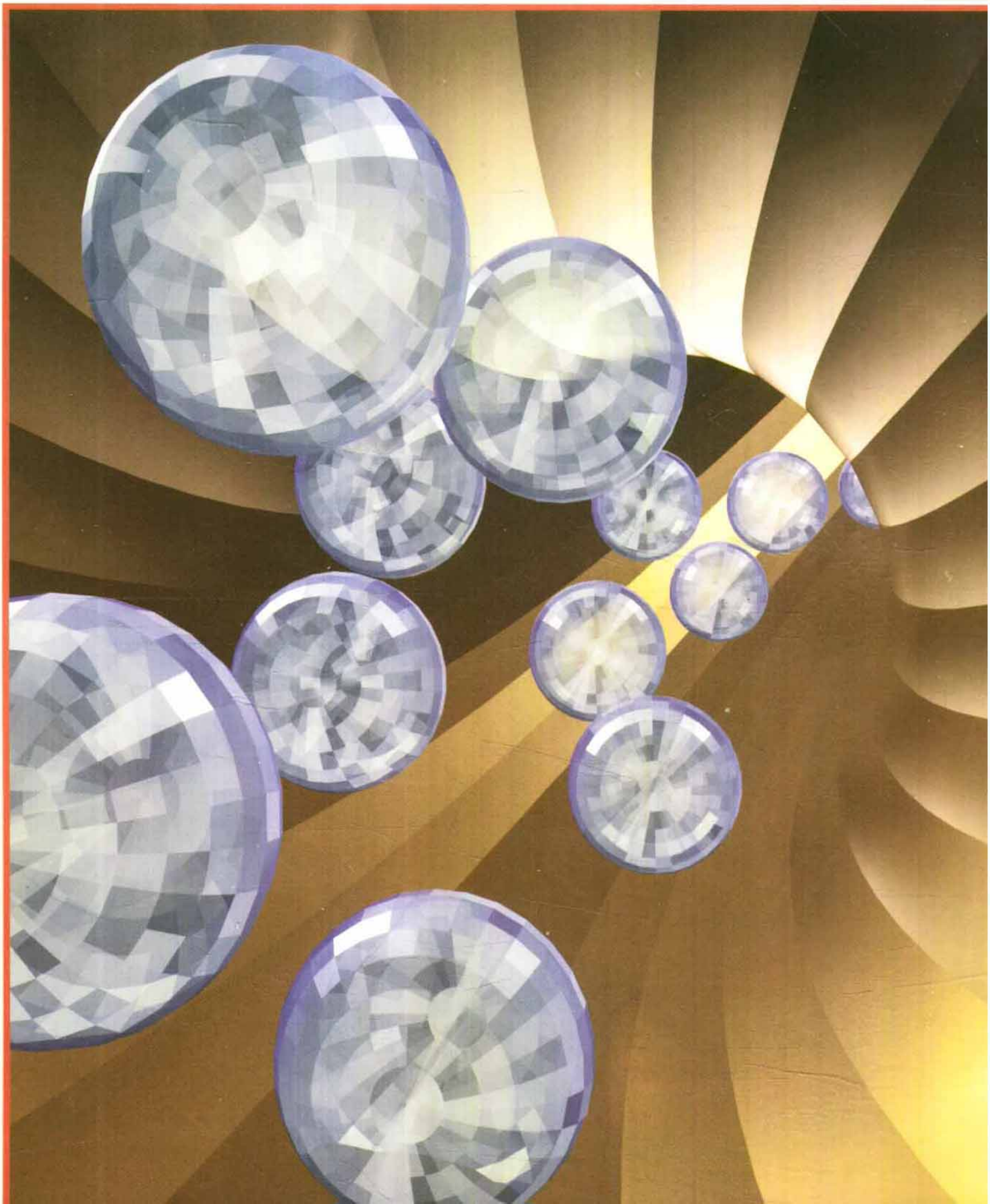
مجلّهٔ ریاضی

برهان

۲۵

برای دانش آموزان دبیرستان

سال هشتم، شمارهٔ اوّل، تابستان ۱۳۷۷، بها ۲۰۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه وابسته به وزارت آموزش و پرورش

❑ صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه ❑ مدیر مسؤول: محمود ابراهیمی
❑ سردبیر: حمیدرضا امیری ❑ مدیر داخلی: میرشهرام صدر
❑ اعضای هیأت تحریریه: آقایان: ❑ حمیدرضا امیری ❑ محمدهاشم رستمی ❑ احمد قندهاری ❑ میرشهرام صدر
❑ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی ❑ غلامرضا یاسی‌پور (با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقای پرویز شهریاری)
❑ مدیر فنی: هوشنگ آشتیانی ❑ طراح گرافیک: امیر بابایی ❑ چاپ و صحافی: چاپخانه مدرسه

مطالب این شماره

■ سال هشتم، تابستان ۱۳۷۷، شمارهٔ اول.

تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

● نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی دبیرستان) ● طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن ● طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن ● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

■ هیأت تحریریه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.
■ مقالات مجله با رسم‌الخط انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.
■ مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
■ مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

نشانی: خیابان سپهبد قرنی، خیابان سپند شرقی، پلاک ۳۸
تلفن: ۶-۸۸۹۶۷۶۵، ۷۱-۸۸۰۴۵۶۸، دورنویس (فاکس): ۸۸۲۰۵۹۹، صندوق پستی: ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹

کد ۶۵۱/۱

بدون اغراق باید گفت که جوانان ایران همیشه از بهترین، سالمترین و مسؤولیت‌پذیرترین جوانان جهان بوده‌اند. بر این ویژگیها باید پیشتاز بودن آنان را نیز افزود. حضور جوانان ما در هشت سال دفاع مقدس، بارزترین مصداق این مدعاست. و نیز نقش جوانان متعهد و متخصص در سالهای سازندگی، که بر کسی پوشیده نیست.

سرافرازی جوانان ایران زمین در عرصه‌های بین‌المللی، نه تنها در کسب عناوین ورزشی، بلکه در به دست آوردن عناوین بالای علمی، نشان از اقتدار جوانان ایرانی است.

وقتی در خبرها می‌خوانیم که جوانان ایران، مقام نخست المپیاد بین‌المللی ریاضی را در سطح جهان کسب کرده‌اند، ممکن است برای بسیاری هضم این موضوع مشکل باشد و این سؤال در اذهان به وجود آید که آیا می‌شود در بین ده‌ها کشور مقتدر از نظر علمی، جوانان کشور ایران به چنین مقامی دست یابند؟

در جواب باید گفت بله. مگر اقتدار علمی ـ فرهنگی ایرانیان مسلمان را در دورهٔ درخشان تمدّن اسلامی فراموش کرده‌اید.

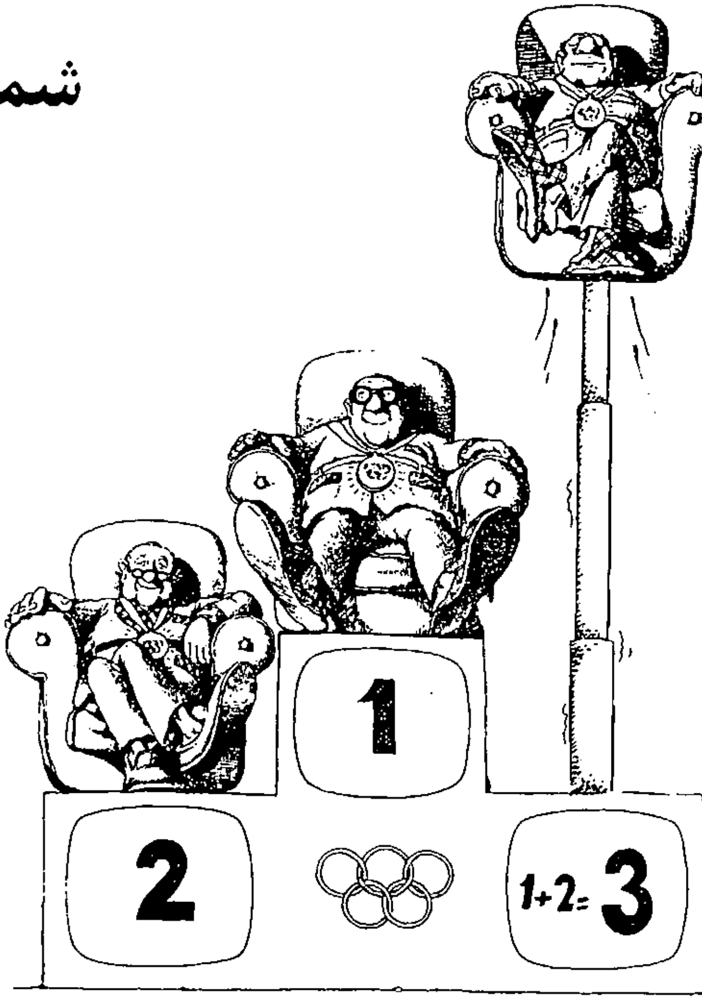
فقط باید کمی خود را باور کنیم. خود را باور کنیم تا بتوانیم استعدادهای نهفته و سرشار از توانمندی را در جوانان ایران شکوفا کنیم.

تیمهای مختلف شرکت‌کننده در المپیادهای جهانی عصارهٔ هزاران هزار جوانی است، که در مهد ایران اسلامی و در سایهٔ انقلاب شکوهمند اسلامی پرورش یافته‌اند. لذا باید جوانان بااستعداد و کوشا را دوست بداریم و در آغاز سال تحصیلی جدید به جوانانمان بیاموزیم، که با اتکای به قدرت لایزال الهی و با همّت و تلاش و توانمندی می‌توان مرزهای علم و دانش را گسترش داد و بر قله‌های رفیع پیروزیهای دیگر قدبرافراشت و نیز بر دولتمردان و اولیای جوانان است، که با هموار ساختن مشکلات جوانان و تشویق و حمایت آنان، موجبات تعالی جوانان را فراهم سازند.

والسلام ـ سردبیر

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفّق باشید (۲۵)

● پرویز شهریاری



§.۲. روش برهان خلف

«برهان خلف» یکی از روشهای جالب برای اثبات قضیه ها در جبر و هندسه است. در برهان خلف، به جای این که درستی یک گزاره را به طور مستقیم ثابت کنیم، راهی غیرمستقیم انتخاب می‌کنیم و ثابت می‌کنیم با نپذیرفتن درستی گزاره، به نتیجه‌ای نامعقول می‌رسیم. به زبان مثال، برای اثبات برابری دو عدد a و b، ثابت می‌کنیم: a از b بزرگتر یا کوچکتر نیست. اصطلاح برهان خلف، ترجمه‌ای ازواژهٔ لاتینی Reduction ad absurdum، به معنای «اثبات از جهت مخالف» یا «اثبات از راه رد کردن حکم مخالف» است.

تا آنجا که می‌دانیم، «اقلیدس» نخستین کسی بود که از «برهان خلف» در کتاب مشهور خود به نام «مقدمات» استفاده کرد. او آن را «معمّای برهان خلف» می‌نامید و دربارهٔ آن می‌گفت: «گزارهٔ Aرا می‌توان ثابت شده دانست، وقتی که آن را نادرست بدانیم، باز هم درستی A را نتیجه می‌دهد.» برای بیان اقلیدس دربارهٔ برهان خلف، مثال ساده‌ای می‌آوریم.

مثال ۱: می‌دانیم هریک از عددهای طبیعی a، b ، c و d بر عدد طبیعی ab ـ cd بخش‌پذیر است. ثابت کنید:

$$ab - cd = ۱$$

گزاره را نادرست می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم:

$$ab - cd = m \neq ۱$$

پس، با توجه به فرض مسأله، هریک از عددهای a، b ، cو d بر m بخش‌پذیرند. وقتی دو عدد a و b بر m بخش‌پذیر باشند، آن وقت ab بر $m^۲$ بخش‌پذیر می‌شود؛ به همین ترتیب، cd هم بر $m^۲$ بخش‌پذیر خواهد بود، پس تفاضل آنها، یعنی ab ـ cd، یعنی m هم باید بر $m^۲$ بخش‌پذیر باشد و این ممکن نیست؛ مگر m برابر ۱ یا ۱- باشد. ولی بنا بر صورت مسأله، ab ـ cd، یعنی m عددی طبیعی است. به این ترتیب، با فرض $ab - cd \neq ۱$، نتیجه گرفتیم: $ab - cd = ۱$.

در طول تاریخ، تعریفهای دیگری هم از برهان خلف شده است: «اگر B درست باشد و درضمن، از درستی A، نادرستی B نتیجه شود، به معنای نادرستی A است.»

مثال ۲: عدّه‌ای از دانش‌آموزان یک دبیرستان، در یک مسابقهٔ شطرنج انفرادی شرکت کردند. هر دانش‌آموز با هریک از دانش‌آموزان دیگر شرکت کننده، تنها یک بار بازی کرد. در هر بازی به برنده، یک امتیاز مثبت و به بازنده یک امتیاز منفی دادند. اگر بازی برنده نداشت، یعنی به تساوی می‌انجامید، امتیازی داده نمی‌شد. در این مسابقه، یکی از شرکت کنندگان ۱۳ امتیاز و دیگری ۸ امتیاز آورد. ثابت کنید، در بین بازیهایی که انجام شده است، دست‌کم یک بازی، به تساوی رسیده است.

درستی این گزاره روشن است: «هیچ عدد فردی، زوج و هیچ عدد زوجی، فرد نیست.» (گزارهٔ B)

اکنون فرض می‌کنیم: «در این مسابقه شطرنج، تساوی وجود نداشته است.» (گزاره A)

ببینیم از گزارهٔ Aچه نتیجه‌ای به دست می‌آید؟ هریک از شرکت‌کنندگان در مسابقه، در هر بازی، یکی از دو امتیاز ۱+ یا ۱− را گرفته است. اگر تعداد دانش‌آموزان، عددی فرد باشد، هر دانش‌آموز، به تعداد زوج، امتیاز ۱+ یا ۱− گرفته است. (چون دانش‌آموز با خودش بازی نمی‌کند و تعداد بقیهٔ دانش‌آموزان، عددی زوج است) پس مجموع امتیازهای هریک از دانش‌آموزان، باید عددی زوج باشد. به همین ترتیب، اگر تعداد کل دانش‌آموزان شرکت کننده، عددی زوج باشد، جمع امتیازهای هر دانش‌آموز، عددی فرد می‌شود (به شرطی که در مسابقه، تساوی نداشته باشیم). در صورت مسأله گفته شده است، یکی از دانش‌آموزان ۱۳ امتیاز آورده است، بنابراین اگر همهٔ بازیها، همراه با برد و باخت باشد، باید تعداد دانش‌آموزان شرکت‌کننده در مسابقه، عددی زوج باشد؛ ولی چون دانش‌آموز دیگری ۸ امتیاز آورده است، باید تعداد دانش‌آموزان شرکت‌کننده، عددی فرد باشد، یعنی باید (تعداد دانش‌آموزان) هم زوج و هم فرد باشد. با فرض درستی A ، به نتیجه نادرستی B رسیدیم. پس A نادرست است یعنی در مسابقه تساوی وجود داشته است.

و تعریفی دیگر، برای «برهان خلف»:

«اگر گزارهٔ A را نپذیریم و به تناقض برخورد کنیم، به این معناست که باید A را بپذیریم.»

منظور از پدید آمدن تناقض، این است که: نتیجهٔ حاصل، حقیقت روشنی را نقض کند (مثلاً به دست آید ۴=۳) و یا منجر به نقض فرض مسأله بشود.

مثال ۳: a، b و c عددهایی حقیقی‌اند. ثابت کنید، این نابرابری همیشه برقرار است:

$$\sqrt{a+\sqrt[3]{b+\sqrt[4]{c}}} \ge \sqrt[32]{abc}$$

فرض می‌کنیم، این نابرابری درست نباشد و داشته باشیم:

$$\sqrt{a+\sqrt[3]{b+\sqrt[4]{c}}} < \sqrt[32]{abc}$$

در این صورت، به‌طور طبیعی، هر بخشی از سمت چپ نابرابری، از سمت راست آن کوچکتر می‌شود:

$$\sqrt{a} < \sqrt[32]{abc}\ ,\ \sqrt[6]{b} < \sqrt[32]{abc}\ ,\ \sqrt[24]{c} < \sqrt[32]{abc}$$

این سه‌نابرابری را می‌توان این‌طور نوشت (توجه کنیم در هریک از نابرابریها، هردوطرف مقدارهایی مثبتند):

$$a^{16} < abc\ ,\ b^{16} < (abc)^{3}\ ,\ c^{16} < (abc)^{12}$$

از ضرب این نابرابریها در یکدیگر به دست می‌آید:

$$a^{16}b^{16}c^{16} < (abc)^{16} \Rightarrow abc < abc$$

و این، یک حقیقت روشن را نقض می‌کند.

مثال ۴: یک تکه سیم به طول ۲ متر را به پنج بخش طوری تقسیم کرده‌ایم که، کمترین مقدار طول هر بخش برابر ۱۷ سانتیمتر باشد، ثابت کنید می‌توان از این پنج بخش، سه بخش را انتخاب کرد که بشود با آنها یک مثلث ساخت.

پنج بخش سیم را، با طولهای x ، y ، z ، t و s می‌گیریم و فرض می‌کنیم:

$$x \le y \le z \le t \le s$$

اگر با هیچ سه بخشی نتوان یک مثلث ساخت، باید داشته باشیم:

$$z \ge x+y\ ,\ t \ge y+z\ ,\ s \ge z+t$$

نابرابری $t \le y+z$ را با توجه به نابرابری $y \le x+y$ ، می‌توان چنین نوشت:

$$t \ge y+(x+y) = x+2y$$

و برای نابرابری $s \le z+t$:

$$s \ge z+t \ge (x+y)+(x+2y) = 2x+3y$$

اکنون سه نابرابری داریم:

$$\begin{cases} z \ge x+y \\ t \ge x+2y \\ s \ge 2x+3y \end{cases}$$

این سه نابرابری را با هم جمع و به دو طرف نابرابری حاصل،

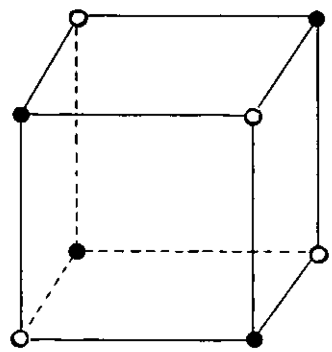
$x+y$ را اضافه می‌کنیم، به دست می‌آید :

$$x+y+z+t+s \geq ۵x+۷y$$

و چون طول هر بخش سیم از ۱۷ سانتیمتر کمتر نیست، پس :

$$x+y+z+t+s \geq ۵\times۱۷+۷\times۱۷=۲۰۴$$

که فرض مسأله را نقض می‌کند (در صورت مسأله گفته‌اند، طول تکهٔ سیم اصلی ۲ متر (۲۰۰ سانتیمتر) است ؛ در حالی که در این‌جا، طول مجموع پنج بخش، نمی‌تواند از ۲۰۴ سانتیمتر کمتر باشد).



(شکل ۱)

مثال ۵: یک هشت ضلعی فضایی (یا یک خط شکستهٔ بسته در فضا) چنان است که ضلعهای غیرمجاور آن یکدیگر را قطع نمی‌کنند (خط شکسته با خودش برخورد ندارد) و درضمن، هشت رأس آن، بر رأسهای یک مکعب منطبقند. ثابت کنید دست‌کم یکی از ضلعهای هشت‌ضلعی، بر یکی از یالهای مکعب قرار دارد.

فرض می‌کنیم این‌طور نباشد و هیچ ضلعی از هشت ضلعی فضایی، روی یالی از مکعب قرار نگیرد. رأسهای مکعب را به رنگهای سیاه و سفید، طوری درمی‌آوریم که هیچ رأسی، با رأس مجاورش، به یک رنگ نباشد (شبیه شکل ۱). هر ضلع هشت ضلعی، برای این که روی یال مکعب نباشد، باید دو رأس با رنگهای مختلف را به هم وصل کرده باشد ؛ یعنی روی یکی از قطرهای یک وجه مکعب یا روی یکی از قطرهای خود مکعب قرار گیرد. مکعب دارای شش وجه است و در هر وجه، تنها یکی از قطرها را می‌توان برای ضلع هشت ضلعی درنظر گرفت (زیرا دو قطر هر وجه، یکدیگر را قطع می‌کنند). همچنین از بین چهار قطر مکعب، تنها یکی می‌تواند به عنوان ضلع هشت‌ضلعی انتخاب شود (زیرا قطرهای مکعب یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند).

بنابراین شش‌ضلع هشت ضلعی روی شش وجه (در امتداد یک قطر از هر وجه) و یک ضلع هم روی یکی از قطرهای مکعب قرار می‌گیرد و اگر ضلع هشتم را روی یکی دیگر از قطرهای مکعب یا روی یکی از قطرهای دوم یکی از وجه‌های مکعب انتخاب کنیم، دو ضلع هشت‌ضلعی، یکدیگر را قطع می‌کنند، که مخالف فرض مسأله است.

یادداشت: مسأله، در محدودهٔ آنچه خواسته شده بود، حل شد ؛ ولی به این پرسش پاسخ داده نشد که : آیا می‌توان این هشت‌ضلعی را طوری رسم کرد که تنها یکی از ضلعهای آن، بر یک یال مکعب قرار گیرد؟ در این‌باره آزمایش کنید و اگر پاسخ به این پرسش ممکن است، نمونه‌ای از چنین هشت‌ضلعی را پیدا کنید.

به ذکر مثال ادامه می‌دهیم و نمونه‌های دیگری از کاربرد «برهان خلف» را می‌آوریم. ولی پیش از آن، به مناسبت یادداشتی که برای مثال ۵ آوردیم، مثال دیگری هم می‌آوریم تا محدودهٔ کاربرد «برهان خلف» روشنتر شود. در هرحال، باید دقّت کنیم به طور دقیق، چه نتیجه یا نتیجه‌هایی از استدلال ما، که بر پایهٔ برهان خلف انجام گرفته است، به دست می‌آید و چه نتیجه‌هایی به دست نمی‌آید.

مثال ۶: دنبالهٔ نامتناهی (a_k) ، که همهٔ جمله‌های آن، عددهایی مثبتند، چنان است که برای هر $k \in N$ ، داریم :

$$(a_{k+1}+k)a_k=۱ \qquad (۱)$$

ثابت کنید همهٔ عددهای این دنباله، عددهایی گنگ هستند.

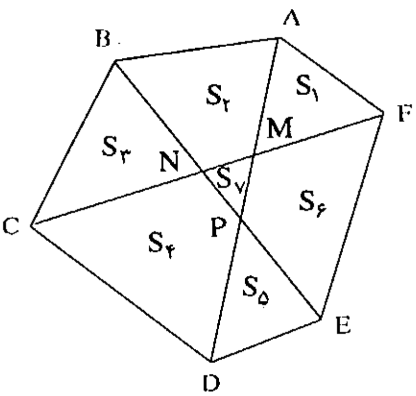
فرض می‌کنیم، یکی از جمله‌های دنباله، عددی گویا و به صورت $a_k=\frac{p}{q}$ باشد، که در آن، p و q را، عددهایی طبیعی گرفته‌ایم. با توجه به برابری (۱) می‌توان مقدار جملهٔ بعدی را به دست آورد :

$$a_{k+1}=\frac{۱}{a_k}-k=\frac{q}{p}-k=\frac{q-pk}{p}$$

مجموع عددهای صورت و مخرج، در a_k برابر $p+q$ و در a_{k+1} برابر $p+q-pk$ است ؛ یعنی این مجموع، در a_{k+1} کمتر از آن در a_k است و بنابراین بعد از چندگام، به جایی می‌رسیم که یکی از دو جملهٔ صورت یا مخرج، عددی منفی می‌شود و فرض را که باید همه جمله‌ها مثبت باشند، نقض می‌کند. این تناقض ثابت می‌کند که در این دنباله، جملهٔ گویا وجود ندارد.

توجه کنید ما ثابت کردیم دنباله‌ای که برای آن، دستور (۱) برقرار باشد، نمی‌تواند جمله گویا داشته باشد؛ ولی ثابت نکردیم چنین دنباله‌ای با جمله‌های گنگ وجود دارد. خودتان در این‌باره بیندیشید. آیا چنین دنباله‌ای وجود دارد؟ و روشن است برای پاسخ مثبت یا منفی به این پرسش، استدلال ریاضی لازم است. البته اگر بتوان یک نمونهٔ عددی برای چنین دنباله‌ای پیدا کرد، کافی است تا حکم کنیم، چنین دنباله‌ای وجود دارد. ولی آیا می‌توانید چنین نمونه‌ای را پیدا کنید؟

مثال ۷: در یک شش‌ضلعی کوژ (محدب) که بریک صفحه قرار دارد، هر یک از سه قطر بزرگتر شش‌ضلعی را به دو بخش با مساحتهای برابر تقسیم می‌کند. ثابت کنید این سه قطر بزرگتر، از یک نقطه می‌گذرند.



(شکل ۲)

فرض می‌کنیم، قطرهای بزرگتر شش‌ضلعی، در یک نقطه به هم نرسیده و از برخورد با یکدیگر، مثلث MNP را به‌وجود آورده باشند (شکل ۲). مساحت بخشهایی از شش‌ضلعی را که به وسیلهٔ این سه قطر پدید آمده‌اند، طبق شکل (۲) نامگذاری می‌کنیم. چون هریک از دو قطر CF و AD، شش‌ضلعی را به دو بخش با مساحتهای برابر تقسیم می‌کنند، باید داشته باشیم:

$$S_1 + S_2 + S_3 = S_4 + S_5 + S_6 + S_7$$

$$S_1 + S_5 + S_6 = S_2 + S_3 + S_4 + S_7$$

اگر این دو برابری را با هم جمع کنیم و سپس از جمله‌های مساوی، در دوطرف برابری صرف‌نظر کنیم، سرانجام به این برابری می‌رسیم:

$$S_1 = S_4 + S_7$$

یعنی دو مثلث AMF و CMD، مساحتهایی برابر دارند و از طرف دیگر:

$$2S_{AMF} = |AM|.|FM|.\sin\hat{M} \;; 2S_{CMD} = |CM|.|DM|.\sin\hat{M}$$

بنابراین $|AM|.|FM| = |CM|.|DM|$ ؛ یعنی

$$|AM.FM| > |CN.DP| \qquad (1)$$

به همین ترتیب، می‌توان دو نابرابری دیگر به دست آورد:

$$|DP|.|EP| > |AM|.|BN| \qquad (2)$$

$$|BN|.|CN| > |FM|.|EP| \qquad (3)$$

اگر سه نابرابری (۱)، (۲) و (۳) را در هم ضرب کنیم، پس از حذف عاملهای مساوی از دو طرف نابرابری حاصل به نابرابری ناممکن $1>1$ می‌رسیم. تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را ثابت می‌کند.

مثال ۸: سه زیر مجموعهٔ جدا از هم A، B و C را از مجموعهٔ عددهای طبیعی جدا کرده‌ایم؛ به نحوی که هر عدد طبیعی، در یکی و تنها یکی از سه زیر مجموعه باشد، ثابت کنید می‌توان دو عدد طبیعی a و b را از دو زیرمجموعه مختلف انتخاب کرد؛ به نحوی که مجموع آنها، یعنی $a+b$ عضو زیرمجموعهٔ سوم نباشد.

فرض می‌کنیم چنین نباشد؛ یعنی مجموع هر دو عضو از دو مجموعهٔ A، B و C، عضوی از مجموعهٔ سوم باشد. دو عدد طبیعی پشت سر هم، مثل a و b را درنظر می‌گیریم بدون این که به کلی بودن مسأله، لطمه‌ای وارد شود، می‌توان a را عددی زوج و عضو A و b را عددی فرد و عضو B درنظر گرفت. بنابه فرضی که کرده‌ایم، باید $a+b$، عضو C باشد. به همین ترتیب:

$$(a+b)+b = a+2b \in A;$$

$$a+3b \in C \;;\; a+4b \in A \;;\ldots;a+2kb \in A \;;$$

$$a+(2k+1)b \in C \;;\; (a+b)+a = 2a+b \in B \;;$$

$$3a+b \in C \;;\ldots;$$

$$\ldots 2ka+b \in B \;;\; (2k+1)a+b \in C \;;\ldots$$

اکنون عدد $ab+a+b$ را درنظر می‌گیریم، a عددی زوج و bعددی فرد است، پس:

$$ab+(a+b) = a+(2m+1)b \in C$$

$$ab+(a+b) = (a+1)b+a = (2m+1)b+a \in C$$

$$ab+(a+b) = (b+1)a+b = 2ka+b \in B$$

عدد $ab+a+b$ هم‌عضو زیرمجموعهٔ C و هم‌عضو زیرمجموعهٔ B درآمد که فرض مسأله را نقض می‌کند، که به معنای درستی حکم مسأله است.

مثال ۹: ثابت کنید نمی‌توان عددهای درست a و b را طوری پیدا کرد که حاصل ضرب دو ریشه از چهار ریشهٔ معادلهٔ

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0 \qquad (1)$$

برابر با ۳ باشد.

از برهان خلف استفاده می‌کنیم و p و q را دو ریشه از معادلهٔ (۱) می‌گیریم که حاصل ضربی برابر ۳ داشته باشند. چون $x=0$ ریشه‌ای از معادلهٔ (۱) نیست، بنابراین می‌توان دوطرف معادله را بر x^2 بخش کرد که در نتیجه به این معادله می‌رسیم:

$$(x^2+\frac{1}{x^2})+a(x+\frac{1}{x})+b=0$$

که با فرض $x+\frac{1}{x}=y$، به این معادله درجه دوم می‌رسیم:

$$y^2+ay+b-2=0 \qquad (2)$$

عددهای $p+\frac{1}{p}$ و $q+\frac{1}{q}$، ریشه‌های این معادله‌اند؛ در ضمن، وقتی و تنها وقتی این دو ریشه برابرند که p و q برابر باشند، زیرا با توجه به شرط $pq=3$، داریم:

$$p+\frac{1}{p}=q+\frac{1}{q}\Rightarrow p-q=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow p-q-\frac{p-q}{3}=0\Rightarrow p=q$$

[توجه کنیم اگر شرط $pq=3$ را درنظر نگیریم، آن وقت برابری $p+\frac{1}{p}=q+\frac{1}{q}$، در یکی از دو حالت برقرار می‌شود، در حالت $p=q$ و در حالت $pq=1$.]

ابتدا حالت $p\neq q$ را درنظر می‌گیریم. بنا به قضیهٔ ویت (رابطهٔ بین ریشه‌ها و ضریبها)، از معادلهٔ (۲) به دست می‌آید:

$$\begin{cases}p+\frac{1}{p}+q+\frac{1}{q}=-a\\(p+\frac{1}{p})(q+\frac{1}{q})=b-2\end{cases}$$

با توجه به فرض $pq=3$، این دو برابری به این صورت درمی‌آیند:

$$\begin{cases}p+q=-\frac{3a}{4}\\\frac{p}{q}+\frac{q}{p}=b-\frac{16}{3}\end{cases}$$

که باز هم با توجه به $pq=3$، به دست می‌آید:

$$\begin{cases}p^2+q^2=\frac{9a^2}{16}-6\\p^2+q^2=3b-16\end{cases}$$

با برابر قراردادن سمت راست برابریها، به برابری $48b-9a^2=160$ می‌رسیم که برای عددهای درست a و b ممکن نیست؛ زیرا سمت چپ برابری بر ۳ بخش‌پذیر و سمت راست آن بر ۳ بخش‌ناپذیر است.

در حالت $p=q$، دو ریشه برابر $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ می‌شوند. $\sqrt{3}$ باید در معادلهٔ (۱) صدق کند:

$$9+3a\sqrt{3}+3b+a\sqrt{3}+1=0$$

$$\Rightarrow 4a\sqrt{3}+(3b+10)=0$$

که برای برقراری آن، باید داشته باشیم:

$$a=0\ ,\ b=-\frac{10}{3}$$

برای b، عددی درست به دست نمی‌آید.

بنابراین، نمی‌توان برای a و b عددهای درستی پیدا کرد که به ازای آنها، معادلهٔ (۱)، دو ریشه به حاصل‌ضرب ۳ داشته باشد.

مثال ۱۰: آیا می‌توان همهٔ عددهای حقیقی را از بازهٔ $[0,1]$ بین دو مجموعهٔ A و B طوری تقسیم کرد که تفاضل هر دو عدد دلخواه از مجموعهٔ A، عددی گویا و تفاضل هردو عدد دلخواه از مجموعهٔ B، عددی گنگ باشد؟

فرض می‌کنیم توانسته باشیم همهٔ عددهای بازهٔ $[0,1]$ را به دو مجموعهٔ مورد نظر A و B تقسیم کرده باشیم. در مجموعهٔ B بیش از یک عدد گویا نمی‌تواند وجود داشته باشد؛ زیرا تفاضل هردو عدد گویا، عددی گویا می‌شود. بنابراین، همهٔ عددهای گویا، به‌جز حداکثر یکی، عضو مجموعهٔ A هستند و در نتیجه، تفاضل هردو عضو آن عددی گویاست. به این ترتیب، همهٔ عددهای گنگ متعلق به بازهٔ $[0,1]$ باید عضو مجموعهٔ B باشند؛ ولی در این صورت، بی‌نهایت عدد گنگ وجود دارد که تفاضل آنها عددی گویاست؛ مثل $\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{2}{5}$ و $\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{5}$؛ یعنی بازهٔ عددی $[0,1]$ را نمی‌توان به دو مجموعهٔ مورد نظر فراز کرد.

مثال ۱۱: پاره‌خط های‌راست $a_1, a_2, \dots, a_{1375}, b_1, \dots, b_{1375}$ روی یک خط راست واقع هستند. می‌دانیم، هر پاره‌خط راست

a_k با هریک از دو پاره‌خط راست b_{k-1} و b_{k+1}، نقطهٔ مشترکی دارد. به‌جز این، پاره خط راست a_{1375} با پاره‌خط راست b_1، و پاره‌خط راست a_1 با پاره‌خط راست b_{1375}، دارای نقطهٔ مشترک است. ثابت کنید به ازای هر مقدار k، دو پاره‌خط راست a_k و b_k دارای نقطهٔ مشترکند.

فرض می‌کنیم به ازای مقداری از k، a_k و b_k نقطهٔ مشترک نداشته باشند. بدون این که به کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، پاره‌خط راست a_1 را در سمت چپ پاره‌خط راست b_1 می‌گیریم؛ چون b_2 با a_1 و a_2 با b_1 نقطهٔ مشترک دارند، بنابراین، بناچار b_2 باید در سمت چپ a_2 باشد. اگر همین استدلال را برای پاره‌خطهای راست بعدی ادامه دهیم، که a_{1375} در سمت چپ b_{1375} و سپس b_1 در سمت چپ a_1 قرار دارد و این نشدنی است که هم a_1 در سمت چپ b_1 و هم b_1 در سمت چپ a_1 قرار گیرد. تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را ثابت می‌کند.

مثال ۱۲: $u_1, u_2, \ldots, u_n$ را عددهایی مثبت به حاصل‌ضرب برابر واحد می‌گیریم. ثابت کنید عدد طبیعی k با شرط $k < n$ وجود دارد؛ به نحوی که به ازای آن، داشته باشیم:

$$u_k(u_{k+1}+1) \geq 2$$

(u_{n+1} را باید برابر u_1 گرفت.)

فرض می‌کنیم، برای هر مقدار $k \leq n$ داشته باشیم:

$$u_k(u_{k+1}+1) < 2$$

این نابرابری را برای همهٔ مقدارهای k می‌نویسیم:

$$u_1(u_2+1) < 2$$

$$u_2(u_3+1) < 2$$

$$\ldots\ldots$$

$$u_n(u_n+1) = u_n(u_1+1) < 0$$

از ضرب همهٔ این نابرابریها در یکدیگر به دست می‌آید:

$$u_1u_2\ldots u_n(u_1+1)(u_2+1)\ldots(u_n+1) < 2^n \quad (1)$$

اکنون توجه کنید که نابرابری $u+1 \geq 2\sqrt{u}$ برای هر مقدار u برقرار است (چرا؟)، بنابراین:

$$(u_1+1)(u_2+1)\ldots(u_n+1) \geq 2^n\sqrt{u_1u_2\ldots u_n} = 2^n \quad (2)$$

دو نابرابری (۱) و (۲) یکدیگر را نقض می‌کنند و بنابراین فرض ما مبنی بر این نابرابری $u_k(u_{k+1}+1) < 2$ به ازای هر مقدار k برقرار است، فرض نادرستی است که در نتیجه، حکم مسأله ثابت می‌شود.

مثال ۱۳: جوابهای حقیقی این دستگاه را پیدا کنید:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3^2 \\ x_2 + x_3 = x_4^2 \\ x_3 + x_4 = x_5^2 \\ x_4 + x_5 = x_1^2 \\ x_5 + x_1 = x_2^2 \end{cases}$$

یک جواب این دستگاه، بروشنی و بلافاصله به دست می‌آید:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$$

ثابت می‌کنیم این دستگاه، جواب منفی برای مجهولها ندارد، از برهان خلف استفاده می‌کنیم و فرض بر این می‌گیریم که، یکی از مقدارهای x_i و مثلاً x_1، مقداری منفی باشد. x_1 را منفی می‌گیریم: $x_1 < 0$. از تفاضل معادله‌های چهارم و پنجم دستگاه به دست می‌آید:

$$x_4 - x_1 = x_1^2 - x_2^2 \qquad (1)$$

چون x_1 را منفی گرفته‌ایم، بنابراین $x_1 - x_4$ و در نتیجه $x_1^2 - x_2^2$ مقداری غیرمنفی می‌شود:

$$x_1^2 - x_2^2 \geq 0 \Rightarrow |x_1| \geq |x_2|$$

بنابراین $x_1 + x_2$ مقداری منفی یا صفر است:

$$x_1 + x_2 = x_3^2 \leq 0 \Rightarrow x_3 = 0$$

با توجه به (۱) داریم:

$$x_4 - x_1 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_4$$

یعنی x_4 عددی منفی است. اکنون به معادلهٔ سوم دستگاه توجه کنید. در این معادله $x_3 = 0$ و $x_4 < 0$، بنابراین باید داشته باشیم: $x_5^2 < 0$، که نشدنی است.

یادداشت: اگر دوری بودن دستگاه را درنظر می‌گرفتیم، (دربارهٔ این مفهوم، کمی بعد صحبت خواهیم کرد) به این نتیجه می‌رسیدیم که اگر یکی از مجهولها منفی باشد، باید همهٔ مجهولها منفی باشند و در این صورت $x_1 + x_2$ یا x_3^2 عددی منفی می‌شود که نشدنی است.

به این ترتیب، باید در بین عددهای نامنفی، در جست و جوی جوابهای دستگاه باشیم. اگر در بین مقدارهایی که برای x_i به‌دست می‌آید، x_1 را بزرگترین و x_5 را کوچکترین آنها فرض کنیم (هر

فرض دیگر، با این فرض اختلافی پیدا نمی‌کند) آن وقت مثلاً از معادله چهارم دستگاه داریم :

$$x_1^2 = x_4 + x_5 \le 2x_1$$

و از معادلهٔ سوم دستگاه :

$$x_5^2 = x_3 + x_4 \ge 2x_5$$

از $x_5^2 \ge 2x_5$ به دست می‌آید : $x_5 \le 0$ یا $x_5 \ge 2$ و چون x_5 منفی نیست، پس $x_5 \ge 2$. به همین ترتیب، از نابرابری $x_1^2 \le 2x_1$ به دست می‌آید $x_1 \le 2$ ،درنتیجه خواهیم داشت :

$$2 \le x_5 \le x_1 \le 2$$

و این تنها برای $x_1 = x_5 = 2$ ممکن است. به این ترتیب، دستگاه یک جواب مثبت دارد :

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 2$$

مثال ۱۴: p را عددی طبیعی و بزرگتر از واحد، و n و k را دو عدد طبیعی فرض می‌کنیم. ثابت کنید دست کم یکی از عددهای $\binom{n}{k}, \binom{n+1}{k}, \ldots, \binom{n+k}{k}$ بر p بخش‌پذیر نیست ؛ به شرطی که :

$$\binom{m}{t} = C_m^t = \frac{m!}{t!(m-t)!}$$

فرض می‌کنیم، این‌طور نباشد، در این صورت با توجه به اتحاد :

$$\binom{m}{t} = \binom{m+1}{t+1} - \binom{m}{t+1}$$

باید هریک از عددهای:

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k}{k} - \binom{n+k-1}{k};$$

$$\binom{n+k-2}{k-1} = \binom{n+k-1}{k} - \binom{n+k-2}{k};$$

....

$$\binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} - \binom{n}{k}$$

بر p بخش‌پذیر باشند. به همین ترتیب همهٔ عددهای به صورت $\binom{n+i}{j}$، که در آن $i \le j$ عددهایی دلخواه، درست و غیر منفی‌اند، بر p بخش‌پذیر می‌شوند. ولی در میان این عددها، عدد $\binom{n}{0}$، به ازای $i = j = 0$ وجود دارد که برابر است با واحد و نمی‌تواند بر p بخش‌پذیر باشد. تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را ثابت می‌کند.

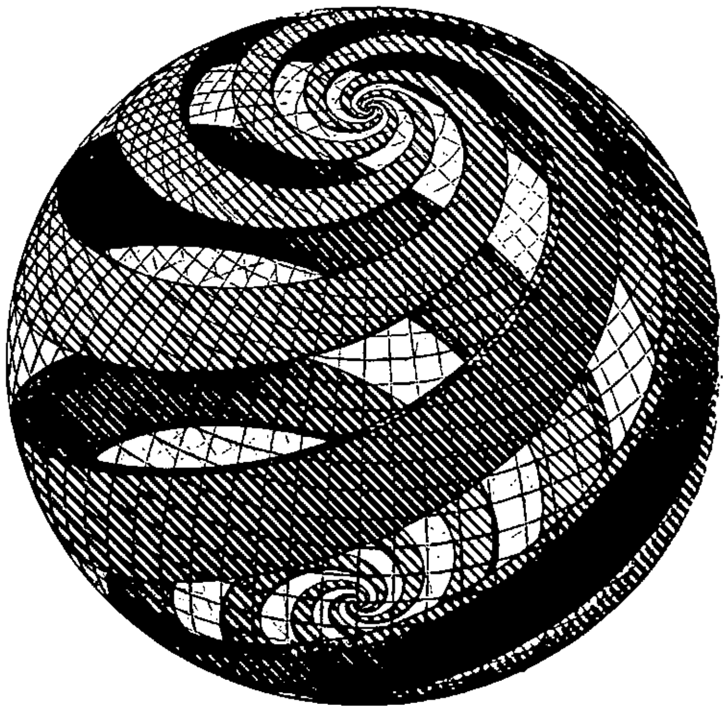
تفریح اندیشه ۱

برای اثبات این تساوی‌ها چه علائمی از چهار عمل اصلی در بین اعداد ۲ قرار می‌دهید؟

۲ ۲ ۲ ۲ = ۰
۲ ۲ ۲ ۲ = ۱
۲ ۲ ۲ ۲ = ۲
۲ ۲ ۲ ۲ = ۳
۲ ۲ ۲ ۲ = ۴
۲ ۲ ۲ ۲ = ۵
۲ ۲ ۲ ۲ = ۶
۲ ۲ ۲ ۲ = ۱۰
۲ ۲ ۲ ۲ = ۱۲

ترجمه: صمد پوراسدا...

جواب در صفحهٔ ۸۸



در حاشیهٔ مشتق و مشتق‌پذیری

● حمیدرضا امیری

معمولاً مشتق‌پذیر بودن یک تابع مانند f در نقطه‌ای به طول x_0، از دیدگاه «آنالیزی» مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد و در واقع، با توجه به تعریف مشتق و مشتقهای چپ و راستِ تابع f در نقطه‌ای به طولِ x_0، پی به چگونگی وضع تابع در نقطه‌ای به طول x_0 می‌برند و روی مشتق‌پذیری یا مشتق‌ناپذیری آن بحث می‌کنند.

در این مقاله سعی شده است که حالتهای مختلف مشتق، وجود یا عدم وجود مشتق در نقطه‌ای به طولِ x_0 را ابتدا به طریق هندسی و شهودی شناسایی و بررسی کنیم و سپس از طریق تعریف مشتق، این یافته‌های هندسی و درک شهودی را آزمایش کرده و صحّت آنها را تأیید کنیم.

یادآوری: اگر تابع با ضابطهٔ $y = f(x)$ در نقطه‌ای به طول x_0 پیوسته بوده و $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ موجود و برابر با عددی حقیقی باشد، این عدد حقیقی را مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول x_0 نامیده و با $f'(x_0)$ نمایش می‌دهند. در این حالت، می‌گوییم تابع f در نقطه‌ای به طول x_0 مشتق‌پذیر است.

توجه دارید که اگر فرض کنیم $x - x_0 = h$، در این صورت:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

اگر تعبیر هندسی مشتق را به‌خاطر داشته باشید، $f'(x_0)$ را همان «**ضریب زاویهٔ**» خط مماس بر منحنی نمایش f، در نقطه‌ای به طول x_0 (نقطه‌ای به طول x_0 روی منحنی است) نامیدیم. بنابراین بحث روی حالتهای مختلف مشتق در یک نقطه، یا وجود و عدم وجود مشتق در یک نقطه، به بحث روی حالتهای مختلف ضریب زاویهٔ خط یا خطهای مماس بر آن نقطه می‌پردازد و درنتیجه به بحث روی حالتهای مختلف خط یا خطهای مماس و وجود یا عدم وجود مماس در آن نقطه می‌انجامد.

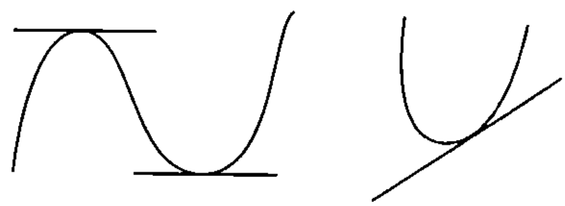
به عبارت دیگر، می‌خواهیم حالتهایی را که یک منحنی می‌تواند در نقطه‌ای دارای خط مماس باشد یا انواع مماس را که در نقاط مختلف منحنی یک تابع می‌توان بر آن رسم کرد، مورد بررسی قرار داده و از آن طریق، به انواع مشتق، وجود یا عدم وجود مشتق در یک نقطه، برسیم.

برای این منظور، همهٔ حالتهای ممکن را بررسی می‌کنیم و در هر حالت، نظر خودمان را با تعریف ریاضی مشتق، انطباق می‌دهیم.

حالت اوّل: نقطه‌ای به طول x_0 روی منحنی به گونه‌ای واقع شده است که از آن نقطه نمی‌توان بیش از یک مماس بر منحنی عبور داد، بنابراین از آن نقطه، فقط یک خط مماس بر منحنی می‌توانیم رسم کنیم که در این حالت، بنابر تعریفِ «حدّ»، حدِّ چپ و حدّ راستِ کسر $\frac{f(x) - f(x_0)}{x \to x_0}$ وقتی $x \to x_0$ که به ترتیب مشتق چپ و مشتق راستِ تابع f نامیده می‌شوند، با هم برابر بوده و با عددی حقیقی و منحصر به‌فرد مانند L مساوی‌اند. (عدد L

همان ($f'(x_0)$ یا $tg\alpha$ یا ضریب زاویهٔ خط مماس بر منحنی f در نقطه‌ای به طول x_0 است.)

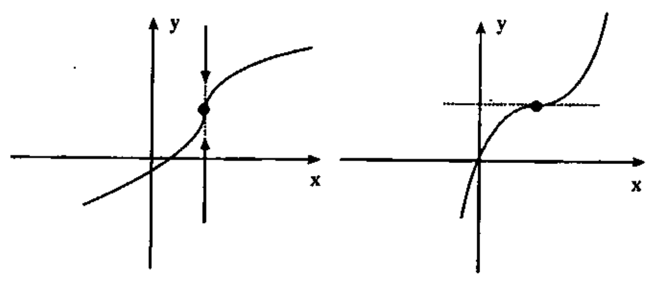
این حالت، حالتی است که تابع f در نقطه‌ای به طول x_0 مشتق‌پذیر می‌باشد که قبلاً در تعریف مشتق به آن اشاره شد و بهترین نقاط برای نمایش این حالت، نقاط اکسترمم (ماکزیمم یا مینیمم) هستند. به شکلهای زیر توجه کنید :



پرسش: چرا برای یافتن طول نقاط اکسترمم، مشتق تابع را مساوی صفر قرار می‌دهیم؟ یا به اصطلاح، ریشه‌های مشتق را می‌یابیم؟

(**راهنمایی:** خط مماس در نقطه‌های ماکزیمم یا مینیمم، موازی با محور xها بوده و ضریب زاویهٔ آن صفر است.)

حالت دوم: نقطه‌ای به طول x_0 روی منحنی، به گونه‌ای واقع شده است که اگر بخواهیم از آن نقطه، مماسی بر منحنی رسم کنیم، این مماس با محور xها یا با محور yها موازی بوده و منحنی را قطع می‌کند. به شکلهای زیر توجه کنید :



(الف) (ب)

همان‌طور که می‌دانید، این نقاط را نقاط «**عطف**» منحنی می‌نامند. در حالت (الف) مماس بر منحنی، موازی با محور xها بوده و همواره ضریب زاویهٔ آن صفر است. بنابراین مشتق در آن نقطه تعریف شده و مقدارش صفر است. در این‌گونه نقطه‌ها، تابع مشتق‌پذیر است و مقدار مشتق نیز منحصر به فرد و برابر با صفر است.

به‌عنوان مثال، تابع f با ضابطهٔ $f(x)=(x-1)^3+1$ را در نظر بگیرید که نمودار (الف) منحنی نمایش این تابع است :

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left[(x-1)^3+1\right]-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^3}{(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2-2x+1)}{\cancel{(x-1)}}=0$$

$\Rightarrow f'(1)=0=tg\alpha\Rightarrow\alpha=0\Rightarrow$ مماس با محور xها موازی است.

امّا در حالتی که مماس در نقطهٔ عطف عمود بر محور xها باشد، ضریب زاویه‌اش نمی‌تواند عددی حقیقی باشد ؛ زیرا اگر $\alpha\to\frac{\pi}{2}$ آن‌گاه $tg\alpha\to\infty$ و بسته به این که زاویهٔ α از چه سمتی به $\frac{\pi}{2}$ میل کند، $tg\alpha$ به سوی $+\infty$ یا $-\infty$ میل خواهد کرد. بنابراین $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ برابر با $+\infty$ یا $-\infty$ خواهد شد و لذا طبق تعریف، تابع در این نوع نقطه‌ها مشتق‌پذیر نیست و می‌توان گفت :

اگر f در همسایگی نقطه‌ای به طول x_0 پیوسته بوده و مشتقهای راست و چپ آن در x_0 برابر با ∞ و هم علامت باشند، آن نقطه‌ای به طول x_0 نقطهٔ عطف منحنی خواهد بود.

تذکر: توجه دارید که عکس مطلب فوق، در حالت کلّی برقرار نیست ؛ یعنی اگر نقطهٔ $A\Big|^{x_0}_{y_0}$ نقطهٔ عطف منحنی باشد، لازم نیست تابع در آن نقطه، مشتقی برابر با ∞ داشته باشد ؛ مانند تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x-1)^3+1$ که در مثال قبل بررسی شد.

به مثال زیر توجه کنید :

تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)}+\frac{1}{2}$ را که نمودار (ب) منحنی نمایش آن می‌باشد، در نظر می‌گیریم :

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left[\sqrt[3]{x-1}+\frac{1}{2}\right]-\frac{1}{2}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1}=\lim_{x\to1}\sqrt[3]{\frac{(x-1)}{(x-1)^3}}$$

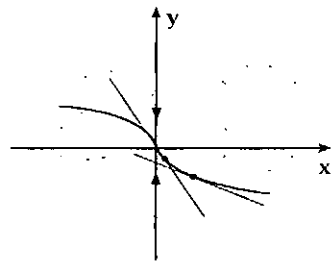
$$=\lim_{x\to1}\sqrt[3]{\frac{1}{(x-1)^2}}=\frac{1}{0^+}=+\infty\ ,$$

$$\lim_{x\to 1^+}\sqrt[3]{\frac{1}{(x-1)^2}}=\frac{1}{0^+}=+\infty\quad ,$$

$$\lim_{x\to 1^-}\sqrt[3]{\frac{1}{(x-1)^2}}=\frac{1}{0^+}=+\infty\Rightarrow f'(1)=+\infty$$

تذکر: با توجه به انحنای منحنی در نقطه‌ای به طول ۱، ملاحظه می‌کنید که وقتی مماس بر منحنی را به سمت نقطه‌ای به طول ۱ میل می‌دهید، در واقع زاویهٔ خط مماس از سمت چپ به سمت $\frac{\pi}{2}$ میل می‌کند و می‌دانیم اگر زاویه‌ای از چپ به $\frac{\pi}{2}$ میل کند (مقادیر کمتر از $\frac{\pi}{2}$)، تانژانت آن زاویه، به سمت $+\infty$ میل خواهد کرد. در قسمت پایین منحنی (نسبت به نقطهٔ عطف) نیز رفتار مماس، مشابه قبل است.

اگر منحنی نمایش تابع f به صورت زیر باشد، برای رسم مماس در نقطهٔ عطف و میل کردنِ به سمت این مماس، ناچاریم زاویه را از سمت راست به $\frac{\pi}{2}$ میل داده و درنتیجه، $tg\alpha$ به سمت $-\infty$ میل خواهد کرد.



$$f(x)=-\sqrt[3]{x}\Rightarrow f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{-\sqrt[3]{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sqrt[3]{x}}{x}$$

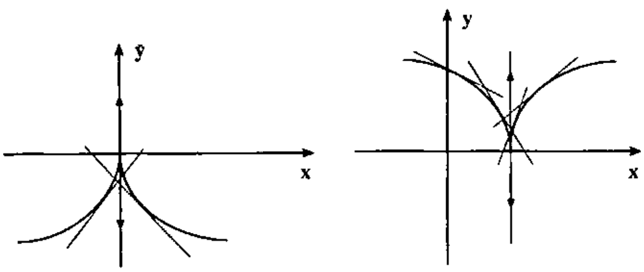
$$=\lim_{x\to 0}-\sqrt[3]{\frac{x}{x^3}}=\lim_{x\to 0}-\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}=-\frac{1}{0^+}=-\infty$$

حالت سوم: نقطه‌ای به طول x_0 روی منحنی، به‌گونه‌ای قرار دارد که وقتی از راست به x_0 نزدیک می‌شویم، زاویهٔ خط مماس از چپ یا راست، به $\frac{\pi}{2}$ میل می‌کند و درنتیجه، مقدار $tg\frac{\pi}{2}$ یا $f'(x_0)$ به ترتیب به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند و وقتی از چپ به x_0 نزدیک می‌شویم، زاویهٔ خط مماس از راست یا چپ به $\frac{\pi}{2}$ نزدیک شده و درنتیجه، مقدار $tg\frac{\pi}{2}$ یا $f'(x_0)$ به ترتیب به $-\infty$ یا $+\infty$ میل می‌کند.

نقاطی که چنین وضعیتی دارند، به نقاط «**بازگشتی**» معروف بوده و با توجه به تعریف مشتق، بدیهی است که مشتقهای چپ و راست در x_0 با هم برابر نبوده و تابع در این نقاط مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

پس می‌توان گفت:

اگر تابع f در نقطه‌ای به‌طول x_0 پیوسته و مشتقهای چپ و راستِ آن، یکی $-\infty$ و دیگری $+\infty$ باشد، آن نقطه، نقطهٔ بازگشت منحنی بوده و تابع در آن نقطه، مشتق‌پذیر نیست. به شکلهای زیر توجه کنید:



(الف) (ب)

اگر تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ را در نظر بگیریم (نمودار مربوط به آن (الف) است)، در این صورت خواهیم داشت:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}-0}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{(x-1)^3}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{1}{(x-1)}}\ ,$$

$$\lim_{x\to 1^+}\sqrt[3]{\frac{1}{x-1}}=\sqrt[3]{\frac{1}{0^+}}=+\infty\quad ,$$

$$\lim_{x\to 1^-}\sqrt[3]{\frac{1}{x-1}}=\sqrt[3]{\frac{1}{0^-}}=-\infty$$

همان‌طور که تعریف ریاضی مشتق نیز نشان داد، دیدیم که $f'(1^+)\neq f'(1^-)$ و تابع f در نقطه به طول ۱ مشتق‌پذیر نمی‌باشد و این نقطه، یک نقطهٔ بازگشتی است. همچنین ملاحظه می‌کنید که وقتی $x\to 1^+$ (از سمت راست به ۱ نزدیک می‌شویم) زاویهٔ خط مماس بر منحنی، از چپ به $\frac{\pi}{2}$ نزدیک می‌شود؛ یعنی $\alpha\to\frac{\pi}{2}^-$ (در ناحیهٔ اوّل زاویه‌ها همگی کمتر از $\frac{\pi}{2}$ هستند) و

در نتیجه، $tg\alpha = f'(1)$ به سمت $+\infty$ میل می‌کند و در حالتی که $x \to 1^-$ آن گاه $f'(1) = tg\alpha \to -\infty$.

حال اگر تابع f با ضابطهٔ $f(x) = -\sqrt[3]{x^2}$ را در نظر بگیریم، مشاهده می‌شود که :

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sqrt[3]{x^2}}{x}$$

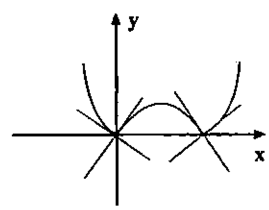
$$= \lim_{x\to 0} -\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}} = \lim_{x\to 0} -\sqrt[3]{\frac{1}{x}} \ ,$$

$$\lim_{x\to 0^+} -\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = -\sqrt[3]{\frac{1}{0^+}} = -\infty \ ,$$

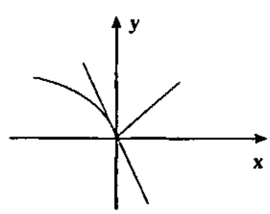
$$\lim_{x\to 0^-} -\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = -\sqrt[3]{\frac{1}{0^-}} = +\infty$$

این نقطه نیز یک نقطهٔ بازگشتی بوده و طبق شکل (ب) اگر $x \to 0^+$ ، در این صورت $\alpha \to \frac{\pi^+}{2}$ و در نتیجه $f'(0) = tg\alpha \to -\infty$ و اگر $x \to 0^-$ ، در این صورت $\alpha \to \frac{\pi^-}{2}$ و درنتیجه $f'(0) = tg\alpha \to +\infty$.

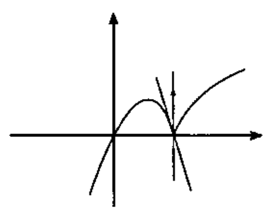
حالت چهارم: ممکن است نقطه‌ای به طول x_0 روی منحنی، به گونه‌ای قرار داشته باشد که از آن نقطه، بتوانیم دو مماس بر منحنی رسم کنیم، که البته یکی از این دو مماس، می‌تواند بر محور xها عمود باشد. به شکلهای زیر توجه کنید :



(الف)



(ب)



(ج)

واضح است که در این حالت نیز مشتقهای چپ و راست با هم برابر نبوده و حتّی یکی از آنها می‌تواند ∞ باشد که در هر صورت، تابع در چنین نقاطی که به نقاط «**زاویه‌دار**» معروف هستند، مشتق‌پذیر نمی‌باشد. بنابراین می‌توان گفت :

هرگاه $f'(x_0^+) = L_1$ و $f'(x_0^-) = L_2$ و $L_1 \neq L_2$ و یا یکی از مشتق چپ یا راست در نقطهٔ به طول x_0 ، عددی حقیقی و دیگری $+\infty$ یا $-\infty$ باشد، در این حالت، چنین نقطه‌ای نقطهٔ «**زاویه‌دار**» نامیده شده و تابع در آن نقطه ، مشتق‌پذیر نمی‌باشد و همواره در این نقطه، دو مماس می‌توان بر منحنی رسم کرد.

به عنوان مثال، اگر فرض کنیم $y = |x^2 - 2x|$ ، در این صورت خواهیم داشت :

$$f(x) = |x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x & x \ge 2 \ \text{یا} \ x \le 0 \\ -x^2 + 2x & 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{|x^2-2x|-0}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{|x|\ |x-2|}{x},$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|\ |x-2|}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{x}|x-2|}{\cancel{x}} = 2 = f'(0^+) \ ,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|\ |x-2|}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-\cancel{x}|x-2|}{\cancel{x}} = -2 = f'(0^-)$$

و همان‌طور که در شکل (الف) مربوط به این تابع می‌بینید، در نقطه‌ای به طول صفر، دو مماس بر منحنی رسم شده است که یکی دارای ضریب زاویهٔ ۲ و دیگری ۲- است.

تمرین: این مطلب را برای $f'(2)$ تحقیق کنید.

حال تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{(x-1)} & x \ge 1 \\ -x^2 + x & x < 1 \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم. در این تابع، نقطه‌ای به طول $x_0 = 1$ را بررسی می‌کنیم که خواهیم داشت :

$$f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \ ,$$

$$f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt[3]{x-1}-0}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \ ,$$

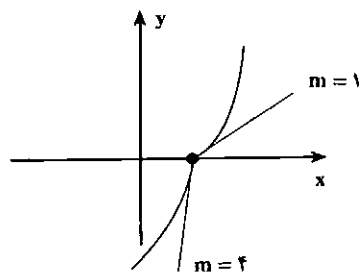
$$f'(1^-)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{-x^2+x-0}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{-x\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}}=-1$$

همان‌طور که روی شکل (ج) مشاهده شد و نیز همان‌طور که از تعریف ریاضی مشتق برای این تابع به‌دست آمد، در نقطه‌ای به طول ۱، دو مماس، یکی عمود بر محور xها و دیگری خطی با ضریب زاویهٔ ۱−، می‌توانیم بر منحنی نمایش آن رسم کنیم.

تمرین: در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^2-x & x\ge 1 \\ 2x^2-2 & 0\le x\le 1\end{cases}$ نشان دهید که نقطه‌ای به طول $x_0=1$ یک نقطهٔ زاویه‌دار است.

(**راهنمایی:** نمودار آن رسم شده است.)



حالت پنجم: ممکن است نقطه‌ای به طول x_0 روی منحنی، به‌گونه‌ای باشد که از آن نقطه نتوانیم بر منحنی مماسی رسم کنیم. در واقع، رفتار تابع در آن نقطه مشخص نیست و درنتیجه برای $f'(x_0)$ مقدار معلومی حاصل نخواهد شد و تابع f در این نقاط، مشتق‌پذیر نیست. به عنوان مثال، تابع با ضابطهٔ

$f(x)=\begin{cases} x\cos\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$ را در نظر بگیرید:

می‌دانیم f در همسایگی صفر پیوسته است و داریم $f(0)=0$ و از طرف دیگر:

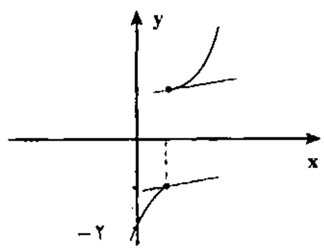
$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x}\cos\frac{1}{x}-0}{\cancel{x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\cos\frac{1}{x}$$

و چون $\left|\cos\frac{1}{x}\right|\le 1$ ، بنابراین مقدار حدّ فوق، عددی حقیقی در بازهٔ $[-1,1]$ است؛ امّا این مقدار نامعلوم است. پس $f'(0)$ وجود ندارد؛ یعنی در نقطهٔ صفر، نمی‌توانیم بر منحنی نمایش تابع فوق، مماسی رسم کنیم.

تمرین: نقطهٔ به طول $x_0=0$ روی منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$ چه نقطه‌ای است؟ آیا تابع در این نقطه مشتق‌پذیر است؟

حالت ششم: ممکن است نقطهٔ روی منحنی، به‌گونه‌ای واقع شده باشد که منحنی در آن نقطه، پیوسته نباشد؛ در این حالت، مطابق شکل زیر، می‌توان دو مماس بر منحنی و در مجاورت آن نقطه رسم کرد که «**مشتقهای یکطرفه**» ایجاد شده و در این‌گونه نقاط نیز به طور مسلّم تابع مشتق‌پذیر نمی‌باشد.



مثال: تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} (x-1)^2+1 & x\ge 1 \\ -(x-1)^2-1 & x<1\end{cases}$ مفروض است. این تابع در نقطهٔ $x_0=1$ دارای مشتقهای یکطرفه بوده و شکل فوق مربوط به همین تابع است.

مسائل برای حل

۱ـ نقطهٔ به طول $x_0=-1$ روی منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $f(x)=\left|2x+|x-1|\right|$ ، چه نوع نقطه‌ای است؟

۲ـ نقطهٔ به طول $x_0=2$ روی منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x-2)^2[x-2]$ ، چه نوع نقطه‌ای است؟

۳ـ نقطهٔ به طول $x_0=0$ روی منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2+x[x]$ ، چه نوع نقطه‌ای است؟

• غلامرضا یاسی‌پور

تاریخچهٔ مجلات ریاضی در ایران (۲۴)

در کار بررسی مجله‌های ریاضی ایران، می‌رسیم به فصلنامهٔ مجموعه، که مجموعه‌ای است از مقاله‌ها و مسائل ریاضی ؛ شمارهٔ اوّل این فصلنامه، در بهار ۱۳۷۲، در ۱۳۶ صفحه، با قطع وزیری چاپ شده است و نویسندگان آن به نامهای موسی آذرنوش، پرویز شهریاری، حمیدرضا امیری، محمدهاشم رستمی، مهدی قمصری اصفهانی، احمد قندهاری، سید محمدرضا هاشمی موسوی، سید حسین سید موسوی و غلامرضا یاسی‌پور می‌باشند.

در مقدمهٔ ویراستار این مجموعه چنین آمده است که :

«قصدمان از نشر مجموعه، آشنا کردن خوانندهٔ علاقه‌مند، با وقایع و مطالب کهنه و نویی است که در جهان ریاضیات مطرح می‌شود و در این سرزمین وسیع دانش بشری اتفاق می‌افتد. کهنه‌ها را با حدیثی نو بیان می‌کنیم، سقفشان را می‌شکافیم و طرحی نو درمی‌اندازیم. نوها را نیز با روایتی دلنشین، آن چنان که نشان مردان راه شد، به بیان می‌نشینیم و به ضمان می‌ایستیم. آری قصدمان این است!

اما، قطع این مرحله بی‌همراهی خضر نتوانیم کرد که دراز است ره مقصد و ما نوسفریم.»

با سر مقالهٔ فصلنامه آشنا شدیم. اکنون برای آشنایی بیشتر با مقاله‌های آن، یکی از مقاله‌های آن را انتخاب کرده، به تمامی ذکر می‌کنیم. این مقاله، نظریهٔ بازیهاست به ترجمهٔ «غلامرضا یاسی‌پور»، از مرجع زیر :

J. Von Neumann and O. Morge stern, Theory of Games and Economic Behaviour, (John Wiley, 1953)

نظریهٔ بازیها* (قسمت اوّل)

مقدمه

تمام ماجرا در سال ۱۹۲۸ آغاز شد و آن، هنگامی بود که «**جان فون نویمان**[1]» ریاضیدان، در سالنامهٔ ریاضیات[2]، مقاله‌ای تحت عنوان «راجع به نظریهٔ بازیهای دسته جمعی[3]» به چاپ رساند. توسعه‌های بعدی این نظریه، در کتاب عالی، **نظریهٔ بازیها و رفتار اقتصادی**[4] نوشتهٔ جی. فون نویمان و او. **مورگنسترن** که ابتدائاً در ۱۹۴۴ به چاپ رسید و در ۱۹۴۷ در آن تجدید نظر شد، داده شده است. فرض این کتاب، این است که نظریهٔ اقتصاد می‌تواند از بررسی بازیهای استراتژی بهره‌مند شود. در حال حاضر، چنین احساس می‌شود که نظریهٔ بازیها، باید پیش از این که بتواند از ارزش عملی در موقعیّتهای بغرنج برخوردار شود، پیشرفت بیشتری داشته باشد. اما این آغاز کار و مقدمه‌ای است که می‌شود آن را از لحاظ خودش جالب یافت.

مدلهای اقتصاد[5]

وضعیت ناجور «رابینسون کروزوئه»ی بیچاره را، که تک و تنها در جزیره‌ای رها شده بود و باید خود، معاش خود را به بهترین وجهی که می‌توانست تأمین می‌کرد، در نظر بگیرید. هر چند او در گوشهٔ انزوا و تقلای خود برای زنده ماندن از امتیازی منحصر به فرد برخوردار بود ؛ زیرا رقیبی نداشت که با او برای

جیرهٔ اندکی که به زور از چنگ طبیعتِ بی‌عاطفه به دست می‌آورد، به رقابت بپردازد؛ چون لوازم زندگی‌اش (با در دست داشتن منابع کافی در جزیره) صرفاً با سعی و کوشش خود او تأمین می‌شد.

فرض می‌کنیم در آن جزیره، چندین کشتی شکسته بودند که هر یک، تنها در قصد فراهم کردن مصالح خود بود. از آن جا که کوشش دیگران می‌تواند منافی موفقیّت هر یک از اشخاص باشد، هر یک از آنان باید برای به حساب آوردن رفتار قابل انتظار رقبای خود، استراتژی خود را مشخص کند. امروزه، بررسی ریاضی استراتژیهایی که باید در چنین مواقعی که در آنها تنازع منافع رخ می‌دهد، به کار گرفته شود، به عنوان «نظریهٔ بازیها» شناخته می‌شود.

می‌توان آن‌چه را که موفقیّت هر فرد (یا گروه) را تشکیل می‌دهد، به عنوان ماکزیمم کردن کمیّت نمایش دهندهٔ «رضایت» توصیف کرد. اندازه‌گیری چنین مفهومِ ظاهراً مبهمی، آن طور که باید و شاید، **کار نظریهٔ «منفعت[6]»** است. اما این فرض که اصلاً می‌توان چنین مقیاس عددی را تشکیل داد، جزءِ لاینفک بنیادهای نظریهٔ اقتصادی و در واقع در خود وجود پول است. بنابراین در تمام وضعیتها، وجود مقیاس عددی مناسبی را ـ که می‌توان راجع به آن به عنوان ارزش پولی فکر کرد ـ فرض می‌کنیم. این ارزش، مقیاس خطی رضایت یا منفعت در نظر گرفته شده و بنابراین ماکزیمم ارزش (پولی) مزبور، متناظر با بیشترین درجهٔ منفعت است و درجات نسبی سودمندی، به طور کامل، توسط ارزشهای وابسته با آنها نمایش داده می‌شوند.

در مورد رابینسون کروزوئه، یا هر وضعیت معادل آن، مسأله به ماکزیمم کردن یک تابع برمی‌گردد. از اختیارهای در دسترس، تمام کاری که شخص باید انجام دهد، انتخاب موردی است که متناظر با منفعت بزرگتری باشد. اما هنگامی که چندین رقیب موجود باشند، هر یک تابع منفعت خود را دارد و در حالت کلّی، امکان ندارد که هر بار ماکزیممِ بیش از یک تابع را مشخص کنیم و این همان عامل کلیدی است که نظریهٔ بازیها را از بهینه‌سازی ساده[7] متمایز می‌کند.

حتی در بررسی بیش از یک فرد، تعریف این که چه چیز جواب منصفانه را به دست می‌دهد، مشکل است؛ به عنوان مثال: ممکن است انتخابی که (مثلاً) ماکزیمم مجموع توابع منفعت را مشخص می‌کند، به بعضی از افراد، کم یا هیچ و به دیگران زیاد بدهد. از طرف دیگر، ممکن است انتخابی که به همه کم و بیش یکسان می‌پردازد، به اکثریّتی بسیار کمتر از آن مقداری که با انتخاب دیگر می‌توانستند به دست آورند، بدهد. ملاحظات و مسائل عدالت اجتماعی[8]، بیشتر از آن که به اقتصاد تعلّق داشته باشد، به سیاست مربوط می‌شود و در این مورد، صرفاً با نظریه‌ای ریاضی و نه با استلزامات کاربرد آن، سر و کار داریم. همچنین کافی است که خاطرنشان کنیم که بعضی از استنباطهای وجدان اجتماعی[9] را می‌توان به سادگی، با تعدیلی در توابع منفعت افراد انجام داد. از این مرحله به بعد، از مسألهٔ انصاف به کلی چشم‌پوشی می‌کنیم و مطالب را صرفاً با توجه به سود شخصی[10] افراد در نظر می‌گیریم.

بازیهای دو نفره

بازیهای مستطیلی[11]: می‌خواهیم برای وضعیت مورد بررسی مقدمه، مدلی ریاضی[12] به دست دهیم. برای سادگی کار، توجه‌مان را به تضادّ منافع بین دو فرد، که آنان را «B» و«R» می‌نامیم، معطوف می‌کنیم. فرض می‌کنیم که B می‌تواند m انتخاب داشته باشد و آنها را با انتخاب عددی از مجموعهٔ $\{1,2,\ldots,m\}$ مشخص می‌کند. به همین ترتیب، فرض می‌شود که R دارای n اختیار، که با عددی از مجموعهٔ $\{1,2,\ldots,n\}$ مشخص می‌شود باشد.

باید فرض کنیم دستاورد[13] هر شخص به انتخاب دیگری، نیز به انتخاب خودش، بستگی دارد، چه در غیر این صورت، به وضعیتی غیر رقابتی[14] برمی‌گردیم. a_{ij} را برای دستاورد B در صورتی که انتخاب او عدد i و انتخاب R، عدد j باشد، می‌نویسیم؛ و b_{ij} را در مورد دستاورد R، که از همین انتخابها حاصل شده باشد، در نظر می‌گیریم. برای واضحتر ملاحظه کردن مسألهٔ روبه‌رو شدن دو شرکت کننده، می‌توانیم مقادیر a_{ij} و b_{ij} را ـ که معمولاً در این زمینه «**پی‌آمد**[15]» نامیده می‌شوند، به صورت جدولی درآوریم:

موارد انتخاب R

موارد انتخاب B							
۱	a_{11}, b_{11}	a_{12}, b_{12}	$\ldots$	a_{1j}, b_{1j}	$\ldots$	a_{1n}, b_{1n}
۲	a_{21}, b_{21}	a_{22}, b_{22}	$\ldots$	a_{2j}, b_{2j}	$\ldots$	a_{2n}, b_{2n}
.	.	.		.		.
.	.	.		.		.
i	a_{i1}, b_{i1}	a_{i2}, b_{i2}	$\ldots$	a_{ij}, b_{ij}	$\ldots$	a_{in}, b_{in}
.	.	.		.		.
.	.	.		.		.
m	a_{m1}, b_{m1}	a_{m2}, b_{m2}	$\ldots$	a_{mj}, b_{mj}	$\ldots$	a_{mn}, b_{mn}

باید از همین ابتدا تأکید شود که هیچ یک از دو شرکت‌کننده، هنگام انجام مورد انتخاب خود، از مورد انتخاب دیگری خبر ندارد. از طرف دیگر، فرض می‌کنیم که هر شرکت‌کننده، از جمیع اطلاعات واقع در جدول فوق، یعنی مقادیر جمیع اعداد a_{ij} و b_{ij} آگاه است.

برای بحث ریاضی وضعیتهایی چنین، مفید است که شرکت‌کنندگان را به عنوان بازیکنی در یک *بازی* در نظر بگیریم. در این صورت، با در دست داشتن جدولی چون جدول فوق، بازی دو بازیکن می‌تواند به این صورت درآید که از هر یک بخواهیم که بدون آگاه بودن از انتخاب بازیکن دیگر، حرکت خود را با انتخاب سطر یا ستونی انجام دهد. در این صورت، نتیجهٔ انتخاب، توسط درایهٔ واقع در آن سطر و ستون جدول مشخص می‌شود. نوع بازی‌ای که در کار بررسی آنیم، به عنوان *بازی مستطیلی*[١٦] (یا بازی دو نفری[١٧]) معروف است.

با مثالی، مسائلی را که دو بازیکن، در یک چنین بازی‌ای با آن روبه‌رو می‌شوند، نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم که جدول پی‌آمد به صورت زیر باشد.

موارد انتخاب R

موارد انتخاب B	X		Y		Z	
A	٨	٢	٠	٩	٧	٣
B	٣	۶	٩	٠	٢	٧
C	١	٧	۶	۴	٨	١
D	۴	٢	۴	۶	۵	١

B می‌تواند با ملاحظهٔ جدول، چنین استدلال کند که : «جرأت انتخاب A را ندارم ؛ زیرا اگر طرف Y را انتخاب کند، آن وقت من چیزی به دست نمی‌آورم. اگر B را انتخاب کنم، ممکن است که فقط یک ٢ نصیبم شود (البته اگر طرف Z را انتخاب کند) و انتخاب C، اگر او X را انتخاب کند، تنها یک ١ به دستم می‌دهد. اما اگر D را انتخاب کنم، آن گاه حداقل ۴ نصیبم می‌شود، بنابراین D را انتخاب می‌کنم.»

با استدلالی مشابه، **R** به خود چنین می‌گوید : «ستون دوم وسوسه کننده است، از ٩ بالای آن خوشم می‌آید. اما اگر طرف B را انتخاب کند چه؟ در این صورت، اصلاً چیزی به من نمی‌رسد. ستون سوم مطمئن‌تر است ؛ اما در این جا نیز اگر او C یا D را انتخاب کند، تنها یک ١ نصیبم می‌شود. حداّقل ستون اوّل بی توجه به این که چه پیش می‌آید، یک ٢ را برایم تضمین می‌کند. بنابراین اوّلین ستون، یعنی X را انتخاب می‌کنم.»

به این ترتیب، اگر هر دو بازیکن، با احتیاط بازی کرده، سعی در مینیمم نگاه داشتن باخت خود کنند، **B**، ۴ و **R**، ٢ به دست می‌آورد. اما فرض می‌کنیم **B** حدس بزند که **R** چه عملی انجام می‌دهد؟ چه بالاخره، او تمام جدول را ملاحظه می‌کند و بنابراین کاملاً توان استنباط استدلالی را که برای **R** دادیم، دارد. بنابراین شاید B اینک (به جای آنچه که قبلاً گفته) چنین استدلال کند : «برای من شانس به دست آوردن ٩ در سطر دوم وجود ندارد ؛ زیرا طرف از انتخاب Y که با آن به موازات ٩ من ٠ می‌گیرد، حتماً ابا خواهد کرد. می‌شود برای به دست آوردن ٨ سراغ سطر سوم رفت ؛ اما در این صورت، ممکن است (اگر او X را انتخاب کند) کارم تنها با یک ١ تمام شود. اما در مورد هشت سطر اول چه؟ در این مورد، لازم نیست که نگران به دست آوردن ٠ باشم ؛ زیرا طرف جرأت نمی‌کند به انتخاب Y که در این صورت ٠ خواهد گرفت (در سطر دوم) دست زند. حتی اگر Z را انتخاب کند، باز یک ٧ نصیبم می‌شود، که برایم از هر مورد سطر چهارم بهتر است. بنابراین A را انتخاب می‌کنم.»

این نقشه، البته به شرطی که R محتاط باشد، به خوبی به کار B می‌خورد ؛ اما در صورتی که R حدس بزند که B به چه خیالی است، چه؟ در این صورت، ستون دوم را انتخاب می‌کند و با ٠ ی برای B، ٩ را نصیب خود می‌کند!

حتی بدون یک چنین حدس الهام آمیزی، R می‌تواند، انتخاب سطر سوم را بعد از استدلال اوّل، پیش‌بینی کند و بنابراین، برای این که ۶ را نصیب خود کند، به انتخاب ستون دوم بپردازد و با این کار، بار دیگر B را در صورتی که از استدلال دوم پیروی کرده، سطر اوّل را انتخاب کند، به بلا مبتلا نماید.

به نظر می‌رسد که نتیجهٔ تمام این مطالب این باشد که تا زمانی که هر دو بازیکن با احتیاط بازی می‌کنند، می‌توانیم نتیجهٔ بازی را پیش‌بینی کنیم ؛ اما اگر یکی از آنها یا هر دو، سعی در پیش‌بینی کردن پیش‌بینی دیگری کند، هر اتّفاقی می‌تواند رخ دهد.

تمرین (موقعیت دشوار[١٨]** زندانیان)

دو مرد به علت داشتن تعداد کمی اسکناس تقلّبی، توسط پلیس دستگیر شده‌اند. در قرارگاه پلیس، آنان را برای استنطاق در دو اتاق جداگانه بردند. کارآگاه مسئول رسیدگی به این واقعه،

معتقد است که جاعلان اسکناس، خودِ این دو نفرند ؛ اما نمی‌تواند این موضوع را در دادگاه اثبات کند. به همین دلیل، مطلب زیر را با هریک از آنان به طور جداگانه مطرح می‌کند. اگر هیچ یک از آنان اقرار به جاعل بودن نکند، در این صورت، هر دو به کوشش در رد کردن اسکناسهای تقلّبی متهم شده و هر یک به هجده ماه زندان محکوم می‌شوند. اگر هر دو اقرار کنند، در این صورت، به علت جعل کردن، مورد تعقیب قرار می‌گیرند ؛ اما به مجازات سبک سه سال حبس محکوم می‌شوند. اما اگر تنها یکی از آنان اقرار کند، در این صورت، آزاد می‌شود ؛ در حالی که دیگری به هفت سال زندان محکوم خواهد شد.

با کنار گذاشتن هر گونه امکان «شرافت بین دزدان»، موقعیت دشواری را که هر یک از زندانیان با آن روبه‌رو شده، تحلیل کرده و نتیجهٔ کار را در صورتی که هر دو «به احتیاط بازی کنند»، معین کنید.

ابتدا جدول زیر را، برای نشان دادن امکانهای هر یک از زندانیان مورد اقرار یا انکار، رسم می‌کنیم :

	انکار		اقرار	
اقرار	۷	۰	۳	۳
انکار	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	۰	۷

در این مورد، اعداد جدول «دستاوردهای» منفی را نمایش می‌دهد ؛ و هر زندانی، مایل است که به **کمترین** تعداد سال زندانی شود. اگر از «صحبت» خودداری کند، در این صورت به شرطی که همدستش نیز همین کار را کند، به هجده ماه زندان محکوم می‌شود. اما اگر همدستش اقرار کند، پیه ۷ سال زندان را به تنش مالیده است. فرض می‌کنیم به جای این کار، اقرار کند، در این صورت، اگر همدستش از اقرار خودداری کند، آزاد می‌شود و در بدترین حالت، اگر همدستش نیز اقرار کند، سه سال زندان نصیبش می‌شود. بنابراین، محتاطانه‌ترین کار برای او اقرار است. همدستش نیز با استدلالی مشابه، به همین نتیجه می‌رسد. بنابراین اگر هر دو زندانی، به احتیاط عمل کنند، کارآگاه به رغم این واقعیت که دو زندانی، با اقرار نکردن، می‌توانند ایام محبس خود را نصف کنند، در اقرار گرفتن از آنان توفیق می‌یابد.

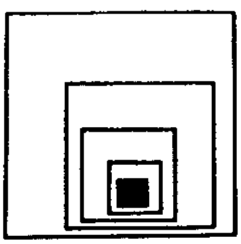
یادداشتها:

* -J. Von Neumann and O.Morgenstern, Theory of Games and Economic Behaviour

۱ـ John Von Neumann
۲ـ Mathematische Annalen
۳ـ Zur Theorie der Gesellschaftss Piele
۴ـ Theory of Games and Economic Behaviour
۵ـ Medels of the Economy
۶ـ Theory of Utility
۷ـ Simple Optimization
۸ـ Social Justics
۹ـ Social Conscience
۱۰ـ Self - Interest
۱۱ـ Rectangular Games
۱۲ـ Mathematical Model
۱۳ـ Gain
۱۴ـ Non - Competitive Situation
۱۵ـ Pay - Off
۱۶ـ Rectangular Game = Matrix Game
۱۷ـ Two - Person Game
۱۸ـ Dilemma

** ـ برهان ذوحدین، قیاس ذوحدین

مسائل مسابقه ای



۱) ثابت کنید هر عدد طبیعی که رقم دهگانش زوج و رقم یکانش ۶ باشد. مربع کامل نیست.

۲) ثابت کنید هر عدد طبیعی که رقم یکان آن، ۱ یا ۴ یا ۹ و رقم دهگانش فرد باشد، مجذور کامل نیست.

مبهم یا تعریف نشده؟

● احمد قندهاری

اغلب سؤال می‌شود که $\frac{0}{0}$ برابر با چه عددی است؟ یا مقدار $\frac{0}{0}$ چیست؟ آیا $\frac{0}{0}$ مبهم است؟ یا می‌پرسند : عدد تقسیم بر صفر، برابر چه عددی است یا صفر تقسیم بر هر عدد، مساوی چند است و ...؟

در این مقاله قصد داریم هم سؤالها را بهتر و دقیق‌تر مطرح کنیم و هم پاسخ دقیق آنها را بیان کنیم.

سؤال (۱) : صفر تقسیم بر هر عدد، برابر چیست؟

خود سؤال اشکال دارد، باید پرسید : صفر تقسیم بر هر عدد به‌جز صفر، برابر چند است؟

در جواب باید گفت :

صفر تقسیم بر هر عدد به جز صفر، برابر صفر است.

مثال بزنیم : فرض کنید صفر ریال پول را می‌خواهیم بین پنج نفر تقسیم کنیم، به طور مسلم، به هر نفر هیچ پولی نمی‌رسد. در نتیجه اگر به جای صفر ریال پول، صفر کیلو سیب هم داشتیم و می‌خواستیم بین پنج نفر تقسیم کنیم، نتیجه همان می‌شد.

سؤال (۲) : ∞ (بی‌نهایت) چه گونه عددی است؟

جواب: ∞ (بی‌نهایت) عدد نیست ؛ بلکه یک نماد ریاضی برای بیان اعداد خیلی بزرگ است. ابتدا توضیحی دربارهٔ اعداد بزرگ بیان می‌شود، سپس ∞ به طور دقیق تعریف می‌شود.

یک عدد بزرگ مثال می‌زنیم ؛ مثلاً ۱۰ میلیارد یا ۱۰۰ میلیارد یا ۲۰۰ میلیارد. گرچه در زندگی روزمره با اعداد سر و کار داریم و امروزه بدون بیان اعداد، نمی‌توان زندگی کرد ؛ مثلاً ساعت ده صبح به خیابان انقلاب، خیابان فروردین،کوچهٔ هشتم، پلاک شمارهٔ (۷۵) مراجعه می‌کنیم. در همین جملهٔ معمولی و عادی، از سه عدد (۱۰)، (۸) و (۷۵) استفاده کرده‌ایم. اگر ادامه دهیم : پس از ۴۵ دقیقه با اتوبوس خط (۱۱۲) به منزل می‌رویم و ... اگر کمی دقت کنیم، در هر روز، همهٔ ما با بسیاری از اعداد سر و کار داریم.

به طور معمول اعداد را به سه دسته به نام‌های اعداد اصلی، اعداد ترتیبی و اعداد شناسایی تقسیم‌بندی می‌توان کرد.

الف: اعداد اصلی : برای بیان کمیّت به کار می‌روند ؛ مثلاً ساعت ده صبح، مثلاً نمرهٔ (۱۵) در درس فیزیک یا ۲۰۰۰۰ تومان قرض. این اعداد قابل جمع و تفریق و ضرب و تقسیم می‌باشند. این اعداد به این پرسش : چقدر یا چند تا پاسخ می‌دهند.

ب: اعداد ترتیبی : که صرفاً در مقایسه به کار می‌روند؛ مثلاً حسین در درس شیمی نفر دوم کلاس شد، یا علی نفر نهم در صف شیر است.

ج: اعداد شناسایی : که صرفاً برای شناسایی به کار می‌روند؛

مانند کوچهٔ پنجم، یا اتوبوس خط (۱۱۲).

همان طور که گفته شد، همهٔ ما در هر روز، با این سه دسته اعداد کم و بیش سر و کار داریم؛ ولی در زندگی روزمره با اعداد ۱۰ میلیارد یا ۱۰۰ میلیارد سر و کار نداریم. گرچه آنها را می‌شناسیم؛ اما بزرگی آنها برای ما قابل لمس نیست، لذا کمی بیشتر در مورد اعداد بزرگ بحث خواهیم کرد.

شاید شنیده باشید که سرعت نور ۳۰۰۰۰۰ کیلومتر در ثانیه است. با توجه به این که طول و عرض کشور عزیزمان ایران، حدود ۲۵۰۰ کیلومتر است، سیصد هزار کیلومتر در ثانیه غیر قابل لمس است؛ ولی وجود دارد و همه آن را قبول دارند. قابل لمس نبودن، دلیل عدم وجود نیست.

به عدد ۱۰۰ میلیارد باز گردیم. این عدد چند رقمی است؟

یک میلیارد عددی ده رقمی و ۱۰۰ میلیارد عددی دوازده رقمی است. وقتی در ریاضی بحث دربارهٔ عددهای بزرگ است، تعداد ارقام مورد نظر است. ممکن است عددی بیست رقمی یا صد رقمی یا سه هزار رقمی یا بیشتر داشته باشیم، به مثال زیر دقت کنید:

می‌دانیم $\log ۲ = ۰/۳۰۱۰۳$، می‌خواهیم بدانیم عدد $N = ۲^{۱۰۰۰۰۰}$، عددی چند رقمی است؟

می‌نویسیم:

$$N = ۲^{۱۰۰۰۰۰} \Rightarrow \log N = \log ۲^{۱۰۰۰۰۰}$$
$$\Rightarrow \log N = ۱۰۰۰۰۰ \log ۲$$
$$= ۱۰۰۰۰۰(۰/۳۰۱۰۳) = ۳۰۱۰۳/۰۰$$

عدد (۳۰۱۰۳) مفسّر $\log N$ است. بنا به قاعده اگر به مفسّر، یک واحد اضافه کنیم، تعداد ارقام عدد N به دست می‌آید، پس عدد N عددی (۳۰۱۰۴) رقمی است.

با مقایسهٔ عدد N که عددی است (۳۰۱۰۴) رقمی با عدد ۱۰۰ میلیارد که عددی است دوازده رقمی، متوجه می‌شویم که عدد N، عدد بزرگی است.

حال اگر همین عدد N را به توان ۱۰۰۰ برسانیم و آن را M بنامیم، می‌توان نوشت:

$$M = N^{۱۰۰۰} = (۲^{۱۰۰۰۰۰})^{۱۰۰۰} = ۲^{۱۰^{۸}}$$
$$\Rightarrow \log M = \mathrm{Log}\, ۲^{۱۰^{۸}} = ۱۰^{۸} \log ۲$$
$$= ۱۰^{۸}(۰/۳۰۱۰۳) = ۳۰۱۰۳۰۰۰/۰۰$$

با توجه به مطالب گفته شده، عدد M عددی است (۳۰۱۰۳۰۰۱) رقمی. با مقایسه با عدد ۱۰۰ میلیارد که فقط دوازده رقم دارد، عدد فوق‌العاده بزرگی است. این عدد بیش از سی میلیون رقم دارد حال به بررسی ∞ می‌پردازیم.

تعبیری برای مفهوم $(+\infty)$: فرض‌کنیم متغیر x، عددی است در حال زیاد شدن و به طور مرتب مقدار آن افزایش می‌یابد و اگر از هزار و میلیون و میلیارد و صد میلیارد و... و N و ... و M بزرگتر شود، می‌گوییم x به سمت عدد بسیار بزرگی میل می‌کند و یا در این حالت می‌گوییم x به سمت $(+\infty)$ میل می‌کند.

اگر به همین تعریف دقیق شویم و چند بار آن را بخوانیم، ملاحظه می‌کنیم که $(+\infty)$ یک عدد نیست؛ بلکه یک علامت یا نماد ریاضی برای نشان دادن اعداد خیلی بزرگ است.

به عبارت دیگر، می‌توان گفت اگر متغیر x، ضمن زیاد شدن از هر عدد فوق‌العاده بزرگ مفروضی مانند M بزرگتر شود، می‌گوییم x به سمت $(+\infty)$ میل می‌کند. در واقع $+\infty$ از هر عدد مثبت به دلخواه بزرگی مانند M، بزرگتر است.

∞ ها قابل سنجش نمی‌باشند

اگر به تعبیر «نقطه» در هندسه دقت کنیم، می‌بینیم، نقطه، طول و عرض و ارتفاع ندارد. این نقطه اگر در صفحه باشد، طول و عرض ندارد. چنانچه در فضا باشد، طول، عرض و ارتفاع ندارد. بنابراین، همین صفحهٔ مجلهٔ «برهان»، از بی‌نهایت نقطه تشکیل شده است (منظور آن است که از تعداد نامتناهی نقطه تشکیل شده است) و سطح میز تحریر نیز از بی‌نهایت نقطه تشکیل شده است و نمی‌توان گفت که تعداد نقاط روی سطح میز تحریر، از تعداد نقاط صفحهٔ مجله برهان بیشتر است. مثال دیگری می‌آوریم.

مجموعهٔ اعداد طبیعی: N را در نظر می‌گیریم.

$$N = \{۱, ۲, ۳, \dots\}$$

مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج، زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ اعداد طبیعی است، آن را (۲N) می‌نامیم.

$$۲N = \{۲, ۴, ۶, \dots\}$$

چون مجموعهٔ اعداد طبیعی نامتناهی است، پس مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج هم نامتناهی است. با این حال، نمی‌توان گفت تعداد

اعضای مجموعهٔ اعداد طبیعی بیشتر از تعداد اعضای مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج است.

تعبیری برای مفهوم $(-\infty)$: اگر متغیر x ضمن کم شدن از هر عدد منفی فوق‌العاده کوچکی مانند $-N,\dots,-M$ کوچکتر شود، می‌گوییم x به سمت عدد بسیار کوچک منفی میل می‌کند و می‌گوییم x به سمت $(-\infty)$ میل می‌کند.

سؤال (۳) : آیا حاصل $(-\infty$ و $+\infty)$ برابر صفر است؟

همان طور که پیش از این گفته شد، ∞ها قابل سنجش نیستند، پس نمی‌توان گفت حاصل $(-\infty$ و $+\infty)$ صفر است. این نماد، یکی از صورتهای مبهم در جبر است.

سؤال (۴) : هر عدد تقسیم بر صفر برابر چیست؟ یعنی $\frac{\text{عدد}}{0}=?$ آیا این که می‌گویند $\frac{\text{عدد}}{0}$ برابر (∞) است، درست است؟

در پاسخ به این سؤال، باید گفت اولاً: $\frac{\text{عدد}}{0}$ در ریاضی تعریف نشده است؛ یعنی $\frac{\text{عدد}}{0}$ بی‌معناست. مانند این است که بگوییم می‌خواهیم ۱۰۰۰۰ تومان پول را بین صفر نفر تقسیم کنیم. ملاحظه می‌کنیم خود عبارت بی‌معناست. ثانیاً: هیچ چیز در ریاضی مساوی ∞ نیست.

مثلاً نمی‌توان نوشت $x=\infty$ یا $y=\infty$ یا $t=\infty$.

باید نوشت $x\to\infty$ یا $y\to\infty$ یا $t\to\infty$.

حال سؤال (۴) را به صورت دقیقتر مطرح می‌کنیم:

هر عدد (به جز صفر) تقسیم بر 0^+ یا 0^- به سمت چه عددی میل می‌کند؟

در پاسخ باید گفت مثبت یا منفی بودن خود عدد (بجز صفر) هم مطرح است. برای درک بهتر به مثالهای زیر دقت کنیم که به طور طبیعی مفهوم حدّ را وارد این بحث خواهد کرد (که خود حدّ، بحث مفصل و جداگانه‌ای است).

$$\left\{\lim_{x\to0^+}\frac{+5}{x}=\frac{+5}{0^+}\to+\infty\right.$$

$$\left\{\lim_{x\to0^-}\frac{+5}{x}=\frac{+5}{0^-}\to-\infty\right.$$

$$\left\{\lim_{x\to0^+}\frac{-5}{x}=\frac{-5}{0^+}\to-\infty\right.$$

$$\left\{\lim_{x\to0^-}\frac{-5}{x}=\frac{-5}{0^-}\to+\infty\right.$$

و به طور کلی‌تر می‌توان نوشت:

$$a\neq0\ ,\ \begin{cases}a>0\Rightarrow\left\{\lim_{x\to0^+}\frac{a}{x}=\frac{a}{0^+}\to+\infty\right.\\ a>0\Rightarrow\left\{\lim_{x\to0^-}\frac{a}{x}=\frac{a}{0^-}\to-\infty\right.\end{cases}$$

$$a\neq0\ ,\ \begin{cases}a<0\Rightarrow\left\{\lim_{x\to0^+}\frac{a}{x}=\frac{a}{0^+}\to-\infty\right.\\ a<0\Rightarrow\left\{\lim_{x\to0^-}\frac{a}{x}=\frac{a}{0^-}\to+\infty\right.\end{cases}$$

حال به پاسخ سؤال تصحیح شده (۴) می‌پردازیم:

عدد مثبت تقسیم بر 0^+ به سمت $+\infty$ میل می‌کند.

عدد مثبت تقسیم بر 0^- به سمت $-\infty$ میل می‌کند.

عدد منفی تقسیم بر 0^+ به سمت $-\infty$ میل می‌کند.

عدد منفی تقسیم بر 0^- به سمت $+\infty$ میل می‌کند.

مثال: مقدار حد کسر $\frac{[x]-2}{x-2}$ وقتی $x\to2^-$ چقدر است؟

حل:

$$\lim_{x\to2^-}\frac{[x]-2}{x-2}=\frac{[2^-]-2}{0^-}=\frac{1-2}{0^-}=\frac{-1}{0^-}\to+\infty$$

سؤال (۵) : مقدار $\frac{0}{0}$ چیست؟

جواب: $\frac{0}{0}$ در ریاضی تعریف نشده است و آنچه به نام $\frac{0}{0}$ در کتابها ملاحظه می‌کنید، عبارتهایی نظیر $\frac{0^+}{0^+}$ یا $\frac{0^+}{0^-}$ یا $\frac{0^-}{0^+}$ یا $\frac{0^-}{0^-}$ است.

در کسرهایی مانند $\frac{f(x)}{g(x)}$، اگر $g(a)=f(a)=0$ وقتی $x\to a$ در این صورت، $f(x)$ و $g(x)$ به سمت صفر میل می‌کنند و دقیقاً مساوی با صفر نیستند، بنابراین بسته به این که x از چه سمتی به a میل کند، کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ به یکی از صورتهای $\frac{0^\pm}{0^\pm}$ تبدیل می‌شود که به اصطلاح آن را $\frac{0}{0}$ می‌گوییم.

به مثال زیر توجه کنید.

مثال: مقدار حدّ کسر $\frac{x^{۲}-۱}{x-۱}$ وقتی $x \to ۱^{+}$ چیست؟

حل:

$$\lim_{x\to ۱^{+}} \frac{x^{۲}-۱}{x-۱} = \frac{۱^{+}-۱}{۱^{+}-۱} = \frac{۰^{+}}{۰^{+}}$$ مبهم است

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱^{+}} \frac{x^{۲}-۱}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^{+}} \frac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱}$$

$$= \lim_{x\to ۱^{+}} (x+۱) = ۲^{+}$$ یا ۲

مثال دیگر: مقدار حدّ کسر $\frac{۸-x^{۳}}{x^{۲}-۴}$ وقتی $x \to ۲^{+}$ چیست؟

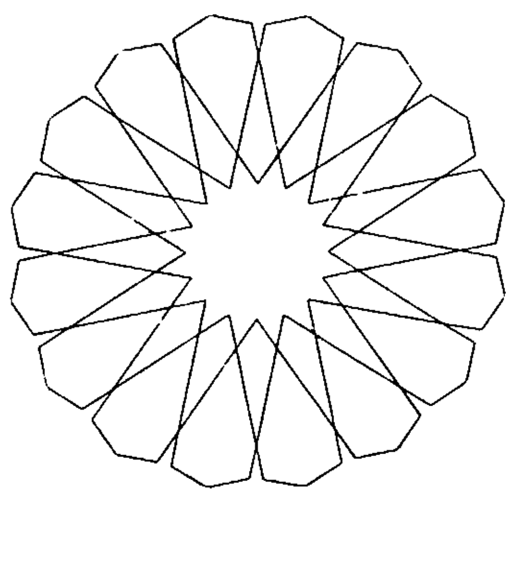
حل:

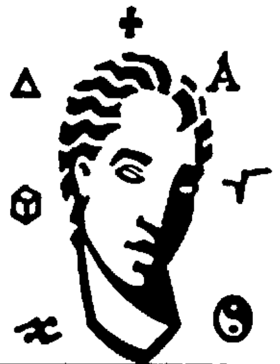
$$\left\{ \lim_{x\to ۲^{+}} \frac{۸-x^{۳}}{x^{۲}-۴} = \frac{۸-۸^{+}}{۴^{+}-۴} = \frac{۰^{-}}{۰^{+}} \right.$$ مبهم است

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۲^{+}} \frac{۸-x^{۳}}{x^{۲}-۴} = \lim_{x\to ۲^{+}} \frac{(۲-x)(۴+x^{۲}+۲x)}{-(۲-x)(۲+x)}$$

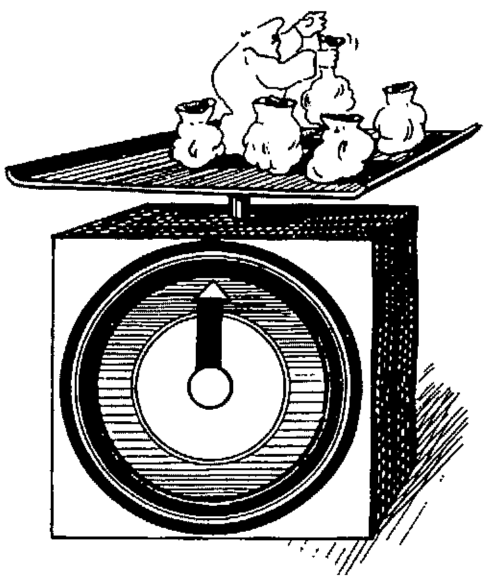
$$= \lim_{x\to ۲^{+}} \frac{۴+x^{۲}+۲x}{-(۲+x)} = \frac{۴+۴^{+}+۴^{+}}{-(۴^{+})}$$

$$= \frac{۱۶}{-۴} = -۴$$





تفریح اندیشه ۲



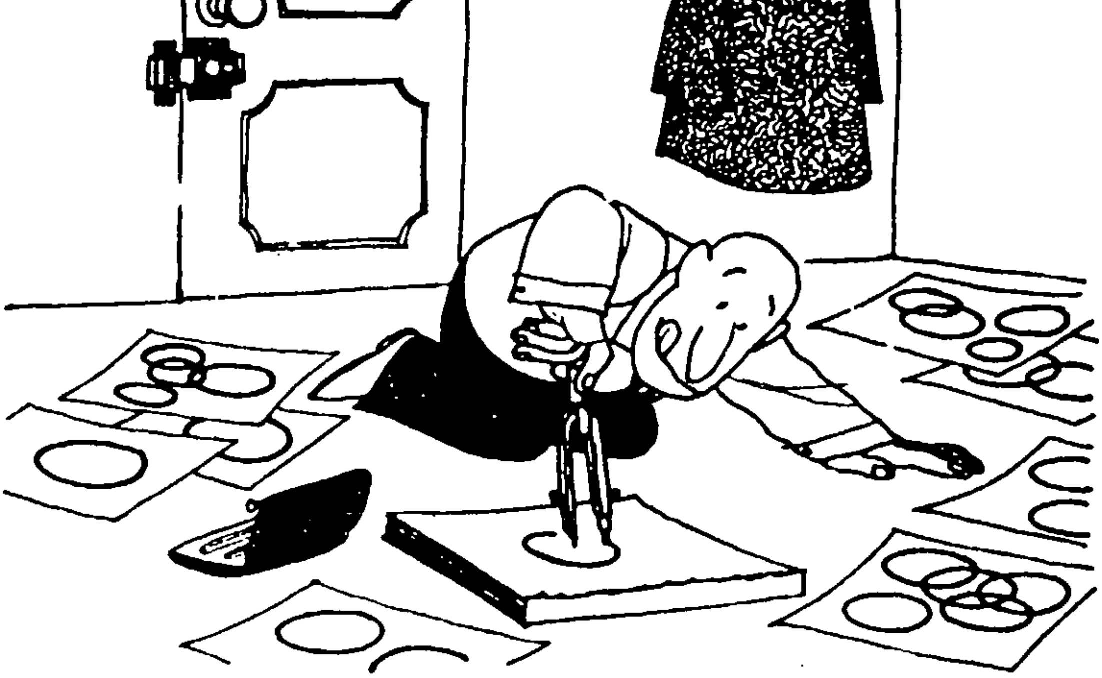
۵ کیسه داریم که در هرکدام ۲۰ سکه وجود دارد. وزن هر سکه باید ۱۰ گرم باشد، اما در سه کیسه وزن هر سکه ۱۰ گرم، دریک کیسه ۹ گرم و در کیسه دیگر ۱۱ گرم است.

چگونه می‌توانیم فقط با یک بار وزن کردن، کیسه‌ای را که دارای سکه‌های سنگینتر است و کیسه‌ای را که سکه‌های آن سبکتر می‌باشد مشخص کنیم.

این اندازه گیری توسط یک **ترازوی یک کفه‌ای** انجام می‌گیرد که وزن وزنه‌های گذاشته شده روی آن را بادقت نشان می‌دهد.

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمهٔ سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸



مسألهٔ حل مسأله‌های ریاضی (۱)

• عبدالحسین مصحفی

نه تنها بیشتر دانش‌آموزان، بلکه بیشتر مردمان، حلّ مسأله‌های ریاضی را کاری مشکل می‌پندارند. اینان در واقع با مسألهٔ چگونگی حلّ مسأله‌های ریاضی درگیرند؛ امّا کمابیش با این مسأله بیگانه‌اند. دربارهٔ آن بخوبی نمی‌اندیشند، نمی‌دانند با چه ابزاری باید با آن روبه‌رو شوند، گاه ناخودآگاه این ابزار را بدرستی به کار نمی‌برند، گاه مسأله‌ای را ناتمام حل می‌کنند و گمانشان این است که آن را بتمامی حل کرده‌اند، گاه به جای راه حل سادهٔ مسأله، راه حلّی طولانی و وقت‌گیر را در پیش می‌گیرند، گاه شتاب‌زده مسأله را عوضی می‌فهمند و مسأله‌ای دیگر را به جای آن حل می‌کنند و ناهنجاریهایی دیگر. چنین ناهنجاریها زادهٔ چه علتهایی‌اند؟ در جستجوی پاسخ با مسأله‌ای روبه‌رو می‌شویم که می‌توانیم آن را مسألهٔ حل مسأله‌های ریاضی بنامیم. مسأله‌ای که گستره‌اش نه تنها هر سطحی از آموزش ریاضی، بلکه رفتارها و رابطه‌های فردی، خانوادگی، اجتماعی و روان‌شناختی را نیز دربرمی‌گیرد و بررسی همه جانبهٔ آن، زمینهٔ چندین جلد کتاب می‌تواند باشد. در این نوشتار گوشه‌هایی از این مسألهٔ گسترده یادآوری می‌شود.

حفظ کردن و نه خوب فهمیدن

دانش‌آموز اگر چنان بار آمده باشد که یادگیری ریاضیات را حفظ کردن قاعده‌های آن بداند، از درک صحیح تعریفها و مفهومهای ریاضی بازمانده باشد و یا سرسری از آن بگذرد، برای حلّ مسأله‌های ریاضی توانایی لازم را نخواهد داشت. توانایی در حلّ مسأله‌های ریاضی، ذهن خلاق می‌خواهد که چنین دانش‌آموزی از آن محروم مانده است. دانش‌آموزانی از این گونه اگر ده‌ها کتاب حل مسأله را فراهم آورند، به کلاسهای تقویتی جورواجور بروند، به آموزش مکاتبه‌ای روی آورند، معلم سرخانه هم بگیرند، اما اگر آنچه را در عمل انجام می‌دهند مرور حل مسأله‌ها باشد، بدون آن‌که بر آن شوند آنها را به فکر خود حل کنند، آن‌گاه که با مسأله‌ای ناآشنا روبه‌رو شوند، از حل آن درمی‌مانند و در آزمونها هم به کامیابی‌های درخشان دست نمی‌یابند و آن گونه که می‌خواهند به خواستشان نمی‌رسند. اینان اگر مسأله‌ای را چندین بار هم مرور کرده باشند، چون آن مسأله را با تغییری در ساختارش یا در نوع بیانش در برابرشان قرار دهند، آن را ناآشنا می‌یابند و در حلّ آن سرگردان می‌مانند.

مثال ۱. در یک ماشین حساب، کلید عمل جمع از کار افتاده است، اما کلیدهای مربوط به عملهای دیگر حساب همه بخوبی کار می‌کنند. اگر خواسته باشیم حاصل عبارت:

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

را به ازای مقدارهای داده شده با همین ماشین حساب به دست آوریم، چگونه باید عمل کنیم؟

دانش‌آموزی که برای حل مسأله‌ها تنها در فکر به کار بردن قاعده‌هایی باشد که آنها را حفظ کرده است، مسألهٔ با این بیان را ناآشنا می‌یابد. درصورتی که مسأله‌ای ساده است؛ اگر این عبارت در $x-1$ ضرب و بر آن تقسیم شود به صورت:

$$\frac{x^6-1}{x-1}$$

در می‌آید و در محاسبهٔ این عبارت به ازای هر مقدار داده شده، عمل جمع به کار نمی‌رود.

مثال ۲. y بر حسب x یک دوجمله‌ای از درجهٔ یکم است. اگر همان عملی که روی x انجام می‌گیرد تا y به دست آید، روی y انجام گیرد، دو جمله‌ای $4x+15$ به‌دست می‌آید. دو جمله‌ای برابر با y کدام است؟

این مسأله با این گونه بیان نیز برای چنین دانش‌آموزانی نمودی ناآشنا دارد و درمی‌مانند که کدام قاعده را باید روی آن به کار ببرند. در صورتی که اگر گفته می‌شد «اگر $y=f(x)=ax+b$، به فرض $f(y)=4x+15$، مقدار a و مقدار b را حساب کنید.» دیگر ناآشنا نمی‌نمود و پی بردن به راه حل آن دشواری نداشت؛

$$f(y)=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$$

$$a^2x+ab+b\equiv 4x+15$$

$$\begin{cases}a^2=4\\ ab+b=15\end{cases}\Rightarrow \left|\begin{matrix}a=2\\ b=5\end{matrix}\right. \quad \text{یا} \quad \left|\begin{matrix}a=-2\\ b=-15\end{matrix}\right.$$

$$y=2x+5 \quad \text{یا} \quad y=-2x-15$$

ناآگاه ماندن از راه حلّ سادهٔ مسأله

تکیه بر به کار بردن قاعده‌ها برای حل مسأله‌ها، گاه موجب می‌شود که دانش‌آموز به جای راه حل بسیار سادهٔ مسأله‌ای، راهی طولانی و وقت‌گیر را در پیش بگیرد، که بویژه در آزمونهای با وقت محدود برای او زیان‌آور خواهد بود.

مثال ۳. در یک پرسش چند گزینه‌ای باید معلوم شود تا مجموعهٔ جوابهای مثبت معادلهٔ

$$x^3+3x+2=0$$

چند عضوی است. دانش‌آموزی که برای حل هر مسأله‌ای تنها در فکر به کار بردن قاعده‌ای از قاعده‌های آموخته شده باشد، به محاسبهٔ مبین $4p^3+27q^2$ و به یافتن علامت آن و به یافتن علامت ریشه‌ها روی می‌آورد و وقت زیادی را روی این کار از دست می‌دهد. اما آن دانش‌آموزی که ذهنش خلاّق و بارور بار آمده باشد، با یک نگاه به معادله درمی‌یابد که اگر x مثبت باشد، طرف اول معادله که مجموع سه مقدار مثبت است، مثبت می‌باشد و نمی‌تواند صفر باشد، و خیلی زود و بدون هیچ عملی پی می‌برد که مجموعهٔ جوابهای مثبت معادله، مجموعهٔ تهی است.

ذهن پویا و نه ذهن راکد

به هنگام حلّ هر مسأله، ذهن باید مانند یک رادار به همهٔ آموخته‌های قبلی توجه داشته باشد و روی مبحثی معین متمرکز نباشد. بیشتر دانش‌آموزان به آنچه بتازگی آموخته‌اند بیشتر توجه دارند، که گاه موجب می‌شود از توجه به راه حلّ سادهٔ مسأله‌ای غافل بمانند.

مثال ۴. در مجموعهٔ عددهای حقیقی، معادلهٔ زیر به ازای چه مقدار از a دارای جواب است؟

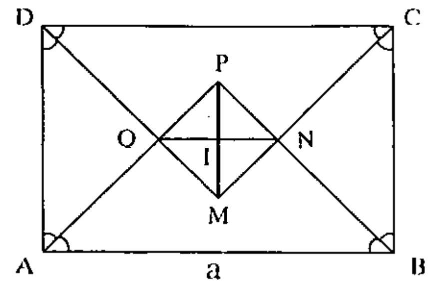
$$\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}=a$$

برای حلّ این مسأله، بیشتر دانش‌آموزان به مرتب کردن معادله و تبدیل آن به معادله‌ای درجه دوم و یافتن شرط جواب داشتن آن روی می‌آورند و مدتی را برای آن صرف می‌کنند. اما آن دانش‌آموزانی که ذهنشان پویایی لازم را داشته باشند، با توجه به این ویژگی که «مجموع هر عدد حقیقی و عکس آن از ۲ ناکوچکتر و از ۲- نابزرگتر است»، و با توجه به این که هیچ یک از کسرهای به کار رفته در معادله نمی‌تواند برابر با ۱ باشد، بدون هیچ محاسبه به پاسخ $a>2$ یا $a\le -2$ دست می‌یابد.

مثال ۵. در یک مسابقه، یکی از مسأله‌های داده شده چنین بوده است: «از برخورد نیمسازهای زاویه‌های یک مستطیل با بعدهای a و b، یک چهارضلعی پدید می‌آید. ثابت کنید این چهارضلعی مربع است و درازای قطر آن را بر حسب a و b به‌دست آورید.»

در حل مسأله‌های محاسبه‌ای هندسه، ذهن دانش‌آموزان بیشتر متوجه قضیهٔ فیثاغورس و قضیه‌های دیگر رابطه‌های اندازه‌ای می‌شود. از این رو بعید نیست که دانش‌آموزانی مسأله را چنین حل کرده باشند، که نخست ثابت کنند هر یک از مثلثهای پدید آمده روی هر ضلع مستطیل، قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است و نتیجه بگیرند زاویه‌های چهارضلعی پدید آمده، همه قائمه‌اند و این چهارضلعی مستطیل است. آن‌گاه از راه به کار بردن قضیهٔ

فیثاغورس در مثلثهای APB و BNC به‌دست آورند :



$$AP = BP = \frac{a\sqrt{۲}}{۲}\ ,\ \ BN = CN = \frac{b\sqrt{۲}}{۲}$$

$$PN = PB - BN = \frac{(a-b)\sqrt{۲}}{۲}$$

$$PQ = PA - AQ = \frac{(a-b)\sqrt{۲}}{۲}$$

و نتیجه بگیرند : چون دو ضلع مجاور مستطیل MNPQ اندازه‌های برابر دارند این مستطیل مربع است و برای به‌دست آوردن درازای قطر مربع، باز قضیهٔ فیثاغورس را در مثلث PQN به‌کار ببرند و درازای QN را برابر با $a - b$ به‌دست آورند.

اما باز هم بعید نیست که دانش‌آموزان دیگری، راه ساده‌تر زیر را به کار برده باشند : پس از اثبات این‌که هر یک از چهار مثلث پدید آمده روی ضلعهای مستطیل قائم‌الزاویهٔ متساوی الساقین و چهارضلعی پدیده آمده، مستطیل است، با توجه به این قضیه که نیمساز زاویهٔ رأس در مثلث متساوی الساقین، عمود منصف قاعده است، نتیجه بگیرند که نیمسازهای دو زاویهٔ M و P و همچنین نیمسازهای دو زاویهٔ N و Q، عمود منصفهای دو ضلع روبه‌رو از مستطیل ABCD هستند و بر هم واقع‌اند و بنابر آن، دو قطر MP و NQ از مستطیل MNPQ بر هم عمودند و این مستطیل، مربع است. به دنبال این، نیز نتیجه بگیرند که I مرکز مربع از AB به فاصلهٔ $\frac{b}{۲}$ و از BC به فاصلهٔ $\frac{a}{۲}$ است و :

$$IN = \frac{a}{۲} - \frac{b}{۲} \Rightarrow NQ = a - b$$

در مسابقه‌ها که نوع راه حلِّ به کاررفته هم برای مسأله امتیاز داشته باشد، آن دانش‌آموزی جلو می‌افتد که راه حلی ساده‌تر و کوتاهتر را به کار برده باشد.

توجه به مفهوم صحیح تعریفها

عادت کردن به حلِّ مسأله‌ها از راه به کار بردن قاعده و بی‌توجهی به مفهوم صحیح تعریفها، که متأسفانه دامنگیر بیشتر دانش‌آموزان است، از جمله عاملهایی است که گمراهی و اشتباه در حلِّ مسأله‌ها را به دنبال دارد.

مثال ۶. مقدار m را به دست آورید که نقطهٔ M با مختصهای زیر از دو محور مختصها به یک فاصله باشد :

$$M(x = ۴m + ۱\ ,\ \ y = m^{۲} - ۳)$$

دانش‌آموزانی که مفهوم دقیق تعریف مختص نقطه را درنیافته باشند، دو مفهوم فاصله و مختص را با هم اشتباه می‌گیرند و چنین عمل می‌کنند :

$$۴m + ۱ = m^{۲} - ۳$$

$$m^{۲} - ۴m - ۴ = ۰ \Rightarrow m = ۲ \pm ۲\sqrt{۲}$$

و دو جواب مسأله را از دست می‌دهند. یکی گرفتن دو مفهوم فاصله و مختص نقطه، اشتباهی فاحش است که متأسفانه نمونهٔ آن در کتابها و بسیاری از جزوه‌های مکاتبه‌ای نیز به چشم می‌خورد. فاصله، یک عدد مطلق است و مختصهای نقطه، عددهایی جبری‌اند و راه حل صحیح مسأله چنین است :

$$|۴m + ۱| = |m^{۲} - ۳|$$

$$۴m + ۱ = \pm(m^{۲} - ۳)$$

یا : $m^{۲} - ۴m - ۴ = ۰\ ,\ \ m = ۲ \pm ۲\sqrt{۲}$

یا : $m^{۲} + ۴m - ۲ = ۰\ ,\ \ m = -۲ \pm \sqrt{۶}$

مثال ۷. دامنهٔ تابع $y = \sqrt{x+۱}.\sqrt{x-۱}$ را به‌دست آورید.

ممکن است دانش‌آموزانی این تابع را به $y = \sqrt{x^{۲} - ۱}$ تبدیل کنند و دامنهٔ آن را چنین بدانند :

$$D = \{x : x \geq ۱ \text{ یا } x \leq -۱\}$$

که اشتباه فاحش است. عملهای ضرب، تقسیم و توان رادیکالها در مجموعهٔ عددهای حقیقی تعریف شده‌اند و نمی‌توان آنها را روی رادیکالهای غیر حقیقی به کار برد. در تابع داده شده باید نابرابریهای $x + ۱ \geq ۰$ و $x - ۱ \geq ۰$ هر دو با هم برقرار باشند، که نتیجه می‌شود $x \geq ۱$ و دامنهٔ تابع عبارت است از :

$$D = \{x : x \geq ۱\}$$

به عبارت دیگر داریم :

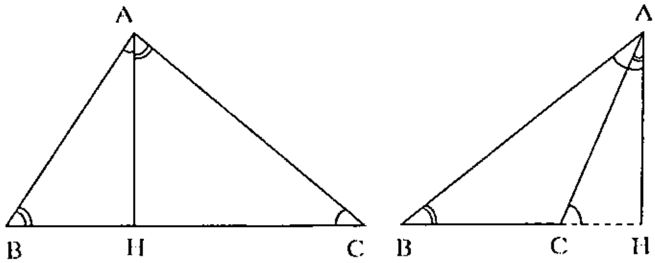
$$y=\sqrt{x+1}.\sqrt{x-1} \Rightarrow \begin{cases} y=\sqrt{x^2-1} \\ x \geq 1 \end{cases}$$

نادیده گرفتن همهٔ حالتهای ممکن شکل

در مسأله‌های هندسه، و مسأله‌هایی دیگر، عموماً شکلی که رسم می‌شود، به یافتن راه حل مسأله کمک می‌کند. این شکل اگر همهٔ شرطهای مربوط به داده‌ها را دارا نباشد، چه بسا گمراه‌ـ کننده باشد و اگر همهٔ حالتهای ممکن آن رسم نشوند، چه بسا که جوابهایی از مسأله از قلم بیفتند.

مثال ۸. در مثلث ABC، ارتفاع AH واسطهٔ هندسی بین BH و CH است. بین اندازه‌های دو زاویهٔ B و C چه رابطه‌ای برقرار است؟

ممکن است دانش‌آموزانی بر این گمان باشند که عکس قضیهٔ «در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر واسطهٔ هندسی است بین دو پاره خطی که روی وتر جدا می‌کند» نیز صحیح است و بنابر آن نتیجه بگیرند که مثلث قائم‌الزاویه و مجموع دو زاویهٔ B و C برابر با ۹۰ درجه است، اما این نتیجه‌گیری کامل نیست. ارتفاع نظیر هر رأس از مثلث، بنابر آن‌که دو زاویهٔ روبه‌رو به آن، هر دو حادّه یا یکی از آنها منفرجه یا قائمه باشد، یا در درون مثلث یا در بیرون آن و یا روی یک ضلع آن می‌تواند واقع باشد، و همهٔ این حالتها را باید در نظر گرفت. در این مسأله، ارتفاع AH نمی‌تواند روی AB یا AC واقع باشد زیرا در چنین حالت یا BH یا CH صفر است و AH هم باید صفر باشد و مثلث به یک پاره خط تبدیل می‌شود. از این رو برای شکل مسأله باید دو حالت را در نظر بگیریم :

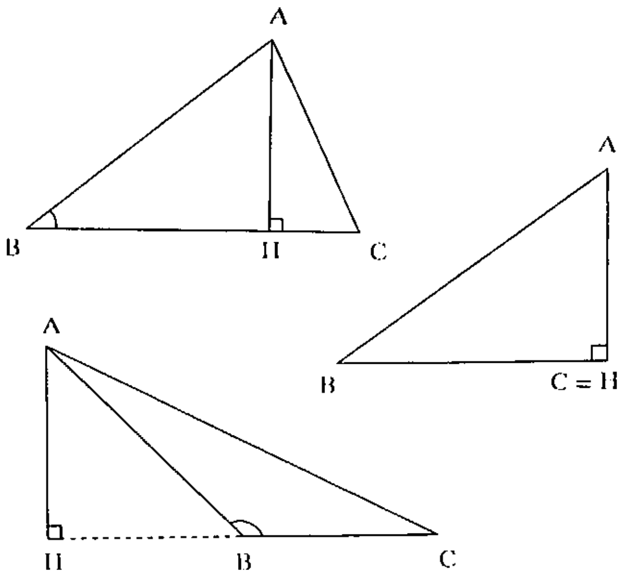


در هر دو حالت از فرض $\overline{AH}^2=BH.CH$ تناسب $AH/BH=CH/AH$ به دست می‌آید و نتیجه می‌شود دو مثلث ABH و ACH متشابه‌اند و دو زاویهٔ ABH و CAH با هم و دو زاویهٔ ACH و BAH نیز با هم برابرند. در حالتی که AH درون مثلث ABC باشد، به دست می‌آید که مجموع دو زاویهٔ B و C از آن برابر 90° (و مثلث در زاویهٔ A قائمه) است، و در حالتی که AH بیرون مثلث ABC باشد، به‌دست می‌آید که تفاضل دو زاویهٔ B و C از آن برابر 90° (و مثلث در زاویهٔ A شبه قائمه) است. بنابراین :

$$\overline{AH}^2=BH.CH \Rightarrow |\angle B \pm \angle C| = 90^\circ$$

مثال ۹. در مثلث ABC، ارتفاع AH با نصف ضلع AB برابر است. زاویهٔ B از مثلث، چند درجه می‌تواند باشد؟

در این مسأله هم بنابر آن‌که ارتفاع AH، درون یا بیرون مثلث یا روی AC باشد، سه حالت را باید در نظر گرفت : C و H در



یک طرف، یا در دو طرف B، یا این‌که H روی C باشد. در هر یک از سه حالت، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH، چون ضلع AH نصف وتر AB است، زاویهٔ ABH به اندازهٔ ۳۰ درجه است و زاویهٔ B در حالت کلّی با زاویهٔ ABH یا برابر یا مکمل است یعنی ۳۰ درجه یا ۱۵۰ درجه است.

تمرین ۱

۱ـ مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ زیر را به دست آورید:

$$\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}=2$$

۲ـ در ذوزنقهٔ ABCD، قاعدهٔ AB برابر با a و قاعدهٔ CD برابر با b است، دو پاره خط

$$MN = \frac{a+b}{۲} \;,\; PQ = \sqrt{ab}$$

موازی با دو قاعده و محدود به دو ساق رسم شده‌اند که از این دو، MN به AB نزدیکتر است. از دو عدد a و b کدام کوچکتر و کدام بزرگتر است؟

۳ـ دو مجموعهٔ A و B به شرح زیر نسبت به هم چه وضعی دارند:

$$A = \{x \mid \text{x حرفی از واژهٔ «ایران» است}\}$$

$$B = \{x \mid \text{x حرفی از واژهٔ «ایرانیان» است}\}$$

۴ـ در مستطیل ABCD، ضلع AB به اندازهٔ a و ضلع BC به اندازهٔ b است. عمودی که از C بر قطر BD رسم شود، با AB در M برخورد می‌کند. اندازهٔ پاره خط AM را به دست آورید.

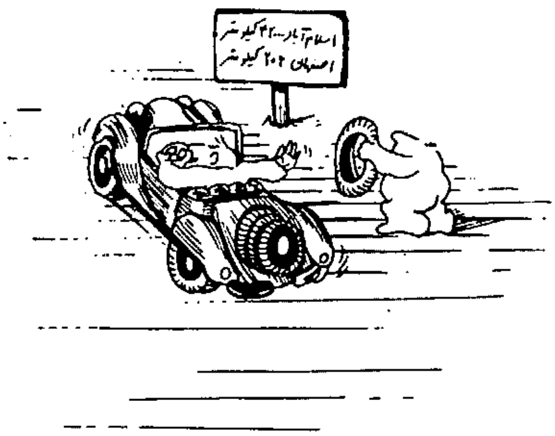
۵ـ اگر a، b، c، ...، e و f عددهای حقیقی مثبت باشند، به گونه‌ای که:

$$\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \frac{e}{f} = \frac{f}{g} \\ g = ۹a \end{cases}$$

عدد b چند برابر عدد a است؟

۶ـ در مثلث ABC، میانهٔ AM با ارتفاع CH برابر است. اندازهٔ زاویهٔ BAM را به‌دست آورید.

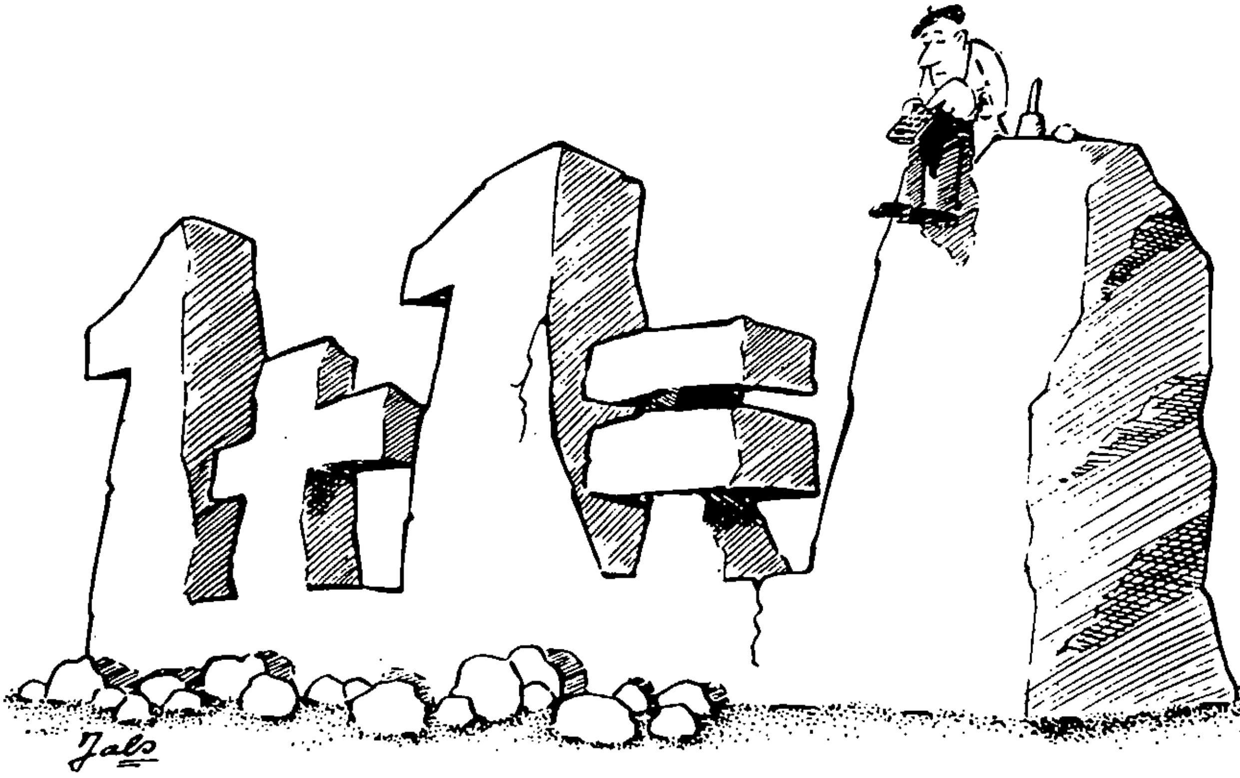
تفریح اندیشه۳



مهرداد خودش را برای یک مسافرت ۴۲۰۰۰ کیلومتری آماده می‌کند. اتومبیل او ۴ چرخ دارد که بعد از پیمودن هر ۲۴۰۰۰ کیلومتر باید توییهای لاستیکها را عوض کند. مهرداد فکر می‌کند که برای پیمودن این راه، ۷ تویی برایش کافی است؛ آیا حق با اوست؟

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمهٔ سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸



چند کلمه دربارهٔ مبانی ریاضی

● ترجمهٔ دکتر منوچهر وصال/ویراستهٔ سیامک کاظمی

اقتباس از کتاب مبانی ریاضیات «کارول شوماخر»[1]

استدلال ریاضی

در استدلال ریاضی، برای استنباط نتایج **(قضایا)** از فرضهای اساسی **(اصول موضوع)**، استدلالهای منطقی را به کار می‌بندند. تقریباً همهٔ ریاضیات بر پایهٔ مجموعه‌ها بنا شده است ؛ بنابراین فرضهای اساسی اصول موضوع، نظریهٔ مجموعه‌ها هستند. اما در عمل بندرت به طور مستقیم به این اصول موضوع استناد می‌شود. ریاضیدان، بیشتر اوقات، از فرضهای فرعی و بیش از همه از تعریفها، که طبق اصول با استفاده از نظریهٔ مجموعه‌ها قابل توجیه‌اند، استفاده می‌کند. فرضها، خواه اصول موضوع واقعاً بنیادی باشند، خواه اصول موضوع فرعی و تعریفها، نقطهٔ آغازین زنجیره‌های استدلال منطقی دقیقی هستند که به قضیه‌ها می‌انجامند. در این کار، از گونهٔ خاصی از زبان طبیعی استفاده می‌شود. این «زبان ریاضی» برای بیان دقیق و بدون ابهام مفهومهای ریاضی، طرّاحی شده است.

تصمیم‌گیری دربارهٔ فرضها

کمی از موضوع خارج می‌شویم. اغلب ما با پنج اصل موضوع هندسه مسطحهٔ اقلیدس که سیصد سال پیش از میلاد وضع شده، آشنا هستیم. این اصول موضوع، به زبان امروز، به صورت زیر بیان می‌شوند :

۱ ـ خط با دو نقطه مشخص می‌شود.
۲ ـ پاره‌خط را می‌توان به طور نامحدود ادامه داد.
۳ ـ دایره با یک نقطه و یک شعاع مشخص می‌شود.
۴ ـ دو زاویهٔ قائمه برابرند.
۵ ـ به ازای هر خط و هر نقطهٔ مفروضی که روی این خط نباشد، یک و تنها یک خط از این نقطه به موازات خط اوّل می‌گذرد. (این در واقع روایت «جان پلی‌فر» (۱۸۱۹ ـ ۱۷۴۸) از اصل موضوع پنجم است. بیان اصلی اقلیدس، کمی پیچیده‌تر است.)

اقلیدس توانست از این پنج حکم همهٔ هندسهٔ زمان خودش را به طور دقیق نتیجه بگیرد. روش اصل موضوعی، آن قدر موفق بود که الگوی تفکّر ریاضی شد. **«اصول اقلیدس»** بیش از ۲۰ قرن کتاب درسی هندسه بود و حتی امروز، اکثر شاگردان هندسه، با روش کلی اصول اقلیدس هندسه می‌آموزند.

پس اقلیدس، کار بسیار بزرگی انجام داده است. او در وهلهٔ اول، نقطهٔ آغاز کار خود را چگونه انتخاب کرد؟ اقلیدس و همهٔ هندسه‌دانان، تا قرنها بعد از او، بر این باور بودند که اصول موضوع او نوعی حقیقت مطلق را دربارهٔ صفحه دربر دارد. او مفهومهایی شهودی از صفحه، خط و جز اینها، در نظر داشت و اصول موضوعی را که فکر می‌کرد آنها را توصیف می‌کنند وضع کرد. هندسه‌دانان، چهار اصل موضوع اول او را پسندیدند؛ اما بحثهای زیادی دربارهٔ اصل موضوع پنجم درگرفت. (هیچ‌کس در درستی آن شک نداشت؛ اما بسیاری تصور می‌کردند به عنوان فرض اصلی لازم نیست. فکر می‌کردند که می‌توان آن را از چهار اصل موضوع اوّل نتیجه گرفت.) این حکایت طولانی را کوتاه می‌کنیم، در نیمهٔ اوّل قرن نوزدهم، هندسه‌های نااقلیدسی اختراع شدند؛ یعنی دستگاه‌هایی هندسی که هر یک در درون خود کاملاً سازگار بودند، بر پایهٔ اصول موضوع یک تا چهارم و یک اصل موضوع جدید دربارهٔ خطوط موازی که اصل پنجم اقلیدس را نقض می‌کند، ابداع شدند. مثلاً اصل موضوع جدید ممکن است این باشد:

۵ـ به ازای هر خط و هر نقطهٔ مفروضی که روی این خط نباشد، **بیش از یک خط** موازی با خط مفروض می‌گذرد.

هندسه‌ای که از این مجموعهٔ اصول موضوع جدید حاصل می‌شود، هندسهٔ «نااقلیدسی» نامیده می‌شود؛ این هندسه را می‌توان هندسهٔ «رویهٔ خمیده» تعبیر کرد که در آن خمهایی در رویه، نقش خطها را بازی می‌کنند. سرانجام «صفحه»، «خط» و «نقطه» به‌رغم تعبیری که اقلیدس از آنها کرده است، اصطلاحهای **تعریف نشده** هستند. بنابراین آیا این که فکر می‌کردند اصول اقلیدس، حقیقت مطلق است، درست است.

آری و نه. در واقع این سؤال نادرست است. درست پس از کشف هندسهٔ نااقلیدسی، ریاضیدانان به این نتیجه رسیدند که انتخاب‌اصول موضوع ریاضی **کاملاً دلخواه است**؛ به شرط این که اصول موضوع انتخاب شده، باهم سازگار باشند (یعنی تناقضی به وجود نیاورند).

کاملاً می‌توان جهانی راتصور کرد که از قوانین هندسهٔ نااقلیدسی پیروی می‌کند[۲]. بنابراین، مجموعه‌های مختلف اصول موضوع، ممکن است به یک اندازه معتبر باشند ولی برابری اعتبار، به این معنا نیست که هر مجموعهٔ اصول موضوع باهم سازگار، به خوبی هر مجموعهٔ دیگری است. وقتی مجموعهٔ خاصی از اصول موضوع را می‌پذیریم، معمولاً منظوری در ذهن داریم. اقلیدس، اصول موضوعش را برای بیان دقیق درک شهودی خود از صفحهٔ هندسه انتخاب کرد. اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها، تصور معمولی ما را از مجموعه بیان می‌کند. همچنین اصول موضوع اعداد حقیقی، اعداد حقیقی را توصیف می‌کنند. در هر یک از این حالتها، با اصول موضوع، ایدهٔ مجردی به صورتی دقیق بیان می‌شود و به این ترتیب، تحلیل ریاضی دقیق آن ممکن می‌شود.

آنچه گفتیم، برای تعریفها هم درست است. تعریفها اختیاری هستند؛ اما با دقت انتخاب می‌شوند. مثلاً در هندسهٔ مسطحه، می‌توانیم دایره و سه نقطه را که روی دایره نباشند، تعریف یک شیء اختیار کنیم. اما این شیء جدید، احتمال دارد خیلی مفید نباشد. همچنین اگر از بی‌توجهی، مربع را یک چهار ضلعی با اضلاع مساوی تعریف کنیم، بزودی می‌بینیم که ممکن است زاویه‌های آن قائمه نباشند و سپس می‌توانیم تعریف را اصلاح کرده، مربع را چهارضلعی با اضلاع مساوی و زاویه‌های قائمه تعریف کنیم. وانگهی، لغت «مربع» معنای معمولی و شایع خود را دارد. برای حفظ ارتباطات و سهولت (و احترام به دیگران)، صلاح در این است که هر وقت ممکن است، از قراردادهای ریشه‌دار ریاضی پیروی کنیم. تعریفها، مانند اصول موضوع، برای بیان دقیق مفهومهای مفید، به نحوی که منطبق با عرف باشد ابداع شده‌اند.

برای کارکردن در ریاضیات چه چیز لازم داریم؟

اصول موضوع و تعریفها، نقطهٔ آغاز هستند. همین که در مورد فرضهای اساسی تصمیم گرفتیم، می‌توانیم کار را ادامه دهیم و اثبات قضیه‌ها را شروع کنیم. «برهان»، زنجیره‌ای از استدلالهای منطقی (و گاه بسیار طولانی) است که توسط آن، یک قضیهٔ ریاضی را از فرضهای اساسی نتیجه می‌گیریم. زنجیرهٔ استدلال، از اصول موضوع شروع و به گزاره‌ای که سعی در اثبات آن داریم، ختم می‌شود؛ اما در عمل، بندرت همهٔ حلقه‌های زنجیرهٔ استدلال را عرضه می‌کنیم. کافی است نشان دهیم که این گزاره، از قضیه‌هایی که پیش از این ثابت شده است، نتیجه می‌شود. وقتی قضیه‌ای را ثابت کردیم، درستی آن به اندازهٔ خود اصول موضوع، محرز شده است.

در مسأله‌ای که زنجیره‌های استدلال آن طویلند، یک حلقهٔ بد در یک زنجیره، آن‌را خراب می‌کند. اگر برهانی، یک مرحلهٔ نادرست داشته باشد، دیگر به هیچ وجه برهان نیست (اگرچه ممکن است بتوان اشتباه را رفع کرد و از آن یک برهان ساخت). بنابراین

اجتناب از خطا در هر مرحله بسیار مهم است.

کار اصلی برای اجتناب از برهانهای غلط، پیروی دقیق از قواعد منطق قیاسی است. در هر مرحلهٔ استدلال، برای ثابت کردن یک گزارهٔ جدید بر پایهٔ گزاره‌های قبلی، ازاین قواعد استفاده می‌شود. مرحله‌ای از استدلال که طبق قواعد منطق نباشد، بی‌اعتبار است؛ *حتی اگر به طور اتفاقی، گزارهٔ جدید راست باشد.* استدلال، متشکل از گزاره‌های راست معتبر نیست؛ اگر منطق به استنتاجهایی که گزاره‌ها را به هم مربوط می‌کنند، صحّه نگذاشته باشد. بنابراین لازم است که هر ریاضیدان، قواعد منطق قیاسی را بداند و با دقت زیاد، آنها رابه کار برد.

این کار، مشکلتر از آن است که به نظر می‌رسد. حکم ریاضی، ممکن است خیلی پیچیده باشد، در این صورت، تجزیه کردن آن به چند قسمت و فهمیدن این که چگونه با هم ترکیب می‌شوند، تا حدّی نیاز به مهارت دارد. مثلاً حتی نقیض گزاره ـ یعنی بیان گزارهٔ مخالف ـ که به نظر ساده می‌رسد، اگر گزاره پیچیده باشد، ممکن است چندان ساده نباشد. کوشش کنید نقیض گزارهٔ زیر را بیان کنید: «اگر هر وقت به فروشگاه می‌روید، مردم شما را بشناسند، آن‌گاه یا شما در شهر کوچکی زندگانی می‌کنید یا شخص خیلی مشهوری هستید.»

اگر زبانی که از آن استفاده می‌شود، نادقیق و مبهم باشد، حتی پیروی دقیق از منطق، کافی نیست. به همین دلیل است که ریاضیدانان، قراردادهای خاصی در مورد اصطلاحها و دستور زبان به وجود آورده‌اند که به مراتب، دقیقتر از زبان محاوره‌ای است. بنابراین، ریاضیدانان باید «زبان ریاضی» را بفهمند و بتوانند آن را به‌کار بندند.

دربارهٔ زبان ریاضی، نکته‌های زیادی وجود دارد. روشنترین نکته این است که زبان ریاضی، متضمّن تعداد خیلی زیادی اصطلاح است که با اصطلاحهایی که در زندگانی روزانه به کار می‌روند، متفاوت است و دربین آنها، نمادهای مجرّد فراوان است. از نمادها صرفاً برای راحتی کار استفاده می‌شود: نوشتن «x^2» از نوشتن «مربع x» راحت‌تر است، و «$x \in A$» جمع‌وجورتر از «x عضو مجموعهٔ A است» می‌باشد. در هرحالت، عبارت نمادی و عبارت غیرنمادی یک معنا دارند.

اما زبان ریاضی، خیلی بیش از اصطلاحهای غریب و عجیب و نمادهای رازآمیز، زبانی است بسیار صوری، دقیق و قاعده‌مند. اداتی مانند «اگر و تنها اگر»، «به ازای هر»، «وجود دارد» و جز اینها، بارها و بارها تکرار می‌شوند. این عبارتها، برای بیان رابطه‌های منطقی، با کمترین ابهام، با دقت انتخاب شده‌اند. نه تنها عبارتها، بلکه **ترتیب** آنها نیز بسیار اهمیت دارد. به تفاوت بین این دو گزاره بیندیشید: «برای هر زهری، داروی پادزهر وجود دارد.»، «دارویی وجود دارد که پادزهر هر زهری است.» دقت زبان معمولی، به قدری کم است که با این که زبان ریاضیات گونه‌ای از زبان طبیعی است، شاگرد مبتدی در ریاضیات مجرّد، ممکن است احساس کند که با یک زبان خارجی مواجه شده است.

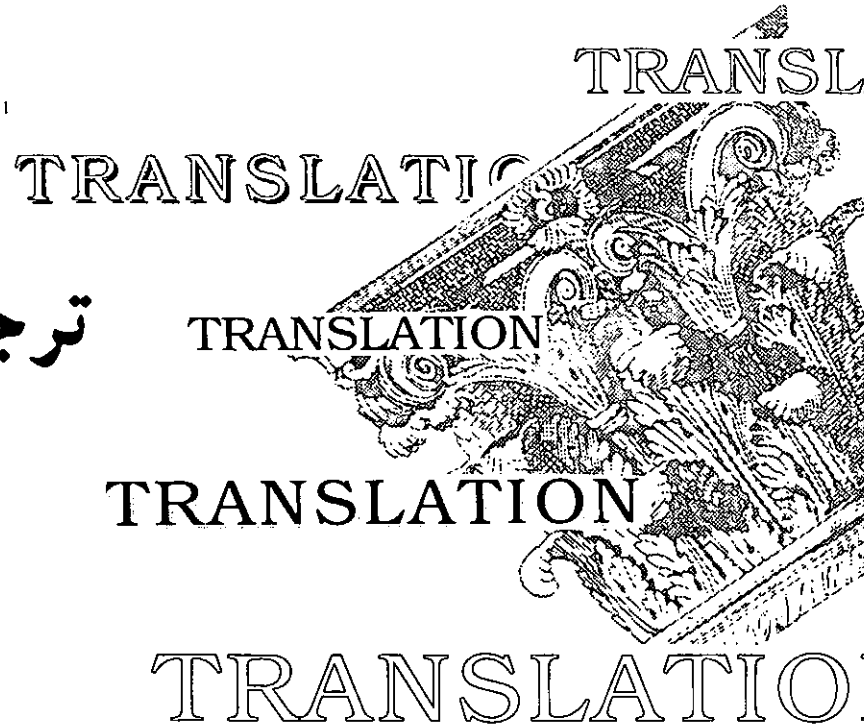
با زبانی دقیق و منطقی دقیق، می‌توان استدلالهای ریاضی معتبر ساخت. اما مشارکت در کارهای گسترده‌تر ریاضی به معلومات عمومی در ریاضیات نیاز دارد. این معلومات عمومی، شامل ایده‌ها، قضایا و تکنیکهایی است که تقریباً در همهٔ شاخه‌های ریاضیات وجود دارد. کتابی در ریاضیات مجرّد را باز کنید، درآن به مجموعه‌ها، رابطه‌ها، تابعها، برهان مبتنی برعکس نقیض، استقرای ریاضی، رابطهٔ نزدیک بین رابطه‌های هم‌ارزی و افرازها برمی‌خورید. به طور خلاصه، مجموعه‌ای از ایده‌هایی است که هر ریاضیدان می‌داند و به کار می‌بندد.

یادداشتها

۱ ـ C. Schumācher– Chapter Zero : Fundamental Notions of Abstract Mathematics. Addison weseley, 1996.

۲ ـ در واقع، در نظریهٔ نسبیت عام، فرض می‌شود که هندسهٔ جهان فیزیکی ناا‌قلیدسی است.

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی (۲۱)



● حمیدرضا امیری

Test 6

Time allowed: $1\frac{1}{4}$ hours

SECTION I

Questions 1–20 **(Twenty questions)**

تست ۶

زمان پیشنهادی: $۱\frac{۱}{۴}$ ساعت

بخش ۱

سؤالهای ۱ ـ ۲۰ **(بیست سؤال)**

1. $\sin 5\theta - \sin 9\theta \equiv$

A $-2\sin 7\theta \cos 2\theta$

B $-2\sin 2\theta \cos 7\theta$

C $-2\cos 7\theta \cos 2\theta$

D $2\sin 2\theta \sin 7\theta$

E $2\sin 2\theta \cos 7\theta$

۱. حاصل عبارت $\sin ۵\theta - \sin ۹\theta$ کدام است؟

۱) $-۲\sin ۷\theta\cos ۲\theta$

۲) $-۲\sin ۲\theta\cos ۷\theta$

۳) $-۲\cos ۷\theta\cos ۲\theta$

۴) $۲\sin ۲\theta\sin ۷\theta$

۵) $۲\sin ۲\theta\cos ۷\theta$

2. The modulus of $(1-i)^6$ is

A 1 **B** $\sqrt{2}$ **C** 2

D $2\sqrt{2}$ **E** 8

۲. قدر مطلق $(۱-i)^۶$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲

۴) $۲\sqrt{۲}$ ۵) ۸

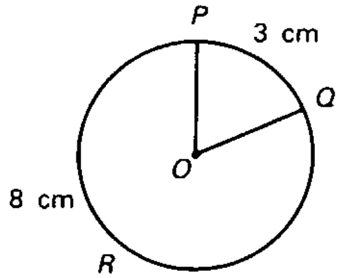
3. $\sum_{r=1}^{10} (2r)^2 =$

A 12 100 **B** 3025 **C** 2870 **D** 1540 **E** 770

۳. حاصل عبارت $\sum_{r=۱}^{۱۰}(۲r)^۲$ کدام است؟

۱) ۱۲۱۰۰ ۲) ۳۰۲۵ ۳) ۲۸۷۰ ۴) ۱۵۴۰ ۵) ۷۷۰

4.



The minor arc PQ is of length 3 cm. The major arc QRP is of length 8 cm.
$\angle POQ =$

A $\frac{3}{8}$ radians

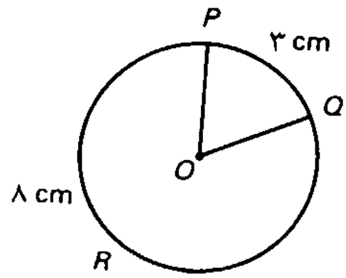
B $\frac{3\pi}{11}$ radians

C $\frac{6\pi}{11}$ radians

D $\frac{33}{2\pi}$ radians

E $\frac{8\pi}{11}$ radians

.۴



اندازهٔ کمان کوچک PQ ،۳ سانتیمتر است. اندازهٔ کمان بزرگ QRP ،۸ سانتیمتر است. اندازهٔ POQ∠ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ رادیان

۲) $\frac{۳\pi}{۱۱}$ رادیان

۳) $\frac{۶\pi}{۱۱}$ رادیان

۴) $\frac{۳۳}{۲\pi}$ رادیان

۵) $\frac{۸\pi}{۱۱}$ رادیان

5. In a convergent geometric progression the first term is 3 and the sum to infinity is 4. The fourth term of the progression is

A $\frac{3}{4}$

B $\frac{3}{64}$

C $\frac{3}{256}$

D $-\frac{3}{64}$

E $-\frac{3}{256}$

۵. در یک تصاعد هندسیِ همگرا، جملهٔ اول ۳ و مجموع نامتناهی (حد مجموع) ۴ است. چهارمین جملهٔ این تصاعد کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$

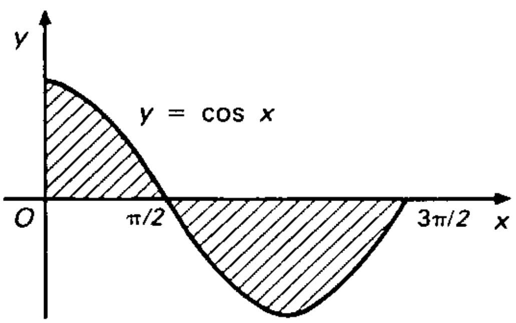
۲) $\frac{۳}{۶۴}$

۳) $\frac{۳}{۲۵۶}$

۴) $-\frac{۳}{۶۴}$

۵) $-\frac{۳}{۲۵۶}$

6.



The total area, in square units, of the shaded regions is

A 3

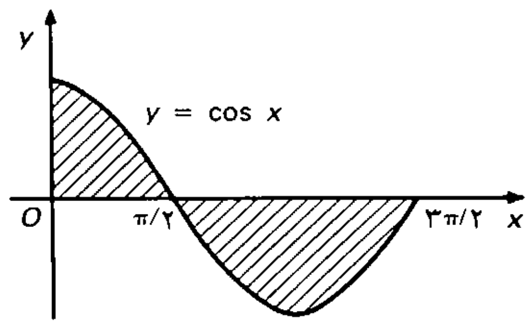
B − 1

C 1

D 2

E − 2

.۶



مساحت کل، در واحد مربع، از قسمت هاشورخورده کدام است؟

۱) ۳

۲) ۱−

۳) ۱

۴) ۲

۵) ۲−

7. The complete solution set of the inequality
$$2|x| > |x - 1|,$$
where $x \in \mathbb{R}$, is

A $\{x : x < -1\}$

B $\{x : x > \frac{1}{3}\}$

C $\{x : -1 < x < \frac{1}{3}\}$

D $\{x : x < -1\} \cup \{x : x > \frac{1}{3}\}$

E $\{x : x < -\frac{1}{3}\} \cup \{x : x > 1\}$

۷. مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $2|x| > |x-1|$ که $x \in \mathbb{R}$ کدام است؟

۱) $\{x : x < -1\}$

۲) $\left\{x : x > \frac{1}{3}\right\}$

۳) $\left\{x : -1 < x < \frac{1}{3}\right\}$

۴) $\{x : x < -1\} \cup \left\{x : x > \frac{1}{3}\right\}$

۵) $\left\{x : x < -\frac{1}{3}\right\} \cup \{x : x > 1\}$

8. The complex number z has modulus 20 and argument $\tan^{-1}(-4/3)$, where $-\pi/2 < \arg z < \pi/2$.
$z =$

A $12 + 16i$ B $16 + 12i$

C $12 - 16i$ D $16 - 12i$

E $-16 - 12i$

۸. قدر مطلق عدد مختلط z برابر ۲۰ و آرگومان آن $tg^{-1}(-\frac{4}{3})$ است، که $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}$. z برابر است با :

۱) $12+16i$ ۲) $16+12i$

۳) $12-16i$ ۴) $16-12i$

۵) $-16-12i$

9. An equation of the straight line which passes through the point (1, 0) and through the centre of the circle
$$x^2 + y^2 - 10x + 4y = 0$$
is

A $x - 3y - 1 = 0$ B $x - 2y - 1 = 0$

C $x + 2y - 1 = 0$ D $2x + y + 2 = 0$

E $2x + y - 8 = 0$

۹. معادلهٔ خط راستی که از نقطهٔ (۱,۰) و مرکز دایرهٔ $x^2+y^2-10x+4y=0$ عبور می‌کند، کدام است؟

۱) $x-3y-1=0$ ۲) $x-2y-1=0$

۳) $x+2y-1=0$ ۴) $2x+y+2=0$

۵) $2x+y-8=0$

10. $\frac{d}{dx}\cos(x^2) =$

A $\sin(x^2)$ B $-\sin(x^2)$

C $\cos 2x$ D $-2x\sin(x^2)$

E $2x\sin(x^2)$

۱۰. حاصل $\frac{d}{dx}\cos(x^2)$ کدام است؟

۱) $\sin(x^2)$ ۲) $-\sin(x^2)$

۳) $\cos 2x$ ۴) $-2x\sin(x^2)$

۵) $2x\sin(x^2)$

11. $f(x) \equiv (1 - 2x)^{-1} + (1 + x)^{-1}$
$f(x)$ can be expanded as a series of ascending powers of x if

A $-1 < x < \frac{1}{2}$ B $-1 < x < 1$

C $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ D $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

E $-2 < x < 2$

۱۱. فرض کنیم $f(x) \equiv (1-2x)^{-1}+(1+x)^{-1}$. f(x) می‌تواند برحسب قوای صعودیِ x بسط داده شود، اگر :

۱) $-1 < x < \frac{1}{2}$ ۲) $-1 < x < 1$ ۳) $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

۴) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ ۵) $-2 < x < 2$

12. Given that $f(x) = e^{-x}$, for $x \in \mathbb{R}^+$, then $f^{-1}(x) =$

A e^x B $-e^x$

C $\ln x$ D $-\ln x$

E $e^{-1/x}$

۱۲. فرض کنیم $f(x)=e^{-x}$، برای $x\in\mathbb{R}^+$، در این صورت $f^{-1}(x)$ کدام است؟

۱) e^x ۲) $-e^x$

۳) $\ln x$ ۴) $-\ln x$

۵) $e^{-\frac{1}{x}}$

13. The equation $2x^2 + 5x - 6 = 0$ has roots α and β.
$\alpha^2 + \beta^2 =$

A $\frac{1}{4}$ B $\frac{13}{4}$

C $\frac{25}{4}$ E $\frac{49}{4}$

D $\frac{37}{4}$

۱۳. معادلهٔ $۲x^۲+۵x-۶=۰$ دارای ریشه‌های α و β است. حاصل $\alpha^۲+\beta^۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱۳}{۴}$

۳) $\frac{۲۵}{۴}$ ۴) $\frac{۳۷}{۴}$

۵) $\frac{۴۹}{۴}$

14. The radius of a sphere is increasing at a constant rate. When the radius is 20 cm, the rate of increase of the surface area is 30 $cm^2\,s^{-1}$. At this moment the rate of increase of the volume, in cm^3s^{-1}, is

A 300π B 300

C 200 D 15

E 3

۱۴. شعاع یک کره با آهنگ ثابتی افزایش می‌یابد. وقتی که شعاع ۲۰ سانتیمتر است، آهنگ افزایش مساحت جانبی $۳۰s^{-۱}$ است. در این لحظه آهنگ افزایش حجم، در $cm^۳s^{-۱}$، برابر است با:

۱) ۳۰۰π ۲) ۳۰۰

۳) ۲۰۰ ۴) ۱۵

۵) ۳

15. Given that
$f : x \mapsto \frac{e^x}{1-e^x}$, $x \in \mathbb{R}^+$,
then $f^{-1} : x \mapsto$

A $\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ B $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ C $\frac{x}{x+1}$

D $\frac{1-e^x}{e^x}$ E $\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$

۱۵. فرض کنیم $f:x\mapsto\frac{e^x}{۱-e^x}$، $x\in\mathbb{R}^+$ در این صورت $f^{-۱}(x)$ کدام است؟

۱) $\ln(\frac{x}{x+۱})$ ۲) $\ln(\frac{x+۱}{x})$ ۳) $\frac{x}{x+۱}$

۴) $\frac{۱-e^x}{e^x}$ ۵) $\frac{e^{-x}}{۱-e^{-x}}$

16. The points P, Q and R are collinear.

$$\overrightarrow{OP} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k},$$
$$\overrightarrow{OQ} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k},$$
$$\overrightarrow{OR} = 2\mathbf{i} + p\mathbf{j} + q\mathbf{k}.$$

A $p = -3, q = 2$, B $p = -3\frac{1}{2}, q = 2$,

C $p = -\frac{1}{2}, q = 0$, D $p = 3, q = -2$,

E $p = -\frac{1}{2}, q = 2$

۱۶. نقاط P، Q و R بر یک استقامت می‌باشند و $\overrightarrow{OP}=۳i+j-k$، $\overrightarrow{OQ}=i-۲j+k$، $\overrightarrow{OR}=۲i+pj+qk$. در این صورت (کدام گزینه درست است؟)

۱) $p=-۳,q=۲$ ۲) $p=-۳\frac{۱}{۲},q=۲$

۳) $p=-\frac{۱}{۲},q=۰$ ۴) $p=۳,q=-۲$

۵) $p=-\frac{۱}{۲},q=۲$

17. Given the following two statements,
(1) $x^2 < 1$,
(2) $x < 1$,
where $x \in \mathbb{R}$, which one of the following statements is always true?

A (1) $\Rightarrow$ (2) but (2) $\not\Rightarrow$ (1)

B (2) $\Rightarrow$ (1) but (1) $\not\Rightarrow$ (2)

C (1) $\Leftrightarrow$ (2)

D (1) $\not\Rightarrow$ (2) and (2) $\not\Rightarrow$ (1)

E None of the above

۱۷. دو گزاره زیر مفروض می‌باشند $(x \in \mathbb{R})$، کدام یک از گزاره‌های زیر همواره درست است؟

(۱) $x^۲ < ۱$

(۲) $x < ۱$

۱) (۲) ⇏ (۱) ولی (۱) ⇒ (۲)
۲) (۱) ⇏ (۲) ولی (۲) ⇒ (۱)
۳) (۲) ⇔ (۱)
۴) (۱) ⇏ (۲) و (۲) ⇏ (۱)
۵) هیچ‌کدام از موردهای بالا

18. $\int \ln x \, dx =$

A $\frac{1}{x} + c$ B $x \ln x + c$

C $x \ln x - x + c$ D $\frac{1}{x} \ln x + c$

E $x \ln x + x + c$

۱۸. حاصل $\int \ln x dx$ کدام است؟

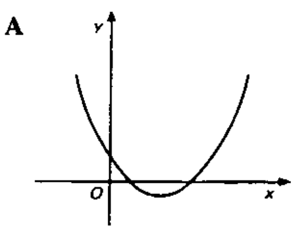
۱) $\frac{۱}{x} + c$ ۲) $x \ln x + c$

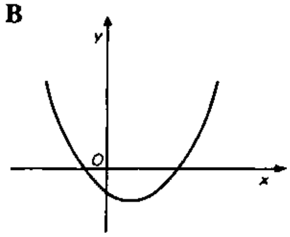
۳) $x \ln - x + c$ ۴) $\frac{۱}{x} \ln x + c$

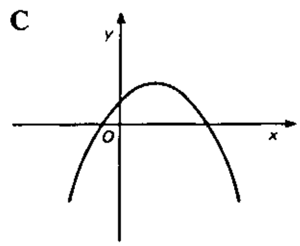
۵) $x \ln x + x + c$

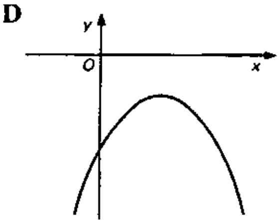
19. Given that $a > 0$ and $b^2 < ac$, a sketch of the curve $y = ax^2 + 2bx + c$, could be

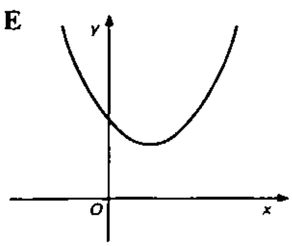
۱۹. فرض کنیم $a > ۰$ و $b^۲ < ac$، نمایش منحنی $y = ax^۲ + ۲bx + c$ کدام است؟

A


B


C


D


E


20. The number of different arrangements which can be made using all the letters of the word FOOLS, if the O's are never separated, is

A 120 B 48

C 24 D 20

E 10

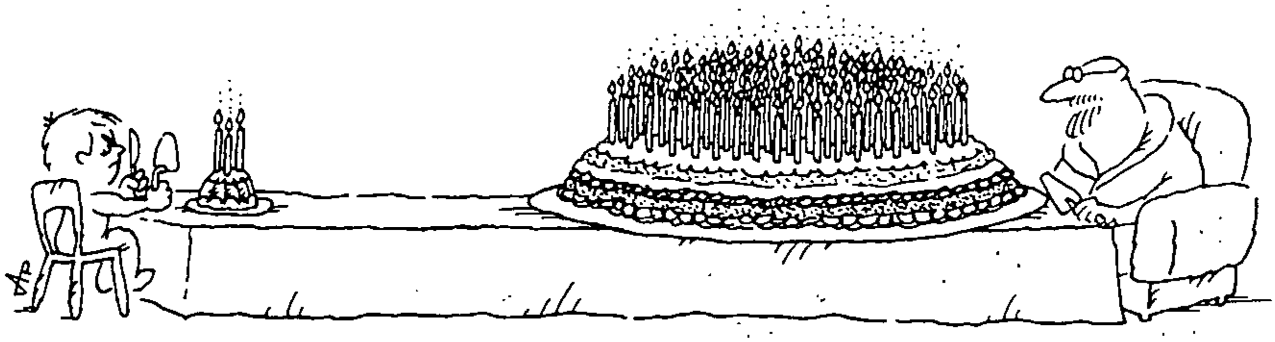
۲۰. تعداد جایگشتهایی که می‌توان با استفاده از همهٔ حروف کلمهٔ FOOLS نوشت، به شرط آن‌که Oها همواره کنار هم باشند، کدام است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۴۸
۳) ۲۴ ۴) ۲۰
۵) ۱۰

• میرشهرام صدر

نابرابری‌ها

(قسمت اوّل)



برای مقایسهٔ دو عدد حقیقیِ متمایز، از نمادهای نابرابری > یا < استفاده می‌کنیم ؛ به‌طور مثال، برای مقایسه دو عدد ۸ و ۱۲، نابرابری زیر را می‌نویسیم :

$$8<12$$

و می‌خوانیم «۸ کوچکتر از ۱۲» یا می‌نویسیم :

$$12>8$$

و می‌خوانیم «۱۲ بزرگتر از ۸».

تعریف $a<b$ $(b>a)$

فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی متمایز باشند ؛ a را کوچکتر از b یا b را بزرگتر از a گوییم، هرگاه عدد حقیقیِ مثبتی مانند P یافت شود، به‌گونه‌ای که داشته باشیم :

$$a+p=b \qquad (P>0)$$

در این صورت می‌نویسیم :

$$a<b$$

و می‌خوانیم « aکوچکتر از b» یا می‌نویسیم :

$$b>a$$

و می‌خوانیم «b بزرگتر از a».

تعریف $a\le b$ و $a\ge b$

اگر به هر عدد حقیقی یک عدد نامنفی[1] را بیفزاییم، در این صورت حاصل، بزرگتر یا مساوی با عدد حقیقی اولّیه است ؛ یعنی : اگر a عددی حقیقی و m نامنفی باشد :

$$a+m\ge a$$

فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی باشند ؛ به‌طوری که $a>b$ یا $a=b$، در این صورت می‌نویسیم : $a\ge b$

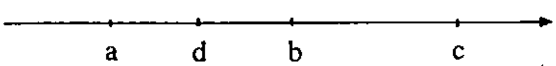
و می‌خوانیم «a بزرگتر یا مساوی با b» یا «a ناکمتر از b» است.

هرگاه $a<b$ یا $a=b$ در این صورت می‌نویسیم :

$$a\le b$$

و می‌خوانیم «a کوچکتر یا مساوی با b» یا «a نابیشتر از b» است.

مفهوم نمادهای < و > را می‌توان روی محور اعداد حقیقی بیان کرد ؛ اگر $a<b$، در این صورت روی محور، a در سمت چپ b و اگر $c>d$، در این صورت، c در سمت راست d روی محور قرار دارد (شکل ۱)



(شکل ۱)

عددهای مثبت و منفی و اصل تثلیث

عدد حقیقی a را مثبت گوییم، هرگاه $a>0$ و آن را منفی گوییم، هرگاه $a<0$ ؛ بنا بر اصل تثلیث به‌ازای هر عدد حقیقی دلخواه مانند a، همواره یکی از رابطه‌های $a=0$ ، $a<0$ و $a>0$ برقرار است.

عددهای نامنفی و نامثبت

عدد حقیقی a را نامنفی گوییم، هرگاه $a \geq ۰$ و آن را نامثبت گوییم، هرگاه $a \leq ۰$.

نابرابری دو گانه (مضاعف)

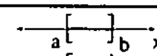
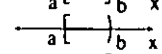
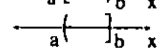
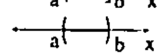
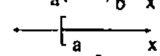
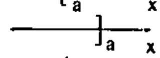
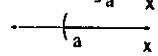
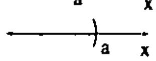
نابرابری دوگانه $a < x \leq b$ به این مفهوم است که $\begin{cases} x > a \\ \text{و} \\ x \leq b \end{cases}$

یعنی x می‌تواند بین a و b و برابر با b باشد؛ اما x برابر با a نیست. مجموعه همهٔ عددهایی چون x را که در نابرابری دوگانهٔ $a < x \leq b$ صدق می‌کنند، یک «بازه» (فاصله) می‌نامند و در این حالت، آن را با نماد $(a,b]$ نشان می‌دهند:

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$$

در نابرابری بالا عدد a را نقطهٔ پایانی چپ بازه گویند و نماد «(» بیان کننده این است که بازه شامل a نیست و عدد b را نقطه پایانی راست بازه گوییم و نماد «]» به این معناست که بازه شامل b است.

نمادهای مختلف بازه‌ها روی محور اعداد حقیقی، در جدول زیر مشخص شده است:

نام بازه	نمودار خطی	نماد نابرابری	نماد بازه
۱. بسته		$a \leq x \leq b$	$[a, b]$
۲. نیم‌باز از طرف راست		$a \leq x < b$	$[a, b)$
۳. نیم باز از طرف چپ		$a < x \leq b$	$(a, b]$
۴. باز		$a < x < b$	(a, b)
۵. بازهٔ بی‌کران		$x \geq a$	$[a, \infty)$
۶. بازهٔ بی‌کران		$x \leq a$	$(-\infty, a]$
۷. بازهٔ بی‌کران		$x > a$	(a, ∞)
۸. بازهٔ بی‌کران		$x < a$	$(-\infty, a)$

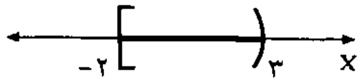
ما از علامت ∞ (بی‌نهایت مثبت) و علامت $-\infty$ (بی‌نهایت منفی) استفاده کرده‌ایم؛ اما باید مراقب باشید که این علامتها را با عددهای حقیقی اشتباه نکنید؛ زیرا آنها از خواص عددهای حقیقی پیروی نمی‌کنند، به همین جهت است که از نماد «(» برای بازه‌های بی‌کران استفاده کرده‌ایم.

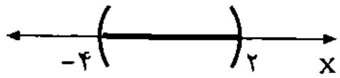
مثال: بازه‌های زیر را ابتدا روی محور اعداد حقیقی و سپس آنها را به صورت نابرابری مشخص کنید.

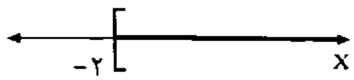
۱) $[-۲, ۳)$　　۲) $(-۴, ۲)$

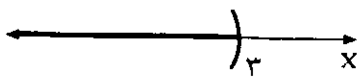
۳) $[-۲, \infty)$　　۴) $(-\infty, ۳)$

حل:

۱)  $-۲ \leq x < ۳$

۲)  $-۴ < x < ۲$

۳)  $x \geq -۲$

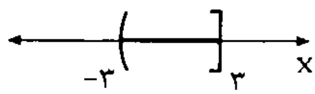
۴)  $x < ۳$

مثال: نابرابریهای زیر را ابتدا به صورت فاصله و سپس آنها را روی محور اعداد حقیقی مشخص کنید.

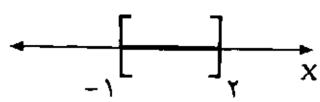
۱) $-۳ < x \leq ۳$　　۲) $۲ \geq x \geq -۱$

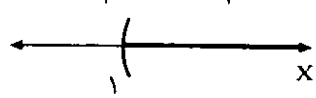
۳) $x > ۱$　　۴) $x \leq ۲$

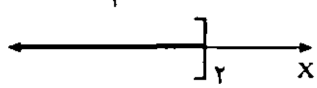
حل:

۱) $(-۳, ۳]$ 

۲ ـ برای از بین بردن اشتباه، بهتراست نابرابری دو گانه $۲ \geq x \geq -۱$ را به‌صورت $-۱ \leq x \leq ۲$ نمایش دهیم، سپس آن‌را به‌صورت بازه مشخص کنیم:

$[-۱, ۲]$ 

۳) $(۱, \infty)$ 

۴) $(-\infty, ۲]$ 

اجتماع و اشتراک بازه‌ها

چون بازه‌ها مجموعه‌هایی از عددهای حقیقی هستند، بنابراین وقتی در مورد بازه‌ها مطالعه می‌کنیم، دو عمل اجتماع و اشتراک روی بازه‌ها مفید خواهند بود.

تعریف اجتماع و اشتراک

فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند، اجتماع مجموعهٔ A و B را با نماد $A \cup B$ نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف

می‌کنیم :

$$A\cup B=\{x|x\in A \text{ یا } x\in B\}$$

$$\{a,b,c\}\cup\{b,c,d,e\}=\{a,b,c,d,e\}$$

اشتراک دو مجموعهٔ A و B را با نماد $A\cap B$ نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$A\cap B=\{x|x\in A \text{ و } x\in B\}$$

$$\{a,b,c\}\cap\{b,c,d,e\}=\{b,c\}$$

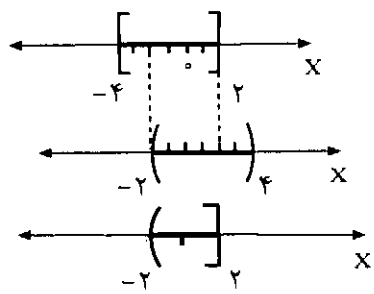
مثال: فرض کنیم $A=[-۴ , ۲]$ و $B=(-۲ , ۴)$ و $C=[۵ , \infty)$ مطلوب است :

۱) $A\cap B$ ۲) $A\cup B$ ۳) $A\cap C$ ۴) $A\cup C$

۵) $A\Delta B$

حل:

۱ـ ابتدا بازه‌های A و B را روی محور مشخص می‌کنیم، سپس اشتراک دو مجموعهٔ A و B را به‌صورت یک بازه مشخص می‌نماییم :

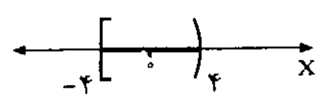


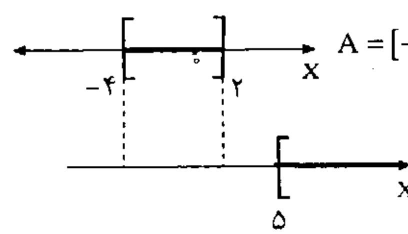
$A=[-۴ , ۲]$

$B=(-۲ , ۴)$

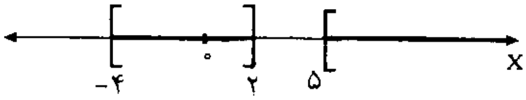
$A\cap B=(-۲ , ۲]$

تذکر: اگر نقطه‌های پایانیِ اشتراک دو بازه، به هر دو بازه تعلق داشته باشد، در این صورت از نماد «[» برای نقطهٔ پایانی استفاده می‌کنیم و اگر نقطه‌های پایانیِ اشتراک دو بازه، فقط به یکی از بازه‌ها متعلق باشد، در این صورت از نماد «)» استفاده می‌نماییم.

۲)  $A\cup B=[-۴ , ۴)$

۳)  $A=[-۴ , ۲]$ ، $C=[۵ , \infty)$

$A\cap C=\varnothing$

۴) 

$A\cup C=[-۴ , ۲]\cup[۵ , \infty)$

۵) $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)=[-۴ , ۴)-(-۲ , ۲]$

$\Rightarrow A\Delta B=[-۴ , -۲]\cup(۲ , ۴)$

مثال: در صورتی‌که $A=[۱ , \infty)$ و $B=(-\infty , ۳)$ و $C=[-۲ , ۲]$، درستی رابطه‌های زیر را بررسی کنید :

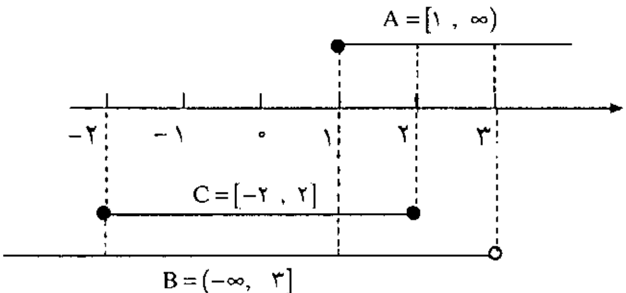
۱) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

۲) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

۳) $(A\cup B)'=A'\cap B'$

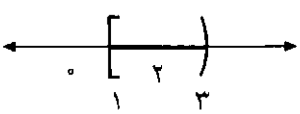
حل:

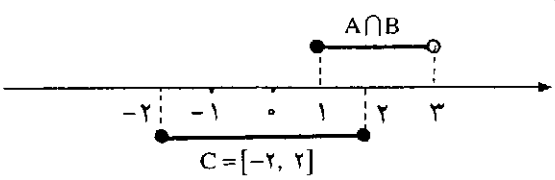
۱ـ ابتدا بازه‌های A، B و C را روی محور مشخص می‌کنیم :



شکل (۲)

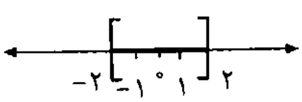
با توجه به شکل بالا ملاحظه می‌کنیم :

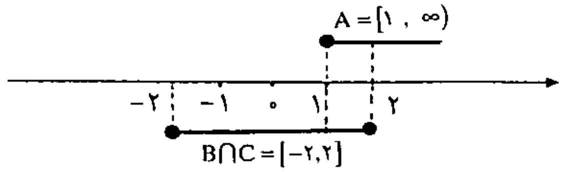
 $A\cap B=[۱ , ۳)$



$(A\cap B)\cap C=[۱ , ۲]$ (۱)

با توجه به شکل (۲) :

 $B\cap C=[-۲ , ۲]$



$A\cap(B\cap C)=[۱ , ۲]$ (۲)

با مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) :

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

۲ ـ با توجه به (شکل ۲) ملاحظه می‌کنیم که :

$B\cap C=[-۲ , ۲]$ و $A\cap C=[۱ , ۲]$

، $A\cup B=(-\infty , \infty)=\mathbb{R}$

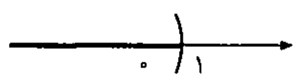
$(A\cup B)\cap C=\mathbb{R}\cap C=C=[-۲ , ۲]$ (۳)

$(A\cap C)\cup(B\cap C)=[۱ , ۲]\cup[-۲ , ۲]=[-۲ , ۲]$ (۴)

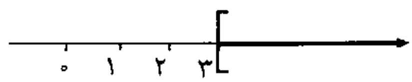
با مقایسهٔ رابطه‌های (۳) و (۴) داریم :

$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

۳ ـ چون $A\cup B=\mathbb{R}$ ، بنابراین $(A\cup B)'=\varnothing$ (۵)



$A'=(-\infty , ۱)$



$B'=[۳ , \infty)$

$A'\cap B'=(-\infty , ۱)\cap[۳ , \infty)=\varnothing$ (۶)

با توجّه به رابطه‌های (۵) و (۶) داریم :

$(A\cup B)'=A'\cap B'$

تمرین

۱ ـ هرگاه $A=[-۴ , ۱)$، $B=(-۱ , ۳]$ و $C=[۲ , \infty)$، مجموعه‌های زیر را ابتدا روی محور، سپس به‌صورت بازه مشخص کنید.

۱) $A\cup B$ ۲) $A\cap B$ ۳) $B\cup C$

۴) $B\cap C$ ۵) $A\Delta B$ ۶) $A'\Delta B'$

۲ ـ با فرض این که $A=(-۴ , ۷)$ و $B=[-۸ , ۳)$ و $C=(-\infty , ۰]$، درستی رابطه‌های زیر را بررسی کنید :

۱) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

۲) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

۳) $(A\cap B)'=A'\cup B'$

۴) $A-B=A\cap B'$

۳ ـ به‌جای علامت سؤال، نمادهای > یا < را جایگزین کنید :

۱) اگر $a-b=۱$ ، در این صورت $a?b$.

۲) اگر $u-v=-۲$ ، در این صورت $u?v$.

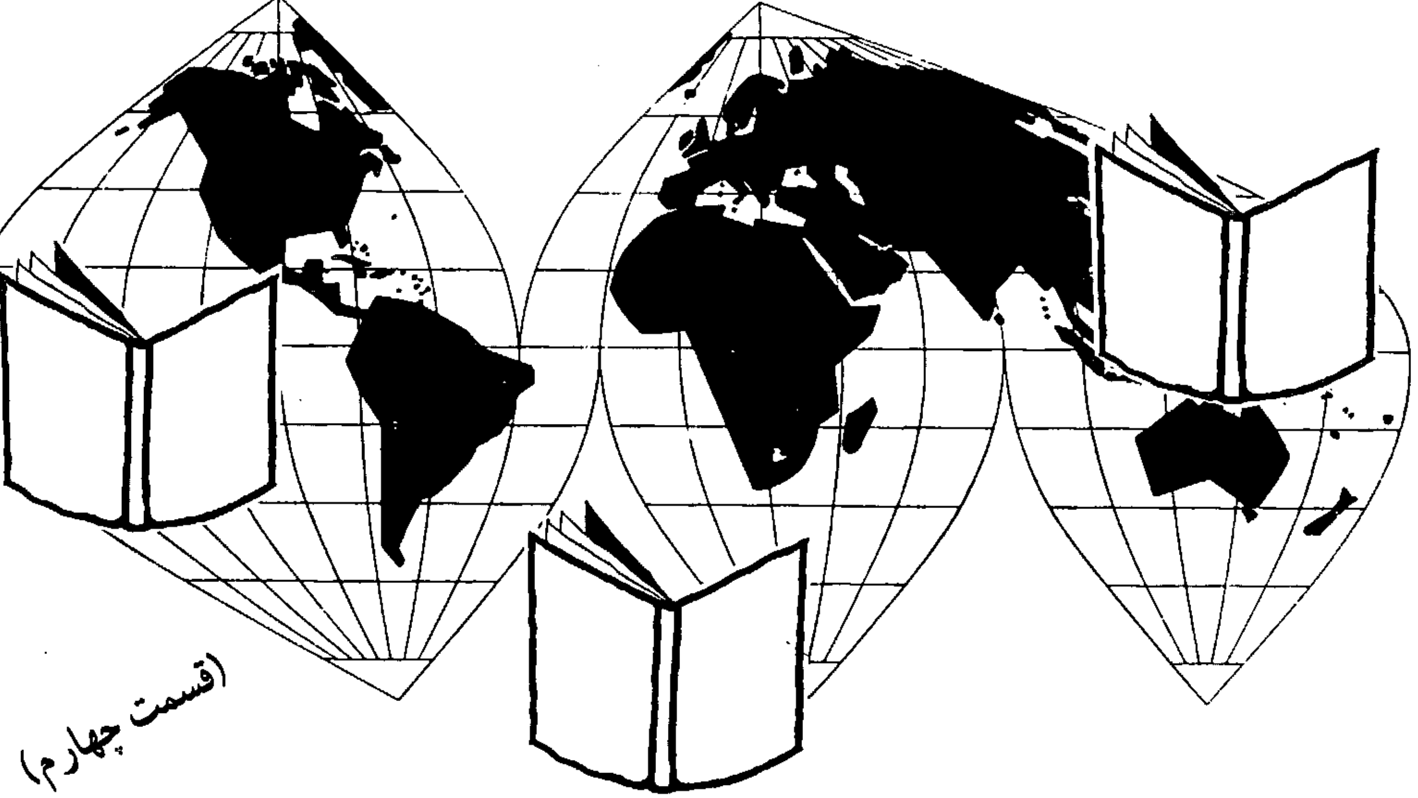
۳) اگر $۲(p-۱)=۲q-۳$ ، در این صورت $p?q$.

۴ ـ علامت عددهای حقیقی a، b و c را به گونه‌ای تعیین کنید که نابرابریهای زیر برقرار باشد.

۱) $\frac{ab}{c}>۰$ ۲) $abc>۰$ ۳) $\frac{a}{bc}>۰$ ۴) $\frac{a^۲}{bc}<۰$

یادداشتها

۱ ـ عددی را نامنفی گوییم که بزرگتر یا مساوی صفر باشد. عدد حقیقی a نامنفی است هرگاه $a\geq ۰$.



(قسمت چهارم)

مقاله‌های کوتاه از مجله‌های ریاضی معتبر جهان (۲۲)

قضیه‌های «سِوا»، «مِنِلائوس» و اصل سطح

● ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

۴. تعمیمهای قضیهٔ هواِهْن

در این بخش، قضایایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که با قضیه‌های بخش پیشین در این ویژگی مشابهند، که به ازای هر n ضلعی، حاصل‌ضرب n نسبت طولهای قطعه خطها دارای مقداری ثابت، یعنی ۱+ یا ۱− است. اما در این جا، حالتهایی را بررسی می‌کنیم که، چون در مورد قضیهٔ هواِهْن، قطعه خطها بر یک خط واقع شوند؛ اما نباشند. در این صورت، دو نقطهٔ W_i، Z_i را بر یالها یا قطرهای $[V_i, V_j]$ از یک n ضلعی مشخص و حاصل‌ضربهای به صورت زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{V_i W_i}{Z_i V_j}\right]$$

قضیهٔ ۴ (قضیهٔ اوّل هواِهْن برای n ضلعیها)

فرض می‌کنیم $P=[V_1,\dots,V_n]$ یک n ضلعی مفروض و j عددی صحیح چنان باشد که به ازای هر i، اعداد صحیح i، $i+j$، $i+2j$، $i+3j$، $i+4j$ (به پیمانهٔ n) متمایز باشند. W_i را (به ازای $i=1,\dots,n$) نقطهٔ تقاطع $V_i\ V_{i+2j}$ و $V_{i+j}\ V_{i+3j}$ تعریف می‌کنیم. در این صورت، نقطه‌های W_i و W_{i+j} بر خط $V_{i+j}\ V_{i+3j}$ واقع می‌شوند و

$$\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{V_{i+j}\ W_i}{W_{i+j}\ V_{i+3j}}\right]=1 \qquad (9)$$

باید توجه داشت که اگر V_i، V_{i+j}، V_{i+2j}، V_{i+3j} و V_{i+4j} نقاطی متمایز نباشند، در این صورت، اتحاد مورد بحث بی‌معنا یا بدیهی خواهد شد. گذشته از این، تنها ضروری است که حالتهای $j=1,2,\dots,[(n-1)/2]$ در نظر گرفته شوند؛ زیرا مقادیر دیگر j به تکرار همین نتایج منجر می‌شوند.

شکل (۱۰) قضیه را به ازای $n=7$، $j=1,2,3$ نشان می‌دهد. گزارهٔ اولیهٔ (۳) از قضیهٔ هواِهْن (شکل (۴) را ملاحظه کنید) متناظر با حالت $n=5$، $j=1$ است.

اثبات: در مورد اوّلین اظهار، توجه می‌کنیم که W_i تقاطع $V_i\ V_{i+2j}$ و $V_{i+j}\ V_{i+3j}$ و W_{i+j} تقاطع $V_{i+j}\ V_{i+3j}$ و $V_{i+2j}\ V_{i+4j}$ است. در نتیجه چنانچه گفته شد، هر دوی این نقاط بر $V_{i+j}\ V_{i+3j}$ قرار دارند.

در مورد اظهار دوم، توجه می‌کنیم که چون در (5a)، با استفاده از مثلثهای با پایه‌های $[V_i, V_{i+2j}]$ و $[V_{i+2j}, V_{i+4j}]$ به‌دست می‌آوریم:

$$\left[\frac{V_{i+j}\ W_i}{W_{i+j}\ V_{i+3j}}\right]=\left[\frac{V_i\ V_{i+j}\ V_{i+2j}}{V_{i+2j}\ V_{i+3j}\ V_{i+4j}}\right]\times \left[\frac{V_{i+2j}\ V_{i+3j}\ V_{i+4j}\ V_{i+j}}{V_i\ V_{i+j}\ V_{i+2j}\ V_{i+3j}}\right]$$

با درج این عبارتها، در سمت چپ (۹) حاصل‌ضربی به‌دست می‌آوریم که در آن مساحتهای مثلثها و نیز مساحتهای چهارضلعیها، جمیعاً حذف می‌شوند. در نتیجه، مقدار حاصل‌ضرب ۱ می‌شود و قضیه به اثبات می‌رسد.

قضیهٔ ۵ (دومین قضیهٔ هواهْن در مورد n ضلعیها)

فرض می‌کنیم $P=[V_1,\dots,V_n]$ یک n ضلعی باشد و j، k عددهای صحیح و مثبتی چنان باشند که $j+2k=n$ و به ازای هر $i=1,\dots,n$، اعداد صحیح i، $i+k$، $i+j$، $i+j+k$ (به پیمانهٔ n) متمایز باشند و اعداد صحیح i، $i+k$، $i+2k$، $i+3k$ نیز (به پیمانهٔ n) متمایز باشند. W_i را به عنوان تقاطع $V_i\ V_{i+k}$ و $V_{i+j}\ V_{i+j+k}$ تعریف می‌کنیم. در این صورت، نقاط W_i و W_{i+2k} بر خط $V_i\ V_{i+k}$ واقع می‌شوند و

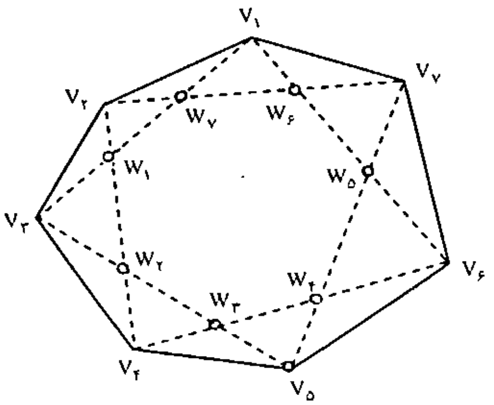
$$\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{V_i\ W_i}{W_{i+2k}\ V_{i+k}}\right]=1 \qquad (10)$$

اثبات: در مورد اظهار اول، توجه می‌کنیم که W_i تقاطع $V_i\ V_{i+k}$ و $V_{i+j}\ V_{i+j+k}$ و W_{i+2k} تقاطع $V_{i+2k}\ V_{i+3k}$ و $V_{i+j+2k}\ V_{i+j+3k}$ است، که همان خط $v_i\ v_{i+k}$ است؛ زیرا $j+2k=n$.

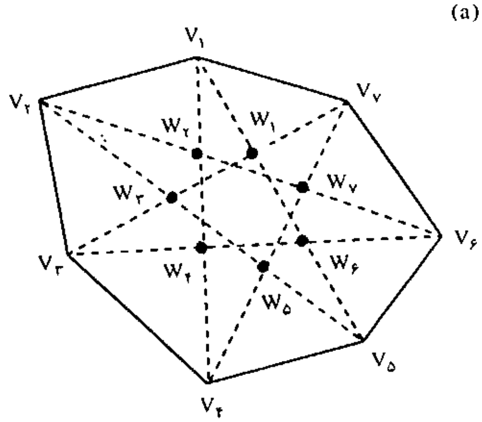
در مورد اظهار دوم، بار دیگر اصل سطح را چون در (5a)، برای مثلثهای با پایه‌های $[V_{i+j}, V_{i+j+k}]$ و $[V_{i+2k}, V_{i+3k}]$ به کار برده، به‌دست می‌آوریم:

$$\left[\frac{V_i\ W_i}{W_{i+2k}\ V_{i+k}}\right]=\left[\frac{V_i\ V_{i+j}\ V_{i+j+k}}{V_{i+k}\ V_{i+2k}\ V_{i+3k}}\right]\times\left[\frac{V_{i+k}\ V_{i+2k}\ V_{i+3k}}{V_i\ V_{i+j}\ V_{i+j+k}}\right]$$

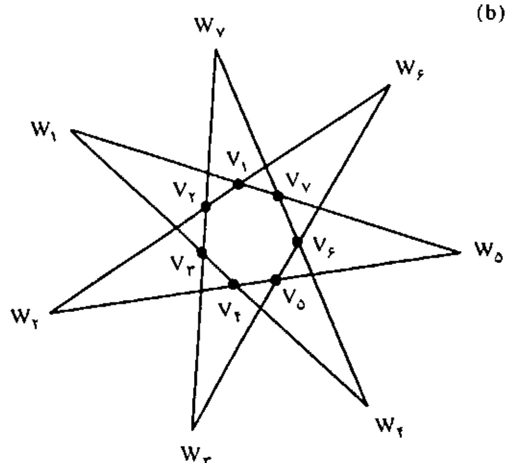
با قرار دادن در سمت چپ (۱۰) و استفاده از رابطهٔ $j+2k=n$، ملاحظه می‌کنیم که سطحهای مثلثها و سطحهای چهارضلعیهای واقع در حاصل‌ضرب نتیجه، جمیعاً حذف شده، مقدار ۱ را به‌دست می‌دهند و به این ترتیب، قضیه اثبات می‌شود.



(a)



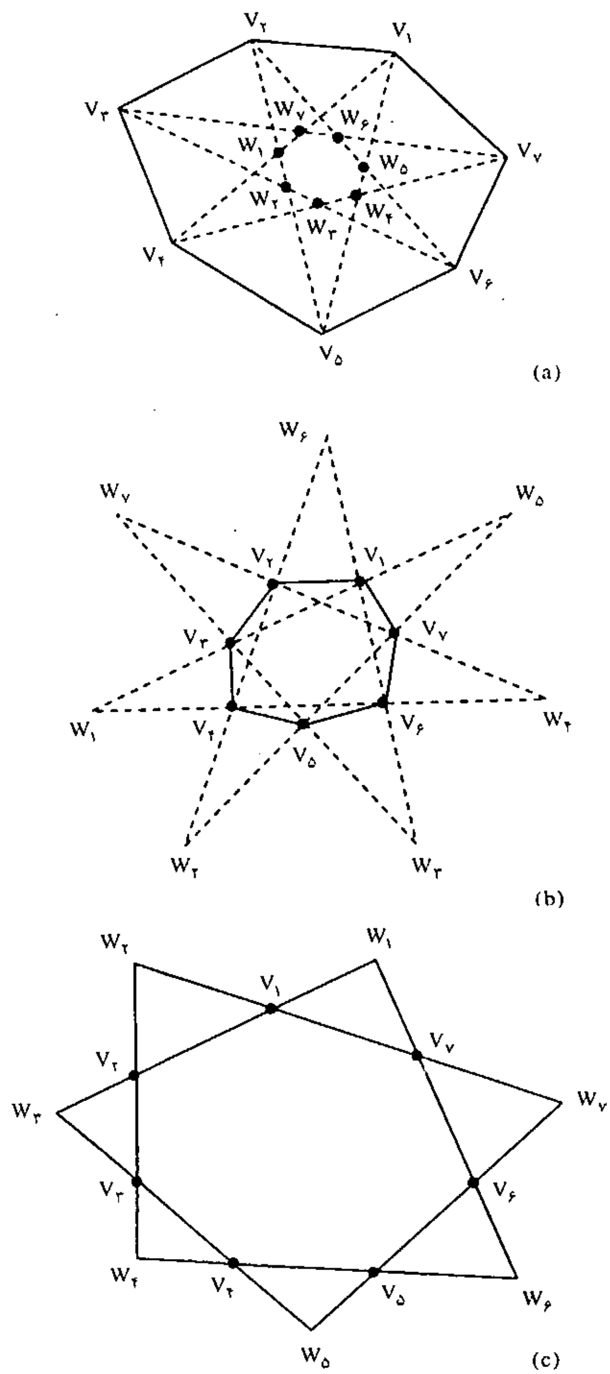
(b)



(c)

شکل (۱۰). مثالهای قضیهٔ اول هواهْن در مورد n ضلعیها، به ازای $n=7$ و (a) $j=1$، (b) $j=2$ و (c) $j=3$. در هر حالت، حاصل‌ضرب هفت نسبت موجود $[V_{i+j}\ W_i / W_{i+j}\ V_{i+3j}]$ (به ازای $i=1,\dots,7$) مقدار ۱ را اختیار می‌کند.

قضیهٔ مورد نظر را در شکل (۱۱) به ازای n = ۷ و : (j,k) = (۱,۳),(۳,۲),(۵,۱) مشخص کرده‌ایم. گزارهٔ اولّیهٔ (۴) از قضیهٔ هواهِن متناظر با حالت n = ۵ ، j = ۱ ، k = ۲ است.



شکل (۱۱). قضیهٔ دوم هواهِن درمورد n ضلعیها به ازای n = ۷ و (a) j = ۱ ، k = ۳ ؛ (b) j = ۳ ، k = ۲ ؛ و(c) j = ۵ ، k = ۱ . در هر حالت، حاصل‌ضرب هفت نسبت $[V_i \;\; W_i / W_{i+2k} \;\; V_{i+k}]$ (به ازای i = ۱,...,۷) مقدار ۱ را اختیار می‌کند.

۵. توضیحات و تفسیرها

قضیهٔ «مِنلائوس» در مورد n ضلعیها، قضیهٔ جدیدی نیست. از اوایل قرن نوزدهم شناخته شده است، مراجع [۲,P.۲۹۵]، [۶,P.۷۵]، [۷,P.۶۳]، [۹,P.۷۵] را ملاحظه کنید. و همان‌طورکه در بالا متذکر شدیم، حالتهای خاصّی از قضیهٔ سوا در مورد n ضلعیها نیز مشخص شده بوده است؛ به عنوان مثال، مراجع [۶,P.۸۶]، [۷,P.۶۴] را ملاحظه کنید.

جالب‌ترین و غیرمنتظره‌ترین نتایج این مقاله، این است که حاصل‌ضربهای گوناگون یال ـ نسبتها و قطر نسبتها برابر ۱+ یا ۱− اند، نیست؛ بلکه این است که مقادیر این حاصل‌ضربها مستقل از چند ضلعی P اند که کارمان را با آن آغاز کردیم (البته با توجه به شرایط بیان شده در آغاز بخش ۳). در این صورت، با توجه به این موضوع، ممکن است شخص تصوّر کند جمیع حاصل‌ضربهای n نسبت در یک n ضلعی دارای همین ویژگی است؛ در حالی که چنین نیست. به عنوان مثال، در شکل (۴)، مقدار

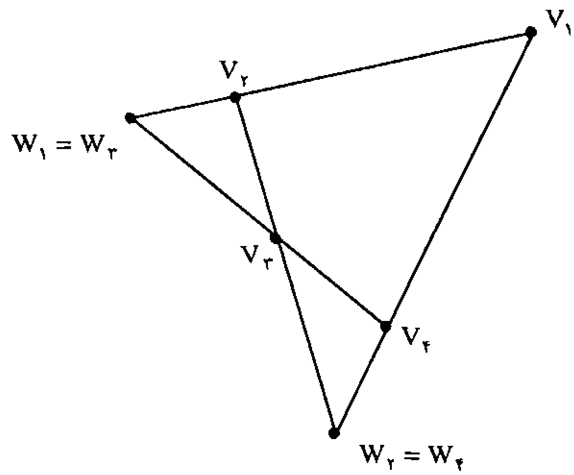
$$\prod_{i=1}^{5}\left[\frac{W_i \quad W_{i+1}}{V_i \quad V_{i+2}}\right] \qquad (۱۱)$$

به پنج ضلعی Pی انتخاب شده وابسته است؛ به رغم این واقعیت که یک چنین حاصل‌ضربی، در وهلهٔ اوّل، بسیار شبیه حاصل‌ضربهایی به نظر می‌رسد که در گزارهٔ اولّیهٔ قضیهٔ هواهِن رخ می‌دهند. این موضوع را که (۱۱) ثابت نیست، می‌توان با آزمایش مختصری با مثالهای عددی نشان داد. در واقع، گمان می‌کنیم حاصل‌ضرب (۱۱) بیشترین مقدار خود را زمانی به‌دست می‌آورد که $P = [v_1, \ldots, v_5]$ نگارهٔ «آفینی» از یک پنج ضلعی منتظم باشد. اثبات این گزاره را در دست نداریم و بررسی و بحث مسائلی از این قبیل نیز در این‌جا مناسب به نظر نمی‌رسد.

ملاحظهٔ این موضوع مشکل نیست که قضایای ۴ و ۵ شامل تمام حالتهای مذکور در مقدمهٔ بخش (۴) اند؛ یعنی حالتهایی که در آنها حاصل‌ضرب n عامل، مقدار ثابتی را اختیار می‌کند که به انتخاب چندضلعی اولّیهٔ P وابسته نیست. اگر تحقیقاتمان به بررسی حاصل‌ضربهای ۲n ، ۳n ، ۴n و ... عامل (که هر یک از آنها خارج قسمت طولهای قطعه خطهای واقع در یک n ضلعی است) تعمیم دهیم، آن گاه امکانات بسیار دیگری به وجود می‌آیند. البته خواننده، خود می‌تواند به بررسی این حالتها بپردازد، اما نتایج بیان شده در این‌جا و قدرت اصل سطح را در اثبات نتایجی از

این قبیل نشان می‌دهند.

حالت ۴ = n ، ۲ = j و ۱ = k قضیهٔ (۵) شایستهٔ تذکری خاص است. این حالت را در شکل (۱۲) نشان داده‌ایم و آشکار است که می‌توان آن را به عنوان بیان کنندهٔ این موضوع تعبیر کرد که حاصل‌ضرب نسبتهای معیّنی از طولهای واقع در یک چهارضلعی کامل برابر ۱ است. گرچه چند ضلعیهای کامل، طی دو قرن، به طور کامل مورد بررسی قرار گرفته‌اند، نتوانستیم هیچ گونه ذکری از این نتیجهٔ خاص دربارهٔ آنها بیابیم.



شکل (۱۲). حالت ۴ = n ، ۲ = j ، ۱ = k از قضیهٔ دوم هواهِن. حاصل‌ضرب چهار نسبت $[V_i\ W_i\ /\ W_{i+2}\ V_{i+1}]$ (به ازای ۱،۲،۳،۴ = i) برابر ۱ است.

با توجه به این که جمیع قضیه‌های این مقاله، بسیار ساده و اثباتهای آنها بسیار مقدماتی‌اند، ممکن است شگفت‌آور به نظر برسد که این قضیه‌ها چرا دو یا سه قرن پیش کشف نشده‌اند. این موضوع را می‌توان از لحاظی با این واقعیت توضیح داد که مؤلّفان پیشین، برخلاف ما، از امتیاز روشهای جدید برخوردار نبوده‌اند. البته، زمانی که ما بررسیمان را آغاز کردیم، از قضیه‌های «سِوا» و «مِنلائوس» در مورد مثلثها آگاه بودیم ؛ اما این قضیهٔ «هواهِن» بود که نشان داد ممکن است بررسی حاصل‌ضربهای نسبتهای دیگر در n ضلعیهای با ۳ < n مفید باشد. با استفاده از برنامه‌ای ساده در نرم افزار متمتیکا «Mathematica» توانستیم مقادیر حاصل‌ضربهای دوری نسبتهای گوناگون را در مورد تعداد بسیاری از n ضلعیها با صحّت محاسبه کنیم و نتایج حاصلهٔ قضایای ۱ تا ۵ مان را مطرح کنیم. (بعدها کشف کردیم که صورتهای n ضلعی قضایای سِوا و مِنلائوس شناخته شده‌اند و می‌توان آنها را در کتابهای مزبور یافت. اما تاکنون نتوانسته‌ایم نتیجه‌ای بیابیم که بتوان آن را حتی به صورت حالت خاصّی از قضیهٔ «خود تَراگردی مان» «Selftrans versality Theorem» تعبیر کرد.) ملاحظه کردیم که «اصل سطح» روشی ساده در اثبات (به مفهوم سنّتی) جمیع نتایجی است که به تجربه کشف شده‌اند. گذشته از این، اصل مزبور، علاوه بر این که توانایی بیان قضایای مربوط به n ضلعیها را با n دلخواه به‌دست می‌دهد، امکانهای دیگری را نیز مطرح می‌نماید و علاوه بر این، به تعمیمهای با بعدهای بالاتری منجر می‌شود که در جای دیگر مطرحشان خواهیم کرد.

تبصره: پس از تکمیل دستنوشته مقاله از باپتیست «Baptist» [۱, P.۶۱] ، دریافتیم که «اصل سطح» ـ البته بدون ذکر هیچ گونه نام خاصّی ـ در اثبات سریل «Crelle» از قضیهٔ سِوا [۵] به کار رفته، اما به فایدهٔ عمومی آن توجه نشده و این اصل، با تمام فواید عملی‌اش، به طور کامل در بوتهٔ فراموشی سپرده شده است.

اعداد جالب ریاضی

$(۱۵۷)^{۲} = ۲۴۶۴۹$
$(۱۵۸)^{۲} = ۲۴۹۶۴$

$(۹۱۳)^{۲} = ۸۳۳۵۶۹$
$(۹۱۴)^{۲} = ۸۳۵۳۹۶$

$۱^{۳} + ۵^{۳} + ۳^{۳} = ۱۵۳$

$۳^{۳} + ۷^{۳} + ۰^{۳} = ۳۷۰$

$۳^{۳} + ۷^{۳} + ۱^{۳} = ۳۷۱$

$۴^{۳} + ۰^{۳} + ۷^{۳} = ۴۰۷$

$(۱۰۳)^{۲} = ۱۰۶۰۹$
$(۳۰۱)^{۲} = ۹۰۶۰۱$

$(۱۱۲)^{۲} = ۱۲۵۴۴$
$(۲۱۱)^{۲} = ۴۴۵۲۱$

$(۱۳)^{۲} = ۱۶۹$
$(۱۴)^{۲} = ۱۹۶$

$(۱۱۳)^{۲} = ۱۲۷۶۹$
$(۳۱۱)^{۲} = ۹۶۷۲۱$

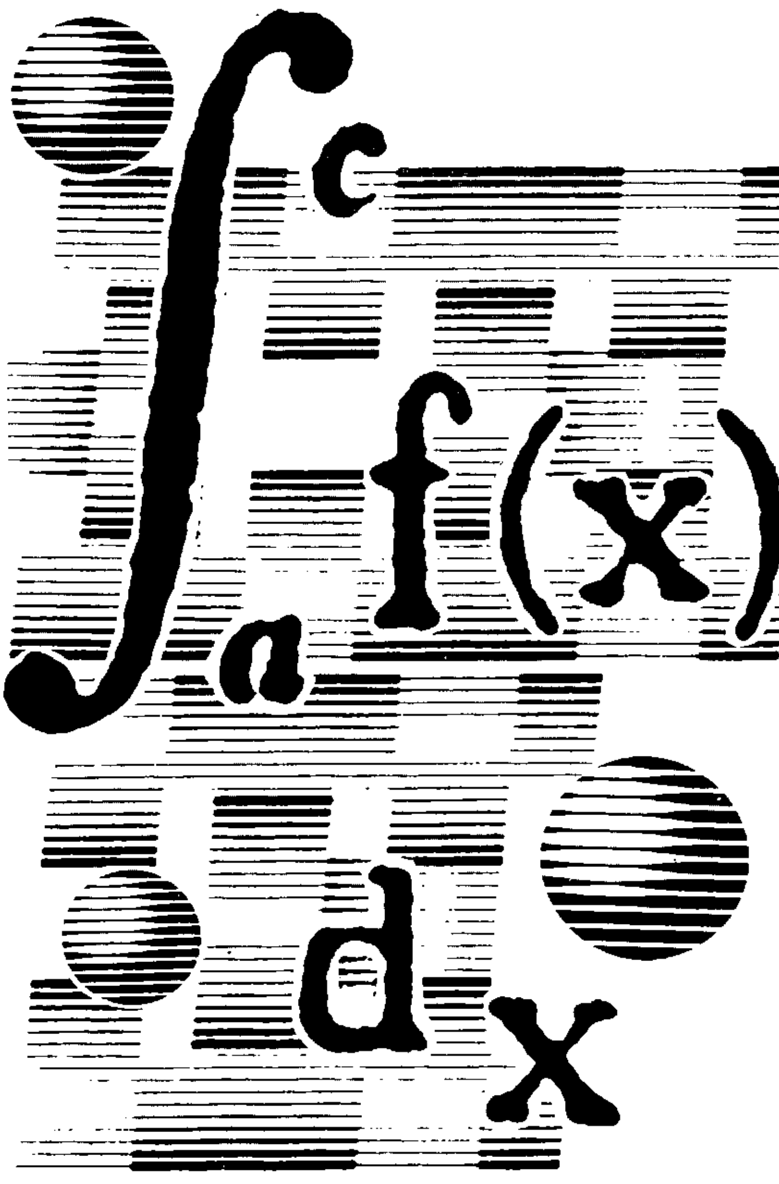
$(۱۲۲)^{۲} = ۱۴۸۸۴$
$(۲۲۱)^{۲} = ۴۸۸۴۱$

ترجمه: صمد پوراسدا...

انتگرال کسرهای گویا

• سید محمدرضا هاشمی موسوی

(قسمت اول)



تجزیهٔ کسرهای گویا

در این مقاله، ابتدا نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان هر کسر گویا را به صورت مجموع چند کسر ساده نوشت. یادآور می‌شویم کسرهایی را **گویا** می‌نامیم که صورت و مخرج آنها یک عبارت چند جمله‌ای به صورت $p(x)=ax^n+bx^{n-1}+\ldots+k$ باشد؛ **درحالتی که صورت و مخرج کسر، کسرهایی گویا باشند، می‌توان با ضرب صورت و مخرج در کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) مخرج‌ها به یک کسر گویا رسید.**

به طور مثال، کسرهایی مانند:

$$\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+2}\ ,\ \frac{\cos^2 x+\cos x}{3\sin x+x}\ ,\ \frac{e^x+x}{x^2+\ln x}\ ,\ \frac{\sqrt{x}+x^2}{x^3+x+1}$$

و ... را کسر گویا نمی‌نامیم. ولی کسرهایی نظیر: $\frac{x^3-x+1}{x^2+x+1}$ ، $\frac{x^2+x}{x^3-3x+1}$ ، $\frac{x^7+x-1}{x^5+x^4}$ و ... را کسرهای گویا می‌نامیم.

همچنین $\dfrac{x+1}{\frac{x-1}{x^2+1}}$ ، $\dfrac{\frac{x}{x^4+1}}{\frac{x^3-x+1}{x^2+4}}$ و کسرهایی نظیر اینها را می‌توان به کسر گویا تحویل داد:

$$\frac{x+1}{\frac{x-1}{x^2+1}}=\frac{(x+1)(x^2+1)}{x-1}=\frac{x^3+x^2+x+1}{x-1}$$

$$\frac{\frac{x}{x^4+1}}{\frac{x^3-x+1}{x^2+4}}=\frac{(x^2+4)(x^4+1)\frac{x}{x^4+1}}{(x^2+4)(x^4+1)\frac{x^3-x+1}{x^2+4}}=$$

$$=\frac{x^3+4x}{x^7-x^5+x^4+x^3-x+1}$$

تعریف: کسر $\frac{p(x)}{q(x)}$ را یک کسر گویا می‌نامیم اگر $p(x)$ و $q(x)$ یک چند جمله‌ای برحسب x باشند. مانند:

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{ax^n+bx^{n-1}+\ldots+k}{a'x^m+b'x^{m-1}+\ldots+k'}$$

هر کسر گویا را می‌توان به صورت مجموع کسرهای ساده‌تر

نوشت. به این ترتیب محاسبهٔ انتگرال یک کسر گویا منجر به محاسبهٔ انتگرال کسرهای گویای ساده‌تری خواهد شد. به طور مثال به برابری زیر توجه کنید :

$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x^2-1}$$

در این‌جا این سؤال را مطرح می‌کنیم که اگر $\frac{2}{x^2-1}$ داده شده باشد، چگونه می‌توان آن را به صورت مجموع دو کسر نوشت؟

برای نوشتن $\frac{2}{x^2-1}$ به مجموع دو کسر، ابتدا مخرج کسر را به عاملهای درجهٔ اوّل تجزیه می‌کنیم و سپس پارامترهای A و B را چنان تعیین می‌کنیم که اتّحاد زیر برقرار باشد :

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$

برای تعیین A و B می‌توان به دو روش عمل کرد.

روش اوّل:

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{(A+B)x+A-B}{x^2-1}$$

چون مخرجهای دو کسر برابرند، باید صورتهای آنها نیز متحد باشند :

$$(A+B)x+A-B\equiv 2$$

بنابراین : $\begin{cases}A+B=0\\A-B=2\end{cases}\Rightarrow A=1\ ,\ B=-1$

روش دوم:

عبارت $\frac{2}{x^2-1}$ را به $F(x)$ نشان می‌دهیم، و سپس ریشه‌های مخرج کسر مورد نظر را محاسبه می‌کنیم. در این صورت، پارامترها از رابطه‌های زیر به دست می‌آیند :

$$F(x)=\frac{2}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$

$$A=(x-1)F(x)\Big|_{x=1}\qquad B=(x+1)F(x)\Big|_{x=-1}$$

$$A=\frac{2}{x+1}\Big|_{x=1}=\frac{2}{1+1}=1\ ,\quad B=\frac{2}{x-1}\Big|_{x=-1}=\frac{2}{-1-1}=-1$$

درستی مطلب فوق را به صورت زیر بررسی می‌کنیم :

$$F(x)=\frac{2}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}\qquad(1)$$

برای محاسبهٔ A دو طرف برابری (۱) را در مخرج کسر $\frac{A}{x-1}$ یعنی $x-1$ ضرب می‌کنیم :

$$(x-1)F(x)=(x-1)\frac{2}{x^2-1}=(x-1)\left[\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}\right]$$

$$(x-1)F(x)=\frac{2}{x+1}=A+\frac{(x-1)B}{x+1}\qquad(2)$$

حال دو طرف برابری (۲) را به ازای $x=1$ محاسبه می‌کنیم :

$$(x-1)F(x)\Big|_{x=1}=\frac{2}{x+1}\Big|_{x=1}=\left(A+\frac{(x-1)B}{x+1}\right)\Big|_{x=1}$$

$$\Rightarrow (x-1)F(x)\Big|_{x=1}$$

$$=\frac{2}{1+1}=A+\frac{(0)B}{1+1}\Rightarrow A=(x-1)F(x)\Big|_{x=1}=1$$

به همین ترتیب برای محاسبه B دو طرف برابری (۱) را در مخرج کسر $\frac{B}{x+1}$ یعنی $x+1$ ضرب می‌کنیم :

$$(x+1)F(x)=(x+1)\frac{2}{x^2-1}=(x+1)\left[\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}\right]$$

$$(x+1)F(x)=\frac{2}{x-1}=\frac{(x+1)A}{x-1}+B\qquad(3)$$

حال، دو طرف برابری (۳) را به ازای $x=-1$ محاسبه می‌کنیم :

$$(x+1)F(x)\Big|_{x=-1}=\frac{2}{x-1}\Big|_{x=-1}=\left(\frac{(x+1)A}{x-1}+B\right)\Big|_{x=-1}$$

$$\Rightarrow (x+1)F(x)\Big|_{x=-1}=\frac{2}{-1-1}=\frac{(0)A}{-1-1}+B$$

$$\Rightarrow B=(x+1)F(x)\Big|_{x=-1}=-1$$

مثال: کسر زیر را به صورت حاصل جمع چند کسر ساده بنویسید:

$$F(x)=\frac{x^4+1}{x(x^2-1)(x^2-4)}$$

حل: فرض می‌کنیم $F(x)$ به صورت مجموع چند کسر ساده نوشته شود:

$$F(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x-2}+\frac{E}{x+2}$$

حال، پارامترهای A ، B ، C ، D و E را از رابطه‌های زیر محاسبه می‌کنیم:

$$A=xF(x)\Big|_{x=0}=\frac{x^4+1}{(x^2-1)(x^2-4)}\Bigg|_{x=0}$$

$$=\frac{1}{(-1)(-4)}=\frac{1}{4}\Rightarrow \boxed{A=\frac{1}{4}}$$

$$B=(x-1)F(x)\Big|_{x=1}=\frac{x^4+1}{x(x+1)(x^2-4)}\Bigg|_{x=1}$$

$$=\frac{2}{(2)(-3)}=\frac{-1}{3}\Rightarrow \boxed{B=\frac{-1}{3}}$$

$$C=(x+1)F(x)\Big|_{x=-1}=\frac{x^4+1}{x(x-1)(x^2-4)}\Bigg|_{x=-1}$$

$$=\frac{2}{(-1)(-2)(-3)}=\frac{-1}{3}\Rightarrow \boxed{C=\frac{-1}{3}}$$

$$D=(x-2)F(x)\Big|_{x=2}=\frac{x^4+1}{x(x^2-1)(x+2)}\Bigg|_{x=2}$$

$$=\frac{17}{(2)(3)(4)}=\frac{17}{24}\Rightarrow \boxed{D=\frac{17}{24}}$$

$$E=(x+2)F(x)\Big|_{x=-2}=\frac{x^4+1}{x(x^2-1)(x-2)}\Bigg|_{x=-2}$$

$$=\frac{17}{(-2)(3)(-4)}=\frac{17}{24}\Rightarrow \boxed{E=\frac{17}{24}}$$

بنابراین:

$$F(x)=\frac{x^4+1}{x(x^2-1)(x^2-4)}$$

$$=\frac{1}{4x}-\frac{1}{3(x-1)}-\frac{1}{3(x+1)}+\frac{17}{24(x-2)}+\frac{17}{24(x+2)}$$

توجه: لازم به توضیح است که حل این مسأله به روش اول (به کمک اتحاد) به حل یک دستگاه پنج معادلهٔ پنج مجهولی (A و B ، C ، D ، E) منجر می‌شود که بسیار وقت‌گیر و از نظر محاسبه بسیار پرحجم است. به همین دلیل برای کاهش در وقت و عملیات روش دوم توصیه می‌شود.

تذکر: در توابع گویا اگر درجهٔ صورت بیشتر از درجهٔ مخرج باشد، با تقسیم صورت بر مخرج به یک چند جمله‌ای و کسر دیگری خواهیم رسید که درجهٔ صورت این کسر از مخرج آن کمتر خواهد بود. در توابع گویا به طور عمومی می‌توان مخرج آنها را به حاصل ضرب چند عبارت درجهٔ یک یا دو یا توانهایی از آنها تحویل کرد.

مثال: کسر زیر را به صورت حاصل جمع چند کسر ساده و یک چند جمله‌ای بنویسید:

$$\frac{5x^3+2}{x^2-1}$$

حل: چون درجهٔ صورت بیشتر از درجهٔ مخرج است، صورت را بر مخرج تقسیم کرده، خارج قسمت و باقی‌مانده را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{5x^3+x^2+1}{x^2-1}=5x+1+\frac{5x+2}{x^2-1}$$

حال، عبارت $\frac{5x+2}{x^2-1}$ را به $F(x)$ نمایش می‌دهیم؛ و چون درجهٔ صورت آن کمتر از درجهٔ مخرج و تحویل ناپذیر است، $F(x)$ را به مجموع دو کسر ساده می‌نویسیم:

$$F(x)=\frac{5x+2}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$

$$A=(x-1)F(x)\Big|_{x=1}=\frac{5x+2}{x+1}\Bigg|_{x=1}=\frac{7}{2}\Rightarrow \boxed{A=\frac{7}{2}}$$

$$B=(x+1)F(x)\Big|_{x=-1}=\frac{5x+2}{x-1}\Bigg|_{x=-1}=\frac{3}{2}\Rightarrow \boxed{B=\frac{3}{2}}$$

بنابراین:

$$\frac{5x^3+x^2+1}{x^2-1}=5x+1+\frac{7}{2(x-1)}+\frac{3}{2(x+1)}$$

همان‌طورکه در این مثال دیدیم، اگر کسر گویای $\frac{p(x)}{q(x)}$ را در نظر بگیریم.(($p(x)$ و $q(x)$ یک چند جمله‌ای برحسب x هستند) و درجهٔ $p(x)$ بیش از درجهٔ $q(x)$ باشد، آنگاه

چندجمله‌ایهای $s(x)$ و $r(x)$ وجود دارند، به طوری که داشته باشیم:
$$p(x)=q(x)s(x)+r(x)$$
که در آن درجهٔ $r(x)$ کمتر از درجهٔ $q(x)$ است.

بنابراین:
$$\int\frac{p(x)}{q(x)}dx=\int s(x)dx+\int\frac{r(x)}{q(x)}dx$$
چون $s(x)$ یک چند جمله‌ای است، محاسبهٔ $\int s(x)dx$ بسیار آسان است، پس محاسبهٔ $\int\frac{p(x)}{q(x)}dx$ به محاسبهٔ $\int\frac{r(x)}{q(x)}dx$ منجر می‌شود که در آن درجهٔ $r(x)$ از درجهٔ $q(x)$ کوچکتر است. بنابراین کافی است فقط حالتی را در نظر بگیریم که درجهٔ $p(x)$ کمتر از درجهٔ $q(x)$ باشد.

پس، **قرارداد** می‌کنیم، بعد از این کسرهایی را در نظر بگیریم که درجهٔ صورت آنها کمتر از درجه مخرج، و علاوه بر آن، کسر تحویل‌ناپذیر باشد (یعنی صورت و مخرج کسر ریشه یا ریشه‌های مشترک نداشته باشند).

تعریف: کسرهایی گویا به صورتهای زیر را، که در آنها a ، A ، B ، p و q عددهای حقیقی ثابت و $n\in\mathbb{N}$ باشد، کسرهای ساده می‌نامیم:

$$۱)\ \frac{A}{(x-a)^n}\qquad ۲)\ \frac{Ax+B}{(x^۲+px+q)^n}\ ,p^۲-۴q<۰$$

در کسر سادهٔ نوع دوم، فرض می‌شود که مبین مخرج $(p^۲-۴q)$ منفی باشد؛ زیرا در غیر این صورت مخرج، حاصل ضرب دو عبارت خطی می‌شود.

قضیه: اگر a یک ریشهٔ حقیقی مرتبهٔ n ام مخرجِ کسر گویای $\frac{F(x)}{g(x)}$ باشد، یعنی،
$$g(x)=(x-a)^n t(x)$$
و $t(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر نباشد، یا $t(a)\neq ۰$، آنگاه کسرِ گویایِ $\frac{F(x)}{g(x)}$ را می‌توان به صورت مجموع دو کسر سادهٔ زیر نوشت:
$$\frac{F(x)}{g(x)}=\frac{A}{(x-a)^n}+\frac{F_۱(x)}{(x-a)^{n-۱}t(x)}\qquad(۱)$$
در برابری (۱)، $A\neq ۰$ عددی ثابت است و درجهٔ $F_۱(x)$ از درجهٔ $(x-a)^{n-۱}t(x)$ کوچکتر است.

برهان: فقط به ذکر یک راهنمایی برای اثبات اکتفا کرده و تکمیل اثبات را به عهدهٔ خودتان واگذار می‌کنیم کسر $\frac{F(x)}{g(x)}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{F(x)}{g(x)}=\frac{F(x)}{(x-a)^n t(x)}=\frac{At(x)+F(x)-At(x)}{(x-a)^n t(x)}$$
$$=\frac{A}{(x-a)^n}+\frac{F(x)-At(x)}{(x-a)^n t(x)}$$
رابطهٔ بالا برای هر $A\in\mathbb{R}$ برقرار است، در اینجا A را چنان تعیین کنید که چند جمله‌ای $F(x)-At(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر باشد.

نتیجه: اگر قضیهٔ بالا را n مرتبه برای کسر $\frac{F_۱(x)}{(x-a)^{n-۱}t(x)}$ نیز به کار ببریم، خواهیم داشت:

$$\frac{F(x)}{g(x)}=\frac{A_۱}{(x-a)^n}+\frac{A_۲}{(x-a)^{n-۱}}+\dots+\frac{A_n}{(x-a)}+\frac{F_n(x)}{t(x)}\quad(۲)$$

در برابری (۲) کسر $\frac{F_n(x)}{t(x)}$، کسری گویا و تحویل‌ناپذیر است. اگر $t(x)$ ریشه‌های دیگری غیر از a داشته باشد، قضیهٔ اخیر را برای این ریشه‌ها نیز می‌توان به کار برد.

مثال: کسر $\frac{x+۱}{(x-۱)^۲(x+۲)}$ را به مجموع چند کسر ساده بنویسید.

حل: با توجه به قضیه، می‌توان فرض کرد که کسر مورد نظر به مجموع چند کسر ساده نوشته شود:

$$\frac{x+۱}{(x-۱)^۲(x+۲)}=\frac{A_۱}{(x-۱)^۲}+\frac{A_۲}{(x-۱)}+\frac{A_۳}{x+۲}$$
$$A_۱=\left.\frac{x+۱}{x+۲}\right|_{x=۱}=\frac{۲}{۳}\ ,\quad A_۳=\left.\frac{x+۱}{(x-۱)^۲}\right|_{x=-۲}=\frac{-۱}{۹}$$
برای محاسبهٔ $A_۲$ کافی است عددی را از مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{-۲,۱\}$ برای x اختیار کنیم و در برابری زیر قرار دهیم:
$$\frac{x+۱}{(x-۱)^۲(x+۲)}=\frac{۲}{۳(x-۱)^۲}+\frac{A_۲}{(x-۱)}-\frac{۱}{۹(x+۲)}\qquad(۱)$$

برابری (۱) به ازای $x = 0$، به معادلهٔ یک مجهولی زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{1}{(-1)^2(2)} = \frac{2}{3(-1)^2} + \frac{A_2}{(-1)} - \frac{1}{9(2)} \Rightarrow A_2 = \frac{1}{9}$$

بنابراین:

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{2}{3(x-1)^2} + \frac{1}{9(x-1)} - \frac{1}{9(x+2)}$$

نکتهٔ مهم: اگر در کسرِ گویای $\frac{F(x)}{G(x)}$ داشته باشیم:

$$G(x) = (x^2+px+q)^m T(x)$$

و $T(x)$ بر x^2+px+q بخش‌پذیر نباشد.

آنگاه کسر گویای $\frac{F(x)}{G(x)}$ به مجموع دو کسر ساده و گویای زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{kx+s}{(x^2+px+q)^m} + \frac{u(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}T(x)}$$

در این رابطه، $T(x)$ یک چند جمله‌ای است که درجهٔ آن از درجهٔ چند جمله‌ای $(x^2+px+q)^{m-1}T(x)$ کمتر است، و x^2+px+q ریشهٔ حقیقی ندارد ($p^2-4q<0$).

از اثبات این قضیه صرف‌نظر می‌شود.

نتیجه: اگر نکته و قضیهٔ قبل را برای کسر گویای $\frac{F(x)}{f(x)}$ با فرض:

$$f(x) = (x-a)^n \dots (x^2+px+q)^m$$

به کار ببریم، خواهیم داشت:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^n} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-1}} + \dots + \frac{An}{x-a} + \dots + \frac{k_1x+s_1}{(x^2+px+q)^m} + \frac{k_2x+s_2}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \dots + \frac{k_mx+s_m}{x^2+px+q}$$

در این برابری ضرایب ثابت A_i، k_i، s_i و ... را چنان باید تعیین کنیم که برابری به یک اتحاد تبدیل شود. برای این منظور، می‌توان پس از مخرج مشترک گرفتن بین کسرها، ضرایب توانهای برابر x را در صورتها برابر هم قرار داد و از معادله‌های به دست آمده، ضرایب فوق را حساب کرد. روش دیگر برای محاسبهٔ این ضرایب، آن است که به x مقادیر دلخواه و مناسب بدهیم، تا معادله‌هایی بین ضرایب بالا به دست آیند و از حل این معادله‌ها، ضرایب را حساب کنیم.

مثال: کسر زیر را به صورت مجموع چند کسر ساده بنویسید.

$$N(x) = \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{-3x^5+5x^4-5x^3+6x^2-2x+3}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$$

حل: با توجه به قضیه، می‌توان فرض کرد که کسر مورد نظر به مجموع چند کسر ساده به صورت زیر نوشته شود:

$$N(x) = \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{k_1x+s_1}{(x^2+1)^2} + \frac{k_2x+s_2}{x^2+1}$$

$$A_1 = (x-1)^2 N(x)\Big|_{x=1}$$

$$= \frac{-3x^5+5x^4-5x^3+6x^2-2x+3}{(x^2+1)^2}\Big|_{x=1} = 1$$

برای محاسبهٔ ضریبهای دیگر، می‌توان از روشهایی که بیان شد استفاده کرد و به نتایج زیر رسید:

$A_1 = 1$ ، $A_2 = -2$ ، $K_1 = 1$ ، $K_2 = -1$ ، $S_1 = S_2 = 0$

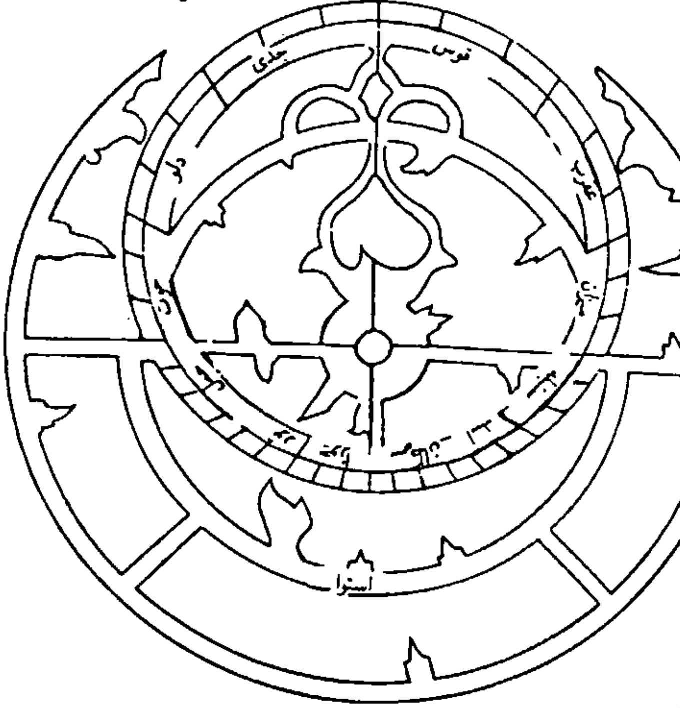
بنابراین، کسر گویای $\frac{F(x)}{f(x)}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + \frac{x}{(x^2+1)^2} - \frac{x}{x^2+1}$$

تمرین: کسر گویای $\frac{x-1}{(x^2+1)^3(x^2+x+1)^2(x+1)^4}$ را به‌صورت مجموع چند کسر ساده بنویسید.

راهنمایی: از قضایای پیش استفاده کنید.

◇ادامهٔ مقاله در شمارهٔ آینده



گزارشی از اوّلین سمینار تاریخ ریاضیات در ایران

نخستین سمینار «تاریخ ریاضیات در ایران» در تاریخ ۶ و ۷ اسفند ماه ۱۳۷۶ در شهر «بندرعباس» (دانشگاه هرمزگان) تشکیل شد.

در این سمینار که در آستانهٔ سال جهانی ریاضیات (سال ۲۰۰۰) و در راستای هدفهای سال جهانی ریاضیات تشکیل شد، بسیاری از ریاضیدانان، پیشکسوتان ریاضی، علاقه‌مندان به ریاضیات و تنی چند از میهمانان خارجی شرکت داشتند.

برگزارکنندگان این سمینار، دانشگاه هرمزگان، دانشگاه صنعتی امیرکبیر و انجمن ریاضی ایران بودند که نهایت سعی و تلاش خود را برای هر چه بهتر و باشکوه‌تر برگزار کردن این سمینار، به عمل آورده بودند.

برگزاری چنین سمینارهایی در کشور ریاضیدانان بزرگی همچون خوارزمی، خیام، بیرونی، ماهانی، کاشانی و ... جای بسی مباهات و خوشحالی دارد و به اعتقاد کمیتهٔ علمی سمینار: «هدف از تشکیل چنین سمینارهایی ــ که امیدواریم تکرار شود و تداوم یابد ــ صرفاً بیان کارهای این بزرگان و بالیدن به وجود آنها نیست؛ بلکه افروختن چراغی است که الگوی جوانان فرهیختهٔ امروز باشد، تا بار دیگر نور پرفروغ دانش ریاضی بر این سرزمین، درخشان‌تر از گذشته، تابیدن گیرد.»

این سمینار در صبح روز ۶ اسفندماه در محل ساختمان مرکزی دانشگاه هرمزگان افتتاح شد. در جلسهٔ افتتاحیه، مسؤولان دانشگاه و کمیتهٔ علمی سمینار، ضمن خوش‌آمدگویی به حاضران و تشریح هدفهای سمینار، برنامه‌های سمینار را نیز بازگو کردند.

از جمله کسانی که صحبتهای بسیار شیوا و قابل استفاده ارائه دادند، جناب حجّت‌الاسلام والمسلمین «حاج آقا نعیم آبادی» امام جمعه و نمایندهٔ ولی فقیه در بندرعباس بودند که ضمن بیان مطالبی دربارهٔ ریاضیات و نقش آن در جامعه، در مورد سال جهانی ریاضیات و بهره‌برداریهای احتمالیِ جهان غرب از این سال در جهت منافع و هدفهای خودشان، به مسؤولان، دست‌اندرکاران و پیشکسوتان ریاضیات، پیشنهادهایی را ارائه کردند.

همچنین در جلسهٔ افتتاحیه، جناب آقای دکتر «احمد شرف‌الدین»، مسؤول گروه ریاضی دانشگاه هرمزگان، سخنرانی

بسیار جالب و قابل استفاده‌ای ایراد کرد که به دلیل اهمیت آن، متن این سخنرانی را به طور کامل برای مطالعه و استفادهٔ خوانندگان عزیز می‌آوریم.

این سمینار در بعد از ظهر روز ۷ اسفندماه و طی یک میزگرد با حضور مسؤولان و دست‌اندرکاران سمینار، جهت نتیجه‌گیری و جمع‌بندی مطالب و نیز ترسیم خط مشی آینده برای تشکیل چنین سمینارهایی، به کار خود خاتمه داد. در جلسهٔ اختتامیه تصمیمهای مهمّی اتخاذ شد که از جملهٔ این مصوّبات، تشکیل یک کمیتهٔ ثابت در طول سال تا برگزاری سمینار بعدی بود تا جوابگوی سؤالها و پذیرای مقاله‌های علاقه‌مندان باشد.

لازم است از همهٔ مسؤولان و دست‌اندرکاران سمینار که به نحوی در برگزاری این سمینار نقش داشتند، کمال تشکر را به عمل آورده و آرزو می‌کنیم خداوند توفیق و موفقیت روزافزون به آنان عطا نماید.

متن کامل سخنرانی آقای دکتر احمد شرف‌الدین در پی می‌آید:

بسم‌الله‌الرحمن‌الرحیم

موضوع این کنفرانس، «تاریخ ریاضیات ایران» است، موضوع بسیار جالب و ارزنده‌ای است. فرهنگ ایران بسیار غنی و باشکوه است. طی قرنها از این سرزمین دانشمندان، شاعران و فلاسفهٔ بزرگی برخاسته‌اند. معرفی بزرگان این سرزمین، اقدامی مهم در جهت مبارزه با «تهاجم فرهنگی» است. باید دانست که فرهنگ غرب با ارزش است؛ «ویکتور هوگو»ها، «کانت»ها، «دکارت»ها، «نیوتن»ها، «اینشتین»ها و ... فرهنگ غرب را می‌سازند. آنچه ما به عنوان مبارزه با تهاجم فرهنگی می‌گوییم، مبارزه با جنبه‌های منفی فرهنگ غرب است؛ مانند بعضی از فیلمهای غرب که مبتذل و گمراه کننده‌اند. هنگامی که جوان ایرانی از فرهنگ غنی و باشکوه سرزمین خود آگاه شود، جنبه‌های منفی فرهنگ غرب را نمی‌پذیرد.

در ارائه تاریخ ریاضی و به طور کلی «تاریخ علم»، باید به صلح جهانی توجه کامل داشت. در دوره‌های مختلف تاریخ که ستمگران و زورمندان، اقوام را علیه یکدیگر تحریک می‌کردند و به جنگ با یکدیگر وامی‌داشتند، دانشمندان از اقوام مختلف در مسائل علمی با یکدیگر صمیمانه همکاری می‌کردند و هر یک از آنان، تحقیقات و نظرات خود را می‌نوشت و برای دانشمندان دیگر که در کشوری دوردست می‌زیست، می‌فرستاد. واژه paper که در زبان انگلیسی به معنای «نامه» است، در معنای اثر تحقیقی که به صورت نامه‌ای ارسال شده است، به کار می‌رود. واژهٔ paper در معنای اخیر، درست ترجمهٔ واژهٔ «رساله» است که مشتق از واژهٔ «ارسال» به معنای «فرستادن» است. دانشمندان قدیم، تحقیق خود را در نامه‌ای می‌نوشتند و برای دانشمندی دیگر ارسال می‌کردند. این واژهٔ رساله، به تنهایی نشان می‌دهد که چگونه دانشمندان از اقوام مختلف در اعصار تاریخ، با یکدیگر همکاری داشتند. این امر، روح صلح دوستی آنان را نشان می‌دهد.

ما ایرانیان که در طول تاریخ همواره نسبت به اقوام گوناگون، با نظر برادری و صمیمیت می‌نگریستیم، باید در تدریس تاریخ علم و ارائه آن، همواره صلح جهانی را مدّ نظر قرار دهیم و بر این مطلب تکیه کنیم که همکاری دانشمندان اقوام مختلف، از ارکان مهم «صلح» است. ایرانیان ۲۵۰۰ سال پیش، منشور حقوق بشر را تدوین کردند؛ در حالی که در اروپا، پس از جنگ بین‌الملل به چنین کاری دست زدند. ادبیات ایران سرشار از روح عرفانی و «عشق» نسبت به ملتهاست؛ به این شعر سعدی توجه کنیم:

به جهان خرّم از آنم که جهان خرّم از اوست
عاشقم بر همه عالم که همه عالم از اوست

عشق نسبت به ملتها، همواره از موضوعهای اساسی ادبیات ایران بوده است. در سالهای اخیر، ایران برای استقرار صلح در «تاجیکستان» کوشش بسیار نمود و بتازگی دبیر کل سازمان ملل، کوششهای ایران را برای استقرار صلح در تاجیکستان تمجید نمود. در این سالها، ایران کوشش بسیار کرده است تا بین کشورهای ساحل «خلیج فارس»، روابط صمیمانه و صلح‌جویانهٔ مستمر حاصل شود.

مطلب دیگری که می‌خواهم عرض کنم، این است که در معرفی تاریخ ریاضیات ایران، لازم است همراه با معرفی دانشمندانی مانند خوارزمی، ابوریحان، کاشانی و ... آثار استادان نقشگر ایرانی در کاشیکاریهای اماکن متبرکه و قالیهای نفیس عرضه شود. معرفی این آثار در کنار آثار ریاضیدانان ایرانی، بسیار اهمیت دارد؛ به سه دلیل:

۱ـ **نقوش هندسی همدید (synoptiqire)** اند یعنی تمام اجزای یک اثر با هم دیده می‌شوند و این بسیار جالب

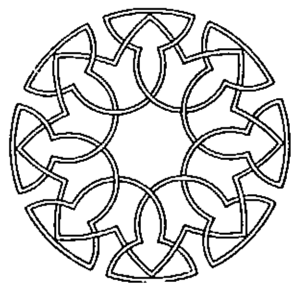
است. برای مطالعهٔ یک مسأله ریاضی یا درک یک قطعهٔ موسیقی، ساعتی وقت لازم است؛ در صورتی که هر یک از کاشیکاریهای اماکن متبرکه و نقشهای قالیهای نفیس، تنها در چند ثانیه، اثر خود را بر بیننده می‌گذارد و او را از قدرت تخیّل هندسی استاد نقشگر ایرانی، به اعجاب وامی‌دارد.

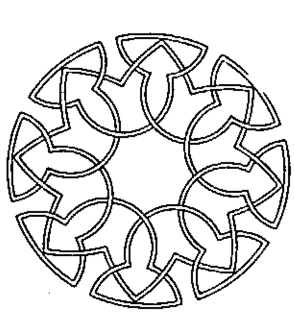
۲ـ نقوش هندسی کاشیکاریهای اماکن متبرکه و قالیهای نفیس، هندسه‌ای است که با زبان هنر بیان شده است و چون «هنر زبان همگانی جهان است» می‌توان این هندسه را در افق بسیار گسترده‌ای عرضه کرد.

در این جلسه، لازم می‌دانم از آقای «ابوالقاسم قربانی» با احترام یاد کنم. ایشان مدت چهل سال به مطالعه و پژوهش در تاریخ ریاضی ایران پرداختند و در این زمینه، کتابهای متعدّدی منتشر کرده‌اند و این، خدمت فرهنگیِ بزرگی است. اگر در مواردی می‌گوییم:

هرگز حدیث حاضر غایب شنیده‌ای
من در میان جمع و دلم جای دیگر است

در این مورد باید بگوییم «هرگز حدیث غایب حاضر شنیده‌ای»؛ آقای قربانی در این جلسه حضور ندارند؛ ولی برای ما که کارهای ایشان را خوانده‌ایم و ارزش آنها را می‌دانیم، حضور ایشان را در بین خود احساس می‌کنیم.





تفریح اندیشه ۴

مهرداد روی پلهٔ وسط نردبانی که به دیوار تکیه دارد ایستاده است و نقاشی می‌کند. او نخست ۵ پله بالا می‌رود، سپس ۷ پله پایین می‌آید و مجدّداً ۴ پله بالا می‌رود.

در این حالت او ۹ پله با آخرین پله فاصله دارد. این نردبان چند پله دارد؟

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمهٔ سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸

توابع مولّد

● سید محمّدرضا میرفتّاح
دانش‌آموز دبیرستان سروش
ترجمه از کتاب، رالف ـ پ ـ گریمالدی

تعاریف و امثله (روشهای محاسباتی)

در این بخش ما تعدادی از فرمولها و مثالهایی را که در ارتباط با رشته‌های توانی هستند، بررسی می‌کنیم. این فرمولها برای به‌دست آوردن ضریب جمله‌های خاصی در یک تابع مولّد مورد استفاده قرار خواهند گرفت. با تعریف زیر آغاز می‌کنیم:

تعریف ۱: $a_0, a_1, a_2, \cdots$ رشته‌ای از اعداد حقیقی است $(a_i \in R)$. تابع

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

تابع مولّد برای رشتهٔ داده شده نامیده می‌شود.

مثال ۱: برای هر $n \in Z^+$ داریم:

$$f(x)=(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots$$
$$+\binom{n}{n}x^n+0x^{n+1}+0x^{n+2}+\cdots$$

با توجه به تعریف فوق تابع $(1+x)^n$، تابع مولّد رشتهٔ زیر است:

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \cdots, \binom{n}{n}, 0, 0, 0, \cdots$$

مثال ۲: الف) برای هر $n \in Z^+$ داریم:

$$1-x^{n+1}=(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n)$$

پس:

$$f(x)=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+0x^{n+1}+0x^{n+2}+\cdots$$

لذا تابع $\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ تابع مولّد رشتهٔ زیر است:

$$1,1,1,\cdots,0,0,0,\cdots$$

به‌طوری که $n+1$ جملهٔ اوّل یک، و بقیه صفر هستند.

ب) برای $|x|<1$ و وقتی که n به سمت بینهایت میل می‌کند، اتّحاد قسمت الف به شکل زیر درخواهد آمد:

$$1=(1-x)(1+x+x^2+x^3+\cdots)$$

یا

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots \quad (|x|<1)$$

درنتیجه $\frac{1}{1-x}$ تابع مولّد رشتهٔ $1,1,1,\cdots$ است.

ج) با گرفتن مشتق از طرفین رابطهٔ «ب» خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{d}{dx}(1+x+x^2+x^3+\cdots)$$

یا

$$\frac{+1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots$$

درنتیجه $\frac{1}{(1-x)^2}$ تابع مولّد رشتهٔ ۱,۲,۳,۴,..... است، درحالی که $\frac{x}{(1-x)^2}$ تابع مولّد رشتهٔ ۰,۱,۲,۳,..... است.

د) با ادامهٔ مطالب بخش «ج» خواهیم داشت :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)=\frac{d}{dx}(0+x+2x^2+3x^3+\ldots.)$$

یا

$$\frac{x+1}{(1-x)^3}=1+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\ldots.$$

درنتیجه $\frac{x+1}{(1-x)^3}$ رشتهٔ $1^2,2^2,3^2,4^2$,..... و $\frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$ رشتهٔ $0^2,1^2,2^2,3^2$,..... را تولید می‌کند.

مثال ۳: الف) از بخش «ب» مثال ۲ می‌دانیم که تابع مولّد رشتهٔ تمام یک $f(x)=\frac{1}{1-x}$ است.

پس تابع :

$$g(x)=f(x)-x^2=\frac{1}{1-x}-x^2$$

تابع مولّد رشتهٔ ۱,۱,۰,۱,۱,۱,..... است، درحالی که تابع :

$$h(x)=f(x)+2x^3=\frac{1}{1-x}+2x^3$$

رشتهٔ ۱,۱,۱,۳,۱,۱,۱,.....را تولید می‌کند.

ب) آیا می‌توان به کمک جواب مثال ۲ برای به‌دست آوردن تابع مولّد رشته ۰,۲,۶,۱۲,۲۰,۳۰,۴۲,..... اقدام کرد؟

پاسخ به این پرسش آسان است. مشاهده می‌کنیم که :

$$\begin{aligned}
a_0&=0=0^2+0\\
a_1&=2=1^2+1\\
a_2&=6=2^2+2\\
a_3&=12=3^2+3\\
a_4&=20=4^2+4\\
&\vdots
\end{aligned}$$

در حالت کلّی داریم $(n\geq 0)a_n=n^2+n$. با استفاده از جوابهای بخشهای «ج» و «د» مثال ۲ تابع مولّد رشته فوق به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$f(x)=\frac{x(x+1)}{(1-x)^3}+\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{x(x+1)+x(1-x)}{(1-x)^3}$$

$$=\frac{2x}{(1-x)^3}$$

واضح است که حل مسألهٔ فوق به حدس ما در جملهٔ عمومی رشته برمی‌گردد و اگر نتوانیم حدس بزنیم، امکان پاسخگویی به پرسش وجود ندارد. البته در مواردی که بین جمله‌های رشته یک رابطهٔ بازگشتی[1] برقرار باشد، روشهایی برای به‌دست آوردن جملهٔ عمومی آن وجود دارد که منوط به مطالعهٔ بحث روابط بازگشتی است.

با توجه به بسط دوجمله‌ای خیّام برای هر $n\in Z^+$ داریم :

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{n}x^n$$

ما با دو مثال، رابطهٔ فوق را برای nهای منفی و nهای غیرصحیح توسعه می‌دهیم. قبل از پرداختن به مثالها باید در تعریف ترکیب تغییراتی ایجاد کنیم. به تعریف زیر توجّه کنید :

تعریف ۲:

$$\forall n\in Z^+\binom{-n}{r}=\frac{[(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)]}{r!}$$

$$=\frac{(-1)^r[n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)]}{r!}$$

$$=(-1)^r\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!}=(-1)^r\binom{n+r-1}{r}$$

در حقیقت با تعریف فوق تعریف ترکیب را برای nهای منفی توسعه داده‌ایم.

تذکّر: برای nهای غیرصحیح $\binom{n}{r}$ به‌صورت زیر تعریف می‌گردد :

$$\forall n\in R\ \binom{n}{r}=\frac{(n)(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

حال آماده‌ایم که مثالهای زیر را مورد بررسی قرار دهیم.

1_ Recurrence Relation

مثال ۴: برای هر $n \in Z^+$ بسط سری ماکلورن[1] برای $(1+x)^{-n}$ به‌صورت زیر است :

$$(1+x)^{-n} = 1+(-n)x+(-n)(-n-1)\frac{x^2}{2!}$$

$$+(-n)(-n-1)(-n-2)\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

$$=1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)}{r!}x^r$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{n+r-1}{r}x^r$$

رابطهٔ فوق تعمیم بسط دوجمله‌ای خیّام است که بیانگر تابع مولّد رشتهٔ $\binom{-n}{0}$ ، $\binom{-n}{1}$ ، $\binom{-n}{2}$ ، $\cdots$ است.

مثال ۵ : برای هر $n \in R$ سری ماکلورن برای $(1+x)^n$ عبارت است از :

$$(1+x)^n = 1+nx+n(n-1)\frac{x^2}{2!}+n(n-1)(n-2)\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

$$=1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}x^r$$

به عنوان مثال :

$$(1+3x)^{-\frac{1}{3}} = 1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})(-\frac{7}{3})\cdots(\frac{-3r+2}{3})}{r!}(3x)^r$$

$$=1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)(-4)(-7)\cdots(-3r+2)}{r!}x^r$$

و $(1+3x)^{-\frac{1}{3}}$ تابع مولّد رشته $1, (-1), \frac{(-1)(-4)}{2!}, \frac{(-1)(-4)(-7)}{3!}, \ldots, \frac{(-1)(-4)(-7)\cdots(-3r+2)}{r!}, \ldots$ است.

پیش از ادامه مطالبی را که تاکنون بررسی کرده‌ایم، در جدول زیر برای مرورهای آینده جمع‌آوری می‌کنیم.

$\forall m,n \in Z^+ \;,\; a \in R$

$$1)\ (1+x)^n = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{n}x^n$$

$$2)\ (1+ax)^n = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}ax+\binom{n}{2}a^2x^2+\cdots+\binom{n}{n}a^nx^n$$

$$3)\ (1+x^m)^n = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}x^m+\binom{n}{2}x^{2m}+\cdots+\binom{n}{n}x^{nm}$$

$$4)\ \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n$$

$$5)\ \frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots = \sum_{i=0}^{\infty}x^i \qquad |x|<1$$

$$6)\ \frac{1}{(1+x)^n} = \binom{-n}{0}+\binom{-n}{1}x+\binom{-n}{2}x^2+\cdots$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{-n}{i}x^i$$

$$=1+(-1)\binom{n+1-1}{1}x+(-1)^2\binom{n+2-1}{2}x^2+\cdots$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{n+i-1}{i}x^i$$

$$7)\ \frac{1}{(1-x)^n} = \binom{-n}{0}+\binom{-n}{1}(-x)+\binom{-n}{2}(-x)^2+\cdots$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{-n}{i}(-x)^i$$

$$=1+(-1)\binom{n+1-1}{1}(-x)+(-1)^2\binom{n+2-1}{2}(-x)^2+\cdots$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{n+i-1}{i}x^i$$

اگر $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$ و $g(x)=\sum_{i=0}^{\infty}b_ix^i$ و $h(x)=f(x)g(x)$ باشد، در این صورت خواهیم داشت :

$$h(x)=\sum_{i=0}^{\infty}c_ix^i$$

به‌طوری که :

$$\forall k \geq 0\ ;\ c_k = a_0b_k+a_1b_{k-1}+\cdots+a_{k-1}b_1+a_kb_0$$

مثال ۶: ضریب x^{15} را در $f(x)=(x^2+x^3+x^4+\cdots)^4$ تعیین کنید.

از آنجا که داریم :

$$x^2+x^3+x^4+\cdots = x^2(1+x+x^2+\cdots)$$

$$=x^2\cdot\frac{1}{1-x}=\frac{x^2}{1-x}$$

---

[1] Maclaurin

ضریب x^{15} در $f(x)$ ، ضریب x^{15} در $(\frac{x^2}{1-x})^4 = \frac{x^8}{(1-x)^4}$ خواهد بود. درنتیجه ضریب مورد جستجو ضریب x^7 در تابع $\frac{1}{(1-x)^4}$ است که عبارت است از :

$$(-1)^7\binom{-4}{7} = (-1)^7(-1)^7\binom{+4+7-1}{7} = \binom{10}{7} = 120$$

در حالت کلی برای هر $n \in Z^+$ اگر $0 \le n \le 7$ باشد، در آن‌صورت ضریب x^n در $f(x)$ برابر صفر است. برای $n \ge 8$ ضریب x^n در $f(x)$ ، ضریب x^{n-8} در تابع $\frac{1}{(1-x)^4}$ است که آن برابر است با :

$$(-1)^{n-8}\binom{-4}{n-8} = (-1)^{n-8}(-1)^{n-8}\binom{+4+n-8-1}{n-8}$$

$$= \binom{n-5}{n-8}$$

مثال ۷: به چند طریق می‌توان r شیء را از n شیء مجزا انتخاب کرد، اگر جابجایی مهم نباشد و تکرار مجاز باشد؟ (این مسأله در حقیقت ترکیب با تکرار است که در آنالیز ترکیبی مورد بحث قرار گرفته است.) ما در اینجا تلاش می‌کنیم این مسأله را با استفاده از معلومات خود در مورد تابع مولّد حل کنیم.

برای هریک از n شیء مجزا سری هندسی $1 + x + x^2 + \cdots$ را در نظر می‌گیریم. توان هر جمله بیانگر تعداد انتخاب آن شیء است که مثلاً می‌تواند صفر، یک، دو و ... باشد.

با درنظرگرفتن همهٔ n شیء، تابع زیر را در نظر می‌گیریم :

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^n$$

که در حقیقت حاصلضرب n تا سری هندسی فوق است. حال ضریب جملهٔ x^r در تابع فوق بیانگر تعداد حالتهایی است که از میان n شیء مجزا می‌توان r شیء را انتخاب کرد. حال کافی است که به‌جای سری هندسی، تابع مولّد آن را قرار دهیم، داریم :

$$f(x) = (\frac{1}{1-x})^n = \frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{n+i-1}{i}x^i$$

که ضریب x^r ، $\binom{n+r-1}{r}$ خواهد شد.

مثال ۸: یک پلیس به چند طریق می‌تواند ۲۴ اسلحه را میان ۴ سرباز تقسیم کند، به‌طوری که هرکس حداقل ۳ و حداکثر ۸ اسلحه دریافت کند؟

با توجّه به مثال ۷ تعداد انتخابها برای هر سرباز توسط سری هندسی $x^3 + x^4 + \cdots + x^8$ معین می گردد. چون ۴ سرباز وجود دارد، تابع مولّد، $f(x) = (x^3 + x^4 + \cdots + x^8)^4$ است. کافی است ضریب جملهٔ x^{24} را در $f(x)$ تعیین کنیم. جواب مسأله فوق همین عدد خواهد بود. برای این کار چنین عمل می‌کنیم :

$$f(x) = x^{12}(1 + x + x^2 + \cdots + x^5)^4 = x^{12}(\frac{1-x^6}{1-x})^4$$

اگر ضریب x^{12} را در تابع $(\frac{1-x^6}{1-x})^4$ جستجو کنیم، گویی ضریب x^{24} را در $f(x)$ یافته‌ایم.

$$(1-x^6)^4(1-x)^{-4} = \left[1 - \binom{4}{1}x^6 + \binom{4}{2}x^{12} - \cdots + x^{24}\right]$$

$$\left[\binom{-4}{0} + \binom{-4}{1}(-x) + \binom{-4}{2}(-x)^2 + \cdots\right]$$

ضریب x^{12} به ترتیب زیر به‌دست می‌آید :

$$\left[(-1)^{12}\binom{-4}{12} - (-1)^6\binom{4}{1}\binom{-4}{6} + \binom{4}{2}\binom{-4}{0}\right]$$

$$= \left[\binom{15}{12} - \binom{4}{1}\binom{9}{6} + \binom{4}{2}\right] = 125$$

مثال ۹: اتّحاد زیر را اثبات کنید.

$$\forall n \in Z^+ \quad \binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$$

از آنجا که داریم :

$$(1+x)^{2n} = \left[(1+x)^n\right]^2$$

با مقایسهٔ ضرایب جمله‌های x^n در دو طرف تساوی فوق به اتحاد بالا دست می‌یابیم. ضریب جملهٔ x^n در سمت چپ تساوی $\binom{2n}{n}$ است. برای به‌دست آوردن ضریب x^n در سمت راست تساوی فوق، سمت راست را بسط می‌دهیم :

$$\left[(1+x)^n\right]^2 = \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n\right]^2$$

با توجه به بسط فوق ضریب x^n به صورت زیر محاسبه می‌شود :

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\binom{n}{2}\binom{n}{n-2}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{n}{0}$$

و با توجه به تساوی اثبات شده در آنالیز ترکیبی $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$ مجموع فوق به صورت زیر درمی‌آید :

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$$

حکم اثبات شد.

مثال ۱۰: ضریب x^8 را در $\frac{1}{(x-3)(x-2)^2}$ به‌دست آورید.

از آنجا که برای هر a مخالف صفر داریم :

$$\frac{1}{x-a}=\frac{-1}{a}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{a}}=-\frac{1}{a}\left[1+(\frac{x}{a})+(\frac{x}{a})^2+\cdots\right]$$

پس برای حلّ مسأله می‌بایست ضریب x^8 را در رابطهٔ زیر جستجو کرد :

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)^2}=$$

$$(-\frac{1}{3})\left[1+(\frac{x}{3})+(\frac{x}{3})^2+\cdots\right](\frac{1}{4})\left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right)^{+2}$$

$$=(-\frac{1}{3})(1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{9}+\cdots)(\frac{1}{4})\left[\binom{-2}{0}+\binom{-2}{1}(-\frac{x}{2})+\binom{-2}{2}(-\frac{x}{2})^2+\cdots\right]$$

روش دیگری که برای حلّ مسأله وجود دارد استفاده از روش «تجزیه به کسرهای جزئی»[1] است.

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)^2}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

با متّحد قراردادن طرفین خواهیم داشت :

$$1=A(x-2)^2+B(x-2)(x-3)+C(x-3)$$

یا

$$1=(A+B)x^2+(-4A-5B+C)x+(4A+6B-3C)$$

از مقایسهٔ ضرایب به دست می‌آید که :

$$\begin{cases}A+B=0\\-4A-5B+C=0\\4A+6B-3C=1\end{cases}$$

و از حلّ دستگاه سه معادله سه مجهول فوق، به جوابهای زیر می‌رسیم :

$$A=1 \quad , \quad B=-1 \quad , \quad C=-1$$

پس :

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)^2}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}$$

$$=(-\frac{1}{3})\left(\frac{1}{1-\frac{x}{3}}\right)+(\frac{1}{2})(\frac{1}{1-\frac{x}{2}})+(-\frac{1}{4})\left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right)^2$$

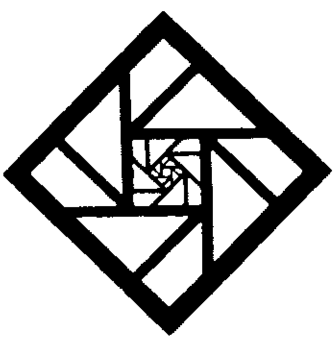
$$=(-\frac{1}{3})\sum_{i=0}^{\infty}(\frac{x}{3})^i+(\frac{1}{2})\sum_{i=0}^{\infty}(\frac{x}{2})^i$$

$$+(-\frac{1}{4})\left[\binom{-2}{0}+\binom{-2}{1}(-\frac{x}{2})+\binom{-2}{2}(-\frac{x}{2})^2+\cdots\right]$$

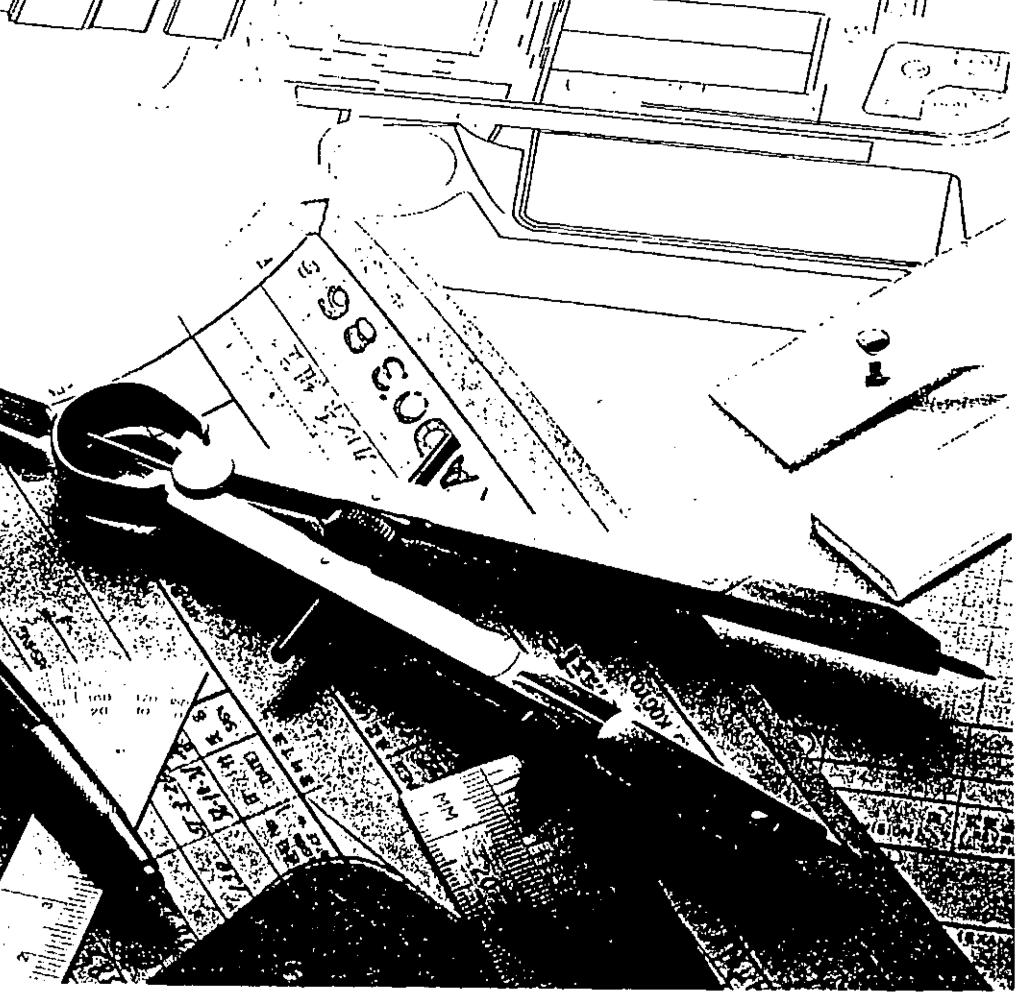
ضریب x^8 بدین ترتیب است :

$$(-\frac{1}{3})(\frac{1}{3})^8+(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^8+(-\frac{1}{4})\binom{-2}{8}(-\frac{1}{2})^8$$

$$=-\left[(\frac{1}{3})^9+7(\frac{1}{2})^{10}\right]$$



۱ـ Partial Fraction Decomposition



تربیت خلاقیت ریاضی [در دبیرستان]

● پرویز شهریاری

اگر بخواهید، می‌توانید ذهن ریاضی خود را تربیت کنید و نیروی خلاق خود را در زمینهٔ ریاضیات (که به‌صورتی پنهانی، در همهٔ شما وجود دارد) ظاهر کنید و تکامل دهید. برای گام‌نهادن در این راه، چند شرط بنیادین وجود دارد :

۱) به ریاضیات علاقه‌مند باشید و در راه رسیدن به خلاقیت ریاضی، بخشی از وقت و انرژی خود را به‌کار ببرید ؛

۲) به این باور رسیده باشید که ریاضیات، کمتر به حافظه و بیشتر به اندیشه نیاز دارد ؛ اندیشهٔ منطقی، که در سرشت همهٔ شما به‌طور طبیعی نهاده شده است ؛

۳) در ساعت‌هایی که خارج از کلاس به مطالعه و یا تمرین مسائل ریاضیات می‌پردازید، خود را از دغدغهٔ برنامهٔ کلاس، کتاب درسی، امتحان و به‌ویژه کنکور آزاد کنید : به‌خاطر درک واقعی مفهوم‌ها و استدلال‌های ریاضی کار کنید، نه به دلیل تکلیفی که به عهدهٔ شما گذاشته شده است و یا به دلیل نمره‌ای که بعد از امتحان یا شرکت در مسابقه و کنکور انتظار دارید. البته، باید به این حقیقت روشن هم اعتقاد داشته باشید که ورود در ژرفای ریاضیات و درک کامل مفهوم‌های ریاضی، به‌خودی خود، شما را در امتحان‌ها و کنکور هم موفق می‌کند. خلاقیت ریاضی، شرط لازم و کافی برای موفق شدن در هر امتحان و مسابقه‌ای است، گرچه برخی گمان می‌کنند که می‌توان بدون آن‌هم، موفقیت‌هایی به‌دست آورد. شاید این دیدگاه، برای برخی موفقیت‌های زودگذر، درست باشد، ولی بی‌تردید، برای درازمدت و برای کسی که می‌خواهد ریاضی را به درستی دریابد، نادرست است و سرانجام، موجب ناکامی می‌شود.

□

یکی از راه‌های رسیدن به ذهن فعال و کاوشگر در زمینهٔ ریاضیات، تجزیه و تحلیل مسأله و کاوش در مفهوم‌ها و مسأله‌های پیرامون آن است. وقتی یک مسأله را حل می‌کنید، تلاش کنید، به این پرسش‌ها و پرسش‌های مشابه آن پاسخ بدهید :

ــ آیا عکس مسأله درست است؟

ــ آیا در مسأله، شرط یا شرط‌های اضافی وجود دارد، یعنی آیا می‌توان حکم مسأله را با فرض‌های کمتری ثابت کرد؟

ــ حالتهای خاص مسأله کدام‌اند؟

ــ آیا می‌توان مسأله را تعمیم داد؟ و اگر پاسخ مثبت است، به‌چه صورت‌هایی؟

ـ چه مسأله‌هایی با این مسأله شباهت دارند؟

ـ اگر با مسأله‌ای از هندسهٔ روی صفحه سر و کار دارید، چه هم‌ارزهایی در فضا پیدا می‌کند؟ یا اگر قانونی رادربارهٔ عددهای درست ثابت می‌کنید، دربارهٔ عددهای مختلط درست، چگونه می‌شود؟ دربارهٔ چندجمله‌ای‌های درست چه‌طور؟ ...

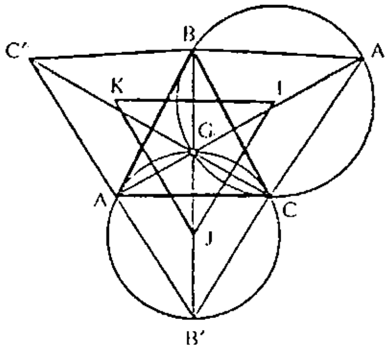
این پرسش‌ها را می‌توان بازهم ادامه داد. خود مسأله ما را در انتخاب پرسشها راهنمایی می‌کند، بنابراین، بسته به نوع مسأله، جستجوی ما می‌تواند گسترده‌تر یا محدودتر باشد. تنها به‌یاد داشته باشید که اگر فقط یک مسأله را به‌طور کامل حل کنید و به‌اصطلاح «ته آن را درآورید» بسیار سودمندتر از آن است که ده‌ها مسأله را برای شما حل کنند یا از روی کتابهای حل مسأله فرا بگیرید. نکتهٔ آخر این که، اگر به پرورش ذهن ریاضی خود علاقه‌مندید، باید به‌خودتان اعتماد داشته باشید، ازاین‌که مسأله‌ای به سادگی تسلیم شما نمی‌شود، نهراسید. دوباره به آن «حمله» کنید و مطمئن باشید،اگر آن دژ قابل گشودن باشد سرانجام به دست شما گشوده خواهد شد... حتی اگر موفق به‌فروریختن برج و باروی «مستحکم» دژ نشوید، می‌توانید در «دیواردهای» آن رخنه کنید و ضمن این رخنه، به بسیاری نکته‌های جانبی دست یابید.

هیچ‌چیز بهتر از مثال، مطلب را روشن نمی‌کند. دراین مقاله، برای این که مطلب دراز نشود، تنها به یک مسأله پرداخته‌ایم؛ تازه دراین مسأله هم، به جستجوی همه جانبه نرفته‌ایم و تنها به برخی از آنها پرداخته‌ایم. به‌عنوان نمونه، مسأله را (که یک مسألهٔ ساده از هندسهٔ مسطّحه است) به فضا نبرده‌ایم که مثلاً، اگر به‌جای مثلث، یک چهاروجهی و به‌جای مثلث متساوی‌الاضلاع، یک چهاروجهی منتظم داشته باشیم، چه‌می‌شود! درخود هندسهٔ مسطحه هم، خیلی دور نرفته‌ایم و به حالتهای کم و بیش بغرنج نپرداخته‌ایم. در واقع، خواسته‌ایم نمونه‌ای بیاوریم که بتواند تا حدی راهنمای شما ریاضیدان‌های آینده باشد. چه بسا بازهم فرصتی پیش‌آید و بتوانیم نمونه‌های دیگری را در برابر شما قرار دهیم.

□

مسأله: روی ضلع‌های یک مثلث غیرمشخص و در بیرون آن، مثلث‌های متساوی‌الاضلاعی ساخته‌ایم. ثابت کنید، مرکزهای این مثلث‌ها، رأس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع‌اند.

مسألهٔ مشهوری است و در بسیاری از کتابهای هندسه آمده است. حل آن هم دشوار نیست؛ دراین‌جا یکی از راه‌حلها را می‌آوریم.



شکل ۱

مثلث مفروض را ABC، رأسهای سوم مثلث‌های متساوی‌الاضلاع را A'، B' و C' و مرکزهای مثلث‌های متساوی‌الاضلاع را I، J و K می‌نامیم (شکل ۱). ثابت می‌کنیم، هریک از زاویه‌های داخلی مثلث IJK، برابر با ۶۰ درجه است.

دایره‌های ACB' (به مرکز J) و BCA' (به مرکز I) یکدیگر را در نقطه‌های C و G قطع کرده‌اند. داریم:

$$A\hat{G}C=180^\circ-A\hat{B'}C=120^\circ;$$

$$B\hat{G}C=180^\circ-B\hat{A'}C=120^\circ$$

بنابراین $A\hat{G}B=120^\circ$، یعنی

$$A\hat{G}B+A\hat{C'}B=180^\circ$$

و دایرهٔ ABC' (به مرکز K) هم، از نقطهٔ G می‌گذرد.

سپس $IJ\perp CG$ و $IK\perp BG$ (خط راستی که از مرکز دو دایره بگذرد، بر وتر مشترک دو دایره عمود است) و چون $B\hat{G}C=120^\circ$، پس $J\hat{I}K=60^\circ$. به همین ترتیب، ثابت می‌شود: $I\hat{J}K=60^\circ$ و $J\hat{K}I=60^\circ$، یعنی مثلث IJK متساوی‌الاضلاع است.

در حالتی هم که، نقطهٔ G، در بیرون مثلث ABC باشد، می‌توان با روشی مشابه، استدلال کرد.

اکنون به تجزیه و تحلیل حل مسأله می‌پردازیم:

۱) با اندک دقتی معلوم می‌شود که خط راست CG، زاویهٔ AGB را نصف می‌کند (ثابت کنید!) و می‌توان نتیجه گرفت که خط راست CG، از نقطهٔ C' وسط کمان AB ازدایرهٔ ABC'

می‌گذرد. به همین ترتیب، خط‌های راست BG و AG، به‌ترتیب از نقطه‌های 'B و 'A می‌گذرند. به این ترتیب، مسألهٔ دیگری ثابت می‌شود:

مسألهٔ ۱: روی ضلع‌های مثلث غیرمشخص ABC و در بیرون آن، مثلثهای متساوی‌الاضلاع 'BCA، 'CAB و 'ABC را ساخته‌ایم. ثابت کنید، خط‌های راست 'AA، 'BB و 'CC از یک نقطه می‌گذرند و در آن‌جا شش زاویهٔ برابر تشکیل می‌دهند (هرکدام برابر ۶۰ درجه).

۲) اگر بار دیگر، راه‌حل مسأله را مرور کنیم، متوجه می‌شویم که از شرط مربوط به متساوی‌الاضلاع بودن مثلث‌های 'BCA، 'CAB و 'ABC استفاده نکردیم. تنها چیزی که ضمن حل مسأله، مورد استفاده قرار گرفت، این بود که «هریک از زاویه‌های رأس‌های 'A، 'B و 'C، برابر ۶۰ درجه است». بنابراین، در مسألهٔ اصلی، می‌توان فرض را «ضعیف‌تر» و مسأله را به این صورت تنظیم کرد:

مسألهٔ ۲: اگر روی ضلع‌های مثلث غیرمشخص ABC و در بیرون آن، مثلث‌های 'BCA، 'CAB و 'ABC را با زاویهٔ برابر ۶۰ درجه در رأس‌های 'A، 'B و 'C بسازیم، آن‌وقت مرکزهای دایره‌های محیطی این مثلث‌ها، رأس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع‌اند.

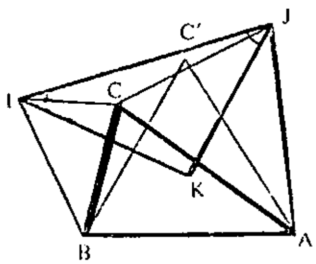
۳) مسأله را می‌توان باز هم تعمیم داد. با اندکی تلاش، می‌توانید درستی مسألهٔ زیر را ثابت کنید:

مسألهٔ ۳: اگر روی ضلع‌های مثلث ABC و در بیرون آن، مثلث‌های 'BCA، 'CAB و 'ABC را با این شرط بسازیم که داشته باشیم:

$$\hat{A}'+\hat{B}'+\hat{C}'=180^\circ$$

آن وقت، مثلث IJK (I، J و K مرکزهای دایره‌های محیطی این مثلث‌ها هستند)، زاویه‌هایی برابر $\hat{A}'$، $\hat{B}'$ و $\hat{C}'$ خواهد داشت.

در حالت خاص $\hat{A}'=\hat{B}'=\hat{C}'=60^\circ$، همان مسألهٔ ۲ به‌دست می‌آید. همچنین می‌توان ثابت کرد: اگر $\hat{A}'+\hat{B}'+\hat{C}'=360^\circ$، آن‌وقت زاویه‌های مثلث IJK برابر $\frac{\hat{A}'}{2}$، $\frac{\hat{B}'}{2}$ و $\frac{\hat{C}'}{2}$ خواهند بود. در حالت خاصی که داشته باشیم: $\hat{A}'=\hat{B}'=\hat{C}'=120^\circ$ آن وقت مثلث IJK متساوی‌الاضلاع می‌شود.

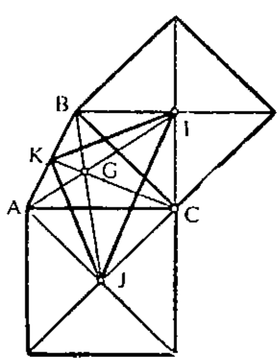


شکل۲

به نکتهٔ دیگری هم توجه کنیم: نقطه‌های I و J و K، در این‌جا بر مرکزهای مثلث‌های متساوی‌الاضلاع "BCA، "CAB و "ABC منطبق‌اند، به شرطی که A و "A در یک طرف BC، B و "B در یک طرف AC و C و "C در یک طرف AB باشند (چهارضلعی "AA'BA و چهارضلعی‌های شبیه آن قابل محاط در دایره‌اند). با همین استدلال، مسألهٔ اصلی را، به این صورت هم می‌توان تنظیم کرد:

مسألهٔ ۴: اگر مثلث‌های 'BCA، 'CAB و 'ABC را، با زاویه‌های ۱۲۰ درجه در رأس‌های 'A، 'B و 'C طوری رسم کنیم که A و 'A در یک طرف BC، B و 'B در یک طرف AC و C و 'C در یک طرف AB واقع باشند، آن‌وقت مرکزهای دایره‌های محیطی این مثلث‌ها، رأس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع‌اند.

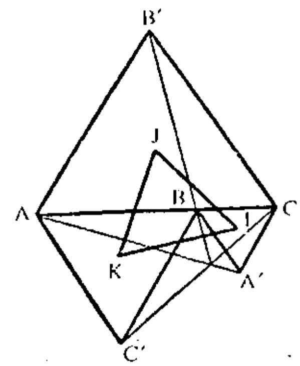
۴) اکنون به بررسی بعضی حالتهای خاص می‌پردازیم.



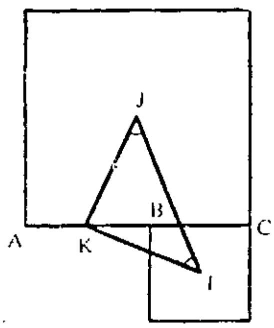
شکل۳

مسألهٔ ۵: به ازای $\hat{A}'=\hat{B}'=45^\circ$ و $\hat{C}'=90^\circ$، مثلث IJK، قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است. در این حالت می‌توان I و J را مرکز مربعهایی دانست که روی ضلع‌های BC و AC ساخته شده‌اند و k وسط ضلع AB است (**شکل ۳**).

مسألهٔ ۶: اگر $\hat{A}'=\hat{B}'=30^\circ$ و $\hat{C}'=120^\circ$، آن‌وقت مثلث IJK متساوی‌الساقین و با زاویهٔ رأس K برابر ۱۲۰ درجه خواهد بود (شکل ۲). دراین‌جا، I و J، رأس‌های مثلث‌های متساوی‌الاضلاعی هستند که روی ضلع‌های BC و CA و در بیرون مثلث ساخته شده‌اند و K مرکز مثلث متساوی‌الاضلاع ABC′ است که روی AB طوری ساخته شده است که C و C′ در یک طرف AB باشند.

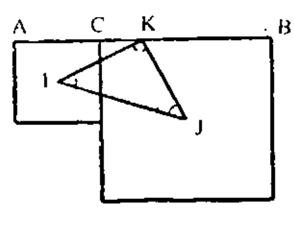


شکل ۴

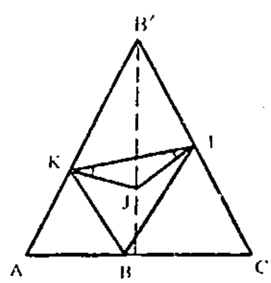


شکل ۵

مسألهٔ ۷: حالت خاصی را درنظر می‌گیریم که در آن زاویه‌های B و C از مثلث ABC برابر صفر باشند، یعنی نقطه‌های A، B و C روی یک خط راست قرار گیرند. این حالت را روی شکل‌های ۴ تا ۷ نشان داده‌ایم. شکل ۴ حالت خاص شکل ۱، شکل‌های ۵ و ۶ حالت‌های خاص شکل ۳ و شکل ۷ حالت خاص شکل ۲ است.

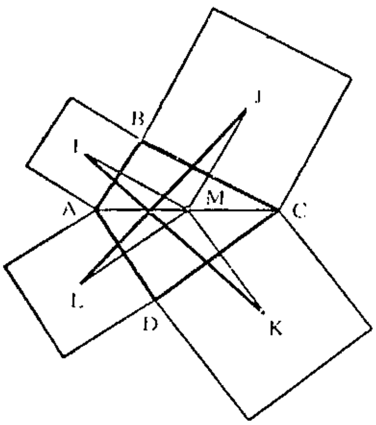


شکل ۶



شکل ۷

حالا صورت مسأله را اندکی تغییر می‌دهیم و به‌جای واژهٔ «مثلث» از واژهٔ «چهارضلعی» استفاده می‌کنیم. درشکل ۸ دیده می‌شود، چهارضلعی IJKL مربع نیست، یعنی با تبدیل مثلث به چهارضلعی و با تبدیل مثلث‌های متساوی‌الاضلاع به مربع، نتوانستیم به نتیجه‌ای شبیه مسألهٔ اصلی برسیم. ولی آیا چهارضلعی IJKL، ویژگی دیگری ندارد؟ اگر از مسألهٔ ۵ استفاده کنیم، به سادگی ثابت می‌شود که قطرهای چهارضلعی IJKL برهم عمودند و طول‌هایی برابر دارند.



شکل ۸

در واقع، اگر وسط قطر AC را M بنامیم، مثلث‌های IMJ و KML، قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین‌اند (مسأله ۵). بنابراین، با دوران به مرکز M و به اندازهٔ زاویهٔ ۹۰ درجه، مثلث MJL بر مثلث MIK منطبق می‌شود، یعنی $(IK)\perp(JL)$، $|IK|=|JL|$ به این ترتیب، مسألهٔ تازه‌ای به‌دست می‌آید :

مسألهٔ ۸: اگر روی ضلع‌های یک چهارضلعی غیرمشخص و در بیرون آن، مربع هایی رسم کنیم، آن وقت مرکزهای این مربع‌ها، رأس‌های یک چهارضلعی‌اند که قطرهای آن برهم عمودند و طول‌هایی برابر دارند.

توجه به حالت‌های خاص مسألهٔ ۸، جالب است.

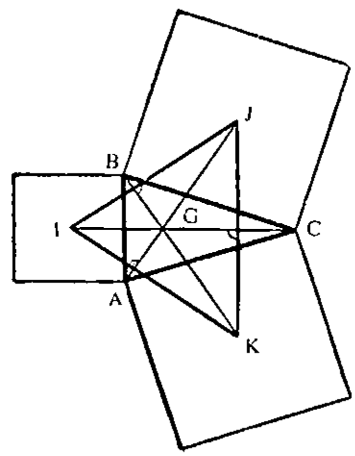
اگر ABCD متوازی‌الاضلاع باشد، نقطهٔ M در محل برخورد قطرهای آن خواهد بود و مسأله‌ای شبیه مسألهٔ اصلی مثلث به‌دست می‌آید.

مسألهٔ ۹: روی ضلع‌های یک متوازی‌الاضلاع و در بیرون آن، مربع‌هایی ساخته‌ایم. ثابت کنید که مرکزهای این

مربع‌ها، رأس‌های یک مربع‌اند.

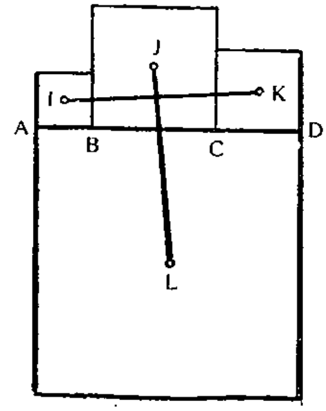
اگر به جای چهارضلعی ABCD، مثلث ABC را درنظر بگیریم، آن‌وقت به این مسأله می‌رسیم.

مسألهٔ ۱۰: روی ضلع‌های یک مثلث غیرمشخص و در بیرون آن، مربع‌هایی رسم کرده‌ایم. ثابت کنید که ارتفاع‌های مثلثی که رأس‌های آن، مرکزهای این مربع‌هاست، از رأس‌های مثلث مفروض می‌گذرند (شکل ۹).

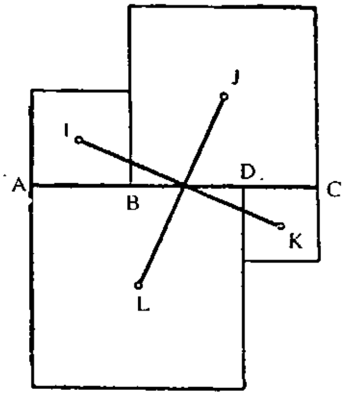


شکل ۹

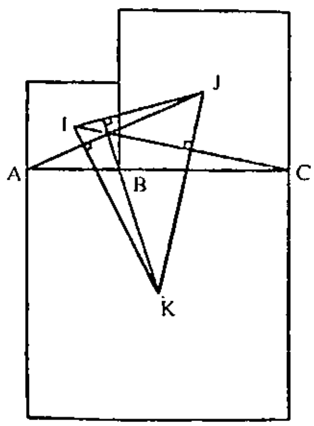
مسألهٔ ۱۱: می‌توان حالت خاصی را درنظرگرفت که نقطه‌های A، B، C و D بر یک خط راست واقع باشند. دراین صورت شکل‌های ۱۰ و ۱۱ (به‌عنوان حالت خاص شکل ۸) و شکل ۱۲ (به‌عنوان حالت خاص شکل ۹) به‌دست می‌آیند.



شکل ۱۰

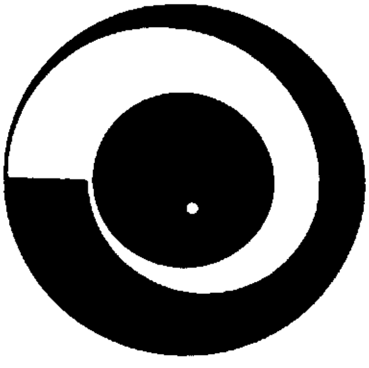


شکل ۱۱



شکل ۱۲

بی‌تردید حدس می‌زنید که این بررسی را می‌توان همچنان ادامه داد.



تثلیث زاویه

(قسمت دوم)

● سیامک جعفری

امتناع

حل یک مسأله هندسی، همیشه به روش هندسی، ساده یا ممکن نیست. بلکه گاهی نیز مسائل هندسه به روشهای مثلثاتی یا جبری قابل حل است. یکی از برهانهای دقیق امتناع تثلیث زاویه، به کمک دو ابزار هندسی پرگار و خط کش، شبیه‌سازی جبری است.

شبیه‌سازی: بعضی مسائل هندسی را با شبیه‌سازی آن در جبر حل و بحث می‌کنند و پدیدهٔ شبیه‌سازی امروزه درحل و طرح مسائل روش کاربردی مورد توجه است.

مثال: معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\sin^4 x + \cos^4 y + 2 = 4\sin x.\cos y$$

با جایگزینی $u = \sin x , v = \cos y$

معادلهٔ اصلی به شکل زیر خواهد شد:

$$u^4 + v^4 + 2 = 4u.v$$

و اکنون پس از شبیه‌سازی در جبر، این معادله را حل خواهیم کرد.

$$\Rightarrow (u^4+1)+(v^4+1)-4u.v=0$$

$$\Rightarrow (u^4-2u^2+1)+(v^4-2v^2+1)+2u^2+2v^2-4u.v=0$$

$$\Rightarrow (u^2-1)^2+(v^2-1)^2+2(u-v)^2=0$$

مجموع مربعات سه عدد، برابر صفر شده است.

بنابراین $\Rightarrow u^2-1=0$ و $v^2-1=0$ و $u-v=0$

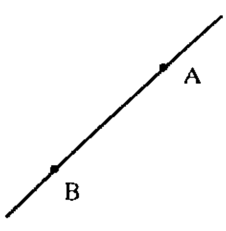
و حل این معادله‌ها ساده خواهد بود و در نهایت با جایگذاری برگشتی، چنین خواهد شد:

$$x_1 = \frac{\pi}{2}+2n\pi \qquad y_1 = 2k\pi$$

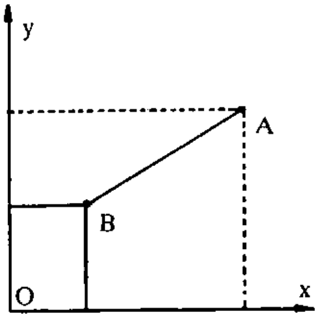
$$(n \text{ و } k \in z)$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{2}+2n\pi \qquad y_2 = \pi+2k\pi$$

به‌خاطر دارید که هر دو نقطه متمایز، نمایش یک خط راست است.



ش ۱



ش۲

معادلهٔ خط راستی که از دو نقطهٔ متمایز می‌گذرد به‌صورت زیر است:

$$(y-y_A)(x_B-x_A)=(y_B-y_A)(x-x_A)$$

روی محور طول‌ها اگر، x_A و x_B معلوم باشند، آشکار است که (x_B-x_A) نیز معلوم خواهد بود. دربارهٔ (y_B-y_A) همین‌طور خواهد بود. معادلهٔ بالا را ساده می‌کنیم.

$$(x_B-x_A)y+(y_A-y_B)x+y_A(x_A-x_B)+x_A(y_B-y_A)=0$$

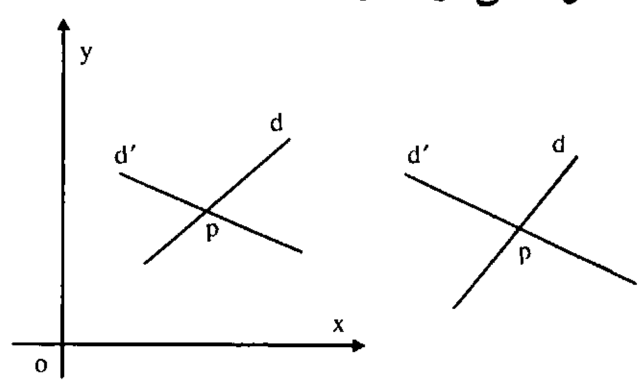
در هندسهٔ مقدماتی خوانده‌اید که: $x_A(y_B-y_A)$ و $y_A(x_A-x_B)$ را می‌توان به کمک خط‌کش به‌دست آورد. آشکار است که هر نقطه به مختصات $(x\,,y)$ را می‌توان به کمک این وسیله تعیین کرد. بازهم معادلهٔ خط را ساده‌تر می‌کنیم.

$$Ay+Bx+C=0$$

بنابراین هرگاه A، B و C به کمک خط‌کش قابل نمایش باشند، هر نقطه روی این خط نیز به کمک این وسیله قابل نمایش است. به یاد داشته باشیم که منظور از خط‌کش، ابزاری است که دو نقطهٔ متمایز را به هم وصل می‌کند و نمایش خط راست عبور کننده از دو نقطه متمایز است.

اکنون باز می‌گردیم به هندسه و مطلب دیگری را در جبر مدل‌سازی خواهیم کرد.

● محل تلاقی دوخط راست



ش۴ ش۳

دو خط به معادله‌های زیر درنظر بگیریم

$$Ax+By+C=0$$
$$A'x+B'y+C'=0$$

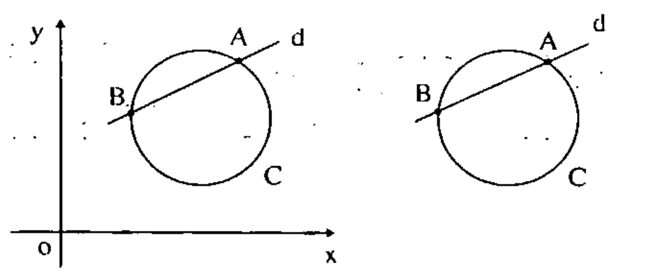
ضرایب A,B,C,A',B' و C' از نوع ضرایب ساختنی به کمک خط‌کش می‌باشند. محل تلاقی دوخط، چنین خواهد شد:

$$x=\frac{C'B-CB'}{AB'-A'B}\ ,\ \ y=\frac{CA'-C'A}{AB'-A'B}$$

در هندسهٔ مقدماتی، خوانده‌اید که اگر دو قطعه خط با طول‌های معلوم داشته باشیم، دراین صورت به راحتی می‌توان با روش‌های ساده (به کمک خط‌کش)، اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم، دو قطعه را ترسیم کرد. بنابراین $(x\,,y)$ را می‌توان به کمک ترسیم به‌دست آورد.

ملاحظه می‌کنید تمام چیزهایی را که ممکن است با مثلاً واحد طول به وسیلهٔ اعمال گویای جمع و تفریق و ضرب و تقسیم حاصل شود، با خط‌کش رسم کنیم و عبارتند از تمام اعمال گویا بر روی اعداد گویا $\frac{a}{b}$، که a و $b\neq 0$ اعداد صحیح هستند. این مجموعه، نسبت به این اعمال بسته است. هرمجموعه‌ای که دارای این خاصیت باشد، هیأت (میدان) نامیده می‌شود.

پرگار نیز مانند خط‌کش، به کمک مدل‌سازی جبری قابل بحث است. به‌یاد دارید که خط و دایره یا دو دایره نسبت به هم چه حالتهایی داشتند. اکنون، حالت متقاطع را بررسی خواهیم کرد:



ش۵ ش۶

مطابق شکل ۶ معادله دایره و خط راست، خواهد شد:

$$Ax+By+C=0$$
$$x^2+y^2+2\alpha x+2\beta y+\gamma=0$$

فرض کنید A,B,C,α,β و γ درمیدان F قرار دارند. با حذف y بین این دو معادله، معادلهٔ درجهٔ دوم زیر به‌دست می‌آید.

$$ax^2+bx+c=0$$
$$a=A^2+B^2\ \text{و}\ b=2(AC+B^2\alpha-AB\beta)\,,$$
$$c=C^2-2BC\beta+B^2\gamma$$

الف: ملاحظه می‌کنید که ضرایب a, b و c با اعمال گویا به‌دست می‌آیند، بنابراین درمیدان F هستند.

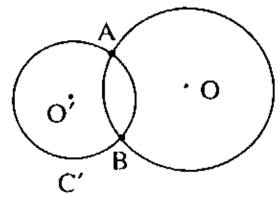
ب : جوابهای معادله به صورت زیر است :

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

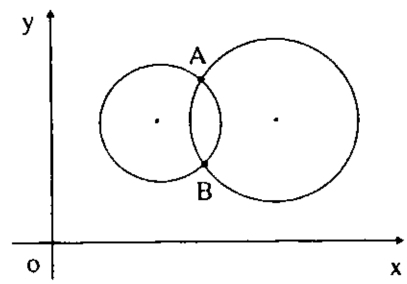
یا

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}=p+q\sqrt{k}$$

در آینده، نتایجی را از تساوی اخیر به‌دست می‌آوریم.
اکنون، حالت تقاطع دو دایره را درنظر بگیرید :



ش۷



ش ۸

معادله‌های دو دایره : $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$

$x^2+y^2+2a'x+2b'y+c'=0$

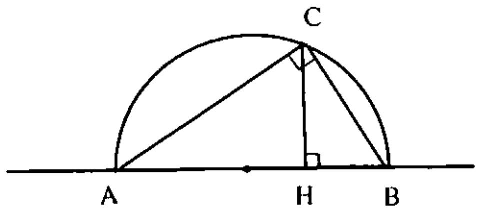
طرفین معادلهٔ دوم را از طرفین معادلهٔ اوّل کم می‌کنیم، معادلهٔ فصل مشترک و خط راست، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید :

$2(a-a')x+2(b-b')y+c-c'=0$

در حالتی که a و b در میدان F باشند، ملاحظه می‌کنید، ازآنجا که اعمال گویای اصلی در کار باشد، [مانند خط راست عابر بر دو نقطه متمایز، محل تلاقی دوخط راست، محل تلاقی دو دایره] می‌توان با عمل خط‌کش و ترسیم خطوط راست مسأله را حل کرد. ولی در حالت تلاقی خط با دایره، عنصر $\sqrt{k}$ وارد شد که در میدان F نیست.

در این حال، مجموعه‌ای جدید را که اعضای آن به شکل $a+b\sqrt{k}$ است، تعریف می‌کنیم و اگر k برابر ۹ باشد، به همان مجموعه اوّل F برمی‌گردد. در این صورت، مجموعهٔ جدید را توسیع مجموعه قبل می‌نامند.

در دورهٔ دبیرستان، با توسیع میدان اعداد حقیقی به مجموعهٔ اعداد مختلط آشنا شدید. اکنون به ترسیم $\sqrt{k}$ توجه کنید :



ش ۹

با توجه به خواص مثلث‌قائم‌الزاویه، اگر $BH=1$ و $AH=k$ باشد، آنگاه ارتفاع وارد بر وتر، واسطه هندسی دو قطعه‌ای است که بر وتر ایجاد می‌کند. یعنی : $CH=\sqrt{k}$

بنابراین اگر قطعه خط k معلوم باشد، دراین صورت می‌توان $\sqrt{k}$ را با خط‌کش و پرگار رسم کرد. به‌طور کلی به کمک خط‌کش و پرگار اعمال زیر یا مسایل هندسی را که به اعمال زیر می‌انجامد، می‌توان حل کرد :

۱ ـ خطی رسم کنیم که از دو نقطه معلوم (متمایز) بگذرد.
۲ ـ نقطه تلاقی دوخط راست را به‌دست آوریم.
۳ ـ دایره‌ای با مرکز معلوم و شعاع معین رسم کنیم.
۴ ـ نقاط تلاقی دایره با خط راست را به‌دست آوریم.
۵ ـ نقاط تلاقی دایره با دایرهٔ دیگر را به‌دست آوریم.

اکنون که به کمک پرگار عدد $\sqrt{k}$ را ساختیم ـ که در هیأت اعداد گویا قرار ندارد ـ می‌توانیم به وسیلهٔ اعمال گویا، تمام اعدادی را که به‌صورت زیر هستند، با ترسیم به‌دست آوریم :

$Z=a+b\sqrt{k}$

چهار عمل اصلی برای میدان توسیع F_1 به‌سادگی به‌دست می‌آیند. این میدان را با وارد کردن $\sqrt{k_1}$, $\sqrt{k_2}$ و ... می‌توان وسیع‌تر کرد.

اگر میدان اولیه را F_0 و توسیع آن F_1 و ... نشان دهیم، می‌توان نشان داد که اعداد هیأت F_1 همگی ریشه معادله درجهٔ دوم و اعداد هیأت F_2 در حالت کلی ریشه معادله درجهٔ چهارم هستند و ... اعداد هیأت F_k ریشه‌های معادله‌ای از درجهٔ 2^k با ضرایب گویا هستند. موضوع بالا را برای F_2 ثابت می‌کنیم :

$x=p+q\sqrt{k}$

p و q و k عضو F_1 هستند، یعنی :

$p=p_1+q_1\sqrt{k_1}$
$q=p_2+q_2\sqrt{k_1}$
$k=p_3+q_3\sqrt{k_1}$

معادلهٔ بالا به راحتی قابل تبدیل است :

$x^2 - 2px + p^4 = q^2k$

ملاحظه می‌کنید که ضرایب این معادله در F_1 قراردارند. برحسب $\sqrt{k_1}$، خواهد شد :

$x^2 + ux + v = \sqrt{k_1}(rx + t)$

که در آن u,t,s,r و v اعداد گویا هستند. اگر طرفین معادله را به توان ۲ برسانیم،

$(x^2 + ux + v)^2 = k_1(rx + t)^2$

معادله‌ای درجهٔ چهارم که ضرایب آن همگی گویا هستند و حکم ثابت شد.

دیدید که از میدان F_0 شروع کردیم تا به F_k رسیدیم، و معادله‌ای از درجهٔ 2^k به‌دست آمد. عکس این مطلب نیز درست است، می‌توان نشان داد که هر x متعلق به هیأت F_k، در معادله درجه دومی صدق می‌کند که ضرایب آن متعلق به میدان F_{k-1} می‌باشد، و این روش ادامه می‌یابد تا به F_0 برسیم.

تعریف: عددی جبری است که در معادله، $n \ge 1$، با ضرایب صحیح زیر صدق کند :

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$

می‌توان نشان داد که همهٔ اعداد قابل ترسیم، جبری هستند.

مثال: اعداد ($\sqrt{2}-1$ و $\sqrt{2}+1$) عضو F_1 هستند و ریشه‌های معادله زیر خواهند شد :

$x = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$

اکنون معادله‌ای می‌سازیم که ضرایب آن از F_1 باشند، به‌طور مثال :

$(1+\sqrt{0})x^2 + (2+\sqrt{4})x + (1+\sqrt{2}) = 0$

یا

$x^2 + 4x + (1+\sqrt{2}) = 0$

از نوع F_2 خواهد بود. با بردن $\sqrt{2}$ به‌طرف دیگر و به توان ۲ رساندن، معادله مشخصه آن به‌دست می‌آید. ریشه‌های این معادله $-2-\sqrt{3-\sqrt{2}}$ و $-2+\sqrt{3-\sqrt{2}}$ است.

$x = -2 + \sqrt{3-\sqrt{2}} \Rightarrow x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 1 = 0$

این اعداد، جبری و قابل ترسیم هستند.

مطالبی را دربارهٔ معادلات یادآوری می‌کنیم :

الف) اگر معادله‌ای دارای ضرایب درست باشد و درضمن، ضریب بزرگترین درجهٔ مجهول آن برابر ۱+ باشد، در آن صورت، هر ریشهٔ درست معادله باید مقسوم علیه درستی از مقدارثابت (جملهٔ آزاد) معادله خواهد بود.

ب) اگر هیچ‌یک از مقسوم‌علیه‌های درست مقدار ثابت در معادله صدق نکند، به معنای آن است که معادلهٔ مفروض دارای ریشهٔ گویا نیست.

ج) هرمعادله‌ای که دارای ریشه‌های گویا باشد، به کمک رادیکال‌هایی با فرجهٔ ۲ قابل حل است.

به سبب اهمیت مسأله، بخش ج را برای معادلهٔ درجهٔ سوم حل می‌کنیم [البته متن آن را کمی تغییر خواهیم داد.]

متن اول: یک معادلهٔ درجهٔ سوم، به شرطی که ریشه گویا نداشته باشد، نمی‌توان به کمک ریشه های دوم حل کرد.

متن دوم: اگرمعادلهٔ درجهٔ سومی با ضرایب گویا، دارای ریشهٔ گویا نباشد. دراین صورت، اگر ساختمان هندسی را ابتدا از میدان اعداد گویای F_0 شروع کرده باشیم، هیچ‌یک از این ریشه‌ها را نمی‌توان با خط‌کش و پرگار رسم کرد.

اثبات متن ۱:

معادلهٔ کلی درجهٔ سه زیر

$Z^3 + Az^2 + Bz + C = 0$

با تبدیل $Z = x - \frac{A}{3}$ به‌صورت زیر تبدیل می‌شود :

$x^3 + ax = b$

اکنون با توجه به روابط بین ضرایب و ریشه‌ها :

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$

این ریشه‌ها گویا نیستند و با رادیکال‌های با فرجهٔ ۲ قابل بیان نیستند.

برهان خلف: فرض کنیم x_1 برحسب رادیکال با فرجه ۲ قابل بیان باشد. بنابراین

$x_1 = m + n\sqrt{k}$

k، m و n متعلق به حوزه قبلی اعمال گویاست. x_1 در معادله صادق است، بنابراین

$(m + n\sqrt{k})^3 + a(m + n\sqrt{k}) = b$

خواهد شد :

$M + N\sqrt{k} = 0$

$M = m^3 + 3mn^2k + am - b, N = 3m^2n + n^3k + an$

پس، M، N و K متعلق به حوزه عمل‌های گویای قبلی هستند. ولی $\sqrt{k}$ متعلق به آن نخواهد بود. امّا

$M + N\sqrt{k} = 0 \Rightarrow \sqrt{k} = -\frac{M}{N}$

این تساوی نمی‌تواند برقرار باشد، مگر وقتی که $M = 0$ و $N = 0$ که دراین حال $m - n\sqrt{k}$ نیز در معادله صدق خواهد

کرد، (امتحان کنید) پس :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = -(x_1 + x_2)$$
$$\Rightarrow x_3 = -(m + n\sqrt{k} + m - n\sqrt{k})$$
$$\Rightarrow x_3 = -2m$$

x_3، متعلق به حوزهٔ قبلی می‌شود، و x_1 یا x_2 باید به حوزهٔ پیش ازاین تعلق داشته باشند و به همین ترتیب، تا آنجا که به میدان اعداد گویا می‌رسیم. یعنی با فرض بیان کردن یکی از ریشه‌ها برحسب رادیکالی با فرجهٔ ۲، به این نتیجه رسیدیم که یکی از ریشه‌ها، عددی گویا خواهد شد ؛ و این تناقض است.

یک نتیجه کلّی را به‌یاد داشته باشید ؛ هر مسأله‌ای که منجر به معادله‌ای غیر قابل حل به کمک ریشه‌های دوم بشود، نمی‌تواند با رسم خط‌های راست و رسم دایره‌ها (یعنی خط‌کش و پرگار) حل شود.

امتناع:

اتّحاد مثلثاتی

$$\cos\theta = 4\cos^3\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3}$$

را درنظر بگیرید، فرض کنید که :

$$2\cos\theta = a \ , \ 2\cos\frac{\theta}{3} = x$$

آنگاه به معادلهٔ زیر می‌رسیم :

$$x^3 - 3x = a$$

به معادله‌ای رسیدیم که جهت حل آن بحث کردیم.

الف) مجموعه‌ای نامتناهی از زوایا وجود دارند که به کمک خط‌کش و پرگار، قابل تثلیث هستند.

ب) مجموعه‌ای نامتناهی از زوایا وجود دارند که به کمک خط‌کش و پرگار، قابل تثلیث نیستند.

مثال: زاویهٔ $45°$ را به کمک خط‌کش و پرگار تثلیث کنید.

$$2\cos\frac{\pi}{4} = a \Rightarrow a = \sqrt{2}$$
$$\Rightarrow x^3 - 3x - \sqrt{2} = 0$$

ریشه‌های این معادله $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ و $-\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2-\sqrt{3}}$ است.

[**مثال:** زاویهٔ $60°$ را نمی‌توان به کمک خط‌کش و پرگار تثلیث کرد.]

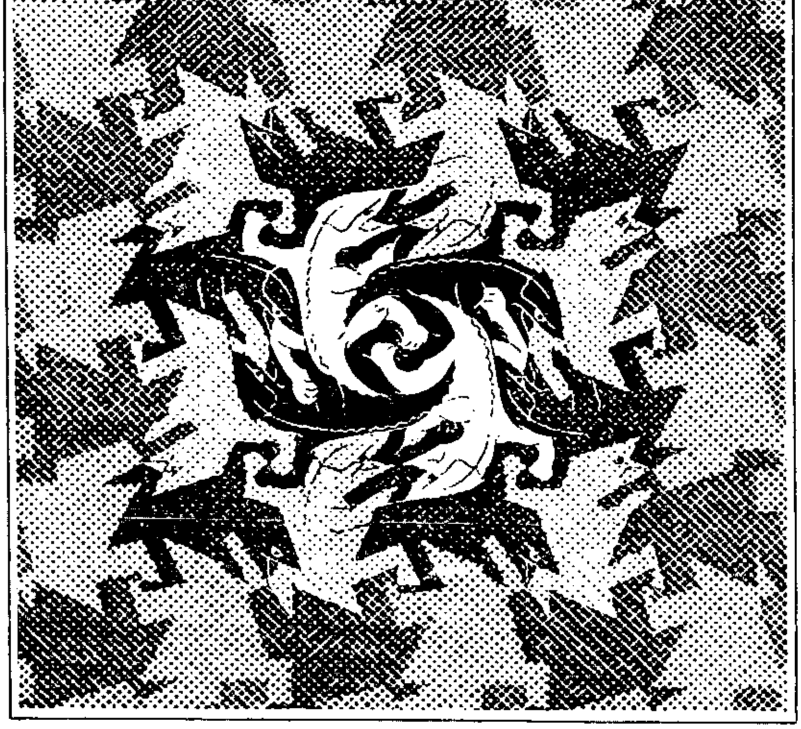
$$2\cos\frac{\pi}{3} = a \Rightarrow a = 1$$
$$\Rightarrow x^3 - 3x - 1 = 0$$

مقسوم‌علیه‌های (۱) در معادله صدق نمی‌کند، بنابراین ریشهٔ گویا ندارد و در نتیجه قابل بیان برحسب رادیکال با فرجهٔ ۲ نیست، و درنتیجه به کمک خط‌کش و پرگار قابل ترسیم نیست.

اصول مذهب فیثاغورس این بود که چه چیز مهمتر از عدد است و از توافق و هم‌آهنگی چه عامل زیباتری وجود دارد؟ و پیش خود خیال کردند که چون عدد مبدأ هم‌آهنگی موسیقی می‌باشد، ممکن است اساس و مبدأ بسیاری چیزهای دیگر و شاید اساس همه‌چیز باشد. دنیا و آسمان همه از نسبت و توافق به‌وجود آمده‌اند و نتیجه آن شد که گنبد فلکی را یک جعبهٔ بزرگ موسیقی تصور کردند و فواصل سیارات را با فواصل نوتهای موسیقی در یک گام معین وابسته دانستند : از زمین تا ماه یک تون و از ماه تا مریخ نیم تون فاصله است و غیره. برای ما باور نکردنی است که چگونه جمعی مردم باهوش از این قبیل مهملات می‌گفتند ولی نکته اینجاست که در چنین دستگاهی که فیثاغورس بنا نهاد، برای اولین بار زمین را از مقام خود که مرکز عالم بود خارج کرد و آن را در عداد سیاراتی که به دور آتش مرکزی در حرکت‌اند جای داد.

تاریخ علوم، پی‌یرروسو

ترجمه: حسن صفاری



اثبات یکتا بودن جواب در حلِ یک مسألهٔ هندسه

● دکتر احمد شرف‌الدّین

چکیده : یکی از مسائل مشهور هندسه، محاط کردن مثلثی با محیط مینیمم در یک مثلث مفروض است که زاویه‌های آن حادّه باشند. حلی که برای این مسأله عرضه شده است، مثلثی را که رأسهای آن پایهای سه ارتفاع مثلث مفروضند، به عنوان جواب معرّفی می‌کند. ما در این مقاله، حلّی را ارائه می‌کنیم که علاوه بر همان جواب، نشان می‌دهد که جواب یکتاست.

مسأله : در مثلث مفروض ABC که زاویه‌های آن حادّه‌اند، مثلث DEF را چنان محاط کنید که رأسهای D، E و F آن به ترتیب بر پاره‌خطهای BC، AC و AB قرار داشته باشند و محیط آن کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

ابتدا راه حلی را که در کتابها مذکور است، یاد می‌کنیم و سپس راه حلی را که یکتا بودن جواب را نیز نشان می‌دهد، ارائه می‌کنیم.

حل اوّل

برای حل مسأله، مطالب زیر را به ترتیب ذکر می‌کنیم :

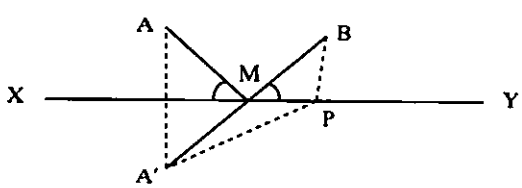
۱ ـ خط XY و دو نقطهٔ A و B در یک طرف آن مفروض‌اند. بر خط XY نقطهٔ M را چنان تعیین کنید که مجموع (MA + MB) مینیمم باشد.

برای حل این مسأله نقطهٔ A' قرینهٔ نقطهٔ A را نسبت به خط XY به‌دست می‌آوریم. نقطهٔ مطلوب M محلّ برخورد خط $A'B$ با خط XY است. چه اگر نقطهٔ $P \neq M$ را بر خط XY اختیار کنیم، چنین داریم :

$$PA + PB = PA' + PB > A'B = A'M + MB$$
$$= MA + MB$$

اگر M نقطهٔ مطلوب باشد، چنین داریم :

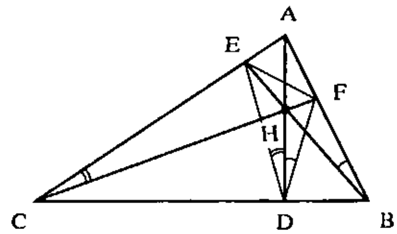
اندازهٔ زاویهٔ BMY = اندازهٔ زاویهٔ AMX



۲ ـ تعریف مثلث ارتفاعی: در مثلث ABC ارتفاعهای AD، BE و CF را رسم می‌کنیم. مثلث DEF که رأسهای آن پایهای ارتفاعهای مثلث ABC می‌باشد، مثلث ارتفاعی مثلث ABC نامیده می‌شود.

۳ ـ حکم: ارتفاعهای مثلث ABC نیمسازهای زاویه‌های مثلث ارتفاعی DEFاند.

برهان: در مثلث ABC سه ارتفاع AD، BE و CF را رسم می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم خطوط AD ، BE و CF به ترتیب زاویه‌های EDF ،DEF و EFDاند.



چون دو زاویهٔ CFB و CEB قائمه‌اند، پس دایره‌ای به قطر BC بر دو نقطهٔ E و F می‌گذرد ؛ یعنی چهارضلعی BCEF محاطی است. در این چهار ضلعی محاطی، دو زاویهٔ EBF وECF دو زاویهٔ محاطی مقابل به کمان EFاند ؛ پس :

(۱) اندازهٔ زاویهٔ ECF = اندازهٔ زاویهٔ EBF

نقطهٔ برخورد سه ارتفاع مثلث ABC را H می‌نامیم. چهارضلعی HFBD که دو زاویهٔ مقابل آن، یعنی HFB و HDB قائمه‌اند، محاطی است. دراین چهارضلعی محاطی، دو زاویهٔ HBF و HDF دو زاویهٔ محاطی مقابل به کمان HFاند ؛ پس :

(۲) اندازهٔ زاویهٔ HDF = اندازهٔ زاویهٔ HBF

همچنین چهارضلعی HDCE محاطی است ؛ زیرا دو زاویهٔ مقابل آن، یعنی HDC و HEC محاطی‌اند. در این چهارضلعی محاطی، دو زاویهٔ HCE و HDE دو زاویهٔ محاطی مقابل به کمان HEاند ؛ پس :

(۳) اندازهٔ زاویهٔ HDE = اندازهٔ زاویهٔ HCE

از سه رابطهٔ (۱)، (۲) ، (۳) نتیجه می‌شود :

(۴) اندازهٔ زاویهٔ HDF = اندازهٔ زاویهٔ HDE

به همان شیوهٔ استدلال ثابت می‌کنیم که :

(۵) اندازهٔ زاویهٔ HFD = اندازهٔ زاویهٔ HFE

(۶) اندازهٔ زاویهٔ HEF = اندازهٔ زاویهٔ HED

پس ارتفاعهای مثلث ABC نیمسازهای مثلث ارتفاعی DEFاند.

۴ ـ نتیجه: چون AD، BE و CF ارتفاعهای مثلث ABCاند، از سه رابطهٔ (۴)، (۵) و (۶) رابطه‌های زیر حاصل می‌شود (منظور اندازهٔ زاویه‌هاست.) :

(۷) $\angle FDB = \angle EDC$

(۸) $\angle DFB = \angle EFA$

(۹) $\angle FEA = \angle DEC$

۵ ـ مثلث محاط در مثلث ABCبا محیط مینیمم: مثلث MNP محاط در مثلث ABC را درنظر می‌گیریم. بنابر (۴ ـ نتیجه) محیط مثلث MNP مینیمم است، اگر تساویهای زیر برقرار باشد (منظور اندازهٔ زاویه‌هاست.):

(۱۰) $\angle PMB = \angle NMC$

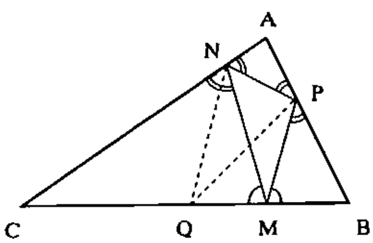
(۱۱) $\angle MNC = \angle PNA$

(۱۲) $\angle NPA = \angle MPB$

چه اگر به جای نقطهٔ M نقطهٔ Q را روی خط XY اختیار کنیم، بنابر مطلب شمارهٔ (۱) داریم :

$$QN + QP > MN + MP$$

همین شیوهٔ استدلال را دربارهٔ وضعیت مناسب برای دو نقطهٔ N و P به کار می‌بریم.

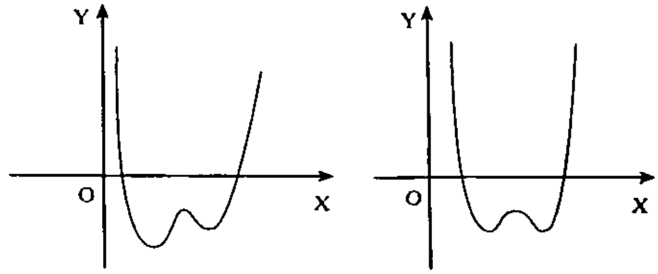


اکنون می‌گوییم برای مثلث ارتفاعی، سه رابطهٔ (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) برقرار است ؛ پس مثلث ارتفاعی دارای محیط مینیمم است.

حلّ دوم

در حل اوّل، ثابت شد که محیط مثلث ارتفاعی یک مثلث، دارای مینیمم است، اما این دلیلی نیست بر این که در بین مثلثهای محاط در مثلث مفروض، مثلثهای دیگری با محیط مینیمم وجود ندارد ؛ چرا که می‌دانیم که یک تابع، ممکن است دارای چند مینیمم باشد. در شکل زیر، تابعی نشان داده شده است که دارای دو مینیمم است. (ممکن است دو مینیمم مساوی باشند.)

اکنون مثلث MNP محاط در مثلث ABCرا درنظر می‌گیریم



و فرض می‌کنیم که محیط آن مینیمم باشد. دراین صورت بنابر مطلب شماره (۱) چنین داریم :

(۱۳) $\angle BMP = \angle CMN$

(۱۴) $\angle CNM = \angle ANP$

(۱۵) $\angle APN = \angle BPM$

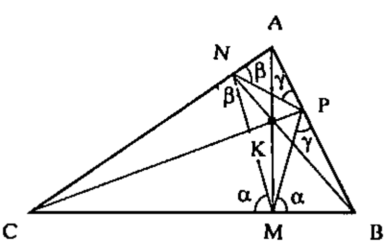
مقدار زاویه‌های (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) را به ترتیب α، β، و γ می‌نامیم. روابط مسلّم زیر را می‌نویسیم :

$$\alpha+\beta+C=\beta+\gamma+A=\alpha+\gamma+B=180^\circ$$

از رابطه‌های مذکور، نتیجه می‌شود :

$$\alpha = A \quad , \quad \beta = B \quad , \quad \gamma = C$$

از تساوی $\beta = B$ نتیجه می‌شود که دو زاویهٔ CNP و B مکمّل یکدیگرند ؛ پس چهارضلعی BCNP محاطی است. با همین شیوهٔ استدلال، ثابت می‌شود که چهارضلعیهای CAPM و ABMN محاطی‌اند.



چون چهارضلعی BCNP محاطی است، پس بنابر قضیهٔ قوت نقطه نسبت به دایره، چنین داریم :

(۱۶) $AP.AB = AN.AC$

دایره‌های محیطی مثلثهای BMP، APN و CMN را به ترتیب O_1، O_2 و O_3 می‌نامیم. نقطهٔ برخورد دو دایرهٔ O_2 و O_3 به‌جز نقطهٔ M را K می‌نامیم (ممکن است نقطهٔ K روی M باشد). چون AP.AB و AN.AC به ترتیب قوتهای نقطهٔ A نسبت به دو دایرهٔ O_2 و O_3 می‌باشند و از طرفی بنابر رابطهٔ (۱۶) این دو قوت برابرند ؛ پس نقطهٔ A روی خط MK قرار دارد و در نتیجه، خط AM محور اصلی دو دایرهٔ O_2 و O_3 است.

با همین شیوهٔ استدلال، نتیجه می‌شود که خط CP محور اصلی دو دایرهٔ O_1 و O_2 است و همچنین خط BN محور اصلی دو دایرهٔ O_1 و O_3 است.

از طرفی می‌دانیم که سه محور اصلی سه دایره، از یک نقطه می‌گذرند (یکی از قضایای هندسه). پس سه خط AM، BN و CP بر یک نقطه می‌گذرند و این نقطه، همان نقطهٔ K می‌باشد.

پس دایره‌های O_1 ، O_2 و O_3 بر نقطهٔ K می‌گذرند لذا چهار ضلعیهای APKN، BMKP و CNKM محاطی‌اند. در چهار ضلعی محاطی KMBP دو زاویهٔ KBP و KMP محاطی‌اند و مقابل به کمان KP اند ؛ پس :

(۱۷) $\angle KMP = \angle KBP$

در چهار ضلعی محاطی KMCN، دو زاویهٔ محاطی KMN و KCN محاطی‌اند و مقابل به کمان KNاند ؛ پس :

(۱۸) $\angle KMN = \angle KCN$

همچنین در چهارضلعی محاطی BCNP، دو زاویهٔ PBN و PCN محاطی‌اند و مقابل به کمان NPاند ؛ پس :

(۱۹) $\angle PBN = \angle PCN$

از سه رابطهٔ (۱۷)، (۱۸) و (۱۹) نتیجه می‌شود که :

(۲۰) $\angle PBN = \angle PCN$

از رابطه‌های (۱۸)، (۱۹) و (۲۰) نتیجه می‌شود :

(۲۱) $\angle AMP = \angle AMN$

از رابطهٔ فوق با توجه به تساوی $\angle PMB = \angle NMC$ ، نتیجه می‌شود که خط AM بر خط BC عمود است.

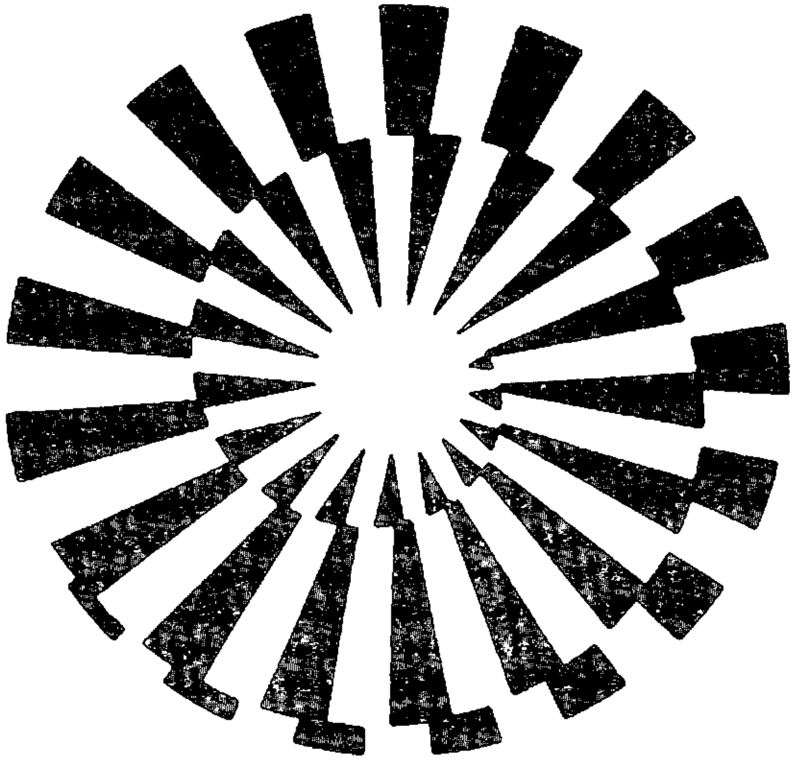
با همین شیوهٔ استدلال، نتیجه می‌شود که خطهای BN و CP به ترتیب بر خطهای AC و AB عمودند. نتیجه می‌شود که سه نقطهٔ M، N و P که رأسهای مثلث با محیط مینیمم‌اند، همان رأسهای مثلث ارتفاعی‌اند.

حلّ دوم نشان می‌دهد که مسألهٔ مورد نظر، فقط یک جواب دارد ؛ یعنی فقط یک مثلث وجود دارد که در مثلث ABC محاط و محیط آن مینیمم می‌باشد.

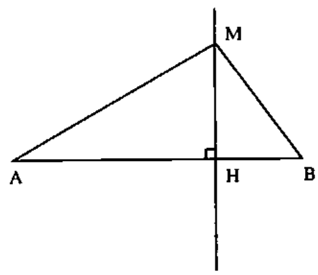
مکان هندسی

(قسمت چهاردهم)

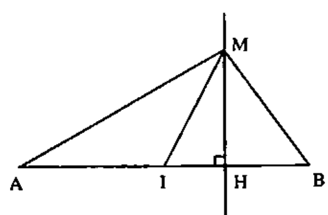
● محمدهاشم رستمی



۱۰. مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه، مقدار ثابت K ($K > 0$) باشد، خطی است راست عمود بر خط AB.



برهان به روش هندسی. وسط پاره‌خط AB را I می‌نامیم. اگر M، یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر باشد، با فرض



$MA > MB$ ، داریم :

$$MA^2 - MB^2 = K \qquad (۱)$$

در مثلث MAB، میانهٔ MI را رسم می‌کنیم و از M عمود MH را بر خط AB فرود می‌آوریم. بنا به رابطهٔ دوم میانه‌ها در مثلث MAB داریم :

$$MA^2 - MB^2 = 2AB.IH \qquad (۲)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود :

$$2AB.IH = K$$

با فرض $AB = a$ ، داریم $2a.IH = K$ ؛ از آن‌جا :

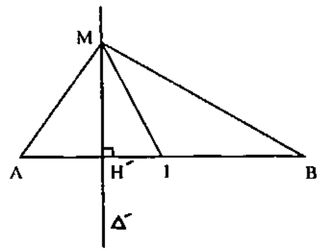
$$IH = \frac{K}{2a} = \text{مقدار ثابت}$$

از رابطهٔ بالا با توجه به ثابت بودن نقطهٔ I نتیجه می‌شود که H نقطهٔ ثابتی است ؛ یعنی همهٔ نقطه‌هایی مانند M که برای آنها $MA^2 - MB^2 = K$ است، روی خط راستی مانند Δ قرار دارند که در نقطهٔ ثابت H بر خط AB عمود است.

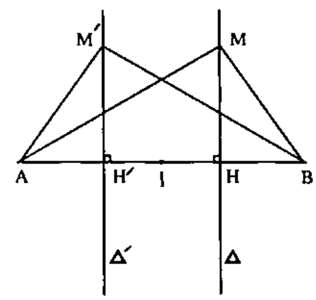
بعکس بسادگی دیده می‌شود که هر نقطهٔ واقع بر این خط عمود (Δ)، تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت K است.

بنابراین مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه، مقدار ثابت K باشد، خطی است راست عمود بر خط AB در نقطه‌ای‌مانند H، به قسمی که اگر نقطهٔ I وسط پاره‌خط AB و $AB = a$ باشد، $IH = \frac{K}{2a}$ است.

نکتهٔ ۱. اگر $MB > MA$ ، یعنی $MB^2 - MA^2 = K$ باشد، مکان هندسی نقطهٔ M خط راستی مانند Δ' ، عمود بر خط AB در نقطه‌ای مانند H' است، به قسمی که H' قرینهٔ نقطهٔ H نسبت به نقطهٔ I است. بنابراین خط Δ' قرینهٔ خط Δ نسبت به نقطهٔ I وسط پاره‌خط AB می‌باشد.



نکتهٔ ۲. اگر $|MA^2 - MB^2| = K$ اختیار شود، هر دو خط Δ و Δ' مکان هندسی نقطهٔ M را تشکیل می‌دهند.



نکتهٔ ۳ (قرارداد). برای روشن شدن رابطهٔ تفاضل مربعها، ترتیب نقطه‌ها را مورد نظر قرار می‌دهیم. بدین ترتیب که اگر گفته شود : مکان هندسی نقطهٔ M را بیابد که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر K است، یعنی $MA^2 - MB^2 = K$ می‌باشد. و اگر گفته شود : مکان هندسی نقطهٔ M را چنان بیابید که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از B و A برابر عدد ثابت K است، یعنی $MB^2 - MA^2 = K$ ، مورد نظر است : مگر این که مسأله، رابطه را به صورت دیگری مطرح کرده باشد.

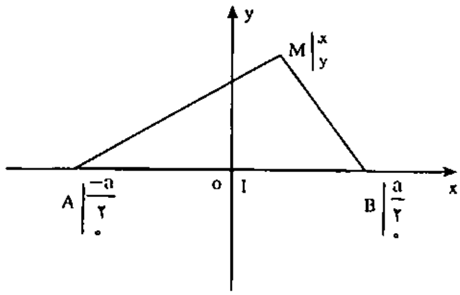
برهان به روش تحلیلی. محور xها را منطبق بر خط AB و عمودمنصف پاره‌خط AB را محور yها اختیار می‌کنیم. با فرض $AB = a$ ، $A(\frac{-a}{2},0)$ و $B(\frac{a}{2},0)$ خواهد بود. اگر $M(x,y)$ یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر، یعنی مکان هندسی نقطه‌ای باشد که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر K است، داریم :

$$A(\frac{-a}{2},0)\ ,\ B(\frac{+a}{2},0)\ ,\ M(x,y)$$

$$MA^2 - MB^2 = K$$

$$\Rightarrow (x+\frac{a}{2})^2 + y^2 - (x-\frac{a}{2})^2 - y^2 = K$$

$$\Rightarrow 2ax = K \Rightarrow x = \frac{K}{2a} = \text{مقدار ثابت}$$



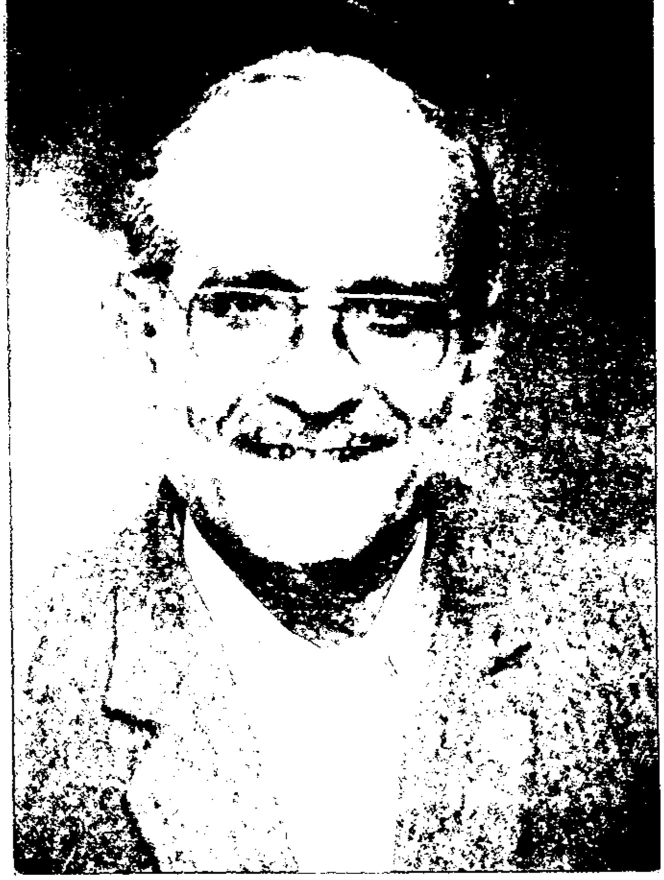
همان‌طوری که دیده می‌شود، مکان هندسی نقطهٔ M خط راستی عمودی بر خط AB است. بدیهی است که هر نقطهٔ واقع بر این خط به مکان هندسی نقطهٔ M تعلق دارد.

یک عدد جالب ریاضی

این عدد ۹ رقمی را خوب نگاه کنید، عدد جالبی است.
در این عدد کلیه اعداد از یک تا ۹ هر کدام یک مرتبه آمده‌اند و خاصیت جالب دیگر این عدد آن است که دو عدد اوّل عدد به عدد ۲ و سه عدد اوّل آن به عدد ۳ و چهار عدد اوّل آن به عدد ۴ و پنج عدد اوّل آن به عدد ۵ و بالاخره نه عدد کل آن به عدد ۹ قابل قسمت است.

۳۸۱۶۵۴۷۲۹

ترجمه: صمد پوراسدا...



در باغ تجربه‌ها

(قسمت دوم)

گفتگو با آقای میرزا جلیلی

□ **قرار شد یک خاطره از یک دانش‌آموز شیطان خود تعریف کنید؟**

■ یک روز صبح سرد زمستانی، در کلاس درس می‌دادم. پنجره‌های کلاس نیز به‌علت سرما بسته بود، در حین تدریس، ناگهان یک گنجشک در کلاس به پرواز درآمد و شروع به این طرف و آن طرف رفتن نمود. نظم کلاس به‌هم خورد. بچه‌ها درس را فراموش کردند و با هیاهو قصد گرفتن گنجشک را داشتند. بالاخره پنجره‌ها را باز کردیم و گنجشک بیرون رفت. بچه‌ها عذرخواهی کردند و قرار شد فرصت بدهیم تا خاطی را خودشان پیدا کنند. زنگ تفریح به صدا درآمد و از کلاس بیرون رفتیم. چند دقیقه بعد، دانش‌آموزی که گریان و ترسیده بود، به من مراجعه کرد که من قصد شیطنت نداشتم؛ صبح زود که آمدم این گنجشک از شدت سرما زیر درختهای مدرسه؛ نیمه جان افتاده بود. من آن را در جیبم گذاشتم که به بچه‌ها نشان بدهم، ولی هوای گرم کلاس باعث شد که گنجشک جان بگیرد و بدون توجه من پرواز کند. من هم حرف او را پذیرفتم و دیگر موضوع را فراموش کردم.

یک معلم خوب، بسیاری اوقات لازم است که از بعضی شیطنت‌های بچه‌ها که از طبیعت سنّی آنها ریشه می‌گیرد، اغماض نماید و فکر کند که بچهٔ خود او هم در خانه از این شیطنتها دارد.

□ **یک کتاب درسی، چند درصد باید خودآموز باشد؟**

■ مؤلف یا مؤلفان اگر معلم بوده و با کلاس و درس و دانش‌آموز سروکار داشته باشند و در کار خود نیز موفق باشند و در کار تألیف کتاب نیز تجربه داشته باشند. و اگر برنامهٔ تنظیم شده، مطابق اصول برنامه‌ریزی صورت گرفته باشد، شرایط و تبصره‌ها نیز به مؤلف اجازه بدهند [مثلاً در محدودیت زمانی قرار نگیرد که ظرف ۳ ماه کتاب را تحویل بدهد] همچنین ایده‌آلی فکر نکند، باید **همهٔ کتاب خودآموز** باشد. چنین معلمی، کتابی که می‌نویسد، ساده، روان و خودآموز است، چون جریان درس کلاس خود را به تقریر درمی‌آورد، برخلاف سینما که اوّل سناریو می‌نویسند، بعد اجرا می‌کنند، این مؤلف ابتدا کار را در کلاس نمایش می‌دهد و بعد سناریو می‌نویسد. درگذشته نیز شیوهٔ تألیف کتابها به همین صورت بوده است. یک یا دو دبیر موفق که به زبان خارجی هم تسلط داشته‌اند، بعد از سالها تدریس و کلاس رفتن و جزوه گفتن مؤلف می‌شدند. یعنی جزوهٔ ساده و روان کلاس خود را به کتاب تبدیل می‌کردند.

□ نظر شما راجع به کتابهای ریاضی پیش‌دانشگاهی چیست؟

■ چون این کتابها کلمه «دانشگاهی» را یدک می‌کشند، اولاً مؤلفان، همه از دانشگاهیان انتخاب شده‌اند، ثانیاً خود مؤلفان نیز دچار سوء برداشت در تألیف شده‌اند. یعنی محتوا و شیوهٔ کتابها عیناً به‌صورت کتابهای دانشگاهی ارائه شده است، که در مقایسه با **محتوای کتابهای چهارم نظام فعلی، هم محتوا و هم شیوه به‌صورت کاملاً جهشی تغییر کرده است.** این کتابها، افزون بر محتوای سطح بالا و فشردگی، مطالب آنها نیز هم آهنگی با کتابهای ریاضی ۳ ساله دبیرستان را ندارد. ریاضیات گُسسته، اخیراً بین دانشمندان ریاضی و در دانشگاهها اسم و رسم تازه‌ای پیدا کرده است نه در دبیرستان! اگر قرار باشد در دبیرستان از ریاضیات گُسسته مطالبی آورده شود، باید مثل کتابهای نظام فعلی بخش مختصری در یک کتاب آورده شود. نگاشتهای خطی با آن فشردگی نه هم آهنگی با بخشهای قبلی خود کتاب دارد و نه برای دبیرستان مناسب است. ترکیبیات در دبیرستان باید در همین حدود کتابهای فعلی آورده شود، چه، وقتی مطلب در این زمینه اوج می‌گیرد، درک آن برای همهٔ دانش‌آموزان مشکل می‌شود و بیشتر به درد دانش‌آموزان المپیادی می‌خورد.

□ نظرتان نسبت به ریاضی سنتی ایران چیست؟

■ درگذشته، ریاضیات دبیرستانی در ایران، متأثر از ریاضیات فرانسه بوده است که هم نظم و ترتیب خاص خود را داشته و هم یک ریاضیات استدلالی و قوی بوده است که در عین حال مطابق استاندارد بین‌المللی زمان بوده است و این سنّت نسل به نسل حفظ شده و هندسه از مرحوم غلامحسین رهنما (در ابتدا از آلمانی برگردانده شده) و بعدها *حسین هورفر*، *حسین مجذوب*، *حسین غیور*، *احمد بیرشک* و حساب و جبر از پروفسور *تقی فاطمی*، *محسن هنربخش* و بعدها آقایان *صفاری و قربانی* و بالاخره تا به آقایان *پرویز شهریاری*، *غلامرضا عسجدی و عبدالحسین مصحفی* رسیده است و امروز نیز در دست ماست. ما با این ریاضیات در صحنه‌های بین‌المللی درخشیده‌ایم، مدال طلا آورده‌ایم و مهندس ما با خواندن همین ریاضیات امروز، همهٔ پروژه‌های علمی و صنعتی را در کشور و حتی درخارج از کشور پیاده می‌کند.

□ نظرتان نسبت به ریاضی امروز چیست؟

■ راجع به ریاضی امروز، چیز جالبی نمی‌توان گفت. در سه سال اوّل دبیرستان ـ تا اندازه‌ای ـ ریاضی سبک و کم‌عمق به بچه‌ها می‌دهیم که احیاناً نظم و ترتیب هم ندارد و در سال آخر هم یک ریاضی می‌دهیم که ناهماهنگ با ۳ سال اوّل بوده و تدریس آن نیز مشکل دارد و یادگیری آن هم آسان نیست.

□ کدام‌یک از اساتید شما بیشترین اثر را روی شما داشته است؟

■ از بین اساتید شادروان دکتر *محمدعلی مجتهدی*، از نقطه‌نظر عشق و ایمانی که به کار خود داشت و همهٔ زندگی او در هدف مقدس خود، که تربیت و پیشرفت دانش‌آموزان بود خلاصه می‌شد.

به ایشان می‌گفتند، «فلان دبیر پشت‌سر شما بدگویی می‌کند» سؤال می‌کرد، «آیا آن دبیر خوب درس می‌دهد؟ آیا بچه‌ها از او راضی هستند؟» وقتی می‌گفتند : «بله» جواب می‌داد : «عیب ندارد **هدف و همه‌چیز آموزش بچه‌هاست**، من چه‌کاره‌ام، او باشد و کارش را ادامه دهد».

□ کدام‌یک از دانش‌آموزان گذشته شما صاحب‌نام شده‌اند؟

■ آقای دکتر *ملکزاده* وزیرسابق بهداشت و علوم پزشکی در کازرون دانش‌آموز بنده بوده است و آقای دکتر *نظام‌وفا* که اکنون در M.I.T از متخصصان تحقیقات فضایی و هوشهای مصنوعی است، ایشان هم در البرز شاگرد بنده بوده است. به‌عنوان خاطره، از یک دانش‌آموز قوی عرض کنم که اغلب دبیران با هم بحث می‌کردند که هر وقت *وفا* در کلاس دست بالا می‌کند، پشت ما می‌لرزد، چون یا اشتباه کرده‌ایم یا حق‌مطلب را خوب ادا نکرده‌ایم. این خاطره، این

نکته را یاد می‌دهد که دبیر هرچه قوی باشد باید با مطالعه قبلی و طرح درس به کلاس برود تا سؤال دانش‌آموزان، او را به لرزه نیندازد.

□ روش تدریس کدام یک از معلّمان خود را می‌پسندید؟

■ روش تدریس شادروان پروفسور تقی *فاطمی* در نوع خود بی‌نظیر بود. هم از لحاظ نظم کار و هم از نظر صغری و کبری چیدن در درس، بر یک صندلی تکیه می‌کرد و با آهنگ جاذب خود درس می‌داد. او همیشه به دانشجویان دبیر توصیه می‌کرد که من پس از ۴۰ سال تلاش در این درس، هنوز وقتی به کلاس می‌آیم، شب قبل از آن، درس را مطالعه می‌کنم. جان کلام او این بود که همکاران دبیر همیشه باید با مطالعه به کلاس بروند.

□ کتابهای جنبی یا کمک درسی، چه شرایطی باید داشته باشد؟

■ بنده در این زمینه مقاله مفصّلی در رشد آموزش ریاضی شماره ۲۸ سال هشتم زمستان ۱۳۶۹ نوشته‌ام که مطالعه آن به خوانندگان توصیه می‌شود.

□ شما با نظام سالی موافقید یا نظام ترمی؟

■ به علت شرایط اقلیمی و سنتهای آموزشی نظام سالی در کشور ما، کارایی بیشتر دارد. در شهرستانها و حتّی خود تهران، اغلب اتفاق می‌افتد که دو یا سه هفته از سال تحصیلی می‌گذرد و برای یک یا دو درس، هنوز دبیر مناسب پیدا نکرده‌اند یا معرفی نشده است یا اتفاق می‌افتد که دبیری در نیمه‌های ترم ــ به دلایلی ــ کلاس و مدرسه را ترک می‌کند و مسئولان معمولاً دو سه هفته جستجو می‌کنند تا دبیر توانا‌تری که جوابگوی دانش‌آموزان باشد، پیدا کنند یا دبیری خدای نخواسته، ۲ یا ۳ هفته مریض می‌شود و یا مشکل خانوادگی پیدا می‌کند و کلاسش تعطیل می‌شود. این دو یا سه هفته‌ها در مقایسه با ۲۹ هفته مفید نظام سالی تأثیر چندانی روی پیشرفت کار دانش‌آموزان نمی‌گذارد، ولی در مقایسه با ۱۲ هفته مفید نظام ترمی مسلماً اثر می‌گذارد و دانش‌آموز ضرر می‌کند. در نظام سالی، از دانش‌آموز در یک مطلب (مثلاً اتحادها و تجزیه) چندین مرتبه امتحان به‌عمل می‌آید و دانش‌آموز درس را تکرار و تکرار می‌کند تا یاد بگیرد. البته مضمون «الدرس حرفٌ و التکرار الفٌ» زیاد مورد قبول طرفداران ترمی و آموزش ریاضی نیست. یعنی در نظام ترمی، دانش‌آموز به مرحلهٔ «مهارت و سرعت» نمی‌رسد و لذا در نظام سالی عملکرد دانش‌آموز به مراتب از نظام ترمی بهتر است. اگر در نظام ترمی دانش‌آموز در هر ترم ۴ یا ۵ درس بخواند و هر درس ۶ ساعت در هفته باشد شاید مفید واقع شود. ولی در نظام ترمی فعلی فقط یکی دو تا کتاب از نظام سالی کمتر دارند و حجم کتابها هم بعضاً از کتاب نظام سالی کمتر نیست، بنابراین دبیر باید تندتند درس بدهد و دانش‌آموز تندتند بنویسد و پخته کرده یا نکرده یاد بگیرد. در نظام جدید، تا دانش‌آموز می‌آید موقعیت خود را در مدرسه درک کند، امتحان شروع شده و «مات» می‌شود.

□ می‌گویند در نظام جدید، افت تحصیلی دروس ریاضی، فیزیک، شیمی و زبان زیاد است، نظر شما چیست؟

■ از قدیم در این دروس افت تحصیلی وجود داشته. صادق مدعا نیز دفاتر کارنامه سالهای ۷۰ و قبل از آن است. با همان کتابهایی که سالها جا افتاده بود و دبیر هم مسلّط در کار خود بود، با این همه، افت تحصیلی در ریاضی وجود داشته است. همین الان در دورهٔ راهنمایی نیز این افت وجود دارد. این افت، عوامل متعددی دارد و کتاب شاید جزء بسیار بسیار کوچکی از آن باشد.

□ شما با امتحان کنکور سراسری پیش‌دانشگاهی موافقید؟

■ صد در صد مخالفم. این آزمون غیرمنطقی است. یک وزارتخانه، برای وزارتخانه‌ای دیگر امتحان می‌گیرد. که شاید هنوز با زیر و بم کار و کلاسهای دبیرستانی نیز آشنا نباشد. ظاهراً مقامات دو دلیل برای برگزاری این آزمون ذکر کرده‌اند. الف ــ صرفه‌جویی مالی ب ــ برای آن‌که داوطلب هنرستانها زیاد شود. اگر آزمون نباشد همهٔ بچه‌ها دنبال رشته نظری می‌روند و داوطلب هنرستانها کم می‌شود.

دلیل اوّل مردود است، زیرا دانش‌آموزان مردودی که هر سال روانه خیابانها می‌شوند، چه بسا فردا مشکلاتی برای جامعه ایجاد کنند که هزینه آن به مراتب بیشتر از آن صرفه‌جویی باشد. در مورد دلیل دوم راننده‌های تاکسی مثالی دارند می‌گویند مسافر تاکسی هیچگاه سوار اتوبوس نمی‌شود. دانش‌آموز علاقه‌مند به رشتهٔ نظری اگر چند سال هم مردود شود هیچ‌گاه به هنرستان نمی‌رود! اما هیچ‌گاه به دلهره‌ها، تشویشها، نگرانیها، جنگ اعصاب خانواده‌ها، مریضی این نوجوانان به‌علت شور زدنهای زیاد و هزینه سنگینی که بابت گرفتن دبیر خصوصی برای آماده شدن به این امتحان بر خانواده‌ها تحمیل می‌شود، فکر کرده‌اید؟ چینی‌ها می‌گویند «یک گربه سالم و چاق بهتر از یک پروفسور لاغر و مریض است.»

□ نظر شما راجع به کنفرانس آموزش ریاضی کشور چیست؟

■ با توجه به بحثهایی که در دو کنفرانس گذشته شده و ضعف شدید آموزگاران و دبیران راهنمایی کشور، این کنفرانس برای آموزگاران و دبیران راهنمایی می‌تواند بیشتر مفید باشد. به‌ویژه که اولاً آموزگاران حرف‌شنوتر و به علت ضعف خود مطالب و توصیه‌ها را بیشتر می‌پذیرند و اعتقاد پیدا می‌کنند. ثانیاً اینها واقعاً نیاز به راهنمایی و ارشاد بیشتری دارند. آموزگاران، در ایران بسیار قالبی تدریس می‌کنند و در زمینه تدریس نیاز به کمک دارند.

دبیران دبیرستان نیز، مثل گذشته می‌توانند از کنفرانس ریاضی ایران استفاده کنند بدین معنا که قسمتی از کار انجمن ریاضی، همکاری با وزارت آموزش و پرورش برای ارائهٔ سخنرانیهای علمی، آموزش مفید جهت دبیران اختصاص داده شود.

□ به‌عنوان آخرین سؤال، شما با تجربه سالها تدریس در کلاس و کار برنامه‌ریزی، چه توصیه یا چاره‌اندیشی می‌کنید؟

■ یک برنامه‌ریز معروف می‌گوید: «برنامه و کتاب مثل دان مرغ نیست که تا کیفیت نامرغوب یا کم شود، ماه بعد در بازار اثر بگذارد و سروصدای مردم بلند شود. نتیجه و اثر یک برنامه یا یک کتاب نامناسب ۱۰ یا ۱۲ سال بعد در جامعه آشکار می‌گردد (حذف امتحانهای ۴ ساله ابتدایی دکتر مهران).

نظر من به‌عنوان یک دبیر با ۴۷ سال تدریس و بیش از ۲۰ سال کار برنامه‌ریزی و به عنوان ولی یک دانش‌آموز که هم‌اکنون در سال سوم نظام جدید تحصیل می‌کند از این قرار است:

الف ــ تجدیدنظر در محتوای کتابهای پیش‌دانشگاهی به‌وسیلهٔ خود مؤلفان با همکاری یکی دو دبیر مسلط و کارکرده، امری ضروری، اجتناب‌ناپذیر و فوری است و در اولویت قرار دارد، فرصت را نباید از دست داد. مطالب این کتابها باید باز و گسترده شود و احیاناً قسمتهایی که مشکل تدریس دارد حذف شود و یا اگر لازم است حجم بعضی کتابها مورد تجدیدنظر قرار گیرد و یک هماهنگی تنگاتنگ با کتابهای سه سال اوّل دبیرستان پیدا نمایند. دلیل این حرفها نیز نتیجه آزمون سراسری بچه‌های نظام جدید است.

ب ــ اضافه کردن هر نوع کتاب یا درس جدید به کتابهای موجود نظام جدید، بدون ارائه یک طرح اساسی ۴ ساله ریاضی دبیرستان، نه تنها مشکلی از آموزش ریاضی کشور را حل نمی‌کند، بلکه سردرگمی‌های بیشتر و معضلات تازه‌ای نیز ایجاد خواهد کرد. و آیندگان شاهد ماجرا خواهند بود.

ج ــ در مورد شورای فعلی برنامه‌ریزی ریاضی، به نظر من لازم است خون تازه‌ای در شورا دمید و عده دیگری ــ اعم از دبیر و یا استاد از دانشگاههای مختلف با رشته‌های تحصیلی مختلف از همهٔ کشورها ــ به شورا اضافه شوند و با صرف وقت و فرصت کافی و مطالعه در برنامه و کتابهای ریاضی ۴ سالهٔ دبیرستان‌های چند کشور و توجه به سنت، نیاز کشور و شرایط اجرا، با بودجه‌بندی زمانی، یک برنامه ۴ ساله ریاضی را یکجا طرح و ارائه و به تصویب صاحب‌نظران رسانند. کتابها نیز **تحت شرایط قابل کنترل و خاصی آزاد اعلام شود، تا همه علاقه‌مندان در تألیف به رقابت بپردازند.**

د ــ توجه شود که اجزای یک نظام آموزشی پیوسته و بهم مربوط است. مشکلات دیگری در متن نظام جدید وجود دارد که دقیقاً باید به آنها توجه شود.

مثلاً در جایگزینی نظام سالی به جای ترمی، یک مطالعه داخلی و بین‌المللی شروع گردد؛ آیا ترم خاص دانشگاه است یا در جای دیگر دنیا و دبیرستان هم ترمی است؟

هـ ــ مشترک بودن سال ۱ و ۲ دبیرستان، مشکلاتی ایجاد کرده است که بهتر است دانش‌آموزان یک سال مشترک داشته باشند و این سال مشترک نیز به دورهٔ راهنمایی منتقل شود تا دانش‌آموزان در دورهٔ ۴ ساله راهنمایی دروس مشترک بخوانند. برای ۳ سال دبیرستان نیز یک برنامه جدّی و قوی برای رشته‌های ریاضی و تجربی در نظر گرفت.

و ــ تقسیم دبیرستانها به نمونه مردمی، رشد، غیرانتفاعی، شاهد، تیزهوشان، مدارس مؤسسات مختلف مثل بانک ملی، انرژی اتمی یا ... و دولتی باعث شد که دانش‌آموزان خوب غربال شده و به طرف این مدارس کشیده شوند و آنچه برای دبیرستانهای دولتی باقی می‌ماند، دانش‌آموزان ضعیف است که دبیر رغبت تدریس در آن کلاسها را ندارد و افت تحصیلی در این مدارس بویژه در سال اوّل دبیرستان سال به سال بیشتر می‌شود و عده‌ای نیز آن را به حساب کتابها می‌گذارند.

ز ــ تفاوت حق‌التدریس دبیر در مدارس مختلف نیز دبیران خوب را به مدارس خاصی سوق داده که این مدارس اغلب کار خود را از نیمه مردادماه یا زودتر، با پرداخت حق‌التدریس بالا شروع می‌کنند. جای شهید رجایی، دبیر ریاضی دلسوز خالی است که در اوایل انقلاب، هر چه به او اصرار کردند که مدرسهٔ البرز با وضع موجود باقی بماند، راضی نشد و می‌گفت: «این برخلاف قسط اسلامی است که ما همهٔ امکانات و دبیران خوب را در اختیار بچه‌های پولدار قرار بدهیم!.»

ح ــ در خاتمه، اضافه کنم که به‌نظر بنده، اعضای شورای ریاضی فعلی دفتر، همه کارشناس هستند و گروه ریاضی دفتر نیز از افراد جوان و موّجه تشکیل شده است. آنچه اجازه نداده که **برنامه و کتابها مناسب درآید، شتاب در کارها** بوده که موجب عدم رعایت اصول برنامه‌ریزی و تألیف و عدم هدایت صحیح کار شورای برنامه‌ریزی، در جهت اهداف نظام جدید شده است. حالا که کار برنامه‌ریزی و تألیف در نظام جدید پایان یافته است، لازم است اعضای شورا و مؤلفان نظام جدید، دورهم بنشینند و نظری به گذشته بکنند و کارهای انجام شده را دقیقاً مورد ارزیابی قرار دهند و ضعف و قوتها را جستجو و پیدا نمایند و نسبت به یک برنامه‌ریزی اصولی و منطقی، هرچه زودتر دست به کار شوند.

انگیزهٔ انجام این مصاحبه فقط رعایت مضمون «کُلهم راعٍ و کُلهم مسئول» بوده است.

• ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور

طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روش مقدماتی (۲۲)

● مسألهٔ نامه‌های با نشانیهای نادرست برنولی ـ اویلر

از: 100 Great Problems of Elementary Mathematics

تعیین تعداد جایگشتهای n عنصر که در آن هیچ عنصری در محل طبیعی خود نباشد.

ایـن مـسألـه ابتـدا توسط «**نیکولاس برنولی**» Niclaus Bernoulli (۱۶۸۷ـ۱۷۵۹)، برادرزادهٔ ریاضیدانهای بزرگ «**یاکوب**» (Jacob) و «**یوهان**» (Johann)، «**برنولی**» مطرح شد. بعدها «**اویلر**» به مسأله توجه کرد و آن را *quaestio curiosa ex doctrina combinationis* (مسأله‌ای شگفت از نظریهٔ ترکیبیّات) نامید و مستقل از برنولی حل کرد.

این مسأله را می‌توان به صورتی واقعی‌تر، به عنوان **مسألهٔ نامه‌های با نشانیهای نادرست** بیان کرد :

شخص n نامه می‌نویسد و نشانیهای مربوط به هر نامه را بر n پاکت یادداشت می‌کند. چند طریق مختلف برای قرار دادن جمیع نامه در پاکتهای با نشانی نادرست وجود دارد؟

این مسأله، بخصوص، به خاطر راه حل هوشمندانه‌اش، جالب توجه است.

فرض می‌کنیم نامه‌ها به صورت a، b، c، ... و پاکتهای مربوطه به صورت A، B، C و ... مشخص شده باشند و فرض می‌کنیم تعداد قرار دادن نامه‌ها در پاکتهای نادرست را که در جستجوی آنیم، با $\overline{n}$ مشخص کرده باشیم.

ابتدا جمیع حالتهایی را که در آنها a در B و b در A قرار می‌گیرد، به عنوان گروه اوّل و جمیع حالتهایی را که در آنها a در B و b قرار می‌گیرد، اما b در A قرار نمی‌گیرد، به عنوان گروهی دیگر در نظر می‌گیریم.

گروه اوّل به طور واضح شامل $\overline{n-2}$ حالت است.

تعداد حالتهای واقع در گروه دوم را می‌توان تعیین کرد. اگر به جای b، c، d، e، ... و A، C، D، E، ... ، مثلاً بنویسیم b′، c′، d′، e′، ... و B′، C′، D′، E′ و ... . بنابراین، تعداد مطلوب $\overline{n-1}$ است.

بنابراین، تعداد جمیع حالتهایی که در آنها a به B ختم می‌شود، $\overline{n-1}+\overline{n-2}$ است. از آن جا که هر عمل قرار دادن «a در C»، «a در D»، ... تعدادی حالت برابر به‌دست می‌دهد. $\overline{n}$، تعداد کل جمیع حالتهای ممکن عبارت است از :

$$\overline{n}=(n-1)\left[\overline{n-1}+\overline{n-2}\right]$$

این فرمول دوری را چنین می‌نویسیم :

$$\overline{n}-n.\overline{n-۱}=i\left[\overline{n-۱}-(n-۱).\overline{n-۲}\right]$$

که در آن i ریشهٔ دوم ۱- را نمایش می‌دهد و آن را در مورد شماره‌های نامه‌ای ۳، ۴، ۵ و ... تا n به کار می‌برد. به این ترتیب، به‌دست می‌آوریم :

$$\overline{۳}-۳.\overline{۲}=i\left[\overline{۲}-۲.\overline{۱}\right]$$

$$\overline{۴}-۴.\overline{۳}=i\left[\overline{۳}-۳.\overline{۲}\right]$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\overline{n}-n.\overline{n-۱}=i\left[\overline{n-۱}-(n-۱).\overline{n-۲}\right]$$

با ضرب این $(n-۲)$ معادله درهم، به‌دست می‌آوریم :

$$\overline{n}-n.\overline{n-۱}=i^{n-۲}\left[\overline{۲}-۲.\overline{۱}\right]$$

یا، از آن‌جا که $\overline{۱}=۰$ ، $\overline{۲}=۱$ و $i^{n-۲}=i^n$ ،

$$\overline{n}-n.\overline{n-۱}=i^n$$

سپس این معادله را بر $n!$ تقسیم می‌کنیم، که می‌دهد :

$$\frac{\overline{n}}{n!}-\frac{\overline{n-۱}}{(n-۱)!}=\frac{i^n}{n!}$$

اگر در این فرمول، به جای n از سری ۲، ۳، ۴، ... و n قرار دهیم، به‌دست می‌آوریم :

$$\frac{\overline{۲}}{۲!}-\frac{\overline{۱}}{۱!}=\frac{i^۲}{۲!}$$

$$\frac{\overline{۳}}{۳!}-\frac{\overline{۲}}{۲!}=\frac{i^۳}{۳!}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\overline{n}}{n!}-\frac{\overline{n-۱}}{(n-۱)!}=\frac{i^n}{n!}$$

جمع این $(n-۱)$ معادله (از آن‌جا که $\overline{۱}=۰$) به برابری زیر می‌انجامد :

$$\frac{\overline{n}}{n!}=\frac{i^۲}{۲!}+\frac{i^۳}{۳!}+\ldots+\frac{i^n}{n!}$$

سرانجام از این رابطه می‌توانیم $\overline{n}$ ، تعداد مطلوب، را به‌دست آوریم :

$$\overline{n}=n!\left(\frac{۱}{۲!}-\frac{۱}{۳!}+\frac{۱}{۴!}-\cdots+\frac{i^n}{n!}\right)$$

اگر A نمادی را چنان نمایش دهد که کاربرد قضیهٔ دوجمله‌ای در مورد $(A-۱)^n$ نوشتن $۷!$ را برای $A^۷$ ، هر توان بسط دوجمله‌ای، مجاز کند، تعداد مطلوب را می‌توان به صورت ساده‌تر زیر نوشت :

$$\overline{n}=(A-۱)^n$$

به عنوان مثال، به ازای مقداری چون $n=۴$ ، به‌دست می‌آوریم :

$$\overline{۴}=(A-۱)^۴=A^۴-۴A^۳+۶A^۲-۴A+۱$$
$$=۴!-۴.۳!+۶.۲!-۴.۱!+۱=۹$$

که به سادگی می‌تواند با امتحان کردن آزمایش شود.

به همین ترتیب، تعداد جایگشتهایی که می‌توان از n عنصر، چنان تشکیل داد که در آنها هیچ عنصری در محل طبیعی خود نباشد، $(A-۱)^n$ است.

به عنوان مثال، به ازای چهار عنصر ۱، ۲، ۳، ۴، نه جایگشت زیر موجودند :

۲۱۴۳,۲۳۴۱,۲۴۱۳,۳۱۴۲,۳۴۱۲,۳۴۲۱,۴۱۲۳,۴۳۱۲,۴۳۲۱

یادداشت: نتیجهٔ به‌دست آمده، شامل راه حل مسألهٔ «دترمینان» نیز هست :

در مؤلفهٔ یک دترمینان درجهٔ n، عنصرهای قطر اصلی رخ نمی‌دهند؟

این موضوع، در صورتی که عنصر r ام از ستون s ام را C_r^s بنامیم، بلافاصله به‌دست می‌آید. به این ترتیب، عنصرهای قطر اصلی عبارتند از :

$$C_۱^۱, C_۲^۲, C_۳^۳, \ldots, C_n^n$$

در این صورت، دترمینان مورد بحث، شامل $(A-۱)^n$ مؤلفهٔ بیرون از عنصرهای قطر اصلی است.

دربارهٔ سال ۲۰۰۰، سال جهانی ریاضیات

● بهزاد منوچهریان

عضو هیأت علمی دانشگاه شاهد و
عضو گروه عمومی کردن ریاضیات

به نام خدای دانا و توانا

روز ششم ماه مه سال ۱۹۹۲ میلادی در ریودوژانیرو، همزمان با جشن چهلمین سالگرد تأسیس مؤسسهٔ ریاضیات محض و کاربردی برزیل (IMPA) که از شهرت جهانی برخوردار است، پروفسور ژاک‌لویی‌لیون، رئیس اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضی (IMU) به نام این اتحادیه اعلام کرد که سال ۲۰۰۰ (از ۱۱ دی ۱۳۷۸ تا ۱۰ دی ۱۳۷۹) سال جهانی ریاضیات خواهد بود. سپس یونسکو نیز از این موضوع حمایت کرد.

در بیانهٔ ریودوژانیرو سه هدف برای برپایی «سال جهانی ریاضیات» تعیین شده است:

۱ ـ چالشهای بزرگ قرن بیست‌ویکم

همان‌طور که در سال ۱۹۰۰، دیوید هیلبرت ریاضیدان بزرگ آلمانی در دومین کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان، ۲۳ مسألهٔ مبارزطلب را به جامعهٔ جهانی ریاضی ارائه کرد، که در پیشرفت ریاضیات در قرن حاضر سهم بسزایی داشتند، قرار است چند تن از ریاضیدانان برجستهٔ جهان، مسائل مهم و مبارزطلب ریاضی را در سال ۲۰۰۰ به جهانیان عرضه کنند. بی شک این مسائل در جهت‌گیری تحقیقات ریاضی در قرن بیست‌ویکم نقش خواهند داشت.

۲ ـ ریاضیات، کلید پیشرفت

ریاضیات محض و کاربردی از کلیدهای اصلی فهم جهان هستند و از این‌روست که لازم است تمامی کشورهایی که هنوز به عضویت اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضی درنیامده‌اند، تلاش کنند سطح ریاضیات خود را به حدی برسانند که بتوانند به عضویت این اتحادیه درآیند. این امر مستلزم تلاشهای چشمگیر در زمینهٔ

آموزش و پرورش و دستیابی به اطلاعات علمی است. هم‌اکنون ۵۰ کشور در این اتحادیه عضویت دارند و کشور ما نیز عضو این اتحادیه می‌باشد.

۳ ـ عمومی کردن ریاضیات

سوّمین و مهمترین هدفی که در بیانیهٔ ریودوژانیرو آمده، عبارت است از حضور گستردهٔ ریاضیات در جامعهٔ اطلاعاتی، طبق یک برنامهٔ منظم و اصولی از طریق ارائهٔ مثالها و کاربردهایی از ریاضیات که از یک طرف از لحاظ علمی دقیق بوده و از طرف دیگر برای عموم مردم قابل فهم باشد. به بیان دیگر این همان عمومی کردن ریاضیات است.

ستاد ملّی سال جهانی ریاضیات

کشور ما نیز به منظور تدارک امکانات و بسیج نیروها برای ارتقای کیفیت آموزش و پرورش ریاضی به این نهضت جهانی پیوسته است.

برای این منظور ـ البته با تأخیر چند ساله ـ از آبان ماه سال ۱۳۷۵، «ستاد ملّی سال جهانی ریاضیات» تشکیل شده است. ریاست عالیهٔ این ستاد به عهدهٔ رئیس جمهور محترم است که خود نشان‌دهندهٔ اهمیت پرداختن به این مهم می‌باشد. دیگر اعضای ستاد عبارتند از: وزیر فرهنگ و آموزش عالی (رئیس ستاد)، وزیر آموزش و پرورش، وزیر فرهنگ و ارشاد اسلامی، وزیر پست و تلگراف و تلفن، رئیس سازمان صدا و سیما، معاون پژوهشی وزارت فرهنگ و آموزش عالی (دبیر ستاد)، رئیس مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات، یکی از معاونین وزارت آموزش و پرورش، مدیرکل دفتر همکاریهای علمی و بین‌المللی وزارت فرهنگ و آموزش عالی، دبیرکل کمیسیون ملی یونسکو در ایران، دبیر انجمن ریاضی ایران، دبیر انجمن‌آمار‌ایران و آقایان استاد احمد بیرشک به عنوان رئیس دانشنامهٔ بزرگ فارسی، دکتر مهدی رجبعلی‌پور، دکتر سیاوش شهشهانی، دکتر علی‌رجالی و یحیی تابش.

در اینجا یادآور می‌شویم که اولّین کسی که از موضوع اعلام سال جهانی ریاضیات مطلع شد، استاد احمد بیرشک بود و ایشان وزارت فرهنگ و آموزش عالی و انجمن ریاضی ایران را مطلع نمودند و این غفلت بزرگ جامعهٔ علمی و فرهنگی در این عصر ارتباطات سریع، تفکر برانگیز است.

برنامه‌های اصلی ستاد، دربارهٔ دو محور زیر تعیین شده است:

۱ ـ احیا و پیشبرد دانش ریاضی

۲ ـ عمومی کردن ریاضیات

این ستاد به منظور تحقق دو هدف خطیر فوق ۷ گروه تشکیل داده است. گروه‌های عمومی کردن ریاضیات، آموزش ریاضی در دانشگاه‌ها، آموزش ریاضی در آموزش و پرورش، پژوهش، انتشارات، تاریخ ریاضیات و نقش ریاضی در توسعه، گروه‌هایی هستند که با فعالیتهای خود درصدد تحقق بخشیدن به این دو هدف مهم در کشور هستند.

این ستاد تاکنون ۵ جلسه داشته است.

البته گفتنی است که این گروه‌ها زیر نظر «کمیتهٔ برنامه‌ریزی» کار می‌کنند و پیشنهادات و تصمیمات خود را به این کمیته ارائه می‌دهند تا پس از تصویب، مقدمات اجرایی آن فراهم شود. کمیتهٔ برنامه‌ریزی برای اخذ تصمیمات مهم در راستای برنامه‌ریزی هرچه اصولی‌تر برای سال جهانی ریاضیات تاکنون ۲۴ جلسه داشته است.

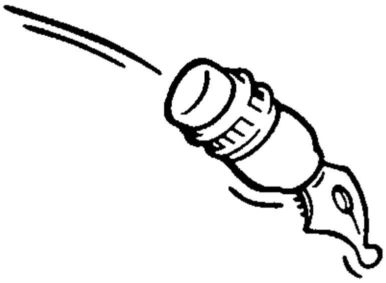
در همایش یک روزه‌ای که در دانشگاه صنعتی شریف با حضور وزیر فرهنگ و آموزش عالی و معاون پژوهشی آن وزارت، رئیس دانشگاه صنعتی شریف، استاد احمد بیرشک و برخی از اعضای ستاد ملی سال جهانی ریاضیات و گروه‌های کاری مربوط به آن و نیز عدهٔ زیادی از استادان و دانشجویان ریاضی دانشگاه‌های سراسر کشورمان در روز پنجشنبه ۲۱ خرداد ماه جاری تشکیل شد، علاقه‌مندان به بحث و بررسی پیشنهادات رسیده و کارهای انجام شده توسط گروه‌های کاری پرداختند. لازم به ذکر است که مجموعهٔ عظیمی از فعالیتهای نوشتاری و گفتاری و برنامه‌ریزی در رابطه با سال جهانی ریاضیات در دست انجام است و می‌توان گفت اولّین کارها (نظیر دومین کنفرانس آموزش ریاضی) از اواسط سال ۷۶ آغاز شده است.

باید منتظر باشید تا ببینید که امسال و سال آینده چه فعالیتهای فرهنگی ریاضی در جای‌جای میهن اسلامی‌مان انجام می‌شود. شاید شما هم بتوانید با علاقه و پشتکار در راستای عمومی کردن ریاضیات با برپایی مراسمی پرمحتوا در مدرسهٔ خود نقشی داشته باشید.

برای کسب خبر و یا ارائهٔ پیشنهادات خود می‌توانید با دبیرخانهٔ ستاد ملی سال جهانی ریاضیات به نشانی تهران ـ خیابان انقلاب اسلامی ـ نبش خیابان فلسطین ـ ساختمان بنیاد فجر ـ شمارهٔ ۱۱۸۸ ـ طبقهٔ ششم ـ حوزهٔ معاونت پژوهشی وزارت فرهنگ و آموزش عالی ـ دبیرخانه ستاد ملی سال جهانی ریاضیات، تماس بگیرید.

تلفن: ۶۴۶۲۱۷۵

آنچه از دوست رسد...



با عرض سلام، خدمت همگی دانش‌آموزان و خوانندگان مجلهٔ ریاضی برهان.

دوستان گرامی، هر روز نامه‌های پرمحتوا و مقاله‌ها و مسائل شما در دفتر مجله به دستمان می‌رسد. از این که نسبت به مقالات و مسائل مجله اظهارنظر می‌کنید، بسیار سپاسگزاریم. خدای بزرگ را سپاسگزاریم که توفیق خدمتی هر چند کوچک را به ما ارزانی داشته است. امیدواریم که سال تحصیلی جدید را با جدیّت کامل شروع کرده باشید، تا در آینده بتوانید به عنوان فردی متخصص و متعهد به ایران اسلامی خدمت نمایید؛ ان‌شاءا....

اسامی تعدادی از خوانندگان مجلهٔ ریاضی برهان که برای ما نامه ارسال کرده‌اند:

آقایان: هادی شریفیان (گنبدکاووس)، سجاد پوررحیمی‌آذر (آذربایجان شرقی)، محمد تولی (قم)، مهدی درودیان (تهران)، نیما توسّلی رودسری (تنکابن)، رضا رضازادگان (اهواز)، حسین عربعامری (شاهرود)، رستم نوری (گنبدکاووس)، محمد اصل‌فلاح (دانشجوی ریاضی، قزوین)، مهدی حسنی (زنجان)، سیدضیاء حسینی (کرمان)، محمدسعید مقدسی (اراک)، محمدمهدی شیخ کاظمی (رامسر)، حامد (رامین) غلامی (دانشجوی مکانیک مازندران)، عادل جلالی (اهواز)، مهدی گودرزی (درود) و خانم لاله جانبازی (قائمشهر).

از همگی شما برای ارسال مقاله‌های درسی و کمک درسی، مسأله، تست و معمّا با راه حل تشریحی سپاسگزاریم. در صورت امکان از مقاله‌ها و مسائل ارسالی شما عزیزان، پس از تصویب در هیأت تحریریه استفاده خواهیم کرد.

آقایان مهدی درودیان و علی صادقی روشن از شهر تهران، از شما به‌خاطر ارائهٔ پیشنهادات سازنده متشکریم و از آنها برای هرچه بهتر و کاملتر شدن مجله استفاده خواهیم کرد.

پاسخ برخی از اشکالات شما عزیزان در زیر آمده است:

آقای بهرام چگینی (خرم‌آباد) از شما به خاطر ارسال چند مسأله با راه حل متشکریم. از آنها برای شماره‌های آینده در صورت لزوم استفاده خواهیم کرد. در ضمن در حلِ دستگاه $\begin{cases}\sqrt{x}+y=7\\ x+\sqrt{y}=11\end{cases}$ یک اشکال وجود داشت که آن را خدمت شما عرض می‌کنیم:

در لابه‌لای راه‌حلّتان عبارت $y^2-14y+\sqrt{y+38}$ را به صورت $(\sqrt{y}-2)(y\sqrt{y}+2y-10y-19)$ تجزیه کرده‌اید، که نادرستی آن واضح است.

آقایان محمد خانوردی و عباس پولادی (بندر ترکمن) و آقای شیروی (کرمانشاه) عدم اثبات تثلیث زاویه به کمک پرگار و خط‌کش غیرمدرج به‌طور دقیق اثبات شده است و شما می‌توانید برای اطلاعات بیشتر به برهانهای ۲۳ و ۲۵ مراجعه کنید.

آقای بهرام جانبازی (قائمشهر)، در کتاب ریاضیات گسسته گریمالدی (مرکز نشر دانشگاهی) رابطهٔ کلی برای تعداد افرازهای k عضوی یک مجموعهٔ n عضوی بیان و اثبات شده است، البته به نظر می‌رسد که رابطهٔ شما نیز درست است، در صورت امکان اثبات رابطهٔ خود را برای ما ارسال کنید.

آقای مرتضی والی (تهران)، رابطه‌های بین مربع اعداد صحیح متوالی و همچنین مکعب اعداد صحیح متوالی درست می‌باشند. به همین ترتیب شما می‌توانید رابطه‌های دیگری را بین توانهای طبیعی عددهای متوالی به دست آورید. رابطه‌هایی را که شما پیدا کرده‌اید، برای استفادهٔ خوانندگان برهان به صورت زیر آمده است:

۱) عددهای صحیح متوالی a، b و c را به طوری که $c>b>a$، در نظر می‌گیریم، بنابراین همواره رابطهٔ زیر برقرار است:

$$c^2=2b^2-a^2+2$$

۲) عددهای صحیح و متوالی a و b و c و d را به صورت $d>c>b>a$ درنظر می‌گیریم، بنابراین همواره رابطهٔ زیر برقرار است:

$$d^3=3c^3-3b^3+a^3+6$$

حل مسألهٔ مسابقه‌ای برهان ۲۳

مسألهٔ ۱. چون چهار نفر می‌خواهند، چهار کارت را به تصادف از کیسه بیرون آورند، بنابراین تعداد اعضای فضای نمونه به صورت زیر است :

$$n(S) = ۴! = ۲۴$$

در صورتی که نفرات اوّل تا چهارم اسامی خود را با شماره‌های ۱ تا ۴ روی کارتها مشخص کنند، فقط به ۹ حالت زیر می‌توانند کارتها را از کیسه بیرون آورند، به‌طوری که هیچ یک از آنها شمارهٔ خود را بیرون نیاورد.

نفر اول	نفر دوم	نفر سوم	نفر چهارم
۲	۳	۴	۱
۳	۴	۲	۱
۴	۱	۲	۳

نفر اول	نفر دوم	نفر سوم	نفر چهارم
۲	۴	۱	۳
۳	۱	۴	۲
۴	۳	۱	۲

نفر اول	نفر دوم	نفر سوم	نفر چهارم
۲	۱	۴	۳
۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱

بنابراین داریم : $n(A) = ۹$

در نتیجه : $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۹}{۲۴}$

(از بین جوابهایی که برای حل این مسأله ارسال شده، آقای وحید طاهری از تبریز جواب صحیح فرستاده است.)

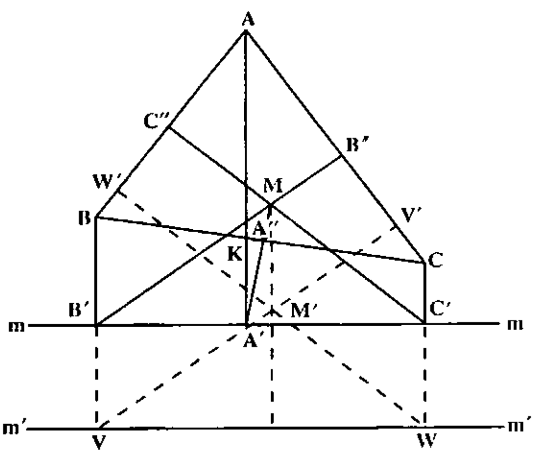
مسألهٔ ۲. فرض کنید A' ، B' و C' (شکل زیر) تصاویر رأسهای A، B و C از مثلث مفروض ABC بر خط مفروض m، و $A'A''$ ، $B'B''$ و $C'C''$ عمودهایی رسم شده بر اضلاع BC، CA و AB باشند. اگر خطوط $B'B''$ و $C'C''$ خط $A'A''$ را در M و N قطع کنند و AA' ضلع BC را در K قطع کند، اضلاع دو مثلث KAC و $A'B'M$ و همچنین، اضلاع دو مثلث KAB و $A'C'N$ برهم عمودند ؛ پس :

$$A'M : A'B' = CK : AK \,,\; A'C' : A'N = AK : BK$$

خطوط AA' ، BB' و CC' موازی‌اند ؛ پس :

$$A'B' : A'C' = BK : CK$$

با ضرب کردن سه تناسب فوق در یکدیگر به دست می‌آوریم $A'M = A'N$ ؛ پس N و M بر هم منطبق‌اند، و قضیه ثابت می‌شود.



مسائل برای حل

- حمید رضا امیری
- محمّد هاشم رستمی
- احمد قندهاری
- میر شهرام صدر
- سیّد محمّد رضا هاشمی موسوی

مسائل ریاضی ۱

۱. اگر $A=\{x\in \mathbb{R} | x\geq 4\}$ و $B=\{x\in \mathbb{R} | x<-3\}$ ثابت کنید:

$$(A\cup B)'=A'\cap B'$$

۲. اگر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ $(k+2)$ عضوی از تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ $(k+5)$ عضوی به اندازهٔ ۱۱۲ واحد کمتر باشد، مقدار k را بیابید.

۳. حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$P=\frac{2^{x+5}+2^{x+3}-2^{x+4}+5\times 2^{x+1}}{27\times 2^{x+1}+9\times 2^{x+2}+9\times 2^{x+4}-45\times 2^{x+2}}$$

۴. اگر $x-y=\sqrt{5}$ و $y=\frac{2}{x}$، حاصل $(x^3-y^3)^2$ را بیابید.

۵. دامنهٔ متغیر x در عبارت زیر را بیابید.

$$\sqrt{4x-4}+\sqrt{\frac{1}{x+1}}+\sqrt{\frac{2}{2-x}}$$

۶. عبارتهای زیر را تجزیه کنید.

۱) $2x^3+2x^2-8x-8$

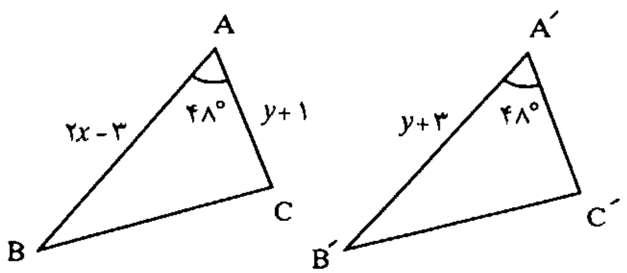
۲) $(2x^3+x+5)^2-(x+3)^2$

۷. عبارت زیر را ساده کنید $(x\neq \pm k, x\neq 2)$.

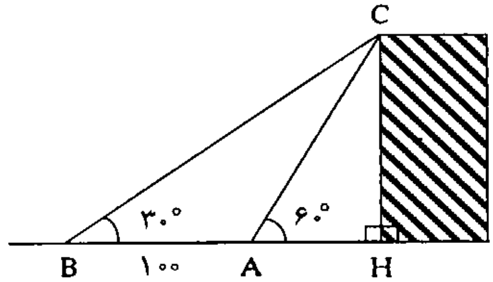
$$P=\frac{x-k}{x+k}\times\frac{x^3+k^3}{x^3-k^3}\times\frac{k^2+kx+x^2}{k^2-kx+x^2}\times\frac{x^2-3x+2}{x-2}$$

هندسهٔ ۱

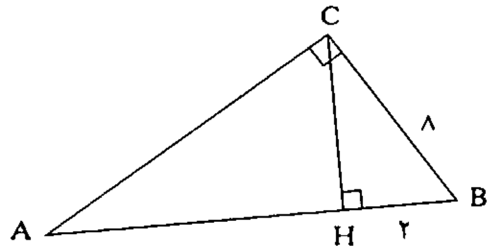
۱. دو مثلث ABC و A′B′C′ در شکل داده شده، همنهشتند. اندازهٔ x و y را بیابید.



۲. برجی بر لبهٔ خندقی بنا شده است. نقطهٔ A بر لبهٔ دیگر خندق، نقطهٔ B به فاصلهٔ ۱۰۰ متر از نقطهٔ A و هردو نقطه بر خطی افقی در امتداد پایهٔ برج واقعند. برج از نقطهٔ A به زاویهٔ °۶۰ و از نقطهٔ B به زاویهٔ °۳۰ دیده می‌شود. ارتفاع برج را تعیین کنید.

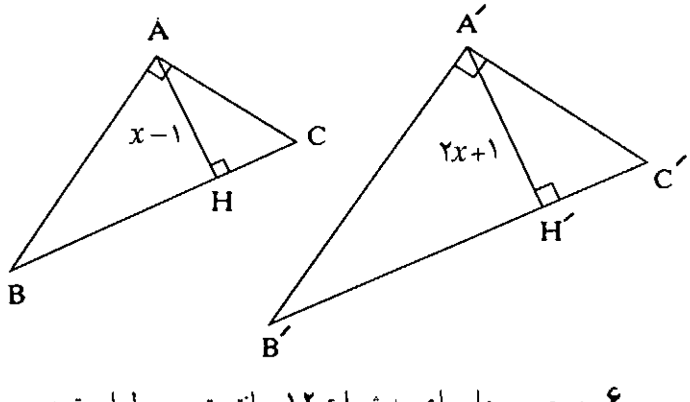


۳. در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{C}=90^\circ$)، $BC=8cm$ و $BH=2cm$ (H پای ارتفاع رأس C) است. اندازهٔ AC و AB، و مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.



۴. مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی که روی وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای ایجاد می‌شود، ۲ برابر مساحت این مثلث است. نسبت بین ضلعهای زاویهٔ قائمهٔ این مثلث قائم‌الزاویه را بیابید.

۵. پاره‌خطهای AH و $A'H'$ دو ارتفاع متناظر از دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ می‌باشند که نسبت مساحتهای آنها برابر $\frac{4}{25}$ است. مقدار x را بیابید.



۶. مربعی بر دایره‌ای به شعاع ۱۲ سانتیمتر محیط است:

الف) اندازهٔ ضلع این مربع را بیابید.

ب) اندازهٔ ضلع مربع محاط در این دایره را تعیین کنید.

ج) اندازهٔ ضلع هشت‌ضلعی منتظم محاط در این دایره را تعیین کنید.

۷. در کره‌ای به قطر ۱۰ سانتیمتر، استوانه‌ای محاط کرده‌ایم که شعاع قاعدهٔ آن برابر ۳ سانتیمتر است. اندازهٔ سطح جانبی و حجم این استوانه و نسبت حجم استوانه به کره را بیابید.

مسائل ریاضی ۳

۱. مجموعه جوابهای نامعادلهٔ زیررا به کمک جدول به دست آورید.

$$\frac{x}{x+1}+2>\frac{1}{x+1}$$

۲. معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\sqrt{3x^2+4}-\sqrt{2x+9}=0$$

۳. نمودار $f(x)=|x+1|-2$ را رسم کنید و با توجه به نمودار، یک‌به یکی تابع f را بررسی کنید. سپس با استفاده از تعریف، یک‌به‌یکی f را تحقیق کنید.

۴. اگر $S_n=(n+1)^2-1$ ، حاصل $13+7a+7d$ را بیابید. در صورتی که S_n ، مجموع nجمله و a و d به ترتیب جملهٔ اوّل و قدر نسبت تصاعد حسابی باشند.

۵. در یک تصاعد هندسی، حاصل ضرب جمله‌های سوّم و نهم برابر ۹۶ است. اگر جملهٔ دوم این دنباله ۶ باشد، جمله دهم این دنباله را تعیین کنید.

۶. نمودار $y=[x+1]-2$ را با شرط $-2\leq x<1$، رسم کنید.

۷. معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\log_5(x-1)-\log_5(x^2-1)=-2\log_5^2$$

ریاضی ۵

۱. مجموعه جواب نامعادله $\frac{-x^2(x^2-x+1)}{x^4-x^3}\geq 0$ را به‌دست آورید.

۲. در صورتی که $af(x)+bf(-x)=cx$ و $(a\neq b)$، مطلوب است محاسبه $f(x)$.

۳. دامنهٔ‌توابع‌با ضابطه‌های زیر را به دست آورید:

الف) $y=\sqrt{\log(\frac{5x-x^2}{4})}$ ب) $g(x)=\frac{x+1}{x-[x]}$

۴. دامنهٔ تابع fog را در صورتی که $f(x)=\sqrt{x-2}$ و $g(x)=\sqrt{x^2-1}$ ، بیابید.

۵. حدّ توابع زیر را بیابید :

الف) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-2x)\tan\frac{\pi}{4}x$

ب) $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{4x^2-8x-1}+2x)$

۶. تابع f با ضابطه

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2} & x<2\\ (b+1)x & x=2\\ [-x] & x>2\end{cases}$$

مفروض است، مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع f در نقطهٔ $x_0=2$ پیوسته باشد.

۷. مشتق توابع زیر را بیابید :

الف) $y=3\sin^5(\sqrt[7]{\frac{x+2}{x}})$

ب) $y=\dfrac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

۸. با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع با ضابطه $y=\dfrac{x+2}{2x-3}$ را بیابید.

۹. زاویهٔ بین دو منحنی $y=x^2-5x+1$ و $y=x^2-3x-3$ را به دست آورید.

جبر و احتمال

۱. روش استدلال به وسیلهٔ مثال نقض را بیان کنید. سپس در صورتی که A و B دو مجموعهٔ ناتهی از مجموعهٔ مرجع U باشند، درستی یا نادرستی برابری زیر را ثابت کنید.

$n(A-B)=n(A)-n(B)$

۲. درون دایره‌ای به قطر ۴، پنج نقطه درنظر می‌گیریم، ثابت کنید حدّاقل دو نقطه وجود دارند که فاصلهٔ آنها کمتر از $2\sqrt{2}$ است.

۳. ثابت کنید از هر مجموعه که شامل n عدد طبیعی باشد، می‌توان زیرمجموعه‌ای غیرتهی چنان انتخاب کرد که مجموع عضوهای آن بر n بخش‌پذیر باشد.

۴. با استفاده از اصل استقرای ریاضی ثابت کنید :

$(2n)!<2^{2n}(n!)^2$

۵. با استفاده از اثبات بازگشتی، ثابت کنید :

الف) $(ac+bd)^2\le(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

ب) $a^2+b^2+1\ge ab+a+b$

۶. به کمک جبر مجموعه‌ها، درستی برابریهای زیر را درباره مجموعه‌های A و B و C زیر مجموعه‌های U بررسی کنید :

الف) هر گاه $A\cap B=\varnothing$ و $A\cup B=M$ ، ثابت کنید $B'=A$.

ب) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

۷. هر گاه $A_n=\{m\in Z|m\ge -n, 2^m\le n\}$ و $n\in\mathbb{N}$ ؛ در این صورت تعداد زیر مجموعه‌های $A_2^2-A_1^2$ را پیدا کنید.

۸. رابطه R روی $\mathbb{R}^2$ به صورت زیر تعریف شده است :

$(a,b)R(c,d)\Leftrightarrow(b-d)=5(a-c)$

الف) ثابت کنید رابطهٔ R ، یک رابطهٔ هم ارزی است.

ب) کلاس هم ارزی $[(2,3)]$ را بیابید.

۹. با فرض این که n عدد طبیعی است، ثابت کنید :

$3^{(6n+2)}+3^{(3n+1)}+1\overset{13}{\equiv}0$

۱۰. کیسه‌ای شامل ۵ مهره قرمز، ۴ مهره آبی و ۲ مهره سبز است. به طور تصادفی ۳ مهره یکجا از کیسه خارج می‌کنیم، مطلوب است محاسبهٔ احتمال آن که :

الف) سه مهره از سه رنگ مختلف باشد.

ب) حداکثر ۲ مهره از ۳ مهره برداشته شده، آبی باشد.

۱۱. دو قطعهٔ چوب ۱ متری و ۲ متری داریم، چوب بلندتر را به طور تصادفی به دو قسمت ارّه می‌کنیم، احتمال آن‌که این سه قطعه چوب، تشکیل یک مثلث بدهند، چقدر است؟

۱۲. تاسی را به گونه‌ای ساخته‌ایم که احتمال آمدن هر پهلو متناسب با آن پهلو است. همچنین سکّهٔ ناسالم را طوری داریم که احتمال آمدن رو در آن، سه برابر پشت در یک بار پرتاب است. در صورتی که تاس و سکه را پرتاب کنیم، مطلوب است محاسبهٔ احتمال آن که تاس کمتر از چهار و سکه رو بیاید.

حسابان ۱

۱. مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $|4x-3| \geq 2$ را به‌دست آورید.

۲. آیا دو تابع $f(x)=x$ و $g(x)=(\sqrt{x})^2$ با هم برابرند؟ چرا؟

۳. اگر $f(x)=2x-1$ و $g(x)=\begin{cases} x+1 & x>0 \\ 2 & x=0 \\ x-2 & x<0 \end{cases}$ دراین صورت ضابطهٔ (fog) و (gof) را بنویسید و ثابت کنید تابع $h(x)=tg(\sin x)$ تابعی فرد است.

۴. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $(4-x^2)$ برابر $2x-1$ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x-4)$ را بر $(x-2)$ بیابید.

۵. ثابت کنید اگر تابع f زوج باشد، معکوس‌پذیر نیست.

۶. ثابت کنید $\frac{2\sin x\cos 3x}{\sin 2x}=1-4\sin^2 x$.

۷. اگر برای هر x در بازهٔ $(-\pi,\pi)$ داشته باشیم $3-\sin x \leq f(x) \leq 4-2tg\frac{x}{2}$، مطلوب است محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{f(x)}$.

۸. مطلوب است محاسبهٔ هر یک از حدّهای زیر:

۱) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[7]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ ۲) $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{x^2-2x}-x^2$

۳) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)tg\frac{\pi x}{2}$

۹. مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع f با ضابطهٔ زیر در $x_0=1$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\sin(x-1)}{x-1} & x>1 \\ 2a-1 & x=1 \\ [-x+a]-b & x<1 \end{cases}$$

۱۰. معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع را با ضابطهٔ $y=x^3-2x^2$ در نقطه‌ای که منحنی این تابع با منحنی تابع با ضابطهٔ $y=x^3-2$ تلاقی می‌کند، بنویسید.

۱۱. برای هر یک از $f(x)$ های داده شده، $f'(x)$ را بیابید.

۱) $f(x)=\sqrt[5]{(2x-1)^3}$ ۲) $f(x)=\sin^4(\cos^3(x^2))$

۳) $f(x)=\frac{2x^2-4x}{\sqrt{x^2-1}}$ ۴) $f(x)=\frac{\sin^3 2x}{\cos^2 x}$

۱۲. اگر $f'(x)=3x-1$ در این صورت، مشتق هر یک از تابعهای با ضابطهٔ زیر را به‌دست آورید.

۱) $y=f(4x)$ ۲) $y=f(\sin x)$

جبر خطی پیش‌دانشگاهی

۱. ثابت کنید در فضای برداری $\mathbb{R}^n$، اگر دو بردار مضرب ناصفری از یکدیگر باشند، وابستهٔ خطی‌اند.

۲. اگر $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ یک نگاشت خطی باشد و $f(1,0)=(1,-1,0)$ و $f(0,1)=(0,1,2)$، در این صورت $f(2,-1)$ را بیابید.

۳. هستهٔ هر یک از نگاشتهای خطی زیر را به‌دست آورید و بُعد آنها را مشخص کنید.

۱) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(x-2y,2x+y)$ ۲) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y,z)=(x,y+z)$

۳) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $f(x,y)=(x,0,0)$ ۴) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $f(x,y,z)=(x,2y,0)$

۴. اگر $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ یک نگاشت خطی باشد و $K=\{(0,a+b,2a-b+3)\}$ هستهٔ این نگاشت باشد، حاصل a^3+2b^2-6 را بیابید.

۵. معادلهٔ تصویر خط به معادلهٔ $2y=x-1$ تحت تأثیر نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(x-y,2x+y)$ را بیابید.

۶. خاصیت پوشایی را برای هر یک از نگاشتهای خطی زیر بررسی کنید.

۱) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(x-2y,-2x+4y)$ ۲) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y,z)=(y,z)$

۳) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y,z)=(z,0)$ ۴) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $f(x,y,z)=(x-y,y+z,2x)$

۷. اگر $f:\mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲$ یک نگاشت خطی باشد و داشته باشیم $f(x,y)=(x-۲y, x+y)$، در این صورت ضابطهٔ $f^{-۱}$ را بیابید.

۸. اگر $f:\mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲$ یک نگاشت خطی و داشته باشیم $f(۱,۰)=(۱,-۱)$ و $f(۰,۱)=(۲,۱)$، در این صورت حاصل $f^{-۱}(۳,-۳)$ را بیابید.

۹. اگر $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲ \\ f(x,y)=(۲x,-y) \end{array}$ یک نگاشت خطی باشد، حاصل $f^{-۱}of(۲,-۳)$ و $fof^{-۱}(۲,-۳)$ را بیابید.

۱۰. دستگاه معادله‌های زیر را به کمک ماتریس وارون حل کنید.

$$\begin{cases} ۲x-y+z=۳ \\ x-۲y+z=۰ \\ x+y-۲z=-۳ \end{cases}$$

هندسهٔ تحلیلی پیش‌دانشگاهی

۱. اگر $a=۲i+۳k-j$ باشد، a' قرینهٔ بردار a نسبت به محور xها را مشخص کنید.

۲. دو بردار $a=i+۳j$ و $b=۲j+۳k$ مفروضند:

الف) زاویهٔ بین دو بردار را تعیین کنید.

ب) a' تصویر بردار a روی بردار b را بیابید.

پ) $a.b$ و $|a\times b|$ را به‌دست آورید.

۳. دو نقطهٔ $A(۰,۲,۳)$ و $B(۱,-۱,۱)$ مفروضند:

الف) مختصات نقطه‌های A' و B' قرینه‌های این دو نقطه نسبت به صفحهٔ xoy را بیابید.

ب) معادلهٔ خطهای AB و $A'B'$ را به‌دست آورید.

پ) مختصات نقطهٔ برخورد دو خط AB و $A'B'$ را تعیین کنید. این نقطه چه ویژگی دارد؟

۴. فاصلهٔ نقطهٔ $M(۱,۲,۳)$ را از خط $D:\begin{cases} x=۲t+۱ \\ y=-t+۲ \\ z=۳t \end{cases}$ به‌دست آورید.

۵. معادلهٔ صفحهٔ شامل نقطهٔ $A(۲,۰,۱)$ و خط $D:\frac{x}{۲}=\frac{y-۱}{۳}=\frac{z}{۴}$ را بنویسید.

۶. روی خط $D:\begin{cases} x+y-z=۲ \\ ۲x-y=۴ \end{cases}$ نقطه‌هایی بیابید که از صفحهٔ $P:۲x+۲y-z+۱=۰$ به فاصلهٔ ۴ قرار داشته باشند.

ریاضی عمومی ۱

۱. دو گروه داده‌ها را به صورت زیر در نظر بگیرید:

گروه اوّل:	۲ ۳ ۳ ۶ ۷ ۹
گروه دوم:	۱ ۲ ۳ ۴ ۶ ۸

الف) پراکندگی داده‌ها را نسبت به میانگین در هر دو گروه داده‌ها بررسی کنید.

ب) ضریب تغییرات را در دو گروه محاسبه نموده، سپس با هم مقایسه کنید.

۲. هرگاه A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند و داشته باشیم:

$$P(A)=۰/۲۵ \quad P(B')=۰/۳۵ \quad P(A'\cap B')=۰/۶$$

بررسی کنید آیا دو پیشامد A و B مستقل هستند؟

۳. مطالعات ژنتیکی نشان داده است که ۶۰٪ ژنهای تعیین‌کننده RH خون مثبتند. احتمال آن را بیابید که در یک کلاس ۵۰ نفری، به طور دقیق ۴۰ نفر دارای خونی با RH مثبت باشند. در این مسأله، انتظار دارید که چند نفر دارای خونی با RH منفی باشند؟

۴. اگر x یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه حاصل عبارت $\left[\sqrt[۴]{x^۴+۴x^۳+۶x^۲+۴x}\right]$ را بیابید.

۵. با استفاده از تعریف «حد» ثابت کنید:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{۲n^۲+۷}{n^۲-۱}=۲$$

۶. نمودار تابع با ضابطه $y=|-۱+\cos x|$ را در فاصله $[-۴\pi,۴\pi]$ بیابید.

۷. دسته خط به معادلهٔ

$$(\lambda+۲)x+(۴\lambda-۳)y-۵+۳\lambda=۰$$

به ازای جمیع مقادیر x از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد، مختصات آن نقطهٔ ثابت را پیدا کنید.

۸. در بسط دو جمله‌ای $(2x^2+\frac{3}{x^3})^{15}$ ، $(x\neq 0)$ ، ابتدا جملهٔ مستقل از x را بیابید، سپس مجموع ضرایب بسط فوق را پیدا کنید.

۹. معادله‌های زیر را در IR حل کنید:

الف) $(27^x)^{x+2}-\frac{1}{9}=0$

ب) $Ln(2x-1)+Ln13=Ln91-Ln(x-1)$

۱۰. بررسی کنید که آیا دنباله $\{u_n\}$ با جملهٔ عمومی $u_n=\frac{2n^2+4n}{(n+1)^2}$ صعودی است یا نزولی؟ سپس بررسی کنید که دنباله $\{u_n\}$ از بالا کراندار است یا از پایین کراندار؟

۱۱. درتابع باضابطه $y=\frac{(a-1)x^3+(a-b+2)x^2+4}{2x^2+5}$ ، a و b را طوری بیابید تا خط $y=2$ مجانب افقی منحنی تابع باشد.

حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)

۱. با استفاده از تعریف حدّ دنباله ها، ثابت کنید:

$$\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-1}{n^2-4}=4\right.$$

۲. ثابت کنید $\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}=1$ ، $n\in N$.

۳. ثابت کنید دنبالهٔ $a_1=\sqrt{3}$ و $a_{n+1}=\sqrt{3a_n}$ کراندار و صعودی است.

۴. مقدار سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{(k+1)(k+2)}}{\cos\frac{1}{k+1}.\cos\frac{1}{k+2}}$ را بیابید.

۵. ثابت کنید تابع به معادله $f(x)=x[x]$ در نقطهٔ $x_0=1$ حد ندارد.

۶. اگر تابع به معادلهٔ

$$f(x)=\begin{cases}ax+\left[x^2-\frac{5}{2}\right], & x>2\\ bx+\frac{|x-2|}{x-2}+4, & x<2\\ \left[-x^3+\sqrt{2}\right], & x=2\end{cases}$$

در $x_0=2$ پیوسته باشد، a و b را بیابید.

۷. اگر تابع به معادلهٔ $f(x)=\begin{cases}8ax^3+b, & x\geq 1\\ 4bx^2+4, & x<1\end{cases}$ در $x_0=1$ مشتق‌پذیر باشد، a و b را بیابید.

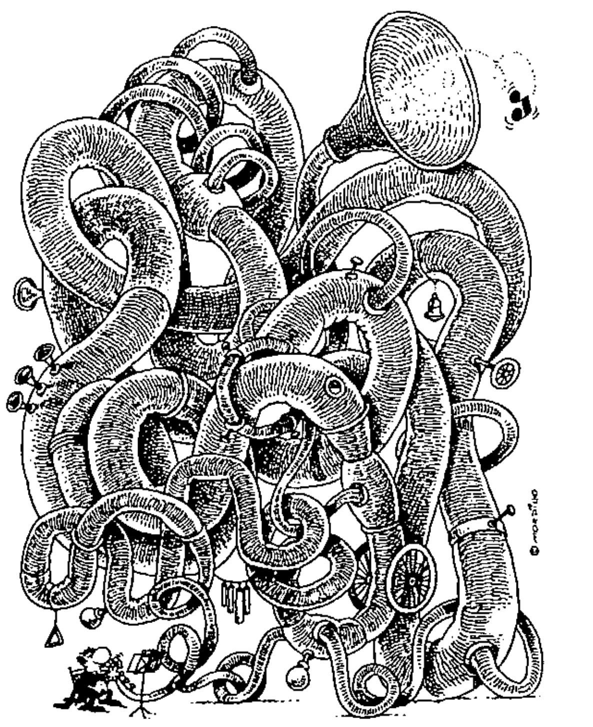
۸. ثابت کنید منحنی به معادلهٔ $f(x)=x^4+2x-1$ در بازه $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ حدّاقل در یک نقطه محور x ها را قطع می‌کند.

۹. معادله‌های مجانبهای منحنی تابع به معادله $y=x-1+\frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}$ را بیابید.

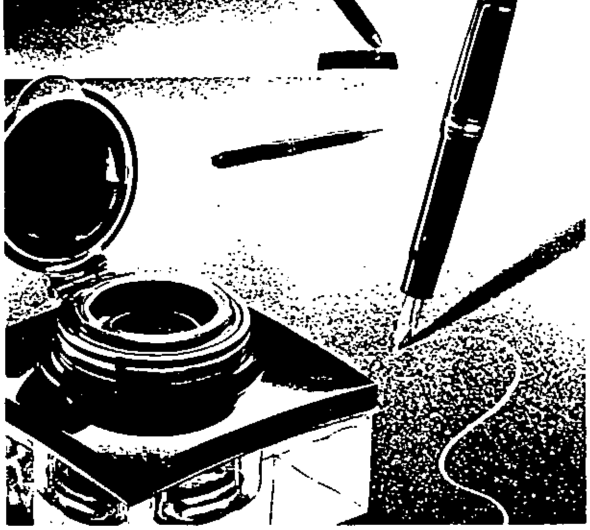
۱۰. متحرکی روی مسیر $5x^2-2y^2=18$ ، $(x>0)$ حرکت می‌کند، در نقطهٔ $y=1$ آهنگ افزایش مؤلفهٔ y چند برابر آهنگ افزایش مؤلفهٔ x است؟

۱۱. تابع به معادله $f(x)=x^3+x$ مفروض است. اگر نقطه A' به طول ۲ روی منحنی تابع f^{-1} باشد، معادلهٔ قائم بر منحنی f^{-1} را در نقطه A' بنویسید.

۱۲. معادلهٔ $2\sin\frac{7x}{2}.\sin\frac{x}{2}=\cos 3x$ را حل کنید و جوابهای کلّی آن را بنویسید.



جوابهای تفریح اندیشه



پاسخ (۱)

(۲ + ۲) + (۲ : ۲) = ۵
(۲ × ۲ × ۲) − ۲ = ۶
(۲ × ۲ × ۲) + ۲ = ۱۰
(۲ + ۲ + ۲) × ۲ = ۱۲

(۲ + ۲) − (۲ + ۲) = ۰
(۲ : ۲) × (۲ : ۲) = ۱
(۲ : ۲) + (۲ : ۲) = ۲
(۲ + ۲ + ۲) : ۲ = ۳
(۲ + ۲ + ۲) − ۲ = ۴

پاسخ (۲)

کیسه‌ها را A، B، C، D و E می‌نامیم و ۳۱ سکه از این پنج کیسه به ترتیب زیر انتخاب می‌کنیم و روی ترازو قرار می‌دهیم:

۱ سکه از کیسه A
۲ سکه از کیسه B
۴ سکه از کیسه C
۸ سکه از کیسه D
۱۶ سکه از کیسه E

در این صورت اختلاف تعداد سکه‌های هر دو کیسه از پنج کیسه، عددهای متفاوت می‌باشد، که این اختلافهای ممکن عبارتند از:

۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۷، ۸، ۱۲، ۱۴، ۱۵

با در نظر گرفتن علامتهای + و − ، در مجموع ۲۰ اختلاف (تفاضل) مختلف خواهیم داشت،که علت به وجود آمدن این ۲۰ اختلاف، تفاوت ۱ گرم وزن بین بعضی از سکه‌ها است.

برحسب اینکه کدام کیسه از پنج کیسهٔ A، B، C، D و E سبکترین و سنگینترین کیسه‌ها باشد، ترازو ۲۰ نتیجهٔ مختلف را نشان خواهد داد.

حالا وزن سکه‌های گذاشته شده روی ترازو را با ۳۱۰ گرم، که وزن متعلق به ۳۱ سکهٔ معمولی است مقایسه می‌کنیم.

● اگر A سبکترین و B سنگینترین کیسه باشد، وزن برابر است با:

۳۱۰+۲−۱=۳۱۰+۱

● اگر A سنگینترین و B سبکترین کیسه باشد:

۳۱۰+۱−۲=۳۱۰−۱

● اگر A سبکترین و C سنگینترین باشد:

۳۱۰−۱+۴=۳۱۰+۳

و به همین ترتیب ......
پس یک بار وزن کردن کافی است.

پاسخ (۳)

مهرداد به بیش از ۷ تویی نیاز ندارد زیرا:

ابتدا توییها را از ۱ تا ۷ شماره گذاری می‌کنیم.

در شروع حرکت اتومبیل مجهز به توییهای ۱ و ۲ و ۳ و ۴ است. سپس بعد از هر ۶ هزار کیلومتر راه، توقف می‌کند تا توییها را به ترتیب زیر عوض کند.

بعد از شش هزار کیلومتر اول	۲	۳	۴	۵
بعد از شش هزار کیلومتر دوم	۳	۴	۵	۶
بعد از شش هزار کیلومتر سوم	۴	۵	۶	۷
بعد از شش هزار کیلومتر چهارم	۵	۶	۷	۱
بعد از شش هزار کیلومتر پنجم	۶	۷	۱	۲
بعد از شش هزار کیلومتر ششم	۷	۱	۲	۳

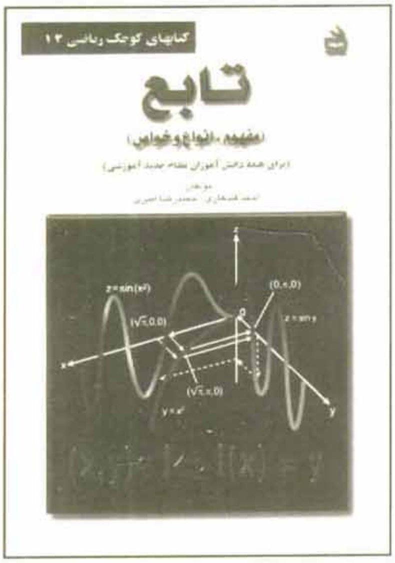
همچنین مشاهده می‌شود که هیچ لاستیک تویی بیش‌از ۲۴۰۰۰ کیلومتر نپیموده است. پس مهرداد خواهد توانست ۴۲۰۰۰ کیلومتر را با تعویض ۷ تویی بپیماید.

پاسخ (۴)

پله‌ای را که مهرداد ایستاده و از آنجا شروع به حرکت می‌کند صفر می‌نامیم.

نخست او روی پلهٔ پنجم می‌رود. سپس با ۷ پله‌ای که پایین می‌آید روی پله دوم، پایین‌تر از محل اولش قرار می‌گیرد. دفعهٔ سوم که ۴ پله بالا می‌رود روی پلهٔ دوم بالاتر از محل ایستادن اولش واقع می‌شود و در این حالت ۹ پله تا آخر نردبان فاصله دارد، پس ۱۱=۲+۹ پله، از محل ایستادن اول مهرداد تا آخر نردبان وجود دارد، که چون ۱۱ پله هم پایین‌تر از این نقطه موجود است، بنابراین تعداد پله‌های نردبان ۲۳=۱+۱۱×۲ می‌باشد.

معرفی کتابهای ریاضی انتشارات مدرسه



جدید

تابع

مؤلفان : احمد قندهاری و حمیدرضا امیری

۱۷۴ صفحه / تک رنگ / چاپ اول / ۴۳۰۰ ریال

این کتاب که دوازدهمین کتاب از سری کتابهای کوچک ریاضی انتشارات مدرسه است، به طور مبسوط به مفهوم **تابع** پرداخته و این مفهوم که از اساسی‌ترین مفاهیم ریاضیات است را با همهٔ خواص و انواع آن و با طرح و حل مسائل و مثالهای متنوع، مورد تجزیه و تحلیل قرار داده است، در این کتاب از دو دیدگاه **مجموعه‌ای** و **جبری**، مفهوم تابع مورد بررسی قرار گرفته است. کتاب شامل دو مجموعه تست با حل تشریحی می‌باشد، مطالعه این کتاب را به همهٔ دانش‌آموزان نظام جدید و دبیران محترم توصیه می‌کنیم.

جدید

توان و رادیکال

مؤلف : سیدمحمّدرضا هاشمی موسوی

۱۸۸ صفحه / تک رنگ / چاپ اول / ۴۷۰۰ ریال

این کتاب یازدهمین کتاب از سری کتابهای کوچک ریاضی بوده که به دو موضوع مهم و اساسیِ **توان** و **رادیکال** پرداخته و این دو موضوع را پس از تشریح با مثالها و مسأله‌هایی حلّ شده و بیشتر با تکیه بر حل مسأله مورد تجزیه و تحلیل قرار داده است، مطالعهٔ این کتاب را به همهٔ دانش‌آموزان نظام جدید آموزشی و دبیران محترم توصیه می‌کنیم.

توجه : از سری کتابهای کوچک ریاضی، کتابهای زیر در دست چاپ می‌باشند :

۱ ـ مثلثات / احمد فیروزنیا ۲ ـ دنباله‌ها و سریها / احمد قندهاری ۳ ـ ورودی به نظریهٔ احتمال / عین ا... پاشا

۴ ـ دیفرانسیل و انتگرال نامعین / محمّد عابدی ۵ ـ انتگرال معین و کاربردهای آن / محمّد عابدی

۶ ـ بردارها / سیدمحمّدرضا هاشمی موسوی ۷ ـ عبارتهای جبری و معادلات / علی حسن‌زاده ماکویی

۸ ـ نابرابری‌ها و نامعادله‌ها / میرشهرام صدر

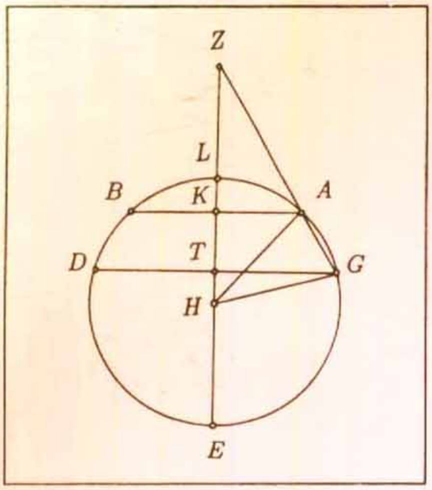
احمدبن محمّد بن عبدالجلیل سجزی (ریاضیدان مسلمان ایرانی)

ابوسعید احمدبن محمدبن عبدالجلیل سجزی یکی از پرکارترین هندسه‌دانان قرن چهارم هجری بـود. از زندگی او اطلاعات اندکی در دست است. اولین تاریخ ذکر شده از زندگی سجزی، ربیع‌الآخر ۳۵۲ هجری است که او نسخه‌ای از ترجمهٔ عربی *مقدمه بر مکانیک پاپوس* اسکندرانی را رونویسی کرده است. سجزی در آغاز محرم سال ۳۸۹ هجری هنوز فعال بود و در این سال اثری به نام *رساله فی الشکل القطاع* را نوشته است.

نام سجزی حاکی از انتساب وی به سجستان یا همان سیستان امروزی در جنوب شرقی ایران است. شواهدی در دست است که سجزی بخشی از عمر خود را در این ناحیه گذراند. بیرونی در *آثارالباقیه* نام ماههای تقویم سیستان را که سجزی به او گفته بود نقل کرده است. سجزی در *رسالةالمدخل فی علم الهندسه* می‌گوید: "در سیستان ابزار عظیم و مهمی ساخته‌ام؛ مدلی از کل عالم، متشکل از افلاک، جرمهای آسمانی، مدارهای حرکت آنها و اندازه‌هایشان، مقدار فاصله‌ها و حجمهای آنها، و شکل زمین، جـایها، شـهرها، کوهها، دریاها و بیابانها، درون کره‌ای توخالی و مشبک؛ آن را «هیئت کل» نامیده‌ام."

از سجزی حدود ۴۰ رسالهٔ هندسی موجود و شناخته شده است. سجزی در آثاری که از وی برجـا مانده، دست کم به ۲۰ رسالهٔ دیگر اشاره می‌کند که تألیف کرده ولی به دست ما نرسیده است. حدود ۲۰ رساله از سجزی در نجوم و احکام نجوم موجود است. تنها بخش اندکی از آثار سجزی تاکنون انتشار یافته است.

در زیر، حل یکی از مسائل هندسه که توسط سجزی و در پاسخ به سؤالهایی که از او توسط افرادی از خراسان پرسیده شده بود، انجام شده است را می‌آوریم:



مسأله: می‌خواهـیم بـه روشـی غـیر از روش بطلمیوس در کتاب مجسطی ثابت کنیم که نسبت هر کمان بزرگتر به هر کمان کوچکتر در (یک) دایره، بزرگتر است از نسبت وتر کمان بزرگتر به وتر کمان کوچکتر.

من این مسأله را بـه روشـهای مـختلف و بـا برهانهای آسان در مثالهایی کـه در *رسـاله درآسـان کردن راههای به دست آوردن شکلهای هندسی* آورده‌ام، حل کرده‌ام.[1] اما (برایم حل این مسأله) به روشی متفاوت با روشهایی که درآن کتاب دنـبال کـرده‌ام ممکن شـده است. آن روش چـنین است. (شکـل مقابل) کمانهای AB و GD را متفاوت با هم در نظر می‌گیریم. می‌گویم نسبت کمان بزرگتر GD به کمان کوچکتر AB بزرگتر است از نسبت وتر GD به وتر AB.

اثبات: وترها را موازی می‌گیریم. از مرکز دایره عمود HTK را بر دو وتر فرود می‌آوریم و آن را از هر دو سو تا E و L امتداد می‌دهیم. HG و HA را رسم می‌کنیم. GA و EL را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در Z قطع کنند. پس نسبت زاویهٔ GHA به زاویهٔ AHL مثل نسبت کمان GA به کمان AL است (که برابر است) با نسبت قطاع GAH به قطاع AHL (که) بزرگتر است از نسبت مثلث GAH به مثلث AHZ . (پس) براسـاس ترکیب نسبت، نسبت قطاع GHL به قطاع AHL بزرگتر است از نسبت مثلث GHZ به مثلث AHZ. اما نسبت مثلث GHZ به مثلث AHZ مثل نسبت GZ به AZ است و مثل نسبت GT به AK. پس نسبت کمان GL به کمان AL، یعنی GLD به ALB بزرگتر است از نسبت خط GT به خط AK ، یعنی وتر GD به وتر AB. این چیزی است که می‌خواستیم بیان کنیم.

۱- برگرفته از کتاب «رسالهٔ سجزی در روشهای حل مسائل هندسی» ترجمهٔ محمد باقری ـ انتشارات فاطمی