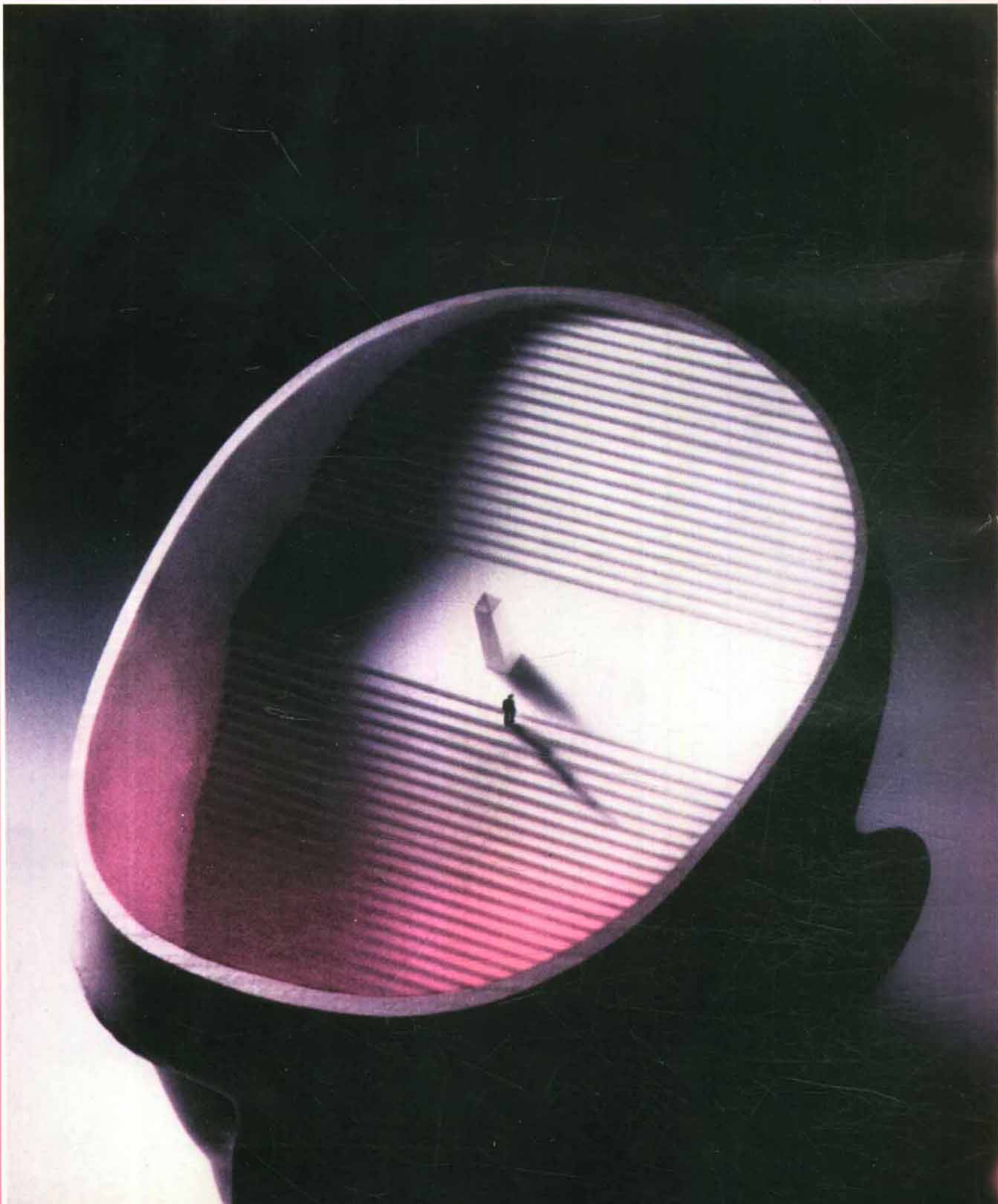
مجله ریاضی

# برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۱۸

سال ششم، پاییز ۱۳۷۵ شماره اول، بها ۲۰۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه وابسته به وزارت آموزش و پرورش

❏ صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه ❏ مدیر مسئول: محمود ابراهیمی

❏ سردبیر: حمیدرضا امیری ❏ مدیر داخلی: سیدمحمّدرضا هاشمی موسوی

❏ اعضای هیئت تحریریه: آقایان: ❏ حمیدرضا امیری ❏ محمدهاشم رستمی ❏ احمد قندهاری ❏ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی ❏ غلامرضا یاسی‌پور (با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقای پرویز شهریاری و با تشکر از آقای حسین ابراهیم‌زاده قُلزم در بخش کامپیوتر مجله)

❏ مدیر فنی: هوشنگ آشتیانی ❏ طراح و صفحه‌آرا: احمد پیرحسینلو ❏ رسّام: سیّدجعفر طرازانی ❏ چاپ و صحافی: چاپخانه مدرسه

مطالب این شماره



■ سال ششم، پاییز ۱۳۷۵ شمارهٔ اوّل

**برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:**

۱ـ نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی راهنمایی) ۲ـ طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به‌همراه حل آن ۳ـ طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان) به‌همراه حل آن ۴ـ طرح معماهای ریاضی ۵ـ نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

■ هیئت تحریریه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.
■ مقالات مجله با رسم‌الخطِ انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.
■ مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
■ مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.



نشانی: تهران، خیابان سپهبد قرنی، پل کریمخان زند، کوچه شهید محمود حقیقت طلب، پلاک ۳۶
تلفن: ۹ـ ۸۸۱۰۳۲۵، ۸۹۳۸۰۹ فاکس: ۸۸۲۰۵۹۹
صندوق پستی: ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹

# حرف اوّل

## دو گوهر گرانبها

این بار حرف اول را به اساسی‌ترین و مهمترین فرع از فروع دین، یعنی «**امربه معروف و نهی از منکر**» اختصاص می‌دهیم، به‌راستی‌که این دو وظیفهٔ مهمّ حرف اول را می‌زنند و جالب است بدانید که قبولی نماز و دیگر عبادات درگرو انجام این دو فریضهٔ دینی است. پیامبر اکرم(ص) فرمودند: «امربه معروف و نهی از منکر، پس از ایمان به خدا و صلهٔ رحم، از همهٔ کارها برتر است.»

امّا انجام این دو امر مهمّ چه‌وقت جایز و واجب می‌شود و ترک آن موجبِ چه عواقبی است؟

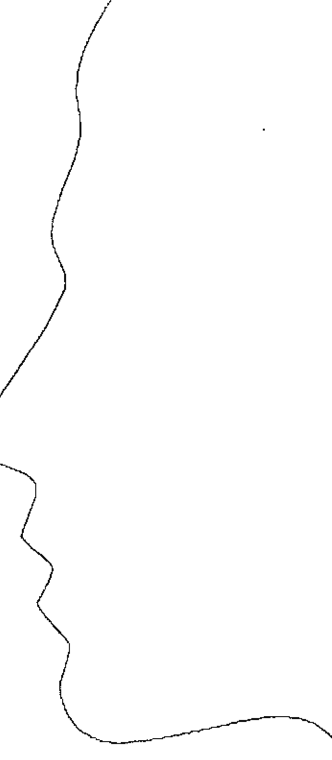
عزیزان دانش‌آموز، سازندگانِ ایران اسلامی، آیا به نظر شما بی‌بندوباری می‌تواند به عنوان آزادی مطرح شود؟ و آیا اصولاً شخص بی‌بند و بار می‌تواند به حکم این‌که دلش می‌خواهد آزاد باشد، به آزادی دیگران لطمه بزند؟ یک نفر آزاد باشد و چند نفر ـ غیر از خودش ـ گرفتارِ عواقبِ بَد آزادیِ او؟ این چه اصلی است و تابعِ چه منطقی است؟

وقتی تعدادی از زنان و مردان در جامعهٔ اسلامی، شؤونات اسلامی را رعایت نمی‌کنند و با هر وضعیتی که دلشان بخواهد آرامش روحی و روانی مردم را به هم می‌زنند و علناً به اسلام و جامعه اسلامی دهن‌کجی می‌کنند، می‌توان ساکت بود؟ می‌توان سالم زندگی کرد؟ آیا این سلب آزادی از مسلمانان نیست که در کوچه و خیابان باید به‌خاطر آزادیِ دیگران در **قیدوبند** باشند؟

آیا می‌توان کلام امیرمؤمنان علی(ع) را نادیده گرفت که فرمودند: «کسی که نهی از منکر را با قلب و زبان و عمل ترک کند، چنین کسی مرده‌ای در میان زندگان است.» و آیا نباید هراس داشته‌باشیم که عواقب ترکِ امربه معروف و نهی‌ازمنکر و حتی بی‌تفاوتی نسبت به آن، جامعهٔ اسلامیِ عزیزمان راکه با خون شهیدانمان آبیاری شده به انحراف اخلاقی کشانده و تهاجم و شبیخون فرهنگی غرب پیروز شود!؟ بر همه مسلمانان واجب است که در هر مقام و جایگاهی که قرار دارند و با هر وسیله و ابزاری که می‌توانند ـ البته با رعایت شرایط دقیقِ اسلامیِ آن ـ به امربه معروف و نهی ازمنکر بپردازند تا مصداقِ این حدیث شریف از حضرت رسول‌اکرم(ص) قرار نگیریم که فرمودند: «هرگاه امت من (دو وظیفه) امربه معروف و نهی ازمنکر را به یکدیگر واگذار کنند، از طرف خداوند اعلام بلا می‌شود.»

عزیزان، پس بیایید امربه معروف و نهی ازمنکر را جدّی بگیریم که بنا به فرموده پیامبر عزیز(ص): «کسی که امربه معروف و نهی ازمنکر کند، جانشین و نمایندهٔ خدا در زمین و جانشین و نمایندهٔ رسول‌خدا و قرآن می‌باشد.»

**والسلام ـ سردبیر**



# شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۱۸)

○ پرویز شهریاری

با همهٔ آن‌چه که دربارهٔ شکل و امکان فریب‌خوردن از آن گفتیم، شکل وسیلهٔ اصلی شناخت مسأله و پیدا کردن روش حل آن است. هیچ مسأله یا قانون ریاضی، هر قدر انتزاعی باشد، بدون نوعی تجسم عینی، قابل درک نیست؛ و شکل، یکی از امکانهایی است که می‌تواند به عینی‌تر شدن مفهوم یک مسأله یا یک قانون ریاضی کمک کند. همهٔ دشواریها و گمراهیهایی که ممکن است ناشی از شکل باشد، در تجزیه و تحلیل نهایی منجر به این نکته می‌شود که شکل را درست رسم نکرده‌ایم و یا، به‌دلیل اشتباه چشم و اشتباه ناشی از ابزارهای رسم، نتوانسته‌ایم با دقت رسم کنیم. به همین مناسبت، وقتی از شکل برای حل مسأله‌ای یاری می‌گیریم، باید همیشه خود را در برابر سه پرسش قرار دهیم:

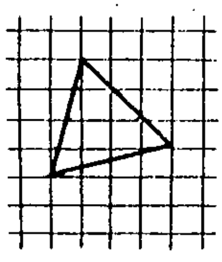
۱) آیا شکل را درست و، تا حد امکان، دقیق رسم کرده‌ایم؟

۲) آیا رابطهٔ بین عنصرها در شکل و بستگی ظاهری بین این عنصرها (که در دید نخست به ما تلقین می‌شود) در واقع وجود دارند و آیا با استدلال منطقی و براساس آگاهیهایی که از ریاضیات داریم، قابل اثبات هستند؟

۳) آیا نتیجه‌گیری ناشی از شکل، با تجربه و با عقل سلیم سازگار است؟

هیچ‌چیز بهتر از مثال، نمی‌تواند مطلب را روشن کند.

ساده‌ترین نوع مثلث، مثلثی است که سه ضلع برابر داشته باشد (مثلث متساوی‌الاضلاع). برای رسم چنین مثلثی، به‌شرط در اختیار داشتن پرگار یا گونیای با زاویهٔ ۶۰ درجه، به دشواری برنمی‌خوریم. ولی آیا بدون این ابزارها می‌توان مثلث متساوی‌الاضلاعی را رسم کرد که به‌طور مثال، رأسهای آن، در نقطه‌های گرهی یک صفحهٔ کاغذ شطرنجی باشد؟ پاسخ این پرسش منفی است. مثلثی که در شکل ۱ می‌بینید، به مثلث متساوی‌الاضلاع بسیار نزدیک است، ولی متساوی‌الاضلاع نیست (یعنی چشم نمی‌تواند بسادگی تشخیص دهد که، سه ضلع این مثلث، با هم برابر نیستند). در واقع، طول ضلعهای این مثلث، نسبت به‌هم، کمتر از ۳ درصد اختلاف دارند.



شکل (۱)

مثلث متساوی‌الاضلاع با همهٔ سادگی خود، ویژگیهای جالب زیادی دارد که، اثبات برخی از آنها، چندان ساده نیست. برخی از این ویژگیها، در آغاز موجب شگفتی می‌شوند. سیاههٔ کوتاهی از ویژگیهای مثلث متساوی‌الاضلاع را در اینجا آورده‌ایم، ولی این سیاهه را می‌توان ادامه داده، اندیشهٔ هندسی خود را دربارهٔ این ویژگیها بیازمایید و تلاش کنید، درستی آنها

را ثابت کنید :

۱. مثلث متساوی‌الاضلاع، تنها مثلثی است که سه محور تقارن دارد.

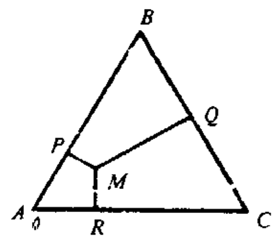
۲. در بین مثلثهای با محیط برابر، مثلث متساوی‌الاضلاع، بیشترین مساحت را دارد.

۳. اگر طول شعاع دایرهٔ محاط در مثلث را r و طول شعاع دایرهٔ محیط بر مثلث را R بنامیم، بیشترین مقدار نسبت $\frac{r}{R}$ در مثلث متساوی‌الاضلاع به‌دست می‌آید.

۴. اگر نقطهٔ M را در درون مثلث متساوی‌الاضلاع انتخاب و عمودهای MP، MQ و MR را بر ضلعهای مثلث فرود آوریم (شکل ۲)، مجموع طولهای این سه عمود، به‌جای نقطهٔ M بستگی ندارد و، در هر حال، برابر طول ارتفاع مثلث است. بجز این، همیشه داریم :

$$|AP|+|BQ|+|CR|=|BP|+|CQ|+|AR|,$$

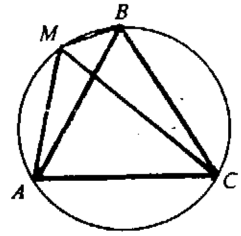
$$|AP|^2+|BQ|^2+|CR|^2=|BP|^2+|CQ|^2+|AR|^2$$




شکل (۲)

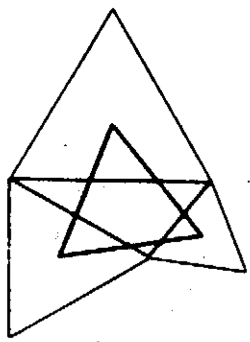
۵. اگر نقطهٔ M را روی محیط دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC انتخاب کنیم، مجموع فاصله‌های این نقطه تا دو رأس نزدیکتر مثلث، برابر است با فاصلهٔ این نقطه تا رأس سوم (شکل ۳) :

$$|MA|+|MB|=|MC|$$



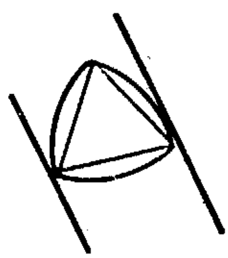

شکل (۳)

۶. و این قضیه که منتسب به ناپلئون است : اگر روی ضلعهای یک مثلث و در بیرون آن، مثلثهای متساوی‌الاضلاعی بسازیم، مثلثی هم که رأسهای در نقطه‌های برخورد این سه مثلث باشد، متساوی‌الاضلاع است (شکل ۴).



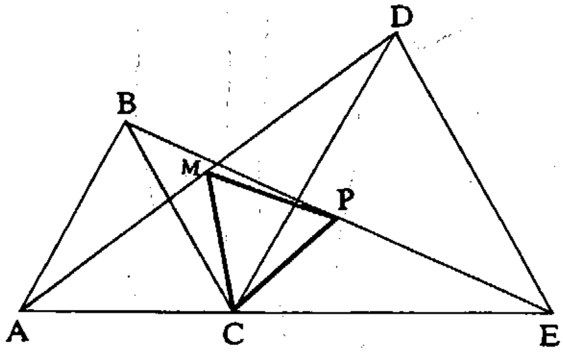
شکل (۴)

۷. فرانتس ره‌لُو، آلمانی و متخصص مکانیک متوجه شد : اگر به مرکز هر رأس مثلث متساوی‌الاضلاع و با شعاع برابر طول ضلع مثلث، کمانی از دایره را رسم کنیم که دو رأس دیگر مثلث را به هم وصل کند، یک منحنی بسته به‌دست می‌آید (به‌نام **مثلث ره‌لُو**) که پهنایی ثابت دارد، یعنی اگر دو خط راست موازی بر این منحنی رسم کنیم، فاصلهٔ بین آنها، همیشه برابر با طول ضلع مثلث می‌شود.



شکل (۵)

۸. در بین مثلثهای با محیط برابر، مجموع طولهای میانه‌ها، در مثلث متساوی‌الاضلاع، کمترین مقدار است.

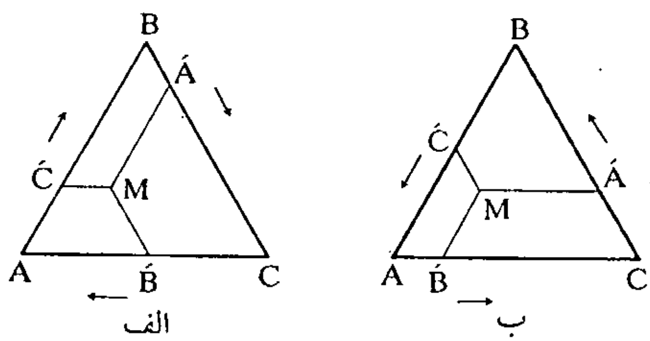



شکل (۶)

۹. روی پاره‌خط راست AE، نقطهٔ دلخواه ۳ را انتخاب و مثلثهای متساوی‌الاضلاع ABC و CDE را دریک طرف پاره‌خط راست AE رسم کرده‌ایم (شکل ۶). وسط پاره‌خط راست AB را M و وسط پاره‌خط راست BE را P می‌نامیم. ثابت کنید، مثلث CMP متساوی‌الاضلاع است.

۱۰. نقطهٔ M را در درون مثلث ABC انتخاب و از آنجا، خطهای راستی موازی ضلعهای مثلث رسم کرده‌ایم. اگر نقطه‌های برخورد این خطهای راست را با ضلعها با $A'$ و $B'$ و $C'$ نشان دهیم، ثابت کنید، مجموع $|MA'|+|MB'|+|MC'|$ برابر است با طول ضلع مثلث اصلی.

دربارهٔ رسم شکل برای این مسأله، اندکی توضیح بدهیم. وقتی از نقطهٔ M موازی ضلع BC رسم کنیم، دو ضلع AB و AC را قطع می‌کند، کدام نقطهٔ برخورد را در نظر بگیریم و با چه نامی ($A'$، $B'$ یا $C'$)؟ همین دشواری، برای خطهای راست موازی AC و AB هم پیش می‌آید. معمول است که در صورت مسأله، با رسم شکل و یا با توضیح، وضع را روشن می‌کنند، ولی در اینجا نه شکلی داده‌اند و نه توضیحی.

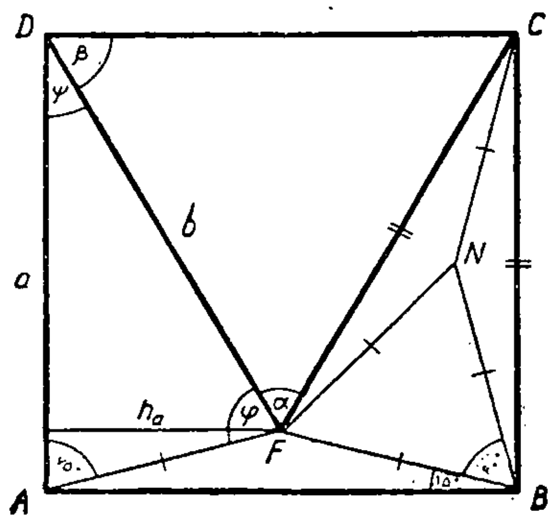



شکل (۷)

در این‌گونه موردها، باید روی محیط مثلث، جهتی را در نظر گرفت؛ در شکل ۷ ــ الف، جهت را از A به B، B به C و C به A (جهت حرکت عقربه‌های ساعت) و در شکل ۷ ــ ب، از A به C، C به B و B به A (عکس جهت حرکت عقربه‌های ساعت یا جهت مثلثاتی) در نظر گرفته‌ایم. وقتی از M موازی یکی از ضلعها رسم می‌کنیم باید در جهت همان ضلع حرکت کنیم: فرض کنیم می‌خواهیم از نقطهٔ M موازی با ضلع AB رسم کنیم؛ در این‌صورت در شکل الف، باید در جهت از A به B، یعنی به سمت برخورد با ضلع BC و در شکل ب، در جهت از B به A و به سمت برخورد با AC حرکت کنیم: در حالت الف، نقطهٔ برخورد را $A'$ (هم نام با نقطهٔ آغاز $\overrightarrow{AB}$) و در حالت ب، نقطهٔ برخورد را $B'$ (هم نام با نقطهٔ آغاز $\overrightarrow{BA}$) می‌نامیم. به این ترتیب، در هر دو حالت، $A'$ روی ضلع BC، $B'$ روی ضلع AC و $C'$ روی ضلع AB قرار می‌گیرد. اثبات حکم مسأله، برای هر یک از حالتهای الف و ب دشوار نیست.

اکنون خودتان روشن کنید، در مسألهٔ ۴ و برای برابریهای موردنظر مسأله، پاره‌خطهای راست سمت چپ و سمت راست برابریها را چگونه انتخاب کرده‌ایم؟

۱۱. روی ضلع AB از مربع ABCD، مثلث متساوی‌الساقین ABF را در درون مربع طوری رسم کرده‌ایم که، هر زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ AB در آن، برابر ۱۵ درجه باشد. ثابت کنید FCD، مثلثی متساوی‌الاضلاع است.




شکل (۸)

این، یکی از مسأله‌های مشهوری است که اغلب، و هر چند سال یکبار، در دست دانش‌آموزان دیده می‌شود و همه‌جا، به‌دنبال راه‌حل آن هستند؛ در حالی که با استفاده از برهان خُلف، خیلی زود به‌نتیجه می‌رسد. دربارهٔ برهان خلف، اندکی بعد، صحبت خواهیم کرد و، در اینجا، راه‌حل مسأله را می‌آوریم.

تقارن شکل، روشن می‌کند که مثلث FCD متساوی‌الساقین است، یعنی $|FC|=|FD|$. بنابراین، برای متساوی‌الاضلاع بودن مثلث FCD، باید ثابت کنیم طول پاره‌خط راست FD با طول ضلع مربع برابر است.

این نام‌گذاریها را می‌پذیریم: $|AD|=a$، $|FD|=b$،

. $A\hat{F}D=\varphi$ ، $C\hat{D}F=\beta$ ، $D\hat{F}C=\alpha$

اگر مثلث FCD متساوی الاضلاع نباشد، یا $b>a$ و یا $b<a$ . اگر $b>a$ ، آن‌وقت $\varphi<75^\circ$ (در هر مثلث، ضلع کوچکتر، روبروی زاویهٔ کوچکتر است) و در نتیجه $\alpha>60^\circ$ (زاویه‌های به رأس نقطهٔ F رابررسی کنید) و، بنابراین $\beta<60^\circ$ ؛ از آنجا (با توجه به مثلث FCD) به‌دست می‌آید $b<a$ . با فرض $b>a$ ، به نابرابری مخالف آن، یعنی $b<a$ رسیدیم که ممکن نیست؛ پس b نمی‌تواند از a بزرگتر باشد. به همین ترتیب، با فرض $b<a$ ، به نابرابری $b>a$ می‌رسیم؛ یعنی در حالت $b\neq a$ ، ضمن ارزیابی زاویه‌ها، فرض ما نقض می‌شود. تنها یک حالت باقی می‌ماند: $b=a$ .

مسأله را می‌توان، بدون استفاده از روش برهان خُلف و به‌طور مستقیم هم، حل کرد.

روی ضلع BC و در درون مربع ABCD، مثلث CNB را برابر مثلث BFA می‌سازیم (شکل ۸ را ببینید). در این صورت، برای مثلث BNF داریم: $|BN|=|BF|$ (به‌عنوان ضلعهای متناظر دو مثلث برابر) و $N\hat{B}F=60^\circ$. بنابراین

$$|NC|=|NB|=|NF|,\quad C\hat{N}B=C\hat{N}F=150^\circ$$

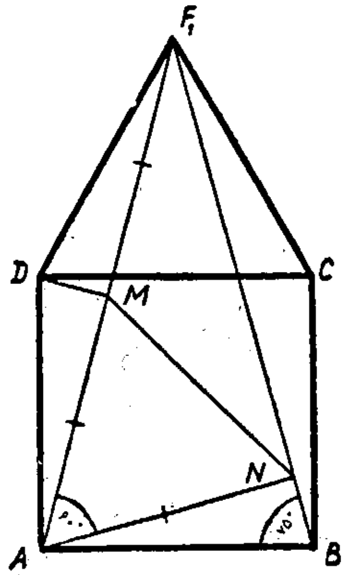
یعنی مثلثهای CNB و CNF برابرند، بنابراین $|CF|=a$ و مثلث FCD متساوی الاضلاع است. برای این‌که، استدلال ما، کمبودی نداشته باشد، می‌گوییم که، نقطهٔ N ، تنها می‌تواند در درون مثلث FBC قرار گیرد، زیرا در غیر این‌صورت، زاویهٔ FNC برابر ۲۱۰ درجه می‌شود که ممکن نیست.

دربارهٔ این مسأله، بیشتر می‌اندیشیم. آیا عکس این مسأله قابل حل است؟ عکس مسأله را در اینجا تنظیم کرده‌ایم، ولی حل آن را به عهدهٔ شما می‌گذاریم:

**۱۲**. روی ضلع CD و در درون مربع ABCD، مثلث متساوی‌الاضلاع FCD را ساخته‌ایم. مقدار زاویه‌های مثلث ABF را پیدا کنید (شکل ۸).

همچنین، می‌توان براساس اندیشه‌ای که در مسألهٔ ۱۱ وجود دارد، مسألهٔ دیگری طرح و حل کرد:

**۱۳**. روی ضلع CD از مربع ABCD و در بیرون مربع، مثلث متساوی‌الاضلاع $DCF_1$ را ساخته‌ایم (شکل ۹). مقدار زاویه‌های مثلث $ABF_1$ را پیدا کنید.




شکل (۹)

مثلث $BCF_1$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به شرط مسأله داریم:

$$|BC|=|CF_1|,\ B\hat{C}F_1=90^\circ+60^\circ=150^\circ$$

بنابراین

$$F_1\hat{B}C=15^\circ,\ F_1\hat{B}A=75^\circ$$

و چون نقطهٔ $F_1$ ، روی محور تقارن مربع است، پس

$$F_1\hat{A}B=75^\circ,\ A\hat{F_1}B=30^\circ$$

عکس مسألهٔ ۱۳، چنین است:

**۱۴**. روی ضلع AB از مربع ABCD، مثلث متساوی‌الساقین $ABF_1$ را با زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ برابر ۷۵ درجه طوری ساخته‌ایم که نقطهٔ $F_1$ و ضلع CD در یک سمت ضلع AB واقع باشند. ثابت کنید، مثلث $DCF_1$ متساوی‌الاضلاع است (شکل ۹).

اگر در مثلثهای $AF_1D$ و $ABF_1$ ، ارتفاعهای DM و AN را رسم کنیم، با محاسبهٔ مقدار زاویهٔ MAN و توجه به برابری مثلثهای AMD و ABN ، روشن می‌شود که مثلث MAN متساوی‌الاضلاع است. از مثلث $ANF_1$ به‌دست می‌آید:

$$|AN|=\frac{1}{2}|AF_1| \quad \text{یا} \quad |AM|=\frac{1}{2}|AF_1|$$

بنابراین، DM ، میانه و ارتفاع مثلث $AF_1D$ است، یعنی

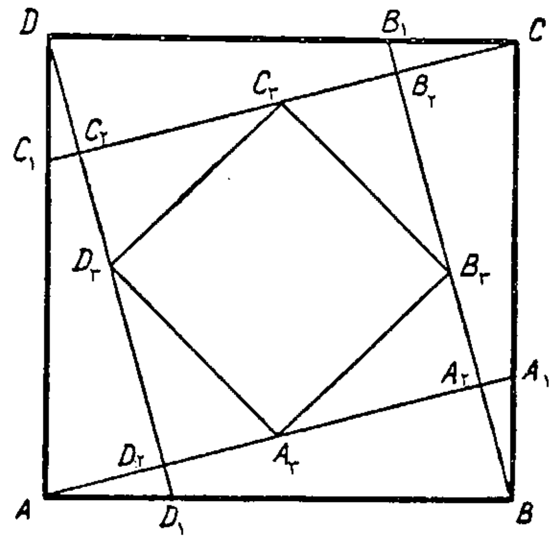
$$D\hat{A}F_1=D\hat{F_1}A=15^\circ;$$

$$F_1\hat{D}C=A\hat{D}F_1-A\hat{D}C=60^\circ$$

با توجه به مقدار زاویهٔ $F_1DC$ و با توجه به متقارن بودن شکل، قانع می‌شویم که، مثلث $CF_1D$ ، متساوی‌الاضلاع است.

بر پایهٔ اندیشه‌ای که در طرح مسألهٔ ۱۱ به‌کار رفته است، با اندکی دقت و صرف وقت، می‌توان مسأله‌های بسیاری طرح کرد که، برخی از آنها، اندیشه‌های تازه‌ای را در برداشته باشند. برای نمونه، یکی از این گونه مسأله‌ها را می‌آوریم:

۱۵. مربع ABCD را، به ضلع واحد را در نظر می‌گیریم (واحد بودن طول ضلع مربع ، تنها برای سادگی کار است و نقش اساسی در تنظیم مسأله ندارد). پاره‌خطهای راست $AA_1$ ، $BB_1$ ، $CC_1$ و $DD_1$ را در درون مربع طوری رسم می‌کنیم که، به‌ترتیب، با ضلعهای AB ، BC ، CD و DA ، زاویه‌ای برابر ۱۵ درجه بسازند. ثابت کنید، از برخورد این پاره‌خطهای راست، مربع $A_2B_2C_2D_2$ به‌دست می‌آید که مساحتی برابر نصف مساحت مربع ABCD دارد (شکل ۱۰).




شکل (۱۰)

می‌بینید، این مسأله، با مسألهٔ ۱۱، بکلی فرق دارد؛ ولی در واقع، بر پایهٔ همان اندیشهٔ جدا کردن زاویهٔ ۱۵ درجه (یا ۷۵ درجه) از زاویه‌های مربع پدید آمده است.

اگر به این نکته توجه کنیم که $tg15^\circ = 2-\sqrt{3}$ ، محاسبهٔ مساحت مربع $A_2B_2C_2D_2$ به‌سادگی به‌دست می‌آید (اثبات مربع بودن $A_2B_2C_2D_2$ ، با محاسبهٔ زاویه‌ها و طول ضلعها، دشوار نیست). در واقع

$$S_{A_2B_2C_2D_2} = S_{ABCD} - 4S_{AA_2B}$$

در ضمن داریم:

$$|A_1B| = 2-\sqrt{3};\quad |A_2B| = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2},$$

$$|AA_2| = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

و بنابراین

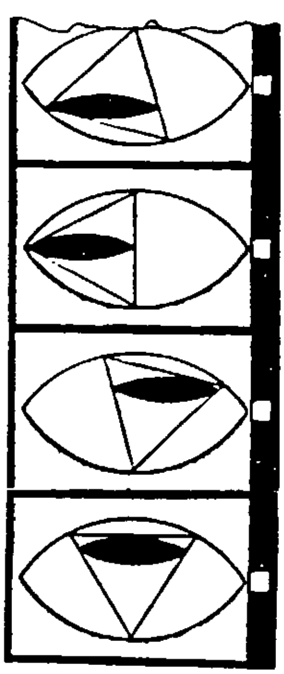
$$S_{\triangle AA_2B} = \frac{|AA_2|.|A_2B|}{2} = \frac{1}{8};$$

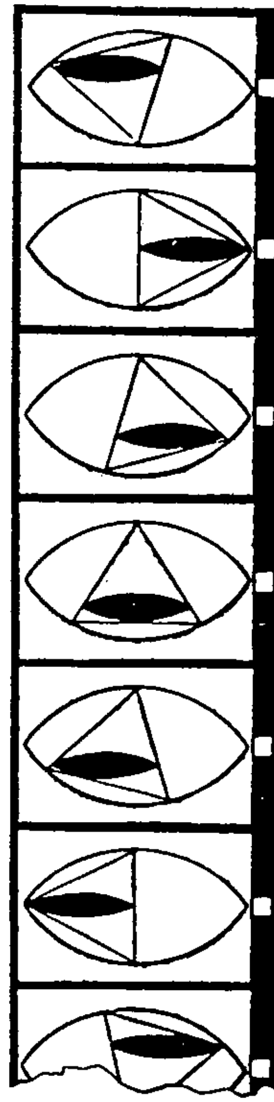
$$S_{A_2B_2C_2D_2} = 1 - 4\times\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

جالب است، اگر وسط پاره‌خطهای راست $AA_1$ ، $BB_1$ ، $CC_1$ و $DD_1$ را، به ترتیب، $A_3$ ، $B_3$ ، $C_3$ و $D_3$ بنامیم، آن وقت $A_3B_3C_3D_3$ هم، یک مربع است که مساحتی برابر $2-\sqrt{3}$ دارد (ثابت کنید!).

در پایان این بحث که به برخی از ویژگیهای مثلث متساوی‌الاضلاع اختصاص داشت، ویژگی دیگری را، که هم جالب و هم شگفتی‌آور است، می‌آوریم (آیا می‌توانید راهی برای اثبات این ویژگی پیدا کنید؟).

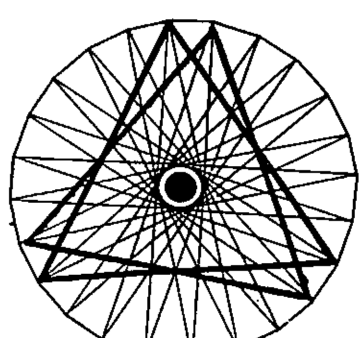
می‌دانیم، مثلث متساوی‌الاضلاع را، می‌توان در دایره‌ای که بر آن محیط شده است، چرخاند (شکل ۱۲ را، که در ضمن شکلی زیباست ببینید). ولی گمان می‌کنم، برای شما نامنتظر باشد که مطلع شوید:





شکل (۱۱)

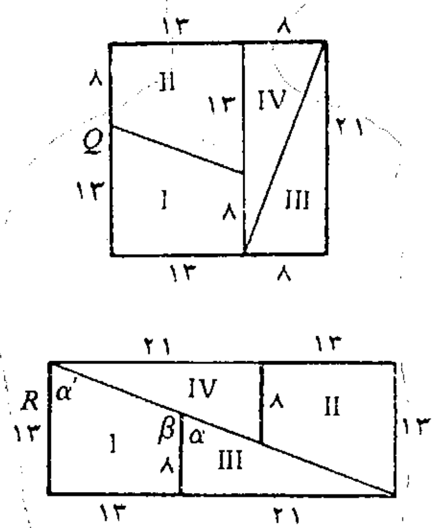
۱۶. اگر دو انتهای دو کمان ۱۲۰ درجه، از دو دایره‌ای که شعاعهای برابر دارند،طوری روی‌هم قرار دهیم‌که یک منحنی بسته به‌وجود آورند، مثلث متساوی‌الاضلاعی را که در آن محاط شده باشد، می‌تواند چرخاند (در شکل ۱۲، چند حالت از مثلث متساوی‌الاضلاع محاطی، نشان داده شده است).



شکل (۱۲)

برای این‌که ببینیم، عدم دقت در رسم شکل و یا عدم توانایی در رسم دقیق شکل، چه نتیجه‌های خنده‌داری ممکن است به‌بار آورد، یک مسألهٔ ساده را، که به ساختمان یک شکل هندسی مربوط می‌شود، به‌صورتی کوتاه شده، از کتاب «اشتباه استدلالهای هندسی» می‌آوریم.

۱۷. آیا مساحت مربع با ضلع به طول ۲۱ سانتی‌متر، با مساحت مستطیل با ضلعهای ۳۴ و ۱۳ سانتی‌متر برابر است؟ به زبان دیگر، آیا ۴۴۲= ۴۴۱؟




شکل (۱۳)

مربع Q را به دو مستطیل ۲۱×۱۳ و ۲۱×۸ بخش می‌کنیم (شکل ۱۳). مستطیل اول را به دو ذوزنقهٔ قایم الزاویه برابر، با قاعده‌های ۱۳ و ۸ و مستطیل دوم را به دو مثلث قایم‌الزاویه برابر، با ضلعهای مجاور به زاویه قایمه ۸ و ۲۱ تقسیم می‌کنیم. با چهار بخشی که به‌دست می‌آید، مستطیل R را، آن گونه که در شکل ۱۳ دیده می‌شود، می‌سازیم (بخشهای برابر را، در مربع Q و مستطیل R، با عددهای رومی مشخص کرده‌ایم). مساحت این مستطیل، برابر ۳۴×۱۳، یعنی ۲۴۲ سانتی‌متر مربع است، در حالی که مساحت مربع، که از همین بخشها درست شده است، برابر ۲۱×۲۱ ، یعنی ۲۴۱ سانتی‌مترمربع می‌شود. این یک سانتی‌مترمربع، کجا رفته است؟ خودتان آزمایش کنید. روی یک کاغذ شطرنجی، مربع Q را ببرید و آن را، با دقت، به چهار بخش مورد نظر تقسیم کنید؛ سپس، از بخشهایی که به‌دست آورده‌اید، مستطیل R را بسازید.

اکنون به جستجوی اشتباه خود می‌پردازیم. وقتی

می‌گوییم از بخشهای I، II، III و IV (در مربع)، می‌توان مستطیلی درست کرد، به‌چشم خود و یا به آزمایشی که، با کاغذهای بریده، انجام دادیم، اعتماد کردیم. ضمن این که شکلهای I و III (یا II و IV) را پهلوی هم قرار دادیم، پذیرفتیم که مثلثی پدید می‌آید، یعنی پذیرفتیم که، ساق مایل ذوزنقهٔ I و وتر مثلث III، در یک راستا قرار می‌گیرند و در نقطهٔ مشترک خود، دارای «شکستگی» نیستند. ولی روشن است، تکیه بر «دیدن» و اعتماد به «چشم» (که در تجربهٔ زندگی ما، در موردهای زیادی، دچار اشتباه شده است)، نمی‌تواند قانع کننده باشد و به‌جای استدلال هندسی به‌کار رود.

[ باید گفت که این اشتباه، یعنی اعتماد به آن چه دیده می‌شود، ریشهٔ تاریخی ژرفی دارد. خیلی طول کشید تا انسان هوشمند، با پیچیده‌تر شدن زندگی و ضمن نیازی که به محاسبه‌های دقیقتر پیدا کرد، متوجه شد که باید از خرد خود یاری بخواهد و استدلال منطقی را به جای «مشاهده» قرار دهد. در کاوشهایی که در معبدی از هند باستان انجام گرفته است، و به هزار سال پیش از میلاد مربوط می‌شود، برخی نوشته‌های ریاضی پیدا شده است که، در بین آنها، یک شکل هندسی هم دیده می‌شود که بر دیوار معبد نقش بسته است. شکل، دربارهٔ محاسبهٔ مساحت دایره است؛ ولی به‌جای اثبات، در کنار شکل نوشته شده است: «دیده می‌شود». ]

کشف همین کمبود، برای نارسایی اثبات کافی است و تا وقتی این کمبود برطرف نشود، هرگونه بحثی دربارهٔ آن بی‌معناست.

اگر بتوانیم ثابت کنیم، زاویه‌های $\alpha$ و $\beta$ در شکل ۱۳، مجموعی برابر ۱۸۰ درجه دارند، یا به جای آن ثابت کنیم، دو زاویهٔ $\alpha$ و $\alpha'$ در همان شکل، با هم برابرند، آن وقت «نبودن شکستگی» را ثابت کرده‌ایم. آیا این اثبات ممکن است؟ روشن است که، باید به این پرسش، پاسخ منفی بدهیم، زیرا پاسخ مثبت به معنای برابری دو عدد ۴۴۱ و ۴۴۲ است.

ولی می‌توان ثابت کرد، دو زاویهٔ $\alpha$ و $\alpha'$ با هم برابر نیستند و، در ضمن، روشن کرد، کدام بزرگتر است! در مثلث III شکل ۱۳، می‌توان تانژانت زاویهٔ $\alpha$ را محاسبه کرد:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{۲۱}{۸}$$

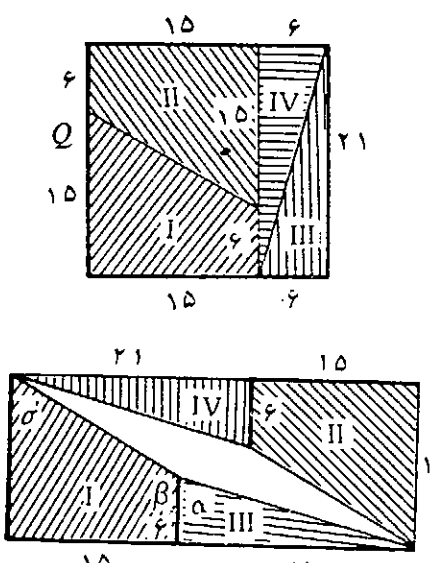
اگر در ذوزنقهٔ I، از رأس زاویهٔ $\beta$، عمودی بر قاعدهٔ بزرگتر رسم کنیم، مثلث قایم‌الزاویه‌ای به دست می‌آید که، ضلعهای مجاور به زاویهٔ قایمه در آن، برابر ۱۳ و ۵ سانتی‌متر است؛ درنتیجه

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{۱۳}{۵}$$

و چون $\frac{۱}{۴۰} = \frac{۲۱}{۸} - \frac{۱۳}{۵}$ و یا $\frac{۲۱}{۸} > \frac{۱۳}{۵}$، پس $\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}\alpha'$ و از آن‌جا

$$\alpha > \alpha' \;,\; \alpha + \beta > ۱۸۰^\circ$$

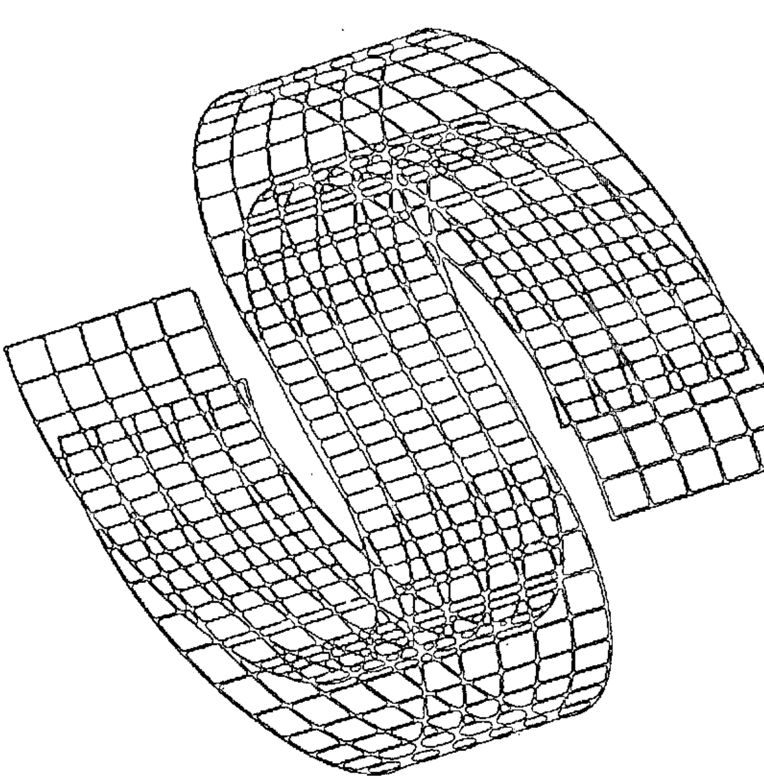
اکنون دیگر، وضع شکل ۱۳ روشن می‌شود: بخشهای I، II، III و IV را می‌توان در درون مستطیل جا داد، ولی آنها نمی‌توانند سطح مستطیل را، به‌طور کامل، بپوشانند و «شکافی» به شکل یک متوازی‌الاضلاع باریک، در طول قطر مستطیل به‌وجود می‌آورند. جای شگفتی نیست که متوجه این «شکاف» نمی‌شویم، زیرا در امتداد ۳۶/۴۰۰۰ سانتی‌متر (طول قطر مستطیل)، سطحی برابر یک سانتی‌متر مربع دارد و این کمتر از آن است که بتوان، ضمن تبدیل مربع Q به مستطیل R، متوجه آن شد.




شکل (۱۴)

اگر بخواهید شکلی داشته باشیم که این شکاف، در آن، بروشنی دیده شود، عددهای شکل ۱۳ را، شبیه شکل ۱۴، تغییر دهید، در این صورت، «شکاف» مساحتی برابر ۹۹ سانتی‌متر مربع پیدا می‌کند که در برابر ۵۴۰ سانتی‌متر مربع (مساحت مستطیل)، می‌تواند عرض اندام کند و دیده شود.

تا بعد



# رسم نمودار تابع ′f از روی نمودار تابع f

● احمد قندهاری

۱ــ ابتدا در توابع کثیرالجمله رابطهٔ بین منحنی تابع f و منحنی تابع ′f را به‌صورت شهودی بررسی می‌کنیم. سپس نتایج را بیان می‌کنیم.

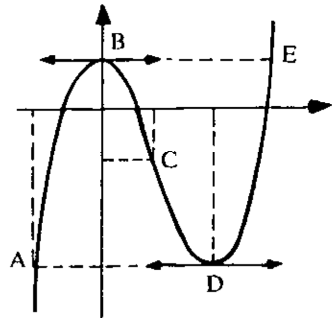
مثال: تابع f به معادله $f(x)=x^{۳}-۳x^{۲}+۱$ را رسم می‌کنیم:

طولهای اکسترمم تابع f

$$f'(x)=۳x^{۲}-۶x=۰ \Rightarrow ۳x(x-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۲ \end{cases}$$

طول نقطهٔ عطف تابع f $\quad f''(x)=۶x-۶=۰ \Rightarrow x=۱$

| x | $-\infty$ | | $-۱$ | | ۰ | | ۱ | | ۲ | | ۳ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | | + | ۰ | − | | − | ۰ | + | | + | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-۳$ | ↗ | ۱ | ↘ | $-۱$ | ↘ | $-۳$ | ↗ | ۱ | ↗ | $+\infty$ |
| | | | A | | B | | C | | D | | E | | |




حال تابع ′f به معادله $U(x)=f'(x)=۳x^{۲}-۶x$ را رسم می‌کنیم.

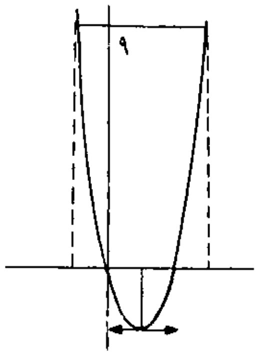
طول نقطه عطف تابع f برابر است با طول نقطه اکسترمم تابع ′f:

$$U'(x)=۶x-۶=۰ \Rightarrow x=۱$$

$$U(x)=۰ \Rightarrow ۳x^{۲}-۶x=۰ \Rightarrow ۳x(x-۲)=۰$$

طولهای اکسترمم تابع f برابر است با طولهای نقاط تقاطع تابع ′f با محور x ها: $\Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۲ \end{cases}$

| x | $-\infty$ | | $-۱$ | | ۰ | | ۱ | | ۲ | | ۳ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $U'(x)$ | | − | | − | | − | ۰ | + | | + | | + | |
| $U(x)$ | $+\infty$ | ↘ | ۹ | ↘ | ۰ | ↘ | $-۳$ | ↗ | ۰ | ↗ | ۹ | ↗ | $+\infty$ |



۱ـ به‌طوری که ملاحظه شد $x = ۰$ و $x = ۲$ طولهای نقاط اکسترمم منحنی تابع f است که برابر طولهای نقاط تقاطع منحنی تابع $f'$ با محور xهاست: پس می‌توان گفت:

نتیجه (۱): طولهای نقاط اکسترمم منحنی تابع f برابر است با طولهای نقاط تقاطع منحنی تابع $f'$ با محور xها. به شرطی که در نقاط اکسترمم منحنی تابع f، $f'(x)$ مساوی صفر باشد.

۲ـ اگر کمی توجه کنیم ملاحظه می‌کنیم که طول نقطه عطف تابع f برابر (۱) است از طرفی طول نقطه اکسترمم منحنی تابع $f'$ برابر (۱) است. پس می‌توان گفت:

نتیجه (۲): طولهای نقاط عطف منحنی تابع f برابر است با طولهای نقاط اکسترمم منحنی تابع $f'$.

۳ـ به‌طوری که در شکل تابع f ملاحظه می‌شود تقعّر قطعه منحنی $\widehat{ABC}$ به‌طرف پایین است پس $y''$ تابع f در فاصله طولهای نقاط C و A یعنی در فاصله $[-۱,۱]$ منفی است. از طرفی $y''$ تابع f همان $U'$ است پس $U'$ در این فاصله منفی است بنابراین تابع U در این فاصله اکیداً نزولی است.

نتیجه (۳): اگر تقعّر منحنی تابع f در فاصله $[a,b]$ به سمت پایین (جهت منفی محور yها) باشد، منحنی $f'$ در این فاصله اکیداً نزولی است.

۴ـ هم‌چنین می‌توان گفت که تقعّر قطعه منحنی $\widehat{CDE}$ در تابع f به سمت بالا (جهت مثبت محور yها) است. پس $y''$ در فاصله طولهای نقاط E و C یعنی در فاصله $[۱,۳]$ مثبت است. از طرفی $y''$ همان $U'$ است. پس $U'$ در این فاصله مثبت است درنتیجه تابع U در این فاصله اکیداً صعودی است.

نتیجه (۴): اگر تقعّر منحنی تابع f در فاصله $[c,d]$ به سمت بالا (جهت مثبت محور yها) باشد، منحنی $f'$ در این فاصله اکیداً صعودی است.

۵ ـ باز به شکل منحنی تابع f توجه کنیم. منحنی تابع f روی قطعه منحنی $\widehat{AB}$ اکیداً صعودی است یعنی تابع f در فاصله طولهای این دو نقطه یعنی فاصله $[-۱,۰]$ اکیداً صعودی است. پس عبارت $f'(x)$ در این فاصله مثبت یا صفر است. یعنی $f' \geq ۰$ بنابراین $U(x) \geq ۰$ درنتیجه نمودار تابع $U(x)$ در فاصله $[-۱,۰]$ بالای محور xها یا روی محور xهاست.

نتیجه (۵): اگر منحنی تابع f در فاصله $[a,b]$ اکیداً صعودی باشد. آنگاه عبارت $f'(x)$ در این فاصله مثبت یا صفر است. بنابراین نمودار $f'$ که همان نمودار تابع $U(x)$ است در این فاصله بالای محور xها یا روی محور xهاست.

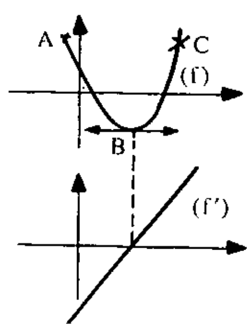
۶ ـ منحنی تابع f روی قطعه منحنی $\widehat{BCD}$ اکیداً نزولی است یعنی تابع f در فاصله طولهای نقاط D و B یعنی فاصله $[۰,۲]$ اکیداً نزولی است، پس عبارت $f'(x)$ در این فاصله منفی یا صفر است بنابراین نمودار $f'$ که همان نمودار تابع $U(x)$ است در این فاصله زیر محور xها یا روی محور xهاست.

نتیجه (۶): اگر منحنی تابع f در فاصله $[b,c]$ اکیداً نزولی باشد، آنگاه $f'(x)$ در این فاصله منفی یا صفر است. بنابراین نمودار $f'$ در این فاصله پایین محور xها یا روی محور xهاست.

با توجه به شش نتیجه فوق تمرینهای زیر را حلّ می‌کنیم.

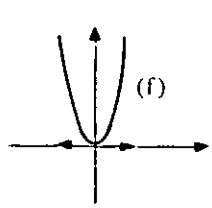
در مثالهای زیر سعی شده است که محور yها در دو نمودار تابع f و $f'$ در یک امتداد باشد تا از نتایج گفته شده بهتر بهره‌گیری شود.

مثال (۱): فرض می‌کنیم نمودار یک تابع درجه دوّم به‌صورت شکل مقابل باشد. با توجه به مطالب گفته شده، منحنی مشتق آن را رسم می‌کنیم.

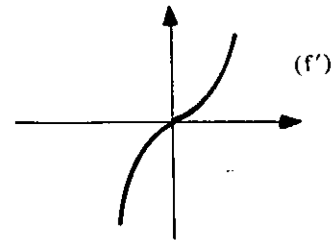



توضیح: تقعّر منحنی f به طرف بالاست پس تابع $f'$، اکیداً صعودی است و طول نقطه B (نقطه مینیمم تابع f) برابر طول نقطه تقاطع منحنی $f'$ با محور xها است. با توجه به این که تابع درجه دوّم است، مشتق آن تابعی از درجه اول خواهد شد و نمودار آن یک خط راست است.

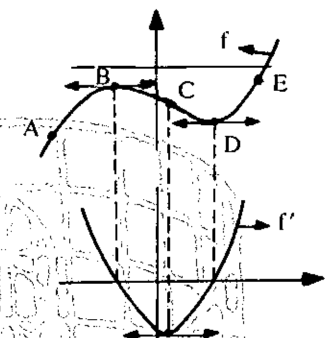
مثال (۲): فرض می‌کنیم تابع f به معادله $f(x) = x^{۲n}$، $n \geq ۲, n \in N$ باشد. نمودار این تابع به‌صورت زیر است.



تابع ′f به‌صورت یک منحنی است، و اکیداً صعودی است و از مبداء مختصات می‌گذرد.



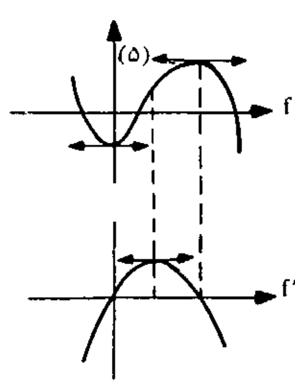

مثال (۳) : فرض می‌کنیم نمودار تابع f به‌صورت شکل مقابل باشد. با توجه به مطالب گفته شده نمودار ′f چنین است.



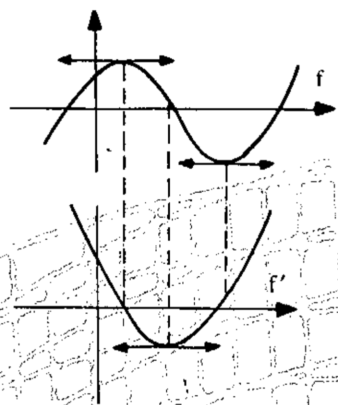

توضیح : طولهای نقاط B و D برابر طولهای نقاط تقاطع منحنی ′f با محور xهاست. نقطه C، نقطه عطف منحنی تابع f است که طول آن برابر طول اکسترمم منحنی تابع ′f است.

تقعّر قطعه منحنی $\widehat{ABC}$ به‌طرف پایین است. پس منحنی تابع ′f در فاصله طولهای نقاط C و A اکیداً نزولی (با توجه به نتیجه (۳)) و تقعّر قطعه منحنی $\widehat{CDE}$ به‌طرف بالاست پس منحنی تابع ′f در فاصله طولهای نقاط E و C اکیداً صعودی است (با توجه به نتیجه (۴)).

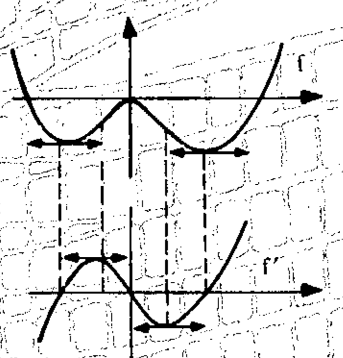
مثال (۴) : نمودار تابع f به‌صورت شکل زیر است و نمودار مشتق آن در زیر شکل منحنی f رسم شده است.




مثال (۵) : نمودار تابع f به‌صورت شکل زیر است. نمودار مشتق آن در زیر شکل منحنی f رسم شده است.




مثال (۶) : نمودار تابع f به‌صورت شکل زیر است. نمودار مشتق آن در زیر شکل منحنی f رسم شده است.

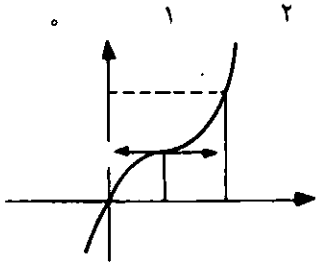



۷ــ حال تابع f به معادله $f(x)=(x-1)^3+1$ را درنظر می‌گیریم.

جدول تغییرات و نمودار تابع f را رسم می‌کنیم. ضمناً $D_f=R$ و تابع در R پیوسته است. طول نقطه عطف تابع f=ریشه مضاعف $y'=0$

$$f'(x)=3(x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$$

| x | $-\infty$ | | ۰ | | ۱ | | ۲ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | | + | | + | o | + | | + | |
| f(x) | $-\infty$ | ↗ | ۰ | ↗ | ۱ | ↗ | ۲ | ↗ | $+\infty$ |

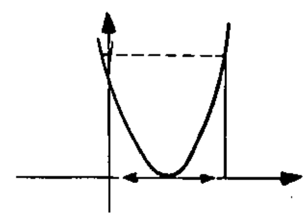


حال منحنی تابع $f'$ به معادله $U(x)=3(x-1)^2$ را درنظر می‌گیریم. این تابع هم در R پیوسته است.

طول نقطه عطف تابع f= طول اکسترمم تابع $f'$

$U'(x)=6(x-1)=0 \Rightarrow x=1$

| x | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| U' | | − | | − | $0$ | + | | + | |
| U | $+\infty$ | ↘ | $3$ | ↘ | $0$ | ↗ | | ↗ | $+\infty$ |

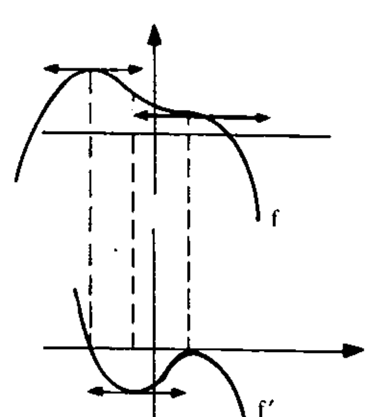


توجه کنید : $x=1$ طول نقطه عطف تابع f است. پس بنا به نتیجه (۲) $x=1$ طول نقطه اکسترمم تابع $f'$ است.

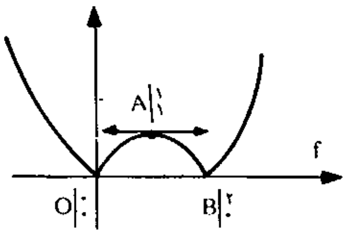
چون $x=1$ ریشه مضاعف مشتق تابع f است. پس $x=1$ طول نقطه عطفی از تابع f است که خط مماس بر منحنی در نقطه عطف موازی محور x هاست بنابراین ضریب زاویه خط مماس بر منحنی تابع f در این نقطه صفر است. از اینجا نتیجه می‌گیریم که $x=1$ طول نقطه اکسترمم تابع $f'$ است که عرض این اکسترمم صفر است.

نتیجه (۷) : اگر $x=a$ طول نقطه عطفی از تابع f باشد که خط مماس در این نقطه موازی محور xها باشد، آنگاه نقطه $M\begin{vmatrix}a\\0\end{vmatrix}$ نقطه اکسترمم منحنی تابع $f'$ است.

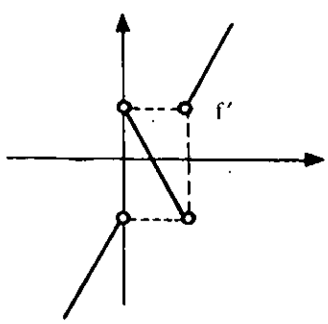
مثال (۷) : اگر نمودار تابع f به‌صورت شکل زیر شد آنگاه نمودار تابع مشتق به‌صورت زیر است.



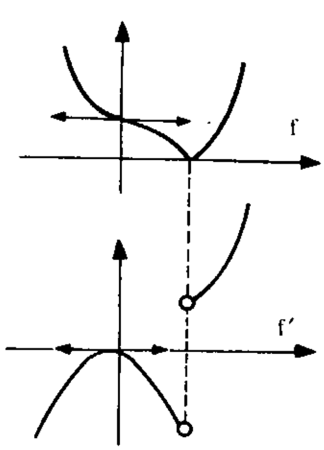

۸ ــ تابع f به معادله $f(x)=|x^2-2x|$ را درنظر می‌گیریم. نمودار این تابع چنین است.




توجه کنید : این تابع در نقطه A ماکزیمم نسبی است، لذا طول نقطه A برابر طول نقطه تقاطع منحنی $f'$ با محور x هاست. این تابع در نقاط O و B مینیمم نسبی است، نظر به‌این‌که تابع f در نقاط O و B مشتق‌پذیر نیست، لذا تابع $f'$ در نقاط به طولهای (صفر و ۲) ناپیوسته است. و درنتیجه نمودار تابع $f'$ چنین است.




مثال (۸) : اگر نمودار تابع f به‌صورت زیر باشد. آنگاه نمودار مشتق تابع f چنین است.




۹ــ تابع کسری به معادله $n\in N$ ، $y=\frac{(ax+b)^n}{(a'x+b')^n}$ را درنظر می‌گیریم.

این تابع کسری یک مجانب افقی به معادله $y=\frac{a}{a'}$ دارد. می‌خواهیم نشان دهیم،تابع $y'$ یک مجانب افقی به معادله

$y=0$ دارد. زیرا

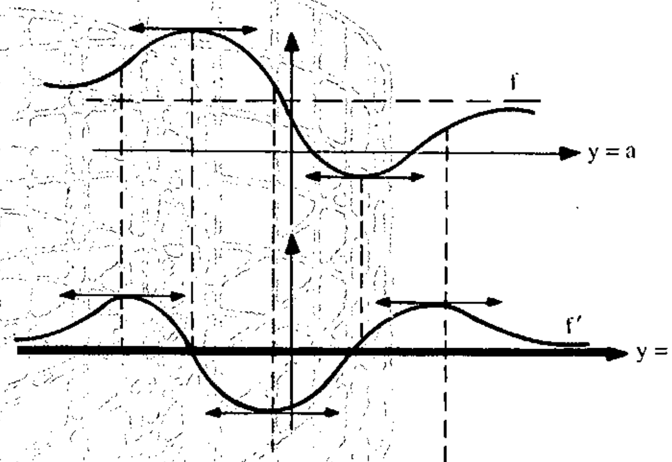
$$y'=\frac{an(ax+b)^{n-1}(a'x+b')^{n}-a'n(a'x+b')^{n-1}(ax+b)^{n}}{(a'x+b')^{2n}}$$

$$y'=\frac{an(ax+b)^{n-1}(a'x+b')-a'n(ax+b)^{n}}{(a'x+b')^{n+1}}$$

ملاحظه می‌کنیم در تابع $y'$ درجه مخرج بیشتر از درجه صورت است. پس اگر $x\to\infty$ آنگاه $y'\to 0$ پس خط $y=0$ مجانب افقی منحنی تابع $y'$ است.

نتیجه (۹) : اگر تابع f دارای مجانب افقی باشد، آنگاه، خط $y=0$ مجانب افقی منحنی تابع $f'$ خواهد بود.

مثال (۹) :اگر نمودار تابع f به‌صورت شکل زیر باشد، آنگاه، نمودار تابع $f'$ چنین است.



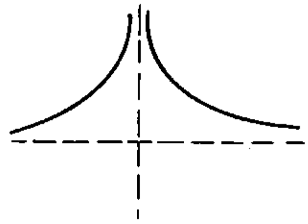

توجه : منحنی تابع f سه نقطه عطف دارد. پس منحنی تابع $f'$ سه اکسترمم دارد.

تذکر : اگر معادله تابع f به‌صورت $f(x)=\frac{g(x)}{(x-a)^{2n-1}}$ ، $n\in N$ باشد و $g(a),g'(a)\neq 0$ آنگاه خط $x=a$ معادله مجانب قائم منحنی تابع f است. نوع انفصال ایجاد شده را انفصال ساده گوییم.

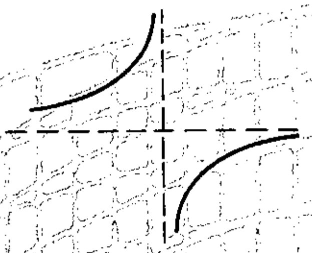
اگر $x\to a\Rightarrow f(x)\to\pm\infty$

اگر معادله تابع f به‌صورت $f(x)=\frac{g(x)}{(x-a)^{2n}}$ ، $n\in N$ باشد، و $g(a),g'(a)\neq 0$ آنگاه خط $x=a$ ، معادله مجانب قائم منحنی تابع f است. نوع انفصال ایجاد شده را انفصال مضاعف گوییم.

اگر $x\to a\Rightarrow f(x)\to+\infty$ یا $f(x)\to-\infty$




خط $x=a$ ، انفصال مضاعف نمودار است.




خط $x=a$ ، انفصال ساده نمودار است.

۱۰ــ اگر منحنی تابع f مجانب قائمی به معادله $x=a$ داشته باشد (انفصال ساده) آنگاه منحنی تابع $f'$ دارای مجانب قائمی به معادله $x=a$ خواهد شد که $x=a$ انفصال مضاعف تابع $f'$ است.

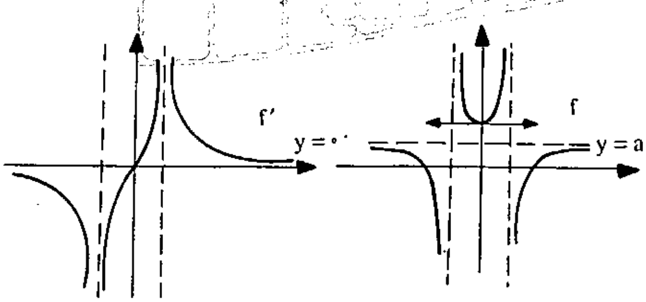
اثبات : فرض می‌کنیم معادله تابع f به‌صورت $f(x)=\frac{g(x)}{(x-a)^{2n-1}}$ ، $n\in N$ و $g(a),g'(a)\neq 0$

می‌دانیم که خط $x=a$ انفصال ساده تابع f است. پس از مشتق‌گیری نسبت به x داریم :

$$f'(x)=\frac{(x-a)g'(x)+g(x)}{(x-a)^{2n}}$$

به طوری که دیده می‌شود، منحنی تابع $f'$ دارای مجانب قائمی به معادله $x=a$ است چون توان $(x-a)$ در مخرج زوج است پس انفصال حاصل، انفصال مضاعف است.

مثال (۱۱) : اگر منحنی تابع f به‌صورت مقابل باشد آنگاه منحنی تابع $f'$ با توجه به مطالب گفته شده به‌صورت مقابل است.



توضیح : مجانبهای قائم به انفصالهای مضاعف تبدیل شده است مجانب افقی تابع که به‌صورت $y = k > ۰$ است به $y = ۰$ تبدیل شده است.

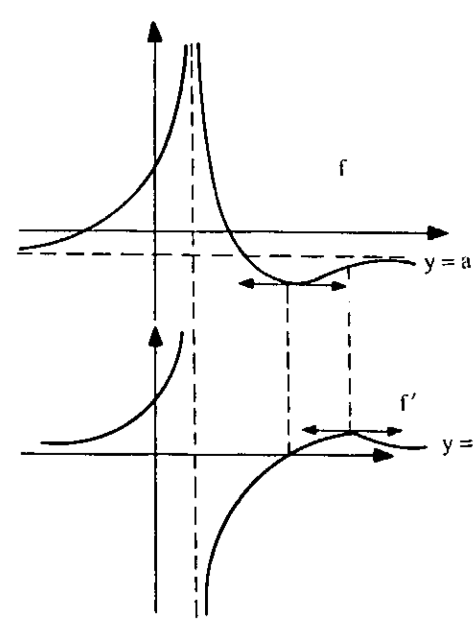
۱۱ــ اگر منحنی تابع f دارای مجانب قائمی به‌صورت $x = a$ باشد و $x = a$ انفصال مضاعف تابع f باشد، آنگاه منحنی تابع $f'$ دارای مجانب قائمی به معادله $x = a$ هست ولی انفصال حاصل در منحنی $f'$، انفصال ساده خواهد بود.

اثبات : فرض می‌کنیم معادله منحنی تابع f به‌صورت $f(x) = \frac{g(x)}{(x-a)^{۲n}}$، $n \in N$ و $g(a), g'(a) \neq ۰$، پس منحنی تابع f در $x = a$ انفصال مضاعف خواهد بود امّا پس از مشتق‌گیری نسبت به x خواهیم داشت :

$$f'(x) = \frac{(x-a)g'(x) - ۲ng(x)}{(x-a)^{۲n+۱}}$$

ملاحظه می‌شود که عامل $(x-a)$ در تابع $f'$ دارای توان فرد است. پس خط $x = a$ مجانب قائمی است که انفصال حاصل از آن، انفصال ساده خواهد بود.

مثال (۱۱) : اگر منحنی تابع f به‌صورت مقابل باشد، آنگاه منحنی تابع $f'$ چنین خواهد شد :




۱۲ــ اگر در توابع کسری، معادله مجانب مایل منحنی تابع به‌صورت $y = ax + b$ باشد، آنگاه منحنی تابع $f'$ دارای مجانب افقی به معادله $y = a$ است.

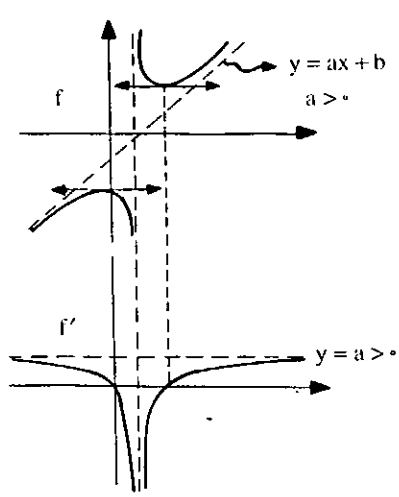
اثبات : فرض می‌کنیم معادله تابع f به‌صورت $f(x) = ax + b + \frac{g(x)}{h(x)}$ باشد، و درجه $h(x)$ حداقل یک واحد بیشتر از درجه $g(x)$ است.

اگر از معادله تابع f مشتق بگیریم خواهیم داشت :

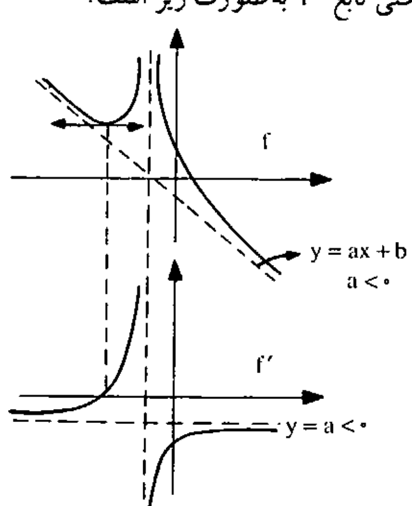
$$f'(x) = a + \frac{g'(x).h(x) + h'(x).g(x)}{(h(x))^{۲}}$$

اگر درجه $g(x)$، n و درجه $h(x)$، $n+۱$ باشد $n \in N$، آنگاه درجه صورت کسر $f'(x)$ مساوی ۲n و درجه مخرج آن $(۲n+۲)$ است. پس اگر $x \to \infty$، آنگاه حد کسر صفر می‌شود و $f'(x) = a$ حد، که همان مجانب افقی منحنی تابع $f'$ است.

مثال (۱۲) : اگر منحنی تابع f به‌صورت مقابل باشد، آنگاه منحنی تابع $f'$ به‌صورت زیر است :




مثال (۱۲)' : اگر منحنی تابع f به‌صورت زیر باشد، آنگاه منحنی تابع $f'$ به‌صورت زیر است.



۱۳ــ در توابع رادیکالی اگر $D_f$ فاصله $[a,b]$ نباشد $a,b \in R$ و $a<b$، آنگاه منحنی $f'$ مجانب افقی خواهد داشت.

همچنین اگر $x=a$ ریشه داخل رادیکال باشد، آنگاه $x=a$ مجانب قائم منحنی تابع $f'$ خواهد شد.

مثال: تابع به معادله $f(x)=\sqrt{x-a}$ را درنظر می‌گیریم.

خواهیم داشت:

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x-a}}$$

اولاً: تابع مشتق دارای مجانب افقی به معادله $f'(x)=۰$ خواهد شد زیرا:

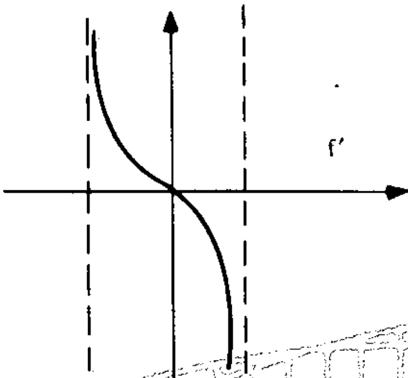
اگر $x \to +\infty \Rightarrow f'(x) \to ۰$

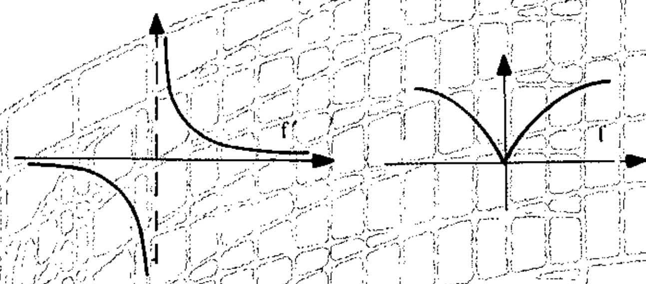
ثانیاً: $x=a$ مجانب قائم تابع $f'$ است زیرا

اگر $x \to a^+ \Rightarrow f'(x) \to +\infty$

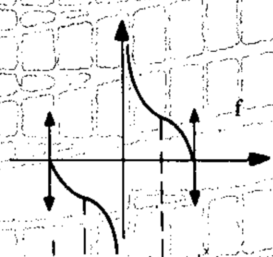
نکات گفته شده قبلی در توابع رادیکالی هم صادق است.

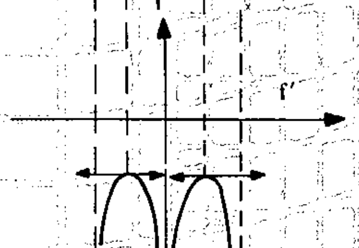
مثال: نمودار چند تابع مانند f رسم شده است. به کمک نکات بیان شده نمودار $f'$ آنها رسم خواهد شد.

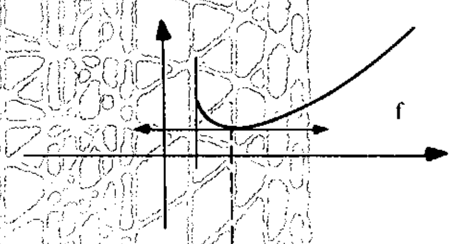


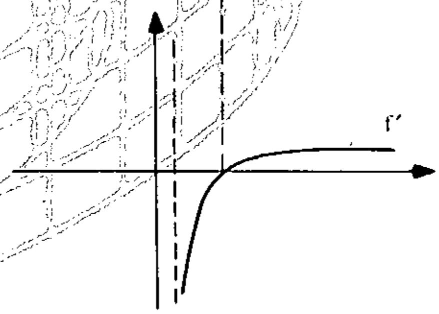



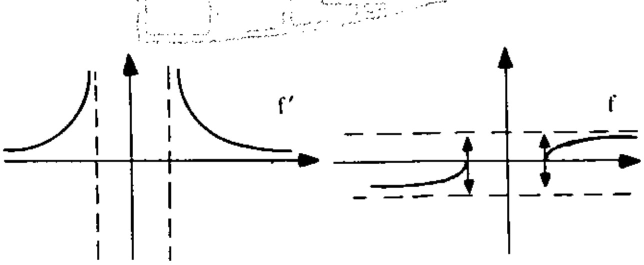


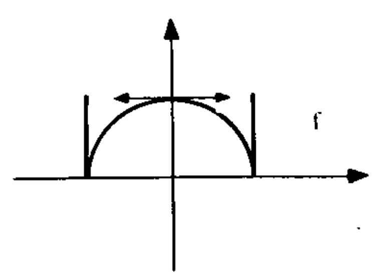


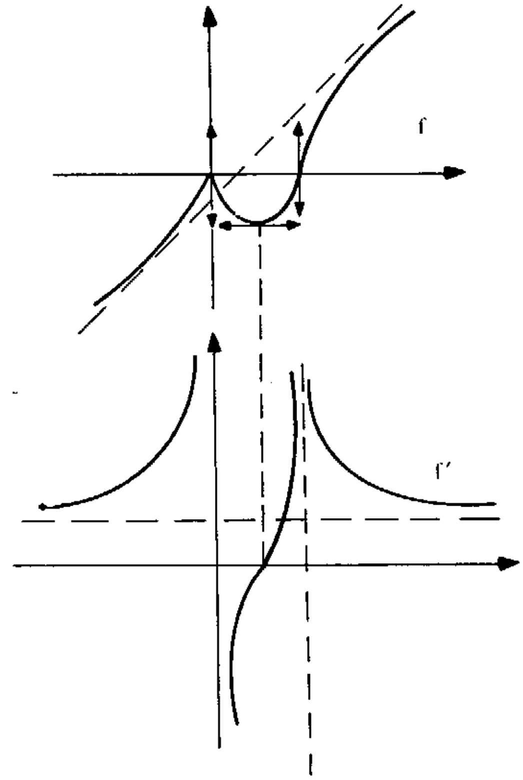



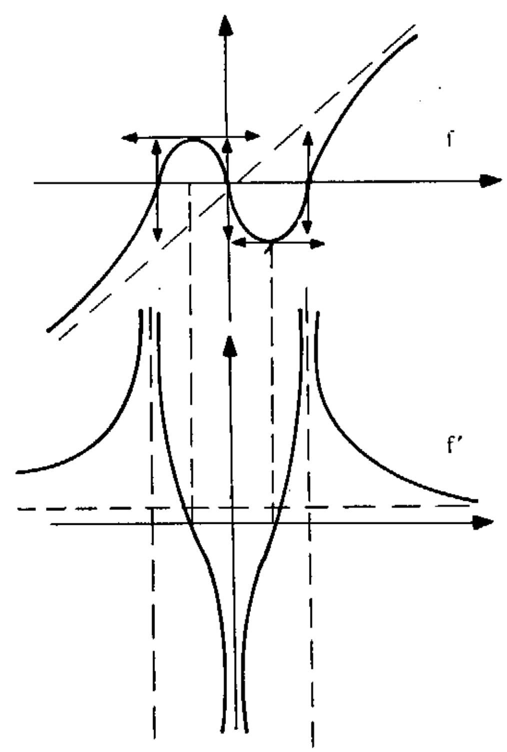



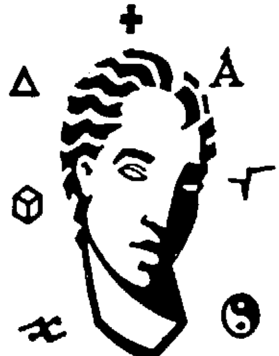





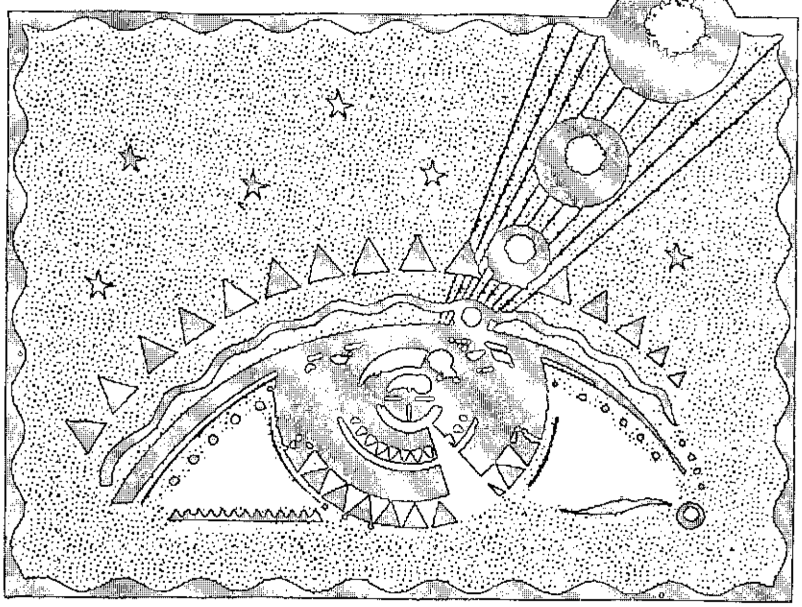
### تفریح اندیشهٔ ۱

## زاد و ولد

مسألهٔ زیر را فیبوناتچی پیزایی «Fibonacci of Pisai»، یکی از ریاضیدانهای بزرگ قرون وسطی، مطرح کرده است. راه حل این مسأله دارای پیامدهای قابل توجهی است.

«با شروع از یک جفت خرگوش، که در اولین ماه، و هر ماه بعد از آن، یک جفت خرگوش تولید می‌کنند، در پایان یک سال چند جفت خرگوش خواهیم داشت اگر هر جفت جدید در هر تولید بعدی، با شروع از دومین ماهشان، هر ماه یک جفت خرگوش تولید کنند، و مرگ و میری نیز رخ ندهد؟

جواب در صفحه ۸٦



دانش آموزان دبیرستان نظام قدیم و جدید

از کتاب :
**Mathematical Analysis**
نوشتهٔ
**K. G. Binmore**

# آموزش ترجمه متون ریاضی (۱۴)

حمیدرضا امیری

**1.10 Quadratic equations**

If $y > 0$, the equation $x^2 = y$ has two solutions. We denote the *positive* solution by $\sqrt{y}$. The *negative* solution is therefore $-\sqrt{y}$. We note again that there is no ambiguity about these symbols and that $\pm\sqrt{y}$ simply means '$\sqrt{y}$ or $-\sqrt{y}$'.

The general quadratic equation has the form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

where $a \neq 0$. Multiply through by $4a$. We obtain

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$
$$(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0$$
$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

It follows that the quadratic equation has no real solutions if $b^2 - 4ac < 0$, one real solution if $b^2 - 4ac = 0$ and two real solutions if $b^2 - 4ac > 0$. If $b^2 - 4ac \geqslant 0$,

$$2ax + b = \pm\sqrt{(b^2 - 4ac)}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

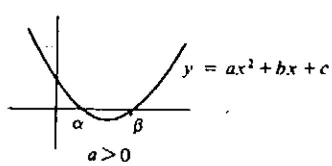
The roots of the equation $ax^2 + bx + c = 0$ are therefore

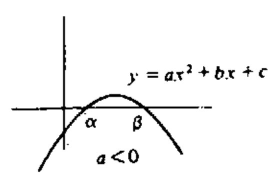
$$\alpha = \frac{-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} \quad \text{and} \quad \beta = \frac{-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

It is a simple matter to check that, for all values of $x$,

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta).$$

With the help of this formula, we can sketch the graph of the equation $y = ax^2 + bx + c$.




## ● معادلات درجهٔ دوم

درصورتی که $y > ۰$ معادلهٔ $x^{۲} = y$ دارای دو جواب است. ما جواب مثبت را با $\sqrt{y}$ نشان می‌دهیم. بنابراین جواب منفی $-\sqrt{y}$ می‌باشد. بعلاوه توجه داریم که هیچ ابهامی راجع به این نمادها وجود ندارد و $\pm\sqrt{y}$ به‌سادگی این مفهوم را می‌رساند که «$\sqrt{y}$ یا $-\sqrt{y}$».

یک معادلهٔ درجه دوم در حالت کلّی به شکل $ax^{۲} + bx + c = ۰$ می‌باشد که در آن $a \neq ۰$. با ضرب طرفین در $۴a$ خواهیم داشت :

$$۴a^{۲}x^{۲} + ۴abx + ۴ac = ۰$$
$$(۲ax + b)^{۲} - b^{۲} + ۴ac = ۰$$
$$(۲ax + b)^{۲} = b^{۲} - ۴ac$$

تساوی فوق نشان می‌دهد که معادلهٔ درجه دوم، اگر $b^{۲} - ۴ac < ۰$ فاقد جواب حقیقی بوده و اگر $b^{۲} - ۴ac = ۰$ یک جواب حقیقی دارد و اگر $b^{۲} - ۴ac > ۰$ دارای دو جواب حقیقی می‌باشد. اگر $b^{۲} - ۴ac \geq ۰$ ،

$$۲ax + b = \pm\sqrt{(b^{۲} - ۴ac)}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{(b^۲-۴ac)}}{۲a}$$

ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ عبارتند از :

$$\alpha=\frac{-b-\sqrt{(b^۲-۴ac)}}{۲a}$$

و

$$\beta=\frac{-b+\sqrt{(b^۲-۴ac)}}{۲a}$$

این موضوع (مطلب) به‌راحتی قابل بررسی است که، برای هر مقدار x

$$ax^۲+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

به کمک این فرمول، می‌توانیم نمودار معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ را رسم کنیم.

*1.11* *Example* A nice application of the work on quadratic equations described above is the proof of the important *Cauchy–Schwarz inequality*. This asserts that, if $a_1, a_2, \ldots, a_n$ and $b_1, b_2, \ldots, b_n$ are any real numbers, then

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2).$$

*Proof* For any $x$,

$$0 \leqslant (a_1x+b_1)^2+(a_2x+b_2)^2+\ldots+(a_nx+b_n)^2$$
$$= (a_1^2+\ldots+a_n^2)x^2+2(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)x+(b_1^2+\ldots+b_n^2)$$
$$= Ax^2+2Bx+C.$$

Since $y=Ax^2+2Bx+C \geqslant 0$ for *all* values of $x$, it follows that the equation $Ax^2+2Bx+C=0$ cannot have two (distinct) roots. Hence

$$(2B)^2-4AC \leqslant 0$$

i.e. $B^2 \leqslant AC$

which is what we had to prove.

**مثال:** یک کاربرد زیبا از کار روی معادلات درجه دوم که در بالا توصیف شد، اثبات نامساوی مهمی است به‌نام *نامساوی کوشی ــ شوارتز*. ادعا می‌کنیم که، اگر $a_۱,a_۲,\cdots,a_n$ و $b_۱,b_۲,\cdots,b_n$ اعداد حقیقی دلخواه باشند، آنگاه :

$$(a_۱b_۱+a_۲b_۲+\cdots+a_nb_n)^۲\le(a_۱^۲+a_۲^۲+\cdots+a_n^۲)\times(b_۱^۲+b_۲^۲+\cdots+b_n^۲)$$

**اثبات:** برای هر x داریم :

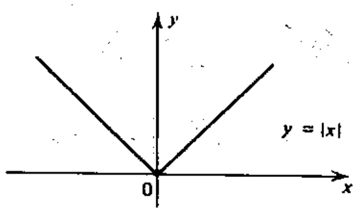
$$۰\le(a_۱x+b_۱)^۲+(a_۲x+b_۲)^۲+\cdots+(a_nx+b_n)^۲$$
$$=(a_۱^۲+\cdots+a_n^۲)x^۲+۲(a_۱b_۱+\cdots+a_nb_n)x+(b_۱^۲+\cdots+b_n^۲)$$
$$=Ax^۲+۲Bx+C$$

چون برای همهٔ مقادیر x، $y=Ax^۲+۲Bx+C\ \ge ۰$، این نتیجه حاصل می‌شود که معادلهٔ $Ax^۲+۲Bx+c=۰$ نمی‌تواند دو ریشهٔ (متمایز) داشته باشد. بنابراین $(۲B)^۲-۴AC\le۰$ یعنی $B^۲\le AC$ که این (نامساوی) اثبات را برای ما حاصل می‌کند.

**1.14 Modulus**

Suppose that $x$ is a real number. Its *modulus* (or *absolute value*) $|x|$ is defined by

$$|x| = \begin{cases} x & (x \geqslant 0) \\ -x & (x < 0). \end{cases}$$




Thus $|3|=3$, $|-6|=6$ and $|0|=0$. Obviously $|x| \geqslant 0$ for all values of $x$.
It is sometimes useful to note that $|x|=\sqrt{x^2}$.

*1.15* *Theorem* For any real number $x$,

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|.$$

*Proof* Either $x \geqslant 0$ or $x < 0$. In the first case, $-|x| \leqslant 0 \leqslant x = |x|$. In the second case, $-|x| = x < 0 < |x|$.

*1.16* *Theorem* For any real numbers $a$ and $b$

$$|ab| = |a|.|b|$$

*Proof* The most elegant proof is the following.

$$|ab| = \sqrt{((ab)^2)} = \sqrt{(a^2b^2)} = \sqrt{(a^2)}.\sqrt{(b^2)} = |a|.|b|.$$

## ● قدر مطلق

فرض کنیم x یک عدد حقیقی باشد. قدر مطلق x($|x|$)را به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$|x|=\begin{cases}x & (x\ge۰)\\ -x & (x<۰)\end{cases}$$

بنابراین $۳=|۳|$، $۶=|-۶|$ و $۰=|۰|$. بدیهی است که برای هر مقدار x، $|x|\ge۰$.

در بسیاری اوقات مفید است که از تساوی $|x|=\sqrt{x^۲}$ استفاده کنیم.

**۱.۱۵ قضیه:** برای هر عدد حقیقی مانند x داریم:

$$-|x|\le x\le|x|$$

**اثبات:** دو حالت $x\ge۰$ یا $x<۰$ (را درنظر می‌گیریم). در حالت اول، $-|x|\le۰\le x=|x|$ . در حالت دوم ، $-|x|=x<۰<|x|$ .

**۱.۱۶ قضیه:** برای هر دو عدد حقیقی مانند a و b،

$$|ab|=|a|.|b|$$

**اثبات:** زیباترین اثبات در زیر آمده است :

$$|ab|=\sqrt{((ab)^۲)}=\sqrt{(a^۲b^۲)}=\sqrt{a^۲}.\sqrt{b^۲}=|a|.|b|$$

# رادیکال

## (قسمت دوم)

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

### ◄ اعمال روی عددها و عبارتهای رادیکالی

**۱) ضرب عددها و عبارتهای رادیکالی**

می‌دانیم $20=4\times5=\sqrt{16}\times\sqrt{25}$ و $20=\sqrt{400}$، بنابراین:

$$\sqrt{16}\times\sqrt{25}=\sqrt{16\times25}=\sqrt{400}=20$$

همچنین:

$$\sqrt[3]{-64}=-4\ ,\ \sqrt[3]{-8}\times\sqrt[3]{8}=(-2)\times2=-4$$

بنابراین:

$$\sqrt[3]{-8}\times\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{(-8)\times8}=\sqrt[3]{-64}=-4$$

**به‌طور کلی: برای عددهای حقیقی a و b و عدد طبیعی n بزرگتر یا مساوی ۲ ($n\geq2$)، اگر n عددی فرد باشد:**

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab} \qquad (1)$$

**و اگر n زوج باشد، a و b باید بزرگتر یا مساوی صفر باشند:**

$$\sqrt[n]{|a|}\times\sqrt[n]{|b|}=\sqrt[n]{|ab|}$$

مثال ۸: حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

۱) $\sqrt{2}\times\sqrt{18}$

۲) $\sqrt{14}\times\sqrt{7}\times\sqrt{2}$

۳) $\sqrt[3]{9-\sqrt{17}}\times\sqrt[3]{9+\sqrt{17}}$

۴) $\sqrt{\frac{2}{3}}\times\sqrt{6}\times\sqrt{\frac{5}{7}}\times\sqrt{14}\times\sqrt{10}$

۵) $\sqrt[5]{3}\times\sqrt[5]{9}\times\sqrt[5]{\frac{3}{5}}\times\sqrt[5]{\frac{5}{9}}\times\sqrt[5]{27}$

۶) $\sqrt[4]{10-\sqrt{19}}\times\sqrt[4]{10+\sqrt{19}}$

۷) $\sqrt[3]{a^2+b^2}\times\sqrt[3]{a^4+2a^2b^2+b^4}$

۸) $\sqrt[5]{x}\times\sqrt[5]{x^2}\times\sqrt[5]{x^2}$

۹) $\sqrt[3]{a^2bc}\times\sqrt[3]{ab^2c}\times\sqrt[3]{c}$

۱۰) $\sqrt[5]{a^2b^3}\times\sqrt[5]{a^3b^2}$

۱۱) $\sqrt[7]{a^2b^3c}\times\sqrt[7]{a^3b^2c^4}\times\sqrt[7]{a^2b^2c^2}$

۱۲) $\sqrt[3]{a-b}\times\sqrt[3]{a^2+ab+b^2}\times\sqrt[3]{(a^3-b^3)^2}$

حل:

۱) $\sqrt{2}\times\sqrt{18}=\sqrt{2\times18}=\sqrt{36}=6$

۲) $\sqrt{14}\times\sqrt{7}\times\sqrt{2}=\sqrt{14\times7\times2}=\sqrt{14\times14}=\sqrt{14^2}=14$

۳) $\sqrt[3]{9-\sqrt{17}}\times\sqrt[3]{9+\sqrt{17}}$

$$=\sqrt[3]{(9-\sqrt{17})(9+\sqrt{17})}$$

$$=\sqrt[3]{9^2-17}=\sqrt[3]{81-17}=\sqrt[3]{64}=4$$

۴) $\sqrt{\frac{2}{3}}\times\sqrt{6}\times\sqrt{\frac{5}{7}}\times\sqrt{14}\times\sqrt{10}$

$$=\sqrt{\frac{2}{3}\times 6\times\frac{5}{7}\times 14\times 10}=\sqrt{2\times2\times5\times2\times10}=\sqrt{20^2}=20$$

۵) $\sqrt[5]{3}\times\sqrt[5]{9}\times\sqrt[5]{\frac{3}{5}}\times\sqrt[5]{\frac{5}{9}}\times\sqrt[5]{27}$

$=\sqrt[5]{3\times9\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{9}\times27}=\sqrt[5]{3\times3^2\times3\times3}=\sqrt[5]{3^5}=3$

۶) $\sqrt[4]{10-\sqrt{19}}\times\sqrt[4]{10+\sqrt{19}}=\sqrt[4]{(10-\sqrt{19})(10+\sqrt{19})}$

$=\sqrt[4]{100-19}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$

۷) $\sqrt[3]{a^2+b^2}\times\sqrt[3]{a^4+2a^2b^2+b^4}$

$=\sqrt[3]{(a^2+b^2)(a^4+2a^2b^2+b^4)}$

$=\sqrt[3]{(a^2+b^2)(a^2+b^2)^2}=\sqrt[3]{(a^2+b^2)^3}=a^2+b^2$

۸) $\sqrt[5]{x}\times\sqrt[5]{x^2}\times\sqrt[5]{x^2}=\sqrt[5]{x\times x^2\times x^2}=\sqrt[5]{x^5}=x$

۹) $\sqrt[3]{a^2bc}\times\sqrt[3]{ab^2c}\times\sqrt[3]{c}=\sqrt[3]{a^2bc\times ab^2c\times c}$

$=\sqrt[3]{a^3b^3c^3}=\sqrt[3]{(abc)^3}=abc$

۱۰) $\sqrt[5]{a^2b^3}\times\sqrt[5]{a^3b^2}=\sqrt[5]{a^2b^3\times a^3b^2}$

$=\sqrt[5]{a^5b^5}=\sqrt[5]{(ab)^5}=ab$

۱۱) $\sqrt[7]{a^2b^3c}\times\sqrt[7]{a^3b^2c^4}\times\sqrt[7]{a^2b^2c^2}$

$=\sqrt[7]{a^2b^3c\times a^3b^2c^4\times a^2b^2c^2}$

$=\sqrt[7]{a^7b^7c^7}=\sqrt[7]{(abc)^7}=abc$

۱۲) $\sqrt[3]{a-b}\times\sqrt[3]{a^2+ab+b^2}\times\sqrt[3]{(a^3-b^3)^2}$

$=\sqrt[3]{(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^3-b^3)^2}=\sqrt[3]{(a^3-b^3)^3}=a^3-b^3$

توجه داشته باشید که از رابطهٔ (۱) می‌توان برای ساده کردن عددها و عبارتهای رادیکالی و یا بیرون آوردن عواملی از زیر رادیکال استفاده کرد:

مثال ۹:

۱) $\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

۲) $\sqrt[5]{64}=\sqrt[5]{32\times2}=\sqrt[5]{32}\times\sqrt[5]{2}=\sqrt[5]{2^5}\times\sqrt[5]{2}=2\sqrt[5]{2}$

۳) $\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{8\times3}=\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3}$

۴) $\sqrt[4]{243}=\sqrt[4]{81\times3}=\sqrt[4]{81}\times\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{3^4}\times\sqrt[4]{3}=3\sqrt[4]{3}$

۵) $\sqrt[3]{(a+b)^4}=\sqrt[3]{(a+b)^3(a+b)}$

$=\sqrt[3]{(a+b)^3}\times\sqrt[3]{(a+b)}=(a+b)\sqrt[3]{a+b}$

۶) $\sqrt[5]{a^7b^6c^{10}}=\sqrt[5]{a^5.a^2.b^5.b.(c^2)^5}$

$=\sqrt[5]{a^5b^5(c^2)^5}\times\sqrt[5]{a^2b}=abc^2\sqrt[5]{a^2b}$

۷) $\sqrt[70]{x^{74}y^{75}}=\sqrt[70]{x^{70}.x^4.y^{70}.y^5}$

$=\sqrt[70]{x^{70}}\times\sqrt[70]{y^{70}}\times\sqrt[70]{x^4y^5}$

با فرض $x\geq 0$ و $y\geq 0$، می‌توان نوشت:

$$\sqrt[70]{x^{74}y^{75}}=xy\sqrt[70]{x^4y^5}$$

(زیرا از داخل رادیکال با فرجهٔ زوج عدد منفی بیرون نمی‌آید)

۸) $\sqrt[6]{x^{14}y^{26}z^{28}}=\sqrt[6]{x^{12}.x^2.y^{24}.y^2.z^{24}.z^4}$

$=\sqrt[6]{x^{12}y^{24}z^{24}}\times\sqrt[6]{x^2y^2z^4}$

$=\sqrt[6]{(x^2)^6(y^4)^6(z^4)^6}\times\sqrt[6]{x^2y^2z^4}=x^2y^4z^4\sqrt[6]{x^2y^2z^4}$

با توجه به‌تساویهای اخیر به‌این قانون پی می‌بریم که اگر بخواهیم در عبارت $2\sqrt{3}$ عدد ۲ که ضریب $\sqrt{3}$ است را به داخل رادیکال ببریم، باید آن را به توان ۲ (فرجهٔ رادیکال) برسانیم و سپس آن را در عدد زیر رادیکال ضرب کنیم.

مثال ۱۰:

۱) $2\sqrt{3}=\sqrt{2^2\times3}=\sqrt{4\times3}=\sqrt{12}$

۲) $2\sqrt[5]{2}=\sqrt[5]{2^5\times2}=\sqrt[5]{32\times2}=\sqrt[5]{64}$

۳) $2\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{2^3\times3}=\sqrt[3]{8\times3}=\sqrt[3]{24}$

۴) $3\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{3^4\times3}=\sqrt[4]{81\times3}=\sqrt[4]{243}$

۵) $-5\sqrt{2}=-\sqrt{5^2\times2}=-\sqrt{50}$

۶) $-2\sqrt[4]{3}=-\sqrt[4]{2^4\times3}=-\sqrt[4]{48}$

۷) $x\sqrt[5]{x^3}=\sqrt[5]{x^5x^3}=\sqrt[5]{x^8}$

۸) $xy^2\sqrt[7]{x^3y^4}=\sqrt[7]{(xy^2)^7x^3y^4}$

$=\sqrt[7]{x^7y^{14}x^3y^4}=\sqrt[7]{x^{10}y^{18}}$

۹) $-a^2\sqrt[4]{2a^2}=-\sqrt[4]{(a^2)^4(2a^2)}=-\sqrt[4]{a^8(2a^2)}=-\sqrt[4]{2a^{10}}$

توجه کنید که در عبارتهای $-5\sqrt{2}$ و $-2\sqrt[4]{3}$ و $-a^2\sqrt[4]{2a^2}$ نمی‌توان $(-5)$ و $(-2)$ و $(-a^2)$ را به‌زیر رادیکال ببریم. زیرا فرجهٔ رادیکالها زوج است و می‌دانیم از داخل رادیکال با فرجهٔ زوج عدد منفی بیرون نمی‌آید:

$$-5\sqrt{2}\neq\sqrt{(-5)^2(2)}\ ,\ -2\sqrt[4]{3}\neq\sqrt[4]{(-2)^4(3)}$$

همچنین اگر a عدد حقیقی مخالف صفر باشد، داریم:

$$-a^2\sqrt[4]{2a^2}\neq\sqrt[4]{(-a^2)^4(2a^2)}\qquad (a\in\mathbb{R}-\{0\})$$

به‌طور کلی: برای عددهای حقیقی a و b و عدد طبیعی n بزرگتر یا مساوی ۲ $(n\geq 2)$، اگر n عددی فرد باشد:

$$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}\qquad (2)$$

و اگر n عددی زوج و $b\geq 0$ باشد:

$$\sqrt[n]{a^n b}=|a|\sqrt[n]{b}$$

**۲) تقسیم عددها و عبارتهای رادیکالی**

می‌دانیم $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}=\frac{3}{2}$ ، $\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$ ، بنابراین:

$$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$$

و همچنین $\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}}=\frac{3}{4}$ و $\sqrt[3]{\frac{27}{64}}=\frac{3}{4}$ ، بنابراین:

$$\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}}=\sqrt[3]{\frac{27}{64}}=\frac{3}{4}$$

به‌طور کلی: برای عددهای حقیقی a و b و عدد طبیعی n بزرگتر یا مساوی ۲ $(n\geq 2)$ و $b\neq 0$، اگر n عددی فرد باشد:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\qquad (3)$$

و اگر n عددی زوج و $\frac{a}{b}\geq 0$ باشد: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}$

**۳) جمع جبری عددها و عبارتهای رادیکالی**

با مقایسهٔ تساوی $7x+4x=(7+4)x=11x$ و $7\sqrt{2}+4\sqrt{2}=(7+4)\sqrt{2}=11\sqrt{2}$ ، و تساوی

$$7y-4y=(7-4)y=3y$$

و

$$7\sqrt[7]{a}-4\sqrt[7]{a}=(7-4)\sqrt[7]{a}=3\sqrt[7]{a}$$

ملاحظه می‌شود جمع جبری عددها و عبارتهای رادیکالی شبیه جمع جبری یک جمله‌ایها است. یعنی جمع جبری عددها و عبارتهای رادیکالی را وقتی می‌توان به صورت ساده نوشت که عدد فرجهٔ رادیکال و عبارت زیر رادیکال با هم مساوی (و یا عددها و عبارتهای رادیکالی با هم معادل) باشند.

مثال ۱۲ : حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

۱) $5\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4\sqrt{2}+2\sqrt{2}-\sqrt{2}$

۲) $7\sqrt[4]{4}-5\sqrt{2}+4\sqrt{2}-4\sqrt[4]{4}$

۳) $2\sqrt[15]{8}-3\sqrt[5]{2}-4\sqrt[15]{8}+5\sqrt[5]{2}$

۴) $5\sqrt[3]{5}+2\sqrt[3]{5}-14\sqrt[9]{125}+4\sqrt[3]{5}+\sqrt[9]{125}$

حل :

۱) $5\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4\sqrt{2}+2\sqrt{2}-\sqrt{2}$

$$=(5+3-4+2-1)\sqrt{2}=5\sqrt{2}$$

۲) $7\sqrt[4]{4}-5\sqrt{2}+4\sqrt{2}-4\sqrt[4]{4}$

$$=(7-4)\sqrt[4]{4}+(-5+4)\sqrt{2}$$

$$=3\sqrt[4]{4}-\sqrt{2}$$

با توجه به معادل بودن عدد $\sqrt[4]{4}$ با $\sqrt{2}$ ، یعنی :

$$\sqrt[4]{4}=\sqrt[4]{2^2}=\sqrt{2}$$

داریم :

$$3\sqrt[4]{4}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}-\sqrt{2}=(3-1)\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

۳) $2\sqrt[15]{8}-3\sqrt[5]{2}-4\sqrt[15]{8}+5\sqrt[5]{2}$

$$=(2-4)\sqrt[15]{8}+(-3+5)\sqrt[5]{2}$$

$$=-2\sqrt[15]{8}+2\sqrt[5]{2}$$

با توجه به معادل بودن عدد $\sqrt[15]{8}$ با $\sqrt[5]{2}$ ، یعنی :

$$\sqrt[15]{8}=\sqrt[15]{2^3}=\sqrt[5]{2}$$

داریم :

$$-2\sqrt[15]{8}+2\sqrt[5]{2}=-2\sqrt[5]{2}+2\sqrt[5]{2}=(-2+2)\sqrt[5]{2}=(0)\sqrt[5]{2}=0$$

۴) $5\sqrt[3]{5}+2\sqrt[3]{5}-14\sqrt[9]{125}+4\sqrt[3]{5}+\sqrt[9]{125}$

$$=(5+2+4)\sqrt[3]{5}+(-14+1)\sqrt[9]{125}$$

$$=11\sqrt[3]{5}-13\sqrt[9]{125}$$

با توجه به معادل بودن عدد $\sqrt[9]{125}$ با $\sqrt[3]{5}$، یعنی :

$$\sqrt[9]{125}=\sqrt[9]{5^3}=\sqrt[3]{5}$$

داریم :

$$11\sqrt[3]{5}-13\sqrt[9]{125}=11\sqrt[3]{5}-13\sqrt[3]{5}$$

$$=(11-13)\sqrt[3]{5}=-2\sqrt[3]{5}$$

توجه داشته باشید که در جمع جبری عبارتهای رادیکالی ابتدا باید عواملی که توان کامل فرجهٔ رادیکال هستند را از زیر رادیکال بیرون آورد و سپس عبارت را ساده کرد.

مثال ۱۳ : حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

$$1)\ \sqrt{54}+3\sqrt{6}-5\sqrt{24}+4\sqrt{6}-\sqrt{24}+\sqrt[4]{36}$$

$$2)\ 2\sqrt[3]{16}-7\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{54}+4\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{16}+\sqrt[6]{4}$$

$$3)\ 3\sqrt[4]{405}+5\sqrt[4]{5}-2\sqrt[4]{80}+4\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{405}+\sqrt[4]{80}$$

$$4)\ \sqrt[3]{a^7}-2\sqrt[3]{a^4}+5\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{a^{10}}+3\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^{10}}-\sqrt[3]{a^7}$$

$$5)\ \sqrt[5]{a^6b^6}-2b\sqrt[5]{a^6b}-5\sqrt[5]{a^6b^6}+3a\sqrt[5]{ab^6}+3ab\sqrt[5]{ab}$$

حل :

$$1)\ \sqrt{54}+3\sqrt{6}-5\sqrt{24}+4\sqrt{6}-\sqrt{24}+\sqrt[4]{36}$$

$$=\sqrt{9\times 6}+(3+4)\sqrt{6}+(-5-1)\sqrt{4\times 6}+\sqrt[4]{36}$$

$$=3\sqrt{6}+7\sqrt{6}-6\times 2\sqrt{6}+\sqrt[4]{36}$$

$$=(3+7-12)\sqrt{6}+\sqrt[4]{36}$$

$$=-2\sqrt{6}+\sqrt[4]{36}$$

با توجه به معادل بودن عدد $\sqrt[4]{36}$ با $\sqrt{6}$، یعنی :

$$\sqrt[4]{36}=\sqrt[4]{6^2}=\sqrt{6}$$

داریم :

$$-2\sqrt{6}+\sqrt[4]{36}=-2\sqrt{6}+\sqrt{6}=(-2+1)\sqrt{6}=-\sqrt{6}$$

$$2)\ 2\sqrt[3]{16}-7\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{54}+4\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{16}+\sqrt[6]{4}$$

$$=(2+5-1)\sqrt[3]{16}+(-7+4)\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{54}+\sqrt[6]{4}$$

$$=6\sqrt[3]{2^3\times 2}-3\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3^3\times 2}+\sqrt[6]{4}$$

$$=6\times 2\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{4}$$

$$=(12-3-3)\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{4}$$

$$=6\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{4}$$

با توجه به معادل بودن عدد $\sqrt[6]{4}$ با $\sqrt[3]{2}$، یعنی :

$$\sqrt[6]{4}=\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[3]{2}$$

داریم :

$$6\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{4}=6\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}=(6+1)\sqrt[3]{2}=7\sqrt[3]{2}$$

$$3)\ 3\sqrt[4]{405}+5\sqrt[4]{5}-2\sqrt[4]{80}+4\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{405}+\sqrt[4]{80}$$

$$=(3-1)\sqrt[4]{405}+(5+4)\sqrt[4]{5}+(-2+1)\sqrt[4]{80}$$

$$=2\sqrt[4]{3^4\times 5}+9\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2^4\times 5}$$

$$=2\times 3\sqrt[4]{5}+9\sqrt[4]{5}-2\sqrt[4]{5}$$

$$=(6+9-2)\sqrt[4]{5}$$

$$=13\sqrt[4]{5}$$

$$4)\ \sqrt[3]{a^7}-2\sqrt[3]{a^4}+5\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{a^{10}}+3\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^{10}}-\sqrt[3]{a^7}$$

$$=(1-1)\sqrt[3]{a^7}+(-2+5+3)\sqrt[3]{a^4}+(-1+1)\sqrt[3]{a^{10}}$$

$$=(0)\sqrt[3]{a^7}+6\sqrt[3]{a^3.a}+(0)\sqrt[3]{a^{10}}$$

$$=6a\sqrt[3]{a}$$

$$5)\ \sqrt[5]{a^6b^6}-2b\sqrt[5]{a^6b}-5\sqrt[5]{a^6b^6}+3a\sqrt[5]{ab^6}+3ab\sqrt[5]{ab}$$

$$=(1-5)\sqrt[5]{a^5b^5.ab}-2b\sqrt[5]{a^5.ab}+3a\sqrt[5]{ab^5.b}+3ab\sqrt[5]{ab}$$

$$=-4ab\sqrt[5]{ab}-2ab\sqrt[5]{ab}+3ab\sqrt[5]{ab}+3ab\sqrt[5]{ab}$$

$$=(-4-2+3+3)ab\sqrt[5]{ab}$$

$$=(0)ab\sqrt[5]{ab}$$

$$=0$$

* تذکر : جمع دو عدد $\sqrt{5}$ و $\sqrt{3}$ به‌صورت $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ نوشته می‌شود. همچنین دو عدد $\sqrt{2}$ و $\sqrt[3]{2}$ به صورت $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ نوشته می‌شود.

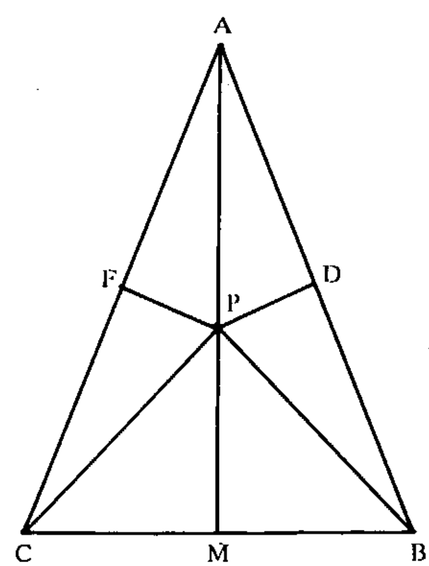
# در اظهارنظر شتاب نکنیم

● دکتر احمد شرف‌الدین

سخندان پرورده پیرکهن          بیاندیشد آنگه بگوید سخن
(سعدی)

۱ ـ در هر مثلث قائم‌الزاویه عمودمنصفهای دو ساق و میانه‌ای که رأس را به‌وسط قاعده وصل می‌کند در یک نقطه متقاربند.

برهان. مثلث متساوی‌الساقین ABC $(\overline{AB}=\overline{AC})$ را درنظر می‌گیریم. از نقطه A به‌نقطه m وسط قاعده BC وصل می‌کنیم، میانه AM حاصل می‌شود. از نقطه D وسط ساق AB عمودی بر این ساق اخراج می‌کنیم (عمودمنصف پاره‌خط AB) و نقطه برخورد آن را با خط AM، به P نشان می‌دهیم. از نقطه F وسط ضلع AC عمودی بر آن اخراج می‌کنیم (عمودمنصف ساق AC) و این عمود خط AM را در همان نقطه P قطع می‌کند زیرا شکل نسبت به‌خط AM متقارن است.




۲ ـ مثلث ABC را که در آن $\overline{AB}\neq\overline{AC}$ است درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که عمودمنصفهای دو ضلع AB و AC و میانه AM یکدیگر را در یک نقطه که آن را P می‌نامیم قطع کنند. چون $\overline{AB}\neq\overline{AC}$ است پس $\angle AMB\neq\angle AMC$. چون نقطه P بر عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد پس:

$$(1)\ \overline{PA}=\overline{PB}$$

چون نقطه P بر عمودمنصف پاره‌خط AC قرار دارد پس:

$$(2)\ \overline{PA}=\overline{PC}$$

از مقایسه (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$(3)\ \overline{PB}=\overline{PC}$$

پس مثلث PBC متساوی‌الساقین است. می‌دانیم که در مثلث متساوی‌الساقین میانه‌ای که رأس را به‌وسط قاعده وصل می‌کند بر قاعده عمود است. اما در مسألهٔ حاضر، میانه PM بر قاعده BC عمود نیست (تناقض). پس باید قضاوت کنیم که فرض ما صحیح نیست و چنین حکم می‌کنیم:

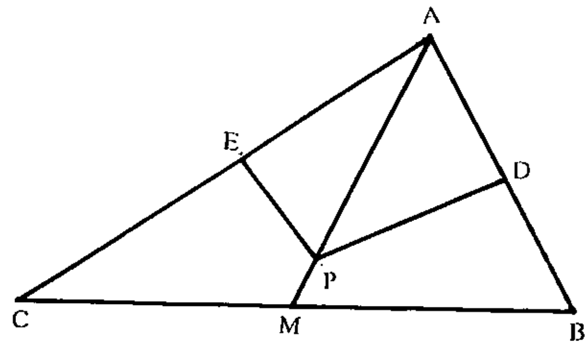
اگر در مثلثی طولهای دو ضلع نامساوی باشند ممکن نیست عمودمنصفهای آن دو ضلع و میانه ضلع سوم همرس (متقارب) باشند.

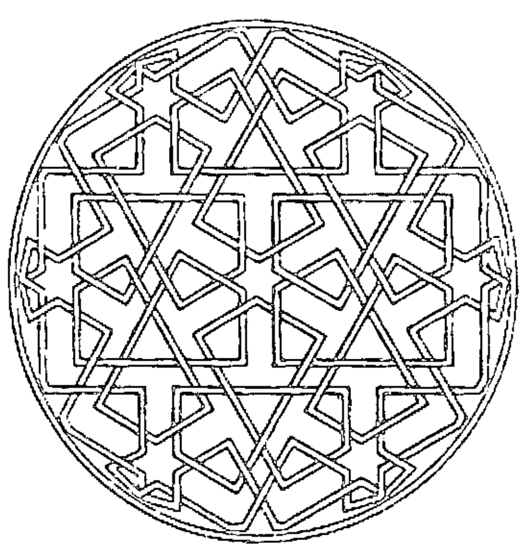
**چه خوب است که در اظهارنظر شتاب نکنیم**

تا نیک ندانی که سخن عین صواب است
باید که به‌گفتن دهن از هم نگشایی

اگر اندکی فکر کنیم و از اظهارنظر عجولانه اجتناب کنیم

به‌قضاوت صحیح نایل می‌آییم. می‌گوییم چون $\overline{PB}=\overline{PC}$ پس خط PM عمود بر خط BC است. ولی در مسألهٔ حاضر خط PM بر خط BC عمود نیست. لذا زاویه خط PM، با خط BC نامعین است بنابراین نقطه P باید بر نقطه M منطبق باشد (زاویه خط MX با خط MY هنگامی که نقطه Y بر نقطه M منطبق باشد نامعین است زیرا وقتی نقطه Y بر نقطه M منطبق باشد امتداد خط MY نامعین است). هنگامی که نقطه P بر نقطه M وسط ضلع BC منطبق باشد زاویهٔ BAC قایمه می‌شود (خط DM که وسط ضلع AB را به‌وسط ضلع BC وصل می‌کند موازی خط AC است. چون $MD\perp AB$ پس $AC\perp AB$).



## مسائل مسابقه‌ای

۱ ــ مخرج کسر زیر را گویا کنید.

$$\frac{۲}{\sqrt[۳]{۷-۵\sqrt[۴]{۴}}+\sqrt[۵]{۲\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}}+\sqrt[۶]{۴}+\left(\sqrt[۳۰]{۲}\right)^{۹}-۲^{۰/۳}-\left(\sqrt[۲۰]{۸}\right)^{۲}}$$

۲ ــ برای معادلهٔ سیال زیر یک دسته جواب صحیح و یک دسته جواب گویا بیابید.

$$۴xy-x-y=z^{۲}$$

(این معادله مربوط به قضیهٔ اویلر است:
ثابت کنید معادله در مجموعهٔ اعداد طبیعی جواب ندارد.)

۳ ــ حد زیر را برای هر عدد طبیعی n حساب کنید.

$$\lim_{x\to ۰^{+}}\left(\frac{۱}{x^{n}}-\frac{۱}{\sin^{n}x}\right)^{n}$$

**روی پاکت نامه حتماً قیدکنید «مربوط به‌مسائل‌مسابقهٔ شمارهٔ ...»**

**● سیدمحمدرضا هاشمی موسوی**

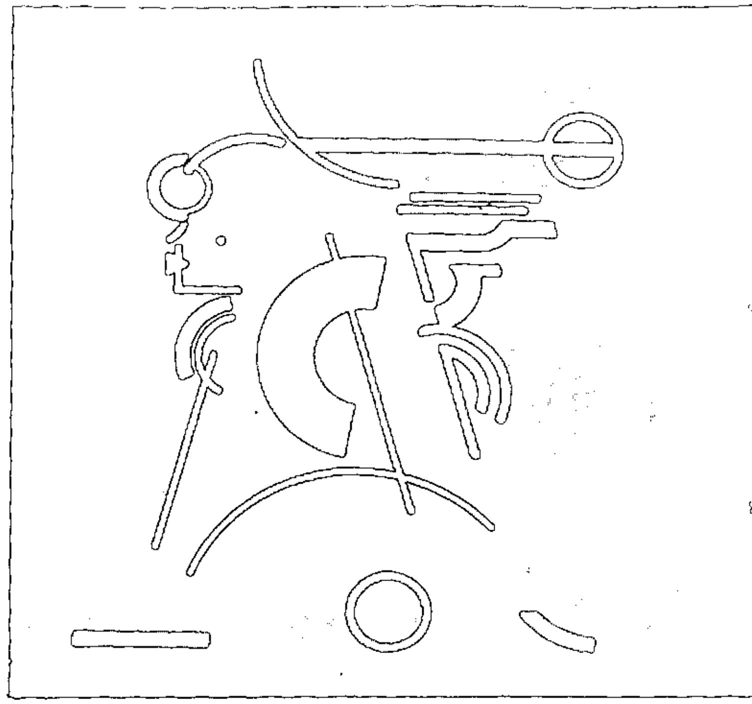
# ریاضیات گسسته

(قسمت سوم)

## ترکیبهای با تکرار
## توزیعها

(سوّم ریاضی و پیش‌دانشگاهی)

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور



ملاحظه کردیم، هنگامی که تکرار مجاز باشد، به ازای n شیءِ متمایز، ترتیب به اندازهٔ r این اشیا را، به ازای عدد صحیح $r \geq 0$، می‌توان به $n^r$ طریق به دست آورد. اکنون به مسأله‌ای مشابه در مورد ترکیبات توجه می‌کنیم و بار دیگر مسألهٔ مرتبطی را به دست می‌آوریم که راه حلش از اصول محاسبهٔ قبلیمان حاصل می‌شود.

**مثال ۱. ۲۵ .** هفت دانش‌آموز سال اول دبیرستان، در راه بازگشت از تمرین ورزش در یک ساندویچ فروشی توقف کردند. در آنجا هر یک از آنها یکی از ساندویچهای زیر را سفارش داد: همبرگر، سوسیس، الیویه و ماهی. چند خرید متفاوت ممکن است رخ داده باشد؟

همبرگر، سوسیس، الیویه، و ماهی را به ترتیب با c، h، t، و f نمایش می‌دهیم. در اینجا با دفعات خرید هر ساندویچ و نه با ترتیبی که خریده می‌شوند سر و کار داریم، بنابراین مسأله یکی از موارد انتخاب یا ترکیبهای با تکرار است.

در جدول ۱ . ۵ بعضی از خریدهای ممکن را در ستون (a) و طریق دیگر نمایش هر خرید را در ستون (b) فهرست کرده‌ایم.

جدول ۱ . ۵

<table>
<tr><th>(a)</th><th>(b)</th></tr>
<tr><td>۱.c, c, h, h, t, t, f</td><td>۱.xx|xx|xx|x</td></tr>
<tr><td>۲.c, c, c, c, h, t, f</td><td>۲.xxxx|x|x|x</td></tr>
<tr><td>۳.c, c, c, c, c, c, f</td><td>۳.xxxxxx|||x</td></tr>
<tr><td>۴.h, t, t, f, f, f, f</td><td>۴.|x|xx|xxxx</td></tr>
<tr><td>۵.t, t, t, t, t, f, f</td><td>۵.||xxxxx|xx</td></tr>
<tr><td>۶.t, t, t, t, t, t, t</td><td>۶.||xxxxxxx|</td></tr>
<tr><td>۷.f, f, f, f, f, f, f</td><td>۷.|||xxxxxxx</td></tr>
</table>

در مورد خرید مربوط به ستون (b) ی جدول ۱. ۵ چنین درمی‌یابیم که هر x واقع در سمت چپ بار (خط قائم) اول (۱) نمایشگر c اند، هر x بین بارهای اول و دوم نمایشگر h هستند، xهای بین بارهای دوم و سوم به جای tها قرار دارند، و هر x واقع در سمت راست بار سوم به جای f قرار دارند. به عنوان مثال، سومین خرید سه بار متوالی دارد زیرا کسی سوسیس یا الیویه نخریده است ؛ بار واقع در آغاز خرید چهارم دلالت بر این دارد که در این خرید همبرگری وجود نداشته است.

بار دیگر بین دو گردایهٔ اشیا تناظری برقرار شده است، که در آن چگونگی شمردن تعداد اشیا در یک گردایه را می‌دانیم.

در ستون (b) ی جدول ۱. ۵، جمیع ترتیبهای ۱۰ نماد شامل هفت x و سه ۱ را می‌شماریم، بنابراین، بنا به تناظر مزبور، تعداد ترتیبهای متفاوت ستون (a) عبارت است از:

$$\frac{۱۰!}{۷!۳!}=\binom{۱۰}{۷}$$

در مثال فوق توجه می‌کنیم که هفت x مورد بحث (هر یک برای یک دانش‌آموز سال اول) متناظر با اندازهٔ انتخاب است و برای جدا کردن ۴ = ۱ + ۳ فقره غذای ممکنی که می‌توانند انتخاب شوند به سه بار نیاز است. ❑

در حالت عمومی، زمانی که مایل به انتخاب، *با تکرار*[۱]، r شیء از n شیء متفاوتیم، (چون در جدول ۱. ۵) درمی‌یابیم که در کار بررسی جمیع ترتیبات r، x و n − ۱، ۱ هستیم و تعداد این ترتیبات عبارت است از:

$$\frac{(n+r-۱)!}{r!(n-۱)!}=\binom{n+r-۱}{r}$$

در نتیجه تعداد ترکیبات، *با تکرار*، n شیء که هر بار r شیء از آنها در نظر گرفته شوند، عبارت است از:

$C(n+r-۱ ,\ r)$

(در مثال ۱. ۲۵، n = ۴، r = ۷، بنابراین، زمانی که تکرار مجاز باشد، برای r امکان دارد که از n تجاوز کند.)

**مثال ۱. ۲۶.** یک مغازهٔ شیرینی‌فروشی ۲۰ نوع متفاوت شیرینی بزرگ ارائه می‌دهد. با فرض این که زمانی که داخل مغازه می‌شویم حداقل یک دوجین از هر نوع شیرینی موجود است، می‌توانیم یک دوجین شیرینی بزرگ را به

$C(۲۰+۱۲-۱,\ ۱۲)=C(۳۱,\ ۱۲)=۱۴۱,۱۲۰,۵۲۵$

طریق انتخاب کنیم (در اینجا n = ۲۰، r = ۱۲). ❑

**مثال ۱. ۲۷.** رییس اداره‌ای چهار منشی با نامهای B(۱)، G(۲)، M(۳)، N(۴) دارد، و مایل است که به عنوان عیدی ۱۰۰ دلار، اسکناس ده دلاری، را بین آنها تقسیم کند.

a) رییس مزبور با پذیرفتن حالتی که طبق آن به یکی یا بیش از یکی از منشیها چیزی نرسد، در کار انتخابی به اندازهٔ ۱۰ (برای هر اسکناس ده دلاری یکی) از گردایه‌ای به اندازهٔ ۴ (چهار منشی)، با تکرار، است. این کار را می‌توان به

$C(۴+۱۰-۱,\ ۱۰)=C(۱۳,\ ۱۰)=۲۸۶$

طریق انجام داد.

b) اگر قرار باشد که کسی خیلی آزرده نشود در این صورت لازم است که به هر منشی ۱۰ دلار برسد. در این حال رییس اداره با انتخابی به اندازهٔ ۶ (شش اسکناس ده دلاری باقیمانده) از همان گردایهٔ به اندازهٔ ۴ روبه‌رو است. و تعداد انتخابها در این مرحله $C(۴+۶-۱,\ ۶)=C(۹,\ ۶)=۸۴$ است. (به عنوان مثال، انتخاب ۲، ۳، ۳، ۴، ۴، ۴ به این معنی است که B پول اضافه‌ای به دست نمی‌آورد، در حالی که G، ۱۰ دلار اضافه می‌گیرد، به M، ۲۰ دلار اضافه می‌رسد، و N در مجموع ۴۰ دلار به دست می‌آورد.)

c) اگر لازم باشد که هر منشی حداقل ۱۰ دلار بگیرد و N، به عنوان سرمنشی، حداقل ۵۰ دلار دریافت کند، در این صورت تعداد طرقی که رییس اداره می‌تواند پول عیدی را، طبق آنها تقسیم کند، عبارت است از:

$$\underbrace{C\ (۳+۲-۱,\ ۲)}_{\text{N دقیقاً ۵۰ دلار می‌گیرد}}+\underbrace{C\ (۳+۱-۱,\ ۱)}_{\text{N دقیقاً ۶۰ دلار می‌گیرد}}$$

$$\underbrace{+C\ (۳+۰-۱,\ ۰)}_{\text{N دقیقاً ۷۰ دلار می‌گیرد}}=۱۰=\underbrace{C\ (۴+۲-۱,\ ۲)}_{\text{با استفاده از روش قسمت (b)}}$$ ❑

اکنون، پس از مثالهایی که ترکیبات با تکرار را مورد استفاده قرار داده‌اند، به بررسی دو مثال شامل اصول دیگر شمارش نیز می‌پردازیم.

**مثال ۱. ۲۸.** به چند طریق می‌توان هفت سیب و شش پرتقال را میان چهار کودک چنان تقسیم کرد که به هر کودک

حداقل یک سیب برسد؟

با دادن یک سیب به هر کودک، $C(4+3-1,\ 3)=20$ طریق تقسیم سه سیب دیگر و $C(4+6-1,\ 6)=84$ طریق تقسیم شش پرتقال را میان بچه‌ها داریم. بنابراین، بنا به قاعدهٔ حاصل‌ضرب $20\times 84=1680$ طریق تقسیم میوه‌ها با شرایط بیان شده موجودند. □

**مثال ۱. ۲۹.** قرار است پیامی متشکل از ۱۲ نماد متفاوت از طریق یک کانال ارتباطی فرستاده شود. فرستندهٔ موردبحث، علاوه بر ۱۲ نماد مزبور کلاً ۴۵ فاصله (سفید) نیز مابین نمادها، با حداقل سه فاصله بین هر جفت نماد متوالی، می‌فرستد. به چند طریق فرستنده می‌تواند پیام را بفرستد؟

در ترتیب دادن ۱۲ نماد متفاوت $12!$ طریق وجود دارد، به ازای هر یک از این ترتیبها ۱۱ مکان بین ۱۲ نماد مورد بحث موجودند. به علت این که باید بین نمادهای متوالی حداقل ۳ فاصله موجود باشند، ۳۳ فاصله از ۴۵ فاصله را مصرف می‌کنیم و اکنون باید جای ۱۲ فاصلهٔ باقیمانده را معین کنیم. این کار انتخابی، با تکرار، به اندازهٔ ۱۲ (فاصله) از گردایه‌ای به اندازهٔ ۱۱ (مکان) است، و می‌تواند به $C(11+12-1,\ 12)=646,646$ طریق انجام شود.

در نتیجه، فرستندهٔ مزبور، بنا به قاعدهٔ حاصل‌ضرب، می‌تواند پیام مورد نظر را با فاصله‌بندی مطلوب به $(12!)\binom{22}{12}=3/097\times 10^{14}$ طریق ارسال کند. □

در مثال بعدی به معرفی مفهومی می‌پردازیم که به نظر می‌رسد سر و کارش بیش از ترکیبات یا ترتیبات با نظریهٔ اعداد است. با وجود این، آشکار می‌شود که راه حل آن هم ارز شمارش ترکیبات با تکرار است.

**مثال ۱. ۳۰.** تمام جوابهای صحیح معادلهٔ

$x_1+x_2+x_3+x_4=7$

را، که در آن، به ازای هر $1\le i\le 4$، $x_i\ge 0$، بیابید.

یکی از جوابهای معادله عبارت است از $x_1=3$، $x_2=3$، $x_3=0$، $x_4=1$. (این جواب با جوابی چون $x_1=1$، $x_2=0$، $x_3=3$، $x_4=3$، با وجود این که در آن همان چهار عدد صحیح به کار رفته‌اند، متفاوت است.) یکی از تعبیرهای ممکن جواب $x_1=3$، $x_2=3$، $x_3=0$، $x_4=1$ این است که بخواهیم هفت ریال (اشیای یکسان) را بین چهار کودک (ظرف متمایز) توزیع کنیم، و در این حال به هر یک از دو کودک اول سه یک ریالی بدهیم، به سومی چیزی ندهیم، و آخرین یک ریالی را به چهارمین کودک بدهیم. با ادامه دادن به این تعبیر، ملاحظه می‌کنیم که هر جواب صحیح نامنفی معادلهٔ مورد بحث متناظر با انتخابی، با تکرار، به اندازهٔ ۷ (یک ریالی یکسان) از گردایه‌ای به اندازهٔ ۴ (کودک متمایز) است، بنابراین، $C(4+7-1,\ 7)=120$ جواب موجود است. □

در این مرحله اهمیت دارد که هم‌ارزی موارد زیر را بشناسیم:

a) تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ

$x_1+x_2+\dots+x_n=r \quad x_i\ge 0 \quad 1\le i\le n$

b) تعداد انتخابهای، با تکرار، به اندازهٔ r از گردایه‌ای به اندازهٔ n.

c) تعداد روشهایی که طبق آنها r شیء یکسان بتوانند بین n ظرف متمایز توزیع شوند.

مورد (c)، بر حسب توزیعات، تنها وقتی r شیء توزیع شده یکسان و n ظرف مربوطه متمایز باشند، درست است. هنگامی که هم r شیء و هم n ظرف متمایز باشند، می‌توانیم هر یک از n ظرف را به ازای هر یک از اشیای مزبور انتخاب کرده با استفاده از قاعدهٔ حاصل‌ضرب $n^r$ توزیع به دست آوریم.

هنگامی که اشیای مزبور متمایز اما ظرفها یکسان باشند، مسأله را با استفاده از اعداد استرلینگ از نوع دوم حل می‌کنیم. در مورد حالت نهایی، که در آن هم اشیا هم ظرفها یکسانند، نظریهٔ افزارهای اعداد صحیح، بعضی از مطالب لازم را به دست خواهد داد.

**مثال ۱. ۳۱.** به چند طریق شخص می‌تواند ۱۰ مهرهٔ سفید (یکسان) را بین شش ظرف متمایز توزیع نماید؟

حل این مسأله هم ارز یافتن تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادلهٔ

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = 10$$

است. این تعداد، تعداد انتخابهای به اندازهٔ ۱۰، با تکرار، از گردایه‌ای به اندازهٔ ۶ است. در نتیجه پاسخ مسأله عبارت است از $C(6+10-1, 10) = 3003$ . □

اکنون به بررسی دو مثال دیگر در ارتباط با موضوع این بخش می‌پردازیم.

**مثال ۱. ۳۲.** از مثال ۱. ۳۱ می‌دانیم که در مورد معادلهٔ $x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = 10$ ، ۳۰۰۳ جواب صحیح نامنفی موجودند. در مورد نامساوی $x_1 + x_2 + \ldots + x_6 < 10$ چند جواب از چنین جوابهایی وجود دارند؟

یکی از رهیافتهایی که در حل این نامساوی عملی به نظر می‌رسد تعیین تعداد چنین جوابهایی در مورد $x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = k$ است، که در آن k عددی صحیح است و $0 \le k \le 9$. این روش گرچه در این حالت معقول است، در صورتی که به جای ۹ عددی تا اندازه‌ای بزرگتر، به طور مثال ۱۰، قرار گیرد غیرعملی می‌شود. اما، در آینده، اتحادی ترکیباتی را اثبات می‌کنیم که کمک می کند با استفاده از این رهیافت، راه حل دیگری در مورد این مسأله به دست آوریم.

در حال حاضر مسأله را با توجه به تناظر بین جوابهای صحیح و نامنفی

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_6 < 10 \qquad (1)$$

و جوابهای صحیح

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_6 + x_7 = 10$$
$$0 \le x_i,\ 1 \le i \le 6,\ 0 < x_7 \qquad (2)$$

تبدیل می‌کنیم.

تعداد جوابهای (۲) برابر تعداد جوابهای صحیح و نامنفی

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_6 + y_7 = 9$$

است، که در آن، به ازای $1 \le i \le 6$ ، $y_i = x_i$ ، و $y_7 = x_7 - 1$ . این تعداد عبارت است از:

$$C(7+9-1,\ 9) = 5005$$

□

**مثال ۱. ۳۳.** در بسط دوجمله‌ای $(x+y)^n$ ، هر جمله به صورت $\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$ است، بنابراین تعداد کل جمله‌های بسط تعداد جوابهای صحیح و نامنفی $n_1 + n_2 = n$ است ($n_1$ نمای x، $n_2$ نمای y است). این تعداد عبارت است از $C(2+n-1,\ n) = n+1$ .

شاید چنین به نظر برسد که برای به‌دست آوردن نتیجهٔ فوق از استدلالی به‌نسبت طولانی استفاده کرده‌ایم. بسیاری از ما شاید مایل باشیم نتیجهٔ مزبور را بر مبنای تجربه‌هایمان در محاسبهٔ $(x+y)^n$ ، به ازای مقادیر کوچک و گوناگون n، بپذیریم.

گرچه تجربه در شناخت نمونه‌ای دارای ارزش است، مورد دریافتن اصلی عمومی همواره کفایت ندارد، و در این حالت، در صورتی که مایل به دانستن این بودیم که در بسط $(w+x+y+z)^{10}$ چند جمله موجود است کارایی کمی از خود نشان می‌دهد.

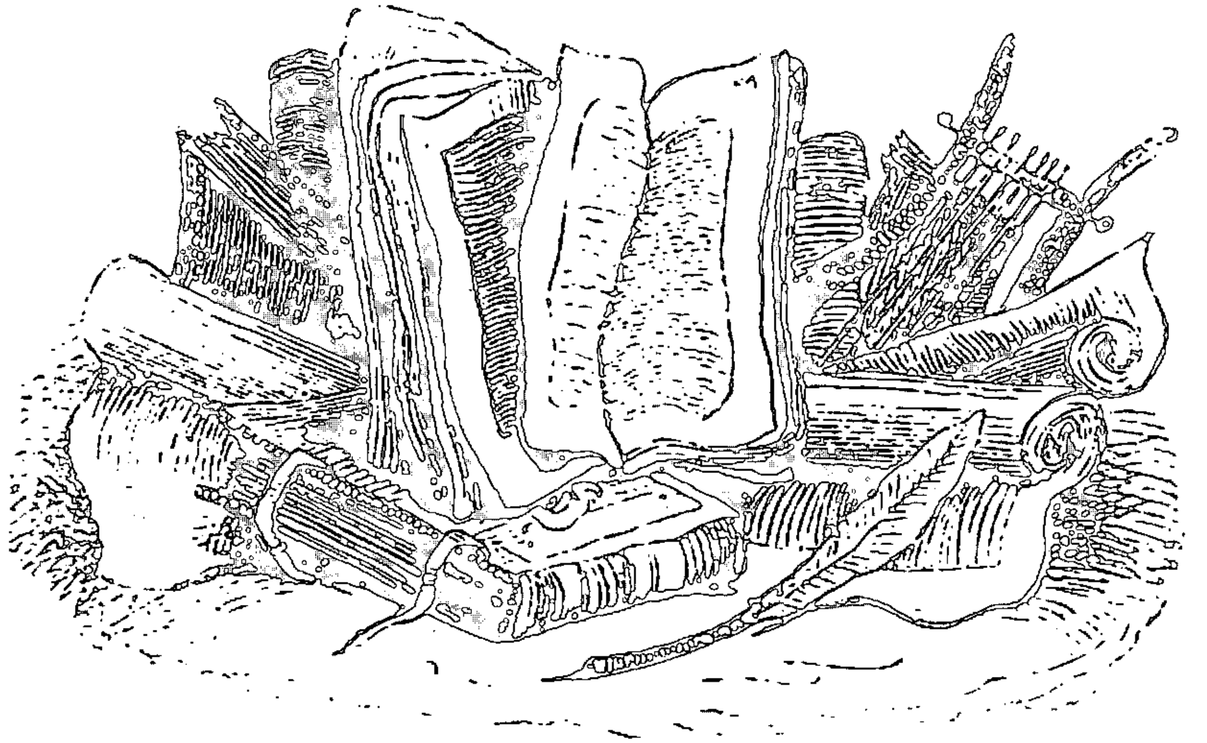
در حالت فوق، هر جملهٔ متمایز به‌صورت $\binom{10}{n_1, n_2, n_3, n_4} w^{n_1} x^{n_2} y^{n_3} z^{n_4}$ ، با $0 \le n_i$ ، به ازای $1 \le i \le 4$ ، است و $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 10$ . مسألهٔ اخیر را می‌توان به $C(4+10-1,\ 10) = 286$ طریق حل کرد، بنابراین در بسط $(w+x+y+z)^{10}$ ، ۲۸۶ جمله موجود است. □

دو مثال آخرمان در این بخش کاربردهایی از زمینهٔ دانش کامپیوتری به دست می‌دهند. گذشته از این، مثال آخر به فرمول مجموعه‌یابی مهمی منجر می‌شود که در بسیاری از مباحث بعدی از آن استفاده خواهیم کرد.

---

* زیرنویس

1. Repetition



# تاریخچهٔ مجلات ریاضی در ایران (۱۷)

❑ در شمارهٔ هفدهٔ یکان راجع به **صفر** چنین می خوانیم :

صفری که اغلب دانش‌آموزان از آن نفرت دارند، صفر بی‌مقداری که هیچ کس او را دوست ندارد، داستان و تاریخ دلپذیری دارد. بین ارقام مختلف، صفر از همه جوانتر است. به مقیاس انسانی صفر را در مقابل سایر اعداد نوزادی بیش نباید دانست. در این صورت آیا این همه نفرت از این موجودی که(!) فرصت نداشته است آن‌طور که باید و شاید خود را نشان دهد بیجا نیست؟ شاید اگر عمر صفر به اندازهٔ عمر سایر اعداد بود اکنون یکی از عزیزترین اعداد به حساب می‌آمد. قبول ندارید؟ پس شما را به خواندن این داستان که داستانی جز سرگذشت صفر، این طفل یک شبه نیست دعوت می کنیم.

صفر اولین علامت از ده علامتی است که مبین ارقام است. ارقامی که ما می‌توانیم کلیهٔ اعداد فوق‌العاده بزرگ را به کمک آنها نشان دهیم ارقامی که تاروپود تمدن جدید بر آن استوار است. پس اولین رقمی است که باید با آن آشنا شویم. ولی باید اذعان داشت این اولین رقم آخرین رقمی بود که پیدا شد. یا بهتر بگوییم اولین عدد، آخرین عددی بود که کشف شد.

این دو واقعهٔ **پیدایش** و **کشف** صفر به موجب تاریخ اعداد در یک زمان اتفاق نیفتاد. پیدایش آن قرنها قبل از کشف آن اتفاق افتاد. تا سالهای تولد مسیح تصور صفر به عنوان یک عدد به فکر هیچ‌کس نرسیده بود. حتی در کلیهٔ مجامع مترقی آن زمان شکل نوشتن هریک از اعداد با علامتهای متفاوت بود. مثلاً مصریان قدیم اشکال مختلفی برای نشان دادن اعداد به کار می‌بردند. یونانیان از حروف الفبا برای بیان اعداد استفاده می کردند. رومیان با چند خط ساده که در سنگ نبشته‌ها دیده شده است اعداد را نشان می‌دادند.

ایرانیان نیز علامات محدودی برای نشان دادن اعداد به خط میخی به کار می‌بردند ولی همهٔ آنها اعداد را دسته‌بندی نموده بودند به نحوی که نوشتن اعداد بزرگ با تکرار این علامات نشان داده می‌شد.

. . . اولین بار کلمهٔ صفر را یک نفر هندی (به روایتی یک نفر ایرانی) به کار برد و پس از آن یک سری علامات برای محاسبات عملی به کار برده شد. در سالهای اول تولد حضرت مسیح یک نفر هندی گمنام (یا ایرانی) برای اولین بار نقطه را برای نشان دادن ستون یا میله‌ای که در چتکه شامل مهره نبود به

کار برد و آن‌را **Sunya** سنیا (خالی) نامید و بعد از آن صفر به عنوان اولین رقم ظاهر شد. ضمناً ناگفته نماند سنیای هندی فوق‌الذکر صفر نبوده بلکه یک علامت مکانیکی برای نشان دادن ستون خالی در چتکه بوده است. یعنی مفهوم آن معنی همان کلمهٔ (خالی) بود. هنوز هم در هندوستان همان علامت را برای مجهول که ما به‌صورت x نشان می‌دهیم به کار می‌برند. زیرا به نظر آنها تا زمانی که مجهول مشخص نشده است جایش خالی است.

سنیای هندی یا صفر به وسیلهٔ اعراب به اروپا سرایت نمود ولی از آنجا که تجار و محافظه‌کاران دچار یک نوع خودخواهی بودند از قبول آن خودداری نمودند (در سال ۱۳۰۰ کلیهٔ تجار استفادهٔ از ارقام هندی را برای نشان دادن اعداد منع کردند، به دلیل آن که مشکلتر از اعداد رومی به خاطر سپرده می‌شد!!).

هرچند که نتیجهٔ نهایی استعمال همین نقطه یا (سی فر) موجب شروع انقلاب بزرگی در نمایش اعداد شد اما هنوز صفر نشان‌دهندهٔ ستون خالی در چتکه بود (بعدها کلمهٔ ایتالیایی Zero جانشین کلمهٔ قدیمی Cipher یا Sifer شد) و هنوز جزء اعداد به حساب نمی‌آمد.

حتی این روزها هم با آن‌که صفر را به جای اعداد مختلف به کار می‌بریم ولی هنوز آن‌را جزء اعداد نمی‌شناسیم. روی ماشین تحریر یا صفحهٔ نمرهٔ تلفن آن‌را به کار می‌بریم ولی بعد از رقم ۹. درصورتی که ارزش آن از ۹ بیشتر نیست. پس به خوبی معلوم می شود که آن‌را به عنوان یک علامت به کار برده‌ایم نه رقم.

☐ در همین شمارهٔ دربارهٔ مسألهٔ لئوبرن «Leo Bourne» چنین آمده است:

آنچه را که در زیر مطالعه می‌کنید مسألهٔ لئوبرن می‌باشد که از مارچ ۱۹۶۲ به معرض مطالعه قرار داده شده است. مسأله این است که هرگاه n تعداد ارقام عددی و d تعداد ارقام جذر آن باشد بین n و d درصورتی که n زوج باشد رابطهٔ $d=\frac{1}{2}n$ و درصورتی که n فرد باشد رابطهٔ $d=\frac{1}{2}(n+1)$ برقرار است.

در اینجا ما مسأله را برای چند مقدار n ثابت می‌کنیم:

به‌طور مثال در مورد $n=3$ باید ثابت کنیم که عدد

$$N=\sqrt{100h+10t+u} \qquad (1)$$

عددی دورقمی است (بنابر فرمول فوق). این عدد را چنین می‌نویسیم:

$$N=\sqrt{100\left(h+\frac{10t+u}{100}\right)}$$

و یا:

$$N=10\sqrt{h+\frac{10t+u}{100}} \qquad (2)$$

درصورتی که رادیکال (۱) ریشه‌اش عددی صحیح باشد رادیکال (۲) نیز ریشهٔ کاملی خواهد داشت. و چون $10t+u$ از ۱۰۰ کمتر است پس عدد زیر رادیکال (۲) دارای یک رقم صحیح با دو رقم اعشار می‌باشد و ریشهٔ دومش باید یک رقم صحیح با یک رقم اعشاری داشته باشد و از ضرب آن در ۱۰ عددی پیدا می‌شود که دارای دو رقم صحیح می‌باشد و فرمول ثابت می‌شود. با دانستن این که برای $n=1$ و $n=3$ فرمول صحیح است می‌توان با روشی مشابه ثابت نمود که رابطه برای $n=5$ و $n=7$ و غیره نیز صحیح است بنابراین در موردی که n فرد باشد صحت فرمول ثابت شد.

و درموردی که n زوج باشد در ازای $n=2$ عدد $\sqrt{10t+u}$ عددی یک رقمی خواهد بود و در موردی که $n=4$ باشد داریم:

$$N=\sqrt{1000p+100h+10t+u}$$

یا

$$N=\sqrt{100\left(10p+h+\frac{10t+u}{100}\right)}$$

ویا

$$N=10\sqrt{10p+h+\frac{10t+u}{100}}$$

عدد زیر رادیکال دارای دو رقم صحیح و دو رقم اعشاری می‌باشد بنابراین جذر آن عددی با یک رقم صحیح و یک اعشار بوده و از ضرب آن در ۱۰ عددی حاصل می‌شود که دارای دو رقم صحیح می‌باشد. پس فرمول صحت دارد. با روشی مشابه می‌توان فرمول را در مورد $n=6$ و $n=8$ و غیره ثابت نمود پس به‌طور کلی مسألهٔ لئوبرن ثابت شد.

تذکر: در مورد هر مقداری از n که خواستیم فرمول را ثابت کنیم پس از نوشتن عدد به صورت حرفی در زیر رادیکال از بزرگترین توان زوج ۱۰ فاکتور می‌گیریم.

☐ در شمارهٔ ۱۸ یکان راه حل کلی مسألهٔ لئوبرن چنین آورده شده است:

فرض می‌کنیم عدد N دارای d رقم مراتب صحیح باشد. در این صورت داریم:

$$10^{d-1}\le N<10^{d}$$

اجزای این نامساوی را مجذور می‌کنیم، می‌شود :

$$10^{2d-2} \le N^2 < 10^{2d}$$

اگر n تعداد ارقام مراتب صحیح عدد $N^2$ باشد، از نامساوی اخیر نتیجه می‌شود :

$$2d - 1 \le n < 2d + 1$$

و دو حالت :

(۱) $n = 2d - 1$

یا

(۲) $n = 2d$

را خواهیم داشت که اگر n زوج باشد حالت (۲) صادق بوده داریم.

$$d = \frac{1}{2}n$$

و اگر n فرد باشد حالت (۱) صادق بوده داریم :

$$d = \frac{1}{2}(n+1)$$

□ در همین شماره تحت عنوان :

«بی‌آنکه عصبانی شوید این مسأله را حل کنید»

چنین آمده است :

آقایان سینا، سامان و ساسان از جمله مسافران قطار سریع‌السیر تهران ــ خرمشهر می‌باشند. آنها می‌فهمند که آقایان : رانندهٔ لکوموتیو، کمک مکانیسین و بازرس قطار همنام آنها می‌باشند. با اطلاع بر این‌که :

۱) آقای سینا که مسافر است ساکن تهران می‌باشد.

۲) بازرس قطار در نیمه راه بین تهران و خرمشهر سکونت دارد.

۳) مسافر همنام بازرس قطار در خرمشهر زندگی می‌کند.

۴) یکی از سه نفر مسافران که خیلی نزدیک به محل سکونت بازرس ساکن است، در ماه دقیقاً سه برابر شخص اخیر درآمد دارد.

۵) مسافری که نامش سامان است در ماه ۸۰۰۰ ریال درآمد دارد.

۶) کارمند قطار که همنام ساسان است تازگیها کمک مکانیسین را در بازی بیلیارد مغلوب کرده است.

نام رانندهٔ لکوموتیو را تعیین کنید.

□ راه حل این مسأله را در شمارهٔ بعد یعنی شمارهٔ ۱۹ چنین می‌خوانیم :

می‌دانیم که بازرس قطار در نیمه راه تهران و خرمشهر سکونت دارد (۲). یکی از مسافران در تهران ساکن است (۱) و یکی دیگر در خرمشهر (۳)، بنابراین هیچ یک از این دو نفر نمی‌تواند نزدیک به محل سکونت بازرس سکونت داشته باشد.

نتیجه می‌شود که همسایهٔ نزدیک بازرس سینا نیست (۱). سامان هم نیست زیرا درآمد ماهانه او بر ۳ بخشپذیر نیست (۵ و ۴)، بنابراین ساسان بوده و بازرس همنام ساسان نخواهد بود (۳). کمک مکانیسین هم همنام ساسان نیست (۶) پس ساسان نام رانندهٔ لکوموتیو است. مسافر به نام سینا در تهران ساکن است، مسافر به نام ساسان در نزدیکیهای نیمه راه تهران ــ خرمشهر سکونت دارد، پس مسافر به نام ساسان در خرمشهر ساکن است (۳). و نتیجه می‌شود که بازرس قطار سامان نام دارد (۳) و نام کمک مکانیسین سینا می‌باشد.


☆ ــ در فهرست غذای آماده رستورانی چنین آمده است:

واحد پول ۳/۷۲ = سیب‌زمینی سرخ کرده + شیرموز + همبرگر

۲ تا سیب‌زمینی‌سرخ‌کرده + یک شیرموز= یک‌همبرگر

یک سیب‌زمینی سرخ کرده + یک همبرگر = ۳ تا شیرموز

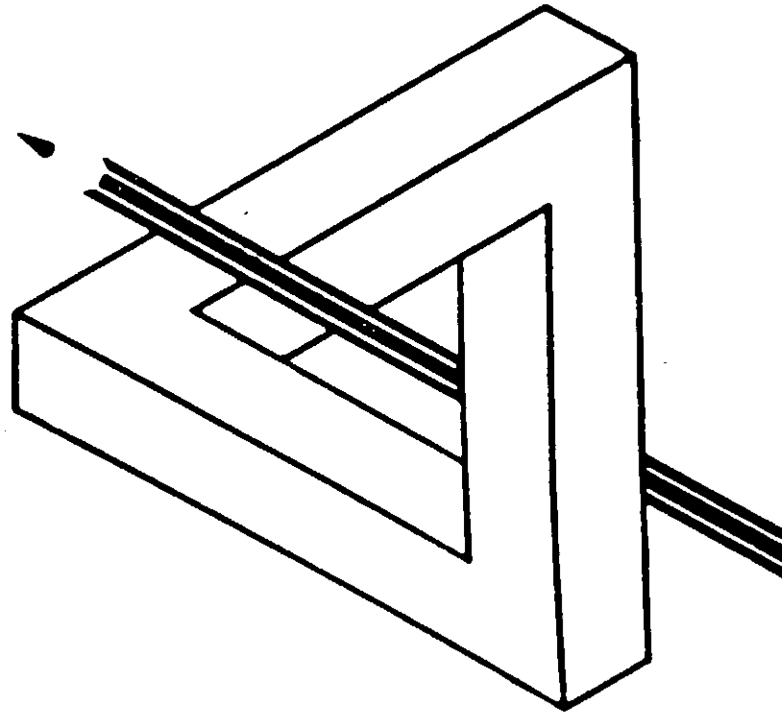
قیمت یک همبرگر، یک شیرموز و دو تا سیب‌زمینی سرخ کرده چقدر است؟

**جواب در صفحه ۸۶**

# تجزیه چند جمله‌ایها از طریق ریشه‌یابی

(برای دانش‌آموزان سال اول دبیرستان)

● رضا پیکر



**مفهوم تجزیه:** تجزیه یک چندجمله‌ای عبارتست از تبدیل آن چند جمله‌ای به صورت حاصل ضرب دو یا چند عامل. تجزیه وقتی کامل است که هریک ازعاملهای به‌دست آمده اول (تجزیه‌ناپذیر) باشند. به بیان دیگر منظور از تجزیه یک چندجمله‌ای نوشتن آن به‌صورت حاصل ضرب عاملهای اول است. به‌عنوان مثال چندجمله‌ای:

$$q(x)=2x^3-5x^2+8x-5$$

را می‌توان به‌صورت $(2x-5)(x^2-2x+1)$ تجزیه کرد ولی صورت اخیر یک تجزیهٔ کامل از چند جمله ای $q(x)$ نیست چرا که می‌توان عبارت $(x^2-2x+1)$ را به‌صورت حاصل‌ضرب دو عامل $(x-1)(x-1)$ نوشت. بنابراین تجزیه کامل چند جمله‌ایِ $q(x)$ عبارت است از: $(2x-5)(x-1)^2$. هریک از پرانتزهای $(x-1)$، $(x-1)$ و $(2x-5)$ را یک عامل اول چند جمله‌ای $q(x)$ می‌گویند.

## ◀ عامل اول

چندجمله‌ای $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ را با ضرایب صحیح در نظر بگیرید ($a_0$، $a_1$، ....، $a_{n-1}$، $a_n$ را که متعلق به مجموعه اعداد صحیح می باشند ضرایب چندجمله‌ای $P(x)$ می گوییم.). چندجمله‌ای $P(x)$را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب n عامل و به‌صورت زیر نوشت:

$$P(x)=(b_1x+c_1)(b_2x+c_2).....(b_nx+c_n)$$

که ممکن است ضرایب هریک از عاملها اعداد گویا نباشند بلکه این اعداد شاید اعداد گنگ و یا متعلق به مجموعهٔ اعداد مختلط باشند. (این مطلب را می‌توان بسادگی از این مطلب که هر معادلهٔ درجه n و به‌صورت

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=0$$

دقیقاً دارای n ریشه است نتیجه‌گیری کرد که شما در سالهای بالاتر و شاید در دورهٔ دانشگاه با اثبات آن آشنا خواهید شد.)

هریک از عاملهای $(b_1x+c_1)$، $(b_2x+c_2)$ .... و $(b_nx+c_n)$ را اول می گوییم هرگاه تمامی اعداد $b_1,b_2,...b_n$ و $c_1,c_2,...c_n$ اعداد گویا باشند در غیر اینصورت عاملهای یاد شده را عامل اول نمی‌خوانیم. به‌طور مثال چند جمله‌ای: $x^4-10x^3+35x^2-50x+24$ را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب جملات $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ تجزیه کرد. از آنجا که ضرایب هریک از عاملهای به‌دست‌آمده اعدادی گویا می‌باشند پس هر پرانتز را یک عامل اول چند جمله‌ای مذکور می‌خوانیم. اکنون چند جمله‌ای:

$$x^4-4x^3-23x^2+100x-5$$

را در نظر بگیرید. این چند جمله‌ای را می‌توان بصورت

حاصل‌ضرب $(x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2})(x+5)(x-5)$ نوشت. پرانتزهای $(x-2+\sqrt{2})$ و $(x-2-\sqrt{2})$ را عاملهای اول چند جمله‌ای یاد شده نمی‌خوانیم چرا که دارای ضرایب گویا نیستند. اما حاصل ضرب دو پرانتز اخیر عامل $x^2-4x+2$ را به‌دست می‌دهد که این عامل دارای ضرایب گویا است و آن را یک عامل اول چند جمله‌ای مورد نظر می‌خوانیم و تجزیه چند جمله‌ای یاد شده به‌صورت حاصل‌ضرب سه پرانتز $(x^2-4x+2)(x+5)(x-5)$ خواهد بود. از این مثال چنین نتیجه می‌گیریم که هر عامل اول یک چند جمله‌ای حتماً نباید یک چند جمله ای درجه اول به‌صورت $(bx+c)$ باشد بلکه این عامل می‌تواند به‌صورت یک چند جمله‌ای تجزیه‌ناپذیر از نوع درجه دوم، سوم و یا بیشتر باشد. بنابراین منظور از عامل اول در مبحث تجزیه، چند جمله‌ای از درجه یک، دو یا بیشتر است که هریک از ضرایب این چند جمله ای اعدادی گویا باشند و در ضمن قابل تجزیه به عامل یا عامل‌های اول دیگر نباشد.

## ◀ تجزیه بوسیلهٔ ریشه‌یابی

برای تجزیه یک چندجمله‌ای مفروض باید روشهای ابتکاری به‌کار برد. یکی از کاربردهای تجزیه در آن است که بدان وسیله می‌توان ریشه‌های یک چند جمله‌ای مفروض را به‌دست آورد. امّا گاهی روشی که برای تجزیهٔ آن چند جمله‌ای به کار می‌رود، به آنجا می‌انجامد که باید ریشه‌های آن چند جمله‌ای را حدس زد. به چنین روشی تجزیه به‌وسیلهٔ ریشه‌یابی می‌گویند.

چند جمله‌ای $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ را در نظر بگیرید. اگر $\alpha$ ریشه چند جمله‌ای $P(x)$ باشد بدین منظور که هرگاه در معادلهٔ $P(x)=0$ به جای $x$ مقدار $\alpha$ را قرار دهیم، معادله برقرار باشد، آنگاه چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x-\alpha$ بخش‌پذیر است و درنتیجه $P(x)$ بصورت $(x-\alpha)Q(x)$ تجزیه می‌شود که البته امکان دارد صورت اخیر یک تجزیه کامل $P(x)$ نباشد که باید در تجزیه‌پذیری $Q(x)$ کاوش کرد. به‌عنوان مثال عدد ۳ ریشهٔ چند جمله‌ای $x^3-2x^2-4x+3$ است بدین معنی که عدد ۳ چند جمله‌ای اخیر را صفر می‌کند. از اینرو این چند جمله‌ای بر $(x-3)$ بخش‌پذیر است. با تقسیم چندجمله‌ای بر عامل $(x-3)$ می‌توانیم آن‌را تجزیه کنیم و خواهیم داشت:

$$x^3-2x^2-4x+3=(x-3)(x^2+x-1)$$

صورت اخیر یک تجزیه کامل از چند جمله‌ای مفروض است چرا که چند جمله‌ای $x^2+x-1$ تجزیه‌ناپذیر است و خود یک عامل اول است.

در تجزیه به روش ریشه‌یابی حتماً یک عامل اول درجه یک به‌دست می‌آید. و تنها درصورتی که چند جمله‌ای مورد نظر دارای عامل اول درجه یک باشد می‌توان از طریق ریشه‌یابی اقدام به تجزیه آن کرد در غیر این‌صورت می‌بایست از روشهای ابتکاری کمک گرفت.

## ◀ حدس ریشهٔ $\alpha$

منظور از حدس ریشهٔ $\alpha$ پیدا کردن عددی است که چند جمله‌ای به ازای آن صفر شود. برای پیدا کردن این عدد مجاز هستیم هر عدد دلخواه را در چند جمله‌ای امتحان کنیم. امتحان هر عدد دلخواه کاری وقت‌گیر و پردردسر است، از اینرو باید روشی برای پیدا کردن محدودهٔ اعدادی که چند جمله‌ای مورد نظر را صفر می‌کند پیدا کنیم. برای این منظور به بیان و اثبات قضیهٔ زیر توجه کنید.

**قضیه:** چند جمله‌ای

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$$

با ضرایب صحیح مفروض است اگر این چند جمله‌ای به ازای عدد گویای $\frac{b}{c}$ که به ساده‌ترین صورت است[1]، صفر شود آنگاه $b$ یک مقسوم‌علیه $a_0$ و $c$ یک مقسوم علیه $a_n$ است.

قبل از اثبات قضیه مطلب را با یک مثال روشن می‌کنیم: چند جمله ای $2x^3-9x^2-6x+5$ را در نظر بگیرید قضیه حکم می‌کند که اگر $\frac{b}{c}$ یک ریشهٔ این چند جمله‌ای باشد آنگاه $b$ یک مقسوم‌علیه ۵ و $c$ یک مقسوم‌علیه ۲ است از اینرو عدد $b$ می‌تواند یکی از اعداد ۵+، ۵-، ۱+، ۱- و $c$ می‌تواند یکی از اعداد ۲+، ۲-، ۱+ و ۱- باشد پس $\frac{b}{c}$ قطعاً به مجموعه اعداد زیر تعلق خواهد داشت.

$$\left\{\frac{+5}{+2},\frac{+5}{-2},\frac{+5}{+1},\frac{+5}{-1},\frac{-5}{+2},\frac{-5}{-2},\frac{-5}{+1},\frac{-5}{-1},\right.$$

۱ـ منظور از این که $\frac{b}{c}$ به ساده‌ترین صورت است این است که $b$ و $c$ نسبت به هم اولند یا $(b,c)=1$

$$\left\{\frac{+1}{+2},\frac{+1}{-2},\frac{+1}{+1},\frac{+1}{-1},\frac{-1}{+2},\frac{-1}{-2},\frac{-1}{+1},\frac{-1}{-1}\right\}$$

که فهرست اعداد فوق تنها شامل ۸ عدد متمایز خواهد بود که عبارتند از :

$$\left\{\mp\frac{5}{1},\mp\frac{5}{2},\mp\frac{1}{2},\mp\frac{1}{1}\right\}$$

که می‌توان ثابت کرد از این اعداد فقط عدد ۵+ ریشه چند جمله‌ای خواهد بود.

**اثبات قضیه:** فرض می‌کنیم $\frac{b}{c}$ یک ریشهٔ چند جمله‌ای $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ باشد. در این‌صورت اگر به جای x مقدار $\frac{b}{c}$ را قرار دهیم آنگاه $p(x)=0$ برقرار خواهد بود پس داریم :

$$a_n\left(\frac{b}{c}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{b}{c}\right)^{n-1}+\cdots+a_1\left(\frac{b}{c}\right)+a_0=0$$

با ضرب طرفین در $c^n$ داریم :

$$a_nb^n+a_{n-1}b^{n-1}c+\ldots+a_1bc^{n-1}+a_0c^n=0 \quad (I)$$

$$a_nb^n=-a_{n-1}b^{n-1}c-a_{n-2}b^{n-2}c^2-\cdots-a_1bc^{n-1}-a_0c^n$$

$$a_nb^n=c(-a_{n-1}b^{n-1}-a_{n-2}b^{n-2}c-\cdots-a_1bc^{n-2}-a_0c^{n-1})$$

تساوی اخیر نشان می‌دهد که c یک مقسوم‌علیه $a_nb^n$ است و از آنجا که c نسبت به b اول است پس نسبت به $b^n$ نیز اول خواهد بود و درنتیجه c یک مقسوم علیه $a_n$ است. تاکنون نیمی از قضیه به اثبات رسیده است حال معادلهٔ (I) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$a_0c^n=-a_nb^n-a_{n-1}b^{n-1}c-\cdots-a_1bc^{n-1}$$

$$a_0c^n=b(-a_nb^{n-1}-a_{n-1}b^{n-2}-\cdots-a_1c^{n-1})$$

تساوی اخیر نشان می‌دهد که b یک مقسوم علیه $a_0c^n$ است و از آنجا که b نسبت به c اول است پس نسبت به $c^n$ نیز اول خواهد بود و درنتیجه b یک مقسوم علیه $a_0$ است.

به این ترتیب برای حدس یک ریشهٔ چندجمله‌ای دلخواه با آزمایش چند عدد می‌توان در صورتی که چند جمله‌ای دارای ریشه باشد آن را به دست آورد.

مثال : چند جمله‌ای $2x^3-23x^2+67x-28$ را تجزیه کنید.

اگر چندجمله‌ای مفروض دارای ریشه باشد، این ریشه مطابق بحث گذشته اگر $\frac{b}{c}$ باشد، عدد b باشد، عدد b یک مقسوم‌علیه ۲۸- و عدد c یک مقسوم‌علیه ۲ خواهد بود. از این‌رو b می‌تواند یکی از اعداد ۱∓، ۲∓، ۴∓، ۷∓، ۱۴∓، ۲۸∓ و c می‌تواند یکی از اعداد ۱∓ و ۲∓ باشد. بنابراین ریشه یا ریشه‌های چند جمله‌ای در صورت وجود حتماً متعلق به مجموعهٔ اعداد زیر خواهند بود :

$$\left\{\mp1,\mp\frac{1}{2},\mp2,\mp4,\mp7,\mp\frac{7}{2},\mp14,\mp28\right\}$$

با صرف اندکی وقت و آزمایش اعداد یاد شده در چند جمله‌ای درمی‌یابیم که اعداد ۴+ و ۷+ و $+\frac{1}{2}$ ریشه‌های چند جمله‌ای مورد نظر هستند پس این چند جمله ای بر عاملهای $(x-4)$، $(x-7)$ و $(x-\frac{1}{2})$ بخش‌پذیر است و بنابراین تجزیه کامل چند جمله‌ای مورد نظر عبارت خواهد بود از :

$$2x^3-23x^2+67x-28=2(x-4)(x-\frac{1}{2})(x-7)$$

اکنون به نتیجه‌ای که از قضیهٔ اخیر حاصل می‌شود توجه کنید :

* چندجمله‌ای $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$، $(a_n=1)$ را که ضرایب آن عددهای صحیح هستند مفروض است. اگر این چندجمله‌ای یک ریشهٔ گویا داشته باشد آن ریشه یک عدد صحیح است و همچنین یک مقسوم‌علیه $a_0$ است.

**تمرین**

۱ ــ ثابت کنید :

الف ــ هرگاه مجموع ضرایب یک چندجمله‌ای برابر با صفر باشد یک ریشهٔ آن برابر با ۱ است.

ب ــ هرگاه مجموع ضرایب جملات توان زوج، با مجموع ضرایب جملات توان فرد در یک چندجمله‌ای برابر باشد یک ریشهٔ آن چند جمله‌ای برابر با ۱- است.

۲ ــ چند جمله‌ایهای زیر را تجزیه کنید :

۱) $3x^2+2x-8$

۲) $2x^2-13x+20$

۳) $6x^2-25x+14$

۴) $4x^3+7x^2-10x+2$

۵) $x^4+x^2-6x+4$

۶) $x^4+4x^3-12x^2-32x+64$

۷) $8x^4-80x^3+258x^2-310x+100$

۸) $x^5-8x^4+19x^3-9x^2-27$

۹) $x^6-2x^5-10x^4+10x^3-10x^2+11x-12$

۱۰) $x^7+2x^6-12x^5-24x^4+48x^3+96x^2-64x-128$

## ◀ یک حالت ویژه

چند جمله‌ای درجهٔ زوج :

$R(x)=2x^4-3x^3+2x^2-3x+2$ را درنظر بگیرید. برای تجزیه این چند جمله‌ای از طریق ریشه‌یابی مطابق بحث گذشته می‌بایست اعداد $\{\mp 2,\mp\frac{1}{2},\mp 1\}$ را در آن امتحان کرد. با کمی صرف وقت مشخص می‌شود که هیچ‌کدام از اعداد یادشده ریشهٔ چندجمله‌ای $R(x)$ نمی‌باشند. این بدان معنی نیست که چند جمله‌ای $R(x)$ تجزیه‌ناپذیر است و دارای عامل اول نیست بلکه این مطلب را می‌رساند که دارای عامل درجه یک نیست یا به بیان دیگر $R(x)$ را نمی‌توان به صورت $R(x)=(ax+b)\,Q(x)$ نوشت که $Q(x)$ چند جمله ای درجه سوم باشد. امّا امکان دارد چند جمله ای $R(x)$ به صورت حاصل ضرب دو چند جمله‌ای درجه دوم و به شکل کلّی

$R(x)=(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)$ تجزیه شود. برای بررسی این احتمال به روش زیر عمل می کنیم :

$$2x^4-3x^3+2x^2-3x+2=x^2\left[2x^2-3x+2-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right]$$

عبارت داخل کروشه را برحسب $x+\frac{1}{x}$ مرتب می کنیم. داریم :

$$x^2\left[2x^2-3x+2-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right]=x^2\left[2(x+\frac{1}{x})^2-3(x+\frac{1}{x})-2\right]$$

با فرض $x+\frac{1}{x}=y$ خواهیم داشت :

$$x^2\left[2(x+\frac{1}{x})^2-3(x+\frac{1}{x})-2\right]=x^2\left[2y^2-3y-2\right]$$

عبارت $(2y^2-3y-2)$ از طریق ریشه‌یابی قابل تجزیه است و داریم :

$$x^2\left[2y^2-3y-2\right]=x^2\left[(2y+1)(y-2)\right]$$

چنانچه به جای $y$ در عبارت فوق مقدار مساویش یعنی $x+\frac{1}{x}$ را قرار داده و ساده کنیم خواهیم داشت :

$$x^2\left[(2(x+\frac{1}{x})+1)(x+\frac{1}{x}-2)\right]=(2x^2+x+2)(x^2-2x+1)$$

بنابراین هرچند جمله‌ای درجه چهارم که به شکل $R(x)=ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$ باشد این قابلیت را دارد که با فاکتورگیری از $x^2$ چندجمله‌ای را برحسب $x+\frac{1}{x}$ مرتب کرده و در صورتی که چند جمله‌ای $R(x)$ تجزیه‌پذیر باشد با استفاده از ریشه‌یابی به تجزیه آن پرداخت زیرا می‌توانیم بنویسیم :

$$R(x)=ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$$
$$=x^2\left[a(x+\frac{1}{x})^2+b(x+\frac{1}{x})-2a+c\right]$$

چنانچه $R(x)$ تجزیه‌پذیر باشد عبارت داخل کروشه را می‌توان با درنظر گرفتن $x+\frac{1}{x}=y$ و از روش ریشه‌یابی تجزیه کرد که در مرحله بعدی با جایگزین کردن مقدار $x+\frac{1}{x}$ به جای $y$ عاملهای اول $R(x)$ به دست خواهند آمد.

همچنین می توان چند جمله‌ای درجه ششم

$K(x)=ax^6+bx^5+cx^4+dx^3+cx^2+bx+a$

را با فاکتورگیری از $x^3$ و مرتب کردن برحسب $x+\frac{1}{x}$ به روش فوق تجزیه کرد. به مثال زیر توجه کنید.

چند جمله‌ای $K(x)=6x^6-x^5+13x^4+13x^2-x+6$ را تجزیه کنید.

$$6x^6-x^5+13x^4+13x^2-x+6$$
$$=x^3\left[6x^3-x^2+13x+\frac{13}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x^3}\right]$$
$$=x^3\left[6(x^3+\frac{1}{x^3})-(x^2+\frac{1}{x^2})+13(x+\frac{1}{x})\right]$$
$$=x^3\left[6(x+\frac{1}{x})((x+\frac{1}{x})^2-3)-(x+\frac{1}{x})^2+2+13(x+\frac{1}{x})\right]$$

چنانچه $x+\frac{1}{x}=y$ را فرض کنیم داریم :

$$=x^3\left[6y(y^2-3)-y^2+2+13y\right]=x^3\left[6y^3-y^2-5y+2\right]$$

عبارت $(6y^3-y^2-5y+2)$ از طریق ریشه‌یابی قابل تجزیه به سه پرانتز $(y+1)(3y-2)(2y-1)$ است و درنتیجه

داریم :

$$x^3\left[6y^3-y^2-5y+2\right]=x^3\left[(2y-1)(3y-2)(y+1)\right]$$

با جایگزینی $x+\frac{1}{x}$ به جای $y$ در عبارت فوق و ساده کردن خواهیم داشت :

$$k(x)=(2x^2-x+2)(3x^2-2x+3)(x^2+x+1)$$

استفاده از همین روش، تجزیهٔ چند جمله‌ایهای مشابه را با توانهای بالاتر در صورت تجزیه‌پذیر بودن ممکن می‌سازد که تحقیق در این زمینه را به عهدهٔ دانش آموزان می‌گذاریم.

**تمرین:** چند جمله ایهای درجه زوج زیر را تجزیه کنید.

۱) $9x^4-12x^3+22x^2-12x+9$

۲) $6x^4+x^3+11x^2+x+6$

۳) $x^6+2x^5-20x^4-56x^3-20x^2+2x+1$

۴) $27x^6-54x^5+117x^4-116x^3+117x^2-54x+27$

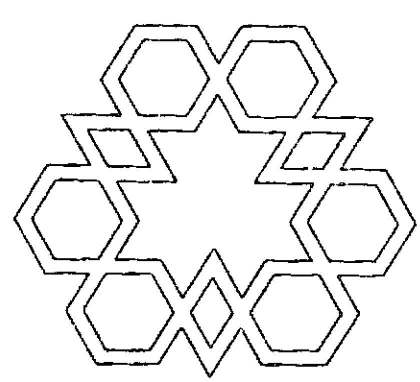
۵) $x^8-14x^6+51x^4-14x^2+1$

**راهنمایی:** برای تجزیهٔ شماره ۵ از $x^4$ فاکتور بگیرید و سپس برحسب $x+\frac{1}{x}$ مرتب کنید.

۶) $2x^4+3x^3-6x^2-3x+2$

۷) $x^6+6x^5+8x^4-6x^3-8x^2+6x-1$

**راهنمایی:** برای تجزیه تمرینهای شماره ۶ و ۷ به ترتیب از $x^2$ و $x^3$ فاکتورگیری کرده برحسب $(x-\frac{1}{x})$ مرتب کنید و مطابق شیوهٔ مذکور تجزیه کنید.



## ادب ریاضی

ریاضیات، در مسیر پیشرفت تکاملی خود، هم زیر تأثیر انگیزه بیرونی بوده است و هم زیر فشار انگیزهٔ درونی. انگیزهٔ بیرونی، یعنی نیازهای زندگی و نیازهای دانشهای طبیعی به ریاضیات؛ و انگیزه درونی، یعنی استدلال و منطق درونی ریاضیات که بر پایهٔ روش قیاسی شکل گرفته است.

از یک طرف، با بغرنجتر شدن زندگی اجتماعی و اقتصادی و در عین حال، با نیاز روزافزونی که دانشهای طبیعی، به‌ویژه اخترشناسی، فیزیک، موسیقی، اقتصاد، زیست‌شناسی،... برای دقیقتر شدن و «به‌ریاضی درآمدن» دارند، برای ریاضیات مسأله‌های تازه‌ای مطرح می‌شود و شاخه های تازه‌ای پدید می‌آید و، از طرف دیگر، منطق درونی ریاضیات، موجب استوارتر شدن مبانی پیشین و درک دقیقتر و قابل انعطافتر مفهومهای ریاضی می‌شود.

این دو انگیزه، بیرونی و درونی، هر دو همیشه در کار پیشبرد ریاضیات بوده‌اند. ولی گاه این و گاه آن پیشی گرفته و نیرومندتر عمل کرده است. با وجود این، هیچ کدام از این دو انگیزه نمی‌تواند برای مدتی بسیار طولانی، یکه‌تاز باشد و تاریخ ریاضیات نشان می‌دهد که دیر یا زود، به هم می‌رسند و «انتزاع» به یاری «عمل» می‌آید و «عمل»، «انتزاعهای تازه‌ای» را مطرح می‌کند.

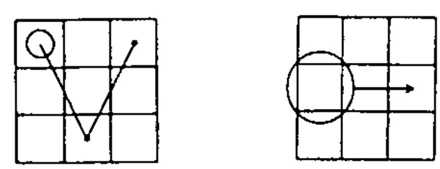
**از مقاله «ریاضیات کاربردی»**
**نوشته پرویز شهریاری، برهان ۱۶**

● نوشتهٔ مارتین گاردنر ● ترجمهٔ حسن نصیرنیا

# در پیرامون منظومهٔ شمسی

(قسمت سوم)

اگر قطر سکه از طول ضلع هر خانه کوچکتر باشد، بسادگی می‌توان فهمید که با دو بار لغزاندن آن، سکه از قسمتی از هریک از خانه‌ها عبور می‌کند. اما اگر قطرش بزرگتر از طول هر خانه باشد، با انجام یک حرکت (مطابق شکل) مقصود حاصل می‌شود.



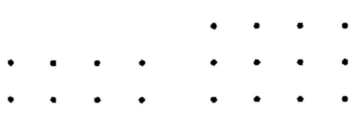
دو حرکت     یک حرکت

بدیهی است که این مسئلهٔ اصلی برای خانه‌های مشبکه در هر آرایهٔ مستطیلی و نیز خانه‌های آرایه‌های مثلثی و سایر الگوها قابل تعمیم است. بسیاری از این‌گونه مسأله‌ها راکه غالباً در شکل حرکتهای مختلف مهرهٔ وزیر در بازی شطرنج تعمیم یافته است؛ می‌توان در کتابهای معمایی سام‌لوید[1] و هنری ا. دودنی[2] ملاحظه کرد. از جمله مقاله‌های پیشگامی که به‌تعمیم مسألهٔ یادشده پرداخته، مقاله‌ای است تحت عنوان

Unicursal Polygonal Paths & other Graphs on Lattice Points

تألیف سالومن و. گولوم[3] و جان ل. سلفریج[4] که در مجلهٔ تخصصی پی، مو، اپسیلون، دورهٔ ششم، پاییز ۱۹۷۰، انتشار یافته است. مسأله در اینجا پیدا کردن مسیرهای کثیرالاضلاعی از راه نقطه‌های مشبکه است و نه خانه‌ها.

در زیر مجموعه‌ای از نقطه‌هایی را می‌بینید که جایگزین خانه‌های مشبکه شده‌اند. در اینجا از بازیکن خواسته می‌شود باکشیدن خطهایی که باید از نقطه‌ها بگذرند، مسیرهای پیوستهٔ چندضلعی شکل بسازد. برای برانگیختن علاقهٔ شما نسبت به‌موضوع گسترده و نامکشوف سرگرمیهای مربوط به‌نظریه نمودارها، آرایه‌های ۴×۳ و ۴×۴ زیر را در نظر می‌گیریم.



به‌کمک مسیرهای پیوسته از پاره‌خطهای مستقیم باید از نقطه‌های فوق عبور کرد. منظور از مسیر بسته آن است که مسیر پیوستهٔ خطها از نقطه‌ای که آغاز می‌شود به‌همان نقطه که لزوماً یکی از نقاط مشبکه نیست منتهی گردد. هر وضعیت دیگری که غیر از این باشد، مسیر باز نامیده می‌شود. می‌توان از نقطه‌های هریک از مشبکه‌های بالا، با حداقل شش قطعه خط گذشت. تشکیل مسیرهای بسته به‌مراتب مشکلتر از مسیرهای باز است. آیا می‌توانید برای هر الگو یک مسیر بستهٔ متشکل از ۶ قطعه خط بیابید؟

1. Sam Loyd 2. Henry E. Dudeney 3. Solomon W. Golomb 4. John L. Selfridge


(سوّم ریاضی نظام جدید و قدیم)

## کُدگذاری اطلاعات و نمایش اعداد صحیح و اعشاری در کامپیوتر (۷)

□ حسین ابراهیم‌زادهٔ قُلزم

**روش دوم مکمل‌گیری ذهنی**[1]**:** در این روش چه عدد A یک عدد صحیح مثبت باشد و چه یک عدد ممیزی مثبت (که در این حالت به‌طور موقت از ممیز صرف‌نظر می‌کنیم)، برای محاسبهٔ مکمل ۲ عدد A ، ابتدا رقم یا رقمهای صفر سمت راست عدد A را کنار گذاشته به‌محض رسیدن به‌اولین ۱، در عدد A ، آن را می‌نویسیم، به‌دنبال آن تمام یک‌ها به‌صفر و تمام صفرها را به‌یک تبدیل می‌کنیم.

**مثال:** مکمل ۲ عدد $(۱۰۱۱۰۱۰)_2$ را با روش بالا به‌دست آورید.

**حل:**

A=۱۰۱۱۰۱۰ ⇒ مکمل ۲ عدد A = ۰۱۰۰۱۱۰

اولین رقم غیرصفر = ۱۰۰۱۱۰

**مثال:** مکمل ۲ عدد $(۱۰۰۱۰/۰۱۰۱۰۱)_2$ را به‌دست آورید.

**حل:** چون عدد داده شده دارای ممیز است به‌طور موقت ممیز عدد را حذف و عددرا بدون‌ممیز درنظر می‌گیریم و طبق‌دستور بالا مکمل ۲ آن را به‌دست می‌آوریم، سپس ممیز را در مکان مربوطه‌اش قرار می‌دهیم. بنابراین،

A = ۱۰۰۱۰/۰۱۰۱۰۱

عدد A بدون ممیز = ۱۰۰۱۰۰۱۰۱۰۱

مکمل ۲ عدد A بدون ممیز = ۱۱۰۱۱۰۱۰۱۱

در نتیجه:

مکمل ۲ عدد $(۱۰۰۱۰/۰۱۰۱۰۱)_2$ = $(۱۱۰۱/۱۰۱۰۱۱)_2$

در نتیجه مکمل ۱۶ عدد $(۱۲۳)_{16}$ عدد $(EDD)_{16}$ است.

**مثال:** مکمل ۱۶ عدد $(۱۲۳/۱۲)_{16}$ را با روش ذهنی به‌دست آورید.

```
  FFF/F (۱۶)
 -۱۲۳۱ ۲
 ---------
  E D C/E E
```

درنتیجه مکمل ۱۶ عدد $(۱۲۳/۱۲)_{16}$ عدد $(EDC/EE)_{16}$ است.

**۳ـ استفاده از مکمل b−۱ :** هرگاه عدد A دارای m رقم در قسمت ممیزدار باشد، آنگاه مکمل b عدد A با استفاده از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

مکمل b عدد A = مکمل b−۱ + $b^{-m}$

تذکر: اگر عدد A قسمت ممیزدار نداشته باشد در آن صورت $m=۰$ می‌شود و مکمل b عدد A با افزودن یک به‌مکمل $b-۱$ به‌دست می‌آید، یعنی:

$$۱ + \text{مکمل } b-۱ = \text{مکمل } b \text{ عدد } A$$

مثال: مکمل ۲ عدد $(۱۰۱۱۰۱۰)_۲$ را با استفاده از مکمل ۱ به‌دست آورید.

حل:

$$\text{مکمل ۲ عدد } (۱۰۱۱۰۱۰)_۲ = ۱۰۰۱۰۱+۱=۱۰۰۱۱۰$$

مثال: مکمل۲عدد $(۱۱۰۰۱۱۰۱۰)_۲$ را با استفاده از مکمل ۱ به‌دست آورید.

حل:

$$\text{مکمل ۲ عدد } (۱۱۰۰۱۱۰۱۰)_۲ = (۱۱۰۰۱۰۱)_۲+۱$$
$$=(۱۱۰۰۱۱۰)_۲$$

مثال: مکمل ۲ عدد $(۱۰۰۱۰/۰۱۰۱۰۱)_۲$ را با استفاده از مکمل ۱ به‌دست آورید.

حل:

$$\text{مکمل ۲ عدد } (۱۰۰۱۰/۰۱۰۱۰۱)_۲$$
$$=(۱۱۰۱/۱۰۱۰۱۰)_۲ + ۱$$
$$=(۱۱۰۱/۱۰۱۰۱۱)_۲$$

مثال: مکمل ۸ عدد $(۴۵۶۳)_۸$ رابا استفاده از مکمل ۷ به‌دست آورید.

حل:

$$\text{مکمل ۸ عدد } (۴۵۶۳)_۸ = (۳۲۱۴)_۸+۱$$
$$=(۳۲۱۵)_۸$$

مثال: مکمل ۸ عدد $(۱۲۳/۴۵۶)_۸$ را با استفاده از مکمل ۷ به‌دست آورید.

حل: از آنجاکه $m=۳$ است درنتیجه:

$$\text{مکمل ۸ عدد } (۱۲۳/۴۵۶)_۸$$
$$=(۶۵۴/۳۲۱)_۸+۸^{-۳}$$
$$=(۶۵۴/۳۲۱)_۸+(۰/۰۰۱)_۸=(۶۵۴/۳۲۲)_۸$$

مثال: مکمل ۱۰ عدد $(۷۴/۳۶۰)_{۱۰}$ را با استفاده از مکمل ۹ به‌دست آورید.

حل: $m=۳$ است. درنتیجه:

$$\text{مکمل ۱۰ عدد } (۷۴/۳۶۰)_{۱۰}$$
$$=(۲۵/۶۳۹)_{۱۰}+۱۰^{-۳}=(۲۵/۶۴۰)_{۱۰}$$

مثال: مکمل ۱۰ عدد $(۱۸)_{۱۰}$ را با استفاده از مکمل ۹ به‌دست آورید.

حل:

$$\text{مکمل ۱۰ عدد } (۱۸)_{۱۰} = (۸۱)_{۱۰}+۱=(۸۲)_{۱۰}$$

مثال: مکمل ۱۶ عدد $(۱۲۳)_{۱۶}$ را با استفاده از مکمل ۱۵ به‌دست آورید.

حل:

$$\text{مکمل ۱۶ عدد } (۱۲۳)_{۱۶} = (EDC)_{۱۶}+۱=(EDD)_{۱۶}$$

مثال: مکمل ۱۶ عدد $(۱۲۳/۱۲)_{۱۶}$ را با استفاده از مکمل ۱۵ به‌دست آورید.

حل: $m=۲$ است. درنتیجه:

$$\text{مکمل ۱۶ عدد } (۱۲۳/۱۲)_{۱۶}$$
$$=(EDC/ED)_{۱۶}+۱۶^{-۲}$$
$$=(EDC/ED)_{۱۶}+(۰/۰۱)_{۱۶}$$
$$=(EDC/EE)_{۱۶}$$

حال وقت آن رسیده است تا محاسبهٔ مکمل $b-۱$ یک عدد را با استفاده از مکمل b توضیح دهیم.

**محاسبهٔ مکمل $b-۱$ با استفاده از مکمل b:** می‌دانیم بین مکمل b و مکمل $b-۱$ عدد مثبت A با m رقم در قسمت ممیزی، رابطه زیر برقرار است:

$$\text{مکمل } b = \text{مکمل } b-۱ + b^{-m}$$

در نتیجه

$$\text{مکمل } b-۱ = \text{مکمل } b - b^{-m}$$

اگر عدد A قسمت ممیزی نداشته باشد در این صورت $m=۰$ است و داریم:

$$\text{مکمل } b-۱ = \text{مکمل } b - b^{۰} = \text{مکمل } b - ۱$$

مثال: مکمل ۱ عدد $(۱۰۱۱۰۱۰)_۲$ را با استفاده از مکمل ۲ به‌دست آورید.

حل:

$$\text{مکمل ۱ عدد } (۱۰۱۱۰۱۰)_۲$$
$$=(۱۰۰۱۱۰)_۲-۱=(۱۰۰۱۰۱)_۲$$

مثال: مکمل ۱ عدد $(۱۱۰۰۱۱۰۰)_۲$ را با استفاده از مکمل ۲ به‌دست آورید.

حل:

$$\text{مکمل ۱ عدد } (۱۱۰۰۱۱۰۰)_۲$$

$=(۱۱۰۱۰۰)_۲-۱=(۱۱۰۰۱۱)_۲$

**مثال:** مکمل ۱ عدد $(۱۰۰۱۰/۰۱۰۱۰۱)_۲$ را با استفاده از مکمل ۲ به‌دست آورید.

**حل:** چون در قسمت ممیزی ۶ رقم وجود دارد درنتیجه $m=۶$ و همچنین $b=۲$.

بنابراین:

$$\text{مکمل ۱ عدد } (۱۰۰۱۰/۰۱۰۱۰۱)_۲$$
$$=(۱۱۰۱/۱۰۱۰۱۱)_۲-۲^{-۶}$$
$$=(۱۱۰۱/۱۰۱۰۱۱)_۲-(۰/۰۰۰۰۰۱)_۲$$
$$=(۱۱۰۱/۱۰۱۰۱۰)_۲$$

**مثال:** مکمل ۷ عدد $(۴۵۶۳)_۸$ را با استفاده از مکمل ۸ به‌دست آورید.

**حل:** $\text{مکمل ۷ عدد } (۴۵۶۳)_۸ = \text{مکمل ۸} - ۸^{-m}$

چون عدد داده شده یک عدد صحیح است از این رو $m=۰$.

بنابراین: $\text{مکمل ۷ عدد } (۴۵۶۳)_۸$

$$=\text{مکمل ۸}-۱=(۳۲۱۵)_۸-۱=(۳۲۱۴)_۸$$

**مثال:** مکمل ۷ عدد $(۱۲۳/۴۵۶)_۸$ را با استفاده از مکمل ۷ به‌دست آورید.

**حل:** از آنجا که $m=۳$ است درنتیجه:

$$\text{مکمل ۷ عدد } (۱۲۳/۴۵۶)_۸ = \text{مکمل ۸} - ۸^{-۳}$$
$$=(۶۵۴/۳۲۲)_۸-(۰/۰۰۱)_۸$$
$$=(۶۵۴/۳۲۱)_۸$$

**مثال:** مکمل ۹ عدد ۱۸ را با استفاده از مکمل ۱۰ به‌دست آورید.

**حل:**

$$\text{مکمل ۹ عدد ۱۸} = \text{مکمل ۱۰} - ۱ = ۸۲-۱=۸۱$$

**مثال:** مکمل ۹ عدد $(۷۴/۳۶۰)_{۱۰}$ را با استفاده از مکمل ۱۰ به‌دست آورید.

**حل:** چون $m=۳$ است، درنتیجه:

$$\text{مکمل ۹ عدد } (۷۴/۳۶۰)_{۱۰} = \text{مکمل ۱۰} - ۱۰^{-۳}$$
$$=(۲۵/۶۴۰)_{۱۰}-(۰/۰۰۱)_{۱۰}$$
$$=(۲۵/۶۳۹)_{۱۰}$$

**مثال:** مکمل ۱۵ عدد $(۱۲۳)_{۱۶}$ را با استفاده از مکمل ۱۶ به‌دست آورید:

**حل:** $\text{مکمل ۱۵ عدد } (۱۲۳)_{۱۶} = \text{مکمل ۱۶} - ۱$

$$=(EDD)_{۱۶}-۱=(EDC)_{۱۶}$$

**مثال:** مکمل ۱۵ عدد $(۱۲۳/۱۲)_{۱۶}$ را با استفاده از مکمل ۱۶ به‌دست آورید.

**حل:** از آنجا که $m=۲$ است، درنتیجه:

$$\text{مکمل ۱۵ عدد } (۱۲۳/۱۲)_{۱۶} = \text{مکمل ۱۶} - ۱۶^{-۲}$$
$$=(EDC/EE)-(۰/۰۱)_{۱۶}=(EDC/ED)_{۱۶}$$

## موارد استفادهٔ مکمل b و مکمل ۱ـ b در تفریق دو عدد:

**تفریق به‌کمک مکمل b:** روش مستقیم تفریق که در مدارس ابتدایی آموخته می‌شود، از مفهوم رقم قرضی (Borrowing) استفاده می‌کند. در این روش هنگامی که رقم مفروق منه کوچکتر از رقم مفروق است، یک واحد از رقم مرتبهٔ بالاتر قرض می‌کنیم. به‌نظر می‌رسد زمانی که تفریق به‌کمک کاغذ و مداد انجام می‌گیرد، این روش ساده‌ترین است، اما ثابت شده است که وقتی تفریق به‌وسیلهٔ کامپیوتر و سخت‌افزار انجام می‌شود، کارایی روش رقم قرضی[1] از روش زیر که مکمل‌ها و جمع را به‌کار می‌گیرد کمتر است.

الگوریتم تفریق دو عدد M و N یعنی $M-N$ که در مبنای b هستند به‌صورت زیر است:

۱ ـ مفروق منه (M) را به‌مکمل b مفروق (N) اضافه کنید.

۲ ـ اگر درنتیجه حاصل از جمع آخرین رقمهای مرحلهٔ ۱ رقم انتقالی وجود داشت از آن صرف‌نظر کنید در غیر این صورت مکمل b عدد حاصل از مرحلهٔ ۱ را به‌دست آورده و جلوی آن علامت منفی قرار دهید.

**مثال:** حاصل تفریق ۳۲۵۰ − ۷۲۵۳۲ را با استفاده از مکمل ۱۰ به‌دست آورید.

**حل:**

$M=۷۲۵۳۲$

$N=۳۲۵۰$

$\text{مکمل ۱۰ عدد N} = ۹۶۷۵۰$

(۱) رقم انتقالی

$$\Rightarrow \begin{array}{r} ۷۲۵۳۲ \\ +۹۶۷۵۰ \\ \hline ۶۹۲۸۲ \end{array}$$

چون درنتیجه حاصل از جمع آخرین رقمها، رقم انتقالی[2] (۱) وجود دارد از آن صرف‌نظر می‌کنیم. بنابراین:

$$۷۲۵۳۲-۳۲۵۰=۶۹۲۸۲$$

**مثال:** حاصل تفریق ۷۲۵۳۲−۳۲۵۰ را با استفاده از مکمل ۱۰ به‌دست آورید.

حل:

M=۰۳۲۵۰

N=۷۲۵۳۲

N مکمل ۱۰ عدد =۲۷۴۶۸

۰۳۲۵۰
⇒ ۲۷۴۶۸+
۳۰۷۱۸

در حاصل جمع، رقم انتقالی ظاهر نشد، درنتیجه داریم:

۳۲۵۰−۲۷۴۶۸=−(مکمل ۱۰ عدد ۳۰۷۱۸)=−۶۹۲۸۲

مثال: حاصل تفریق ۱۰۱۰۱۰۰−۱۰۰۰۰۱۱ را با استفاده از مکمل ۲ به‌دست آورید.

حل:

M=۱۰۱۰۱۰۰

N=۱۰۰۰۰۱۱

N مکمل ۲ عدد =۱۱۱۱۰۱

(۱) رقم انتقالی

۱۰۱۰۱۰۰
⇒ ۰۱۱۱۱۰۱+
۰۰۱۰۰۰۱

چون درنتیجه حاصل از جمع آخرین رقمها، رقم انتقالی (۱) وجود دارد از آن صرف‌نظر می‌کنیم. بنابراین:

۱۰۱۰۱۰۰−۱۰۰۰۰۱۱=۰۰۱۰۰۰۱=۱۰۰۰۱

مثال: حاصل تفریق ۱۰۰۰۰۱۱−۱۰۱۰۱۰۰ را با استفاده از مکمل ۲ به‌دست آورید.

حل:

M=۱۰۰۰۰۱۱

N=۱۰۱۰۱۰۰

N مکمل ۲ عدد =۱۰۱۱۰۰

۱۰۰۰۰۱۱
⇒ ۰۱۰۱۱۰۰+
۱۱۰۱۱۱۱

چون در حاصل‌جمع رقم انتقالی ظاهر نشده است، درنتیجه:

۱۰۰۰۰۱۱−۱۰۱۰۱۰۰=−(مکمل ۲ عدد ۱۱۰۱۱۱۱)

=−۰۰۱۰۰۰۱=−۱۰۰۰۱

### تفریق به کمک مکمل ۱−b:

الگوریتم تفریق دو عدد M و N یعنی M−N که در مبنای b هستند با استفاده از مکمل ۱−b به‌صورت زیر است:

۱ـ مفروق منه (M) را به‌مکمل ۱−b، مفروق (N) اضافه کنید.

۲ـ اگر درنتیجه حاصل از جمع آخرین رقمهای مرحلهٔ ۱ رقم انتقالی وجود داشت آن را به‌رقم یکان حاصل جمع اخیر اضافه کنید درغیر این صورت مکمل ۱−b عدد حاصل از مرحلهٔ ۱ را به‌دست آورده جلوی آن علامت منفی قرار دهید.

مثال: حاصل تفریق ۷۲۵۳۲−۳۲۵۰ را با استفاده از مکمل ۹ به‌دست آورید.

حل:

M=۷۲۵۳۲

N=۰۳۲۵۰

N مکمل ۹ عدد =۹۶۷۴۹

(۱) رقم انتقالی

۷۲۵۳۲
⇒ ۹۶۷۴۹+
۶۹۲۸۱

درنتیجه:

۷۲۵۳۲−۳۲۵۰=۶۹۲۸۱+۱=۶۹۲۸۲

مثال: حاصل تفریق ۳۲۵۰−۷۲۵۳۲ را با استفاده از مکمل ۹ به‌دست آورید.

حل:

M=۰۳۲۵۰

N=۷۲۵۳۲

N مکمل ۹ عدد =۲۷۴۶۷

۰۳۲۵۰
⇒ ۲۷۴۶۷+
۳۰۷۱۷

چون در حاصل‌جمع رقم انتقالی ظاهر نشد درنتیجه:

۳۲۵۰−۷۲۵۳۲=−(مکمل ۹ عدد ۳۰۷۱۷)=−۶۹۲۸۲

مثال: حاصل تفریق ۱۰۱۰۱۰۰−۱۰۰۰۰۱۱ را با استفاده از مکمل ۱ به‌دست آورید.

حل:

M=۱۰۱۰۱۰۰

N=۱۰۰۰۰۱۱

N مکمل ۱ عدد =۰۱۱۱۱۰۰

(۱) رقم انتقالی

۱۰۱۰۱۰۰
⇒ ۰۱۱۱۱۰۰+
۰۰۱۰۰۰۰

در نتیجه:

۱۰۱۰۱۰۰−۱۰۰۰۰۱۱= ۰۰۱۰۰۰۰+۱=۱۰۰۰۱

مثال: حاصل تفریق ۱۰۰۰۰۱۱−۱۰۱۰۱۰۰ را با استفاده از مکمل ۱ به‌دست آورید.

حل:

M=۱۰۰۰۰۱۱

N=۱۰۱۰۱۰۰

N مکمل ۱ عدد =۰۱۰۱۰۱۱

۱۰۰۰۰۱۱
⇒ ۰۱۰۱۰۱۱+
۱۱۰۱۱۱۰

چون در حاصل‌جمع بالا رقم انتقالی ظاهر نشده،در نتیجه داریم:

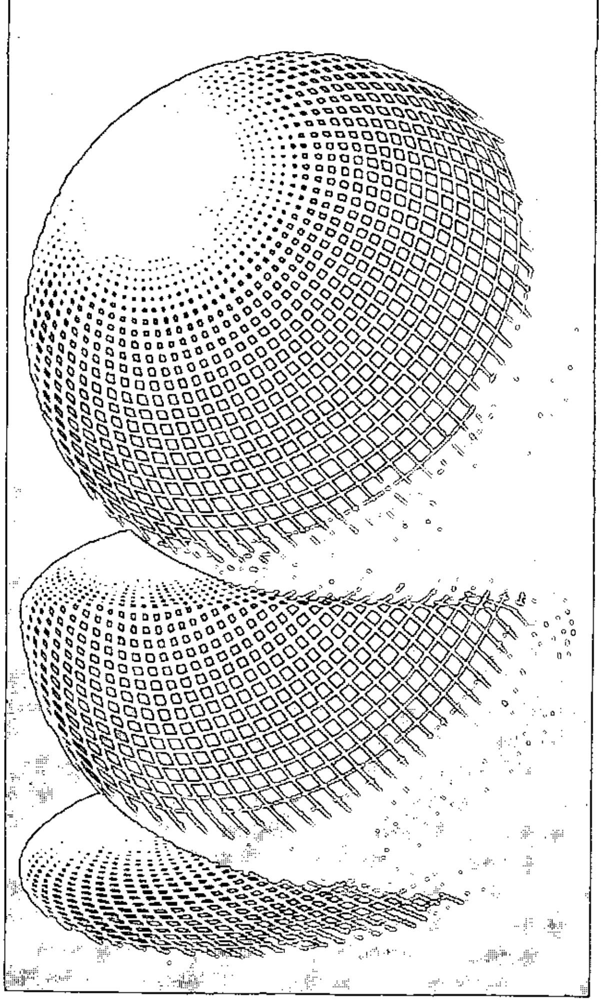
۱۰۰۰۰۱۱−۱۰۱۰۱۰۰=−(مکمل ۱ عدد ۱۱۰۱۱۱۰)

=−۱۰۰۰۱

### واژه نامهٔ ریاضی و کامپیوتر:

1- Borrowing method

2- End arround carry



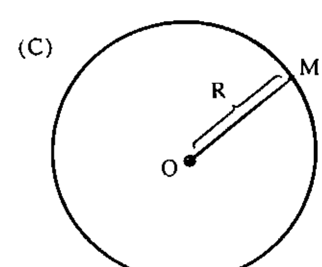
# مکان هندسی

(قسمت هشتم)

(اوّل ، دوم ، سوم ، چهارم دبیرستان)

محمد هاشم رستمی

۱ــ دایره : مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که از نقطهٔ ثابتی واقع در آن صفحه به فاصلهٔ ثابتی باشد، یک دایره است، که آن نقطهٔ ثابت مرکز، و آن مقدار ثابت، شعاع آن دایره می‌باشد. دایرهٔ به مرکز O و به شعاع R را به‌صورت C(O,R) نمایش می‌دهند.

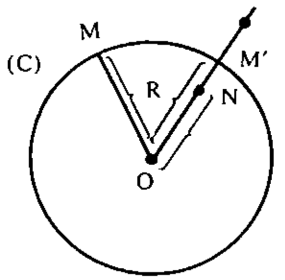



**اثبات به روش هندسی:** دایرهٔ C(O,R) را درنظر می‌گیریم.

اولاً ــ هر نقطه‌ای مانند M که روی این دایره قرار داشته باشد، فاصله‌اش از مرکز دایره برابر R است، یعنی $OM = R$.

ثانیاً ــ هر نقطه مانند N از صفحه این دایره که فاصله‌اش تا مرکز دایره برابر R باشد، روی این دایره قرار دارد. زیرا اگر نقطه N روی این دایره نباشد، نیم‌خط ON دایره را در نقطهٔ $M'$ قطع می‌کند. حال اگر نقطهٔ N روی پاره‌خط $OM'$ باشد، $ON < OM' = R$ است، که این خلاف فرض است. و درصورتی که نقطهٔ N خارج پاره‌خط $OM'$ واقع باشد، $ON > OM' = R$ است که این نیز خلاف فرض است. بنابراین نقطهٔ N که به فاصلهٔ R از مرکز دایره قرار دارد بر نقطهٔ $M'$ منطبق و لذا روی دایره است. پس :

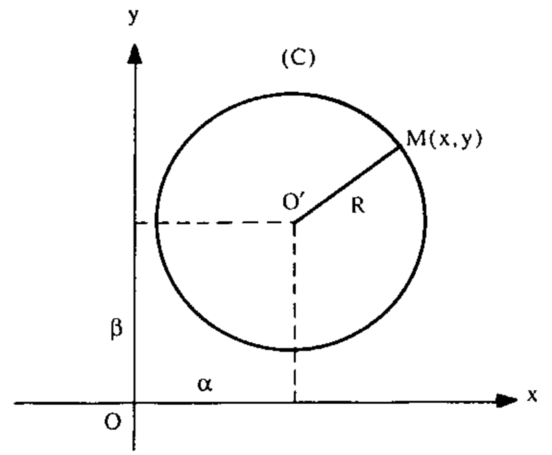
دایره مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه است که فاصله‌اش از نقطه ثابتی واقع در آن صفحه مقدار ثابتی است.



**اثبات به روش تحلیلی:** دایرهٔ (C) به مرکز $O'(\alpha,\beta)$ و به شعاع R را در دستگاه مختصات xoy درنظر می‌گیریم. اگر $M(x,y)$ نقطه‌ای دلخواه از این دایره باشد، داریم :

$$O'M = R \Rightarrow \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = R \Rightarrow$$

$$\boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = R^2} \qquad (1)$$




رابطهٔ (۱) معادلهٔ دایره‌ای است که مرکزش نقطهٔ $O'(\alpha,\beta)$ و شعاعش برابر R است. به عکس، هر نقطه مانند $M(x,y)$ که مختصاتش در معادلهٔ (۱) صدق کند، فاصله‌اش از نقطهٔ $O'(\alpha,\beta)$ برابر R می‌باشد. یعنی روی دایرهٔ $C(O',R)$ قرار دارد.

بنابراین :

مکان هندسی نقطه‌ای از دستگاه مختصات xoy که فاصله‌اش از نقطه ثابت $O'(\alpha,\beta)$ واقع در این صفحه مقدار ثابت R باشد، دایره‌ای به معادلهٔ زیر است :

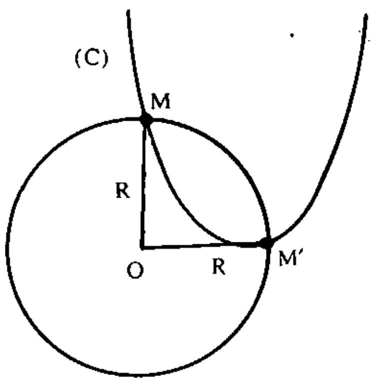
$$\boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = R^2}$$

نکته ۱ : اگر مرکز دایرهٔ به شعاع R بر مبدأ مختصات منطبق باشد، معادلهٔ دایره به‌صورت $x^2+y^2=R^2$ خواهد بود.

نکته ۲ : معادلهٔ (۱) را به‌صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ نیز می‌توان نمایش داد که در این‌صورت مرکز دایره، نقطهٔ $O'(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$ و شعاع دایره $R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$ ، و شرط حقیقی بودن دایره $a^2+b^2-4c \geq 0$ است.

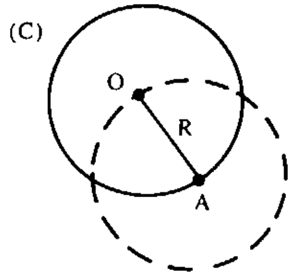
**مثال ۱ــ** نقطهٔ O و منحنی (C) در یک صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای روی منحنی (C) تعیین کنید که از نقطه O به فاصلهٔ معلوم R باشد.

**حل ــ** مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که از نقطهٔ ثابت O به فاصلهٔ معین R باشد، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R است. این دایره را رسم می‌کنیم. نقطه یا نقاط تقاطع این دایره با منحنی (C) جواب مسأله‌اند و به تعداد نقاط برخورد آن دو، مسأله دارای جواب است.




**مثال ۲ــ** مکان هندسی مرکز دایره‌هایی را تعیین کنید که از نقطهٔ ثابت A واقع در یک صفحه می‌گذرند.

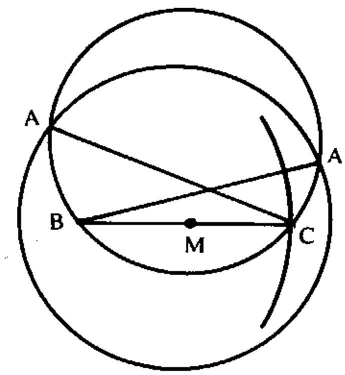
**حل ــ** اگر دایرهٔ $C(O,R)$ یکی از دایره‌هایی باشد که از نقطهٔ ثابت A می‌گذرند، $AO=R$ است بنابراین مکان هندسی نقطهٔ O دایره‌ای به مرکز A و به شعاع R می‌باشد.




**مثال ۳ــ** مثلث ABC را با معلوم بودن اندازه‌های، R شعاع دایرهٔ محیطی، $BC=a$ ضلع مثلث و $AM=m_a$ میانهٔ وارد بر ضلع a رسم کنید.

**حل ــ** دایرهٔ محیطی مثلث، یعنی دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R را رسم می‌کنیم. به مرکز نقطهٔ B واقع بر این دایره و به شعاع $BC=a$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دایرهٔ محیطی مثلث را در نقطهٔ C قطع کند. از B به C وصل می‌کنیم. آنگاه وسط

پاره‌خط BC را مشخص کرده M می‌نامیم. به مرکز M و به شعاع $MA = m_a$ دایره‌ای رسم می‌کنیم. اگر این دایره، دایرهٔ محیطی مثلث را در دو نقطه A و 'A قطع کند از A و 'A به B و C وصل می‌کنیم. دو مثلث متساوی ABC و A'BC جواب مسأله‌اند. مسأله در صورتی جواب دارد که دایرهٔ به مرکز B و به شعاع a و سپس دایرهٔ به مرکز M و به شعاع $m_a$ دایرهٔ محیطی مثلث ABC را قطع کنند و یا با آن مماس باشند.




**مثال ۴ــ** نقطهٔ $O'(۰,۱)$ و خط $D: ۲x - y + ۲ = ۰$ مفروضند. نقطه‌ای روی خط D بیابیدکه از نقطهٔ 'O به فاصله ۳ باشد.

**حل ــ** مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که از نقطهٔ 'O به فاصلهٔ ۳ است دایره‌ای به مرکز 'O و به شعاع ۳ می‌باشد. بنابراین معادلهٔ این دایره را نوشته، نقطهٔ برخورد آن با خط D را پیدا می‌کنیم. داریم :

$$O'(۰,۱)\ ,\ R = ۳\ ,\ (x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = R^۲ \Rightarrow$$
$$(x-۰)^۲ + (y-۱)^۲ = ۹$$
$$\Rightarrow x^۲ + (y-۱)^۲ = ۹ \qquad \text{معادلهٔ دایره}$$

$$\begin{cases} x^۲ + (y-۱)^۲ = ۹ \\ \qquad \Rightarrow x^۲ + (۲x+۳-۱)^۲ = ۹ \Rightarrow ۵x^۲ + ۸x - ۵ = ۰ \\ ۲x - y + ۳ = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_۱, x_۲ = \frac{-۴ \pm \sqrt{۴۱}}{۵} \Rightarrow y = \frac{۷ \pm ۲\sqrt{۴۱}}{۵} \Rightarrow$$

$$M_۱\left(\frac{-۴+\sqrt{۴۱}}{۵}, \frac{۷+۲\sqrt{۴۱}}{۵}\right)$$

$$M_۲\left(\frac{-۴-\sqrt{۴۱}}{۵}, \frac{۷-۲\sqrt{۴۱}}{۵}\right)$$

**مثال ۵ــ** نقطهٔ $O'(۲,-۳)$ مرکز دایره‌ای است که از خط $D: ۳x - ۴y + ۲ = ۰$ وتری به طول ۶ جدا می‌کند. معادلهٔ این دایره را بنویسید.

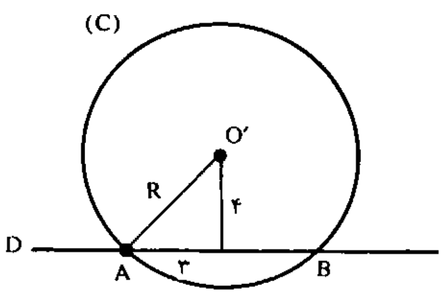
**حل ــ** اگر دایرهٔ $C(O',R)$ جواب مسأله و AB وتری باشد که این دایره از خط D جدا می‌کند، درصورتی که عمود O'H را بر خط D فرود آوریم در مثلث O'AH داریم :

$$O'A = R\ ,\ O'H = d = \frac{|ax_۱ + by_۱ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۶+۱۲+۲|}{\sqrt{۹+۱۶}} = ۴$$

$$AH = \frac{AB}{۲} = \frac{۶}{۲} = ۳$$

$$R = O'A = \sqrt{O'H^۲ + AH^۲} = \sqrt{۱۶+۹} = ۵$$
$$\Rightarrow (x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = R^۲ \Rightarrow (x-۲)^۲ + (y-۳)^۲ = ۲۵$$

معادلهٔ دایره




**مثال ۶ــ** دو نقطهٔ $A(۰,۳)$ و $B(۴,۰)$ مفروضند. نقطه‌ای تعیین کنید که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۲ و از نقطهٔ B به فاصلهٔ ۳ باشد.

**حل ــ** نقطهٔ برخورد دو دایرهٔ $C_۱(A,۲)$ و $C_۲(B,۳)$ جواب مسأله است.

$$(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = R^۲ \Rightarrow C_۱: x^۲ + (y-۳)^۲ = ۴,$$
$$C_۲: (x-۴)^۲ + y^۲ = ۹$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^۲ + (y-۳)^۲ = ۴ \\ \qquad \Rightarrow C_۲ - C_۱ = ۰ \Rightarrow ۸x - ۶y - ۲ = ۰ \\ (x-۴)^۲ + y^۲ = ۹ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۴x - ۳y - ۱ = ۰ \Rightarrow x^۲ + \left(\frac{۴x-۱}{۳} - ۳\right)^۲ = ۴ \Rightarrow$$

$$۲۵x^{۲}-۸۰x+۶۴=۰$$
$$\Rightarrow x'=x''=\frac{۸}{۵}\Rightarrow y=\frac{۹}{۵}\ \Rightarrow M(\frac{۸}{۵},\frac{۹}{۵})$$

مسأله تنها یک جواب دارد زیرا دو دایره بر هم مماسند.

**مثال ۷ــ** معادلهٔ دایرهٔ محیطی مثلث ABC را درصورتی که $A(۳,۰)$ و $B(۰,۱)$ و $C(-۱,۰)$ باشد، به‌دست آورید.

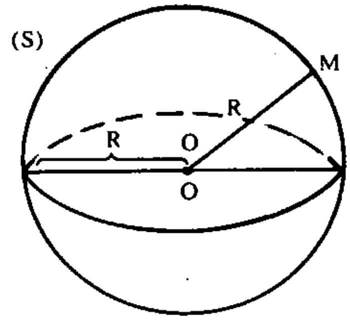
**حل ــ** معادلهٔ دایره را به صورت $x^{۲}+y^{۲}+ax+by+c=۰$ درنظر می‌گیریم. مختصات این نقطه‌ها در معادلهٔ دایره باید صدق کند پس داریم:

$$A(۳,۰)\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}+ax+by+c=۰\Rightarrow ۳a+c+۹=۰ \quad (۱)$$
$$B(۰,۱)\Rightarrow b^{۲}+c+۱=۰ \qquad (۲)$$
$$C(-۱,۰)\Rightarrow -a+c+۱=۰ \qquad (۳)$$

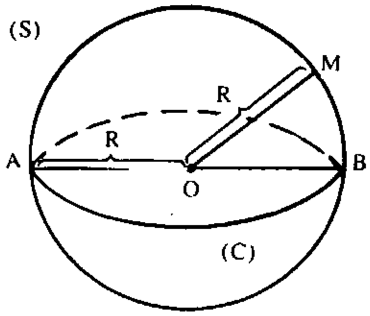
$$\begin{cases} ۳a+c+۹=۰ \\ b+c+۱=۰ \\ -a+c+۱=۰ \end{cases} \Rightarrow\ a=-۲\ ,\ b=۲\ ,\ c=-۳$$

معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر $\Rightarrow \boxed{x^{۲}+y^{۲}-۲x+۲y-۳=۰}$

۲ــ کره SPHERE : مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از نقطهٔ ثابتی به فاصلهٔ ثابتی باشد، کره‌ای است که آن نقطهٔ ثابت مرکز و آن مقدار ثابت شعاع آن کره است. کرهٔ به مرکز O و به شعاع R را به‌صورت $S(O,R)$ نمایش می‌دهند. هر کره با معلوم بودن مرکز و شعاع آن مشخص است.

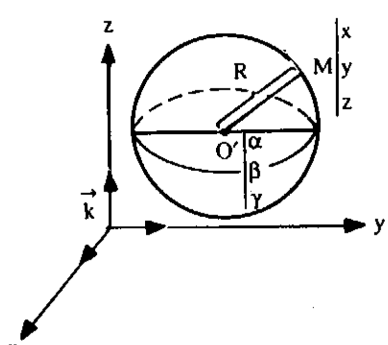



**اثبات به روش هندسی ــ** دایرهٔ $C(O,R)$ را درنظر می‌گیریم. می‌دانیم که این دایره مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه است که از نقطهٔ ثابت O به فاصلهٔ ثابت R واقع است. قطر دلخواه AB از این دایره را رسم می‌کنیم. از دوران این دایره حول قطر AB کرهٔ $S(O,R)$ بوجود می‌آید. بدیهی است که هر نقطه واقع بر این کره از نقطهٔ O به فاصلهٔ R است و هر نقطه‌ای از فضا که از نقطهٔ O به فاصلهٔ R واقع باشد روی این کره قرار دارد (زیرا هر نقطه‌ای از این کره روی یکی از دایره‌های به مرکز O و به شعاع R واقع است). پس: مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از نقطهٔ ثابت O به فاصلهٔ ثابت R باشد، کره‌ای به مرکز O و به شعاع R است.




**اثبات به روش تحلیلی ــ** در دستگاه مختصات xoy. نقطهٔ ثابت $O'(\alpha,\beta,\gamma)$ را درنظر می‌گیریم.

فرض می‌کنیم $M(x,y,z)$ یک نقطه از مکان هندسی فوق باشد، یعنی نقطه‌ای باشد که از نقطهٔ $O'$ به فاصلهٔ R باشد، در این صورت داریم:

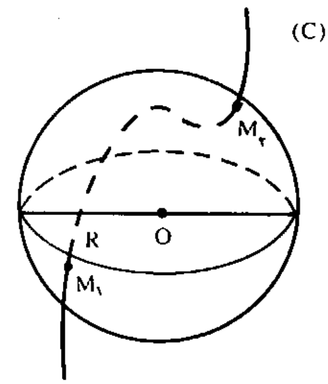



$$O'M=R=\sqrt{(x-\alpha)^{۲}+(y-\beta)^{۲}+(z-\gamma)^{۲}}\quad\Rightarrow$$
$$(x-\alpha)^{۲}+(y-\beta)^{۲}+(z-\gamma)^{۲}=R^{۲} \qquad (۱)$$

به عکس، هر نقطه‌ای از فضا که مختصاتش در معادلهٔ (۱) صدق کند، از نقطهٔ ثابت $O'(\alpha,\beta,\gamma)$ به فاصلهٔ ثابت R واقع است. بنابراین رابطهٔ (۱) معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا است که از نقطهٔ ثابت $O'$ به فاصلهٔ ثابت R قرار دارد، یعنی معادلهٔ کره‌ای به مرکز $O'$ و به شعاع R است.

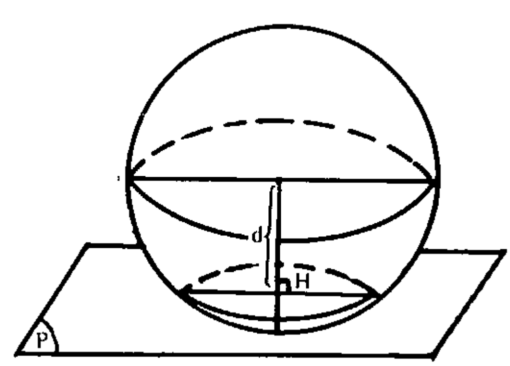
به‌طوری که دیده می‌شود معادلهٔ کره، معادله‌ای درجه دوم است. بنابراین کره سطحی درجه دوم می‌باشد.

**مثال ۱ــ** نقطه O و منحنی (C) غیرواقع در یک صفحه مفروضند. نقطه‌ای روی منحنی (C) تعیین کنید که از نقطهٔ O به فاصلهٔ معلوم R باشد.




**حل ــ** مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از نقطهٔ ثابت O به فاصلهٔ R باشد کره‌ای به مرکز O و به شعاع R است. این کره را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این کره با منحنی (C) جواب مسأله است، و به تعداد نقاط برخورد، مسأله دارای جواب است.

**مثال ۲ــ** صفحهٔ P و نقطهٔ O غیرواقع بر آن مفروضند. مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحه را تعیین کنید که از نقطهٔ O به فاصلهٔ معلوم R باشد (بحث کنید).



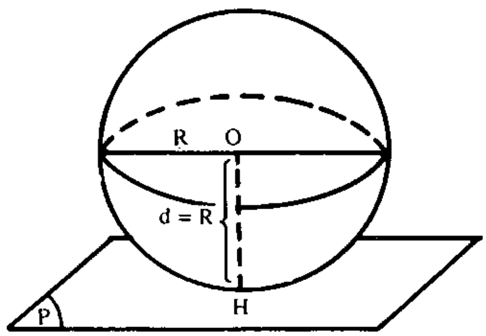

**حل ــ** کرهٔ به مرکز O و به شعاع R یعنی مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را که از نقطهٔ ثابت O به فاصلهٔ ثابت R واقع است، رسم می‌کنیم. فصل مشترک این کره با صفحهٔ P جواب مسأله است.

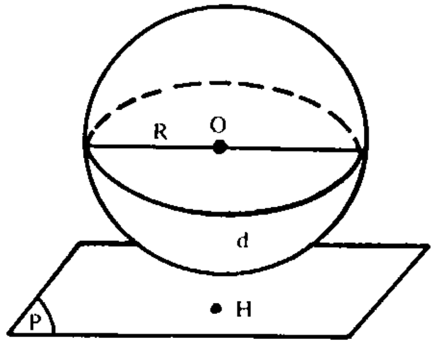
**بحث ــ** اگر فاصلهٔ نقطهٔ O از صفحهٔ P را d بنامیم، یکی از سه حالت زیر پیش می‌آید.

۱) اگر $d < R$ باشد، مکان هندسی جواب مسأله، یک دایره است.

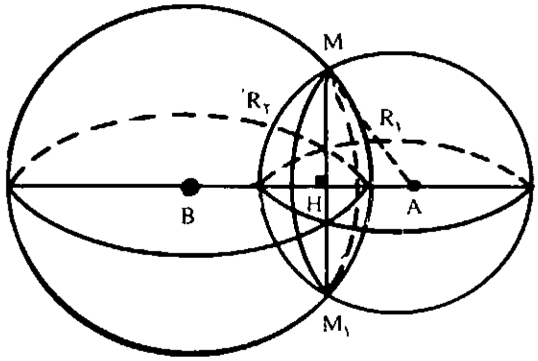
۲) اگر $d = R$ باشد، جواب مسأله یک نقطه است.

۳) اگر $d > R$ باشد، مسأله جواب ندارد.




**مثال ۳ــ** دو نقطهٔ A و B و دو عدد مثبت $R_1$ و $R_2$ به قسمی مفروضند که $AB < R_1 + R_2$ است. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را تعیین کنید که از نقطهٔ A به فاصلهٔ $R_1$، و از نقطهٔ B به فاصلهٔ $R_2$ واقع است.



**حل ــ** فصل مشترک کرهٔ به مرکز A و به شعاع $R_۱$، یعنی مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از نقطهٔ A به فاصلهٔ $R_۱$ واقع است، با کرهٔ به مرکز B و به شعاع $R_۲$، یعنی مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از نقطهٔ B به فاصلهٔ $R_۲$ قرار دارد، جواب مسأله است که چون $d = AB < R_۱ + R_۲$ است، این دو کره متقاطع‌اند و فصل مشترک آنها که یک دایره است جواب مسأله است.

**مثال ۴ــ** مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را تعیین کنید که از نقطهٔ $O'(۱,-۲,۳)$ به فاصلهٔ ۵ واقع است.

**حل ــ** مکان هندسی خواسته شده کره‌ای به مرکز $O'$ و به شعاع $R = ۵$ است، پس داریم:

$$(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ + (y-\gamma)^۲ = R^۲$$

$$(x-۱)^۲ + (y+۲)^۲ + (y-۳)^۲ = ۲۵$$

**مثال ۵ ــ** نقطه‌ای روی خط $D: \frac{x}{۲} = \frac{y-۱}{-۱} = \frac{z+۲}{۳}$ تعیین کنید که از نقطهٔ $A(۱,-۱,۰)$ به فاصلهٔ $\sqrt{۳}$ واقع است.

**حل ــ** نقطهٔ تقاطع کرهٔ به مرکز A و به شعاع $\sqrt{۳}$ با خط D جواب مسأله است. بنابراین داریم:

$$(x-۱)^۲ + (y+۱)^۲ + (z-۰)^۲ = (\sqrt{۳})^۲ \Rightarrow$$

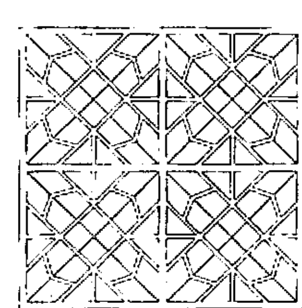
$$(x-۱)^۲ + (y+۱)^۲ + z^۲ = ۳ \qquad \text{معادلهٔ کره}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{۲} = \frac{y-۱}{-۱} = \frac{z+۲}{۳} = t \Rightarrow x = ۲t \ , \ y = -t+۱ \ , \ z = ۳t-۲ \\ (x-۱)^۲ + (y+۱)^۲ + z^۲ = ۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow (۲t-۱)^۲(-t+۲)^۲ + (۳t-۲)^۲ = ۳ \Rightarrow ۱۴t^۲ - ۲۰t + ۶ = ۰$$

$$\Rightarrow t = ۱ \ , \ t = \frac{۳}{۷} \Rightarrow M_۱(۲,۰,۱) \ , \ M_۲(\frac{۶}{۷}, \frac{۴}{۷}, \frac{-۵}{۷})$$

نقاط جواب مسأله



## تفریح اندیشهٔ ۳

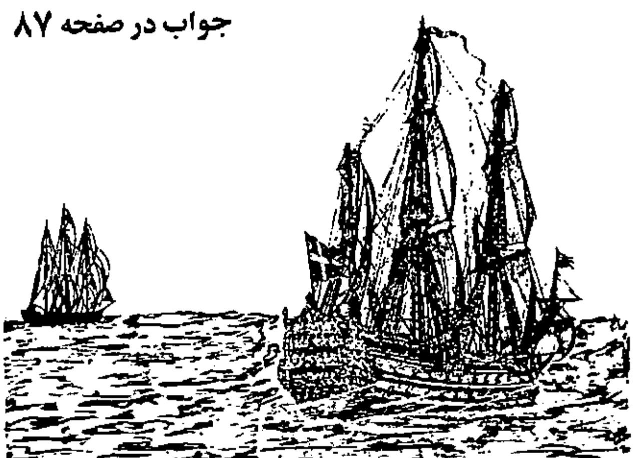
### تکه‌های هشت

کاپیتان یک کشتی تصمیم گرفت به سه افسر و هفت سرباز برای کارهای برجسته‌شان جایزه بدهد. کیسه‌ای حاوی ۱۴۰ سکهٔ طلا تهیه و آنها را به دو کیسهٔ نامساوی تقسیم کرد و کیسهٔ بزرگتر را به سربازها و کیسهٔ کوچکتر را به افسرها داد.

افسرها سکه‌های خود را شمردند و دریافتند که تعداد آنها ۲ سکه بیشتر از آن است که بتواند بین آنها به تساوی تقسیم شود. و زمانی که سربازها سعی در تقسیم سهم خود به هفت قسمت مساوی کردند یک سکه برایشان باقی ماند و بزودی بر سر آن به نزاع پرداختند. دعوا به حدی بالا گرفت که خود کاپیتان به میانجیگری پرداخت و دستور داد سکهٔ باقیمانده به افسرها داده شود.

اکنون، در صورتی که سهمیهٔ هر افسر از هر سرباز بیشتر باشد، در هر کیسه چند سکه بوده است؟

**جواب در صفحه ۸۷**

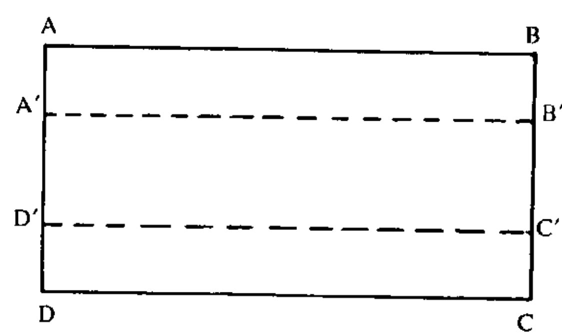


# نکته‌ای هندسی برای ساختن جویها

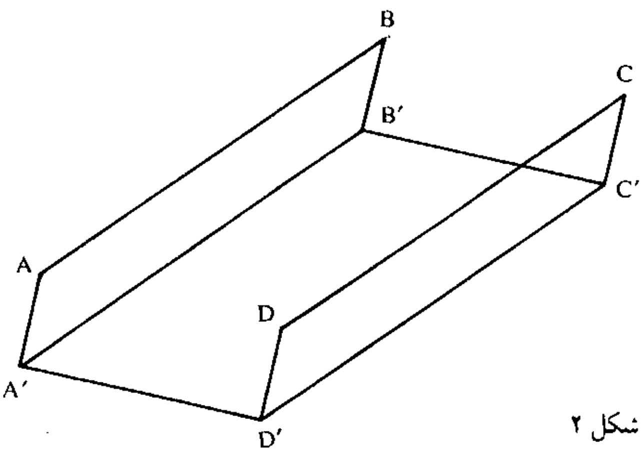
● دکتر احمد شرف‌الدین

ورقه فلزی مستطیلی ABCD را درنظر می‌گیریم (شکل ۱). این ورقه را در امتداد دو خط $A'B'$ و $C'D'$ که موازی دو لبه مستطیل‌اند و به فاصله‌های مساوی از دو لبه مذکوراند (یعنی $AA' = DD'$) تا می‌کنیم تا ناودانی با مقطع مستطیلی $AA' = D'D$ حاصل شود (شکل ۲). می‌خواهیم طول $AA'$ را طوری اختیار کنیم که اندازه سطح مستطیل $AA' = D'D$ دارای بزرگترین مقدار ممکن باشد. مسأله را به‌طور خلاصه چنین بیان می‌کنیم:

**چگونه از یک ورقه مستطیلی یک ناودان با مقطع مستطیلی بسازیم تا بیشترین مقدار آب از آن بگذرد.**




شکل ۱



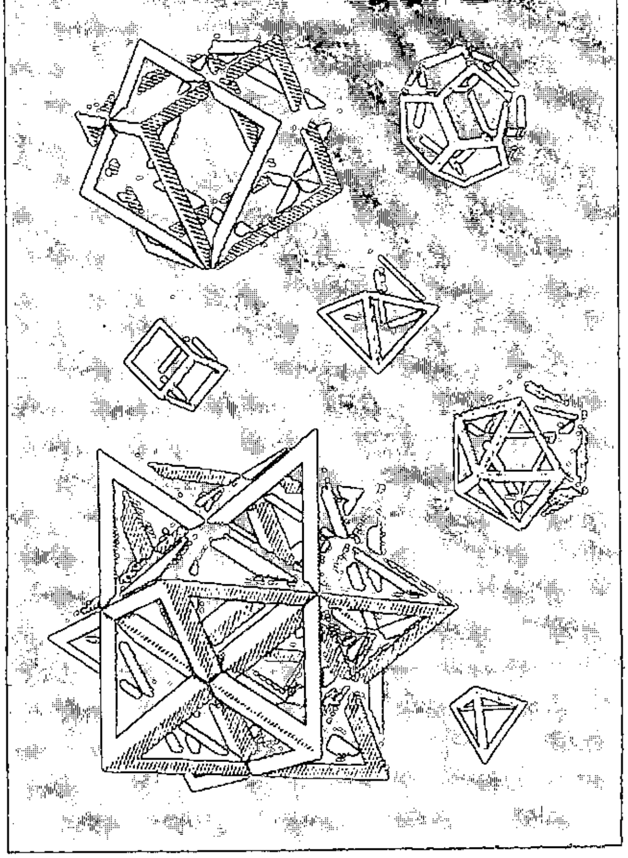

شکل ۲

**حل:** طول پاره‌خط AD را a فرض می‌کنیم. قرار می‌دهیم $AA' = x$ . اندازه سطح مستطیل $AA' = D'D$ را S می‌نامیم. چنین داریم:

$$S = x(a - 2x) \qquad (1)$$

مشتق تابع با ضابطهٔ (۱) به‌ازای $x = \frac{a}{4}$ صفر شده و تغییر علامت می‌دهد. مشتق به‌ازای مقادیر کمتر از $\frac{a}{4}$ مثبت و به‌ازای مقادیر بیشتر از $\frac{a}{4}$ منفی است پس تابع مذکور به‌ازای $x = \frac{a}{4}$ بزرگترین مقدار خود را احراز می‌کند.

**خلاصه.** برای آن که اندازه سطح مقطع یک ناودان یا یک جوی آب با مقطع مستطیل ماکزیمم باشد لازم است که عمق آن نصف پهنای آن باشد.



# معرفی یک اتحاد مثلثاتی و کاربردهایی از آن

◄ حسین حیدری دلوئی (از گناباد)

اگر $x+y+z=k\pi$ آنگاه:

$$tgx+tgy+tgz=tgxtgytgz$$

**حل:** به طریق زیر می‌توانیم عمل کنیم

$$x+y+z=k\pi \Rightarrow x+y=k\pi-z$$

$$tg(x+y)=tg(k\pi-z)$$

$$\frac{tgx+tgy}{1-tgxtgy}=-tgz$$

$$tgx+tgy=-tgz+tgxtgytgz$$

بنابراین

$$tgx+tgy+tgz=tgxtgytgz$$

## نمونه‌هایی از کاربرد این اتحاد

۱ ــ درستی برابریهای زیر را بررسی کنید.

الف)

$$tg(a-b)+tg(b-c)+tg(c-a)=tg(a-b)tg(b-c)tg(c-a)$$

ب)

$$tgnx+\cot g(n-m)x+\cot gmx=tgnx\cot g(n-m)x\cot gmx$$

**حل:**

الف) دیده می‌شود که

$$(a-b)+(b-c)+(c-a)=0=0\times\pi$$

لذا بنابر اتحاد بالا داریم:

$$tg(a-b)+tg(b-c)+tg(c-a)=tg(a-b)tg(b-c)tg(c-a)$$

ب) داریم:

$$tgnx+\cot g(n-m)x+\cot gmx=$$

$$tgnx+tg\left[\frac{\pi}{2}-(n-m)x\right]+tg\left[\frac{\pi}{2}-mx\right]$$

$$=tgnx+tg(\frac{\pi}{2}-nx+mx)+tg(\frac{\pi}{2}-mx)$$

چون $nx+\frac{\pi}{2}-nx+mx+\frac{\pi}{2}-mx=\pi=1\times\pi$.

پس بنا به اتحاد معرفی شده می‌توانیم بنویسیم

$$tgnx+\cot g(n-m)x+\cot gmx=$$

$$tgnxtg\left[\frac{\pi}{2}-nx+mx\right]tg\left[\frac{\pi}{2}-mx\right]=$$

$$tgnx\cot g(n-m)x\cot gmx$$

۲ــ معادله $\mathrm{tg}(۲n+۱)x-\mathrm{tg}۲nx-\mathrm{tg}x=۰$ را حل کنید.

حل: معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathrm{tg}(۲n+۱)x+\mathrm{tg}(-۲nx)+\mathrm{tg}(-x)=۰$$

چون $(۲n+۱)x+(-۲nx)+(-x)=۰$ بنابراین داریم

$$\mathrm{tg}(۲n+۱)x\,\mathrm{tg}(-۲nx)\mathrm{tg}(-x)=۰$$

یا

$$\mathrm{tg}(۲n+۱)x\,\mathrm{tg}۲nx\,\mathrm{tg}x=۰$$

درنتیجه

$$۱)\ \mathrm{tg}(۲n+۱)x=۰\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲n+۱}$$

$$۲)\ \mathrm{tg}۲nx=۰\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲n}$$

$$۳)\ \mathrm{tg}x=۰\Rightarrow x=k\pi$$

۳ــ معادله زیر را حل کنید.

$$\mathrm{tg}(۲n+۱)x+\cot g\,nx+\cot g(n+۱)x=۰$$

حل: می‌توانیم بنویسیم

$$\mathrm{tg}(۲n+۱)x+\mathrm{tg}\left[\frac{\pi}{۲}-nx\right]+\mathrm{tg}\left[\frac{\pi}{۲}-(n+۱)x\right]=۰$$

چون $(۲n+۱)x+\frac{\pi}{۲}-nx+\frac{\pi}{۲}-(n+۱)x=\pi$ بنابراین

$$\mathrm{tg}(۲n+۱)x\,\mathrm{tg}\left[\frac{\pi}{۲}-nx\right]\mathrm{tg}\left[\frac{\pi}{۲}-(n+۱)x\right]=۰$$

یا به عبارت دیگر

$$\mathrm{tg}(۲n+۱)x\cot g\,nx\cot g(n+۱)x=۰$$

در نتیجه داریم :

$$۱)\ \mathrm{tg}(۲n+۱)x=۰\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲n+۱}$$

$$۲)\ \cot g\,nx=۰\Rightarrow x=\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{۲n}$$

$$۳)\ \cot g(n+۱)x=۰\Rightarrow x=\frac{k\pi}{n+۱}+\frac{\pi}{۲(n+۱)}$$

۴ــ اگر A، B و C زوایای داخلی مثلثی فرض شوند ثابت کنید که

$$\mathrm{tg}^۲A\mathrm{tg}^۲B\mathrm{tg}^۲C-\mathrm{tg}^۲A-\mathrm{tg}^۲B-\mathrm{tg}^۲C=$$
$$۲(\mathrm{tg}A\mathrm{tg}B+\mathrm{tg}B\mathrm{tg}C+\mathrm{tg}A\mathrm{tg}C)$$

حل: چون $A+B+C=\pi$ بنابراین

$$\mathrm{tg}A\mathrm{tg}B\mathrm{tg}C=\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B+\mathrm{tg}C$$

دو طرف این رابطه را مجذور می‌کنیم. داریم

$$\mathrm{tg}^۲A\mathrm{tg}^۲B\mathrm{tg}^۲C=\mathrm{tg}^۲A+\mathrm{tg}^۲B+\mathrm{tg}^۲C+$$
$$۲\mathrm{tg}A\mathrm{tg}B+۲\mathrm{tg}B\mathrm{tg}C+۲\mathrm{tg}A\mathrm{tg}C$$

درنتیجه

$$\mathrm{tg}^۲A\mathrm{tg}^۲B\mathrm{tg}^۲C-\mathrm{tg}^۲A-\mathrm{tg}^۲B-\mathrm{tg}^۲C=$$
$$۲(\mathrm{tg}A\mathrm{tg}B+\mathrm{tg}B\mathrm{tg}C+\mathrm{tg}A\mathrm{tg}C)$$

۵ــ $\lim_{x\to۰}\frac{\mathrm{tg}۳x-\mathrm{tg}۲x-\mathrm{tg}x}{x^۳}$ را به دست آورید.

حل: داریم

$$\mathrm{tg}۳x-\mathrm{tg}۲x-\mathrm{tg}x=\mathrm{tg}۳x+\mathrm{tg}(-۲x)+\mathrm{tg}(-x)$$

چون $۳x-۲x-x=۰$ بنابراین

$$\mathrm{tg}۳x-\mathrm{tg}۲x-\mathrm{tg}x=\mathrm{tg}۳x\mathrm{tg}(-۲x)\mathrm{tg}(-x)=$$
$$\mathrm{tg}۳x\mathrm{tg}۲x\mathrm{tg}x$$

لذا برای تعیین حدّ فوق داریم

$$\lim_{x\to۰}\frac{\mathrm{tg}۳x-\mathrm{tg}۲x-\mathrm{tg}x}{x^۳}=\lim_{x\to۰}\frac{\mathrm{tg}۳x\mathrm{tg}۲x\mathrm{tg}x}{x^۳}$$

$$=\lim_{x\to۰}\frac{۳\mathrm{tg}۳x}{۳x}\times\frac{۲\mathrm{tg}۲x}{۲x}\times\frac{\mathrm{tg}x}{x}=۶$$

۶ــ اگر $\mathrm{tg}\alpha=x$ ، $\mathrm{tg}\beta=y$ ، $\mathrm{tg}\gamma=z$ و $\alpha+\beta+\gamma=k\pi$ ، ثابت کنید

$$x+y+z=xyz$$

حل: چون $\alpha+\beta+\gamma=k\pi$ پس

$$\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma=\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\gamma$$

در نتیجه داریم

$$x+y+z=xyz$$

۷ــ اگر $f(x)=\mathrm{tg}۷x\,\mathrm{tg}۴x\,\mathrm{tg}۳x$ ، ثابت کنید که

$$f'(x)=۷\mathrm{tg}^۲۷x-۴\mathrm{tg}^۲۴x-۳\,\mathrm{tg}^۲۳x$$

حل: $f(x)$ را به صورت زیر می‌نویسیم

$$f(x)=\mathrm{tg}۷x\,\mathrm{tg}(-۴x)\,\mathrm{tg}(-۳x)$$

چون $۷x-۴x-۳x=۰$ پس داریم

$$f(x)=\mathrm{tg}۷x-\mathrm{tg}۴x-\mathrm{tg}۳x$$

درنتیجه می‌توان نوشت

$$f'(x)=7(1+tg^2 7x)-4(1+tg^2 4x)-3(1+tg^2 3x)$$
$$=7tg^2 7x-4tg^2 4x-3tg^2 3x$$

۸ـ عبارت $A=2tg3x-tg5x-tgx$ را به حاصلضرب تبدیل کنید.

**حل:** با اضافه و کم کردن $tg2x$ داریم

$$A=2tg3x-tg5x-tgx=(tg3x-tg2x-tgx)+$$

$$(tg2x+tg3x-tg5x)=\left[tg3x+tg(-2x)+tg(-x)\right]+$$
$$\left[tg3x+tg2x+tg(-5x)\right]$$

چون $3x+2x-5x=0$ و $3x-2x-x=0$ بنابراین می‌توان نوشت

$$A=tg3xtg(-2x)tg(-x)+tg3xtg2xtg(-5x)$$
$$=tg3xtg2xtgx-tg3xtg2xtg5x$$
$$=tg3xtg2x(tgx-tg5x)$$
$$=tg3xtg2x\times\frac{\sin(x-5x)}{\cos x\cos 5x}$$
$$=\frac{-\sin 3x\sin 2x\sin 4x}{\cos 3x\cos 2x\cos x\cos 5x}$$

$$=\frac{-2\sin 3x\sin 2x\cos 2x\sin 2x}{\cos 3x\cos 2x\cos x\cos 5x}\quad (\text{با فرض}: \cos 2x\neq 0)$$
$$=\frac{-4\sin 3x\sin x\cos x\sin 2x}{\cos 3x\cos x\cos 5x}$$
$$=\frac{-4\sin 3x\sin x\sin 2x}{\cos 3x\cos 5x}$$

تذکر: به‌طور مشابه می‌توان اتحادهای زیر را ثابت کرد و کاربردهایی نیز برای آنها ارائه نمود.

اگر $x+y+z=k\pi$ آنگاه

$$\cot gx\cot gy+\cot gy\cot gz+\cot gx\cot gz=1 \quad (a)$$

اگر $x+y+z=k\pi+\frac{\pi}{2}$ آنگاه

$$\cot gx+\cot gy+\cot gz=\cot gx\cot gy\cot gz \quad (b)$$

$$tgxtgy+tgytgz+tgxtgz=1 \quad (c)$$

## ادب ریاضی

تاکنون، ریاضیات، چهار مرحله از تکامل خود را پشت سر گذاشته و، در زمان ما، مرحلهٔ پنجم تکامل خود را آغاز کرده است:

۱) دورهٔ تکامل (با سمت گیری کاربردی) که با آغاز شکوفایی دانش یونان به پایان می‌رسد؛

۲) دورهٔ دوم (با سمت‌گیری نظری) که از سده‌های ششم و هفتم پیش از میلاد در یونان آغاز می‌شود و در سده‌های سوم و چهارم میلادی در اسکندریه پایان می‌یابد؛

۳) دورهٔ سوم (با سمت‌گیری کاربردی) که از سدهٔ هشتم میلادی آغاز می‌شود و در سدهٔ شانزدهم میلادی خاتمه می‌یابد. مرکز ثقل فعالیت‌های ریاضی در این دوره، در ایران بوده است؛

۴) دورهٔ چهارم (با سمت‌گیری نظری) که از سدهٔ شانزدهم میلادی، و به طور عمده در اروپای غربی، آغاز می شود و در سدهٔ بیستم پایان می‌یابد؛

۵) و سرانجام دورهٔ پنجم (با سمت گیری کاربردی) که هم اکنون دهه‌های آغازین خود را می‌گذراند. مطلب را با تکهٔ زیبایی از نوشته بوریس گنه دنکو، که بیشتر جنبهٔ آموزشی دارد، به پایان می‌بریم:

«... شک نیست که مقدمات آنالیز ریاضی و هندسهٔ تحلیلی، که در برنامه‌های ریاضی دبیرستانی وجود دارد، مبنای اصلی ریاضیات جدید و کاربردهای آن را تشکیل می‌دهد. تسلط بر این ابزارهای مقدماتی لازم است، ولی کافی نیست. اگر سخن معروف تسیولکوسکی (نخستین کسی که شیفتهٔ کیهان‌نوردی بود) را اندکی تغییر دهیم، می‌توان گفت که، ریاضیات سنتی دبیرستانی و مقدمه‌های آنالیز ریاضی، گهوارهٔ دانش امروزی است، ولی تا کی می‌توان زیست شناسان، پزشکان، مهندسان و اقتصاددانان آینده را در گهواره نگه داشت؟

**از مقاله «ریاضیات کاربردی»، نوشته پرویز شهریاری، برهان ۱۶**

# مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۱۵)

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

# اعداد اول، تجزیه و رمزهای مخفی

(قسمت اول)

## بزرگترین عدد اول در دنیا

بزرگترین عدد اول* (شناخته شده) در دنیا عدد غول‌آسایی است که برای نوشته شدن به صورت دهدهی متعارف به ۶۵۰۵۰ رقم نیازمند است. این عدد، با استفاده از نماد نمایی (یا توانی)، دارای صورت قابل کنترلتر زیر است :

$$۲^{۲۱۶۰۹۱} - ۱$$

یعنی، عدد مورد بحث را با ضرب ۲۱۶۰۹۰ بار ۲ در خودش و بعد تفریق ۱ از جواب آن به دست می‌آورید.

نماد نمایی فریب‌دهنده است. برای به دست آوردن ایده‌ای از توانایی این نماد در ارائهٔ اعداد بزرگ، صفحهٔ شطرنج ۸×۸ معمولی‌ای را در نظر می‌گیریم و بر مربعهای آن توده‌هایی از ژتونهایی به ضخامت 2mm را طبق قاعدهٔ زیر قرار می‌دهیم. مربعهای مزبور را، چون در شکل ۱، از ۱ تا ۶۴ شماره‌گذاری می‌کنیم. در مربع اول ۲ ژتون می‌گذاریم. در مربع دوم ۴ ژتون. در مربع سوم ۸ ژتون. و همینطور بر هر مربع دقیقاً دو برابر تعداد مربع ماقبل آن ژتون قرار می‌دهیم. به این ترتیب بر مربع nام توده‌ای از $۲^n$ ژتون خواهیم داشت. بخصوص، بر مربع آخر توده‌ای از $۲^{۶۴}$ ژتون خواهیم داشت. تصور می‌کنید ضخامت این توده چقدر است؟ ۱متر؟ ۱۰۰ متر؟ یک کیلومتر؟ مطمئناً خیر! خوب، باور بکنید یا خیر، توده‌مان از ماه (به فاصلهٔ ۴۰۰۰۰۰ کیلومتر) و از خورشید (به فاصلهٔ ۱۵۰ میلیون کیلومتر) خواهد گذشت و در حقیقت تقریباً به پروکسیما سنتوری[۱]، نزدیکترین ستاره به زمین، به فاصلهٔ حدوداً ۴ سال نوری از آن، خواهد رسید. عدد $۲^{۶۴}$ در صورت دهدهی عبارت است از

۱۸ ۴۴۶ ۷۴۴ ۰۷۳ ۷۰۹ ۵۵۱ ۶۱۶

این از $۲^{۶۴}$. اما برای به دست آوردن عدد $۲^{۲۱۶۰۹۱}$ که در عدد اول مورد بحث ظاهر شده است به صفحهٔ شطرنجی با ۲۱۶۰۹۱ مربع نیاز داریم ـ صفحه‌ای با اندازه‌های ۴۶۵×۴۶۵ مربع این کار را انجام می‌دهد!

اما چگونه به عددهایی با این اندازه می‌پردازیم؟ برای آغاز کار از کامپیوتر استفاده می‌کنیم. اما نه هر کامپیوتری. عدد رکورددار فوق‌الذکر با استفاده از یکی از قدرتمندترین کامپیوترهای دنیا کشف شد ـ کامپیوتری که توانایی انجام دویست میلیارد عمل حسابی را در یک ثانیه دارد ـ و با این وصف محاسبه بیش از سه ساعت طول کشید. اما در این مورد

---

* مطلب بعدی را برای توضیح این عبارت ملاحظه کنید.

قدرت محاسبه به خودی خود کفایت نمی‌کند؛ و مهارت ریاضیدانها نیز لازم است. چگونگی گسترش این مهارت، و سایر استفاده‌هایی که از آن می‌توان کرد، موضوع باقیماندهٔ این فصل است.

## اعداد اول

*فرانسیس هاچسن*[۲] در ۱۷۲۵ (در Inquiry into the Original for our Ideas of Beauty and Virtue, Treatise II, Section 3.8)
نوشت «بهترین عمل عملی است که بیشترین سعادت را برای بزرگترین عدد فراهم کند». بعید به نظر می‌رسد که وی به **عدد** به مفهوم ریاضی بزرگترین اول شناخته شده می‌اندیشیده است، اما با وجود این، بیانش بخوبی در مورد شیفتگی پایان ناپذیر بشر به اساسی‌ترین اشیای ریاضی ــ ***عددهای طبیعی***[۳] (یا ***شمارشی***) ۱، ۲، ۳، ... ــ به کار می‌رود.

این اشیای ریاضی مجرد نه تنها در زندگی روزمره‌مان بلکه عملاً در جمیع ریاضیات اساسی‌اند ــ و آن قدر که *لئوپولد کرونکر*[۴]، ریاضیدان قرن نوزدهم، (دربارهٔ ریاضیات) نوشت: «خداوند اعداد طبیعی را خلق کرد، و بقیه کار انسان است.»

ویژگیهای متعددی موجودند که در مورد عددهای طبیعی به کار می‌روند و آنها را به دو رده (اعداد با آن ویژگی و اعداد بدون آن) تقسیم می‌کنند. به عنوان نمونه، ویژگی زوج بودن وجود دارد. این ویژگی عددهای طبیعی را به ردهٔ اعدادی که **زوجند** (۲، ۴، ۶، ۸، ...) و اعدادی که **نیستند** (اعداد فرد: ۱، ۳، ۵، ۷، ...) تقسیم می‌کند. یا ویژگی بخشپذیری بر ۳ موجود است. (در اینجا، چون بقیهٔ موارد این کتاب، زمانی که می‌گوییم عددی عدد دیگر را ***می‌شمارد***[۵] مقصودمان این است که این کار را دقیقاً و بدون باقی گذاردن باقیمانده انجام می‌دهد. به این ترتیب ۳، ۶، ۹، ۱۲ بر ۳ بخشپذیرند، در حالی که ۱، ۲، ۴، ۵، ۷، چنین نیستند.) تقسیم به زوج و فرد تقسیمی طبیعی و مهم است. (تقسیم به اعداد بخشپذیر و بخش ناپذیر بر ۳ نه چنان طبیعی است نه از اهمیت فوق‌العاده برخوردار است.)

مثالی دیگر از تقسیمی طبیعی و مهم توسط ویژگی ***مربع کامل***[۶] بودن به دست داده می‌شود، مثال

$1=1^2$ , $4=2^2$ , $9=3^2$ , ۱۶ , ۲۵ , ۳۶ , ...

موارد بسیار دیگری نیز موجودند. اما تاکنون مهمترین طریق تقسیم اعداد طبیعی تقسیم آنها به اعداد *اول*[۷] و غیر اول است.

عدد طبیعی n را **عدد اول** می‌گوییم اگر تنها اعدادی که آن را می‌شمارند ۱ و خود n باشند. (خود عدد ۱ در اینجا حالتی خاص است، و طبق قرارداد به عنوان عدد اول به حساب نمی‌آید.)

به این ترتیب ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹ عددهایی اول‌اند؛ ۱، ۴، ۶، ۸، ۹، ۱۰، ۱۲، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۸، ۲۰ نیستند. (اعدادی را که اول نیستند گاهی ***مرکب***[۸] می‌نامند.) به عنوان نمونه، ۷ اول است زیرا هیچ یک از عددهای ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ آن را نمی‌شمارد؛ ۱۴ اول نیست زیرا ۲ و ۷ آن را می‌شمارند.

دلیل اصلی این که چرا اعداد اول این همه مهم‌اند برای *اقلیدس* (حدود ۳۵۰ ــ ۳۰۰ ق. م.) ریاضیدان یونانی که، در کتاب IX از *مقدماتش*[۹] (تألیفی سیزده جلدی از جمیع دانش‌ریاضی تا آن زمان در دسترس) قضیه‌ای را که امروزه به عنوان ***قضیهٔ اصلی حساب***[۱۰] معروف است آورده، آشکار بود. این قضیه چنین است: هر عدد طبیعی بزرگتر از ۱ یا اول است، یا در غیر این صورت می‌تواند به صورت حاصل ضرب اولهایی بیان شود که به استثنای ترتیبی که طبق آن اولهای مزبور قرار می‌گیرند یکتاست.

به عنوان نمونه، عدد ۷۵۹۰۰ حاصلضرب هفت ***عامل اول***[۱۱] (***دو عامل مکرر***[۱۲]) است:

$$75900 = 2\times2\times3\times5\times5\times11\times23$$

عبارت واقع در سمت راست این برابری به ***تجزیهٔ به عوامل اول***[۱۳] عدد ۷۵۹۰۰ موسوم است.

مطلبی که قضیهٔ اصلی حساب می‌گوید این است که اعداد اول بلوکهای ساختمانی اساسی‌ای هستند که جمیع اعداد طبیعی از آنها تشکیل یافته‌اند، و از این لحاظ شبیه عناصر شیمیدان یا ذرات اصلی فیزیکدانند. دانستن تجزیهٔ به عوامل اول هر عدد، همانگونه که بعداً به طور اساسی در این فصل گفته خواهد شد (بخش مربوط به رمزهای سری را ملاحظه کنید) به ریاضیدان اطلاعات تقریباً کاملی از آن عدد می‌دهد. اما در حال حاضر، در مورد خود عددهای اول چه می‌توان گفت؟

اساسی‌ترین پرسشی که می‌توان در مورد اعداد اول مطرح کرد این است که فراوانی آنها چقدر است؟ به عنوان نمونه، آیا

بزرگترین عدد اول وجود دارد، یا اعداد اول همین طور بزرگتر و بزرگتر شده ادامه می‌یابند؟

در نظر اول به نظر می‌رسد که اعداد اول در واقع بسیار فراوانند. از ده عدد اولیهٔ بعد از ۱ (یعنی ۲ تا ۱۱ و خود ۱۱)، پنج عدد، یعنی، ۲ ، ۳ ، ۵ ، ۷ ، ۱۱ ، اولند ، که دقیقاً نیمی از گردایهٔ مزبورند. از ده عدد بعدی، ۱۲ تا ۲۱، سه عدد (۱۳، ۱۷، ۱۹) که اولند موجودند، یعنی، به نسبت ۰/۳ . بین ۲۲ و ۳۱ نسبت همان ۰/۳ است، در حالی که در مورد دو گروه ده عددی بعدی نسبت مورد بحث به ۰/۲ سقوط می‌کند. بنابراین به نظر می‌رسد که اولها هر چه که در امتداد دنبالهٔ اعداد طبیعی جلوتر برویم «تنک» می‌شوند. جدول ۱ نشان می‌دهد که چگونه تعداد اولهای کمتر از $n$ (که با $\pi(n)$ نمایش داده می‌شود) به ازای مقادیر منتخب $n$ ، با $n$ تغییر می‌کند، و رقم «چگالی» $\pi(n)/n$ را در هر حالت به دست می‌دهد.

بنابراین، اعداد اول هر چه در دنبالهٔ عددی مورد بحث جلوتر برویم کمیابتر می‌شوند. اما آیا سرانجام به تدریج محو و نابود می‌شوند؟ پاسخ منفی است.

| n | π(n) | π(n)/n |
| --- | --- | --- |
| ۱۰۰۰ | ۱۶۸ | ۰/۱۶۸ |
| ۱۰۰۰۰ | ۱۲۲۹ | ۰/۱۲۳ |
| ۱۰۰۰۰۰ | ۹۵۹۲ | ۰/۰۹۶ |
| ۱۰۰۰۰۰۰ | ۷۸۴۹۸ | ۰/۰۷۸ |

**جدول ۱**. توزیع اولها، نشان می‌دهد که تعداد اولها، $\pi(n)$، به ازای مقادیر گوناگون $n$، کوچکتر از $n$ است.

این موضوع نیز توسط اقلیدس با استفاده از استدلالی به اثبات رسید که تا به امروز به عنوان مدلی عالی از برهان ریاضی ظریف باقیمانده است. برای شروع این اثبات، تصور می‌کنیم اعداد اول به ترتیب اندازه فهرست شده باشند:

$$P_1 , P_2 , P_3 , \ldots$$

بنابراین $P_1 = ۲$ ، $P_2 = ۳$ ، $P_3 = ۵$ ، و غیره. هدف، نشان دادن این موضوع است که باید این فهرست برای همیشه ادامه داشته باشد. به عبارت دیگر، باید اثبات شود که اگر در هر مرحلهٔ $n$ در فهرست، با شمارش کردن $P_1، P_2، \ldots، P_n$ ، که باشیم، آنگاه باید در آن اول دیگری بالاتر از $P_n$ موجود باشد.

طریق اثبات نگریستن به عدد

$$N = P_1 P_2 P_3 \ldots P_n + ۱$$

حاصل از ضرب درهم جمیع اولهای $P_1$، $P_2$، $P_3$ و غیره تا $P_n$، و بعد افزودن ۱ به نتیجهٔ آن است. به طور وضوح $N$ بزرگتر از $P_n$ است، بنابراین اگر $N$ اول باشد آنگاه می‌دانیم که عدد اولی بزرگتر از $P_n$ وجود دارد، و این همان است که سعی در اثباتش داریم. از طرف دیگر، اگر $N$ اول نباشد باید بر اولی بخشپذیر باشد، این اول را $P$ می‌نامیم. اما اگر بخواهیم $N$ را بر هر یک از اولهای $P_1، P_2، \ldots، P_n$ تقسیم کنیم باقیمانده ۱ ای موجود می‌شود (همان ۱ ای که هنگامی که $N$ را در مرتبهٔ اول به دست آوردیم افزودیم.) بنابراین $P$ مان باید اولی متفاوت با آنها باشد، و بار دیگر مطلوب را ثابت کرده‌ایم. بنابراین، در هر وضعیت عدد اولی بزرگتر از $P_n$ موجود است، و می‌توان نتیجه گرفت که فهرست اعداد اول برای همیشه ادامه دارد.

توجه داشته باشید که هیچ ایده‌ای در این مورد که عدد $N$ فوق اول است یا خیر نداریم. اگر چند مثال را در نظر بگیریم کشف می‌کنیم که اعدادی از این دست اغلب اولند. به عنوان نمونه،

$$N_1 = ۲+۱ = ۳$$
$$N_2 = ۲\times۳+۱ = ۷$$
$$N_3 = ۲\times۳\times۵+۱ = ۳۱$$
$$N_4 = ۲\times۳\times۵\times۷+۱ = ۲۱۱$$
$$N_5 = ۲\times۳\times۵\times۷\times۱۱+۱ = ۲۳۱۱$$

جمیعاً اولند. اما سه عدد بعدی چنین نیستند:

$$N_6 = ۲\times۳\times۵\times۷\times۱۱\times۱۳+۱ = ۳۰۰۳۱ = ۵۹\times۵۰۹$$
$$N_7 = ۱۹\times۹۷\times۲۷۷$$
$$N_8 = ۳۴۷\times۲۷۹۵۳$$

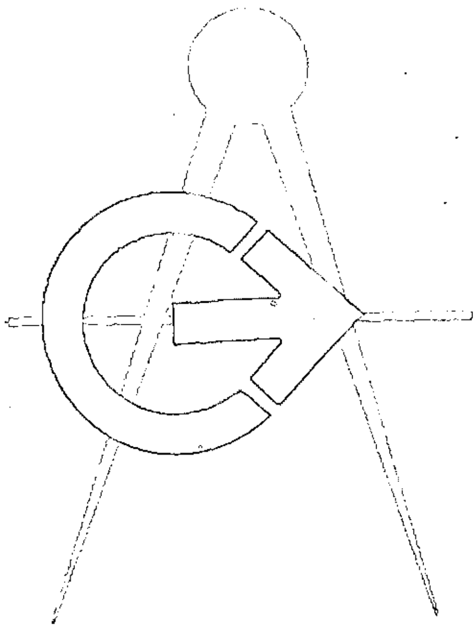
در واقع، هیچ کس نمی‌داند بینهایت عدد به صورت

$$N_n = P_1 P_2 \ldots P_n + ۱$$

اولند یا خیر، نیز بینهایت عدد از این اعداد مرکبند یا نه (گر چه البته باید یکی از این دو امکان راست باشد). و این تنها یکی از دهها سؤال بسادگی بیان شده دربارهٔ عددهای اول است که پاسخش نامعلوم است.

یادداشتها:

۱_ Proxima Centauri
۲_ Francis Hutcheson
۳_ natural (or counting) numbers
۴_ Leopold Kronecker
۵_ divides
۶_ Perfect Square
۷_ Prime
۸_ Composite
۹_ Elements
۱۰_ Fundamental theorem of mathematics
۱۱_ Prime factor
۱۲_ Repeated factor
۱۳_ Prime factorization



# کاربرد دترمینان

(قسمت دوم)

● سیامک جعفری

معادله خط را می‌توان به دو صورت نوشت. یکی وقتی دو نقطه را داشته باشیم و دیگری وقتی شیب خط و یک نقطه را داشته باشیم. در اینجا می‌توان به راحتی تحقیق کرد که معادله خطی که از دونقطه $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ می‌گذرد به‌صورت زیر است.

از آنجا که

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

مشخص است که دو نقطه در معادله صدق می‌کنند.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

مسأله: $m$ را چنان تعیین کنید که سه نقطه $A(2,1)$ ، $B(m,-2)$ و $C(0,m-6)$ روی یک امتداد باشند.

حل:

**الف) بدون دترمینان**

طبق توضیحاتی که در این وضعیت در کتاب دوم ریاضی و سوم تجربی است، باید شیب خطهای AB و BC برابر باشند!

$$m_{AB} = \frac{1+2}{2-m}$$

$$m_{BC} = \frac{-2-m+6}{m-0}$$

$$\frac{3}{2-m} = \frac{-m+4}{m} \Rightarrow m=1 \quad \text{یا} \quad m=8$$

**ب) به کمک دترمینان**

باید مختصات نقطه سوم در دترمینان بالا صدق کند.

$$\begin{vmatrix} 0 & m-6 & 1 \\ m & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -m(m-6-1)+$$

$$2(m-6+2)=0 \Rightarrow m=1 \quad \text{یا} \quad m=8$$

مسأله: معادلات خطوط زیر را در نظر بگیرید

$$A_1x+B_1y+C_1=0$$

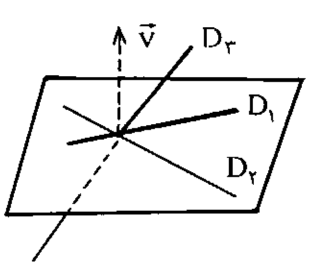
$$A_2x+B_2y+C_2=0$$

$$A_3x+B_3y+C_3=0$$

$$\vec{V} = \vec{D_1} \wedge \vec{D_2}$$

اکنون باید نشان داد که $\vec{D_3}$ و $\vec{V}$ در یک صفحه هستند. یا $(\vec{V} . \vec{D_3})=0$ درنتیجه شرط این که این سه خط همرس باشند به دست می‌آید.

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$



دقت کنید که اگر سه خط در فضا همرس باشند لزوماً در یک صفحه نیستند. نتیجه مشابهی به دست می‌آید وقتی معادلات پارامتری سه خط را داده باشند. (A و B و C بردارهای هادی محسوب می‌شوند).

**مسأله** : معادله عمود مشترک دو خط متنافر را به دست آورید.

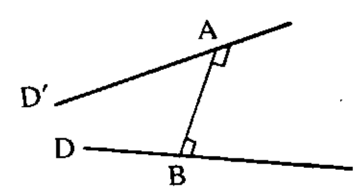
$$D': \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$$

$$D: x+1 = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{3}$$

**حل:**

**الف) بدون دترمینان**

$$A: \begin{cases} x = t'-1 \\ y = 2t'-2 \\ z = 3t'-3 \end{cases} \qquad B: \begin{cases} x = 3t-1 \\ y = 2t+2 \\ z = t+3 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \equiv \begin{cases} x = t'-3t \\ y = 2t'-2t-4 \\ z = 3t'-t-6 \end{cases}$$




این $\overrightarrow{AB}$ بر بردارهای هادی $D'$ و $D$ عمود است.

$$\overrightarrow{\Delta}.\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow t - 3t + 2(2t'-2t-4) + 3(3t'-t-6) = 0$$

$$\overrightarrow{\Delta'}.\overrightarrow{AB} = 0 \qquad 3(t'-3t) + 2(2t'-2t-4) + 3t'-t-6 = 0$$

$$\begin{cases} 5t'-7t-7=0 \\ 14t'-10t-26=0 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{2}{3},$$

$$t' = \frac{7}{3} \Rightarrow A\begin{vmatrix} 1 \\ \frac{10}{3} \\ \frac{11}{3} \end{vmatrix}, \quad AB\begin{vmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{vmatrix}$$

$$\frac{x-1}{\frac{1}{3}} = \frac{y-\frac{10}{3}}{\frac{-2}{3}} = \frac{2-\frac{11}{3}}{\frac{1}{3}}$$

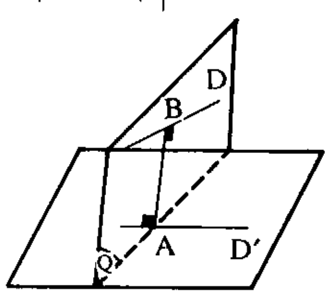
**ب) به کمک دترمینان**

صفحه P از $D'$ گذشته و با D موازی است.

$$P: \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -x+2y-z-2 = 0$$

صفحه Q از D می‌گذرد و بر P عمود است.

$$Q: \begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z+3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4x-y+2z = 0$$




مختصات $D'$ در Q صدق می‌کند.

$$-4(3t-1)-(2t+2)+2(t+3) = 0$$

$$t = \frac{2}{3} \Rightarrow A\left(1, \frac{10}{3}, \frac{11}{3}\right)$$

اکنون ضرب خارجی دو بردار هادی دو خط D و $D'$ همان بردار قایم P است.

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-\frac{10}{3}}{2} = \frac{z-\frac{11}{3}}{-1}$$

برای تعیین کوتاهترین فاصله بین دو خطی که نه موازی و نه متقاطع، یعنی متنافر هستند مانند

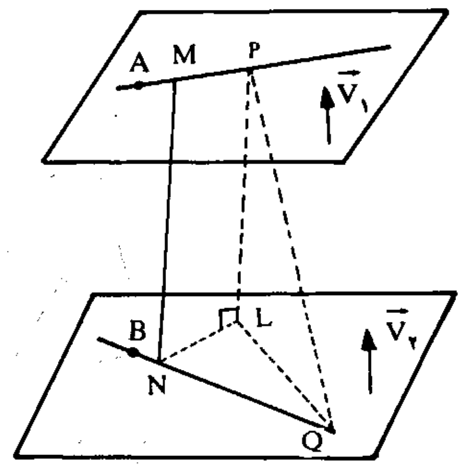
$$D: \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}$$

$$D': \frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2}$$

به این صورت عمل می‌کنیم که می‌دانیم این «S» کوتاهترین فاصله بین این دو خط متنافر موازی $\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}$ یعنی ضرب خارجی دو بردار هادی دو خط است. بنابراین کوتاهترین فاصله خواهد شد تصویر $\overrightarrow{AB}$ روی $\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}$ و اندازه آن

خواهد شد.

$$|S|=\frac{|\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{V_1}\wedge V_2)|}{|V_1\wedge V_2|}$$




صورت این رابطه که ضرب سه‌گانه اسکالر است و خواهد شد دترمینانی که قبلاً شرحش رفت، و مخرج که اندازه جبری ضرب خارجی دو بردار هادی است.

مسأله : کوتاهترین فاصله بین دو خط D و D′ را به‌دست آورید.

**حل: با دترمینان**

$$D: x+1=y-\frac{7}{2}=\frac{z}{2}$$

$$D': x+4=y-3=z$$

$$\begin{vmatrix} -4-1 & 3-\frac{7}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=-(-5)_1(3+\frac{7}{2})+$$

$$\frac{1}{2}(-5-3+\frac{7}{2})=-\frac{1}{2}(\frac{-9}{2})=\frac{9}{4}$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j\Rightarrow\left|-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j\right|=$$

$$\sqrt{(-\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|S|=\frac{\frac{9}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{9\sqrt{2}}{4}$$

**حل: بدون دترمینان به عهده دانش‌آموزان**

برای تعیین فاصله یک نقطه از یک خط می‌توان از دترمینان استفاده کرد دو نقطه B و C را روی خط D به دست می‌آوریم. از قبل می‌دانستیم

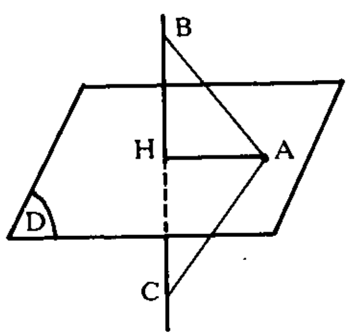
$$\underset{\Delta ABC}{S}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}|$$

$$\underset{\Delta ABC}{S}=\frac{1}{2}AH.BC$$

بنابراین

$$AH=\frac{|\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}|}{BC}$$

$|\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}|$ مراد اندازه این بردار است.



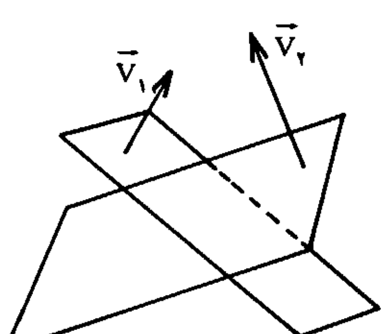

مسأله : معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A(2,3,-5)$ گذشته و با خط $D:\begin{cases}3x-y+2z-7=0\\ x+3y-2z+3=0\end{cases}$ موازی باشد.

**حل: با دترمینان**

$$\overrightarrow{V_1}\wedge\overrightarrow{V_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=-\overrightarrow{4i}+\overrightarrow{8j}+\overrightarrow{10k}$$

معادله خط خواهد شد.

$$\frac{x-2}{-4}=\frac{y-3}{8}=\frac{z+5}{10}$$



مسأله: قرینه نقطه $M(۰,۱,۱)$ را نسبت به خط $\Delta:\begin{cases} x-y-۱=۰ \\ x+۲y-z=۰ \end{cases}$ را به دست آورید.

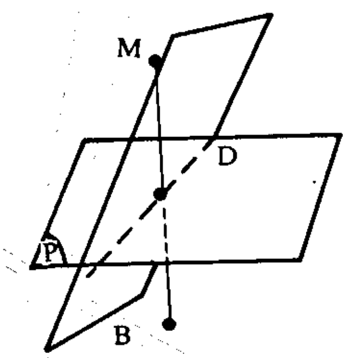
**حل:** بردار قایم

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & -۱ \end{vmatrix} = i+j+۳k \Rightarrow \vec{V}\begin{vmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۳ \end{vmatrix}$$

$$x+y+۳z+d=۰$$

$$۰+۱+۳+d=۰ \Rightarrow d=-۴$$

$$\Rightarrow x+y+۳z-۴=۰$$




صفحه‌ای که از $M$ می‌گذرد. یک نقطه از خط فصل مشترک را نیز به دست می‌آوریم.

$$x=۰ \Rightarrow \begin{cases} -y-۱=۰ \Rightarrow y=-۱ \\ ۲y-z=۰ \end{cases} \Rightarrow z=-۲] \Rightarrow A(۰,-۱,۲)$$

معادله کانونی خط $D$ به دست می‌آید. باید در صفحه ماربر $M$ صدق کند.

$$x=t \ , \ y=+t-۱ \ , \ z=۳t+۲$$

$$t+t-۱+۹t+۶-۴=۰ \Rightarrow t=\frac{۱}{۱۱}$$

$$x=\frac{۱}{۱۱}, y=-\frac{۱۰}{۱۱}, z=\frac{۲۵}{۱۱}$$

$$x_{M'}=۲x_M-\frac{۱}{۱۱}=۲(۰)-\frac{۱}{۱۱}=-\frac{۱}{۱۱}$$

$$y_{M'}=۲y_M-\frac{۱۰}{۱۱}=۲-\frac{۱۰}{۱۱}=\frac{۱۲}{۱۱}$$

$$z_{M'}=۲z_M-\frac{۲۵}{۱۱}=۲-\frac{۲۵}{۱۱}=\frac{۳}{۱۱}$$

اگر می‌خواسیتم، بدون دترمینان می‌توانستیم از معادلات دسته صفحه هم استفاده کنیم.

$$x+۲y-z+\alpha(x-y-۱)=۰$$

$$(۱+\alpha)x+(۲-\alpha)y-z-\alpha=۰$$

$$M \in P \Rightarrow (۱+\alpha)(۰)+(۲-\alpha)(۱)-۱-\alpha=۰ \Rightarrow \alpha=\frac{۱}{۲}$$

$$P: ۳x+۳y-۲z-۱=۰$$

اکنون فصل مشترک سه صفحه را داریم. که در هر سه معادله صفحه می‌گذاریم و $x'$ و $y'$ و $z'$ را از حل دستگاه حاصل به‌دست می‌آوریم.

$$x_N=\frac{۰+x'}{۲}$$

$$y_N=\frac{۱+y'}{۲}$$

$$z_N=\frac{۱+z'}{۲}$$

**تمرین**

۱ــ دو خط به معادله‌های $\frac{x+۱}{۲}=\frac{y+۲}{۴}=\frac{z-۱}{۳}$ و $\frac{x-۱}{۲}=\frac{y-۱}{۳}=\frac{z-۱}{۴}$ مفروضند. طول عمود مشترک این دو خط را محاسبه کنید.

ج) $\frac{۸}{\sqrt{۵۷}}$

۲ــ خطی در صفحه سه نقطه $A(۰,۰,۰)$ و $B(۲,۲,۰)$ و $C(۰,۱,-۲)$ بیابید که برخط $\frac{x+۱}{۳}=\frac{y-۱}{۲}=۲z$ عمود باشد.

۳ــ معادله صفحه‌هایی را پیدا کنید که شامل به ترتیب خط $D$ و $D'$ باشند و موازی هم نیز باشند.

$$D: x=۲y+۱=z-۱ \ , \ D': ۲x=y-۴=۳-۳z$$

۴ــ مطلوب است معادله خطی که در صفحه $P: x+۳y-z+۴=۰$ قرار دارد و بر خط $D:\begin{cases} x-۲z-۳=۰ \\ y-۲z=۰ \end{cases}$ عمود است در تقاطع این خط با صفحه.

ج) $\frac{x-۱}{-۵}=\frac{y+۲}{۳}=\frac{z+۱}{۴}$

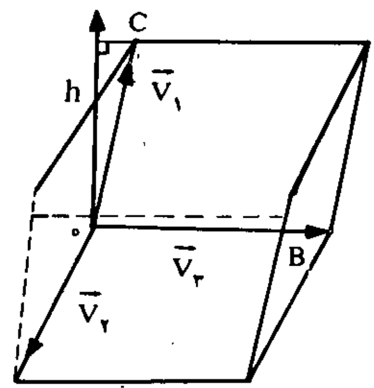
۵ــ خطی را پیدا کنید که از $A(۱,۲,۰)$ بگذرد و با $P: x+y+z+۲=۰$ موازی و بر خط $\frac{۴-۲x}{۶}=\frac{y-۱}{۲}=\frac{z}{۵}$ عمود باشد.

ج) $\frac{x-۱}{۳}=\frac{y-۲}{-۸}=\frac{z}{۵}$

## کاربرد دترمینان

برای محاسبه حجم یک متوازی‌السطوح به شکل زیر نگاه کنید.

$$|P| = |\vec{V}_1.(V_2 \wedge V_3)|$$
$$= |\vec{V}.\vec{W}| = |V_1|.|\vec{W}|.\cos\alpha$$
$$= |\vec{W}|.|\vec{V}_1|.\cos\alpha$$
$$= |\vec{W}|.OH$$
$$= S_{OADB}.h = V$$

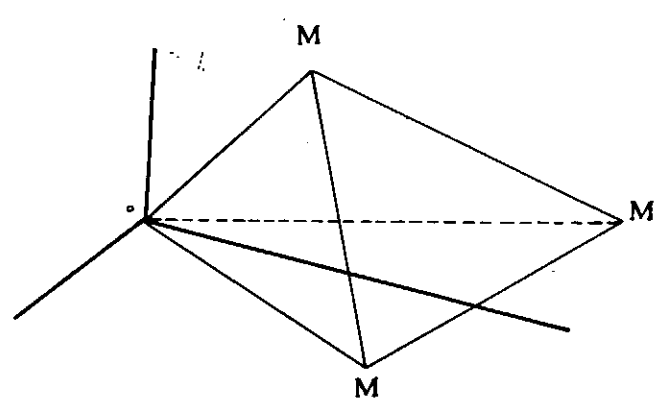



برای محاسبه حجم یک چهار وجهی مانند هرم در واقع حجم همان متوازی‌السطوح را که حساب کنیم از هندسه می‌دانیم که شش برابر حجم هرم است. پس:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

و اگر رأس چهارم مبداء مختصات هم نباشد.

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$




### تمرین

۱ ــ نشان دهید حجم هرم مثلث القاعده‌ای به یالهای a و b و c و زوایای وجهی $\alpha$ و $\beta$ و $\gamma$ برابر خواهد شد با

$$V = \frac{1}{6}abc\begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

۲ ــ مساحت مثلثی به اضلاع زیر را ثابت کنید با دستور دترمینان به‌دست می‌آورند.

$$BC: A_1x + B_1y + C_1 = 0$$
$$CA: A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad \Rightarrow$$
$$AB: A_3x + B_3y + C_3 = 0$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}^2}{\left|\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}\right|}$$

## تعیین مقاطع مخروطی

ثابت می‌شود برای تعیین نوع مقطع مخروطی $Ax^2 + 2Bxy + cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ جز در دو حالت زیر.

۱) $A = B = C = 0$ که معادله خط راستی خواهد شد.

۲) $B = 0$ و $A = C$ معادله دایره (حقیقی یا موهومی)

دو دترمینان زیر را به نام $\Delta$ و $\Delta'$ در نظر می‌گیریم.

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}, \quad \Delta' = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 0 \begin{cases} \Delta' > 0 & \text{دو خط متقاطع موهومی} \\ \Delta' < 0 & \text{دو خط متقاطع حقیقی} \\ \Delta' = 0 & \text{دو خط موازی (حقیقی یا موهومی)} \end{cases}$$

$$\Delta \neq 0 \begin{cases} \Delta' > 0 & \text{بیضی حقیقی یا موهومی} \\ \Delta' < 0 & \text{هذلولی} \\ \Delta' = 0 & \text{سهمی} \end{cases}$$

تذکر: اگر $\Delta \neq 0$ و $A + C = 0$، مقطع، هذلولی متساوی‌القطرین می‌باشد.

**مسأله:** نوع مقطع $5x^2 - 6xy + 2y^2 - 2x + 2 = 0$ را تعیین کنید.

**حل: با دترمینان**

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ , \quad \Delta' = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

بنابراین مقطع دو خط متقاطع موهومی است.

**چند تمرین**

۱ ــ نشان دهید معادله دایره‌ای که از سه نقطه $(x_1, y_1)$، $(x_2, y_2)$، $(x_3, y_3)$ در صفحه $x\,y$ می‌گذرد به صورت زیر است.

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

۲ ــ اگر سه نقطه $(x_1, y_1)$، $(x_2, y_2)$، $(x_3, y_3)$ مفروض باشند به طوری که هیچ دو نقطه‌ای روی یک خط نباشند. معادله سهمی از خانواده $y = c + bx + cx^2$ که از این سه نقطه می‌گذرد را به‌دست آورید.

ج) $$\begin{vmatrix} x^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

۳ ــ اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

۴ ــ نشان دهید دترمینان روبرو معادله محور اصلی دو دایره $C$ و $C'$ است.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & -2 \\ a' & b' & -2 \end{vmatrix} = 0$$

۵ ــ نشان دهید اگر دو مقطع $S$ و $S'$ به معادلات زیر همدیگر را بپوشانند داریم:

$$S(x, y) \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$S'(x, y) \equiv a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$$

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & h' & g' \\ h' & b' & f' \\ g' & f' & c' \end{vmatrix}$$

در خاتمه از زحمات بی‌دریغ استادم آقای محمد نظری، نمونه کاملی از اخلاق و علم سپاسگزاری می‌کنم.

*** منابع**


۱) ANALYTICAL GEOMETRY A.V.Pogorelov

۲) هندسه تحلیلی فضایی — محمدعلی سازش.

۳) هندسه تحلیلی (حل المسایل) احمد بیرشک ــ یاوری

۴) مقاطع مخروطی — غلامعلی گهرفر

۵) ADVANCED ENGINERING MATHEMATICS WYLIE, BARRETT

# طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۱۶)

از : 100 Great Problems of Elementary Mathematics

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

## قضیهٔ اصلی جبر گاوس

هر معادلهٔ درجهٔ $n$

$$z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \dots + c_n = 0$$

دارای $n$ ریشه است.

قضیهٔ فوق به طور دقیقتر به صورت زیر بیان می‌شود :

چند جمله‌ای

$$f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \dots + c_n$$

همواره می‌تواند $n$ به عامل خطی به صورت $z - \alpha_r$ تجزیه شود.

این قضیهٔ مشهور، قضیهٔ اصلی جبر، ابتدا توسط دالامبر «d'Alembert» در ۱۷۴۶ بیان شد، اما تنها به طور جزیی به اثبات رسید. اولین اثبات دقیق آن در سال ۱۷۹۹ توسط **گاوس**، که در آن وقت بیست و یکساله بود، در رسالهٔ دکتریش با نام زیر داده شد :

*Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posso* (Helmstaedt, 1799).

بعدها گاوس سه اثبات دیگر از این قضیه به دست داد. هر چهار اثبات را می‌توان در جلد سوم آثارش، نیز در جلد ۱۴
Ost wald's *Klassiker der exakten w,ssenschaften*
به دست آورد، بعد از گاوس مؤلفین دیگری از جمله آرژان «*Argand*»، کوشی «*Cauchy*»، اولهر «*Ullherr*»، وایراشتراس «*Weiestrass*»، و کرونکر «*Kronecker*» نیز اثباتهای قضیهٔ اصلی جبر را به دست دادند. اثباتی که در اینجا آورده شده از *آرژان* است (Annales de Gergonne, 1815)، که به خاطر اختصار و سادگیش متمایز است.

این اثبات (مانند اغلب اثباتهای دیگر) در دو مرحله انجام می‌گیرد، مرحلهٔ اول ــ و مشکلتر ــ صرفاً اثبات می‌کند یک معادلهٔ درجهٔ $n$ ام همواره شامل *حداقل* یک ریشه است ؛ مرحلهٔ دوم نشان می‌دهد $n$ ریشه و نه بیشتر دارد.

### مرحلهٔ اول

قرار می‌دهیم

$$z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \dots + c_n = f(z) = w$$

و مقادیر مختلفی را در نظر می‌گیریم که توسط قدر مطلق $|w|$ هنگامی که $z$ در صفحهٔ گاوس (صفحهٔ اعداد مختلط) حرکت می‌کند اختیار شده‌اند. فرض می‌کنیم کوچکترین این مقادیر $\mu$ باشد و، فی‌المثل، در موضع $z_0$ به دست آمده باشد، بنابراین

$$|f(z_0)| = |w_0| = \mu$$

دو حالت ممکن موجود است :

۱. $\mu$ ی مینیمم از صفر بزرگتر است.

۲. $\mu$ ی مینیمم برابر صفر است.

کار را با بررسی حالت اول آغاز می‌کنیم. در نزدیکی نقطهٔ $z_0$، مثلاً، در سطح تعریف شده با دایرهٔ کوچک $K$ به شعاع $R$ و مرکز $z_0$، $|w| \geq \mu$ در هر جا، زیرا $\mu$ کوچکترین مقدار $|w|$ را نمایش می‌دهد ؛ در خود $z_0$،

$$|w| = |w_0| = \mu$$

به ازای هر $z$ واقع در $K$ ،

$$z = z_\circ + \zeta$$

که در آن

$$\zeta = p(\cos\theta + i\sin\theta)$$

و $p$ قدر مطلق $\zeta$ است، یعنی پاره خط $z_\circ z$ ، و $\theta$ میل این پاره خط نسبت به محور عددهای حقیقی مثبت. به محاسبهٔ

$$w = f(z) = f(z_\circ + \zeta) = (z_\circ + \zeta)^n + c_1(z_\circ + \zeta)^{n-1} + \dots + c_n$$

با حذف پرانتزها و مرتب کردن بر حسب قوای نزولی $\zeta$ می‌پردازیم. به این ترتیب به دست می‌آوریم

$$w = f(z) = z_\circ^n + c_1 z_\circ^{n-1} + c_2 z_\circ^{n-2} + \dots + c_n + c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \dots + c_n\zeta^n$$

یعنی،

$$w = f(z_\circ) + c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \dots + c_n\zeta^n$$

از آنجا که ممکن است بعضی از ضرایب $c_r$ برابر صفر باشند، اولین ضریب پایدار را $c$، دومین را $c'$، و غیره می‌نامیم، بنابراین

$$w = w_\circ + c\zeta^V + c'\zeta^{V'} + c''\zeta^{V''} + \dots$$

با

$$V < V' < V'' < \dots$$

تقسیم بر $w_\circ$ و تفکیک $\zeta^V$ می‌دهد

$$\frac{w}{w_\circ} = 1 + q\zeta^V(1 + \zeta\xi)$$

که در آن $q = c/w_\circ$ و $\xi$ مجموعی از توانهای مختلف $\zeta$ با نماهای مثبت و ضرایب معلوم را نمایش می‌دهد.

حاصل‌ضرب $q\zeta^V(1+\zeta\xi)$ را در نظر می‌گیریم. *اولین* عامل را به طور مثلثاتی نوشته، $\cos\varphi + i\sin\varphi$ را به $l_\varphi$ مختصر می‌کنیم، و از

$$q = h(\cos\lambda + i\sin\lambda) = h.l_\lambda$$

و $\zeta = p.l_p$ ،

$$q\zeta^V = h.l_\lambda.p^V.l_{V\theta} = hp^V.l_{\lambda+V\theta}$$

را به دست می‌آوریم. از این به بعد کارمان را به مقادیر $z$ ی از $K$ محدود می‌کنیم که به ازای آنها $\lambda + V\theta = \pi$ ، که در نتیجه روی شعاع $Z_\circ H$ ی واقع می‌شوند که با محور حقیقی زاویهٔ $\alpha = (\pi - \lambda)/v$ می‌سازد. عدد $l_{\lambda+V\theta} = l_\pi$، به ازای جمیع این $z$ ها دارای مقدار $-1$ است، و حاصل‌ضربمان صورت

$-hp^V.(1+\zeta\xi)$ را اختیار می‌کند.

اگر شعاع $R$ را به قدر کافی کوچک اختیار کنیم، عامل دوم $1+\zeta\xi$ می‌تواند هر قدر مایل باشیم به واحد نزدیک شود، زیرا

$$p = |\zeta| < R$$

اما این بدان معنی است که حاصل‌ضرب مزبور هرقدر مایل باشیم در نزدیکی مقدار $-hp^V$ واقع می‌شود، یعنی، کسر

$$\frac{w}{w_\circ} = 1 - hp^V.(1 + \zeta\xi)$$

هرقدر مایل باشیم به نقطهٔ $1 - hp^V$ از صفحهٔ گاوس نزدیک می‌شود، که نشان می‌دهد به ازای **جمیع** $z$ های بین $z_\circ$ و $H$ قدرمطلق $|w/w_\circ| < 1$. به عبارت دیگر، به ازای *این* $z$ ، $|w| < \mu$ ، در حالی که به ازای جمیع $z$ های واقع در مجاورت $z_\circ$ ، $|w|$ با بزرگتر از یا مساوی با $\mu$ باشد. این تناقض به وجود می‌آورد، و در نتیجه اولین حالت از دو حالت ممکن داده شده در فوق $(\mu > \circ)$ حذف می‌شود. به این ترتیب تنها حالت دوم باقی می‌ماند: $w_\circ$ برابر است با صفر یا

$$f(z_\circ) = \circ$$

بنابراین: ***هر معادله***، بی‌توجه به درجه‌اش، ***دست کم یک ریشه دارد.***

## ☐ مرحلهٔ دوم

کار را با اثبات **قضیهٔ کمکی** زیر آغاز می‌کنیم:

*اگر معادلهٔ جبری $f(z) = \circ$ دارای ریشهٔ $\alpha$ باشد، در این صورت سمت چپ این معادله را می‌توان بدون باقیمانده بر $z - \alpha$ تقسیم کرد.*

اگر چند جمله‌ای $f(z)$ را بر $z - \alpha$ تا زمانی تقسیم کنیم که باقیماندهٔ تقسیم، $R$، دیگر شامل $z$ نباشد، به دست می‌آوریم

$$\frac{f(z)}{z-\alpha} = f_1(z) + \frac{R}{z-\alpha}$$

که $R$ آن ثابت است و $f_1(z)$ دارای صورت

$$z^{n-1} + d_1 z^{n-2} + d_2 z^{n-3} + \dots + d_{n-1}$$

ضرب در $z - \alpha$ می‌دهد

$$f(z) = (z - \alpha)f_1(z) + R$$

اگر در این معادله، که به ازای هر $z$ معتبر است، $z = \alpha$ را قرار دهیم به دست می‌آوریم

$$R = f(\alpha) = 0$$

و به این ترتیب به ازای هر $z$

$$f(z) = (z - \alpha) f_1(z)$$

که همان مطلوب است.

اگر این قضیهٔ کمکی را با قضیهٔ اثبات شده در مرحلهٔ اول، که وجود یک ریشه را مبرهن کرد، ترکیب کنیم، قضیهٔ جدید زیر را به‌دست می‌آوریم:

*هر چند جمله‌ای بر حسب $z$ را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب عامل خطی $z - \alpha$ و چند جمله‌ای از درجهٔ کمتری نمایش داد.*

اکنون به جای $\alpha$ از $\alpha_1$ استفاده کرده به دست می‌آوریم.

$$f(z) = (z - \alpha_1) f_1(z)$$

سپس قضیهٔ به دست آمده را در مورد چند جمله‌ای $f_1(z)$ به کار برده به دست می‌آوریم

$$f_1(z) = (z - \alpha_2) f_2(z)$$

که در آن $f_2(z)$ از درجهٔ $(n - 2)$ و $\alpha_2$ ریشهٔ معادلهٔ $f_1(z) = 0$ است. نیز به روشی مشابه:

$$f_2(z) = (z - \alpha_3) f_3(z)$$

$$f_3(z) = (z - \alpha_4) f_4(z), \ldots$$

در این زنجیر معادلات، با آغاز از یکی مانده به آخر، در صورتی که به جای هر $f$ واقع در سمت راست مقدار بعدی آن در معادلهٔ زیرین را قرار دهیم، سرانجام قضیهٔ مربوط به تبدیل چند جمله‌ای از درجهٔ $n$ام به حاصل‌ضرب $n$ عامل خطی را به دست می‌آوریم:

$$f(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\ldots(z - \alpha_n)$$

که به طور شفاهی به صورت زیر بیان می‌شود:

*هر تابع گویای درست از درجه $n$ را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب $n$ عامل خطی نمایش داد.*

به این ترتیب، معادلهٔ پیشین $f(z) = 0$ مجازمان می کند بنویسیم:

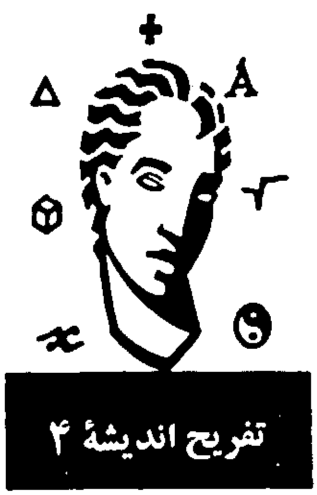
$$(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\ldots(z - \alpha_n) = 0$$

اما، حاصل‌ضرب سمت چپ آن تنها وقتی صفر می‌شود که یک عامل برابر صفر باشد، و از آنجا که $z - \alpha_v = 0$ مستلزم $z = \alpha_v$ است، سرانجام به دست می‌آوریم:

*معادلهٔ $f(z) = 0$ دارای $n$ ریشهٔ $\alpha_1$، $\alpha_2$، ....، $\alpha_n$ است و ریشهٔ دیگر ندارد.*

به این ترتیب قضیهٔ اصلی مورد نظر را اثبات کردیم.

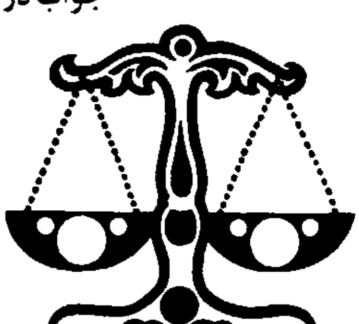
**تبصره:** امکان دارد چند ریشه از $n$ ریشهٔ $\alpha_1$، $\alpha_2$، ....، $\alpha_n$ برابر باشند، به عنوان مثال، ممکن است $\alpha_2$ و $\alpha_3$ هر دو برابر $\alpha_1$ باشند، در حالی که $\alpha_4$، $\alpha_5$، ....، $\alpha_n$ متفاوت با $\alpha_1$ باشند. در این حالت $\alpha_1$ به ریشهٔ چندگانه «multipleroot»، و به خصوص در حالتی که سه ریشهٔ مساوی داشته باشیم، به ریشهٔ ***سه گانه*** «triple» موسوم است.

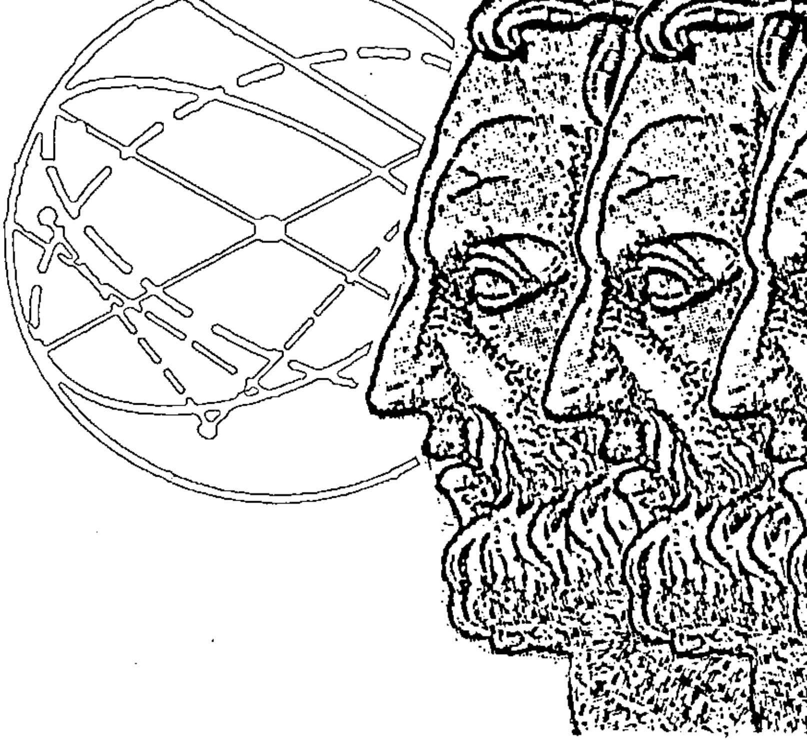



## در ترازو

پنج مهره داریم که به‌ظاهر یکسان به‌نظر می‌رسند، اما هیچ دو مهره‌ای از آنها هم‌وزن نیستند. آیا می‌توانید تنها با یک ترازو با حداکثر هفت بار وزن کردن آنها را به‌ترتیب وزن قرار دهید؟ به‌عبارت دیگر، سنگین‌ترین مهره و به‌ترتیب مهره سنگین‌تر در مرحلهٔ دوم، و ... را معین کنید؟

**جواب در صفحه ۸۸**





# مشاهیر ریاضی جهان

**برگرفته از: فرهنگ ریاضیات آکسفورد**

**ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور**

فرما، پی‌یردو[1] (۱۶۰۱ - ۱۶۶۵). فرما، از لحاظ حرفه، قاضی شهر تولوز، و در ایام فراغتش، یکی از پایه‌گذاران قلمرو جدید ریاضیات بود. کارش در مورد مماسها الهام‌بخش نیوتن در طرح حساب دیفرانسیل و انتگرال شد. اصل می‌نیمم‌سازی فرما در اپتیک نتایج عمیقی در سرتاسر فیزیک بعد از او داشت. فرما به‌خاطر کارهایش در نظریهٔ اعداد، از جمله قضیه کوچک فرما[2] و حدس همچنان اثبات نشدهٔ معروف به‌آخرین قضیه فرما[3] به‌یاد مانده است.

فیبوناتچی[4] (در حدود ۱۱۷۰ - ۱۲۵۰) لئوناردوی پیسایی[5] معروف به‌فیبوناتچی (پسر بوناتچیو[6]) یکی از اولین اروپاییانی بود که بعد از عصر ظلمت پدیدار شد. او کارهای مهمی در هندسهٔ اقلیدسی انجام داد اما بیشتر به‌خاطر دنبالهٔ اعداد فیبوناتچی‌اش[7] معروف است. چنین پیش آمده که دنبالهٔ مزبور اهمیت شگفت‌انگیزی در ریاضیات جدید و محاسبه داشته باشد.

فوریه، ژوزف[8] (۱۷۶۸ - ۱۸۳۰). فوریه مهندسی ریاضیدان و یکی از قابلترین مدیران ناپلئون بود. سهمی اساسی در نظریهٔ انتقال گرما داشت و بیشتر به‌خاطر نظریه سریهای مثلثاتی‌اش، که اکنون سریهای فوریه نامیده می‌شوند، معروف است. این سریها از اهمیت فوق‌العاده‌ای در سراسر ریاضیات، فیزیک و مهندسی برخوردارند. در واقع، بسیاری از ریاضیات کاربردی جدید بدون آنها غیرقابل تصور است.

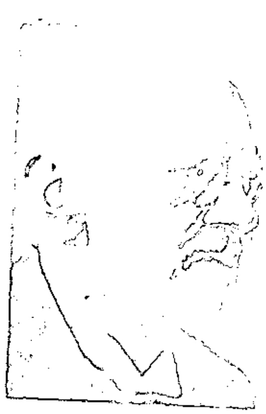
گالوا، اواریست[9] (۱۸۱۱ - ۱۸۳۲). گالوا یکی از تراژدیهای بزرگ تاریخ ریاضی است. او در سن ۱۹ سالگی، سهم‌بزرگی در نظریهٔ معادلات در زمینه‌ای که اکنون به‌عنوان نظریهٔ گالوا معروف است، به‌دست آورد و در سن ۲۱ سالگی در دوئلی تیر خورد و کشته شد.

گاوس، کارل فردریش [10] (۱۷۷۷ ـ ۱۸۵۵). گاوس این حق را دارد که بزرگترین تمام ریاضیدانهای محض درنظر گرفته شود. او سهم عظیمی در بسیاری از قسمتهای دیگر ریاضیات و فیزیک داشت. امتیاز زود آغاز کردن را با تصحیح حسابهای مالی پدرش در سن سه سالگی به‌دست آورد. در سن ۱۸ سالگی، روش کمترین توانهای دوم (کمترین مربعات) را ابداع کرد. در سن ۲۴ سالگی، آماده چاپ تجسسات حسابی [11] بود، کتابی که می‌باید تأثیر عمیقی بر نظریهٔ اعداد داشته باشد. وی هر دو قضیهٔ اساسی حساب [12] و قضیهٔ اساسی جبر [13] اثبات کرد. [14] گاوس اساس نظریهٔ رویه‌های خمیده را به‌دست داد و طولی نکشید که به‌جهان‌شناسی اینشتاین منجر شد. خود گاوس امکان خمیدگی کیهان را درنظر می‌گرفت کارش در توابع مختلط اساسی بود اما در زمان حیاتش به‌چاپ نرسید، و به‌همین علت است که در این مورد به‌قضیه کوشی اشاره می‌کنیم. آمارگران، امروزه، آنچه را که به‌توزیع گاوسی معروف است به‌کار می‌برند، و در مغناطیس واحدی به‌نام گاوس موجود است. طرح و روش آماری و قدرت محاسبهٔ ذهنی‌اش اجازه داد که مدارهای ستاره‌های دنباله‌دار و خرده سیاره‌ها را از داده‌های رصدی محدود محاسبه کند، و در این مورد به‌خصوص با مدار سرس [15] مرتبط است. فهرست فوق می‌تواند همچنان ادامه یابد.

گودل، کورت [16] (۱۹۰٦ ـ ۱۹۷۸). در ۱۹۳۱، گودل مطلبی را انتشار داد که بسیاری از امیدواریهای منطق ریاضی جدید را برباد داد. ریاضیدانها در تلاش بودند تا نظریهٔ حساب مقدماتی را بر مبنایی دقیق و صوری قرار دهند. یکی از شرایط لازم در مورد هر دستگاه صوری آن است که خود ـ سازگار و کامل باشد. گودل نشان داد که سازگاری حساب مقدماتی را نمی‌توان از داخل خود نظریه اثبات کرد، و به‌این ترتیب، مفهوم اثبات‌ناپذیری را مفهومی که در علوم کامپیوتری جدید دارای اهمیت شده، به‌دست ما سپرد.

همیلتون، ویلیام روآن [17] (۱۸۰۵ ـ ۱۸٦۵). همیلتون بزرگترین ریاضیدان ایرلند است. وی در کودکی اعجوبه بود. ادعا شده که در سن ۱۳ سالگی می‌توانست به ۱۳ زبان صحبت کند. در سن ۲۲ سالگی استاد دانشگاه دوبلین «Dublin» شد. دست یافتن اصلی همیلتون در موضوع اپتیک هندسی بود که در مورد آن اساس نظریه‌ای را بنا نهاد که به‌پیش‌بینی نظریهٔ کوانتوم نزدیک شد. کارش در مکانیک عمومی نیز از اهمیت بسیاری برخوردار است. اما در میان ریاضیدانهای محض شاید بیشتر از همه به‌خاطر نظریهٔ جبری اعداد مختلط‌اش، اختراع چهارگانه‌ها و بهره‌برداری از جبر ناتعویض‌پذیرش، که در آن $ab \neq ba$ می‌باشد.

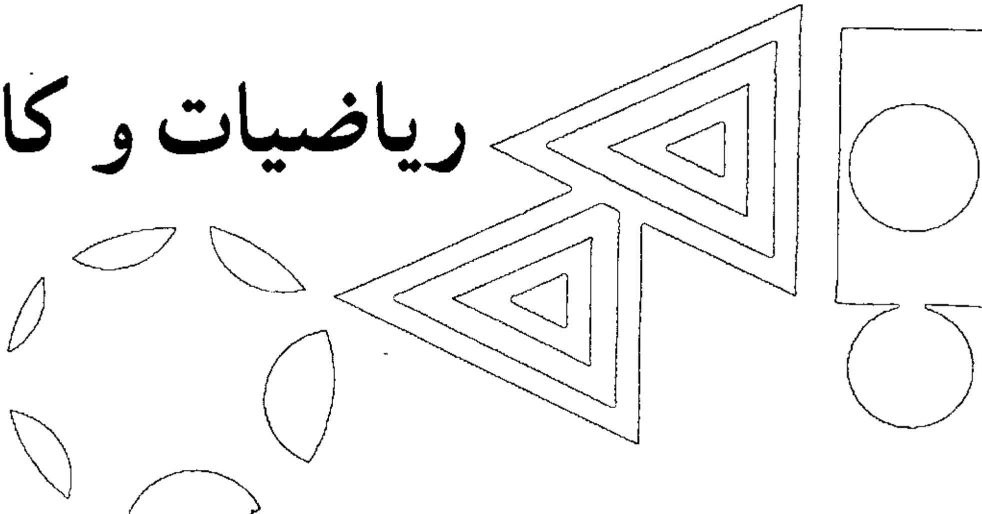
هیلبرت، دیوید [18] (۱۸٦۲ ـ ۱۹۴۳). هیلبرت که زادهٔ آلمان است و به‌قریب احتمال با دانشگاه گوتینگن شناخته می‌شود. یکی از مؤسسین ریاضیات قرن بیستم و در بسیاری جهات به‌وجود آورندهٔ مکتب صورت‌گرایی ریاضیات است که در ریاضیات محض این قرن نفوذ بسیار داشته است. یکی از دستاوردهای اساسی او در صورت‌گرایی **مبناهای هندسهٔ** [19] اوست که برخلاف مبنای آکسیوماتیکی، نسبتاً شهودی‌تر اقلیدس، در بناکردن هندسه بر مبنای آکسیوماتیکی محض مطرح شده است. او همچنین سهمی عظیم در آنالیز ریاضی داشت. در سال ۱۹۰۰، در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیات، وی قرن تازه را با مطرح کردن فهرست مشهور ۲۳ مسأله‌ای‌اش افتتاح کرد ـ مسائلی که از آن زمان تاکنون ریاضیدانها را به‌خود مشغول کرده، مبلغ عظیمی از آثار مهم هشتاد سال گذشته را به‌وجود آورده‌اند. بنابراین، هیلبرت اغلب به‌عنوان ریاضیدان مطلقاً محض شناخته می‌شود، اما او رئیس سمینار فیزیک اتمی مشهور گوتینگن، که تأثیر عظیمی بر توسعهٔ نظریهٔ کوانتوم داشت، نیز بود.



## یادداشتها

1– Fermat , Pierre de
2– Fermat's Little Theorem
3– Fermat's Last Theorem
4– Fibonacci
5– Leonardo of Pisa
6– Bonaccio
7– Fibonacci numbers
8– Fourier , Joseph
9– Galois. Evariste
10– Gauss, Carl Friedrich
11– Disquisitiones Hrithmeticae
12– Fundamental Theorem of Hrithmetic
13– Fundamental theorem of Algebra
14– theorema egregium
15– Ceres
16– Godel, Kurt
17– Hamilton, William Rowan
18– Hilbert, David
19– Foundations of Geometry

# ریاضیات و کاربردهای آن



**ترجمه: پرویز امینی**

تصور مردم از ریاضیات برحسب قاعده‌ها و قوانینی به دست آمده است که به منظور نمادسازی، عددنویسی و شکل دادن به مفاهیم انتزاعی و مجرد پایه‌ریزی شده است. مفاهیم انتزاعی و مجرد ریاضی به علت عدم وابستگی به مفاهیم دیگر رشد قابل توجهی از خود نشان داده است. اثبات تئوریهای ریاضی برعکس علوم تجربی که از آزمایش و تجربه‌های مکرر آزمایشگاهی حاصل می‌شود با کمک روشهای منطقی میّسر است. در هر صورت توصیف، تعریف و طراحی فرآیندهای حقیقی دنیای ما یکی از بیشمار کاربردهای ریاضیات به حساب می‌آید و تأثیر متقابل بین ریاضیات محض و ریاضیات کاربردی را به ما نشان می‌دهد.

مورد توجه قرار گرفتن ریاضیات در مطالعه بسیاری از نظامها، وابسته نبودن آن را به جهان فیزیکی یادآور می‌شود.

برای شمول و عمومیت در رویکرد و استدلال برهان اهدافی مورد استفاده قرار می‌گیرد، اهدافی که ارتباط سنتی ریاضیدانان را در شاخه‌های مختلف ریاضیات بیان می‌کند. به عنوان مثال، رنه دکارت با به‌کار بردن جبر در هندسه و حل مسایل هندسه با روشهای جبری، هندسه تحلیلی را به وجود آورد تا عمومیت و صحت آن را نشان دهد.

ریاضیات محض) و مطالعه نظامهای فیزیکی که به وسیله تئوریهای ریاضی استنباط می‌شود (دامنه ریاضیات کاربردی) مرز روشن و مشخصی وجود ندارد. در اصل، ممکن است هر شاخه ریاضیات نظامهای خاصی را توصیف کند مانند فیزیکی، اقتصادی، بیولوژی، پزشکی و نظامهای دیگر. نمونه‌سازی یک نظام فیزیکی مشتمل است بر یافتن تئوری ریاضی صوری که با ویژگیهای نظام فیزیکی مطابقت کند. تئوریهای ریاضی در کامپیوتر متعدد و مختلط است، در صورتی که در بعضی از نمونه‌سازیها تئوریها ساده است. بعضی اوقات ریاضیات رفتار یک نظام را پیش‌بینی و توصیف می‌کند به‌طوری که طراحی و مدل‌سازی منجر به پدید آمدن شاخه‌های ریاضی جدیدی می‌شود.

ریاضیات کاربردی شامل دامنه‌های تخصصی می‌شود که بین یافته‌های آزمایشی و تجربی و تئوریهای ریاضی ایجاد شده است. اگر چه این مقوله شامل کاربرد تئوری آماری در علم جامعه‌شناسی می‌شود امّا معمولاً ریاضیات کاربردی محدود و منحصر به کاربرد روشهای پیشرفته حسابان (حساب دیفرانسیل و انتگرال)، جبر خطی و سایر شاخه‌های پیشرفته ریاضیات در فرآیندهای فیزیکی و تکنولوژی است.

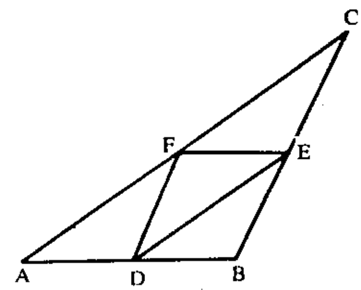
## ریاضیات کاربردی و نمونه‌سازی

بین مطالعه نظامهای ریاضی مجرد یا انتزاعی (دامنه

## مثلث‌بندی، هندسه و توابع مثلثاتی

یک نمونه ساده از روشهای ریاضی، نمایش بخشی از

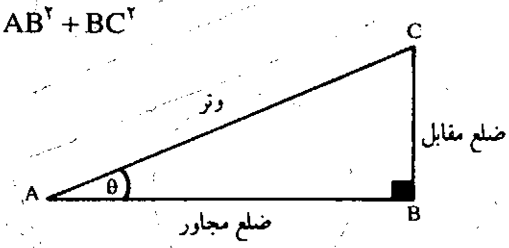
سطح زمین بوسیله یک مجموعه بهم پیوسته از مثلثها می‌باشد. در روش مثلث‌بندی برای به‌دست آوردن زوایا و فاصله‌هایی که قابل اندازه‌گیری نمی‌باشند از قوانین هندسی و توابع مثلثاتی استفاده می‌شود. در استدلالهای هندسی می‌توان نتیجه گرفت که اگر زاویه‌های دو مثلث دو بدو متساوی و ضلعهای روبرو زاویه‌های متساوی متناسب باشند آن دو مثلث متشابهند.




در شکل بالا، نقاط D، E و F به ترتیب در وسط اضلاع AB، BC و CA قرار دارند. DE نصف طول AC، EF نصف طول AB و FD نصف طول BC می‌باشد.
بنابراین مثلث DEF متشابه مثلث ABC است و زاویه‌های D، E و F به‌ترتیب با زاویه‌های C، A و B متساوی است. علاوه بر این، مثلثهای ADF، FEC، DBE و EFD متناسب هستند و بنابراین با مثلث ABC متشابه می‌باشند.

مثلث قایم‌الزاویه مثلثی است که یکی از زاویه‌هایش ۹۰° است و بنابر قضیه فیثاغورس، مربع وتر برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگر.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$




در توابع مثلثاتی، نسبت طولهای دو ضلع به اندازه‌های دو زاویه حاده (تند) مثلث بستگی دارد و این نسبتها با واژه‌هایی نام برده می‌شود. برای مثال، نسبت ضلع مقابل زاویه داده شده به وتر را سینوس زاویه می‌نامند. حرفهای یونانی θ (تتا) و φ (فی) برای نشان دادن زاویه‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد؛ بنابراین زمانی که ما می‌گوییم سینوس θ به معنای $\sin\theta = \frac{BC}{AC}$

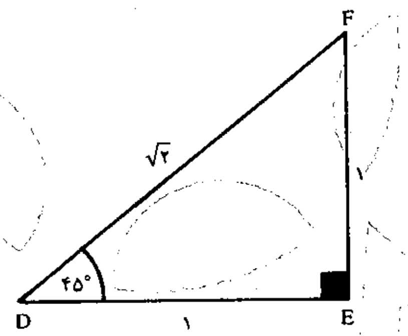
و کسینوس زاویه، نسبت ضلع مجاور زاویه داده شده به وتر می‌باشد.

$$\cos\theta = \frac{AB}{AC}$$

و تانژانت زاویه، نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور می‌باشد.

$$\tan\theta = \frac{BC}{AB}$$

برای به‌دست آوردن مقادیر $\sin\theta$، $\cos\theta$، $\tan\theta$ می‌توان از قضیه فیثاغورس استفاده کرد.




در مثلث DEF، $DE = EF = 1$ و زاویه‌های D و F هر کدام ۴۵° است (زوایای داخلی مثلث ۱۸۰°) با استفاده از قضیه فیثاغورس می‌توان نوشت.

$$DF^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

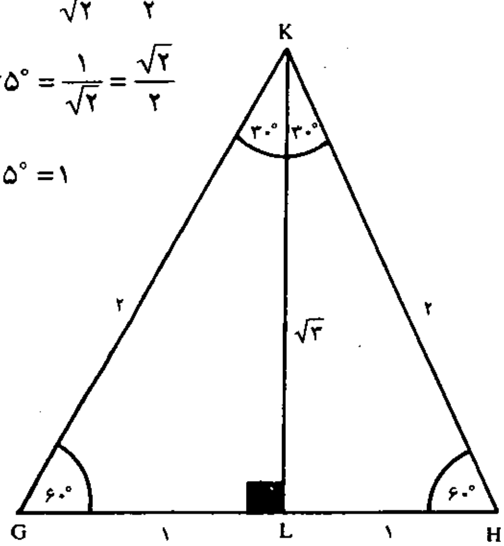
$$DF = \sqrt{2}$$

پس می‌توان نتیجه گرفت:

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = 1$$



در مثلث GHK، $GH = HK = KG = 2$ و زاویه‌های D، E و F هر کدام $60°$ است. با استفاده از قضیه فیثاغورس می‌توان نوشت:

$$KL^2 + 1^2 = 2^2$$

$$KL = \sqrt{3}$$

پس می‌توان نتیجه گرفت:

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30°$$

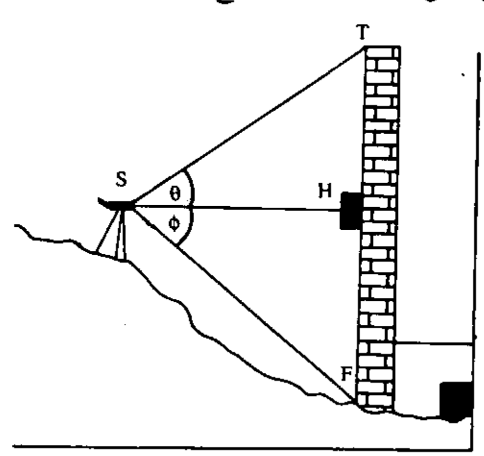
$$\cos 60° = \frac{1}{2} = \sin 30°$$

$$\tan 60° = \sqrt{3}$$

$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

### اندازه‌گیری ارتفاع

مطالب گفته شده کاربردهای گوناگون دارد به‌طور مثال برای اندازه‌گیری ارتفاع می‌توان از قضیه فیثاغورس استفاده کرد. فرض کنید نقشه‌برداری که موظف است ارتفاع یک دودکش بلند را اندازه بگیرد به یک تئودولیت یا دوربین مهندسی (وسیله‌ای که دقیقاً زوایا را اندازه می‌گیرد) و یک نوار مدرج (متر) بلند احتیاج دارد. ابتدا او دوربینش را در محل شیب تپه که نوک و عمق دودکش بوضوح دیده می‌شود، تراز می‌کند. سپس به ترتیب زوایای θ و φ بین خط افق SH و خطوط بینایی ST و SF در نوک T و عمق F دودکش را اندازه می‌گیرد. فرض کنید که دودکش عمود است و هر دو زاویه H زاویه راست است. نقشه‌بردار بر انجام کارش حداقل به اندازه یک قسمت نیاز دارد به همین علت SF را که تنها طول قابل اندازه‌گیری می‌باشد را با نوار مدرج اندازه می‌گیرد.




نکته مهم این که نقشه‌بردار در اندازه‌گیری SF دقت لازم را باید انجام دهد.

حالا $\sin\phi = \frac{HF}{SF}$ و HF اندازه قسمت پایین دودکش است

$$HF = SF \times \sin\phi$$

و $\cos\phi = \frac{SH}{SF}$ و SH مسافت خط افق تا دودکش است

$$SH = SF \times \cos\phi$$

حالا نقشه‌بردار می‌تواند مقدار HT قسمت بالای دودکش را حساب کند. ما قبلاً مقدار SH را به‌دست آورده‌ایم.

$$\tan\theta = \frac{HT}{SH}$$

$$HT = \tan\theta \times SH$$

که با $SF \times \cos\phi \times \tan\theta$ برابر است.

ارتفاع دودکش برابر $FT = FH + HT$ است. پس می‌توان نوشت:

$$FT = (SF \times \sin\phi) + (SF \times \cos\phi \tan\theta)$$

یا:

$$FT = SF(\sin\phi + \cos\phi \tan\theta)$$

نقشه‌بردار مقدار SF، زاویه θ و φ را از قبل به‌دست آورده و کافی است مقادیر $\sin\phi$ و $\cos\phi$ و $\tan\theta$ را حساب کند تا ارتفاع دودکش را به دست آورد. برای مثال، فرض کنید نقشه‌بردار اندازه $SF = 30m$ و اندازه زاویه $\theta = 45°$ و اندازه زاویه $\phi = 30°$ را در اختیار دارد.

$$\sin 30° = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 45° = 1$$

با این حساب ارتفاع دودکش برابر است با:

$$FT = 30\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 40/98 \quad \text{متر}$$

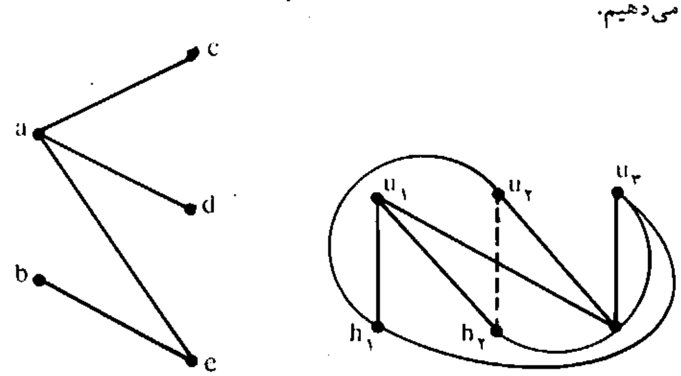
# گراف
## (قسمت دوّم)

**قابل استفاده دانش‌آموزان رشته ریاضی، دوره پیش‌دانشگاهی، ریاضیات گسسته**

منبع مورد استفاده: ریاضیات گسسته و ترکیباتی
رالف ـ پ ـ گریمالدی (جلد دوم)
ترجمه و جمع‌آوری: سیمین اکبری‌زاده (دبیر ریاضی ـ اراک)

### ◄ تعریف: گراف دو بخشی کامل
**(complete bipartite graph)**

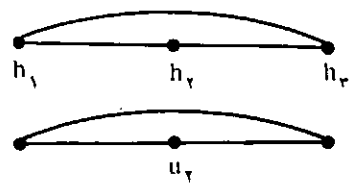
$G=(V,E)$ را یک گراف دو بخشی گوییم، هرگاه $V$ را بتوان به‌صورت اجتماع دو مجموعهٔ ناتهی و جدا از هم $V_1$ و $V_2$ نوشت طوری که بین رئوس $V_1$ و همچنین بین رئوس $V_2$ هیچ یالی موجود نباشد (به‌عبارتی هر یال درنظر بگیریم، یک رأسش در $V_1$ و دیگری در $V_2$ باشد). اگر علاوه بر این هر رأس $V_1$ با هر رأس $V_2$ بوسیله یالی به‌هم وصل شوند، آنگاه گراف حاصل را گراف دو بخشی کامل گوییم. وقتی $|V_1|=m$ و $|V_2|=n$ . این گراف را با $k_{m,n}$ نمایش می‌دهیم.




شکل (۲۴)

مثال ۱۵: در گراف $G_1$ شکل (۲۴) هرگاه $V_1=\{a,b\}$ و $V_2=\{c,d,e\}$ انتخاب شوند، خواهیم داشت $V_1\cap V_2=\phi$ و $V_1\cup V_2=V$ و گذشته از این بین رئوس $V_1$ هیچ یالی موجود نیست و همچنین بین رئوس موجود در $V_2$ ، لذا $G_1$ یک گراف دو بخشی است. ولی چون بین رأس b در $V_1$ و رئوس d و c در $V_2$ هیچ یالی موجود نیست، $G_1$ دو بخشی کامل نیست. منتهی با اضافه کردن یالهای $\{b,d\}$ و $\{b,c\}$ گراف حاصل دو بخشی کامل $(k_{2,3})$ خواهد بود. $G_1$ گراف مسطح است (طبق تعریف). در $G_2$ با انتخاب $V_1=\{u_1,u_2,u_3\}$ و $V_2\{h_1,h_2,h_3\}$ نتیجه خواهیم گرفت دو بخشی کامل $(k_{3,3})$ است. ولی $G_2$ مسطح نیست. مگر با برداشتن یالی مثل $\{h_2,u_2\}$ .

مسئله ۱۱: متمم گراف $G_2$ در شکل (۲۴) $(\overline{k_{3,3}})$ را رسم کنید:




شکل (۲۵)

حل: همان‌طور که در شکل (۲۵) ملاحظه می‌شود:

$E(\overline{k_{3,3}})=\{h_1h_2,h_1h_3,h_2h_3,u_1u_2,u_2u_3,u_1u_3\}$

پس $\overline{k_{3,3}}$ دارای ۲ مؤلفه $k_3$ و $k_3$ می‌باشد. به‌طور کلی $\overline{k_{m,n}}$ دارای دو مؤلفه $k_m$ و $k_n$ می‌باشد.

مسئله ۱۲: الف) تعداد رئوس و یالهای موجود در گراف کامل

دو بخشی $k_{m,n}$ $(m,n\in z^+)$ را تعیین کنید.

ب) اگر گراف $k_{m,۱۲}$ ۷۲ یال داشته باشد، m را محاسبه کنید.

پ) ثابت کنید: $\binom{m+n}{۲} - mn = \binom{m}{۲} + \binom{n}{۲}$

$(m,n\in z^+)$ (راهنمایی: از تعداد یالهای موجود در گرافهای $k_{m+n}$ و $k_{m,n}$ و $\overline{k_{m,n}}$ استفاده کنید.)

حل: الف) تعداد رئوس: $m+n$ و تعداد یالها: $mn$.

ب) $|E| = ۱۲m = ۷۲ \Rightarrow m = ۶$

پ) فرض می‌کنیم $k_{m+n}$ $m+n$ رأس به‌صورت $\{x_۱,x_۲,...,x_m,y_۱,y_۲,...,y_n\}$ لیست شده باشند و $V_۱ = \{x_۱,x_۲,...,x_m\}$ و $V_۲\{y_۱,y_۲,...,y_n\}$. همهٔ یالهای به‌شکل $\{x_i,y_j\}$، $۱\leq j\leq n$ و $۱\leq i\leq m$ را (که تعداد آنها $mn$ است) از یالهای گراف کامل $k_{m+n}$ (که تعدادشان $\binom{m+n}{۲}$ می‌باشد) حذف می‌کنیم. درنتیجه $\overline{k_{m,n}}$ که دارای دو مؤلفهٔ $k_m$ و $k_n$ است حاصل می‌شود، با تعداد یالهای

$$\binom{m}{۲} + \binom{n}{۲}$$

لذا:

$$|E(\overline{k_{m,n}})| = \binom{m+n}{۲} - mn = \binom{m}{۲} + \binom{n}{۲}$$

تمرین ۱: ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آنکه یک گراف دو بخشی باشد، آن است که دوری با طول خرد نداشته باشد.

تمرین ۲: هرگاه $G=(V,E)$ یک گراف همبند با v رأس باشد که $|E| > \frac{v^۲}{۴}$، ثابت کنید G نمی‌تواند گراف دو بخشی باشد.

تست ۶) کدام گزینه همواره صحیح است.

الف) هر گراف ساده نوع خاصی از یک گراف چندگانه است.

ب) هر گراف دو بخشی کامل الزاماً یک گراف دو بخشی است.

پ) هر گراف دو بخشی کامل الزاماً یک گراف کامل است.

ت) موارد ب و پ.

حل: گزینهٔ «ب» صحیح است. (توجه داشته باشید که گزینهٔ پ صحیح نیست. مثلاً $G_۲$ در شکل (۲۴) دو بخشی کامل هست ولی گراف کامل نیست).

## ◄ تعریف: دور همیلتونی و مسیر همیلتونی

**(Hamilton cycle and Hamilton path)**

فرض کنید، $G=(V,E)$ یک گراف بی‌جهت یا چندگانه باشد.

الف) هرگاه دوری در G موجود باشد که از هر رأس موجود در G دقیقاً یک بار بگذرد، گوییم G دارای دور همیلتونی است. (یا به‌اختصار G گراف همیلتونی است.)

ب) مسیر همیلتونی، مسیری در G می‌باشد که از هر رأس موجود در G دقیقاً یک بار می‌گذرد. دو تعریف را با تعاریف مدار اویلری و خط سیر اویلری مقایسه کنید.

توجه: هرگاه G گراف همیلتونی با n رأس باشد، دارای دوری با n رأس متمایز و n یال خواهد بود.

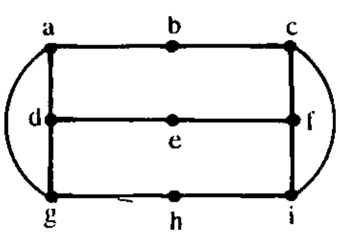
نکته ۱: اگر گرافی دور همیلتونی داشته باشد، مسیر همیلتونی نیز خواهد داشت (کافی است یک یال از دور را حذف کنیم). ولی عکس این موضوع صادق نیست و ممکن است گرافی مسیر همیلتونی داشته باشد ولی دور همیلتونی نداشته باشد.

نکته ۲: تفاوت دور و دور همیلتونی در آن است که ممکن است رأسی در گراف G موجود باشد که در دور ظاهر نشود. ولی در دور همیلتونی هر رأس دقیقاً یک بار ظاهر می‌شود.

نکته ۲: هرگاه G دور همیلتونی داشته باشد برای هر $a\in V$ داریم $\deg(a)\geq ۲$.

نکته ۳: هرگاه $a\in V$ و $\deg(a)=۲$، آنگاه هر دو یال وابسته به‌رأس a باید در دور همیلتونی ظاهر شود.

مسئله ۱۳: گراف شکل (۲۶) را درنظر بگیرید.




**شکل (۲۶)**

الف) آیا می‌توان از یک رأس شروع کرد و از هر رأس دقیقاً یک بار گذشت و به‌همان رأس اول رسید (یا آیا گراف همیلتونی است)؟

ب) آیا می‌توان از یک رأس شروع کرد و از هر رأس دقیقاً یک بار گذشت و به‌رأس دیگری به‌جز رأس اول رسید؟ (آیا گراف مسیر همیلتونی دارد).

حل: الف) باتوجه به‌این که G ۹ رأس دارد. اگر در G دور همیلتونی موجود باشد طول این دور باید ۹ باشد و چنین دوری را نمی‌توان یافت لذا G گراف همیلتونی نیست. ب) دنبالهٔ رئوس

a,b,c,f,c,d,g,h,i یک مسیر همیلتونی برای G می‌سازد.

مسئله ۱۴: یک گراف همبند مثال بزنید که دارای شرایط زیر باشد.

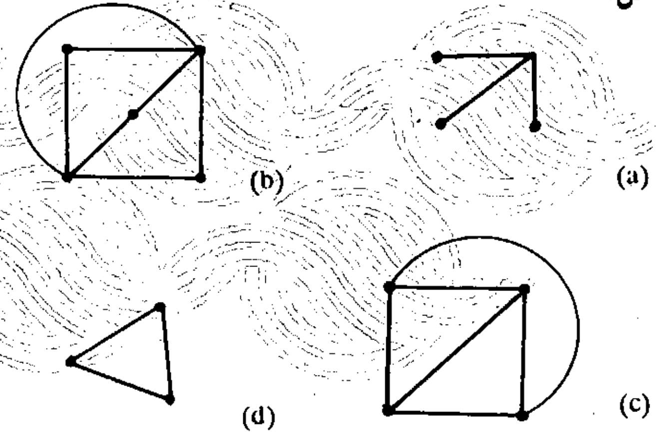
الف) نه اویلری باشد و نه همیلتونی.

ب) اویلری باشد ولی همیلتونی نباشد.

پ) همیلتونی باشد ولی اویلری نباشد.

ت) هم اویلری باشد و هم همیلتونی.

**حل:**



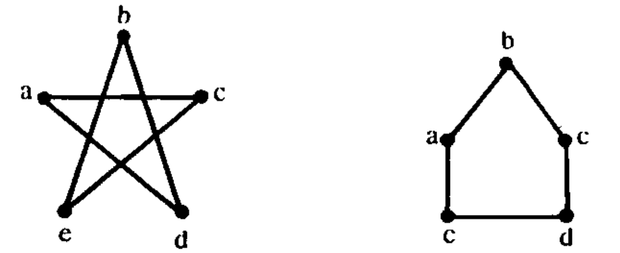

**شکل (۲۷)**

مسئله ۱۵ [54]: الف) گراف کامل $k_n$، ($n\geq ۳$ و عددی فرد) چند دور همیلتونی مختلف دارد؟

ب) ۱۷ دانش‌آموز، هر روز برای خوردن ناهار دور یک میز گرد می‌نشینند. آنها سعی می‌کنند برای آنکه یکدیگر را بهتر بشناسند هر روز بین دو نفری بنشینند که روزهای قبل کنار آنها نبوده‌اند آنها برای چند روز این کار را می‌توانند ادامه دهند.

حل: الف) $k_n$، n رأس و $\binom{n}{۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}$ یال دارد. یک دور همیلتونی در $k_n$، n یال دارد. بنابراین حداکثر $\frac{n-۱}{۲}$ دور همیلتونی می‌توانیم داشته باشیم طوری که هیچ دو دوری یال مشترک نداشته باشند. مثلاً $k_5$، $\frac{۵-۱}{۲}=۲$ دور همیلتونی مختلف دارد که عبارتند از:

ب) باتوجه به قسمت الف، برای $\frac{۱۷-۱}{۲}=۹$ روز.




## تعریف: عدد رنگی (رأسی)

**(chromatic number)**

فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف بی‌جهت باشد، رنگ‌آمیزی مناسب G هنگامی رخ می‌دهد که رئوس G را طوری رنگ بزنیم که اگر $\{a,b\}$ یالی در G باشد آنگاه a و b با رنگهای مختلف رنگ شوند. حداقل تعداد رنگهای لازم برای چنین رنگ‌آمیزی را عدد رنگی (رأسی) گراف G می‌نامند و با $X(G)$ نمایش می‌دهند. بنابراین برای پیدا کردن $X(G)$ باید مجموعهٔ رئوس G را چنان افراز کنیم که بین اعضای زیرمجموعه‌های حاصل هیچ یالی موجود نباشد و تعداد زیرمجموعه‌ها حداقل باشد.

مثال ۱۶: الف) باتوجه به تعریف گراف دوبخشی کامل $X(k_{m,n})=۲$.

ب) هرگاه $c_n$ دوری با طول n ($n\geq ۳$) باشد آنگاه:

$$X(c_n)=\begin{cases} ۲ & \text{اگر n زوج باشد،} \\ ۳ & \text{اگر n فرد باشد،} \end{cases}$$

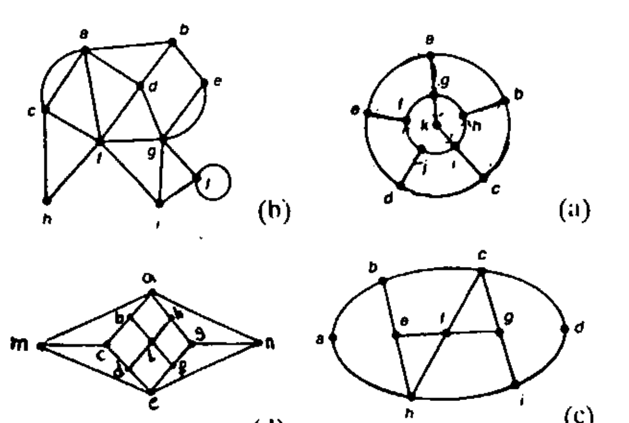
تمرین ۳: فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف بی‌جهت همبند دو بخشی باشد که V به‌دو مجموعه ناتهی $V_1$ و $V_2$ افراز شده باشد.

الف) هرگاه $|V_2|\neq|V_1|$، ثابت کنید G نمی‌تواند دور همیلتونی داشته باشد.

ب) هرگاه $|V_1|-|V_2|\neq\pm ۱$، ثابت کنید G نمی‌تواند مسیر همیلتونی داشته باشد.

تست ۷: کدامیک از گرافهای شکل (۲۸) همیلتونی نیست؟

الف) گراف a* ب) گراف b پ) گراف c ت) گراف d.

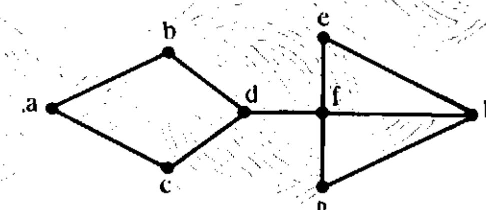



**شکل (۲۸)**

* گراف شکل (G) در تست ۷ بی‌جهت می‌باشد لطفاً جهت‌ها را در نظر نگیرید.

حل: با انتخاب دنبالهٔ رئوس a,g,k,i,h,b,c,d,j,f,e,a نتیجه می‌گیریم گراف (a) همیلتونی است و با انتخاب دنبالهٔ رئوس a,d,b,e,g,j,i,f,h,c,a نتیجه می‌گیریم گراف (b) نیز همیلتونی است و با انتخاب دنبالهٔ رئوس a,h,e,f,g,i,d,c,b,a نتیجه خواهیم گرفت گراف (c) نیز همیلتونی است. گراف (d) که به‌گراف (Herschel) معروف است همبند می‌باشد و با انتخاب $V_1=\{a,c,e,g,l\}$ و $V_2=\{b,d,f,h,n,m\}$ نتیجه خواهیم گرفت گراف دوبخشی است و چون $|V_2|=6\neq 5=|V_1|$ لذا طبق تمرین ۳ نتیجه خواهیم گرفت این گراف همیلتونی نیست (توجه داشته باشید تمرین ۳ هنگامی قابل استفاده است که از دو بخشی بودن گراف اطمینان داشته باشیم. و نیز عکس ترکیبهای شرطی الف و ب در تمرین ۳ برقرار نیست).

مسئله ۱۶: یک دفتردار مدرسه می‌خواهد برای برگزاری ۸ امتحان برنامه‌ریزی کند. بعضی از امتحانها همزمان قابل اجرا نیستند و برخی از آنها به‌طور همزمان قابل اجرا هستند. به‌هر امتحان یک رأس نظیر کرده‌ایم و رئوس متناظر با دو امتحانی که همزمان قابل اجرا نیستند را به‌وسیله یک یال به‌هم وصل نموده‌ایم، گراف شکل (۲۹) به‌دست آمده است. کمترین تعداد جلسات لازم برای این برنامه‌ریزی را تعیین کنید.




**شکل (۲۹)**

حل: $v=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$. مجموعهٔ V را باتوجه به‌تعریف عدد رنگی به‌طریق زیر افراز می‌کنیم: یکی از رئوس مثل a را انتخاب کرده و آن را در مجموعهٔ $V_1$ قرار می‌دهیم. چون رأس b مجاور a است لذا آن را در مجموعهٔ دیگری مثل $V_2$ قرار می‌دهیم. رأس c مجاور a است پس نمی‌توان آن را در $V_1$ قرار داد ولی باتوجه به‌این که رئوس b و c مجاور نیستند c را در $V_2$ قرار می‌دهیم. تاکنون داریم:

$$V_1=\{a\}$$

$$V_2=\{b,c\}$$

و به‌این‌ترتیب ادامه می‌دهیم تا $V_1=\{a,d,e,g\}$ و $V_2=\{b,c,f\}$

اکنون نوبت به h رسیده، چون h مجاور e و f است بنابراین نمی‌توان آن را در $V_1$ و $V_2$ قرار داد و مجبوریم از مجموعه سومی به‌نام $V_3$ استفاده کنیم. بنابراین V را می‌توان حداقل به ۳ زیرمجموعهٔ

$$V_1=\{a,d,e,g\}$$

$$V_2=\{b,c,f\}$$

$$V_3=\{h\}$$

افراز کرد که بین اعضای $V_1$ هیچ یالی موجود نیست و همچنین بین اعضای $V_2$ و $V_3$. لذا عدد رنگی (رأسی) این گراف ۳ می‌باشد یعنی حداقل سه جلسه برای برگزاری امتحانات لازم است.

مسئله ۱۷: هرگاه G یک گراف بی‌جهت با حداقل یک یال باشد، ثابت کنید G دوبخشی است اگر و تنها اگر $X(G)=2$.

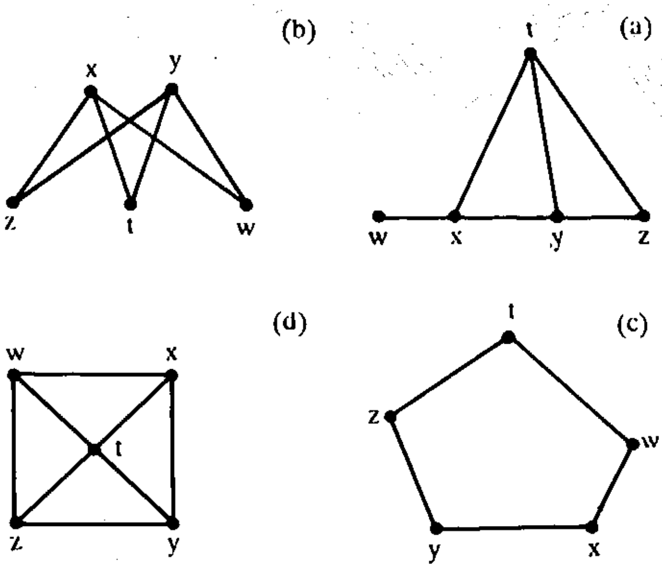
حل: این موضوع باتوجه به‌تعریف گراف دوبخشی بدیهی است. مثلاً گراف (d) در شکل (۲۸) گراف دوبخشی است. لذا $X(G)=2$.

مسئله ۱۸: یک گراف بی‌جهت مانند G ارائه دهید که $X(G)=3$. ولی هیچ زیرگراف G با $k_3$ یکریخت نباشد.

حل: کافی است G دوری با n رأس که $n\geq 5$ و عددی خرد است، انتخاب شود.

تست ۸: عدد رنگی کدامیک از گرافهای شکل (۳۰) مخالف ۳ است.

الف) a ب) b پ) c ت) d




**شکل (۳۰)**

حل: گراف b همان گراف کامل دوبخشی $k_{2,3}$ می‌باشد لذا

$X(G)=۲$ . ولی در گرافهای a و c و d می‌توان حداقل V را به ۳ زیرمجموعه مثل $V_۳=\{y,w\}$ و $V_۲=\{x,z\}$ و $V_۱\{t\}$ افراز کرد که بین اعضای $V_۱$ و $V_۲$ و $V_۳$ هیچ یالی موجود نباشد. لذا عدد رنگی هر ۳ گراف سه می‌باشد و گزینهٔ (ب) صحیح است.

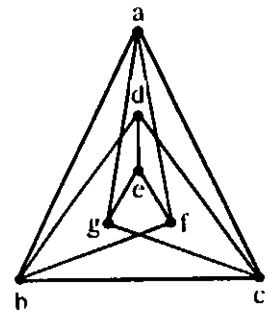
تست ۹: کدام گزاره در مورد شکل (۳۱) درست است.

الف) G ، گراف اویلری است.

ب) گراف G همیلتونی است.

پ) گراف G دوبخشی است.

ت) گراف G غیرمسطح است.




**شکل (۳۱)**

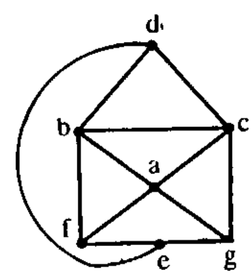
حل: گراف G اویلری نیست، چون درجهٔ تمام رئوس آن زوج نیست.

گراف G همیلتونی است (با درنظر گرفتن دنبالهٔ رئوس e,d,b,c,g,a,f,e که دوری با ۷ رأس و ۷ یال می‌باشد).

گراف G دوبخشی نیست. چون عدد رنگی آن طبق افراز زیر ۴ می‌باشد.

$V_۱=\{a,d\}$ ، $V_۲=\{b,g\}$ ، $V_۳=\{c,f\}$ ، $V_۴=\{e\}$

گراف G طبق شکل (۳۲) گراف مسطح است. (گزینه ب صحیح است).




**شکل (۳۲)**

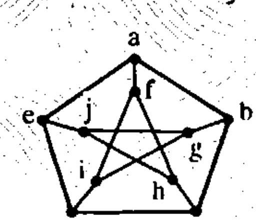
تست ۱۰: کدام گزاره در مورد شکل (۳۳) که به گراف پترسون معروف است، درست است.

الف) گراف پترسون دور همیلتونی دارد.

ب) گراف پترسون مسیر همیلتونی دارد.

پ) $X(G)=۴$

ت) G گراف دوبخشی است.




**شکل (۳۳)**

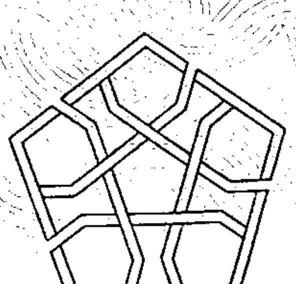
حل: گراف G مسیر همیلتونی دارد (با انتخاب دنبالهٔ رئوس a,b,c,d,e,j,g,i,f,h) عدد رنگی G طبق افراز زیر ۳ می‌باشد لذا G دوبخشی نیست.

$V_۱=\{a,c,g\}$ , $V_۲=\{b,d,f,j\}$ , $V_۳=\{e,h,i\}$

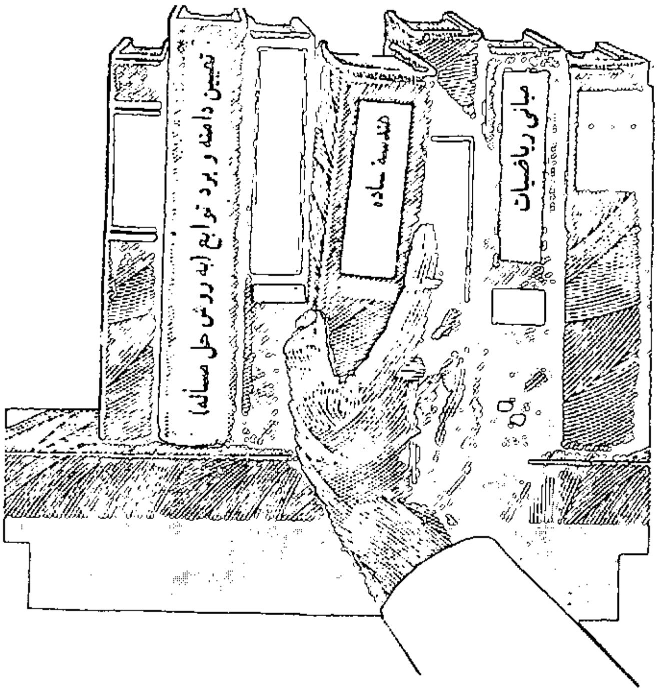
گراف G دور همیلتونی ندارد، چون نمی‌توان هیچ دوری با ۱۰ رأس متمایز و طول ۱۰ در آن یافت. گزینهٔ ب صحیح است. (می‌توان نشان داد اگر یک رأس و یالهای مجاور به‌آن را از گراف پترسون حذف کنیم، گراف حاصل همیلتونی خواهد بود. مثلاً اگر رأس g و ۳ یال وابسته به‌آن را از G حذف کنیم با انتخاب دنبالهٔ رئوس d,c,b,a,e,j,h,f,i,d دوری با ۹ رأس متمایز و طول ۹ خواهیم داشت و گراف حاصل همیلتونی خواهد بود.

مسئله ۱۹: الف) ثابت کنید اگر یالهای گراف کامل $k_۶$ با رنگهای قرمز یا آبی رنگ شوند، حتماً یک مثلث با یالهای قرمز یا آبی وجود خواهد داشت. ب) ثابت کنید در هر گروه ۶ نفری یا دست‌کم سه نفر هستند که دوبه‌دو یکدیگر را می‌شناسند، یادست‌کم ۳ نفر هستند که دوبه‌دو یکدیگر را نمی‌شناسند. (با این فرض که آشنایی رابطه‌ای دوجانبه است).

حل: الف) رئوس $k_۶$ را با a,b,c,d,e,f نامگذاری می‌کنیم. یکی از ۶ رأس مثلاً انتخاب می‌کنیم. باتوجه به‌اصل لانه کبوتری حداقل ۳ یال از ۵ یال گذرنده از a ‏(ab,ac,ad,ae,af) همرنگ مثلاً قرمزند. فرض می‌کنیم این یالهای قرمز عبارتند از: ab,ac,ad . باتوجه به ۳ یال مذکور یالهای bc,cd,bd راکه مثلث تشکیل می‌دهند درنظر می‌گیریم. دو حالت امکان دارد: اگر این سه یال آبی باشند، مثلثی با یالهای آبی خواهیم داشت و اثبات تمام است وگرنه، یکی از این یالها مثلاً {c,d} قرمز است و در این صورت این یال با دو یال قرمز ad و ac مثلثی قرمز تشکیل خواهد داد. ب) برای ساختن گراف متناظر به‌هر یک نفر رأس‌نظیر می‌کنیم. برای‌هر دو نفری که با هم دوست (غریبه) هستند، ۲ رأس متناظر آنها را با یال قرمز (آبی) به‌هم وصل می‌کنیم. به‌این ترتیب باتوجه به‌قسمت الف، حکم نتیجه خواهد شد.



# معرفی کتاب




## مبانی ریاضیات

مؤلفان: حمیدرضا امیری و
یداللّه ایلخانی‌پور
انتشارات مدرسه
چاپ اول: زمستان ۱۳۷۴

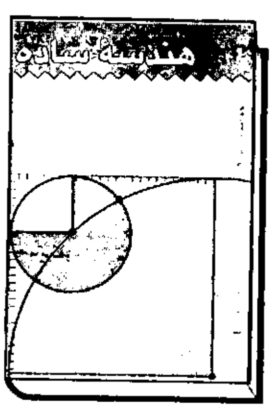

این کتاب از پنج بخش، جبرگزاره‌ها ــ استدلال ریاضی و روش حل مسأله، جبر مجموعه‌ها، ضرب دکارتی و رابطه ــ همنهشتی تشکیل شده است.

بخش‌های این کتاب در سالهای اوّل تا چهارم نظام قدیم و سال سوم نظام جدید (جبر و احتمال) و سال چهارم پیش‌دانشگاهی (ریاضیات گسسته) دبیرستانها تدریس می‌شود و در تمام دروس ریاضی کاربرد دارد.

در هر بخش سعی شده است مطلب به طور مبسوط و به زبان ساده و دانش‌آموزی بیان شود. همچنین برای بیان یک مفهوم ریاضی مثالهای متنوّع آمده است و تا حدّی کتاب به صورت خودآموز تنظیم شده است تا دانش‌آموزان دبیرستانی بتوانند بدون کمک دیگران از کتاب بهره ببرند. در پایان هر بخش مسایلی مختلف از ساده به مشکل برای سنجش مفاهیم ارائه شده است. خواندن این کتاب را به همهٔ دانش‌آموزان عزیز دبیرستانی بخصوص دانش‌آموزان نظام جدید توصیه می‌کنیم.

## هندسهٔ ساده

مترجم: مهدی نجفی‌خواه
انتشارات مدرسه
چاپ اول: بهار ۱۳۷۵



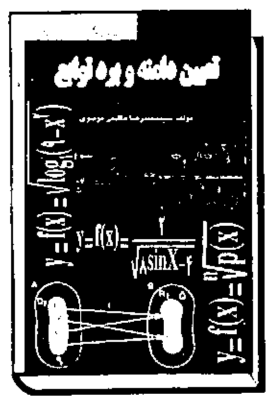

این کتاب که مشتمل بر ۱۰ فصل با عناوین:
بردارها در صفحه، خط راست در صفحه و معادلات آن، منحنی‌های درجهٔ دوم، خطوط راست و صفحات در فضا، بردارهای فضایی، معادلهٔ خط راست و صفحهٔ در فضا، چند وجهی‌ها و مساحت سطوح آنها، اجسام دوار، حجم چند وجهی‌ها و اجسام دوار و مساحت سطح اجسام دوار می‌باشد

که در پایان هر فصل با توجه به محتوی هر درس مسایلی تکمیلی همراه با حل آنان (در آخر کتاب) آورده شده است.

در این کتاب سعی شده است که مطالب با بیانی ساده و روان به صورت خودآموز آورده شود تا دانش‌آموزان دبیرستانی بتوانند بدون کمک دیگران از کتاب بهره‌مند شوند.

خواندن این کتاب را به همهٔ دانش‌آموزان عزیز دبیرستانی رشته ریاضی و تجربی و دبیران محترم توصیه می کنیم.

## تعیین دامنه و برد توابع (به روش حل مسأله)

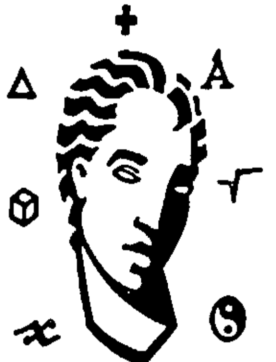


**تألیف: محمدرضا هاشمی موسوی**

**انتشارات مدرسه**

**چاپ اول: تابستان ۱۳۷۵**

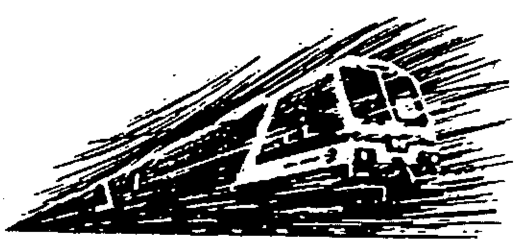
این کتاب حاوی تعیین دامنه و برد ده نوع تابع ازجمله توابع جبری، مثلثاتی، وارون و مرکب می‌باشد که پس از درس، با توجه به مفاهیم و مثالهای متن درس، مسایل و تمرینهایی دوره‌ای جهت احاطه و تسلط کامل روی مطالب فراگرفته شده، طرح شده است. در آخر تستهای کنکورهای سراسری مربوط به تعیین دامنه و برد توابع رشته‌های ریاضی و فنی و تجربی و تستهایی جهت پوشش دادن به مطلب همراه با پاسخ تشریحی آنان آورده شده است تا معلومات و مهارت کافی را برای داوطلبان شرکت در آزمونهای سراسری فراهم سازد. همچنین آزمونی (تستهای دوره‌ای) جهت ارزیابی درک مطالب و تستهای فراگرفته شده آمده است (۱۵۵ تست با پاسخ تشریحی) که پس از پاسخگویی می‌توانید جواب خود را با پاسخهای تشریحی داده شده تطبیق دهید. این کتاب از آن جهت که برای بررسی توابع و حل معادلات و نامعادلات و رسم منحنی و تعیین ماکزیمم و می‌نیمم برخی از توابع بدون استفاده از مشتق و دیگر موارد بسیار ضروری است خواندن آن را به همهٔ دانش‌آموزان دبیرستان و دانشجویان و دبیران گرامی توصیه می کنیم.

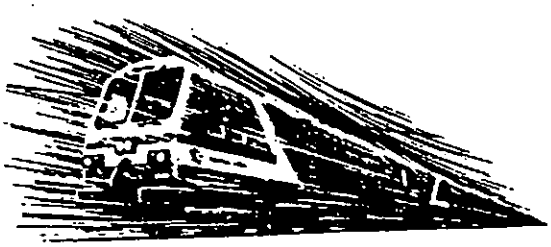


## تفریح اندیشه ۵

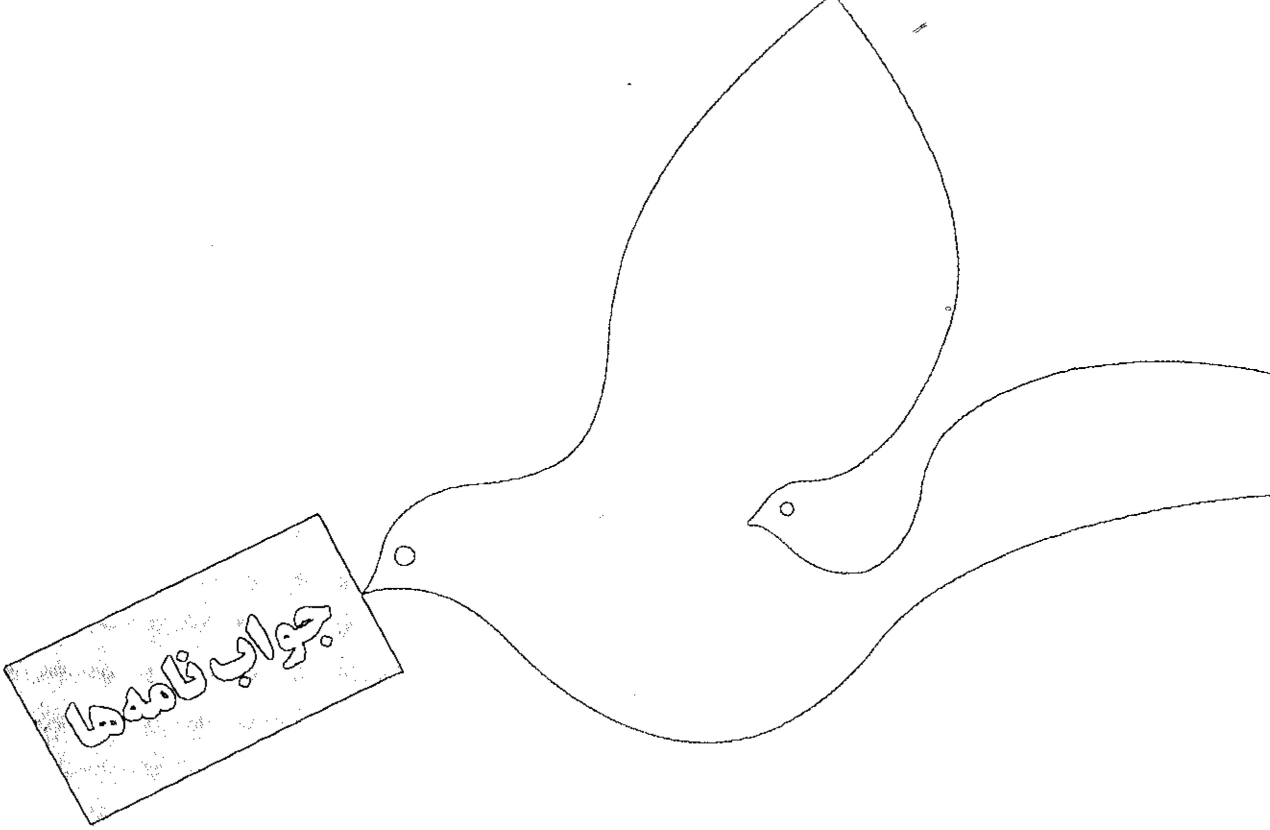
**ـــ روی خط**

**دو قطار زیرزمینی، یکی دو برابر سریعتر از دیگری، از دو سر یک خط به راه می‌افتند، و بدون توقف با نرخهای سرعت یکنواخت حرکت کرده در خیابان پنجاهم از کنار یکدیگر عبور می‌کنند. درصورتی که قطار سریعتر در آغاز حرکت ۵ دقیقه تأخیر می‌داشت در نقطه‌ای به فاصلهٔ ۲ کیلومتر از خیابان پنجاهم برخورد می‌کردند. سرعت قطارها چقدر است؟ طول خط چه اندازه است؟**





**جواب در صفحه ۸۸**




**آقای مهدی سید نصرتی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (پولادشهر)**

از مسألهٔ حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. در صورت لزوم از آن استفاده خواهیم کرد.

**آقای مهدی محمدی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (آمل)**

از ارسال نامهٔ محبت‌آمیز شما که حاوی چند مسألهٔ حل شده نیز بود، متشکریم. ان‌شاءالله در شماره‌های بعدی مجله از آنها استفاده خواهیم کرد.

**خانم الهه شهیری؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (خراسان)**

از نامهٔ ارسالی شما که حاوی چند مسألهٔ حل شده بود، متشکریم. از مسایل شما در صورت لزوم استفاده خواهیم کرد. در جواب نامهٔ شما باید بگوییم که ان‌شاءالله بزودی شاهد مقاله‌ای دربارهٔ رادیکالها خواهید بود.

**آقای رسول غنی زاده (ارومیه)**

ازمسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. در صورت لزوم و در جای مناسب از آنها استفاده خواهیم کرد.

**آقای رضا عاقلی؛ دانش آموز رشتهٔ ریاضی (سیاهکل)**

از شما برای ارسال مسایلی همراه با حل، متشکریم. در صورت لزوم از آنها استفاده خواهیم کرد.

**آقای غلام‌رضا پورقلی (آستارا)**

ضمن تشکر از شما، به عرض می‌رسانیم که خوب است بدانید « وایلز » ثابت کرده است معادلهٔ $x^n + y^n = z^n$ برای هر n طبیعی بزرگتر یا مساوی ۳ $(n \geq ۳)$ جواب صحیح غیر صفر اندارد.

توجه کنید که هر معادلهٔ سیال مانند:

$$x^n + y^n + z^n = t^n \qquad (۱)$$

درصورتی که برای برخی n طبیعی جواب داشته باشد، هر معادله از نوع (۱) جوابهای اختصاصی و عمومی مخصوص به خود دارد. برای مثال معادله‌های:

$$x^۴ + y^۴ + z^۴ = t^۴ ، x^۳ + y^۳ + z^۳ = t^۳ ، \ldots ،$$

$$x^k + y^k + z^k = t^k \quad (k \in \mathbb{N})$$

اگر معادله(۱) برای n=k جواب داشته باشد، معلوم نیست که معادله برای $n = k + ۱$ دارای جواب باشد.

**آقای صابر گودالی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (بوکان)**

ضمن تشکر از شما برای ارسال حل مسایل برهان ۱۳ باید به عرض برسانیم که شما فقط دروقت مقرر شده می‌توانید حل مسایل مسابقه‌ای را ارسال کنید.

**آقای مهدی نامور؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (بجنورد)**

از شما برای ارسال مسایلی همراه با حل متشکریم. در صورت لزوم از آنها استفاده خواهیم کرد.

**آقای علیرضا خان تیموری؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (زنجان)**

از شما برای ارسال مسایلی همراه با حل متشکریم. در صورت لزوم از آنها استفاده خواهیم کرد.

**آقای مهدی شادمانی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (تهران)**

ضمن تشکر از شما برای ارسال حل مسایل برهان به عرض می‌رسانیم که شما فقط در زمان مقرر شده می‌توانید حل مسایل مسابقه‌ای را ارسال کنید.

**آقای حمید رضا داودیان؛ دانش آموز رشتهٔ ریاضی (شوشتر)**

از شما برای ارسال چند مسأله با حل متشکریم. در صورت لزوم از آنها استفاده خواهیم کرد.

**آقای ابوالفضل کریمایی (شهریار)**

از شما برای ارسال دو مسألهٔ حل شده متشکریم. در صورت لزوم از آنها استفاده خواهیم کرد.

**آقای بهزاد کاظمی؛ دیپلمهٔ رشتهٔ تجربی (اهواز)**

از شما برای ارسال نامه محبت‌آمیز و مسایلی همراه با حل متشکریم. در صورت لزوم از آنها استفاده خواهیم کرد.

**خانم نسیبه میروکیلی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (شیراز)**

از شما برای ارسال مسایل و تستهایی همراه با حل متشکریم. در صورت لزوم از آنها استفاده خواهیم کرد.

**آقای غلامرضا صفایی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (آباده)**

ضمن تشکر از شما برای ارسال مسایلی همراه با حل به عرض می‌رسانیم که سعی کنید مسایل از سطح مطلوبتری برخوردار باشند و تکراری نیز نباشند. به هر حال ازمسایل شما در شماره های آینده استفاده خواهیم کرد.

**خانم فائقه احسان‌پور صادقی؛ دانش‌آموز رشتهٔ تجربی (ساوه)**

از شما برای ارسال مسایلی همراه با حل متشکریم. در صورت لزوم از آنها استفاده خواهیم کرد.

**آقای سعید سلیمانی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (بندرعباس)**

از شما برای ارسال مقاله‌ای تحت عنوان «بررسی اعداد فیبوناچی» متشکریم. توصیه می‌کنیم که مقالهٔ خود را برای مجلات ریاضی دیگر نیز ارسال کنید. برای اطلاع بیشتر در این زمینه می‌توانید به کتابهای «اندیشهٔ ریاضی» و «۲۵۰ مسأله حساب» ترجمه پرویز شهریاری و یا سایر کتابهای دیگر مانند: «ریاضیات چیست» و مجلات ریاضی مانند: «رشد آموزش ریاضی» رجوع کنید.

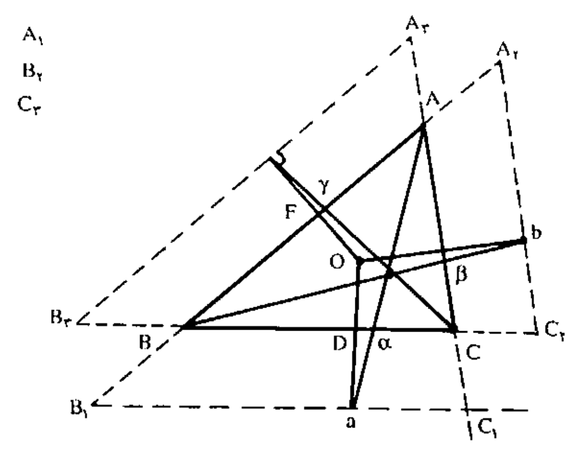
**آقای ایمان عشایری (ساری)**

ضمن تشکر از شما برای ارسال مقاله‌ای با عنوان «محاسبهٔ سریهای: $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\dots$ و $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\dots$» به عرض می‌رسانیم که این مقاله بسیار جالب است ولی مناسب مجلهٔ «رشد آموزش ریاضی» است. پیشنهاد می‌کنیم که مقاله را برای آن مجله ارسال کنید.

# حل مسألهٔ مسابقه‌ای برهان ۱۵،۱۶

## حل مسألهٔ مسابقه‌ای برهان ۱۵

نقطه‌های برخورد خطهای Aa ، Bb و Cc با ضلعهای BC ، CA و AB را به‌ترتیب α ، β و γ می‌نامیم، و از نقطه‌های a ، b و c خطهایی به‌ترتیب به موازات BC ، CA و AB رسم می‌کنیم تا خطهای $B_1C_1$ ، $C_2A_2$ و $A_3B_3$ پدید آیند ( $B_1$ و $C_1$ به‌ترتیب نقطه‌های برخورد AB و AC با خطی است که از a موازی BC رسم شده است و ...)




بنابه قضیهٔ خطهای همرس و خطهای موازی می‌توان نوشت :

$$\frac{\alpha B}{\alpha C}=\frac{aB_1}{aC_1}\ ,\quad \frac{\beta C}{\beta A}=\frac{bC_2}{bA_2}\ ,\quad \frac{\gamma A}{\gamma B}=\frac{cA_3}{cB_3}$$

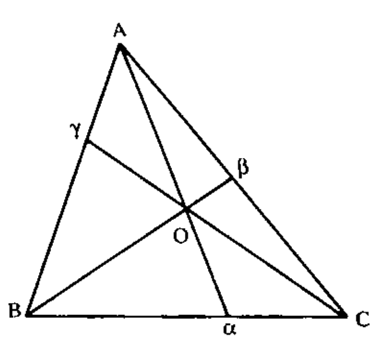
از ضرب عضوهای نظیر این سه رابطه داریم :

$$\frac{\alpha B}{\alpha C}\times\frac{\beta C}{\beta A}\times\frac{\gamma A}{\gamma B}=\frac{aB_1}{aC_1}\times\frac{bC_2}{bA_2}\times\frac{cA_3}{cB_3} \qquad (1)$$

چون نقطه‌های α ، β و γ روی ضلعهای (یا امتداد ضلعهای) مثلث ABC قرار دارند.

در صورتی که طرف دوم این رابطه برابر ۱ باشد، بنا به عکس قضیهٔ سوا ( J. D. C'eva ) سه خط Aα ، Bβ و Cγ یا Aa ، Bb و Cc همرسند.

قضیهٔ سوا ــ اگر خطهای همرس AO ، BO و CO به‌ترتیب ضلعهای BC ، CA و AB از مثلث ABC را در نقطه‌های α ، β و γ قطع کنند، رابطهٔ $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}\times\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\times\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}=-1$ برقرار است.




عکس قضیهٔ سوا ــ اگر نقطه‌های α ، β و γ روی ضلعها یا امتداد ضلعهای مثلث ABC چنان واقع باشند که

رابطهٔ $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}\times\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\times\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}=-1$ برقرار باشد، سه خط $A\alpha$ ، $B\beta$ و $C\gamma$ در یک نقطه همرسند.

اگر نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد، طرف دوم رابطهٔ (۱) همواره برابر ۱ نیست (در مثلث متساوی‌الاضلاع برابر ۱ است). بنابراین سه خط $A\alpha$ ، $B\beta$ و $C\gamma$ به غیر از مثلث متساوی الاضلاع نمی‌توانند همرس باشند. امّا اگر نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث باشد، طرف دوم رابطهٔ (۱) برابر ۱ است، چون در این صورت $aB_1 = C_3B$ است، زیرا دو پاره خط $aB_1$ و $CB_3$ نسبت به نیمساز زاویهٔ B قرینه یکدیگر خواهند بود و به همین ترتیب $bC_1 = aC_1$ و $cA_3 = bA_2$ می‌باشند. بنابراین داریم:

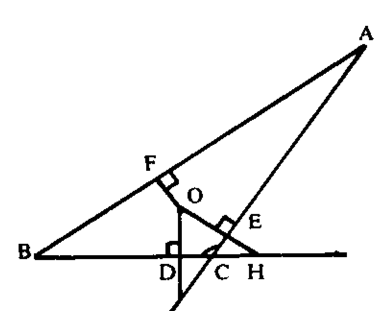
$$\frac{\alpha B}{\alpha C}\times\frac{\beta C}{\beta A}\times\frac{\gamma A}{\gamma B}=-1$$

و یا

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}\times\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\times\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}=-1$$

و خطهای $A\alpha$ ، $B\beta$ و $C\gamma$ یا $Aa$ ، $Bb$ و $Cc$ همرسند.

از نظر اندازهٔ جبری حاصلضرب سه نسبت $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}$ و $\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}$ و $\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}$ عددی منفی است. زیرا اگر مثلث زاویهٔ منفرجه نداشته باشد، هر سه نسبت بالا منفی هستند و اگر مثلث زاویه‌ای منفرجه داشته باشد، مثلاً $\hat{C} > 90^\circ$ باشد (شکل روبه‌رو)، $\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}$ منفی و دو نسبت دیگر بنابر آن که $Da > Dk$ یا $Da < Dk$ باشد هر دو مثبت و یا هر دو منفی می‌باشند. بنابراین حاصل‌ضرب سه نسبت منفی و قدرمطلق آن برابر ۱ است یعنی رابطهٔ $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}\times\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\times\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}=-1$ برقرار و در نتیجه خطهای $Aa$ ، $Bb$ و $Cc$ همرسند.




## اسامی افرادی که هر سه مسألهٔ مسابقه‌ای برهان ۱۶ را صحیح حل کرده‌اند:

۱ ـ خانم اشافی
۲ ـ آقای مجید عفت‌پناه
۳ ـ آقای محمد پیشنماز
۴ ـ آقای روزبه‌امینی
۵ ـ خانم لاله گلستانی
۶ ـ آقای علی دلنواز
۷ ـ آقای محمدعلی مطلبی فرد
۸ ـ آقای ابوالفضل الفت
۹ ـ آقای غلامحسین اصلاحی سراجاری
۱۰ ـ آقای مهدی مشعلچیان
۱۱ ـ آقای رحیم بغدادی
۱۲ ـ آقای علی مشکین قلم
۱۳ ـ آقای مجید ناظمی
۱۴ ـ آقای رضاعلی همتی
۱۵ ـ آقای هومان حبیبی
۱۶ ـ آقای مهدی امینیان
۱۷ ـ آقای محمدرضا خانی
۱۸ ـ آقای رضا ولی‌پور ابراهیمی
۱۹ ـ آقای سجاد نازی‌دیزجی
۲۰ ـ آقای احمد خوشخوی یوسف‌آبادی (مشهد)
۲۱ ـ آقای مهدی ازوجی

## اسامی افرادی که دو مسألهٔ مسابقه‌ای برهان ۱۶ را صحیح حل کرده‌اند:

۱ ـ آقای پیام روشنفکر
۲ ـ آقای علیرضا عباسی
۳ ـ آقای امیدرضا عبدی
۴ ـ آقای رضا بردباری
۵ ـ آقای صابر پیامی
۶ ـ آقای محسن توحیدی
۷ ـ آقای حسین جهانخواه
۸ ـ آقای مجید استاد رحیمی
۹ ـ آقای محمد توحیدی مقدم
۱۰ ـ آقای هیوا مهدوی (قائم شهر)
۱۱ ـ آقای محمود پلوه‌ای (کرمانشاه)

## اسامی افرادی که یک مسألهٔ مسابقه‌ای برهان ۱۶ را صحیح حل کرده‌اند:

۱ ـ آقای ایثار دشتی گوهری
۲ ـ آقای شهرام عباسی
۳ ـ آقای آیدین جمشیدی
۴ ـ آقای رضا محمدخانی
۵ ـ خانم آزادهٔ عجمی
۶ ـ خانم سوسن حایری یزدی
۷ ـ آقای وحید طاهری
۸ ـ آقای آرش محمّدی
۹ ـ خانم شبگیر حسنی
۱۰ ـ آقای علی حسین‌زاده
۱۱ ـ آقای محسن یزدی
۱۲ ـ آقای محمدرضا ایمانی

## حل مسائل مسابقه‌ای برهان ۱۶

۱ ــ وقتی درختهای باغ را ۹ به ۹ یا ۱۲ به ۱۲ یا ۲۱ به ۲۱ یا ۲۲ به ۲۲ یا ۳۹ به ۳۹ شمردیم هر دفعه ۶ واحد کسر داشتیم، پس اگر درختهای باغ را حداقل k فرض کنیم، $(k+6)$ باید بر ۹ و ۱۲ و ۲۱ و ۲۲ و ۳۹ بخش‌پذیر باشد بنابراین $(k+6)$ کوچکترین مضرب مشترک اعداد فوق می‌تواند باشد پس، کوچکترین مضرب مشترک اعداد مذکور ۳۶۰۳۶ است که نتیجه می‌دهد، $k = 36030$.

۲ ــ فرض کنیم A عددی ۲n رقمی با ارقام مساوی یک و B عددی n رقمی با ارقام مساوی ۴ باشد ثابت می‌کنیم $K = A+B+1$ مجذور کامل است.

$$B = \overbrace{44\ldots4}^{\text{بار } n} = 4\times 10^{n-1} + 4\times 10^{n-2} + \ldots + 4\times10+4$$

$$= 4\times\frac{10^n-1}{10-1} \Rightarrow B = 4\times\frac{10^n-1}{9}$$

$$A = \overbrace{111\ldots1}^{\text{بار } 2n} = 10^{2n-1} + 10^{2n-2} + \ldots + 10^2 + 10 + 1$$

$$= \frac{10^{2n}-1}{10-1} = \frac{10^{2n}-1}{9}$$

$$K = A+B+1 = \frac{10^{2n}-1}{10-1} + 4\times\frac{10^n-1}{10-1}$$

$$= \frac{10^{2n}-1+4\times10^n-4+9}{9} = \frac{10^{2n}+4\times10^n+4}{9} = \left(\frac{10^n+2}{3}\right)^2$$

۳ ــ می‌خواهیم با فرض $\frac{a}{a'} < \frac{b}{b'} < \frac{c}{c'}$ ثابت کنیم $\frac{a}{a'} < \frac{a+b+c}{a'+b'+c'} < \frac{c}{c'}$ (البته باید توجه داشته باشیم که همواره می‌توان $a'$ ، $b'$ ، $c'$ را مثبت فرض کرد مثلاً، $(\frac{2}{-3} = \frac{-2}{3}$).

$$\frac{a}{a'} < \frac{b}{b'} \Rightarrow ab' < a'b \quad (1)$$

$$\frac{b}{b'} < \frac{c}{c'} \Rightarrow bc' < b'c \quad (2)$$

$$\frac{a}{a'} < \frac{c}{c'} \Rightarrow ac' < a'c \quad (3)$$

$$(3)\ ,\ (1) \Rightarrow a(b'+c') < a'(b+c)$$

$$\Rightarrow a(b'+c') + aa' < a'(b+c) + aa'$$

$$\Rightarrow a(b'+c'+a') < a'(b+c+a) \Rightarrow \frac{a}{a'} < \frac{a+b+c}{a'+b'+c'} \quad (4)$$

$$(3)\ ,\ (2) \Rightarrow c'(a+b) < c(b'+a')$$

$$\Rightarrow c'(a+b) + cc' < c(a'+b') + cc'$$

$$\Rightarrow c'(a+b+c) < c(a'+b'+c') \Rightarrow \frac{a+b+c}{a'+b'+c'} < \frac{c}{c'} \quad (5)$$

$$(4)\ ,\ (5) \Rightarrow \frac{a}{a'} < \frac{a+b+c}{a'+b'+c'} < \frac{c}{c'}$$

(حل مسألهٔ ۳ از آقای مهدی ازوجی از کلاردشت، ولبال)


ریاضیات، همیشه و در تمامی طول تاریخ تکامل خود، با زندگی و عمل بستگی داشته است. با وجود این، در تاریخ ریاضیات می‌توان دوره‌هایی را تشخیص داد که، در آنها، اهمیت درجه اول به ریاضیات کاربردی داده شده است: دوره‌هایی هم وجود دارد که، در آنها ریاضیات با سمت‌گیری نظری پیش رفته است.

درواقع، مسیر تاریخ ریاضیات، به تناوب، از دورهٔ ریاضیات کاربردی به ریاضیات نظری و برعکس، عبور کرده است.

**از مقاله «ریاضیات کاربردی»**
**نوشته پرویز شهریاری، برهان ۱۶**

# مسائل برای حل

- هندسه: محمدهاشم رستمی
- ریاضیات جدید: حمیدرضا امیری
- جبر و مثلثات: احمد قندهاری ـ محمدرضا هاشمی
- کامپیوتر: حسین ابراهیم‌زاده قلزم

## مسائل ریاضیات ۱ نظام جدید و ریاضیات جدید سال اول نظام قدیم و جبر سال اول نظام قدیم

۱ ـ با استفاده از این قضیه که «اگر $A \subseteq B$ آنگاه $A \cup B = B$ و $A \cap B = A$ و برعکس» ثابت کنید:

الف) $A \cap (A \cup B) = A$     ب) $A \cup (A \cap B) = A$

۲ ـ اگر $M = \{1, 2, \ldots, k\}$ $(k \geq 10)$ مجموعهٔ مرجع و $A = \{2, 3, \ldots, (k-4)\}$ و $B = \{1, 2, 3, \ldots, (k-6)\}$ در این صورت مجموعه‌های $B'$ و $A'$ و $(A - B)$ و $(B - A)$ را با اعضایشان مشخص کنید.

۳ ـ اگر $a^2 + b^2 + c^2 + 3 = 2(a + b + c)$ باشد، a و b و c را حساب کنید.

فرستنده: آقای غلامرضا صفایی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (آباده)

۴ ـ ثابت کنید:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad , \quad a^2 + b^2 \geq ab$$

فرستنده: آقای غلامرضا صفایی (آباده)

۵ ـ دستگاه زیر را حل کنید، با فرض این که x و y و z اعدادی مثبت باشند.

$$\begin{cases} x^2yz = 48 \\ xy^2z = 72 \\ xyz^2 = 96 \end{cases}$$

فرستنده: آقای مجید کریمی مقدم؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (بجنورد)

۶ ـ حاصل عبارت زیر را حساب کنید.

$$A = 3\left(\frac{2}{\sqrt{10}+5} + \frac{5}{\sqrt{10}-2} - \frac{7}{\sqrt{10}}\right)$$

فرستنده: آقای مجید کریمی مقدم (بجنورد)

۷ ـ معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$3^{6x} = 81^{x+1}$$

فرستنده: آقای احسان کامرانی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (پلدختر)

۸ ـ حاصل عبارت زیر را با فرض $x \neq 0$، به دست آورید.

$$A=\frac{x+x^{2}+x^{3}+x^{4}+x^{5}+x^{6}+x^{7}}{x^{-3}+x^{-4}+x^{-5}+x^{-6}+x^{-7}+x^{-8}+x^{-9}}$$

فرستنده : آقای کیوان شهاب لواسانی ؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران)

۹ ـ اگر $a=b+1$ باشد، آنگاه حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$A=(a+b)(a^{2}+b^{2})(a^{4}+b^{4})(a^{8}+b^{8})$$

فرستنده : آقای کیوان شهاب لواسانی (تهران)

۱۰ ـ عبارت زیر را تجزیه کنید.

$$n^{4}-2n^{2}+49$$

فرستنده : آقای احسان‌الله پورصادقی لنگرودی، دانش‌آموز سال سوم رشته تجربی (ساوه)

## مسائل ریاضیات ۳ نظام جدید و جبر دوم نظام قدیم

۱ ـ اگر AC قطر متوازی‌الاضلاع ABCD و $A(m,1)$ ، $B(n,m)$ ، $C(-2,2)$ و $D(-1,n)$ باشند، طول قطر BD را حساب کنید.

۲ ـ اگر قرینهٔ نقطهٔ $M(m+1,n-1)$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم نقطهٔ $N(3m-1,2n)$ باشد، مقادیر m و n را تعیین کنید.

۳ ـ نقاط متمایز A و B و C روی یک محور مفروضند. اندازهٔ عبارت $\frac{\overline{BC}+\overline{AB}-\overline{CA}-\overline{AC}}{\overline{CB}-\overline{CA}+\overline{BA}-\overline{AC}}$ را حساب کنید.

۴ ـ معادلهٔ قرینهٔ خط $13x-7y-5=0$ نسبت به مبدأ مختصات را به دست آورید.

۵ ـ مخرج کسر زیر را گویا کنید :

$$\frac{4}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}-\left(\sqrt[20]{8}\right)^{2}}$$

۶ ـ معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\sqrt{4x+2\sqrt{4x-1}}+\sqrt{4x-2\sqrt{4x-1}}=2$$

۷ ـ ثابت کنید تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $ad\neq bc$ در $\mathbb{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ یک به یک است.

۸ ـ نقطهٔ $S(2,-3)$ رأس سهمی به معادلهٔ $y=x^{2}+px+q$ است، مقدار p و q را تعیین کنید.

۹ ـ معادله‌های زیر را حل کنید :

الف) $3\times 4^{3+6+9+\dots+3n}=192 \quad (n\in\mathbb{N})$

ب) $x^{\log 3}+3^{\log 10x}=36$

۱۰ ـ در یک تصاعد عددی مجموع جملات دهم و هفدهم برابر $5m+3n$ است. در صورتی که این تصاعد شامل جملاتی به شکل $3m+2n$ و $2m+n$ باشد و جملات دهم و هفدهم آن به ترتیب برابر ۱۰ و ۱۷ باشند، مقدار m و n را به دست آورید.

## جبر و احتمال سال سوم ریاضی نظام جدید

**(سؤالات ستاره‌دار مربوط به ریاضیات جدید سال سوم و چهارم ریاضی نظام قدیم نیز می‌باشد)**

۱ ـ با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید : اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد در این صورت $A\times\varnothing=\varnothing$ .

۲ ـ ثابت کنید : در هر مجموعهٔ $(k+1)$ عضوی از اعداد صحیح، لااقل ۲ عضو یافت می‌شوند که به پیمانهٔ k با یکدیگر هم‌نهشت می‌باشند.

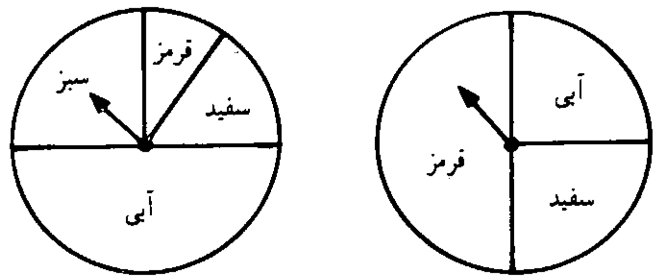
* ۳ ـ با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید تعداد زیر مجموعه‌های هر مجموعهٔ n عضوی برابر است با $2^{n}$ .

۴ ـ رابطهٔ زیر در $IR^{2}$ تعریف شده است اولاً ثابت کنید رابطهٔ R یک رابطه هم‌ارزی است ثانیاً، $[(1,-2)]$ را مشخص کنید.

$$(a,b)R(c,d)\Leftrightarrow (b-d)=5(a-c)$$

* ۵ ــ یک نقطه به تصادف از داخل یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۳ انتخاب می‌کنیم، مطلوب است محاسبهٔ احتمال آن که فاصلهٔ آن نقطه از هر رأس، بیشتر از ۱ باشد.

* ۶ ــ با توجه به اشکال زیر احتمال آن که عقربه‌ها در قسمت‌های همرنگ توقف کنند چقدر است؟




۷ ــ ثابت کنید:

الف) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

ب) $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

* ۸ ــ یک تاس طوری ساخته شده که احتمال وقوع هر عدد زوج ۳ برابر احتمال آمدن هر عدد فرد است، در پرتاب این تاس احتمال آن که عدد حاصل کوچکتر از ۴ باشد چقدر است؟

* ۹ ــ باقی‌ماندهٔ تقسیم $1^{1375}+3^{1375}+7^{1375}+5^{1375}$ را بر ۵ بیابید.

۱۰ ــ اولاً: صورت قطبی عدد مختلط $z_1=1+i$ را بنویسید و درثانی: اگر $z_0=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ در این صورت عدد $z^{1375}$ را محاسبه کنید.

## مسائل حسابان (۱)

مسأله (۱): دو تابع به معادلات $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ و $D_f=D_g=R$ مفروضند.

اولاً: آیا تابع gof قابل تشکیل است؟ چرا؟

ثانیاً: دامنه تابع gof را بیابید.

مسأله (۲): تابع f به معادله $f(x)=mx^3+(m-1)x^2+(n-2)x+(n+1)$ مفروض است.

اولاً: m و n را چنان بیابید تا این تابع، تابعی فرد باشد. ثانیاً: m و n را چنان بیابید تا این تابع، تابعی زوج باشد.

مسأله (۳): نمودار تابع f به معادله $f(x)=\left|\left|x^2-2\right|-1\right|$ را رسم کنید.

مسأله (۴): حدّ توابع به معادلات زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{\sin x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}$$

مسأله (۵): در تابع به معادله $y=\frac{1}{(x-a)^2}$، اگر $y'$ و $y''$، مشتقات مرتبه اول و دوم این تابع نسبت به x باشند، ثابت کنید:

$$y''+3y'y(x-a)=0$$

مسأله (۶): تابع f به معادله

$$f(x)=\begin{cases}\left[\sin x-\frac{1}{2}\right]+a, & x<\frac{\pi}{6}\\ \left[\sin x+\frac{1}{2}\right]+b, & x>\frac{\pi}{6}\\ \left[-(x+\sin x)\right], & x=\frac{\pi}{6}\end{cases}$$

مفروض است.

a و b را چنان بیابید تا این تابع در $x=\frac{\pi}{6}$ پیوسته باشد.

مسأله (۷): تابع هموگرافیکی به معادله $y=\frac{ax+b}{cx+d}$، $c\neq 0$ را چنان مشخص کنید تا نقطه $O'\Big|^{2}_{1}$ مرکز تقارن منحنی آن باشد و منحنی تابع از نقطه $A\Big|^{0}_{-1}$ بگذرد.

مسأله (۸): قطاری با سرعت ثابت ۸۰ کیلومتر در ساعت حرکت می‌کند. محل قطار از لحظه ترمز تا توقف کامل از رابطه $S=80t-20t^2$ $(S=0, t=0)$ بدست می‌آید. چند ثانیه طول می‌کشد تا قطار متوقف شود و در این مدت چه مسافتی را طی می‌کند.

## مسائل حساب، دیفرانسیل و انتگرال (۱)

مسأله (۱) : ثابت کنید، اشتراک دو همسایگی متقارن یک عدد، یک همسایگی متقارن آن عدد است.

مسأله (۲) : نشان دهید دنباله $\left\{(-1)^{[x]}\right\}$ ، $x \in [1,+\infty)$ واگرا است.

مسأله (۳) : ثابت کنید سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$ همگرا است $(n \in N)$.

مسأله (۴) : ثابت کنید حدّ تابع به معادله $f(x)=\frac{4x^2-1}{4x^2+1}$ وقتی $x \to +\infty$ برابر (۱) است.

مسأله (۵) : ثابت کنید :

$$\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{x^2-1}{|x-1|}+x^2\right)=3$$

مسأله (۶) : نشان دهید :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x}=0$$

مسأله (۷) : تابع f به معادله $f(x)=\frac{x-2}{x^2+mx+3}$ مفروض است.

اولاً : m را چنان بیابید تا منحنی این تابع فقط یک مجانب داشته باشد.

ثانیاً : m را چنان بیابید تا منحنی این تابع فقط دو مجانب داشته باشد.

ثالثاً : m را چنان بیابید تا منحنی این تابع سه مجانب داشته باشد.

مسأله (۸) : تابع به معادله $y=\frac{1}{(x-1)^3}$ مفروض است.

ثابت کنید داریم : $y''+4y'y(x-1)^2=0$ .

مسأله (۹) :در تابع به معادله $y=\sqrt[3]{x^2}$ در نقطه‌ای به طول $x=8$ ، واقع بر منحنی این تابع، قائمی بر این منحنی رسم نمودیم. این خط قائم خط نیمساز ربع اول را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند.

مسأله (۱۰) : ناظری از بالای یک برج به ارتفاع ۵۰ متر به یک قایق که در فاصله ۱۲۰ متری از پای برج قرار دارد و با سرعت ۱۳ متر بر ثانیه به پای برج نزدیک می‌شود نگاه می‌کند، معلوم کنید فاصله قایق با ناظر با چه سرعتی تغییر می‌کند.

## مسائل کامپیوتر سال سوم نظام جدید

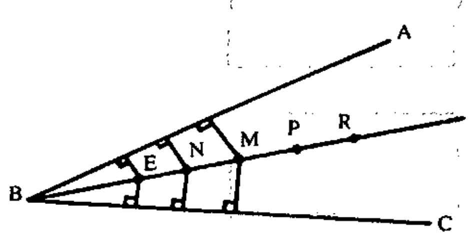
۱- الگوریتمی بنویسید که میانگین سه عدد مفروض را به‌دست آورد نمودار گردشی آن را رسم کنید.

۲- الگوریتمی بنویسید که میانگین هندسی سه عدد مثبت مفروض را حساب کند. نمودار گردشی آن را رسم کنید.

## سؤالات امتحان درس هندسه یک نظام جدید متوسطه رشته عمومی سراسر کشور در خرداد ماه ۷۵

۱ ــ نقطه‌های M ، N و E بر روی نیمساز $A\hat{B}C$ واقع و از ضلع‌های آن به یک فاصله هستند.

الف) حدس شما در مورد فاصله نقطه‌های P و R که روی نیمساز $A\hat{B}C$ واقع هستند چیست؟

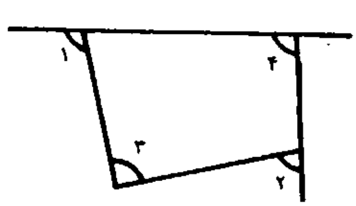



ب) براساس چه نوع استدلالی این حدس را زدید؟

پ) با استفاده از چه نوع استدلالی می‌توانیم با اطمینان بگوییم که فاصلهٔ هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است؟

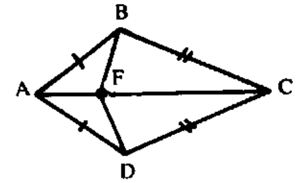
۲ ــ با توجه به شکل، درستی رابطهٔ زیر را نشان دهید.

$\hat{1}+\hat{2}=\hat{3}+\hat{4}$



۳ ــ در چهار ضلعی $ABCD$، $AB = AD$ و $BC = DC$ . اگر $F$ نقطهٔ دلخواهی روی قطر $AC$ باشد، ثابت کنید :

$BF = FD$




۴ ــ نشان دهید مساحت لوزی برابر با نصف حاصل‌ضرب قطرهای آن است.

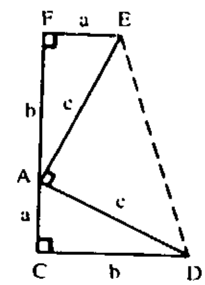
۵ ــ ذوزنقهٔ $FEDC$ را در نظر بگیرید.

الف) مساحت ذوزنقه را برحسب $a$ و $b$ بنویسید.

ب) مساحت مثلث‌های $ACD$ و $AEF$ را پیدا کنید.

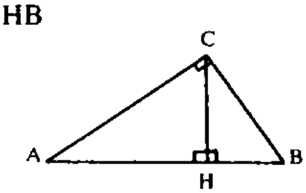
پ) مساحت ذوزنقه را برحسب مجموع مساحت‌های سه مثلث $ACD$، $AEF$ و $ADE$ به دست آورید.

ت) با استفاده از قسمت‌های (الف) و (ب)، قضیهٔ فیثاغورس را ثابت کنید.



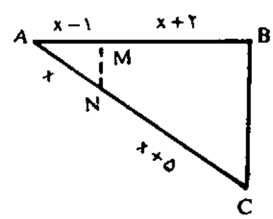

۶ ــ مثلث $ABC$ در رأس $C$ قائمه است. از $C$ پاره‌خط $CH$ را بر $AB$ عمود می‌کنیم. ثابت کنید :

$CH^2 = AH \times HB$

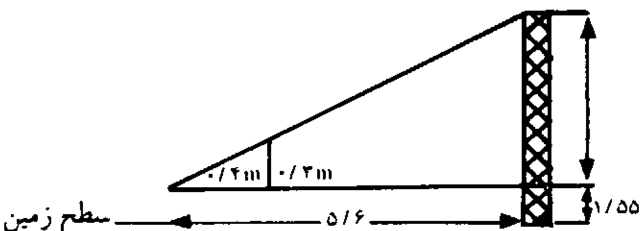



۷ ــ میانگین هندسی دو عدد ۴ و ۲۵ را پیدا کنید.

۸ ــ در مثلث $ABC$ ، پاره خط $MN$ موازی ضلع $BC$ است. به کمک قضیهٔ تالس، مقدار $x$ را حساب کنید.




۹ ــ با توجه به اندازه‌های روی شکل، ارتفاع دکل را از سطح زمین پیدا کنید.

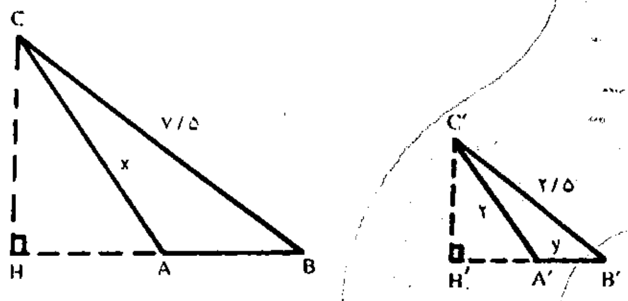



۱۰ ــ دو مثلث $ABC$ و $A'B'C'$ متشابه هستند. با توجه به اندازه‌های داده شده،

الف) $x$ و $y$ را محاسبه کنید.

ب) نسبت محیط‌های دو مثلث را به دست آورید.

پ) نسبت ارتفاع‌های متناظر را به دست آورید.




۱۱ ــ اگر طول یال مکعبی را دو برابر کنیم، طول قطر آن چه تغییری می‌کند؟

۱۲ ــ اصل کاوالیری را دربارهٔ حجم‌ها بنویسید.

۱۳ ــ دو استوانهٔ قائم یکی به شعاع قاعده ۲ سانتی‌متر و ارتفاع ۱ سانتی‌متر و دیگری به شعاع قاعده ۱ سانتی‌متر و ارتفاع ۲ سانتی‌متر را در نظر بگیرید.

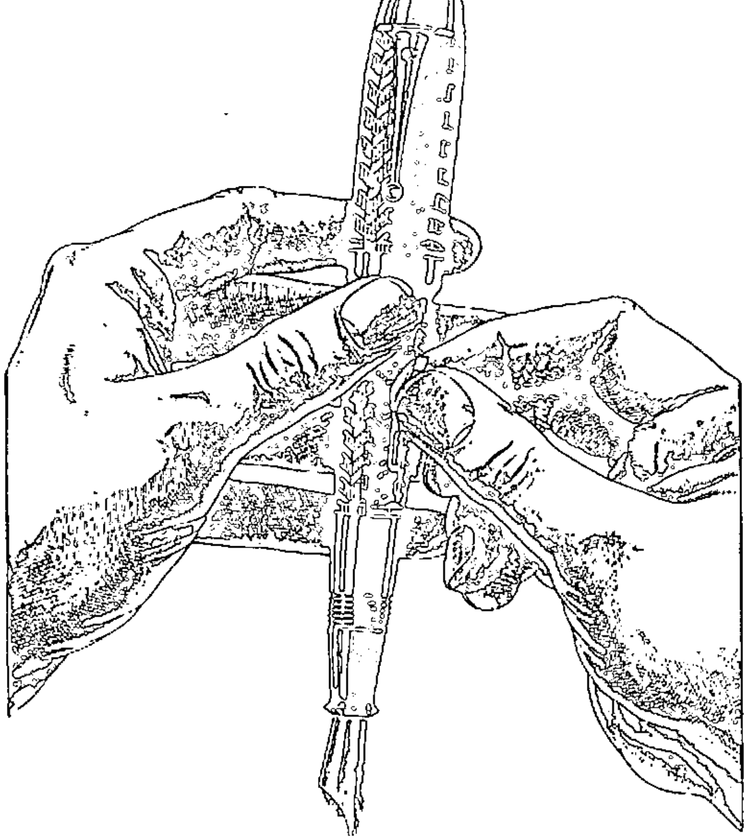
الف) مساحت جانبی هر یک از این دو استوانه را محاسبه و با هم مقایسه کنید.

ب) حجم هر یک از این دو استوانه را پیدا کرده و با هم مقایسه کنید.

۱۴ ــ توپی دارای شعاع ۱۰ سانتی‌متر است.

الف) مساحت سطح توپ را حساب کنید.

ب) حجم توپ را حساب کنید.



# جوابهای تفریح اندیشه

**جواب ۱:**

در هر یک از دو ماه اول یک جفت خرگوش متولد می‌شود. طی ماه سوم ۲ جفت خرگوش به دنیا می‌آیند. در این صورت در ماه چهارم ۳ جفت، در ماه پنجم ۵ جفت، و در ماه ششم ۸ جفت متولد می‌شوند.

با به ترتیب نوشتن تعداد جفتهای تولد یافته در هر ماه، دنبالهٔ مشهور

۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ...

معروف به «تصاعد فیبوناتچی» «Fibonacci 's Progression» را به دست می‌آوریم.

توجه داشته باشید هر جمله واقع در تصاعد فوق، بعد از دو جملهٔ اول، برابر مجموع دو جملهٔ پیشین آن است. به این ترتیب، جملهٔ دوازدهم ۱۴۴ است؛ و تعداد جفتهای زنده در پایان یک سال دو برابر ۱۴۴ به علاوهٔ تعداد جفتهای نابالغ (۸۹) تولید شده در ماه یازدهم، یا مجموعاً ۳۷۷ جفت است.

در واقع، ۳۷۷ چهاردهمین جملهٔ تصاعد فیبوناتچی است، و تعداد جفتهای زنده در هر ماه، با شروع از ماه اول، تصاعد زیر را تشکیل می‌دهند

۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ...

یکی از ویژگیهای قابل توجه تصاعد فیبوناتچی رابطهٔ آن با «نسبت طلایی» «Golden Ratio» تاریخ هنر است.

به اختصار، بعدهای یک مستطیل (یا تابلوی نقاشی) را از لحاظ زیبایی‌شناسی در صورتی بهترین می‌دانند که نسبت عرض (W) آن به طول (D) اش چنان باشد که

$$\frac{W}{D} = \frac{D}{W + D}$$

نسبت $\frac{W}{D}$ را «طلایی» می‌نامند؛ و مقدار عددی آن $\frac{\sqrt{۵} - ۱}{۲} = ۰/۶۱۸۰۳۰۰...$ .

چنین اتفاق افتاده که نسبت هر دو جملهٔ متوالی تصاعد فیبوناتچی به نسبت طلایی مورد بحث میل می‌کند. همگرایی مربوطه نیز کاملاً سریع است با استفاده از جمله‌های ششم و هفتم، نسبت $\frac{۸}{۱۳}$ برابر است با ۰/۶۱۵۳۸۰۰۰. به این ترتیب تصاعد فیبوناتچی و مضربهای آن به هنرمند امکان می‌دهد که بعدهای تابلوهای خود را به هر اندازه که مایل باشد به نسبت طلایی نزدیک کند.

**جواب ۲:**

۴/۳۴ واحد پول

یک همبرگر: ۲/۱۷ واحد پول

یک شیرموز: ۰/۹۳ واحد پول

یک سیب‌زمینی سرخ کرده: ۰/۶۲ واحد پول

از لحاظ جبری،

همبرگر: F، شیرموز: m، سیب‌زمینی سرخ کرده: f

$$(۱) \quad F + m + f = ۳/۷۲$$

$$(۲) \quad F - m - ۲f = ۰$$

و

$$(۳) \quad F - ۳m + f = ۰$$

$$\left.\begin{array}{l}(۱)-(۲) \Rightarrow ۲m + ۳f = ۳/۷۲ \\ (۲)-(۳) \Rightarrow ۲m - ۳f = ۰\end{array}\right\} \Rightarrow ۴m = ۳/۷۲ \Rightarrow m = ۰/۹۳$$

$$\left.\begin{array}{l}(۱) \quad F + f = ۲/۷۹ \\ (۲) \quad F - ۲f = ۰/۹۳\end{array}\right\} \Rightarrow ۳f = ۱/۸۶ \Rightarrow f = ۰/۶۲$$

$$(۱) \quad F + ۰/۹۳ + ۰/۶۲ = ۳/۷۲ \Rightarrow F = ۲/۱۷$$

منبع: Stanton, Bob، مجلهٔ بازیها، می ۱۹۸۶.

**جواب ۳:**

فرض می‌کنیم x سهم مساوی از کیسهٔ کوچکتر و y سهم مساوی از کیسهٔ بزرگتر باشد. در این صورت $۳x + ۲$ تعداد سکه‌های واقع در کیسهٔ کوچکتر، و $۷y + ۱$ تعداد سکه‌های واقع در کیسهٔ بزرگتر است. به این ترتیب،

$$(۳x + ۲) + (۷y + ۱) = ۱۴۰$$

$$۳x + ۷y = ۱۳۷ \qquad \text{(I)}$$

مطلوب ما جوابهای صحیح x و y از معادلهٔ I است. از این گذشته، $۷y + ۱$ باید بزرگتر از $۳x + ۲$ باشد؛ و از آنجا که هر افسر بیش از هر سرباز سکه به دست آورده، $x + ۱$ باید بزرگتر از y باشد.

معادله‌هایی از این دست که جوابهای صحیح می‌خواهند به نام **دیوفانت** «Diophantus»، (قرن سوم میلادی)، جبردان یونانی، به معادله‌های **دیوفانتی** «Diophantine equations» موسومند. تحلیل بعدی نیز تحلیل **دیوفانتی** نامیده می‌شود.

دو طرف معادله را بر ضریب ۳ تقسیم کرده فرض می‌کنیم Q عددی صحیح را نمایش دهد:

$$x + ۲y + \frac{y}{۳} = ۴۵ + \frac{۲}{۳}$$

از آنجا که x، ۲y، و ۴۵ اعدادی صحیح‌اند.

$$\frac{y}{۳} - \frac{۲}{۳} = Q$$

$$y - ۲ = ۳Q$$

$$y = ۳Q + ۲ \qquad \text{(II)}$$

با قرار دادن معادلهٔ II در معادلهٔ I به دست می‌آوریم.

$$۳x = ۱۳۷ - ۲۱Q - ۱۴$$

$$x = ۴۱ - ۷Q \qquad \text{(III)}$$

معادله اکنون حل شده است. با انتخاب مقادیر عدد صحیح Q، معادله‌های II و III مقدارهای صحیح x و y را به دست می‌دهند که در معادلهٔ I صدق می‌کند.

شش جواب صحیح و مثبت (حاصل از مساوی ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، و ۵ قرار دادن Q) عبارتند از

| x | ۴۱ | ۳۴ | ۲۷ | ۲۰ | ۱۳ | ۶ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y | ۲ | ۵ | ۸ | ۱۱ | ۱۴ | ۱۷ |

از این جوابها تنها جواب $x = ۲۰$، $y = ۱۱$ دو شرط گفته شدهٔ در بالا را برقرار می‌کنند. بنابراین کیسهٔ افسرها حاوی ۶۲ سکه، و کیسهٔ سربازها شامل ۷۸ سکه است. هر افسر ۲۱ سکه، و هر سرباز ۱۱ سکه دریافت کرده است.

در ضمن، معروفترین معادلهٔ دیوفانتی عبارت است از

$$x^n + y^n = z^n$$

(هنگامی که $n = ۲$ رابطهٔ فیثاغورس مربوط به مثلثهای قائم‌الزاویه را داریم. یکی از جوابهای دیوفانتی خاص این معادله $x = ۳$، $y = ۴$، $z = ۵$ است.)

**فرما** «Fermat» ریاضیدان بزرگ فرانسوی قرن هفدهم، در یادداشتی در حاشیهٔ کتابی که بعد از مرگش به دست آمد، اظهار داشته است که این معادله هنگامی که n بزرگتر از ۲ باشد جواب صحیح ندارد. نیز نوشته است که اثباتش از آن طولانی‌تر است که در حاشیهٔ مزبور درج شود، و تا امروز کسی نتوانسته است اثبات یا عدم اثبات «آخرین قضیهٔ فرما» را به دست دهد.

**یادداشت مترجم.** این قضیه اخیراً به اثبات رسیده است. البته اشکالی اندک در این اثبات یافت شده است که چنان که گفته می‌شود قابل رفع است.

جواب ۴:

کار مرتب کردن پنج مهره، هر بار یک مهره، حداکثر هشت بار وزن کردن لازم دارد. اما روش زیر این عمل را حداکثر در هفت مرتبه انجام می‌دهد:

۱. وزن دو مهرهٔ دلخواه را نسبت به‌هم مقایسه می‌کنیم، و به آنها برچسب H (سنگین‌تر) و L (سبکتر) می‌زنیم.

۲. وزن دو مهرهٔ دلخواه از مهره‌های باقیمانده را نسبت به‌هم سنجیده آنها را با h و l مشخص می‌کنیم.

۳. وزن H را با وزن h مقایسه می‌کنیم. (برای توضیح فرض می‌کنیم H سنگین‌تر است.) اکنون سه‌مهره را مرتب کرده‌ایم:

H,h,l

L را کنار می‌گذاریم.

۴ و ۵. با حداکثر دو بار وزن کردن می‌توانیم مهرهٔ پنجم را به‌ترتیب وزن در میان H، h، l قرار دهیم.

۶ و ۷. اکنون بی‌توجه به‌مکان مهرهٔ پنجم، با استفادهٔ معقول از این اطلاع که L سبکتر از H است، می‌توانیم مکان L را با حداکثر دوبار وزن کردن مشخص کنیم.

جواب ۵:

این فرض معمول که یکی از قطارها ۲ کیلومتر در ۵ دقیقه، یا ۲۴ کیلومتر در ساعت، حرکت می‌کند، ناصحیح است.

فرض بهتر (برای به‌دست آوردن سرعت x قطارها) این است که چون قطار کندتر به خیابان پنجاهم برسد قطار تندتر x کیلومتر از آن فاصله دارد، و در صورتی که قطار کندتر در خیابان پنجاهم توقف کند قطار سریعتر x کیلومتر مورد بحث را در ۵ دقیقه طی می‌کند.

اما قطار کندتر پیش از برخوردشان ۲ کیلومتر دورتر می‌رود، و در این صورت قطار سریعتر دو برابر، یا ۴ مایل، بیشتر مسافرت می‌کند.

بنابراین،

$x = ۶$ کیلومتر

سرعت قطار سریعتر ۶ کیلومتر در ۵ دقیقه، یا ۷۲ کیلومتر در ساعت است، و سرعت قطار کندتر ۳ کیلومتر در ۵ دقیقه، یا ۳۶ کیلومتر در ساعت است.

طول خط مورد بحث می‌تواند هر فاصله‌ای بزرگتر از ۳ کیلومتر باشد، و قطار کندتر در این طول، درست هنگامی که قطار سریعتر، ۵ دقیقه دیرتر، شروع به بیرون رفتن می‌کند، به ترمینال خواهد رسید.

اکنون در این مورد فکر کنید: اگر، به‌جای این، قطار کندتر ۵ دقیقه در آغاز تأخیر داشته باشد، قطارها همچنان در نقطه‌ای به فاصله ۲ کیلومتر از خیابان پنجاهم برخورد خواهند کرد.

**Borhan**
**Vol. 6 No. 1**
Serial numbers: 18 Autumn 1996

## In the name of God

- **Licence Holder:** Madrasse Publication
- **Responsible director:** Mahmood Ebrahimi
- **Executive Editor H. R. Amiri**


Borhan is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:
Madrasse Publication - No. 36. Haghighat talab Street, Sepahbod gharany Ave, Tehran, Iran
Post code: 14155/1949

## Contents:

# ماهانی

## ابوعبدالله محمدبن عیسی ماهانی

## ریاضیدان و منجم معروف مسلمان ایرانی (حدوداً درسال ۲۷۵ هـ. ق)

از مردم ماهان کرمان و از افاضل علمای عدد و مهندسی عالیقدر و منجمی زبردست بود و در بغداد می‌زیست. تاریخ تولد و وفات وی به‌طور دقیق معلوم نیست ولی با مراجعه به مدرک موجود می‌توان حدس‌زد که وی درحدود سال ۲۱۰ هـ. ق در ماهان کرمان به‌دنیا آمده و در حدود سال ۲۷۵ هـ. ق درگذشته است.

خیام در کتاب جبر و مقابلهٔ خود از ماهانی نام برده و نوشته است:

«... و امّا از متأخران، یکی از ایشان به نام ماهانی مهندس درصدد تحلیل جبری مقدمه‌ای برآمد که ارشمیدس در شکل چهارم از مقالهٔ دوم کتاب خود موسوم به کره و استوانه به‌کار برده است، و این امر منجر شد به معادله‌ای بین کعبها و مالها و اعداد، و وی بعد از تفکر زیاد از حل آن عاجز ماند و لهذا حکم به امتناع آن کرد. بعد ابوجعفرخازن پیدا شد و آن را به وسیلهٔ قطوع مخروطی حل کرد.»

مقصود از معادله‌ای که خیام به آن اشاره کرده است معادلهٔ زیر می‌باشد:

$$x^3 + a = cx^2$$

که بین ریاضیدانان دورهٔ اسلامی به معادلهٔ ماهانی موسوم بوده است.

ماهانی در رساله‌ای که در تفسیر مقالهٔ دوم از کتاب ارشمیدس دربارهٔ کره و استوانه نوشته متذکر شده است که از نه مسألهٔ این مقاله، هشت مسأله را حل کرده ولی موفق به حل مسألهٔ چهارم آن نشده است. این مسأله عبارت است از:

«تقسیم‌کردن کره به وسیلهٔ یک صفحه به دو قطعه، به وجهی که نسبت حجم آنها مساوی با عدد معلومی باشد.»

ماهانی کوشیده بود که این مسأله را به وسیلهٔ جبر و مقابله حل کند و معادلهٔ مذکور را به‌دست آورد.

آثار ریاضی موجود وی از این قرارند:

۱- رسالة‌فی‌المشکل من النسبة = کتاب النسبه = فی‌النسبه (رساله‌ای دربارهٔ مشکل نسبت)

۲- تفسیر المقالة‌العاشره من کتاب اقلیدس (شرح مقالهٔ دهم از کتاب اقلیدس)

آثار ریاضی مفقود ماهانی:

۳- شرح مقالهٔ پنجم کتاب اصول اقلیدس

۴- شرح مقالهٔ دوم کتاب کره و استوانهٔ ارشمیدس

۵- کتاب فی ستّ و عشرین شکلامن المقاله الاولی من اقلیدس التی لایحتاج فی شیء منهاالی الخلف (کتاب دربارهٔ بیست‌وشش قضیه از مقالهٔ اول اقلیدس که بدون احتیاج داشتن به برهان خلف می‌توان آنها را ثابت کرد.)

۶- اصلاح کتاب مانالاوس فی‌الاشکال الکریه

۷- زیج

---

● از کتاب زندگی‌نامه ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی، نشر دانشگاهی

کد ۴۲۲/۱