آیندهٔ کتاب بحث می‌کنیم. متذکر خواهیم شد که سیر تحولات به مراتب شدیدتر از آن است که در باور ما می‌گنجد. نشان خواهیم داد که در آینده کتابها به صورت بسیار متنوعی منتشر خواهد شد و نقش کامپیوتر را در این تحول ذکر می‌کنیم. سرانجام از دشواریهای این طرح صحبت می‌کنیم.

به‌مسائل‌ریاضیات‌عمومی‌دقیقترنگاه‌می‌کنیم

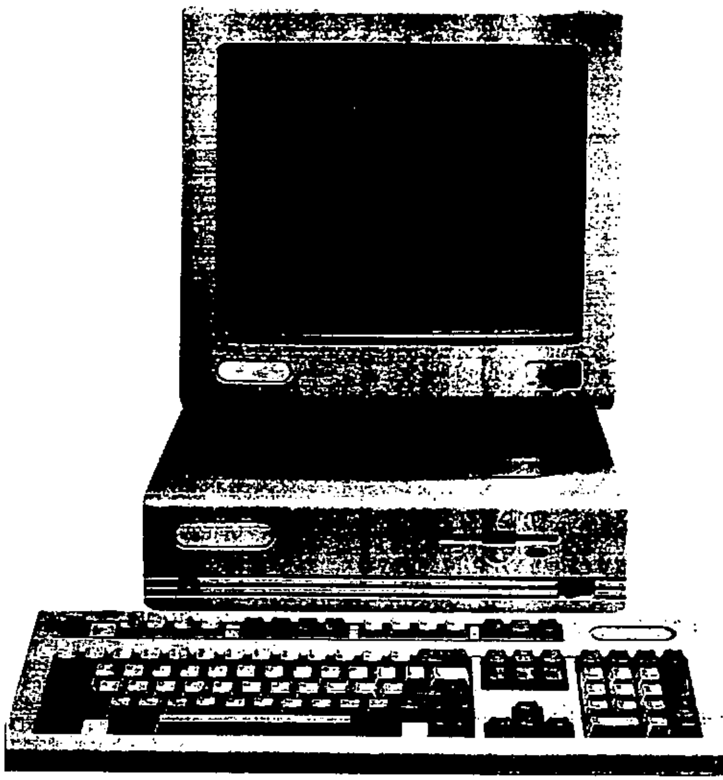
دکتربهمن طباطبائی
بخش ریاضی
دانشگاه شیراز

در کتاب جبروآنالیز سال چهارم دبیرستان و همچنین در دروس ریاضی عمومی سال اوّل دانشجویان رشته‌های ریاضی و مهندسی بعضاً مسائلی یافت می‌شود که برای حل آنها اگر از دیدگاهی دقیق نگاه نشود مشکل آفرین است و چه بسا حل آنها هیچ‌گونه ایده‌ای به محصل نمی‌دهد. دراین مقاله سعی بر آن است که تا آن‌جاکه ممکن است به حل دقیق این‌گونه مسائل پرداخته شود.

لازم به تذکر است که دراین کنفرانس از چند نفر از اساتید ریاضیات در ایران توسط مقامات تجلیل به عمل آمد، که شرح مفصل آن به همراه زندگینامه مختصری از ایشان در شمارهٔ آینده به چاپ خواهد رسید.

والسلام

استفاده از کامپیوتر در حل معادلات غیرخطی



● مهندس حسین ابراهیم زادهٔ قُلزم

می‌خواهیم مبحث آشنا و جالبی را مورد بحث و بررسی قرار دهیم و آن، استفاده از کامپیوتر در حل معادلات غیرخطی[۱] است.

قبل از وارد شدن به بحث، نخست تعریفی از صفر[۲] یا ریشه[۳] یک معادله ارائه می‌دهیم.

تعریف: فرض کنید $y = f(x)$ یک تابع پیوسته[۴] باشد. هر عددی مانند x_0 که به ازای آن $f(x_0) = 0$ باشد یک ریشه یا یک صفر معادلهٔ $f(x) = 0$ نامیده می‌شود.

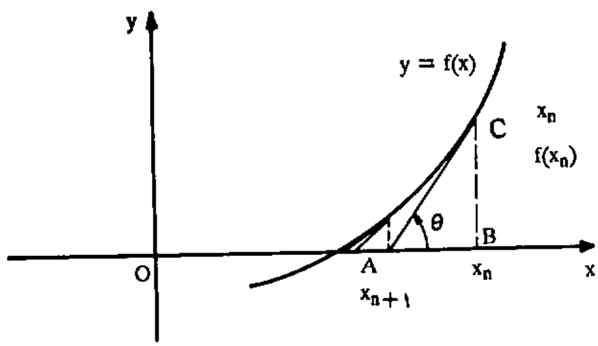
در بحثهایی که در زیر می‌آید فرض می‌کنیم تابع غیرخطی $y = f(x)$ در فاصلهٔ $[a,b]$ پیوسته بوده و $f(a) . f(b) < 0$ است. به‌عبارت دیگر از فرض پیوسته بودن $y = f(x)$ و شرط $f(a) . f(b) < 0$، نتیجه می‌گیریم که $f(x)$ در فاصلهٔ $[a,b]$ حداقل دارای یک ریشه است.

ریشه‌های هر معادلهٔ[۵] غیرخطی مانند $f(x) = 0$ را می‌توان به‌طور تقریبی از طریق ترسیم، روش تفکیک معادلهٔ $f(x) = 0$ به دو معادله و ترسیم آنها، یا با تشکیل جدولی از مقادیر متغیر[۶] و تابع به‌دست آورد که هیچ‌یک از آنها مورد نظر ما نیست. ما می‌خواهیم ریشهٔ تقریبی معادلهٔ غیرخطی $f(x) = 0$ را با استفاده از روشی موسوم به روش نیوتن یا به بیان دقیق‌تر با روش نیوتن - رفسون[۷] به کمک یک برنامهٔ کامپیوتری[۸] به‌دست آوریم. اینک شرح این روش:

در این روش، ابتدا کار را با یک تخمین[۹] تقریبی[۱۰] از ریشهٔ معادله که در فاصلهٔ[۱۱] $[a,b]$ قرار دارد شروع می‌کنیم و تخمین اولیه[۱۲] را x_0 می‌نامیم. پس از رسم نمودار $y = f(x)$، از نقطهٔ $(x_0 , f(x_0))$ خطی مماس[۱۳] بر منحنی[۱۴] رسم می‌کنیم. نقطه تلاقی[۱۵] خط مماس بر منحنی و محور xها، تخمین بعدی برای ریشهٔ معادله است. همینطور از نقطهٔ $(x_1 , f(x_1))$ واقع بر منحنی، خط مماس دیگری بر منحنی رسم می‌کنیم. نقطه تلاقی خط مماس جدید و محور xها، تخمین دیگری برای ریشهٔ معادله است والی آخر. اگر نقطهٔ $(x_n , f(x_n))$ آخرین نقطهٔ روی منحنی باشد که از آن نقطه خط مماس بر منحنی رسم شده است و x_{n+1} آخرین تخمین برای ریشهٔ معادله باشد مقدار

خطا[16] از رابطهٔ $|x_{n+1} - x_n|$ به‌دست می‌آید. در این روش، در هر مرحله از تخمین ریشه، فاصلهٔ دو نقطهٔ متوالی[17] روی محور xها یا مقدار خطا را به‌دست می‌آوریم، اگر مقدار خطا از یک تقریب معینی مثلاً از 10^{-6} کمتر باشد آنگاه آخرین تخمین، x_{n+1}، ریشهٔ تقریبی معادله است.

طریقهٔ به‌دست آوردن فرمول نیوتن ـ رفسون:



باتوجه به مثلث قائم‌الزاویهٔ[18] ABC و تعریف مشتق[19] داریم:

$$\triangle ABC: \tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}} = f'(x_n)$$

$$\Rightarrow f'(x_n) = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{فرمول نیوتن ـ رَفسون}$$

بنابراین با فرض اینکه $x_{n+1} = g(x)$ و $x_n = x$ باشد داریم:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

در این روش همواره فرض می‌کنیم $f'(x) \neq 0$ است.

پس از این مقدمه، اکنون آماده‌ایم برنامه[20]‌ای کامپیوتری برای به‌دست آوردن ریشهٔ تقریبی هر معادلهٔ غیرخطی بنویسیم. امیدوارم با ارائه چند مثالِ کامپیوتری به همراه خروجی برنامه‌ها، شما را در درک بهتر روش نیوتن ـ رفسون یاری کرده باشم.

مثال: برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا با استفاده از روش نیوتن ـ رفسون ریشهٔ معادلهٔ $F(X) = XSINX + COSX = 0$ را که بین $[0, \pi]$ قرار دارد با تقریب 10^{-6} به‌دست آورد. X برحسب رادیان است.

برنامه:

```
10   REM NEWTON - RAPHSON METHOD FOR SOLVING NONLINEAR EQUATIONS
20   INPUT"ENTER A NUMBER BETWEEN 2 & 4 PLEASE : ";X
30   LET Y=X-(X*SIN(X)+COS(X))/(X*COS(X))
40   WHILE ABS(Y-X) > .000001
50      LET  X      = Y
60      LET FX      = X*SIN(X)+COS(X)
70      LET FPRIME= X*COS(X)
80      LET Y       = X-FX/FPRIME
90   WEND
100  PRINT"APPROXIMATE ROOT OF XSINX+COSX=0 EQUALS X= ";Y
110  END
```

خروجی[21] برنامهٔ بالا با دو اجرای[22] مختلف به‌صورت زیر است:

اجرای اول:

```
ENTER A NUMBER BETWEEN 2 & 4 PLEASE : ? 2.3
APPROXIMATE ROOT OF XSINX+COSX=0 EQUALS X=  2.798386
```

اجرای دوم:

```
ENTER A NUMBER BETWEEN 2 & 4 PLEASE : ? 3.5
APPROXIMATE ROOT OF XSINX+COSX=0 EQUALS X=  2.798386
```

همانگونه که ملاحظه می‌کنید ریشهٔ تقریبی معادلهٔ داده شده، $X = 2.798386$ است.

مثال: برنامه‌ای به‌زبان BASIC بنویسید تا با استفاده از روش نیوتن ـ رفسون ریشهٔ معادله $F(X) = X^3 + 3X + ۱ = ۰$ راکه بین $[-1,۰]$ قرار دارد با تقریب 10^{-4} به‌دست آورد.

برنامه:

```
10 REM  SOLVING X^3+3*X+1=0 BY NEWTON - RAPHSON METHOD
20 INPUT"ENTER A NUMBER  : ";X
30 LET Y=X-(X^3+3*X+1)/(3*X^2+3)
40  WHILE ABS(Y-X) > .000001
50      LET  X     = Y
60      LET FX     = X^3+3*X+1
70      LET FPRIME= 3*X^2+3
80      LET Y      = X-FX/FPRIME
90  WEND
100 PRINT"X= ";Y;" IS A ROOT OF X^3+3*X+1=0 "
110 END
```

خروجی برنامهٔ بالا با دو اجرای مختلف به‌صورت زیر است:

اجرای اول:

```
ENTER A NUMBER  : ? -1
X= -.3221854  IS A ROOT OF X^3+3*X+1=0
```

اجرای دوم:

```
ENTER A NUMBER  : ? 20
X= -.3221854  IS A ROOT OF X^3+3*X+1=0
```

همانگونه که ملاحظه می‌کنید ریشهٔ تقریبی معادلهٔ داده شده، $X = -0.3221854$ است.

تمرین: اولاً نشان دهید[۲۳] معادلهٔ $(2X + ۱)^2 = 4COS\pi X$ دارای یک ریشه در فاصلهٔ $[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ است، ثانیاً برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا با استفاده از روش نیوتن ـ رفسون ریشهٔ تقریبی معادلهٔ $(2X + ۱)^2 = 4COS\pi X$ را تا چهار رقم اعشار[۲۴] به‌دست آورد.

جواب: $X = -0.2872$

مثال: الف) با استفاده از فرمول نیوتن ـ رفسون، دستور محاسبهٔ ریشهٔ nام[۲۵] عدد ثابتِ مثبت و حقیقی[۲۶] C را به‌دست آورید. ب) برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا با خواندن[۲۷] دو عدد N و C، ریشهٔ Nام عدد C را با تقریب 10^{-6} به‌دست آورد. برنامه را به‌صورت سؤال و جوابی[۲۸] بنویسید تا هربار سؤال کند که آیا دادهٔ دیگری دارید یا خیر؟

حل: الف) عدد حقیقی مثبت و ثابت C و عدد صحیح N داده شده است. ریشهٔ N ام عدد C جواب معادلهٔ زیر است: $X^N = C$

قرار می‌دهیم: $F(X) = X^n - C$

باتوجه به‌روش نیوتن ـ رفسون و بافرض اینکه $X_{n+۱}=Y$ و $X_n=X$ باشد داریم:

$$Y = X - \frac{X^N - C}{NX^{N-۱}}$$

$$= \left[(N-۱).X + \frac{C}{X^{N-۱}} \right] /N$$

مثلاً به ازای $N = 3$، برای ریشهٔ سوم عدد C، فرمول زیر را داریم:

$$Y = \left(2X + \frac{C}{X^2}\right) / 3$$

ب ـ **برنامه:**

```
10   REM THE Nth ROOT OF A CONSTANT C
20   INPUT"DO YOU WANT THE PROGRAM EXECUTE : ";ANS$
30   WHILE ANS$="Y" OR ANS$="y"
40       INPUT"ENTER INTEGER & REAL NUMBERS ";C,N
50       INPUT"ENTER YOUR FIRST GUESS ";X
60       Y= ((N-1)*X+C / X^(N-1)) / N
70       WHILE  ABS(Y-X) > .000001
80          LET  X = Y
90          LET  Y = ((N-1)*X+C/X^(N-1)) / N
100      WEND
110      PRINT"THE ";N;"th ROOT OF ";C;" =";Y
120      PRINT
130      INPUT "DO YOU HAVE ANY MORE DATA ";ANS$
140  WEND
150  PRINT "THE PROGRAM HAS ENDED"
```

خروجی برنامهٔ بالا پس از اجرا به‌صورت زیر است:

```
DO YOU WANT THE PROGRAM EXECUTE : ? Y
ENTER INTEGER & REAL NUMBERS ? 2,2
ENTER YOUR FIRST GUESS ? 1
THE  2 th ROOT OF  2  = 1.414214

DO YOU HAVE ANY MORE DATA ? Y
ENTER INTEGER & REAL NUMBERS ? 3,2
ENTER YOUR FIRST GUESS ? 1.1
THE  2 th ROOT OF  3  = 1.732051
```

```
DO YOU HAVE ANY MORE DATA ? y
ENTER INTEGER & REAL NUMBERS ? 5,3
ENTER YOUR FIRST GUESS ? 2.2
THE  3 th ROOT OF  5  = 1.709976

DO YOU HAVE ANY MORE DATA ? Y
ENTER INTEGER & REAL NUMBERS ? 7,5
ENTER YOUR FIRST GUESS ? 3.5
THE  5 th ROOT OF  7  = 1.475773

DO YOU HAVE ANY MORE DATA ? N
THE PROGRAM HAS ENDED
```

تمرین: برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا با استفاده از روش نیوتن ـ رفسون، ریشهٔ مثبت[۲۹] معادلهٔ $2\ SIN\ X=X$ را که بین $[\circ\ ,\ 2]$ قرار دارد تا چهار رقم اعشار به‌دست آورد.

جواب: $X = 1.8955$

تمرین: برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا با استفاده از روش نیوتن ـ رفسون ریشهٔ تقریبی معادلهٔ $F(X) = X^3 + X - ۱ = \circ$ را که در فاصلهٔ $[\circ\ ,\ 1]$ قرار دارد[۳۰] با تقریب 10^{-6} به‌دست آورد.

جواب: $X = 0.682328$

استفاده از کامپیوتر در تعیین نقـاط مـاگـزیموم و مینیموم یک تابع

فرض کنید در فاصلهٔ $[a,b]$ در جستجوی[۳۱] دو مقدار برای متغیر x هستیم که به ازای آنها مقدار تابع $y = f(x)$ ماگزیموم و مینیموم می‌شود. به ازای xهایی که در فاصلهٔ $[a,b]$ قرار دارند مقادیر مختلفی برای $y = f(x)$ به‌دست می‌آید و ما می‌خواهیم کوچکترین[۳۲] و بزرگترین[۳۳] مقدار y را در بین این مقادیر به‌دست آوریم.

قبل از نوشتن برنامهٔ تعیین نقاط ماگزیموم و مینیموم یک تابع، الگوریتم[۳۴] برنامه‌ای را می‌نویسیم که با دریافت[۳۵] N عـدد، کـوچکترین و بزرگترین عدد داخل لیست N عددی را پیدا کرده در خروجی چاپ می‌کند.

الگوریتم تعیین کوچکترین و بزرگترین عددِ یک لیست N عددی به شرح زیر است:

۰ ـ شروع

۱ ـ عدد N را می‌خوانیم.

۲ ـ اولین عدد را خوانده آن را NUM می‌نامیم.

۳ ـ مقدار COUNT را به‌عنوان شمارندهٔ[۳۶] تعداد اعداد برابر 1 قرار می‌دهیم[۳۷].

۴ ـ مقدار MAX و MIN را برابر NUM قرار می‌دهیم.

۵ ـ عدد بعدی را خوانده آن را برابر NUM قرار می‌دهیم.

۶ ـ به مقدار COUNT یک واحد اضافه کرده آن را COUNT می‌نامیم.

۷ ـ اگر مقدار MAX کوچکتر از مقدار NUM باشد مقدار NUM را برابر MAX قرار می‌دهیم.

۸ ـ اگر مقدار MIN بزرگتر از مقدار NUM باشد مقدار NUM را برابر MIN قرار می‌دهیم.

۹ ـ اگر مقدار COUNT برابر مقدار N نبود به مرحلهٔ ۵ می‌رویم.

۱۰ ـ مقدار MIN و MAX را به‌عنوان کوچکترین و بزرگترین عددِ داخل لیست با پیغام[۳۸] مناسب چاپ می‌کنیم.

۱۱ ـ پایان

در برنامهٔ زیر روشِ کار به همان صورتی است که در الگوریتم بالا گفته شده است با این تفاوت که اعداد هربار توسط تابع تولید[۳۹] می‌شوند و پایان داده[۴۰]ها هم مقدار معلوم f(b) است و از این رو در برنامه احتیاج به شمارنده نداریم. با یک حلقهٔ[۴۱] FOR برنامه براحتی قابل پیاده‌سازی[۴۲] است.

مثال: برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا ماگزیموم و مینیموم تابع Y = SINX + COSX را در فاصلهٔ $[0 , 2\pi]$ به‌دست آورده، مقادیر ماگزیموم و مینیموم تابع را به‌همراه Xهای مربوطه[۴۳] با پیغام مناسب در خروجی چاپ کند.

برنامه:

```
10   REM FINDING MAX & MIN OF Y=SINX+COSX
20   LET MAX=0: LET MIN=0
30   FOR D = 0  TO  360
40     LET  R = 4*ATN(1)*D/180
50     LET  Y = SIN(R)+COS(R)
60     IF MAX < Y THEN MAX = Y : LET  K=D
70     IF MIN > Y THEN MIN = Y : LET  S=D
80   NEXT D
90   PRINT "MAXIMUM = ";MAX;"AT X= ";K;" DEGREES"
100  PRINT
110  PRINT "MINIMUM = ";MIN;"AT X= ";S;"DEGREES"
120  END
```

خروجیِ برنامه:

```
MAXIMUM =  1.414214 AT X=  45  DEGREES

MINIMUM = -1.414214 AT X=  225 DEGREES
```

مثال: برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا ماگزیموم و مینیموم تابع Y = 2 SINX + 3COSX را در فاصلهٔ $[0 , 2\pi]$ به‌دست آورده، مقادیر ماگزیموم و مینیموم تابع را به همراه Xهای مربوطه با پیغام مناسب در خروجی چاپ کند.

برنامه: این برنامه دقیقاً مانند برنامهٔ Y = SINX + COSX است فقط با این تفاوت که لازم است خط 10 برنامهٔ مثال قبل را به‌صورت زیر تغییر دهیم:

```
10   REM FINDING MAX & MIN OF Y = 3*SINX+3*COSX
```

و در خط 50، ضابطهٔ تابع جدید را به‌صورت زیر بنویسیم:

```
50  LET Y = 2*SIN(R) + 3*COS(R)
```

با اِعمال تغییر در خط 10 و 50 برنامهٔ مثال قبل، پس از اجرا، خروجیِ برنامه را به‌صورت زیر مشاهده خواهید کرد:

```
MAXIMUM =  3.605499 AT X=  34  DEGREES
```

```
MINIMUM = -3.605498 AT X=  214 DEGREES
```

مثال: برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا ماگزیموم و مینیموم مطلق[۴۴] تابع $y = x^3 - x^2 - 120x - 20$ را در فاصلهٔ [10 , 10-] به‌دست آورده، نتیجه را با پیغام مناسب در خروجی چاپ کند.

برنامه:

```
10  REM FINDING MAX & MIN OF Y=X^3-X^2-120*X-20
20  LET MAX=0: LET MIN=0
30  FOR X = -10  TO  10
40    LET Y =X^3-X^2-120*X-20
50    IF MAX < Y THEN MAX = Y : LET  K=X
60    IF MIN > Y THEN MIN = Y : LET  S=X
70  NEXT X
80  PRINT "MAXIMUM OF Y= ";MAX;"AT X= ";K
90  PRINT
100 PRINT "MINIMUM OF Y= ";MIN;"AT X= ";S
110 END
```

خروجي برنامه:

```
MAXIMUM OF Y=  448 AT X= -6

MINIMUM OF Y= -566 AT X=  7
```

مثال: برنامهٔ مثال قبل را به گونه‌ای تغییر دهید تا ماگزیموم و مینیموم مطلق تابع $y = x^3 - x^2 - 120x - 20$ را در فاصلهٔ [13 , 13-] به‌دست آورد.

برنامه: در این برنامه کافی است خط شمارهٔ 30 مثال قبل را به‌صورت زیر تغییر دهیم:

```
30  FOR X = -13  TO  13
```

با اعمال تغییر بالا در خط 30 از مثال قبل، پس از اجرا، خروجي برنامه را به‌صورت زیر مشاهده خواهید کرد:

```
MAXIMUM OF Y=  448 AT X= -6

MINIMUM OF Y= -826 AT X= -13
```

مثال: برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا ماگزیموم و مینیموم نسبی[۴۵] تابع $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ را در فاصلهٔ [10 , 10-] به‌دست آورده، نتیجه را با پیغام مناسب در خروجی چاپ کند.

برنامه:

```
10  REM FINDING MAX & MIN OF Y=2*X^3-3*X^2-12*X+7
20  FOR X = -10  TO 10
30    LET Y = 2*X^3-3*X^2-12*X+7
40    LET X1 = X-.01
50    LET X2 = X+.01
60    LET Y1 = X1^2-X1-12
70    LET Y2 = X2^2-X2-12
80    IF Y1*Y2 < 0  AND Y1 < 0  THEN  PRINT"AT X= ";X;" Y= ";Y;"IS MINIMUM"
90    IF Y1*Y2 < 0 AND  Y1 > 0  THEN  PRINT"AT X= ";X;" Y= ";Y;"IS MAXIMUM"
100 NEXT
110 END
```

خروجي برنامه:

```
AT X= -3   Y= -38 IS MAXIMUM
AT X=  4   Y=  39 IS MINIMUM
```

مثال: برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا ضرایب یک تابع درجهٔ سوم، کران پایین و بالای یک فاصله را از ورودی بخواند. مقادیر ماگزیموم و مینیموم نسبی و مطلق تابع را در آن فاصله به‌دست آورده، نتیجه را با پیغام مناسب در خروجی چاپ کند.

برنامه:

```
10 PRINT"Y=AX^3+BX^2+CX+D"
20 INPUT"Enter A,B,C,D";A,B,C,D
30 LOCATE 3,1: INPUT"PLEASE ENTER L & U [L,U]" ; L , U
40 IF U < L THEN PRINT"U SHOULD BE GREATER THEN L ":GOTO 40
50 OLDY = A*(L-.01)^3+B*(L-.01)^2+C*(L-.01)+D
60 YMAX= OLDY:YMIN=OLDY:FALSE1=0:
70 FOR X = L TO U STEP .05
80      NEWY = A*X^3+B*X^2+C*X+D
90      IF YMAX < NEWY THEN YMAX=NEWY
100     IF YMIN > NEWY THEN YMIN=NEWY
110     IF NEWY > OLDY THEN FALSE = 1 ELSE FALSE = -1
120     OLDY=NEWY
130     IF FALSE1-FALSE  = 2 THEN PRINT"AT X = "X-.049:PRINT"REL MAX OF Y="OLDY
140     IF FALSE1-FALSE = -2 THEN PRINT"AT X = "X-.049:PRINT"REL MIN OF Y="OLDY
150     FALSE1=FALSE
160 NEXT
170 PRINT"ABSOLUTE MAXIMUM OF Y=";YMAX
180 PRINT"ABSOLUTE MINIMUM OF Y=";YMIN
```

اجراي اول:

```
Y=AX^3+BX^2+CX+D
Enter A,B,C,D? 2,-6,0,5
PLEASE ENTER L & U [L,U]? -4,4
AT X =  9.975508E-04
REL MAX OF Y= 4.985252
AT X =  2.000997
REL MIN OF Y=-2.984753
ABSOLUTE MAXIMUM OF Y= 36.99976
ABSOLUTE MINIMUM OF Y=-220.443
```

اجراي دوم:

```
Y=AX^3+BX^2+CX+D
Enter A,B,C,D? 1,0,-3,3
PLEASE ENTER L & U [L,U]? -4,4
AT X = -.9990026
REL MAX OF Y= 4.992626
AT X =  1.000998
REL MIN OF Y= 1.007624
ABSOLUTE MAXIMUM OF Y= 54.99978
ABSOLUTE MINIMUM OF Y=-49.45121
```

واژه‌نامهٔ ریاضی و کامپیوتر

1 - Nonlinear
2 - Zero
3 - Root
4 - Continuous Function
5 - Equation
6 - Variable
7 - Newton - Raphson method
8 - A computer program
9 - Estimate
10 - Approximate
11 - interval
12 - Initial Estimate
13 - A tangent Line
14 - Curve
15 - Intersection
16 - Error value
17 - Two successive points
18 - Right Triangle
19 - Derivative
20 - Program
21 - output
22 - Running
23 - Show That
24 - To Four Decimal Places
25 - The nth Root
26 - Real
27 - Read
28 - Interactive
29 - Positive Root
30 - Lies
31 - Search
32 - Smallest
33 - Largest
34 - Algorithm
35 - Get
36 - Counter
37 - Set
38 - Message
39 - Generate
40 - End of Data
41 - Loop
42 - Implementable
43 - Corresponding
44 - Absolute
45 - Relative

طرح و حل مسائل

اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۸)

از: مسائل پیکارجوی ریاضی
ای.ام. یاگلوم، آی.ام. یاگلوم

عدد ۱۸۰۰۰ چند مقسوم علیه (از جمله ۱ و خود ۱۸۰۰۰) دارد؟ مجموع جمیع این مقسوم علیه‌ها را بیابید.

حل: تجزیهٔ ۱۸۰۰۰ به حاصل‌ضرب اعداد اوّل عبارت است از:

$۱۸۰۰۰ = ۲^۴ . ۳^۲ . ۵^۳$

در نتیجه، جمیع مقسوم علیه‌های ۱۸۰۰۰ صورت $۲^a . ۳^b . ۵^c$ را، که در آن a، b، c اعداد صحیح صادق در $۰ \leq a \leq ۴$، $۰ \leq b \leq ۲$، $۰ \leq c \leq ۳$ اند، خواهند داشت. (توجه کنید که مقسوم علیه ۱ با در نظر گرفتن $a = b = c = ۰$ حاصل شده است.) به این ترتیب ۵ امکان برای a (یعنی ۰، ۱، ۲، ۳ یا ۴)، ۳ امکان برای b، و ۴ امکان برای c موجودند. از آن‌جا که این موارد می‌توانند به جمیع طرق ممکن ترکیب شوند، تعداد مقسوم علیه‌های ۱۸۰۰۰

$$۵ . ۳ . ۴ = ۶۰$$

است.

اکنون مجموع تمام مقسوم علیه‌های مورد بحث را پیدا می‌کنیم. در این مورد می‌خواهیم اعداد $۵^c . ۳^b . ۲^a$ را، که در آنها a، b، c روی مقادیر مشخص شدهٔ فوق تغییر می‌کنند، جمع کنیم. اگر عبارت:

$$(۱+۲+۲^۲+۲^۳+۲^۴)(۱ + ۳ + ۳^۲)(۱ + ۵ + ۵^۲ + ۵^۳)$$

به‌طریق معمول بسط داده شود، جملات آن دقیقاً اعداد $۲^a.۳^b.۵^c$ خواهند بود (توجه داشته باشید که $۱ = ۵^۰ = ۳^۰ = ۲^۰$).

بنابراین مجموع مطلوب عبارت است از:

$$(۱ + ۲ + ۲^۲ + ۲^۳ + ۲^۴)(۱ + ۳ + ۳^۲)(۱ + ۵ + ۵^۲ + ۵^۳)$$
$$= ۳۱ . ۱۳ . ۱۵۶ = ۶۲,۸۶۸$$

اکنون نوع دیگری از این راه حل را ارائه می‌دهیم. فرض می‌کنیم m و n دو عدد صحیح و مثبت نسبت به هم اوّل باشند. در این حالت هر مقسوم علیه mn می‌تواند به‌طور منحصر به فردی به صورت حاصل‌ضرب مقسوم علیهی از m و مقسوم علیهی از n بیان شود. از این مطلب می‌توان ملاحظه کرد که اگر $\tau(n)$ تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد صحیح و مثبت n را نمایش دهد، در این‌صورت:

$$\tau(mn) = \tau(n)\,\tau(m)$$

به همین ترتیب اگر $\sigma(N)$ مجموع مقسوم‌علیه‌های N باشد، داریم:

$$\sigma(mn) = \sigma(m)\,\sigma(m)$$

در نظریّهٔ اعداد $f(N)$، تابع عدد صحیح و مثبت N، ضربی[1] نامیده می‌شود اگر، m و n نسبت به‌هم اوّل باشند، $f(mn) = f(m)\ f(n)$ برقرار باشد. مثالی دیگر از چنین تابعی تابع اولر، $\varphi(N)$، تعداد اعداد صحیح و مثبت $\leq N$ نسبت به N اوّل است[2].

به این ترتیب $\tau(N)$ و $\sigma(N)$ توابعی ضربی‌اند. اما، توجه داشته باشید که اگر m و n نسبت به هم اوّل نباشند، آنگاه ضروری نیست که معادلات:

$$\sigma(mn) = \sigma(m)\,\sigma(n) \text{ و } \tau(mn) = \tau(m)\,\tau(n)$$

برقرار باشند؛ به‌عنوان مثال، $\tau(4)=3$، اما $\tau(2)\tau(2)=2.2=4$.
اگر f(N) ضربی باشد، آنگاه:

$$f(n_1 n_2 \dots n_k) = f(n_1)\, f(n_2) \dots f(n_k)$$

به شرطی که هر زوج از اعداد n_1، ...، n_k نسبت به هم اول باشند، برقرار است. از آن‌جا که $18000 = 2^4 . 3^2 . 5^3$، این مطلب مستلزم آن است که $\tau(18000) = \tau(2^4)\tau(3^2)\tau(5^3)$.
اما اگر P اوّل باشد، آنگاه $\tau(P^r) = r + 1$، زیرا مقسوم‌علیه‌های P^r عبارتند از ۱، P، P^2، ...، P^r. در نتیجه:

$$\tau(18000) = 5.3.4 = 60$$

به همین ترتیب ملاحظه می‌کنیم که

$$\sigma(18000) = \sigma(2^4)\sigma(3^2)\sigma(5^3)$$

از آنجا که

$$\sigma(P^r) = 1 + P + P^2 + \dots + P^r = \frac{P^{r+1}-1}{P-1}$$

داریم:

$$\sigma(18000) = 31.13.156 = 62,868$$

تبصره. همین استدلال بلافاصله به این حقیقت منجر می‌شود که اگر N دارای تجزیهٔ به عوامل اوّلی به صورت

$$N = P_1^{a_1} P_2^{a_2} \dots P_k^{a_k}$$

باشد، در این صورت:

$$\tau(N) = (a_1+1)(a_2+1)\dots(a_k+1)$$

و

$$\sigma(N) = \frac{P_1^{a_1+1}-1}{P_1-1} . \frac{P_2^{a_2+1}-1}{P_2-1} . \dots . \frac{P_k^{a_k+1}-1}{P_k-1}$$

یادداشت

1. multiplicative

۲. اگر N عددی صحیح و مثبت و

$$N = P_1^{a_1} P_2^{a_2} \dots P_m^{a_m}$$

تجزیهٔ به عوامل اوّل آن باشد، در این صورت $\varphi(N)$، تعداد اعداد صحیح و مثبت $\leq N$ و نسبت به N اوّل، از فرمول زیر به‌دست می‌آید.

$$\varphi(N) = N - \frac{N}{P_1} - \frac{N}{P_2} - \dots - \frac{N}{P_m} + \frac{N}{P_1P_2} + \frac{N}{P_1P_3} + \dots +$$

$$\frac{N}{P_{m-1}P_m} - \frac{N}{P_1P_2P_3} - \dots - \frac{N}{P_{m-2}P_{m-1}P} + \dots + (-1)^m$$

$$\frac{N}{P_1P_2\dots P_m} = N\left(1-\frac{1}{P}\right)\left(1-\frac{1}{P_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{P_m}\right)$$

پوزش: در برهان ۸ و شمارهٔ (۶) سلسله مقالات طرح و حل ... و در یادداشتها تاریخ تولد و تاریخ درگذشت اویلر به‌صورت [(۱۷۰۷ - ۱۷۸۳) ریاضیدان سوئیسی] اصلاح می‌گردد.

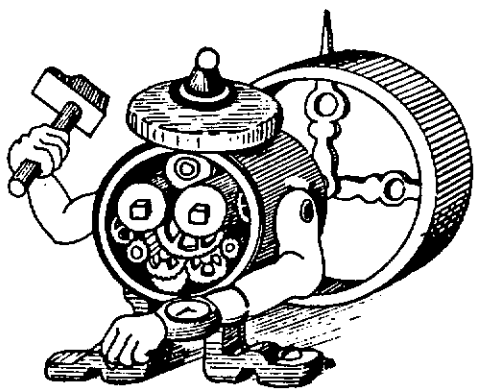
تفریح اندیشه ۲

یک ساعت دیواری رأس هر ساعت به تعداد شماره آن ساعت زنگ می‌زند.

اعلام ساعت ۵، مدت ٦ ثانیه و اعلام ساعت ۹، مدّت ۱۲ ثانیه طول می‌کشد و برای اعلام ساعت ۱ زمانی درنظر گرفته نمی‌شود.

تعیین کنید در مدّت ۲۴ ساعت چه زمانی صرف زدن زنگ می‌شود؟

ترجمهٔ ـ سیمین‌دخت ترکپور



جواب در صفحهٔ ۹٦

کانون‌یاب بیضی

● مریم رفعتی و الهه تاجیک سال دوم ریاضی (مرکز فرزانگان منطقه ۱۴)

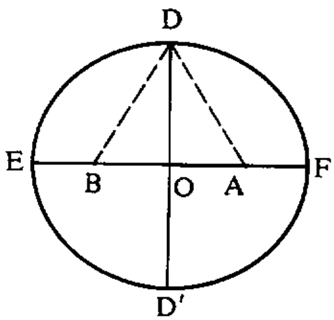
از آنجایی که این عمل مثبت شما (چاپ مرکزیاب دایره در شمارهٔ ۷) و در کنار آن تلاشهای دبیر محترم ریاضی ما، فکر ما را تحت‌تأثیر خود قرار داد، برآن شدیم تا وسیله‌ای دیگر در جهت تکامل آن وسیله بسازیم که کانونهای بیضی را پیدا کند، چنین وسیله‌ای مرکز دایره را هم می‌تواند به‌راحتی بیابد.

ضمناً حائز اهمیت است که ما زمانی طرح این وسیله به‌نظرمان رسید که در سال اوّل دبیرستان تحصیل می‌کردیم و از این‌رو اطلاعات چندانی درباره بیضی نداشتیم و تنها چیزی که از بیضی می‌دانستیم طریقهٔ رسم آن بود. بدین لحاظ سعی کردیم با همان اطلاعات اندک خود و با کمک گرفتن از طریقهٔ رسم بیضی به نتایجی دست یابیم.

برای توضیح طرز کار وسیله ابتدا باید قضیّه‌ای را ثابت کنیم.

فاصلهٔ محل برخورد قطر کوچک بیضی با محیط تا کانون برابر است با نصف اندازهٔ قطر بزرگ بیضی.

برهان: با توجه به طریقهٔ رسم بیضی، می‌دانیم که همیشه مجموع فاصله‌های هر نقطه روی محیط تا دو کانون بیضی مقداری است ثابت که در مورد تمام نقاط بیضی این مقدار وجود دارد. اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که نقطه روی محیط مورد نظر ما همان نقطهٔ تلاقی قطر بزرگ و محیط باشد. در این‌صورت



۱) $DA + DB = C$ مقدار ثابت

۲) $EB + EA = C$

۱ و ۲ $\Rightarrow DA + DB = EB + EA$

$DA + DB = EB + EB + BA$ می‌دانیم $\Rightarrow EB = AF \Rightarrow$

$DA + DB = EB + BA + AF \Rightarrow DA + DB = EF$

$=$ قطر بزرگ بیضی (۱)

اگر EF و DD' قطر بزرگ و کوچک بیضی باشند $\Leftarrow$

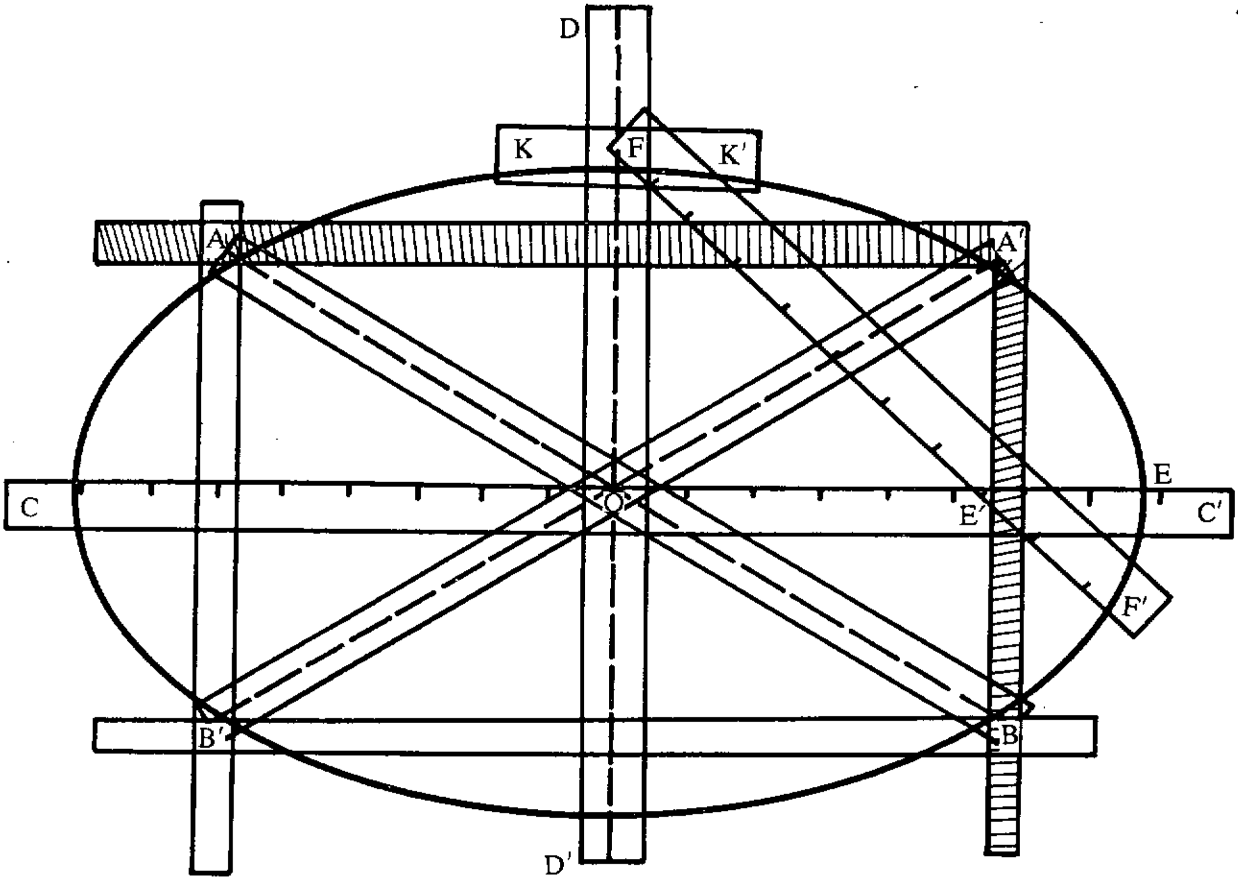
$EF \perp DD'$ زیرا $\overset{\Delta}{BDO} = \overset{\Delta}{DOA}$

مرکز همیشه وسط دو کانون $BO = OA$ و مشترک DO و $O_1 = O_2 = 90^\circ$ وجود دارد.

$\Rightarrow \boxed{DB = DA}$ (۲)

۱ و ۲ $\Rightarrow DA + DA = EF \quad 2DA = EF \quad \boxed{DA = \frac{EF}{2}}$

طرز کار وسیله: در شکل کشیده شده در صفحهٔ بعد خطهای قرمز نشان دهندهٔ بازوهای ثابت و خطهای مشکی نشان دهندهٔ



بازوهای متحرک هستند. بیضی موردنظر نیز با رنگ آبی مشخص شده است.

برای شروع کار باید ابتدا نقطهٔ A را روی نقطه‌ای از محیط بیضی قرار داد سپس بازوی A′B′ را آن‌قدر جلو یا عقب می‌بریم تا نقطهٔ A′ هم روی محیط قرار گیرد. حال بازوی BB′ را بالا و پایین می‌بریم به‌طوری‌که نقاط B و B′ هم روی محیط واقع شوند. در این‌صورت در حقیقت مستطیلی درداخل بیضی تشکیل می‌شود.

حال بازوهای AB′ و A′B را طوری جابه‌جا می‌کنیم تا قطرهای مستطیل واقع شوند. محل برخورد این اقطار یعنی نقطهٔ O مرکز خواهد بود.

سپس بازوی CC′ را آن‌قدر بالا می‌آوریم تا در روی مرکز واقع شود و به‌عبارتی از مرکز بگذرد. همچنین بازوی DD′ را هم طوری جابه‌جا می‌کنیم تا از مرکز بگذرد.

به این ترتیب بازوهای DD′ و CC′ به‌ترتیب قطرهای کوچک و بزرگ بیضی هستند.

محل برخورد قطر بزرگ با بیضی را E نامیده و مشخص می‌کنیم تا مرکز (نقطهٔ O) چند واحد فاصله دارد.

طبق قضیّه‌ای که قبلاً گفته شد چون این مقدار یعنی مقدار OE با فاصلهٔ کانون تا نقطه F برابر است بازوی KK′ را طوری جابه‌جا می‌کنیم که نقطه F روی محیط قرار گیرد.

حال به اندازهٔ پاره خط OE روی بازوی FF′ جدا کرده و این بازو را طوری در مسیر دایره‌وار حرکت می‌دهیم که قطر بزرگ بیضی را در همان اندازه از قبل مشخص شده قطع کند. بدین ترتیب نقطهٔ E کانون خواهد بود. کانون دیگر نیز با حرکت دادن FF′ در طرف دیگر بیضی به‌دست می‌آید.

مقاله‌های کوتاه از مجله‌های ریاضی معتبر جهان (۸)

Duane W. Detemple
غلامرضا یاسی‌پور

همگرایی سریعتر به ثابت اویلر

ثابت اویلر، γ، معمولاً به‌صورت حد رابطهٔ

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} D_n$$

تعریف می‌شود که در آن

$$D_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n$$

آهنگ همگرایی آن بسیار آهسته است، زیرا:

$$\frac{1}{2(n+1)} < D_n - \gamma < \frac{1}{2n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

یانگ «Young» اثبات مقدماتی این نامساوی را در [۲] داده است.

همگرایی مورد بحث را می‌توان با قرار دادن

$$R_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

به‌جای D_n، به‌مقدار قابل ملاحظه‌ای اصلاح کرد.

واضح است که $\lim_{n\to\infty} R_n = \gamma$؛ آنچه که غیرمنتظره است تأثیر عظیمی است که تغییر مختصر فوق بر آهنگ همگرایی دارد.

قضیّه. به ازای جمیع عددهای طبیعی n،

$$\frac{1}{24(n+1)^2} < R_n - \gamma < \frac{1}{24n^2}$$

اثبات: کرانهای بالا و پایین، هردو، با در نظر گرفتن تابع f تعریف شده بر $x>0$ توسط $f(x) = -(x+1)^{-1} - \log\left(x+\frac{1}{2}\right) + \log\left(x+\frac{3}{2}\right)$ به‌دست می‌آیند.

محاسبه‌هایی کوتاه نشان می‌دهد که

$$R_n - R_{n+1} = f(n)$$

و

$$f'(x) = \frac{1}{4}(x+1)^{-2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^{-1}\left(x+\frac{3}{2}\right)^{-1}$$

برای به‌دست آوردن کران بالا، ابتدا ملاحظه می‌کنیم که

$$-f'(x) < \frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

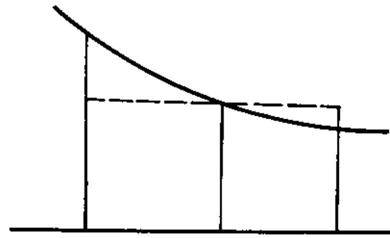
بنابراین، از آن‌جا که $f(\infty) = 0$،

$$f(k) = -\int_k^\infty f'(x)\,dx < \frac{1}{4}\int_k^\infty \left(x+\frac{1}{2}\right)^{-4} dx = \frac{1}{12}\left(k+\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

از آن‌جا که $\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 > k(k+1)$، نتیجه می‌شود که

$$\left(k+\frac{1}{2}\right)^{-3} < \frac{1}{2}\,\frac{2k+1}{2k^2(k+1)^2} = \int_k^{k+1} x^{-3}\,dx$$

در واقع از لحاظ هندسی از شکل زیر آشکار است که $\left(k+\frac{1}{2}\right)^{-3}$ کوچکتر از سطح زیر $y=x^{-3}$ روی $k \le x \le k+1$ است.



در این‌صورت، روی هم رفته

$$R_n - \gamma = \sum_{k=n}^{\infty} (R_k - R_{k+1}) = \sum_{k=n}^{\infty} f(k)$$

$$< \frac{1}{12} \sum_{k=n}^{\infty} (k+\tfrac{1}{2})^{-3} < \frac{1}{12} \int_n^{\infty} x^{-3} dx = \frac{1}{24 n^2}$$

برای استخراج کران پایین، به x نامساوی زیر نیاز داریم:

$$(x + \tfrac{1}{2})(x + \tfrac{3}{2}) = x^2 + 2x + \tfrac{3}{4} < (x+1)^2$$

که از آن نتیجه می‌گیریم که

$$-f'(x) > \frac{1}{4} (x+1)^{-4}$$

چون مانند قبل عمل کنیم، درمی‌یابیم که

$$f(k) > \frac{1}{4} \int_k^{\infty} (x+1)^{-4} dx = \frac{1}{12} (k+1)^{-3}$$

و سپس به‌دست می‌آوریم:

$$R_n - \gamma > \frac{1}{12} \sum_{k=n}^{\infty} (k+1)^{-3} > \frac{1}{12} \int_{n+1}^{\infty} x^{-3} dx$$

$$= \frac{1}{24(n+1)^2}$$

و به‌این ترتیب اثبات قضیه تکمیل می‌شود.

مفاهیم به کار رفته در اثبات فوق را می‌توان برای به‌دست آوردن برآورد از مرتبهٔ بالاتر زیر پذیرفت.

$$R_n - \gamma - \frac{1}{24(n+\frac{1}{2})^2} = -r_n$$

که در آن:

$$\left(\frac{7}{960}\right) \frac{1}{(n+1)^4} < r_n < \left(\frac{7}{960}\right) \frac{1}{n^4}$$

بسط عمومی به مرتبه‌ای دلخواه را می‌توان برحسب عددهای برنولی یافت. استخراجی را که تنها به‌حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی نیاز دارد، می‌توان در [۱] یافت.

مرجعها:

1. D . W. Detemple and S . H . Wang , Half integer approximations for the partial of the harmonic series , J. Math Analysis and Applic. 160 (1991) , 149 - 156.

2. R . M. Young, Euler's Constant, Math.Gazette 75 , No. 472 (1991) , 187 - 190

Department of pure and Applied Mathematics
Washington State University
Pullman , Washington 99164 - 3113

ادب ریاضی

ـ پاسکال به فیلسوف مذهبی معروف بود؛ و همین دل مشغولی او به مذهب بود که بعدها همهٔ وقت او را اشغال کرد و وی را با بحثهایی در مورد تصادف و وقایع نامعین در زندگی فرد و اجتماع درگیر ساخت.

تاریخ علم کمبریج ـ حسن افشار

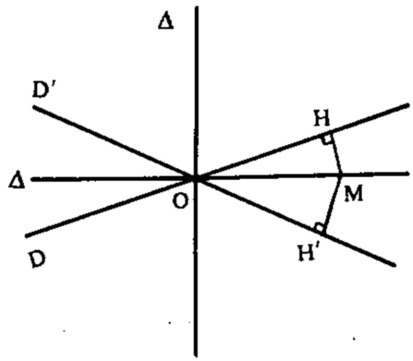
مکان هندسی

• محمد هاشم رستمی

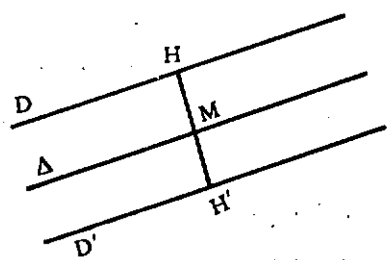
(قسمت دوم)

۴ـ در مسأله، دو خط ثابت D و D' وجود دارد:

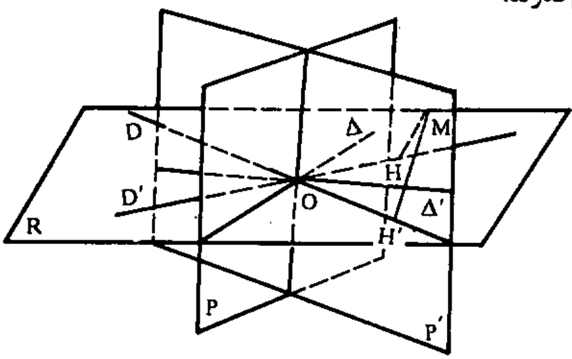
الف ـ اگر نقطهٔ متحرک M در صفحه چنان حرکت کند که فاصلهٔ آن از دو خط ثابت متقاطع D و D' برابر باشد ($MH = MH'$)، مکان هندسی نقطه M نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط D و D' است (خطهای Δ و Δ').



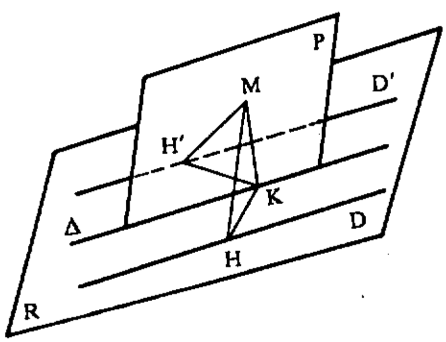
ب ـ اگر نقطه متحرک M در صفحه چنان حرکت کند که فاصله‌اش از دو خط متوازی D و D' برابر باشد ($MH = MH'$ و $D \parallel D'$)، مکان هندسی نقطه M خط راستی است بین دو خط D و D' موازی آنها و به یک فاصله از D و D' (خط Δ).



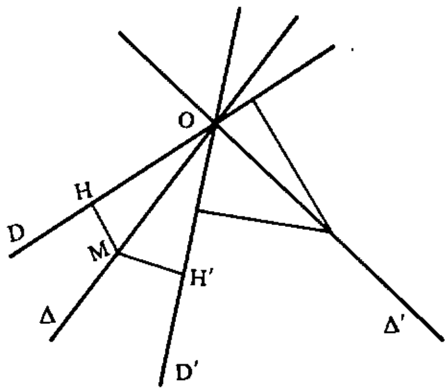
پ ـ اگر نقطهٔ متحرک M در فضا چنان حرکت کند که فاصلهٔ آن از دو خط ثابت متقاطع D و D' برابر باشد، مکان هندسی نقطهٔ M دو صفحه P و P' است که بر صفحهٔ حاصل از دو خط D و D' (صفحهٔ R) عمودند و بر نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط D و D' می‌گذرند.



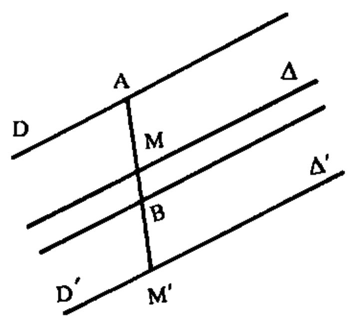
ت ـ اگر نقطهٔ متحرک M در فضا چنان حرکت کند که فاصله‌اش از دو خط متوازی D و D' برابرباشد، مکان هندسی نقطهٔ M صفحه‌ای است عمود بر صفحهٔ دو خط D و D' که بر خط متساوی‌الفاصله از این دو خط می‌گذرد.



ث ـ اگر نقطهٔ متحرک M در صفحه چنان حرکت کند که نسبت فاصله‌های آن از دو خط متقاطع D و D' مقدار ثابت K باشد ($\frac{MH}{MH'} = K$)، مکان هندسی نقطهٔ M دو خط Δ و Δ' است که بر O، نقطهٔ تقاطع خطهای D و D' می‌گذرند و ($O - DD'\Delta\Delta'$) یک دستگاه توافقی است.



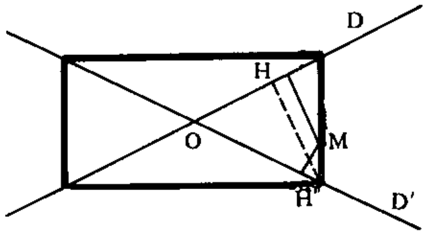
ج ـ اگر نقطهٔ متحرک M در صفحه چنان حرکت کند که نسبت فاصله‌های آن از دو خط متوازی D و D' برابر مقدار ثابت K باشد، مکان هندسی نقطهٔ M دو خط Δ و Δ' موازی خطهای D و D' است به قسمی که ($DD'\Delta\Delta'$) یک دستگاه توافقی است و رأس این دستگاه در فاصلهٔ بی‌نهایت دور واقع است.



چ ـ اگر نقطه متحرک M چنان حرکت کند که مجموع فاصله‌هایش از دو خط ثابت متقاطع D و D' مقدار ثابت l باشد:

($MH + MH' = l$)،

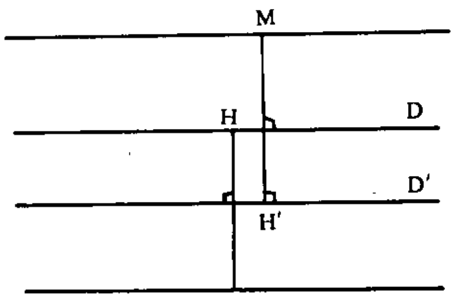
مکان هندسی نقطه M اضلاع مستطیلی است که دو خط ثابت D و D' قطرهای آن می‌باشند و فاصلهٔ هر رأس این مستطیل از قطر مقابلش برابر l است.



ح ـ اگر نقطه متحرک M در صفحه چنان حرکت کند که مجموع فاصله‌هایش از دو خط ثابت متوازی D و D' که فاصله‌شان برابر h است، مقدار ثابت l باشد:

($D \parallel D'$ و $MH + MH' = l$)،

مکان هندسی نقطهٔ M اگر $l>h$ باشد، دو خط موازی خطهای D و D' و در خارج این دو خط است.



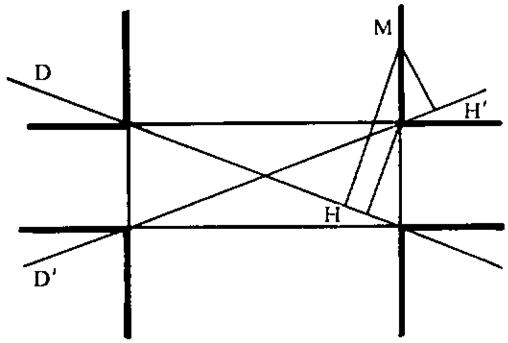
تمرین: اگر فاصلهٔ بین دو خط متوازی D و D' برابر l باشد مکان هندسی فوق چگونه است؟

خ ـ هرگاه نقطهٔ متحرک M چنان حرکت کند که قدرمطلق تفاضل فاصله‌اش از دو خط ثابت متقاطع D و D' برابر مقدار ثابت l باشد:

($|MH - MH'| = l$)،

مکان هندسی نقطهٔ M، هشت نیم خط است که این نیم‌خطها امتداد اضلاع مستطیلی هستند که اقطارش بر دو خط D و D' منطبق است و

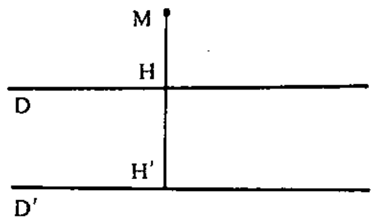
فاصلهٔ هر رأس این مستطیل از قطر مقابلش برابر l می‌باشد.



تمرین: اگر نقطهٔ متحرک M در صفحه چنان حرکت کند که تفاضل فاصله‌اش از دو خط متوازی D و D' برابر مقدار ثابت l باشد:

$(D \parallel D'$ و $|MH - MH'| = l)$

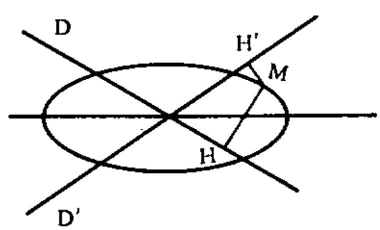
مکان هندسی نقطهٔ M چگونه‌است؟



د ـ اگر نقطهٔ متحرک M در صفحه چنان حرکت کند که مجموع مربعات فاصله‌اش از دو خط متقاطع D و D' مقدار ثابت l باشد:

$(MH^2 + MH'^2 = l)$

مکان هندسی نقطهٔ M یک بیضی است که قطر بزرگ آن بر نیمساز زاویهٔ حادهٔ بین دو خط D و D' منطبق است.

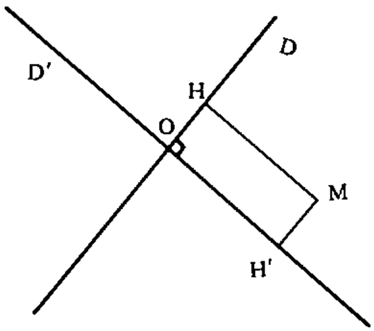


تمرین: اگر خطهای D و D' متوازی باشند مکان فوق‌چگونه است؟

ذ ـ اگر نقطهٔ متحرک M در صفحه چنان حرکت کند که قدر مطلق تفاضل مربعات فاصله‌اش از دو خط ثابت متقاطع D و D' برابر مقدار ثابت l باشد:

$(|MH^2 - MH'^2| = l)$

مکان هندسی نقطهٔ M یک هذلولی متساوی‌القطرین است.



تمرین: اگر خطهای D و D' متوازی باشند مکان فوق چگونه است؟

تفریح اندیشه ۳

در هر قسمت علامتهای مناسب + ، − ، × ، : و ( ) را بین ارقام ۳ طوری قرار دهید که یک تساوی به‌دست آید.

۳ ۳ ۳ ۳ = ۳
۳ ۳ ۳ ۳ = ۴
۳ ۳ ۳ ۳ = ۵
۳ ۳ ۳ ۳ = ۶
۳ ۳ ۳ ۳ = ۷
۳ ۳ ۳ ۳ = ۸
۳ ۳ ۳ ۳ = ۹
۳ ۳ ۳ ۳ = ۱۰

ترجمهٔ سیمین‌دخت ترکپور از کتاب بازیهای عددی

جواب در صفحهٔ ۹۶

جواب نامه‌ها

آقای علی حیدری دانش آموز رشته ریاضی (سنندج)

با تشکر از مسأله ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که در صورت امکان آن‌را تکمیل‌تر کرده و برای ما ارسال کنید تا در شماره‌های بعدی از آن استفاده شود.

آقای علیرضا اسماعیل‌خو؛ دانش آموز رشته ریاضی (تهران)

ضمن تشکر و قدردانی از مطلب ارسالی شما تحت عنوان «حل نوعی معادلهٔ درجهٔ سوم» به عرض می‌رسانیم که حل هندسی و جبری معادلهٔ درجهٔ سوم کامل در حالت عمومی $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ را می‌توانید در مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، سال ششم ـ شمارهٔ مسلسل ۲۲، صفحهٔ ۴۱ تا ۴۳ آن مشاهده کنید.

آقای یوسف خمسه؛ دانش آموز رشته ریاضی (کرج)

ضمن تشکر از مسائل و تستهای ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که امید است از آنان برای شماره‌های آیندهٔ مجله انتخاب کنیم.

آقای عباس‌نیا؛ دانش آموز رشته ریاضی (تایباد)

با تشکر از مسائل ارسالی شما، در صورت لزوم از آنان استفاده خواهیم کرد.

آقای محمدرضا وزیری؛ دانش آموز رشته ریاضی (شاهین‌شهر)

از نامه ارسالی شما متشکریم. امید است از خاطرهٔ شما در جای مناسب در قسمت «شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید» استفاده کنیم.

آقای عباس نیک‌نژاد؛ دانش آموز رشته ریاضی (تهران)

ضمن تشکر از مقالهٔ ارسالی شما تحت عنوانهای «معادله خط راست و لگاریتمی کردن عبارات مثلثاتی» و چند مسأله برای حل به عرض می‌رسانیم که سعی کنید مقالات خود را به منظور بسط و تفهیم مطالب کتاب درسی ارائه دهید. در هر صورت از مطلب شما در صورت لزوم و در جای مناسب استفاده خواهیم کرد.

آقای کیانوش یزدی؛ دانش آموز رشتهٔ ریاضی (لنگرود)

با تشکر از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما، در صورت لزوم از آنان استفاده خواهیم کرد.

آقای امیر فراتی؛ دانش آموز رشته ریاضی (تهران)

از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. سعی کنید مسائل را در سطح مطلوبتری ارائه دهید، و همچنین تکراری نیز نباشند. موفقیت و پیروزی هر چه بیشتر شما را از خداوند منان مسئلت داریم.

آقای افشین زادایمانی؛ دانش آموز (تبریز)

ضمن تشکر از مقالهٔ شما تحت عنوان «کامپیوتر را بهتر بشناسیم» به عرض می‌رسانیم که مقالهٔ شما از نظر محتوی دارای کمبودهایی است که از جمله آنان چهارچوب مقاله است که باید مشخص شود و به طور منطقی باید از تاریخچهٔ آن شروع و به شناخت سیر تکمیلی آن بپردازید. امید است با توجه به معیارهای داده شده مقالات بعدی خود را ارائه دهید. در هر صورت از مطالب مقالهٔ شما در صورت لزوم و در جای مناسب استفاده خواهد شد.

آقای امیرخسرو توسلی؛ دانش آموز (شهرستان قاین)

ضمن تشکر از نامهٔ شما به عرض می‌رسانیم که تساوی $81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30$ یک معادله است و نه یک اتحاد مثلثاتی و می‌دانیم معادله ممکن است جواب حقیقی داشته باشد و یا فاقد جواب حقیقی باشد. بنابراین معادله فوق فقط به ازای بعضی از مقادیر ممکن است درست باشد.

آقای تورج صارمی‌راد (تهران)

ضمن تشکر از مقاله شما تحت عنوان «یافتن بزرگترین و کوچکترین مقدار در بیسیک» به عرض می‌رسانیم که برنامه‌های ارائه داده شده باید توسط کامپیوتر اجرا و سپس Print گرفته شوند. در این صورت امید است امکان درج آن در جای مناسب به‌وجود آید.

آقای حمیدرضا جمالی؛ دانش‌آموز (رامسر)

ضمن تشکر از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که سعی کنید صورت مسائل کوتاه و جواب آنان نیز طولانی نباشد. در هر صورت از مسائل شما در جای مناسب استفاده خواهیم کرد.

خانم متین جعفریان؛ دانش‌آموز (چالوس)

با تشکر از مطلب شما در رابطه با شگفتیهای ریاضی امید است که در جای مناسب از آن استفاده کنیم.

آقای سرو شامعیر؛ دانش‌آموز (تهران)

با تشکر از دو مسألهٔ حل شدهٔ ارسالی شما، در صورت لزوم از آن استفاده خواهیم کرد.

خانم ندا شهیدی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (اراک)

ضمن تشکر از شما برای ارسال یک مسأله و تست به عرض می‌رسانیم که سعی کنید مسائل و یا تستهای ارسالی با توجه به مسائل و تستهای مجلات قبلی برهان طرح شوند تا تکراری نباشند و از سطح مطلوبی نیز برخوردار باشند.

آقای مهدی باباپور؛ دانش‌موز رشته ریاضی (کرج)

با تشکر از شما برای ارسال مقاله‌ای تحت عنوان «روش به دست آوردن مختصات قطبی وسط یک پاره‌خط» امید است امکان درج آن در شماره‌های آیندهٔ مجله به وجود آید.

آقای حسن زارعی، دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (اصفهان)

از اشعار سروده شدهٔ شما در رابطه با مفاهیم ریاضی متشکریم.

آقای فایق رشیدزاده؛ دبیر ریاضی (مهاباد)

ضمن تشکر از شما برای ارسال مقاله‌ای تحت عنوان «قابل محاسبه کردن عبارتهای مثلثاتی به وسیلهٔ لگاریتم و کاربردهای آن» به عرض می‌رسانیم که امید است امکان درج آن در شماره‌های بعدی مجله در جای مناسب به وجود آید. همچنین از مسائل حل شدهٔ آن در صورت نیاز استفاده خواهیم کرد.

آقای جعفر بحریان؛ دبیر ریاضی (شیراز)

با تشکر از تستهای ارسالی شما، امید است از آنان در شماره‌های بعدی مجله در جای مناسب استفاده شود.

آقای عنایت شیرازی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (فیروزکوه)

ضمن تشکر از نامهٔ شما به عرض می‌رسانیم که در صورت امکان و در جای مناسب امید است مطالبی در رابطه با شناخت توپولوژی ارائه شود. در رابطه با اشکالی که به مبحث لگاریتم کتاب درسی گرفته بودید؛ باید بگوییم که اگر شرط مثبت بودن اعداد در لگاریتم ذکر نمی‌شد وارد بود.

آقای یوسف یعقوبی؛ دیپلمهٔ ریاضی (تهران)

با تشکر از مسائل ارسالی شما، در صورت لزوم از آنان استفاده خواهیم کرد.

آقای فریدون قاسمیان؛ دانشجوی رشتهٔ ریاضی (خرم‌آباد)

ضمن تشکر از یادآوری برخی از اشکالات چاپی مجله و ترجمهٔ مطلبی در رابطه با حدّ یک تابع به عرض می‌رسانیم که در صورت لزوم از آن استفاده خواهیم کرد.

آقای علیرضا بهبودی‌فر؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (تهران)

ضمن تشکر از مقاله و مسائل حل شدهٔ شما به عرض می‌رسانیم که سعی کنید مطالبی را که ارسال می‌دارید با توجه به مطالب شماره‌های قبلی مجله ارائه دهید تا از تکرار مطلب جلوگیری شود. نظیر مقاله و مسائل شما در برهان ۱ قسمت «بخش‌پذیری» موجود است.

آقای یحیی افشار؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (قم)

با تشکر از نامهٔ شما در رابطه با ارسال برخی از شگفتیهای ریاضی به عرض می‌رسانیم که در صورت امکان و در جای مناسب از آنان استفاده خواهیم کرد.

آقای وحید زاهدان؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (تبریز)

ضمن تشکر از ارسال چند برنامهٔ کامپیوتری به زبان بیسیک به عرض می‌رسانیم که ما از برنامه‌های ارائه شده‌ای استفاده می‌کنیم که توسط کامپیوتر اجرا و سپس توسط پرینتر چاپ شده باشند.

آقای امین فیروزفر (مشهد)

ضمن تشکر از مقالهٔ شما تحت عنوان «روشی برای حل معالات» به عرض می‌رسانیم که الگوریتمهایی قوی برای حل معادلات موجود است که با تعریف هر یک از آنها برای کامپیوتر می‌توان هر معادله را در کمترین زمان و با سرعت بالا حل کرد.

خانم ناهید صادقی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (خوزستان)

ضمن تشکر از نامهٔ محبت‌آمیز و مسائل ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که با این شوق و ذوقی که شما دارید بهتر است ابتدا به دانشگاه راه پیدا کنید و رشتهٔ ریاضی یا فیزیک را نیز برگزینید، یقیناً در این دو رشته خصوصاً رشته ریاضی موفق خواهید بود پیروز باشید.

آقای حسن فلاحی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (دلیجان)

ضمن تشکر از مطلب ارسالی شما در رابطه با «تثلیث زاویه» به عرض می‌رسانیم که امتناع سه مسألهٔ مهم تاریخی تثلیث زاویه، تربیع دایره و تضعیف مکعب با کمک خط‌کش و پرگار ثابت شده است، بنابراین در این مورد هر روشی ارائه شود تقریبی است.

آقای میثم ارشدی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی

از ارسال حل مسائل المپیاد ریاضی متشکریم. متذکر می‌شویم که مسائل حل شدهٔ ارسالی خود را در سطح دانش‌آموزان دبیرستان ارائه دهید.

آقای مسلم مرادی (تهران)

از تستهای ارسالی شما متشکریم. امید است در شماره‌های بعدی مجله از آنان استفاده کنیم.

آقای هاشم حبیبی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (اقلید)

از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. در صورت لزوم از آنان استفاده می‌کنیم.

آقای مسعود فلاح؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (اصفهان)

از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. امید است برای شماره‌های بعدی مجله از آنان استفاده کنیم.

آقای رضا منتظری؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (نجف‌آباد)

از مطلب تاریخی شما تحت عنوان «اواریست گالوا» متشکریم. امید است امکان درج آن برای شماره‌های آیندهٔ مجله به‌وجود آید.

آقای برمک حیدر اسدی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران)

ضمن تشکر از مقالهٔ ارسالی شما تحت عنوان «توابع بازگشتی» به اطلاع می‌رسانیم که امید است امکان درج آن در جای مناسب به وجود آید.

آقای امید قطره سامانی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (اصفهان)

با تشکر از شما برای ارسال مقاله‌ای تحت عنوان «نکاتی چند دربارهٔ ماتریسها» به اطلاع می‌رسانیم که کاملتر از این مطالب در کتاب درسی ریاضیات جدید سال چهارم ریاضی موجود است.

آقای احسان امیری؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (مشهد)

با تشکر از شما برای ارسال مقاله‌ای تحت عنوان «برخالها: نمودی از تجلی تخیّل در علم» امید است که امکان درج آن در شماره‌های بعدی مجله در جای مناسب به وجود آید. متذکر می‌شویم که سعی کنید مقالاتی را ارسال کنید که در چهارچوب مطالب و مفاهیم کتابهای درسی باشد.

...د و بررسی تستهای ریاضیات جدید مربوط به مرحله اوّل کنکور سراسری ۷۳

● بهروز نوذری
(دبیر دبیرستانهای تهران)

در این آزمون پرسشهای درس مذکور از ردیف ۱۷۰ تا ۱۸۰ به تعداد ۱۱ تست درنظر گرفته شده بود که سؤالات ۱۷۲ و ۱۷۴ و ۱۷۸ و ۱۸۰ دارای اشکالهایی بوده که در زیر مورد بررسی قرارگرفته است.

تست ۱۷۲: تفاضل تعداد مقسوم علیه‌های دو عدد طبیعی $N = ۲^{\alpha} \times ۳^{\beta}$ و $\frac{N}{۳۶}$ برابر ۱۴ می‌باشد؛ کوچکترین عدد طبیعی N کدام است؟

۱) ۱۴۴ ۲) ۲۱۶ ۳) ۲۸۸ ۴) ۴۳۲

نکته: هرگاه $N = ۲^{\alpha} \times ۳^{\beta}$ داریم:

تعداد مقسوم علیه‌های مثبت عدد N $= (\alpha + ۱)(\beta + ۱)$

تعداد مقسوم علیه‌های عدد طبیعی N $= ۲(\alpha + ۱)(\beta + ۱)$

مثال: $۱۲ = ۲^{۲} \times ۳^{۱}$

تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد ۱۲ $= (۲ + ۱)(\beta + ۱) = ۶$

$\xrightarrow{\text{عبارتنداز}} \{۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۱۲\}$

تعدادمقسوم‌علیه‌های‌عددطبیعی ۱۲ $= ۲(۲+۱)(\beta+۱) = ۱۲$

$\xrightarrow{\text{عبارتنداز}} \{\pm ۱, \pm ۲, \pm ۳, \pm ۴, \pm ۶, \pm ۱۲\}$

چون صورت تست به‌طور واضح اشاره به تعداد مقسوم علیه‌های دو عدد N و $\frac{N}{۳۶}$ دارد پس طبق مفروضات مسئله داریم:

$$۲(\alpha + ۱)(\beta + ۱) - ۲(\alpha - ۱)(\beta - ۱) = ۱۴$$

$$\Rightarrow ۴(\alpha + \beta) = ۱۴$$

که ممکن نیست.

صورت اصلاح شده تست: تفاضل تعداد مقسوم علیه‌های مثبت دو عدد طبیعی $N = ۲^{\alpha} \times ۳^{\beta}$ و $\frac{N}{۳۶}$ برابر ۱۴ می‌باشد؛ کوچکترین عدد طبیعی N کدام است؟

حل) $۲(\alpha + \beta) = ۱۴$

$$\alpha + \beta = ۷$$

$$\frac{N}{۳۶} \in IN \Rightarrow ۲^{\alpha-۲} \times ۳^{\beta-۲} \in IN \Rightarrow \begin{cases} \alpha \geq ۲ \\ \beta \geq ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = ۵ \\ \beta = ۲ \end{matrix}$$

$$\downarrow N = ۲^{۵} \times ۳^{۲} = ۲۸۸$$

گزینه ۳ درست می‌شود.

صورت تست ۱۷۴: اگر $(۹۱,۶۳) = r$ و $r = ۹۱a + ۶۳b$، $a + b$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

نکته: در سؤالاتی به فرم اگر p آنگاه کدام گزینه درست است؟ باید گزینه‌ای انتخاب شود که برای p شرط لازم است.

مثال: اگر $x^{۲} = ۱$ آنگاه ؟ = x. مسلماً برای این سؤال پاسخ $x = ۱$ نمی‌تواند صحیح باشد. چون صورت تست ۱۷۴ باکلمه اگر

شروع شده و مقدماتی مطرح شده‌است بنا به نکته فوق باید گزینه‌ای درست باشد که برای این مقدمات شرط لازم باشد و چنین گزینه‌ای در تست فوق موجود نیست.

صورت اصلاح شده تست: اگر $r = (۹۱, ۶۳)$ آنگاه برای آنکه $r = ۹۱a + ۶۳b$ کافی است که مقدار $a + b$ برابر باشد با... $(a , b \in Z)$

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

حل: $۹۱a + ۶۳b = ۷$

$۱۳a + ۹b = ۱$

$۴a = ۱ - ۹(a + b)$

پس مقدار $a + b$ باید طوری باشد که $۱ - ۹(a + b)$ بر ۴ بخش‌پذیر باشد و گزینه ۳ درست است.

صورت تست ۱۷۸: شرط وجود جواب غیرصفر یک دستگاه معادله غیرهمگن و همگن به‌ترتیب آن است که دترمینان ضرایب دستگاه معادلات غیرهمگن ...

۱) مخالف صفر و دستگاه همگن برابر صفر باشد.
۲) و همگن هر دو برابر صفر باشد.
۳) و همگن هر دو مخالف صفر باشد.
۴) برابر صفر و دستگاه همگن مخالف صفر باشد.

نکته: در منطق اصطلاحات شرط کافی؛ شرط لازم؛ شرط لازم و کافی؛ نه شرط لازم و نه شرط کافی؛ وجود دارد و صرفاً اصطلاح شرط را به تنهایی نمی‌توان به‌جای هریک از اصطلاحات فوق به‌کار گرفت.

مثال: مخالف صفر بودن دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه غیرهمگن شرط کافی برای وجود جواب غیر صفر می‌باشد ولی لازم نیست. و مساوی صفر بودن دترمینان ضرایب شرط لازم و کافی برای وجود جواب غیر صفر دستگاه همگن می‌باشد.

صورت اصلاح شده تست: شرط کافی برای وجود جواب غیرصفر دریک دستگاه معادلات غیرهمگن و همگن به‌ترتیب آن است که دترمینان ضرایب دستگاه معادلات غیر همگن ...

۱) مخالف صفر و دستگاه همگن برابر صفر باشد.
۲) و همگن هردو برابر صفر باشد.
۳) و همگن هر دو مخالف صفر باشد.
۴) برابر صفر و دستگاه همگن مخالف صفر باشد.

و در این‌صورت گزینه «۱» صحیح خواهدبود.

صورت تست ۱۸۰: امتداد بردارهای ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ باهم کدام زاویه را می‌سازند؟

۱) ۰° ۲) ۴۵° ۳) ۹۰° ۴) ۱۸۰°

نکته: هرگاه A یک ماتریس متقارن مرتبه ۲ با دو مقدار ویژه متمایز $K_۱$ و $K_۲$ باشد؛ آنگاه هر بردار ویژه نظیر $K_۱$ برهر بردار ویژه نظیر $K_۲$ عمود است. بنابراین امتداد هر بردار ویژه برامتداد هر بردار ویژه دیگر عمود نمی‌باشد و درصورتی‌که دو بردار ویژه مربوط به یک مقدار ویژه را درنظر بگیریم زاویه بین امتدادهای آنها ۰° بوده که در گزینه‌ها نیز آمده است.

صورت اصلاح شده تست: امتداد بردارهای ویژه نظیر یک مقدار ویژه $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ با امتداد بردارهای ویژه نظیر مقدار ویژه دیگر آن کدام زاویه را می‌سازند؟

۱) ۰° ۲) ۴۵° ۳) ۹۰° ۴) ۱۸۰°

پاسخ «۳» درست خواهد بود.

ادب ریاضی

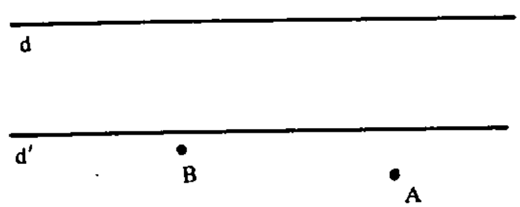
تاریخ ریاضیات نشان می‌دهد که موضوعاتی که محض، در نظر گرفته شده‌اند می‌توانند، در هر لحظه‌ای، غیرمنتظره‌ترین موارد استعمال واقعی را داشته باشند.

هنر ریاضی ورزیدن ـ غلامرضا یاسی‌پور

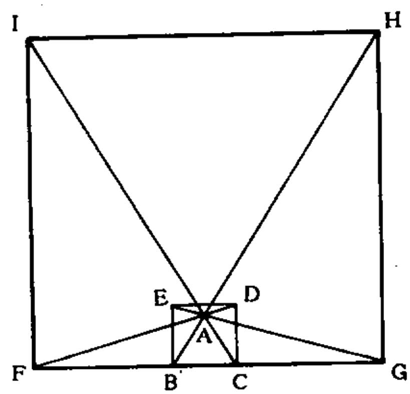
مسائل مسابقه‌ای

● محمد هاشم رستمی

۱ ـ دو خط متوازی d و d' و دو نقطه A و B مفروضند. از نقطهٔ A خطی رسم کنید که خطهای d و d' را به‌ترتیب در نقاط C و D قطع کند به قسمی که این دو نقطه از نقطه B به یک فاصله باشند (بحث کنید).

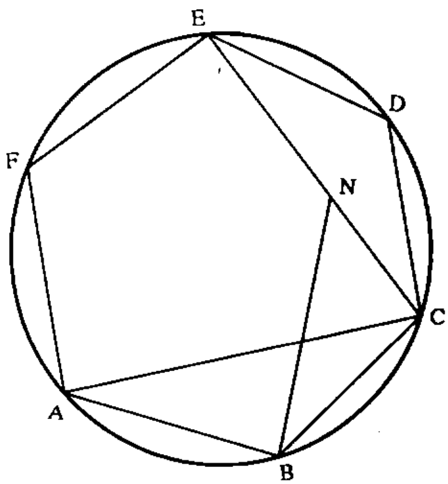


۲ ـ روی ضلع BC از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و در طرف رأس A مربع $BCDE$ را می‌سازیم. نقاط تقاطع AD و AE با امتداد ضلع BC را به‌ترتیب F و G، و نقاط برخورد AB و AC با عمودهای رسم شده بر خط FG در نقاط G و F را به‌ترتیب H و I می‌نامیم. ثابت کنید که چهارضلعی $FGHI$ مربع و مجانس مربع $BCDE$ است و نسبت مساحت این دو مربع را پیدا کنید درصورتی که $BC=a$ باشد.



مسأله‌ای از المپیادهای ریاضی

اقطار AC و CE از شش ضلعی منتظم $ABCDEF$ به‌ترتیب توسط نقاط داخلی M و N چنان تقسیم شده‌اند که $\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CE}=r$ درصورتی که B، M و N بر یک استقامت باشند، r را معین کنید.

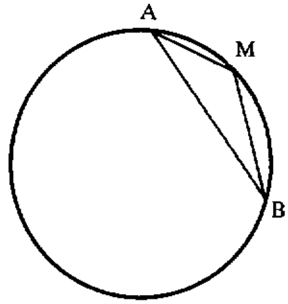


بیست و سومین المپیاد بین‌المللی ریاضی ۱۹۸۲

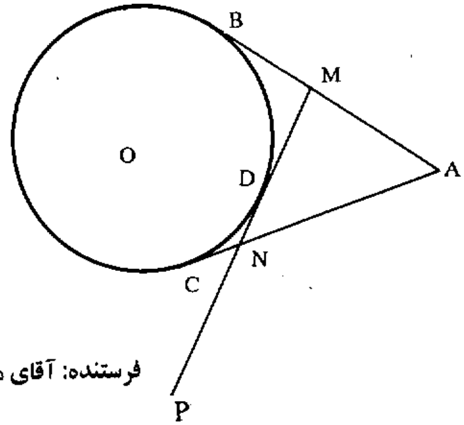
● هندسه: محمدهاشم رستمی
● ریاضیات جدید: حمیدرضا امیری
● جبر و مثلثات: احمد قندهاری ـ محمدرضا هاشمی ـ مهدی قمصری

مسائل ریاضیات سال اول

۱ ـ روی کمان $\overset{\frown}{AB}$ از دایره‌ای مفروض نقطه‌ای تعیین کنید که مجموع فاصله‌اش از دو سر وتر AB ماگزیمم مقدار ممکن باشد.



۲ ـ از نقطهٔ ثابت A دو مماس AB و AC را بر دایرهٔ (C) رسم می‌کنیم و از نقطهٔ دلخواه 'P واقع در صفحه این دایره خط دیگری بر دایره مماس رسم می‌کنیم تا خطوط AB و AC را در نقاط M و N قطع کند. ثابت کنید که محیط مثلث AMN مقدار ثابتی است.



فرستنده: آقای محمدرضا ضرابی

۳ ـ بدون استفاده از جدول ثابت کنید گزارهٔ $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ همیشه درست است.

۴ ـ هرگاه داشته باشیم $A = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$، اولاً، معین کنید مجموعهٔ A دارای چند زیر مجموعه است. ثانیاً، مجموعه‌ای چون B تشکیل دهید که زیر مجموعهٔ A بوده و داشته باشیم $\{a\} \in B$ و $\{a\} \subset B$.

۵ ـ اگر برای سه مجموعهٔ A و B و C داشته باشیم $A \cap C = \phi$، ثابت کنید $A - (B - C) = (A - B) - C$

۶ ـ **از مهران امیری، دبیرستان حکمت مشهد دانش آموز سال دوّم.**

اگر $A = x + \frac{1}{x}$، حاصل عبارت $x^7 + \frac{1}{x^7}$ را برحسب A محاسبه کنید.

۷ ـ مقدار تقریبی عبارت زیر را بیابید.

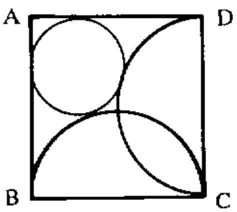
$$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(-3)^2} + \sqrt{0/5} + \sqrt{0/1}$$

۸ ـ دستگاه مقابل را حل کنید:

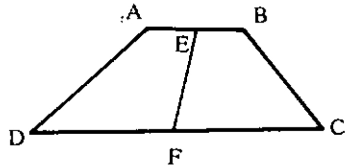
$$\begin{cases} \dfrac{14}{2x+y} + \dfrac{7}{y+z} = 3 \\[2mm] \dfrac{21}{y+z} + \dfrac{20}{2z+x} = 5 \\[2mm] \dfrac{10}{x+2z} + \dfrac{7}{2x+y} = 2 \end{cases}$$

مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱ ـ مربع ABCD مفروض است. دو نیمدایره به اقطار CD و BC و در داخل مربع رسم می‌کنیم. شعاع دایره‌ای را که بر اضلاع AB و AD و دو نیمدایره رسم شده مماس است تعیین کنید.



۲ ـ در ذوزنقه ABCD دو زاویهٔ C و D متمم یکدیگرند. ثابت کنید پاره‌خطی که وسطهای دو قاعده را به هم وصل می‌کند نصف تفاضل دو قاعده است.



۳ ـ ثابت کنید برای هر ۴ مجموعهٔ دلخواه مانند A و B و C و D داریم:

$$(A\times C)\cap(B\times D)=(A\cap B)\times(C\cap D)$$

۴ ـ رابطهٔ R روی IR^2 به‌صورت زیر تعریف می‌شود، اولاً، ثابت کنید R یک رابطهٔ هم ارزی است. ثانیاً، کلاس هم ارزی [(۱ , ۲)] را مشخص کنید

$$(x,y)R(z,t)\Leftrightarrow(y-t)=3(x-z)$$

۵ ـ عمل * روی مجموعهٔ $IR-\{-1\}$ به‌صورت $a * b = ab + a + b$ تعریف شده اولاً، نشان دهید $IR-\{-1\}$ همراه با عمل * یک گروه آبلی است. ثانیاً، معادلهٔ $(4 * x)' = (2' * 3)$ را در این گروه حل کنید.

۶ ـ (از حسین کُردپور، دبیرستان استقلال بوکان دانش‌آموز سال سوم)

اگر $A\left|\begin{matrix}2\\4\end{matrix}\right.$ رأس زاویه قائمه مثلث ABC باشد، وتر BC روی خط $y = 2$ قرار دارد. نقطه C روی پاره‌خط AO قرار دارد. مطلوب است مختصات دو رأس B و C.

۷ ـ اگر ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$، x' و x'' باشد مطلوب است محاسبهٔ $x'^{18} + x''^{18}$.

۸ ـ حاصل عبارت $\lg_a \lg_a \underbrace{\sqrt[a]{\sqrt[a]{\dots\sqrt[a]{a}}}}_{n\ \text{مرتبه}}$ را بیابید. $\begin{cases} n\in N \\ a>0 \end{cases}$

۹ ـ اگر $a \sin^2x - b \cos^2x = a - b$ باشد، ثابت کنید

$$\frac{\sin^4x}{a}+\frac{\cos^4x}{b}=\frac{1}{a+b}$$

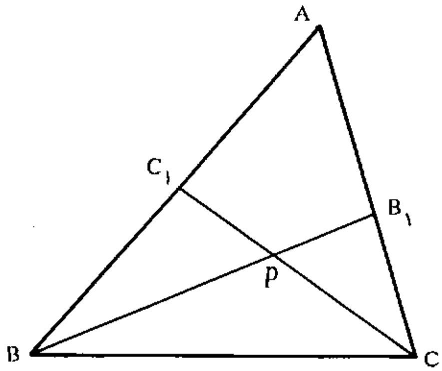
(آقای اسماعیل مهدوی دانش‌آموز رشته تجربی آمل)

۱۰ ـ اگر $4^{\sin^2x} - 4^{\cos^2x} = \sqrt{2}$ باشد،مقدار عبارت $4^{\sin^2x}$ را حساب کنید

(آقای سعید رضایی دانش‌آموز رشته ریاضی زنجان)

مسائل ریاضیات سال سوّم ریاضی

۱ ـ در مثلث ABC نقطهٔ P را در درون آن اختیار می‌کنیم. خطوط راست BP و CP اضلاع روبه رو را به ترتیب در B_1 و C_1 قطع می‌کنند. اگر بدانیم که هم مساحتها و هم محیطهای دو مثلث PBC_1 و PCB_1 با هم برابرند. آنگاه ثابت کنید P روی نیمساز درونی زاویهٔ A قرار دارد.



آزمون مرحلهٔ اول یازدهمین المپیاد ریاضی ایران ۱۳۷۲/۹/۵

۲ ـ در چهاروجهی ABCD یالهای CD و AB بر یال BC عمود بوده یالهای CD و AB نیز بر هم عمودند و $AB = 4a$ و $BC = CD = 6a$ می‌باشد.

۱) ثابت کنید وجوه این چهاروجهی مثلثهای قائم‌الزاویه می‌باشند.

۲) حجم چهاروجهی را محاسبه کنید.

۳ ـ فرض کنید V فضای برداری توابع از IR به IR باشد، نشان دهید $W = \{f \in V \,/\, f(5) = 0\}$ یعنی مجموعهٔ توابعی از V که مقدار آنها به ازای ۵، صفر است، یک زیرفضای V است.

۴ ـ ۴ خودکار را از میان ۱۵ خودکار که ۶ عدد از آنها بدون هیچ علامتی خراب است، انتخاب می‌کنیم. احتمال آن را حساب کنید که:الف) هیچکدام خراب نباشند ب) اقلاً یکی خراب باشد ج) حداکثر ۳ خودکار خراب باشد.

۵ ـ سکهٔ سالمی را ۶ بار پرتاب می‌کنیم. احتمال آن را حساب کنید که در دفعهٔ اول و دوم و سوم «پشت» بیاید و در دفعات بعد «رو» بیاید.

۶ ـ **(از وحید صادقی پورگرچین قلعه، شهرستان ارومیه دانش‌آموز سال سوم)**

مطلوب است رسم نمودار رابطه $\left[\frac{y+۲}{۲}\right]+\left[\frac{-x+۲}{۲}\right]=۰$ وقتی $-۴\le x<۲$ باشد.

۷ ـ **(از عارف ادیبی، شهرستان مشهد دانش‌آموز سال سوم)**

ثابت کنید عبارت $A=(۲۲۲)^{۳۳۳}+(۳۳۳)^{۲۲۲}$ بر (۱۳) بخش‌پذیر است.

۸ ـ تابع هموگرافیکی چنان مشخص کنید که خط $x=۲$ مجانب قائم و خط $y=۱$ مجانب افقی آن باشد و منحنی تابع از نقطه $A\left|\begin{matrix}۱\\۴\end{matrix}\right.$ بگذرد.

۹ ـ با فرض $a>b$ عبارت $P=\frac{a+b}{a-b}$ را قابل محاسبه لگاریتمی کنید.

(فرستنده: آقای مسعود فلاح دانش‌آموز رشته ریاضی (اصفهان))

۱۰ ـ نشان دهید:

$$tg۵^\circ\, tg۵۵^\circ\, tg۶۵^\circ\, tg۷۵^\circ=۱$$

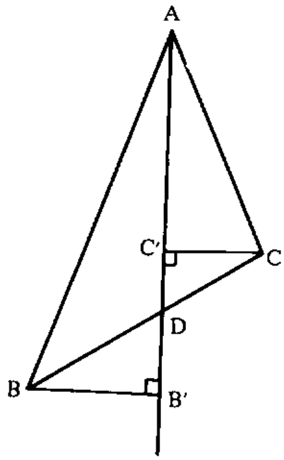
۱۱ ـ معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید:

$$\cos^۲x+\cos^۲\left(\frac{\pi}{۳}-x\right)=\frac{۳}{۲}$$

(فرستندهٔ مسائل ۱۰ و ۱۱: آقای بهزاد کاظمی دیپلمهٔ رشته علوم تجربی (اهواز))

مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱ ـ نقطهٔ D پای نیمساز درونی زاویهٔ A از مثلث ABC را رسم می‌کنیم و تصاویر رأسهای B و C روی این نیمساز و امتداد آن را B' و C' می‌نامیم. ثابت کنید نقاط A و D و B' و C' تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند.



۲ ـ دو صفحهٔ $P: x+۲y-z-۱=۰$ و $P': ۲x-y+۳z+۲=۰$ مفروض‌اند.

معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از نقطهٔ $A(۲,-۱,۳)$ و فصل مشترک دو صفحهٔ P و P' می‌گذرد.

۳ ـ دودایره $C: x^۲+y^۲-۲x-۱=۰$ و $C': x^۲+y^۲+۴x-۱=۰$ و بیضی به معادلهٔ $۴x^۲+y^۲-۸x+۴y+۴=۰$ مفروض‌اند. نقطه‌ای روی این بیضی بیابید که نسبت به دو دایرهٔ فوق قوت برابر داشته باشد.

۴ ـ نشان دهید بحث زیر معتبر است:

$$\big(p\Rightarrow(q\vee r)\big)\wedge\big((q\vee s)\Rightarrow t\big)\wedge\sim t\wedge p\to r$$

۵ ـ آیا مجموعهٔ $A=\{x,x+۲,x+۲^۲,x+۲^۳,\dots,x+۲^۶\}$ یک دستهٔ کامل مانده‌ها به پیمانه ۷ است؟ چرا؟

۶ ـ با استفاده از ماتریس تبدیلات قرینهٔ خط $۳x+۲y=۶$ را نسبت به خط $y=۲x$ به‌دست آورید.

۷ - بدون بسط و با استفاده از ویژگیهای دترمینان ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} a & x-t & ay+az \\ a & y-t & ax+az \\ a & z-t & ax+ay \end{vmatrix} = ۰$$

۸ - مطلوب است محاسبهٔ $n \in N$،

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{۱}{n^۴} + \frac{۲}{n^۴} + \frac{۳}{n^۴} + \dots + \frac{n^۲}{n^۴} \right)$$

۹ - ثابت کنید منحنی تابع به معادله $y = \dfrac{x}{x^۲+x+۳}$ دارای سه نقطه عطف است.

۱۰ - مطلوب است محاسبه انتگرال مقابل

$$\int \frac{dx}{a^۲\sin^۲x + b^۲\cos^۲x}$$

مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

۱ - در مثلث ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ اگر $۴a = ۵b$ باشد، ثابت کنید که اضلاع مثلث تشکیل تصاعد عددی می‌دهند.

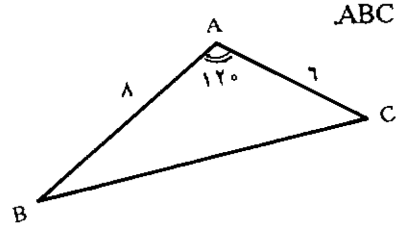
فرستنده: آقای علیرضا فاضلی از کتالم رامسر.

۲ - در مثلث ABC اندازهٔ اضلاع AB و AC به‌ترتیب برابر ۸ و ۶ سانتی‌متر و اندازهٔ زاویهٔ A برابر ۱۲۰° است. مطلوب است محاسبهٔ:

۱) اندازهٔ ضلع BC.

۲) اندازه ارتفاع رأس C

۳) مساحت مثلث ABC.



۳ - مقدار k را چنان تعیین کنید که بین ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲ - kx + ۲ = ۰$ رابطهٔ $۲x' - ۲x'' = ۳x'x''$ برقرار باشد.

(فرستنده: آقای حسین پیروتی‌نژاد دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (پیرانشهر))

۴ - عبارت زیر را تجزیه کنید:

$$x^۴ + ۲x^۲ \cos \alpha x + ۱$$

(فرستنده: آقای رضا ابرازی دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران))

۵ - معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$۴^{x + \sqrt{x^۲ - ۲}} - ۵ \times ۲^{x - ۱ + \sqrt{x^۲ - ۲}} = ۶$$

(فرستنده: خانم لیلا جعفری دانش‌آموز رشته ریاضی (قم))

۶ - مقدار عددی عبارت $tg^۲\left(\frac{۱}{۲} \operatorname{Arc}\cos\left(\frac{۲}{۳}\right)\right)$ را به‌دست آورید.

(فرستنده: آقای اسماعیل کاظمی مقدّسی دیپلمهٔ فنی (لنگرود))

۷ - بررسی کنید که آیا معادلهٔ $\cos^۷x \sin x = ۱$ دارای جواب است؟

(فرستنده: آقای حسین محمودی‌نیا دانش‌آموز رشته تجربی (لنگرود))

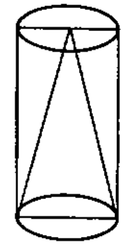
مسائل ریاضیات سال سوّم تجربی

۱ - نقاط $A(-۱, ۲)$ و $B(۳, ۴)$ و $C(۱, ۰)$ رئوس مثلث ABC مفروض‌اند. اندازهٔ بردار مکان مرکز ثقل مثلث (نقطه برخورد میانه‌های مثلث) را تعیین کنید.

۲ - اگر $\overrightarrow{AB} = ۶$ ، $\overrightarrow{AC} = ۸$ ، $B\hat{A}C = ۶۰^\circ$ باشد مطلوب است محاسبهٔ:

$$(۳\overrightarrow{AB}).(-۴\overrightarrow{AC})$$

۳ ـ مخروط دواری به شعاع قاعدهٔ ۴ سانتی‌متر در استوانه دواری محاط است. اگر حجم مخروط برابر ۴۸π سانتی‌متر مکعب باشد ارتفاع استوانه را حساب کنید.



۴ ـ مقدار $\lim\limits_{x\to -y}\left(\frac{\sin x+\sin y}{tgx+tgy}\right)$ را حساب کنید.

(فرستنده: کیانوش یزدی دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (لنگرود))

۵ ـ مشتق تابع به ضابطهٔ $y=\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\dots}}}$ را به‌دست آورید.

(اسماعیل کاظمی دیپلمهٔ فنی (لنگرود))

۶ ـ معادلهٔ خط مماس بر منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[۵]{۲x^۳+۲}$ در نقطهٔ تقاطع خط $y+x=-۱$ با محور طولها را به‌دست آورید.

۷ ـ معادله زیر را حل کنید:

$$\sec ۳\left(\frac{\pi}{۴}-x\right)+\sin\left(۳x-\frac{\pi}{۴}\right)=۲$$

(فرستنده: آقای امیرحسین بسطامی دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران))

۸ ـ حاصل عبارت زیر را حساب کنید.

$$P=\cos\frac{\pi}{۴۸}\cos\frac{\pi}{۲۴}\cos\frac{\pi}{۱۲}$$

(فرستنده: آقای مسعود فلاح دانش‌آموز رشته ریاضی (اصفهان))

۹ ـ اگر $\alpha=\frac{\pi}{۹}$ باشد، ثابت کنید:

$$۱۶\cos\alpha\cos۲\alpha\cos۳\alpha\cos۴\alpha=۱$$

(فرستنده: آقای بهزاد کاظمی دیپلمهٔ رشته علوم تجربی (اهواز))

مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱ ـ ضریب زاویهٔ خط قائم بر منحنی تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۳-۳x^۲+۴$ را در نقطه عطفش به‌دست آورید.

۲ ـ اگر منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $y=\frac{nx+m}{x+n}$ محور xها را در $x=-۱$ قطع کند و خط $x=-۲$ مجانب منحنی باشد، m و n را حساب کنید.

۳ ـ معادلهٔ مکان هندسی مرکز تقارن تابع با ضابطهٔ $y=\frac{x\sin^۲t-۲}{x-\cos^۲t}$ را به‌دست آورید.

۴ ـ معادلهٔ بیضی‌که‌نقاط $F(۳,۲+\sqrt{۱۵})$ و $F'(۳,۲-\sqrt{۱۵})$ کانونهای آن و قطر کوچکش نصف قطر بزرگ آن باشد را به‌دست آورید.

۵ ـ تابع اولیهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۳x}{\sqrt{۳x-۱}}$ را به‌دست آورید.

(فرستنده: آقای بهزاد کاظمی دیپلمهٔ رشتهٔ علوم تجربی (اهواز))

۶ ـ سطح محصور بین یک طاق منحنی تابع با ضابطهٔ $f(x)=\cos x\,(۳tgx-\sqrt{۳})$ و محور xها را حساب کنید. $(x\in[۰\,,\,۲\pi])$

۷ ـ درستی اتحاد مثلثاتی زیر را بررسی کنید:

$$۴(\sin^۳۷۰^\circ+\cos^۳۴۰^\circ)=۳\sqrt{۳}\cos۱۰^\circ$$

(فرستنده: آقای بهزاد کاظمی دیپلمهٔ رشتهٔ علوم تجربی (اهواز))

۸ ـ معادلهٔ زیر را درنظر می‌گیریم:

$$(m+۱)\sin^۲x+m\sin۲x+(m+۲)\cos^۲x=m-۲$$

الف) تعیین کنید به ازای چه مقادیری از m معادله دارای جواب است.

ب) m را چنان تعیین کنید که بین دو ریشهٔ اصلی معادله رابطهٔ $x'+x''=\mathrm{Arctg}\,(-۸)$ برقرار باشد.

(فرستنده: آقای محمدرضا قنبری‌راد دانش‌آموز رشته‌ریاضی (مشهد))

حل مسائل مسابقه‌ای برهان ۸

آقای عباس نجاتی از دانشگاه تبریز و آقای اصغر موسالو

۱ـ چهار عدد مفروض زیر که به تصاعد حسابی d می‌باشند را در نظر می‌گیریم:

$$a\ ,\ a+d\ ,\ a+2d\ ,\ a+3d$$

اینک ثابت می‌کنیم که اگر به حاصلضرب این چهار عدد مفروض d^4 را اضافه کنیم حاصل مربع کامل می‌شود:

$$a(a+d)(a+2d)(a+3d)+d^4=a(a+3d)(a+d)(a+2d)+d^4$$

$$=(a^2+3ad)(a^2+3ad+2d^2)+d^4$$

$$=(a^2+3ad)^2+2d^2(a^2+3ad)+d^4$$

$$=(a^2+3ad+d^2)^2 \qquad \text{(مربع کامل)}$$

(مسأله برای شش یا هشت عدد مفروض که به تصاعد حسابی d می‌باشند در حالت کلی قابل تعمیم نیست. ولی به حاصلضرب شش یا هشت عدد مفروض که به تصاعد حسابی d باشند می‌توان عبارتی غیر از d^4 افزود که به مربع کامل تبدیل شود.)

۲ـ برای حل معادلهٔ درجهٔ سوم کانونیک $x^3+px+q=0$ (۱) اتحاد مکعب زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(A+B)^3=A^3+B^3+3AB(A+B)$$

یا $$(A+B)^3-3AB(A+B)-(A^3+B^3)=0 \quad (2)$$

از مقایسه معادلهٔ (۱) و اتحاد (۲) داریم:

$$\begin{cases} x=A+B \\ p=-3AB \\ q=-(A^3+B^3) \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} A^3+B^3=-q \\ AB=-\frac{p}{3} \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} A^3+B^3=-q \\ A^3B^3=-\frac{p^3}{27} \end{array} \right.$$

ازدستگاه اخیر معادلهٔ درجهٔ دوم زیر که ریشه‌هایش A^3 و B^3 است نتیجه می‌شود:

$$y^2+qy-\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$$

$$\Rightarrow y=\frac{-q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3} \Rightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} A=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}} \\ B=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}} \qquad (3)$$

بدیهی است اگر $\Delta = 4p^3\ 27q^2 \geq 0$ باشد ریشهٔ معادله درجهٔ سوم کانونیک (۱) از فرمول (۳) به دست می‌آید.

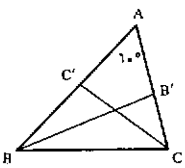
اسامی نفراتی که به یکی یا به هر دو مسألهٔ مسابقه‌ای پاسخ صحیح داده‌اند (بدون بحث روی تعمیم مسألهٔ ۱):

۱ـ آقای عباس نجاتی (۱ و ۲)
۲ـ آقای یوسف پاکدامن (۱ و ۲)
۳ـ آقای اصغر موسالو (۱ و ۲)
۴ـ آقای آرمان ابراهیمی (۱ و ۲)
۵ـ آقای جعفر قزوینی (۱ و ۲)
۶ـ آقای آرش نظری (۱)
۷ـ آقای بیژن صادقی (۱)
۸ـ آقای سلمان جریری (۱)
۹ـ آقای محمدرضا ایروانی (۱)
۱۰ـ آقای افشین دلیلی (۱)
۱۱ـ آقای صادق حسینی (۱)
۱۲ـ آقای علی اشراق (۱)
۱۳ـ خانم سامانه نیکزاد (۱)
۱۴ـ خانم مانا سپهوند (۱)
۱۵ـ آقای جلال حسینی (۱)
۱۶ـ آقای علی مهرعلی (۱)
۱۷ـ آقای علی دستپاک (۱)
۱۸ـ آقای محمد جدیدی (۱)

حل مسائل برهان شماره ۹

حل مسائل ریاضیات سال اول

۱ـ چون $\hat{A}=۶۰°$ است، پس در مثلث ABC داریم:



$$\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰°-۶۰°=۱۲۰° \Rightarrow$$
$$\frac{\hat{B}}{۲}+\frac{\hat{C}}{۲}=۶۰°$$

از طرفی زاویه‌های AC'C و BB'C زاویه‌های خارجی مثلثهای BCC' و ABB' می‌باشند پس:

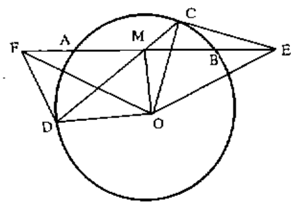
$$A\hat{C'}C=\hat{B}+\frac{\hat{C}}{۲}=\frac{\hat{B}}{۲}+\frac{\hat{B}}{۲}+\frac{\hat{C}}{۲}=\frac{\hat{B}}{۲}+۶۰° \quad (۱)$$
$$B\hat{B'}C=\hat{A}+\frac{\hat{B}}{۲}=۶۰°+\frac{\hat{B}}{۲} \quad (۲)$$

از مقایسهٔ روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود: $A\hat{C'}C=B\hat{B'}C$

۲ـ از نقطهٔ O مرکز دایره به نقاط E و C و M و F و D وصل می‌کنیم. چهارضلعیهای OMCE و OMFD محاطی‌اند زیرا: $O\hat{M}E=O\hat{C}E=۹۰°$ و $O\hat{M}F=O\hat{D}F=۹۰°$ پس:

$$O\hat{D}M=O\hat{F}M \ (۲) \quad , \quad O\hat{E}M=O\hat{C}M \ (۱)$$

از طرفی مثلث OCD متساوی الساقین است، چون OC = OD است



پس:

$$O\hat{D}M=O\hat{C}M \quad (۳)$$

از مقایسهٔ روابط (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌شود: $O\hat{E}M=O\hat{F}M$
یعنی مثلث OFE متساوی‌الساقین است و چون OM ارتفاع وارد بر قاعده است، عمودمنصف قاعده نیز می‌باشد. یعنی MF = ME. از طرفی MA = MB پس MF − MA = ME − MB و درنتیجه AF = BE است.

(حل از اشکان شکوری دانش‌آموز از رشت)

۳ـ چون طبق فرض $\left[(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(q\Rightarrow p)\right]\equiv F$ پس می‌بایست $(p\Rightarrow q)$ و $(q\Rightarrow p)$ هم‌ارز نباشند از طرفی چون $(\sim p\wedge r)\equiv T$ پس $\sim p\equiv T$ و $r\equiv T$ لذا باید $p\equiv F$ که بلافاصله نتیجه می‌دهد $(p\Rightarrow q)\equiv T$ (به انتفای مقدم). پس باید $(q\Rightarrow p)\equiv F$ و با توجه به اینکه $p\equiv F$ باید $q\equiv F$ لذا گزینهٔ داده شده یعنی $\underbrace{(q\Rightarrow r)}_{T}\Leftrightarrow\underbrace{(\sim p\Rightarrow\sim r)}_{F}$ گزاره‌ای نادرست است.

۴ـ داریم $A=\{(x+y),(۲x+۱),۲z\}$ و $B=\{۳,(۲y+۴),۶\}$، پس اگر A = B باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}x+y=۳\\ ۲x+۱=۶\\ ۲y+۴=۲z\end{cases} \Rightarrow x=\frac{۵}{۲},\ y=\frac{۱}{۲} \quad \xrightarrow{y=\frac{۱}{۲}} z=\frac{۵}{۲}$$

$$\begin{cases}x+y=۶\\ ۲x+۱=۳\\ ۲y+۴=۲z\end{cases} \Rightarrow x=۱,\ y=۵ \quad \xrightarrow{y=۵} z=۷$$

در ضمن حالتهای دیگری نیز وجود دارند.

۵ـ

$$\sqrt{۲-\sqrt{۳}}\times\sqrt[۴]{۷+۴\sqrt{۳}}$$
$$=\sqrt{۲-\sqrt{۳}}\times\sqrt[۴]{۴+۳+۴\sqrt{۳}}$$
$$=\sqrt{۲-\sqrt{۳}}\times\sqrt[۴]{(۲+\sqrt{۳})^{۲}}$$
$$=\sqrt{۲-\sqrt{۳}}\times\sqrt{۲+\sqrt{۳}}=\sqrt{۴-۳}=\sqrt{۱}=۱$$

۶ـ

$$a^{۲}(x-a)=b^{۲}(x-b)$$
$$a^{۲}x-a^{۳}=b^{۲}x-b^{۳}$$
$$(a^{۲}-b^{۲})x=a^{۳}-b^{۳}$$
$$(a-b)(a+b)x=(a-b)(a^{۲}+b^{۲}+ab)$$

معادله به اتحاد تبدیل شده است و بی‌شمار جواب دارد.

۱) $a=b \Longrightarrow ۰\times x=۰$

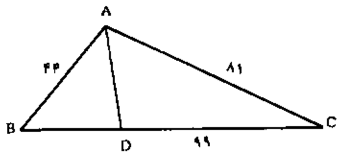
۲) $a+b=۰$ یا $a=-b\neq۰ \Longrightarrow ۰\times x=-۲b^{۳}$

تساوی غیرممکن است، معادله جواب ندارد.

۳) $a^{۲}\neq b^{۲} \Longrightarrow x=\dfrac{a^{۲}+b^{۲}+ab}{a+b}$ جواب یا ریشه معادله

حل مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱ ـ قطعات DB و DC و اندازهٔ نیمساز AD را محاسبه می‌کنیم.



$$DB = \frac{a.c}{b+c} = \frac{۹۹ \times ۴۰}{۴۰+۸۱} = \frac{۳۶۰}{۱۱}$$

$$DC = \frac{a.b}{b+c} = \frac{۹۹ \times ۸۱}{۱۲۱} = \frac{۷۲۹}{۱۱}$$

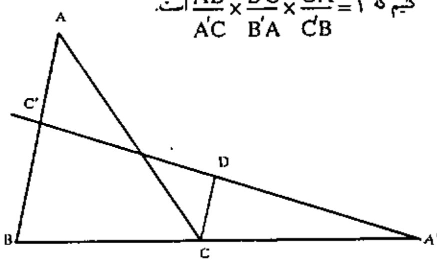
$$AB.AC = AD^۲ + DB.DC \Rightarrow ۴۰ \times ۸۱$$

$$= AD^۲ + \frac{۳۶۰}{۱۱} + \frac{۷۲۹}{۱۱} \Rightarrow$$

$$AD = \frac{۳۶۰}{۱۱} \Rightarrow AD = DB = \frac{۳۶۰}{۱۱}$$

$$\Rightarrow \hat{B} = \hat{A}_۱ , \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ = \frac{\hat{A}}{۲} \Rightarrow \hat{A} = ۲\hat{B}$$

۲ ـ خطی که دو یا چند خط را قطع کند مورب نامیده می‌شود به‌خصوص مورب به خطی گفته می‌شود که اضلاع یا امتداد اضلاع مثلثی را قطع کند. هر مورب مانند Δ یا امتداد سه‌ضلع مثلث را قطع می‌کند و یا دو ضلع و امتداد ضلع سوم مثلث را. بنابراین علامت اندازه جبری سه‌کسر $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$ ، $\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}$ ، $\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$ هرسه مثبت است یا دو منفی و یک مثبت می‌باشد لذا علامت حاصل ضرب $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$ همواره مثبت است. بنابراین کافی است ثابت کنیم که $\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = ۱$ است.



برای اثبات از رأس C خطی موازی ضلع AB رسم می‌کنیم تا مورب Δ را در نقطهٔ D قطع کند. طبق قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{C'B}{CD} \quad (۱) \quad \text{و} \quad \frac{B'C}{B'A} = \frac{CD}{C'A} \quad (۲)$$

$$(۱) \times (۲) \Rightarrow \frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} = \frac{C'B}{CD} \times \frac{CD}{C'A} = \frac{C'B}{C'A} \quad (۳)$$

طرفین رابطهٔ (۳) را در $\frac{C'A}{C'B}$ ضرب می‌کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = ۱ \Rightarrow \boxed{\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = ۱}$$

۳ ـ رابطه به شکل $xRy \Leftrightarrow xy \geq ۰$ روی z تعریف شده. خواص این رابطه را بررسی می‌کنیم:

$$۱)\ \forall x \in z \ ، \ x \times x = x^۲ \geq ۰ \Rightarrow xRx \Rightarrow$$

خاصیت بازتابی دارد

$$۲)\ \forall x , y \in Z \ ، \ x \times y \geq ۰ \Rightarrow y \times x \geq ۰ \Rightarrow$$

خاصیت تقارنی دارد

۳) می‌دانیم ۲R۳ و ۳R۲ ولی ۲ ≠ ۳ ⇐ خاصیت پاد تقارنی ندارد

۴) فرض کنیم $xRy \ , \ yRz \Rightarrow xy \geq ۰ \ , \ yz \geq ۰ \Rightarrow xzy^۲ \geq ۰$

$\xrightarrow{y^۲ \geq ۰} xz \geq ۰ \Rightarrow xRz \Rightarrow$ خاصیت ترایایی دارد

۴ ـ تابع داده شده به‌صورت $f ; IR^۲ \to IR^۲$

$$f(x,y) = \left(\frac{۲x - ۳}{x + ۲} , \frac{۳y + ۱}{y - ۴} \right)$$

تعریف شده است و چون هریک از مؤلفه‌ها برحسب متغیر خودشان توابعی یک به یک هستند لذا تابع در کل یک به یک است. برای بررسی خاصیت پوشایی داریم:

فرض کنیم $(a,b) \in IR^۲ \ , \ (a,b) = \left(\frac{۲x - ۳}{x + ۲} , \frac{۳y + ۱}{y - ۴} \right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{۲x - ۳}{x + ۲} = a & (۱) \\ \frac{۳y + ۱}{y - ۴} = b & (۲) \end{cases}$$

$$(۱) \Rightarrow ax + ۲a = ۲x - ۳ \Rightarrow ax - ۲x = -۳ - ۲a$$

$\Rightarrow x = \frac{۲a + ۳}{۲ - a} \Rightarrow$ به‌ازای $a = ۲$ ، x ای تعریف نمی‌شود

$$(۲) \Rightarrow by - ۴b = ۳y + ۱ \Rightarrow by - ۳y = ۴b + ۱$$

$\Rightarrow y = \frac{۴b + ۱}{b - ۳} \Rightarrow$ به‌ازای $b = ۳$ ، y ای تعریف نمی‌شود

لذا اگر مجموعهٔ دوم را به $IR - \{۲\} \times IR - \{۳\}$ تبدیل کنیم تابع پوشا خواهد شد.

۵ ـ با توجه به تعریف ماتریس داده شده داریم:

$$a_{۱۱} = ۱+۱ = ۲ \ , \ a_{۱۲} = ۱+۲ = ۳ \ , \ a_{۱۳} = ۱+۳ = ۴$$
$$a_{۲۱} = ۲+۱ = ۳ \ , \ a_{۲۲} = ۲+۲ = ۴ \ , \ a_{۲۳} = ۲+۳ = ۵$$
$$a_{۳۱} = ۳+۱ = ۴ \ , \ a_{۳۲} = ۳+۲ = ۵ \ , \ a_{۳۳} = ۳+۳ = ۶$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۵ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}$$

۶ ـ

$$a = m$$
$$b = -۲(m+۱)$$
$$c = (m-۱)$$

$$mx^۲ - ۲(m+۱)x + (m-۱) = ۰$$

$$۱) \quad \Delta' = b'^۲ - ac = (m+۱)^۲ - m(m-۱) = ۰$$
$$m^۲ + ۲m + ۱ - m^۲ + m = ۰ \Rightarrow ۳m + ۱ = ۰$$
$$\Rightarrow \boxed{m = -\frac{۱}{۳}}$$

$$۲) \quad \frac{c}{a} = \frac{m - ۱ = ۰}{m = ۰} \quad \begin{matrix} \Rightarrow m = ۱ \\ \Rightarrow m = ۰ \end{matrix}$$

$$۳) \quad -\frac{b}{a} = \frac{۲(m + ۱) = ۰}{m \quad = ۰} \quad \begin{matrix} \Rightarrow m = -۱ \\ \Rightarrow m = ۰ \end{matrix}$$

m	$-\infty$ … -۱	-۱ … $-\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$ … ۰	۰ … ۱	۱ … $+\infty$
Δ	−	−	+	+	+
$\frac{c}{a}$	+	+	+	−	+
$-\frac{b}{a}$	+	−	−	+	+
نتیجه			$x' < x'' < ۰$	$x' < ۰ < x''$ $\|x''\| > \|x'\|$	$۰ < x' < x''$
			۱	۲	۳

$$۱) \begin{cases} \Delta = ۰ \Rightarrow x' = x'' = -\frac{b}{۲a} = \frac{۲(m+۱)}{۲m} = \frac{m+۱}{m} = \frac{-\frac{۱}{۳}+۱}{-\frac{۱}{۳}} = -۲ \\ m = -\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

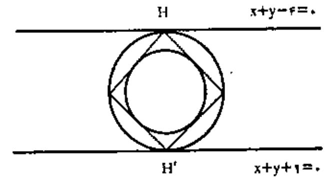
$$۲) \begin{cases} m = ۰ \xrightarrow{\text{درمعادله قرار می‌دهیم}} -۲x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$۳) \begin{cases} \Delta > ۰ \\ \frac{c}{a} = ۰ \\ -\frac{b}{a} > ۰ \end{cases} \Rightarrow x' = ۰ < x''$$

۷ ـ

$$HH' = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|-۴-۲|}{\sqrt{۱+۱}} = \frac{۶}{\sqrt{۲}} = \frac{۶\sqrt{۲}}{۲} = ۳\sqrt{۲}$$

HH' = طول قطر مربع = طول قطر دایره محیطی



$$\begin{cases} R=\frac{3\sqrt{2}}{2}\\ S=\pi R^2=\pi\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{9\pi}{2}\end{cases}$$

$3=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=$ طول قطر مربع / $\sqrt{2}$ = طول ضلع مربع

۳ = طول قطر دایره محاطی = طول ضلع مربع

$$\begin{cases} r=\frac{3}{2}\\ S'=\pi r^2=\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9\pi}{4}\end{cases}$$

$$S+S'=\frac{9\pi}{2}+\frac{9\pi}{4}=\frac{27\pi}{4}$$

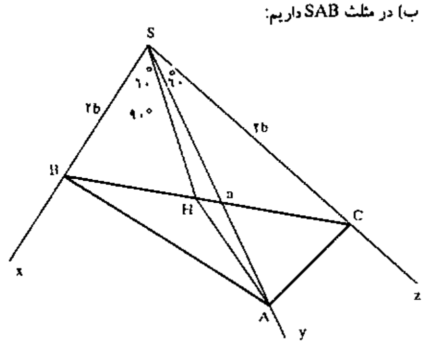
حل مسائل ریاضیات سال سوّم ریاضی

۱ ـ (حل از آقای م ـ ا ـ گیتی زاده دبیر ریاضی):

الف) نقطهٔ وسط پاره‌خط BC را H می‌نامیم. دو مثلث SAB و SAC با هم مساویند، پس AB = AC یعنی مثلث ABC متساوی‌الساقین و از آنجا BC بر AH عمود است.

مثلث SBC نیز متساوی‌الساقین است و درنتیجه BC بر SH عمود است. بنابراین، BC بر صفحهٔ مثلث SAH و لذا بر SA عمود می‌شود.

ب) در مثلث SAB داریم:



$$AB^2=a^2+4b^2-4ab\cos 60^\circ \Rightarrow$$

$$AB=AC=\sqrt{a^2-2ab+4b^2}$$

در مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین SBC:

$$BC=\sqrt{4b^2+4b^2}=2\sqrt{2}\,b$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH:

$$\begin{cases}\frac{BC}{2}=BH=b\sqrt{2}\\ \hat{H}=90^\circ\\ AB=\sqrt{a^2-2ab+4b^2}\end{cases}\Rightarrow AH=\sqrt{a^2-2ab+2b^2}$$

$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}BC.AH=\sqrt{2}\,b\sqrt{a^2-2ab+2b^2}$$

ج) چون b ثابت است مساحت مثلث ABC وقتی می‌نیمم می‌شود که $AH=\sqrt{a^2-2ab+2b^2}$ می‌نیمم باشد.

$$AH=\sqrt{(a-b)^2+b^2}\Rightarrow (a-b)^2=0\Rightarrow \boxed{a=b}$$

د) با فرض a = b داریم:

$$BC=2\sqrt{2}\,a\ ،\ SH=a\sqrt{2}\ ،\ AH=a$$

اولاً) چون HA و HS بر BC عمودند، زاویهٔ $A\hat{H}S=\alpha$ مسطحهٔ فرجهٔ مزبور است. پس،

$$\Delta SAH \Rightarrow SA^2=SH^2+AH^2-2SH.AH\cos\alpha \Rightarrow \alpha=45^\circ$$

ثانیاً) مثلث ASH در رأس A قائم‌الزاویه است، یعنی SA بر AH و BC عمود و در نتیجه بر صفحه مثلث ABC عمود است. اگر قاعدهٔ هرم SABC را مثلث ABC بگیریم، ارتفاع آن SA است. بنابراین:

$$V=\frac{1}{3}S_{ABC}.SA=\frac{1}{3}a^2\sqrt{2}\times a \Rightarrow V=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

۲ ـ هرگاه در رابطهٔ الف) قرار دهیم $x=y=\overline{O}_V$ خواهیم داشت:

اولاً: $T(\overline{O}_V+\overline{O}_V)=T(\overline{O}_V)\oplus T(\overline{O}_V)$

$$\xrightarrow{\overline{O}_V+\overline{O}_V=\overline{O}_V} T(\overline{O}_V)=T(\overline{O}_V)\oplus T(\overline{O}_V)$$

و چون $T(O_V)$ عضوی از فضای W است بنابراین بنابر قانون حذف در گروه $(W,\oplus)$؛ با حذف $T(O_V)$ از طرفین داریم: $T(O_V)=O_W$

ثانیاً: فرض کنیم r_1 و r_2 و ... و r_n اعدادی حقیقی باشند به‌طوری که

$$r_1.T(x_1)\oplus r_2.T(x_2)\oplus\ldots\oplus r_n.T(x_n)=O_W$$

حال با توجه به رابطهٔ (ب) و اینکه $O_W=T(O_V)$ خواهیم داشت:

$$T(r_1.x_1)\oplus T(r_2.x_2)\oplus\ldots\oplus T(r_n.x_n)=T(O_V)$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به الف}} T(r_1.x_1+r_2.x_2+\ldots+r_n.x_n)=T(O_V)$$

$$\xrightarrow{\text{T یک به یک است}} x_1.x_1+x_2.x_2+\ldots+r_n.x_n=O_V$$

از طرفی x_1 و x_2 و ... و x_n در فضای برداری V استقلال خطی دارند پس باید: $r_1=r_2=\ldots=r_n=0$ ؛ یعنی $T(x_1)$ و $T(x_2)$ و ... و $T(x_n)$ در فضای W مستقل خطی هستند.

۳ـ $a'b'c'+a'b'c+a'bc'+ab'c'+a'b+a'c+bc'$

$$=\underbrace{a'b'c'+a'b'c'+a'b'c'}_{a'b'c'}+a'b'c+a'bc'+ab'c'+a'b+a'c+bc'$$

$$=a'b'\underbrace{(c'+c)}_{1}+a'c'\underbrace{(b'+b)}_{1}+b'c'\underbrace{(a'+a)}_{1}+a'b+a'c+bc'$$

$$=a'\underbrace{(b'+b)}_{1}+a'\underbrace{(c'+c)}_{1}+c'\underbrace{(b'+b)}_{1}=a'+a'+c'=a'+c'$$

۴ـ

الف) $\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{5}$

۱۲۰ = ۱×۲×۳×۴×۵ = تعداد اعداد ۵ رقمی مضرب ۵ با رقم یکان صفر

۵

$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{4}$

۹۶ = ۱×۲×۳×۴×۴ = تعداد اعداد ۵ رقمی مضرب ۵ با رقم یکان ۵

۲۱۶ = ۹۶ + ۱۲۰ = تعداد کل

۵ ۴

ب) $\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{1}$

۲۴ = ۲×۳×۴ = تعداد ۵ رقمی فرد و بزرگتر از ۴۰۰۰۰ با رقم یکان ۵

۱ یا ۳ ۴ یا ۵

$\boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{2}$

۹۶ = ۲×۲×۳×۴×۲ = تعداد ۵ رقمی فرد و بزرگتر از ۴۰۰۰۰ با رقم یکان ۱ یا ۳

۱۲۰ = ۲۴ + ۹۶ = تعداد کل

۱یا۳یا۵ ۲یا۴

۲۴ = ۱×۲×۲×۳×۲ = $\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{2}$ (ج

مکان۱ مکان۲ مکان۳ مکان۴ مکان۵

۵ـ حد $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-3x+2)}{(x-1)^2}=\frac{\sin 0}{0}=\frac{0}{0}$

$$\begin{cases}\text{اگر: } x\to 0\Rightarrow \sin\alpha\sim\alpha \text{ می‌دانیم}\\ \Rightarrow x\to 1\Rightarrow x^2-3x+2\to 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin(x^2-3x+2)\sim(x^2-3x+2)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^3-3x+2)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{x+2}{1} = \boxed{3}$$

توجه: x^3-3x+2 را بر $(x-1)$ تقسیم می‌کنیم تا تجزیه شود:

۶ـ $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

از طرفین تساوی نسبت به x مشتق می‌گیریم: $y\sqrt[3]{x^2}=1$

$$y'\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}y=0 \Rightarrow \frac{3xy'+2y}{3\sqrt[3]{x}}=0$$

از طرفین تساوی نسبت به x مشتق می‌گیریم: $\Rightarrow 3xy'+2y=0$

$$3(1\times y'+y''x)+2y'=0$$

$$3y'+3xy''+2y'=0 \Rightarrow 3xy''+5y'=0$$

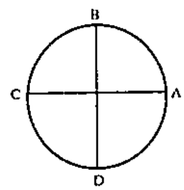
۷ـ $\cos 8x(\sin x+\sin 9x)=2 \Rightarrow \sin x+\sin 9x=\dfrac{2}{\cos 8x}$

با توجه به اینکه $\left|\dfrac{2}{\cos 8x}\right|\ge 2$ معادلهٔ فوق درصورتی امکان‌پذیر است که:

$$\begin{cases}\sin x=1\\ \sin 9x=1\\ \cos 8x=1\end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases}\sin x=-1\\ \sin 9x=-1\\ \cos 8x=-1\end{cases}$$

در حالت اوّل

$$\begin{cases}x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\\ 9x=2k'\pi+\frac{\pi}{2}\\ 8x=2k''\pi\end{cases}$$



انتهای قوس $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ نقطه B و انتهای ۹ برابر آن $9x=18k\pi+\frac{9\pi}{2}$ دوباره نقطه B و انتهای ۸ برابر آن $8x=16k\pi+4\pi$ نقطه A می‌باشد بنابراین صورت کلی جوابها به صورت $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ می‌باشد.

و در حالت دوم

$$\begin{cases}x=2k\pi-\frac{\pi}{2}\\ 9x=2k'\pi-\frac{\pi}{2}\\ 8x=2k''\pi+\pi\end{cases}$$

انتهای کمان $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ نقطه D و انتهای ۹ برابر آن همان نقطه D ولی انتهای کمان $8x=16k\pi-4\pi$ نقطه A می‌شود لذا در این حالت مسئله جواب ندارد.

۸ـ

$$(1+tgx)^7=1+7tgx+21tg^2x+35tg^3x+35tg^4x+21tg^5x+7tg^6x+tg^7x$$

دقت در روش بسط tgnx برحسب tgx بکنید $(n\in N)$

$$tg7x=\frac{7tgx-35tg^3x+21tg^5x-tg^7x}{1-21tg^2x+35tg^4x-7tg^6x}$$

هرگاه بنویسیم $tg7x=0 \Rightarrow x=\frac{k\pi}{7}$

هفت جواب از رشته جواب $x=\frac{k\pi}{7}$ که دارای تانژانتهای متمایز می‌باشند عبارت است از:

$$x=0 \text{ و } \pm\frac{\pi}{7} \text{ و } \pm\frac{2\pi}{7} \text{ و } \pm\frac{3\pi}{7}$$

حالات صورت کسر را صفر قرار می‌دهیم:

$$tg^7x-21tg^5x+35tg^3x-7tgx=0$$

این معادله درجه‌هفتم‌هفت مقدارمتمایزبرای tgx می‌دهد که عبارتند از

$$tg0,\ \pm tg\frac{\pi}{7},\ \pm tg\frac{2\pi}{7},\ \pm tg\frac{3\pi}{7}$$

$$tgx(tg^6x-21tg^4x+35tg^2x-7)=0$$

هرگاه $tgx=0$ را از معادله خارج $z=tg^2x$ اختیار کنیم داریم:

$$\underset{a}{Z^3}-\underset{b}{21Z^2}+\underset{c}{35Z}-\underset{d}{7}=0$$

که $Z_1=tg^2\frac{\pi}{7}$ و $Z_2=tg^2\frac{2\pi}{7}$ و $Z_3=tg^2\frac{3\pi}{7}$ آنگاه

$$\begin{cases}Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2=S^2-2p \text{ که } S=-\frac{b}{a}=21,\ p=\frac{c}{a}=35,\\ Q=-\frac{d}{a}=7\\ Z_1^3+Z_2^3+Z_3^3=S^3-3ps+3Q\end{cases}$$

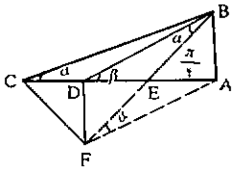
$$tg^4\frac{\pi}{7}+tg^4\frac{2\pi}{7}+tg^4\frac{3\pi}{7}=21^2-70=371$$

$$tg^6\frac{\pi}{7}+tg^6\frac{2\pi}{7}+tg^6\frac{3\pi}{7}=21^3-3\times35\times21+21=7077$$

۸ـ مثلث قائم‌الزاویه ABC را $(A=90^\circ)$ چنان اختیار می‌کنیم که $AC=3AB$ باشد و بوسیلهٔ نقاط D و E ، AC را به سه قسمت مساوی $CD=DE=EA=AB$ تقسیم می‌کنیم:

$$tg\alpha=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{3}\Rightarrow \alpha=Arctg\frac{1}{3}$$

$$tg\beta=\frac{AB}{AD}=\frac{1}{2}\Rightarrow \beta=Arctg\frac{1}{2}$$



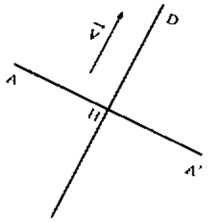
هرگاه از نقطه D عمود $DF=AB$ را بر ضلع AC اخراج کنیم شکل ABDF متوازی الاضلاع می‌باشد و $\hat{A}=90^\circ$ و $C\hat{F}E=90^\circ$

لذا نقاط A و F از دو سر وتر BC زاویه قائمه دیده می‌شود و شکل ABCF چهارضلعی محاطی است در نتیجه $A\hat{F}B=A\hat{C}B=\alpha$

همچنین $D\hat{B}E=\alpha$ و در مثلث DEB داریم $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$ و حکم ثابت است.

حل مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱ـ راه اول: پای عمودی را که از نقطهٔ A بر خط D رسم می‌شود H می‌نامیم و AH را به‌اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ A' قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خط D به‌دست آید. بنابراین اگر مختصات نقطهٔ H را محاسبه کنیم، مختصات نقطهٔ A' را می‌توانیم به‌دست آوریم:



$$D:\ 3x-1=-2y+3=z-1=t \Rightarrow$$

$$H\left|\begin{array}{l}x=\frac{t+1}{3}=\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}\\ y=\frac{t-3}{-2}=\frac{-1}{2}t+\frac{3}{2}\\ z=t+1\end{array}\right.$$

$$A\left|\begin{array}{l}-1\\ 2\\ 3\end{array}\right. \Rightarrow \vec{AH}\left|\begin{array}{l}\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}+1=\frac{1}{3}t+\frac{4}{3}\\ \frac{-1}{2}t+\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\\ t+1-3=t-2\end{array}\right.$$

بردار هادی خط D $\quad \vec{V}\left|\begin{array}{l}\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{2}\\ 1\end{array}\right.$ و

$$\vec{AH} \perp D \Rightarrow \vec{AH} \perp \vec{V}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}t+\frac{4}{3}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\right)+1(t-2)=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9}t+\frac{4}{9}+\frac{1}{4}t+\frac{1}{4}+t-2=0$$

$$\Rightarrow 4t+16+9t+9+36t-72=0$$

$$49t=47 \Rightarrow t=\frac{47}{49} \Rightarrow H \left| \begin{array}{l} \frac{32}{49} \\ \frac{50}{49} \\ \frac{96}{49} \end{array} \right.$$

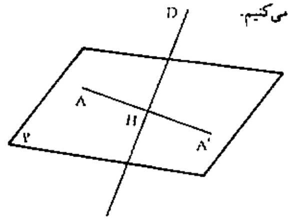
$$x_A+x_{A'}=2x_H \Rightarrow -1+x_{A'}=2\left(\frac{32}{49}\right) \Rightarrow x_{A'}=\frac{113}{49}$$

$$y_A+y_{A'}=2y_H \Rightarrow 2+y_{A'}=\frac{100}{49}$$

$$\Rightarrow y_{A'}=\frac{2}{49} \Rightarrow A' \left| \begin{array}{l} \frac{113}{49} \\ \frac{2}{49} \\ \frac{45}{49} \end{array} \right.$$

$$z_A+z_{A'}=2z_H \Rightarrow 3+z_{A'}=\frac{192}{49} \Rightarrow z_{A'}=\frac{45}{49}$$

راه دوم: معادلهٔ صفحه‌ای را که از نقطهٔ A بر خط D عمود رسم می‌شود می‌نویسیم و نقطهٔ تقاطع آن با خط D را H می‌نامیم. آنگاه مختصات نقطهٔ 'A را با توجه به این نکته که H وسط پاره‌خط 'AA است محاسبه می‌کنیم.



$$D: 3x-1=-2y+3=z-1 \Rightarrow$$
$$3\left(x-\frac{1}{3}\right)=-2\left(y-\frac{3}{2}\right)=z-1 \Rightarrow$$
$$\frac{x-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}=\frac{y-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}=\frac{z-1}{1} \Rightarrow \frac{x-\frac{1}{3}}{2}=\frac{y-\frac{3}{2}}{-3}=\frac{z-1}{6}$$

$A \left| \begin{array}{l} -1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right.$ و بردار خط D. $\Rightarrow \vec{V}(2,-3,6)$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \Rightarrow$$
$$2(x+1)-3(y-2)+6(z-3)=0 \Rightarrow$$

معادلهٔ صفحهٔ P $\quad 2x-3y+6z-10=0$

$$\begin{cases} 3x-1=-2y+3=z-1=t \Rightarrow x=\frac{t+1}{3} \quad y=\frac{t-3}{-2}, \quad z=t+1 \\ 2x-3y+6z-10=0 \end{cases}$$

$$2\left(\frac{t+1}{3}\right)-3\left(\frac{t-3}{-2}\right)+6(t+1)-10=0 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{3}t+\frac{2}{3}+\frac{3}{2}t-\frac{9}{2}+6t+6-10=0 \Rightarrow t=\frac{47}{49}$$

$$\Rightarrow H\left(\frac{32}{49},\frac{50}{49},\frac{96}{49}\right) \Rightarrow A'\left(\frac{113}{49},\frac{2}{49},\frac{45}{49}\right)$$

۲ ـ دایرهٔ به معادلهٔ $x^2+y^2+ax+by+c=0$ را درنظر می‌گیریم و شرط عمود بودن این دایره بر دایره‌های به معادلهٔ

$$x^2+y^2+(m^2-1)x-2my+(m+1)^2=0$$

را می‌نویسیم:

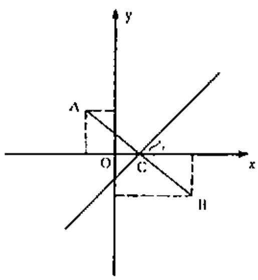
$$aa'+bb'-2c-2c'=0 \Rightarrow$$
$$a(m^2-1)+b(-2m)-2c-2(m+1)^2=0 \Rightarrow$$
$$(a-2)m^2-(2b+4)m-a-2c-2=0 \qquad (1)$$

شرط لازم و کافی برای آنکه دایره‌های داده شده، به ازاء همه مقادیر m بر دایرهٔ به معادلهٔ $x^2+y^2+ax+by+c=0$ عمود باشد، آن است که رابطهٔ (۱) نسبت به m اتحاد باشد یعنی داشته باشیم:

$$\begin{cases} a-2=0 \\ +2b+4=0 \\ -a-2c-2=0 \end{cases} \Rightarrow a=2, \; b=-2, \; c=0$$

معادلهٔ دایرهٔ ثابت $\Rightarrow \boxed{x^2+y^2+2x-2y=0}$

۳ ـ مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که از دو نقطهٔ $A(-1,2)$ و $B(3,-2)$ می‌گذرند عمودمنصف پاره‌خط AB است که چون $c(1,0)$ وسط پاره‌خط AB و $m/AB=-1$ است. پس معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB به‌صورت زیر است:



$$y-0=1(x-1) \Rightarrow y=x-1$$

طول مرکز دایرهٔ مورد نظر را α فرض می‌کنیم خواهیم داشت:

$$O'(\alpha,\alpha-1), A(-1,2)$$

$$\Rightarrow O'A=R=\sqrt{(\alpha+1)^2+(\alpha-3)^2}=\sqrt{2\alpha^2-4\alpha+10}$$

$$\Rightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$$
$$\Rightarrow (x-\alpha)^2+(y-\alpha+1)^2=2\alpha^2-4\alpha+10$$

$$\begin{cases} (x-\alpha)^2+(y-\alpha+1)^2=2\alpha^2-4\alpha+10 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-\alpha)^2+(-\alpha+1)^2=2\alpha^2-4\alpha+10$$

معادلهٔ تلاقی دایره با محور xها $\quad \Rightarrow x^2-2\alpha x+2\alpha-9=0$

اگر نقاط تلاقی $M\left|\begin{array}{l} x' \\ 0 \end{array}\right.$ و $M'\left|\begin{array}{l} x'' \\ 0 \end{array}\right.$ باشدطول وتر 'MM را محاسبه و می‌نیمم آن را تعیین می‌کنیم.

$$MM'=|x'-x''|=\frac{\sqrt{\Delta}}{a}=\frac{\sqrt{\Delta}}{1}=\sqrt{4\alpha^2-4(2\alpha-9)}$$

$$\Rightarrow MM'=\sqrt{4\alpha^2-8\alpha+36} \Rightarrow (MM')'=$$

$$\frac{8\alpha-8}{2\sqrt{4\alpha^2-8\alpha+36}} \Rightarrow$$

$$(MM')'=0 \Rightarrow 8\alpha-8=0 \Rightarrow \boxed{\alpha=1} \Rightarrow$$

معادلهٔ دایرهٔ مطلوب $\quad (x-1)^2+y^2=8 \Rightarrow \boxed{x^2+y^2-2x-7=0}$

۴ ـ برای نوشتن معادلهٔ هذلولی درحالتی که محورهای تقارن هذلولی موازی یکی از محورهای مختصات است باید:

۱) مشخص سازیم که محور کانونی هذلولی موازی محور xها است یا موازی محور yها.

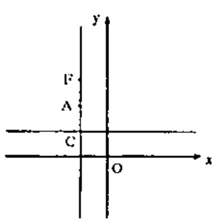
۲) مختصات مرکز هذلولی (α,β) را محاسبه کنیم.

۳) نیمه اقطار هذلولی (a,b) را به‌دست آوریم.

در این مسأله:

۱) $x_A=x_C=x_F=-1$، پس محور کانونی هذلولی موازی محور عرضها است.

۲) مختصات مرکز $C(\alpha=-1, \beta=1)$ است.



۳) با توجه به نکات فوق می‌توان نوشت:

$$A\left|\begin{array}{l}\alpha=-1\\ \beta+a=2\end{array}\right.\qquad F\left|\begin{array}{l}\alpha=-1\\ \beta+c=3\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow 1+a=2\Rightarrow \boxed{a=1}\quad 1+c=3\Rightarrow c=2$$

$$c^2=b^2+a^2\Rightarrow 4=b^2+1\Rightarrow b^2=3\quad \boxed{b=\sqrt{3}}$$

$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1\Rightarrow \boxed{\frac{(y-1)^2}{1}-\frac{(x+1)^2}{3}=1}$$

۵- $p\Rightarrow(q\Leftrightarrow r)\equiv p\Rightarrow\left[(q\Rightarrow r)\wedge(r\Rightarrow q)\right]$

$\equiv\left[p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\right]\wedge\left[p\Rightarrow(r\Rightarrow q)\right]$

$\equiv\left[(p\Rightarrow q)\Rightarrow(p\Rightarrow r)\right]\wedge\left[(p\Rightarrow r)\Rightarrow(p\Rightarrow q)\right]$

حال اگر فرض کنیم $Q\equiv(p\Rightarrow q)$ و $S\equiv(p\Rightarrow r)$ در اینصورت رابطهٔ اخیر به شکل $(Q\Rightarrow S)\wedge(S\Rightarrow Q)$ می‌باشد که طبق تعریف ترکیب دو شرطی هم ارز است با $Q\Leftrightarrow S$ یا $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(p\Rightarrow r)$ و حکم ثابت است.

۶- فرض کنیم $B, C\in K$ پس طبق تعریف مجموعهٔ K داریم، $AB=BA$ و $AC=CA$، ابتدا ثابت می‌کنیم K نسبت به تفاضل بسته است؛ برای این کار باید ثابت کنیم؛ $A(B-C)=(B-C)A$

$A(B-C)=AB-AC=BA-CA=(B-C)A$

حال ثابت می‌کنیم K نسبت به ضرب بسته است یعنی باید ثابت کنیم $BC\in K$ و برای این کار باید نشان دهیم $A(BC)=(BC)A$.

$A(BC)=(AB)C=(BA)C=B(AC)=B(CA)=(BC)A$

در ضمن توجه داریم که همواره $AA=AA$ پس $A\in K$ و بنابراین $K\neq\phi$.

۷- ۳ عدد صحیح متوالی را به شکل $a-1$ و a و $a+1$ نمایش می‌دهیم:

$(a-1)^3+a^3+(a+1)^3=3a^3+6a=3a(a^2+2)$

چون $\quad 2\overset{3}{\equiv}-1\Rightarrow a(a^2+2)\overset{3}{\equiv}a(a^2-1)\overset{3}{\equiv}a(a-1)(a+1)$

و چون از هر ۳ عدد صحیح متوالی یکی بر ۳ بخش‌پذیر است پس:

$a(a-1)(a+1)=3k\Rightarrow a(a^2+2)=3k$

$\Rightarrow 3a(a^2+2)=3\times 3k=9k$

۸-

$n=1\Rightarrow 10^3-1=999=27\times 37\Rightarrow 3^3\mid 10^3-1$

فرض استقراء $\quad n=k\Rightarrow 10^{3^k}-1=q.\,3^{k+2}$

حکم استقراء $\quad n=k+1\Rightarrow 10^{3^{k+1}}-1=q'.\,3^{k+3}$

با استفاده از اتحاد $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ داریم:

$$10^{3^{k+1}}-1=10^{3\times 3^k}-1=\left(10^{3^k}\right)^3-1=\left(10^{3^k}-1\right)\left(10^{2\times 3^k}+10^{3^k}+1\right)$$

$$\text{از طرفی}\Rightarrow\begin{cases}10^{3^k}-1=q.\,3^{k+2}\\ \underbrace{10^{2\times 3^k}+10^{3^k}+1}_{\text{تعداد رقم ۱ در این عبارت ۳ است}}=3m\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left(10^{3^k}-1\right)\left(10^{2\times 3^k}+10^{3^k}+1\right)=3^{k+3}\times mq$$

$\Rightarrow 3^{k+3}\mid 10^{3^{k+1}}-1$ و حکم ثابت است.

۹-

$$M\left|\begin{array}{l}x=\dfrac{t+4}{t(t-2)}\\[2mm] y=\dfrac{t-4}{t(t+2)}\end{array}\right.$$

مجانب قائم: $y\to\infty\Rightarrow\dfrac{t-4}{t(t+2)}\to\infty$

$$\Rightarrow\begin{cases}t\to 0\Rightarrow \lim x=\infty\\ t\to -2\Rightarrow \lim x=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

پس خط $\boxed{x=\frac{1}{4}}$ معادله مجانب قائم است.

مجانب افقی: $x\to\infty\Rightarrow\dfrac{t+4}{t(t-2)}\to\infty$

$$\Rightarrow\begin{cases}t\to 0\Rightarrow \lim y=\infty\\ t\to 2\Rightarrow \lim y=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

پس خط $\boxed{y=-\frac{1}{4}}$ معادله مجانب افقی است.

توجه: $t\to 0\Rightarrow\begin{cases}x\to\infty\\ y\to\infty\end{cases}$

فرض می‌کنیم خط $y=mx+h$ معادله مجانب مایل باشد.

مجانب مایل:

$$m=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{y}{x}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t-4}{t(t+2)}}{\frac{t+4}{t(t-2)}}=\lim_{t\to 0}\frac{(t-4)(t-2)}{(t+2)(t+4)}=1$$

$$h=\lim_{x\to\infty}(y-mx)=\lim_{t\to 0}\left[\frac{(t-4)}{t(t+2)}-\frac{t+4}{t(t-2)}\right]$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-12t}{t(t^2-4)}=\lim_{t\to 0}\frac{-12}{t^2-4}=3$$

$\Rightarrow\boxed{y=x+3}$ معادله مجانب مایل است.

۱۰- $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

مجانب قائم: $y\to+\infty\Rightarrow(x-1)^2\to 0\Rightarrow\boxed{x=1}$

$$\text{مجانب مایل}:\begin{cases}x\to\pm\infty\Rightarrow y\to\pm\infty\\ x^3+3x^2+3x+1\ \ \big|\ \underline{x^2-2x+1}\\ \quad 12x-4 \qquad\qquad x+5\end{cases}$$

$\Rightarrow\boxed{y=x+5}$ معادله مجانب مایل.

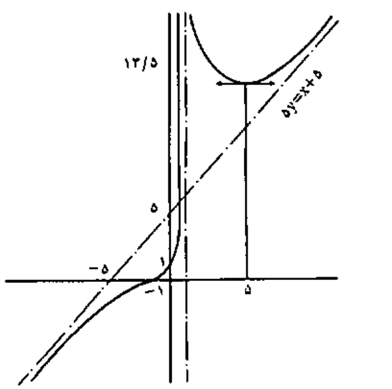
$$y'=\frac{3(x+1)^2(x-1)^2-2(x-1)(x+1)^3}{(x-1)^4}=\frac{(x-1)(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^4}$$

$$y'=\frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}=0\Rightarrow \quad =0\Rightarrow\boxed{x=1}$$

$\begin{cases}x=-1 & \text{ریشه مضاعف = طول عطف}\\ x=5 & \text{ریشه ساده = طول اکسترمم}\end{cases}$

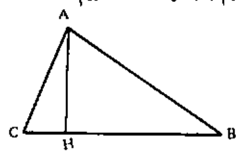
x	−∞	مضاعف −1	0	1	5	+∞
y'	+	+	+	−	+	
y	−∞	0	1 +∞	+∞	+∞	

۰ ۱ ۱۳/۵



حل مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

۱ ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$) ارتفاع AH وارد بر وتر را رسم می‌کنیم. بنا به فرض مسئله داریم:



$AH = ۲\sqrt{۳}$, $S_{ABH} = ۳S_{ACH}$

پس:

$$\frac{۱}{۲}BH\times AH = ۳\times\frac{۱}{۲}CH.AH \Rightarrow BH = ۳CH$$

$$AH^۲=HB.HC \Rightarrow ۱۲=(۳HC)HC=۳HC^۲ \Rightarrow HC^۲=۴$$

$$\Rightarrow HC=۲ \Rightarrow HB=۶ \Rightarrow a=BC=۲+۶=۸ \Rightarrow$$

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}a.h_a=\frac{۱}{۲}\times ۸\times ۲\sqrt{۳}=۸\sqrt{۳}$$

۲ ـ بنا به فرض مسأله $PT = ۸$ و $PA = \frac{۳}{۴}PT$ است. پس می‌توان نوشت:

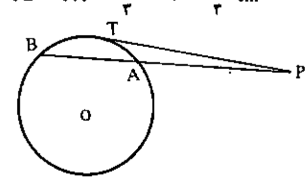
$PA = \frac{۳}{۴}(۸) = ۶cm$

از طرفی داریم:

$$PT^۲ = PA.PB \Rightarrow$$

$$۶۴ = ۶ \times PB \Rightarrow PB = \frac{۳۲}{۳} \Rightarrow$$

$$AB = PB - PA = \frac{۳۲}{۳} - ۶ = \frac{۱۴}{۳}\ cm$$



۳ ـ

$$S=x_۱+x_۲=\frac{\alpha\beta'+\beta\alpha'}{\alpha'\beta'}+\frac{\alpha\alpha'+\beta\beta'}{\alpha'\beta'}=\frac{(\alpha'+\beta')(\alpha+\beta)}{\alpha'\beta'}$$

$$=\frac{\left(\frac{-b'}{a'}\right)\left(\frac{-b}{a}\right)}{\frac{c'}{a'}}=\frac{bb'}{ac'}$$

$$P=x_۱x_۲=\frac{۱}{\alpha'^۲\beta'^۲}\left(\alpha^۲\alpha'\beta'+\alpha\beta\beta'^۲+\alpha\beta\alpha'^۲+\alpha'\beta'\beta^۲\right)$$

$$=\frac{۱}{\alpha'^۲\beta'^۲}\left[\alpha'\beta'(\alpha^۲+\beta^۲)+\alpha\beta(\alpha'^۲+\beta'^۲)\right]$$

$$=\frac{a'^۲}{c'^۲}\left[\frac{c'}{a'}\left(\frac{b^۲}{a^۲}-\frac{۲c}{a}\right)+\frac{c}{a}\left(\frac{b'^۲}{a'^۲}-\frac{۲c'}{a'}\right)\right]$$

معادلهٔ مطلوب: $\Rightarrow Z^۲ - SZ + P = ۰$

۴ ـ سه عدد مطلوب جملاتی از یک تصاعد هندسی می‌باشند بنابراین به‌صورت a و aq و $aq^۲$ درنظر می‌گیریم و با توجه به شرایط مسئله داریم:

$$۲(aq + ۸) = a + aq^۲$$

$$(aq + ۸)^۲ = a(aq^۲ + ۶۴) \Rightarrow$$

$$۶۴ + ۱۶aq = ۶۴a \Rightarrow q = \frac{۴a - ۴}{a} \xRightarrow{\text{(جایگزین در معادله اول)}}$$

$$۹a^۲ - ۴۰a + ۱۶ = ۰ \Rightarrow a = ۴ \text{ یا } \frac{۴}{۹}$$

پس مسئله دو سری جواب دارد:

$$\Rightarrow ۴ \text{ و } ۱۲ \text{ و } ۳۶ \text{ یا } \frac{۴}{۹} \text{ و } \frac{-۲۰}{۹} \text{ و } \frac{۱۰۰}{۹}$$

۵ ـ

$$S=\frac{a_۱}{۱-q}=\frac{۱}{۱-\log_۲^{\sin x}}=\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow ۲-۲\log_۲^{\sin x}=۳\Rightarrow ۲\log_۲^{\sin x}=-۱\Rightarrow \log_۲^{\sin x}=-\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \sin x=(۲)^{\frac{-۱}{۲}}\Rightarrow \sin x=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow x_۱ = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۴} \text{ یا } x_۲ = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴}(k\in N)$$

۶ ـ

$$tgx = ۲\cos\frac{x}{۲} \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = ۲\cos\frac{x}{۲}$$

$$\xRightarrow{\left(x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\right)} \sin x = ۲\cos x\cos\frac{x}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲} - ۲\cos x\cos\frac{x}{۲} = ۰$$

$$۲\cos\frac{x}{۲}\left(\sin\frac{x}{۲} - \cos x\right) = ۰ \Rightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l} ۲\cos\frac{x}{۲}=۰\Rightarrow\cos\frac{x}{۲}=۰\Rightarrow\frac{x}{۲}=k\pi+\frac{\pi}{۲} \\ \text{یا } x_۱=۲k\pi+\pi \\ \sin\frac{x}{۲}-\cos x=۰ \Rightarrow \cos x=\sin\frac{x}{۲} \\ \cos x=\cos\left(\frac{\pi}{۲}-\frac{x}{۲}\right) \Rightarrow x=۲k\pi\pm\left(\frac{\pi}{۲}-\frac{x}{۲}\right) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}-\frac{x}{۲} \\ x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}+\frac{x}{۲} \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \frac{۳x}{۲}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \\ \frac{x}{۲}=۲k\pi-\frac{\pi}{۲} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} x_۲=\frac{۴k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۳} \\ x_۳=۴k\pi-\pi \end{array}\right.$$

۷ ـ فرض می‌کنیم $\sin x+\cos x=A$ باشد پس داریم:

$$\sin x\cos x = \frac{A^۲-۱}{۲}$$

$$m=\frac{۲\left[۱-(\sin^۳x+\cos^۳x)\right]}{\sin x+\cos x+۲}=$$

$$\frac{۲\left[۱-(\sin x+\cos x)(۱-\sin x\cos x)\right]}{\sin x+\cos x+۲}$$

$$=\frac{۲\left[۱-A\left(۱-\frac{A^۲-۱}{۲}\right)\right]}{A+۲}=\frac{۲\left(۱-\frac{۳A-A^۳}{۲}\right)}{A+۲}=\frac{۲-۳A+A^۳}{A+۲}$$

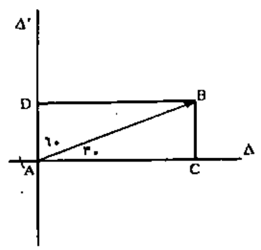
$$=\frac{(A-۱)^۲(A+۲)}{A+۲} \xRightarrow{(A+۲\neq ۰)} m=(A-۱)^۲=(\sin x+\cos x-۱)^۲$$

حل مسائل ریاضیات سال سوّم تجربی

۱ ـ بنا به قضیهٔ اندازهٔ جبری تصویر یک بردار بر یک محور می‌توان نوشت:

$$AC=\left|\vec{AB}\right|\cos ۳۰=۱۰\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۵\sqrt{۳}$$

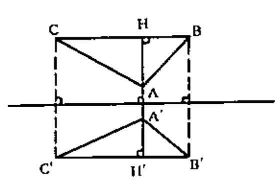
$$AD=\left|\vec{AB}\right|\cos ۶۰=۱۰\times\frac{۱}{۲}=۵$$



۲ ـ قرینهٔ محوری هر مثلث با آن مثلث برابر است یعنی $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ و اجزاء متناظر این دو مثلث نیز با هم مساوی می‌باشند بنابراین:

$$BC=B'C'=۶\sqrt{۲} \Rightarrow S_{ABC}=\frac{۱}{۲}BC.AH$$

$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{۱}{۲}\times ۶\sqrt{۲}\times ۸\sqrt{۲}=۴۸$$

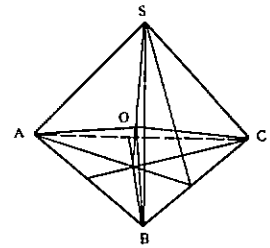


امّا میانهٔ AM مثلث ABC را به دو مثلث معادل ABM و ACM افراز می‌کند، پس:

$$S_{ABM} = \frac{۱}{۲}S_{ABC} = ۲۴$$

۳ ـ مرکز کرهٔ محیطی چهاروجهی منتظم، محل تلاقی صفحه‌های عمود منصف یالهای چهاروجهی است. اگر این نقطه را O و چهاروجهی منتظم را S_{ABC} بنامیم داریم:

$$OS = OA = OB = OC$$



از چهاروجهی منتظم به یال a اندازهٔ شعاع کرهٔ محیطی $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ است پس در این مسأله داریم: $a = 4\sqrt{3} \Rightarrow R = 3\sqrt{2}$

و از آنجا حجم کرهٔ محیطی برابر است با:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 72\pi\sqrt{2}$$

۴ـ

$$(fog)(x) = f\left(g(x)\right) = \frac{g(x)-2}{g(x)+1} =$$

$$-f(x) = -\frac{x-2}{x+1} \Rightarrow \frac{g(x)-2}{g(x)+1} = \frac{-x+2}{x+1} \Rightarrow$$

$$xg(x)-2x+g(x)-2 = -xg(x)+2g(x)-x+2$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{x+4}{2x-1} \xrightarrow{(2x-1\neq 0)} D_g = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

۵ ـ داریم: $y' = \cos x = \sin(x+\frac{\pi}{2})$ و $y'' = -\sin x = \sin(x+\frac{2\pi}{2})$ و ... و درنتیجه داریم: $y^{(n)} = \sin(x+\frac{n\pi}{2})$

۶ ـ

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5^{x+1}+3^{x+1}}{5^{x-1}+3^{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5^{x+1}\left(1+(\frac{3}{5})^{x+1}\right)}{5^{x-1}\left(1+(\frac{3}{5})^{x-1}\right)}$$

اگر $x \to +\infty$ حد عبارات $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1}$ و $\left(\frac{3}{5}\right)^{x-1}$ بـه سمت صفر میل می‌کنند و در نتیجه داریم:

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{5^{x+1}}{5^{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5^x \times 5}{5^x \times 5^{-1}} = 25$$

به طریق مشابه داریم:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5^{x+1}+3^{x+1}}{5^{x-1}+3^{x-1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3^{x+1}\left((\frac{5}{3})^{x+1}+1\right)}{3^{x-1}\left((\frac{5}{3})^{x-1}+1\right)}$$

اگر $x \to -\infty$ حد عبارات $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1}$ و $\left(\frac{5}{3}\right)^{x-1}$ بـه سمت صفر میل می‌کنند و درنتیجه داریم:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3^{x+1}}{3^{x-1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3^x \times 3}{3^x \times 3^{-1}} = 9$$

۷ ـ

$$y = \left(x x^2 x^3 \ldots x^n\right)^{\frac{1}{2+4+6+\ldots+2n}} \quad (n\in \mathbb{N} \text{ و } x\in \mathbb{R}^+)$$

$$y = \left(x^{1+2+3+\ldots+n}\right)^{\frac{1}{2(1+2+3+\ldots+n)}}$$

(از طرفی می‌دانیم: $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$)

بنابراین داریم:

$$y = \left(x^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)^{\frac{1}{2\frac{n(n+1)}{2}}} = x^{\frac{1}{2}}$$

لذا:

$$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

۸ ـ الف)

$$\text{طرف اول} = \cos a\cos 2a - \cos a\sin 2a - \sin a\cos 2a + \sin a\sin 2a + \sin 3a$$
$$= \cos(2a-a) - (\cos a\sin 2a + \sin a\cos 2a) + \sin 3a$$
$$= \cos a - \sin 3a + \sin 3a = \cos a$$

ب)

$$\text{طرف اول} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\beta}{2}\right)} \times \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\beta}{2}\right)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{6}-\frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{6}+\frac{\beta}{2}\right)\right]}{\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{6}-\frac{\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}+\frac{\beta}{2}\right)\right]}$$

$$= \frac{-\left(\frac{1}{2}-\cos\beta\right)}{\frac{1}{2}+\cos\beta} = \frac{\cos\beta-\frac{1}{2}}{\cos\beta+\frac{1}{2}} = \frac{2\cos\beta-1}{2\cos\beta+1}$$

۹ ـ الف) باتوجه به تساوی، $\cot g\alpha - tg\alpha = 2\cot g 2\alpha$ داریم:

$$\cot gx = tg20 + 2tg40^\circ + 2(\cot g40^\circ - tg40^\circ)$$
$$= tg20^\circ + 2tg40^\circ + 2\cot g40^\circ - 2tg40^\circ$$
$$= tg20^\circ + 2\cot g40^\circ = tg20^\circ + \cot g20^\circ - tg20^\circ$$
$$= \cot g20^\circ$$
$$\Rightarrow \cot gx = \cot g20^\circ \Rightarrow x = k\pi + 20^\circ$$

ب)

$$\sin x + \sin 2x = \cos x + \cos 2x$$

$$2\sin\frac{x+2x}{2}\cos\frac{x-2x}{2} = 2\cos\frac{x+2x}{2}\cos\frac{x-2x}{2}$$

$$\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{3x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) = 0$$

$\cos\frac{x}{2} = 0$ یا $\sin\frac{3x}{2} - \cos\frac{3x}{2} = 0$

$$\frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_1 = 2k\pi + \pi$$

$$\sin\frac{3x}{2} = \cos\frac{3x}{2} \Rightarrow tg\frac{3x}{2} = 1 = tg\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{3x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

حل مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱ ـ می‌دانیم که $y'_x = \frac{y'_\alpha}{x'_\alpha}$ و $x'_y = \frac{x'_\alpha}{y'_\alpha}$، پس:

$$y'_x = \frac{y'_\alpha}{x'_\alpha} = \frac{-2\sin 2\alpha}{2\cos\alpha} = \frac{-\sin 2\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha} = -2\sin\alpha$$

$$x'_y = \frac{x'_\alpha}{y'_\alpha} = \frac{2\cos\alpha}{-2\sin 2\alpha} = -\frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = -\frac{1}{2\sin\alpha} = \frac{1}{y'_x}$$

۲ ـ تابع $y = \frac{ax+3}{x+a+2}$ هموگرافیک است و برای بحث در جهت تغییرات آن مشتق تابع را تعیین علامت کنیم.

$$y' = \frac{a^2+2a-3}{(x+a+2)^2} \quad y' = 0 \Rightarrow a^2+2a-3 = 0$$
$$\Rightarrow a = 1, a = -3$$

a	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
y'	+	0	−	0	+
y	صعودی	مقدارثابت $y=-3$	نزولی	مقدارثابت $y=1$	صعودی

$$y = \frac{ax+3}{x+a+2} \Rightarrow xy + ay + 2y = ax + 3$$
$$\Rightarrow a(y-x) + xy + 2y - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y - x = 0 \\ xy + 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2+2x-3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow N(1,1) \\ x = -3 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow N'(-3,-3) \end{cases}$$

نقاط ثابت

۳ ـ تمام خطوط قائم بر یک دایره از مرکز آن دایره می‌گذرند پس برای اینکه خط Δ قائم بر دایره باشد باید مختصات مرکز دایره در معادلهٔ خط Δ صدق کند.

$x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0 \Rightarrow$ مرکز دایره $C(2,-1)$

در معادلهٔ ۸

$$C(2,-1) \longrightarrow (a+1)(2)+(-1)+2a=0 \Rightarrow$$

$$2a+2-1+2a=0 \Rightarrow 4a=-1 \Rightarrow \boxed{a=-\frac{1}{4}}$$

۴ - $C: x^2+y^2-2y=0 \Rightarrow x^2+(y-1)^2=1 \Rightarrow c_1(0,1), R=1$

$$C': x^2+y^2-6x-2y+6=0$$

$$\Rightarrow (x-3)^2+(y-1)^2=4 \Rightarrow c_2(3,1),\ R'=2$$

خط المرکزین $d=c_1c_2=\sqrt{(3-0)^2+(1-1)^2}=|3-0|=3$

$$\Rightarrow d=R+R' \Rightarrow 3=1+2 \Rightarrow 3=3 \Rightarrow$$

دو دایره مماس برونی هستند

طول مماس مشترک خارجی دو دایره $= TT' = \sqrt{d^2-(R-R')^2}$

$$=\sqrt{9-(1-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

۵ - برای محاسبهٔ $\int \frac{x+2}{\sqrt{x-1}}\,dx$ فرض می‌کنیم $\sqrt{x-1}=t$ باشد.

حال x و dx را برحسب t محاسبه می‌کنیم و در انتگرال فوق قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{x-1}=t \Rightarrow x-1=t^2 \Rightarrow x=t^2+1 \Rightarrow dx=2t\,dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{x+2}{\sqrt{x-1}}\,dx=\int \frac{t^2+1+2}{\cancel{t}}\times 2\cancel{t}\,dt=\int 2(t^2+3)\,dt$$

$$=2\left(\frac{t^3}{3}+3t\right)+C \qquad t=\sqrt{x-1} \Rightarrow$$

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x-1}}\,dx=\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1}+6\sqrt{x-1}+c$$

برای محاسبه تابع اولیه $\frac{3x+5}{(x-2)^4}$ فرض می‌کنیم $t = x-2$ باشد در این صورت داریم:

$$x=t+2 \Rightarrow y=\frac{3x+5}{(x-2)^4}=\frac{3(t+2)+5}{t^4}=\frac{3t+11}{t^4}=\frac{3t}{t^4}+\frac{11}{t^4}$$

$$=\frac{3}{t^3}+\frac{11}{t^4}=3t^{-3}+11t^{-4} \Rightarrow Y=\int (3t^{-3}+11t^{-4})\,dt=$$

$$\frac{-3}{2t^2}-\frac{11}{3t^3}+c$$

$$t=x+2 \Rightarrow y=\frac{-3}{2(x-2)^2}-\frac{11}{3(x-2)^3}+c$$

تفریح اندیشه ۴

شش کفش از کفشهای فوق به یک گروه منطقی تعلق دارند. یکی بی‌خود داخل شده است. کدام و چرا؟

جواب در صفحهٔ ۹۶

تفریح اندیشه ۵

مهرداد جلوی چشمه آب است. او دو ظرف خالی، با گنجایش ۱۱ لیتر و ۷ لیتر در اختیار دارد.

با انجام چند عمل می‌تواند در یکی از این دو ظرف، ۶ لیتر آب داشته باشد؟

ترجمهٔ سیمین‌دخت ترکپور از کتاب بازیهای عددی

جواب در صفحهٔ ۹۶

جوابهای تفریح اندیشه

جواب ۱ :

هشت حرف EGIS و LOAM همه متفاوتند؛ بنابراین چهار حرف کلمهٔ مطلوب در میان آنهاست در این صورت در PLUG ، L ، G، و در ANEW ، A و E حروف مطلوبند.

حروف اوّل چهار کلمهٔ داده شده شامل A ، E ، و L است، بنابراین باید G حرف اوّل کلمهٔ مطلوب باشد. سومین حرف کلمات داده شده شامل A و E است، بنابراین L حرف سوم کلمهٔ مطلوب است. اما GELA یک «کلمهٔ متداول انگلیسی» نیست، بنابراین پاسخ GALE* است.

جواب ۲ :

حلّ: هنگام اعلام ساعت ۵، چهار فاصله زمانی بین ضربات وجود دارد. پس هر فاصله زمانی ۱/۵ ثانیه طول می‌کشد (۱/۵ = ۶:۴) و در مورد ساعت ۹ نیز ۸ فاصله زمانی بین ضربه‌ها موجود است پس هر فاصله زمانی بین هر دو ضربه ۱/۵ ثانیه است (۱/۵ = ۸ ÷ ۱۲). برای ساعتهای دیگر هم فاصلهٔ زمانی بین هر دو ضربه متوالی ۱/۵ ثانیه می‌باشد. پس اگر از تعداد ضربه‌های زده شده در هر ساعت یکی کم کنیم و مجموع بقیّه ضربه‌های زده شده در ۲۴ ساعت را حساب کنیم تعداد فاصله‌های زمانی در ۲۴ ساعت به‌دست می‌آید:

۲(۰+۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰+۱۱)=۱۳۲

تعداد فاصله‌های زمانی ۱۸ ثانیه و ۳ دقیقه ثانیه ۱۹۸ = ۱/۵ × ۱۳۲

جواب ۳ :

۳ + ۳ + ۳ : ۳ = ۳

((۳ × ۳) + ۳) : ۳ = ۴

۳ + ۳ − (۳ : ۳) = ۵

(۳ + ۳) + (۳ − ۳) = ۶

۳ + ۳ + (۳ : ۳) = ۷

۳ × ۳ − (۳ : ۳) = ۸

۳ × ۳ + (۳ − ۳) = ۹

(۳ × ۳) + (۳ : ۳) = ۱۰

جواب ۴ :

سه کفش پاشنه کوتاه و بند دارند، و سه کفش پاشنه بلند و بدون بندند. هفتمی پاشنه بلند و بنددار است.

جواب ۵ :

جدول زیر نحوهٔ انجام کار را نشان می‌دهد:

ظرف ۷لیتری	۷	۷	۰	۷	۳	۳	۰	۷	۰	۷	۶
ظرف ۱۱لیتری	۱۱	۰	۷	۷	۱۱	۰	۳	۳	۱۰	۱۰	۱۱

In the name of God

Borhān
Vol. 3. No. 3
Serial numbers ; 10
Spring 1994

Borhān is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

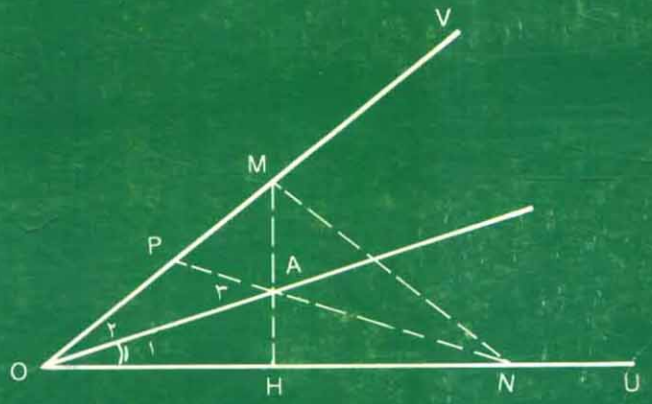
All communications should be sent to the editor at the following address:

Madrasse Publication - No. 268 , Iranshahr - e - Shomali Ave. Tehran , Iran, Post Code: 15875

Contents:

تقسیم زاویه به سه بخش برابر

از ابوالحسن شمسی هروی (سدهٔ چهارم هجری قمری)



تقسیم یک زاویهٔ غیرمشخص به سه بخش برابر، یکی از سه مسأله مشهوری است که، به کمک خط کش و پرگار، قابل حل نیست. با وجود این، راه حلهای تقریبی بسیاری (بویژه از ریاضی‌دانان مسلمان ایرانی) برای آن وجود دارد. یکی از این راه حلها که متعلق به ابوالحسن شمسی هروی است و ابوالحسن علی فرزند احمد معروف به «نسوی» آنرا در کتاب خود آورده‌است، در شکل دیده می‌شود:

ازنقطهٔ دلخواه M واقع برضلع OV ، عمود MH را برضلع OU (از زاویهٔ UOV) وارد و HN را برابر OH جدا می‌کنیم. اکنون لبهٔ خط کش را روی نقطهٔ N قرار می‌دهیم و با دوران لبهٔ خط کش دور نقطهٔ N، نقطهٔ P را روی ضلع OV طوری پیدا می‌کنیم که طول پاره‌خط راست OP با طول پاره‌خط راست PA برابر باشد (نقطهٔ A، روی عمود MH است). اگر نیم خط راست OA را رسم کنیم، زاویه ۱ برابر یک سوم زاویهٔ UOV خواهد بود، زیرا زاویهٔ ۲ با زاویهٔ ۳ برابر، و زاویهٔ ۳ اندازه‌ای دو برابر زاویهٔ ۱ دارد.

در این رسم، تنها از خط کش و پرگار استفاده می‌شود. چرا این راه حل تقریبی است؟ آیا این راه‌حل‌را می‌توان، یک ساختمان‌هندسی، به کمک خط کش و پرگار دانست؟