رشد برهان

فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی، اطلاع رسانی

مجله ی ریاضی

دوره ی متوسطه

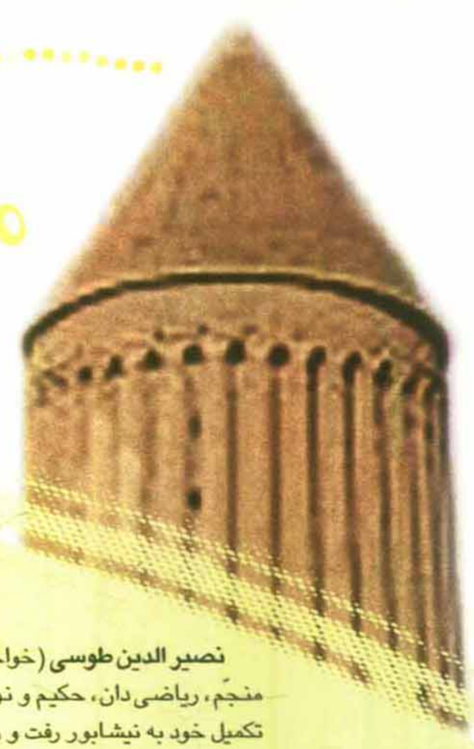
۵۵

• دوره ی هفدهم • شماره ی ۱
• پاییز ۱۳۸۶ • بها ۳۵۰۰ ریال

- ترکیبیات
- پاسخ گو باشید! چگونه؟
- رسم نمودار تابع بدون مشتق
- استدلال های ریاضی

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

مشاهیر ریاضی مسلمان



نصیرالدین طوسی

نصیرالدین طوسی (خواجه نصیر طوسی)، ابوجعفر محمدبن حسن ملقّب به نصیرالدین و مشهور به محقق طوسی، منجّم، ریاضی دان، حکیم و نویسنده ی ایرانی، متولد ۵۹۷ و متوفی ۶۷۲، در طوس به دنیا آمد و در آغاز جوانی، برای تکمیل خود به نیشابور رفت و ریاضیات را نزد کمال الدین ابن یونس فرا گرفت و به عنوان منجم شهرت یافت.

در سال ۶۵۷، پس از فتح بغداد، ازجانب هلاکو مأموریت یافت رصدخانه ی مراغه را بسازد و در این کار توفیق یافت. نیز کتاب خانه ای تشکیل داد که شمار کتاب های آن از چهارصدهزار متجاوز بود.

بعضی از آثار وی عبارت اند از:

۱. کشف القناع عن اسرار شکل القطاع؛ درباره ی مثلثات که به زبان های فرانسوی، آلمانی و روسی، ترجمه شده است.

۲. جوامع الحساب بالتخت و التّراب که به روسی ترجمه شده است.

۳. الرسالة الشافیه عن الشک فی الخطوط المتوازیه که موضوع آن، بحث درباره ی اصل پنجم اقلیدس است.

علاوه بر این تألیفات، خواجه را تحریراتی چند است که از آن جمله اند: تحریر اصول اقلیدس و تحریر المجسطی.

داستانی از شیخ طوسی

می گویند، وقتی خواجه نصیرالدین طوسی به شهر مراغه رسید، تصمیم گرفت رصدخانه ای بسازد. به هلاکوخان گفت، می خواهم چنین کاری را بکنم و از تو کمک می خواهم.

هلاکو از خواجه پرسید: این کار چه فایده ای دارد؟

خواجه پاسخ داد: فایده ی رصدخانه آن است که آدمی می داند در آینده ی کیهان چه واقع می شود.

هلاکو گفت: آگاهی از حوادث آسمان چه فایده‌ای دارد؟

خواجه گفت: آن چه من می گویم، انجام دهید تا معلوم شود چه می گویم. فرمان دهید کسی بر بالای این خانه برود (البته کسی جز من و تو نداند چه می خواهد بشود) و آن گاه تشت مسی بزرگی از بالای بام به میان سرا پرتاب کند.

هلاکو قبول کرد. به فرمان او یکی از خدمت گزاران به بالای بام رفت و طشت مسی بزرگی را به پایین پرتاب کرد. همه ی مردمی که آن اطراف بودند، بسیار وحشت کردند و حتی عده ای به حالت غش افتادند. ولی خواجه و هلاکو چون از افتادن تشت باخبر بودند، نترسیدند و تغییری در حالشان رخ نداد.

در این هنگام خواجه گفت: منفعت رصدخانه این است که بدین وسیله، کسانی از وقوع حوادث پیش از وقت آگاه می شوند و بقیه ی مردم را نیز آگاه می سازند. در نتیجه، هیچ کسی دچار هول وهراس نمی شود. هلاکوخان نظر خواجه نصیرالدین طوسی را قبول کرد و فوراً دستور داد، وسایل بنای رصدخانه را فراهم کنند و کنار مراغه، در دامنه ی کوهی که امروزه به رصدداغی معروف است، رصدخانه را بسازند.

منبع: فرهنگ ریاضیات/گروه ریاضیات انتشارات مدرسه/ناشر: انتشارات مدرسه

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ۵۵

مجله ی ریاضی

دوره ی متوسطه

فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی، اطلاع رسانی

دوره ی هفدهم/ شماره ی ۱/ پاییز ۱۳۸۶/ شمارگان: ۲۵۰۰۰ نسخه

صندوق الکترونیکی:
www.H66Amiri@yahoo.com
پیام گیر نشریات رشد: ۸۸۸۳۹۲۳۲-۸۸۳۰۱۴۸۲
مدیر مسئول: ۱۰۲
دفتر مجله: ۱۱۳
امور مشترکین: ۱۱۴

◆ چاپ و صحافی: شرکت افست (سهامی عام)
◆ نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۰ داخلی ۳۹۷
تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶-۷۷۳۳۵۱۱۰
www.roshdmag.ir
ISSN 1735 - 4951

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه های زیر به همکاری دعوت می کند:

■ نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب های ریاضی دوره ی متوسطه و پیش دانشگاهی)
■ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن ها (برای دانش آموزان)
■ طرح مسائل مسابقه ای به همراه حل آن ها (برای دانش آموزان)
■ طرح معماهای ریاضی
■ نگارش یا ترجمه ی مقاله های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می شود.
مجله در حک، اصلاح، حذف و اضافه ی مقاله ها آزاد است.
مقاله های وارده، باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.
مقاله های رسیده مسترد نمی شود.
استفاده از مطالب مجله در کتاب ها یا مجله های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

یادداشت سردبیر

همیشه شروع سال تحصیلی و اول مهر ماه برایم خوشایند بوده و هست. هنوز شوق دیدار دوستان و هم کلاسی‌ها و شوق آشنایی با هم کلاسی‌های جدید از یادم نرفته است. هنوز اشتیاق توأم با کنجکاوی دیدار معلمان و دبیران جدید، برایم احساسی خوب و تازه است. ای کاش دوباره مانند شما دانش‌آموزان عزیز، اول مهر ماه در کلاس حضور می‌یافتم و انتظار آشنایی با معلمان جدید و کتاب‌های درسی جدید را باز هم مرور می‌کردم. البته اکنون احساس جالب دیگری دارم که تقریباً با همان احساسات برابری می‌کند. وقتی وارد کلاس می‌شوم و با دانش‌آموزان جدید آشنا می‌شوم، اسامی دانش‌آموزان را یکی‌یکی از روی لیست قرائت می‌کنم و آن‌ها یکی‌یکی می‌ایستند و حاضر می‌گویند، خود را به جای تک‌تک آن‌ها فرض می‌کنم و در چشم‌های پرفروغ و کنجکاوشان خودم را می‌بینم.

خلاصه، امسال هم شروع شد و روز از نو و روزگار از نو!

راستی، راجع به تغییر رویه‌ی برگزاری کنکور چیزی شنیده‌اید؟ چگونه این طرح را تجزیه و تحلیل می‌کنید؟ آیا این موضوع در سرنوشت شما تأثیر مثبت گذاشته است یا خواهد گذاشت؟ چگونه؟

فکر می‌کنید، این که سوابق تحصیلی شما در دوره‌ی سه ساله‌ی متوسطه و شاید دوره‌ی پیش‌دانشگاهی، در قبولی شما برای دانشگاه نقش مهمی داشته باشد، چه پیامدهایی به دنبال خواهد داشت؟

در شماره‌های بعدی مجله نیز می‌خواهیم راجع به این موضوع بیشتر و دقیق‌تر صحبت کنیم. شما هم نظرات و پیشنهادات خود را در این زمینه برای ما بنویسید و ارسال کنید. آن‌ها را نیز مطرح خواهیم کرد و فکر می‌کنم بحث جالبی داشته باشیم. ان شاءالله.

والسلام- سردبیر

آموزش درست جوانان

پرویز شهریاری

۱.

آینده ی هر کشور به آگاهی و رشد جسمی و اندیشه ی جوانان آن بستگی دارد و به همین دلیل، سرمایه گذاری مادی و معنوی در این زمینه، باید در مرکز توجه فرزانگان هر جامعه باشد. نیازهای جوانان یکی و دو تا نیست و در این جا نمی‌توان به همه ی آن ها پرداخت؛ به ویژه که طرح هر مطلب و پیدا کردن راه درست، آگاهی و تخصص لازم در آن زمینه را می‌طلبد که این کار از توان من بیرون است.

جوانان ما: با مسئله های اقتصادی و اجتماعی درگیری دارند، به‌دنبال به‌کار گرفتن انرژی خود در راه‌های سالم و درست هستند، امکان‌های آموزشی، ورزشی و پزشکی می‌خواهند، دوگانگی و بی‌عدالتی را نمی‌پذیرند، آرزو دارند در هر زمینه‌ای که به آینده‌ی آن‌ها مربوط می‌شود، آزادانه اظهارنظر کنند، و بتوانند در گروه‌های اجتماعی و سیاسی، با شرکت فعال خود، در سرنوشت آینده‌ی کشورشان سهمی داشته باشند؛ کوتاه سخن، احساس کنند عضوی از این جامعه‌اند. برای بحث در این زمینه‌ها و بسیاری زمینه‌های دیگر که به آینده‌ی جوانان مربوط می‌شود، به آگاهی‌های خاص و به‌ویژه کاران نیاز است که نه کار من است و نه در این مقاله می‌گنجد.

در این جا، به برخی نکته‌ها که به آموزش جوانان مربوط می‌شود، تنها به صورت گذرا و فهرست‌وار اشاره می‌کنیم:

الف) یکی از مسئله‌های عمده‌ای که دوران نوجوانی و جوانی را تا میزان زیادی تیره کرده و موجب پریشانی دائمی آن‌ها و خانواده‌های آن‌ها شده است، مسئله‌ی کنکور تستی برای ورود به دانشگاه است؛ مسابقه‌ای دشوار و حتی سهمگین! اگر جوانی بخواهد، در زمینه‌ی مورد علاقه‌ی خود و در دانشگاهی که در محل زندگی اوست، پذیرفته شود، باید بتواند در بین یک یا دو درصد ممتازها باشد. از این می‌گذرم که «تست» نه تاکنون توانسته است و نه بعد از این می‌تواند معیاری برای سواد، آگاهی و استعداد باشد. بنابراین، جوانی که به فرض بین بهترین‌هاست، به این معنا نیست که بتواند با معیار «تست» از کوره‌ی این مسابقه‌ی وحشت‌آفرین، سربلند بیرون آید. این خود جای صحبتی دراز و بسیار جدی دارد که باید به موقع به آن پرداخت و زیان و سود آن را آشکار کرد.

نوجوان ما از همان لحظه‌ای که پای به «دوره‌ی آموزش راهنمایی» می‌گذارند، و گاه حتی از سال‌هایی که روی نیمکت ابتدایی نشسته است، در تشویش کنکور به سر می‌برد و تمامی خانواده‌ها را هم، در این نگرانی شریک می‌کند. می‌داند برای پیروزی در کنکور باید تست زدن را بیاموزد و گاه مدرسه و معلم و خانواده هم در تقویت این روحیه به او کمک می‌کنند. بازار تست هم گرم است و در انواع گوناگون خود، هم ناشران و هم تهیه‌کنندگانی هستند که از این راه و با عرضه کردن تست‌های رنگارنگ به مال و منالی رسیده‌اند.

با استعدادترین و ارزنده‌ترین جوانان ما، خود را از جامعه و حتی از خانواده‌ی خود کنار می‌کشند، ورزش و تفریح و مطالعه را فراموش می‌کنند و شب و روز در انزوای کامل، تنها به درس و مشق خود می‌رسند و روش «تست زدن» را تجربه می‌کنند. کم نیستند

آن‌هایی که بعد از این عزلت‌نشینی چند ساله، که همراه با «کابوس کنکور» گذشته است، حتی به شرط قبولی، به صورت آدم‌های نامتعادل و با جسم و روانی خسته وارد دانشگاه می‌شوند و اگر در رشته‌ی مورد علاقه‌ی خود هم پذیرفته شده باشند، آن را با تصور سال‌های گذشته‌ی خود و با آن‌چه در گمان خود ساخته بودند، همسان نمی‌بینند و عاملی تازه بر ناهمواری‌های روانی آن‌ها افزوده می‌شود.

ولی این «عزلت‌گزینی» جوانان ما، زیان‌های ویران‌کننده‌ی دیگری هم دارد که از جمله، خو نگرفتن به کتاب و مطالعه‌ی آزاد است.

اگر از گروه کوچک خانواده‌های کتاب‌خوان و کتاب‌دوست بگذریم، همیشه کتابخانه‌های کوچک خانوادگی، به وسیله‌ی جوانان دبیرستانی و دانشگاهی تشکیل شده است. دانش‌آموز دبیرستانی، چه به راهنمایی دبیران خود و چه در رقابت با هم‌سالان به کتاب‌فروشی‌ها رو می‌آورد و کتاب‌های خواندنی را به خانه می‌برد. رمان‌های مشهور، کتاب‌های شعر، سفرنامه‌ها، کتاب‌های مربوط به تاریخ عمومی و تاریخ دانش و غیر آن، خریدارانی مستمر داشت و در هر خانه‌ای کتابخانه‌ای کوچک، شامل بهترین کتاب‌های خواندنی و آگاهی‌دهنده تشکیل می‌شد که نه تنها خود جوانان، که افراد خانواده و نزدیکان آن‌ها هم از آن‌ها بهره‌مند می‌شدند، اما اکنون سال‌هاست که بخش عمده‌ای از این خریداران کتاب، از صحنه خارج شده‌اند. حتی در سال‌های دهه‌ی سی‌وچهل، هیچ کتابی کمتر از سه‌هزار نسخه چاپ نمی‌شد، در حالی که امروز که جمعیت باسواد دست‌کم سه‌برابر شده است، گاه تا شمارگان ۵۰۰ یا ۱۰۰۰ پایین آمده‌ایم. به همین دلیل بسیاری از هوشمندترین جوانان ما، نه تنها رمان‌های کلاسیک و نویسندگان آن‌ها را نمی‌شناسند، که از تاریخ دانش گذشته‌ی سرزمین خودشان آگاهی درستی ندارند.

از این گذشته در مرور درس‌های دبیرستانی هم، علاقه‌ی کمتری به درک ماهیت مطالب نشان می‌دهند، چرا که کمکی به موفقیت در کنکور نمی‌کند. دبیران آگاه می‌دانند، اگر بخواهند دقیقه‌هایی از کلاس را به شرح واقعی درس خود بپردازند و استدلال‌های دقیق را ارائه دهند، از گذشته‌ی آن مطلب و نقش دانشمندان ایرانی، نکته‌هایی را به میان آورند، بهترین دانش‌آموزان دچار نگرانی می‌شوند و از چهره‌ی آن‌ها خوانده می‌شود که: چرا وقت ما را با چیزهایی هدر می‌دهید که به درد کنکور نمی‌خورد... و به این ترتیب است که پایه‌های دانش متزلزل می‌شود و به سوی جامعه‌ای با آدم‌های تک‌بُعدی می‌رویم.

ب) در برابر کتاب‌های جدی و آگاهی دهنده، بازار کتاب‌های «کف‌بینی»، «تعبیر خواب» و «پی بردن به طالع خود» گرم است. جوانان بی‌پناه و نگران از آینده‌ی خود، ندانسته در رویاهای دروغین فرو می‌روند و سرنوشت خود را در بیان نوشته‌های سوداگران و فریب‌کاران جست‌وجو می‌کنند.

ج) در شیوه‌های آموزشی و سنجش دوره‌ی متوسطه هم دشواری‌هایی وجود دارد. گونه‌های متفاوتی از مدرسه‌ها (غیرانتفاعی، نمونه مردمی، دولتی، تیزهوشان و...) وجود دارند که هر کدام مدعی پروردن استعدادهای جوانان ما هستند، ولی بسیاری از آن‌ها در واقع کاری جز این ندارند که بهترین دانش‌آموزان را به خود جلب کنند و با تحمیل شهریه‌های سنگین، مشتی «پلی‌کپی» و «تست» و «مسئله» بار آن‌ها کنند.

در اساس، تقسیم دانش‌آموزان به «تیزهوش» و «کُندهوش» یا «بااستعداد» و «بی‌استعداد»، از نظر روان‌شناسی اجتماعی کاری نادرست است و برای هر دو گروه «خوب» و «بد» زیان‌آور. دانش‌آموز باید در کلاسی باشد که هم با بهتر از خود و هم با ضعیف‌تر از خود سروکار داشته باشد. از دانش‌آموز «بهتر» چیز یاد بگیرد و به دانش‌آموز «ضعیف‌تر» بیاموزد. ایجاد رقابتِ ناسالم بین دانش‌آموزان، گروهی را امیدوار و گروهی دیگر را نومید می‌کند. جوان باید یاد بگیرد، در هر کاری از جمله سودآموزی، به کار گروهی، و همیاری و همکاری با دیگران رو آورد. هیچ دانش‌آموزی در همه‌ی زمینه‌ها «بی‌استعداد» نیست و اگر در محیطی سالم قرار گرفته باشد و به تعاون و همکاری روآورد، می‌تواند در خیلی زمینه‌ها به دیگران کمک کند و در برخی زمینه‌ها هم از دیگران کمک بگیرد. تقسیم دانش‌آموزان به گروه‌های مختلف، روحیه‌ی اجتماعی و تعاون را از بین می‌برد، جوانان را به انزوا می‌کشاند، فاصله‌ی طبقاتی را عریان می‌کند و از دیدگاه جامعه‌شناسی، یکی از زیامندترین روش‌هاست.

د) جامعه‌ی سهل‌اندیش و سوداگر جهان سرمایه‌داری، از مدت‌ها پیش برای سطحی‌تر کردن آگاهی‌های مردم و به ویژه جوانان، این برنامه را اندیشید که شاه‌کارهای ادب جهان را کوتاه و کتاب ۷۰۰ یا ۸۰۰ صفحه‌ای را در ۴۰ یا ۵۰ صفحه چاپ و منتشر کند. این ترفند که در آغاز از میان آمریکایی‌ها سر برآورد، به تدریج به جاهای دیگر هم سرایت کرد. در ایران و در سال‌های دهه‌ی چهل، برخی از ناشران ایرانی هم، این روش نادرست را پیش گرفتند و از جمله «بینوایان» **ویکتورهوگو** یا «جنگ و صلح» **تولستوی** را در چند صفحه به بازار آوردند.

چگونه می‌توانید انتظار داشته باشید، جوانی که گمان می‌کند شاه‌کار ویکتورهوگو را در چند صفحه خوانده است، به این اندیشه بیفتد که یک‌بار دیگر کتاب اصلی را، که با دو ترجمه‌ی جداگانه نشر شده است، بخواند؟ چرا می‌گذاریم جوانان ما سهل‌اندیش و سطحی بار بیایند؟ جامعه‌ی ما از این راه چه سودی می‌برد؟ به نظر من این همان چیزی است که باید به عنوان «هجوم فرهنگ مخرب سرمایه‌داری» با آن مبارزه کرد. جهان سرمایه‌داری می‌خواهد، جوانان کشور خود را «تک‌بُعدی»، «بدون اندیشه» و «سطحی» بار آورد تا هرکسی در تخصص خود کار کند و چرخ سودآور سرمایه‌داری را بچرخاند، بدون آن‌که در ژرفای مسئله‌ها دقت کند. من تردید دارم که ناشران کشور ما هم با همین هدف کار کنند، ولی به هر حال نتیجه‌ی کار آن‌ها همان است که بیگانه انتظارش را دارد.

هرچه درباره‌ی آموزش درست جوانان هزینه کنیم، به هدر نمی‌رود، چند ده‌برابر آن به کشور برمی‌گردد. برای آموزش درست

جوانان بیشتر بیندیشیم، موانع را از جلوی راه شکوفا شدن استعدادها برداریم، و به جوانان اعتماد کنیم. آن‌ها شیفته‌ی خدمت‌اند و نیروی آن را هم دارند. تنها باید اندیشید و معقول‌تر به آن‌ها یاری رساند.

۲.

در سده‌ی سیزدهم میلادی، پس از گفت‌وگوها و کنش و واکنش‌های چندصدساله، حاکمان آشکار و پنهان اروپای غربی و جنوبی در سده‌های میانه، پذیرفتند که می‌توان از آموزش‌های **اقلیدس**، **بطلمیوس** و **ارسطو** استفاده کرد، ولی برای این کار دو شرط گذاشتند: نخست این‌که کسی حق ندارد از این استادان انتقاد کند، و دوم این‌که کسی نباید به سراغ «استدلال» برود و در «معرکه‌ی» چون و چرا با این سه استاد وارد شود. به همین دلیل، به عنوان نمونه، نخستین ترجمه‌ای که از کتاب «مقدمات» اقلیدس از یونانی به لاتین شد، تنها صورت قضیه‌ها را دربرمی‌گرفت و تمامی استدلال‌ها و بحث‌های اقلیدس را کنار گذاشته بودند. خواننده باید تنها به یاری حافظه، صورت قضیه‌ها را حفظ می‌کرد و بی‌چون‌وچرا و بدون این‌که درکی از ماهیت مطلب داشته باشد، آن را می‌پذیرفت.

وقتی پذیرش بی‌چون‌وچرا در کار باشد و خرد آدمی در سایه قرار گیرد، وقتی تنها شنیده‌ها و دستورها ملاک عمل باشد و حافظه و اطاعت بی‌چون‌وچرا پایه و مایه‌ی داوری قرار گیرد، آن‌وقت طبیعی است که به قول **مارسل کاشن**[1]، دانشمند، جامعه‌شناس و سیاست‌مدار فرانسوی (۱۹۵۸-۱۸۶۹): «بت‌پرستان شهر آتن، به **سقراط** جام شوکران نوشاندند، پروتستان‌های آمریکا، **داروین** و هواداران او را در دادگاهی محکوم کردند. ویکتورهوگو در مجمع قانون‌گذاری فرانسه در پانزدهم ژانویه‌ی سال ۱۸۵۰ ـ در سخن‌رانی خود روبه متعصبان چنین گفت: جنجال شما بر سر چیست؟ اکنون می‌گویم: «جنجال شما بر سر خرد انسانی است، زیرا روشنی روز را به جای سیاهی شب می‌نشاند...»

۳.

حافظه و زبان باید وسیله‌ای باشد در اختیار و اندیشه‌ی انسان؛ زبان و به یاد سپردن هدف نیست، بلکه مستقیم‌ترین وسیله‌ی پرواز اندیشه‌ها و ابزاری برای تفکرند. توجه اصلی «زبان» باید به سمت دنیای خارج باشد و عمل آن، بستگی به رابطه‌ی فرد با دیگران، با طبیعت و یا فعالیت‌ها و کارهای اجتماعی دارد. فشار بیش از اندازه به حافظه و به‌ویژه وارد کردن مجموعه‌ای از واژه‌ها و جمله‌ها در آن، بدون آن‌که معنا و مفهوم آن درک شده باشد، به جای سودمند بودن، زیان‌مند است.

نسل نیرومند و آگاه، به شرطی پا می‌گیرد که به جوانان خود بیاموزیم، باید با هر مسئله‌ای که روبه‌رو می‌شوند، از اندیشه و استدلال خود یاری بگیرند و همیشه در جست‌وجوی «حقیقت» یا «راه راست» باشند. در واقع به قول ابن‌خلدون «بدون اندیشه، اعتقاد به موهومات، جای دانش را می‌گیرد.»

آموزش دوره‌ی متوسطه و گاه در برخی زمینه‌ها، آموزش دانشگاهی ما بیشتر بر حافظه‌ی دانش‌آموز و دانشجو تکیه دارد، نه عمل و خلاقیت اندیشه‌ی او، و برخی خانواده‌ها هم در این‌باره به کودک و نوجوان خود ستم می‌کنند. نوجوانان یا کودکانی که ناچار شده‌اند به سفارش معلم یا پدر و مادر خود، برای نمونه، غزل‌های حافظ را از بر کنند، بدون این‌که معنای آن‌ها را بدانند، یا بدون این‌که با تکیه کلام‌های شعر آشنا باشند، کم نیستند. چنین فردی عادت می‌کند، چشم خود را به دهان دیگران بدوزد و «طوطی‌وار» گفته‌های آن‌ها را تکرار کند. می‌دانید که این‌ها، تنها درباره‌ی شعر و یا غزل‌های حافظ نیست. کودک و نوجوان باید اندیشیدن را یاد بگیرد. عادت کند هرجا به مطلبی برخورد کند که از معنای آن عاجز باشد، بپرسد. باید عادت کند در برابر دیگران به بحث بنشیند، و اعتقاد و استنباط خود را آزادانه بیان کند. استعداد «نبوغ» را همه دارند، تنها باید راهی برای پرورش آن‌ها پیدا کرد. به قول **نیوتون**: نبوغ یعنی حوصله و تحمل. و به قول **ادیسون**: نبوغ یعنی یک درصد الهام و نودونه درصد تلاش. و به قول **لباچوفسکی**: شکوفاکردن نبوغ، یعنی ساختن و پربهره کردن درک و اندیشه‌ی آزاد. و این با فشار بر حافظه‌ی نوجوان و جوان به دست نمی‌آید.

شیوه‌ی امتحان‌ها، و به ویژه شیوه‌ی ورود به دانشگاه، به اندیشه و تفکر جوانان، زیان‌های بسیار رسانده است. این شیوه‌ها، به جز این‌که جوانان را خودخواه و تکرو بار می‌آورد و روحیه‌ی همکاری و تعاون اجتماعی را از آن‌ها می‌گیرد، به جز این‌که آن‌ها را تک‌بعدی بار می‌آورد و از هر گونه تفریح سالمی باز می‌دارد، به جز این‌که جنبه‌های متفاوت هنر، یکسره از برنامه‌ی آن‌ها بیرون می‌رود، و... یک زیان جدی دارد: دانش‌آموزان برای موفقیت در امتحان و در کنکور، با روشی که انتخاب شده است، ناچارند بیشتر به حافظه‌ی خود تکیه کنند و از اندیشیدن گریزان باشند. چنین کسانی، یا در آینده به صورت آدم‌هایی پرخاش‌جو و منفی‌باف بار می‌آیند، و یا به صورت آدم‌هایی حرف‌شنو و مطیع که منتظرند «دستور» دیگران را اجرا کنند. این شیوه‌ی آموزش نمی‌تواند جوانان را به سمت خلاقیت و تفکر بکشاند تا در نتیجه نیرومند و آگاه باشند.

گمان نمی‌کنم جامعه‌ی ما منتظر چنین انسان‌هایی باشد. به قول **آلبرت اینیشتن**: «دانش را نباید چون مجموعه‌ای از قانون‌های پراکنده و سیاهه‌ای از پیشامدها و واقعیت‌های بی‌ارتباط با هم گمان کرد.»

حافظه به انسان خدمت می‌کند، ولی فشار بر حافظه، اگر همراه با تقلید و جدا از اندیشیدن باشد، زیان‌مند است و آینده را ویران می‌کند. به یاد داشته باشیم که «فراموشی» هم، در بسیاری از حالت‌ها، موهبتی از نعمات الهی است.

زیرنویس

1. Cachein

تابع

● احمد قندهاری

برای دانش آموزان پایه‌ی دوم و سوم

مفهوم تابع اولین بار در سال ۱۶۹۴ میلادی توسط لایپ نیتز بیان شد و سپس دانشمند بزرگ، اویلر آن را کمی دقیق‌تر بیان کرد. در آن زمان، دامنه و برد تابع‌ها، مجموعه‌ی اعداد حقیقی در نظر گرفته می‌شد. بعدها تعریف تابع دقیق‌تر شد و دامنه و برد تابع می‌توانست زیر مجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ باشد.

۱. حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه‌ی A و B

اگر مجموعه‌های A و B زیر مجموعه‌هایی از R باشند، حاصل ضرب دکارتی $A \times B$ شامل همه‌ی زوج‌های مرتبی است که مؤلفه‌ی اول آن‌ها عضو مجموعه‌ی A و مؤلفه‌ی دوم آن‌ها عضو مجموعه‌ی B باشند. برای مثال، اگر $A = \{۱,۲,۳\}$ و $B = \{k,p\}$، آن‌گاه حاصل ضرب دکارتی $A \times B$ به صورت زیر خواهد بود:

$$A \times B = \{(۱,k),(۱,p),(۲,k),(۲,p),(۳,k),(۳,p)\}$$

چون مجموعه‌ی $A \times B$ دارای شش عضو متمایز است و $۶۴ = ۲^۶$، پس مجموعه‌ی $A \times B$، ۶۴ زیرمجموعه دارد.

۲. رابطه

هر زیر مجموعه‌ای از $A \times B$ را یک رابطه از A به B گوییم. R را به عنوان علامت رابطه درنظر می‌گیریم. پس یک رابطه از A به B را به صورت: $R: A \to B$ نشان می‌دهیم.

۳. تعریف تابع

اگر مجموعه‌های A و B زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ باشند، آن‌گاه تابع f از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B که آن را به صورت $f: A \to B$ نشان می‌دهیم، زیر مجموعه‌ای از حاصل ضرب دکارتی $A \times B$ است که هیچ دو زوج مرتب متمایز آن دارای مؤلفه‌ی اول مساوی نباشد. در مثال قبل داشتیم: $A = \{۱,۲,۳\}$ و $B = \{k,p\}$ و

$$A \times B = \{(۱,k),(۱,p),(۲,k),(۲,p),(۳,k),(۳,p)\}$$

حال اگر بنویسیم: $f: A \to B$ و $f = \{(۱,k),(۲,p)\}$، آن‌گاه f یک تابع از A به B است.

هم‌چنین، اگر بنویسیم: $g: A \to B$ و $g = \{(۱,k),(۲,k)\}$، آن‌گاه g هم یک تابع از A به B است.

و اگر بنویسیم: $h: A \to B$ و $h = \{(۱,k),(۲,p),(۳,k)\}$ آن‌گاه h هم یک تابع از A به B است.

اما چنان‌چه بنویسیم:

$t: A \to B$ و $t = \{(۱,p),(۲,k),(۱,k)\}$، آن‌گاه t یک تابع از A به B نیست، زیرا دو زوج متمایز $(۱,p)$ و $(۱,k)$ عضوهای مجموعه‌ی t هستند. چون مؤلفه‌های اول آن‌ها برابر است ولی مؤلفه‌ی دوم آن‌ها برابر نیست، پس t یک تابع از A به B نیست.

مثال: اگر f به صورت زیر تعریف شده باشد و f یک تابع شامل دو زوج مرتب متمایز باشد، آن‌گاه a و b را بیابید.

$$f = \{(۱,a^۲ - ab),(۳,b),(b-۱,۳)\}$$

حل: $b - ۱ = ۱ \Rightarrow b = ۲$

$a^۲ - ab = ۳ \Rightarrow a^۲ - ۲a - ۳ = ۰ \Rightarrow a = -۱$ یا $a = ۳$

توجه: اگر $b - ۱ = ۳ \Rightarrow b = ۴$، در نتیجه f تابع نخواهد شد.

۴. ضابطه‌ی تابع

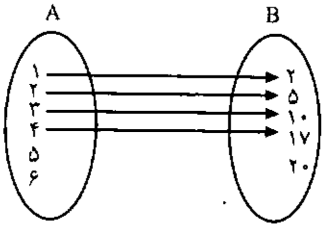
فرض می‌کنیم:

$A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $B = \{۲,۵,۱۰,۱۷,۲۰\}$.

اگر $f: A \to B$ به صورت زیر باشد:

$$f = \{(1,2),(2,5),(3,10),(4,17)\}$$

با توجه به مطالب قبل، f یک تابع از A به B است.
مؤلفه‌های اول این تابع مجموعه‌ی $\{1,2,3,4\}$ است که زیر مجموعه‌ای از A محسوب می‌شود. اگر بخواهیم تابع را دقیق‌تر بیان کنیم، باید بگوییم: تابع $f: A \to B$، مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است که مؤلفه‌های اول این زوج‌های مرتب، مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی A است و هیچ دو زوج مرتب و متمایز آن، دارای مؤلفه‌های اول مساوی نباشند.
این تابع را می‌توان به صورت زیر نشان داد:



ضابطه‌ی این تابع یک رابطه‌ی جبری است که عدد ۱ را به ۲ و عدد ۲ را به ۵ و عدد ۳ را به ۱۰ و عدد ۴ را به ۱۷ مربوط کند. پس ضابطه‌ی این تابع چنین است:

$$f(x) = x^2 + 1 \ , \quad x \in N \ , \quad x < 5$$

در حالت کلی ضابطه‌ی تابع، فرمولی است که توسط آن، مؤلفه‌های دوم زوج مرتب تابع، از روی مؤلفه‌های اول آن محاسبه می‌شود. اگر در حالت کلی زوج مرتب تابع f را $(x, f(x))$ بنامیم، آن‌گاه فرمول یا ضابطه‌ی تابع f به این صورت است: $y = f(x)$.
ریاضی علم دقیقی است و سهل‌انگاری در آن به هیچ وجه جایز نیست. در بسیاری از کتاب‌ها دیده می‌شود که می‌نویسند: «تابع $y = f(x)$»، در صورتی که باید گفته شود: «تابع با ضابطه‌ی $y = f(x)$»، زیرا $y = f(x)$ تابع نیست، بلکه ضابطه یا قانون تابع است.

توجه: اگر ضابطه‌ی تابع در دست باشد، به ازای هر x تعریف شده در آن، $f(x)$ به راحتی محاسبه می‌شود، ولی یافتن ضابطه‌ی تابع از روی زوج مرتب تابع گاهی مشکل است.

مثال: اگر تابع f به صورت $f = \{(1,1),(2,6)(0,0)\}$، و ضابطه‌ی تابع به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشد، ضابطه‌ی تابع را مشخص کنید.

حل:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \\ f(2) = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 + 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0 \\ f(1) = a + b + c = 1 \Rightarrow a + b = 1 \\ f(2) = 4a + 2b + c = 6 \Rightarrow 4a + 2b = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow a = 2 \ , \quad b = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^2 - x \ , \quad x \in N \ , \quad x \in \{0,1,2\}$$

تعریف تابع با زوج مرتب، تعریف درستی است، ولی کارایی زیادی در حل مسائل ندارد. به همین علت تعریف کامل‌تری از تابع ارائه می‌شود.

۵. تعریف تابع

یک رابطه از IR به IR بین x و y مانند $y=f(x)$ را، وقتی یک تابع از x به y گوییم که: به ازای هر x، حداکثر یک مقدار برای y به دست آید.

مثال: رابطه‌ی $f: IR \to IR$ با ضابطه‌ی $y = f(x) = \sqrt{x-1}$ یک تابع است، زیرا اگر به x هر عددی عضو IR را نسبت دهیم، یا یک عدد برای y به دست می‌آید یا عددی برای y به دست نمی‌آید.

$x = 0 \Rightarrow$ y وجود ندارد.	$x = 1 \Rightarrow y = 0$
$x = -1 \Rightarrow$ y وجود ندارد.	$x = 2 \Rightarrow y = 1$
$x = -\sqrt{2} \Rightarrow$ y وجود ندارد.	$x = 3 \Rightarrow y = \sqrt{2}$
$x = -2 \Rightarrow$ y وجود ندارد.	$x = \sqrt{3} \Rightarrow y = \sqrt{\sqrt{3} - 1}$
$x = -4 \Rightarrow$ y وجود ندارد.	$x = 4 \Rightarrow y = \sqrt{3}$

در این تابع عددی عضو IR وجود ندارد که اگر آن را به x نسبت دهیم، دو مقدار یا سه مقدار یا... برای y به دست آید.

الف) مجموعه‌ی $\{x|x \in IR \ , \ x \geq 1\}$، که به ازای هر x عضو آن، فقط و فقط یک مقدار برای y به دست می‌آید؛ این مجموعه را دامنه‌ی تعریف تابع یا به طور خلاصه دامنه‌ی تابع می‌گوییم.
ب) این تابع در مجموعه‌ی $\{x|x \in IR \ , \ x < 1\}$ تعریف نشده است، یعنی به ازای هر x از این مجموعه، مقداری برای y به دست نمی‌آید.

ج) مجموعه‌ی $\{y|y \in IR \ , \ y \geq 0\}$ را بُرد تابع گوییم.

برای آشنایی بیشتر با انواع تابع، به مثال بعدی توجه کنید.
مثال: روابط زیر از $IR \to IR$ بر حسب x و y با ضابطه‌های زیر، معادله‌ی یک تابع از x به y است.

۲) $y = 2x - 5$	۱) $y = 2$
۴) $y = x^3 + 3x - 1$	۳) $y = x^2 - 2x$
۶) $y = \frac{1}{x}$	۵) $y = x^4 - 4x^2$
۸) $y = \frac{x^2 - x}{x - 4}$	۷) $y = \frac{2x - 1}{x - 1}$

۹) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ ۱۰) $y = \sqrt{x - 2}$

۱۱) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ ۱۲) $y = \sqrt{-x^2 + 4x}$

۱۳) $y = \sqrt{\dfrac{2x}{x+1}}$ ۱۴) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x - 1}}$

۱۵) $y = \sqrt[3]{x^3 - 1}$ ۱۶) $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

۱۷) $y = |2x - 1|$ ۱۸) $y = |x^2 - 2x|$

۱۹) $y = \lfloor x - 1 \rfloor$ ۲۰) $y = \sin^2 x - \sin x$

۲۱) $y = \cos^2 x - 1$ ۲۲) $y = \tan x + \cot x$

۲۳) $y = \dfrac{\sin x}{\sin x - 1}$ ۲۴) $y = \dfrac{\cos^2 x}{\cos x - 1}$

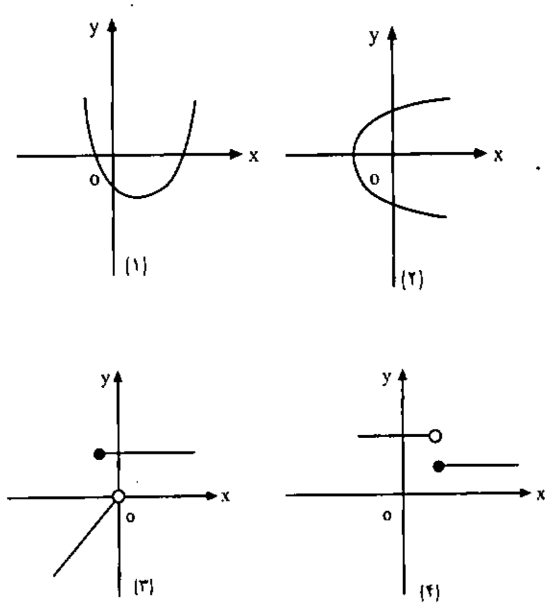
۲۵) $y = \mathrm{Arc}\sin(2x - 1)$ ۲۶) $y = \mathrm{Arc}\cos(2x + 3)$

۲۷) $y = \mathrm{Arc}\tan(x - 1)$ ۲۸) $y = \mathrm{Arc}\cot \dfrac{x}{x - 1}$

۲۹) $y = \log(2x - 1)$ ۳۰) $y = 2^x$

سؤال: یک نمودار در صفحه‌ی محورهای مختصات xoy، چه وقت نمودار یک تابع است؟

پاسخ: وقتی که هر خط عمود بر محور xها، آن نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.



شکل‌های ۱ و ۴ نمودارهای تابع‌اند، ولی شکل‌های ۲ و ۳ نمودارهای تابع نیستند.

مثال: نشان دهید، روابط ذیل $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بین x و y یک تابع از x به y نیست.

باید نشان دهیم، حداقل برای یکی از x ها، دو مقدار یا بیشتر برای y به‌دست می‌آید.

۱) $y = \pm\sqrt{2x - 1}$ $\quad x = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$

۲) $|y| = 4x - 1$ $\quad x = 1 \Rightarrow |y| = 3 \Rightarrow y = \pm 3$

۳) $\lfloor y \rfloor = x - 1$ $\quad x = 2 \Rightarrow \lfloor y \rfloor = 1 \Rightarrow 1 \le y < 2$

۴) $y^3 - 4y - x = 0$ $\quad x = 0 \Rightarrow y^3 - 4y = 0 \Rightarrow y(y^2 - 4) = 0$

$\Rightarrow y = 0\ ,\ y = \pm 2$

۶. تابع حقیقی

بنابر قرارداد، تابعی را حقیقی گوییم که برد آن زیرمجموعه‌ی اعداد حقیقی باشد. ولی ما با تابع‌هایی سروکار داریم که دامنه و برد آن‌ها زیرمجموعه‌ی اعداد حقیقی باشد.

۷. تابع چند ضابطه‌ای

هرگاه دامنه‌ی یک تابع را به چند زیرمجموعه‌ی جدا از هم افراز کنیم، به طوری‌که اجتماع آن‌ها برابر مجموعه‌ی دامنه تابع باشد، و روی هر یک از زیرمجموعه‌های دامنه، ضابطه‌ای مجزا تعریف کنیم، در این صورت این تابع را تابع چند ضابطه‌ای می‌گوییم.

مثال: تابع f، $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \ge 1 \\ 1 - x^2 & x < 1 \end{cases}$$

این تابع را یک تابع دو ضابطه‌ای و تابع y، $y:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$$y(x) = \begin{cases} 1 + x & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ 1 - x & x < 0 \end{cases}$$

را یک تابع سه ضابطه‌ای می‌گوییم.

مثال: تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = 2|x - 1| + x$ را به دو ضابطه تبدیل کنید. $D_f = \mathbb{R}$

حل:

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$x \ge 1 \Rightarrow |x - 1| = x - 1$$

$$\Rightarrow f(x) = 2(x - 1) + x \Rightarrow f(x) = 2x - 2 + x$$

$$\Rightarrow f(x) = 3x - 2$$

$$x < 1 \Rightarrow |x - 1| = 1 - x$$

$$f(x) = 2(1 - x) + x \Rightarrow$$

$$f(x) = 2 - 2x + x \Rightarrow f(x) = 1 - x$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & x \ge 1 \\ 1 - x & x < 1 \end{cases}$$

چند برهان برای قضیه‌ی همرسی سه ارتفاع مثلث

● دکتر احمد شرف‌الدین

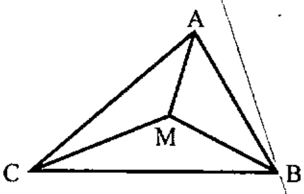
قضیه: در هر مثلث سه ارتفاع همرسند (از یک نقطه می‌گذرند).

برهان یکم

ابتدا یک حکم برداری مطرح و آن را ثابت می‌کنیم.

مثلث ABC و نقطه‌ی M را در نظر می‌گیریم. رابطه‌ی زیر مسلم است:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}=0 \qquad (1)$$



برای اثبات درستی رابطه‌ی (۱)، رابطه‌های مسلم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(2)\quad \begin{cases}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}\\ \overrightarrow{CA}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\end{cases}$$

عبارت سمت چپ رابطه‌ی (۱)، با رعایت تساوی‌های (۲)، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(3)\quad \overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB})+\overrightarrow{MB}.(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC})+\overrightarrow{MC}.(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA})$$

در عبارت (۳)، تمرین‌ها را انجام می‌دهیم. شش جمله به دست می‌آید. مجموع هر دو قرینه صفر است. پس عبارت (۳) برابر صفر است. پس رابطه‌ی (۱) محقق است.

اثبات همرسی سه ارتفاع مثلث

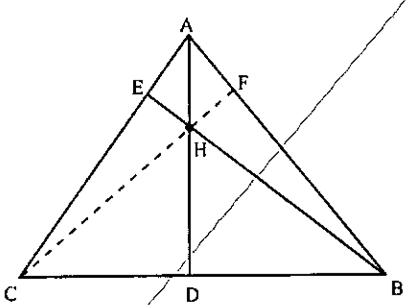
مثلث ABC را در نظر می‌گیریم. نقطه‌ی برخورد دو ارتفاع AD و BE را H می‌نامیم. با رعایت حکم یاد شده در سطرهای پیشین چنین می‌نویسیم:

$$(4)\quad \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB}=0$$

چون خط HB بر خط AC و نیز خط HD بر خط BC عمود

است، پس دو رابطه‌ی زیر مسلم است:

$$(۵)\quad \begin{cases} \overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{BC} = ۰ \\ \overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{CA} = ۰ \end{cases}$$



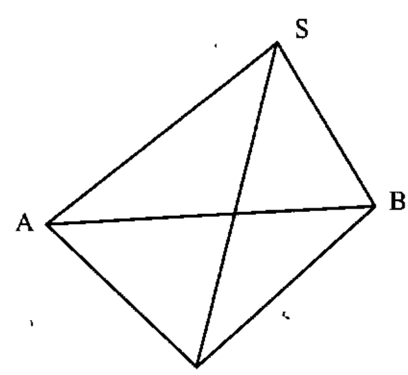
از رابطه‌ی (۴) و رابطه‌های (۵)، رابطه‌ی زیر نتیجه می‌شود:

$$(۶)\quad \overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AB} = ۰$$

از رابطه‌ی (۶) نتیجه می‌شود که خط HC بر خط AB عمود است. پس سه ارتفاع هر مثلث از یک نقطه می‌گذرند.

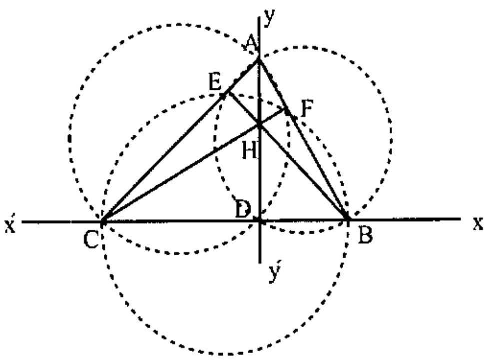
تعمیمی از قضیه‌ی همرسی سه ارتفاع مثلث

چهار وجهی SABC را در نظر می‌گیریم. اگر یال SA بر یال BC، و یال SB بر یال AC عمود باشد، آن‌گاه یال SC بر یال AB عمود است (به بیان کوتاه، اگر دو جفت یال مقابل برهم عمود باشند، دو یال دیگر بر هم عمودند).



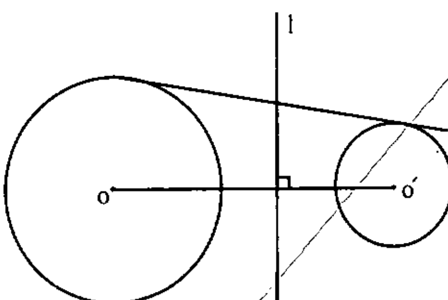
برهان دوم

مثلث ABC و سه ارتفاع AD، BE و CF را در نظر می‌گیریم. سه دایره به قطرهای BC، CA و AB را به ترتیب α، β و γ می‌نامیم. دو دایره‌ی β و γ یکدیگر را در نقطه‌ی D قطع می‌کنند. پس خط AD محور اصلی دو دایره‌ی β و γ است (تعریف محور اصلی در ادامه آمده است). با همین شیوه‌ی استدلال نتیجه می‌شود که ارتفاع BE، محور اصلی دو دایره‌ی α و γ است و ارتفاع CF محور اصلی دو دایره‌ی α و β است. بنابر یکی از قضیه‌های هندسه می‌دانیم که سه محور اصلی سه دایره همرسند، پس سه ارتفاع هر مثلث همرسند.



تعریف محور اصلی دو دایره

مکان هندسی نقاطی از یک صفحه که قوت آن‌ها نسبت به دو دایره‌ی واقع در آن صفحه برابر باشد، خطی است عمود بر خط مرکزهای آن دو دایره. در شکل زیر



دو دایره به مرکزهای o و ó رسم شده است. خط l محور اصلی دو دایره‌ی o و ó است. هنگامی که دو دایره خارج یکدیگر باشند، محور اصلی از وسط مماس‌های مشترک می‌گذرد.

برهان سوم

مثلث ABC و سه ارتفاع آن AD، BE و CF را رسم می‌کنیم. دستگاه مختصات xy را چنان اختیار می‌کنیم که محور x´x آن منطبق برخط CB و نقطه‌ی D مبدأ آن باشد. محور y´y را منطبق بر ارتفاع AD اختیار می‌کنیم. اندازه‌ی جبری برداری $\overrightarrow{DA}$ را روی محور

y´y، به h نمایش می‌دهیم و اندازه‌های جبری دو بردار $\overrightarrow{DB}$ و $\overrightarrow{DC}$ را روی محور x´x به ترتیب m و n می‌نامیم.

معادله‌ی خط BE را در دستگاه مختصات xy می‌نویسیم. ضریب زاویه‌ی خط AC برابر $\frac{h}{-n}$ است. پس ضریب زاویه‌ی خط BE که بر خط AC عمود است، برابر $\frac{n}{h}$ می‌شود. معادله‌ی خط BE چنین است:

$$(۷) \qquad y = \frac{n}{h}(x - m)$$

اگر H نقطه‌ی برخورد دو خط BE و DA باشد، از معادله‌ی (۷) نتیجه می‌شود:

$$(۸) \qquad \overline{DH} = -\frac{nm}{h}$$

اگر K نقطه‌ی برخورد خط CF و DA باشد، چنین داریم:

$$(۹) \qquad \overline{DK} = -\frac{mn}{h}$$

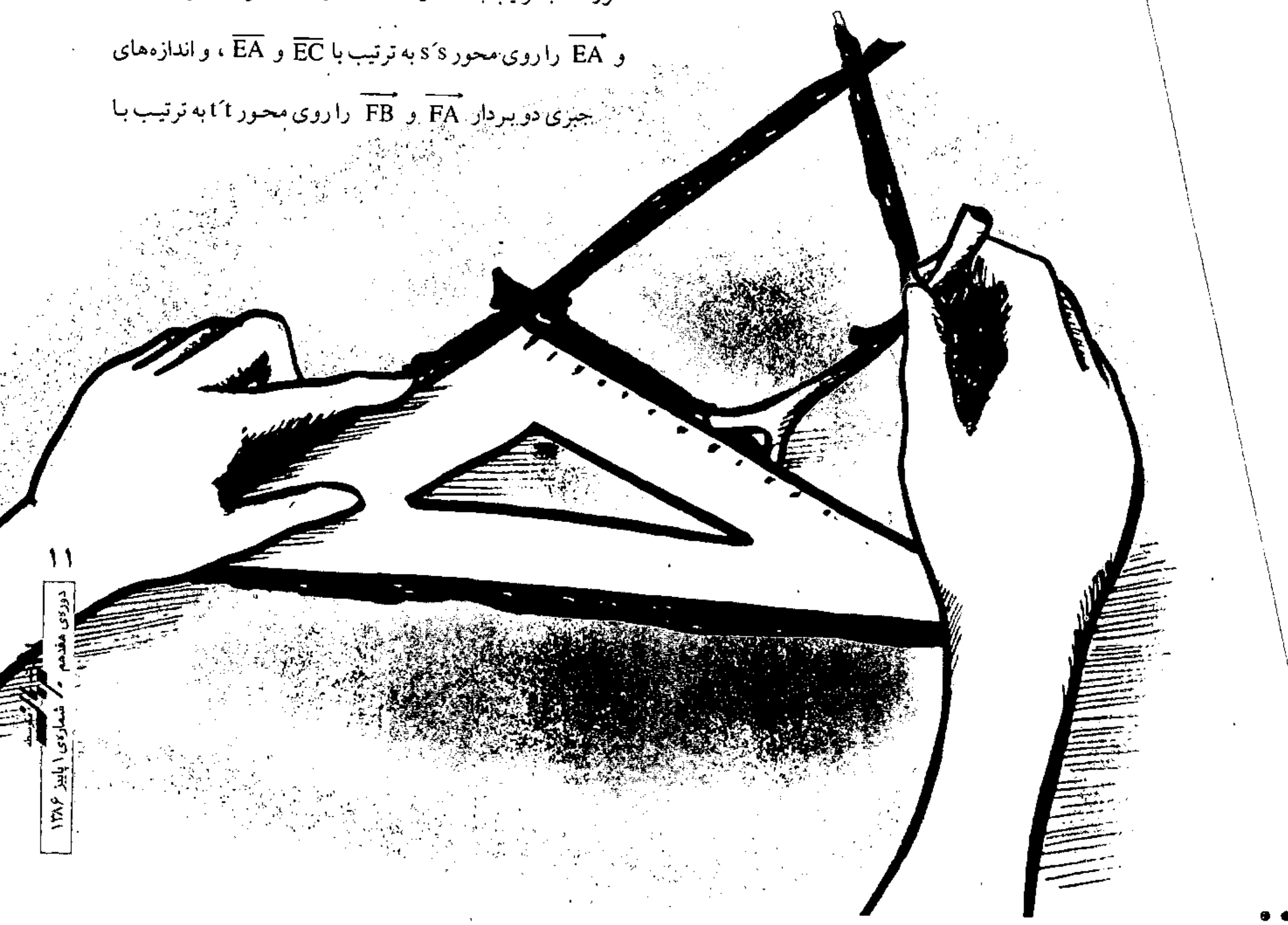
پس $\overline{DH} = \overline{DK}$، و در نتیجه سه ارتفاع مثلث همرسند.

برای محاسبه‌ی DK دو راه می‌توان پیمود: یکی آن‌که معادله‌ی خط CF را بنویسیم و عرض از مبدأ آن را حساب کنیم که همان تساوی (۹) به دست می‌آید. راه دوم، یعنی راه خیلی ساده‌تر، آن است که در عبارت طرف راست تساوی (۹)، جای m و n را عوض کنیم. آن‌گاه تساوی (۹) حاصل می‌شود، زیرا اگر در معادله‌ی (۷) جای m و n را عوض کنیم، معادله‌ی خط CF حاصل می‌آید.

برهان چهارم

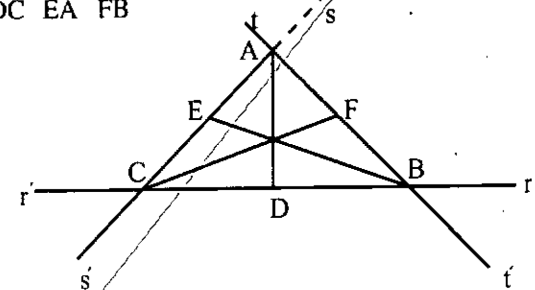
قضیه‌ی سوا را به کار می‌گیریم:

قضیه‌ی سوا: مثلث ABC و سه نقطه‌ی D، E و F را به ترتیب بر خط‌های BC، CA و AB در نظر می‌گیریم. محورهای r´r، s´s و t´t را به ترتیب بر خط‌های BC، CA و AB اختیار می‌کنیم (با جهت دلخواه). اندازه‌های جبری دو بردار $\overrightarrow{DB}$ و $\overrightarrow{DC}$ را روی محور r´r به ترتیب با $\overline{DB}$ و $\overline{DC}$، اندازه‌های جبری دو بردار $\overrightarrow{EC}$ و $\overrightarrow{EA}$ را روی محور s´s به ترتیب با $\overline{EC}$ و $\overline{EA}$، و اندازه‌های جبری دو بردار $\overrightarrow{FA}$ و $\overrightarrow{FB}$ را روی محور t´t به ترتیب با



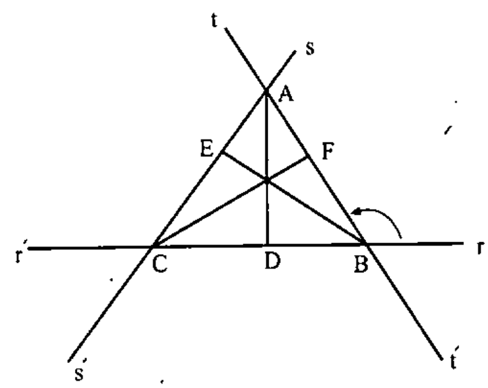
$\overline{FA}$ و $\overline{FB}$ نشان می‌دهیم. اگر سه خط AD، BE و CF همرس باشند، رابطه‌ی زیر مسلم است و برعکس:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}\cdot\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}=-1$$



به‌کارگیری قضیه‌ی سوا برای اثبات همرسی ارتفاع‌های مثلث

مثلث ABC و سه ارتفاع AD، BE و CF را در نظر می‌گیریم.



ثابت می‌کنیم رابطه‌ی زیر محقق است و از آن نتیجه می‌گیریم که سه ارتفاع مثلث همرسند.

$$(۱۰)\qquad \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}\cdot\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}=-1$$

طول‌های اضلاع مقابل به زاویه‌های A، B و C را به ترتیب با a، b و c نشان می‌دهیم. چنین داریم:

$$\overline{DB}=-\overline{BD}=-\left|\overrightarrow{BA}\right|\cos(rBA)=(-c)(-\cos B)$$

پس:

$$\overline{DB}=c\cos B$$

با بیان شیوه‌ی استدلال، مقدار $\overline{DC}$ را حساب می‌کنیم که چنین حاصل می‌شود:

$$\overline{DC}=-b\cos C$$

پس:

$$(۱۱)\qquad \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}=-\frac{c\cos B}{b\cos C}$$

با همان شیوه‌ی محاسبه، تساوی‌های زیر به دست می‌آیند:

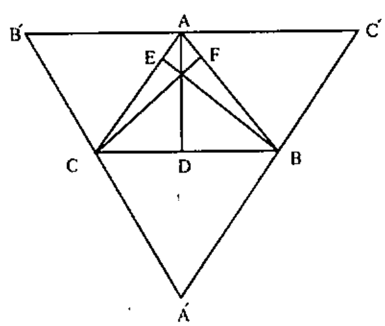
$$(۱۲)\qquad \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}=-\frac{a\cos C}{c\cos A}$$

$$(۱۳)\qquad \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}=-\frac{b\cos A}{a\cos B}$$

از سه رابطه‌ی (۱۱)، (۱۲) و (۱۳)، تساوی (۱۰) حاصل می‌شود. بنابراین سه ارتفاع مثلث همرسند.

برهان پنجم

مثلث ABC و ارتفاع‌های AD، BE و CF آن را در نظر می‌گیریم.



از نقطه‌ی A خط B′C′ را موازی خط BC، از نقطه‌ی B خط A′C′ را موازی خط AC، و از نقطه‌ی C خط A′B′ را موازی خط AB رسم می‌کنیم. چون چهارضلعی AB′CB متوازی‌الاضلاع است، پس: AB′ = CB. و نیز چون چهارضلعی AC′BC متوازی‌الاضلاع است، پس: AC′ = CB و در نتیجه: AB′ = AC′. یعنی نقطه‌ی A وسط ضلع B′C′ است. با همین شیوه‌ی استدلال نتیجه می‌شود که نقطه‌ی B وسط پاره‌خط A′C′ و نقطه‌ی C وسط پاره‌خط B′A′ است.

اکنون می‌گوییم: خط AD که بر خط BC عمود است، عمودمنصف پاره‌خط B′C′ است. پس ارتفاع‌های مثلث ABC، عمودمنصف‌های مثلث A′B′C′ هستند. می‌دانید که عمودمنصف‌های هر مثلث همرسند (چرا؟)، پس ارتفاع‌های هر مثلث همرسند.

اصل شمول و عدم شمول

اگر تعداد اعضای A را با نماد $|A|$ و متمم مجموعه‌ی A را با $\overline{A}$ نمایش دهیم، در این صورت اصل شمول و عدم شمول برای دو و سه مجموعه به صورت زیر بیان می‌شود:

(اصل شمول برای دو مجموعه)

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

(اصل عدم شمول برای دو مجموعه)

$$|\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B|$$

توجه دارید که دو مجموعه‌ی A و B هر دو از مجموعه‌ی مرجع S تعریف شده‌اند.

(اصل شمول و عدم شمول برای سه مجموعه)

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C|$$

مثال ۱. معین کنید چند عدد مانند n وجود دارد، به طوری که $1 \le n \le 3400$ و نیز n نه بر ۳ بخش‌پذیر باشد و نه بر ۷.

ترکیبیات

(آنالیز ترکیبی با ابزارهای شمارشی پیشرفته‌تر)

(قسمت دوم)

● حمیدرضا امیری

اشاره

در این مقاله سعی می‌کنیم، با استفاده از اصولی هم‌چون «اصل شمول و عدم شمول»، به حل بعضی از مسائل شمارشی بپردازیم و شما را با کاربردهای این اصل آشنا سازیم. هم‌چنین، با استفاده از قضیه‌ی تبدیل با تکرار، قضیه‌ای را اثبات کنیم و از آن قضیه در حل تعدادی دیگر از مسائل شمارشی و حتی یافتن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی یک معادله‌ی سیاله‌ی خطی و چندمجهولی، بهره خواهیم برد.

$A = \{۱ \le n \le ۳۴۰۰ : ۳|n\}$, $B = \{۱ \le n \le ۳۴۰۰ : ۷|n\}$ $\Rightarrow$ مجموعه‌ی مورد نظر $= (\overline{A} \cap \overline{B})$

$$|A \cup B| = \left[\frac{۳۴۰۰}{۳}\right] + \left[\frac{۳۴۰۰}{۷}\right] - \left[\frac{۳۴۰۰}{[۳,۷]}\right]$$
$$= ۱۱۳۳ + ۴۸۵ - ۱۶۱ = ۱۴۵۷$$

$$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = ۳۴۰۰ - ۱۴۵۷ = ۱۹۴۳$$

توجه: برای استفاده از اصل شمول و عدم شمول، همواره مجموعه‌هایی می‌سازیم که دقیقاً ضد خاصیت یا حالتی باشند که مورد نظر است.

مثال ۲. چند عدد طبیعی بین ۱۰۰ و ۲۵۰۰ وجود دارد که بر ۴ و ۶ بخش‌پذیر نباشند؟

پاسخ:

$$۱۰۰ \le n \le ۲۵۰۰$$

$A = \{۱۰۰ \le n \le ۲۵۰۰ : ۴|n\}$, $B = \{۱۰۰ \le n \le ۲۵۰۰ : ۶|n\}$ $\Rightarrow$ مجموعه‌ی مورد نظر $= (\overline{A} \cap \overline{B})$

$$|A \cup B| = \underbrace{\left[\frac{۲۴۰۱}{۴}\right] + ۱}_{\text{چون ۱۰۰ بر ۴ بخش‌پذیر است.}} + \left[\frac{۲۴۰۱}{۶}\right] - \left[\frac{۲۴۰۱}{۱۲}\right]$$

چون ۱۰۰ بر ۴ بخش‌پذیر است.

$$= ۶۰۱ + ۴۰۰ - ۲۰۰ = ۸۰۱$$

$$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = ۲۴۰۱ - ۸۰۱ = ۱۶۰۰$$

تمرین: اگر n عددی طبیعی و $۱ \le n \le ۲۶۰۰$ باشد، در این صورت چه تعداد از این اعداد بر ۴، ۶ و ۷ بخش‌پذیر نیستند؟

مثال ۳. چه تعداد عدد سه رقمی وجود دارد که در هریک از آن‌ها، هریک از ارقام ۵ و ۶ حداقل یک بار وجود داشته باشد؟

$S = \{\overline{abc} \mid$ ارقام ۰ تا ۹ $c,b,a\}$

پاسخ:

مجموعه‌ی مورد نظر $= (\overline{A} \cup \overline{B})$

$A = \{\overline{abc} \mid a,b,c \ne ۵\}, B = \{\overline{abc} \mid a,b,c \ne ۶\} \Rightarrow$

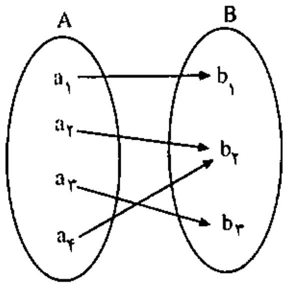
$|S| = ۹ \times ۱۰ \times ۱۰ = ۹۰۰$ و $|A| = ۸ \times ۹ \times ۹ = ۶۴۸ = |B|$

A مجموعه‌ی سه‌رقمی‌هایی است که فاقد ۵ هستند.

$(A \cap B)$ مجموعه‌ی سه‌رقمی‌هایی است که فاقد ۵ و ۶ هستند.

$$|A \cap B| = ۷ \times ۸ \times ۸ = ۴۴۸$$
$$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = ۹۰۰ - ۲ \times ۶۴۸ + ۴۴۸$$

مثال ۴. اگر $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ و $B = \{b_1, b_2, b_3\}$، در این صورت چند تابع پوشا از روی A (توابعی که روی همه‌ی اعضای A اثر کنند) به روی B می‌توان تعریف کرد؟



پاسخ:

$A_1 = \{f: A \to B \mid$ f، b_1 را پوشش ندهد$\}$

$A_2 = \{f: A \to B \mid$ f، b_2 را پوشش ندهد$\}$

$A_3 = \{f: A \to B \mid$ f، b_3 را پوشش ندهد$\}$

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$
$$= ۸۱ - ۳ \times ۲^۴ + ۳ - ۰ = ۳۶$$

$$|S| = ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ = ۳^۴ = ۸۱$$

$$|A_1| = ۲^۴ = |A_2| = |A_3|$$
$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = ۱$$
$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = ۰$$

توجه: تابع $f: A \to B$ را «نگاشت» می‌نامیم هرگاه: $D_f = A$.

نکات مهم: اگر $|A| = m$ و $|B| = k$ در این صورت:

I) اگر $m < k$، هیچ نگاشت پوشا از A به B تعریف نمی‌شود.

II) اگر $m > k$، هیچ نگاشت یک به یک از A به B تعریف نمی‌شود.

III) تعداد کل نگاشت‌های از A به B برابر است با: $|B|^{|A|} = k^m$.

IV) اگر $m < k$ ، در این صورت تعداد نگاشت یک به یک از A به B برابر است با: $P(k,m)$ یا $(k)_m$.

V) اگر $m = k$ ، در این صورت تعداد نگاشت‌های یک به یک وَ درنتیجه پوشا برابر است با: $m!$ یا $k!$ (چون m با k برابر است).

VI) اگر $|B| = 3$ و $|A| = m \geq 4$ ، در این صورت تعداد نگاشت‌های پوشا از A به B برابر است با:

$$3^m - 3 \times 2^m + 3 \times 1^m$$

مثال ۵. چند نگاشت پوشا از یک مجموعه‌ی ۵ عضوی به یک مجموعه‌ی ۳ عضوی تعریف می‌شود؟

پاسخ:

$$3^5 - 3 \times 2^5 + 3 \times 1^5 = 243 - 96 + 3 = 150$$

قضیه:

اگر k نوع گل مفروض باشند و از هر نوع، به تعداد کافی وجود داشته باشد، در این صورت تعداد حالت‌هایی که می‌توان یک دسته گل شامل n شاخه گل انتخاب کرد، برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

اثبات: k نوع گل را با $k-1$ خط عمودی می‌توان جدا کرد (شکل ۱) و اگر انتخاب هر شاخه گل از یک نوع گل را با یک ستاره مشخص کنیم، برای نمایش انتخاب n شاخه گل از بین این k نوع گل می‌باید از n ستاره استفاده کنیم. بنابراین تعداد ستاره‌ها و خط‌های عمودی برابر است با: $(n+k-1)$. تعداد کل تبدیلات این اشیا نیز برابر است با: $[n+(k-1)]!$. اما می‌دانیم، جابه‌جایی‌های n ستاره با یکدیگر و $k-1$ خط عمودی با یکدیگر، حالت جدید یا دسته گل جدیدی تولید نمی‌کند و طبق قضیه‌ی تبدیل با تکرار، باید تعداد کل تبدیلات را بر $n! \times (k-1)!$ تقسیم کنیم که در این صورت خواهیم داشت:

$$\text{تعداد دسته گل‌های n شاخه‌ای از k نوع گل} = \frac{[n+(k-1)]!}{n! \times (k-1)!} = \binom{n+k-1}{k-1}$$

گل نوع اول	گل نوع دوم	...	گل نوع $(k-1)$ ام	گل نوع k ام
***	**	...	***	*
				⋮

(شکل ۱)

مثال ۶. به چند طریق می‌توان از بین ۴ نوع گل، ۷ شاخه گل انتخاب کرد؟

پاسخ:

$$\text{تعداد انتخاب‌های ۷ شاخه گل} = \binom{7+4-1}{4-1} = \binom{10}{3} = 120$$

مثال ۷. به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل، ۸ شاخه گل انتخاب کرد، به شرط آن‌که از هر نوع گل حداقل یک شاخه انتخاب شده باشد؟

پاسخ: ابتدا از هر نوع گل یک شاخه برمی‌داریم و سپس سه شاخه‌ی باقی را به دلخواه از بین ۵ نوع گل انتخاب می‌کنیم که این تعداد انتخاب برابر با $\binom{7}{4}$. در حالت کلی می‌توان از فرمول $\binom{n-1}{k-1}$ برای حل این نوع مسائل استفاده کرد:

$$\binom{n-1}{k-1} = \binom{7}{4}$$

مثال ۸. به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل، ۹ شاخه گل انتخاب کرد، به شرط آن‌که از گل نوع دوم حداقل دو شاخه و از گل نوع چهارم حداقل یک شاخه انتخاب شده باشد؟

پاسخ: ابتدا دو شاخه گل از نوع دوم و یک شاخه از نوع چهارم برمی‌داریم که در این صورت تعداد $9-3=6$ شاخه گل برای انتخاب از بین ۵ نوع گل باقی می‌ماند. چون این انتخاب دلخواه است، طبق قضیه برابر است با:

$$\binom{10}{5}.$$

قضیه: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $(n\in N)x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ برابر است با: $\binom{n+k-1}{k-1}$.

اثبات: هر جواب صحیح و نامنفی برای معادله‌ی فوق در واقع یک روش انتخاب n شاخه گل از بین k نوع گل است، به شرط آن‌که x_i را تعداد انتخاب‌ها از گل نوع iام فرض کنیم، و برعکس؛ یعنی هر انتخاب n شاخه گل از بین k نوع گل، جوابی برای معادله‌ی فوق است. قبلاً ثابت کردیم، تعداد این انتخاب‌ها یا تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی فوق برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

مثال ۹. معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=4$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

پاسخ: راه اول:

۰	۰	۴	→	۳ جواب
۱	۱	۲	→	۳ جواب
۰	۲	۲	→	۳ جواب
۳	۱	۰	→	۶ جواب
				۱۵ جواب

راه دوم: $\binom{6}{2}=\frac{6\times5}{2!}=15$

مثال ۱۰. معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4=7$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟

پاسخ: x_i ها حداقل می‌توانند ۱ باشند، پس: $k=4$ و $n=7-4=3$. در واقع، این حالت با حالت انتخاب‌های n شاخه گل از بین k نوع گل، با شرط انتخاب حداقل یک شاخه از هر نوع گل معادل و برابر است با: $\binom{n-1}{k-1}=\binom{6}{3}$.

مثال ۱۱. معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=8$ با شرط $x_2>1$ و $x_4\ge1$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

پاسخ:

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=8-2-1$$

توضیح جبری این جواب:

$$x_2\ge2\to x_2-2\ge0 \text{ و } x_2-2=y_2\Rightarrow x_2=y_2+2$$

$$x_4\ge1\to x_4-1\ge0 \text{ و } x_4-1=y_4\to x_4=y_4+1$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=8$$

$$\to x_1+y_2+2+x_3+y_4+1+x_5=8$$

$$x_1+y_2+x_3+y_4+x_5=\underbrace{8-2-1}_{5}\Rightarrow$$

$$\binom{9}{4}= \text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی}$$

این مسئله نیز با حالتی که بخواهیم از بین ۵ نوع گل، ۸ شاخه انتخاب کنیم، با شرط آن‌که از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع چهارم حداقل ۱ شاخه انتخاب شده باشد، معادل است.

مثال ۱۲. معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=4$ با شرط $0\le x_i\le2$ و $i=1,2,3$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

پاسخ:

$$A_1=\{(x_1,x_2,x_3)\ |x_1\ge3\}$$

$$A_2=\{(x_1,x_2,x_3)\ |x_2\ge3\}$$

$$A_3=\{(x_1,x_2,x_3)\ |x_3\ge3\}$$

$$x_1+x_2+x_3=4-3=1\to\binom{3}{2}=3\Rightarrow|A_1|=3$$

مجموعه‌ی مورد نظر به صورت زیر است:

$$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}=(\overline{A_1\cup A_2\cup A_3})$$

$$\Rightarrow|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=|\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}|$$

$$=|S|-|A_1\cup A_2\cup A_3|=15-3\times3=6$$

$$|S|=\binom{6}{2}=15 \quad \text{(کل جواب‌ها)}$$

$$|A_1|=3=|A_2|=|A_3|$$

$$|A_1\cap A_2|=|A_2\cap A_3|=|A_1\cap A_3|=0$$

(برای محاسبه‌ی $|A_1|$ می‌باید تعداد جواب‌های معادله را با شرط $x_1\ge3$ پیدا کنیم که برابر است با تعداد جواب‌های معادله‌ی $y_1+x_2+x_3=4-3$؛ یعنی: $\binom{3}{2}$).

$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=0$$

نکته:

تعداد جملات بسط $(a_1+a_2+\cdots+a_k)^n$ برابر است با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$؛ یعنی برابر است با: $\binom{n+k-1}{k-1}$.

زیرا هر جمله‌ی بسط فوق شامل عبارت $(a_1^{x_1}a_2^{x_2}\cdots a_k^{x_k})$ است که در آن باید: $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$. تعداد جواب‌های معادله‌ی اخیر نیز همان تعداد جملات بسط است.

مثال ۱۳. تعداد جملات بسط $(a+b+c)^9$ را به‌دست آورید.

$$x+y+z=9 \to \binom{11}{2}=55$$

توجه: تعداد جواب‌های صحیح و مثبت نامعادله‌ی $x_1+x_2+\cdots+x_k<n$ برابر است با تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله‌ی $x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}=n\ (x_{k+1}>0)$؛ یعنی برابر است با: $\binom{n-1}{k}$.

مثال ۱۴. تعداد جواب‌های صحیح و مثبت این نامعادله را بیابید.

$$x+y+z<7$$

$$x+y+z<7 \Leftrightarrow x+y+z+t=7 \to \binom{6}{3}$$

نکته:

الف) تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی نامعادله‌ی $x_1+x_2+\cdots+x_k<n$ با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}=n$، با شرط $x_{k+1}\ge 1$، یعنی با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}=n-1$، یعنی: $\binom{n-1+k}{k}$، برابر است.

ب) در اعداد صحیح همواره می‌توان از نامساوی $a\le b$ نامساوی $a<b+1$ را نتیجه گرفت. بنابراین، اگر نامعادله با رابطه‌ی کوچک‌تر یا مساوی (≤) مورد نظر باشد، ابتدا یک واحد به عدد n می‌افزاییم و سپس با توجه به دو نکته‌ی قبل، تعداد جواب‌های مورد نظر را محاسبه می‌کنیم.

$a\le b \Leftrightarrow a<b+1$

$x+y+z\le 7 \to x+y+z<8$

تفریح اندیشه

● حسین نامی ساعی

پارادوکس (متناقض‌نما)

آیا قبول دارید که پول توجیبی شما همیشه برابر است با پول توجیبی دوستتان!؟ اگر قبول ندارید این مطلب را بخوانید:

فرض کنید پول توجیبی شما A تومان و پول توجیبی دوستتان B تومان باشد. بنابراین میانگین پول شما و دوستتان برابر است با:

$$2C=A+B \quad \text{یا} \quad C=\frac{A+B}{2}$$

با ضرب (A-B) در رابطه قبل داریم:

$$(A-B)(A+B)=(A-B)2C$$
$$A^2-B^2=2CA-2CB$$
$$A^2-2CA=B^2-2CB$$

C^2 را به طرفین بیفزاییم:

$$A^2-2CA+C^2=B^2-2CB+C^2$$
$$(A-C)^2=(B-C)^2$$

پس:

$$(A-C)=(B-C)$$

حذف (-C) از طرفین:

$$A=B$$

ادب ریاضی

لابد میل دارید بدانید که «اراتوستن» چگونه برای اندازه‌گیری زمین اقدام کرد. استدلال او، این بود: با توجه به این‌که محیط دایره به ۳۶۰ درجه تقسیم می‌شود، اگر من بتوانم طول یک درجه‌ی آن را بر حسب استاد «stade» معین کنم (هر استاد تقریباً ۱۵۷٫۵ متر است)، برای تعیین محیط کره‌ی زمین کافی است که عدد حاصل را در ۳۶۰ ضرب کنم. در واقع، مطلب رجوع شده بود به این‌که طول کمان یک درجه را معین کنند.

پاسخ‌گو باشید، چگونه؟

(قسمت اول)

● دکتر غلامرضا یاسی‌پور

اشاره

استاد محمدهاشم رستمی عضو هیأت تحریریه‌ی مجله‌ی رشد برهان متوسطه و مؤلف کتاب درسی دوره‌ی متوسطه و عضو شورای برنامه‌ریزی درسی گروه ریاضی دفتر تألیف و برنامه‌ریزی درسی و مؤلف دایرةالمعارف‌های هندسه ۱۷ جلد و... هستند که ۴۵ سال سابقه‌ی تدریس دارند. در این شماره با ایشان به گفت‌وگو نشسته‌ایم.

■ در دفتر مجله‌ی ریاضی رشد برهان متوسطه، خدمت جناب استاد محمدهاشم رستمی هستیم. آقای رستمی، من این مصاحبه را چهار قسمت کرده‌ام و هر قسمت چند سؤال دارد. قسمت اول مربوط به زندگی متعارف شماست، یعنی زندگی مادی؛ بعداً به بخش معنوی می‌رسیم. اولین سؤال این است که: اهل کجا هستید؟ حتماً همشهریان شما خوشحال می‌شوند که از شهرستانشان شخصیتی مثل شما برخاسته و موفق به انجام کارهای خیلی جالبی شده است که در ادامه به آن‌ها اشاره می‌کنیم. اهل کجا هستید؟

● بسم‌الله الرحمن الرحیم. از لطف شما

و دیگر دوستان در مجله‌ی رشد برهان متوسطه تشکر می‌کنم. متولد ۱۳۱۸ هستم در طبس.

■ **کودکی و نوجوانی‌تان را کجا گذراندید؟ بچه‌ها و دبیران دلشان می‌خواهد با این جزئیات آشنا شوند.**

● در طبس و فردوس، و دوره‌ی دوم دبیرستان را هم در مشهد.

■ **از طبس تا مشهد چه قدر فاصله است؟**

● حدود ۵۰۰ کیلومتر.

■ **و چه طور آمدید؟**

● در طبس و فردوس رشته‌ی ریاضی وجود نداشت. بعد از سیکل اول دبیرستان، سیکل دوم دبیرستان تقسیم می‌شد به رشته‌های طبیعی، ریاضی و ادبی و من هم علاقه‌مند بودم در رشته‌ی ریاضی تحصیل کنم. بنابراین به جوار امام رضا(ع) آمدم.

■ **این ۵۰۰ کیلومتر را خودتان طی کردید یا با خانواده آمدید؟**

● طبیعتاً، در شروع با خانواده، ولی بعداً تنها بودم.

■ **دبیرستان را تا آخر در مشهد بودید؟**

● بله در دبیرستان «ابومسلم» مشهد. دیپلم ریاضی را سال ۱۳۳۸ گرفتم.

■ **از پدر و مادرتان چه خاطراتی دارید؟**

● خاطرات مربوط به پدر و مادر خاطراتی هستند که همواره در ذهن هر فرزندی می‌مانند. پدر و مادر من، خدا رحمتشان کند، هر دو فوت شده‌اند. آن‌چه که من به یاد دارم، این است که پدرم، با وجودی که جزو تحصیلکرده‌های آن زمان نبود، ولی سواد ششم ابتدایی آن زمان را داشت و اهمیت زیادی برای تحصیل علم قائل بود.

■ **برای آن زمان خیلی بوده، کم نبوده است!**

● بله، گواهی‌نامه‌ی ششم ابتدایی را در آن زمان گرفته بود. علاقه‌ی زیادی داشت که درس بخوانم. به همین دلیل، هم دور بودن و هم هزینه‌ی تحصیل مرا در مشهد، برای یک زندگی مستقل، تحمل کرد. این است که من به سهم خودم از ایشان ـ خدا رحمتش کند ـ سپاس‌گزارم و امیدوارم بتوانم با کارهایی که انجام داده‌ام یا کارهایی که در حال حاضر از دستم برمی‌آید، گوشه‌ای از زحمت‌های پدر و مادرم را جبران کنم.

■ **اگر خاطراتی از معلمین دبستان و دبیرستانتان دارید، بفرمایید.**

● نظام تعلیم و تربیت در سال‌های ۲۸-۱۳۲۷ نظام دیکتاتوری بود، و نظم و ترتیب خشکی داشت. در بعضی موارد هم، ترکه‌ی انار برقرار بود.

■ **شما هم خودتان چوب خورده‌اید؟ ترکه‌ی انار؟**

● تا آن‌جا که یادم هست، راه منزل تا مدرسه (دبستان)، راهی طولانی بود و گاهی اوقات دیر به مدرسه می‌رسیدم. در این موارد برای توضیح تأخیر ورود، با خواهر بزرگ‌ترم می‌رفتیم تا شفاعت مرا بکند که دیر رسیده‌ام. این را یادم هست، ولی چوب خوردن یادم نیست.

■ **خوب پس شاگرد زرنگی بودید.**

● بله، از ابتدای تحصیل. در سال ششم ابتدایی در شهرستان شاگرد اول شدم و در دوره‌ی لیسانس در دانش‌سرای عالی تهران هم شاگرد دوم شدم.

■ **از معلمین دبستان و دبیرستانتان هم خاطراتی دارید؟ مثلاً آن‌هایی که در دبستان سخت‌گیری می‌کردند؛ احتمالاً در سیکل اول دبیرستان.**

● مدارس، چه دبستان چه دبیرستان، نظم خاص خودشان را داشتند. انضباط حاکم بر مدارس، تقریباً در سرتاسر ایران یکسان بود. معلم با اقتدار و هم‌چنین ناظم و مدیر مدرسه. تدریس هم به صورت معلم‌محوری بود. دبیرستان ابومسلم در آن زمان، جزو بهترین دبیرستان‌های مشهد بود و معلمینش با روش‌های آموزشی جدید بیشتر آشنا بودند؛ به همین علت قدری با مدارس دیگر متفاوت بود. دبیران خیلی خوبی داشتیم که من اسامی بعضی از آن‌ها را یادم هست. آقایان: **مرتضی هندی‌نژاد، بهادرزاده، صدقیانی، دکتر ربانی، دکتر رکنی، آخوندزاده، ذات‌علیان و موسوی.** رئیس دبیرستان هم آقای **صدقیانی** بودند که درس جبر را هم تدریس می‌کردند. من از همه‌ی این معلمین گران‌قدر سپاس‌گزاری می‌کنم.

■ **پس معلمین خوبی داشتید.**

● بله، از سال چهارم تا سال ششم دبیرستان، معلمین بسیار خوبی داشتیم؛ هم زبده و هم علاقه‌مند. وجود این معلمین در حقیقت انگیزه‌ی مضاعفی در من ایجاد کرد و علاقه‌ی بیشتری نسبت به ریاضیات و همین‌طور نسبت به معلمی ریاضی پیدا کردم.

■ **چه سالی به دانشگاه رفتید و استادانتان چه کسانی بودند؟**

● سال ۱۳۳۸، وارد دانش‌سرای عالی تهران شدم، در رشته‌ی ریاضی. سال

۱۳۴۱ هم فارغ‌التحصیل شدم. دوره‌ی لیسانس سه ساله بود که بعد از این سه سال، در حقیقت هم لیسانس ریاضی و هم لیسانس علوم تربیتی داده می‌شد؛ چون در دانش‌سرای عالی، علاوه بر دروس خاص دبیری ریاضی، دروس علوم تربیتی هم جزو برنامه‌ی درسی بود.

استادان ما استادان بنام آن زمان بودند. از آن جمله‌اند: آقایان **دکتر هشترودی، پروفسور فاطمی، دکتر بهفروز، دکتر منوچهر وصال، دکتر کامکار پارسی، دکتر تسلیمی، دکتر جوان‌شیر، و دکتر علی‌نقی وحدتی** که ریاضی و نجوم تدریس می‌کردند. این‌ها در حقیقت جزو استادان برجسته‌ای بودند که من در خدمتشان شاگردی کردم.

■ **از هم‌شاگردی‌هایتان نام ببرید؛ کسانی که الان یادتان هست و سرکار هستند.**

● از هم‌شاگردی‌ها، **آقای احمد قندهاری**، دوست عزیز من، از هم‌کلاسی‌های ما بودند و از دوستان دیگر، **آقای محمود تلگینی** هستند که جزو مؤلفان کتاب‌های درسی‌اند و الان اصفهان هستند. آقایان: **علاءالدّین جوادی‌ابهری، کاظم همدانی، دکتر نشوادیان، خالدی، صالحی، صادقی، عطار، استوار اسفندآبادی، دستجردی، عابدی مربی هروی و بابایی**، ... و خانم‌ها: **نصر اصفهانی، قانعی و صانعی** که از هم‌کلاسی‌های خوب ما بودند. ۳۰ نفر دانشجو بودیم که این سه سال را با هم گذراندیم. شاگرد اول دوره‌ی تحصیلی ما **آقای دکتر یاسایی** بودند که مرحوم شدند؛ خدا رحمتشان کند. من هم شاگرد دوم شدم.

■ **راجع به دو نفر از استادانتان، یکی دکتر هشترودی و یکی پروفسور تقی فاطمی، اگر خاطراتی دارید، بفرمایید.**

● **پروفسور فاطمی** واقعاً نمونه‌ی یک معلم واقعی بودند؛ دلسوز، مهربان، و در عین حال جدی و سخت‌گیر.

■ **و باسواد.**

● و با سواد.

■ **این خیلی نکته‌ی مهمی است، بسیار باسواد بود!**

● و یک معلم به معنای واقعی. طبیعتاً در تغییر و تحول آموزش و پرورش در دنیا، روش‌ها عوض می‌شوند، دانش‌ها تغییر و تکامل پیدا می‌کنند، ولی نسبت به آن زمان و زمان حاضر، من می‌توانم بگویم ایشان جزو بهترین الگوهای معلمی برای کسانی بودند که بعداً می‌خواستند شغل معلمی را انتخاب کنند. ایشان در حقیقت ممتحن روش تدریس بودند. چون یکی از دروسی که باید دانشجویان دانش‌سرای عالی می‌گذراندند، واحد تدریس عملی بود که برای این درس، چند ساعت در مدارس به صورت عملی کار می‌کردند. بخشی از آن مشاهده بود و بخشی دیگر تدریس عملی. بعد هم امتحان عملی گرفته می‌شد. امتحان تدریس عملی با دانش‌آموز واقعی و در کلاس واقعی گرفته می‌شد که اگر کسی از عهده‌ی آن برمی‌آمد، در حقیقت سند دبیری یا معلمی‌اش صادر می‌شد. یکی از ممتحنین این درس، **استاد پروفسور فاطمی** بودند و یکی هم **استاد پاسارگادی** که ممتحن درس روش تدریس من بودند.

استاد هشترودی هم با توجه به سطح علمی بالایی که داشتند، بیشتر مباحثی را که مطرح می‌کردند، بحث‌های کاربرد ریاضیات در دانش روز و از جمله فرستادن قمرهای مصنوعی به فضا بود.

■ **فکر می‌کنم در مقایسه با پروفسور نقی فاطمی، قدری مطالبشان نوتر بود.**

● ایشان در ارتباط با کارهایی که انجام داده بودند، مانند محاسباتی که برای فرستادن قمرهای مصنوعی، مثل اسپوتنیک روس‌ها به فضا انجام داده بودند، و مقاله‌هایی که در کنفرانس‌های علمی ارائه کرده بودند، اطلاعاتی می‌دادند که برای ما خیلی جالب بود و خود این‌ها برای ما انگیزه ایجاد می‌کرد؛ برای این که بدانیم دریچه‌های علم باز است و امتداد علم هم خیلی طولانی. یعنی در حقیقت، هر قدر بیشتر کسی دنبال علم برود، باز هم جا برایش در این راه وجود دارد.

■ **در شرح حال دکتر فاطمی خواندم که ایشان در اعزام دانشجویان به خارج از**

کشور، شاگرد اول شده بود و شاگردان اول عموماً می‌باید پزشکی بخوانند، ولی ایشان معلمی و معلمی ریاضی را انتخاب کردند. دکتر هشترودی تا سال‌های آخر رشته‌ی پزشکی را خوانده بود، ولی بعد به رشته‌ی ریاضی رفته بود و جزو برجسته‌ترین دانشجویان کشور فرانسه محسوب می‌شد. نسبت به پروفسور فاطمی هم نوگراتر بود.

● البته رشته‌های تحصیل و تدریس آن‌ها با هم فرق می‌کرد. به‌نظر من، هر کدام در کار خود جزو بهترین‌ها بودند.

■ **خوب سؤال بعدی این است که آیا تشکیل خانواده داده‌اید؟ کی؟ بلافاصله؟ البته به هر کدام نخواستید جواب بدهید، می‌توانید جواب ندهید. ولی دوستان دلشان می‌خواهد که از این جزئیات هم کمابیش خبر داشته باشند.**

● سال ۱۳۴۳ ازدواج کردم، با خانم **سیمین دخت ترکپور.**

■ **که مؤلف هم هستند.**

● مؤلف و مترجم کتاب هستند و هم‌دوره در دانش‌سرای عالی بودیم.

■ **رشته‌ی ریاضی؟**

● خیر، ایشان در رشته‌ی ریاضی نبودند، در رشته‌ی دیگری بودند. و سه فرزند داریم: **دکتر مهرداد رستمی** که دکترای برق در گرایش قدرت هستند و استاد دانشگاه و هیئت علمی دانشگاه شاهد، **دکتر کتایون رستمی** که پزشک است و دختر بزرگم، و **دکتر آتوسا رستمی** که دختر کوچکم است و دندانپزشک.

■ **پس شما خیلی موفق بوده‌اید. خب سؤال بعدی من باز در مورد فرزندانتان است؛ البته فرزندان علمی‌تان، یعنی تألیفات شما. راجع به دایرة‌المعارف هندسه بعد صحبت می‌کنیم، چون باید قدری مفصل‌تر صحبت کنیم. غیر از آن، تألیفاتتان را بفرمایید.**

● شمار تألیفات من بدون احتساب ۱۷ جلد دایرة‌المعارف هندسه، بیش از ۴۵ جلد است که از این تعداد، پنج جلد آن کتاب‌های درسی وزارت آموزش و پرورش است، از این قرار:

◆ **کتاب ریاضی اول دبستان و کتاب راهنمای معلم**، سال ۱۳۶۰، با همکاری آقایان **دکتر کاظم للّهی و دکتر رحیم کریم‌پور.**

◆ **کتاب ریاضی۳** برای سال سوم متوسطه رشته‌ی علوم تجربی نظام جدید، در سال ۱۳۷۳ با همکاری آقایان **دکتر محمد گودرزی و عبدالحمید عطوفی.**

◆ **کتاب هندسه‌ی۲** برای سال سوم متوسطه رشته‌ی ریاضی و فیزیک نظام جدید در سال ۱۳۷۴، با همکاری آقای **جواد حاجی‌بابایی** و دیگران.

◆ **کتاب ریاضی۳** برای سال سوم رشته‌های فنی و کاردانش در سال ۱۳۸۳، با همکاری آقایان **دکتر اسماعیل بابلیان** و **دکتر جواد لئالی.**

کتاب‌های دیگرم، کتاب‌های کمک‌آموزشی و کمک‌درسی هستند که تعدادی از آن‌ها را نام می‌برم:

الف) تعدادی از کتاب‌هایی که به تنهایی تألیف کرده‌ام:

● **کتاب کار هندسه(۱)** برای دانش‌آموزان سال دوم رشته‌های علوم تجربی و ریاضی فیزیک.

● **کتاب کار هندسه(۲)** برای دانش‌آموزان سال سوم رشته‌ی ریاضی و فیزیک

● **کتاب هندسه‌ی تحلیلی** (بردار، خط و صفحه در فضا) برای دانش‌آموزان پیش‌دانشگاهی رشته‌ی ریاضی فیزیک که بیست‌وپنجمین کتاب کوچک ریاضی است.

● جلد اول **کتاب مکان هندسی** برای دانش‌آموزان دبیرستان و پیش‌دانشگاهی، معلمین ریاضی و داوطلبان المپیادهای ریاضی.

● دو جلد **جبر پایه** برای دانش‌آموزان سال‌های سوم و چهارم متوسطه نظام قدیم و نظام جدید رشته‌های علوم تجربی و ریاضی فیزیک.

● **پرسش‌های چهارگزینه‌ای هندسه(۱)** برای دانش‌آموزان سال دوم رشته‌های ریاضی‌فیزیک و علوم تجربی و داوطلبان کنکور دانشگاه‌ها.

● **پرسش‌های چهارگزینه‌ای هندسه(۲)** برای دانش‌آموزان سال سوم متوسطه رشته‌ی ریاضی‌فیزیک و داوطلبان کنکور دانشگاه‌ها.

● ۲ **جلد تمرین ریاضی سال اول ابتدایی**

● ۲ **جلد تمرین ریاضی سال دوم ابتدایی**

● **کتاب هندسه‌ی همراه** برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه، معلمین ریاضی و داوطلبان المپیادهای ریاضی.

ب) تعدادی از کتاب‌هایی که با همکاری دوستان دیگر تألیف کرده‌ام:

● **ریاضیات سال سوم متوسطه** رشته‌ی علوم تجربی، برای دانش‌آموزان سال سوم متوسطه رشته‌ی علوم تجربی و داوطلبان کنکور.

● **ریاضی عمومی پیش‌دانشگاهی** برای دانش‌آموزان پیش‌دانشگاهی رشته‌ی علوم تجربی و داوطلبان کنکور.

● **فرهنگ ریاضیات دبیرستانی**،

برای دانش‌آموزان دوره متوسطه و معلمان ریاضی.

● **ویژه‌نامه‌های برهان برای امتحانات نهایی.**

■ **خوانندگان مجله‌ی رشد برهان متوسطه کمابیش با آن آشنا هستند. بعد از آن می‌رسیم به مجله‌ی رشد برهان متوسطه. کی با این مجله همکاری‌تان را شروع کردید؟**

● از پایه‌گذاری مجله، در خدمت آقای **حمیدرضا امیری** بودم و از اولین شماره‌ی **مجله‌ی رشد برهان متوسطه** جزو هیئت تحریریه. اوایل، کارهای مربوط به چند بخش از مجله را به عهده داشتم و بعد با اضافه شدن دوستان جدید، کارهای مربوط به بخش هندسه را به‌عهده گرفتم. خدا را شکر می‌کنم که توفیق داشتم تا این شماره‌ی مجله رشدبرهان متوسطه در خدمت همکاران هیئت تحریریه‌ی مجله‌ی برهان و دانش‌آموزان ارجمند باشم که البته از شماره‌ی ۲۰ در خدمت **آقای میرشهرام** صدر بوده‌ام و از لطف ایشان استفاده کرده‌ام و کاری که از دستم برمی‌آمده، انجام داده‌ام.

■ **بله، انتشار ۵۵ شماره مجله به طور مداوم مشکل است. از شاگردان زرنگتان و شاگردان شلوغ، چه خاطرات حائز اهمیتی دارید؟**

● تقریباً می‌توانم بگویم که من شاگردی به اسم شاگرد شلوغ نداشتم. کاری که در چهل و چند سال تدریس داشتم این بود که در اولین جلسه‌ی درس با دانش‌آموزان صحبت می‌کردم و برای ایشان روشن می‌کردم، شمایی که این‌جا نشسته‌اید، چه وظیفه و تکلیفی دارید، چه هزینه‌ای دارد برای شما پرداخته می‌شود و من که این‌جا هستم، چه وظیفه‌ای دارم و چه باید بکنم. مسائل را می‌شکافتم و روشن می‌کردم، هر **لحظه‌ای که دانش‌آموز در کلاس درس حاضر است، ارزش زیادی دارد و برای آن لحظه، سرمایه‌گذاری مادی و معنوی شده است.** پدر و مادر، دولت، ... و دبیر، همه‌ی این‌ها جزو سرمایه‌گذاران مادی و معنوی هستند که در خدمت آموزش شما دانش‌آموزان عزیز قرار دارند. **وظیفه‌ای که شما دارید این است که پاسخ‌گو باشید! چگونه؟** با موفقیت آخر سال، در حقیقت موفقیت شما در پایان سال تحصیلی، پاسخ همه‌ی آن زحمت‌هایی هست که برای شما کشیده می‌شود. بنابراین از هر لحظه‌اش باید استفاده کنید.

با توجه به این صحبت‌ها، از ابتدای سال شاگردان، چه در دبیرستان البرز که ده سال در آن تدریس داشتم، و چه در دبیرستان‌های دیگر از جمله دبیرستان **اسدآبادی** در تهران در میدان رشدیه، با علاقه‌مندی سر کلاس حاضر می‌شدند و درسشان را می‌خواندند. به جرئت می‌توانم بگویم که در این مدت حتی یک بار هم، من دانش‌آموزی را از کلاس اخراج نکردم و دانش‌آموزی را هم ندیدم که از من ناراضی باشد.

■ **از شاگردانتان، کسانی که شهرتی پیدا**

کردند، الان کسی یادتان هست؟

● من زیاد بررسی نکرده‌ام. ولی گاه به تعدادی از آن‌ها برخورده‌ام و دیده‌ام که لطف و محبت داشتند و افراد موفقی در اجتماع بودند؛ حتی در سطح وزیر و در مشاغل دیگر. عده‌ای هم مثل خود من دبیر و معلم شدند که بعضی از آن‌ها را دیده‌ام که با اشک چشم به استقبال من آمده‌اند و این برای من بهترین پاداش و سرمایه است.

■ **خب، در سؤال بعدی‌مان کمی وارد مقولات معنوی می‌شویم. از کی به هندسه علاقه‌مند شدید؟ چون رشته‌ی اصلی و تخصصی شما ظاهراً هندسه است. اگر غیر از این است، خودتان بفرمایید. ولی در هندسه کار زیاد کرده‌اید و خیلی شهرت دارید. کی به این رشته از علوم علاقه‌مند شدید؟**

● از دوره‌ی دبیرستان به درس هندسه علاقه‌مند بودم و معمولاً به عنوان منبع حل‌کننده‌ی مسئله‌های هندسه برای هم‌کلاسی‌هایم بودم. در دوره‌ی تحصیل در دانش‌سرای عالی هم استاد دکتر محسن هشترودی، درس هندسه‌ی ما را تدریس می‌کردند و بر این نکته تأکید داشتند که هر فردی هندسه می‌داند، در یادگیری دروس دیگر نیز تواناتر است؛ هندسه قوه‌ی تفکر و خلاقیت را تقویت می‌کند. به همین دلایل، از ابتدای شغل معلمی‌ام به تدریس هندسه پرداختم و در مقاطعی، دروس دیگر ریاضی مانند جبر و آنالیز، حساب استدلالی و مثلثات را نیز در دبیرستان‌های محل خدمتم برحسب نیاز تدریس کردم. اما تدریس هندسه در تمام دوران چهل و چند ساله‌ی تدریسم، جزو برنامه‌ی ثابت کاری من بود.

■ **سؤال بعد که یک سؤال فنی است: نقش هندسه در درک ریاضی چیست؟**

● این موضوع بسیار مهم است. خیام در رساله‌ی «شرح ما اَشْکَلَ من مصادرات **اقلیدس**» می‌گوید: «این جزو از حکمت که آن را علوم ریاضی می‌نامند، آسان‌ترین اجزای حکمت است، هم در ادراک تصوری و هم در تصدیق. اما آن رشته که مربوط به عدد و حساب باشد، خود واضح و آشکار است. بخش هندسیات نیز بر کسانی که دارای فطرت سلیم و رأی راست و جودت حدس باشند، پنهان نباشد و فایدت علوم ریاضی این است که موجب ورزیدگی ذهن و تند کردن خاطر گردد و نیز نفس را عادت دهد تا از قبول اموری که مقرون به دلیل و برهان نباشد، اجتناب کند و سبب این امر، همانا سهولت براهین و نزدیک بودن ماخذ آن به ذهن و معاونت تخیل است با تعقل، و قلت مخالفت و هم با عقل...»

پروفسور جورج پولیا، استاد بزرگ آموزش ریاضی در قرن حاضر می‌گوید: **«اگر تعلیم و تربیت عمومی در صدد ارزانی داشتن نظام منطقی به دانشجویان است، باید در آن، مقام خاصی برای استدلال‌های هندسی درنظر گرفته شود. حتی استدلال‌های ساده ممکن است از دیدگاه هوش‌افزایی، سودمند واقع شود.»**

آنچه که بسیاری از ریاضی‌دانان دنیا بر آن تأکید کرده‌اند، این است که هندسه قدرت تفکر و خلاقیت را بالا می‌برد و باعث نظم فکری می‌شود. شاید جنبه‌ای از این مطلب، برمی‌گردد به مسئله‌ی اصل موضوعی بودن هندسه. هندسه‌ای که تا به حال بیشتر رایج بوده، هندسه اصل موضوعی **اقلیدس** است؛ یعنی هندسه‌ای است که براساس اصول موضوع بنیان نهاده شده است. هندسه‌های نااقلیدسی و هندسه‌های جدید که بعداً مطرح شدند، شاید هیچ‌کدام از این نظر، قدرت هندسه‌ی اقلیدسی را نداشته باشند.

من مثالی را در این مورد بیان کنم: **دیودونه**، یکی از ریاضی‌دانان مشهور فرانسه که به ایران هم آمد، گفت اقلیدس باید برود و هندسه اقلیدسی باید کنار گذاشته شود. همین کار را هم در فرانسه و هم در آمریکا انجام دادند. مدت زیادی طول نکشید، آن چنان افت ریاضی به خصوص در آمریکا، ایجاد شد که موجب عقب‌ماندگی آن‌چنانی آمریکایی‌ها در پرتاب ماهواره‌های سرنشین‌دار گردید. وقتی که شوروی اولین ماهواره‌ی سرنشین‌دار را به فضا پرتاب کرد، دانشمندان ریاضی آمریکا گرد هم آمدند تا برای جبران افت ریاضی کشورشان و رسیدن به دانش روز، چاره‌ای بیندیشند. این ریاضی‌دانان برجسته، دلایل افت ریاضی را بررسی و بیانیه‌ای صادر کردند. در این بیانیه اشاره کرده بودند که یکی از دلایل افت ریاضی، حذف هندسه‌ی اصل موضوعی اقلیدسی و در حقیقت کم‌رنگ شدن هندسه‌ی اقلیدسی در برنامه‌ی درسی آمریکا و اروپا بوده است. بعد هم مجدداً هندسه‌ی اقلیدسی را وارد برنامه‌های درسی کردند. در حال حاضر، در استانداردهای موضوعی برنامه‌ی درسی NCTM که استانداردهای برنامه‌ی درسی جهانی هستند، و تعداد کثیری از کشورها آن‌ها را پذیرفته‌اند، **یکی از استانداردهای موضوعی مهم را هندسه** قرار داده‌اند.

ادامه دارد...

اشاره:
در شماره گذشته رسم نمودار توابع چندجمله‌ای و مثلثاتی را بررسی کردیم، اینک به رسم نمودار توابع کسری می‌پردازیم. بهتر است قبل از مطالعه این مقاله، قسمت اول آن را از شماره‌ی قبل مطالعه کنید.

رسم نمودار تابع بدون مشتق

(قسمت ۲)

● مجتبی رفیعی
دبیر ریاضی منطقه‌ی شهر قدس

رسم نمودار تابع $\frac{1}{f}$ از روی تابع f

الف) جهت حرکت f و $\frac{1}{f}$ خلاف یکدیگرند.

ب) همواره مقادیر f و $\frac{1}{f}$ هم‌علامت‌اند.

پ) اگر نقطه‌ی $M\Big|_{f(a)}^{a}$ نقطه‌ی می‌نیمم (ماکزیمم) تابع f باشد، نقطه‌ی $M'\Big|_{\frac{1}{f(a)}}^{a}$ نقطه‌ی ماکزیمم (می‌نیمم) تابع $\frac{1}{f}$ است.

ت) هرگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ باشد، آن‌گاه $\frac{1}{f}$ در $x=a$ مجانب قائم دارد.

ث) اگر $y=b$ مجانب افقی تابع f باشد، آن‌گاه $y=\frac{1}{b}$ مجانب افقی تابع $\frac{1}{f}$ است.

ج) اگر در اثر میل x به سمت بی‌نهایت، تابع y نیز به سمت بی‌نهایت میل کند، آن‌گاه $y=\frac{1}{f}$ دارای مجانب افقی به معادله‌ی $y=0$ است.

چ) اگر تابع f در یک بازه صفر شود، آن‌گاه تابع $\frac{1}{f}$ در آن بازه تعریف نمی‌شود.

ح) محل تقاطع f و $\frac{1}{f}$ در صورت وجود، روی خطوط $y = \pm 1$ است (زیرا $f = \frac{1}{f} \Rightarrow f = \pm 1$).

نمودار توابع ذیل را رسم کنید:

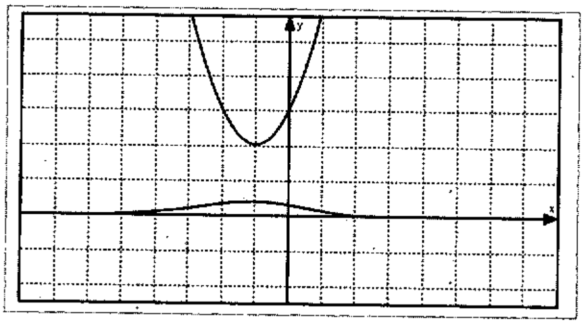
$$\boxed{1)\ \ y = \frac{1}{x^{2} + 2x + 3}}$$

گام اول: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x^{2} + 2x + 3$ را رسم می‌کنیم.

گام دوم: طبق قسمت ج $y = 0$ مجانب افقی تابع است.

گام سوم: طبق قسمت پ $M'\left|\begin{matrix}-1\\ \frac{1}{2}\end{matrix}\right.$ ماکزیمم تابع $\frac{1}{f}$ است.

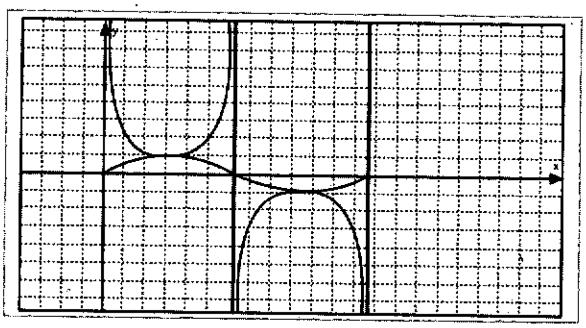
گام چهارم: طبق قسمت الف دو تابع f و $\frac{1}{f}$ جهت حرکتشان مخالف یکدیگر است و طبق قسمت ب بالای محور xها قرار دارند.



$$\boxed{2)\ \ y = \frac{1}{\sin x}}$$

گام اول: نمودار تابع با ضابطه‌ی y=sinx در نقاط $x = k\pi$ محور xها را قطع می‌کند.

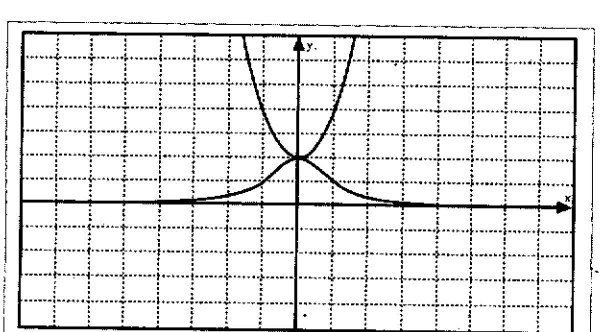
گام دوم: طبق قسمت‌های الف، ب و پ، نمودار به این صورت است.



$$\boxed{3)\ \ y = \frac{1}{x^{2} + 1}}$$

گام اول: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x^{2} + 1$ را رسم می‌کنیم که رأس آن $S\left|\begin{matrix}0\\ 1\end{matrix}\right.$ است.

گام دوم: طبق قسمت‌های الف، ب و پ نمودار به این صورت است.



رسم نمودار توابع کسری

نمودار توابع کسری زیر را رسم کنید :

$$۱)\ \ f(x)=\frac{x}{x^{۲}+۱}$$

گام اول : مجانب‌های تابع را بررسی می‌کنیم :

۱ . چون مخرج ریشه ندارد ، بنابراین منحنی فاقد مجانب قائم است .

۲ . $y=۰$ مجانب افقی منحنی است ، زیرا :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^{۲}+۱}=۰\Rightarrow y=۰$$

۳ . چون درجه‌ی صورت از مخرج کمتر است ، منحنی فاقد مجانب مایل است .

گام دوم : با حل $f(x)=۰$ ، مقدار $x=۰$ به‌دست می‌آید که طبق نکته‌ی ۱ (مقاله‌ی شماره‌ی قبل) ریشه‌ی ساده‌ی منحنی است ، زیرا :

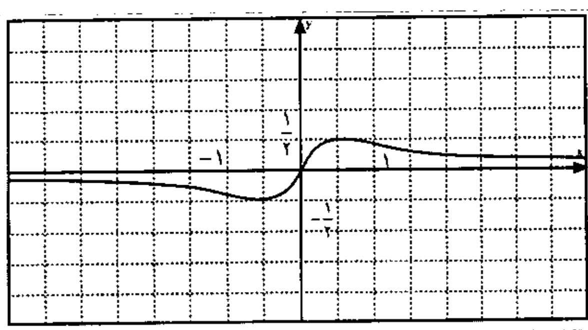
$$y=x\underbrace{\left(\frac{۱}{۱+x^{۲}}\right)}_{g(x)}$$

گام سوم : برای رسم نمودار این تابع ، دو نقطه‌ی دلخواه در دو طرف ریشه‌ی ساده‌ی $x=۰$ ، انتخاب می‌کنیم و در تابع اصلی قرار می‌دهیم :

$$x=-۱\Rightarrow y=\frac{-۱}{۱+(-۱)^{۲}}=\frac{-۱}{۲}$$

$$x=۱\Rightarrow y=\frac{۱}{۱+(۱)^{۲}}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین منحنی از دو نقطه‌ی $A(-۱,\frac{-۱}{۲})$ و $B(۱,\frac{۱}{۲})$ در ناحیه‌ی سوم و ناحیه‌ی اول عبور می‌کند . یعنی : منحنی از منفی بی‌نهایت و پایین مجانب افقی $y=۰$ شروع می‌شود و باید با عبور از نقطه‌ی A ، در ناحیه‌ی سوم دارای یک می‌نیمم شود و نقطه‌ی $(۰,۰)$ را قطع کند و سپس با عبور از نقطه B در ناحیه‌ی اول ، دارای یک ماکزیمم شود و به سمت مثبت بی‌نهایت و بالای مجانب افقی $y=۰$ ادامه پیدا کند .



$$۲)\ \ f(x)=\frac{(x-۱)^{۲}}{x^{۲}-۲x}$$

گام اول : مجانب‌های تابع را بررسی می‌کنیم :

۱ . مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم . در این صورت نقاط $x=۲$ و $x=۰$ مجانب قائم منحنی هستند .

۲ . $y=۱$ مجانب افقی منحنی است ، زیرا :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-۱)^{۲}}{x^{۲}-۲x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{۲}-۲x+۱}{x^{۲}-۲x}=۱$$

۳ . چون درجه‌ی صورت با مخرج برابر است ، منحنی فاقد مجانب مایل است .

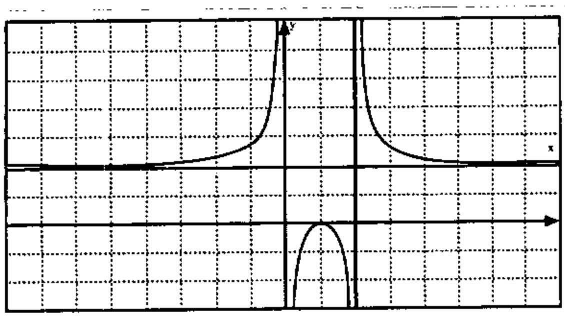
گام دوم : با حل $f(x)=۰$ عامل $(x-۱)^{۲}$ به‌دست می‌آید که با توجه به نکته‌ی ۳ (مقاله‌ی شماره‌ی قبل) ، نقطه‌ی $x=۱$ ریشه‌ی مضاعف دارد و مماس بر محور xهاست . که منحنی در این نقطه ماکزیمم نسبی دارد ، زیرا : اگر در معادله‌ی

$$f(x)=(x-۱)^{۲}\underbrace{\left(\frac{۱}{x^{۲}-۲x}\right)}_{g(x)}$$

در تابع g(x) مقدار ۱ را قرار دهیم ، داریم :

$$g(۱)=\frac{۱}{(۱)^{۲}-۲(۱)}=-۱<۰$$

گام سوم : با توجه به این‌که مجانب‌های قائم منحنی ریشه‌های ساده‌ی مخرج هستند ، بنابراین دو طرف مجانب‌ها انفصال ساده داریم . (یک شاخه مثبت بی‌نهایت و دیگری منفی بی‌نهایت)



نمودار تابع بالا را به روش $\frac{۱}{f}$ نیز می‌توان رسم کرد .

$$۳)\ f(x) = \frac{x^۲ - ۱}{x^۳}$$

گام اول: مجانب‌های تابع را بررسی می‌کنیم:

۱. مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم. در این صورت $x = ۰$ مجانب قائم منحنی است.

۲. $y = ۰$ مجانب افقی منحنی است، زیرا:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^۲ - ۱}{x^۳} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^۲}{x^۳} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{۱}{x} = ۰$$

۳. چون درجه‌ی صورت از مخرج کوچک‌تر است، منحنی فاقد مجانب مایل است.

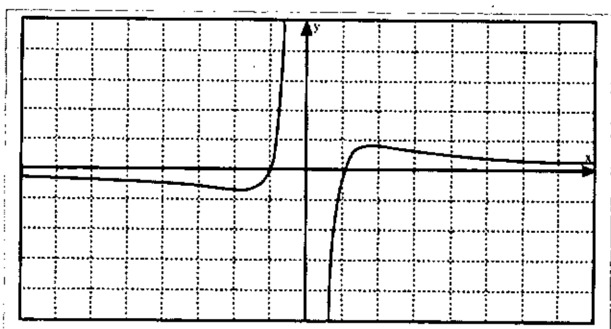
گام دوم: با حل معادله‌ی $f(x) = ۰$، ریشه‌های ساده‌ی $x = -۱, x = ۱$ به دست می‌آیند.

گام سوم: تابع در مجانب قائم خود دارای انفصال ساده است که برای رسم نمودار، دو نقطه‌ی دلخواه یکی بزرگ‌تر از ۱ و دیگری کوچک‌تر از ۱- در تابع قرار می‌دهیم. داریم:

در ناحیه‌ی اول $\quad f(۲) = \frac{(۲)^۲ - ۱}{۲^۳} = \frac{۳}{۸} > ۰ \Rightarrow$

در ناحیه‌ی سوم $\quad f(-۲) = \frac{(-۲)^۲ - ۱}{(-۲)^۳} = -\frac{۳}{۸} < ۰ \Rightarrow$

اکنون با توجه به مجانب‌ها و محل تقاطع منحنی با محور xها داریم:



$$۴)\ f(x) = \frac{x^۲ + ۴}{x + ۱}$$

گام اول: مجانب‌های تابع را بررسی می‌کنیم:

۱. مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم. در این صورت نقطه‌ی $x = ۱$ مجانب قائم منحنی است.

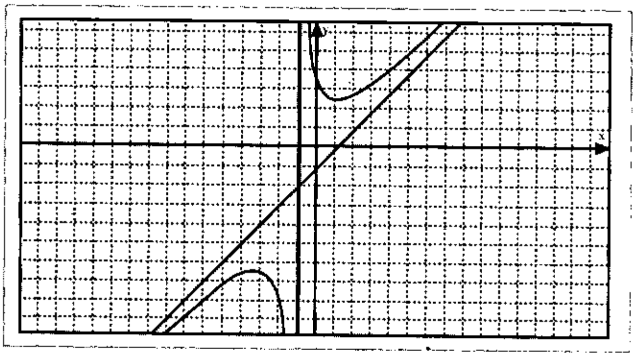
۲. تابع فاقد مجانب افقی است، زیرا:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^۲ + ۴}{x + ۱} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^۲}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} x = \pm\infty$$

۳. معادله‌ی منحنی را با استفاده از تقسیم چندجمله‌ای‌ها، به صورت $y = x - ۱ + \frac{۵}{x + ۱}$ می‌نویسیم که با توجه به نکته‌ی ۷ (مقاله‌ی شماره‌ی قبل)، دارای مجانب مایل $y = x - ۱$ است.

گام دوم: تابع $f(x) = ۰$ ریشه ندارد. بنابراین منحنی محور xها را قطع نمی‌کند. یعنی دارای دو اکسترمم نسبی است.

گام سوم: چون مجانب قائم منحنی برابر ۱ و مجانب مایل آن برابر $y = x - ۱$ است، آن‌ها را رسم می‌کنیم. با توجه به این که منحنی محور xها را قطع نمی‌کند، نمودار آن بین دو مجانب در بالا و پایین قرار می‌گیرد.



تمرین: نمودار توابع با ضابطه‌های زیر را رسم کنید.

$۱)\ y = \frac{۱}{x^۳ - ۳x^۲} \qquad ۴)\ y = \frac{۲x^۲ + x + ۱}{x + ۱}$

$۲)\ y = \frac{-۲x}{۱ - x} \qquad ۵)\ y = \frac{۴}{x^۲ + ۳}$

$۳)\ y = \frac{x^۲ + ۲x - ۲}{x - ۱} \qquad ۶)\ y = \frac{x^۲}{x^۲ + ۱}$

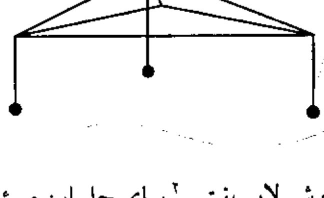
توجه: برای رسم دقیق نمودارها می‌توانید از نرم‌افزار Graphmathica استفاده کنید (از سایت زیر می‌توانید آن را دانلود کنید، http://www.graphmatica.com).

باراهیان

مسائلی با استفاده از فیزیک

در این بخش، به چند مسئله‌ی مقدماتی می‌پردازیم که به سادگی و با دقتی فیزیکی می‌توانیم آن‌ها را حل کنیم، و در موردشان توضیح می‌دهیم که چگونه شهود فیزیکی به یافتن راه‌حلی ریاضی کمک می‌کنند. کار را با مثالی در مورد مسئله‌ی «نقطه‌ی توریچلی»[۱] آغاز می‌کنیم، و حل بقیه‌ی مسائل را به عنوان تمرین، به شما وامی‌گذاریم.

نقطه‌ای واقع در صفحه‌ی مثلث حادالزّوایایی را بیابید که دارای کمترین مجموع فواصل از رئوس آن مثلث باشد.



(شکل۱)

روش لایب‌نیتس[۲] برای حل این مسئله چنین بود که مثلث را روی یک میز قرار دهیم و سوراخ‌هایی در هر رأس آن تعبیه کنیم. سپس از هریک از آن‌ها، مهره‌ای با وزن برابر، توسط

المپیادهای ریاضی

(قسمت هفتم)

● غلامرضا یاسی‌پور

نخی بیاویزیم. آن‌گاه سه نخ را (مطابق شکل۱) به هم گره بزنیم. در این صورت، دستگاه حاصل زمانی به تعادل می‌رسد که پتانسیل ثقل می‌نیمم باشد؛ یعنی زمانی که مجموع طول‌های اجزای نخ‌هایی که واقع بر میز ند، می‌نیمم باشد. نقطه‌ی Pای که سه نخ در آن به هم بسته شده‌اند، نقطه‌ی مورد نظر ماست. از طرف دیگر، مجموع سه نیروی برابری که در P عمل می‌کنند، و نمایشگر وزن‌های مهره‌ها هستند، صفر می‌شود، زیرا تعادل برقرار است؛ در نتیجه:

$$\angle APB = \angle BPC = \angle APC = ۱۲۰^\circ$$

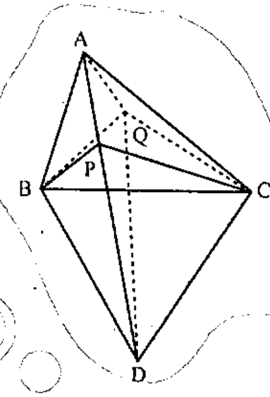
به این طریق، شهود فیزیکی به مشخص کردن مکان P کمک می‌کند. اکنون به طور دقیق ثابت می‌کنیم که اگر:

$$\angle APB = \angle BPC = \angle APC = ۱۲۰^\circ$$

در این صورت، AP+BP+CP می‌نیمم است.

فرض می‌کنیم D چنان باشد که BCD متساوی‌الاضلاع باشد و چنان که BC، A و D را جدا کند (شکل۲). بنابر «قضیه‌ی پومپیو»[۲]، به ازای هر نقطه‌ی Q واقع در صفحه، داریم:

$$BQ + CQ \geq QD$$



(شکل۲)

که برابری آن، اگر و تنها اگر Q بر C، دایره‌ی محیطی مثلث BCD قرار داشته باشد، برقرار است. بنابر نابرابری مثلثی، داریم:

$$AQ + QD \geq AD$$

که برابری آن، اگر و تنها اگر بر پاره‌خط AD واقع باشد، برقرار است. در نتیجه:

$$AQ + BQ + CQ \geq AD$$

و برابری، تنها اگر Q بر تقاطع C و AD، یعنی بر نقطه‌ی P منطبق باشد، برقرار است. در این صورت، نتیجه می‌شود که P، در مورد مجموع فواصل آن از رأس‌ها می‌نیمم و تنها می‌نیمم است. و به این ترتیب، مسئله حل می‌شود.

در این جا از شما دعوت می‌کنیم که صورت سه بعدی نقطه‌ی توریچلی را همراه با بعضی مسائل دیگر از همین نوع، بررسی کنید:

۱. بر اضلاع یک چندضلعی، بردارهای متعامدی به طول‌هایی متناسب با طول‌های اضلاع چند ضلعی و متوجه به خارج آن، در نظر می‌گیریم. نشان دهید مجموع این بردارها صفر است.

۲. عمود بر هر وجه یک چندوجهی، برداری به طولی که از لحاظ عددی با سطح آن وجه برابر و متوجه به خارج است، در نظر می‌گیریم، ثابت کنید مجموع این بردارها برابر صفر است.

۳. ثابت کنید، مجموع کسینوس‌های زوایای فرجه‌های یک چهاروجهی، متجاوز از ۲ نیست و گذشته از این برابر ۲ است، اگر و تنها اگر وجوه چهاروجهی مزبور دارای سطح یکسان باشند.

۴. فرض می‌کنیم ABCD یک چهاروجهی باشد و نیز فرض می‌کنیم، نقطه‌ی Pای واقع در درون آن و چنان باشد که مجموع فواصل P از رئوس آن می‌نیمم باشد. ثابت کنید،

نیمسازهای زوایای APB و CPD بر یک خط قرار دارند و گذشته از این، خط مزبور بر خطی عمود است که توسط نیمسازهای $\angle BPC$ و $\angle APD$ معین می‌شود.

۵. نقطه‌ای در درون یک چند وجهی محدب مفروض است. نشان دهید وجهی از این چندوجهی موجود است که تصویر این نقطه بر آن، داخل آن قرار می‌گیرد.

۶. شهرهای A و B توسط رودخانه‌ی مستقیمی جدا شده‌اند. در کدام نقطه باید پل MN را بنا کرد تا طول جاده‌ی AMNB می‌نیمم باشد.

۷. پنج نقطه بر دایره‌ای مفروض است. از مرکز دایره‌ی محیطی مثلث تشکیل شده از هر سه نقطه از آن‌ها، عمودی بر وتر واصل از دو نقطه‌ی باقی‌مانده رسم کرده‌ایم. چنین عمودی در مورد هر سه نقطه رسم شده است. ثابت کنید، ده خطی که به این طریق به دست می‌آیند، نقطه‌ای مشترک دارند. گزاره را در مورد n نقطه تعمیم دهید.

۸. جمیع مجموعه‌های متناهی S با دست‌کم سه نقطه‌ی واقع در صفحه را چنان بیابید که به ازای جمیع نقاط متمایز A و Bی واقع در S، عمودمنصف AB محور تقارن S باشد.

حل مسائل

۱. فرض می‌کنیم $A_1A_2\cdots A_n$ چندضلعی مورد نظر و $\vec V_i$ بردار عمود بر A_iA_{i+1} ، $i=1,\cdots,n$ $(A_{n+1}=A_1)$ باشد. مجموع:

$$\vec V_1+\vec V_2+\cdots+\vec V_n$$

متناسب با دوران:

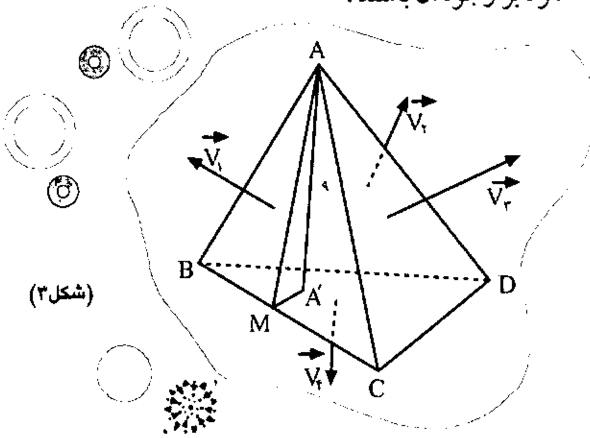
$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_nA_1}$$

به اندازه‌ی ۹۰ است. از آن‌جا که مجموع اخیر صفر است (بردارها، خطی چندضلعی و بسته می‌سازند)، مجموع بردارهای $\vec V_i$ نیز صفر است.

۲. این مسئله صورت خاصی از مسئله‌ی پیشین است که دارای «تعبیر فیزیکی» به این شرح است: اگر چندوجهی را با گازی، در فشار عدداً برابر یک، پر کنیم، آن‌گاه بنابر قانون پاسکال، بردارها نیروهایی هستند که بر وجوه چندوجهی عمل می‌کنند. ویژگی مورد بحث این است که مجموع این نیروها صفر می‌شود. یعنی چندوجهی در حال تعادل است. این موضوع از نظر گاه فیزیکی واضح است، زیرا هیچ نیروی خارجی بر آن عمل نمی‌کند.

توجه داشته باشید که کافی است، ویژگی مورد نظر را برای یک چهاروجهی اثبات کنیم. در این صورت، حالت چندوجهی عمومی به سادگی با تقسیم چندوجهی به چهار وجهی‌ها و استفاده از این مطلب که نیروهای واقع بر دیواره‌های داخلی یکدیگر را حذف می‌کنند، به‌دست می‌آید.

فرض می‌کنیم ABCD چهاروجهی و $\vec V_1$ ، $\vec V_2$ ، $\vec V_3$ و $\vec V_4$ ، چنانچه در شکل ۳ نشان داده شده است، چهار بردار عمود بر وجوه آن باشند.



(شکل۳)

فرض می‌کنیم α_1 ، α_2 و α_3 زاویه‌هایی باشند که صفحات (ABC)، (ABD)، و (ACD) با صفحه‌ی (BCD) می‌سازند. به خاطر سادگی کار، اثبات را در حالتی انجام می‌دهیم که هر سه زاویه حاده باشند. سایر حالات مشابه همین حالت هستند.

مؤلفه‌ی قائم[۲] $\vec V_1+\vec V_2+\vec V_3$ ، به طرف بالا متوجه، و دارای طول زیر است:

$$\|\vec V_1\|\cos\alpha_1+\|\vec V_2\|\cos\alpha_2+\|\vec V_3\|\cos\alpha_3$$

این مقدار با

$$\delta_{ABC}\cos\alpha_1+\delta_{ABD}\cos\alpha_2+\delta_{ACD}\cos\alpha_3$$

که در آن، سطح مثلث XYZ با δ_{XYZ} نمایش داده شده، یکسان است.

اگر فرض کنیم A' تصویر A روی صفحه‌ی (BCD) باشد، آن‌گاه سه جمله‌ی مجموع فوق، سطح‌های مثلث‌های $A'BC$ ، $A'BD$ و $A'CD$ هستند. بنابراین جمعشان برابر سطح مثلث BCD می‌شود. این مطلب نشان می‌دهد که مؤلفه‌ی قائم مجموع چهار بردار، صفر است.

از طرف دیگر، مؤلفه‌ی افقی $\vec V_1$ ، عمود بر BC و دارای طول $\delta_{ABC}\sin\alpha_1$ است. اگر فرض کنیم: $M\in BC$ ، چنانچه $AM\perp BC$ (شکل۳)، آن‌گاه $\alpha_1=\angle AMA'$ ؛ در نتیجه:

$$\sin\alpha_1 = AA'/AM$$

که مستلزم برابری زیر است:

$$\delta_{ABC}\sin\alpha_1 = AA'.BC/2$$

به همین ترتیب،

$$\delta_{ABD}\sin\alpha_2 = AA'.BD/2$$

و

$$\delta_{ACD}\sin\alpha_3 = AA'.CD/2$$

از مسئله‌ی پیش نتیجه می‌شود که مجموع سه مؤلفه‌ی افقی صفر می‌شود، و از آن‌جا که بردار چهارم دارای مؤلفه‌ی افقی نیست، مسئله حل می‌شود.

۳. بردارهای یکه‌ی $\bar{V}_1$، $\bar{V}_2$، $\bar{V}_3$ و $\bar{V}_4$، را عمود بر وجوه و متوجه به خارج، در نظر می‌گیریم. S، مجموع کسینوس‌های زوایای فرجه‌های چهاروجهی منفی مجموع «حاصل‌ضرب‌های نقطه‌ای» $\bar{V}_i.\bar{V}_j$، به ازای هر $i \neq j$ است. به این ترتیب،

$$-2S + (\bar{V}_1^2 + \bar{V}_2^2 + \bar{V}_3^2 + \bar{V}_4^2) = (\bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3 + \bar{V}_4)^2$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$S = 2 - \frac{1}{2}(\bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3 + \bar{V}_4)^2$$

و نابرابری به اثبات می‌رسد.

در مورد برابری، $S = 2$ اگر و تنها اگر:

$$\bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3 + \bar{V}_4 = 0$$

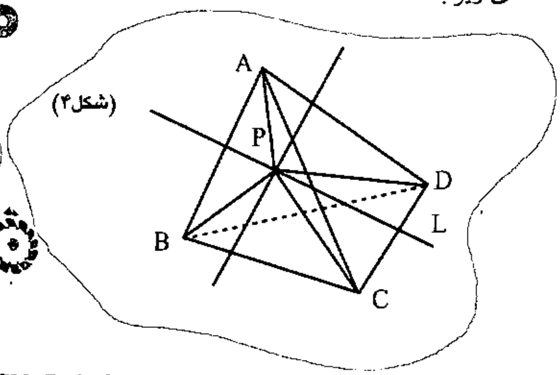
از طرف دیگر، بنابر مسئله‌ی پیشین، مجموع بردارهایی که بر وجوه عمودند، و طول‌هایی برابر سطح‌های این وجوه دارند نیز صفر است. از آن‌جا که این بردارها در یک صفحه نیستند، نتیجه می‌شود که متناسب با $\bar{V}_i$ ها هستند. در نتیجه، سطوح وجوه برابرند، و مسئله حل می‌شود.

۴. فرض می‌کنیم ABCD یک چهاروجهی باشد. در هر رأس چهاروجهی سیاره‌ای به جرم ۱ قرار می‌دهیم. در این صورت، نقطه‌ی P نسبت به «میدان‌های گرانشی»[6] چهار سیاره، «پتانسیل مینی‌مال»[7] دارد. بنابراین، شیء قرار گرفته در P باید در تعادل باشد. نتیجه می‌شود که مجموع «نیروهای جاذبه»ی[8] سیاره‌های A و B هم اندازه و در جهت مقابل مجموع نیروهای جاذبه‌ی سیاره‌های C و D است. جهت برایند[9] اول توسط نیمساز $\angle APB$ و جهت دومی توسط نیمساز $\angle CPD$ داده می‌شود.

در مورد اثباتی دقیق، فرض می‌کنیم ε_1 بیضیوار دوران تعریف شده با معادله‌ی زیر باشد:

$$AX+BX=AP+PB$$

نیز فرض می‌کنیم، ε_2 بیضیوار دوران تعریف شده با معادله‌ی زیر باشد:



(شکل۴)

$$CY+DY=CP+DP$$

به علت می‌نیمال بودن مجموع فواصل، درون‌های ε_1 و ε_2 نقطه‌ی مشترک ندارند. در نتیجه، دو بیضیوار مماس‌اند. نیمسازهای $\angle APB$ و $\angle CPD$ بر صفحه‌ی مماس مشترک قائم‌اند. بنابراین، «خط حامل»[10] یکسان دارند. همین استدلال در مورد جفت زاویه‌ی دیگر برقرار است.

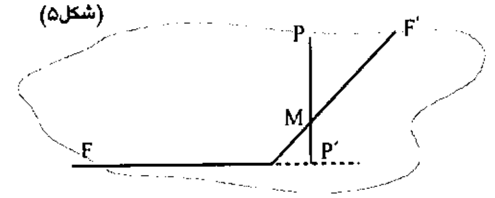
فرض می‌کنیم L خط حامل نیمسازهای $\angle APB$ و $\angle CPD$ باشد. اگر کل شکل را حول L به اندازه‌ی 180° دوران دهیم، خط AP به خط BP و DP به CP تبدیل می‌شود (شکل۴). در نتیجه، نیمساز مشترک $\angle APD$ و $\angle BPC$ تحت این دوران بی‌تغییر است، و بنابراین، بر L عمود است.

۵. فرض می‌کنیم این مطلب درست نباشد. یک چندوجهی از ماده‌ی ناهمگنی چنان می‌سازیم که نقطه‌ی مفروض، مرکز جرم آن باشد. در این صورت، از آن‌جا که این نقطه همواره خارج هر وجه تصویر می‌شود، اگر چندوجهی بر صفحه‌ای قرار گیرد، برای همیشه می‌غلتد. به این ترتیب، متحرکی دائمی ساخته‌ایم که از لحاظ فیزیکی غیرممکن است؛ زیرا زمانی که نقطه‌ی مزبور به پایین‌ترین پتانسیلش می‌رسد، حرکت به طور واضح متوقف می‌شود.

این موضوع نشان می‌دهد که نقطه‌ی مزبور داخل وجهی تصویر می‌شود که از همه به آن نزدیک‌تر است. فرض می‌کنیم چنین نباشد، و P نقطه‌ی مزبور، F نزدیک‌ترین وجه به آن، و P' تصویر مربوطه روی صفحه‌ی F باشد (شکل۵ را ملاحظه کنید). فرض می‌کنیم F' وجهی باشد که توسط PP' قطع شده است، و M نقطه‌ی تقاطع باشد. در این صورت، PM بر F' عمود نیست، و در نتیجه، فاصله‌ی P از F'، اکیداً کمتر از PM است که به نوبه‌ی خود کمتر از فاصله‌ی P از F می‌باشد. این موضوع، مناقض می‌نیمال بودن فاصله‌ی P از F است، و

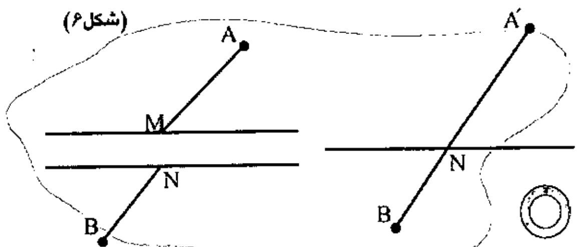
مسئله حل می‌شود.

(شکل۵)



۶. می‌توان جاده را به عنوان مسیری در نظر گرفت که توسط دسته‌ای از شعاع‌های نورانی ایجاد شده و از محیط بسیار چگالی (رودخانه) گذشته است. از آن‌جا که دسته شعاع نورانی مزبور از سریع‌ترین مسیر می‌گذرد، از محیط چگال مزبور در جهتی عمود بر اطراف آن خواهد گذشت. در نتیجه، دسته شعاع مورد بحث مسیر AMNB را خواهد پیمود. خواننده‌ی دارای معلوماتی از فیزیک، می‌داند که دسته شعاع وارد شونده به یک محیط، طبق همان زاویه‌ی ورود از آن خارج می‌شود. بنابراین، می‌توان عملاً وجود رودخانه را فراموش کرد، و شهرها را به اندازه‌ی پهنای رودخانه، به طرف یکدیگر جابه‌جا کرد و کوتاه‌ترین مسیر را در نظر گرفت، و سپس رودخانه را وارد کرد (شکل۶ را ملاحظه کنید).

(شکل۶)



به‌طور دقیق‌تر، از آن‌جا که طول پل همواره ثابت است، انتقال 'A از A به طرف B را با بردار عمود بر کناره‌ی رودخانه، و طولی برابر طول پل، در نظر می‌گیریم. می‌نیمم کردن طول AMNB برابر می‌نیمم کردن طول A'NB است، و مورد اخیر زمانی می‌نیمم است که 'A، N و B هم‌خط باشند. این موضوع امکان N را مشخص می‌کند، و کار تمام است.

۷. گزاره‌ی عمومی زیر را اثبات می‌کنیم.

n نقطه بر دایره‌ای مفروض است. از مرکز ثقل (مرکزوار)[11] هر $n-2$ نقطه از آن‌ها، عمودی بر وتر واصل از دو نقطه‌ی باقی‌مانده رسم می‌کنیم. ثابت کنید، جمیع خطوطی که به این طریق به دست می‌آیند، نقطه‌ی مشترکی دارند.

اثبات را بر مبنای این ویژگی مرکز ثقل می‌گذاریم: مرکز ثقل دستگاه k+j نقطه‌ای

$A_1, A_2, \cdots, A_k, B_1, B_2, \cdots, B_j$

پاره‌خط G_1G_2 را به نسبت j:k تقسیم می‌کند که در آن، G_1 و G_2 مراکز ثقل دستگاه‌های

$A_1, A_2, \cdots, A_k$

و

$B_1, B_2, \cdots, B_j$

هستند.

با بازگشت به مسئله‌ی مورد بحث، فرض می‌کنیم O مرکز دایره، G مرکز ثقل n نقطه‌ی مفروض، G_1 مرکز ثقل $n-2$ نقطه از آن‌ها، و M وسط وتر واصل از دو نقطه‌ی باقی‌مانده (که در ضمن مرکز ثقل دستگاه حاصل از این دو نقطه نیز هست) باشد. نیز، فرض می‌کنیم L عمود از G_1 بر وتر حاصل از این دو نقطه‌ی باقی‌مانده باشد.

بنابر ویژگی فوق‌الذکر، نقاط G، G_1، و M هم‌خط‌اند، و:

$G_1G:GM = 2:(n-2)$

نقطه‌ی تقاطع خطوط L و OG را با P نمایش می‌دهیم. مثلث‌های GG_1P و GMO مشابه‌اند، زیرا OM موازی L است؛ درنتیجه:

$GP:OG = 2:(n-2)$

و به این ترتیب، نقطه‌ی P به گونه‌ای یکتا، توسط O و G معین می‌شود، و بنابراین، مشترک بین جمیع نقاط تحت بررسی است.

۸. کار را بر مرکز ثقل S متمرکز می‌کنیم. می‌دانیم که مرکز ثقل بر عمودمنصف قطعه‌ی مشخص شده با هر دو نقطه، در S قرار دارد. بنابراین، جمیع نقاط واقع در S، بر دایره‌ای به مرکزِ در مرکز ثقل، قرار می‌گیرند. از این مرحله به بعد، حل مسئله آسان است.

سه نقطه‌ی متوالی A، B، C را اختیار می‌کنیم. از آن‌جا که S نسبت به عمودمنصف AC متقارن است، B باید بر این عمودمنصف واقع باشد. درنتیجه: AB=BC. با تکرار این استدلال برای جمیع سه‌تایی‌های نقاط متوالی، نتیجه می‌گیریم که S یک چندضلعی منتظم است، و واضح است که جمیع چندضلعی‌های منتظم، شرط داده شده را برقرار می‌کنند.

زیرنویس

1. Toricelli Point
2. Leibniz
3. Pompeiu's theorem
4. Vertical Component
5. dot products
6. gravitational fields
7. minimal potential
8. attractive forces
9. resultant
10. supporting line
11. Centroid

کشف فرمول اعداد اول و نتایج آن*

(حل مسأله‌های لاینحل ۲۳۰۰ ساله)

قسمت ۴

معادله‌های سیال و تعیین یک جواب عمومی با استفاده از اتحادهای حلال معادله‌ها

$$p_1,p_2,\dots,p_k < p \; ; \; a_1X_1^{p_1}+a_2X_2^{p_2}+\dots+a_kX_k^{p_k}=X_{k+1}^{p}$$

$p_1,p_2,\dots,p_k \in \mathbb{N}$; $p\in \mathbb{P}$ (مجموعه ی اعداد اول)

$$(p,m)=1 \; ; \; a_1X_1^{p}+a_2X_2^{p}+\dots+a_kX_k^{p}=X_{k+1}^{m}$$

$a_1,a_2,\dots,a_k \in \mathbb{Q}$ (مجموعه ی اعداد گویا)

$$(m,N)=1 \; ; \; a_1X_1^{m}+a_2X_2^{m}+\dots+a_kX_k^{m}=X_{k+1}^{N}$$

سید محمدرضا هاشمی موسوی*
hashemi – moosavi@yahoo.com

اشاره

با توجه به روش حل معادله‌هایی مانند:

$$p_1,p_2 \in \mathbb{N} \; , \; p_1,p_2 < p \; ; \; X_1^{p_1}+X_2^{p_2}=X_3^{p}$$

$$(p,m)=1 \; ; \; X_1^{p}+X_2^{p}=X_3^{m}$$

$$(m,N)=1 \; ; \; X_1^{m}+X_2^{m}+X_3^{N}$$

که در شماره‌ی پیش ارایه شد، در این شماره می‌خواهیم تعمیم این‌گونه معادله‌ها را بررسی و یک سلسله جواب عمومی معادله را تعیین کنیم. نتیجه‌ی جالب و بسیار مهم از حل معادله‌ی اخیر این است که مجموع توان mام دو عدد را می‌توان به هر توان دلخواه با شرط $(m,N)=1$ نوشت. برای مثال،

معادله‌ی $x^n + y^n = z^{2003}$ به ازای هر n با شرط $(n,2003) = 1$ دارای جواب است؛ یعنی همه‌ی معادله‌های زیر جواب عمومی دارند:

$$n = 2 : \ x^2 + y^2 = z^{2003}$$
$$n = 3 : \ x^3 + y^3 = z^{2003}$$
$$n = 4 : \ x^4 + y^4 = z^{2003}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$n = 1386 : \ x^{1386} + y^{1386} = z^{2003}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$n = 2002 : \ x^{2002} + y^{2002} = z^{2003}$$
$$n = 2004 : \ x^{2004} + y^{2004} = z^{2003}$$
$$n = 2005 : \ x^{2005} + y^{2005} = z^{2003}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

توجه: اگر n مضربی از عدد ۲۰۰۳ باشد، در واقع مسأله به حل معادله‌ی سیال قوای متشابه تحویل می‌شود که همان قضیه‌ی بزرگ فرما یا در اصل حکم بزرگ فرما است؛ یعنی معادله‌ی:

$$(n,2003) = 2003 \ ; \ x^n + y^n = z^{2003}$$

که به حکم بزرگ فرما تبدیل می‌شود و جوابی به جز صفر ندارد.

الف) معادله‌ی سیال به صورت عمومی زیر را بررسی و یک سلسله جواب عمومی برای آن تعیین می‌کنیم:

$$a_1X_1^{p_1} + a_2X_2^{p_2} + \cdots + a_kX_k^{p_k} = X_{k+1}^{p} \qquad (1)$$

در معادله‌ی ۱، p عددی اول و a_1، a_2، ... و a_k عددهایی گویا هستند و شرط زیر نیز برقرار است:

$$p_1, p_1, p_2, \ldots, p_k < p$$

برای تعیین یک جواب عمومی برای معادله‌ی ۱، کافی است یک سلسله جواب عمومی معادله‌ی زیر را به دست آوریم:

$$a_1x_1^n + a_2x_2^n + \cdots + a_kx_k^n = x_{k+1}^{n+1} \qquad (2)$$

برای تعیین یک جواب عمومی معادله‌ی ۲ کافی است آن را با اتحاد زیر مقایسه کنیم:

$$\begin{aligned} & a_1(a_1b_1^{n+1} + a_2b_1b_2^n + \cdots + a_kb_1b_k^n)^n \\ & + a_2(a_1b_2b_1^n + a_2b_2^{n+1} + \cdots + a_kb_2b_k^n) + \cdots \\ & \cdots + a_k(a_1b_kb_1^n + a_2b_kb_2^n + \cdots + a_kb_k^{n+1})^n \\ & = (a_1b_1^n + a_2b_2^n + \cdots + a_kb_k^n)^{n+1} \end{aligned} \qquad (3)$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی ۲ و اتحاد ۳ خواهیم داشت:

$$(4)\left|\begin{array}{l} x_1 = a_1b_1^{n+1} + a_2b_1b_2^n + \cdots + a_kb_1b_k^n \\ x_2 = a_1b_2b_1^n + a_2b_2^{n+1} + \cdots + a_kb_2b_k^n \\ x_3 = a_1b_3b_1^n + a_2b_3b_2^n + a_3b_3^{n+1} + \cdots + a_kb_3b_k^n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_k = a_1b_kb_1^n + a_2b_kb_2^n + \cdots + a_kb_k^{n+1} \\ x_{k+1} = a_1b_1^n + a_2b_2^n + \cdots + a_kb_k^n \end{array}\right.$$

در این جا، با فرض $n = (p-1)!$، معادله‌ی ۲ به معادله‌ی زیر تحویل می‌شود:

$$a_1x_1^{(p-1)!} + a_2x_2^{(p-1)!} + \cdots + a_kx_k^{(p-1)!} = x_{k+1}^{(p-1)!+1} \qquad (5)$$

طبق قضیه‌ی ویلسن، اگر p عددی اول باشد، عبارت $(p-1)!+1$ بر p بخش‌پذیر است. از طرف دیگر ثابت می‌شود، برای هر عبارت تجزیه‌پذیر[1] (p عددی اول و ⌊ ⌋ نماد قسمت درست عدد است):

$$(p-1)!+1 = p\left(1 + 2\left\lfloor \frac{(p-1)!+1}{2p} \right\rfloor\right) \qquad (6)$$

از رابطه‌ی ۶ و با توجه به شرط $p_1, p_2, \ldots, p_k < p$، معادله‌ی ۵ را به صورت زیر می‌توان نوشت $(p \in \mathbb{P})$:

$$a_1\left(X_1^{\frac{(p-1)!}{p_1}}\right)^{p_1} + a_2\left(X_2^{\frac{(p-1)!}{p_2}}\right)^{p_2} + \cdots + a_k\left(X_k^{\frac{(p-1)!}{p_k}}\right)^{p_k} = \left(X_{k+1}^{1+2\left[\frac{(p-1)!+1}{2p}\right]}\right)^{p} \qquad (7)$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی ۱ با اتحاد ۷، بلافاصله یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی ۱ حاصل می‌شود. در اتحاد۷، اگر H(m) (فرمول اعداد اول) را جایگزین p کنیم، در این صورت، دامنه‌ی متغیر به مجموعه‌ی اعداد طبیعی گسترش خواهد یافت؛ زیرا به ازای هر $m \in \mathbb{N}$، مقدار $H(m)$ عددی اول است:

$$m \in \mathbb{N}:\ p = H(m) = 2\left(\frac{2m+1}{2}\right)^{\Delta_m}$$

$$,\ \Delta_m = \left[\frac{2m+1}{(2m)!+1}\left[\frac{(2m)!+1}{2m+1}\right]\right]$$

در واقع به اتحادهای حلال معادله‌ها دست خواهیم یافت و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$(8)\begin{cases} X_1 = \left(a_1 b_1^{(p-1)!+1} + a_2 b_1 b_2^{(p-1)!} + \cdots + a_k b_1 b_k^{(p-1)!}\right)^{\frac{(p-1)!}{p_1}} \\ X_2 = \left(a_1 b_2 b_1^{(p-1)!} + a_2 b_2^{(p-1)!+1} + \cdots + a_k b_2 b_k^{(p-1)!}\right)^{\frac{(p-1)!}{p_2}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_k = \left(a_1 b_k b_1^{(p-1)!} + a_2 b_k b_2^{(p-1)!} + \cdots + a_k b_k^{(p-1)!+1}\right)^{\frac{(p-1)!}{p_k}} \\ X_{k+1} = \left(a_1 b_1^{(p-1)!} + a_2 b_2^{(p-1)!} + \cdots + a_k b_k^{(p-1)!}\right)^{1+2\left[\frac{(p-1)!+1}{2p}\right]} \end{cases}$$

مثال: معادله‌ی زیر را بررسی کنید و یک سلسله از جواب‌های عمومی آن را بیابید.

$$x_1 + x_2^2 + x_3^3 + x_4^4 + \cdots + x_{10}^{10} = x_{11}^{11} \qquad (9)$$

حل: کافی است در رابطه‌های ۸، مقادیر زیر را جایگزین کنیم:

$k = 10:\ a_1 = a_2 = \cdots = a_{10} = 1\ ;$

$p_1 = 1, p_2 = 2, \cdots, p_{10} = 10, p = 11$

در این صورت، یک مجموعه جواب معادله حاصل می‌شود:

$$(10)\begin{cases} x_1 = \left(b_1^{10!+1} + b_1 b_2^{10!} + \cdots + b_1 b_{10}^{10!}\right)^{10!} \\ x_2 = \left(b_2 b_1^{10!} + b_2^{10!+1} + \cdots + b_2 b_{10}^{10!}\right)^{\frac{10!}{2}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{10} = \left(b_{10} b_1^{10!} + b_{10} b_2^{10!} + \cdots + b_{10}^{10!+1}\right)^{9!} \\ x_{11} = \left(b_1^{10!} + b_2^{10!} + \cdots + b_{10}^{10!}\right)^{329891} \end{cases}$$

بدیهی است که با در دست داشتن یک سلسله جواب عمومی ۱۰، بررسی معادله خاتمه می‌یابد.

ب) بررسی معادله‌ی عمومی $X_1^p + X_2^p = X_3^m$ با شرط $(p,m) = 1$ انجام شد. اکنون در این جا به بررسی تعمیم این معادله می‌پردازیم:

$$(p,m) = 1:\ a_1 X_1^p + a_2 X_2^p + \cdots + a_k X_k^p = X_{k+1}^m \qquad (1)$$

با توجه به بررسی $X_1^p + X_2^p = X_3^m$، تعمیم این معادله را بررسی می‌کنیم.

حل: برای تعیین یک سلسله از جواب‌های عمومی معادله‌ی۱، ابتدا معادله‌ی زیر را بررسی می‌کنیم:

$$a_1 x_1^{n-1} + a_2 x_2^{n-1} + \cdots + a_k x_k^{n-1} = x_{k+1}^n \qquad (2)$$

برای تعیین یک سلسله از جواب‌های عمومی معادله‌ی۲، کافی است آن را با اتحاد زیر مقایسه کنیم:

$$a_1(a_1 b_1^n + a_2 b_1 b_2^{n-1} + \cdots + a_k b_1 b_k^{n-1})^{n-1} + a_2(a_1 b_2 b_1^{n-1} + a_2 b_2^n + \cdots + a_k b_2 b_k^{n-1})^{n-1} + \cdots + a_k(a_1 b_k b_1^{n-1} + a_2 b_k b_2^{n-1} + \cdots + a_k b_k^n)^{n-1} = (a_1 b_1^{n-1} + a_2 b_2^{n-1} + \cdots + a_k b_k^{n-1})^n \quad (3)$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی ۲ با اتحاد۳، خواهیم داشت:

$$(4)\begin{cases} x_1 = a_1 b_1^n + a_2 b_1 b_2^{n-1} + \cdots + a_k b_1 b_k^{n-1} \\ x_2 = a_1 b_2 b_1^{n-1} + a_2 b_2^n + \cdots + a_k b_2 b_k^{n-1} \\ x_3 = a_1 b_3 b_1^{n-1} + a_2 b_3 b_2^{n-1} + \cdots + a_k b_3 b_k^{n-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_k = a_1 b_k b_1^{n-1} + a_2 b_k b_2^{n-1} + \cdots + a_k b_k^n \\ x_{k+1} = a_1 b_1^{n-1} + a_2 b_2^{n-1} + \cdots + a_k b_k^{n-1} \end{cases}$$

در این جا، با فرض $n = m^{p-1}$، معادله‌ی۲ به معادله‌ی زیر تحویل می‌شود:

$$a_1 x_1^{m^{p-1}-1} + a_2 x_2^{m^{p-1}-1} + \cdots + a_k x_k^{m^{p-1}-1} = x_k^{m^{p-1}} \qquad (5)$$

طبق قضیه‌ی فرما، اگر p عددی اول باشد، عبارت $(m^{p-1}-1)$ بر p بخش‌پذیر است، در صورتی که m و p نسبت به هم اول باشند: $(m,p)=1$

از طرف دیگر می‌توان نوشت:

$$(m,p)=1:\ m^{p-1}-1=p\left(1+2\left[\frac{m^{p-1}-1}{2p}\right]\right) \qquad (6)$$

(در رابطه‌ی ۶، p عدد اول و [ ]، نماد قسمت درست عدد است). حال با استفاده از رابطه‌ی۶، می‌توان معادله‌ی ۵ را به صورت زیر نوشت:

$$a_1\left(x_1^{1+2\left[\frac{m^{p-1}-1}{2p}\right]}\right)^p+a_2\left(x_2^{1+2\left[\frac{m^{p-1}-1}{2p}\right]}\right)^p+\cdots$$

$$+a_k\left(x_k^{1+2\left[\frac{m^{p-1}-1}{2p}\right]}\right)^p=\left(x_{k+1}^{m^{p-2}}\right)^m \qquad (7)$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی ۱ با اتحاد۷، بلافاصله یک مجموعه جواب عمومی برای معادله‌ی۱ حاصل می‌شود:

$$(8)\begin{cases} X_1=\left(a_1b_1^{m^{p-1}}+a_2b_1b_2^{m^{p-1}-1}+\cdots+a_kb_1b_k^{m^{p-1}-1}\right)^{1+2\left[\frac{m^{p-1}-1}{2p}\right]}\\ X_2=\left(a_1b_2b_1^{m^{p-1}-1}+a_2b_2^{m^{p-1}}+\cdots+a_kb_2b_k^{m^{p-1}-1}\right)^{1+2\left[\frac{m^{p-1}-1}{2p}\right]}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ X_k=\left(a_1b_kb_1^{m^{p-1}-1}+a_2b_kb_2^{m^{p-1}-1}+\cdots+a_kb_k^{m^{p-1}}\right)^{1+2\left[\frac{m^{p-1}-1}{2p}\right]}\\ X_{k+1}=\left(a_1b_1^{m^{p-1}-1}+a_2b_2^{m^{p-1}-1}+\cdots+a_kb_k^{m^{p-1}-1}\right)^{m^{p-2}} \end{cases}$$

مثال: یک مجموعه جواب عمومی برای معادله‌ی زیر بیابید، در صورتی که p و m نسبت به هم اول باشند.

$$(p,m)=1:\ X_1^p+X_2^p+\cdots+X_k^p=X_{k+1}^m \qquad (9)$$

حل: کافی است در رابطه‌های ۸، قرار دهیم:

$$a_1=a_2=a_3=\cdots=a_k=1$$

در این صورت، بلافاصله یک مجموعه جواب عمومی با k پارامتر دلخواه برای معادله‌ی۹ حاصل می‌شود:

$$(10)\begin{cases} X_1=\left(b_1^{m^{p-1}}+b_1b_2^{m^{p-1}-1}+\cdots+b_1b_k^{m^{p-1}-1}\right)^{1+2\left[\frac{m^{p-1}-1}{2p}\right]}\\ X_2=\left(b_2b_1^{m^{p-1}-1}+b_2^{m^{p-1}}+\cdots+b_2b_k^{m^{p-1}-1}\right)^{1+2\left[\frac{m^{p-1}-1}{2p}\right]}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ X_k=\left(b_kb_1^{m^{p-1}-1}+b_kb_2^{m^{p-1}-1}+\cdots+b_k^{m^{p-1}}\right)^{1+2\left[\frac{m^{p-1}-1}{2p}\right]}\\ X_{k+1}=\left(b_1^{m^{p-1}-1}+b_2^{m^{p-1}-1}+\cdots+b_k^{m^{p-1}-1}\right)^{m^{p-2}} \end{cases}$$

نتیجه: در حالت خاص، اگر $k=2$، آن‌گاه:

$$X_1^p+X_2^p=X_3^m \qquad (11)$$

معادله‌ی ۱۱ برای هر p اول با شرط $(p,m)=1$، همیشه جواب دارد. بنابراین، معادله‌ی ۱۱ نشان می‌دهد که مجموع قوای متشابه‌ی دو عدد را ممکن است به صورت توانی از یک عدد نوشت، به شرطی که توان‌ها نسبت به هم اول باشند. به بیان دیگر، اگر m مضربی از p نباشد، یعنی $m\neq tp\ (t\in N)$ و در واقع حکم بزرگ فرما پیش نیاید $\left(p>2:\ x^p+y^p=z^p\right)$، معادله‌ی۱۱ همیشه جواب دارد. هم‌چنین، اگر $m\neq tp$، معادله‌ی۹ نیز همیشه دارای جواب است.

ج) با توجه به بررسی معادله‌ی $X_1^m+X_2^m=X_3^N$، تعمیم این معادله را بررسی می‌کنیم:

$$(m,N)=1:\ a_1X_1^m+a_2X_2^m+\cdots+a_kX_k^m=X_{k+1}^N \quad (1)$$

در حالت خاص، اگر $a_1=a_2=\cdots=a_k=1$، معادله‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$X_1^m+X_2^m+\cdots+X_k^m=X_{k+1}^N$$

در معادله‌ی۱، a_1، a_2، ...و a_k اعداد گویای دلخواه و m و N نسبت به هم اول‌اند.

حل: برای حل معادله ی ۱ و تعیین یک مجموعه جواب برای آن، ابتدا یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی زیر را به دست می‌آوریم:

$$a_1x_1^{n-1}+a_2x_2^{n-1}+\cdots+a_kx_k^{n-1}=x_{k+1}^n \qquad (2)$$

به این منظور کافی است، معادله‌ی۲ را با اتحاد زیر مقایسه کنیم:

$$a_1\left(a_1b_1^n + a_2b_1b_2^{n-1}+\cdots+a_kb_1b_k^{n-1}\right)^{n-1}$$
$$+a_2\left(a_1b_2b_1^{n-1} + a_2b_2^n+\cdots+a_kb_2b_k^{n-1}\right)^{n-1}+\cdots$$
$$\cdots+a_k\left(a_1b_kb_1^{n-1} + a_2b_kb_2^{n-1}+\cdots+a_kb_k^n\right)^{n-1}$$
$$=\left(a_1b_1^{n-1} + a_2b_2^{n-1}+\cdots+a_kb_k^{n-1}\right)^n \qquad (3)$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی۲ با اتحاد۳ خواهیم داشت:

$$(4)\left|\begin{array}{l} x_1 = a_1b_1^n + a_2b_1b_2^{n-1}+\cdots+a_kb_1b_k^{n-1} \\ x_2 = a_1b_2b_1^{n-1} + a_2b_2^n+\cdots+a_kb_2b_k^{n-1} \\ \dotfill \\ x_k = a_1b_kb_1^{n-1} + a_2b_kb_2^{n-1}+\cdots+a_kb_k^n \\ x_{k+1} = a_1b_1^{n-1} + a_2b_2^{n-1}+\cdots+a_kb_k^{n-1} \end{array}\right.$$

در این جا، با فرض $n = N^{\varphi(m)}$، معادله‌ی ۲ به معادله‌ی زیر تحویل می‌شود:

$$a_1x_1^{N^{\varphi(m)}-1} + a_2x_2^{N^{\varphi(m)}-1}+\cdots+a_kx_k^{N^{\varphi(m)}-1} = x_{k+1}^{N^{\varphi(m)}} \quad (5)$$

در معادله‌ی۵، φ تابع اویلر است و $\varphi(m)$ برابر با تعداد اعداد طبیعی و کوچک‌تر از m است که نسبت به آن اول هستند. برای مثال، $\varphi(18)$ برابر ۶ است؛ زیرا:

$\{1,5,7,11,13,17\}$ = مجموعه اعدادی که نسبت به ۱۸ اول‌اند ;

$\varphi(18)=6$

نکته: همیشه باید توجه داشت که عدد۱ نسبت به تمام عددهای بزرگ‌تر از خودش، اول است. طبق قضیه‌ی اویلر، اگر $(m,N)=1$، آن‌گاه عبارت $\left(N^{\varphi(m)}-1\right)$ بر m بخش‌پذیر است. از طرف دیگر می‌توان نوشت:

$$(m,N)=1\ ;\ N^{\varphi(m)}-1 = m\left(1+2\left[\frac{N^{\varphi(m)}-1}{2m}\right]\right) \quad (6)$$

(در رابطه‌ی ۶، [ ] نماد قسمت درست عدد است).

حال با استفاده از رابطه‌ی۶، معادله‌ی۵ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$a_1\left(x_1^{1+2\left[\frac{N^{\varphi(m)}-1}{2m}\right]}\right)^m + a_2\left(x_2^{1+2\left[\frac{N^{\varphi(m)}-1}{2m}\right]}\right)^m+\cdots$$
$$+a_k\left(x_k^{1+2\left[\frac{N^{\varphi(m)}-1}{2m}\right]}\right)^m = \left(x_{k+1}^{N^{\varphi(m)-1}}\right)^N \qquad (7)$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی۱ با اتحاد۷، بلافاصله یک سلسله از جواب‌های عمومی معادله‌ی۱ حاصل می‌شود:

$$(8)\left|\begin{array}{l} X_1 = \left(a_1b_1^{N^{\varphi(m)}} + a_2b_1b_2^{N^{\varphi(m)}-1}+\cdots+a_kb_1b_k^{N^{\varphi(m)}-1}\right)^{1+2\left[\frac{N^{\varphi(m)}-1}{2m}\right]} \\ X_2 = \left(a_1b_2b_1^{N^{\varphi(m)}-1} + a_2b_2^{N^{\varphi(m)}}+\cdots+a_kb_2b_k^{N^{\varphi(m)}}\right)^{1+2\left[\frac{N^{\varphi(m)}-1}{2m}\right]} \\ \dotfill \\ X_k = \left(a_1b_kb_1^{N^{\varphi(m)}-1} + a_2b_kb_2^{N^{\varphi(m)}-1}+\cdots+a_kb_k^{N^{\varphi(m)}}\right)^{1+2\left[\frac{N^{\varphi(m)}-1}{2m}\right]} \\ X_{k+1} = \left(a_1b_1^{N^{\varphi(m)}-1} + a_2b_2^{N^{\varphi(m)}-1}+\cdots+a_kb_k^{N^{\varphi(m)}-1}\right)^{N^{\varphi(m)-1}} \end{array}\right.$$

توجه: اگر m عددی اول مانند p باشد:

$$\varphi(p)=\varphi(m)=p-1$$

و در صورتی که m عددی مرکب و به صورت $m=p^r.q^s.t^n....$ (p، q و t... عامل‌های اول هستند) نوشته شود، همیشه می‌توان نوشت:

$$\varphi(m) = m\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{r}\right)\cdots = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 2 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 3 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \vdots & \vdots & \cdots & m \end{vmatrix} \quad (9)$$

مثال: در این جا $\varphi(m)$ را برای $m=1024$ ، $m=1025$

و $m = 1026$ ، از رابطه‌ی ۹ محاسبه می‌کنیم :

$$m = 1024 = 2^{10} : \varphi(1024) = 1024\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 512$$

$$m = 1025 = 5^2 \times 41 : \varphi(1025) = 1025\left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{41}\right) = 800$$

$$m = 1026 = 2 \times 3^3 \times 19 :$$

$$\varphi(1026) = 1026\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{19}\right) = 324$$

مثال: اگر $m = p$ و p عددی اول باشد، معادله‌ی ۱ به معادله‌ی زیر تحویل می‌شود :

$$a_1X_1^p + a_2X_2^p + \cdots + a_kX_k^p = X_{k+1}^N \qquad (10)$$

با استفاده از سلسله جواب‌های ۸، یک مجموعه جوابِ عمومی معادله‌ی ۱۰ را نتیجه بگیرید.

حل: کافی است که در رابطه‌های ۸، به جای $\varphi(m)$ عبارت $(p-1)$ را جایگزین کنیم :

$$m = p : \varphi(m) = \varphi(p) = p - 1$$

بنابراین، یک سلسله جواب عمومی معادله که پیش از این هم به صورت مستقل به آن رسیده بودیم، نتیجه خواهد شد.

نتیجه‌ی نهایی

در صورتی که در همه‌ی معادله‌ها و مجموعه‌ی جواب‌های به‌دست آمده، به جای p (عدد اول) فرمول اعداد اول $H(m)$ را جایگزین کنیم، بدیهی است به جواب‌هایی خواهیم رسید که دامنه‌ی متغیر آن اعداد طبیعی است، یعنی $p = H(m)$ و $m \in \mathbb{N}$. و هم‌چنین، اگر در اتحادهای عمومی حلال معادله‌های سیال درجه‌ی n، به جای p (عدد اول) فرمول اعداد اول را جایگزین کنیم، واضح است که به اتحادهای حلال با دامنه‌ی متغیر $m \in \mathbb{N}$ خواهیم رسید. پس در این جا نتایج را در قالب سه قضیه‌ی عمومی در رابطه با وجود یا عدم جواب برای معادله‌های سیال عمومی سه گانه، با نام قضیه‌های اساسی H.M می‌آوریم.

۱. **قضیه‌ی اول H.M :** اگر p عددی اول و a_1 ، a_2 ، ... و a_k عددهایی گویا باشند و داشته باشیم $p_1, p_2, \ldots, p_k < p$ ، آن‌گاه معادله‌ی زیر در مجموعه‌ی اعداد گویا دارای جواب است :

$$a_1X_1^{p_1} + a_2X_2^{p_2} + \cdots + a_kX_k^{p_k} = X_{k+1}^p$$

۲. **قضیه‌ی دوم H.M :** اگر p عددی اول و m عددی طبیعی باشد و داشته باشیم $(p,m) = 1$ ، آن‌گاه معادله‌ی زیر در مجموعه‌ی اعداد گویا دارای جواب است (با در نظر گرفتن این که a_1 ، a_2 ، ... و a_k گویا باشند) :

$$a_1X_1^p + a_2X_2^p + \cdots + a_kX_k^p = X_{k+1}^m$$

$$(p,m) = 1; \ a_1, a_2, \cdots, a_k \in \mathbb{Q} \ (\text{مجموعه‌ی اعداد گویا})$$

۳. **قضیه‌ی سوم H.M :** اگر m و N اعدادی طبیعی و a_1 ، a_2 ، ...و a_k اعدادی گویا باشند و هم‌چنین m و N نسبت به هم اول باشند، معادله‌ی زیر در مجموعه‌ی اعداد گویا دارای جواب است :

$$(m,N) = 1 : \ a_1X_1^m + a_2X_2^m + \cdots + a_kX_k^m = X_{k+1}^N$$

● **از کشف فرمول اعداد اول و نتایج آن، احکام زیر نیز حاصل می‌شود :**

۴. **حکم اساسی H.M در رابطه با مولد اعداد اول :** تابع H با ضابطه‌ی زیر :

$$H(m) = 2\left(\frac{2m+1}{2}\right)^{\left\lfloor \frac{2m+1}{(2m)!+1}\left\lfloor \frac{(2m)!+1}{2m+1} \right\rfloor \right\rfloor} = 2\left(\frac{2m+1}{2}\right)^{\Delta_{N(m)}}$$

به ازای هر $m \in \mathbb{N}$ ، **همه‌ی اعداد اول را تولید می‌کند.**

توضیح: مولد $H(m)$ همه‌ی اعداد اول را تولید می‌کند و به جای اعداد مرکب عدد ثابت ۲ که عددی اول است را جایگزین می‌کند. بنابراین، تابع H یک تابع پوشا با دامنه‌ی متغیر $m \in \mathbb{N}$ است :

$$D_H = \mathbb{N} \ (\text{دامنه تابع}) \quad \text{و} \quad R_H = \mathbb{P} \ (\text{برد تابع})$$

$$H = \mathbb{P} = \{3, 5, 7, 2, 11, 13, 2, 17, 19, \cdots\} = \{2, 3, 5, 7, \cdots\}$$

۵. **حکم اساسی H.M در رابطه با توزیع اعداد اول :** تابع π با ضابطه‌ی زیر، به ازای هر N طبیعی، تعداد اعداد اول نابزرگ‌تر از N را به‌طور دقیق تعیین می‌کند :

$$\pi(N) = \frac{N+1}{2} - \sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}} \left\lfloor 2^{-\Delta_{N(m)}} \right\rfloor ; \ N = 2m+1$$

$$\Delta_{N(m)} = \left\lfloor \frac{1 + \left\lfloor \frac{3}{2m+1} \right\rfloor}{1 + \sum_{k=1}^{S^*} \left\lfloor \frac{2k+1}{2m+1} \left\lfloor \frac{2m+1}{2k+1} \right\rfloor \right\rfloor} \right\rfloor, \ m \in \mathbb{N}$$

$$S^* = \left\lfloor \frac{\sqrt{2m+1}+1}{2} \right\rfloor$$

توجه: این حکم در واقع معادل حل معادله‌ی زتای ریمان است:

$$\zeta(s) = ۰$$

این مسأله، یکی از مسأله‌های لاینحل جهانی هزاره‌ی هفت‌میلیون دلاری است که در سال ۲۰۰۱ به مسابقه گذاشته شده است و انستیتوی ریاضیات «Clay» آمریکا پس از دو سال جایزه را پرداخت خواهد کرد (جواب معادله‌ی زتای ریمان را در شماره‌ی ۵۳، قسمت دوم مقاله ببینید).

۶. حکم اساسی H.M در رابطه با تعیین k امین عدد اول: تابع P_k با ضابطه‌ی زیر، با فرض $N = ۲n + ۱$ و $\pi(N) = k$ به‌طور دقیق kامین عدد اول را تعیین می‌کند:

$$p_k(m) = \left\lfloor \frac{۱}{\left|k - \frac{N+۱}{۲} + \sum_{m=۱}^{\frac{N-۱}{۲}} \left\lfloor ۲^{-\Delta_{N(m)}} \right\rfloor \right| + ۱} \right\rfloor . N$$

$$= \begin{cases} N & \text{اگر } N\text{، }k\text{امین عدد اول باشد} \\ ۰ & \text{اگر } N\text{، }k\text{امین عدد اول نباشد} \end{cases}$$

توجه: می‌دانیم بزرگ‌ترین عدد اول شناخته شده در سال ۲۰۰۶، عددی است با حدود ۹٫۸ میلیون رقم که چهل‌وچهارمین عدد مرسن اول شناخته شده محسوب می‌شود:

$$M_{۴۴} = ۲^{۳۲۵۸۲۶۵۷} - ۱$$

این اعداد توسط جست‌وجوی اینترنتی تحت برنامه‌ی «GIMPS» به صورت عمومی و با استفاده از سیستم‌های شخصی در جهان انجام می‌گیرد. ارایه و تست هر عدد مرسن به صورت $M = ۲^p - ۱$ در صورتی که تایید شود، مبلغ یک صد میلیون دلار (جایزه) به همراه دارد. در این جا می‌توان با استفاده از فرمول اعداد اول، مجموعه‌ی اعداد اول مرسن را تعریف کرد.

۷. حکم اساسی H.M در رابطه با تعریف مجموعه‌ی اعداد اول مرسن: مجموعه‌ی اعداد اول مرسن IM تعریف‌پذیر است:

$$\mathbb{M} = \left\{ M(n) : n \in \mathbb{N}, M(n) = ۳\left(\frac{۲^{n+۱} - ۱}{۳}\right)^{\Delta_{(۲^n - ۱)}} \right\}$$

$$= \left\{ ۳, ۷, ۳۱, ۱۲۷, \cdots, ۲^{۳۲۵۸۲۶۵۷۰} - ۱, \cdots \right\}$$

توجه: با استفاده از فرمول اعداد اول، مجموعه‌های اعداد تام زوج، اعداد اول سامان‌پذیر و سامان‌ناپذیر[2] (در اثبات حکم بزرگ فرما نقش اساسی دارند) قابل تعریف هستند. برای اطلاع بیش‌تر، به کتاب مرجع (*) رجوع شود.

۸. حکم اساسی H.M در رابطه با بی‌نهایت بودن اعداد اول دوقلو (Twin): اعداد اول دوقلو بی‌نهایت‌اند و مجموعه‌ی دوقلوهای اول تعریف‌پذیر است:

$$T = \{ n \in \mathbb{N} - \mathbb{H} : (۶n - ۱, ۶n + ۱) \} \cup \{ (۳, ۵) \}$$
$$= \{ (۳,۵), (۵,۷), (۱۱,۱۳), (۱۷,۱۹), (۲۹,۳۱), (۴۱,۴۳), \cdots \}$$

$$\mathbb{H} = \left\{ ۵m \mp ۱, ۷m \pm ۱, ۱۱m \mp ۲, \cdots, pm \pm \frac{p_r \pm ۱}{۶} \right\},$$
$$m \in \mathbb{N}, \quad p \in \mathbb{P}$$

توجه: لازم به ذکر است که کشف فرمول اعداد اول و نتایج آن، توسط داور بین‌المللی، پروفسور سایمون پورپل[3] داوری شد و بالاترین امتیاز (G) را در سال ۲۰۰۷ که معادل A^{++} است[4]، از آکادمی علوم آمریکا (NAAS) کسب کرد و بار دیگر، جمهوری اسلامی ایران در عرصه‌ی تولید علم درخشید. این کشف نتایج ارزنده و مهم دیگری نیز به دنبال داشت که شرح آن را در کتاب مرجع (*) و فهرست عناوین مطالب را در سایت کاشف (**) می‌توانید مشاهده کنید. ادامه‌ی نتایج را در شماره‌های آتی ملاحظه نمایید.

زیرنویس

۱. اثبات این مطلب در قالب یک قضیه‌ی کاربردی و بسیار مهم (از مؤلف) در کتاب مرجع(*) موجود است.

2. Prime numbers of regular and irregular

3. Simon purple

4. Excellent

منابع

* هاشمی موسوی، سیدمحمدرضا. انتشارات بین‌المللی 2006:Brill/VSP
The discovery of prime numbers formula and its results & other top researches (Author: S.M.R.Hashemi Moosávi)

** سایت کاشف فرمول:
www.primenumbersformula.com

معرفی سایت‌های ریاضی

● احسان یارمحمدی

http://www.sosmath.com

سایت اینترنتی sosmath.com که در آن کلمه sosmath به اختصار به جای کلمه s.o.s. mathematics قرار گرفته است، شامل مطالب بسیار ارزنده‌ای پیرامون برخی موضوعات ریاضی است. در واقع، سایت sosmath، سایتی رایگان و مجانی برای علاقه‌مندان و دوست‌داران ریاضیات است که می‌خواهند، مطالبی از جبر (اعم از جبر مقدماتی) تا معادلات دیفرانسیل را مرور کنند. منبع مناسبی برای دانش‌آموزان دوره‌ی دبیرستان، دانش‌پژوهان پیش از دوره‌ی دانشگاه، دانشجویان کالج‌ها و بزرگسالانی است که مایل به یادگیری هستند. هم‌چنین، برای انجام تکالیف منزل، تقویت ذهن، و آماده شدن برای امتحانات ریاضی به مخاطب کمک می‌کند. این سایت در بر گیرنده‌ی بیش از ۲۵۰۰ صفحه، شامل مطالب ریاضی است که به وسیله‌ی تعاریف، تفسیرها و توضیحات کوتاه و قابل فهم ارائه شده‌اند.

موضوع‌های اصلی سایت sosmath عبارتند از:

۱. جبر (Algebra)
۲. مثلثات (Trigonometry)
۳. حساب دیفرانسیل و انتگرال (Calculus)
۴. معادلات دیفرانسیل (Differential Equations)
۵. متغیرهای مختلط (Complex Variables)
۶. جبر ماتریسی (Matrix Algebra)

این سایت به گونه‌ای طراحی شده است که اگر بخواهید مطالب بیشتری بخوانید، می‌توانید قسمت CyberExams را مرور کنید که بیانگر مثال‌هایی است که سایت در اختیار مخاطب قرار می‌دهد.

اکنون که با الفبایی از این سایت آشنا شدید، برخی از عنوان‌های موضوع‌های این سایت را ارائه می‌کنیم. در ضمن، هریک از عنوان‌های موضوعی این سایت زیر عنوان‌هایی دارد که مطالب زیبا و جالب توجهی ارائه می‌کند.

❑ جبر

۱-۱. کسرها (Fractions)
۱-۲. واحدهای تبدیل (Units of Conversion)
۱-۳. اعداد مختلط (Complex Numbers)
۱-۴. معادلات درجه دوم (Quadratic Equations)
۱-۵. فاکتورگیری و ریشه‌های چندجمله‌ای‌ها (Factorization and Roots of Polynomials)
۱-۶. معادلات حل‌شدنی (Solving Equations)
۱-۷. دستگاه معادلات (Systems of Equations)
۱-۸. نامساوی‌ها (Inequalities)
۱-۹. توابع معکوس (Inverse Functions)
۱-۱۰. لگاریتم‌ها و توابع نمایی (Logarithms and Exponential Functions)
۱-۱۱. توابع گویا (Rational Functions)

❑ مثلثات

۲-۱. مثلثات (Trigonometry)
۲-۲. معادلات مثلثاتی حل شدنی (Solving Trigonometry Equations)
۲-۳. حساب دیفرانسیل و مثلثات (Calculus and Trigonometry)
۲-۴. مثلثات هذلولوی (Hyperbolic Trigonometry)

❑ حساب دیفرانسیل و انتگرال

۳-۱. دنباله‌ها (Sequences)
۳-۲. سری‌ها (Series)
۳-۳. حد و پیوستگی (Limit and Continuity)
۳-۴. مشتق‌گیری (Differentiation)
۳-۵. انتگرال‌گیری (Integration)
۳-۶. روش‌های انتگرال‌گیری (Techniques of Integration)
۳-۷. رفتار موضعی توابع (Local Behavior of Functions)
۳-۸. سری‌های توانی (Power Series)
۳-۹. سری‌های فوریه (Fourier Series)
۳-۱۰. پیوست (Appendix)

❑ جبر ماتریسی

۶-۱. مقدمه‌ای بر ماتریس‌ها (Introduction to Matrices)
۶-۲. دستگاه‌های معادلات خطی (Systems of Linear Equations)
۶-۳. دترمینان‌ها (Determinants)
۶-۴. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه (Eigenvalues and Eigenvectors)
۶-۵. پیوست (Appendix)

برای دانش‌آموزان سال سوم و پیش‌دانشگاهی

بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم

قسمت ۳

اشاره

بخشی از حل و بحث معادله‌ی درجه‌ی سوم را در شماره‌ی قبل دیدیم. اینک ادامه‌ی مطلب را در پی می‌آوریم.

● محمدهاشم رستمی

برای بحث در وجود ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم پارامتری که به صورت $x^3 + px + q = 0$ است، باید به ازای مقدارهای متفاوت پارامتر داده شده در معادله، $\Delta = 4p^3 + 27q^2$ را تعیین علامت کنیم و برای بحث در وجود و علامت ریشه‌های این معادله باید $\Delta = 4p^3 + 27q^2$ و q را تعیین علامت کنیم. به مثال‌های ذیل توجه کنید:

مثال۱. در وجود ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم پارامتری $x^3 - 4x + \sqrt{3}(m-2) = 0$ به ازای مقدارهای متفاوت پارامتر m بحث کنید.

حل: باید $\Delta = 4p^3 + 27q^2$ را برحسب m محاسبه و تعیین علامت کنیم. داریم:

$$p = -4\ ,\ q = 3(m-2)\ ,$$

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2 = 4(-4)^3 + 27 \times 3(m-2)^2$$

$$\Rightarrow \Delta = -256 + 81(m-1)^2 = 81(m-1)^2 - 256\ ,\ \Delta = 0$$

$$\Rightarrow 81(m-1)^2 - 256 = 0 \Rightarrow (m-1)^2 = \frac{256}{81} \Rightarrow m - 1 = \pm\frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow m = 1 + \frac{16}{9} = \frac{25}{9}\ ,\ m = 1 - \frac{16}{9} = -\frac{7}{9}$$

m	$-\infty$		$-\frac{7}{9}$		$\frac{25}{9}$		$+\infty$
Δ		+	0	−	0	+	
R		یک ریشه دارد	یک ریشه‌ی مضاعف و یک ریشه‌ی ساده دارد	سه ریشه دارد	یک ریشه‌ی مضاعف و یک ریشه‌ی ساده دارد	یک ریشه دارد	

مثال۲. در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم پارامتری، $x^3 - 4x + \sqrt{3}(m-2) = 0$ به ازای مقدارهای متفاوت پارامتر m فاصله بحث کنید.

حل: باید $\Delta = 4p^3 + 27q^2$ و q را تعیین علامت کنیم. داریم:

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2 = 4(-4)^3 + 27 \times 3(m-2)^2$$

$$= 81(m-2)^2 - 256$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow 81(m-2)^2 - 256 = 0 \Rightarrow m = \frac{25}{9}\ ,\ m = -\frac{7}{9}$$

$$q = \sqrt{3}(m-2)\ ,\ q = 0 \Rightarrow \sqrt{3}(m-2) = 0$$

$$\Rightarrow m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$$

m	$-\infty$	$-\frac{7}{9}$		2		$\frac{25}{9}$	$+\infty$
Δ	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
q	$-$		$-$	0	$+$		$+$
R	یک ریشه‌ی مثبت دارد		یک ریشه‌ی مثبت و دو ریشه‌ی منفی دارد		یک ریشه‌ی منفی و دو ریشه‌ی مثبت دارد		یک ریشه‌ی منفی دارد
		ریشه‌ی ساده مثبت و ریشه‌ی مضاعف منفی دارد		یک ریشه‌ی صفر و دو ریشه‌ی قرینه دارد		ریشه‌ی ساده منفی و ریشه‌ی مضاعف مثبت دارد	

مثال۳. در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم پارامتری زیر به ازای مقدارهای متفاوت پارامتر m بحث کنید.

$$x^3 - 3x + 2 - m = 0$$

حل: $\Delta = 4p^3 + 27q^2$ و q را بر حسب m محاسبه و تعیین علامت می‌کنیم. داریم:

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2 = 4(-3)^3 + 27(2-m)^2 = 27(m^2 - 4m)$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m = 0\ ,\ m = 4$$

$$q = 2 - m\ ,\ q = 0 \Rightarrow 2 - m = 0 \Rightarrow m = 2$$

m	$-\infty$	0		2		4	$+\infty$
Δ	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
q	$+$		$+$	0	$-$		$-$
R	$X_1 < 0$		$X_1 < 0 < X_2 < X_3$		$X_1 < X_2 < 0 < X_3$		$X_1 > 0$
		$X_1 < 0 < X_2 = X_3$		$X_1 < X_2 = 0 < X_3$		$X_1 = X_2 < 0 < X_3$	

مثال۳. در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم پارامتری $(2m-1)x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ به ازای مقدارهای متفاوت پارامتر m بحث کنید.

حل: این معادله را با تغییر متغیر $x = \frac{1}{X}$، به معادله‌ی $X^3 + pX + q = 0$ تبدیل می‌کنیم. داریم:

$$(2m-1)\left(\frac{1}{X}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{X}\right)^2 + 1 = 0 \Rightarrow \frac{2m-1}{X^3} - \frac{3}{X^2} + 1 = 0$$

$$\frac{2m - 1 - 3X + X^3}{X^3} = 0 \Rightarrow X^3 - 3X + 2m - 1 = 0$$

$$p = -3\ ,\ q = 2m - 1\ ,\ \Delta = 4p^3 + 27q^2$$

$$= 4(-3)^3 + 27(2m-1)^2$$

$$\Delta = 27(2m-1)^2 - 108 = 27\left[(2m-1)^2 - 4\right]\ ,\ \Delta = 0$$

$$\Rightarrow 27\left[(2m-1)^2 - 4\right] = 0 \Rightarrow (2m - 1 - 2)(2m - 1 + 2) = 0$$

$$(2m-3)(2m+1) = 0 \Rightarrow 2m - 3 = 0 \Rightarrow m = \frac{3}{2}\ ,2m + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2m + 1 = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

$$q = 2m - 1\ ,\ q = 0 \Rightarrow 2m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

m	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
Δ	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
q	$-$		$-$	0	$+$		$+$
X	$X_1 > 0$		$X_1 < X_2 < 0 < X_3$		$X_1 < 0 < X_2 < X_3$		$X_1 < 0$
		$X_1 < 0 < X_2 = X$		$X_1 < X_2 = 0 < X$		$X_1 = X_2 < 0 < X$	

با توجه به این‌که $x = \frac{1}{X}$، علامت ریشه‌های معادله‌ی داده شده با علامت ریشه‌های معادله‌ی $X^3 - 3X + 2m - 1 = 0$، یکی است و برای تعیین وضع آن‌ها نسبت به هم می‌توانیم در جدول بالا، $X_1 = \frac{1}{x_1}$، $X_2 = \frac{1}{x_2}$ و $X_3 = \frac{1}{x_3}$ را قرار دهیم.

استدلال‌های ریاضی

(قسمت ۱)

● میرشهرام صدر

برای دانش‌آموزان سال سوم

درک شهودی

سه لیوان آب با دماهای متفاوت را در اختیارتان قرار می‌دهند و از شما می‌خواهند آن‌ها را به ترتیب صعودی دمایشان مرتب کنید. بی‌درنگ سه انگشت متفاوت خود را به ترتیب در هر لیوان فرو می‌برید، درجه حرارت هر کدام را حدس می‌زنید و سپس آن‌ها را مرتب می‌کنید.

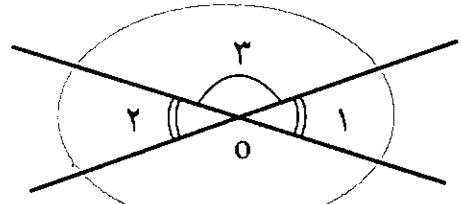
برای انجام این آزمایش، در حقیقت از حس لامسه‌ی خود کمک گرفته‌اید. این گونه ادراک از محیط پیرامون خود را که به کمک یکی از حواس پنج گانه به‌دست می‌آید، درک شهودی می‌نامیم. اگر در این آزمایش از شما می‌خواستند دمای آب هر لیوان را به طور دقیق بگویید، به ابزار قوی‌تری مانند دماسنج نیاز داشتید.

درک شهودی، نوعی استدلال دقیق ریاضی به‌حساب نمی‌آید، بلکه به ما کمک می‌کند تا مسائل ریاضی یا روزمره‌ی زندگی را بهتر بفهمیم و برای رسیدن به نتیجه، حدس‌هایی بزنیم. برای اثبات این حدس‌ها به ابزار قوی‌تری نیاز داریم و آن، انواع استدلال‌های ریاضی است.

انسان به طور فطری، همواره برای درک اتفاق‌های پیرامون خود از شهودش کمک می‌گرفته، اما نکته‌ی مهم این است که شهود افراد گوناگون در زمان‌های متفاوت یکسان نبوده است. برای مثال در یونان باستان، فیثاغورس و پیروان او، شهودشان با بقیه‌ی مردم متفاوت بود و کروی بودن زمین را باور داشتند، اما برای آن دلیل محکم و منطقی نداشتند. آن‌ها با شهود خود، تنها به دلیل این که می‌دیدند «وقتی در سفرهای دریایی یک کشتی از دوردست به ساحل نزدیک می‌شود، ابتدا دماغه و سپس بدنه‌ی آن بر ساحل‌نشینان آشکار می‌شود»، به این باور رسیده بودند. پس شهود افراد گوناگون، به نوع تفکر، سطح

تحصیلات و حتی نوع کار آن‌ها نیز وابسته است. شهود یک دانشمند، با شهود یک فرد عادی تفاوت‌های چشم‌گیری دارد.

مثال: برای اثبات این حکم که «دو زاویه‌ی متقابل به‌رأس با یکدیگر برابرند»، ابتدا شکلی به صورت زیر رسم می‌کنیم و بعد از فهم درست حکم از روی شکل، برای آن استدلال دقیق می‌آوریم.



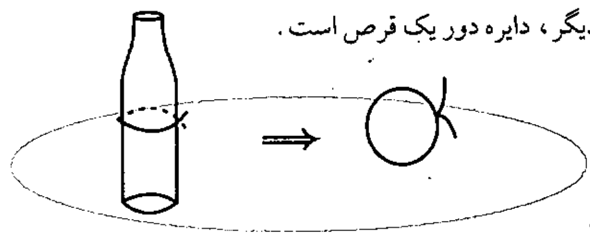
هر زاویه‌ی نیم‌صفحه برابر با 180° است، پس داریم:

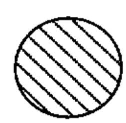
$$\begin{cases} \angle O_1 + \angle O_3 = 180^\circ \\ \angle O_2 + \angle O_3 = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \angle O_1 + \angle O_3 = \angle O_2 + \angle O_3 \Rightarrow \angle O_1 = \angle O_2$$

توجه: واقعاً بدون استفاده از شکل و درک شهودی، اثبات این حکم جذاب و قابل فهم نیست.

مثال: برای این که درک درستی از تعریف دایره پیدا کنیم، بهتر است قطعه‌ای سیم مفتولی را برداریم و آن را دور یک بطری قرار دهیم و دو سر سیم را به هم ببندیم. سپس بطری را از داخل سیم بیرون می‌آوریم و شکل به‌دست آمده را یک دایره می‌نامیم.

با انجام این کار، دانش‌آموزان تفاوت بین دایره و قرص (دیسک) را متوجه می‌شوند. درحقیقت یک قرص، از یک دایره به همراه نقاط داخلش تشکیل شده است. به عبارت دیگر، دایره دور یک قرص است.

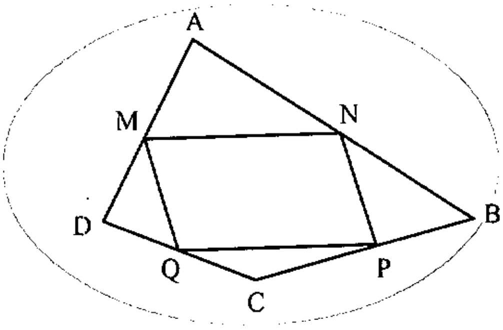




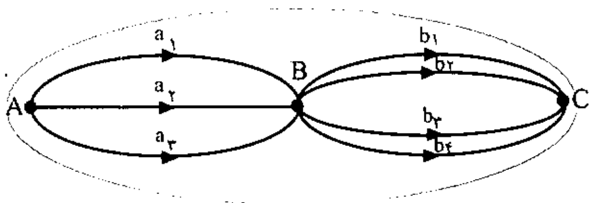
قرص یا دیسک

توجه: به خط بسته‌ای که دور قرص قرار دارد، دایره گفته می‌شود.

مثال: برای اثبات این حکم که: «اگر وسط‌های اضلاع یک چهارضلعی را به هم وصل کنیم، آن‌گاه یک متوازی‌الاضلاع تشکیل می‌شود»، ابتدا شکلی به این صورت رسم می‌کنیم و بعد از درک درستی حکم از روی شکل، برای آن استدلال دقیق می‌آوریم.



مثال: برای حل این مسأله که: «از شهر A به شهر B، ۳ راه و از شهر B به شهر C، ۴ راه متفاوت وجود دارد. هرگاه شخصی قصد سفر از شهر A و از طریق شهر B به شهر C را داشته باشد، این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟» ابتدا شکل زیر را رسم می‌کنیم، سپس با استفاده از اصل ضرب در آنالیز ترکیبی، جواب مسئله را به‌دست می‌آوریم.



با استفاده از اصل ضرب می‌توان نوشت: $12 = 3 \times 4$. پس ۱۲ راه متفاوت وجود دارد که آن‌ها را به این صورت مشخص می‌کنیم:

$$\begin{array}{lll} a_1, b_1 & a_2, b_1 & a_3, b_1 \\ a_1, b_2 & a_2, b_2 & a_3, b_2 \\ a_1, b_3 & a_2, b_3 & a_3, b_3 \\ a_1, b_4 & a_2, b_4 & a_3, b_4 \end{array}$$

مثال: دو عدد صحیح مثبت را چنان بیابید که حاصل جمع آن‌ها ۱۲ و حاصل ضربشان بیش‌ترین مقدار ممکن باشد.

حل: ابتدا با استفاده از شهود، سعی می‌کنیم جفت عددهای صحیح و مثبتی را پیدا کنیم که حاصل جمع آن‌ها برابر با ۱۲ باشد. سپس حاصل ضرب هر کدام را پیدا می‌کنیم. از بین این حاصل ضرب‌ها، هر کدام که از بقیه بیش‌تر باشد، دو عدد مربوط به آن، جواب مسئله هستند.

$$\begin{array}{ll} 1+11=12 \; ; \; 1\times 11=11 & 4+8=12 \; ; \; 4\times 8=32 \\ 2+10=12 \; ; \; 2\times 10=20 & 5+7=12 \; ; \; 5\times 7=35 \\ 3+9=12 \; ; \; 3\times 9=27 & 6+6=12 \; ; \; 6\times 6=36 \end{array}$$

با توجه به حاصل جمع و حاصل ضرب‌های بالا ملاحظه می‌کنیم، هرچه اختلاف دو عدد کم‌تر می‌شود، حاصل ضربشان بیش‌تر می‌شود، تا آن‌جا که وقتی هر دو عدد برابر با

۶ باشند، حاصل ضربشان بیش‌ترین مقدار را دارد. بنابراین، به‌روش شهودی به این حدس کلی می‌رسیم:

«دو عدد حقیقی x و y که حاصل جمعشان برابر با a ولی حاصل ضربشان بیش‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد، برابرند با: $x = y = \frac{a}{2}$»

می‌توان حدس بالا را به طور دقیق به صورت زیر ثابت کرد:

$$\begin{cases} x + y = a \Rightarrow y = a - x \\ P = xy \end{cases} \Rightarrow P = x(a - x)$$

$$\Rightarrow P = x(a - x) = -x^2 + ax = -(x^2 - ax)$$

$$= -(x^2 - ax + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}) = \frac{a^2}{4} - (x - \frac{a}{2})^2$$

در نتیجه داریم:

$$P = \frac{a^2}{4} - (x - \frac{a}{2})^2 \qquad (1)$$

با توجه به رابطه‌ی ۱ درمی‌یابیم، بیش‌ترین مقدار P وقتی به‌دست می‌آید که: $(x - \frac{a}{2})^2 = 0$. بنابراین داریم:

$$x - \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2} \qquad (2)$$

از طرفی $x + y = a$؛ پس با توجه به رابطه‌ی ۲ ملاحظه می‌کنیم که $y = \frac{a}{2}$. درنتیجه، وقتی P بیش‌ترین مقدار ممکن را دارد که داشته باشیم:

$$x = y = \frac{a}{2}$$

استدلال تمثیلی

برای بسیاری از تصمیم‌گیری‌ها یا نتیجه‌گیری‌ها در زندگی روزمره، از یک ضرب‌المثل یا یک بیت شعر استفاده می‌کنیم که مشابهتی با رویداد پیش‌آمده دارد. برای مثال:

اگر بخواهیم کسی را به صبر و حوصله تشویق کنیم، می‌گوییم: گر صبر کنی ز غوره حلوا سازی!

اگر دیگران شرایط فردی را درک نکرده و نتیجه‌گیری نادرستی از عملکرد او داشته باشند، می‌توان به آن‌ها گفت:

هر کسی از ظن خود شد یار من
از درون من نجست اسرار من

وقتی مبحث آمار را مطالعه می‌کنیم، برای تفهیم این موضوع که یک نمونه تصادفی همه‌ی خاصیت‌های جامعه‌ی آماری را دارد، از ضرب‌المثل «مشت نمونه‌ی خروار است»، پس نمونه بیانگر جامعه است، استفاده می‌کنیم.

استدلال تمثیلی یا مقایسه‌ای، در حقیقت یافتن نوعی مشابهت بین دو یا چند مفهوم است. به عبارت دیگر، اساس استدلال تمثیلی، نوعی شباهت است.

تذکر: استدلال تمثیلی، نوعی استدلال دقیق ریاضی محسوب نمی‌شود، زیرا محدودیت‌هایی دارد. این نوع استدلال فقط در ایجاد یک زمینه‌ی شهودی برای درک بسیاری از مفاهیم و اثبات‌های ریاضی به ما کمک می‌کند.

مثال: وقتی از دانش‌آموز می‌خواهیم به جای ☐ در برابری $\frac{3}{2} = \frac{9}{\square}$ عدد مناسب قرار دهد، مبنای استدلال دانش‌آموز این است که چون صورت کسر سه برابر شده است، پس مخرج هم مشابه صورت باید سه برابر شود تا این‌که تناسب برقرار باشد. درنتیجه، به جای ☐ عدد $6 = 3 \times 2$ را قرار می‌دهد.

مثال: برای هر عدد طبیعی n و عدد حقیقی $a \neq 0$، داریم: $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$. مشابه با این فرمول، وقتی n عدد طبیعی نباشد، از این فرمول هم استفاده می‌شود. برای مثال، با فرض $a \neq 0$ داریم:

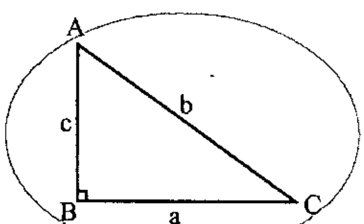
$$\frac{1}{\sqrt[5]{a}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{5}}} = a^{\frac{-1}{5}}$$

توجه: برای محاسبه‌ی حاصل عبارت‌های جبری به کمک اتحاد، از استدلال تمثیلی استفاده می‌کنیم!

مثال: همه‌ی دانش‌آموزان با مثلث قائم‌الزاویه و رابطه‌ی فیثاغورس در آن از دوره‌ی راهنمایی آشنا هستند. رابطه‌ی فیثاغورس چنین است:

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC داریم:

$$b^2 = a^2 + c^2$$

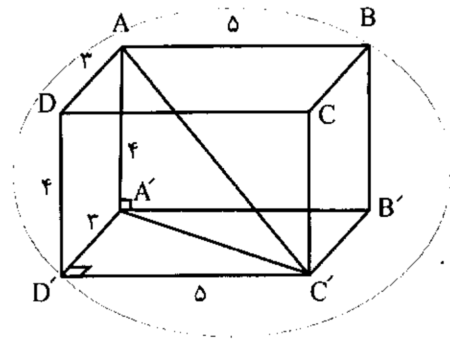


با استفاده از این رابطه و به کمک استدلال تمثیلی، می‌توان قطر مکعب مستطیل را محاسبه کرد. فرض کنید مکعب

مستطیلی به ابعاد ۳، ۴ و ۵ داریم و می‌خواهیم قطر آن را محاسبه کنیم:

چون مثلث $A'D'C'$ در رأس D' قائم‌الزاویه است، پس می‌توان رابطه‌ی فیثاغورس را برای آن، به کمک استدلال تمثیلی، چنین نوشت:

$$A'C'^2 = A'D'^2 + D'C'^2 \Rightarrow A'C'^2 = 3^2 + 5^2 = 34$$
$$\Rightarrow A'C' = \sqrt{34}$$



هم‌چنین مثلث $AA'C'$ در رأس A' قائم‌الزاویه است، پس می‌توان رابطه‌ی فیثاغورس را برای آن به کمک استدلال تمثیلی چنین نوشت:

$$AC'^2 = AA'^2 + A'C'^2 \Rightarrow AC'^2 = 4^2 + (\sqrt{34})^2 = 40$$
$$\Rightarrow AC' = 2\sqrt{10}$$

استدلال استقرایی

برخی از ریاضی‌دانان بزرگ، وقتی به‌درستی قانونی تا حداکثر بیست حالت پشت سر هم پی می‌بردند، آن را به صورت یک حکم کلی بیان می‌کردند. از این‌رو، تا میانه‌های قرن هفدهم میلادی، با استفاده از استدلال استقرایی، حکم‌های بسیاری در ریاضیات، به‌ویژه در شاخه‌ی نظریه‌ی اعداد روی هم انباشته شده بودند که یک نمونه را ذکر می‌کنیم:

مارن مرسن (۱۶۴۸ـ۱۵۸۸م)، ریاضی‌دان فرانسوی و از دوستان صمیمی دکارت بود. او معتقد بود، عدد $M_n = 2^n - 1$ به ازای عددهای اول ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۳۱، ۶۷، ۱۲۷ و ۲۵۷ عددی اول، و به ازای بقیه‌ی عددهای طبیعی کوچک‌تر از ۲۵۷، عددی مرکب است. این عدد به «عدد مرسن» معروف است. در صورتی که به جای n، عددهای اول یاد شده را قرار دهیم، عددهای مرسن به دست می‌آیند:

$$n = 2 \Rightarrow M_2 = 2^2 - 1 = 3$$
$$n = 3 \Rightarrow M_3 = 2^3 - 1 = 7$$
$$n = 5 \Rightarrow M_5 = 2^5 - 1 = 31$$
$$n = 7 \Rightarrow M_7 = 2^7 - 1 = 127$$
$$n = 13 \Rightarrow M_{13} = 2^{13} - 1 = 8191$$
$$\vdots$$
$$n = 257 \Rightarrow M_{257} = 2^{257} - 1$$

مرسن چند اشتباه صادقانه داشت. ابتدا این‌که او به خطا تصور کرد، $M_{67} = 2^{67} - 1$ و $M_{257} = 2^{257} - 1$ عددهایی اول هستند. دیگر این‌که $M_{61} = 2^{61} - 1$ و $M_{89} = 2^{89} - 1$ و $M_{107} = 2^{107} - 1$ را جزو اعداد اول به حساب نیاورده بود.

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، بعضی از ریاضی‌دانان با بهره‌گیری از استدلال استقرایی (استقرای ناقص)، حکم‌هایی را صادر می‌کردند که در حالت کلی درست نبودند، زیرا آن‌ها با بررسی آزمایش‌های محدودی به یک نتیجه‌ی کلی می‌رسیدند و می‌دانیم که چنین نتیجه‌هایی ممکن است با یک مثال نقض باطل شوند.

استدلال استقرایی، به طور معمول، با مقایسه‌ی مشاهده‌ها و نتیجه‌های ناشی از آزمایش‌هایی محدود آغاز می‌شود. سپس نتیجه‌ی این آزمایش‌ها را به همه‌ی پدیده‌های مشابه تعمیم می‌دهند. استدلال استقرایی، اثبات دقیق ریاضی محسوب نمی‌شود، زیرا مجموعه‌ی مشاهدات ما همواره محدود است و نمی‌توانیم آزمایش را روی همه‌ی پدیده‌ها انجام دهیم. فقط روش خوبی برای حدس زدن است و برای اثبات درستی این حدس، باید از اصول استقرای ریاضی استفاده کرد.

مثال: حاصل عبارت زیر را با روش استدلال استقرایی حدس بزنید:

$$A = 2 + 6 + 10 + \cdots + (4n - 2)$$

ابتدا مجموع جملات را محاسبه می‌کنیم:

$$n = 1:\ 2 = 2 \times 1 = 2 \times (1^2)$$
$$n = 2:\ 2 + 6 = 8 = 2 \times 4 = 2 \times (2^2)$$
$$n = 3:\ 2 + 6 + 10 = 18 = 2 \times 9 = 2 \times (3^2)$$
$$n = 4:\ 2 + 6 + 10 + (4 \times 4 - 2) = 32 = 2 \times 16 = 2 \times (4^2)$$

در حالتی که $n = 5$، می‌توان حدس زد که مجموع پنج جمله‌ی عبارت A برابر با $2 \times (5^2)$ یا ۵۰ است، زیرا:

$$n = 5:\ 2 + 6 + 10 + 14 + 18 = 50 = 2 \times 25 = 2 \times (5^2)$$

بنابراین، هرگاه مجموع n جمله‌ی عبارت A را محاسبه کنیم، حاصل آن $2 \times (n^2)$ است؛ یعنی داریم:

$$A = 2 + 6 + 10 + \cdots + (4n - 2) = 2 \times (n^2) \qquad (1)$$

برای آن‌که درستی حدس خود را ثابت کنیم، باید ابتدا اصل

استقرای ریاضی را مطالعه کنیم. سپس با استفاده از آن، درستی رابطه‌ی ۱ را بررسی می‌کنیم.

فعالیت ۱: الگوی زیر را در نظر بگیرید:

$۷۴ \times ۳ = ۲۲۲$

$۷۴ \times ۶ = ۴۴۴$

الف) بدون محاسبه، حاصل سطر زیر را ابتدا حدس بزنید و سپس مقدار آن را محاسبه کنید.

$۷۴ \times ۱۲ =$

ب) آیا حدس شما درست بود؟

ج) با چه نوع استدلالی حدس زده‌اید؟

د) حاصل سطر زیر را حدس بزنید، سپس مقدار آن را محاسبه کنید.

$۷۴ \times ۲۴ =$

هـ) آیا حدس شما درست بود؟

و) از قسمت‌های بالا چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

حل:

الف) چون ۲۲۲ دو برابر ۴۴۴ است، پس حاصل ۱۲×۷۴، عددی است که هر رقم آن دو برابر رقم‌های ۴۴۴، یعنی ۸۸۸ است.

ب) بله، زیرا:

$$۷۴ \times ۱۲ = ۷۴ \times (۶ \times ۲) = (۷۴ \times ۶) \times ۲$$
$$= ۴۴۴ \times ۲ = ۸۸۸$$

ج) استدلال استقرایی، زیرا براساس مجموعه‌ای از مشاهدات جزئی به نتیجه‌ای کلی رسیدیم.

د) مانند پاسخ مرحله‌ی الف، حاصل ۲۴×۷۴، عددی است که هر رقم آن دو برابر رقم‌های ۸۸۸ یعنی ۱۶۱۶۱۶ است.

هـ) خیر، زیرا:

$$۷۴ \times ۲۴ = ۷۴ \times (۱۲ \times ۲) = (۷۴ \times ۱۲) \times ۲$$
$$= ۸۸۸ \times ۲ = ۱۷۷۶$$

و) استدلال استقرایی براساس مجموعه‌ای محدود از مشاهدات است؛ بنابراین استدلال دقیق ریاضی محسوب نمی‌شود. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، حدس ما برای مرحله‌ی «د» درست نیست.

فعالیت ۲: به حاصل‌ضرب‌های زیر توجه کنید:

$۲۰۳ \times ۱۲۲ = ۲۴۷۶۶$

$۲۲۱ \times ۳۰۲ = ۶۶۷۴۲$

الف) حاصل ۳۱۲×۱۲۱ را به‌دست آورید.

ب) حاصل ۲۱۳×۱۲۱ را حدس بزنید.

ج) حاصل ۲۱۳×۱۲۱ را به دست آورید. آیا حدس شما درست بود؟

د) حاصل ۲۱۴×۱۳۲ را به‌دست آورید.

هـ) حاصل ۴۱۲×۲۳۱ را حدس بزنید.

و) حاصل ۴۱۲×۲۳۱ را به دست آورید. آیا حدس شما درست بود؟ چرا؟ توضیح دهید.

فعالیت ۳: در الگوی زیر، حاصل سطر چهارم را حدس بزنید. برای حدس خود از چه استدلالی استفاده کرده‌اید؟

$\sqrt{۱۲۱} = ۱۱$

$\sqrt{۱۲۳۲۱} = ۱۱۱$

$\sqrt{۱۲۳۴۳۲۱} = ۱۱۱۱$

$\sqrt{۱۲۳۴۵۴۳۲۱} = ?$

فعالیت ۴: الگوی زیر را در نظر بگیرید:

$۳۷ \times ۱۸ = ۶۶۶$

$۳۷ \times ۲۱ = ۷۷۷$

$۳۷ \times ۲۴ = ۸۸۸$

$۳۷ \times ۲۷ = ؟$

$۳۷ \times ۳۰ = ؟$

الف) مقدار سطر چهارم را بدون محاسبه حدس بزنید.

ب) با چه نوع استدلالی حدس زده‌اید؟

پ) حاصل سطر چهارم را به دست آورید. آیا حدس شما درست بود؟

ت) حاصل سطر پنجم را ابتدا حدس بزنید و سپس مقدار آن را به دست آورید.

آیا حدس شما درست بود؟ چرا؟

فعالیت ۵: الگوی زیر را در نظر بگیرید:

$۶۱ \times ۲ = ۱۲۲$

$۶۱ \times ۴ = ۲۴۴$

$۶۱ \times ۸ = ؟$

$۶۱ \times ۱۶ = ؟$

الف) بدون محاسبه، سطر سوم الگو را حدس بزنید.

ب) مقدار سطر سوم را محاسبه کنید. آیا حدس شما درست بود؟

پ) از کدام استدلال برای حدس مقدار سطر سوم استفاده کرده‌اید؟

ت) حاصل سطر چهارم را حدس بزنید، سپس مقدار آن را محاسبه کنید. آیا حدس شما درست بود؟

ادامه دارد...

مسابقه‌های ریاضی در کشورهای مختلف دنیا (قسمت ۷)

مسابقه‌ی آزاد ریاضی در کانادا

● هوشنگ شرقی

اشاره

درباره‌ی مسابقه‌ی آزاد ریاضی در کشور کانادا، قبلاً در شماره‌ی ۴۹ برهان مطالبی نوشتیم و مسابقه‌ی آزاد ریاضی سال ۲۰۰۰ را نیز در آن شماره آوردیم. اینک مسائل مسابقه‌ی سال ۲۰۰۳ را تقدیم شما می‌کنیم. یادآوری می‌شود که مدت مسابقه ۲/۵ ساعت و استفاده از ماشین‌های محاسبه در آن غیر مجاز است. مسائل در دو بخش A و B تنظیم شده‌اند. بخش A شامل ۸ سؤال است (که آسان‌ترند) و هر سؤال دارای ۱۵ امتیاز است. مسائل بخش B (که دشوارترند) شامل ۴ سؤال هستند و هر سؤال ۱۰ امتیاز دارد.

ابتدا صورت سؤال‌ها و سپس پاسخ آن‌ها را ملاحظه می‌کنید.

بخش A

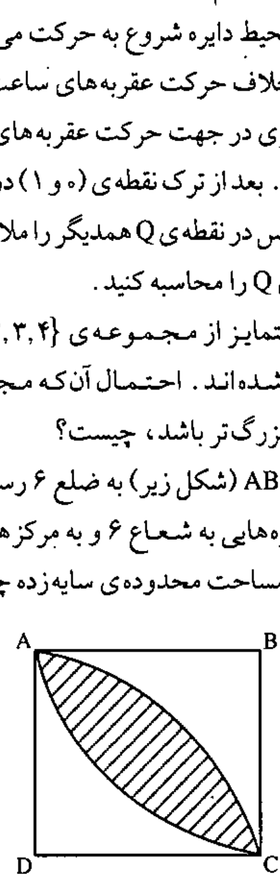
۱. جِف، گِرت و اینا، همگی در یک روز از سال به دنیا آمده‌اند. گرت یک سال بزرگ‌تر از جف و اینا دو سال بزرگ‌تر از گرت است. امسال مجموع سن آن‌ها ۱۱۸ سال می‌شود. گرت چند سال دارد؟

۲. تصویر نقطه‌ی (۲- و ۴) بر محور xها را روی خط y=x تصویر می‌کنیم. مختصات نقطه‌ی آخر چیست؟

۳. دایره‌ای به شعاع ۱ و به مرکز مبداء مختصات مفروض است. دو ذره به طور هم‌زمان از نقطه‌ی (۰ و ۱) و در دو جهت مخالف، روی محیط دایره شروع به حرکت می‌کنند: یکی از آن دو در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت و با سرعت ثابت V، و دیگری در جهت حرکت عقربه‌های ساعت و با سرعت ثابت ۳V. بعد از ترک نقطه‌ی (۰ و ۱) دو ذره، نخست در نقطه‌ی P و سپس در نقطه‌ی Q همدیگر را ملاقات می‌کنند. مختصات نقطه‌ی Q را محاسبه کنید.

۴. دو عدد متمایز از مجموعه‌ی {۰،۱،۲،۳،۴} به طور تصادفی انتخاب شده‌اند. احتمال آن‌که مجموع آن‌ها از حاصل ضربشان بزرگ‌تر باشد، چیست؟

۵. مربع ABCD (شکل زیر) به ضلع ۶ رسم شده است. کمان‌هایی از دایره‌هایی به شعاع ۶ و به مرکزهای B و D نیز ترسیم شده‌اند. مساحت محدوده‌ی سایه‌زده چه قدر است؟



۶. نماد [a] به معنی بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی a است؛ برای مثال: ۵ = [۵/۷] ، ۴ = [۴] و ۵- = [۴/۲-]. همه‌ی مقادیر x را به‌دست آورید به طوری که داشته باشیم:

$$\left\lfloor \frac{۳}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{۴}{x} \right\rfloor = ۵$$

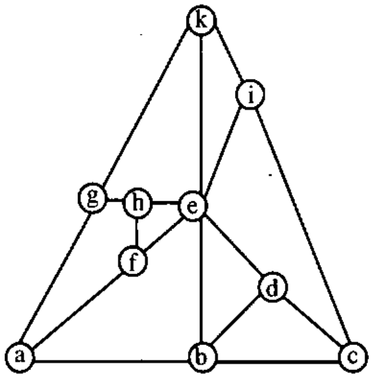
۷. نقاط P(۴,۱) ، Q(۷,-۸) و R(۱۰,۱) وسط‌های شعاع‌هایی از دایره‌ی C_1 هستند. طول شعاع این دایره را به‌دست آورید.

۸. تعداد سه‌تایی‌های (k,l,m) را به‌دست آورید، به طوری که k و l و m عددهای طبیعی باشند و:

$$\frac{۴k}{۵}+\frac{۵l}{۶}+\frac{۶m}{۷}=۸۲ \quad \text{و} \quad k+l+m=۹۷$$

بخش B

۱. در نمودار زیر، عددهای صحیح، باید در دایره‌ها طوری واقع شوند که مجموع عددهای واقع در دایره‌های روی هریک از ده خط راست، مساوی ۱۵ شود؛ برای مثال: e+i=۱۵ و a+g+k=۱۵.



الف) اگر k = ۲ و e = ۵ ، همه‌ی عددهای مناسب را در دایره‌ها قرار دهید.

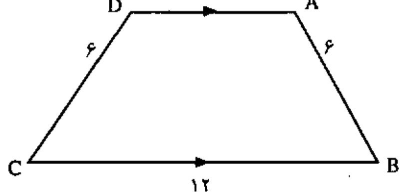
ب) فرض کنید k = ۲ و e غیر مشخص باشد:

۱ـ ۱. دستوری برای محاسبه‌ی b و c بر حسب e به‌دست آورید.

۲ـ ۱. نشان دهید، مقدار e باید مساوی ۵ باشد.

ج) حال فرض کنید k = x و x نامعین باشد. ثابت کنید که e هم‌چنان باید مساوی ۵ باشد.

۲. انباری به شکل یک ذوزنقه، با سه ضلع به طول ۶ متر و یک ضلع به طول ۱۲ متر، مطابق شکل ساخته شده است.

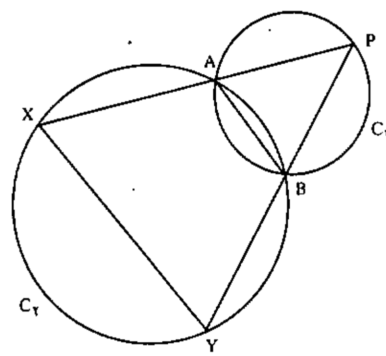


الف) اندازه‌های زوایای داخلی ذوزنقه را به‌دست آورید.

ب) اگر زنجیری در نقطه‌ی A به دیوار خارجی انبار وصل

شده و طول زنجیر ۸ متر باشد و کسی انتهای زنجیر را در دست بگیرد و حرکت کند، حداکثر مساحت محدوده‌ای که می‌تواند در خارج انبار طی کند، چه‌قدر است؟

۳. الف) در شکل زیر، دایره‌های C_1 و C_2 دارای وتر مشترک AB هستند.



نقطه‌ی P روی دایره‌ی C_1 و در خارج دایره‌ی C_2 انتخاب شده است و امتداد خطوط PA و PB دایره‌ی C_2 را به‌ترتیب در نقاط X و Y قطع کرده است. اگر $AB=6$ ، $PA=5$ ، $PB=7$ و $AX=16$ باشد، طول XY را به‌دست آورید.

ب) دو دایره‌ی C_3 و C_4 در وتر GH مشترک هستند. نقطه‌ی Q روی C_3 و در خارج C_4 انتخاب شده و امتداد خطوط QG و QH دایره‌ی C_4 را به‌ترتیب در نقاط V و W قطع کرده است. نشان دهید که بدون بستگی به جای Q، طول VW همواره مقداری ثابت است.

۴. معادله‌ی $x^3-6x^2+5x-1=0$ دارای ریشه‌های حقیقی a و b و c است. مقدار $a^5+b^5+c^5$ را به‌دست آورید.

حل مسائل بخش A

۱. اگر سن جف را x فرض کنیم، سن گرت $x+1$ و سن اینا $x+3$ خواهد بود. به سادگی و به کمک فرض مسئله می‌توان نوشت:

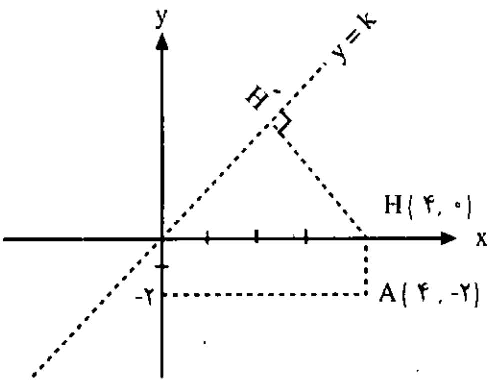
$$x+x+1+x+3=118 \Rightarrow 3x=114 \Rightarrow x=38$$

یعنی گرت ۳۹ سال دارد.

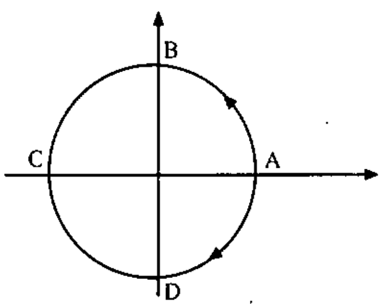
۲. تصویر نقطه‌ی $A(4,-2)$ بر محور xها، نقطه‌ی $H(4,0)$ است. اگر تصویر H بر نیمساز ربع اول و سوم، نقطه‌ی $H'(a,b)$ باشد، بدیهی است که $a=b$ و نیز شیب HH' مساوی -1 است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$m_{HH'}=\frac{b-0}{a-4}=\frac{b}{a-4}=-1$$

$$\Rightarrow b=4-a \Rightarrow a=4-a \Rightarrow a=2 \Rightarrow H'(2,2)$$



۳. وقتی ذره‌ی اول از نقطه‌ی شروع (A) به نقطه‌ی B می‌رسد، ذره‌ی دوم که سرعتش سه برابر سرعت آن است، از سمت دیگر به نقطه‌ی B می‌رسد. (اولی °۹۰ و دومی °۲۷۰ روی محیط دایره حرکت می‌کنند.) بنابراین، نقطه‌ی P روی نقطه‌ی $B(0,1)$ واقع است. اکنون مبدأ حرکت، نقطه‌ی (۱ و ۰) است و ذره‌ی اول با سرعت V در همان جهت (خلاف حرکت عقربه‌های ساعت) و ذره‌ی دوم نیز در جهت حرکت عقربه‌های ساعت به حرکت خود ادامه می‌دهند. با همان استدلال به سادگی در می‌یابیم که نقطه‌ی Q بر نقطه‌ی $C(-1,0)$ قرار دارد.



۴. تعداد اعضای فضای نمونه‌ی این پیشامد تصادفی معادل تعداد انتخاب‌های ۲ شیء از ۵ شیء است:

$$n(S)=\binom{5}{2}=10$$

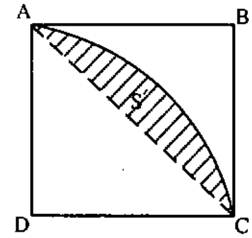
به سادگی و بدون هیچ محاسبه‌ای می‌توان با امتحان کردن این ۱۰ جفت عدد، عددهایی را که در شرط مسئله صدق می‌کنند، تعیین کرد:

$$A=\{(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(1,2),(1,3),(1,4)\}$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{7}{10}$$

۵. اگر قطر مربع را رسم کنیم، مساحت محدوده‌ی سایه‌زده در شکل ذیل برابر است با مساحت ربع دایره به شعاع $OA=OC$ ، منهای مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAC:

$$S' = S_۱ - S_۲ = \frac{۳۶\pi}{۴} - \frac{۳۶}{۲} = ۹(\pi - ۲)$$



اما مساحت محدوده‌ای که در شکل اصلی رسم شده است، دو برابر محدوده‌ی شکل بالاست. بنابراین:

$$S = ۲S' = ۱۸(\pi - ۲)$$

۶. این نخستین مسئله‌ی جدی در این آزمون است! می‌دانیم که: $[x] = a \Leftrightarrow a \le x < a + ۱$. بنابراین اگر $\left[\frac{۳}{x}\right] = k$، با توجه به فرض $\left[\frac{۴}{x}\right] = ۵ - k$ و با توجه به نابرابری فوق داریم:

$$k \le \frac{۳}{x} < k + ۱, ۵ - k \le \frac{۴}{x} < ۶ - k$$

از جمع کردن دو نابرابری بالا داریم:

$$۵ \le \frac{۷}{x} < ۷$$

و از حل دستگاه نامعادله‌های فوق (انجام دهید) داریم:

$$۱ < x < ۱/۴ \Rightarrow x \in (۱, ۱/۴)$$

۷. P، Q و R همگی روی محیط دایره‌ای هستند که شعاع آن نصف شعاع دایره‌ی اصلی است. مرکز این دایره، نقطه‌ی برخورد عمودمنصف‌های اضلاع مثلث PQR است. بنابراین، معادله‌ی عمودمنصف‌های دو ضلع از اضلاع این مثلث (مثلاً PQ و PR) را می‌نویسیم. نقطه‌ی برخورد آن‌ها، مرکز دایره‌ی محیطی مثلث PQR است. فاصله‌ی مرکز تا یکی از این سه نقطه، شعاع دایره‌ی محیطی مثلث است و شعاع دایره‌ی اصلی دو برابر شعاع این دایره.

وسط PQ : $M(\frac{۱۱}{۲}, -\frac{۷}{۲})$ شیب PQ : $m = \frac{-۸ - ۱}{۷ - ۴} = -۳$

$\Rightarrow$ شیب عمودمنصف PQ : $m' = \frac{۱}{۳} \Rightarrow$

معادله‌ی عمودمنصف PQ : $y + \frac{۷}{۲} = \frac{۱}{۳}(x - \frac{۱۱}{۲}) \Rightarrow x - ۳y = ۱۶$

وسط PR : $N(۷, ۱)$ شیب PR : $m = \frac{۱ - ۱}{۱۰ - ۴} = ۰ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ شیب عمودمنصف PR تعریف نشده است

معادله‌ی عمود منصف PR : $x = ۷$

$$\begin{cases} x = ۷ \\ x - ۳y = ۱۶ \end{cases} \Rightarrow x = ۷ , y = -۳ \Rightarrow$$

مرکز دایره‌ی محیطی مثلث PQR : $o(۷, -۳) \Rightarrow$

شعاع دایره‌ی محیطی مثلث PQR : $r = op = \sqrt{(۷ - ۴)^۲ + (-۳ - ۱)^۲} = ۵$

$$\Rightarrow R = ۲r = ۱۰$$

۸.

$$\frac{۴k}{۵} + \frac{۵l}{۶} + \frac{۶m}{۷} = ۸۲$$

$$\Rightarrow (k - \frac{k}{۵}) + (l - \frac{l}{۶}) + (m - \frac{m}{۷}) = ۸۲$$

$$\Rightarrow (\underbrace{l + k + m}_{۹۷}) - (\frac{k}{۵} + \frac{l}{۶} + \frac{m}{۷}) = ۸۲$$

$$\Rightarrow \frac{k}{۵} + \frac{l}{۶} + \frac{m}{۷} = ۱۵ \Rightarrow \frac{۴۲k + ۳۵l + ۳۰m}{۵ \times ۶ \times ۷} = ۱۵$$

$$\Rightarrow \frac{۳۰\overbrace{(m + l + k)}^{۹۷} + ۵l + ۱۲k}{۵ \times ۶ \times ۷} = ۱۵$$

$$\Rightarrow ۲۹۱۰ + ۵l + ۱۲k = ۳۱۵۰ \Rightarrow ۵l + ۱۲k = ۲۴۰$$

$$\Rightarrow l = \frac{۲۴۰ - ۱۲k}{۵} = \frac{۱۲(۲۰ - k)}{۵}$$

با توجه به این‌که $۱ = (۵,۱۲)$ نتیجه می‌شود که l باید مضرب ۱۲ و $۲۰ - k$ مضرب ۵ باشد:

$$۲۰ - k = ۵t \Rightarrow k = -۵t + ۲۰ > ۰ , l = ۱۲t > ۰$$

$$\Rightarrow -۵t + ۲۰ + ۱۲t + m = ۹۷ \Rightarrow m = ۷۷ - ۷t > ۰$$

$$\Rightarrow t = ۱, ۲, ۳$$

بنابراین، برای k و l و m سه دسته جواب به‌صورت زیر وجود دارد:

(k,l,m)=(۱۵و۱۲و۷۰) یا (۱۰و۲۴و۶۳) یا (۵و۳۶و۵۶)

بخش B

۱. الف) معادلات زیر از فرض مسئله و فرض $k = ۲$ و $e = ۵$ به‌دست می‌آیند:

$a + y = ۱۳,\ a + b + c = ۱۵,\ c + i = ۱۳,\ b = ۸,\ i = ۱۰,$
$c + d = ۱۰,\ b + d = ۱۵,\ g + h = ۱۰,\ f + h = ۱۵,\ a + f = ۱۰$

(مجموع عددهای دایره‌های واقع بر یک خط راست را نوشته‌ایم.)

اکنون به سادگی به کمک نتایج بالا به‌دست می‌آید:

$e = ۵,\ b = ۸,\ i = ۱۰,\ d = ۷,\ c = ۳,\ d = ۷,\ a = ۴,$
$g = ۹,\ h = ۱,\ f = ۱۴$

ب) فرض می‌کنیم $k = ۲$ و e نامشخص باشد. این معادلات

به‌دست می‌آیند:

$$a+g=13,\ b+e=13,\ c+i=13,\ a+b+c=15,$$
$$e+i=15,\ c+d+e=15,\ b+d=15,\ a+f+e=15,$$
$$f+h=15,\ g+h+e=15$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$b=13-e,\quad b+d=15 \Rightarrow 13-e+d=15$$
$$\Rightarrow d=2+e,\qquad c+d+e=15 \Rightarrow c+2+e+e=15$$
$$\Rightarrow c=13-2e,\quad a+b+c=15 \Rightarrow a+13-e+13-2e=15$$
$$\Rightarrow a=3e-11,\quad g=13-a \Rightarrow g=24-3e$$
$$i=13-c \Rightarrow i=2e,\quad i=15-e \Rightarrow 2e=15-e \Rightarrow e=5$$

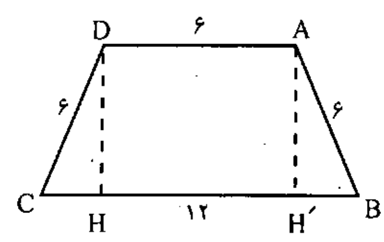
ج) با فرض $x=k$ نیز خواهیم داشت:

$$a+g+x=x+i+c=a+b+c=x+e+b=e+d+c=$$
$$a+f+e=b+d=e+i=g+h+e=f+h=15$$

و از ترکیب این معادله‌ها داریم:

$$b+e+x=15 \Rightarrow b=15-x-e$$
$$b+d=15 \Rightarrow d=15-b \Rightarrow d=x+e$$
$$c+d+e=15 \Rightarrow c+x+e+e=15 \Rightarrow c=15-x-2e$$
$$a+b+c=15 \Rightarrow a+15-x-e+15-x-2e=15$$
$$\Rightarrow a=3e+2x-15$$
$$a+g+x=15 \Rightarrow 3e+2x-15+g+x=15$$
$$\Rightarrow g=30-3e-3x$$
$$x+i+c=15 \Rightarrow x+i+15-x-2e=15 \Rightarrow i=2e\ ,$$
$$e+i=15 \Rightarrow 3e=15 \Rightarrow e=5$$

۲. الف) مطابق شکل، عمودهای DH و AH' را بر BC رسم می‌کنیم. داریم:

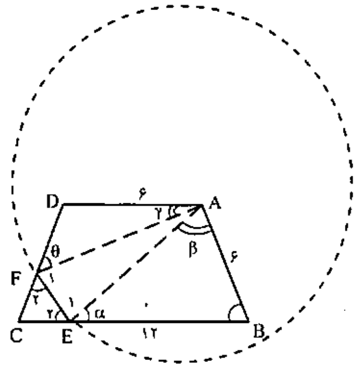


$$CH=BH'=\frac{BC-AD}{2}=\frac{12-6}{2}=3$$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABH'، ضلع BH' نصف وتر AB است. بنابراین: $\angle CDH=\angle BAH'=30^\circ$ و در نتیجه:

$$\angle A=\angle D=120^\circ \text{ و } \angle B=\angle C=60^\circ$$

ب) مطابق شکل ذیل، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع $r=8$ را رسم می‌کنیم. این دایره BC را در E و CD را در F قطع می‌کند؛ به‌طوری که: $AE=AF=8$



حال کافی است مساحت دایره‌ی به شعاع ۸ را از مساحت پنج‌ضلعی ADFEB کم کنیم تا مساحت محدوده‌ی مورد نظر به‌دست آید. برای محاسبه‌ی مساحت پنج‌ضلعی نیز می‌توان مساحت ذوزنقه را از مساحت مثلث CEF کم کرد. برای این کار محاسبات زیر را انجام می‌دهیم:

$$\Delta ABE: \frac{AE}{\sin B}=\frac{6}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{8}{\sin 60^\circ}=\frac{6}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha=\frac{6\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{8} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$\frac{BE}{\sin\beta}=\frac{6}{\sin\alpha}\ ,\ \cos\alpha=\sqrt{1-\frac{27}{64}}=\frac{\sqrt{37}}{8}$$

$$\sin\beta=\sin(\pi-\alpha-\beta)=\sin(\alpha+60^\circ)$$
$$=\sin\alpha\cos 60+\cos\alpha\sin 60$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{8}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{37}}{8}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{111}}{16}$$

$$\Rightarrow BE=\frac{\frac{6\times\sqrt{111}}{16}}{\frac{3\sqrt{3}}{8}}=\frac{6\sqrt{111}}{6\sqrt{3}}=\sqrt{37} \Rightarrow CE=12-\sqrt{37}$$

و در مثلث ADF داریم:

$$\frac{AD}{\sin\theta}=\frac{AF}{\sin 120}=\frac{DF}{\sin\gamma} \Rightarrow \frac{6}{\sin\theta}=\frac{8}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Rightarrow \sin\theta=\frac{3\sqrt{3}}{8} \Rightarrow \theta=\alpha$$
$$\Rightarrow F_2=E_2(\hat{F}_2=180^\circ-\hat{F}_1-\hat{\theta},$$
$$\hat{E}_2=180^\circ-\hat{E}_1-\hat{\alpha},\ \hat{E}_1=\hat{F}_1)$$
$$\Rightarrow CE=CF=12-\sqrt{37}$$

حال می‌توان نوشت:

$$S_{CEF}=\frac{1}{2}CE.CF.\sin\hat{C}$$

$$=\frac{۱}{۲}(۱۲-\sqrt{۳۷})^{۲}.\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۱۴۴+۳۷-۲۴\sqrt{۳۷})$$

$$=\frac{۱۸۱\sqrt{۳}-۲۴\sqrt{۱۱۱}}{۴}$$

$$S_{ABCD}=\frac{۱۲+۶}{۲}\times\sqrt{۲۷}=۲۷\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow S_{ABEFD}=۲۷\sqrt{۳}-\frac{۱۸۱\sqrt{۳}-۲۴\sqrt{۱۱۱}}{۴}=\frac{۲۴\sqrt{۱۱۱}-۷۳\sqrt{۳}}{۴}$$

و مساحت مورد نظر برابر است با:

$$S=۶۴\pi-\frac{۲۴\sqrt{۱۱۱}-۷۳\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۲۵۶\pi+۷۳\sqrt{۳}-۲۴\sqrt{۱۱۱}}{۴}$$

۳. الف) با توجه به شکل می‌توان نوشت:

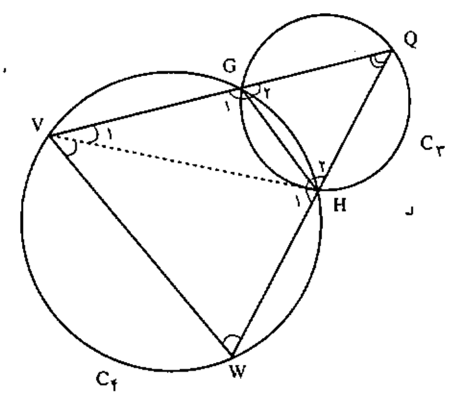
$$\left.\begin{array}{l}\angle XAB+\angle PAB=۱۸۰^{\circ}\\ \angle XAB+\angle XYB=۱۸۰^{\circ}\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\angle PAB=\angle XYB\\ \angle XPY=\angle APB\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Delta PAB\sim\Delta PXY\Rightarrow\frac{PA}{PY}=\frac{PB}{PX}=\frac{AB}{XY},$$

$$PX=PA+AX=۵+۱۶=۲۱\Rightarrow$$

$$\frac{۵}{PY}=\frac{۷}{۲۱}=\frac{۶}{XY}\Rightarrow PY=۱۵,\ \ XY=۱۸$$

ب) به نظر می‌رسد که شکل مسئله تغییری نکرده و فقط اسامی دایره‌ها و نقاط تغییر کرده‌اند و مجهول مسئله (VW) جانشین XY شده است.



با کمی توجه به شکل و بدون هیچ‌گونه محاسبه‌ای می‌توان نتیجه‌ی مورد نظر را به‌دست آورد. زاویه‌ی $\hat{Q}$ در دایره‌ی $C_۳$، محاطی و روبه‌رو به وتر ثابت GH و در نتیجه مقدار آن ثابت است و زاویه‌ی $V_۱$ در دایره‌ی $C_۴$ محاطی و روبه‌رو به وتر ثابت GH و در نتیجه مقدار آن ثابت است. در مثلث QVH زاویه‌ی خارجی $H_۱$ برابر است با: $\hat{Q}+\hat{V}_۱$ و در نتیجه مقدار آن ثابت است. لذا طول وتر مقابل به آن (یعنی VW)، نیز ثابت است.

۴. الف) چون a و b و c ریشه‌های معادله‌ی فوق هستند، پس در آن صدق می‌کنند:

$$\begin{array}{l}a^{۲}\times\\ b^{۲}\times\\ c^{۲}\times\end{array}\begin{cases}a^{۳}-۶a^{۲}+۵a-۱=۰\\ b^{۳}-۶b^{۲}+۵b-۱=۰\\ c^{۳}-۶c^{۲}+۵c-۱=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^{۵}-۶a^{۴}+۵a^{۳}-a^{۲}=۰\\ b^{۵}-۶b^{۴}+۵b^{۳}-b^{۲}=۰\\ c^{۵}-۶c^{۴}+۵c^{۳}-c^{۲}=۰\end{cases}$$

و از جمع معادله‌های بالا خواهیم داشت:

$$a^{۵}+b^{۵}+c^{۵}-۶(a^{۴}+b^{۴}+c^{۴})$$
$$+۵(a^{۳}+b^{۳}+c^{۳})-(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})=۰ \qquad (۱)$$

یک‌بار هم سه معادله‌ی فوق را در a و b و c ضرب و با هم جمع می‌کنیم:

$$a(a^{۳}-۶a^{۲}+۵a-۱)+b(b^{۳}-۶b^{۲}+۵b-۱)$$
$$+c(c^{۳}-۶c^{۲}+۵c-۱)=۰$$
$$\Rightarrow a^{۴}+b^{۴}+c^{۴}-۶(a^{۳}+b^{۳}+c^{۳})$$
$$+۵(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})-(a+b+c)=۰$$
$$\Rightarrow a^{۴}+b^{۴}+c^{۴}=۶(a^{۳}+b^{۳}+c^{۳})$$
$$-۵(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})-(a+b+c)$$

و با جای‌گزین کردن این مقادیر در رابطه‌ی (۱) نتیجه می‌شود:

$$(a^{۵}+b^{۵}+c^{۵})-۳۶(a^{۳}+b^{۳}+c^{۳})$$
$$+۳۰(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})+۶(a+b+c)$$
$$+۵(a^{۳}+b^{۳}+c^{۳})-(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})=۰$$
$$\Rightarrow a^{۵}+b^{۵}+c^{۵}=۳۱(a^{۳}+b^{۳}+c^{۳})$$
$$-۲۹(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})-۶(a+b+c) \qquad (۲)$$

بار دیگر خود سه معادله‌ی اصلی را هم جمع می‌کنیم:

$$(a^{۳}-۶a^{۲}+۵a-۱)+(b^{۳}-۶b^{۲}+۵b-۱)$$
$$+(c^{۳}-۶c^{۲}+۵c-۱)=۰$$
$$\Rightarrow a^{۳}+b^{۳}+c^{۳}=۶(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})-۵(a+b+c)+۳$$

و این مقدار را در رابطه‌ی (۲) جای‌گزین می‌کنیم:

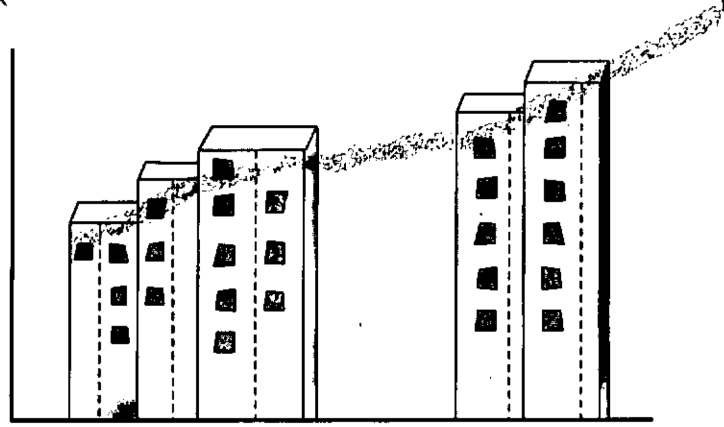
$$a^{۵}+b^{۵}+c^{۵}=۱۸۶(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})-۱۵۵(a+b+c)$$
$$+۹۳-۲۹(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})-۶(a+b+c)$$
$$\Rightarrow a^{۵}+b^{۵}+c^{۵}=۱۵۷(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})-۱۶۱(a+b+c)+۹۳$$

اکنون با توجه به قضیه‌ی «وی‌یت» (برای آشنایی با آن می‌توانید به کتاب آموزش المپیاد ریاضی، جلد۱، از انتشارات مدرسه رجوع کنید) داریم:

$$a+b+c=۶\ ,\ \ a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}=(a+b+c)^{۲}-۲(ab+ac+bc)$$
$$=۳۶-۲(۵)=۲۶\Rightarrow a^{۵}+b^{۵}+c^{۵}=۱۵۷(۲۶)-۱۶۱(۶)+۹۳$$
$$\Rightarrow a^{۵}+b^{۵}+c^{۵}=۳۲۰۹$$

محاسبه‌ی حد مجموع به کمک انتگرال معین

(قسمت ۲)



● احسان یارمحمدی

اشاره

در شماره‌ی قبل درباره‌ی محاسبه‌ی پاره‌ای از حدهای توابعی صحبت کردیم که به صورت مجموع‌های خاصی مطرح می‌شوند و با استفاده از روش‌های متعارفی که در محاسبه‌های حدها وجود دارند، قابل حل نیستند. سپس در این خصوص مراحل محاسبه‌ی حد مجموع به کمک انتگرال معین را مطرح کرده و آزمون‌هایی را آوردیم. اینک در ذیل، ادامه‌ی آزمون‌ها را ملاحظه می‌کنید. (قبل از مطالعه‌ی این مقاله، قسمت اول آن را از شماره‌ی قبل مطالعه کنید)

آزمون ۶. حاصل این حد، کدام‌یک از گزینه‌های ذیل است؟

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1\times 2\times 3\times\cdots\times(n-3)\times(n-2)\times(n-1)\times n)^{\frac{1}{n}}}{n}$$

۱) e ۲) $\frac{1}{e}$

۳) -1 ۴) 1

جواب: گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{(1\times 2\times 3\times\cdots\times(n-3)\times(n-2)\times(n-1)\times n)^{\frac{1}{n}}}{n}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{\sqrt[n]{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1\times 2\times 3\times\cdots\times(n-1)\times n}{n\times n\times n\times\cdots\times n}}$$

$$\Rightarrow \ln(L) = \ln \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1\times 2\times 3\times\cdots\times(n-1)\times n}{n\times n\times n\times\cdots\times n}}$$

$$\Rightarrow \ln(L) = \lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{\frac{1\times 2\times 3\times\cdots\times(n-1)\times n}{n\times n\times n\times\cdots\times n}}$$

$$\Rightarrow \ln(L) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.\ln \frac{1\times 2\times 3\times\cdots\times(n-1)\times n}{n\times n\times n\times\cdots\times n}$$

$$\Rightarrow \ln(L) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.(\ln(\frac{1}{n}) + \ln(\frac{2}{n}) + \ln(\frac{3}{n}) + \cdots + \ln(\frac{n-2}{n}) + \ln(\frac{n-1}{n}) + \ln(\frac{n}{n}))$$

با فرض این‌که ۱ = b و ۰ = a اختیار شوند، $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$ است. بنابراین:

$$x_n = \frac{1}{n}.(\ln(\frac{1}{n}) + \ln(\frac{2}{n}) + \ln(\frac{3}{n}) + \cdots + \ln(\frac{n-2}{n}) + \ln(\frac{n-1}{n}) + \ln(\frac{n}{n})) \quad (*)$$

از مقایسه‌ی (*) با

$\{x_n\} = \frac{1}{n}(f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + f(\frac{3}{n}) + \cdots + f(\frac{n}{n}))$ داریم:

$$f(\frac{k}{n}) = \ln(\frac{k}{n}) \overset{x=\frac{k}{n}}{\Rightarrow} f(x) = \ln(x)$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1\times 2\times 3\times\cdots\times(n-3)\times(n-2)\times(n-1)\times n)^{\frac{1}{n}}}{n} = \int_0^1 \ln(x)dx = (x\ln(x) - x)\Big|_0^1 = -1$$

درنتیجه:

$$\ln(L) = -1 \Rightarrow L = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

آزمون ۷. حاصل این حد کدام‌یک از گزینه‌های زیر است؟

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}})$$

۱) $\ln(2+\sqrt{2})$ ۲) $\ln(\frac{1}{1+\sqrt{2}})$

۳) $\ln(1+\sqrt{2})$ ۴) $\ln(\frac{1}{2+\sqrt{2}})$

جواب: گزینه‌ی (۳) صحیح است.

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}})$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{\sqrt{n^2(1+\frac{1^2}{n^2})}} + \frac{1}{\sqrt{n^2(1+\frac{2^2}{n^2})}} + \frac{1}{\sqrt{n^2(1+\frac{3^2}{n^2})}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2(1+\frac{n^2}{n^2})}})$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.(\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{1}{n})^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{2}{n})^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{3}{n})^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{n}{n})^2}})$$

با فرض این‌که ۱ = b و ۰ = a اختیار شوند، $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$ است. بنابراین:

$$x_n = \frac{1}{n}.(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1^2}{n^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2^2}{n^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3^2}{n^2}}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{n^2}{n^2}}}) \quad (*)$$

از مقایسه‌ی (*) با رابطه‌ی زیر:

$\{x_n\} = \frac{1}{n}(f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + f(\frac{3}{n}) + \cdots + f(\frac{n}{n}))$ داریم:

$$f(\frac{k}{n}) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k^2}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{k}{n})^2}} \overset{x=\frac{k}{n}}{\Rightarrow} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^1 = \ln(1+\sqrt{2})$$

آزمون ۸. حاصل این حد کدام‌یک از گزینه‌های زیل است؟

$$\lim_{n\to\infty}\left((\frac{\pi}{n})\sin(\frac{\pi}{n}) + (\frac{\pi}{n})\sin(\frac{2\pi}{n}) + (\frac{\pi}{n})\sin(\frac{3\pi}{n}) + \cdots + (\frac{\pi}{n})\sin(\frac{n\pi}{n})\right)$$

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$

۳) ۲   ۴) ۴

جواب: گزینه‌ی (۳) صحیح است.

$$\lim_{n\to\infty}\left((\frac{\pi}{n})\sin(\frac{\pi}{n})+(\frac{\pi}{n})\sin(\frac{2\pi}{n})+(\frac{\pi}{n})\sin(\frac{3\pi}{n})+\cdots+(\frac{\pi}{n})\sin(\frac{n\pi}{n})\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}.\left(\sin(\frac{\pi}{n})+\sin(\frac{2\pi}{n})+\sin(\frac{3\pi}{n})+\cdots+\sin(\frac{n\pi}{n})\right)$$

با فرض این‌که $b=\pi$ و $a=0$ اختیار شوند، $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{\pi}{n}$ است. بنابراین:

$$x_n=\frac{\pi}{n}.\left(\sin(\frac{\pi}{n})+\sin(\frac{2\pi}{n})+\sin(\frac{3\pi}{n})+\cdots+\sin(\frac{n\pi}{n})\right)\quad(*)$$

از مقایسه‌ی (*) با رابطه‌ی زیر:

داریم: $\{x_n\}=\frac{\pi}{n}(f(\frac{\pi}{n})+f(\frac{2\pi}{n})+f(\frac{3\pi}{n})+\cdots+f(\frac{n\pi}{n}))$

$$f(\frac{k\pi}{n})=\sin(\frac{k\pi}{n})\overset{x=\frac{k\pi}{n}}{\Rightarrow}f(x)=\sin(x)$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\left((\frac{\pi}{n})\sin(\frac{\pi}{n})+(\frac{\pi}{n})\sin(\frac{2\pi}{n})+(\frac{\pi}{n})\sin(\frac{3\pi}{n})+\cdots+(\frac{\pi}{n})\sin(\frac{n\pi}{n})\right)=\int_0^{\pi}\sin(x)dx=-\cos(x)\Big|_0^{\pi}=2$$

آزمون ۹. حاصل حد زیر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}(1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}})$$

۱) ۲   ۲) $\frac{1}{4}$

۳) ۴   ۴) $\frac{1}{2}$

جواب: گزینه‌ی (۱) صحیح است.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}(1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}.(\sqrt{\frac{1}{1+0}}+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}.(\sqrt{\frac{1}{1+0}}+\sqrt{\frac{n}{n(1+\frac{3}{n})}}+\sqrt{\frac{n}{n(1+\frac{6}{n})}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n+(1+\frac{3(n-1)}{n})}})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}.(\sqrt{\frac{1}{1+\frac{0}{n}}}+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{3}{n}}}+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{6}{n}}}+\cdots+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{3(n-1)}{n}}})$$

با فرض این‌که $b=3$ و $a=0$ اختیار شوند، $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{3}{n}$ است. بنابراین:

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}.(\sqrt{\frac{1}{1+\frac{0}{n}}}+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{3}{n}}}+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{6}{n}}}+\cdots+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{3(n-1)}{n}}})\quad(*)$$

از مقایسه‌ی (*) با رابطه‌ی زیر:

داریم: $\{x_n\}=\frac{3}{n}(f(\frac{3}{n})+f(\frac{6}{n})+f(\frac{9}{n})+\cdots+f(\frac{3n}{n}))$

$$f(\frac{3k}{n})=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{3k}{n}}}\overset{x=\frac{k}{n}}{\Rightarrow}f(x)=\sqrt{\frac{1}{1+x}}=\frac{1}{1+x}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}(1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}})=\int_0^3\frac{dx}{\sqrt{1+x}}=2\sqrt{1+x}\Big|_0^3=2$$

آزمون ۱۰: حاصل حد زیر کدام‌یک از گزینه‌های ذیل است؟

$$\lim_{n\to\infty}\left((\frac{\pi}{2n})+(\frac{\pi}{2n})\cos(\frac{\pi}{2n})+(\frac{\pi}{2n})\cos(\frac{\pi}{2n})+\cdots+(\frac{\pi}{2n})\cos(\frac{(n-1)\pi}{2n})\right)$$

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$

۳) π ۴) ۱

جواب: گزینه‌ی (۴) صحیح است.

$$\lim_{n\to\infty}\left((\frac{\pi}{2n})+(\frac{\pi}{2n})\cos(\frac{\pi}{2n})+(\frac{\pi}{2n})\cos(\frac{2\pi}{2n})+\cdots+(\frac{\pi}{2n})\cos(\frac{(n-1)\pi}{2n})\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}.(1+\cos(\frac{\pi}{2n})+\cos(\frac{2\pi}{2n})+\cdots+\cos(\frac{(n-1)\pi}{2n}))$$

با فرض این‌که $b=\frac{\pi}{2}$ و $a=0$ اختیار شوند، $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{\pi}{2n}$ است. بنابراین:

$$x_n=\frac{\pi}{2n}.(\cos(\frac{0\pi}{2n})+\sin(\frac{\pi}{2n})+\sin(\frac{2\pi}{2n})+\cdots+\sin(\frac{(n-1)\pi}{2n}))\qquad (*)$$

از مقایسه‌ی (*) با رابطه‌ی زیر:

$$\{x_n\}=\frac{\pi}{2n}(f(\frac{0\pi}{2n})+f(\frac{\pi}{2n})+f(\frac{2\pi}{2n})+\cdots+f(\frac{(n-1)\pi}{2n}))$$

داریم:

$$f(\frac{k\pi}{2n})=\cos(\frac{k\pi}{2n})\overset{x=\frac{k\pi}{2n}}{\Rightarrow}f(x)=\cos(x)$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\left((\frac{\pi}{2n})+(\frac{\pi}{2n})\cos(\frac{\pi}{2n})+(\frac{\pi}{2n})\cos(\frac{2\pi}{2n})+\cdots+(\frac{\pi}{2n})\cos(\frac{(n-1)\pi}{2n})\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)dx=\sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

مسئله‌ی ۱ [قضیه]. به ازای هر $p\in\mathbb{N}$ همواره:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1}$$

برهان:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}.\frac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^p}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}.(\frac{1^p}{n^p}+\frac{2^p}{n^p}+\frac{3^p}{n^p}+\cdots+\frac{n^p}{n^p})$$

با فرض این‌که $b=1$ و $a=0$ اختیار شوند، $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}$ است. بنابراین:

$$\{x_n\}=\frac{1}{n}.(\frac{1^p}{n^p}+\frac{2^p}{n^p}+\frac{3^p}{n^p}+\cdots+\frac{n^p}{n^p})\qquad (*)$$

از مقایسه‌ی (*) با رابطه‌ی زیر:

داریم: $\{x_n\}=\frac{1}{n}(f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+f(\frac{3}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n}))$

$$f(\frac{k}{n})=(\frac{k}{n})^p\overset{x=\frac{k}{n}}{\Rightarrow}f(x)=x^p$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\int_0^1 x^p dx=\frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_0^1=\frac{1}{p+1}$$

مسئله‌ی ۲. ثابت کنید: $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{n+kx}=\ln(1+x)$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{n+kx}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{n(1+\frac{kx}{n})}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{kx}{n}}$$

بنا بر $\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(a+\frac{k(b-a)}{n})=\int_a^b f(t)dt$ و با فرض این‌که $b=x$ و $a=0$ اختیار شده‌اند، $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{x}{n}$ است. بنابراین:

$$x_n=\frac{x}{n}.(\frac{1}{1+\frac{x}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2x}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3x}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{nx}{n}})\qquad (*)$$

از مقایسه‌ی (*) با رابطه‌ی زیر:

داریم: $\{x_n\}=\frac{x}{n}.(f(\frac{x}{n})+f(\frac{2x}{n})+f(\frac{3x}{n})+\cdots+f(\frac{nx}{n}))$

$$f(\frac{kx}{n})=\frac{1}{1+\frac{kx}{n}}\overset{t=\frac{kx}{n}}{\Rightarrow}f(t)=\frac{1}{1+t}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{kx}{n})=\int_0^x f(t)dt\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{kx}{n}}$$

$$=\int_0^x\frac{dt}{1+t}=\ln(1+t)\Big|_0^x=\ln(1+x)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{n+kx}$$

$$=\ln(1+x)$$

مسئله‌ی ۳ [قضیه]. به ازای هر $p \in Z^{+} - \{1\}$ (pهای صحیح مثبت بزرگ‌تر از یک یا pهای صحیح مثبت بزرگ‌تر مساوی با دو)، همواره:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{pn}\right)=\ln\left(\frac{p}{p-1}\right)$$

برهان:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{pn}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{(p-1)+n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n(1+\frac{1}{n})}+\frac{1}{n(1+\frac{2}{n})}+\frac{1}{n(1+\frac{3}{n})}+\cdots+\frac{1}{n((p-1)+\frac{n}{n})}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}.\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{(p-1)+\frac{n}{n}}\right)$$

با فرض این‌که $b=1$ و $a=0$ اختیار شوند، $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}$ است. بنابراین:

$$x_n=\frac{1}{n}.\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{(p-1)+\frac{n}{n}}\right)\quad(*)$$

از مقایسه‌ی (*) با رابطه‌ی زیر:

$\{x_n\}=\frac{1}{n}\left(f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+f(\frac{3}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})\right)$ داریم:

$$f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{(p-1)+\frac{k}{n}}\xRightarrow{x=\frac{k}{n}}fx=\frac{1}{(p-1)+x}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{pn}\right)$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{(p-1)+x}=\ln(p-1+x)\Big|_0^1=\ln\left(\frac{p}{p-1}\right)$$

مسئله‌ی ۴. ثابت کنید:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2x^2}=\frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{nx}{n^2+k^2x^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{nx}{n^2(1+\frac{k^2x^2}{n^2})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k^2x^2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{kx}{n})^2}$$

بنا بر $\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(a+\frac{k(b-a)}{n})=\int_a^b f(t)dt$ و با فرض این‌که $b=x$ و $a=0$ اختیار شده‌اند، $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{x}{n}$ است. بنابراین:

$$x_n=\frac{x}{n}.\left(\frac{1}{1+(\frac{x}{n})^2}+\frac{1}{1+(\frac{2x}{n})^2}+\frac{1}{1+(\frac{3x}{n})^2}+\cdots+\frac{1}{1+(\frac{nx}{n})^2}\right)\quad(*)$$

از مقایسه‌ی (*) با رابطه‌ی زیر:

$\{x_n\}=\frac{x}{n}\left(f(\frac{x}{n})+f(\frac{2x}{n})+f(\frac{3x}{n})+\cdots+f(\frac{nx}{n})\right)$ داریم:

$$f\left(\frac{kx}{n}\right)=\frac{1}{1+\frac{k^2x^2}{n^2}}=\frac{1}{1+(\frac{kx}{n})^2}\xRightarrow{t=\frac{kx}{n}}f(t)=\frac{1}{1+t^2}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{kx}{n}\right)=\int_0^x f(t)dt\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{kx}{n})^2}$$

$$=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{Arctan}(t)\Big|_0^x=\operatorname{Arctan}(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+(\frac{kx}{n})^{2}}=\frac{\operatorname{Arc\,tan}(x)}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^{2}+k^{2}x^{2}}=\frac{\operatorname{Arc\,tan}(x)}{x}$$

تمرین ۱. حاصل هر یک از حدهای زیر را به‌دست آورید:

الف) $\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

ب) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^{2}}+\sqrt[n]{e^{3}}+\cdots+\sqrt[n]{e^{n}}}{n}$

پ) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}+\cdots+\sqrt{2n-1}}{n^{\frac{3}{2}}}$

ت) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n+1)^{2}}+\frac{n}{(n+2)^{2}}+\frac{n}{(n+3)^{2}}+\cdots+\frac{n}{(n+n)^{2}}\right)$

تمرین ۲. ثابت کنید: $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin(\frac{kx}{n})=\frac{1-\cos(x)}{x}$

زیرنویس

1. Limit
2. Algebric
3. Trigonometric
4. L'Hopital Rule
5. Induction
6. Continuous
7. Sequence
8. Definite Integral
9. Partial Sum
10. Integration Methods

منابع

۱. تلگینی، محمود؛ خرده‌پژوه، فروزان؛ رجالی، علی؛ و قیاسیان، احمد. حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره‌ی پیش‌دانشگاهی رشته‌ی علوم ریاضی. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. ۱۳۸۶.

۲. توماس، جورج و فینی، راس. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه‌ی تحلیلی. ترجمه‌ی مهدی بهزاد، سیامک کاظمی و علی کافی. مرکز نشر دانشگاهی. ۱۳۷۰.

۳. اشپیگل، م. حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته. ترجمه‌ی خلیل پاریاب. حمید تولایی و بیژن شمس. انتشارات پاریاب. ۱۳۸۱.

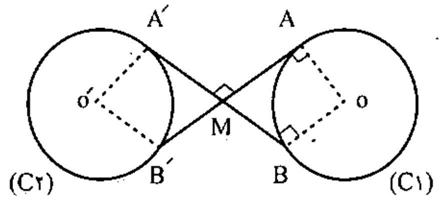
4. Gillett, Philip. "Calculus and Analytic Geometry". D. C. Heath (2nd Edition). 1984.

5. Varerg, D. W. and Purcell, E. j. "Calculus". Prentic Hall (7th Edition). 1997.

سید ابراهیم حسینی

طول تسمه

تسمه‌ای به صورت ضربدری دور دو چرخ مطابق شکل می‌پیچد، اگر قطر هر چرخ ۱۶ سانتی‌متر باشد و تسمه در عبور از کنار خود در نقطه‌ی M زاویه‌ی قائمه بسازد، طول تسمه چه‌قدر است؟



حل: از مرکز دایره‌ی (C_1) یعنی نقطه‌ی O به A و B پاره‌خط‌هایی را رسم می‌کنیم. چون شعاع در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است بنابراین $\angle A_1 = 90^\circ$ و $\angle B_1 = 90^\circ$ و چون $OA = OB = 8$ (شعاع دایره) درنتیجه چهارضلعی MAOB مربع است، پس $MA = MB = 8$. به همین ترتیب چهارضلعی $MA'O'B'$ نیز مربع می‌باشد، بنابراین $A'M = MB' = 8$، درنتیجه داریم:

$$A'B + AB' = 32 \qquad (1)$$

چون چهارضلعی MAOB مربع است، پس $\angle O = 90^\circ$ و زاویه‌ی مرکزی O برابر با کمان مقابلش است، درنتیجه $AB = 90^\circ$، پس قسمتی از دایره‌ی (C_1) که تسمه دور آن قرار دارد، برابر با $\frac{3}{4}$ محیط این دایره می‌باشد؛ یعنی:

$$\frac{3}{4}\times 2\pi r = \frac{3}{4}\times 2\pi \times 8 = 12\pi$$

به همین ترتیب قسمتی از دایره‌ی (C_2) که تسمه دور آن قرار دارد برابر با 12π است، پس طول تسمه با توجه به رابطه‌ی (۱) برابر است با:

$$32 + 12\pi + 12\pi = 32 + 24\pi$$

اتحاد و معادله (۱۴)

مسئله‌های گوناگون درباره‌ی معادله

● پرویز شهریاری

اشاره:

در شماره‌های قبل درباره ی اتحاد و معادله، تجزیه یک چندجمله‌ای دلخواه بحث شد، اینک در پی آن مسئله‌های گوناگونی را درباره‌ی معادله‌ها می‌آوریم:

۱) $(m^2-n^2)\sin x-2m\cos x=(m^2+n^2)\cos\frac{x}{3}$ با شرط $m^2+n^2\neq 0$.

حل: شرط $m^2+n^2\neq 0$ به معنای آن است که m و n، هیچ‌کدام برابر صفر نیستند. دو طرف معادله را بر m^2+n^2 بخش می‌کنیم و فرض می‌کنیم که $\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}=\sin\alpha$ به سادگی روشن می‌شود که $\frac{2m}{m^2+n^2}=\cos\alpha$ است. معادله به این صورت درمی‌آید: $\sin x\sin\alpha-\cos x\cos\alpha=\cos\frac{x}{3}$

که چنین می‌شود: $\cos(x+\alpha)=\cos(\pi-\frac{x}{3})$

از آن‌جا، جواب‌های کلی x به دست می‌آید:

$$x=\frac{3}{2}k\pi+(\frac{3\pi}{4}-\frac{3\alpha}{4})$$

$$x=3k\pi+(\frac{3\pi}{2}-\frac{3\alpha}{2})$$

α، کمانی است بین ۰ و $\frac{\pi}{2}$ که سینوس آن برابر $\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$ است.

۲) $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$.

حل: دو طرف معادله را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$3x-2+3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}(\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1})=1$$

باید توجه داشته باشیم که ضمن عبور از معادله‌ی اصلی به این معادله، ممکن است جواب اضافی وارد معادله شود که باید آخر کار آزمایش شود. به جای مقدار پرانتز در معادله‌ای که به دست آوردیم، بنا به فرض مسئله می‌توان مقدار آن، یعنی عدد ۱، را قرار داد:

$$\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}=1-x \qquad (1)$$

اگر یک‌بار دیگر دو طرف را به توان ۳ برسانیم، به‌دست می‌آید:

$$(2x-1)(x-1)=(1-x)^3 \qquad (2)$$

معادله‌ی (۲) به صورت $x^2(1-x)=0$ در می‌آید که جواب‌های آن، یعنی ۰ و ۱، در معادله‌ی (۲) و هم‌ارز آن، معادله‌ی (۱)، صدق می‌کند؛ در حالی که معادله‌ی اصلی تنها جواب $x=1$ را می‌پذیرد.

۳) با شرط $ab^2+1=0$ و $abc\neq 0$، این معادله را حل کنید:

$$\frac{x}{a}+\frac{x^2}{b}+\frac{x^3}{c}=bc$$

حل: در معادله به جای a، مقدارش $-\frac{1}{b^2}$ را قرار می‌دهیم. به دست می‌آید:

$$-b^2x+\frac{x^2}{b}+\frac{x^3}{c}=bc$$

مخرج‌ها را از بین می‌بریم (فرض بر این است که a، b و c برابر صفر نیستند):

$$bx^3+cx^2-b^3cx-b^3c^2=0$$

که با اندکی توجه، به این صورت تجزیه می‌شود:

$$(x^2 - b^2c)(bx + c) = 0$$

پاسخ. $x_1 = -\frac{c}{b}$ ، $x_2 = b\sqrt{c}$ ، $x_3 = -b\sqrt{c}$.

۴ . معادله‌ی $\cos f(x)\left(1 - \frac{\sin^2 f(x)}{m}\right) = 1$ را برای $m > 0$ حل کنید.

حل: معادله به ترتیب به این صورت درمی‌آید:

$$\cos f(x)(m - \sin^2 f(x)) = m;$$

$$m(1 - \cos f(x)) + \cos f(x)\sin^2 f(x) = 0;$$

$$2m\sin^2\frac{f(x)}{2} + 4\sin^2\frac{f(x)}{2}\cos^2\frac{f(x)}{2}\cos f(x) = 0;$$

$$2\sin^2\frac{f(x)}{2}\left[m + (1 + \cos f(x))\cos f(x)\right] = 0;$$

$$2\sin^2\frac{f(x)}{2}\left[\cos^2 f(x) + \cos f(x) + m\right] = 0;$$

$$1)\ \sin\frac{f(x)}{2} = 0 \Rightarrow f(x) - 2k\pi = 0$$

که یک معادله‌ی جبری است و جواب‌های آن، به شرط درست بودن عدد k، جواب معادله‌ی مفروض است.

$$2)\ \cos^2 f(x) + \cos f(x) + m = 0$$

$$\Rightarrow \cos f(x) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4m}}{2}$$

$$f(x) = 2k\pi \pm \arccos\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4m}}{2} \qquad (1)$$

این معادله وقتی معنا دارد که داشته باشیم:

$$1 - 4m \ge 0\ ,\ -1 \le \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4m}}{2} \le 1$$

از نامعادله‌ی اول به دست می‌آید: $m \le \frac{1}{4}$ و با توجه به مثبت بودن m، نامعادله‌های دوم همیشه برقرار است، زیرا داریم:

$$a)\ -1 \le \frac{-1 - \sqrt{1 - 4m}}{2} \le 1\ ;\ -2 \le -1 - \sqrt{1 - 4m} \le 2;$$

$$-1 \le -\sqrt{1 - 4m} \le 3; \sqrt{1 - 4m} \le 1\ ;\ 1 - 4m \le 1\ ;\ m \ge 0$$

$$b)\ -1 \le \frac{-1 + \sqrt{1 - 4m}}{2} \le 1\ ;\ -2 \le \sqrt{1 - 4m} \le 3;$$

$$\sqrt{1 - 4m} \le 3\ ;\ 1 - 4m \le 9\ ;\ 4m \ge -8\ ;\ m \ge -2$$

بنابراین، اگر $0 < m \le \frac{1}{4}$ باشد، معادله‌ی (۱) وجود دارد و جواب‌های آن جواب‌های معادله‌ی مفروض هستند (k را باید عددی درست گرفت).

۵ . عددی سه رقمی را پیدا کنید که در این رابطه صدق کند (مبنای عدد را ده بگیرید): $\overline{abc} = abc(a + b + c)$

حل: رابطه‌ی فرض را می‌توان این طور نوشت:

$$100a + 10b + c = abc(a + b + c)$$

که از آن به‌دست می‌آید:

$$9(11a + b) = (a + b + c)(abc - 1) \qquad (1)$$

که در آن، a، b و c رقم‌هایی هستند بین ۰ و ۱۰ . اگر هر کدام از عددهای $a + b + c$ و $abc - 1$ مضربی از ۳ باشند، حاصل‌ضرب آن‌ها بر ۹ بخش‌پذیر می‌شود، ولی اگر همه‌ی حالت‌های ممکن را آزمایش کنیم، به این نتیجه می‌رسیم که هر سه رقم a، b و c باید در تقسیم بر ۳، باقی مانده‌ای برابر ۱ داشته باشند که در این صورت $11a + b$ هم بر ۳ بخش‌پذیر می‌شود و در نتیجه، سمت چپ رابطه‌ی (۱) مضربی از ۲۷ خواهد بود. بنابراین، باید یکی از دو عدد $a + b + c$ یا $abc - 1$ بر ۹ بخش‌پذیر باشند.

اگر $a + b + c > 17$ ، آن‌گاه:

$$abc > 72\ ,\ abc(a + b + c) > 1000$$

یعنی عدد چهاررقمی می‌شود. بنابراین، اگر $a + b + c$ بر ۹ بخش‌پذیر باشد، باید داشته باشیم:

$$a + b + c = 9\ ,\ 11a + b = abc - 1$$

در این حالت، بنا به رابطه‌ی بین واسطه‌ی حسابی با واسطه‌ی هندسی، باید داشته باشیم:

$$\sqrt[3]{abc} \le \frac{a + b + c}{3} = 3\ ,\ abc \le 27$$

و a برابر است با ۲ یا ۱ . در غیر این صورت:

$$abc = 11a + b + 1 > 27$$

اگر $a = 2$ ، آن‌وقت به این دستگاه معادله‌ها می‌رسیم:

$$\begin{cases} b + c = 7 \\ 2bc = b + 23 \end{cases}$$

که جواب درست ندارد. بنابراین $a = 1$. با حل دستگاهی که به این ترتیب به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} b + c = 8 \\ 11 + b = bc - 1 \end{cases}$$

دو جواب برای مسئله حاصل می‌شود: ۱۳۵ و ۱۴۴ .

به حالتی می‌پردازیم که در آن $abc - 1$ مضربی از ۹ باشد. اگر $abc - 1 = 9$ ، آن‌وقت از رابطه‌ی (۱) به‌دست می‌آید: $c = 10$ که ممکن نیست. حالت‌هایی هم که $abc - 1$ برابر ۱۸ ، ۳۶ ، ۴۵ ، ۵۴ ، ۷۲ ، ۸۱ و ۹۰ باشد، ممکن نیست، زیرا abc شامل عامل اولی بزرگ‌تر از ۱۰ می‌شود.

اگر $abc - ۱ = ۲۷$ ، آن‌وقت به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} ۸a = ۲b + ۳c \\ abc = ۲۸ \end{cases}$$

که جواب مطلوبی برای ما ندارد.

اگر $abc - ۱ = ۶۳$ ، آن‌وقت به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} ۴a = ۶b + ۷c \\ abc = ۶۴ \end{cases}$$

که باز هم جوابی برای مسئله‌ی ما ندارد. سرانجام باید فرض کنیم: $(l > ۱۰)abc - ۱ - ۱ = ۹l$ که از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$۱۱a + b < l(a + b + c)$$

به این‌ترتیب، مسئله همان دو جواب را دارد: ۱۳۵ و ۱۴۴.

۶. x، y و z را در این دستگاه حذف کنید (رابطه‌ای بین a، b، c و d پیدا کنید):

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a \\ \cos x + \cos y = b \\ \sin z - \sin(x + y + z) = c \\ \cos z + \cos(x + y + z) = d \end{cases}$$

حل: اگر $ad + bc$ را محاسبه کنیم، حاصل برابر صفر می‌شود:

$$ad + bc = ۴\sin\frac{x + y}{۲}\cos\frac{x - y}{۲}$$

$$\times\cos\frac{x + y + ۲z}{۲}\cos\frac{x + y}{۲} - ۴\cos\frac{x + y}{۲}$$

$$\times\cos\frac{x - y}{۲}\cos\frac{x + y + ۲z}{۲}\sin\frac{x + y}{۲} = ۰$$

۷. این معادله را حل کنید (معادله‌ی دکارت):

$$x^۴ - ۴x^۳ - ۱۹x^۲ + ۱۰۶x - ۱۲۰ = ۰$$

حل: عبارت سمت چپ برابری را به ضرب تبدیل می‌کنیم:

$$x^۴ - ۴x^۳ - ۱۹x^۲ + ۷۶x + ۳۰x - ۱۲۰ = ۰;$$

$$x^۳(x - ۴) - ۱۹x(x - ۴) + ۳۰(x - ۴) = ۰;$$

$$(x - ۴)(x^۳ - ۱۹x + ۳۰) = ۰;$$

$$(x - ۴)(x^۳ - ۳x^۲ + ۳x^۲ - ۹x - ۱۰x + ۳۰) = ۰;$$

$$(x - ۴)(x - ۳)(x^۲ + ۳x - ۱۰) = ۰$$

پاسخ: $x_۱ = ۴$ ، $x_۲ = ۳$ ، $x_۳ = ۲$ ، $x_۴ = -۵$.

۸. این معادله را حل کنید:

$$\sqrt[۵]{\frac{a + x}{a}} + \sqrt[۵]{\frac{a + x}{b}} = \sqrt[۵]{\frac{x}{ab}}$$

حل: معادله‌ی مفروض به این صورت در می‌آید:

$$\sqrt[۵]{a + x}(\sqrt[۵]{b} + \sqrt[۵]{a}) = \sqrt[۵]{x}$$

دو طرف را به توان ۵ می‌رسانیم:

$$(a + x)(\sqrt[۵]{a} + \sqrt[۵]{b})^۵ = x$$

پاسخ: $x = \dfrac{a(\sqrt[۵]{a} + \sqrt[۵]{b})^۵}{۱ - (\sqrt[۵]{a} + \sqrt[۵]{b})^۵}$.

۹. این دستگاه سه معادله‌ی سه مجهولی را حل کنید:

$$\begin{cases} x + y + z = ۶ \\ x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱۸ \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = ۴ \end{cases}$$

حل: معادله‌ی دوم دستگاه را از مجذور معادله‌ی اول کم می‌کنیم. به‌دست می‌آید:

$$xy + xz + yz = ۹ \qquad (۱)$$

اکنون معادله‌ی اول را از مجذور معادله‌ی سوم کم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\sqrt{xy} + \sqrt{xz} + \sqrt{yz} = ۵ \qquad (۲)$$

حال اگر معادله‌ی (۱) را از مجذور معادله‌ی (۲) کم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})\sqrt{xyz} = ۸$$

که با توجه به معادله‌ی سوم دستگاه، چنین می‌شود:

$$\sqrt{xyz} = ۲ \Rightarrow xyz = ۴$$

اکنون به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} x + y + z = ۶ \\ xy + xz + yz = ۹ \\ xyz = ۴ \end{cases}$$

یعنی x، y و z ریشه‌های این معادله‌ی درجه سوم هستند:

$$t^۳ - ۶t^۲ + ۹t - ۴ = ۰$$

با توجه به مجموع ضریب‌های این معادله که برابر صفر شده است، یکی از ریشه‌های آن برابر است با ۱ و عبارت سمت چپ برابری بر $t - ۱$ بخش‌پذیر است. خارج قسمت درجه‌ی دوم می‌شود و ریشه‌های ۱ و ۴ دارد. بنابراین، جواب‌های معادله‌ی مفروض چنین هستند:

$$\begin{vmatrix} x_۱ = ۱ \\ y_۱ = ۱ \\ z_۱ = ۴ \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_۲ = ۱ \\ y_۲ = ۴ \\ z_۲ = ۱ \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_۳ = ۴ \\ y_۳ = ۱ \\ z_۳ = ۱ \end{vmatrix}$$

۱۰. معادله‌ی $\sin ax \sin bx = \sin mx \sin nx$ را حل کنید،

به شرط این‌که a، b، m و n جمله‌های پشت سر هم یک تصاعد حسابی صعودی باشند.

حل: قدرنسبت تصاعد حسابی را $d > 0$ فرض می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} b = a + d, \\ m = a + 2d, \\ n = a + 3d \end{cases}$$

اگر به جای b، m و n مقدارهایشان را قرار دهیم و از این رابطه‌ها استفاده کنیم:

$$\sin ax \sin(a+d)x = \frac{1}{2}\left[\cos dx - \cos(2a+d)x\right]$$

$$\sin(a+2d)x \sin(a+3d)x = \frac{1}{2}\left[\cos dx - \cos(2a+5d)x\right]$$

معادله‌ی مفروض به این صورت درمی‌آید:

$$\cos(2a+d)x - \cos(2a+5d)x = 0$$

که با تبدیل به مجموع، چنین می‌شود:

$$\sin(2a+3d)x . \sin 2dx = 0$$

و از آن‌جا

$$\sin(2a+3d)x = 0 \Rightarrow (2a+3d)x = k\pi$$

$$\sin 2dx = 0 \Rightarrow 2dx = k\pi$$

پاسخ:

$x = \frac{k}{2d}\pi, x = \frac{k}{b+m}\pi$ (زیرا $2a + 3d = b + m$).

۱۱. این معادله را حل کنید:

$$\tan(\pi \tan x) - \cot(\pi \cot x) = 0$$

حل: معادله را می‌توان این‌طور نوشت:

$$\tan(\pi \tan x) = \tan(\frac{\pi}{2} - \pi \cot x) \qquad (1)$$

می‌دانیم شرط لازم و کافی برای این‌که داشته باشیم: $\cot x = \cot y$ یا $\tan x = \tan y$ این است که $x - y = k\pi$ باشد. بنابراین از معادله‌ی (۱) به دست می‌آید:

$$\pi \tan x - \frac{\pi}{2} + \pi \cot x = k\pi \qquad (2)$$

یعنی $\tan^2 x(2k+1)\tan x + 2 = 0$. از آن‌جا:

$$\tan x = \frac{2k+1 \pm \sqrt{(2k+1)^2 - 16}}{4} \qquad (3)$$

به سادگی دیده می‌شود که معادله‌های (۱) و (۲) هم‌ارز نیستند، زیرا برای نمونه، اگر معادله‌ی (۲) برای مقدارهایی از

$$\tan x = \frac{1}{2}(2k+1) \qquad (4)$$

صادق باشد (k عددی است درست)، این مقدارها در معادله‌ی (۱) صدق نمی‌کنند، زیرا برای این مقدارها، $\tan(\pi \tan x)$ مفهوم خود را از دست می‌دهد. بنابراین، پاسخ‌هایی از معادله‌ی (۲) که به صورت (۴) باشد، باید از این پاسخ‌ها کنار بروند. بنابه رابطه‌ی (۳)، وقتی tanx وجود دارد که نابرابری $(2k+1)^2 - 16 \geq 0$ برقرار باشد. بنابراین، باید مقدارهایی از k را که برابر $0, \pm 1, \pm 2$ هستند، از بین پاسخ‌ها کنار زد. به جز این، اگر tanx بخواهد به صورت (۴) باشد، باید پیش از همه، مقدار زیر رادیکال در رابطه‌ی (۳) مربع کامل باشد:

$$2k + 1 = y; (2k+1)^2 - 16 = z^2$$

(z، عددی است درست)، و به دست می‌آید:

$$y^2 - 16 = z^2 \Rightarrow (y-z)(y+z) = 16 \qquad (5)$$

برای حل این معادله که معادله‌ای سیال و شامل دو مجهول

با مقدارهای درست است، فرض می‌کنیم:

$$y-z=u,\ y+z=v \qquad (*)$$

که معادله‌ی (۵) را به این صورت درمی‌آورد:

$$u.v=16 \qquad (6)$$

وقتی y و z عددهایی درست هستند، u و v هم عددهایی درست خواهند بود و برای آن‌ها، این پاسخ‌ها به دست می‌آید:

$$\begin{vmatrix} u_{1,2}=\pm 2 \\ v_{1,2}=\pm 8 \end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix} u_{3,4}=\pm 8 \\ v_{3,4}=\pm 2 \end{vmatrix}$$

با حل دستگاه (*) به دست می‌آید: $y=\frac{u+v}{2}$

که با توجه به این که عدد $y=2k+1$، عددی است فرد، داریم: $y=\pm 5$

برای $y=5$ به دست می‌آید: $k=2$ و برای $y=-5$ داریم: $k=-3$.

از رابطه‌ی (۳) برای $k=2$ به دست می‌آید:

$$\tan x=2,\ \tan x=\frac{1}{2}$$

و برای $k=-2$:

$$\tan x=-2,\ \tan x=-\frac{1}{2}$$

پاسخ‌های $\tan x=\pm\frac{1}{2}$ در معادله‌ی مفروض صدق نمی‌کند، ولی پاسخ‌های $\tan x=\pm 2$ در آن صدق می‌کند.

رابطه‌های (۳) و (۷) پاسخ‌های مسأله را می‌دهند:

$$x=m\pi+\operatorname{Arc}\tan\frac{2k+1\pm\sqrt{(2k+1)^2-16}}{4}$$

$$x=n\pi\pm\operatorname{Arc}\tan 2$$

که در آن‌ها m و n عددهایی درست و k برابر $\pm 3, \pm 4, \pm 5, \ldots$ است.

۱۲. این دستگاه را به ازای $n<1$ حل کنید.

$$\begin{cases} \tan\frac{x}{2}+\tan\frac{y}{2}=m \\ 1+n\cos y=\frac{1-n^2}{1-n\cos x} \end{cases}$$

حل: معادله‌ی دوم دستگاه را تبدیل می‌کنیم:

$$n\cos y=\frac{-1+n\cos x+1-n^2}{1-n\cos x}=\frac{n\cos x-n^2}{1-n\cos x}$$

از آن‌جا:

$$\frac{\cos y}{1}=\frac{\cos x-n}{1-n\cos x}$$

در دو طرف، در صورت، «تفضیل نسبت» و در مخرج، «ترکیب نسبت» می‌کنیم:

$$\frac{1-\cos y}{1+\cos y}=\frac{(1+n)-(1+n)\cos x}{(1-n)+(1-n)\cos x}=\frac{1+n}{1-n}\cdot\frac{1-\cos x}{1+\cos x};$$

که به این صورت درمی‌آید:

$$\tan^2\frac{y}{2}=\frac{1+n}{1-n}\tan^2\frac{x}{2}$$

و درنتیجه:

$$\tan\frac{y}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+m}{1-m}}\tan\frac{x}{2}$$

و دیگر به یاری معادله‌ی اول دستگاه، $\tan\frac{x}{2}$ و $\tan\frac{y}{2}$ و درنتیجه x و y به دست می‌آید.

پاسخ: با شرط $n<1$:

$$\begin{vmatrix} x=2\left[k\pi+\operatorname{Arc}\tan\frac{m}{2n}\left(n-1\pm\sqrt{1-n^2}\right)\right] \\ y=2\left[k\pi+\operatorname{Arc}\tan\frac{m}{2n}\left(n+1\mp\sqrt{1-n^2}\right)\right] \end{vmatrix}$$

واژه‌شناسی ریاضیات

پرویز شهریاری

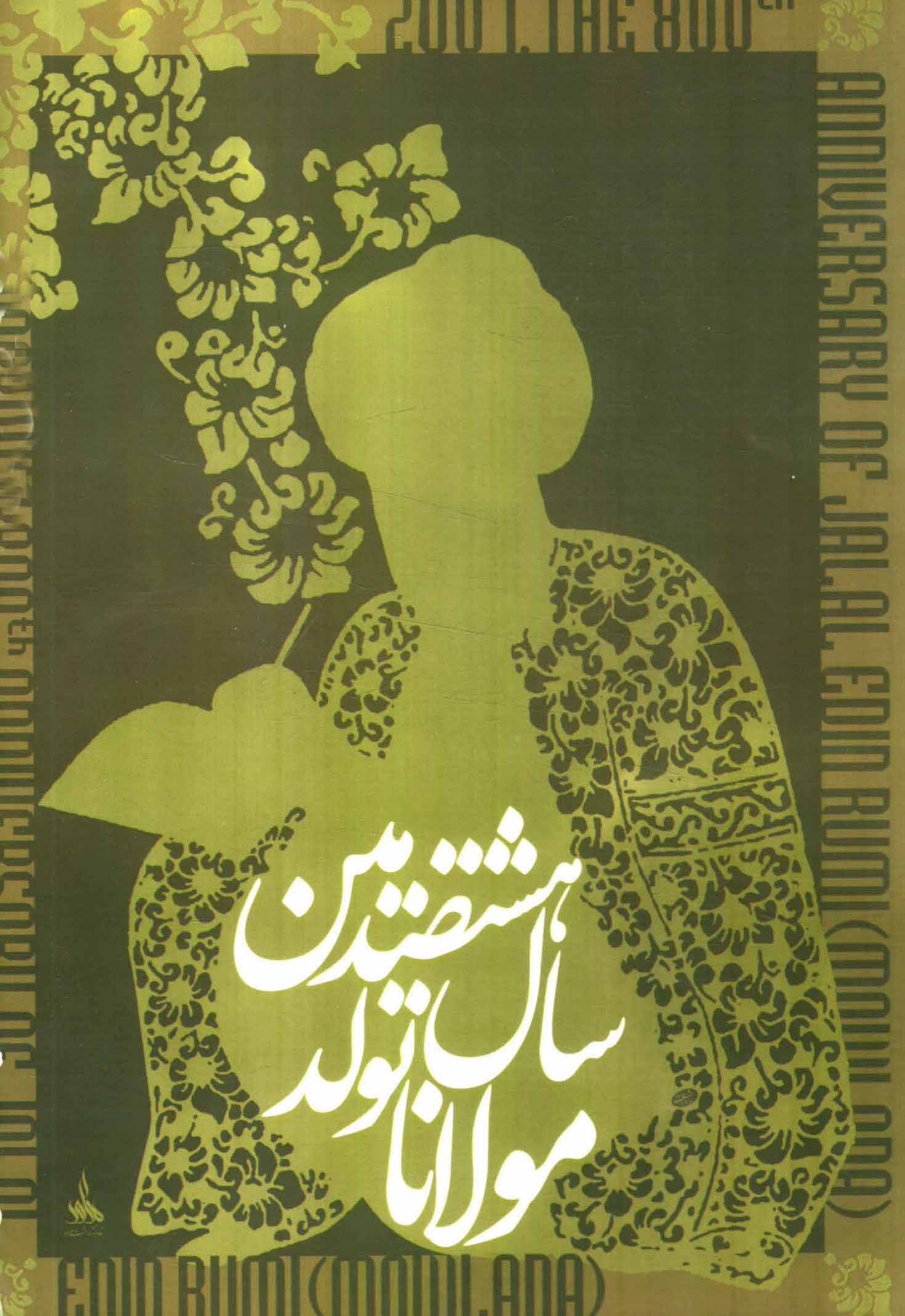
واژه‌ی ریاضیات، به‌جای واژه‌ی یونانی ماته‌ماتیکه (mathēmatikē) گذاشته شده است که خود از ماته‌ما (mathēma) به معنای «دانش» و «دانایی» آمده است.

غالباً واژه‌ی «ریاضیات» را برگرفته از واژه‌ی «ریاضت» دانسته‌اند؛ چرا که «ریاضت» تنها به معنای «پرهیزکاری بدنی» نیست و «در خود فرو رفتن»، «فهمیدن» و «رسیدن به رازها» را هم می‌رساند.

دیدگاه‌های دیگری هم وجود دارند. بسیاری از زبان‌شناسان معتقدند، واژه‌ی «ریاضی» از واژه‌ی فارسی «راز» به معنای «اندازه گرفتن» آمده است. واژه‌ی «راز» هنوز در واژه‌های «تراز» با حفظ معنای خود باقی مانده است. در واژه‌ی «ترازو»، «ترا» به معنای «از این سو و آن سو» و «راز» به معنای «اندازه‌گیری» است. پسوند «او» در بسیاری جاها در زبان فارسی، به معنای «بسیار» به کار رفته است. به این ترتیب، «ترازو»، یعنی «اندازه‌گیری و مقایسه‌ی بسیار». در ضمن، واژه‌ی «مر» در زبان فارسی (که در واژه‌های «شمر» و «شمردن» وجود دارد)، به معنای «شمردن» و «محاسبه کردن» است. بدین ترتیب، اینان به‌جای واژه‌ی «ریاضیات»، واژه‌ی «راز و مر» را پیشنهاد می‌کنند که درست به معنای «اندازه گرفتن و شمردن» است و اگر ریاضیات را «دانش رابطه‌های کمیتی و شکل‌های فضایی» بدانیم، واژه‌ی «راز و مر» می‌تواند انتخابی درست باشد.

اگر واژه‌ی «ریاضیات» را (که نه در ترکیب زیباست و نه به روشنی معرف یکی از دانش‌هاست)، برگرفته از واژه‌ی «ریاضت» فرض کنیم، می‌تواند اثری منفی در علاقه‌مندان به این دانش بگذارد؛ زیرا همگان «ریاضت» را به معنای «سختی کشیدن»، «در انزوا فرو رفتن» و «فشار بیش از اندازه به خود» می‌دانند که با ماهیت دانش ریاضی سازگاری ندارد. این تعبیر، شبیه تعبیری است که برخی برای واژه‌ی «جبر» می‌آورند و آن را به معنای «زور» و «فشار» می‌دانند، در حالی که خوارزمی، واژه‌ی جبر را به معنای «جبران کردن» گرفته است؛ چرا که به تعبیر خوارزمی و به زبان امروزی، می‌توان عدد منفی را از یک طرف معادله، به طرف دیگر برابری برد تا مقداری مثبت شود (یعنی جبران شود). در مصراع که «جبر» خاطر مسکین بلا بگرداند، واژه‌ی «جبر» درست به همین معنای «جبران کردن» به کار رفته است.

جدا از این بحث به‌نظر می‌رسد، اگر قرار باشد واژه‌ای فارسی به‌جای واژه‌ی «ریاضیات» انتخاب شود، بهترین پیشنهاد، همان واژه‌ی «راز و مر» باشد که هم زیباست و هم از نظر معنا، با واژه‌ی «ریاضیات» سازگار است.


2007, THE 800th
ANNIVERSARY OF JALAL EDIN RUMI (MOWLANA)
EDIN RUMI (MOWLANA)
هشتصدمین
سال تولد
مولانا