وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

۵۸

رشد برهان

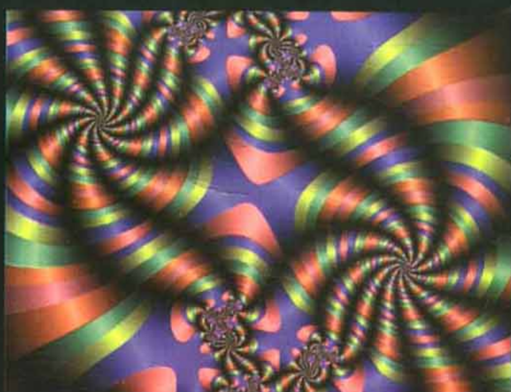
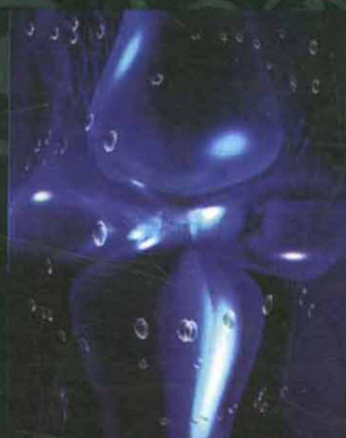
مجله ی ریاضی

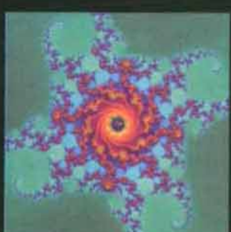
فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

دوره ی متوسطه

• دوره‌ی هفدهم • شماره‌ی ۴ • تابستان ۱۳۸۷ • بها: ۳۵۰۰ ریال

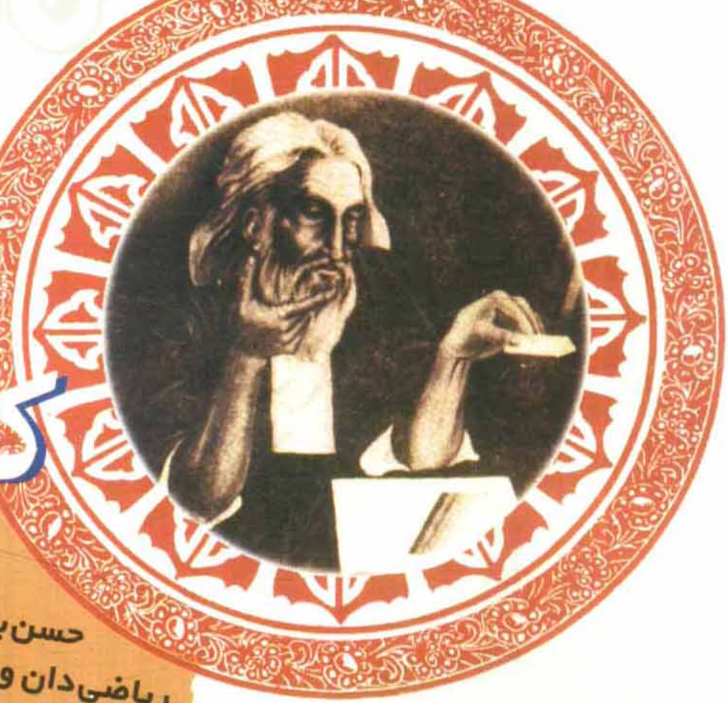







- انتخاب یک دسته گل
- نگارش ریاضیات در انجمن متفکران
- محیط و مساحت برف دانه ی کخ
- گراف تورنمنت



کمال‌الدین فارسی

حسن بن علی بن حسن کمال‌الدین فارسی
ریاضی‌دان و فیزیک‌دان ایرانی (در حدود ۶۶۵-۷۱۸)

از علمای بزرگ ریاضی و فیزیک ایران و دنیای اسلام، در نیمه‌ی دوم سده‌ی هفتم و اوایل سده‌ی هشتم، در فارس به دنیا آمد. در جوانی برای کسب علم و فضیلت به مسافرت پرداخت تا از محضر استادان بزرگ مستفید شود. با آن‌که مدت عمرش زیاد نبود، آثار بدیعی در ریاضی و نورشناسی (اپتیک) پدید آورد. در تألیفاتش از استادان خود با نهایت تجلیل و احترام نام برده و مراتب فضل و کمالش چه در زمان حیات و چه پس از آن، مورد تأیید و تصدیق دانشمندان بوده است.

استادش **قطب‌الدین شیرازی** او را «الولد الاعز الاکرم و الامام الافضل الاعلم قدوة الاذکیاء ملک العلماء کمال الملّه والدین» نامیده و **عمادالدین کاشانی** و **غیاث‌الدین جمشید کاشانی** در کتاب‌های «ایضاح المقاصد» و «مفتاح الحساب»، از او با عنوان‌های امام و فاضل و محقق یاد کرده‌اند.

کمال‌الدین فارسی در نوزدهم ماه ذیقعده‌ی سال ۷۱۸ در شهر تبریز درگذشت.

نام بعضی از استادانش

کمال‌الدین فارسی چنان‌که قبلاً هم گفته شد، در ایام جوانی برای کسب علم و فضیلت، به شهرهای گوناگون سفر می‌کرده تا از محضر استادان بزرگ مستفید گردد. خود در این باره نوشته است:

«و چون خدای تعالی مرا در جوانی، با همه‌ی کوتاه‌دستی و گمراهی و سستی اسباب کوشش و نیرومندی موانع، توفیق ارزانی داشت که همت بر طلب علم مصروف دارم، به سرزمین‌های گوناگون رخت می‌کشیدم و در پی یافتن بزرگان بودم تا از روشنی ایشان کسب نور کنم...»

وی در تألیفاتش، سه تن از استادان خود را به شرح زیر نام برده است:

۱. **ابن خوام** (عبدالله‌بن محمدبن عبدالرزاق عمادالدین بغدادی) که کمال‌الدین فارسی به خدمت او راه یافته و سال‌های متوالی ظاهراً در اصفهان شاگرد و ملازم او بوده و علم حساب را نزد او آموخته و کتاب اساس القواعد فی اصول الفوائد را در شرح کتاب الفوائد البهائیه فی قواعد الحسابیه، تألیف او نوشته است.

۲. **قطب‌الدین شیرازی** که کمال‌الدین فارسی کتاب تنقیح المناظر را با راهنمایی و به نام او نوشته و در مقدمه‌ی آن کتاب با کمال تجلیل و احترام از او یاد کرده است: «مولای اعظم و امام افضل، پیشوای پیشوایان عالم... استاد فضلای جهان، آشکارکننده‌ی کلمات بلندپایه‌ی خدا، آن‌که اجرای احکام الهی به دست اوست و فرمانش در آشکار کردن حلال و حرام همه‌جا روان است...»

۳. **جمال‌الدین صاعدبن محمد سغدی ترکستانی** که کمال‌الدین فارسی کتاب «البصائر فی اختصار تنقیح المناظر» را به خواهش او و به نام او نوشته و در آن، او را استاد خود نامیده است.

بقیه در صفحه ی ۳ جلد

بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

◆ مدیر مسئول: علیرضا حاجیان زاده
◆ سردبیر: حمیدرضا امیری
◆ مدیر داخلی: میرشهرام صدر
◆ طراح گرافیک: آزینا کوثری
◆ ویراستار ادبی: کبری محمودی
◆ اعضای هیأت تحریریه: حمیدرضا امیری
محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری،
میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی،
سید محمدرضا هاشمی موسوی،
غلامرضا یاسی‌پور
و با تشکر از همکاری ارزنده‌ی
استاد پرویز شهریاری
صندوق الکترونیکی سردبیر:
Borhanm@roshdmag.ir
پیام‌گیر نشریات رشد: ۸۸۸۳۹۲۳۲-۸۸۳۰۱۴۸۲
◆ چاپ و صحافی: شرکت افست (سهامی عام)
◆ نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۰ داخلی ۲۹۷
تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶-۷۷۳۳۵۱۱۰
www.roshdmag.ir
ISSN 1735 - 4951

رشد برهان ۵۸

مجله‌ی ریاضی
دوره‌ی متوسطه
فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
دوره‌ی هفدهم /شماره‌ی ۴/ تابستان ۱۳۸۷/ شمارگان: ۱۵۰۰۰ نسخه

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می‌کند:

- نگارش مقاله‌های کمک‌درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می‌شود.

مجله در حکّ، اصلاح، حذف و اضافه‌ی مقاله‌ها آزاد است.

مقاله‌های وارده، باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.

مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود.

استفاده از مطالب مجله در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

ریاضیات و کاربردهای آن در زندگی

واژه‌ی «Mathematics» (ریاضیات) به جای واژه‌ی یونانی «Mathematike» گذاشته شده که خود این واژه در اصل از واژه‌ی «Mathema» به معنای «دانش» و «دانایی» گرفته شده است.

در زبان فارسی، بسیاری از کارشناسان واژه‌ی ریاضیات را مشتق از واژه‌ی «ریاضت» می‌دانند. اما ریاضت فقط به معنای «پرهیزکاری بدنی» یا فعالیت‌های سخت و طاقت‌فرسا نیست و به معانی «در خود فرو رفتن»، «فهمیدن» و «رسیدن به رازها» نیز به‌کار رفته است. البته اگر واژه‌ی ریاضیات را برگرفته از ریاضت، و ریاضت را به معنی «سختی کشیدن و در انزوا فرو رفتن بدانیم، تا اندازه‌ای برای مخاطبین ممکن است بار منفی داشته باشد.

این مشابه برداشتی است که گاهی اوقات از واژه‌ی «جبر» به‌معنی «زور» یا «فشار» می‌شود. البته چنین برداشتی از واژه‌ی جبر صحیح نیست. خود خوارزمی، واژه‌ی جبر را به معنای «جبران کردن» به‌کار برده است؛ زیرا او بیشتر با معادلات و حل معادلات سروکار داشت و می‌دانیم که بردن عدد منفی از یک طرف معادله به طرف دیگر، آن را مثبت می‌کند و در واقع جبران می‌شود. در مصراع «که جبر خاطر مسکین بلا بگرداند»، واژه‌ی جبر دقیقاً به معنای جبران کردن به‌کار رفته است.

***

ریاضیات چیست و چه رابطه‌ای با دیگر علوم دارد؟ ریاضیات، دانشی است که توسط آن می‌توان، بستگی‌های کمّیتی و شکل‌های مسطح و فضایی دنیای واقع را مورد بررسی، تجزیه و تحلیل و نقد قرار داد و روابط موجود بین اشیا را به لحاظ کمّی و حتی کیفی، تبیین کرد.

ریاضیات را ملکه یا مادر علوم می‌دانند. ارتباط علوم دیگر به‌خصوص علوم پایه با ریاضیات، و نیاز علوم برای پیشرفت و کاربرد به ریاضیات، بسیار زیاد و انکارناپذیر است. در واقع به‌کار بردن ریاضیات و به‌خصوص روش‌های ریاضی در علوم دیگر، هیچ مرزی نمی‌شناسد و هر روز به این کاربردها افزوده می‌شود.

زمانی هاردی ریاضی‌دان مشهور و معاصر که «نظریه‌ی اعداد» تخصص اصلی او بوده است، اعلام کرد: «هیچ بخشی از ریاضیات بدون کاربردتر از نظریه‌ی اعداد نیست و در نظریه‌ی اعداد، بخشی بلااستفاده‌تر از اعداد اول وجود ندارد.» در حالی که الان در دنیا، در بسیاری از علوم به‌خصوص علوم رایانه، از نظریه‌ی اعداد استفاده‌های فراوان می‌شود و در «نظریه‌ی رمزنگاری و رمزگشایی»، حرف اصلی را نظریه‌ی اعداد و به‌خصوص اعداد اول می‌زنند. در نظریه‌ی رمزنگاری، از هم‌نهشتی‌ها استفاده‌ی فراوان می‌شود و بیشتر می‌کوشند، پیمانه‌های هم‌نهشتی‌ها را اعداد اول در نظر بگیرند تا امکان تجزیه‌ی آن‌ها وجود نداشته باشد!

علومی هم‌چون مکانیک آسمانی، به‌خصوص بخش مربوط به حرکت سیّاره‌ها، کاملاً به ریاضیات و روش‌های ریاضی وابسته‌اند. قانون جاذبه‌ی عمومی ساختاری کاملاً ریاضی و ساده دارد. ولی حل مسائل مربوط به حرکت ماده یا یک جسم تحت تأثیر نیروی جاذبه، حتی در حالت‌های دو بعدی و سه‌بعدی، به مراحل پیچیده و دشواری می‌انجامد. هم‌چنین، در بسیاری از نظریه‌های فیزیک می‌توان به توانایی‌ها و قابلیت‌های روش‌های ریاضی و تأثیر آن‌ها در تکامل و پیشرفت این نظریه‌ها پی برد.

اغراق نیست اگر بگوییم: «در صورتی که ریاضیات را از فیزیک و مکانیک حذف کنیم، تقریباً (شاید تحقیقاً) چیزی از آن‌ها باقی نمی‌ماند.» ما از ابتدایی‌ترین معادلات در مکانیک (از معادله‌ی حرکت به بعد)، از مشتق بی‌نیاز نیستیم و این یعنی کاربرد ریاضیات در مکانیک. و یا برای محاسبه‌ی شار مغناطیسی در فیزیک، از انتگرال روی میدان مغناطیسی استفاده می‌شود. از علم احتمال نیز، گذشته از کاربردهایش در علومی چون ژنتیک و آمار، در نظریه‌ی پراکندگی مواد به صورتی بسیار دقیق استفاده می‌شود. نظریه‌ی پراکندگی به بررسی جابه‌جایی تصادفی و میکروسکوپی ذرّه‌ها تحت تأثیر مولکول‌های ماده‌ی حلال تکیه دارد. قانون دقیق این جابه‌جایی برای ما معلوم نیست، اما نظریه‌ی احتمال این امکان را به ما می‌دهد تا نتیجه‌ی کمیتیِ معینی به دست آوریم و آن تعیینِ قانونِ احتمالی برای جابه‌جایی ذره‌ها در فواصل زمانی بزرگ است.

معرفی ریاضی‌دانان ایرانی

یادهای آموزشی (۱۱)

● پرویز شهریاری

ابوالوفا، در رصدخانه‌ای که **شرف‌الدین** به هزینه‌ی خود در بغداد ساخته بود، به سرپرستی **کوهی** (ابوسهل بیژن، فرزند رستم کوهی) و با همکاری برخی دیگر، به رصد پرداخت (سال ۹۸۸م).

ریاضیات در یونان باستان مخصوص آزادها بود و تنها به هندسه می‌پرداخت. اگر از استثناهایی مثل **ارشمیدس** بگذریم، از آن‌جا که اعتقاد داشتند هندسه علمی مجرد است، به آن پرداختند و موردهای کاربردی را به برده‌ها واگذاشتند که هیچ اثری از آن‌ها باقی نمانده است. یونانی‌ها حتی عددنویسی نداشتند و عددها را با حرف‌های الفبا می‌نوشتند.

چند سده‌ای که گذشت، نوبت به ایرانی‌ها رسید که تنها به ریاضیات کاربردی می‌پرداختند و در همه‌ی دانش‌ها سرآمد شدند. **خوارزمی**[1]، و بعد **بیرونی**[2] و ابوالوفا آمدند، توانستند بسیاری از دشواری‌های روزمره را حل کنند.

محمود، فرزند محمد، معروف به **ابوالوفای بوزجانی** در سال ۳۶۱ قمری متولد و در سال ۴۱۹ قمری در بغداد از دنیا رفت. وی شرح‌هایی بر اثرهای اقلیدس[3]، دیوفانت[4] و خوارزمی نوشت. به علاوه زیجی نوشت که اصلاح شده‌ی آن اکنون در دست است. حل مسئله‌های هندسی به یاری پرگار، رسم هفت‌ضلعی منتظم با تقریب (طول ضلع هفت ضلعی منتظم نصف طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع است)، قضیه‌ی سینوس‌ها در مثلث محاسبه $\sin 30'$ تا رقم هشتم بعد از ممیز، با رسم سهمی با نقطه‌یابی‌های هندسی $x^4 = a$ و $x^4 + ax^3 = b$ را پیدا کرد. او $\sin(a \pm b)$ را محاسبه کرد.

نهضت علمی که از آخرهای سده‌ی دوم هجری آغاز شده بود، رفته رفته شکوفه می‌داد. **اخوان‌الصفا**[5] دانش‌نامه‌ی خود را در سده‌ی چهارم هجری تنظیم کردند. **ابن‌ندیم**[6]، به تفصیل در فهرست[7] خود شرح‌حال دانشمندان را توضیح داد. در «مجسطی» که کتابی درباره‌ی مثلثات بوده است، ابوالوفای بوزجانی[8] جدولی برای سینوس‌ها ۳۰ دقیقه به ۳۰ دقیقه تنظیم و محاسبه کرده بود (در دستگاه شصت شصتی). این محاسبه با دقت $\frac{1}{10^8}$ بود و تا ۸ رقم بعد از ممیز درست بود. او به عنوان نمونه، سینوس ۳۰ دقیقه را این‌طور محاسبه کرده بود: ۰/۰۰۸۷۲۶۵۳۵۵ ابوالوفا با مفهوم سکانت (که آن را قطر ظل می‌نامیدند) آشنا بود. و تانژانت را به روشنی تعریف و جدول تانژانت‌ها را تنظیم کرد. همه‌جا شعاع دایره را R (و نه واحد) می‌گرفت. البته نشانه‌هایی وجود دارد که ابوالوفا نخستین کسی است که در دایره‌ی مثلثاتی، مقدار R را واحد انتخاب کرد.

او قضیه تانژانت‌ها را برای حل مثلث کروی (به جای قضیه‌ی منه‌لاوس[9]) به کار می‌برد. ابوریحان

بیرونی، از اثبات این قضیه به‌وسیله ابوالوفا نام برده است. خود او در مجسطی می‌گوید:

روشن است، اگر $R = ۱$ درنظر بگیریم، آن وقت:

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ ,\ \ cot\,g\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

ابوالوفا در مثلث قائم‌الزاویه کروی، دستورها و در مثلث غیر قائم‌الزاویه‌ی کروی، قضیه سینوس‌ها را به‌دست آورد:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

گرچه **ابونصر عراقی**، **کوشیار گیلانی** و **ابومحمود خجندی** هم همین رابطه را آورده‌اند. ولی به احتمال زیاد، ابوالوفا پیش از دیگران به این رابطه رسیده است.

رابطه‌های زیر را نیز به ابوالوفا نسبت می‌دهند:

$$۲\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲} = ۱ - \cos\alpha$$

$$\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$$

ابوالوفا سهمی را آینه‌ی سوزان می‌نامید. او ریاضیات و اخترشناسی را در نیشابور نزد عمو و دایی خود آموخت و در ۲۰ سالگی به عراق رفت.

زیرنویس

۱. محمد فرزند موسی خوارزمی در سال ۲۳۶ هجری قمری از دنیا رفت. کتاب جبر و مقابله‌ی او تا زمان ویت (۱۶۰۳-۱۵۴۰ میلادی) مورد مطالعه بود.

۲. محمد فرزند احمد بیرونی، معروف به ابوریحان بیرونی (۴۳۰-۳۶۲ هجری قمری)، ریاضی‌دان، فیلسوف، جغرافی‌دان و سیاح ایرانی، در سال ۴۰۸ هجری به غزنین برده شد.

۳. اقلیدس در اسکندریه، در دوران بطلمیوس اول، از سال ۲۸۵ تا ۳۲۸ پیش از میلاد زندگی می‌کرد.

۴. دیوفانت که عرب‌ها او را دیوفتیس می‌خواندند، در سال ۲۵۰ بعد از میلاد مُرد. نخستین کسی بود که علامت‌هایی در جبر بنیان گذاشت. او را دیوفانت اسکندرانی هم می‌گویند.

۵. اخوان‌الصفا نام جمعیتی سری است که در سده‌ی چهارم هجری تشکیل شده بود.

۶. ابن‌ندیم (محمد فرزند اسحاق)، مورخ و شرح‌حال‌نویسی که در سال ۳۸۵ هجری از دنیا رفت.

۷. «فهرست ابن‌ندیم» از آن اوست.

۸. بوزجان شهری بوده است در نزدیکی مرز افغانستان که هنوز بخشی از آن به صورت نیمه‌ویرانه باقی مانده است.

۹. منه‌لاوس، ریاضی‌دان، اخترشناس و فیزیک‌دان اهل اسکندریه که در آخرهای سده‌ی اول پیش از میلاد در اسکندریه می‌زیست.

انتخاب یک دسته گل

● میرشهرام صدر
mir_sadr@yahoo.com

فرض کنیم دو نوع گل و به تعداد فراوان از هر نوع، موجود است. می‌خواهیم دسته گلی با چهار شاخه گل از این دو نوع گل انتخاب کنیم. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

اگر x_1 گل از نوع اول و x_2 گل از نوع دوم انتخاب کنیم، چون یک دسته گل با چهار شاخه نیاز داریم، بنابراین معادله‌ی زیر را داریم:

$x_1 + x_2 = 4$

جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی اخیر را می‌توان به صورت جدول زیر نوشت:

x_1	x_2
۰	۴
۱	۳
۲	۲
۳	۱
۴	۰

ملاحظه می‌کنیم که معادله‌ی $x_1 + x_2 = 4$ دارای ۵ جواب صحیح و نامنفی است که عبارت‌اند از: $(0,4)$، $(1,3)$، $(2,2)$، $(3,1)$ و $(4,0)$.

در حالت کلی فرض کنید، k نوعِ متفاوت گل و به تعداد فراوان از هر نوع موجود است و می‌خواهیم، n شاخه گل از این k نوع گل انتخاب کنیم. اگر x_1 گل از نوع اول، x_2 گل از نوع دوم و... و x_k گل از نوع kام انتخاب کنیم، چون یک دسته گل با n شاخه نیاز داریم، بنابراین معادله‌ی زیر را خواهیم داشت:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n \; ; \; (x_i \geq 0 \; , \; i = 1,2,\ldots,k) \qquad (1)$$

اکنون برای یافتن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی (۱)، قضیه‌ی زیر را بیان می‌کنیم.

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی
$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$

قضیه: فرض کنیم، k نوعِ متفاوت گل و به تعداد فراوان از هر نوع موجود است. ثابت کنید تعداد انتخاب n گل از این k نوع گل که در آن‌ها تکرار نیز مجاز است، برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$$

برهان: kنوع متفاوت گل را می‌توان با $(k-1)$ پاره‌خط متمایز کرد. هم‌چنین، اگر تعداد انتخاب‌های گل‌ها، از هر نوع را با تعدادی علامت ستاره (*) مشخص کنیم (باید تعداد ستاره‌ها برابر با n باشد)، در این صورت دارای nستاره و $(k-1)$ پاره‌خط هستیم. در نتیجه، $(n+(k-1))$ خط و ستاره وجود دارد که تعداد کل تبدیلات این اشیا برابر با $(n+(k-1))!$ است. اگر در این تبدیلات، پاره‌خط‌ها را یا ستاره‌ها را باهم جابه‌جا کنیم، حالت جدیدی ایجاد نمی‌شود، بنابراین طبق قاعده‌ی تبدیل با تکرار[1] خواهیم داشت:

نوع اول	نوع دوم	...	نوع kام
**	****	...	**...*

($k-1$= تعداد پاره‌خط‌ها، n=تعداد ستاره‌ها)

$$P_n=\frac{(n+(k-1))!}{n!\times(k-1)!}=\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{n+k-1}{n}$$

نتیجه: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی (۱) برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

دیدیم که معادله‌ی $x_1+x_2=4$ دارای ۵ جواب صحیح و نامنفی است. اکنون می‌توان با استفاده از فرمولی که به‌دست آورده‌ایم، تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله را محاسبه کنیم.

$$n=4\ ,\ k=2\ ;\ \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{4+2-1}{2-1}=\binom{5}{1}=5$$

مثال: به چند طریق می‌توان ۸ عدد شکلات را بین ۶ نفر طوری تقسیم کرد، که ممکن است به بعضی‌ها شکلات نرسد؟

حل: اگر x_1 شکلات به نفر اول و x_2 شکلات به نفر دوم و... و x_6 شکلات به نفر ششم بدهیم، معادله‌ی زیر را خواهیم داشت:

$$x_1+x_2+\cdots+x_6=8\ ;\ (x_i\geq 0\ ,\ i=1,2,\ldots,6)$$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی بالا برابر است با:

$$n=8\ ,\ k=6\ ;\ \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{8+6-1}{6-1}=\binom{13}{5}=1287$$

مثال: دستگاه معادله‌های
$$\begin{cases}x_1+x_2=3\\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7\end{cases}$$
چند جواب صحیح نامنفی دارد؟

حل: معادله‌ی $x_1+x_2=3$ دارای $\binom{3+2-1}{2-1}=\binom{4}{1}=4$ جواب صحیح نامنفی است. اگر در معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7$ قرار دهیم، $x_1+x_2=3$. بنابراین معادله‌ی $x_3+x_4+x_5=4$ به‌دست می‌آید که دارای $\binom{4+3-1}{3-1}=\binom{6}{2}=15$ جواب صحیح نامنفی است. طبق اصل ضرب، این دستگاه دارای $\binom{6}{2}\times\binom{4}{1}=60$ جواب صحیح و نامنفی است.

مسئله: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی نامعادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4\leq 10$ را بیابید.

حل: می‌دانیم: $a\leq b$ ؛ یعنی وجود دارد عدد حقیقی نامنفی $y\geq 0$ به‌طوری که: $a+y=b$. بنابراین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی نامعادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4\leq 10$ برابر با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4+y=10$ است. این تعداد جواب برابر است با:

$$n=10\ ,\ k=5\ ;\ \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{14}{4}$$

مثال: تعداد جملات بسط $(x+y)^8$ را بیابید.

حل: می‌دانیم، عبارت حرفی هرجمله‌ی بسط $(x+y)^8$ به‌صورت $x^{n_1}y^{n_2}$ است که در آن: $n_1+n_2=8$ و $n_1\geq 0$ و $n_2\geq 0$. در نتیجه، تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله برابر با تعداد جملات بسط است. در نتیجه:

$$n=8\ ,\ k=2\ ;\ \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{8+2-1}{2-1}=\binom{9}{1}=9$$

تعداد جملات بسط $(a_1+a_2+\ldots+a_k)^n$

هر جمله‌ی بسط $(a_1+a_2+\ldots+a_k)^n$ دارای عبارت حرفی به‌صورت $a_1^{n_1}a_2^{n_2}\cdots a_n^{n_k}$ است که در آن، $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$ و برای هر $1\leq i\leq k$ داریم: $n_i\geq 0$. در نتیجه، تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله، برابر با تعداد جملات این بسط است که برابر است با: $\binom{n+k-1}{k-1}$.

مثال: تعداد جملات بسط $(a+b+c)^{10}$ را بیابید.

حل: $n=10\ ,\ k=3$. پس تعداد جملات بسط برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{10+3-1}{3-1}=\binom{12}{2}=66$$

تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله‌ی $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$

می‌خواهیم ۸ عدد شکلات را بین شش نفر تقسیم کنیم، به‌طوری که به هریک حداقل یک شکلات برسد، این کار به چند طریق ممکن است؟ به این منظور، ابتدا به هر نفر یک شکلات می‌دهیم. سپس

۲ شکلات باقی می‌ماند که باید آن را بین ۶ نفر تقسیم کنیم، بنابراین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=2$ را می‌یابیم. جواب مسئله برابر است با:

$$n=2\ ,\ k=6\ ;\ \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{7}{5}=21$$

اکنون می‌خواهیم تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله‌ی زیر را به‌دست آوریم:

$$x_1+x_2+\dots+x_k=n$$

به این منظور، فرض کنیم می‌خواهیم که n شیء را بین k نفر تقسیم کنیم، به‌طوری که به هریک حداقل یک شیء برسد. بنابراین ابتدا به هر یک از k نفر، یک شیء می‌دهیم. در نتیجه $(n-k)$ شیء، باقی می‌ماند که باید آن را بین k نفر تقسیم کنیم. پس تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+\dots+x_k=n-k$ برابر با تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله‌ی $x_1+x_2+\dots+x_k=n$ و برابر است با:

$$\binom{(n-k)+k-1}{k-1}=\binom{n-1}{k-1}$$

به بیان دیگر می‌توان گفت که در جواب‌های صحیح و مثبت معادله‌ی $x_1+x_2+\dots+x_k=n$، برای هر $1\le i\le k$ داریم:

$$x_i>0$$

چون برای هر $0\le i\le k$، x_i یک عدد صحیح بزرگ‌تر از صفر است، یعنی $x_i>0$، پس: $x_i\ge 1$ در نتیجه: $x_i-1\ge 0$ و بنابراین داریم:

$$x_1>0\Rightarrow x_1\ge 1\Rightarrow x_1-1\ge 0$$
$$x_2>0\Rightarrow x_2\ge 1\Rightarrow x_2-1\ge 0$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$x_k>0\Rightarrow x_k\ge 1\Rightarrow x_k-1\ge 0$$

اکنون اگر قرار دهیم $y_i=x_i-1\ge 0$، $(1\le i\le k)$ بنابراین: $x_i=y_i+1$. پس داریم:

$$x_1+x_2+\dots+x_k=n\ ,\ x_i=y_i+1\Rightarrow \quad (1\le i\le k)$$
$$y_1+1+y_2+1+\dots+y_k+1=n\Rightarrow$$
$$y_1+y_2+\dots+y_k=n-k$$

در معادله‌ی بالا، برای هر $1\le i\le k$ داریم: $y_i\ge 0$ که تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله، جواب مسئله است و برابر است با:

$$\binom{(n-k)+k-1}{k-1}=\binom{n-1}{k-1}$$

مثال: به چند طریق می‌توان ۷ سیب و ۶ پرتقال را بین چهار نفر تقسیم کرد، به‌طوری که: الف) به صورت دل‌خواه میوه‌ها را تقسیم کنیم و ممکن است به کسی میوه نرسد؟ ب) به هر نفر حداقل یک میوه برسد؟ ج) به هر نفر حداقل یک سیب برسد؟

حل:

الف) ۱۳ عدد میوه داریم و می‌خواهیم آن‌ها را به‌صورت دل‌خواه بین ۴ نفر تقسیم کنیم. بنابراین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4=13$ را پیدا می‌کنیم که برابر است با:

$$\binom{13+4-1}{4-1}=\binom{16}{3}$$

ب) ۱۳ عدد میوه داریم و می‌خواهیم آن‌ها را طوری بین ۴ نفر تقسیم کنیم که به هریک حداقل یک عدد میوه برسد. بنابراین تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4=13$ را می‌یابیم که برابر است با:

$$\binom{n-1}{k-1}=\binom{13-1}{4-1}=\binom{12}{3}$$

ج) ابتدا به هر نفر یک سیب می‌دهیم، بنابراین ۳ سیب و ۶ پرتقال برایمان باقی می‌ماند که در مجموع ۹ عدد میوه داریم. اکنون ۹ میوه را بین ۴ نفر تقسیم می‌کنیم، بنابراین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی زیر، جواب است.

$$x_1+x_2+x_3+x_4=9$$
$$\binom{9+4-1}{4-1}=\binom{12}{3}$$

مثال: تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=10\ (I)$ را با شرط $x_1>0$، $x_2\ge 2$ و $x_3>3$ به‌دست آورید.

حل: تغییر متغیرهای زیر را انجام می‌دهیم:

$$x_1>0\Rightarrow x_1\ge 1\Rightarrow \overbrace{x_1-1}^{y_1}\ge 0\Rightarrow \begin{cases}x_1=y_1+1\\ y_1\ge 0\end{cases}\quad (1)$$

$$x_2\ge 2\Rightarrow \overbrace{x_2-2}^{y_2}\ge 0\Rightarrow \begin{cases}x_2=y_2+2\\ y_2\ge 0\end{cases}\quad (2)$$

$$x_3>3\Rightarrow x_3\ge 4\Rightarrow \overbrace{x_3-4}^{y_3}\ge 0\Rightarrow \begin{cases}x_3=y_3+4\\ y_3\ge 0\end{cases}\quad (3)$$

با قرار دادن رابطه‌های (۱) و (۲) و (۳) در معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=10$ خواهیم داشت:

$$y_1+1+y_2+2+y_3+4=10\Rightarrow y_1+y_2+y_3=3\quad (II)$$

چون در این معادله، $y_1\ge 0$، $y_2\ge 0$، $y_3\ge 0$، بنابراین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله را به‌دست می‌آوریم که با تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=10$ با شرایط $x_1>0$، $x_2\ge 2$ و $x_3>3$ برابر است؛ زیرا با تغییر متغیرهایی که روی معادله‌ی (I) انجام دادیم، معادله‌ی (II) را به‌دست آوردیم. برای مثال، (۱و۱و۱) یک جواب برای معادله‌ی

(II) است، به‌طوری که: $y_1 = 1$ و $y_2 = 2$ و $y_3 = 1$. اکنون اگر این مقادیر را در رابطه‌های (۱)، (۲)، (۳) جای‌گزین کنید، ملاحظه خواهید کرد که: $x_1 = 2$، $x_2 = 3$ و $x_3 = 5$. بنابراین (۵و۳و۲) یک جواب معادله‌ی (I) با شرایط داده شده است.

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی (II) $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$

مثال: تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$ را با شرط $x_i \geq 3$ برای $i = 1,2,3,4$ پیدا کنید.

حل: تغییر متغیرهای زیر را انجام می‌دهیم:

$$x_i \geq 3 \Rightarrow \overbrace{x_i - 3}^{y_i} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x_i = y_i + 3 \\ y_i \geq 3 \end{cases} \quad i = 1,2,3,4$$

با قرار دادن رابطه‌ی بالا در معادله خواهیم داشت:

$$y_1 + 3 + y_2 + 3 + y_3 + 3 + y_4 + 3 = 17 \Rightarrow$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 5$$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی آخری با تعداد جواب‌های مسئله برابر است، بنابراین:

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{5+4-1}{4-1} = \binom{8}{3} = 56$$

مثال: مطلوب است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی هریک از معادلات زیر:

۱. $x_1^2 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$

حل. با توجه به معادله داریم؛ $0 \leq x_1 \leq 3$، درنتیجه:

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 + x_3 + x_4 = 10 \Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $= \binom{12}{2} = 66$

$x_1 = 1 \Rightarrow x_2 + x_3 + x_4 = 9 \Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $= \binom{11}{2} = 55$

$x_1 = 2 \Rightarrow x_2 + x_3 + x_4 = 6 \Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $= \binom{8}{2} = 28$

$x_1 = 3 \Rightarrow x_2 + x_3 + x_4 = 1 \Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $= \binom{3}{2} = 3$

تعداد کل جواب‌ها $= 66 + 55 + 28 + 3 = 152$

۲. $\sqrt{x_1} + x_2 + x_3 = 3$

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 + x_3 = 3 \Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $= \binom{4}{1} = 4$

$x_1 = 1 \Rightarrow x_2 + x_3 = 2 \Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $= \binom{3}{1} = 3$

$x_1 = 4 \Rightarrow x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $= \binom{2}{1} = 2$

$x_1 = 9 \Rightarrow x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $= \binom{1}{1} = 1$

تعداد کل جواب‌ها $= 4 + 3 + 2 + 1 = 10$

۳. $x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 13$

حل. با توجه به معادله، ملاحظه می‌کنیم که $0 \leq x_3 \leq 3$، درنتیجه داریم:

$x_3 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 13$

$\Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $= \binom{16}{3} = 560$

$x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 9$

$\Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $= \binom{12}{3} = 220$

$x_3 = 2 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 5$

$\Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $= \binom{8}{3} = 56$

$x_3 = 3 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 1 \Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $= \binom{4}{3} = 4$

تعداد کل جواب‌ها $= 560 + 220 + 56 + 4 = 840$

در ادامه‌ی بحث، برای یافتن تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ با شرطی مانند $a \leq x_i \leq b$؛ $a, b \in \mathbb{Z}, (1 \leq i \leq n)$ باید از اصل شمول و عدم شمول استفاده کنیم. از این‌رو، ابتدا این اصل را بیان می‌کنیم.

اصل شمول و عدم شمول

عدد اصلی یک مجموعه

فرض کنیم A یک مجموعه‌ی متناهی و دارای n عضو باشد. در این صورت، تعداد اعضای A را با نماد $|A|$ یا $n(A)$ نمایش می‌دهیم و به آن عدد اصلی مجموعه‌ی A می‌گوییم. در این حالت می‌نویسیم:

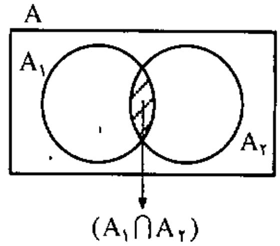
$$|A| = n$$

اصل شمول و عدم شمول برای دو مجموعه‌ی متناهی

فرض کنیم، A یک مجموعه‌ی متناهی و شامل n عضو باشد $(n \in \mathbb{N})$. اگر A_1 و A_2 دو زیر مجموعه‌ی A باشند، برای محاسبه‌ی

$|A_1\cup A_2|$ ، ابتدا حاصل جمع $|A_1|+|A_2|$ را به‌دست می‌آوریم. در این حاصل جمع، تعداد عضوهای مشترک بین A_1 و A_2 دوباره شمرده می‌شوند، یعنی مقدار $|A_1\cap A_2|$ را دوبار به حساب می‌آوریم (شمول آن‌ها دوبار به حساب آمده است). بنابراین، $|A_1\cap A_2|$ یک‌بار در A_1 یک‌بار در A_2 محاسبه شده است. برای محاسبه‌ی تعداد عضوهایی که حداقل به یکی از دو مجموعه‌ی A_1 یا A_2 تعلق دارند، یعنی $|A_1\cup A_2|$، باید یکی از این دوبار را کنار گذاشت (عدم شمول)، در نتیجه داریم:

$$|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|$$



نکته: برای یافتن تعداد اعضایی از A که به هیچ یک از مجموعه‌های A_1 و A_2 تعلق نداشته باشد، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم ($\overline{A}_1$ را متمم مجموعه‌ی Aدرنظر می‌گیریم):

$$\overline{A}_1\cap\overline{A}_2=n-\left(|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|\right)$$

زیرا:

$$\overline{A}_1\cap\overline{A}_2=\overline{(A_1\cup A_2)}$$

اصل شمول و عدم شمول برای سه مجموعه‌ی متناهی

فرض کنیم A یک مجموعه‌ی متناهی و شامل nعضو باشد. اگر A_1 ، A_2 و A_3 سه زیر مجموعه از A باشند، برای محاسبه‌ی $|A_1\cup A_2\cup A_3|$ ؛ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$|A_1\cup A_2\cup A_3|=|A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1\cap A_2|$$
$$-|A_1\cap A_3|-|A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_3|$$

نکته: برای یافتن تعداد اعضایی از A که به هیچ یک از سه مجموعه‌ی A_1 ، A_2 و A_3 تعلق نداشته باشند، از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

$$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3|=n-|A_1\cup A_2\cup A_3|$$

محاسبه‌ی تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ با شرط $a\le x_i\le b$

اکنون وقت آن رسیده است که با استفاده از اصل شمول و عدم شمول، تعداد جواب‌های صحیح این معادله را در حالتی که $a\le x_i\le b$ ، $a,b\in W, i=1,2,\ldots,n$ به دست آوریم. برای تشریح این موضوع از چند مثال و مسئله استفاده می‌کنیم.

مثال: در یک گل‌فروشی، سه رنگ متفاوت گل رُز وجود دارد. فرض کنید می‌خواهیم دسته‌گلی با ۹ شاخه گل رُز انتخاب کنیم به طوری که از رُز زرد ۲ تا ۵ شاخه و از رُز سفید ۱ تا ۳ شاخه در آن موجود باشد. این **انتخاب دسته گل** به چند طریق ممکن است.

حل: فرض کنیم x_1 گل از نوع اول، x_2 گل از نوع دوم و x_3 گل از نوع سوم انتخاب کنیم. در این صورت، با توجه به صورت مثال داریم:

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=9\\ 2\le x_1\le 5\\ 1\le x_2\le 3\end{cases}$$

ابتدا با تغییر متغیرهای مناسب، کران پایین محدوده‌ی متغیرها را به عدد صفر تبدیل می‌کنیم:

$$2\le x_1\le 5\Rightarrow 0\le \overbrace{x_1-2}^{y_1}\le 3\Rightarrow\begin{cases}0\le y_1\le 3\\ x_1=y_1+2\end{cases}\quad(1)$$

$$1\le x_2\le 3\Rightarrow 0\le \overbrace{x_2-1}^{y_2}\le 2\Rightarrow\begin{cases}0\le y_2\le 2\\ x_2=y_2+1\end{cases}\quad(2)$$

با قرار دادن تغییر متغیرهای (۱) و (۲) در معادله داریم:

$$y_1+2+y_2+1+x_3=9\Rightarrow y_1+y_2+x_3=6$$

اکنون معادله‌ی $y_1+y_2+x_3=6\,(\mathrm{I})$ را با شرایط $0\le y_1\le 3$ و $0\le y_2\le 2$ داریم. پیدا کردن تعداد جواب‌های این معادله با شرایط داده شده به‌طور مستقیم کاری دشوار است. به همین منظور، به روش غیرمستقیم و با استفاده از اصل شمول و عدم شمول جواب مسئله را می‌یابیم. برای انجام این کار، ابتدا تعداد کل جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی (I) را به‌دست می‌آوریم و آن را $|A|$ می‌نامیم: $|A|=\binom{6+3-1}{3-1}=\binom{8}{2}=28$. و سپس تعداد جواب‌هایی از معادله‌ی (I) را می‌یابیم که در شرایط مسئله صدق نمی‌کنند. با توجه به مجموعه‌های زیر، حاصل عددی عبارت $|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2|=|A|-|A_1\cup A_2|$ جواب مسئله است.

$$A_1=\left\{(y_1,y_2,x_3)\mid y_1>3\right\}$$
$$A_2=\left\{(y_1,y_2,x_3)\mid y_2>2\right\}$$

در این مرحله $|A_1\cup A_2|$ را به‌دست می‌آوریم. به این منظور باید $|A_1|$ و $|A_2|$ و $|A_1\cap A_2|$ را محاسبه کنیم:

$$y_1>3\Rightarrow y_1\ge 4\Rightarrow \overbrace{y_1-4}^{z_1}\ge 0\Rightarrow\begin{cases}z_1\ge 0\\ y_1=z_1+4\end{cases}\quad(3)$$

با قرار دادن رابطه‌ی (۳) در معادله‌ی (I) خواهیم داشت:

$$z_1+4+y_2+x_3=6\Rightarrow z_1+y_2+x_3=2$$

$$\Rightarrow |A_1| = \binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$$

$$y_2 > 2 \Rightarrow y_2 \geq 3 \Rightarrow \overbrace{y_2 - 3}^{z_2} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} z_2 \geq 0 \\ y_2 = z_2 + 3 \end{cases} \quad (4)$$

با قرار دادن رابطه‌ی (۴) در معادله‌ی (I) داریم:

$$y_1 + z_2 + 3 + x_3 = 6 \Rightarrow y_1 + z_2 + x_3 = 3$$

$$\Rightarrow |A_2| = \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$$

برای محاسبه‌ی $|A_1 \cap A_2|$، کافی رابطه‌های (۳) و (۴) را باهم در معادله‌ی (I) قرار دهیم؛ یعنی:

$$z_1 + 4 + z_2 + 3 + x_3 = 6 \Rightarrow z_1 + z_2 + x_3 = -1$$

$$\Rightarrow |A_1 \cap A_2| = 0 \text{ (معادله جواب ندارد)}$$

ملاحظه می‌کنیم که $|A_1| = 6$، $|A_2| = 10$ و $|A_1 \cap A_2| = 0$. بنابراین داریم:

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2| = |A| - |A_1 \cup A_2| = |A| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|$$
$$= 28 - 6 - 10 + 0 = 12$$

مثال: تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = 25$ را با شرایط $2 \leq x_1 \leq 7$، $3 < x_2 < 11$ و $x_3 > 3$ به‌دست آورید.

حل: ابتدا تغییر متغیرهای مناسب را با توجه به شرایط مسئله در معادله انجام می‌دهیم:

$$2 \leq x_1 \leq 7 \Rightarrow 0 \leq \overbrace{x_1 - 2}^{y_1} \leq 5 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + 2 \\ 0 \leq y_1 \leq 5 \end{cases} \quad (1)$$

$$3 < x_2 < 11 \Rightarrow 4 \leq x_2 \leq 10$$

$$\Rightarrow 0 \leq \overbrace{x_2 - 4}^{y_2} \leq 6 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = y_2 + 4 \\ 0 \leq y_2 \leq 6 \end{cases} \quad (2)$$

$$x_3 > 3 \Rightarrow x_3 \geq 4 \Rightarrow \overbrace{x_3 - 4}^{y_3} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = y_3 + 4 \\ y_3 \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

با قرار دادن رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) در معادله خواهیم داشت:

$$y_1 + 2 + y_2 + 4 + y_3 + 4 = 25 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 15 \quad (I)$$

در صورتی که A مجموعه‌ی جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی (I) باشد، داریم:

$$|A| = \binom{15+3-1}{3-1} = \binom{17}{2} = 136$$

اگر مجموعه‌های A_1 و A_2 را به‌صورت زیر درنظر بگیریم، آن‌گاه $|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2| = |A| - |A_1 \cup A_2|$ جواب مسئله است.

$$A_1 = \{(y_1, y_2, y_3) \mid y_1 + y_2 + y_3 = 15 \ , \ y_1 \geq 6\}$$
$$= \{(z_1, y_2, y_3) \mid z_1 + y_2 + y_3 = 9 \ , \ z_1 \geq 0\}$$

$$\Rightarrow |A_1| = \binom{9+3-1}{3-1} = \binom{11}{2} = 55$$

$$A_2 = \{(y_1, y_2, y_3) \mid y_1 + y_2 + y_3 = 15 \ , \ y_2 \geq 7\}$$
$$= \{(y_1, z_2, y_3) \mid y_1 + z_2 + y_3 = 8 \ , \ z_2 > 0\}$$

$$\Rightarrow |A_2| = \binom{8+3-1}{3-1} = \binom{10}{2} = 45$$

$$A_1 \cap A_2 = \{(z_1, z_2, y_3) \mid z_1 + z_2 + y_3 = 2 \ , \ z_1 \geq 0 \ , \ z_2 \geq 0\}$$

$$\Rightarrow |A_1 \cap A_2| = \binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$$

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2| = |A| - |A_1 \cup A_2| = 136 - (55 + 45 - 6) = 42$$

مثال: به چند طریق می‌توان ۷ مهره‌ی یکسان را درون سه جعبه‌ی متمایز طوری قرار داد که در هر جعبه حداکثر ۴ مهره قرار گیرد؟

حل: فرض کنیم در جعبه‌ی اول x_1 مهره، در جعبه‌ی دوم x_2 مهره و در جعبه‌ی سوم x_3 مهره قرار دهیم. بنابراین داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7 \ (I) \ , \ x_i \leq 4 \ , \ i = 1, 2, 3$$

چون یافتن تعداد جواب‌های صحیح این معادله به‌طور مستقیم مقدور نیست، با استفاده از اصل شمول و عدم شمول و به روش غیرمستقیم جواب مسئله را می‌یابیم:

$$x_i \nleq 4 \Rightarrow x_i > 4 \Rightarrow x_i \geq 5 \ , \ i = 1, 2, 3$$

اگر مجموعه‌های A_1, A_2, A_3 را به‌صورت زیر تعریف کنیم آن‌گاه $|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3|$ جواب مسأله است.

$$A_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 7 \ , \ x_1 \geq 5\}$$

$$\Rightarrow |A_1| = \binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$$

$$A_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 7 \ , \ x_2 \geq 5\}$$

$$\Rightarrow |A_2| = \binom{4}{2} = 6$$

$$A_3 = \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1+x_2+x_3=7\ ,\ x_3\ge 5\}$$

$$\Rightarrow |A_3| = \binom{4}{2} = 6$$

$$A_1\cap A_2 = \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1+x_2+x_3=7\ ,\ x_1\ge 5\ ,\ x_2\ge 5\}$$
$$= \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1+x_2+x_3=-3\ ,\ x_1\ge 0\ ,\ x_2\ge 0\}$$
$$\Rightarrow |A_1\cap A_2| = 0$$

به همین ترتیب:

$$|A_1\cap A_2\cap A_3| = |A_2\cap A_3| = |A_1\cap A_3| = 0$$

بنابراین داریم:

$$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3| = |A| - |A_1\cup A_2\cup A_3|$$

اگر A مجموعه‌ی جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=7$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$|A| = \binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$$

بنابراین:

$$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3| = 36-(6+6+6-0)=18$$

مثال: تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4=15$ را با شرایط $-2\le x_i\le 3$ و $1\le i\le 3$ به‌دست آورید.

حل: ابتدا تغییر متغیرهای مناسب را با توجه به شرایط مسئله در معادله انجام می‌دهیم:

$$-2\le x_i\le 3 \Rightarrow 0\le \overbrace{x_i+2}^{y_i}\le 5 \Rightarrow \begin{cases} x_i=y_i-2\\ 0\le y_i\le 5\end{cases}\quad i=1,2,3$$

بنابراین داریم:

$$y_1-2+y_2-2+y_3-2+x_4=15 \Rightarrow$$
$$y_1+y_2+y_3+x_4=21\quad (I)$$

در صورتی که A مجموعه‌ی جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی (I) باشد، داریم:

$$|A| = \binom{21+4-1}{4-1}=\binom{24}{3}=2024$$

چون یافتن تعداد جواب‌های صحیح این معادله به‌طور مستقیم مقدور نیست، بنابراین با استفاده از اصل شمول و عدم شمول و به روش غیرمستقیم جواب مسئله را می‌یابیم:

$$0\not\le y_i\not\le 5 \Rightarrow y_i>5\Rightarrow y_i\ge 6\ ,\ i=1,2,3$$

اگر مجموعه‌های A_1 ، A_2 و A_3 را به‌صورت زیر درنظر بگیریم، آن‌گاه $|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3|$ جواب مسئله است.

$$A_1 = \{(y_1,y_2,y_3,x_4) \mid y_1+y_2+y_3+x_4=21\ ,\ y_1\ge 6\}$$
$$\Rightarrow |A_1| = \binom{15+4-1}{4-1}=\binom{18}{3}=816$$

$$A_2 = \{(y_1,y_2,y_3,x_4) \mid y_1+y_2+y_3+x_4=21,\ y_2\ge 6\}$$
$$\Rightarrow |A_2| = \binom{15+4-1}{4-1}=\binom{18}{3}=816$$

$$A_3 = \{(y_1,y_2,y_3,x_4) \mid y_1+y_2+y_3+x_4=21,\ y_3\ge 6\}$$
$$\Rightarrow |A_3| = \binom{25+4-1}{4-1}=\binom{18}{3}=816$$

$$A_1\cap A_2 = \{(y_1,y_2,y_3,x_4) \mid y_1+y_2+y_3+x_4=21\ ,\ y_1\ge 6,\ y_2\ge 6\}$$

$$\Rightarrow |A_1\cap A_2| = \binom{9+4-1}{4-1}=\binom{12}{3}=220$$

به همین ترتیب $|A_1\cap A_3| = |A_2\cap A_3| = 220$ و هم‌چنین داریم:

$$A_1\cap A_2\cap A_3 = \{(y_1,y_2,y_3,x_4) \mid y_1+y_2+y_3+x_4=21,\ y_1\ge 6,\ y_2\ge 6, y_2\ge 6\}$$

$$\Rightarrow |A_1\cap A_2\cap A_3| = \binom{3+4-1}{4-1}=\binom{6}{3}=20$$

بنابراین داریم:

$$|A_1\cap A_2\cap A_3| = |A| - |A_1\cup A_2\cup A_3|$$
$$=2024-(816+816+816-220-220-220+20)$$
$$=216$$

در نتیجه، تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4=15$ با شرایط $-2\le x_i\le 3$ $(i=1,2,3)$ ، با تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $y_1+y_2+y_3+x_4=21$ با شرایط $0\le y_i\le 5$ $(i=1,2,3)$ برابر است که تعداد این جواب‌ها ۲۱۶ است.

مسئله: چند عدد چهاررقمی بزرگ‌تر از ۲۰۰۰ وجود دارد، به‌طوری که مجموع رقم‌های آن برابر با ۲۱ و رقم یکان آن‌ها بیشتر از ۵ باشند؟

حل: فرض کنیم $\overline{a_4a_3a_2a_1}$ عدد چهاررقمی مورد نظر باشد. چون این عدد باید بیشتر از ۲۰۰۰ باشد. بنابراین: $2\le a_4\le 9$. از طرف دیگر، باید مجموع رقم‌های این عدد برابر با ۲۱ باشد. بنابراین: $a_1+a_2+a_3+a_4=21$ (I). هم‌چنین، رقم یکان این عدد باید بیشتر ۵ باشد، پس: $5<a_1\le 9$. a_3, a_2 رقم‌های دهگان و صدگان هستند، در این صورت $0\le a_2\le 9$ و $0\le a_3\le 9$. در نتیجه برای یافتن جواب مسئله باید تعداد

جواب‌های صحیح معادله‌ی (I) را با توجه به شرایط به‌دست آمده، محاسبه کرد.

ابتدا با تغییر متغیرهای مناسب، کران پایین محدوده‌ی متغیرها را به عدد صفر تبدیل می‌کنیم.

$$5 < a_1 \le 9 \Rightarrow 6 \le a_1 \le 9 \Rightarrow 0 \le \overbrace{a_1 - 6}^{y_1} \le 3 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = y_1 + 6 \\ 0 \le y_1 \le 3 \end{cases} \quad (1)$$

$$2 \le a_4 \le 9 \Rightarrow 0 \le \overbrace{a_4 - 2}^{y_2} \le 7 \Rightarrow \begin{cases} a_4 = y_2 + 2 \\ 0 \le y_2 \le 7 \end{cases} \quad (2)$$

با قرار دادن رابطه‌های (۱) و (۲) در معادله‌ی (I) داریم:

$$y_1 + 6 + a_2 + a_3 + y_2 + 2 = 21 \Rightarrow$$
$$y_1 + a_2 + a_3 + y_2 = 13 \quad \text{(II)}$$

اکنون باید تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی (II) را با شرایط $0 \le y_1 \le 3$، $0 \le a_2 \le 9$، $0 \le a_3 \le 9$ و $0 \le y_2 \le 7$ محاسبه کرد. به این منظور از اصل شمول و عدم شمول برای چهار مجموعه استفاده می‌کنیم. اگر A مجموعه جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی (II) باشد، آن‌گاه $|A| = \binom{13+4-1}{4-1} = \binom{16}{3}$.

مجموعه‌های زیر را در نظر بگیرید:

$A_1 = \{$جواب‌های صحیح معادله با شرط $y_1 \ge 4\}$

$A_2 = \{$جواب‌های صحیح معادله با شرط $a_2 \ge 10\}$

$A_3 = \{$جواب‌های صحیح معادله با شرط $a_3 \ge 10\}$

$A_4 = \{$جواب‌های صحیح معادله با شرط $y_2 \ge 8\}$

حالا باید $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$ را پیدا کنیم. به این منظور داریم:

$$y_1 \ge 4 \Rightarrow \overbrace{y_1 - 4}^{z_1} \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 + 4 \\ z_1 \ge 0 \end{cases} \quad (3)$$

با قرار دادن رابطه‌ی (۳) در معادله‌ی (II) داریم:

$$z_1 + 4 + a_2 + a_3 + y_2 = 13 \Rightarrow z_1 + a_2 + a_3 + y_2 = 9 \Rightarrow$$
$$|A_1| = \binom{9+4-1}{4-1} = \binom{12}{3}$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$|A_2| = \binom{3+4-1}{4-1} = \binom{6}{3}, |A_3| = \binom{6}{3},$$

$$|A_4| = \binom{5+4-1}{4-1} = \binom{8}{3}$$

برای محاسبه‌ی $|A_1 \cap A_2|$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} y_1 \ge 4 \Rightarrow \overbrace{y_1 - 4}^{z_1} \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 + 4 \\ z_1 \ge 0 \end{cases} \\ a_2 \ge 10 \Rightarrow \overbrace{a_2 - 10}^{z_2} \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} a_2 = z_2 + 10 \\ z_2 \ge 0 \end{cases} \end{cases}$$

با قرار دادن رابطه‌های اخیر در معادله‌ی (II)، می‌توان $|A_1 \cap A_2|$ را محاسبه کرد:

$$z_1 + 4 + z_2 + 10 + a_3 + y_2 = 13$$
$$\Rightarrow z_1 + z_2 + a_3 + y_2 = -1 \text{ غیرممکن } \Rightarrow |A_1 \cap A_2| = 0$$

به همین ترتیب داریم:

$$|A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = |A_2 \cap A_4| = |A_3 \cap A_4| = 0 \text{ و}$$
$$|A_1 \cap A_4| = \binom{1+4-1}{4-1} = \binom{4}{3}$$

هم‌چنین داریم:

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 0 \ ; \ 1 \le i < j < k \le 4$$
$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$$

بنابر اصل شمول و عدم شمول برای چهار مجموعه[2] داریم:

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}| = |A| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$$
$$= \binom{16}{3} - \left[\binom{12}{3} + \binom{6}{3} + \binom{6}{3} + \binom{8}{3} - \binom{4}{3}\right]$$
$$= 560 - [220 + 20 + 20 + 56 - 4] = 248$$

***

زیرنویس

۱. فرض کنیم n شیء داشته باشیم که در آن‌ها، k نوع شیء متمایز $(k \le n)$ وجود داشته باشد؛ به‌طوری که n_1 تا از نوع اول، n_2 تا از نوع دوم، ... و n_k تا از نوع kام باشند و: $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. در این صورت، تعداد تبدیل‌های متمایز این n شیء برابر است با:

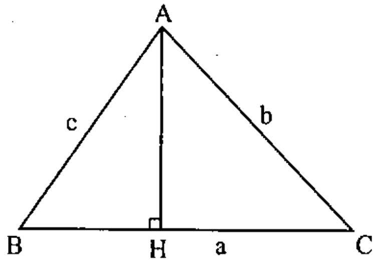
$$p_n = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_k!}$$

۲.
$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \sum_{i=1}^{4} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le 4} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le 4} |A_i \cap A_j \cap A_k| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$

اثبات دیگر بر قضیه‌ی هرون

● هوشنگ شرقی

قضیه‌ی هرون از قضایای کلیدی و مهم در هندسه است که در بیشتر کتاب‌های کلاسیک هندسه (به غیر از کتاب‌های هندسه‌ی ۱ و ۲ دوره‌ی متوسطه!) آمده است. به کمک این قضیه می‌توان مساحت هر مثلث را با داشتن طول اضلاع آن محاسبه کرد. اگر اضلاع مثلث را با a، b و c و محیط آن را با ۲p نمایش دهیم $(a+b+c=2p)$، مساحت آن (S) از دستور $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ به‌دست می‌آید.



دستور فوق به هرون اسکندرانی منسوب است که در حدود قرن دوم میلادی در اسکندریه‌ی مصر می‌زیست و در زمینه‌ی محاسبات هندسی کارهای زیادی انجام داده که از جمله‌ی آن‌ها همین دستور است. روش معمول در اثبات این قضیه که در اکثر کتاب‌ها ذکر شده است، استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس همراه با محاسبات جبری نسبتاً طولانی است. به‌عنوان تمرین، برای کسانی که با این اثبات آشنایی ندارند، راهنمایی‌هایی برای اثبات آن در پی می‌آید:

الف) در شکل قبل رابطه‌ی فیثاغورس را در مثلث ABH بنویسید و با جای‌گذاری $BH=a-CH$ نتیجه بگیرید:

$$CH=\frac{a^2+b^2+c^2}{2a}$$

ب) به کمک قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث AHC و دستور $AH=\sqrt{b^2-CH^2}$ و نتیجه‌ی بند (الف)، طول ارتفاع AH را برحسب a، b و c به‌دست آورید.

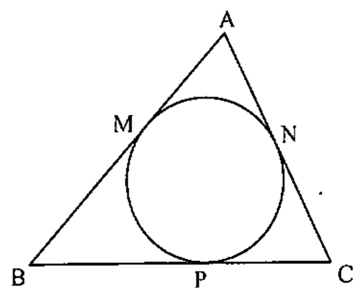
ج) با تجزیه‌ی عبارت جبری زیر رادیکال و فرض $a+b+c=2p$، سعی کنید عبارت فوق را به $AH=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ تبدیل و از آن‌جا به سادگی دستور هرون را استخراج کنید.

چنان‌که ملاحظه کردید، روش فوق در اثبات دستور هرون محاسبات جبری نسبتاً پیچیده‌ای دارد، لذا روش‌های دیگری هم برای اثبات آن ابداع شده است که یکی از جالب‌ترین آن‌ها در پی می‌آید.

***

برای اثبات این دستور، ابتدا سه پیش‌قضیه‌ی زیر مطرح می‌شوند که گرچه هر سه آن‌ها قضایای معروفی هستند، ولی اثبات آن‌ها را هم می‌آوریم.

قضیه‌ی ۱. دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC، روی اضلاع مثلث شش قطعه پدید می‌آورد که دوبه‌دو با هم برابر، و مساوی $p-a$، $p-b$ و $p-c$ هستند (p نصف محیط و a، b و c طول‌های اضلاع مثلث هستند).



اثبات: برابری این قطعات با توجه به قضیه‌ی برابری مماس‌های مرسوم از یک نقطه خارج از دایره بر آن، واضح است؛ یعنی: $AM=AN$، $CN=CP$ و $BM=BP$.

از آن‌جا می‌توان نوشت:

$$AN=AC-CN=AC-CP=AC-(BC-BP)$$
$$=AC-BC+BP=AC-BC+BM=AC-BC+AB-AM$$
$$=AC+AB-BC-AN\Rightarrow AN=b+c-a-AN$$
$$\Rightarrow 2AN=b+c-a\Rightarrow 2AN=(a+b+c)-2a=2P-2a$$
$$\Rightarrow AN=P-a\Rightarrow AM=AN=P-a$$

و به همین صورت ثابت می‌شود: $CN=CP=p-c$ و $BM=BP=p-b$

قضیه‌ی ۲. اگر α، β و γ سه زاویه‌ی حاده باشند و $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$، آن‌گاه:

$$tg\alpha tg\beta+tg\alpha tg\gamma+tg\beta tg\gamma=1$$

اثبات: به کمک دستور تانژانت مجموع دو زاویه به‌راحتی می‌توان نوشت:

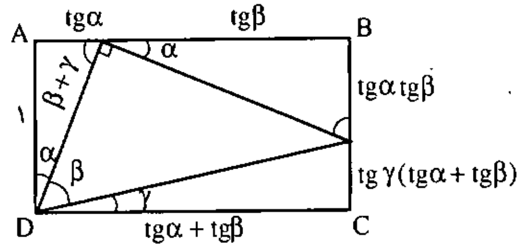
$$\alpha+\beta=90-\gamma\Rightarrow tg(\alpha+\beta)=tg(90-\gamma)\Rightarrow tg(\alpha+\beta)$$

$$=\cot g\gamma\Rightarrow\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}=\frac{1}{tg\gamma}\Rightarrow tg\alpha tg\beta+tg\beta tg\gamma$$
$$=1-tg\alpha tg\beta\Rightarrow tg\alpha tg\beta+tg\alpha tg\gamma+tg\beta tg\gamma=1$$

تمرین ۱. به کمک روشی مشابه، ثابت کنید: اگر $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ باشد، آن‌گاه:

$$tg\alpha+tg\beta+tg\gamma=tg\alpha tg\beta tg\gamma$$

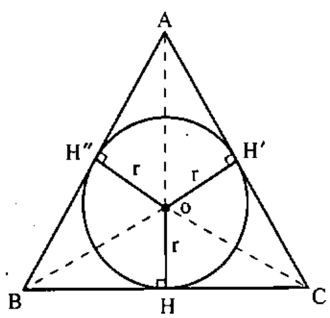
تمرین ۲. یک راه‌حل زیبای هندسی هم برای اثبات رابطه‌ی فوق وجود دارد. به شکل زیر توجه کنید:



مستطیل ABCD به طول $AB=CD=tg\alpha+tg\beta$ و به عرض $AD=BC=1$ رسم شده است. با توجه به شکل، $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$ و درستی اندازه‌ها را با توجه به شکل و به سادگی می‌توانید تحقیق کنید. هم‌چنین، با توجه به برابری $AD=BC$، درستی رابطه‌ی فوق را تحقیق کنید.

قضیه‌ی ۳. اگر S مساحت، 2p محیط و r شعاع دایره‌ی محاطی مثلث ABC باشد، داریم:

$$r=\frac{S}{P}$$



اثبات: مطابق شکل، O مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC است و $OH=OH'=OH''=r$ و می‌توان نوشت:

$$S_{ABC}=S_{OAB}+S_{OAC}+S_{OBC}$$
$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}OH''.AB+\frac{1}{2}OH'.AC+\frac{1}{2}OH.BC$$
$$=\frac{1}{2}r.c+\frac{1}{2}r.b+\frac{1}{2}r.a=\frac{1}{2}(a+b+c)r=pr$$
$$\Rightarrow S=pr\ ,\ \ r=\frac{S}{P}$$

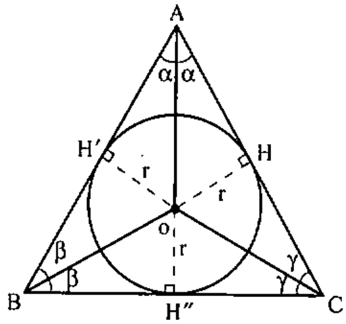
تمرین ۳. اگر h_a، h_b و h_c ارتفاعات نظیر اضلاع a، b و c

مثلث ABC باشند، ثابت کنید:

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$$

* * *

اکنون به کمک این سه قضیه، می‌توان درستی قضیه‌ی هرون را به سادگی اثبات کرد. مرکز دایره‌ی محاطی مثلث ABC، نقطه‌ی برخورد نیم‌سازهاست. بنابراین مطابق شکل داریم:



$$\Delta OAH: tg\alpha=\frac{r}{AH}=\frac{r}{p-a}$$

$$\Delta OBH': tg\beta=\frac{r}{BH'}=\frac{r}{p-b},\ \Delta OCH'': tg\gamma=\frac{r}{CH''}=\frac{r}{p-c}$$

$$2\alpha+2\beta+2\gamma=180^\circ \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma=90^\circ$$

$$\Rightarrow tg\alpha\, tg\beta+tg\alpha\, tg\gamma+tg\beta\, tg\gamma=1$$

$$\Rightarrow \frac{r^2}{(p-a)(p-b)}+\frac{r^2}{(p-a)(p-c)}+\frac{r^2}{(p-b)(p-c)}=1$$

$$\Rightarrow r^2\left[\underbrace{(p-c)+(p-b)+(p-c)}_{3p-(a+b+c)=3p-2p=p}\right]=(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\Rightarrow r^2p=(p-a)(p-b)(p-c),\quad r=\frac{S}{p}$$

$$\Rightarrow \frac{S^2}{p^2}p=(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\Rightarrow S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)\Rightarrow S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

تمرین ۴. مثلث ABC به اضلاع ۷، ۸ و ۵ مفروض است. اولاً به کمک دستور هرون مساحت مثلث را محاسبه کنید و نیز طول شعاع دایره‌ی محاطی و طول‌های ارتفاع‌های مثلث را به دست آورید. ثانیاً به کمک شکل بالا، مقادیر $tg\frac{A}{2}$، $tg\frac{B}{2}$ و $tg\frac{C}{2}$، و به کمک دستور $tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$، مقادیر tgA، tgB و tgC را به دست آورید و نشان دهید:

$$tgA+tgB+tgC=tgA\,tgB\,tgC$$

$$tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+tg\frac{A}{2}tg\frac{C}{2}+tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}=1$$

معرفی سایت‌های ریاضی جهان

● احسان یارمحمدی

Math Archives
http://archives.math.utk.edu

در صفحه‌ی اصلی این سایت، تیتر «عنوان‌های ریاضیات» (Topics in Mathematics) را مشاهده می‌کنیم. در واقع در صفحات این سایت، مخاطب لینک‌های متنوعی را پیدا خواهد کرد که به وسیله‌ی موضوعات ریاضیات سازمان‌دهی و طراحی شده‌اند. برای جست‌وجوی مفید و مؤثر در این سایت و نیز دست‌یابی به اطلاعات مورد نظرتان، دو روش پیش‌روی شماست:

الف) می‌توانید با کلیک کردن روی عبارت مورد نظر خود، به هریک از صفحات زیر بروید:

۱. جبر مجرد (Abstract Algebra)
۲. جبر (Algebra)
۳. آنالیز (Analysis)
۴. ریاضیات کاربردی (Applied Mathematics)
۵. حساب (Arithmetic)
۶. هنر و موسیقی (Art & Music)
۷. حساب دیفرانسیل و انتگرال (Calculus)
۸. نظریه‌ی ماشین‌های بافت سلولی (Cellular Automata)
۹. ترکیبیات (Combinatorics)
۱۰. آنالیز مختلط (Complex Analysis)
۱۱. هندسه‌ی محاسباتی (Computational Geometry)
۱۲. علم محاسباتی (Computational Science)
۱۳. جبر رایانه / رمزشناسی (Computer Algebra/ Cryptology)
۱۴. الگوریتم‌های ژنتیکی (Genetic Algorithms)
۱۵. هندسه‌ی دیفرانسیل (Differential Geometry)
۱۶. ریاضیات گسسته (Discrete Mathematics)
۱۷. دستگاه‌های دینامیکی (Dynamical Systems)
۱۸. حرکت اجسام سیال (Fluid Dunamics)
۱۹. آنالیز فوریه و امواج ضربه‌ای (Fourier Analysis & Wavelets)
۲۰. فراکتال‌ها (Fractals)
۲۱. هندسه (Geometry)
۲۲. تاریخ ریاضیات (History of Mathematics)
۲۳. ریاضیات صنعتی (Industrial mathematics)
۲۴. برنامه‌ریزی خطی و غیرخطی (Linear & Nonlinear Programing)

ادامه در صفحه‌ی ۴۶

log
لگاریتم

● احمد قندهاری

فرض می‌کنیم a عددی حقیقی و مثبت و مخالف عدد ۱ باشد. اگر اعدادی حقیقی مانند N و x وجود داشته باشند به‌طوری که $N = a^x$ ، در این صورت بنا به تعریف می‌گوییم: لگاریتم N در مبنای a برابر x است و می‌نویسیم:

$$N = a^x \Leftrightarrow \log_a N = x$$

عدد x را لگاریتم و عدد a را مبنای لگاریتم و عدد N را آنتی‌لگاریتم یا عدد L به‌ازا گوییم.

چون a عددی مثبت است و عدد مثبت به هر توان که برسد مثبت است، پس a^x و N عددهایی مثبت‌اند. به همین دلیل است که می‌گویند اعداد منفی و صفر لگاریتم ندارند.

مثال ۱: از تساوی $\log_{\sqrt[5]{3}} 3\sqrt{3} = x$ ، x را بیابید.

حل: بنا به تعریف لگاریتم می‌توان نوشت:

$$3\sqrt{3} = (\sqrt[5]{3})^x$$

دو طرف تساوی را به توان ۱۰ می‌رسانیم:

$$3^{10}(3^5) = (3^2)^x \Rightarrow 3^{15} = 3^{2x} \Rightarrow 2x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{2}$$

مثال ۲: از تساوی $\log_{2\sqrt[3]{2}} N = \frac{3}{4}$ ، N را بیابید.

حل: بنابه تعریف می‌توان نوشت:

$$N = (2\sqrt[3]{2})^{\frac{3}{4}} \Rightarrow N = \left[2^3(2)\right]^{\frac{1}{4}} \Rightarrow N = (2^4)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow N = 2$$

مثال ۳: اگر $\log_a(\sqrt{2} - 1) = -1$ ، آن‌گاه a را بیابید.

حل. بنا به تعریف می‌توان نوشت:

$$a^{-1} = (\sqrt{2} - 1) \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \times \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1}$$

$$\Rightarrow a=\frac{\sqrt{۲}+۱}{۱}\Rightarrow a=\sqrt{۲}+۱$$

فرمول‌های لگاریتم

توجه: هر عددی که در مبنای لگاریتم قرار می‌گیرد، مثبت و مخالف ۱ است.

$$۱)\ ۱=a^{۰}\Rightarrow \log_a ۱=۰ \qquad (۱)$$

$$۲)\ a=a^{۱}\Rightarrow \log_a a=۱ \qquad (۲)$$

۳. اگر $M=a^x$ و $N=a^y$، آن‌گاه می‌توان نوشت:

$\log_a M=x$ و $\log_a N=y$

$$M.N=a^x.a^y\Rightarrow M.N=a^{x+y}\Rightarrow \log_a M.N=x+y$$

$$\Rightarrow \log_a M.M=\log_a M+\log_a N \qquad (۳)$$

تعمیم:

$$\log_a M.N\cdots K=\log_a M+\log_a N+\cdots+\log_a K$$

۴. اگر $M=a^x\Rightarrow \log_a M=x$

اگر $N=a^y\Rightarrow \log_a N=x$

$$\frac{M}{N}=\frac{a^x}{a^y}\Rightarrow \frac{M}{N}=a^{x-y}\Rightarrow \log_a\frac{M}{N}=x-y$$

$$\Rightarrow \log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N \qquad (۴)$$

۵. $\log_a\frac{۱}{N}=\log_a ۱-\log_a N\ ,\ \log_a ۱=۰$

$$\Rightarrow \log_a\frac{۱}{N}=-\log_a N \qquad (۵)$$

۶. اگر $N=a^x\Rightarrow \log_a N=x$ و $x\neq ۰$

فرض می‌کنیم: $\log_{a^p}N^m=kx$. می‌خواهیم k را بیابیم.

بنا به تعریف می‌نویسیم: $N=a^x$ و $N^m=(a^p)^{kx}$

$$(a^x)^m=(a^p)^{kx}\Rightarrow a^{mx}=a^{kpx}\Rightarrow mx=kpx$$

$$\Rightarrow m=kp\Rightarrow k=\frac{m}{p}$$

$$\Rightarrow \log_{a^p}N^m=\frac{m}{p}\log_a N \qquad (۶)$$

مثال: $\log_{\sqrt{۵}}۱۲۵=\log_{۵^{\frac{۱}{۲}}}۵^{۳}=\frac{۳}{\frac{۱}{۲}}\log_۵ ۵=۶$

نتایج فرمول ۶

$$۱)\ \log_a N^m=m\log_a N$$

$$۲)\ \log_{a^p}N=\frac{۱}{p}\log_a N$$

$$۳)\ \log_{\frac{۱}{a}}\frac{۱}{N}=\log_{a^{-۱}}N^{-۱}=\log_a N$$

$$۴)\ \log_{\sqrt[p]{a}}\sqrt[m]{N}=\log_{a^{\frac{۱}{p}}}N^{\frac{۱}{m}}=\frac{\frac{۱}{m}}{\frac{۱}{p}}\log_a N=\frac{p}{m}\log_a N$$

۷. اگر $\log_b a=x$ و $\log_a b=y$ ، آن‌گاه می‌توان نوشت:

$$a=b^x,\ \ b=a^y\Rightarrow a=(a^y)^x\Rightarrow a=a^{x.y}$$

$$\Rightarrow x.y=۱\Rightarrow \log_b a\times\log_a b=۱ \qquad (۷)$$

نتایج فرمول ۷

$$۱)\ \log_b a=\frac{۱}{\log_a b}$$

$$۲)\ \log_{MN}a=\frac{۱}{\log_a MN}=\frac{۱}{\log_a M+\log_a N}$$

مثال: حاصل $\log_{\sqrt{۲۴}}\sqrt{۳}$ را بیابید.

حل:

$$\log_{\sqrt{۲۴}}\sqrt{۳}=\log_{۲۴}۳=\frac{۱}{\log_۳ ۲۴}=\frac{۱}{\log_۲ ۲^۳\times ۳}$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{۲۴}}\sqrt{۳}=\frac{۱}{\log_۲ ۲^۳+\log_۲ ۳}=\frac{۱}{۳\log_۲ ۲+\log_۲ ۳}$$

$$=\frac{۱}{۳+\log_۲ ۳}$$

۸. فرض می‌کنیم: $\log_b a=x$ و $\log_c b=y$ و $\log_c a=z$. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$a=b^x\ ,\ \ b=c^y\ ,\ \ a=c^z$$

$$a=a\Rightarrow c^z=b^x\Rightarrow c^z=(c^y)^x\Rightarrow c^z=c^{xy}$$

$$\Rightarrow z=xy\Rightarrow \log_b a\times\log_c b=\log_c a \qquad (۸)$$

تعمیم:

$$\log_b a\times\log_c b\times\log_d c\times\cdots\times\log_n k=\log_n a$$

مثال:

$$\log_۷ ۳۶\times\log_۶ ۷=\log_۶ ۳۶=\log_۶ ۶^۲=۲\log_۶ ۶=۲$$

توجه: اگر مبنای لگاریتم ۱۰ باشد، آن را نمی‌نویسیم.

۹.

$$\log_b a\times\log_c b=\log_c a\Rightarrow \log_b a=\frac{\log_c a}{\log_c b} \qquad (۹)$$

۱۰.

$$\text{اگر}\begin{cases}\log_c x = k \Rightarrow x = c^k \\ \log_b k = p \Rightarrow k = b^p \\ \log_a p = m \Rightarrow p = a^m\end{cases} \Rightarrow x = c^k = c^{b^p} = c^{b^{a^m}}$$

$$m = \log_a p = \log_a(\log_b k) = \log_a(\log_b(\log_c x))$$

$$\Rightarrow \log_a(\log_b(\log_c x)) = m \Rightarrow x = c^{b^{a^m}} \qquad (10)$$

مثال: اگر $\log_{\sqrt[4]{3}}(\log_{\sqrt[3]{2}}(\log_{\sqrt[4]{2}} x)) = 4$ ، آن‌گاه x را بیابید.

حل:

$$x = \sqrt[4]{2}^{\sqrt[3]{2}^{\sqrt[4]{3}^{4}}} \Rightarrow x = \sqrt[4]{2}^{\sqrt[3]{2}^{3}} \Rightarrow x = \sqrt[4]{2}^{2} \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

۱۱.

$$\log_a N = p \Rightarrow N = a^p \Rightarrow N = (a)^{\log_a N} \qquad (11)$$

۱۲. همواره داریم:

$$(x)^{\log_a y} = (y)^{\log_a x} \qquad (12)$$

اگر از دو طرف در مبنای a لگاریتم بگیریم، داریم:

$\log_a y . \log_a x = \log_a x . \log_a y$

تذکر: در تعریف لگاریتم گفتیم، a عددی حقیقی و مثبت و $a \neq 1$ است. پس برای a دو حالت وجود دارد: حالت اول $a > 0$ و حالت دوم $0 < a < 1$.

حال چند رابطه را در این دو حالت بررسی می‌کنیم:

حالت اول: $\log a > 0 \ , \ a > 1$

$(I) \ \log_a N > 0 \Rightarrow \dfrac{\log N}{\log a} > 0 \ , \ \log a > 0$

$\Rightarrow \log N > 0 \Rightarrow N > 1$

$(II) \ \log_a N < 0 \Rightarrow \dfrac{\log N}{\log a} < 0 \ , \ \log a > 0$

$\Rightarrow \log N < 0 \Rightarrow 0 < N < 1$

$(III) \ \log_a N > 1 \Rightarrow \dfrac{\log N}{\log a} > 1 \ , \ \log a > 0$

$\Rightarrow \log N > \log a \Rightarrow N > a$

$(IV) \ \log_a N < 1 \Rightarrow \dfrac{\log N}{\log a} < 1 \ , \ \log a > 0 \Rightarrow \log N < \log a$

$\Rightarrow 0 < N < a$

$(V) \ \log_a N > -1 \Rightarrow \dfrac{\log N}{\log a} > -1 \ ; \ \log a > 0 \Rightarrow \log N > -\log a$

$\Rightarrow \log N > \log a^{-1} \Rightarrow \log N > \log \dfrac{1}{a} \Rightarrow N > \dfrac{1}{a}$

$(VI) \ \log_a N < -1 \Rightarrow \dfrac{\log N}{\log a} < -1 \ , \ \log a > 0$

$\Rightarrow \log N < -\log a$

$\Rightarrow \log N < \log a^{-1} \Rightarrow \log N < \log \dfrac{1}{a} \Rightarrow 0 < N < \dfrac{1}{a}$

حالت دوم: $\log a < 0 \ , \ 0 < a < 1$

$(I)' \ \log_a N > 0 \Rightarrow \dfrac{\log N}{\log a} > 0 \ , \ \log a < 0 \Rightarrow \log N < 0$

$\Rightarrow 0 < N < 1$

$(II)' \ \log_a N < 0 \Rightarrow \dfrac{\log N}{\log a} < 0 \ , \ \log a < 0 \Rightarrow \log N > 0$

$\Rightarrow N > 1$

$(III)' \ \log_a N > 1 \Rightarrow \dfrac{\log N}{\log a} > 1 \ , \ \log a < 0 \Rightarrow \log N < \log a$

$\Rightarrow 0 < x < a$

$(IV)' \ \log_a N < 1 \Rightarrow \dfrac{\log N}{\log a} < 1 \ , \ \log a < 0 \Rightarrow \log N > \log a$

$\Rightarrow x > a$

$(V)' \ \log_a N > -1 \Rightarrow \dfrac{\log N}{\log a} > -1 \ , \ \log a < 0$

$\Rightarrow \log N < -\log = \log \dfrac{1}{a} \Rightarrow 0 < N < \dfrac{1}{a}$

$(VI)' \ \log_a N < -1 \Rightarrow \dfrac{\log N}{\log a} < -1 \ , \ \log a < 0$

$\Rightarrow \log N > -\log a = \log \dfrac{1}{a} \Rightarrow N > \dfrac{1}{a}$

سؤال‌های چهارگزینه‌ای

۱. اگر $\log(\log(\log x)) = 0$ ، آن‌گاه x کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۱۰۰۰ ۴) 10^{10}

حل: گزینه‌ی (۴)

$\log(\log(\log x)) = 0 \Rightarrow \log(\log x) = 1 \Rightarrow \log x = 10$

$\Rightarrow x = 10^{10}$

۲. حاصل $(\sqrt{10})^{16 \log \sqrt[4]{3}} - 8 \log \sqrt{2}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{9}{2}$ ۴) $\frac{9}{8}$

حل: گزینه‌ی (۲)

$$=(10)^{8\log\sqrt[4]{3}-4\log\sqrt{2}}=(10)^{\log 9-\log 4}=(10)^{\log\frac{9}{4}}=\frac{9}{4}$$

۳. اگر $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x+\log_{16} x=(10)^{\log\frac{25}{12}}$، آن‌گاه x کدام است؟

۱) 8 ۲) $4\sqrt{2}$ ۳) 4 ۴) 2

حل: گزینه‌ی (۴)

$$=\log_2 x+\log_{2^2} x+\log_{2^3} x+\log_{2^4} x=\frac{25}{12}$$

$$\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x+\frac{1}{3}\log_2 x+\frac{1}{4}\log_2 x=\frac{25}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{25}{12}\log_2 x=\frac{25}{12}\Rightarrow \log_2 x=1\Rightarrow x=2$$

۴. اگر $y\times 5^{\log x}=x^2$، مقدار y کدام است؟

۱) $20^{\log x}$ ۲) $10^{\log x}$ ۳) $2^{\log x}$ ۴) $5^{\log x}$

حل: گزینه‌ی (۱)

$$y=\frac{x^2}{5^{\log x}}=\frac{x^2}{x^{\log 5}}=x^{2-\log 5}=x^{\log 100-\log 5}$$

$$\Rightarrow y=x^{\log 20}=20^{\log x}$$

۵. اگر $(x)^{\log x}=(\frac{x}{10})^6$، آن‌گاه x کدام است؟

۱) 1 ۲) 10 ۳) 10^2 ۴) 10^4

حل: گزینه‌ی (۳). از دو طرف در مبنای ۱۰ لگاریتم می‌گیریم.

$$\log x.\log x=4\log\frac{x}{10}\Rightarrow(\log x)^2=4(\log x-\log 10)$$

$$(\log x)^2-4\log x+4=0\Rightarrow(\log x-2)^2=0\Rightarrow \log x=2$$
$$\Rightarrow x=100$$

۶. اگر $M=(\log_6 5)^{\cos\alpha}$، آن‌گاه بیشترین مقدار M کدام است؟

۱) 1 ۲) $+\infty$ ۳) $\log\frac{6}{5}$ ۴) $\log_6 5$

حل: گزینه‌ی (۳). چون $\log_6 5$ عددی بین صفر و یک است و این عدد به توان ۱,...,۰,...,۱- برسد، وقتی ماکزیمم است که توانش ۱- باشد.

$$\mathrm{Max}(M)=(\log_6 5)^{-1}=\frac{1}{\log_6 5}=\log_5 6$$

۷. اگر $\log_x a=4$ و $\log_y a=2$ و $\log_z a=3$، آن‌گاه $\log^a_{x.y.z}$ کدام است؟

۱) $\frac{13}{12}$ ۲) $\frac{12}{13}$ ۳) $\frac{8}{11}$ ۴) $\frac{11}{8}$

حل: گزینه‌ی (۲).

$$\log_{x.y.z} a=\frac{1}{\log_a x.y.z}=\frac{1}{\log_a x+\log_a y+\log_a z}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=\frac{12}{13}$$

۸. اگر $(3)^{\frac{n+1}{2}}=(4)^{\log_2 9}$، آن‌گاه n کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

حل: گزینه‌ی (۳).

$$3^{\frac{n+1}{2}}=4^{\log_2 9}\Rightarrow 3^{\frac{n+1}{2}}=4^{\log_4 81}$$

$$\Rightarrow 3^{\frac{n+1}{2}}=81\Rightarrow 3^{\frac{n+1}{2}}=3^4\Rightarrow\frac{n+1}{2}=4\Rightarrow n=7$$

۹. اگر $\log_{11} N=a$، آن‌گاه $\log_{\sqrt{N}} 121$ کدام است؟ (کنکور سراسری)

۱) $2a$ ۲) $\frac{a}{2}$ ۳) $\frac{4}{a}$ ۴) $\frac{a}{4}$

حل: گزینه‌ی (۳).

$$\log_{11} N=a\Rightarrow \log_N 11=\frac{1}{a}$$

$$\log_{\sqrt{n}} 121=\log_{n^{\frac{1}{2}}} 11^2=\frac{2}{\frac{1}{2}}\log_n 11=4\log_n 11=4(\frac{1}{a})=\frac{4}{a}$$

۱۰. جواب معادله‌ی $\log(\log x)=\log(7-2\log x)-\log 5$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۱۰۰

حل: گزینه‌ی (۳).

$$\log(\log x)=\log(\frac{7-2\log x}{5})$$

چون تابع $y=\log x$ تابعی یک به یک است، می‌توان نوشت:

$$\log x=\frac{7-2\log x}{5}\Rightarrow 5\log x=7-2\log x$$

$$\Rightarrow 7\log x=7\Rightarrow \log x=1\Rightarrow x=10$$

نگارش ریاضیات در انجمن

نگارش موضوع‌های ریاضی با جمله‌های بسیار، در بعضی موارد مناسب نیست. در بسیاری از موارد، نگارش یک موضوع ریاضی با رسم اشکال متعدد که هریک از آن‌ها مرحله‌ای از اثبات را بیان می‌کند، با توضیح‌های کوتاه و رسا بسیار مناسب است. افزون بر این، به کارگیری نشان‌ها برای پرهیز از نگارش بعضی جمله‌ها و به‌کارگیری پیکان‌ها برای ارجاع‌ها و به‌طور کلی هرگونه اشاره‌ی کوتاه و رسا برای اثبات موضوع، به سرعت فهماندن کمک شایانی می‌کند.

این شیوه‌ی نگارش موضوع علمی، فکر خواننده را بیشتر متمرکز می‌کند، زیرا چشم خواننده، اشکال و نشان‌ها را با سرعت بیشتر می‌پیماید تا جمله‌ها را.

هم‌چنین، یک شیوه‌ی مناسب در نگارش موضوع‌های علمی آن است که در یک صفحه‌ی کتاب، موضوع (یا قسمتی از آن) را شرح دهیم (با جمله‌های کافی و فرمول‌ها و شکل‌ها) و در صفحه‌ی مقابل (یا در زیر صفحه، اگر جا کافی باشد) همان مطلب را فقط با شکل‌ها و فرمول‌های مربوط و پیکان‌ها (بدون جمله و یا با تعداد کمی جمله‌های کوتاه) مطرح کنیم تا خواننده برای مطالعه‌ی دوباره یا سه‌باره‌ی موضوع، فقط همان صفحه‌ی دوم را از نظر بگذراند. با این شیوه‌ی نگارش، نوشته با سرعت زیاد در ذهن خواننده مرور می‌شود. این روش نگارش مطالب، به پرورش فکر علمی کمک شایانی می‌کند. ممکن است بعضی کسان بگویند، این روش نگارش اقتصادی نیست (مصرف زیاد کاغذ). اما اگر توجه کنیم که در این روش، هنگام مطالعه‌ی دوباره یا سه‌باره‌ی موضوع، وقت کمی مصرف می‌شود و افزون بر این، روش یاد شده به تمرکز فکر و قدرت تفکر کمک می‌کند که این لازمه‌ی پرورش خلاقیت است، آن‌گاه در می‌یابیم که این روش بسیار هم اقتصادی است.

در سطرهای آینده، چند مسئله‌ی ریاضی را با شیوه‌ی نگارشی که یاد کردم، می‌نگارم. در پایان مقاله، اثباتی برای هم‌رسی میانه‌های مثلث عرضه شده که از آنِ نگارنده است. این اثبات جذاب و زودفهم است. تصور می‌کنم دانش‌آموزان آن را کاملاً بپسندند.

در آغاز مقاله‌ی خود، داستان انجمن متفکران را آورده‌ام. نخستین بند مرام این انجمن آن بود که اعضای آن بسیار بیندیشند و اندیشه‌ی خود را با عبارات کوتاه بیان کنند و سخن نگویند، مگر به ضرورت.

چون شیوه‌ی کار اعضای انجمن متفکران با شیوه‌ی نگارش موضوع‌های علمی مورد نظرم هماهنگ است، از این رو آن داستان را در مقدمه‌ی مقاله‌ی خود یاد می‌کنم.

انجمن متفکران

آورده‌اند که در یکی از بلاد مشرق که امن و راحت هنرپرور بود و عدل و انصاف سایه‌گستر، گروهی از دانشمندان حقیقت‌جوی و هنرپیشگان بی‌های هوی، انجمنی ساخته و در تحقیق حقایق و استکشاف دقایق علم و ادب رنج می‌بردند، چون آنان را جز دانش و هنر، مطلوبی و جز ترقی فرهنگ و معرفت، مقصودی نبود. غول اغراض از آن مجمع گریخته و دیو خودنمایی

متفکران

● دکتر احمد شرف‌الدین

از آن ساحت رخت بربسته بود. فضلای انجمن متفکران سر در گریبان تحقیق فرو برده و زنگ شهرت و جاه‌طلبی از رخسار عمل خویش سترده بودند و برای این‌که در گفت‌وگوها و مباحثات علمی نیز حبّ سخن‌پردازی بر انصاف و اعتدال غالب نگردد، چنین قرار گذاشته بودند که اعضای این انجمن:

همواره بیندیشند و کم بنویسند و سخن نگویند الاّ به ضرورت.

از این‌رو، محفل آنان را انجمن متفکران می‌خواندند. با وجود آن‌که اعضای آن انجمن بسیار کم سخن می‌گفتند، آوازه دانش و کمالات آنان به هر جا رسید و بسیاری از دانشمندان آرزوی عضویت در انجمن متفکران را داشتند. اما چون شماره‌ی افراد آن انجمن تنها ۱۰۰ بود، پذیرش خواهان تازه‌ی عضویت ممکن نبود.

در یکی از شهرستان‌های دور، دانایی بود به جمال حکمت آراسته و از نقص بشریت پیراسته.

حضرتش ملجأ طالبان معرفت و پیشگاهش مطاف صاحبان ذوق و قریحت بود. همواره آرزو داشت که از غوغای عوام رسته و در سلک خواص پیوسته گردد و از محفل مریدان ناهنجار، به مجلس یاران غمگسار درآید و چون فطرتاً از هرزه درایی بلکه از سخن‌سرایی اکراه داشت، انجمن متفکران را بهترین مقام می‌پنداشت.

روزی خبر یافت که جایی در آن محفل انس خالی شده است. بی‌درنگ بار سفر بربست و بیابان‌ها و کوهسارها درنوردید تا به شهر انجمن متفکران رسید. هم‌چنان از گرد راه به درگاه علما شتافت و سطری درنهایت ایجاز بر ورقی نوشت و به دربان داد که: فلان بر در است و افتخار عضویت را منتظر.

قضا را کار از کار گذشته و دیگری در مکان خالی نشسته بود. چون رئیس انجمن، حاضران را از مضمون آن سطر آگاهی داد، آه حسرت از دل‌ها برآمد و دود غبن و اسف از سرها برخاست، زیرا که همه را پایه‌ی دانش و مایه‌ی بینش آن استاد مسافر معلوم بود و از صفت ممتاز و خصلت بی‌انباز او، یعنی سکوت تام و احتراز از کلام او خبر داشتند و به جان، مشتاق همدمی و مصاحبت او بودند؛ اما چه چاره که در روز پیش، یکی از مدعیان با اقتدار و عاشقان نام و اشتهار، کرسی خالی را فرو گرفته.

رئیس انجمن که ناگزیر بایستی آن خبر ملالت اثر را به دانای مسافر بدهد، در حیرت بود که چگونه این تکلیف دشوار را به انجام رساند. دیر زمانی در بحر فکرت فرورفت، به هر راهی که موافق حسن مجاملت و مطابق آداب صحبت بود، اندیشه کرد. عاقبت بفرمود تا جامی آوردند و چندان آب در آن ریختند که گنجایش ذره‌ای بیش نداشت؛ چنان‌که اگر قطره‌ای بر آن می‌افزودند، به همان مقدار از جام فرومی ریخت. پس اشارت کرد تا میهمان را به درون آوردند. حکیم با سادگی و خضوعی که نشانه‌ی اهل فضل و کمال است، درآمد. رئیس از جای برخاست و بی‌آن‌که سخنی بر زبان راند، جام مالامال را بانهایت اندوه و ملال به وی نمود.

حکیم به فراست دریافت که عدد افراد انجمن کامل و تمنّی او باطل است. لکن پای ثبات او از جای به در نرفت و خواست تا به وسیلتی، مجلسیان را آگاه کند که از افزودن عضوی، انجمنی را و از افکندن دانه، خرمنی را زیان نرسد و در حیرت بود که چگونه بی‌دستاویز کلام، این مرام را ادا کند که ناگاه در پیش پای خود، برگ گلی افتاده دید. حکیم آن برگ را برگرفت و آهسته بر سطح جام قرار داد. چنان‌که قطره‌ای فرونریخت و چین کدورتی بر رخسار مصفای آب نیفتاد.

حاضران چون این جواب ظریف بدیدند، یکباره شادمان شدند و کف‌ها زدند و به اتفاق، آن بزرگوار را برخلاف رسم و قانون انجمن، پذیرفتند و دفتر عضویت را پیشش نهادند تا مانند دیگران نام و نشان را به خط خویش بنگارد. حکیم چون از این کار بپرداخت، لازم دید که بنا بر مرسوم، کلمه‌ای چند در سپاس بگوید، اما چون قرار بود سخن نگویند الا به ضرورت؛ در حاشیه‌ی دفتر، عدد صد را که شماره‌ی اعضای انجمن بود، نگاشته، صفری پیش از صد گذاشت (۰۱۰۰) و در زیر آن چنین نوشت: «به این مقدار نه چیزی افزوده شد، نه چیزی کم». رئیس انجمن قلم برگرفت و با همان سادگی و ادب، عدد صد را بنگاشت و صفری پس از آن بگذاشت (۱۰۰۰) و بنوشت: «قدر ما ده برابر گشت».

مسئله‌ی اول (شطرنج)

۱	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴	۱۲۸
۲۵۶							
							$۲^{۶۳}$

$$\begin{cases} S=۱+۲+۴+۸+\cdots+۲^{۶۳} \\ S=? \end{cases}$$

در صفحه‌ی شطرنج، در خانه‌ی اول، یک گندم می‌گذاریم و در خانه‌ی دوم دو گندم. سپس در هر خانه دو برابر خانه‌ی پیشین گندم می‌گذاریم. می‌خواهیم مجموع دانه‌های گندم را حساب کنیم.

حل

$$S+۱=\underbrace{۱+۱}_{۲}+۲+۴+۸+\cdots+۲^{۶۳}$$

$$S+۱=\underbrace{۲+۲}_{۴}+۴+۸+\cdots+۲^{۶۳}$$

$$S+۱=\underbrace{۴+۴}_{۸}+۸+\cdots+۲^{۶۳}$$

$$S+۱=\underbrace{۸+۸}_{۱۶}+\cdots+۲^{۶۳}$$

....

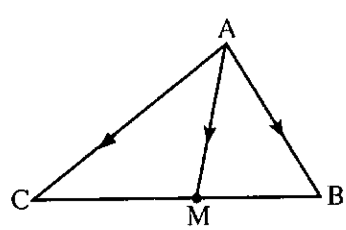
$$S+۱=\underbrace{۲^{۶۲}+۲^{۶۲}}_{۲^{۶۳}}+۲^{۶۳}=۲^{۶۳}+۲^{۶۳}$$

$$S=۲^{۶۴}-۱$$

$$S=۱۸\ \ ۴۴۶\ \ ۷۴۴\ \ ۰۷۳\ \ ۷۰۹\ \ ۵۵۱\ \ ۶۱۵$$

❊ ❊ ❊ ❊

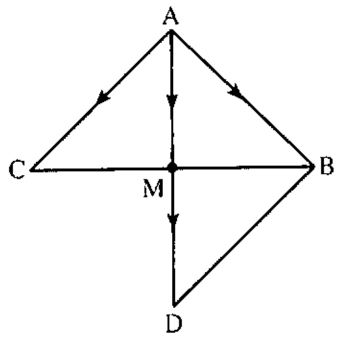
مسئله‌ی دوم



$$MB=MC\Rightarrow \vec{AB}+\vec{AC}=۲\vec{AM}$$

در مثلث ABC پاره‌خط AM میانه است، ثابت کنید...

حل



$$\vec{MD}=\vec{AM}$$

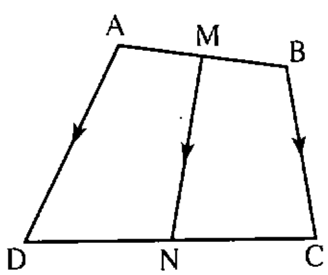
$$\begin{cases} MC=MB \\ AM=MD \\ \text{اندازه‌ی زاویه } AMC = \text{اندازه‌ی زاویه } BMD \end{cases}\Rightarrow A\overset{\Delta}{M}C=B\overset{\Delta}{M}D$$

$$A\overset{\Delta}{M}C=B\overset{\Delta}{M}D\Rightarrow \begin{cases} AC\parallel BD \\ AC=BD \end{cases}\Rightarrow \vec{AC}=\vec{BD}$$

$$\vec{AC}=\vec{BD}\Rightarrow \vec{AB}+\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{BD}=\vec{AD}=۲\vec{AM}$$

❊ ❊ ❊

مسئله‌ی سوم



$$\begin{cases} MA=MB \\ ND=NC \end{cases}\Rightarrow \vec{AD}+\vec{BC}=۲\vec{MN}$$

در چهار ضلعی ABCD (هامنی یا ناهامنی) دو نقطه‌ی M و N به‌ترتیب وسط‌های دو ضلع روبه‌روی AB و CD هستند. ثابت کنید:

$$\vec{AD}+\vec{BC}=۲\vec{MN}$$

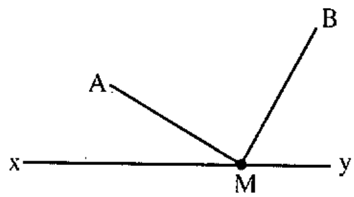
حل

$$\vec{MN}=\vec{MA}+\vec{AD}+\vec{DN}$$

. . . .

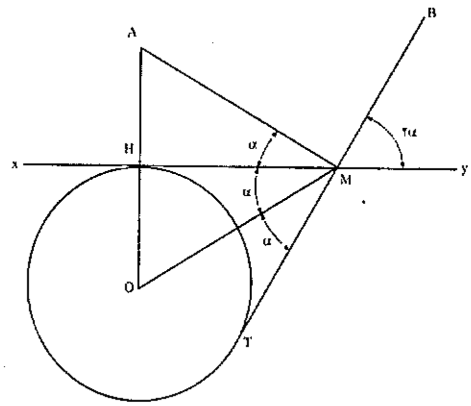
. . . .

مسئله‌ی چهارم



در صفحه‌ی P، خط XY و دو نقطه‌ی A و B داده شده‌اند. بر خط XY نقطه‌ی M را چنان بگیرید که اندازه‌ی زاویه‌ی BMY دو برابر اندازه‌ی زاویه‌ی AMX باشد.

حل



(۱) رسم خط AHC عمود بر خط XY

(۲) $HC = HA$

(۳) رسم دایره به مرکز C و شعاع CH

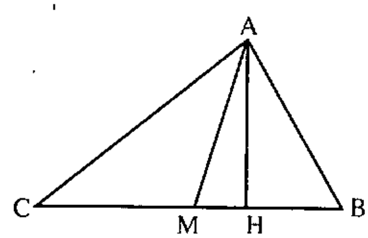
(۴) رسم مماس BT

(۵) $M = BT \cap XY$

❊ ❊ ❊

مسئله‌ی پنجم

ثابت کنید در هر مثلث، سه میانه همرس‌اند.

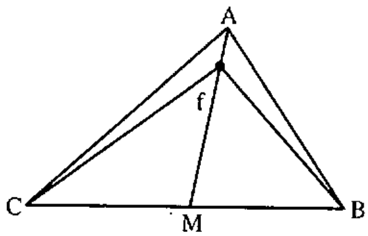


بند ۱:

$$\begin{cases} MB = MC \\ AH \perp BC \end{cases}$$

مساحت $A\overset{\Delta}{M}B$ = مساحت $A\overset{\Delta}{M}C$

بند ۲:



$$\begin{cases} MB = MC \\ P \in AM \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{مساحت } P\overset{\Delta}{M}B = \text{مساحت } P\overset{\Delta}{M}C \\ \text{مساحت } P\overset{\Delta}{A}B = \text{مساحت } P\overset{\Delta}{A}C \end{cases}$$

بند ۳: نقطه‌ی P را روی میانه‌ی AM از نقطه‌ی A به سوی نقطه‌ی M حرکت می‌دهیم. مساحت مثلث‌های PAB و PAC از صفر به سوی نصف مساحت مثلث ABC تغییر می‌کند. پس نقطه‌ای چون A′ روی میانه‌ی AM وجود دارد، به‌طوری که:

مساحت $A'\overset{\Delta}{C}A$ = مساحت $A'\overset{\Delta}{B}C$ = مساحت $A'\overset{\Delta}{A}B$

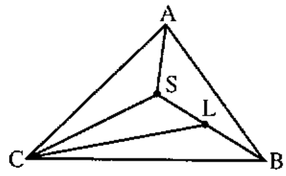
بند ۴: با همین شیوه‌ی استدلال نتیجه می‌گیریم که نقطه‌ی B′ روی میانه‌ای که از رأس B می‌گذرد وجود دارد، به‌طوری که:

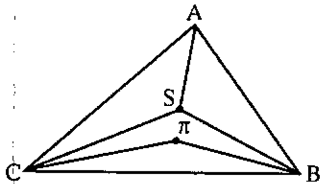
$B'\overset{\Delta}{C}A$ = مساحت $B'\overset{\Delta}{B}C$ = مساحت $B'\overset{\Delta}{A}B$

و نیز نقطه‌ی C′ ...

بند ۵: داخل مثلث ABC، تنها یک نقطه‌ی S وجود دارد، به‌طوری‌که:

مساحت $S\overset{\Delta}{C}A$ = مساحت $S\overset{\Delta}{B}C$ = مساحت $S\overset{\Delta}{A}B$





مساحت‌های مثلث‌های MBC و LBC، از یک سوم مساحت مثلث ABC کمترند.

بند ۶: پس سه نقطه‌ی A′ ، B′ و C′ بر هم منطبق‌اند، یعنی سه میانه‌ی هر مثلث همرس‌اند.

لازم به ذکر است، اثبات همرس سه میانه که در سطرهای بالا بیان شد، از آن صاحب این قلم است.

بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک (ب م م) یا بزرگ‌ترین شمارنده‌ی مشترک

● حمیدرضا امیری

عدد صحیح c را مقسوم‌علیه مشترک یا شمارنده‌ی مشترک دو عدد صحیح a و b می‌نامیم، در صورتی که هر دو را بشمارد؛ یعنی $c|a$ و $c|b$.

برای مثال، عدد ۳ یک شمارنده‌ی مشترک برای دو عدد ۶ و ۹- است؛ زیرا $3|6$ و $3|-9$.

تعریف: اگر a و b دو عدد صحیح باشند، به طوری که حداقل یکی از آن‌ها صفر نباشد، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب م م) a و b را با نماد (a,b) نمایش می‌دهیم و آن عددی است طبیعی چون d، که اولاً مقسوم‌علیه مشترک a و b باشد و دوم این‌که هر مقسوم‌علیه مشترک a و b از d کوچک‌تر باشد.

اگر بخواهیم معادل تعریف فوق را با نمادهای ریاضی بیان کنیم، خواهیم داشت:

$$(a,b)=d \Leftrightarrow \begin{cases} \text{I)}\ d|a, d|b \\ \text{II)}\ \forall c>0, c|a, c|b \Rightarrow c\leq d \end{cases}$$

به مثال‌های زیر توجه کنید:

$(6,8)=2$ ، $(4,9)=1$ ، $(3,-6)=3$

تعریف: اگر برای دو عدد صحیح a و b داشته باشیم $(a,b)=1$، در این صورت می‌گوییم a و b نسبت به هم اول (یا متباین) هستند. برای مثال، $(4,9)=1$، $(3,5)=1$ و $(5,6)=1$.

تذکر: اگر دو عدد صحیح a و b مفروض باشند و مجموعه‌ی همه‌ی شمارنده‌های مشترک a و b را A بنامیم، یعنی فرض کنیم $A=\{c \mid c|a, c|b\}$ واضح است که $A\subseteq Z$ و $A\neq\varnothing$؛ زیرا $1\in A$. از طرف دیگر، اگر فرض کنیم $a<b$، در این صورت $|a|$ یک کران بالا برای مجموعه‌ی A است (زیرا عددی بزرگ‌تر از $|a|$ نمی‌تواند a را عاد کند)، پس طبق قضیه[1]، مجموعه‌ی A باید دارای عضو انتها باشد که این عضو انتها همان ب م م است. در واقع ثابت شد که همواره ب م م دو عدد صحیح که حداقل یکی

از آن‌ها مخالف صفر باشد، موجود است.

قضیه‌ی ۱: اگر a و b دو عدد صحیح و $a|b$ $(a \neq 0)$، در این صورت $(a, b) = |a|$.

اثبات: باید ثابت کنیم که $|a|$ هر دو شرط ب‌م‌م را دارد:

۱) $a|a \; , \; -a|a \Rightarrow |a|\,|a$

طبق فرض: $a|b \Rightarrow -a|b \Rightarrow |a|\,|b$

(یعنی $|a|$ یک مقسوم‌علیه مشترک a و b است.)

۲) فرض کنیم $c > 0$ ، $c|a \; , \; c|b$

$$c|a \Rightarrow |c| \leq |a| \overset{c>0}{\Rightarrow} c \leq |a|$$

(یعنی $|a|$ از هر مقسوم‌علیه مشترک a و b بزرگ‌تر است.)

قضیه‌ی ۲: اگر p عددی اول باشد و a عددی صحیح؛ به طوری که $p \nmid a$ ، در این صورت همواره $(p, a) = 1$ (عدد اول p نسبت به هر عددی که مضرب p نباشد، اول است.)

اثبات: فرض کنیم $(p, a) = d$ ، ثابت می‌کنیم $d = 1$.

$$(p,a) = d \begin{cases} \nearrow d|a \quad (1) \\ \searrow d|p \overset{p \text{ اول}}{\Rightarrow} d = 1 \text{ یا } d = p \end{cases}$$

اگر $d = p$ باشد، در این صورت، با توجه به (۱) باید $p|a$ (به جای d قرار می‌دهیم p) که با فرض $p \nmid a$ تناقض دارد؛ پس باید $d = 1$.

قضیه‌ی ۳ (قضیه‌ی بزو): اگر a و b دو عدد صحیح و حداقل یکی از آن‌ها مخالف صفر باشد، در این صورت، عضو ابتدای مجموعه‌ی $A = \{ma + nb > 0 \,|\, m, n \in Z\}$ ، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a و b است؛ یعنی: $\min A = (a, b)$.

اثبات: واضح است که $A \subseteq N$ ، از طرفی حداقل یکی از دو عدد a و b ناصفر است. بنابراین حداقل یکی از دو عدد $|a|$ یا $|b|$ عضو A است و $A \neq \varnothing$ ؛ زیرا:

۱) $a \neq 0 \Rightarrow |a| > 0 \Rightarrow |a| = \pm a + 0b \Rightarrow |a| \in A$

۲) $b \neq 0 \Rightarrow |b| > 0 \Rightarrow |b| = 0a \pm b \Rightarrow |b| \in A$

(توجه دارید که عددی عضو A است که دو شرط داشته باشد؛ یکی آن‌که مثبت باشد و دیگر آن‌که به صورت ترکیبی خطی و صحیح از a و b نوشته شود.)

پس ثابت شد که A زیرمجموعه‌ای ناتهی از N است. بنابراین طبق اصل خوش‌ترتیبی، باید دارای عضو ابتدا باشد. اگر عضو ابتدای A را d بنامیم، کافی است ثابت کنیم $d = (a, b)$. البته توجه دارید که چون فرض شده $d = \min A$ ، پس باید $d \in A$ ؛ یعنی باید m_0 و n_0 ای در Z باشند، به قسمی که $d = m_0 a + n_0 b$ (۱).

برای اثبات این‌که $d = (a, b)$ ، دو شرط ب‌م‌م را برای d بررسی کنیم، شرط اول آن است که $d|a$ و $d|b$. پس a را بر d تقسیم می‌کنیم. طبق قضیه‌ی تقسیم داریم: $a = dq + r$ که $0 \leq r < d$.

اگر $0 < r < d$ ، در این صورت داریم:

$$0 < r = a - dq \overset{(1)}{=} a - (m_0 a + n_0 b)q = \underbrace{(1 - m_0 q)}_{m} a + \underbrace{n_0 q}_{n} b$$

(r هر دو شرط را برای عضو A بودن داراست.) $\Rightarrow r \in A$

اما $r \in A$ با توجه به این‌که $r < d$ و تعریف عضو ابتدا برای d یک تناقض ایجاد می‌کند (زیرا نمی‌توانیم عضوی کوچک‌تر از عضو ابتدا در مجموعه داشته باشیم) پس باید $r = 0$ ؛ یعنی $a = dq$ یا $d|a$ و به همین طریق ثابت می‌شود $d|b$.

حال فرض کنیم $c > 0$ و $c|a$ و $c|b$. ثابت می‌کنیم که $c \leq d$.

$$\left.\begin{matrix} c|a \Rightarrow c|m_0 a \\ c|b \Rightarrow c|n_0 b \end{matrix}\right\} \Rightarrow c|m_0 a + n_0 b \overset{(1)}{\Rightarrow} c|d \Rightarrow c \leq d$$

نتیجه‌های حاصل از قضیه‌ی بزو

نتیجه‌ی ۱: اگر $d = (a, b)$ آن‌گاه اعدادی صحیح و نسبت به هم اول، مانند r و s وجود دارند؛ به قسمی که $ra + sb = d$ (ب‌م‌م دو عدد را بر حسب ترکیب خطی آن دو عدد می‌توان نوشت).

اثبات: طبق قضیه‌ی بزو d عضو ابتدای مجموعه‌ی ترکیب‌های خطی a و b است. پس باید $d \in A$ و هر عضو A ترکیبی خطی از a و b است. اثبات نسبت به هم اول بودن ضرایب این ترکیب خطی، یعنی r و s را درنتیجه‌ی ۴ ملاحظه کنید.

نتیجه‌ی ۲: هرگاه عددی دو عدد را بشمارد، آن‌گاه همواره ب‌م‌م آن‌ها را نیز می‌شمارد؛ یعنی:

$a|b \ , \ a|c \Rightarrow a|(b,c)$

اثبات: فرض کنیم $(b,c)=d$ ثابت می‌کنیم که $a|d$.

$$(b,c)=d \xrightarrow{\text{قضیه‌ی بزو}} \exists r,s \ , \ rb+sc=d$$

از طرف دیگر $a|b, a|c \Rightarrow a|rb, a|sc \Rightarrow a|rb+sc=d \Rightarrow a|d$

تذکر ۱: عکس قضیه‌ی بزو در حالت کلی برقرار نیست. یعنی اگر عددی چون d برابر با ترکیب خطی دو عدد صحیح مانند a و b باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت که d ب م م دو عدد a و b است.

برای مثال $۲۷ = ۳ \times ۴ + ۵ \times ۳$ ولی $(۵,۳) = ۱ \neq ۲۷$.

نتیجه‌ی ۳: عکس قضیه‌ی بزو در حالت $d = ۱$ برقرار است؛ یعنی اگر ترکیب خطی دو عدد صحیح، مساوی با یک باشد، آن‌گاه آن دو عدد نسبت به هم اول هستند.

$ra+sb=۱ \Rightarrow (a,b)=۱$

اثبات: فرض کنیم $(a,b)=d$ و ثابت می‌کنیم که $d=۱$.

$$(a,b)=d \quad \left.\begin{matrix} d|a \Rightarrow d|ra \\ d|b \Rightarrow d|sb \end{matrix}\right\} \Rightarrow d|ra+sb$$

و چون طبق فرض $ra+sb=۱$ ، بنابراین باید $d|۱$ که نتیجه می‌شود $d=۱$.

تذکر ۲: اگر p عددی اول باشد و $ra+sb=p$ در این صورت $(a,b)=۱$ یا $(a,b)=p$. (مشابه اثبات نتیجه ۳، فقط به‌جای ۱ قرار دهید p)

نتیجه‌ی ۴: اگر دو عدد صحیح مانند a و b را بر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترکشان تقسیم کنیم، آن‌گاه خارج قسمت‌ها نسبت به هم اول خواهند بود؛ یعنی:

$$(a,b)=d \Rightarrow (\frac{a}{d},\frac{b}{d})=۱$$

اثبات: کافی است ثابت کنیم یک ترکیب خطی از $\frac{a}{d}$ و $\frac{b}{d}$ مساوی با عدد یک است و طبق نتیجه‌ی ۳ ثابت می‌شود $\frac{a}{d}$ و $\frac{b}{d}$ نسبت به هم اول هستند.

$$(a,b)=d \xrightarrow{\text{قضیه‌ی بزو}} \exists r,s \in Z \ , \ ra+sb=d \overset{\text{دو طرف بر d تقسیم}}{\Rightarrow}$$

$$r\frac{a}{d}+s\frac{b}{d}=\frac{d}{d} \Rightarrow r\frac{a}{d}+s\frac{b}{d}=۱ \xrightarrow{\text{نتیجه‌ی ۳}} (\frac{a}{d},\frac{b}{d})=۱$$

تذکر ۳: تساوی $r\frac{a}{d}+s\frac{b}{d}=۱$ ترکیبی خطی از r و s نیز هست که در این صورت ثابت می‌شود $(r,s)=۱$ ؛ یعنی در قضیه‌ی بزو ضرایب ترکیب خطی که d را می‌سازد، همواره نسبت به هم اول هستند!

نتیجه‌ی ۵ (لم اقلیدس): هر گاه عددی حاصل ضرب دو عدد را بشمارد و نسبت به یکی از آن دو عدد، اول باشد، آن‌گاه همواره دیگری را می‌شمارد:

$a|bc \ , \ (a,b)=۱ \Rightarrow a|c$

اثبات: برای اثبات این‌که $a|c$ کافی است ثابت کنیم $c=aq$. پس به‌دنبال یک تساوی هستیم که یک طرف آن c و طرف دیگر مضرب a باشد:

$$(a,b)=۱ \xrightarrow{\text{قضیه‌ی بزو}} ra+sb=۱ \Rightarrow rac+sbc=c \quad (۱)$$

از طرف دیگر طبق فرض: $a|bc \Rightarrow bc=aq_۱ \overset{(۱)}{\Rightarrow} rac+s(aq_۱)=c$

$$\Rightarrow c=a\underbrace{(rc+sq_۱)}_{q} \Rightarrow c=aq \Rightarrow a|c$$

مسئله‌ی مهم: ثابت کنید، اگر a ، b ، c و d اعداد طبیعی باشند و $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ و داشته باشیم $(a,b)=(c,d)=۱$ ، آن‌گاه $a=c$ و $b=d$.

اثبات: کافی است ثابت کنیم $a \le c$ و $c \le a$ که در این صورت $a=c$ و درنتیجه $b=d$ حاصل می‌شود:

$$\text{طبق فرض}: ad=bc \Rightarrow a|bc \ , \ (a,b)=۱ \overset{\text{لم اقلیدس}}{\Rightarrow} a|c \Rightarrow a \le c \ (۱)$$

$$\text{طبق فرض}: ad=bc \Rightarrow c|ad \ , \ (c,d)=۱ \overset{\text{لم اقلیدس}}{\Rightarrow} c|a \Rightarrow c \le a \ (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow a=c \ , \ ad=bc \Rightarrow \cancel{a}d=b\cancel{a} \Rightarrow b=d$$

تست: اگر a و b دو عدد صحیح و $p|ab$ و $۳۷p-۲۹a=۱$ ، کوچک‌ترین عضو مثبت مجموعه‌ی $A=\{mp+nb: m,n \in z\}$ کدام است؟ (کنکور سراسری ۷۵)

۱) b ۲) p ۳) ۱ ۴) ۸

حل: گزینه‌ی (۲) صحیح است؛ زیرا با توجه به رابطه‌ی $۳۷p-۲۹a=۱$ و نتیجه‌ی (۳) باید $(p,a)=۱$ و چون $p|ab$ پس طبق لم اقلیدس باید $p|b$. بنابراین $(p,a)=|p|$ که طبق قضیه‌ی بزو $\min A=(p,b)$ ، پس $\min A=|p|$ که البته در گزینه‌ها باید به جای p عدد $|p|$ به‌کار می‌رفت!

نتیجه‌ی ۶: اگر عددی بر دو عدد بخش‌پذیر باشد و آن دو عدد نسبت به هم اول باشند، آن‌گاه بر حاصل‌ضرب آن دو عدد نیز بخش‌پذیر است:

$b|a \ , \ c|a \ , \ (b,c)=۱ \Rightarrow bc|a$

اثبات: برای اثبات این‌که، $bc|a$ کافی است ثابت کنیم $a=bcq$ که به یک تساوی نیازمندیم؛ طوری که در یک طرف آن a و طرف دیگر آن مضرب bc باشد:

$$(b,c)=۱ \overset{\text{قضیه‌ی بزو}}{\Rightarrow} rb+sc=۱ \overset{\text{دو طرف در a ضرب}}{\Rightarrow} rab+sac=a \quad (۱)$$

از طرف دیگر طبق فرض: $b|a \ , \ c|a \Rightarrow a=bq_1 \ , \ a=cq_2$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} r(cq_2)b+s(bq_1)c=a \Rightarrow a=bc\underbrace{(rq_2+sq_1)}_{q}$$

$$\Rightarrow a=bcq \Rightarrow bc|a$$

نتیجه‌ی ۷: اگر p عددی اول و $p|ab$، آن‌گاه $p|a$ یا $p|b$ (p حداقل یکی از a یا b را عاد می‌کند).

اثبات: اگر $p|a$ حکم ثابت است و اگر $p\nmid a$ طبق قضیه‌ی ۲، باید $(p,a)=1$ و در نتیجه، بنابر لم اقلیدس، باید $p|b$؛ یعنی:

$$p\nmid a \Rightarrow (p,a)=1 \ , \ p|ab \Rightarrow p|b$$

در این صورت نیز حکم به اثبات رسید؛ یعنی همواره $p|a$ یا $p|b$.

نتیجه‌ی ۸: اگر $(a,b)=d$ و $k\in N$ در این صورت $(ka,kb)=kd$ و برعکس. (اگر $k\in Z$، $(ka,kb)=|k|d$)

اثبات (شرط لازم):

$$\overbrace{(a,b)=d}^{\text{فرض}} \Rightarrow \overbrace{(ka,kb)=kd}^{\text{حکم}}=k(a,b)$$

دو شرط ب‌م‌م را برای kd بررسی می‌کنیم:

$$1)\ (a,b)=d \quad \begin{array}{l} d|a \Rightarrow kd|ka \\ d|b \Rightarrow kd|kb \end{array}$$

۲) فرض کنیم $c>0 \ , \ c|ka \ , \ c|kb \overset{\text{باید ثابت کنیم}}{\Rightarrow} c\le kd$

طبق فرض $(a,b)=d \overset{\text{قضیه‌ی بزو}}{\Rightarrow} ra+sb=d \Rightarrow rka+skb=kd \ (1)$

از طرف دیگر فرض کرده‌ایم: $c|ka \ , \ c|kb$

$$\Rightarrow c|rka \ , \ c|skb \Rightarrow c|rka+skb \overset{(1)}{\Rightarrow} c|kb \Rightarrow c\le kd$$

(شرط کافی):

$$\overbrace{(ka,kb)=kd}^{\text{فرض}} \Rightarrow \overbrace{(a,b)=d}^{\text{حکم}}$$

حال دو شرط ب‌م‌م را برای d بررسی می‌کنیم:

$$1)\ (ka,kb)=kd \quad \begin{array}{l} kd|ka \Rightarrow d|a \\ kd|kb \Rightarrow d|b \end{array}$$

۲) فرض کنیم $c>0 \ , \ c|a \ , \ c|b \overset{\text{باید ثابت کنیم}}{\Rightarrow} c\le d$

$$(ka,kb)=kd \overset{\text{قضیه‌ی بزو}}{\Rightarrow} rka+skb=kd \Rightarrow ra+sb=d \ (2)$$

از طرف دیگر فرض کرده‌ایم: $c|a \ , \ c|b \Rightarrow c|ra \ , \ c|sb$

$$\Rightarrow c|ra+sb \overset{(2)}{\Rightarrow} c|d \Rightarrow c\le d$$

تست: اگر $(a,b)=1$، در این صورت $(a+b,a-b)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱ یا ۲ ۴) ۱ یا ۲ یا ۴

حل: گزینه‌ی ۳ صحیح است، زیرا اگر فرض کنیم $(a+b,a-b)=d$ در این صورت داریم:

$$\left.\begin{array}{l} d|a+b \\ d|a-b \end{array}\right] \begin{array}{l} \Rightarrow d|(a+b)+(a-b) \Rightarrow d|2a \\ \Rightarrow d|(a+b)-(a-b) \Rightarrow d|2b \end{array}$$

$$d|2a, d|2b \overset{\text{نتیجه‌ی ۲}}{\Rightarrow} d|(2a,2b) \overset{\text{نتیجه‌ی ۸}}{\Rightarrow} d|2(a,b) \Rightarrow d|2\times 1=2$$

$\Rightarrow d=1$ یا $d=2$

نتیجه‌ی ۹: اگر عددی نسبت به دو عدد اول باشد، آن‌گاه نسبت به حاصل ضرب آن دو عدد نیز اول است و برعکس:

$$(a,b)=1,\ (a,c)=1 \Leftrightarrow (a,bc)=1$$

اثبات (شرط لازم):

$$\left.\begin{array}{l} (a,b)=1 \overset{\text{قضیه‌ی بزو}}{\Rightarrow} r_1a+s_1b=1 \\ (a,c)=1 \overset{\text{قضیه‌ی بزو}}{\Rightarrow} r_2a+s_2c=1 \end{array}\right\} \overset{\text{دو طرف تساوی‌ها در هم ضرب}}{\Rightarrow}$$

$$r_1r_2a^2+r_1s_2ac+r_2s_1ab+s_1s_2bc=1$$

$$\Rightarrow \underbrace{(r_1r_2a+r_1s_2c+r_2s_1b)}_{r}a+\underbrace{(s_1s_2)}_{s}bc=1$$

$$\Rightarrow ra+sbc=1 \overset{\text{نتیجه‌ی ۳}}{\Rightarrow} (a,bc)=1$$

اثبات (شرط کافی):

$$(a,bc)=1 \overset{\text{قضیه‌ی بزو}}{\Rightarrow} ra+sbc=1 \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow ra+(sb)c=1 \overset{\text{نتیجه‌ی ۳}}{\Rightarrow} (a,c)=1$$

$$(1) \Rightarrow ra+(sc)b=1 \overset{\text{نتیجه‌ی ۳}}{\Rightarrow} (a,b)=1$$

مسائل حل شده

مسئله‌ی ۱: ثابت کنید اگر $(a,b)=1$، آن‌گاه $(ka\pm d,a)=1$ $(k\in Z)$.

حل: فرض می‌کنیم $(ka\pm b,a)=d$ و ثابت می‌کنیم $d=1$.

$$(ka\pm b,a)=d \begin{array}{l} \nearrow d|ka\pm b \\ \searrow d|a \Rightarrow d|ka \end{array} \Bigg\} \Rightarrow d|b$$

$$d|a, d|b \Rightarrow d|(a,b)=1 \Rightarrow d=1$$

تذکر: مسئله در حالت کلی یعنی برای $(a,b)=d$ نیز برقرار

است به عبارت دیگر :

$$(a,b)=d \Rightarrow (a,ka\pm b)=d$$

نتیجه : اگر در مسئله‌ی (۱) قرار دهیم $k=1$ ، در این صورت خواهیم داشت :

$$(a,b)=1 \Rightarrow (a,a\pm b)=1$$

مسئله‌ی ۲ : ثابت کنید :

$$(a,b)=(-a,b)=(a,-b)=(-a,-b)$$

حل : فرض کنیم $(a,b)=d_1 , (-a,b)=d_2$ ، ثابت می‌کنیم $d_1=d_2$.

$$(a,b)=d_1 \begin{cases} \nearrow d_1|a \Rightarrow d_1|-a & (1) \\ \searrow d_1|b & (2) \end{cases}$$

$$(1),(2) \Rightarrow d_1|(-a,b)=d_2 \Rightarrow d_1 \le d_2$$

و به طریق مشابه ثابت می‌شود $d_2 \le d_1$ که نتیجه می‌گیریم $d_1=d_2$ و در بقیه‌ی حالت‌ها نیز مطابق حل فوق عمل می‌کنیم.

مسئله‌ی ۳ : اگر $(a,b)=1$ ، ثابت کنید

$$(m,n\in N).(a^n,b^m)=1$$

حل : ابتدا به استقرا روی n ثابت می‌کنیم، اگر $(a,b)=1$ ، آن‌گاه $(a^n,b)=1$.

$p(1):(a,b)=1 \Rightarrow (a^1,b)=1 \Rightarrow p(1)\equiv T$ (برقرار است)

$p(k)\equiv T \Rightarrow (a,b)=1 \Rightarrow (a^k,b)=1$ فرض استقرا

$p(k+1):(a,b)=1 \Rightarrow (a^{k+1},b)=1$ حکم استقرا

$$(a,b)=1 \begin{matrix} \nearrow (a,b)=1 \\ \searrow (a^k,b)=1 \end{matrix} \Bigg\} \overset{\text{نتیجه‌ی ۹}}{\Rightarrow} (a.a^k,b)=1$$

$$\Rightarrow (a^{k+1},b)=1$$

ثابت کردیم که اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند، آن‌گاه هر توان یکی از آن دو، عدد و عدد دیگر نیز نسبت به هم اول خواهند بود که با توجه به این مطلب، برای حالت $(a^n,b^m)=1$ نیازی به استفاده از استقرا روی m نداریم و می‌نویسیم :

$$(a,b)=1 \overset{\text{ثابت شد}}{\Rightarrow} (a^n,b)=1 \overset{\text{جابه‌جایی}}{\Rightarrow} (b,a^n)=1 \overset{\text{ثابت شد}}{\Rightarrow} (b^m,a^n)=1$$

$$\overset{\text{جابه‌جایی}}{\Rightarrow} (a^n,b^m)=1$$

مسئله‌ی ۴ : عکس مسئله‌ی ۳ را ثابت کنید.

حل : با فرض $(a^n,b^m)=1$ می‌خواهیم ثابت کنیم $(a,b)=1$.

$$(a^n,b^m)=1 \overset{\text{قضیه‌ی بزو}}{\Rightarrow} ra^n+sb^m=1$$

$$\Rightarrow \underbrace{(ra^{n-1})}_{r_1}a+\underbrace{(sb^{n-1})}_{s_1}b=1 \overset{\text{نتیجه‌ی ۳}}{\Rightarrow} (a,b)=1$$

مسئله‌ی ۵ : ثابت کنید، اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند، آن‌گاه حاصل ضرب و مجموع آن‌ها و همین‌طور حاصل ضرب و تفاضل آن‌ها نیز نسبت به هم اول هستند و برعکس؛ یعنی :

$$(a,b)=1 \Leftrightarrow (ab,a\pm b)=1$$

حل :

$$\left.\begin{matrix} (a,b)=1 \overset{\text{مسئله‌ی ۱}}{\Rightarrow} (a\pm b,a)=1 \\ (a,b)=1 \Rightarrow (a\pm b,b)=1 \end{matrix}\right\} \overset{\text{نتیجه‌ی ۹}}{\Rightarrow} (a\pm b,ab)=1$$

مسئله‌ی ۶ : اگر $(a,b)=1$ ، $(a,c)=1$ و $(b,c)=1$ ، ثابت کنید $(abc,ab+ac+bc)$.

حل : از مسئله‌ی (۱) استفاده می‌کنیم :

$$\left.\begin{matrix} (a,b)=1 \\ (a,c)=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (a,bc)=1 \overset{\text{مسئله‌ی ۱}}{\Rightarrow} (a,\overbrace{ab+ac}^{ka}+bc)=1 \quad (1)$$

$$\left.\begin{matrix} (a,b)=1 \\ (c,b)=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (ac,b)=1 \overset{\text{مسئله‌ی ۱}}{\Rightarrow} (b,\overbrace{ab+bc}^{kb}+ac)=1 \quad (2)$$

$$\left.\begin{matrix} (a,c)=1 \\ (b,c)=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (c,ab)=1 \Rightarrow (c,\overbrace{ac+bc}^{kc}+ab)=1 \quad (3)$$

$$(1) \text{ و } (2) \overset{\text{نتیجه‌ی ۹}}{\Rightarrow} (ab,ab+ac+bc)=1 \quad (4)$$

$$(3) \text{ و } (4) \overset{\text{نتیجه‌ی ۹}}{\Rightarrow} (abc,ab+ac+bc)=1$$

مسئله‌ی ۷ : اگر $(a,b)=1$ ، ثابت کنید $(a^5+b^2,2a^5+5b^2)=1$ یا ۳ .

حل : فرض کنیم $(a^5+b^2,2a^5+5b^2)=d$ ، ثابت می‌کنیم $d=3$ یا $d=1$.

$$(a^5+b^2,2a^5+5b^2)=d$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d|a^5+b^2 \Rightarrow \begin{cases} d|2a^5+2b^2 & (1) \\ d|5a^5+5b^2 & (2) \end{cases} \\ d|2a^5+5b^2 \quad (3) \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} (1),(3) \Rightarrow d|3b^2 \\ (2),(3) \Rightarrow d|3a^5 \end{matrix}\right\} \overset{\text{نتیجه‌ی ۲}}{\Rightarrow} d|(3a^5,3b^2)$$

$$\overset{\text{نتیجه‌ی ۸}}{\Rightarrow} d\,|\,(3a^5,b^2) \Rightarrow d\,|\,3\times 1=3 \Rightarrow d=1 \text{ یا } d=3$$

(توجه دارید که اگر $(a,b)=1$ ، آن‌گاه $(a^5,b^2)=1$.)

مسئله‌ی ۸ : اگر $(a,b)=d$ ، ثابت کنید $(a^n,b^n)=d^n$.

حل:

$$(a,b)=d \Rightarrow (\frac{a}{d},\frac{b}{d})=1 \Rightarrow \left((\frac{a}{d})^n,(\frac{b}{d})^n\right)=1$$

$$\Rightarrow (\frac{a^n}{d^n},\frac{b^n}{d^n})=1 \Rightarrow d^n(\frac{a^n}{d^n},\frac{b^n}{d^n})=d^n$$

$$\overset{\text{نتیجه‌ی ۸}}{\Rightarrow}(a^n,b^n)=d^n$$

(توجه دارید که از $d|a$ نتیجه می‌شود که $d^n|a^n$ و از این رابطه در تساوی $(\frac{a}{d})^n=\frac{a^n}{d^n}$ استفاده شده است.)

مسئله‌ی ۹ : ثابت کنید اگر $a^n|b^n$ ، آن‌گاه $a|b$.

حل : کافی است ثابت کنیم $(a,b)=a$ که در این صورت، رابطه‌ی $a|b$ نتیجه می‌شود. حال فرض می‌کنیم $(a,b)=d$ و ثابت می‌کنیم $d=a$.

$$(a,b)=d \overset{\text{مسئله‌ی ۸}}{\Rightarrow} (a^n,b^n)=d^n \qquad (1)$$

$$\text{طبق فرض}:\ a^n|b^n \Rightarrow (a^n,b^n)=a^n \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow a^n=d^n \Rightarrow a=d \Rightarrow (a,b)=a \Rightarrow a|b$$

مسئله‌ی ۱۰ : ثابت کنید اگر $(a^n,b^n)=d^n$ ، آن‌گاه $(a,b)=d$. (عکس مسئله‌ی ۸)

حل:

$$(a^n,b^n)=d^n \Rightarrow (\frac{a^n}{d^n},\frac{b^n}{d^n})=1 \qquad (1)$$

حال با توجه به مسئله‌ی ۹، از این‌که $\frac{a^n}{d^n}$ عددی صحیح است یا از این‌که $d^n|a^n$ ، نتیجه می‌گیریم $d|a$ ، که در این صورت تساوی $(\frac{a}{d})^n=(\frac{a^n}{d^n})$ برقرار است:

$$(1) \Rightarrow \left((\frac{a}{d})^n,(\frac{b}{d})^n\right)=1 \Rightarrow (\frac{a}{d},\frac{b}{d})=1$$

$$\Rightarrow d(\frac{a}{d},\frac{b}{d})=d \Rightarrow (a,b)=d$$

مسئله‌ی ۱۱ : اگر $(a,4)=2$ و $(b,4)=2$ ، ثابت کنید $(a+b,4)=4$.

حل:

$$(a,4)=2 \Rightarrow (\frac{a}{2},2)=1 \Rightarrow \text{فرد است } \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{a}{2}=2k+1$$

$$(b,4)=2 \Rightarrow (\frac{b}{2},2)=1 \Rightarrow \text{فرد است } \frac{b}{2} \Rightarrow \frac{b}{2}=2k'+1$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{2}=2k+1 \Rightarrow a=4k+2 \\ \frac{b}{2}=2k'+1 \Rightarrow b=4k'+2 \end{array}\right\} \Rightarrow a+b=4(k+k')+4$$

$$\Rightarrow a+b=4(k+k'+1)=4q \Rightarrow 4|a+b \Rightarrow (a+b,4)=4$$

مسئله‌ی ۱۲ : اگر $d\neq 1$ ، $(b,d)=1$ و $(a-2b,3a-b)=d$ ، ثابت کنید $d=5$.

حل:

$$(a-2b,3a-b)=d \begin{array}{l} \nearrow\ d|a-2b \Rightarrow d|-3a+6b \qquad (1) \\ \searrow\ d|3a-b \qquad (2) \end{array}$$

$$(1),(2) \Rightarrow d|5b \underset{\text{لم اقلیدس}}{\overset{(d,b)=1}{\Rightarrow}} d|5 \overset{d\neq 1}{\Rightarrow} d=5$$

قضیه‌ی الگوریتم اقلیدسی : اگر $a=bq+r$ ، آن‌گاه $(a,b)=(b,r)$.

(اگر a را بر b تقسیم کنیم و q خارج قسمت و r باقی‌مانده‌ی تقسیم باشد، در این صورت ب‌م‌م مقسوم و مقسوم‌علیه برابر است با ب‌م‌م مقسوم‌علیه و باقی‌مانده.)

اثبات : فرض کنیم $(a,b)=d_1$ و $(b,r)=d_2$ ، ثابت می‌کنیم: $d_1=d_2$.

$$(a,b)=d_1 \quad \left.\begin{array}{l} d_1|a \\ d_1|b \Rightarrow d_1|bq \end{array}\right\} \Rightarrow d_1|a-bq=r$$

$$d_1|b, d_1|r \Rightarrow d_1|(b,r)=d_2 \Rightarrow d_1 \leq d_2 \qquad (1)$$

$$(b,r)=d_2 \quad \left.\begin{array}{l} d_2|b \Rightarrow d_2|bq \\ d_2|r \end{array}\right\} \Rightarrow d_2|bq+r=a$$

$$d_2|a, d_2|b \Rightarrow d_2|(a,b)=d_1 \Rightarrow d_2 \leq d_1 \qquad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow d_1=d_2$$

زیرنویس

۱. هر زیرمجموعه‌ی ناتهی Z که از بالا کران‌دار باشد، دارای عضو انتهاست.

رویکرد هندسی- رویکرد جبری در آموزش هندسه

(قسمت ۳)

● محمدهاشم رستمی

اشاره

در شماره‌های قبل راجع به رویکرد هندسی و رویکرد جبری در آموزش هندسه بحث شد و مسائلی با هر دو رویکرد در فضای دوبعدی اقلیدوسی حل شد. اینک به معرفی فضای سه بعدی اقلیدوسی پرداخته و مسائلی را در این فضا با هر دو رویکرد حل و بحث خواهیم کرد.

اگر فضای سه‌بعدی اقلیدسی به مفهوم هندسی را به یک دستگاه مختصات دکارتی o-xyz متشکل از سه محور دوبه‌دوی عمود بر هم x′ox ، y′oy و z′oz مجهز کنیم، یک تناظر یک‌به‌یک بین فضای سه‌بعدی اقلیدسی و حاصل ضرب دکارتی $\mathbb{R}^۳ = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ برپا می‌شود. به این ترتیب که به هر نقطه‌ی P از فضای سه‌بعدی اقلیدسی، یک سه‌تایی مرتب (z و y و x) از عددهای حقیقی نظیر می‌شود. در حقیقت، دستگاه مختصات دکارتی o-xyz، ابزار اصلی برای ایجاد ارتباط بین هندسه‌ی فضایی و جبر است؛ تحت این شرایط:

نقطه‌ی P از فضای سه‌بعدی اقلیدسی $\xleftrightarrow{\text{تناظر}}$ (x, y, z) و $x, y, z \in \mathbb{R}$

فضای سه‌بعدی اقلیدسی $\xleftrightarrow{\text{تناظر}}$ $\{(x, y, z) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$

صفحه‌ی P از فضای سه‌بعدی اقلیدسی $\xleftrightarrow{\text{تناظر}}$ $ax + by + cz + d = ۰$

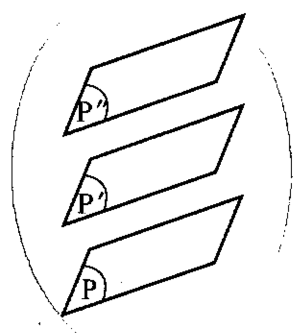
$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} \xleftrightarrow{\text{تناظر}}$$ خط D از فضای سه‌بعدی اقلیدسی

$f(x,y,z)=0 \xleftrightarrow{\text{تناظر}}$ رویه‌ی (C) از فضای سه‌بعدی اقلیدسی

نکته‌ی ۱. به جای دستگاه مختصات دکارتی o-xyz در فضا، می‌توان از دیگر دستگاه‌های مختصات در فضا، مانند دستگاه مختصات قطبی در فضا، دستگاه مختصات استوانی در فضا و دستگاه مختصات کروی در فضا استفاده کرد. این مطلب به نوع مسئله‌ای بستگی دارد که می‌خواهیم به روش تحلیل حل کنیم.

نکته‌ی۲. چگونگی انتخاب دستگاه مختصات دکارتی در فضا، اهمیت زیادی دارد. همواره باید سعی کنیم، دستگاه مختصات دکارتی و یا هر دستگاه مختصات دیگری که می‌خواهیم انتخاب کنیم، حداقل محاسبه را داشته باشد. در مثال‌هایی، این مطلب را خواهیم دید. اینک به چند مثال که با استفاده از دو رویکرد هندسی و جبری حل می‌شوند، توجه کنید.

مثال۱. ثابت کنید اگر دو صفحه با صفحه‌ی سومی موازی باشند، خودشان با هم موازی‌اند.



اثبات

الف) روش هندسی: سه صفحه‌ی P، 'P و "P را درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم صفحه‌ی P موازی صفحه‌ی 'P و هم‌چنین صفحه‌ی P موازی صفحه‌ی "P باشد، می‌خواهیم ثابت کنیم که دو صفحه‌ی 'P و "P با هم موازی‌اند.

برای اثبات می‌گوییم، اگر دو صفحه‌ی 'P و "P موازی نباشند، در خط راستی مانند Δ متقاطع خواهند بود و در این صورت، از هر نقطه‌ی خط Δ، دو صفحه‌ی موازی صفحه‌ی P رسم شده است که این خلاف قضیه‌ی * است. بنابراین، دو صفحه‌ی 'P و "P متقاطع نیستند، پس با هم موازی‌اند.

قضیه *. از هر نقطه‌ی واقع در خارج یک صفحه، یک و تنها یک صفحه‌ی موازی آن صفحه می‌توان رسم کرد.

نکته: این قضیه قبلاً ثابت شده است.

ب) راه جبری: سه صفحه‌ی

$P:\ ax+by+cz+d=0$

$P':\ a'x+b'y+c'z+d'=0$

$P'':\ a''x+b''y+c''z+d''=0$

را در دستگاه مختصات قائم o-xyz درنظر می‌گیریم. با استفاده از شرط موازی بودن دو صفحه داریم:

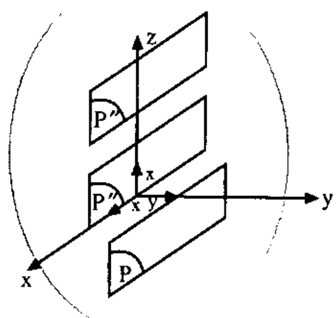
$$P \parallel P' \Rightarrow \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'} \qquad (1)$$

$$P \parallel P'' \Rightarrow \frac{a}{a''}=\frac{b}{b''}=\frac{c}{c''} \qquad (2)$$

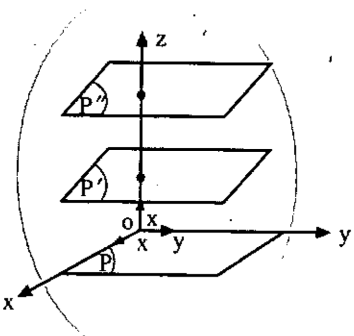
از تقسیم عضوهای نظیر دو رابطه‌ی ۱ و ۲ داریم:

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{\frac{a}{a'}}{\frac{a}{a''}}=\frac{\frac{b}{b'}}{\frac{b}{b''}}=\frac{\frac{c}{c'}}{\frac{c}{c''}} \Rightarrow \frac{a''}{a'}=\frac{b''}{b'}=\frac{c''}{c'} \Rightarrow P' \parallel P''$$

پس دو صفحه‌ی 'P و "P با هم موازی‌اند.



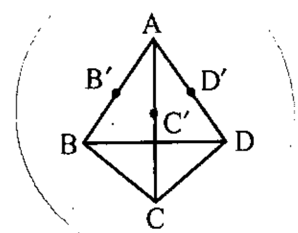
نکته. در همین مسئله می‌توانیم دستگاه مختصات قائم O − xyz را چنان اختیار کنیم که صفحه‌ی P بر صفحه xoy منطبق باشد. در این صورت، $P':z=k$ و $P'':z=k'$ خواهد بود، اما می‌دانیم که دو صفحه به معادله‌ی $z=k$ و $z=k'$ با هم موازی‌اند (دو صفحه‌ی عمود بر یک خط با هم موازی‌اند)، پس حکم مسئله درست است.



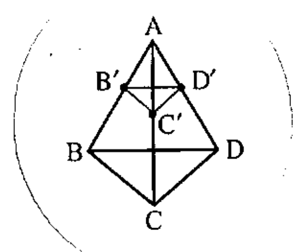
مثال ۲. ثابت کنید که در یک هرم، وسط یال‌های آن، در یک صفحه‌ی موازی صفحه‌ی قاعده قرار دارند.

اثبات

الف) روش هندسی: هرم ABCD را در نظر می‌گیریم (شکل) و وسط یال‌های AB، AC و AD را به‌ترتیب B'، C' و D' می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که صفحه‌ی $B'C'D'$ با صفحه‌ی BCD، یعنی قاعده‌ی این هرم، موازی است. در مثلث ABC، پاره‌خط $B'C'$ وسط‌های دو ضلع AB و AC را به‌هم وصل کرده است، پس با ضلع سوم مثلث موازی است. یعنی $B'C' \parallel BC$ است. به روش مشابه، $C'D'$ که وسط‌های دو ضلع AC و AD از مثلث ACD را به‌هم وصل کرده، با ضلع سوم مثلث، یعنی CD، موازی است؛ بنابراین $C'D' \parallel CD$ است.



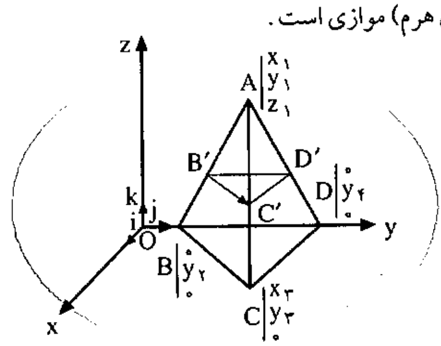
درنتیجه، صفحه‌ی $A'B'C'$ با صفحه‌ی ABC موازی است، زیرا دو خط متقاطع $B'C'$ و $C'D'$ از صفحه‌ی $A'B'C'$ با دو خط متقاطع BC و CD از صفحه‌ی ABC موازی هستند. پس حکم مسئله درست است.



نکته: این مسئله را برای یک هرم سه پهلو (مثلث‌القاعده) ثابت کردیم. اثبات مسئله برای هرم‌های چندپهلو نیز به روش مشابه انجام می‌شود.

ب) راه‌حل جبری: هرم ABCD را در نظر می‌گیریم و وسط یال‌های AB، AC و AD را به‌ترتیب B'، C' و D' می‌نامیم.

می‌خواهیم ثابت کنیم که صفحه‌ی $B'C'D'$ با صفحه‌ی BCD (قاعده‌ی هرم) موازی است.



برای اثبات، دستگاه مختصات قائم $O - xyz$ را چنان اختیار می‌کنیم که BCD منطبق بر صفحه‌ی xoy و BD روی محور yها باشد. در این صورت، مختصات رأس‌های هرم عبارت‌اند از:

$$A = (x_1, y_1, z_1) \text{ و } B = (0, y_2, 0)$$
$$C = (x_3, y_3, 0) \text{ و } D = (0, y_4, 0)$$

اکنون مختصات نقطه‌های B'، C' و D' را به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$B'\left|\begin{array}{l} x = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{x_1 + 0}{2} = \dfrac{x_1}{2} \\ y = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \\ z = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{z_1 + 0}{2} = \dfrac{z_1}{2} \end{array}\right.$$

$$C'\left|\begin{array}{l} x = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{x_1 + x_3}{2} \\ y = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{y_1 + y_3}{2} \\ z = \dfrac{z_A + z_C}{2} = \dfrac{z_1 + 0}{2} = \dfrac{z_1}{2} \end{array}\right.$$

اما پارامترهای هادی BC عبارت‌اند از:

$$\overrightarrow{BC} = (x_3, y_3 - y_2, 0)$$

و پارامترهای هادی $B'C'$ عبارت‌اند از:

$$\overrightarrow{B'C'} = \left(\frac{x_1 + x_3 - x_1}{2}, \frac{y_1 + y_3 - y_1 - y_2}{2}, \frac{z_1 - z_1}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{x_3}{2}, \frac{y_3 - y_2}{2}, 0\right)$$

به‌طوری که دیده می‌شود، پارامترهای هادی $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{B'C'}$ با هم متناسب‌اند ($\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{B'C'}$)، پس $B'C'$ موازی BC است. به روش مشابه ثابت می‌شود که $C'D'$ موازی CD است. درنتیجه، صفحه‌ی $A'B'C'$ با صفحه‌ی ABC موازی است و حکم ثابت می‌شود.

نکته: اگر دستگاه مختصات دکارتی $O - xyz$ را به صورت دلخواه انتخاب کنیم، مختصات رأس‌های هرم، $A = (x_1, y_1, z_1)$، $B = (x_2, y_2, z_2)$، $C = (x_3, y_3, z_3)$ و $D = (x_4, y_4, z_4)$ خواهند بود و محاسبه‌ها قدری دشوارتر می‌شود.

مقدمه

آیا تاکنون با شکلی هندسی برخورد کرده‌اید که محیط یا مساحت آن به بی‌نهایت میل کند؟ دانش‌آموزان سال سوم رشته‌ی ریاضی، در فصل اول کتاب هندسه‌ی ۲، با شکلی آشنا می‌شوند که به «برف دانه‌ی کخ» معروف است. این شکل شباهت زیادی به بلورهای برف دارد و از این رو انتخاب این نام برایش بسیار مناسب است. لازم به ذکر است، مراحل ساخت آن در کتاب توضیح داده شده است و دانش‌آموزان خود می‌توانند تا هر مرحله‌ای که می‌خواهند، شکل را رسم کنند. البته رسم شکل در مراحل بالاتر، کمی مشکل، اما جالب است. هدف از معرفی این شکل، استفاده از روش استقرایی برای بررسی یک یا دو ویژگی از آن است. اما این شکل برای مراحل بالاتر و وقتی $n \to +\infty$ میل می کند، ویژگی‌های جالب دیگری نیز دارد که ممکن است از نظر دانش‌آموزان پوشیده بماند. در این مقاله سعی شده است، برخی از این ویژگی‌ها بررسی و روش‌های اثبات و توجیه مناسب و قابل استفاده، برای دانش‌آموزان دبیرستانی آورده شود. در انتها نیز زیباترین نکته که همانا محاسبه‌ی محیط و مساحت برف‌دانه است، اثبات خواهد شد.

محیط و مساحت برف دانه‌ی کخ

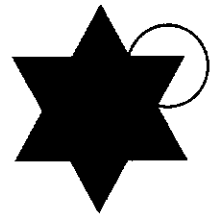
● صدیقه بابایی

برف دانه‌ی کخ چگونه ترسیم می‌شود؟

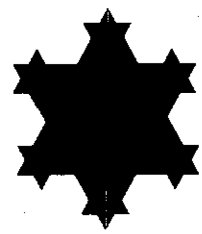
یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a رسم و هر ضلع آن را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. روی قسمت‌های میانی هر ضلع، مثلث متساوی الاضلاعی با طول ضلع $\frac{a}{3}$ ایجاد و سپس پاره خط‌های میانی را حذف می‌کنیم.

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، شش مثلث متساوی الاضلاع

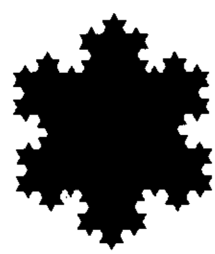
کوچک با طول ضلع $\frac{a}{۳}$ تولید شده است:



حال عمل بالا را روی اضلاع هر شش مثلث تکرار می‌کنیم تا به این شکل برسیم:



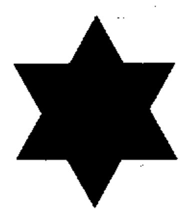
دوباره روی اضلاع کوچک جدید ایجاد شده، عمل بالا را تکرار می‌کنیم تا برف‌دانه کامل‌تر شود: [1]



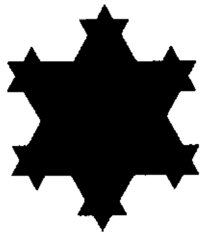
ویژگی‌های برف‌دانه‌ی کخ

تعداد پاره خط‌های موجود در برف‌دانه

مثلث متساوی الاضلاع ابتدایی را مرحله‌ی صفر در نظر می‌گیریم. در این صورت در این مرحله سه پاره خط وجود دارد. در مرحله‌ی اول به راحتی می‌توان دید که شکل تولید شده ۱۲ پاره خط دارد. در حقیقت هر ضلع مثلث اولیه، چهار پاره خط جدید ایجاد کرده است.



در مرحله‌ی دوم، هر یک از ۱۲ پاره خط ایجاد شده به چهار خط جدید تبدیل می‌شود. لذا ۱۲×۴ یا $۴^۲ \times ۳$ پاره خط در شکل وجود دارد.

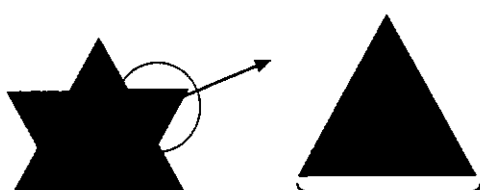


در مرحله‌ی سوم، دوباره هر یک از $۴^۲ \times ۳$ پاره خط تولید شده در مرحله‌ی پیش، به چهار پاره خط جدید تقسیم می‌شود. بنابراین در مرحله‌ی سوم $۴^۳ \times ۳$ پاره خط داریم. در هر مرحله، هر یک از پاره خط‌های موجود در مرحله‌ی قبل، چهار پاره خط جدید تولید می‌کنند. به این ترتیب، پاره خط‌های موجود در مرحله‌ی کنونی، چهار برابر تعداد پاره خط‌های مرحله‌ی قبلی است. لذا با استفاده از روش استقرایی می‌توان جدول زیر را تهیه کرد. [2]

مرحله	۰	۱	۲	...	n
تعداد پاره خط	۳	۱۲	۴۸	...	
فرمول محاسبه شده	۳×۴^۰	۳×۴^۱	۳×۴^۲	...	۳×۴^n

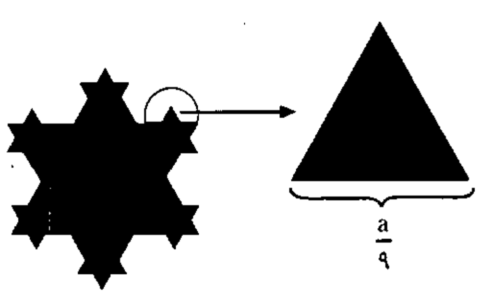
طول پاره خط‌های موجود در برف‌دانه

برف‌دانه از مثلث متساوی الاضلاعی با طول a ساخته شد. در مرحله‌ی اول، پاره خطی به طول a که ضلع مثلث را ساخته بود، به سه قسمت مساوی تقسیم شد. لذا کلیه‌ی پاره خط‌های طولی برابر $\frac{a}{۳}$ دارند.



$\frac{a}{۳}$

در مرحله‌ی دوم نیز هر پاره خط دوباره به سه قسمت تقسیم می‌شود. بنابراین طول پاره خط‌های موجود برابر $\frac{a}{۹}$ یا $a\left(\frac{۱}{۳}\right)^۲$ خواهد بود.



$\frac{a}{۹}$

در هر مرحله، پاره خط مرحله‌ی قبل سه قسمت خواهد شد. لذا طول هر پاره خط $\frac{۱}{۳}$ طول پاره خط مرحله‌ی قبل خواهد بود. به عبارت دیگر داریم:

طول پاره خط مرحله‌ی (۱ـ i) ام $\times \frac{۱}{۳}=$ طول پاره خط مرحله‌ی i ام.

بنابراین طول پاره خط مرحله‌ی n ام برابر است با $a\left(\frac{۱}{۳}\right)^n$.[۲]

مرحله	۰	۱	۲	...	n
طول پاره خط‌های موجود در برف‌دانه	$\left(\frac{۱}{۳}\right)^۰a$	$\left(\frac{۱}{۳}\right)^۱a$	$\left(\frac{۱}{۳}\right)^۲a$	...	$\left(\frac{۱}{۳}\right)^na$

محیط برف‌دانه‌ی کخ

محیط یک شکل، مجموع طول اضلاع تشکیل دهنده‌ی آن است. بنابراین با در دست داشتن تعداد پاره خط‌ها و طول آن‌ها در هر مرحله، به راحتی می‌توان محیط شکل تولید شده در هر مرحله را به‌دست آورد. برای مثال، محیط شکل در مرحله‌ام برابر است با: تعداد پاره خط‌های مرحله‌ی i ام $\times$ طول پاره خط مرحله‌ی‌ام

بنابراین:

$$\left(\left(\frac{۱}{۳}\right)^i\times a\right)\times(۳\times۴^i)=\text{محیط شکل تولید شده در مرحله‌ی } i \text{ ام}.$$

مرحله	۰	۱	۲	...	n
محیط شکل تولید شده	۳a	$۳\times۴\times\left(\frac{۱}{۳}\right)^۱\times a$	$۳\times۴^۲\times\left(\frac{۱}{۳}\right)^۲\times a$	...	$۳\times۴^n\times\left(\frac{۱}{۳}\right)^n\times a$
فرمول محاسبه شده	$\left(\frac{۴}{۳}\right)^۰\times۳a$	$\left(\frac{۴}{۳}\right)^۱\times۳a$	$\left(\frac{۴}{۳}\right)^۲\times۳a$	...	$\left(\frac{۴}{۳}\right)^n\times۳a$

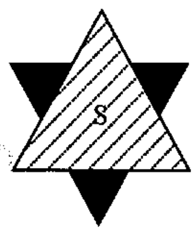
همان‌طور که قبلاً بیان شده بود، هر چه n بزرگ‌تر شود، شکل حاصل به برف‌دانه‌ی کخ نزدیک‌تر خواهد شد. وقتی n بزرگ و بزرگ‌تر شود یا به عبارت دیگر به $+\infty$ میل کند، محیط شکل ایجاد شده، به محیط برف‌دانه نزدیک‌تر خواهد شد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{۴}{۳}\right)^n\times۳a=\text{محیط برف‌دانه‌ی کخ}$$

واضح است که محیط برف‌دانه با افزایش n به $+\infty$ میل خواهد کرد.

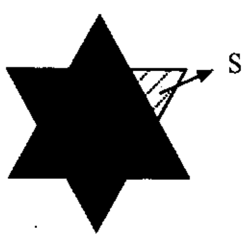
مساحت برف‌دانه‌ی کخ

اگر مساحت مثلث متساوی الاضلاع اولیه را با $s_۰$ نشان دهیم، داریم $s_۰=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$. برای محاسبه‌ی مساحت شکل در مرحله‌ی بعد، باید به این نکته دقت کرد که مساحت شکل حاصل برابر است با مساحت شکل قبلی به علاوه‌ی مساحت سه مثلث کوچک با طول ضلع $\frac{a}{۳}$، که در این مرحله تولید شده‌اند.



اگر مساحت یکی از این مثلث‌های کوچک را s' بنامیم، طبق شکل زیر خواهیم داشت: $s_۱=s_۰+۳s'$.

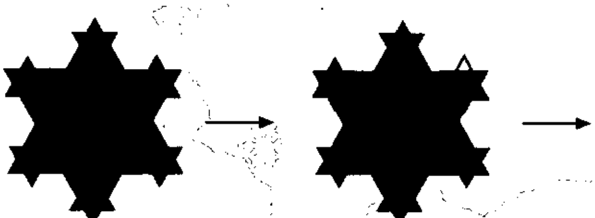
$$s_۱=s_۰+۳\times\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times\left(\frac{a}{۳}\right)^۲=s_۰+\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times\frac{a^۲}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲(۱+\frac{۱}{۳})$$



حال به مرحله‌ی دوم می‌رویم. در این مرحله نیز ۱۲ مثلث کوچک به شکل اضافه شده‌اند که مساحت آن‌ها به مساحت شکل قبلی افزوده می‌شود.

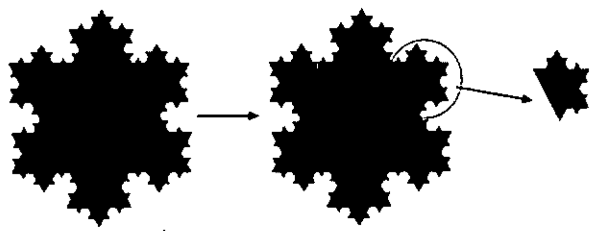
$$s_۲=s_۱+۱۲s'=s_۱+۱۲\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times\left(\frac{a}{۹}\right)^۲$$

$$=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲(۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۴}{۳^۲})$$



با کمی دقت می‌توان دریافت، در هر مرحله، هر پاره خط، یک

مثلث در مرحله‌ی بعد تولید می‌کند که باید در محاسبه‌ی مساحت شکل بعد در نظر گرفته شود. برای مثال، در مرحله‌ی دوم از ترسیم، ما ۴۸ پاره خط داریم. بنابراین در محاسبه‌ی مساحت شکل در مرحله‌ی سوم، ۴۸ مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $\frac{a}{۲۷}$ داریم که به مساحت شکل مرحله‌ی دوم افزوده می‌شود. در شکل نیز می‌توانید درستی این مدعا را ببینید.



بنابراین:

$$s_۳ = s_۲ + ۴۸ \times s' = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲\left(۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۴}{۳^۳}\right)$$

$$+۴۸ \times \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times \left(\frac{a}{۲۷}\right)^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲\left(۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۴}{۳^۳}+\frac{۴^۲}{۳^۵}\right)$$

از نکته‌ای که در بالا ذکر شد، استفاده و ادعا می‌کنیم،

$$s_n = s_{n-۱} + \frac{۴^{n-۱}}{۳^{۲n-۱}} \times \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ .$$

حال به استقرا، فرمول بالا را اثبات می‌کنیم.

فرض استقرا برای $n=۱$ قبلاً توضیح داده شده است. حال فرض کنیم فرمول بالا برای n برقرار باشد. باید نشان دهیم رابطه برای $n+۱$ نیز برقرار است. طبق آن‌چه قبلاً توضیح داده شده است، مساحت در هر مرحله برابر است با مساحت شکل در مرحله‌ی قبل به‌علاوه‌ی مجموع مساحت‌های مثلث‌های کوچک و جدیدی که روی هر یک از اضلاع شکل مرحله‌ی قبل تولید می‌شود. بنابراین داریم:

$s_{n+۱} = s_n +$ (تعداد پاره خط‌های مرحله‌ی nام)

$\times$ (مساحت مثلثی با طول ضلع $\frac{a}{۳^{n+۱}}$)

$$s_{n+۱} = s_n + ۳ \times ۴^n \times \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times \left(\frac{a}{۳^{n+۱}}\right)^۲ = s_n + \frac{۴^n}{۳^{۲n+۱}} \times \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$

در این مرحله، باید فرمولی مستقل برای مساحت برف‌دانه به‌دست آورد. لذا در عبارت $s_n = s_{n-۱} + \frac{۴^{n-۱}}{۳^{۲n-۱}} \times \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ مقدار $s_{n-۱}$ را قرار می‌دهیم. این یک رابطه‌ی بازگشتی است که باید در مرحله‌ی بعد مقدار $s_{n-۲}$ را قرار داد و این عمل تا $s_۱$ و $s_۰$ ادامه می‌یابد و با جای‌گذاری مقادیر خواهیم داشت:

$$s = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ + \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ \times \frac{۱}{۳} + \frac{۴}{۳^۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ + \frac{۴^۲}{۳^۵} \times \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$

$$+\cdots+\frac{۴^{n-۱}}{۳^{۲n-۱}} \times \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲\left(۱+\sum_{i=۱}^{n}\frac{۴^{i-۱}}{۳^{۲i-۱}}\right)$$

تا این مرحله توانستیم یک سری برای محاسبه‌ی مساحت برف‌دانه محاسبه کنیم. از طرف دیگر، وقتی n بزرگ‌تر شود، می‌توان مقدار واقعی مساحت برف‌دانه را یافت. بنابراین حد زیر، مقدار واقعی مساحت برف‌دانه خواهد بود.

$$\text{مساحت برف‌دانه‌ی کخ } s = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲\left(۱+\sum_{i=۱}^{n}\frac{۴^{i-۱}}{۳^{۲i-۱}}\right)$$

حال هم‌گرایی سری $\sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{۴^{n-۱}}{۳^{۲n-۱}}$ را بررسی می‌کنیم.

$$\sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{۴^{n-۱}}{۳^{۲n-۱}} = \sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{۴^n}{۴} \times \frac{۳}{۳^{۲n}} = \sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{۳}{۴} \times \frac{۴^n}{۹^n} = \sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{۳}{۴}\left(\frac{۴}{۹}\right)^n$$

واضح است که سری بالا یک سری هندسی است که به $\frac{۳}{۵}$ هم‌گراست. بنابراین می‌توان گفت، مساحت برف‌دانه‌ی کخ برابر است با $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲(۱+\frac{۳}{۵}) = \frac{۲\sqrt{۳}}{۵}a^۲$.

زیرنویس

۱. لازم به ذکر است، وقتی تعداد مراحل انجام کار بالاتر می‌رود و در حقیقت تعداد این اعمال تا بی‌نهایت ادامه پیدا می‌کند، به شکل حاصل، برف‌دانه‌ی کخ می‌گویند.

۲. با توجه به مراحل بیان شده می‌توان به راحتی با استفاده از استدلال استقرایی فرمول مرحله‌ی nام را اثبات کرد.

۳. با توجه به مراحل بیان شده می‌توان به راحتی با استفاده از استدلال استقرایی فرمول مرحله‌ی nام را اثبات کرد.

مرتبه‌ی ماتریس‌های پوچ توان

● حسین کریمی

ماتریس مربعی غیرصفر $A_{n\times n}$ را پوچ‌توان گوییم، هرگاه عدد طبیعی m یافت شود که $A^m = O$ باشد، اگر m کوچک‌ترین عدد طبیعی باشد که در رابطه‌ی فوق صدق کند، گوییم ماتریس A پوچ توان از مرتبه‌ی m است.

مثال۱: $A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ که در آن داریم $A^2 = O$. درنتیجه A پوچ‌توان از مرتبه‌ی ۲ است.

مثال۲: $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$ که در آن داریم $A^2 = O$.

درنتیجه A پوچ‌توان از مرتبه‌ی ۲ است.

مثال۳: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$ که در آن داریم $A^3 = O$.

درنتیجه A پوچ‌توان را مرتبه‌ی ۳ است. در این مقاله می‌خواهیم به دو سئوال زیر پاسخ دهیم:

۱. چه رابطه‌ای بین m (مرتبه‌ی پوچ‌توانی A) و n (مرتبه‌ی A) وجود دارد؟

۲. چگونه یک ماتریس پوچ‌توان را بسازیم؟

برای پاسخ به سؤالات بالا، این مطلب مهم را به‌عنوان پیش‌نیاز مطرح می‌کنیم: تمام ماتریس‌های مربعی $n\times n$ در یک معادله‌ی خاصی صدق می‌کنند که آن را «معادله‌ی سرشت‌نمایی» و یا «معادله‌ی مشخصه» گویند.

$$A^n = (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})A^{n-1}$$
$$- \cdots + (-1)^n (A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{nn})A + (-1)^{n-1}|A|I$$

مثلاً تمام ماتریس‌های ۲×۲ مانند $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در معادله‌ی $A^2 = (a+d)A - |A|I$ صدق می‌کنند. به عبارت دیگر:

$A^2 = (a_{11} + a_{22})A - |A|I$ یا $A^2 = (A_{11} + A_{22})A - |A|I$

همچنین تمام ماتریس‌های ۳×۳ مانند $A=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$ در معادله‌ی

$$A^3=(a+e+i)A^2-\left(\begin{vmatrix}a&b\\d&e\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a&c\\g&i\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}e&f\\h&i\end{vmatrix}\right)A+|A|I$$

صدق می‌کنند. به عبارت دیگر:

$$A^3=(a_{11}+a_{22}+a_{33})A^2-(A_{11}+A_{22}+A_{33})A+|A|I$$

و نیز تمام ماتریس‌های ۴×۴ مانند $A=\begin{bmatrix}a&b&c&d\\e&f&g&h\\i&j&k&l\\m&n&o&p\end{bmatrix}$ در معادله‌ی زیر صدق می‌کنند.

$$\begin{aligned}A^4&=(a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44})A^3\\&-\left(\begin{vmatrix}a&b\\e&f\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a&c\\i&k\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a&d\\m&p\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}f&g\\j&k\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}f&h\\n&p\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}k&l\\o&p\end{vmatrix}\right)A^2\\&+(A_{11}+A_{22}+A_{33}+A_{44})A-|A|I\end{aligned}$$

هریک از ضرایب A^2، دترمینان ماتریس‌هایی هستند که از حذف دو سطر و دو ستون هم‌مکان حاصل می‌شوند. برای مثال، اگر سطرها و ستون‌های سوم و چهارم را حذف کنیم، داریم.

$$\begin{vmatrix}a&b\\e&f\end{vmatrix}$$

اکنون به سئوالات مطرح شده درباره‌ی ماتریس‌های ۲×۲ و سپس در مورد ماتریس‌های ۳×۳ پاسخ می‌دهیم و در نهایت به بیان حالت کلی می‌پردازیم.

اگر در ماتریس $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ داشته باشیم: $|A|=0$ و $a+d=0$، با توجه به معادله‌ی مشخصه‌ی ماتریس‌های ۲×۲ داریم: $A^2=O$ و اگر برای ماتریس غیر صفر $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ داشته باشیم: $A^2=O$، آن‌گاه با توجه به معادله‌ی مشخصه‌ی ماتریس‌های ۲×۲ و پوچ‌توان بودن A که حاکی از $|A|=0$ است، داریم: $O=(a+d)A-O$ که نشان می‌دهد $a+d=0$. پس

بدین‌ترتیب، $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ پوچ‌توان از مرتبه‌ی ۲ است، اگر و فقط اگر $|A|=0$ و $a+d=0$.

حال فرض کنیم ماتریس غیرصفر $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ پوچ‌توان از مرتبه‌ی m باشد ($|A|=0$، $A^m=O$، $m>2$). اگر طرفین معادله‌ی $A^2=(a+d)A-|A|I$ را در A^{m-2} ضرب کنیم، داریم: $A^m=(a+d)A^{m-1}-|A|A^{m-2}$ که با توجه به شرایط فوق داریم: $O=(a+d)A^{m-1}-O$ و درنتیجه $a+d=0$.

این دو شرط یعنی $|A|=0$ و $a+d=0$ همان شرایط پوچ‌توانی A از مرتبه‌ی ۲ است. پس شرط $m>2$ باطل است، یعنی $m=2$ و به‌عبارت دیگر $m=n$ است.

با توجه به شرایط ذکر شده، می‌توان به سهولت ماتریس پوچ‌توان ۲×۲ را ساخت. کافی است عدد دل‌خواه A و عدد دل‌خواه غیر صفر K را در نظر بگیریم و بنویسیم: $A=\begin{bmatrix}a&\frac{a^2}{k}\\-k&-a\end{bmatrix}$ مانند:

$$A=\begin{bmatrix}4&-8\\2&-4\end{bmatrix}\ ,\ A=\begin{bmatrix}2&4\\-1&-2\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}3&5\\\frac{-9}{5}&-3\end{bmatrix}\ ,\ A=\begin{bmatrix}-\sqrt{2}&1\\-2&\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

اکنون فرض کنیم برای ماتریس غیر صفر $A_{3\times3}$ $(n=3)$ داشته باشیم $A^2=O$ (A پوچ‌توان از مرتبه‌ی ۲ است و $m=2$). بنابراین $A^3=O$ و $|A|=0$ که با قرار دادن آن‌ها در معادله‌ی مشخصه‌ی ماتریس‌های ۳×۳ داریم:

$$O=(a_{11}+a_{22}+a_{33})O-(A_{11}+A_{22}+A_{33})A+0I$$

بنابراین:

$$A_{3\times3}\neq O \text{ و } A^2=O\Rightarrow |A|=0 \text{ و } A_{11}+A_{22}+A_{33}=0$$

اما عکس ترکیب شرطی فوق برقرار نیست. یعنی اگر $|A|=0$ و $A_{11}+A_{22}+A_{33}=0$، آن‌گاه الزاماً رابطه‌ی $A^2=O$ برقرار نخواهد بود و A^3 و توان‌های بعدی، مضرب‌هایی از A^2 خواهند بود (در این صورت می‌گوییم ماتریس A، تناوب از مرتبه‌ی ۲ است).

مثال: فرض کنید $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&0\\1&2&3\end{bmatrix}$. A^2 و A^3 و A^4 و A^n را تعیین کنید.

$$A^2=\begin{bmatrix}8&10&12\\4&5&6\\8&10&12\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A^3=\begin{bmatrix}40&50&60\\20&25&30\\40&50&60\end{bmatrix}=5A^2$$

$$A^4=A^3.A=(5A^2).A=5A^3=5(5A^2)=25A^2$$

و $A^n=5^{n-2}.A^2$

توجه داشته باشید که در مثال بالا، هم $|A|=0$ و هم $A_{11}+A_{22}+A_{33}=0$. درحالی که $A^2\neq O$.

سؤال: چه شرطی برای ماتریس غیر صفر $A_{3\times3}$ در نظر بگیریم تا $A^2=O$ باشد؟

فرض کنیم برای ماتریس $A=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$ داشته باشیم $A^2=O$ (البته لازم است که $|A|=0$ و $A_{11}+A_{22}+A_{33}=0$ که با توجه به مثال قبل، می‌دانیم کافی نیست).

$A_{11}+A_{22}+A_{33}=0 \Rightarrow ei-fh+ai-gc+ae-bd=0$ (۱)

$A^2=O \Rightarrow$ (سطر اول A)×(ستون اول A) $=0 \Rightarrow a^2+bd+cg=0$ (۲)

(سطر دوم A)×(ستون دوم A) $=0 \Rightarrow bd+e^2+fh=0$ (۳)

(سطر سوم A)×(ستون سوم A) $=0 \Rightarrow gc+fh+i^2=0$ (۴)

$$\xrightarrow{(1),(2),(3),(4)} a^2+e^2+i^2+2ae+2ai+2ei=0 \Rightarrow \boxed{a+e+i=0} \qquad (5)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} ei-fh+ai+ae+a^2=0 \xrightarrow{(5)} ei-fh=0 \Rightarrow \boxed{A_{11}=0}$$

$$\xrightarrow{(1),(3)} ai-gc+ei+ae+e^2=0 \xrightarrow{(5)} ai-gc=0 \Rightarrow \boxed{A_{22}=0}$$

$$\xrightarrow{(1),(4)} ae-bd+ei+ai+i^2=0 \xrightarrow{(5)} ae-bd=0 \Rightarrow \boxed{A_{33}=0}$$

بنابراین ماتریس غیر صفر $A_{3\times3}$ پوچ توان از مرتبه‌ی ۲ است، اگر و فقط اگر سه شرط بالا را دارا باشد: $|A|=0$ و $A_{11}=A_{22}=A_{33}=0$ و $a_{11}+a_{22}+a_{33}=0$.

با توجه به معادله‌ی مشخصه‌ی ماتریس‌های ۳×۳، اگر $|A|=0$ و $A_{11}+A_{22}+A_{33}=0$ و $a_{11}+a_{22}+a_{33}=0$، آن‌گاه $A^3=O$.

اگر فرض کنیم ماتریس غیر صفر $A_{3\times3}$ پوچ توان از مرتبه‌ی ۳ باشد، بدیهی است که $|A|=0$ و $A\neq O$ و $A^2\neq O$ که با توجه به معادله‌ی مشخصه داریم:

$$O=A^3=(a_{11}+a_{22}+a_{33})A^2-(A_{11}+A_{22}+A_{33})A+0I$$

$$\Rightarrow (a_{11}+a_{22}+a_{33})A^2=(A_{11}+A_{22}+A_{33})A \qquad (I)$$

با توجه به غیرصفر بودن A و A^2، یکی از دو حالت زیر رخ می‌دهد:

الف) $A_{11}+A_{22}+A_{33}\neq0$ و $a_{11}+a_{22}+a_{33}\neq0$: از ضرب طرفین تساوی (I) در A داریم: $A_{11}+A_{22}+A_{33}=0$ و این خلاف فرض است.

ب) $A_{11}+A_{22}+A_{33}=0$ و $a_{11}+a_{22}+a_{33}=0$.

بنابراین ماتریس غیر صفر $A_{3\times3}$ پوچ توان از مرتبه‌ی ۳ است، اگر و فقط اگر سه شرط زیر را دارا باشد: $|A|=0$ و $A_{11}+A_{22}+A_{33}=0$ و $a_{11}+a_{22}+a_{33}=0$.

مسئله: نشان دهید اگر ماتریس $A_{3\times3}$ پوچ توان از مرتبه‌ی m باشد، آن‌گاه $m\leq3$.

حل: نشان می‌دهیم شرط $m>3$ برقرار نیست:

با توجه به $|A|=0$ و $A^m=O$ و ضرب طرفین معادله‌ی مشخصه در A^{m-3} داریم:

$$O=A^m=(a_{11}+a_{22}+a_{33})A^{m-1}-(A_{11}+A_{22}+A_{33})A^{m-2}+0A^{m-3}$$

$$\Rightarrow (a_{11}+a_{22}+a_{33})A^{m-1}=(A_{11}+A_{22}+A_{33})A^{m-2}$$

که با توجه به غیر صفر بودن A^{m-1} و A^{m-2} به مانند مطالب فوق، دو حالت پیش می‌آید که به همان ترتیب عمل می‌کنیم و خواهیم داشت: $a_{11}+a_{22}+a_{33}=0$ و $A_{11}+A_{22}+A_{33}=0$ که با توجه به $|A|=0$، همان شرایط پوچ توانی A از مرتبه‌ی ۳ خواهد بود و شرط $m>3$ باطل است.

اکنون برای نمونه، ماتریس $A=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$ را چنان تعیین می‌کنیم که $A^2=O$ باشد.

ابتدا سه عدد را که مجموع آن‌ها صفر است، در قطر اصلی قرار می‌دهیم؛ مانند:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & b & c\\ d & -۴ & f\\ g & h & ۳\end{bmatrix}$$

از $A_{۳۳}=۰$ نتیجه می‌گیریم: $bd=-۴$، فرض کنیم $b=۲$ و $d=-۲$ باشد، پس:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & c\\ -۲ & -۴ & f\\ g & h & ۳\end{bmatrix}$$

از $A_{۲۲}=۰$ نتیجه می‌گیریم: $gc=۳$، فرض کنیم $c=۳$ و $g=۱$ باشد، پس:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ -۲ & -۴ & f\\ ۱ & h & ۳\end{bmatrix}$$

فرض کنیم، سطر دوم A مضربی از سطر اول باشد تا $|A|=۰$ برقرار شود. پس:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ -۲ & -۴ & -۶\\ ۱ & h & ۳\end{bmatrix}$$

از $A_{۱۱}=۰$ نتیجه می‌گیریم: $-۱۲=-۶h$ - بنابراین $h=۲$ و داریم:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ -۲ & -۴ & -۶\\ ۱ & ۲ & ۳\end{bmatrix}$$

بدیهی است اگر $A^۲$ را محاسبه کنیم، خواهیم دید که $A^۲=O$.

حال برای نمونه، ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}$ را چنان تعیین می‌کنیم تا پوچ‌توان از مرتبه‌ی ۳ باشد.

ابتدا چهار عدد دل‌خواه را به عنوان a و b و d و e انتخاب می‌کنیم؛ مانند:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۳ & c\\ ۲ & ۴ & f\\ g & h & i\end{bmatrix}$$

با توجه به $a_{۱۱}+a_{۲۲}+a_{۳۳}=۰$ داریم: $i=-۵$، بنابراین:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۳ & c\\ ۲ & ۴ & f\\ g & h & -۵\end{bmatrix}$$

فرض کنیم $A_{۲۲}=۰$ (و یا هر عدد دیگر) پس: $gc=-۵$. مانند:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۳ & -۱\\ ۲ & ۴ & f\\ ۵ & h & -۵\end{bmatrix}$$

ستون سوم A را مضربی از ستون اول فرض می‌کنیم تا $|A|=۰$ برقرار شود:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۳ & -۱\\ ۲ & ۴ & -۲\\ ۵ & h & -۵\end{bmatrix}$$

با توجه به $A_{۱۱}+A_{۲۲}+A_{۳۳}=۰$ داریم $A_{۳۳}=۲$، بنابراین $h=۱۱$. پس:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۳ & -۱\\ ۲ & ۴ & -۲\\ ۵ & ۱۱ & -۵\end{bmatrix}$$

بدیهی است که اگر $A^۳$ را محاسبه کنیم، خواهیم دید که $A^۳=O$.

توجه داشته باشید که در هر دو نمونه‌ی فوق، صفر بودن $|A|$ مهم است و نه چگونگی صفر شدن $|A|$.

مسئله: نشان دهید اگر ماتریس $A_{۴\times۴}$ پوچ‌توان از مرتبه‌ی m باشد، آن‌گاه: $m\leq۴$. با توجه به معادله‌ی سرشت‌نمایی ماتریس‌های ۴×۴، یعنی $A^۴=B_۱A^۳-B_۲A^۲+B_۳A-|A|I$

اگر شرایط زیر برقرار باشند، گوییم $A^4 = O$.

$B_1 = a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44}=0$ ،
$B_3 = A_{11}+A_{22}+A_{33}+A_{44}=0$ ، $|A|=0$

$$B_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0$$

فرض کنیم $A_{4\times4}$ پوچ توان از مرتبه‌ی m باشد $(m>4)$. بنابراین: $|A|=0$ و $A^m=O$. با ضرب طرفین معادله‌ی مشخصه در A^{m-4} ، داریم:

$$O = A^m = B_1A^{m-1} - B_2A^{m-2} + B_3A^{m-3} - 0A^{m-4}$$
$$\Rightarrow B_1A^{m-1} = B_2A^{m-2} + B_3A^{m-3}$$

توجه داشته باشید که اگر $B_1=B_2=B_3=0$ باشد، آن‌گاه A پوچ توان از مرتبه‌ی ۴ و شرط $m>4$ مردود است.

$$\Rightarrow B_1A^m = B_2A^{m-1} - B_3A^{m-2} \Rightarrow B_2A^{m-1} = B_3A^{m-2}$$

چون A^{m-1} و A^{m-2} ماتریس‌های غیر صفر هستند، پس یکی از دو حالت زیر رخ می‌دهد:

الف) $B_2 \neq 0$ و $B_3 \neq 0$: از $B_2A^m = B_3A^{m-1}$ و $A^m=O$ ، نتیجه می‌گیریم $B_3=0$ و این خلاف فرض است.

ب) $B_2=0$ و $B_3=0$: از

$$O = A^m = B_1A^{m-1} - 0A^{m-2} + 0A^{m-3} - 0A^{m-4}$$

داریم $B_1=0$. درنتیجه $A^4=O$ و شرط $m>4$ باطل است.

پس اگر $A_{4\times4}$ ماتریس پوچ توان از مرتبه‌ی m باشد، داریم: $m\le4$.

مسئله: نشان دهید اگر ماتریس غیر صفر $A_{n\times n}$ پوچ توان از مرتبه‌ی m باشد، آن‌گاه: $m\le n$

حل: معادله‌ی مشخصه‌ی $A_{n\times n}$ را به صورت ذیل در نظر می‌گیریم:

$$A^n = B_1.A^{n-1} - B_2.A^{n-2} + \cdots + (-1)^n.B_{n-1}.A + (-1)^{n-1}.B_n.I$$

که در آن $B_1=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ و ... و $B_{n-1}=\sum_{i=1}^{n} A_{ii}$ و $B_n=|A|$.

بدیهی است با فرض $B_i=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ ماتریس A، پوچ توان از مرتبه‌ی n خواهد بود. اکنون فرض کنیم A پوچ توان از مرتبه‌ی m باشد $(m>n)$ ، یعنی $B_n=|A|=0$ و $A^m=O$ و برای هر عدد طبیعی مانند k ، $(k<m)$ داشته باشیم $A^k\neq O$. از ضرب طرفین معادله‌ی مشخصه در A^{m-2} داریم:

$$A^{m+n-2} = B_1.A^{m+n-3} - B_2.A^{m+n-4} + \cdots + (-1)^n.B_{n-3}.A^{m+1} + (-1)^{n-1}.B_{n-2}.A^m + (-1)^n.B_{n-1}.A^{m-1} + (-1)^{n-1}.B_n.A^{m-2}$$

که با توجه به $B_n=|A|=0$ داریم: $B_{n-1}=0$.

حال با در نظر گرفتن دو تساوی اخیر، اگر طرفین معادله‌ی مشخصه را در A^{m-3} ضرب کنیم، داریم $B_{n-2}=0$ و درنهایت با ضرب طرفین معادله‌ی مشخصه در A^{m-n} داریم: $B_1=0$ و این شرایط، نشان‌دهنده‌ی پوچ توانی A از مرتبه‌ی n است. به همین دلیل، شرط $m>n$ باطل است و داریم: $m\le n$.

نتایج

۱. اگر $|A_{2\times2}|=0$ ، آن‌گاه A متناوب خواهد بود و داریم:
$A^n = (a_{11}+a_{22})^{n-1}.A$

۲. اگر $|A_{2\times2}|=0$ و $a_{11}+a_{22}=0$ ، آن‌گاه $A^2=O$.

۳. اگر $|A_{3\times3}|=0$ و $A_{11}+A_{22}+A_{33}=0$ ، آن‌گاه A تناوب از مرتبه‌ی ۲ خواهد بود و داریم:
$A^n = (a_{11}+a_{22}+a_{33})^{n-2}.A^2$

۴. اگر $|A_{3\times3}|=0$ و $A_{11}+A_{22}+A_{33}=0$ و $a_{11}+a_{22}+a_{33}=0$ ، آن‌گاه $A^2=O$.

۵. اگر $|A_{3\times3}|=0$ و $A_{11}+A_{22}+A_{33}=0$ و $a_{11}+a_{22}+a_{33}=0$ ، آن‌گاه $A^3=O$.

۶. اگر $A_{n\times n}$ پوچ توان از مرتبه‌ی m باشد، آن‌گاه: $m\le n$.

با راهیان المپیادهای ریاضی (۱۰)

● غلامرضا یاسی‌پور

جانشینی‌های مثلثاتی

به علت فراوانی تعداد اتحادهای مثلثاتی، انتخاب جانشینی مثلثاتی هوشمندانه، غالباً به راه‌حلی بسیار ساده می‌انجامد. این روش در تمام مسائلی که در ادامه ارائه کرده‌ایم، به‌کار رفته است. جانشینی مورد بحث، معمولاً هم‌چون مسئله‌ی زیر، توسط صورت و فرم عبارت جبری مربوطه پیشنهاد می‌شود.

مسئله: تمام جواب‌های حقیقی دستگاه معادلات زیر را بیابید.

$$x^3 - 3x = y$$

$$y^3 - 3y = z$$

$$z^3 - 3z = x$$

در این جا حضور $x^3 - 3x$، فرمول سه‌برابر زاویه‌ی مربوط به کسینوس‌ها را به‌خاطر می‌آورد. البته در این مورد ضریب جلوی x^3 مفقود است، ولی ما با استفاده از روش دوبرابر کسینوس به‌جای کسینوس، مواظب آن خواهیم بود، و کار را با یافتن جواب‌های بین ۲- و ۲ آغاز می‌کنیم.

با نوشتن $x = 2\cos u$ ، $y = 2\cos v$ ، $z = 2\cos w$ ، با $u, v, w \in [0, \pi]$ ، دستگاه به صورت زیر درمی‌آید:

$$2\cos 3u = 2\cos v$$

$$2\cos 3v = 2\cos w$$

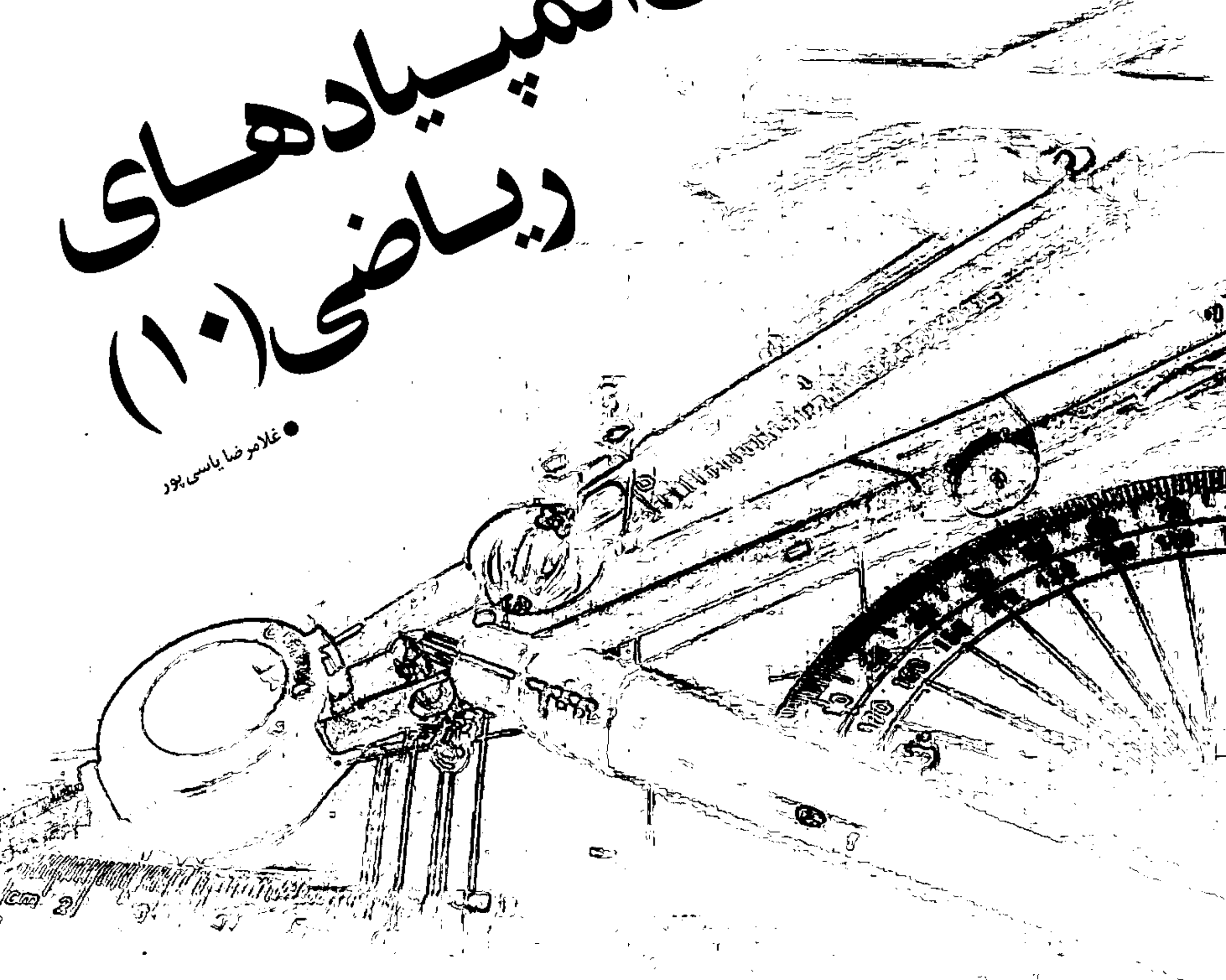
$$2\cos 3w = 2\cos u$$

با استفاده از فرمول سه‌برابر زاویه برای $\cos 3u$ و $\cos v$ ، معادله‌ی اول چنین می‌شود:

$$\cos 9u = \cos 3v$$

با ترکیب این معادله با معادله‌ی دوم، به‌دست می‌آوریم:

$$\cos 9u = \cos w$$



مانند قبل:

$$\cos 27u = \cos 3w$$

و معادله‌ی سوم، معادله‌ی زیر را به‌دست می‌دهد:

$$\cos 27u = \cos u$$

این برابری برقرار است اگر و تنها اگر، به‌ازای عدد صحیح k، داشته باشیم:

$$27u = 2k\pi \pm u$$

جواب‌های واقع در بازه‌ی $[0,\pi]$ عبارت‌اند از:

$$u = k\pi / 14 \ , \ k = 0,1,\dots,14$$

و:

$$u = k\pi / 13 \ , \ k = 0,1,2,\dots,12$$

در نتیجه:

$$x = 2\cos k\pi/14 \ , \ y = 2\cos 3k\pi/14 \ , \ z = 2\cos 9k\pi/14$$

$$k = 0,1,\dots,14$$

و $x = 2\cos k\pi/13$ ، $y = 2\cos 3k\pi/13$ و $z = 2\cos 9k\pi/13$ ، با درنظر گرفتن $k = 0,1,2,\dots,12$ ، جواب‌های دستگاه معادلات داده شده‌اند.

از آن‌جا که حداکثر ۲۷ = ۳ × ۳ × ۳ جواب وجود دارد (به درجه‌ی دستگاه توجه کنید) و هم‌اکنون ۲۷ جواب متمایز به‌دست آورده‌ایم، این جواب‌ها تمام جواب‌های مطلوب هستند. اکنون به مثالی می‌پردازیم که در آن تابع تانژانت به‌کار رفته است.

مسئله: فرض می‌کنیم $\{x_n\}_n$ دنباله‌ای باشد که در برگشتی

$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{3}x_n - 1}{x_n + \sqrt{3}} \ , \ n \ge 1$$

صدق می‌کند. ثابت کنید که این دنباله، متناوب یا دوری است.

فرمول تانژانت تفاضل را به‌خاطر می‌آوریم:

$$tg(a-b) = \frac{tga - tgb}{1 + tga \times tgb}$$

نیز توجه داشته باشید که: $tg\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. اگر رابطه‌ی برگشتی مفروض را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$x_{n+1} = \frac{x_n - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + x_n \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

طبیعی است که جانشینی $x_1 = tgt$ را، به‌ازای عدد حقیقی t، انجام دهیم. در این صورت: $x_2 = tg(t - \pi/6)$
و به‌طور استقرایی:

$$x_n = tg(t - (n-1)\pi/6) \ , \ n \ge 1$$

از آن‌جا که تانژانت، دوری با دوره‌ی π است، به‌دست می‌آوریم: $x_n = x_{n+6}$ که نشان می‌دهد، دنباله‌ی مورد نظر دارای دوره‌ی ۶ است.

چند مسئله برای تمرین بیشتر

۱. به‌ازای چه مقادیر پارامتر حقیقی a، عدد حقیقی x صادق در $\sqrt{1-x^2} \ge a - x$ موجود است؟

۲. با مفروض بودن چهار عدد متمایز در بازه‌ی (۰، ۱)، نشان دهید دو عدد از آن‌ها، x و y، چنان موجودند که:

$$0 < x < \sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} < \frac{1}{2}$$

۳. دنباله‌ی $\{x_n\}_n$، به‌ازای هر $n \ge 1$، در $\sqrt{x_{n+2}+2} \le x_n \le 2$ صادق است. جمع مقادیر ممکن x_{1986} را بیابید.

۴. جمع جواب‌های حقیقی دستگاه معادلات زیر را بیابید:

$$2x + x^2y = y$$

$$2y + y^2z = z$$

$$2z + z^2x = x$$

۵. جمع جواب‌های حقیقی دستگاه معادلات زیر را بیابید:

$$x_1 - \frac{1}{x_1} = 2x_2$$

$$x_2 - \frac{1}{x_2} = 2x_3$$

$$x_3 - \frac{1}{x_3} = 2x_4$$

$$x_4 - \frac{1}{x_4} = 2x_1$$

۶. ثابت کنید، به‌ازای هر $x, y \in R$ ، نابرابری‌های زیر برقرارند:

$$-\frac{1}{2} \le \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \le \frac{1}{2}$$

۷. به‌ازای هر عدد حقیقی x، دنباله‌ی $\{x_n\}_n$ را به‌طور برگشتی، با استفاده از $x_1 = x$ ، و:

$$x_{n+1} = \frac{1}{1-x_n} - \frac{1}{1+x_n}$$

به‌ازای هر n، تعریف کنید.
اگر $x_n = \pm 1$ ، آن‌گاه دنباله مختوم می‌شود (به‌ازای x_{n+1} تعریف ناشده خواهد بود). چند مورد از چنین دنباله‌هایی پس از هشت جمله مختوم می‌شوند؟

۸. دنباله‌ی اعداد حقیقی

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

دارای این ویژگی است که به‌ازای هر عدد صحیح و مثبت k، داریم:

$$a_{k+1} = (ka_k + 1)/(k - a_k)$$

ثابت کنید این دنباله شامل بی‌نهایت جمله‌ی مثبت و بی‌نهایت جمله‌ی منفی است.

۹. با مفروض بودن:

$$-1 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le 1$$

ثابت کنید:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sqrt{1-a_ia_{i+1}-\sqrt{(1-a_i^2)(1-a_{i+1}^2)}} < \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

۱۰. فرض می‌کنیم $x_0 = 0$، و:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$$

با توجه به این که داریم:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$$

ثابت کنید:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\sqrt{1+x_0+\ldots+x_{k-1}}\sqrt{x_k+\ldots+x_n}} < \frac{\pi}{2}$$

حل مسئله‌ها

۱. $t \in [0,\pi]$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $\cos t = x$، این کار امکان‌پذیر است، زیرا مقدار $|x|$ نمی‌تواند از ۱ تجاوز کند. داریم:

$$\sqrt{1-x^2} = \sin t$$

زیرا $\sin t$، به‌ازای $t \in [0,\pi]$، مثبت است. در این صورت، نابرابری مورد بحث به $\sin t + \cos t \ge a$ تبدیل می‌شود. ماکزیمم تابع

$$f(t) = \sin t + \cos t = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos(t-\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\cos(t-\frac{\pi}{4})$$

در بازه‌ی $[0,\pi]$، برابر $\sqrt{2}$ است. در نتیجه، برد a مجموعه‌ی جمیع اعداد حقیقی نامتجاوز از $\sqrt{2}$ است.

۲. فرض می‌کنیم که اعداد مورد نظر a_1، a_2، a_3 و a_4 باشند. جانشینی $a_k = \sin t_k$، $t_k \in (0,\pi/2)$ را درنظر می‌گیریم. مسئله می‌خواهد این را نشان دهیم که دو اندیس i و j با این شرط:

$$0 < \sin t_i \cos t_j - \sin t_j \cos t_i < \frac{1}{2}$$

موجودند. اما:

$$\sin t_i \cos t_j - \sin t_j \cos t_i = \sin(t_i - t_j)$$

در نتیجه باید ثابت کنیم که i و j ای با $t_i > t_j$ و $t_i - t_j < \frac{\pi}{6}$ وجود دارند. این مطلب از اصل لانه‌ی کبوتر یا دیریکله حاصل می‌شود. زیرا دو مورد از چهار عدد مزبور باید در یکی از بازه‌های بالا قرار گیرند:

$$(0,\pi/6],\ (\pi/6,\pi/3],\ (\pi/3,\ \pi/2)$$

۳. از آن‌جا که به‌ازای هر n، $0 \le x_n \le 2$، می‌توانیم جانشینی مثلثاتی $x_n = 2\cos y_n$ را انجام دهیم که در آن: $0 \le y_n \le \pi/2$.
از نابرابری $\sqrt{x_{n+2}+2} \le x_n$ و فرمول دوبرابر زاویه‌ی $\cos 2\alpha + 1 = 2\cos^2\alpha$، نابرابری زیر را حاصل می‌کنیم:

$$\cos y_{n+2}/2 \le \cos y_n$$

از آن‌جا که کسینوس، در $[0,\pi/2]$، تابعی نزولی است، این موضوع مستلزم $y_{n+2}/2 \ge y_n$ به‌ازای جمیع مقادیر n است.
با استفاده از استقرا نتیجه می‌شود که به‌ازای هر n و k داریم:

$$y_n \le y_{n+2k}/2^k$$

و با رفتن k به بی‌نهایت، $y_n = 0$ را به‌ازای هر n به‌دست می‌آوریم.
(آزمون انتخابی IMO رومانی، ۱۹۸۶، طرح از T.Andreescu)

۴. اگر یکی از مجهول‌ها، مثلاً x، برابر ± 1 باشد، آن‌گاه $2x + x^2y = y$ به $\pm 2 = 0$ منجر می‌شود که غیرممکن است. در نتیجه، دستگاه مورد بحث را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{2x}{1-x^2} = y$$

$$\frac{2y}{1-y^2} = z$$

$$\frac{2z}{1-z^2} = x$$

بنا به فرمول دوبرابر زاویه‌ی تانژانت‌ها، یعنی:

$$tg2a = \frac{2tga}{1-tg^2a}$$

طبیعی است که جانشینی $x = tg\alpha$ را به‌ازای $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$، انجام دهیم.
از دو معادله‌ی اول،

$$y = tg2\alpha \ ، \ z = tg4\alpha$$

و معادله‌ی آخر، مستلزم $tg8\alpha = tg\alpha$ می‌شود. درنتیجه، $8\alpha - \alpha = k\pi$، به ازای عدد صحیح kای، برقرار است. بنابراین $\alpha = k\pi/7$، و از آن‌جا که: $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$، باید داشته باشیم: $-3 \le k \le 3$
نتیجه می‌شود که جواب‌های دستگاه عبارت‌اند از:

$$(tg\frac{k\pi}{7}, tg\frac{2k\pi}{7}, tg\frac{4k\pi}{7}),\ \ k = -3,-2,-1,0,1,2,3$$

۵. فرمول مثلثاتی پنهان در صورت مسئله، فرمول دو برابر زاویه‌ی کتانژانت‌هاست؛ یعنی:

$$2\cot g2\alpha = \cot g\alpha - \frac{1}{\cot g\alpha}$$

این رابطه را می‌توان از فرمول دو برابر زاویه‌ی تانژانت‌ها، یعنی: $tg2\alpha = 2tg\alpha/(1-tg^2\alpha)$ با قرار دادن $1/\cot g\alpha$ به‌جای $tg\alpha$، به اثبات رساند.

اگر قرار دهیم: $x_1 = \operatorname{cotg}\alpha$ ، $\alpha \in (0,\pi)$ ، آن‌گاه از معادله‌ی اول $x_2 = \operatorname{cotg} 2\alpha$ ، از معادله‌ی دوم $x_3 = \operatorname{cotg} 4\alpha$ ، از معادله‌ی سوم $x_4 = \operatorname{cotg} 8\alpha$ ، و از معادله‌ی آخر $x_1 = \operatorname{cotg} 16\alpha$ حاصل می‌شود. درنتیجه، $\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{cotg} 16\alpha$ که مستلزم $16\alpha - \alpha = k\pi$ ، به ازای عدد صحیح k است. در این صورت، جواب‌های

$\alpha = k\pi / 15 \;,\; k = 1,2,\cdots,14$

را به دست می‌آوریم و جواب‌های دستگاه مفروض عبارت‌اند از:

$x_1 = \operatorname{cotg} k\pi / 15 \;,\; x_2 = \operatorname{cotg} 2k\pi / 15 \;,$

$x_3 = \operatorname{cotg} 4k\pi / 15 \;,\; x_4 = \operatorname{cotg} 8k\pi / 15 \;,\; k = 1,2,3,\cdots,14$

۶. فرض می‌کنیم:

$x = tga$ و $y = tgb$

در این صورت:

$$x + y = tga + tgb = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}$$

$$1 - xy = 1 - tga\, tgb = \frac{\cos(a+b)}{\cos a \cos b}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \cos^2 a$$

$$\frac{1}{1+y^2} = \cos^2 b$$

نابرابری مورد اثبات، هم‌ارز $-1 \le 2\sin(a+b)\cos(a+b) \le 1$ است، یعنی $-1 \le \sin 2(a+b) \le 1$ ، و کار به انجام می‌رسد.

۷. نخست توجه می‌کنیم که:

$$\frac{1}{1-x_n} - \frac{1}{1+x_n} = \frac{2x_n}{1-x_n^2}$$

اگر قرار دهیم $x_1 = tg\beta$ ، با $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$ ، در این صورت:

$$x_2 = \frac{2tg\beta}{1-tg^2\beta} = tg2\beta$$

و به طور استقرایی به‌دست می‌آوریم:

$$x_n = tg2^{n-1}\beta$$

به این ترتیب:

$$x_8 = tg2^7\beta = tg128\beta$$

برای این‌که دنباله دارای طول ۸ باشد، باید داشته باشیم:

$tg128\beta = \pm 1$

و این مستلزم آن است که، به ازای عدد صحیح kای، داشته باشیم:

$128\beta = \pm\pi/4 + k\pi$

به این ترتیب:

$\beta = \pm\pi/512 + k\pi/128$

به عبارت دیگر:

$$x = tg\left(\pm\frac{\pi}{512} + \frac{k\pi}{128}\right)$$

برای k، ۱۲۸ مقدار، یعنی $k = 0,1,2,\cdots,127$ وجود دارد که به ۲۵۶ مقدار متفاوت x می‌انجامد.

اکنون باید بررسی کنیم تا مطمئن شویم، هیچ‌یک از این مقادیر، دنباله‌ای به طول کمتر از هشت به دست نمی‌دهد. در واقع، برای این‌که دنباله زودتر خاتمه یابد، باید رابطه‌ی

$$\pm\frac{\pi}{512} + \frac{k\pi}{128} = \pm\frac{\pi}{2^{r+2}} + m\pi$$

را به ازای اعداد صحیح m و rای، با شرط $0 < r < 7$ ، داشته باشیم. این موضوع مستلزم آن است که:

$$\pm 1 + 4k = \pm 2^{7-r} + 2^9 m$$

اما سمت چپ این معادله فرد و سمت راست آن زوج است که این نمی‌تواند رخ دهد. درنتیجه جمیع ۲۵۶ دنباله، طولی برابر ۸ دارند.

(طرح برای AIME، ۱۹۹۶)

۸. اگر دنباله‌ی $b_1 = tg^{-1}a_1$ و $b_{k+1} = b_k + tg^{-1}(1/k)$ ، $k = 1,2,3,\cdots$ را تعریف کنیم، آن‌گاه فرمول جمع مربوط به تانژانت‌ها، یعنی:

$$tg(x+y) = \frac{tgx + tgy}{1 - tgx\, tgy}$$

نشان می‌دهد که به ازای هر k:

$$a_k = tgb_k$$

از آن‌جا که $\lim_{x\to 0}\frac{tax}{x} = 1$ ، نتیجه می‌شود:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{tg^{-1}1/k}{1/k} = 1$$

که با توجه به آن، از یک طرف سری $b_1 + \sum_{k=1}^{\infty} tg^{-1}\frac{1}{k}$ واگراست، و از طرف دیگر، جمله‌های سری، چون k به بی‌نهایت میل کند، به صفر میل می‌کند. درنتیجه، بی‌نهایت مجموع جزئی سری موردنظر موجود است که در بازه‌های به صورت

$(2\pi n, 2\pi n + \pi/2)$

قرار دارند و بی‌نهایت مجموع جزئی سری، در بازه‌ی $(2\pi n + \pi/2, 2\pi n)$ واقع‌اند.

اما یک مجموع جزئی یک b_m به ازای m وجود دارد و از آن‌جا که $a_m = tgb_m$ ، نتیجه می‌شود که بی‌نهایت a_m مثبت و بی‌نهایت a_m منفی موجود است.

(المپیاد ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۹)

۹. جانشینی مثلثاتی $a_i = \cos x_i$ ، به ازای $x_i \in [0,\pi]$ ، $i = 1,2,\cdots,n$ ، عملی طبیعی است. توجه داشته باشید که یکنوایی تابع کسینوس در ترکیب با نابرابری‌های داده شده، نشان می‌دهد که x_iها دنباله‌ای نزولی تشکیل می‌دهند. عبارت سمت چپ به صورت

زیر درمی‌آید :

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sqrt{1-\cos x_i \cos x_{i+1}-\sin x_i \sin x_{i+1}}=\sum_{i=1}^{n-1}\sqrt{1-\cos(x_{i+1}-x_i)}$$

$$=\sqrt{2}\sum_{i=1}^{n-1}\sin\frac{x_{i+1}-x_i}{2}$$

در این مورد، از فرمول‌های تفریق و دو برابر زاویه استفاده می‌کنیم. تابع سینوسی در $[0,\pi]$ کوژ به سمت پایین است. درنتیجه می‌توان از نابرابری «جنسن»[1] برای به دست آوردن نابرابری زیر استفاده کرد :

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\sin\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\le\sin\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)$$

درنتیجه :

$$\sqrt{2}\sum_{i=1}^{n-1}\sin\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\le(n-1)\sqrt{2}\sin\frac{x_n-x_1}{2(n-1)}$$

$$\le\sqrt{2}(n-1)\sin\frac{\pi}{2(n-1)}$$

زیرا $x_n-x_1\in(0,\pi)$. بهره‌گیری از این موضوع که، به‌ازای $x>0$ ، $\sin x<x$ ، نابرابری زیر را به دست می‌دهد :

$$\sqrt{2}(n-1)\sin\pi/(2(n-1))\le\sqrt{2}\pi/2$$

(برنامه‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۹۹۶)

۱۰ . آن‌جا که x_iها مثبت‌اند و مجموعشان ۱ می‌شود، می‌توانیم جانشینی $x_0+x_1+\cdots+x_k=\sin a_k$ با $k=0,1,\cdots,n$ ، $a_0=0<a_1<\cdots<a_n=\pi/2$ را به‌کار ببریم. در این صورت، نابرابری به صورت زیر درمی‌آید :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin a_k-\sin a_{k-1}}{\sqrt{1-\sin a_{k-1}}\sqrt{1-\sin a_{k-1}}}<\frac{\pi}{2}$$

که می‌تواند به صورت زیر بازنویسی شود :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2\sin\frac{a_k-a_{k-1}}{2}\cos\frac{a_k+a_{k-1}}{2}}{\cos a_{k-1}}$$

$\cos x$ ، به ازای $0\le x\le\pi/2$ ، تابعی نزولی است و : $\sin x<x$. درنتیجه، سمت چپ نابرابری مورد بحث، اکید کمتر از

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2\sin\frac{a_k-a_{k-1}}{2}\cos a_{k-1}}{\cos a_{k-1}}=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})=\frac{\pi}{2}$$

می‌شود و مسئله حل شده است.

(المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۶)

زیرنویس

1. Jensen

معرفی سایت‌های ریاضی جهان

ادامه‌ی مطلب صفحه‌ی [illegible]

۲۵ . منطق و نظریه‌ی مجموعه (Logic & Set Theory)

۲۶ . آموزش ریاضی (Mathematics Education)

۲۷ . زیست‌شناسی ریاضیاتی (Mathematical Biology)

۲۸ . گوناگون (Miscellaneous)

۲۹ . حساب دیفرانسیل و انتگرال چندمتغیره (Multivariable Calculus)

۳۰ . دینامیک غیرخطی (Nonlinear Dynamics)

۳۱ . نظریه‌ی اعداد (Number Theory)

۳۲ . آنالیز عددی (Numerical Analysis)

۳۳ . معادلات دیفرانسیل معمولی (Ordinary Differential Educations)

۳۴ . معادلات دیفرانسیل جزئی (Partial Differential Educations)

۳۵ . حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی (Pre-Calculus)

۳۶ . نظریه‌ی احتمال (Probabilitly Theory)

۳۷ . آمار (Statistics)

۳۸ . توپولوژی (Topology)

۳۹ . مثلثات (Trigonometry)

ب) روش دیگر، نوشتن کلمه‌ی کلیدی و مورد نظر در قالب یک کلمه‌ی تنها، یک عبارت تنها و یا چندین کلمه‌ی جداگانه در قسمت مخصوص جست‌وجوی این سایت است. برای مثال، اگر مایل هستید، اطلاعاتی را به صورت کلی در زمینه‌ی «نظریه گراف‌ها» به‌دست آورید، می‌باید عبارت «Graph Theory» را در قسمت جست‌وجو بنویسید. امّا اگر می‌خواهید که اطلاعاتی بیشتری درباره‌ی نظریه‌ی گراف‌ها، مثلاً پیرامون «ماتریس مجاورت گراف ساده» کسب کنید، کافی است عبارت «Adjacency Matrix of a Simple Graph» را در قسمت جست‌وجو بنویسید و به جست‌وجو بپردازید.

در سایت Math Archives قسمتی نیز به دانشگاه‌ها، کالج‌ها و انجمن‌های ریاضیات و گروه‌های ریاضی مرتبط با آن‌ها اختصاص داده شده است. در این بخش مخاطب می‌تواند، به اطلاعات گروه‌های ریاضی دانشگاه‌ها، کالج‌ها و انجمن‌های گوناگونی که اسم آن‌ها در اینترنت قرار داده شده است، از طریق انتخاب حروف الفبا دست‌رسی پیدا کند. برای مثال، شخصی که مایل است آگاهی‌هایی در مورد گروه ریاضی دانشگاه تگزاس دریافت کند، کافی است حرف «T» و فردی که به‌دنبال گروه ریاضی دانشگاه اوکلاهاما می‌باشد، کافی است، حرف O را انتخاب کند.

هم‌نهشتی و کاربردهای آن

قسمت ۲

• سید محمدرضا هاشمی موسوی
hashemi – moosavi@yahoo.com

اشاره

در قسمت اول، با هم‌نهشتی و تعریف‌ها، روابط و تعدادی از قوانین و مسأله‌های مربوط به آن آشنا شدیم. در این قسمت می‌کوشیم، ابتدا به برخی دیگر از مسأله‌های طرح شده در رابطه با موضوع پاسخ دهیم. سپس به ارایه‌ی کاربردهای هم‌نهشتی در سطوح گوناگون می‌پردازیم.

۹. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد زیر را با فرض $n \geq 5$ بر ۴۸ را بیابید.

$$N = 1!+2!+3!+\cdots+n!$$

حل: می‌دانیم $n! = n(n-1)(n-2)\times\cdots\times 1$، پس:

$$1!\overset{48}{\equiv}1,\quad 2!\overset{48}{\equiv}2,\quad 3!\overset{48}{\equiv}6,\quad 4!\overset{48}{\equiv}24,\quad 5!\overset{48}{\equiv}24,\quad 6!\overset{48}{\equiv}0$$

با فرض $n > 5$، خواهیم داشت:

$$n > 5:\quad n!\overset{48}{\equiv}0$$

بنابراین، با فرض $n \geq 5$، می‌توان نوشت:

$$N = 1!+2!+3!+\cdots+n!\overset{48}{\equiv}1+2+6+24+24+0+\cdots+0=57$$

$$N\overset{48}{\equiv}57\overset{48}{\equiv}9 \Rightarrow N\overset{48}{\equiv}9\ ;\quad r=9$$ (باقی‌مانده‌ی تقسیم N بر ۴۸)

۱۰ . ثابت کنید به ازای هر n طبیعی، عبارت $M = 5^{2n}\times 9^{n+1} + 2^{10n+3}$ بر ۱۷ بخش‌پذیر است.

حل:

$$2^5 \overset{17}{\equiv} -2 \; ; \; \left(2^5\right)^{2n} \overset{17}{\equiv} (-2)^{2n} \; ;$$

$$2^{10n}\times 2^3 \overset{17}{\equiv} (-2)^{2n}\times 2^3 = 2^{2n}\times 8$$

$$2^{10n+3}\overset{17}{\equiv} 8\times 2^{2n} \; , \; 5^{2n}\times 9^{n+1} \overset{17}{\equiv} 15^{2n}\times 9$$
$$\overset{17}{\equiv}(-2)^{2n}\times 9 = 2^{2n}\times 9$$

از جمع دو رابطه‌ی اخیر:

$$2^{10n+3} + 5^{2n}\times 9^{n+1} \overset{17}{\equiv} 8\times 2^{2n} + 9\times 2^{2n} = 17\times 2^{2n} \overset{17}{\equiv} 0 \; ;$$

$$M = 5^{2n}\times 9^{n+1}+2^{10n+3}\overset{17}{\equiv}0$$

۱۱ . ثابت کنید به ازای هر n طبیعی، عبارت $N = 4^{3n}+18n-1$ بر ۹ بخش‌پذیر است.

حل:

$$4^{3n} = (4^3)^n = (64)^n \overset{9}{\equiv} (1)^n = 1 \; ; \; 4^{3n}\overset{9}{\equiv}1 \; , \; 18n \overset{9}{\equiv} 0$$

از جمع دو رابطه‌ی اخیر:

$$4^{3n}+18n \overset{9}{\equiv} 1+0 \; ; \; 4^{3n}+18n\overset{9}{\equiv}1 \; ; \; N = 4^{3n}+18n-1\overset{9}{\equiv}0$$

۱۲ . ثابت کنید به ازای هر n طبیعی، عبارت $S = 7^{6n+3}+7^{3n+2}-12$ بر ۱۹ بخش‌پذیر است.

حل:

$$7^3 = 343 \overset{19}{\equiv} 1 \; ; \; (7^3)^{2n}\times 7^3 \overset{19}{\equiv}1 \; ; \; 7^{6n+3}\overset{19}{\equiv}1 \; ,$$

$$7^{3n+2}\overset{19}{\equiv} 7^2 \overset{19}{\equiv} 11 \; ; \; 7^{3n+2}\overset{19}{\equiv}11$$

از جمع دو رابطه‌ی اخیر:

$$7^{6n+3}+7^{3n+2}\overset{19}{\equiv}12 \; ; \; S = 7^{6n+3}+7^{3n+2}-12 \overset{19}{\equiv}0$$

۱۳ . ثابت کنید به ازای هر n طبیعی، عبارت $6^{3n-1}+7$ بر ۴۳ بخش‌پذیر است.

حل:

$$6^3 = 216 \overset{43}{\equiv} 1 \; ; \; 6^{3n}\overset{43}{\equiv}1 \; , \; 6^{3n-1}+7 = 6^{3n-3}\times 6^2+7,$$

$$(6^3)^{n-1}\overset{43}{\equiv}1 \; ; \; 6^{3n-3}\overset{43}{\equiv}1 \; , \; 6^{3n-1}+7 \overset{43}{\equiv}(1)6^2+7 = 43;$$

$$6^{3n-1}+7\overset{43}{\equiv}0$$

۱۴ . ثابت کنید به ازای هر مقدار طبیعی n و اعداد صحیح a و b داریم:

$$(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n+b^n$$

حل: با توجه به بسط دو جمله‌ای:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+b^n \quad (1)$$

از برابری ۱ نتیجه می‌شود:

$$(a+b)^n - a^n - b^n = kab \quad (2)$$

برابری ۲ را می‌توان به صورت هم‌نهشتی نشان داد:

$$(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n+b^n$$

۱۵ . اگر $a\overset{n}{\equiv}b$ و $m|n$، آن‌گاه $a\overset{m}{\equiv}b$.

حل: با توجه به فرض مسأله، یعنی $a\overset{n}{\equiv}b$، می‌توان نوشت:

$$n|(a-b)$$

از طرفی چون $m|n$، پس با توجه به خاصیت تعدی می‌توان نوشت:

$$m|(a-b) \; ; \; a\overset{m}{\equiv}b$$

۱۶ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد زیر بر ۷ را بیابید.

$$N = 3^{557}+4^{557}+7^{557}+77^{557}+777^{557}$$

حل: هم‌نهشتی‌های زیر واضح‌اند:

$$7^{557}\overset{7}{\equiv}0 \; , \; 77^{557}\overset{7}{\equiv}0 \; , \; 777^{557}\overset{7}{\equiv}0$$

$$3^{557}+4^{557} = (3+4)(3^{556} - 3^{555}\times 4+\cdots+4^{556}) = 7k \; ;$$

$$3^{557}+4^{557}\overset{7}{\equiv}0$$

از جمع هم‌نهشتی‌های اخیر خواهیم داشت:

$$N = 3^{557}+4^{557}+7^{557}+77^{557}+777^{557}\overset{7}{\equiv}0$$

(باقی‌مانده‌ی تقسیم صفر است.)

۱۷ . نشان دهید $k = 5^n - 3^n - 2^n$ بر ۶ بخش‌پذیر است.

حل: با توجه به رابطه‌ی $(a+b)^n\overset{ab}{\equiv}a^n+b^n$ و فرض $a=3$ و $b=2$، خواهیم داشت:

$$(3+2)^n \overset{6}{\equiv} 3^n+2^n \; ; \; 5^n\overset{6}{\equiv}3^n+2^n$$

پس:

$$k = 5^n-3^n-2^n\overset{6}{\equiv}0$$

۱۸ . ثابت کنید $N = m^n - m^{n-1}-m+1$ به ازای جمیع مقادیر طبیعی m و n بر $(m-1)^2$ بخش‌پذیر است.

حل:

$$N = m^n - m^{n-1}-m+1 = m^{n-1}(m-1)-(m-1)$$
$$= (m-1)(m^{n-1}-1)$$

از طرف دیگر:

$$m \overset{m-۱}{\equiv} ۱ \; ; \; m^{n-۱} \overset{m-۱}{\equiv} ۱ \; ; \; m^{n-۱} - ۱ = k(m-۱)$$

پس:

$$N = m^n - m^{n-۱} - m + ۱ = k(m-۱)^۲$$

۱۹. ثابت کنید عدد فرمای $F_n = ۲^{۲^n} + ۱$ به‌ازای $n = ۵$ مرکب و بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است.

حل: کافی است ثابت کنیم عدد $F_۵$ دارای عامل ۶۴۱ است:

$$۲^{۳۲} + ۱ \overset{۶۴۱}{\equiv} ۰$$

با توجه به برابری عددی $۶۴۰ = ۵ \times ۲^۷$ ، می‌توان نوشت:

$$۵ \times ۲^۷ \overset{۶۴۱}{\equiv} -۱$$

دو طرف این رابطه را به توان ۴ می‌رسانیم:

$$۵^۴ \times ۲^{۲۸} \overset{۶۴۱}{\equiv} ۱$$

از برابری $۵^۴ = ۶۲۵ = ۶۴۱ - ۱۶$ ، داریم $۵^۴ \overset{۶۴۱}{\equiv} -۲^۴$.

پس:

$$-۲^۴ \times ۲^{۲۸} \overset{۶۴۱}{\equiv} ۱ \; ; \; ۲^{۳۲} \overset{۶۴۱}{\equiv} -۱$$

بنابراین:

$$F_۵ = ۲^{۳۲} + ۱ \overset{۶۴۱}{\equiv} ۰$$

۲۰. ثابت کنید $۲^{۳۷n} - ۱$ به ازای جمیع مقادیر طبیعی n بر ۲۲۳ بخش‌پذیر است.

حل: با توجه به برابری $۲^۸ = ۲۵۶ = ۲۲۳ + ۳۳$ ، می‌توان نوشت:

$$۲^۸ \overset{۲۲۳}{\equiv} ۳۳ \; ; \; (۲^۸)^۲ \overset{۲۲۳}{\equiv} (۳۳)^۲$$

از طرف دیگر:

$$۳۳^۲ \overset{۲۲۳}{\equiv} ۱۰۸۹ = ۵(۲۲۳) - ۲۶ \overset{۲۲۳}{\equiv} -۲۶$$

پس:

$$۲^{۱۶} \overset{۲۲۳}{\equiv} -۲۶ \; ; \; (۲^{۱۶})^۲ \overset{۲۲۳}{\equiv} (-۲۶)^۲$$

با توجه به برابری $۶۷۶ = ۲۶^۲$ و تقسیم ۶۷۶ بر ۲۲۳، خواهیم داشت:

$$۲^{۳۲} \overset{۲۲۳}{\equiv} ۲۶^۲ = ۶۷۶ = ۳(۲۲۳) + ۷ \overset{۲۲۳}{\equiv} ۷$$

بنابراین:

$$۲^۵ \times ۲^{۳۲} \overset{۲۲۳}{\equiv} ۳۲ \times ۷ = ۲۲۴ = ۲۲۳ + ۱$$

پس:

$$۲^{۳۷} \overset{۲۲۳}{\equiv} ۱ \; ; \; ۲^{۳۷n} \overset{۲۲۳}{\equiv} ۱$$

۲۱. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $۴^{۱۴۳n} - ۷^n$ به ازای جمیع مقادیر طبیعی n بر ۹ را بیابید.

حل: با توجه به برابری $۶۴ = ۴^۳$ ، می‌توان نوشت:

$$۴^۳ = ۶۴ = ۶۳ + ۱ = ۷(۹) + ۱ \overset{۹}{\equiv} ۱$$

پس:

$$(۴^۳)^{۴۷} \times ۴^۲ = ۴^{۱۴۳} \overset{۹}{\equiv} ۱۶ = ۹ + ۷ \overset{۹}{\equiv} ۷$$

بنابراین:

$$۴^{۱۴۳n} \overset{۹}{\equiv} ۷^n \; ; \; ۴^{۱۴۳n} - ۷^n \overset{۹}{\equiv} ۰$$

درنتیجه، باقی‌مانده‌ی تقسیم $۴^{۱۴۳n} - ۷^n$ ، به‌ازای جمیع مقادیر طبیعی n بر ۹، برابر صفر است.

۲۲. ثابت کنید عدد $۲^{۷۶} + ۱۷ \times ۲^{۳۹} - ۵$ بر ۲۱ بخش‌پذیر است.

حل: با توجه به برابری $۲^۶ = ۶۴ = ۶۳ + ۱$ ، خواهیم داشت:

$$۲^۶ = ۳(۲۱) + ۱ \overset{۲۱}{\equiv} ۱ \; ; \; ۲^{۳۶} \overset{۲۱}{\equiv} ۱ \; ; \; ۲^{۳۸} \overset{۲۱}{\equiv} ۴ \overset{۲۱}{\equiv} -۱۷$$

پس:

$$(۲^{۳۸})^۲ \overset{۲۱}{\equiv} (-۱۷)^۲ = ۲۸۹ = ۱۳(۲۱) + ۱۶ \overset{۲۱}{\equiv} ۱۶$$

بنابراین:

$$۲^{۷۶} + ۱۷ \times ۲^{۳۹} - ۵ \overset{۲۱}{\equiv} ۱۶ + ۱۷ \times ۲^۳ - ۵$$

$$= ۱۶ + ۱۳۶ - ۵ = ۱۴۷ = ۷(۲۱) \overset{۲۱}{\equiv} ۰$$

۲۳. ثابت کنید عدد $۵^{۲۰۱} + ۲^{۱۰۴} + ۲^{۱۰۱}$ بر ۲۳ بخش‌پذیر است.

حل: با توجه به برابری $۵^{۲۰۱} = ۵ \times ۵^{۲۰۰} = ۵ \times ۲۵^{۱۰۰}$ و هم‌نهشتی $۲۵ \overset{۲۳}{\equiv} ۲$ ، می‌توان نوشت:

$$۵^{۲۰۱} \overset{۲۳}{\equiv} ۵ \times ۲^{۱۰۰}$$

از طرف دیگر:

$$۲^{۱۰۴} + ۲^{۱۰۱} = ۲^{۱۰۰} \times ۲^۴ + ۲^{۱۰۰} \times ۲ = ۱۸ \times ۲^{۱۰۰}$$

پس:

$$۵^{۲۰۱} + ۲^{۱۰۴} + ۲^{۱۰۱} \overset{۲۳}{\equiv} ۵ \times ۲^{۱۰۰} + ۱۸ \times ۲^{۱۰۰} \overset{۲۳}{\equiv} ۲۳ \times ۲^{۱۰۰} \overset{۲۳}{\equiv} ۰$$

۲۴. ثابت کنید عدد $۹^{۲۱} + ۸^{۱۲}$ بر ۷۳ بخش‌پذیر است.

حل: با توجه به برابری $۹^۲ = ۸۱ = ۷۳ + ۸$ و هم‌نهشتی $۹^۲ \overset{۷۳}{\equiv} ۸$ ، می‌توان نوشت:

$$۹^{۲۰} \overset{۷۳}{\equiv} ۸^{۱۰} \; ; \; ۹^{۲۱} \overset{۷۳}{\equiv} ۹ \times ۸^{۱۰}$$

پس:

$$۹^{۲۱} + ۸^{۱۲} \overset{۷۳}{\equiv} ۹ \times ۸^{۱۰} + ۶۴ \times ۸^{۱۰} \overset{۷۳}{\equiv} ۷۳ \times ۸^{۱۰} \overset{۷۳}{\equiv} ۰$$

۲۵. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $۳^{۳۰۰} - ۲^{۳۰۰}$ بر ۳۵ را بیابید.

حل: با توجه به برابری $۳^۳ = ۲۷ = ۳۵ - ۸$ و هم‌نهشتی $۳^۳ \overset{۳۵}{\equiv} -۸$ ، می‌توان نوشت:

$$۳^{۳۰۰} \overset{۳۵}{\equiv} ۸^{۱۰۰} \; ; \; ۳^{۳۰۰} \overset{۳۵}{\equiv} ۲^{۳۰۰}$$

پس:

$$3^{300} - 2^{300} \overset{35}{\equiv} 0$$

بنابراین، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $3^{300}-2^{300}$ بر ۳۵ برابر صفر است.

۲۶. ثابت کنید عدد $3^{27}+7^{10}\times 2^{29}$، بر ۲۹ بخش‌پذیر است.

حل: با توجه به برابری‌های $3^{27}=(3^3)^9=27^9$ و $7^{10}\times 2^{29} = 28\times 7^9\times 8^9 = 28\times 56^9$ و هم‌نهشتی‌های $27\overset{29}{\equiv}-2$، $28\overset{29}{\equiv}-1$ و $56\overset{29}{\equiv}-2$، خواهیم داشت:

$$3^{27}+7^{10}\times2^{29} \overset{29}{\equiv} (-2)^9+(-1)(-2)^9 \overset{29}{\equiv} -2^9+2^9 \overset{29}{\equiv} 0$$

تمرین: ثابت کنید عدد $3^{302}\times 2^{42}\times 20^{40}+3$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است.

راهنمایی: ابتدا برابری زیر را نتیجه بگیرید و سپس $27\overset{13}{\equiv}1$، $64\overset{13}{\equiv}-1$ و $25\overset{13}{\equiv}-1$ را به‌کار ببرید.

$$3^{302}\times2^{42}\times20^{40} = 36\times(27)^{100}(64)^{20}(25)^{20}$$

۲۷. نشان دهید برای هر عدد طبیعی n و برای هر عدد صحیح فرد مثل a داریم:

$$a^{2^{n-1}} \overset{2^n}{\equiv} 1$$

حل: این مسأله را با روش استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم:

$1)\ n=1:\ a^{2^0}\overset{2}{\equiv}1$

واضح است که برای هر عدد صحیح فرد مثل a داریم:

$$a\overset{2}{\equiv}1$$

پس، حکم به ازای $n=1$ درست است.

$2)\ n=k:\ a^{2^{k-1}}\overset{2^k}{\equiv}1$ (فرض استقرا)

$3)\ n=k+1:\ a^{2^k}\overset{2^{k+1}}{\equiv}1$ (حکم استقرا)

با استفاده از اتحاد مزدوج:

$$a^{2^k}-1=(a^{2^{k-1}}-1)(a^{2^{k-1}}+1)$$

بنابر فرض استقرا داریم: $a^{2^{k-1}}-1=2^k s$. هم‌چنین با توجه به فرد بودن a می‌توان نوشت:

$$a^{2^{k-1}}+1=2t:\ a^{2^k}-1=(2^ks)(2t)=2^{k+1}st$$

پس:

$$a^{2^k}-1\overset{2^{k+1}}{\equiv}0;\quad a^{2^k}\overset{2^{k+1}}{\equiv}1$$

۲۸. ثابت کنید عدد $2^{53}+5^{10}\times3^{12}$ بر ۱۷ بخش‌پذیر است.

حل: با توجه به برابری‌های:

$$2^{53}+5^{10}\times3^{12}=2^3\times2^{50}+5^{10}\times3^2\times3^{10}$$

$$=8\times32^{10}+15^{10}\times9$$

و با توجه به $32\overset{17}{\equiv}15$، می‌توان نوشت:

$$2^{53}+5^{10}\times3^{12}\overset{17}{\equiv}8\times15^{10}+15^{10}\times9\overset{17}{\equiv}17\times15^{10}\overset{17}{\equiv}0$$

۲۹. نشان دهید برای هر n طبیعی داریم:

$$3^{4n}\overset{17}{\equiv}4^{3n}$$

حل: با توجه به برابری‌های $3^4=81=4(17)+13$ و $4^3=64=3(17)+13$ خواهیم داشت:

$$3^{4n}=(3^4)^n\overset{17}{\equiv}(13)^n,\quad 4^{3n}=(4^3)^n\overset{17}{\equiv}(13)^n$$

پس:

$$3^{4n}\overset{17}{\equiv}4^{3n}\overset{17}{\equiv}13^n$$

۳۰. با استفاده از روش استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$4^n+6n\overset{9}{\equiv}1$$

حل: با توجه به صورت مسأله، به‌ترتیب:

$1)\ n=1:\ 4^1+6(1)\overset{9}{\equiv}1;\ 10\overset{9}{\equiv}1$

$2)\ n=k:\ 4^k+6k\overset{9}{\equiv}1$ (فرض استقرا)

$3)\ n=k+1:\ 4^{k+1}+6(k+1)\overset{9}{\equiv}1$ (حکم استقرا)

دو طرف فرض استقرا را در ۴ ضرب می‌کنیم:

$$4^{k+1}+24k\overset{9}{\equiv}4;\quad 4^{k+1}+6k+18k+6\overset{9}{\equiv}10;$$

$$4^{k+1}+6(k+1)+18k-9\overset{9}{\equiv}1$$

با توجه به $18k-9\overset{9}{\equiv}0$، می‌توان نوشت:

$$4^{k+1}+6(k+1)\overset{9}{\equiv}1$$

پس، حکم برقرار است.

۳۱. ثابت کنید برای هر n طبیعی داریم:

$$160^n+96^n\overset{62}{\equiv}3^n+5^n$$

حل: برابری $62=2\times31$ بدیهی است. بنابراین کافی است نشان دهیم که طرف‌های اول و دوم هریک زوج و بر ۳۱ بخش‌پذیر است. طرف اول زوج است؛ زیرا مجموع دو عدد زوج است. طرف دوم نیز زوج است؛ زیرا مجموع دو عدد فرد است. در این‌جا کافی است هم‌نهشتی زیر را ثابت کنیم:

$$160^n+96^n\overset{31}{\equiv}3^n+5^n$$

با توجه به هم‌نهشتی‌های $160\overset{31}{\equiv}5$ یا $160^n\overset{31}{\equiv}5^n$ و $96\overset{31}{\equiv}3$ یا $96^n\overset{31}{\equiv}3^n$، درستی هم‌نهشتی اخیر واضح است.

۳۲. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $k=(6^{44}+7)(6^{29}+7)$ بر ۴۳ را بیابید.

حل: با توجه به هم‌نهشتی $6^3 \overset{43}{\equiv} 1$، می‌توان نوشت:

$$6^{29} = 6^{27}\times 6^2 = (6^3)^9 \times 36 \overset{43}{\equiv} -7 \;;\; 6^{29}+7 \overset{43}{\equiv} 0$$

هم‌چنین:

$$6^{44} = 6^{42}\times 6^2 = (6^3)^{14}\times 36 \overset{43}{\equiv} -7 \;;\; 6^{44}+7 \overset{43}{\equiv} 0$$

بنابراین، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد k بر ۴۳ برابر صفر است.

۳۳. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد زیر را بر ۹ بیابید.

$$N=(4^{181}+10^{11}+5)(4^{91}+10^{6}+4)$$

حل: با توجه به هم‌نهشتی‌های $8 \overset{9}{\equiv} -1$ و $10 \overset{9}{\equiv} 1$، می‌توان نوشت:

$$4^{181}=2^{362}=(2^3)^{120}\times 4 = 8^{120}\times 4 \overset{9}{\equiv} (-1)^{120}\times 4 = 4 \;;$$

$$10^{11} \overset{9}{\equiv} 1 \;;\; 10^{6} \overset{9}{\equiv} 1 \;;\; 4^{91}=4\times(2^3)^{60}=4\times 8^{60} \overset{9}{\equiv} 4\times(-1)^{60}=4$$

پس:

$$4^{181}+10^{11}+5 \overset{9}{\equiv} 4+1+5 \overset{9}{\equiv} 1 \;;\; 4^{91}+10^{6}+4 \overset{9}{\equiv} 4+1+4 \overset{9}{\equiv} 0$$

بنابراین، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد N بر ۹ برابر ۱ است.

۳۴. با استفاده از روش استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$9|M=2\times 16^n-4^n-1$$

حل: باید نشان دهیم:

$$M=2\times 16^n-4^n-1 \overset{9}{\equiv} 0$$

به‌ترتیب:

1) $n=1:\; 2\times 16^1-4^1-1=27 \overset{9}{\equiv} 0$

2) $n=k:\; 2\times 16^k-4^k-1 \overset{9}{\equiv} 0$ (فرض استقرا)

3) $n=k+1:\; 2\times 16^{k+1}-4^{k+1}-1 \overset{9}{\equiv} 0$ (حکم استقرا)

دو طرف فرض استقرا را در ۱۶ ضرب می‌کنیم:

$$2\times 16^{k+1}-16\times 4^k-16 \overset{9}{\equiv} 0 \;;$$

$$2\times 16^{k+1}-4\times 4^{k+1}-16 \overset{9}{\equiv} 0 \;;$$

$$2\times 16^{k+1}-4^{k+1}-1-(12\times 4^k+15) \overset{9}{\equiv} 0$$

در این‌جا، برای اثبات حکم کافی است ثابت کنیم:

$$12\times 4^k+15 \overset{9}{\equiv} 0 \;;\; 3(4^{k+1}+5) \overset{9}{\equiv} 0$$

پس کافی است ثابت کنیم:

$$4^{k+1}+5 \overset{3}{\equiv} 0$$

با توجه به هم‌نهشتی $4 \overset{3}{\equiv} 1$، می‌توان نوشت:

$$4^{k+1}+5 \overset{3}{\equiv} 1+5=6 \overset{3}{\equiv} 0$$

بنابراین حکم برقرار است:

$$2\times 16^{k+1}-4^{k+1}-1 \overset{9}{\equiv} 0$$

تمرین

۱. باقی‌مانده‌ی تقسیم $N=1!+2!+3!+\cdots+(1387)!$ بر ۴۲ را بیابید.

۲. ثابت کنید به‌ازای هر n طبیعی، عبارت $M=5^{4n}\times 9^{2n+1}+2^{20n+3}$ بر ۱۷ بخش‌پذیر است.

۳. ثابت کنید به‌ازای هر n طبیعی، عبارت $N=4^{6n}+36n$ بر ۹ بخش‌پذیر است.

۴. ثابت کنید به‌ازای هر n طبیعی، عبارت $S=7^{12n+3}+7^{6n+2}-12$ بر ۱۹ بخش‌پذیر است.

۵. ثابت کنید به‌ازای هر n طبیعی، عبارت $k=6^{12n-1}+7$ بر ۴۳ بخش‌پذیر است.

۶. ثابت کنید به‌ازای هر n طبیعی، باقی‌مانده‌ی تقسیم $N=13^n-7^n-6^n+41$ بر ۴۲ برابر ۴۱ است.

۷. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد زیر بر ۱۲ را تعیین کنید.

$$N=3^{1383}+4^{1383}+13^{1383}+11^{1384}$$

۸. نشان دهید عدد $k=25^n-9^n-4^n$ بر ۶ بخش‌پذیر است.

۹. ثابت کنید عبارت $N=2^{3n}-2^{3n-3}-7$ به‌ازای هر n طبیعی بر ۴۹ بخش‌پذیر است.

۱۰. ثابت کنید عدد فرمای $F_5=2^{32}+1$ مرکب است.

۱۱. ثابت کنید عدد $N=2^{74n}-1$ به ازای جمیع مقادیر طبیعی n بر ۲۲۳ بخش‌پذیر است.

۱۲. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N=2^{572n}-49^n$ را به ازای هر عدد طبیعی n بر ۹ به‌دست آورید.

۱۳. ثابت کنید عدد $k=2^{76}-2^{41}+16$ بر ۲۱ بخش‌پذیر است.

۱۴. ثابت کنید عدد $N=125^{67}+4^{52}+2^{101}$ بر ۲۳ بخش‌پذیر است.

۱۵. ثابت کنید عدد $k=3^{42}+2^{36}$ بر ۷۳ بخش‌پذیر است.

۱۶. ثابت کنید عدد $N=2^{53}+25^5\times 9^6$ بر ۱۷ بخش‌پذیر است.

۱۷. ثابت کنید به ازای هر n طبیعی عبارت $N=3^{4n}-4^{3n}$ بر ۱۷ بخش‌پذیر است.

۱۸. با استفاده از روش استقرای ریاضی ثابت کنید، باقی‌مانده‌ی $N=2^{2n}+6n$ بر ۹ برابر ۱ است.

۱۹. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N=2^{362}+10^{11}+5$ بر ۹ را تعیین کنید.

• ابراهیم دارابی

کاربردهایی لاگرانژ (۲)

در شماره‌ی قبل قضیه‌ی لاگرانژ و نتایج حاصل از آن را مطرح کردیم. همچنین کاربرد این قضیه و نتایج آن را در اثبات اتحادها، نامساوی‌ها و فرمول‌های مثلثاتی در قالب چند مثال دیدید. اینک در پی بقیه‌ی آن مثال‌ها را می‌آوریم.

مثال ۱۱. این اتحاد را ثابت کنید:

$$\operatorname{Arc}\cos\frac{2x}{x^2+1}=\begin{cases}\pi-\operatorname{Arc}\sin\dfrac{x^2-1}{x^2+1}, & x\in(-\infty,-1).\\ \pi+\operatorname{Arc}\sin\dfrac{x^2-1}{x^2+1}, & x\in[-1,0)\\ -\operatorname{Arc}\sin\dfrac{x^2-1}{x^2+1}, & x\in[0,1)\\ \operatorname{Arc}\sin\dfrac{x^2-1}{x^2+1}, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$$

اثبات: دیده می‌شود:

$$\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|\le 1\ ,\ \left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|\le 1$$

و به ازای هر x حقیقی، توابع:

$$f(x)=\operatorname{Arc}\cos\frac{2x}{x^2+1}\ ,\ g(x)=\operatorname{Arc}\sin\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

روی محور اعداد پیوسته هستند و داریم:

$$f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2}}\times\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)'$$

$$=\frac{-(x^2+1)}{\sqrt{(x^2-1)^2}}\times\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}=\frac{2(x^2-1)}{|x^2-1|(x^2+1)}$$

$$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}}\times\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)'=\frac{x^2+1}{2\sqrt{x^2}}\times\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{2x}{|x|(x^2+1)}$$

اکنون به این ترتیب عمل می‌کنیم:

۱. در بازه‌ی $(-\infty,-1)\cup(0,1)$، تابع $F(x)=f(x)+g(x)$ را درنظر می‌گیریم. داریم:

$$F'(x)=f'(x)+g'(x)=\frac{2(x^2-1)}{|x^2-1|(x^2+1)}+\frac{2x}{|x|(x^2+1)}$$

اگر $x\in(-\infty,-1)$، آن‌گاه:

$$|x^2-1|=x^2-1\ ,\ |x|=-x\Rightarrow F'(x)=0$$

اگر $x\in(0,1)$، آن‌گاه:

$$|x^2-1|=-(x^2-1)\ ,\ |x|=x\Rightarrow F'(x)=0$$

$$\Rightarrow F(x)=c$$

$$\Rightarrow \operatorname{Arc}\cos\frac{2x}{x^2+1}+\operatorname{Arc}\sin\frac{x^2-1}{x^2+1}=c$$

در هر یک از بازه‌های بالا، برای پیدا کردن c قرار می‌دهیم $x=-\sqrt{3}$ و $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$. از آن‌جا داریم:

$$F(-\sqrt{3})=\operatorname{Arc}\cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\operatorname{Arc}\sin\left(\frac{1}{2}\right)=\pi-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\pi$$

$$\Rightarrow c=\pi$$

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\operatorname{Arc}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}+\operatorname{Arc}\sin\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=0$$

پس اگر $x\in(-\infty,-1)$. آن‌گاه:

$$\operatorname{Arc}\cos\frac{2x}{x^2+1}+\operatorname{Arc}\sin\frac{x^2-1}{x^2+1}=\pi$$

و اگر $x\in(0,1)$، آن‌گاه:

$$\operatorname{Arc}\cos\frac{2x}{x^2+1}+\operatorname{Arc}\sin\frac{x^2-1}{x^2+1}=0$$

۲. تابع $G(x)=f(x)-g(x)$ را درنظر می‌گیریم که در آن $x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$

$$G(x) = \operatorname{Arccos}\frac{2x}{x^2+1} - \operatorname{Arcsin}\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$G'(x) = f'(x) - g'(x) = \frac{2(x^2-1)}{|x^2-1|(x^2+1)} - \frac{2x}{|x|(x^2+1)}$$

اگر $x \in (-1,0)$ ، آن‌گاه:

$$|x^2-1| = -(x^2-1)\ ,\ |x| = -x \Rightarrow G'(x) = 0$$

اگر $x \in (1,+\infty)$ ، آن‌گاه:

$$|x^2-1| = x^2-1\ ,\ |x| = x \Rightarrow G'(x) = 0$$

پس در بازه‌ی مفروض، تابع $G(x)$ ثابت است. یعنی:

$$\operatorname{Arccos}\frac{2x}{x^2+1} - \operatorname{Arcsin}\frac{x^2-1}{x^2+1} = c$$

قرار می‌دهیم $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ و $x = \sqrt{3}$. نتیجه می‌شود:

$$G(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \operatorname{Arccos}(-\frac{\sqrt{3}}{2}) - \operatorname{Arcsin}(-\frac{1}{2}) = \pi - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \pi$$

$$\Rightarrow c = \pi$$

$$G(\sqrt{3}) = \operatorname{Arccos}\frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{Arcsin}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = 0$$

پس اگر $x \in (-1,0)$ ، آن‌گاه:

$$\operatorname{Arccos}\frac{2x}{x^2+1} - \operatorname{Arcsin}\frac{x^2-1}{x^2+1} = \pi$$

و اگر $x \in (1,+\infty)$ ، آن‌گاه:

$$\operatorname{Arccos}\frac{2x}{x^2+1} - \operatorname{Arcsin}\frac{x^2-1}{x^2+1} = 0$$

۳. به ازای $x = \pm 1$ و $x = 0$ مقادیر $f(x)$ و $g(x)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(-1) = \operatorname{Arccos}(-1) = \pi\ ,\ g(-1) = \operatorname{Arcsin} 0 = 0$$

پس به ازای $x = -1$ داریم: $f(x) = \pi + g(x)$ ، یعنی:

$$\operatorname{Arccos}\frac{2x}{x^2+1} = \pi + \operatorname{Arcsin}\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$g(0) = \operatorname{Arcsin}(-1) = -\frac{\pi}{2}\ ,\ f(0) = \operatorname{Arccos} 0 = \frac{\pi}{2}$$

بنابراین به ازای $x = 0$ داریم:

$$f(x) = -g(x) \Rightarrow \operatorname{Arccos}\frac{2x}{x^2+1} = -\operatorname{Arcsin}\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$f(1) = \operatorname{Arccos} 1 = 0\ ,\ g(1) = \operatorname{Arcsin} 0 = 0$$

بنابراین به ازای $x = 1$ داریم:

$$f(x) = g(x) = \operatorname{Arccos}\frac{2x}{x^2+1} = \operatorname{Arcsin}\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

بنابراین، اتحاد مفروض به ازای هر مقدار حقیقی x برقرار است.

مثال ۱۲ . عبارت زیر را به صورت حاصل ضرب بنویسید:

$$x(y^2-z^2) + y(z^2-x^2) + z(x^2-y^2)$$

حل: عبارت بالا را به عنوان تابعی از متغیر x در نظر می‌گیریم (y و z را مقادیر ثابت درنظر می‌گیریم):

$$f(x) = x(y^2-z^2) + y(z^2-x^2) + z(x^2-y^2)$$

مشتق تابع را حساب می‌کنیم:

$$f'(x) = y^2 - z^2 - 2xy + 2xz = (y^2-z^2) - 2x(y-z)$$
$$= (y-z)(y+z) - 2x(y-z)$$
$$= (y-z)(y+z-2x)$$

فرض کنیم $(y-z)(y+z-2x)$ مشتق تابع دیگری مانند $g(x)$ باشد:

$$g'(x) = (y-z)((y+z)-2x)$$
$$\Rightarrow g(x) = (y-z)((y+z)x - x^2)$$

چون $f(x)$ و $g(x)$ در مجموعه‌ی اعداد حقیقی پیوسته و مشتق‌پذیر هستند، و داریم:

$$f'(x) = g'(x)$$

پس بنابر نتیجه‌ی (۲) لاگرانژ (مقاله‌ی شماره‌ی قبل) داریم:

$$f(x) = g(x) + c$$

که در آن c به x بستگی ندارد، اما می‌تواند به y و z بستگی داشته باشد. داریم:

$$x(y^2-z^2) + y(z^2-x^2) + z(x^2-y^2)$$
$$= (y-z)((y+z)x - x^2) + c$$

برای تعیین c قرار می‌دهیم $x = 0$. از آن‌جا:

$$c = yz^2 - zy^2$$

بنابراین داریم:

$$f(x) = g(x) + yz^2 - zy^2$$
$$\Rightarrow f(x) = (y-z)((y+z)x - x^2) + yz^2 - zy^2$$
$$= (y-z)(xy + xz - x^2) - yz(y-z)$$
$$= (y-z)(xy - x^2 + xz - yz)$$

$$= (y-z)(x(y-x)-z(y-x))$$
$$= (y-z)(y-x)(x-z)$$

از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)$$
$$= (y-z)(y-x)(x-z)$$

مثال ۱۳. این عبارت را ساده کنید:

$$(x-y-z)^3+(x+y+z)^3+(z-x-y)^3+(y-x-z)^3$$

حل: x را به عنوان متغیر درنظر می‌گیریم و تابع f(x) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x)=(x-y-z)^3+(x+y+z)^3+(z-x-y)^3+(y-x-z)^3$$

این تابع به ازای هر x حقیقی پیوسته و مشتق‌پذیر است. داریم:

$$f'(x)=3(x-y-z)^2+3(x+y+z)^2-3(z-x-y)^2-3(y-x-z)^2$$
$$=3x^2+3y^2+3z^2-6xy-6xz+6yz+3x^2+3y^2+3z^2$$
$$+6xy+6xz+6yz-3z^2-3x^2-3y^2+6xz$$
$$+6yz-6xy-3y^2-3x^2-3z^2+6xy+6yz-6xz=24yz$$

فرض کنیم 24yz مشتق تابعی مانند g(x) باشد:

$$g'(x)=24yz$$
$$\Rightarrow g(x)=24yzx$$

چون f(x) و g(x) در شرایط نتیجه‌ی (۲) لاگرانژ (مقاله‌ی شماره‌ی قبل) صدق می‌کنند، پس داریم:

$$f(x)=q(x)+c \qquad (1)$$

که در آن c به x بستگی ندارد، اما می‌تواند به y و z بستگی داشته باشد. از تساوی (۱) داریم:

$$(x-y-z)^3+(x+y+z)^3+(z-x-y)^3+(y-x-z)^3$$
$$=24xyz+c$$

برای تعیین c قرار می‌دهیم: $x=0$. نتیجه می‌شود:

$$c=-(y+z)^3+(y+z)^3-(y-z)^3+(y-z)^3=0$$
$$\Rightarrow f(x)=g(x)$$
$$\Rightarrow (x-y-z)^3+(x+y+z)^3+(z-x-y)^3+(y-x-z)^3$$
$$=24xyz$$

استفاده از یکنوا بودن تابع

یکنوا بودن تابع در این موارد کاربرد دارد:

۱. حل نامعادله‌ها
۲. اثبات نامساوی‌های شامل متغیر
۳. اثبات نامساوی‌های عددی
۴. تعیین تعداد ریشه‌های معادله

اگر تابع در فاصله‌ای یکنوا باشد، در آن فاصله صعودی و یا نزولی است و مشتق در آن فاصله علامت ثابتی دارد. (اگر مشتق مثبت باشد، تابع در آن فاصله صعودی و اگر منفی باشد، تابع نزولی است.)

مثال ۱۴. این نامعادله را حل کنید:

$$2\ln(x+\sqrt{1+x^2})+e^x-e^{-x}<0$$

حل: تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(x)=2\ln(x+\sqrt{1+x^2})+e^x-e^{-x}$$

تابع به ازای همه‌ی مقادیر حقیقی x تعریف شده، پیوسته و مشتق‌پذیر است و داریم:

$$f'(x)=\frac{2}{x+\sqrt{1+x^2}}.(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}})+e^x+e^{-x}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}+e^x+e^{-x}$$

این مشتق به ازای هر x حقیقی مثبت است. بنابراین تابع در بازه‌ی $(-\infty,+\infty)$ صعودی است و نمودار آن در بیش از یک نقطه نمی‌تواند محور طول‌ها را قطع کند.

چون $f(0)=0$ پس به ازای هر $x<0$ داریم:

$$f(x)<f(0)\Rightarrow 2\ln(x+\sqrt{1+x^2})+e^x-e^{-x}<0$$

پس ریشه‌های نامعادله عبارت‌اند از همه‌ی اعداد فاصله‌ی $(-\infty,0)$.

مثال ۱۵. اگر $0<x<\frac{\pi}{2}$، آن‌گاه ثابت کنید:

$$tgx>3x-2\sin x$$

اثبات: تابع $f(x)=tgx-3x+2\sin x$ را در بازه‌ی $(0,\frac{\pi}{2})$ درنظر می‌گیریم و مشتق آن را حساب می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-3+2\cos x=\frac{2\cos^3 x-3\cos^2 x+1}{\cos^2 x}$$

$$f'(x)=\frac{2(\cos x-1)^2(\cos x+\frac{1}{2})}{\cos^2 x}$$

به ازای $0 < x < \frac{\pi}{2}$ مقدار مشتق مثبت است. بنابراین، تابع در بازه‌ی $(0, \frac{\pi}{2})$ صعودی است و از آن‌جا داریم:

$$tgx - 3x + 2\sin x > 0$$
$$\Rightarrow tgx > 3x - 2\sin x$$

مثال ۱۶. اگر $0 < x_1 < x_2 \le e$، آن‌گاه ثابت کنید:

$$x_1^{\frac{1}{x_1}} < x_2^{\frac{1}{x_2}} \ , \ x_1^{x_2} \ge x_2^{x_1}$$

و اگر $e \le x_1 < x_2$، آن‌گاه: $x_1^{x_2} \ge x_2^{x_1}$

اثبات: تابع $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ را در بازه‌ی $(0, +\infty)$ درنظر می‌گیریم که در آن پیوسته و مشتق‌پذیر است:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

چون مشتق به ازای $x = e$ صفر می‌شود و به ازای $0 < x < e$، $f'(x) > 0$ و به ازای $x > e$، داریم: $f'(x) < 0$، پس تابع $f(x)$ در بازه‌ی $(0, e]$ صعودی و در بازه‌ی $[e, +\infty)$ نزولی است. بنابراین، به ازای هر x_1 و x_2 دلخواه که در آن $0 < x_1 < x_2 \le e$ نامساوی $f(x_1) < f(x_2)$ برقرار است، یعنی:

$$\frac{\ln x_1}{x_1} < \frac{\ln x_2}{x_2} \Rightarrow \frac{1}{x_1}\ln x_1 < \frac{1}{x_2}\ln x_2$$

$$\Rightarrow \ln x_1^{\frac{1}{x_1}} < \ln x_x^{\frac{1}{x_2}}$$

چون $\ln t$ تابع صعودی است، پس:

$$x_1^{\frac{1}{x_1}} < x_2^{\frac{1}{x_2}}$$

اگر دو طرف نامساوی $\frac{\ln x_1}{x_1} < \frac{\ln x_2}{x_2}$ را در $x_1 x_2 > 0$ ضرب کنیم، نتیجه می‌شود:

$$x_2 \ln x_1 < x_1 \ln x_2 \Rightarrow \ln x_1^{x_2} < \ln x_2^{x_1}$$
$$\Rightarrow x_1^{x_2} < x_2^{x_1}$$

هم‌چنین، اگر $e \le x_1 < x_2$، آن‌گاه:

$$f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow \frac{\ln x_1}{x_1} > \frac{\ln x_2}{x_2}$$

$$\Rightarrow x_1^{\frac{1}{x_1}} > x_2^{\frac{1}{x_2}} \text{ و } x_1^{x_2} < x_2^{x_1}$$

مثال ۱۷. $(tg48^\circ)^{cotg48^\circ}$ و $(tg50^\circ)^{cotg50^\circ}$ را با یکدیگر مقایسه کنید.

حل: دیده می‌شود:

$$tg48^\circ = tg\frac{4\pi}{15} \quad \text{و} \quad cotg48^\circ = \frac{1}{tg\frac{4\pi}{15}}$$

$$tg50^\circ = tg\frac{5\pi}{18} \quad \text{و} \quad cotg50^\circ = \frac{1}{tg\frac{5\pi}{18}}$$

$$0 < tg\frac{4\pi}{15} < tg\frac{5\pi}{18} < e$$

اگر قرار دهیم $x_1 = tg\frac{4\pi}{15}$ و $x_2 = tg\frac{5\pi}{18}$، آن‌گاه بنابر مثال قبلی، چون $0 < x_1 < x_2 < e$، پس:

$$x_1^{\frac{1}{x_1}} < x_2^{\frac{1}{x_2}}$$

و از آن‌جا داریم:

$$(tg\frac{4\pi}{15})^{\frac{1}{tg\frac{4\pi}{15}}} < (tg\frac{5\pi}{18})^{\frac{1}{tg\frac{5\pi}{18}}}$$

$$\Rightarrow (tg48^\circ)^{cotg48^\circ} < (tg50^\circ)^{cotg50^\circ}$$

مثال ۱۸. ثابت کنید:

$$(1999)^{2000} > (2000)^{1999}$$

اثبات: به ازای $e \le x_1 < x_2$ از نامساوی $x_1^{x_2} < x_2^{x_1}$ استفاده می‌کنیم. قرار می‌دهیم:

$$x_1 = 1999 \ , \ x_2 = 2000$$

داریم:

$$e < 1999 < 2000 \Rightarrow (1999)^{2000} > (2000)^{1999}$$

منبع:
مجله‌ی «ریاضیات در مدرسه» شماره‌ی ۹، سال ۲۰۰۱، چاپ مسکو.

دستور فشرده برای محاسبه‌ی نیم‌سازهای داخلی و خارجی

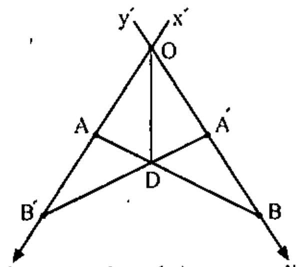
دو محور $x'ox$ و $y'oy$ و خط OD نیم‌ساز زاویه‌ی xoy را درنظر می‌گیریم (شکل ۷). نقطه‌ی دل‌خواه A را روی محور $x'ox$ در نظر می‌گیریم و آن را به نقطه‌ی D وصل می‌کنیم. نقطه‌ی برخورد خط AD و محور $y'oy$ را B می‌نامیم. اندازه‌های جبری دو بردار $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ را روی محورهای $x'x$ و $y'y$ به ترتیب x و y می‌نامیم. چون به هر نقطه‌ی A از محور $x'x$ یک و تنها یک نقطه از محور $y'y$ نسبت داده می‌شود و برعکس، پس بین دو متغیر x و y رابطه‌ی یک به یک

$$f(x,y)=\text{۰} \qquad (\text{۵})$$

وجود دارد. معادله‌ی ۵ (در مقاله‌ی شماره‌ی قبل) به صورت زیر است:

$$axy+bx+cy+d=\text{۰} \qquad (\text{۶})$$

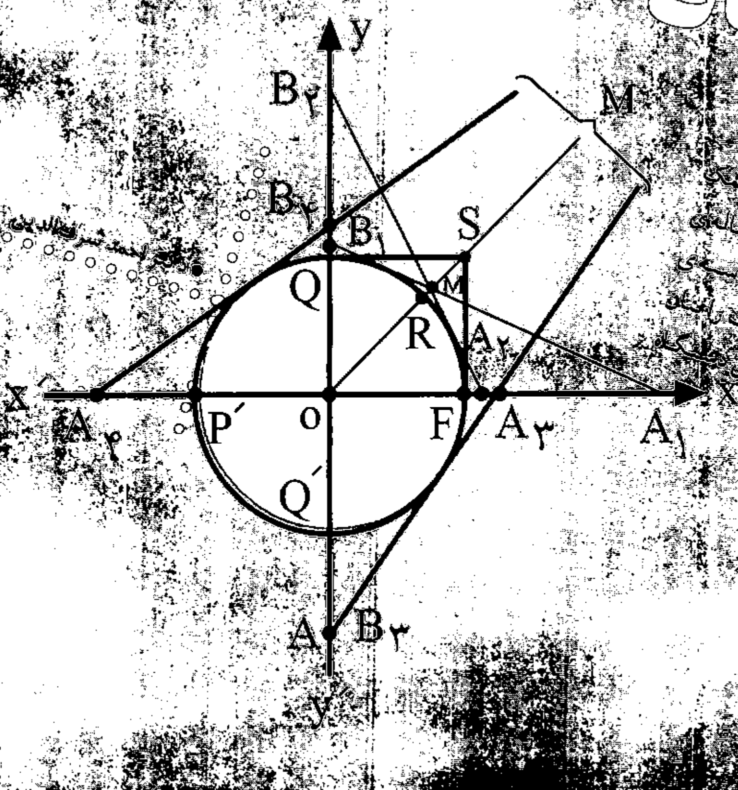
توجه شود که در رابطه‌ی ۶، x و y دو عدد حقیقی‌اند، زیرا هر دو اندازه‌های جبری دو بردار روی محورهای $x'x$ و $y'y$ هستند. بنابراین نباید چنین تصور شود که رابطه‌ی $y=x^{\text{۳}}$، رابطه‌ی یک به یک بین x و y است و اگر به x یک مقدار بدهیم، برای y تنها یک مقدار حاصل می‌شود، اما اگر به y یک مقدار نسبت بدهیم، برای x سه مقدار حاصل می‌شود. مثلاً اگر به y عدد ۱ را نسبت بدهیم، برای x سه مقدار حاصل می‌شود، زیرا معادله‌ی $x^{\text{۳}}=\text{۱}$، سه جواب دارد. یک جواب $x=\text{۱}$ است و دو جواب دیگر، جواب‌های معادله‌ی $x^{\text{۲}}+x+\text{۱}=\text{۰}$ هستند. دو جواب معادله‌ی اخیر مختلط هستند. در معادله‌ی ۶، دو متغیر x و y اعداد حقیقی‌اند، زیرا هر دو اندازه‌های جبری دو بردار روی دو محورهای $x'x$ و $y'y$ هستند. با توضیحات یاد شده می‌گوییم که تنها صورت برای معادله‌ی ۵، همان معادله‌ی ۶ است.



(شکل ۷)

حل هندسی چند معادله (۲)

اشاره: در شماره‌ی قبل چند معادله را به کمک [illegible] ادامه‌ی مقاله‌ی [illegible] حل کردیم. اینک در ادامه‌ی [illegible] برای محاسبه‌ی [illegible] دستور فشرده برای [illegible] نیم‌سازهای داخلی و خارجی مثلث را بیان [illegible] سپس به حل [illegible] معادلات می‌پردازیم.



اکنون ضریب‌های معادله‌ی ۶ را تعیین می‌کنیم:

الف) اگر نقطه‌ی A بر نقطه‌ی O منطبق شود، آن‌گاه نقطه‌ی B بر نقطه‌ی O منطبق می‌شود. پس اگر در معادله‌ی ۶، مقدار x برابر صفر شود، آن‌گاه مقدار y مساوی صفر می‌شود. از این مطلب نتیجه می‌شود که $d=0$ و لذا معادله‌ی ۶ به صورت زیر است:

$$axy+bx+cy=0 \tag{7}$$

ب) اگر بر محور $y'y$ نقطه‌ی A' را چنان اختیار کنیم که $\overline{OA'}=\overline{OA}$ باشد و نقطه‌ی برخورد خط DA' را با محور $x'x$ به B' نمایش دهیم، چنین داریم $\overline{OB'}=\overline{OB}$ نتیجه می‌شود که در رابطه‌ی ۶، $b=c$ است. با توجه به تساوی اخیر، رابطه‌ی ۶ به صورت زیر است:

$$axy+b(x+y)=0 \tag{8}$$

رابطه‌ی ۸ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=-\frac{a}{b} \tag{9}$$

توجه: اگر دو طرف معادله‌ی ۸ را بر xy بخش کنیم، معادله‌ی ۹ حاصل می‌شود. اما بررسی بخش کردن دو طرف معادله‌ی ۸ بر xy باید xy مخالف صفر باشد و این شرط در مسئله‌ی موردنظر برقرار است. زیرا تساوی $xy=0$ هنگامی محقق می‌شود که x یا y یا هر دو صفر شوند. در مسئله‌ی موردنظر ما، xy هنگامی صفر می‌شود که طول‌های دو ضلع OA و OB از مثلث OAB صفر باشند. اما چنین حالتی در مسئله پیش نمی‌آید، زیرا ما می‌خواهیم در مثلث OAB رابطه‌ی بین طول‌های دو ضلع OA و OB و طول نیم‌ساز OD را حساب کنیم. مثلثی که طول‌های دو ضلع آن صفر باشند، معنی ندارد.

پ) اکنون در معادله‌ی ۹، مقدار $-\frac{a}{b}$ را حساب می‌کنیم. برای این منظور، یک حالت خاص درنظر می‌گیریم. یک حالت خاص مناسب آن است که $\overline{OA}=\overline{OB}$ باشد. یک حالت خاص مناسب دیگر آن است که نقطه‌ی A را روی محور $x'x$ در جایی بگیریم که خط DA موازی Oy باشد. در این حالت، مقدار $\overline{OB}$ مساوی بی‌نهایت می‌شود.

حالت خاص اول را درنظر می‌گیریم. اگر $\overline{OA}=\overline{OB}$ باشد، تساوی ۹ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{2}{\overline{OA}}=-\frac{a}{b} \tag{10}$$

در حالت $\overline{OA}=\overline{OB}$ مثلث OAD در رأس A قائم‌الزاویه می‌شود و چنین داریم:

$$\overline{OA}=\frac{\overline{OD}}{\cos\frac{O}{2}}=\frac{b}{\cos\frac{O}{2}} \tag{11}$$

از دو رابطه‌ی ۱۰ و ۱۱ نتیجه می‌شود:

$$-\frac{a}{b}=\frac{2\cos\frac{O}{2}}{b} \tag{12}$$

معادله‌ی ۹ با رعایت تساوی ۱۲ به صورت زیر درمی‌آید:

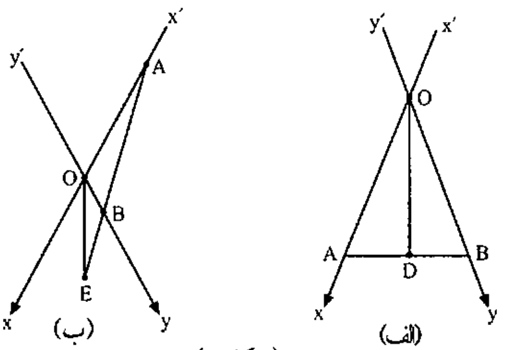
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2\cos\frac{O}{2}}{b} \tag{13}$$

نیم‌ساز داخلی مثلث: مثلث OAB را که در آن OD نیم‌ساز داخلی است، درنظر می‌گیریم (شکل ۸ـ الف). در این مثلث، رابطه‌ی ۱۳ به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}=\frac{2\cos\frac{O}{2}}{OD}$$

نیم‌ساز خارجی مثلث: مثلث OAB را که در آن OE نیم‌ساز خارجی است، درنظر می‌گیریم (شکل ۸ـ ب). در این مثلث رابطه‌ی ۱۳ به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{OB}-\frac{1}{OA}=\frac{2\cos\frac{O}{2}}{OE}$$



(شکل ۸)

حل هندسی دستگاه معادلات

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC که A رأس زاویه‌ی قائمه است، رابطه‌ی بین دو ضلع زاویه‌ی قائمه و ارتفاع AH و نیز رابطه‌ی بین دو ضلع زاویه‌ی قائمه و نیم‌سازهای داخلی و خارجی را (در این مقاله و شماره‌ی قبل) مطرح و اثبات کردیم. اکنون رابطه‌های یاد شده را برای حل دستگاه معادلات زیر به کار می‌بریم:

$$\begin{cases}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{b}\end{cases} \tag{14}$$

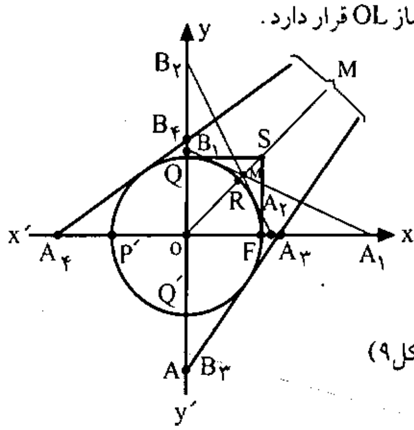
این دستگاه معادلات را در حالت $b>0$ حل می‌کنیم. اگر $b<0$ باشد، دو طرف معادله‌ی دوم را در ۱− ضرب می‌کنیم و قرار می‌دهیم: $-x=X$ و $-y=Y$.

آن‌گاه دستگاه معادلات ۱۴ به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{X^2}+\dfrac{1}{Y^2}=\dfrac{1}{a^2}\\[2mm] \dfrac{1}{X}+\dfrac{1}{Y}=\dfrac{1}{b}\end{cases}\qquad (15)$$

دستگاه معادلات (۱۵) مانند دستگاه معادلات ۱۴ است.

برای حل هندسی دستگاه معادلات ۱۴، دو محور عمود بر هم $x'ox$ و $y'oy$ را درنظر می‌گیریم (شکل۹). نقاط برخورد محور $x'x$ دایره‌ی O را P و P′ و نقاط برخورد محور $y'y$ و دایره‌ی O را Q و Q′ می‌نامیم. نقطه‌ی برخورد خط OL (نیم‌ساز زاویه‌ی xoy) را با دایره‌ی O، با R نشان می‌دهیم و نقطه‌ی برخورد مماس‌های رسم شده بر دایره‌ی O در نقاط P و Q را S می‌نامیم. نقطه‌ی S روی نیم‌ساز OL قرار دارد.



(شکل۹)

نقطه‌ی M را روی نیم‌ساز OL در جایی اختیار می‌کنیم که $\overline{OM}=\sqrt{2}\,b$ باشد (مقدار $\sqrt{2}\,b$ برای $\overline{OM}$ با توجه به دو معادله‌ی $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{b}$ و $\frac{1}{\overline{OA}}+\frac{1}{\overline{OB}}=\frac{\sqrt{2}}{b}$ به‌دست می‌آید. یادآوری می‌کنیم که $\overline{OA}$ و $\overline{OB}$ اعداد جبری‌اند.)

بر حسب مقدارهای $\overline{OM}$ چهار حالت پیش می‌آید:

الف) اگر نقطه‌ی M بین دو نقطه‌ی R و S باشد، یعنی $a<\overline{OM}<a\sqrt{2}$، در این مورد از نقطه‌ی M می‌توان دو مماس بر دایره‌ی O رسم کرد که آن‌ها را A_1B_1 و A_2B_2 می‌نامیم. وقتی نقطه‌ی M بین دو نقطه‌ی R و S باشد، خط OM نیم‌ساز داخلی در دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی OA_1B_1 و OA_2B_2 است. در این حالت جواب‌های دستگاه معادلات چنین‌اند:

$$\begin{cases}x=\overline{OA_2}\\ y=\overline{OB_2}\end{cases}\qquad \begin{cases}x=\overline{OA_1}\\ y=\overline{OB_1}\end{cases}$$

هر دو جواب مثبت‌اند.

ب) اگر نقطه‌ی M روی نیم‌خط باز SL قرار گیرد، یعنی: $\overline{OM}>\overline{OS}$، در این صورت $\overline{OM}>a\sqrt{2}$ و می‌توان از نقطه‌ی M دو مماس بر دایره‌ی O رسم کرد که آن‌ها را A_3B_3 و A_4B_4 می‌نامیم. جواب‌های دستگاه معادلات ۱۴، وقتی $\overline{OM}>a\sqrt{2}$ باشند، چنین است:

$$\begin{cases}x=\overline{OA_4}<0\\ y=\overline{OB_4}>0\end{cases}\qquad \begin{cases}x=\overline{OA_3}>0\\ y=\overline{OB_3}<0\end{cases}$$

پ) اگر $OM=a$ باشد، یعنی نقطه‌ی M روی دایره‌ی O باشد، از نقطه‌ی M تنها یک مماس بر دایره رسم می‌شود. (وقتی نقطه‌ی M روی پاره‌خط RS به سوی نقطه‌ی R بی‌نهایت نزدیک شود، دو نقطه‌ی A_1 و A_2 بی‌نهایت به هم نزدیک می‌شوند. پس دو مماس MA_1 و MA_2 بی‌نهایت به هم نزدیک می‌شوند. وقتی نقطه‌ی M بر نقطه‌ی R منطبق شود، مماس مضاعف داریم.) با این ملاحظات، وقتی $\overline{OM}=a$ باشد، دستگاه معادلات ۱۴ دارای جواب مضاعف زیر است:

$$\begin{cases}x=a\sqrt{2}\\ y=a\sqrt{2}\end{cases}$$

ت) اگر $\overline{OM}=a\sqrt{2}$ باشد، یعنی نقطه‌ی M بر نقطه‌ی S قرار گیرد، چنین می‌گوییم:

وقتی نقطه‌ی M به نقطه‌ی S بی‌نهایت نزدیک شود، آن‌گاه مقدار $\overline{OA_1}$ بی‌نهایت به a نزدیک و مقدار $\overline{OB_1}$ بی‌نهایت بزرگ می‌شود (از حیث قدرمطلق). از روی شکل نتیجه می‌شود:

$$x_{A_1}\to a\Rightarrow y_{B_1}\to\infty$$

$$x_{A_1}\to\infty\Rightarrow y_{B_1}\to a$$

برای دستگاه معادلات ۱۴ چنین داریم:

$$\begin{cases}x\to\infty\\ y\to a\end{cases}\qquad \begin{cases}x\to a\\ y\to\infty\end{cases}$$

مسئله: معادله‌ی زیر را حل کنید:

$$a\cos x+b\sin x=c$$

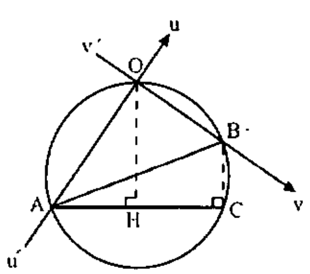
معادله را با فرض $c>0$ حل می‌کنیم. اگر $c<0$ باشد، دو طرف معادله را در -1 ضرب می‌کنیم تا مقدار سمت راست معادله مثبت شود.

راهنمایی برای حل. شکل ۱۰ راهنما برای حل است.

بر دو محور عمود بر هم $u'ou$ و $v'ov$ به ترتیب دو بردار $\overrightarrow{AO}$ و $\overrightarrow{OB}$ را با اندازه‌های جبری a و b اختیار می‌کنیم. نقطه‌ی C محل برخورد دایره‌ی به قطر AB و دایره‌ی به مرکز A و شعاع به اندازه‌ی C است.

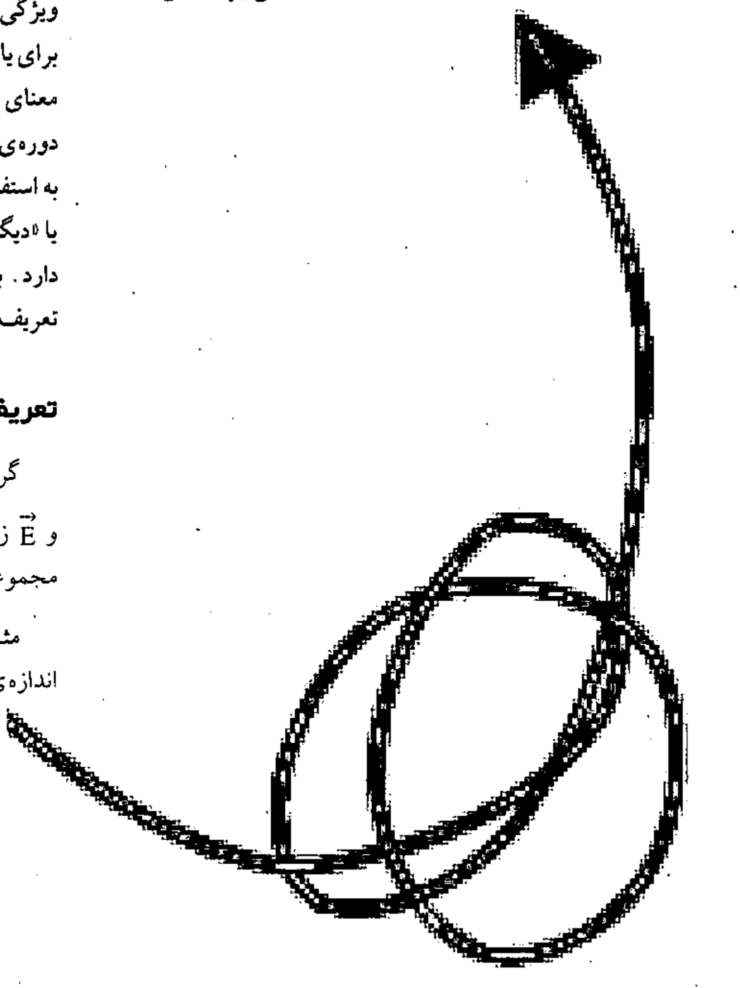
مقدار جواب معادله: اندازه‌ی زاویه‌ی $x=CAO$

شرط وجود جواب: $AC\le AB$، یعنی: $c^2\le a^2+b^2$



گراف تورنمنت

● احسان یارمحمدی



اشاره

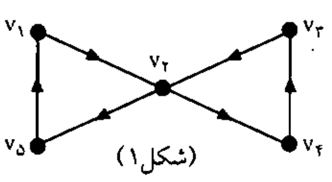
می‌دانیم در طول یک دوره مسابقه‌ی ورزشی که بین تیم‌های شرکت کننده در آن دوره مسابقات انجام می‌پذیرد، ممکن است هر تیمی در رویارویی با حریفش، شکست بخورد و یا پیروز شود؛ یا این که در مقابل یکدیگر به نتیجه‌ی تساوی برسند. یکی از روش‌های نمایش این نتایج، استفاده از گراف‌هایی است که در مبحث «نظریه‌ی گراف» کتاب ریاضیات گسسته‌ی دوره‌ی پیش‌دانشگاهی رشته‌ی علوم ریاضی، اشاره‌ای از آن‌ها آمده است. اما آن اشاره تنها در اندازه‌ای است که خواننده فقط می‌تواند با استفاده از یک نمودار گراف جهت‌دار و متناظر کردن آن به یک دوره‌ی مسابقه، متوجه برد یا باخت تیم‌ها شود و نمی‌تواند مطالب بیشتری را با استفاده از نمودار آن کسب کند.

موضوع این مقاله، بحث پیشرفته‌ای پیرامون نتیجه‌ی یک دوره مسابقه‌هایی است که بین تیم‌های شرکت کننده در آن صورت می‌پذیرد؛ به گونه‌ای که هیچ‌یک از تیم‌ها مجاز به تساوی در مقابل هم نیستند و هر بازی، در نهایت یک برنده و یک بازنده دارد. این موضوع را به کمک یک دسته از گراف‌های جهت‌دار خاص با ویژگی‌های منحصر به فرد با عنوان «تورنمنت»[1]، بررسی می‌کنیم. برای یادآوری و درک بهتر مقاله اشاره می‌کنم که تورنمنت در لغت به معنای مسابقات قهرمانی و تشکیل مسابقه و در ورزش به معنای یک دوره‌ی مسابقه است. هم‌چنین این مقاله، اشاره‌ای محضی ـ کاربردی به استفاده از رده‌ای خاص از گراف‌ها به نام «گراف‌های جهت‌دار»[2] یا «دیگراف[3]»ها در یکی از ابعاد زندگی امروزه‌ی بشر به نام ورزش دارد. به همین دلیل، در ابتدا گراف‌های جهت‌دار را معرفی و تعریف‌های مربوط به آن‌ها را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱

گراف $\vec{G} = (V, \vec{E})$ را که در آن V مجموعه‌ای متناهی و ناتهی و $\vec{E}$ زیرمجموعه‌ای از تمام دوتایی‌های مرتب متشکل از اعضای مجموعه‌ی V است، جهت‌دار می‌نامیم.

مثال ۱. شکل ۱ نمودار گراف جهت‌دار $\vec{G}$ است. مرتبه و اندازه‌ی این گراف را مشخص کنید.



(شکل ۱)

گراف جهت‌دار $\vec{G}$ دارای مجموعه‌ی رأس‌ها و مجموعه‌ی یال‌های زیر است. بنابراین از مرتبه‌ی $p = 5$ و اندازه‌ی $q = 6$ خواهد بود.

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E = \{(v_1, v_2), (v_3, v_2), (v_4, v_3), (v_2, v_4), (v_2, v_5), (v_5, v_1)\}$$

تعریف ۲

درجه‌ی ورودی[4] رأس v_i ، $1 \le i \le p$ برابر با تعداد یال‌های جهت‌داری است که به رأس v_i وارد می‌شود که آن را به صورت $\operatorname{in deg}_{\vec{G}}(v_i)$ یا $\deg_{\vec{G}}^{-}(v_i)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳

درجه‌ی خروجی[5] رأس v_i ، $1 \le i \le p$ برابر با تعداد یال‌های جهت‌داری است که از رأس v_i خارج می‌شود که آن را به صورت $\operatorname{out deg}_{\vec{G}}(v_i)$ یا $\deg_{\vec{G}}^{+}(v_i)$ نمایش می‌دهیم.

تذکر: بدیهی است که اگر $\deg_{\vec{G}}^{-}(v_i)$ یا $\deg_{\vec{G}}^{+}(v_i)$ عددی زوج[6] باشند، آن‌گاه آن‌ها را به‌ترتیب رأس ورودی زوج و رأس خروجی زوج و اگر $\deg_{\vec{G}}^{-}(v_i)$ یا $\deg_{\vec{G}}^{+}(v_i)$ عددی فرد[7] باشند، آن‌گاه آن‌ها را به‌ترتیب رأس ورودی فرد و رأس خروجی فرد می‌نامیم.

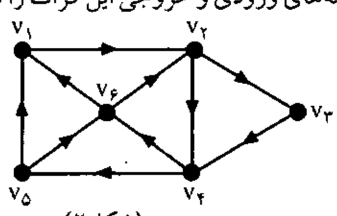
تعریف ۴

بزرگ‌ترین عدد در بین درجه رأس‌های ورودی (خروجی) گراف جهت‌دار $\vec{G}$ را ماکزیمم درجه‌ی ورودی (خروجی) می‌نامیم و آن را با Δ^- (Δ^+) نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵

کوچک‌ترین عدد در بین درجه‌ی رأس‌های ورودی (خروجی) گراف جهت‌دار $\vec{G}$ را مینیمم درجه‌ی ورودی (خروجی) می‌نامیم و آن را با δ^- (δ^+) نمایش می‌دهیم.

مثال ۲. شکل ۲ نمودار گراف جهت‌دار $\vec{G}$ است. ماکزیمم و مینیمم درجه‌های ورودی و خروجی این گراف را تعیین کنید.



(شکل۲)

با توجه به نمودار این گراف جهت‌دار (شکل۲) داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \deg^-(v_1) = 2 \\ \deg^-(v_2) = 2 \\ \deg^-(v_3) = 1 \\ \deg^-(v_4) = 2 \\ \deg^-(v_5) = 1 \\ \deg^-(v_6) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta^- = 2, \delta^- = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \deg^+(v_1) = 1 \\ \deg^+(v_2) = 2 \\ \deg^+(v_3) = 1 \\ \deg^+(v_4) = 2 \\ \deg^+(v_5) = 2 \\ \deg^+(v_6) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta^+ = 2, \delta^+ = 1$$

قضیه‌ی ۱

در گراف جهت‌دار $\vec{G}$ از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q، رابطه‌ی $\sum_{i=1}^{p} \deg_{\vec{G}}^{-}(v_i) = \sum_{i=1}^{p} \deg_{\vec{G}}^{+}(v_i) = q$ برقرار است.

برهان

در گراف جهت‌دار $\vec{G}$ ، هر یال تنها یک جهت دارد به این معنا که دقیقاً به یک رأس از گراف $\vec{G}$ وارد می‌شود (دقیقاً از یک رأس از گراف $\vec{G}$ خارج می‌شود). بنابراین در سمت چپ رابطه‌ی ارائه‌شده در قضیه، هر یال تنها یک‌بار به‌حساب می‌آید.

اکنون که با الفبای تعریف‌ها و مطالب پیرامون گراف‌های جهت‌دار آشنا شدیم، با ارائه‌ی مثالی، مبحث اصلی مقاله را شروع می‌کنیم.

فرض کنید در یک دوره‌ی مسابقه (تورنمنت) فوتبال که نتیجه‌ی هیچ مسابقه‌ای نباید به تساوی کشیده شود و در پایان هر بازی باید یک تیم برنده و یک تیم بازنده باشد، چهار تیم سبز، سفید، قرمز و آبی حضور دارند. بعد از این که تمامی تیم‌ها با یکدیگر پیکار کرده‌اند، نتایج زیر به‌دست آمده است:

تیم سفید دو بر یک، تیم سبز را شکست داده است.

تیم قرمز با نتیجه‌ی سه بر یک، بر حریف خود تیم آبی فائق آمده است.

تیم قرمز بازی را با یک گل خورده، به تیم سفید واگذار کرده است.

تیم سبز با حساب دو بر صفر، بر تیم آبی چیره شده است.

تیم آبی با دو گل خورده، مقابل تیم سفید شکست خورده است.

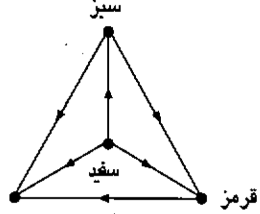
تیم سبز با یک گل زده، بر تیم قرمز برتری یافته است.

بنابر شیوه‌ی امتیازدهی که از سوی فدراسیون جهانی فوتبال (فیفا) ارائه شده است، تیم برنده سه و تیم بازنده صفر امتیاز را بعد از انجام بازی از آن خود می‌کنند. بنابراین بعد از محاسبه‌ی امتیازها، و تعداد گل‌های زده و خورده‌ی هر یک از تیم‌ها، می‌توانیم جدول زیر را برای این دوره‌ی مسابقه (تورنمنت) ارائه کنیم:

تیم	تعداد بازی	تعداد پیروزی	تعداد شکست	تعداد تساوی	امتیاز	تعداد گل زده	تعداد گل خورده	تفاضل گل
سفید	۳	۳	۰	۰	۹	۵	۱	+۴
سبز	۳	۲	۱	۰	۶	۴	۲	+۲
قرمز	۳	۱	۲	۰	۳	۳	۲	+۱
آبی	۳	۰	۳	۰	۰	۰	۷	−۷

(جدول A)

با استفاده از گراف‌های جهت‌دار نیز می‌توانیم وضعیت این دوره‌ی مسابقه را بررسی کنیم. به این صورت که در صفحه‌ی دکارتی، چهار نقطه متناظر با هریک از تیم‌های آبی، سفید، سبز و قرمز را در نظر می‌گیریم و برای هر بازی انجام شده بین دو تیم، یال جهت‌داری را از تیم برنده به سمت تیم بازنده رسم می‌کنیم. بنابراین گراف جهت‌داری که نشان‌دهنده‌ی بازی‌های انجام شده و نتایج منتج به پیروزی یا شکست آن‌ها باشد، به‌صورت شکل ۳ است.



(شکل ۳)

با توجه به گراف جهت‌دار شکل ۳ می‌توانیم، بیشتر اطلاعاتی را که در جدول بنابر قوانین فیفا ارائه شده‌اند، مانند: تعداد بازی، پیروزی، شکست، تساوی و امتیاز هریک از تیم‌های آبی، سفید، قرمز و سبز را به‌دست آوریم.

تذکر: با کمی دقت در نمودار گراف جهت‌دار ۳ درمی‌یابیم، این گراف جهت‌دار، گرافی از مرتبه‌ی $p = ۴$ و اندازه‌ی $q = ۶$ است. اکنون اگر یک گراف ساده‌ی G با مرتبه‌ی $p = ۴$ و اندازه‌ی $q = ۶$ را در نظر داشته باشیم، از آن‌جا که در هر گراف کامل K_p با اندازه‌ی q رابطه‌ی $q = \binom{p}{۲} = \frac{p(p-۱)}{۲}$ برقرار است، بنابراین گراف ساده‌ی G با مرتبه‌ی $p = ۴$ و اندازه‌ی $q = ۶$ یک گراف کامل K_p است. اگر همین روش را درباره‌ی گراف جهت‌دار مثال بیان شده نیز بررسی کنیم، درخواهیم یافت که این گراف جهت‌دار نیز، حداکثر یال‌های جهت‌داری ممکن را داراست. البته باید این نکته را نیز مورد توجه قرار دهیم که در گراف کامل K_p با اندازه‌ی q، درجه‌ی هر رأس برابر با $p - ۱$ و یا به بیان بهتر، در هر گراف کامل K_p برای ماکزیمم و مینی‌مم درجه‌ی رأس‌ها، رابطه‌ی $\Delta = \delta = p - ۱$ را داریم. اما در گراف‌های جهت‌داری که حداکثر یال‌های ممکن را دارا هستند، درستی یا نادرستی رابطه‌های $\Delta^+ = \delta^+$ یا $\Delta^- = \delta^-$ و... باید گراف‌های جهت‌دار با مرتبه و اندازه‌های گوناگون را بررسی کرد.

تعریف ۶

گراف جهت‌دار $\vec{G}$ از مرتبه‌ی P و اندازه‌ی q را که دارای حداکثر یال‌های جهت‌دار است و دقیقاً بین هر دو رأس متمایز آن، یک یال جهت‌دار وجود دارد، تورنمنت می‌نامیم و با $\vec{T}_p$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۷

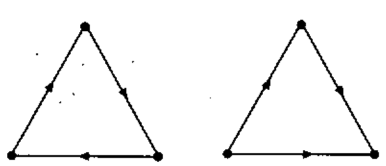
گراف کامل K_p با اندازه‌ی q را که یال‌های آن یال‌های جهت‌دار هستند، تورنمنت می‌نامیم و با $\vec{T}_p$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۳. نمودار تمام تورنمنت‌های متمایز $\vec{T}_۲$، $\vec{T}_۳$ و $\vec{T}_۴$ را رسم کنید.

برای تورنمنت $\vec{T}_۲$ که در آن مجموعه رأس‌هایش دو عضو دارد، نمودار زیر را می‌توان رسم کرد.

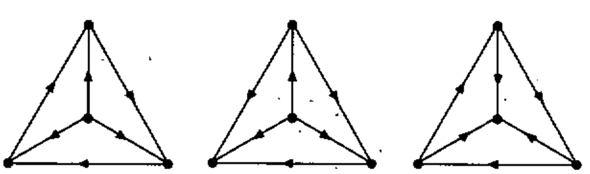
(شکل ۴)

برای تورنمنت $\vec{T}_۳$ که در آن مجموعه رأس‌هایش سه عضو دارد، نمودارهای زیر را می‌توان رسم کرد.



(شکل ۵)

برای تورنمنت $\vec{T}_۴$ که در آن مجموعه رأس‌هایش چهار عضو دارد، نمودارهای زیر را می‌توان رسم کرد.



(شکل ۶)

قضیه‌ی ۲

در تورنمنت $\vec{T}_p$ ، $p \in \mathbb{N}$ با اندازه‌ی q رابطه‌ی $q = \frac{p(p-1)}{2}$ برقرار است.

برهان

مجموع درجه‌ی رأس‌های ورودی تورنمنت $\vec{T}_p$ به اضافه‌ی مجموع درجه‌ی رأس‌های خروجی تورنمنت $\vec{T}_p$ برابر با $p(p-1)$ است. پس بنابر قضیه‌ی ۱، نصف این عدد برابر با تعداد یال‌های تورنمنت $\vec{T}_p$ است.

تذکر: می‌دانیم براساس قوانین فدراسیون جهانی فوتبال، تیم‌های شرکت‌کننده در یک دوره‌ی مسابقه (تورنمنت)، براساس امتیازاتی که به‌دست آورده‌اند، رتبه‌بندی می‌شوند. در پاره‌ای از موارد ممکن است دو یا چند تیم شرکت‌کننده در یک دوره ی مسابقه، امتیازات یکسان و مشابهی را به‌دست آورده باشند که در این صورت فیفا تفاضل گل آن‌ها را بررسی می‌کند و تیمی که نسبت به سایر تیم‌ها تفاضل گل بهتری داشته باشد، در رتبه‌ی بالاتر قرار می‌گیرد. اگر تفاضل گل دو یا چند تیم نیز با یکدیگر برابر باشد، آن‌گاه فیفا به سراغ تعداد گل‌های زده‌ی تیم‌ها، و در صورت برابری آن، به سراغ گل خورده‌ی تیم‌های شرکت‌کننده می‌رود و براساس آن‌ها رتبه‌بندی صورت می‌پذیرد.

اگر آگاهی‌های ما از نتایج بازی‌های انجام شده، تنها شامل نتیجه‌ی برد یا باخت تیم‌ها نباشد و در برگیرنده‌ی نتیجه‌ی بازی با تعداد گل‌های زده و خورده باشد، آن‌گاه مانند مثالی که قبلاً ارائه شد، می‌توانیم با تشکیل یک جدول، تیم‌های حاضر در آن دوره‌ی مسابقه (تورنمنت) را رتبه‌بندی کنیم. اما اگر اطلاعات ما تنها شامل نتیجه‌ی باخت یا برد تیم‌ها در مقابل یکدیگر باشد، به این علت که ممکن است تعداد پیروزی‌ها یا شکست‌های دو یا چند تیم با یکدیگر برابر باشد و از آن‌جا که ما نیز از تعداد گل‌های ردوبدل شده‌ی بین آن‌ها بی‌اطلاع هستیم، کار ما برای رتبه‌بندی تیم‌ها مقداری مشکل خواهد شد. به همین دلایل، در زیر چند تعریف را درباره‌ی تورنمنت $\vec{T}_p$ با مجموعه رأس‌های $V = \{v_1, v_2 v_3, \cdots, v_p\}$ بیان می‌کنیم تا بتوانیم در رتبه‌بندی تیم‌های شرکت‌کننده در یک دوره‌ی مسابقه (تورنمنت) صرفاً با آگاهی داشتن از نتیجه‌ی برد یا باخت تیم‌ها، اظهارنظر کنیم.

تعریف ۸

در تورنمنت $\vec{T}_p$ با مجموعه رأس‌های $V = \{v_1, v_2 v_3, \cdots, v_p\}$ و مجموعه یال‌های $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \cdots, \vec{e}_q\}$ ، تیم متناظر با رأس v_i ، $1 \le i \le p$ را تیم برنده می‌نامیم، اگر $\deg_{\vec{T}}^{+}(v_i) = \Delta^{+}$ باشد.

تعریف ۹

در تورنمنت $\vec{T}_p$ با مجموعه رأس‌های $V = \{v_1, v_2 v_3, \cdots, v_p\}$ و مجموعه یال‌های $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \cdots, \vec{e}_q\}$ ، برای تیم متناظر با رأس v_i ، $1 \le i \le p$ ، $s_1(v_i) = \deg_{\vec{T}}^{+}(v_i)$ را امتیازبندی سطح نخست می‌نامیم که به معرفی تیم نخست در رتبه‌بندی منجر می‌شود.

تعریف ۱۰

در تورنمنت $\vec{T}_p$ با مجموعه رأس‌های $V = \{v_1, v_2 v_3, \cdots, v_p\}$ و مجموعه رأس‌های $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \cdots, \vec{e}_q\}$ ، برای تیم متناظر با رأس v_i ، $1 \le i \le p$ ، $s_2(v_i) = \sum_{v_i v_j \in E_{\vec{T}}} s_1(v_j)$ ، $1 \le j \ne i \le p$ را امتیازبندی سطح دوم می‌نامیم که به معرفی تیم دوم در رتبه‌بندی منجر می‌شود.

تعریف ۱۱

در تورنمنت $\vec{T}_p$ با مجموعه رأس‌های $V = \{v_1, v_2 v_3, \cdots, v_p\}$ و مجموعه یال‌های $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \cdots, \vec{e}_q\}$ ، برای تیم متناظر با رأس v_i ، $1 \le i \le p$ ، $s_n(v_i) = \sum_{v_i v_j \in E_{\vec{T}}} s_{n-1}(v_j)$ ، $1 \le j \ne i \le p$ را امتیازبندی سطح n-ام می‌نامیم که به معرفی تیم n-ام در رتبه‌بندی منجر می‌شود.

مثال ۴. در یک دوره‌ی مسابقه‌ی فوتبال دوستانه که بین شش تیم آژاکس، منچستر یونایتد، بایرن مونیخ، لیون، رئال مادرید و یوونتوس برگزار شده است، بعد از تمام بازی‌ها، نتایج زیر به‌دست آمده‌اند:

- تیم لیون مقابل تیم‌های یوونتوس، آژاکس و رئال مادرید به پیروزی

رسیده و در مقابل تیم‌های بایرن‌مونیخ و منچستر یونایتد متحمل شکست شده است.

- تیم منچستر یونایتد تیم‌های بایرن مونیخ و لیون را شکست داده و مقابل تیم‌های رئال مادرید، یوونتوس و آژاکس نتیجه را واگذار کرده است.

- تیم رئال مادرید در مقابل تیم‌های بایرن‌مونیخ، یوونتوس، منچستریونایتد و آژاکس بازی را به سود خود به پایان رسانده و در مقابل تیم لیون متحمل شکست شده است.

- تیم یوونتوس در بازی با تیم‌های منچستر یونایتد، آژاکس و بایرن‌مونیخ پیروز از میدان خارج شده و در مقابل تیم‌های رئال‌مادرید و لیون، تن به شکست داده است.

- تیم آژاکس در رویارویی با تیم‌های لیون، یوونتوس و رئال مادرید دچار باخت شده و در مقابل تیم‌های منچستر یونایتد و بایرن‌مونیخ، نتیجه را از آن خود کرده است.

- تیم بایرن مونیخ در پیکار با تیم‌های رئال‌مادرید، منچستر یونایتد، آژاکس و یوونتوس، شکست را پذیرفته و در رویارویی با تیم لیون موفق به کسب پیروزی شده است.

با استفاده از تورنمنت‌ها، در مورد رتبه‌بندی تیم‌های شرکت‌کننده در این دوره مسابقات بحث کنید.

اگر وضعیت رویارویی این شش تیم در مصاف با یکدیگر را به‌کمک گراف‌های جهت‌دار بررسی کنیم، نمودار متناظر با این دوره مسابقات، یک تورنمنت $\vec{T_6}$ با مجموعه رأس‌های $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$ و اندازه‌ی $q=15$ خواهد شد. بنابراین، به هریک از تیم‌های رئال مادرید، یوونتوس، لیون، آژاکس، منچستر یونایتد و بایرن مونیخ، به ترتیب رأس‌های v_1 ، v_2 ، v_3 ، v_4 ، v_5 و v_6 را نظیر می‌کنیم. اکنون با توجه به آن‌چه که در مثال در مورد نتایج بازی‌های انجام شده، آمده است، می‌توانیم برای هریک از رأس‌های v_1 ، v_2 ، v_3 ، v_4 ، v_5 و v_6 درجه‌ی خروجی تعیین و به پیروی از آن، تیم نخست را در رتبه‌بندی مشخص کنیم. بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}\deg^+(v_1)=4\\ \deg^+(v_2)=3\\ \deg^+(v_3)=3\\ \deg^+(v_4)=2\\ \deg^+(v_5)=2\\ \deg^+(v_6)=1\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}s_1(v_1)=4\\ s_1(v_2)=3\\ s_1(v_3)=3\\ s_1(v_4)=2\\ s_1(v_5)=2\\ s_1(v_6)=1\end{array}\right\}\Rightarrow \max(s_1)=s_1(v_1)=4$$

درنتیجه، تیم متناظر با رأس v_1 این تورنمنت، یعنی تیم رئال‌مادرید، پس از پایان بازی‌ها در رده‌ی نخست قرار گرفته است.

با اندکی دقت در مقدار $s_1(v_i)$ ، $1\le i\le 6$ درمی‌یابیم، $s_1(v_2)=s_1(v_3)=3$ بعد از مقدار $s_1(v_1)=4$ بیشترین مقدار را به خود اختصاص داده‌اند. ولی این سؤال در ذهن ما پدیدار می‌شود که کدام‌یک از تیم‌های متناظر با رأس‌های v_2 و v_3 در جایگاه دوم رتبه‌بندی قرار می‌گیرد. به همین دلیل، به محاسبه‌ی $s_2(v_i)$ ، $1\le i\le 6$ می‌پردازیم، بنابراین:

$$s_2(v_1)=\sum_{v_1v_j\in E_{\vec{T}}} s_1(v_j),1\le j\ne 1\le 6$$

$$=s_1(v_2)+s_1(v_4)+s_1(v_5)+s_1(v_6)=3+2+2+1=8$$

$$s_2(v_2)=\sum_{v_2v_j\in E_{\vec{T}}} s_1(v_j),1\le j\ne 2\le 6=s_1(v_4)+s_1(v_5)+s_1(v_6)$$

$$=2+2+1=5$$

$$s_2(v_3)=\sum_{v_3v_j\in E_{\vec{T}}} s_1(v_j),1\le j\ne 3\le 6=s_1(v_1)+s_1(v_2)+s_1(v_4)$$

$$=4+3+2=9$$

$$s_2(v_4)=\sum_{v_4v_j\in E_{\vec{T}}} s_1(v_j), 1\le j\ne 4\le 6 = s_1(v_5)+s_1(v_6)=2+1=3$$

$$s_2(v_5)=\sum_{v_5v_j\in E_{\vec{T}}} s_1(v_j), 1\le j\ne 5\le 6 = s_1(v_3)+s_1(v_6)=3+1=4$$

$$s_2(v_6)=\sum_{v_6v_j\in E_{\vec{T}}} s_1(v_j), 1\le j\ne 6\le 6 = s_1(v_3)=3$$

درنتیجه:

$$\left.\begin{aligned} s_2(v_1)&=8\\ s_2(v_2)&=5\\ s_2(v_3)&=9\\ s_2(v_4)&=3\\ s_2(v_5)&=4\\ s_2(v_6)&=3 \end{aligned}\right\}\Rightarrow \max(s_2)=s_2(v_3)=9$$

بنابراین، تیم متناظر با رأس v_3 این تورنمنت، یعنی تیم لیون، پس از پایان بازی‌ها در رده‌ی دوم، و تیم متناظر با رأس v_2 این تورنمنت، یعنی تیم یوونتوس، در رتبه‌ی سوم قرار گرفته است. از آن‌جا که تکلیف رتبه‌بندی تیم‌های متناظر با رأس‌های v_1 ، v_2 و v_3 مشخص شده است، بنابراین با اندکی دقت در مقدار $s_2(v_i)$ ، $1\le i\ne 1,2,3\le 6$ درمی‌یابیم، $s_2(v_5)=4$ و $s_2(v_4)=3$ و $s_2(v_6)=3$ هستند. درنتیجه، تیم متناظر با رأس v_5 یعنی تیم منچستر یونایتد، در رتبه‌بندی مقام چهارم را به‌دست آورده است. اما به این دلیل که داریم: $s_2(v_4)=3$ و $s_2(v_6)=3$ لذا برای تشخیص این‌که چه تیمی در رتبه‌ی پنجم و کدام تیم در جایگاه ششم قرار می‌گیرد، باید به محاسبه‌ی $s_3(v_i)$ ، برای $i=4,6$ بپردازیم. بنابراین:

$$s_3(v_4)=\sum_{v_4v_j\in E_{\vec{T}}} s_2(v_j), 1\le j\ne 4\le 6 = s_2(v_5)+s_2(v_6)=4+3=7$$

$$s_3(v_6)=\sum_{v_6v_j\in E_{\vec{T}}} s_2(v_j), 1\le j\ne 6\le 6 = s_2(v_3)=3$$

درنتیجه، تیم متناظر با رأس v_4 که همان تیم آژاکس است، در رتبه‌ی پنجم و تیم متناظر با رأس v_6 یعنی تیم بایرن مونیخ، در مکان ششم رتبه‌بندی قرار می‌گیرد.

زیرنویس

1. Tournament
2. Directed Graphs
3. Digraph
4. Indegree
5. Outdegree
6. Even
7. Odd
8. Ranking

منبع

1. http://mathworld.wolfram.com
2. http://www.fifa.com
3. http://www.graphtheory.com

از شاگردان وی، **حسین بن حسن شهنشاه سمنانی منجم** را می‌شناسیم که تا سال ۷۵۱ زنده بوده و نسخه‌ی کتاب البصائر فی علم المناظر را که ذکرش گذشت، از روی خط کمال‌الدین فارسی استنساخ کرده است.

آثار ریاضی کمال‌الدین فارسی

۱. **تذکرة الاحباب فی بیان التحاب**: مهم‌ترین اثر ریاضی شناخته‌شده‌ی کمال‌الدین فارسی، است که هدف آن اثبات درستی دستوری است که ثابت بن قره در سده‌ی سوم برای یافتن دسته‌ای از عددهای متحاب بیان کرده است. بعد از مقاله‌ای که ثابت بن قره درباره‌ی عددهای متحاب نوشته، این رساله‌ی کمال‌الدین فارسی مهم‌ترین اثری است که در دوره‌ی اسلامی راجع به نظریه‌ی اعداد تألیف شده است. مطالعه و بررسی دقیق این رساله نشان می‌دهد که کمال‌الدین فارسی ریاضی‌دانی بوده است محقق، مبتکر، صاحب افکار بدیع و فکر منظم، و موشکاف که در تألیف و تصنیف نیز زبردست و ماهر بوده است.

ثابت بن قره در مقاله‌ی خود دستور زیر را برای یافتن برخی از عددهای متحاب[1] بیان کرده است:

قضیه: اگر سه عدد $p = 3 \times 2^{n-1} - 1$ و $q = 3 \times 2^{n} - 1$ و $r = 9 \times 2^{2n-1} - 1$ هر سه اول باشند، آن‌گاه دو عدد $M = 2^{n} \times pq$ و $N = 2^{n} \times r$ متحاب خواهند بود.

کمال‌الدین فارسی رساله‌ی مذکور را برای اثبات درستی این قاعده تألیف کرده و طی آن در حدود بیست‌وپنج قضیه یا مسئله در نظریه‌ی اعداد بیان و ثابت کرده است که برخی از آن‌ها که پیش از وی سابقه نداشته، بسیار بدیع و از حیث تاریخ ریاضیات جالب توجه است و از آن جمله است قضیه‌ی زیر که شکل هفدهم از رساله‌ی کمال‌الدین فارسی است:

قضیه: اگر عدد اول p عدد مرکب a را نشمارد، آن‌گاه:

مجموع اجزای ap = (مجموع اجزای a) × p + (مجموع اجزای a + a)

فارسی نخستین کسی بوده که این قضیه را به صورت کامل فوق بیان کرده و با دقت به ثبوت رسانده است. در حدود بیش از ۳۲۰ سال بعد از درگذشت وی، **دکارت**، ریاضی‌دان و فیلسوف فرانسوی، همین قضیه را به صورت ناقص زیر بیان کرده است:

قضیه: اگر p عددی اول و b مجموع اجزای عدد مرکب a باشد، مجموع اجزای ap عبارت است از bp+a+b

این قضیه به صورت فوق از این جهت ناقص است که دکارت قید نکرده است که عدد اول p نباید عدد مرکب a را بشمارد. مثلاً اگر $a = 30$ و $p = 5$ باشد، آن‌گاه b یعنی مجموع اجزای ۳۰ مساوی است با ۴۲ و بنا به قضیه‌ی دکارت:

مجموع اجزای ap $= pb + a + b = 42 \times 5 + 30 + 42 = 282$

اما این صحیح نیست، زیرا مجموع اجزای $150 = 5 \times 30$ که می‌توان آن را مستقیماً حساب کرد، مساوی است با ۲۲۲ و نه ۲۸۲.

کمال‌الدین فارسی حالت کلی قضیه، یعنی حالتی که در آن p مساوی با یکی از شمارنده‌های a باشد را هم در نظر گرفته و در این حالت نیز دستور محاسبه‌ی اجزای حاصل ضرب ap را بیان و ثابت کرده است.

و نیز فارسی نخستین کسی بوده که دستور محاسبه‌ی اجزای حاصل ضرب دو عدد طبیعی را در حالت کلی بیان و ثابت کرده است (شکل هجدهم از رساله‌ی او). دستور این است:

قضیه. اگر a و b دو عدد طبیعی و نسبت به هم اول باشند و مجموع اجزای هر عدد مثلاً عدد a را s(a) بنامیم، آن‌گاه:

$$s(ab) = s(a) \times b + s(b) \times a + s(a) \times s(b)$$

دکارت در حدود بیش از سه سده بعد از درگذشت کمال‌الدین فارسی، همین دستور را در اروپا به‌دست آورد. با این تفاوت که کمال‌الدین فارسی باز در این مورد حالتی را که در آن دو عدد a و b نسبت به هم اول نباشند نیز در نظر گرفته و قاعده‌ی خود را تعمیم داده است.

علاوه بر این، فارسی پس از اثبات صحت دستور ثابت بن قره آن را به کار بسته و دو عدد متحاب ۱۷۲۹۶ و ۱۸۴۱۶ را به‌دست آورده است. در اروپا متحاب بودن این دو عدد را نخستین بار فرما، ریاضی‌دان فرانسوی در سال ۱۶۳۶ میلادی، به‌دست آورد.

باید اضافه کنم، کمال‌الدین فارسی مثل یک محقق امروزی، کارهایی را که پیشینیان وی درباره‌ی محاسبه‌ی عددهای متحاب انجام داده بودند، مورد بررسی و نقادی قرار داده و اشتباهی را که آنان در متحاب پنداشتن دو عدد ۲۰۲۴ و ۲۲۹۶ مرتکب شده بودند، گوشزد کرده و علت اشتباه آنان را نیز شرح داده است.

۲. **رساله‌ی بحث در زاویه**: موضوع این رساله بحثی است در این که آیا زاویه از مقوله‌ی کم است و یا از مقوله‌ی کیف و کمال‌الدین فارسی از بحثی که در این رساله کرده، نتیجه گرفته است که زاویه مطابق با رأی معلم اول (ارسطو) از مقوله‌ی کیف است.

زیرنویس

۱. دو عدد طبیعی را در صورتی متحاب می‌نامند که مجموع اجزای هر یک از آن‌ها مساوی با دیگری باشد مانند دو عدد ۲۲۰ و ۲۸۴. مقصود از اجزای هر عدد طبیعی غیر اول شمارنده‌هایی از آن عدد هستند که از خود عدد کوچکتر باشند. در بعضی از کتاب‌های فارسی اصطلاح اعداد متحاب را به صورت «اعداد متحابه» نوشته‌اند. امّا ابوریحان بیرونی در کتاب التفهیم این اصطلاح را به صورت «عددهای متحاب» به کار برده و تای تأنیث به آخر متحاب اضافه نکرده است.

منبع

زندگی‌نامه‌ی ریاضی‌دانان دوره اسلامی، ابوالقاسم قربانی، مرکز نشر دانشگاهی