رشد

برهان

مجله ریاضی

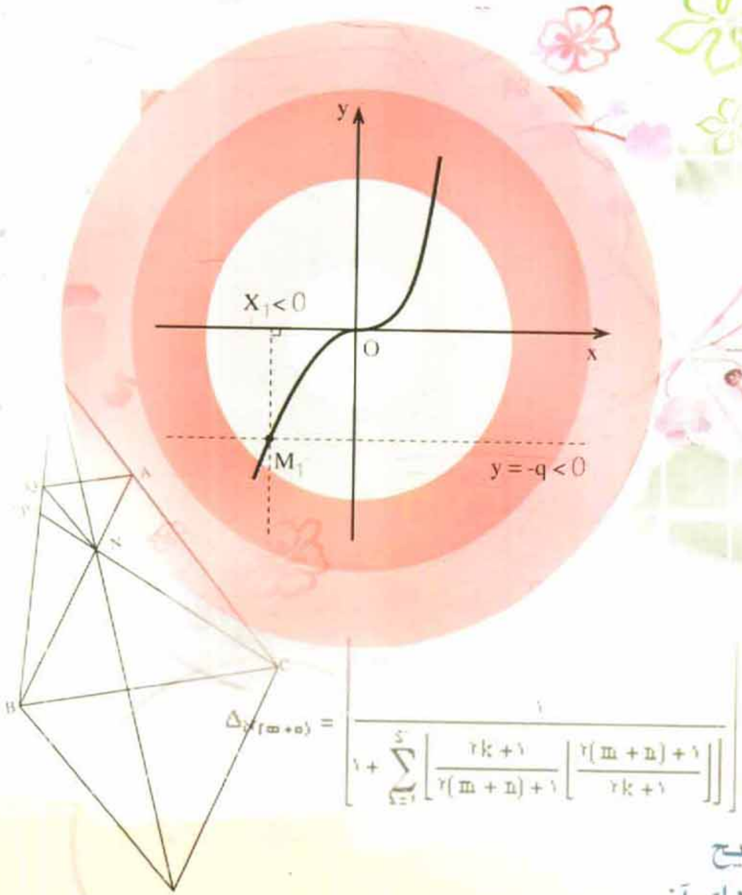
فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی، اطلاع رسانی

دوره ی متوسطه

۵۳

• دوره‌ی شانزدهم • شماره‌ی ۳

• بهار ۱۳۸۶ • بها ۳۰۰۰ ریال



- انسان فرزانه
- درخت چیست؟
- تابع جزء صحیح
- مربع لاتین و کاربردهای آن
- کشف فرمول اعداد اول و نتایج آن

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

مشاهیر ریاضی مسلمان

کاشانی

کاشانی . غیاث‌الدین جمشیدبن مسعودبن محمود طبیب کاشانی ، ریاضی‌دان و منجم مشهور ایرانی ، متوفی به سال ۸۳۲ .

ریاضی‌دانی عالی‌مقام ، محاسبی ماهر ، منجمی زبردست ، مؤلفی توانا و مخترع آلات دقیق رصد بود . در حدود سال ۸۲۴ به دعوت الغ‌بیک به سمرقند رفت و مدیر رصدخانه‌ی سمرقند شد .

از کارهای وی ، تعیین عدد π با دقتی است که تقریباً تا ۱۵۰ سال بعد در دنیا بی‌رقیب ماند . کار دیگرش محاسبه‌ی جیب زاویه‌ی یک درجه ، با روشی بسیار جالب و بی‌سابقه است .

کار مهم دیگر کاشانی ، اختراع کسرهای دهدهی به قیاس با کسرهای شصت‌گانی است ، که هر چند سابقه‌اش به دو قرن و نیم پیش از کاشانی می‌رسد ، وی نخستین کسی است که با صراحت کامل مدعی اختراع آن‌ها شده است .

بعضی از آثار ریاضی کاشانی عبارت است از :

۱ـ مفتاح‌الحساب ، که به زبان عربی ، و بسیار استادانه تألیف شده است ، و بعضی یا تمام مطالب آن را به زبان‌های فرانسوی ، آلمانی ، روسی و انگلیسی ترجمه کرده‌اند .

۲ـ رساله‌ی محیطیه ، که به زبان عربی است و بعضی از ریاضی‌دان‌ها و مورخان مغرب‌زمین آن را شاهکار فن محاسبه نامیده‌اند .

۳ـ رساله‌ی وتر و جیب

۴ـ زیج خاقانی در تکمیل زیج ایلخانی .

قاضی‌زاده‌ی رومی

قاضی‌زاده‌ی رومی . صلاح‌الدین پاشا موسی‌بن محمدبن محمود قاضی‌زاده‌ی رومی ، منجم و ریاضی‌دان ترک ، متولد حدود ۷۶۶ و متوفی حدود ۸۴۰ .

پدرش قاضی بروسه از شهرهای ترکیه بود . وی در همین شهر به‌دنیا آمد؛ اما برای تکمیل معلوماتش در ریاضیات ، به ماوراْالنهر رفت و مدتی را نیز در جرجان و خراسان گذراند .

قاضی‌زاده در کارهای رصدخانه‌ی سمرقند ، که مدیریت آن به‌عهده‌ی غیاث‌الدین جمشید کاشانی بود ، شرکت داشت ، و پس از درگذشت کاشانی ، به مدیریت رصدخانه رسید .

آثار ریاضی موجود وی عبارت‌اند از :

۱ـ رسالةالجیب ، که در واقع تحریر رساله‌ی «وتر و جیب» کاشانی است . این تحریر به زبان روسی ترجمه شده است .

۲ـ شرح اشکال‌التأسیس ، که متن اصلی از شمس‌الدین سمرقندی است .

۳ـ رسالة فی الحساب ، که در حساب و جبر و مساحت است .

۴ـ حاشیه بر تحریر اصول اقلیدس ، که اصل آن از خواجه‌نصیر طوسی است .

۵ـ رسالة فی الهیئة و الهندسة .

منبع : فرهنگ ریاضیات/گروه ریاضیات انتشارات مدرسه/ناشر : انتشارات مدرسه

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ۵۳

مجله‌ی ریاضی

دوره‌ی متوسطه

فصلنامه آموزشی، تحلیلی، اطلاع‌رسانی

دوره‌ی شانزدهم /شماره‌ی ۳/ بهار ۱۳۸۶/شمارگان: ۲۵۰۰۰ نسخه

- مدیر مسؤول: علیرضا حاجیان‌زاده
- سردبیر: حمیدرضا امیری
- مدیر داخلی: میرشهرام صدر
- طراح گرافیک: آزیتا کوثری
- ویراستار ادبی: کبری محمودی
- اعضای هیأت تحریریه: حمیدرضا امیری
محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری،
میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی،
سید محمدرضا هاشمی موسوی،
غلامرضا یاسی‌پور
و با تشکر از همکاری ارزنده‌ی
استاد پرویز شهریاری
- چاپ و صحافی: شرکت افست (سهامی عام)
- نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۰ داخلی ۳۹۷
تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶-۷۷۳۳۵۱۱۰

www.roshdmag.ir

ISSN 1735 - 4951

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می‌کند:

- نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می‌شود.

مجلّه در حکّ، اصلاح، حذف و اضافه‌ی مقاله‌ها آزاد است.

مقاله‌های وارده ،باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.

مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود.

استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

یادداشت سردبیر

همواره ریاضیات در دنیا به دلیل نیازهای بشر و یا فرهنگ جوامع گوناگون بشری، دوران های نظری یا کاربردی یا هر دو را طی کرده است. به عبارت دیگر، در یک زمان، ریاضیات سمت گیری نظری یا به قول امروز محض داشته است و در زمانی دیگر و یا مکانی دیگر، سمت و سوی کاربردی به خود گرفته است. اگر بخواهیم به طور اجمالی به تقسیم بندی این دوره ها از ریاضیات بپردازیم، می توانیم آن ها را به پنج دوره ی عمده تقسیم کنیم:

۱. دوره ی پیدایش ریاضیات که ریاضیات این دوره به طور کامل سمت و سوی کاربردی داشته است.

۲. دوره ی تکامل ریاضیات یا ریاضیات یونانی که سمت و جهتی نظری داشته است.

۳. دوره ی ریاضیات ایرانی که در این دوره، ریاضیات هم تحت تأثیر سنت های ریاضیات نظری بوده است و هم به دلیل نیازهای بشری، به سمت الگوریتمی شدن پیش می رود (سده های نهم تا پانزدهم).

۴. دوره ی پیدایش ریاضیات با کمیت های متغیر که مجدداً سمت گیری ریاضیات به طرف ریاضیات نظری بوده است (سده های ۱۶، ۱۷ و ۱۸).

۵. دوره ی ریاضیات امروزی یا دوره ی گسترش موضوعات ریاضی.

همان طور که در بالا ذکر شد، در یک دوره ی کامل از ریاضیات که آن را ریاضیات ایرانی نامیدیم، ایرانیان سردمدار ریاضیات سیاره ی خاکی زمین بوده اند. متأسفانه غربی ها نسبت به بیان این دوره و کارهای بسیار ارزشمند انجام شده توسط ریاضی دانان ایرانی و مسلمان آن، یا سکوت کرده اند و یا خیلی گذرا و بدون ادای حق کلام، از آن عبور کرده اند. در این دوره و براساس مستندات تاریخی، کارهای ریاضی دانانِ ایرانی چنان عظیم هستند که در سده های بعد، فقط از طریق ترجمه ی اکثر آن ها به زبان های لاتین و اروپایی، دانش ریاضی جایگاه و مقام خود را در اروپا به دست آورد.

دوره ی ریاضیات ایرانی که حدود ۷۰۰ سال از تاریخ دانش ریاضی را از آنِ خود کرد است!، ریاضیاتی کاربردی به شمار می رود. در این دوره، جبر و مثلثات به عنوان شاخه های مستقلی از ریاضیات شکل گرفتند و ساختار «محاسبه ای- الگوریتمی» در ریاضیات، به نوعی بین نظریه و کاربرد، پیوند ایجاد کرد و از ویژگی های اصلی ریاضیات ایرانی، پیدایش ساختمان الگوریتمی دانش ریاضی است که بیش از همه جنبه ی محاسبه ای دارد که عامل منحصر به فرد توسعه ی کمیت (کمیت گرایی) در سایر دانش ها شد! یعنی شاه کلید توسعه ی علم و تکنولوژی! ریاضیات در دوره ی ریاضیات ایرانی، توسط یک عامل بسیار باارزش به نام «آموزش»، به یکی از عوامل مهم در پیشرفت و توسعه در جامعه دست می یابد. کتاب **ابوالوفای بوزجانی** با عنوان «آنچه از اعمال هندسی به کار صنعتگران می آید»، نمونه ی بارزی از این آموزش است. این سند تاریخی می تواند ایرانیان را در زمره ی پیشگامان در آموزش ریاضی قرار دهد.

ریاضیات ایرانی دوره ی کامل و برجسته ای از تاریخ تکامل ریاضیات را شامل می شود و ستارگانی درخشان همچون: **خوارزمی، نیریزی، فارابی، بوزجانی، بیرونی، ابن سینا، کرجی، خیام، طوسی،** و **جمشید کاشانی** را در این دوره مشاهده می کنیم که کارهای بسیاری از آن ها، قرن ها پس از خودشان توسط اروپاییان کشف شد. در پایان این شرح اجمالی، از شما دانش آموزان و دبیران محترم سؤال می کنم، چرا امروزه افرادی چون خیام یا جمشید غیاث الدین کاشانی نداریم؟

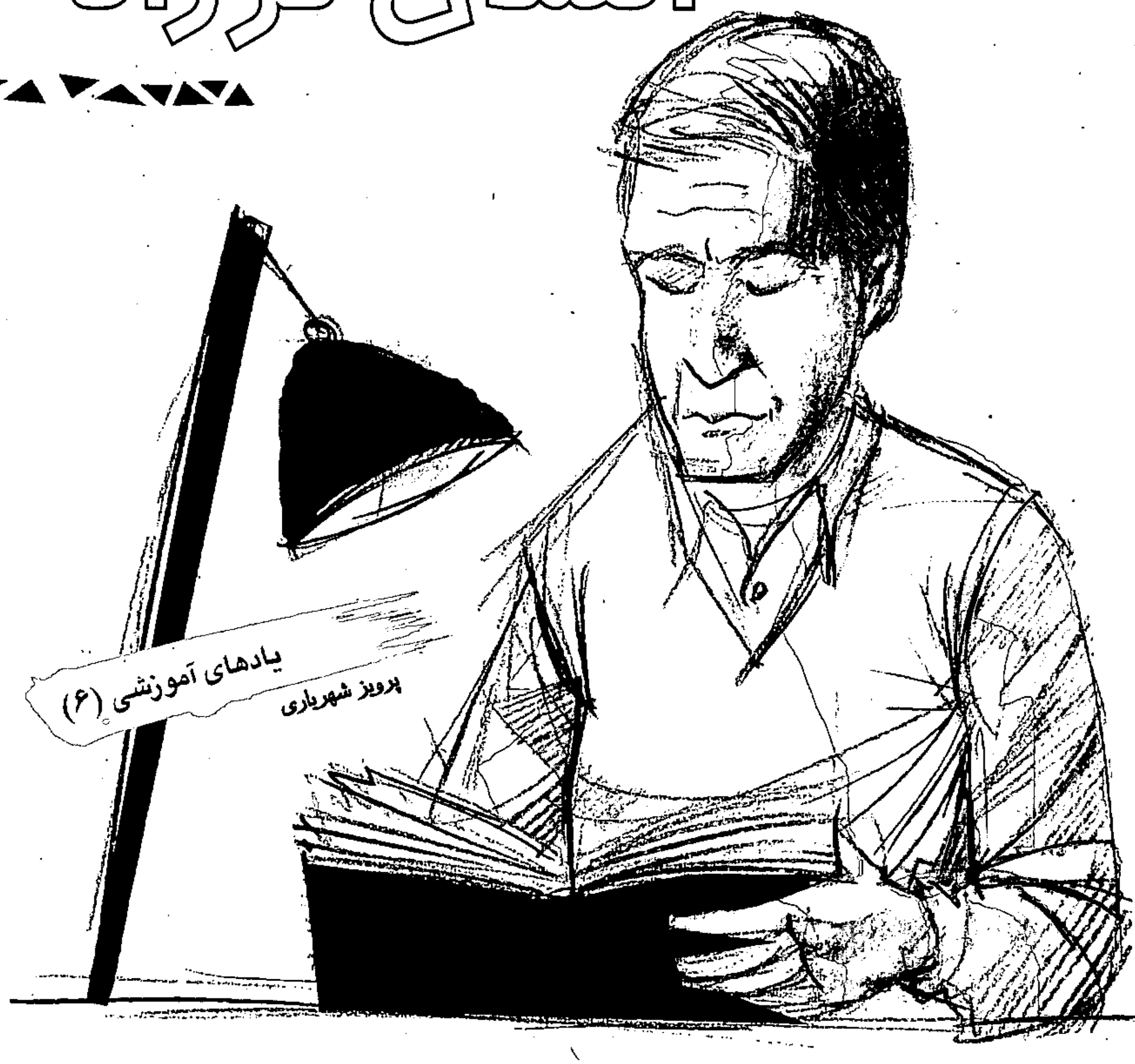
نظر شما چیست؟ اگر نظری دارید بنویسید و برای ما ارسال کنید.

والسلام

انسان فرزانه

یادهای آموزشی (۶)

پرویز شهریاری



۱.

با چهره‌ای شاد که شور جوانی وشوق دانستن از آن می‌بارید، نزد من آمد. کاغذ و خودکاری به دست داشت و آرزومندانه گفت: «می‌توانم از شما خواهش کنم، نصیحتی به من بکنید که راهنمای زندگی من باشد؟»

او را روبه‌روی خود نشاندم و گفتم: «این روزها بازار نصیحت گرم است. همه در روزنامه‌ها، مجله‌ها و کتاب‌ها، در صدا و سیما، در سخن‌رانی‌ها و مصاحبه‌ها و... ما را نصیحت می‌کنند و گاه این نصیحت‌ها حکم **فرمان** و **دستور** دارد. اغلب دستوردهندگان، خود را **عقل کل** می‌دانند و گمان می‌برند، همه‌ی **حقیقت** را یافته‌اند و ما را از عواقب ناشی از سرپیچی از دستورهای خود هشدار می‌دهند. مرا از نصیحت کردن معاف کنید، چرا که نمی‌خواهم کدورتی از من به دل بگیری.»

گفت: «بسیار خب، از نصیحت می‌گذرم. دست‌کم از تجربه‌های زندگی خودتان بگویید.»

گفتم: «غالباً **پندها** را زیر همین لفاف **تجربه‌ی زندگی** و **خاطره** پنهان می‌کنند، به‌ویژه که روش‌های **خوب‌زیستن** و **انسانی‌زیستن** کم‌تر قابل تقلید هستند. هرکس باید خود و با آزمایش و خطا در صحنه‌ی زندگی و اجتماع و با درس گرفتن از تاریخ، راه **انسان بودن** را بیابد. به سختی می‌توان دستوری یا فرمولی همگانی در این‌باره ارائه کرد: با ندیدن‌های

حقیقت‌های تاریخی، به یک **دیکتاتور کوچک یا یک دیکتاتور بزرگ**، همچون **شی هوانگ‌تی**، امپراتور سفاک سده‌ی سوم پیش از میلاد در چین تبدیل می‌شویم. شی هوانگ‌تی برای این‌که به گمان خود، جباری‌اش را از دید آیندگان پنهان کند، دستور داد همه‌ی کتاب‌های تاریخی و علمی را بسوزانند و ۴۶۰ نفر از تاریخ‌نویسان و دانشمندان چینی را سر ببرند. روزی که امپراتور برای نیایش به معبد می‌رفت، هوا توفانی شد و باد و باران تندی درگرفت. همراه با صدای رعد و برق و توفان، فریادهای نارضایتی مردم هم بلند شد و «روح امپراتور را آزرد». به همین مناسبت، به کمان‌داران خود دستور داد آسمان را تنبیه کنند و با شلیک تیر به سوی آسمان، آن را از **هیاهو** بازدارند. جنگل **تسیانگ** را نیز بسوزانند. ولی امروز، نه تاریخ چین گم شده است و نه آن روز آسمان آرام شد. تاریخ همیشه به ما درس می‌دهد.»

گفت: «واژه‌ها را خوب انتخاب می‌کنید، ولی نتوانستید مرا قانع کنید. شما در تمام زندگی خود معلم بوده‌اید. آیا در کلاس هم به پرسش‌های دانش‌آموزان خود، همین‌گونه پاسخ می‌دهید؟ من هم پرسشی دارم: صریح و روشن بگویید از جوان امروزی، البته در موقعیت اجتماعی موجود در ایران، چه انتظاری دارید، تا هم برای خود و هم برای جامعه‌ای که در آن زندگی می‌کند، سودمند باشد؟»

گفتم: «از همه‌ی مردم از جمله جوانان، نمی‌توان انتظار داشت با درکی فلسفی و علمی، به زندگی و جامعه بنگرند. برای پدید آمدن دگرگونی‌های مثبت اجتماعی هم نباید و نمی‌توان منتظر **درست اندیشیدن** همه‌ی افراد جامعه و همه‌ی جوانان ماند. برای جامعه‌ی ما، چند صد و یا چند هزار جوان **فرزانه** کافی است تا بتوانند دگرگونی‌های لازم را در آغاز در اندیشه‌ها و سپس در عمل جامعه ایجاد کنند. ما به جوانانی نیاز داریم که در مسیر فرزانگی گام بردارند.»

اندکی برآشفت و با لحنی گله‌آمیز گفت: «فرزانگی؟ این یک مفهوم کلی است و هر کسی آن را به گونه‌ی مورد نظر خود تعبیر می‌کند. فرزانگی یعنی چه؟ چه کسی را می‌توان فرزانه دانست؟ ما جوانان چه کنیم که فرزانه باشیم؟»

ادعای نخستین خود را که نباید بر صندلی «اندرز» بنشینیم، فراموش کردم. گرمی و اشتیاق جوان، مرا به دام انداخت.

ـ شرط اصلی فرزانگی آن است که همچون **ملاصدرا** (صدرالدین شیرازی مشهور به صدر المتألهین) در کتاب «اسفار» (یعنی سفرها) در نظریه‌ی «حرکت جوهری» خود، این حقیقت عقلی را بپذیریم که «حرکت در ذات طبیعت است». هیچ پدیده یا روندی ثابت و بی‌تغییر نیست و در طول زمان تکامل می‌یابد. این اعتقاد موجب می‌شود، انسان به دیدگاه‌های دیگران احترام بگذارد. حرف و استدلال آن‌ها را بشنود، درباره‌ی آن‌ها بیندیشد و دیدگاه خود را در جهت تکامل پیش ببرد. به این ترتیب، انسان فرزانه در همان حال که به انسان‌های دیگر و به اعتقادها و باورهای آن‌ها احترام می‌گذارد، استقلال اندیشه‌ی خود را حفظ می‌کند و هرگز به میل این و آن به هدف رسیدن به مقام یا نگهداری مقام خود، و به خاطر کسب مال یا حفاظت از مال خود، استقلال فکری‌اش را از دست نمی‌دهد.

استقلال فکری انسان فرزانه، همان آزاداندیشی است، چرا که به قول یکی از اندرزنامه‌های مانده در زبان پهلوی: «اگر در میان خوی‌های کسی، خرد او نیرومندترین خوی‌ها نباشد، زوال او، در خوی‌های اوست.» به قول **ابوریحان بیرونی** در «تحقیق ماللهند» که نزدیک به هزار سال از نوشتن آن می‌گذرد: «طبیعت دل‌ها بر عشق به دانش استوار است و خمیره‌ی وجود آدمی از ضد دانش، یعنی نادانی بیزار است. کار دانش، آزادی جان و رهانیدن آن [از تاریکی‌ها] است. دانش مفهوم‌های کلی را دربرمی‌گیرد و درست را از نادرست جدا می‌کند؛ وابسته به استقرا و استدلال سطحی و غیر کلی نیست. تردیدها را برطرف و آدمی را به یقین نزدیک‌تر می‌کند.»

انسان فرزانه، آزادی اندیشه و گفتار را حق طبیعی انسان‌ها می‌داند. می‌پذیرد که هر کسی حق دارد، بدون سوء استفاده از مقام خود، بدون تهمت زدن به دیگران، و بدون استفاده از خشونت، سخن خود را بر پایه‌ی اعتقاد خود و بدون هراس از تعقیب عرضه کند و منتظر پاسخ بماند. استفاده از «تمثیل» یا نمونه آوردن یک بیت شعر، شیوه‌ی استدلال آدم فرزانه نیست و به شرطی به آن استناد می‌کند که برهانی خردمندانه و علمی به دنبال آن داشته باشد. استدلال تمثیلی به قول منطق‌دانان، استدلالی کودکانه است. تنها کودک است که با یک یا چند مثال قانع می‌شود و حکمی کلی را می‌پذیرد. برای نمونه، اگر از مردی بلند قد و عینک‌دار خشونتی دید، از هر مرد بلندقد عینکی دیگری هم دچار هراس می‌شود.

انسان فرزانه شجاع است، ولی بی‌پروا نیست. از اعتقاد

خود برنمی گردد، ولی به قول گاوس (کارل فردریش؛ ۱۸۵۵ - ۱۷۷۷)، ریاضی دان و اخترشناس آلمانی، مثل کسی است که در «غار کوران» نمایش نامه ی خود را اجرا نمی کند و برای بیان اعتقاد خود، نه به خطرهایی که برای او دارد، بلکه به اندازه و مقیاس اثربخشی آن می اندیشد. آن گاه هوشیار است و می داند چه مطلبی را و در کجا باید مطرح کند. ولی هرگز و به هیچ قیمتی، چیزی برخلاف اعتقاد خود نمی گوید و نمی نویسد و به عملی که با اعتقادهایش ناسازگار باشد، دست نمی زند.

انسان فرزانه تلاش می کند تک بعدی نباشد و در روزگاری که جهان سرمایه داری، همه را به سوی تخصص گرایی و غرق شدن در تخصص خود سوق می دهد، ضمن داشتن آگاهی بالا در زمینه ای خاص، زمینه های دیگر را فراموش نمی کند. صاحبان سرمایه در جهان سرمایه داری آرزو دارند، هر کسی تنها به حرفه و تخصص خود بیندیشد. سر خود را بالا نگیرد و به عمل دیگران توجه نکند. به او چه مربوط است که سیاست مداران چه می کنند یا سودهای کلان ناشی از زحمت دیگران به جیب چه کسانی می رود؟ او باید تنها به کار خودش مشغول باشد، تخصص خود را بالا ببرد و تنها به آن بیندیشد و...

ولی در واقع انسان فرزانه می داند که آدمی مجموعه ی پیچیده ای است که هم سرچشمه ی هنر است و هم زاینده ی دانش. کسی که برای نمونه، تنها به ریاضیات بپردازد و چشم و گوش خود را به روی آن چه دور و بر او می گذرد ببندد، از هنر و تفریح و شادی گریزان باشد، دردهای انسان ها را در وجود خود نداشته باشد و برای التیام آن ها نکوشد، زندگی را تنها در زیبایی های دستورها و مسئله های ریاضیات ببیند و زشتی هایی را که بر او و انسان های دیگر تحمیل کرده اند، نبیند و با رنج هایی که بر او و دیگران تحمیل شده اند، آشنا نباشد، رمان های کلاسیک را که بازگوکننده ی غم و شادی انسان ها هستند، نخوانده باشد، از موسیقی، تابلوهای زیبای نقاشی و یا مجسمه های زیبای صاحبان ذوق لذت نبرد، عدالت اجتماعی را برای همه ی انسان ها و طنز و تفریح و شادی را برای خود و دیگران نخواهد... چنین کسی نه تنها انسان کامل نیست که یک ریاضی دان خوب هم نمی تواند باشد. یک آکادمی تک بعدی است که ابزار کار را در اختیار زورمندان و سرمایه داران می گذارد و راه را برای یکه تازی آن ها باز می کند.

انسان فرزانه دیگران را تحقیر نمی کند. از نابرابری هایی که بر آن ها تحمیل شده، بیزار است و علیه آن ها می جنگد. جدایی انسان ها را به دلیل ملیت آن ها، نژاد آن ها، جنسیت آن ها، مذهب و اعتقاد آن ها و... نمی پذیرد. انسان ها را درجه بندی نمی کند که برخی شهروند درجه اول و برخی دیگر شهروند درجه دوم هستند. برای همه انسان ها، حقوق برابر قائل است و در راه رسیدن به این آرمان ها می کوشد.

انسان فرزانه، در همان حال که روی اعتقادهای انسانی پای می فشارد، به طور دائم در جست وجوی حقیقت است. واقعیت ها را می پذیرد و از آن جا که می داند، همه چیز را همگان دانند و همگان هنوز از مادر نزاده اند، در اصلاح خود و اندیشه هایش تردید نمی کند. قاطعیت و خودباوری را با شک نسبت به نادانسته های خود، به همراه دارد و از بیان اشتباه یا اشتباهات گذشته ی خود نمی هراسد.

انسان فرزانه...

سخنم را برید و گفت: «اجازه بدهید! همین اندازه برای امروز کافی است. تا همین جا می توان تصور کرد، «فرزانه بودن» تا چه اندازه، زیبا و انسانی است در عین حال چه قدر دشوار. از **نصیحت های شما سپاس گزارم!**»

۲.

کسانی هستند که با ذهن بیمار خود، پرسش یا پرسش هایی در برابر مردم می گذارند که تنها می تواند انسان را آشفته کند و آزار دهد. از آن جمله است مسابقه هایی که گاه چنین مسئله هایی در برابر افراد قرار می دهند: «در دقایقی همراه با مادر و همسر خود در میان دریا پارو می زنید و از زندگی لذت می برید. ناگهان دریا توفانی می شود و هر سه نفر شما را به دریا می اندازد. تنها شما شنا می دانید و می توانید غریق را نجات دهید؛ ولی تنها یک نفر را: مادر یا همسرتان. باید زود تصمیم بگیرید، چه کسی را: مادرتان که عمر و زندگی خود را برای بزرگ شدن و موفقیت شما صرف کرده است، یا همسرتان که تازه آغاز زندگی اوست و امیدها به دل دارد؟» بعد هم از شما می خواهند، نظر خود را با استدلال بنویسید و تلاش کنید، برای تصمیم خود دیدگاهی منطقی داشته باشید.

جز یک ذهن بیمار، چه کسی می تواند چنین پرسش هراس انگیزی را طرح کند؟ از طرح این پرسش و یا پرسش های

مشابه آن، جز آزار روانی، پریشانی و درماندگی، چه چیزی عاید شنونده می‌شود؟ نه می‌توان مادر را به کام مرگ فرستاد و نه همسر را در گرداب توفان رها کرد. از دست دادن هر کدام، آن هم با میل و تصمیم خود، تنها یک فاجعه است و هیچ انسان خردمند و با احساسی، توانایی انتخاب در چنین شرایطی را ندارد. یکی از پاسخ‌دهندگان، چه خوب توانسته بود، احساس خود را بیان کند: «امیدوارم هرگز در برابر این گونه دوراهی که زاده‌ی ذهن بیمار، و بی‌عاطفه‌ی طرح کننده‌ی آن است، قرار نگیرم.»

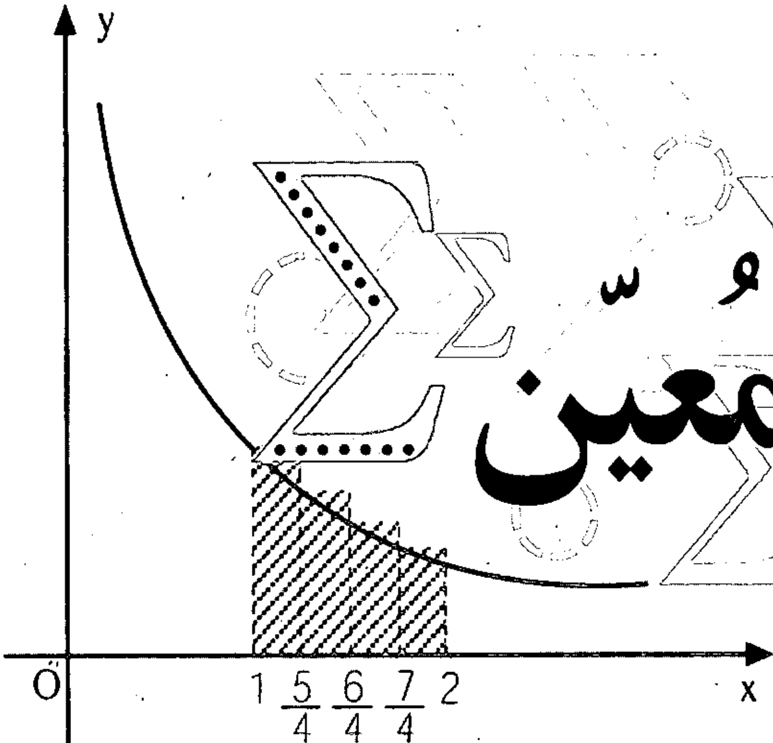
از این گونه پرسش‌ها، پرسش‌هایی هستند که کم و بیش همه‌ی ما در دوران تحصیل در برابر آن‌ها قرار گرفته‌ایم؛ مثل: «دانش موجب خوشبختی است یا خواسته» «علم یا ثروت، کدام را می‌پسندید؟» و... گرچه این پرسش‌ها به اندازه‌ی پرسش پیشین آزاردهنده نیستند و روان آدمی را دچار آشفتگی و درماندگی نمی‌کنند، ولی به همان اندازه نابخردانه‌اند. مگر دانش و خواسته باید با هم ناسازگار باشند؟ مگر دانشمند نباید زندگی کند؟ مگر آدم مال‌دار باید ابله باشد و از دانش برکنار؟ مگر نمی‌شود جامعه‌ای به دور از نابرابری‌های جامعه‌ی سرمایه‌داری داشته باشیم که همه‌ی افراد، هم دانش بیاموزند و هم با آسایش زندگی کنند؟ چرا باید تسلیم این شعار سوداگرانه‌ی جهان سرمایه‌داری شویم و به جوانان خود تلقین کنیم که نباید به دنبال دانش و هنر بروند، وگرنه برای گذران زندگی خود در می‌مانند؟ دوست دانا و فرزانه‌ای که از یکی از شهرستان‌های استان فارس تلفن می‌کرد، از بیداد زمان می‌نالید که هیچ اهمیتی به تخصص او نمی‌دهند و از هر دری وارد می‌شود، «با احترام» از در دیگر بیرونش می‌کنند و برای نیازهای زندگی خود و خانواده‌اش درمانده است.

و نمونه‌ای دیگر: چند روز پیش یکی از پیکان‌هایی که مسافرکشی می‌کرد، مرا سوار کرد. قیافه‌ی راننده آشنا بود، ولی او را به یاد نمی‌آوردم. او مرا شناخت. از همکاران قدیمی من بود. هم تدریس می‌کرد و هم به ترجمه و تألیف می‌پرداخت. از او پرسیدم: «چرا سال‌هاست اثری یا نوشته‌ای از تو نمی‌بینم.» پاسخ کوتاه بود: «برای هزینه‌ی ضروری خانواده مسافرکشی می‌کنم و تازه زندگی لنگ است و همیشه شرمنده‌ی زن و فرزندان‌ام هستم. نه حواس آماده‌ای و نه فرصت لازم که به کار کتاب بپردازم. خیلی چیزها در ذهنم وجود دارند که باید روی کاغذ بیایند، ولی گمان می‌کنم باید در همان ذهنم دفن شوند.»

نمی‌توان جامعه‌ای را که در آن، دانشمندان، هنرمندان و ویژه‌کاران در تنگ‌دستی به سر می‌برند و برای زندگی خود خاطری آسوده ندارند، جامعه‌ای سالم و انسانی شمرد. استاد یا دانشمندی که برای تأمین هزینه‌ی زندگی خود ناچار است با هواپیما به این شهر و آن شهر برود، دبیری که به دلیل حقوق ناچیز خود به کار تدریس خصوصی (که به نظر من اعتبار معلم را پایین می‌آورد) بپردازد، ویژه‌کاری که ناچار است با مسافرکشی، زندگی خود را تأمین کند و...، نمی‌تواند برای ساختن ایرانی پیشرفته، آن طور که باید خدمت کرد. پژوهشگران، هنرمندان، دانشمندان و ویژه‌کاران، ستون‌های اصلی پیشرفت‌اند. بدون تأمین زندگی آن‌ها و بدون آرامش خاطر آن‌ها، نمی‌توان منتظر جامعه‌ای سالم و پیشرفته بود. تا کی باید طنز **عبید زاکانی** (۷۷۲ ـ ۷۰۰ هجری قمری) مصداق داشته باشد که می‌گفت:

«لولئی با پسر خود ماجرا می‌کرد که تو هیچ کار نمی‌کنی و عمر در بطالت به سر می‌بری. چند با تو بگویم که معلق زدن بیاموز و سنگ از چنبر جهانیدن در سن بازی تعلیم کن تا از عمر خود برخوردار شوی. اگر از من نمی‌شنوی، به خدا تو را به مدرسه اندازم تا در آن علم مرده ریگ ایشان بیاموزی و دانشمند شوی و تا زنده باشی، در مذلت و فلاکت و ادبار بمانی و یک جو از هیچ جا حاصل نتوانی برد.»

با همه‌ی این‌ها، فرزانگان، دانشمندان و هنرمندان می‌توانند امیدی بزرگ داشته باشند. در سال ۵۳۴ هجری قمری، **مستنجد**، سی و دومین خلیفه‌ی عباسی، وقتی آگاه شد، در خانه‌ی یکی از قاضیان او کتابخانه‌ای است و کتاب‌های فیلسوف و دانشمند ایرانی، یعنی **پورسینا** ملقب به «شیخ‌الرئیس» (۴۲۸ ـ ۳۷۰ هجری قمری) هم در بین کتاب‌های اوست، دستور داد کتابخانه‌ی قاضی را آتش بزنند. زیرا مستنجد که مشهور به «ابوالمظفر» و «المستنجد بالله» بود، رسالت اصلی خود را، مبارزه با «فساد» می‌دانست. ولی امروز در سراسر جهان، میلیون‌ها نفر «پورسینا» را می‌شناسند و صدها هزار نفر از کتاب‌های او استفاده می‌کنند، درحالی که تردید دارم، تعداد کسانی که نام مستنجد را شنیده باشند، به پانصد نفر برسند.

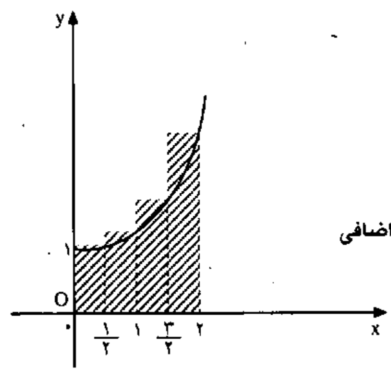


انتگرال معیّن

(قسمت اول)

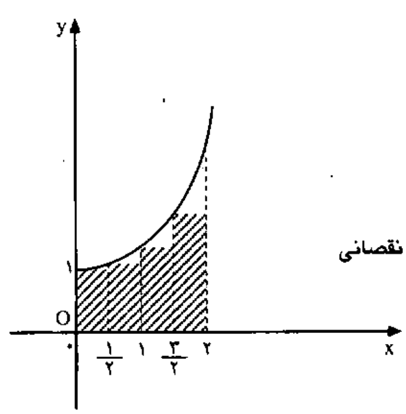
فرض کنید، می‌خواهیم اندازه‌ی مساحت زیر منحنی به معادله‌ی $f(x)=x^2+1$ و محور xها را از خط $x=0$ تا خط $x=2$ با تقریب محاسبه کنیم.

اندازه‌ی مساحت مورد نظر را A می‌نامیم. برای این کار، سطح زیر منحنی را به مستطیل‌های محیطی و محاطی با عرض‌های مساوی، مانند شکل‌های ۱ و ۲ تقسیم می‌کنیم.



تقریب اضافی

شکل۱



تقریب نقصانی

شکل۲

به طوری که در شکل‌ها ملاحظه می‌کنید، بازه‌ی $[0,2]$ را به چهار قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم.

در شکل۱، مستطیل‌ها محیطی و در شکل ۲ مستطیل‌ها محاطی‌اند و عرض هر مستطیل $\frac{1}{2}$ است. در شکل۱، مجموع مساحت‌های مستطیل‌های محیطی، از مساحت سطح زیر منحنی بیشتر است (تقریب اضافی) و در شکل ۲، مجموع مساحت‌های مستطیل‌های محاطی از مساحت سطح زیر منحنی کمتر است (تقریب نقصانی).

تذکر: مجموع مساحت‌های مستطیل‌های محیطی را بالاریمان (U_nf) و مجموع مساحت‌های مستطیل‌های محاطی را پایین ریمان (L_nf) می‌گوییم. در قسمت‌های بعد، در این باره بحث مفصلی خواهیم داشت. در محاسبه‌ی بالاریمان (تقریب اضافی) طول هر مستطیل در هر بازه برابر ماکزیمم مطلق تابع و در محاسبه‌ی پایین ریمان (تقریب نقصانی)، طول هر مستطیل در هر بازه برابر می‌نیمم مطلق تابع است. مثلاً دربازه‌ی $[\frac{1}{2},1]$ با توجه به شکل، ماکزیمم مطلق تابع $f(1)$ و می‌نیمم مطلق تابع $f(\frac{1}{2})$ است. حال به ادامه‌ی حل

می‌پردازیم:

$$\frac{2-0}{4}=\frac{1}{2}$$ = عرض هر مستطیل

$$U_n f=\frac{1}{2}\left(f(\tfrac{1}{2})+f(1)+f(\tfrac{3}{2})+f(2)\right)$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{5}{4}+2+\frac{13}{4}+5)=5/75$$ واحد مربع

$$L_n f=\frac{1}{2}\left(f(0)+f(\tfrac{1}{2})+f(1)+f(\tfrac{3}{2})\right)$$

$$=\frac{1}{2}(1+\frac{5}{4}+2+\frac{13}{4})=3/75$$ واحد مربع

بنابراین:

۵٫۷۵> مساحت سطح زیر منحنی=A>۳٫۷۵

چنانچه بازه‌ی [۰,۲] را به جای چهار قسمت مساوی، به هشت قسمت مساوی تقسیم و مانند محاسبات بالا عمل کنیم، خواهیم داشت:

اندازه‌ی تقریب اضافی مساحت‌ها $=U_n f=5/1875$

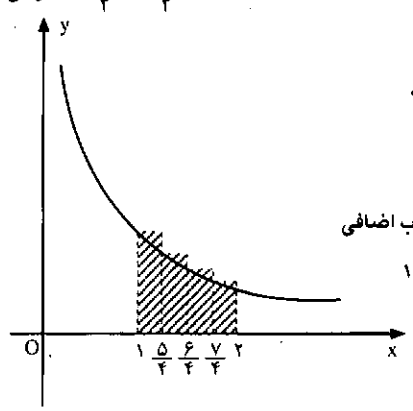
اندازه‌ی تقریب نقصانی مساحت‌ها $=L_n f=4/1875$

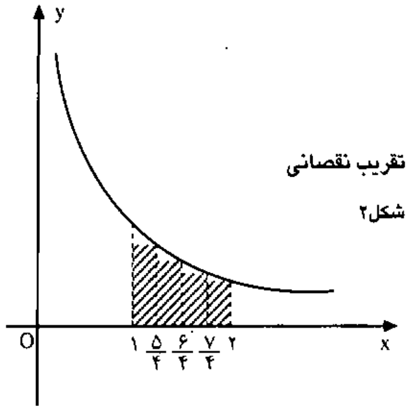
بنابراین: ۴٫۱۸۷۵<A<۵٫۱۸۷۵

اگر بازه‌ی [۰,۲] را به جای هشت قسمت مساوی به هشتاد قسمت مساوی یا به هشتصد قسمت مساوی تقسیم کنیم، آن‌گاه مقادیر عددی تقریب اضافی مساحت‌ها و تقریب نقصانی مساحت‌ها خیلی به‌هم نزدیک خواهد شد. چنانچه بازه‌ی [۰,۲] را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم، سپس n را به سمت ∞ میل دهیم، آن‌گاه حدّ مجموع تقریب نقصانی مساحت‌ها برابر حد مجموع تقریب اضافی مساحت‌ها و برابر سطح زیر منحنی خواهد شد.

مثال۱. اندازه‌ی سطح زیر منحنی به معادله‌ی $f(x)=\frac{1}{x}$ و محور xها را از خط x=۱ تا خط x=۲ با تقریب اضافی و تقریب نقصانی برای n=۴ بیابید.

حل: $$\frac{2-1}{4}=\frac{1}{4}$$ = عرض هر مستطیل





اندازه‌ی تقریب اضافی مساحت‌ها $=U_n f=\frac{1}{4}\left(f(1)+f(\tfrac{5}{4})+f(\tfrac{6}{4})+f(\tfrac{7}{4})\right)$

$$=\frac{1}{4}(1+\frac{4}{5}+\frac{4}{6}+\frac{4}{7})=0/76$$ واحد مربع

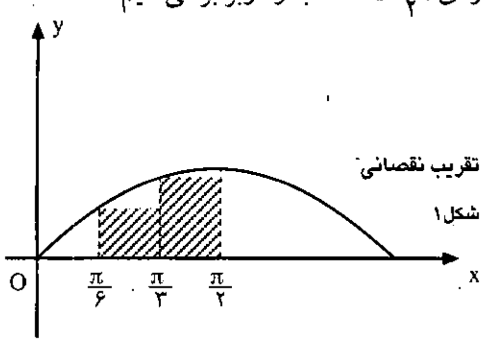
اندازه‌ی تقریب نقصانی مساحت‌ها $=L_n f=\frac{1}{4}\left(f(\tfrac{5}{4})+f(\tfrac{6}{4})+f(\tfrac{7}{4})+f(2)\right)$

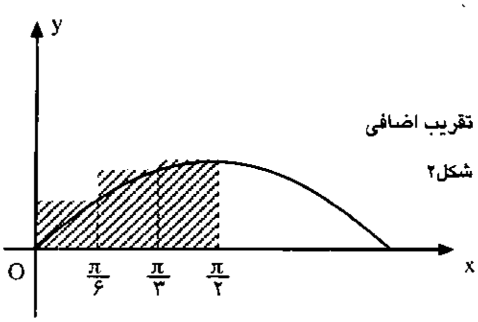
$$=\frac{1}{4}(\frac{4}{5}+\frac{4}{6}+\frac{4}{7}+\frac{1}{2})=0/63$$ واحد مربع

پس: ۰/۷۶ > اندازه‌ی سطح زیر منحنی= A > ۰/۶۳

مثال۲. در تابع با ضابطه‌ی f(x)=sinx، مجموع اندازه‌های بالاریمان و پایین‌ریمان را دربازه‌ی [۰,π] برای n=۶ بیابید.

حل: تابع با ضابطه‌ی f(x)=sinx دربازه‌ی $[0,\frac{\pi}{2}]$ صعودی اکید و نامنفی است، بنابراین مجموع بالاریمان و پایین‌ریمان را دربازه‌ی $[0,\frac{\pi}{2}]$ محاسبه و دوبرابر می‌کنیم.





عرض هر مستطیل $\Delta_x = \frac{\pi - 0}{6} = \frac{\pi}{6}$

$$U_n f = 2 \times \Delta x\left(f(\frac{\pi}{6}) + f(\frac{\pi}{3}) + f(\frac{\pi}{2})\right)$$

$$= 2 \times \frac{\pi}{6}(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1) = \frac{(3+\sqrt{3})\pi}{6}$$

$$L_n f = 2 \times \Delta x\left(f(0) + f(\frac{\pi}{6}) + f(\frac{\pi}{3})\right)$$

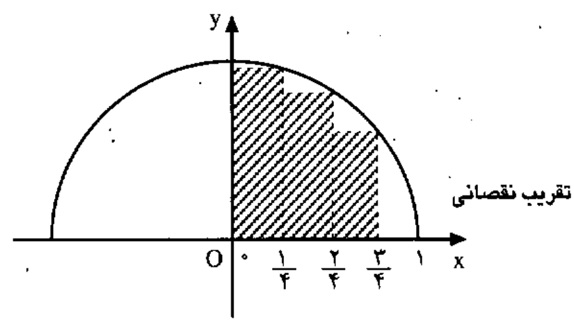
$$= 2 \times \frac{\pi}{6}(0 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{(1+\sqrt{3})\pi}{6}$$

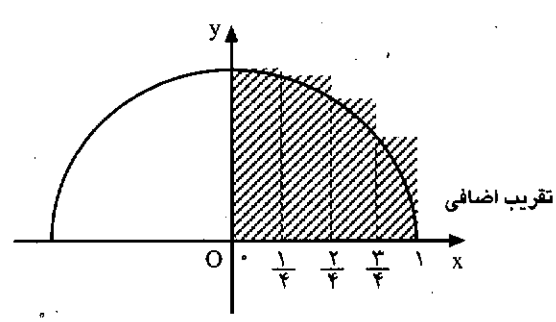
مثال۳. در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ، مجموع بالاریمان و پایین‌ریمان را در بازه‌ی $[-1,1]$ برای $n=8$ بیابید.

حل: نمودار این تابع یک نیم‌دایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱ است.

مجموع بالاریمان، پایین‌ریمان را دربازه‌ی $[0,1]$ که تابع نزولی اکید و نامنفی است، محاسبه و آن‌گاه آن را دوبرابر می‌کنیم.

عرض هر مستطیل $\Delta x = \frac{1-(-1)}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$





$$L_n f = 2 \times \Delta x\left(f(\frac{1}{4}) + f(\frac{2}{4}) + f(\frac{3}{4}) + f(1)\right)$$

$$= 2(\frac{1}{4})(\sqrt{1-\frac{1}{16}} + \sqrt{1-\frac{4}{16}} + \sqrt{1-\frac{9}{16}} + 0)$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{\frac{15}{16}} + \sqrt{\frac{12}{16}} + \sqrt{\frac{7}{16}}) = \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{2\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4})$$

$= \frac{1}{2}(0/97 + 0/87 + 0/66) = 1/24$ واحد مربع

$$U_n f = 2 \times \Delta x\left(f(0) + f(\frac{1}{4}) + f(\frac{2}{4}) + f(\frac{3}{4})\right)$$

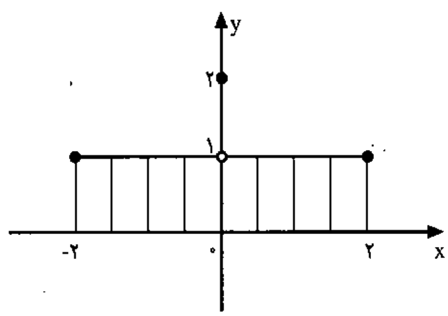
$$= 2(\frac{1}{4})(1 + \frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{2\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4})$$

$= \frac{1}{2}(1 + 0/97 + 0/87 + 0/66) = 1/74$ واحد مربع

مثال۴. تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} 2 & x = 0 \text{ اگر } \\ 1 & x \neq 0 \text{ اگر } \end{cases}$ مفروض است. مجموع بالاریمان و پایین‌ریمان این تابع در بازه‌ی $[-2, 2]$ را تعیین کنید.

الف) برای $n=8$ ب) برای $n=9$ ج) برای $n=n$

حل:



$L_n f = \Delta x(\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{8}) = \frac{1}{2}(8) = 4$ واحد مربع

$U_n f = \Delta x(1+1+1+2+2+1+1+1) = \frac{1}{2}(6+4) = 5$ واحد مربع

توجه فرمایید، در دو مستطیلی که محور yها یک ضلع آن‌هاست، ماکزیمم مطلق تابع در هریک برابر ۲ است.

ب) $n=9$؛ عرض هر مستطیل $\Delta x = \frac{2-(-2)}{9} = \frac{4}{9}$

$L_n f = \Delta x(\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{9}) = \frac{4}{9}(9) = 4$ واحد مربع

$L_n f = \Delta x(1+1+1+1+2+1+1+1+1) = \frac{4}{9}(10) = \frac{40}{9}$ واحد مربع

ج) $n=n$؛ اگر n فرد باشد: $\Delta x = \frac{4}{n}$

$L_n f = \Delta x(\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n}) = \frac{4}{n}(n) = 4$ واحد مربع

$$U_nf = \Delta x(\underbrace{۱+۱+۱+\cdots+۱}_{n-۱}+۲) = \frac{۴}{۹}(n+۱) = \frac{۴(n+۱)}{۹}$$

واحد مربع

اگر n زوج باشد: $\Delta x = \frac{۴}{n}$

$$L_nf = \Delta x(\underbrace{۱+۱+۱+\cdots+۱}_{n}) = \frac{۴}{n}(n) = ۴$$ واحد مربع

$$U_nf = \Delta x(\underbrace{۱+۱+۱+\cdots+۱}_{n-۲}+۲+۲) = \frac{۴}{n}(n+۲) = \frac{۴(n+۲)}{n}$$

واحد مربع

مجموع n جمله

۱) $\sum_{i=p}^{n} a = (n-p+۱)a \qquad n,p \in N \quad , \quad a \neq ۰$

۲) $\sum_{i=۱}^{n} a = an \qquad n \in N \quad , \quad a \neq ۰$

۳) $\sum_{i=۱}^{n} i = ۱+۲+۳+\cdots+n = \frac{n(n+۱)}{۲}$

۴) $\sum_{i=۱}^{n} ki = k\sum_{i=۱}^{n} i \qquad k \in \mathbb{R} \quad , \quad k \neq ۰$

۵) $\sum_{i=۱}^{n} i^۲ = ۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots+n^۲ = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$

۶) $\sum_{i=۱}^{n} i^۳ = ۱^۳+۲^۳+۳^۳+\cdots+n^۳ = \frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$

مثال۱ . در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ۵x - ۲$ ، مطلوب است محاسبه‌ی $\sum_{i=۱}^{n} f(\frac{i}{n})$.

حل:

$$\sum_{i=۱}^{n} f(\frac{i}{n}) = \sum_{i=۱}^{n} (\frac{۵i}{n} - ۲) = \sum_{i=۱}^{n} \frac{۵i}{n} - \sum_{i=۱}^{n} ۲ = \frac{۵}{n}\sum_{i=۱}^{n} i - \sum_{i=۱}^{n} ۲$$

$$= \frac{۵}{n} \times \frac{n(n+۱)}{۲} - ۲n = \frac{۵}{۲}(n+۱) - ۲n = \frac{۵n+۵-۴n}{۲} = \frac{n+۵}{۲}$$

مثال۲ . در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ۶x^۲ + ۳$ ، مطلوب است محاسبه‌ی $\sum_{i=۱}^{n} f(\frac{i}{n})$.

حل:

$$\sum_{i=۱}^{n} f(\frac{i}{n}) = \sum_{i=۱}^{n} (\frac{۶i^۲}{n^۲} + ۳) = \sum_{i=۱}^{n} \frac{۶i^۲}{n^۲} + \sum_{i=۱}^{n} ۳ = \frac{۶}{n^۲}\sum_{i=۱}^{n} i^۲ + ۳n$$

$$= \frac{۶}{n^۲} \times \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶} + ۳n = \frac{(n+۱)(۲n+۱)}{n} + ۳n$$

$$= \frac{۲n^۲ + ۳n + ۱ + ۳n^۲}{n} = \frac{۵n^۲ + ۳n + ۱}{n}$$

مثال۳ . در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ۶x^۲ + ۴x$ ، مطلوب است محاسبه‌ی $\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} f(\frac{i}{n})$.

حل: ابتدا $\sum_{i=۱}^{n} f(\frac{i}{n})$ را مانند مثال۲ محاسبه می‌کنیم.

$$\sum_{i=۱}^{n} f(\frac{i}{n}) = \sum_{i=۱}^{n} (\frac{۶i^۲}{n^۲} + \frac{۴i}{n}) = \sum_{i=۱}^{n} \frac{۶i^۲}{n^۲} + \sum_{i=۱}^{n} \frac{۴i}{n}$$

$$= \frac{۶}{n^۲}\sum_{i=۱}^{n} i^۲ + \frac{۴}{n}\sum_{i=۱}^{n} i = \frac{۶}{n^۲} \times \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶} + \frac{۴}{n} \times \frac{n(n+۱)}{۲}$$

$$= \frac{(n+۱)(۲n+۱)}{n} + ۲(n+۱) = \frac{۴n^۲ + ۵n + ۱}{n}$$

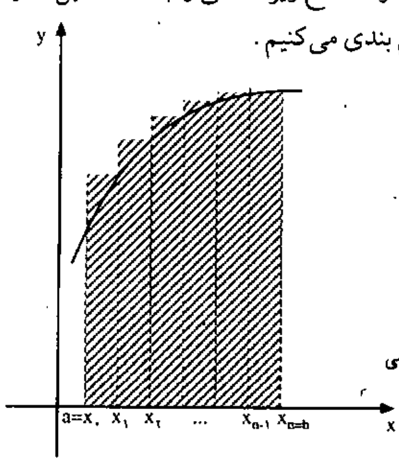
حال $\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} f(\frac{i}{n})$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n}(\frac{۴n^۲ + ۵n + ۱}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{۴n^۲ + ۵n + ۱}{n^۲} = ۴$$

مجموع ریمان‌ها

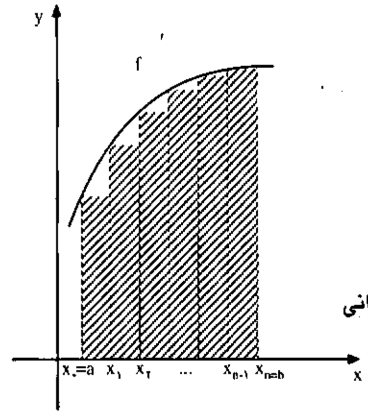
فرض می‌کنیم تابع با ضابطه‌ی $y=f(x)$، تابعی پیوسته و در بازه‌ی $[a,b]$ نامنفی و صعودی اکید باشد. می‌خواهیم اندازه‌ی سطح زیر نمودار تابع را با محور xها، در فاصله‌ی دو خط $x=a$ و $x=b$ به‌طور دقیق محاسبه کنیم.

برای این کار، سطح زیر منحنی را به n مستطیل محیطی و محاطی تقسیم بندی می‌کنیم.



تقریب اضافی

شکل۱

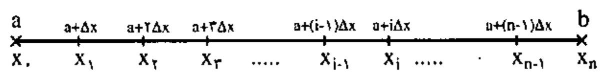


تقریب نقصانی

شکل۲

به طوری که در شکل‌ها ملاحظه می‌کنید، هرچه تعداد مستطیل‌ها زیادتر شود، مجموع مساحت‌های مستطیل‌های محیطی و محاطی، به اندازه‌ی سطح زیر منحنی در بازه‌ی [a,b] نزدیک‌تر خواهد شد.

اگر $\Delta x = \frac{b-a}{n}$، عرض مستطیل‌ها باشد، بازه‌ی [a,b] دارای تقسیمات زیر است:



در قسمت پایین خط، اسم نقطه‌ها و در قسمت بالای خط، طول نقطه‌ها نوشته شده است.

=مجموع مساحت‌های مستطیل‌های تقریب نقصانی

$$\Delta x\big(f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})\big)=\Delta x\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})$$

=مجموع مساحت‌های مستطیل‌های تقریب اضافی

$$\Delta x\big(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\cdots+f(x_n)\big)=\Delta x\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

مجموع مساحت‌های مستطیل‌های تقریب نقصانی را پایین ریمان و مجموع مساحت‌های مستطیل‌های تقریب اضافی را بالاریمان گویند.

در این مثال:

$$\text{مجموع پایین ریمان}=\Delta x\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})$$

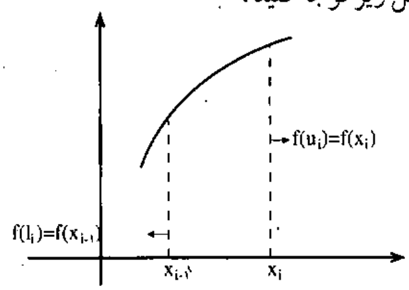
$$\text{مجموع بالاریمان}=\Delta x\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

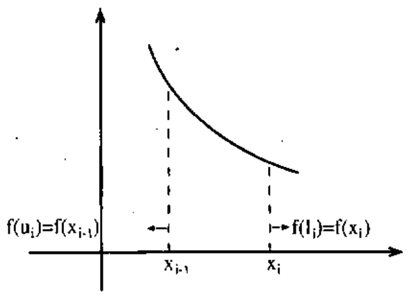
در حالت کلی، اگر ماکزیمم مطلق تابع f در بازه‌ی $[x_{i-1},x_i]$ را با $f(u_i)$ و می‌نیمم مطلق تابع f را در این بازه با $f(l_i)$ نشان دهیم، آن‌گاه:

$$\text{مجموع پایین ریمان}=\Delta x\sum_{i=1}^{n} f(l_i)$$

$$\text{مجموع بالاریمان}=\Delta x\sum_{i=1}^{n} f(u_i)$$

به دو شکل زیر توجه کنید:





بنابراین می‌توان نوشت، اگر تابع f صعودی اکید باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases}\text{مجموع بالاریمان}=\Delta x\sum_{i=1}^{n} f(u_i)=\Delta x\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\\ \text{مجموع پایین ریمان}=\Delta x\sum_{i=1}^{n} f(l_i)=\Delta x\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\end{cases}$$

اگر تابع f نزولی اکید باشد، آن‌گاه:

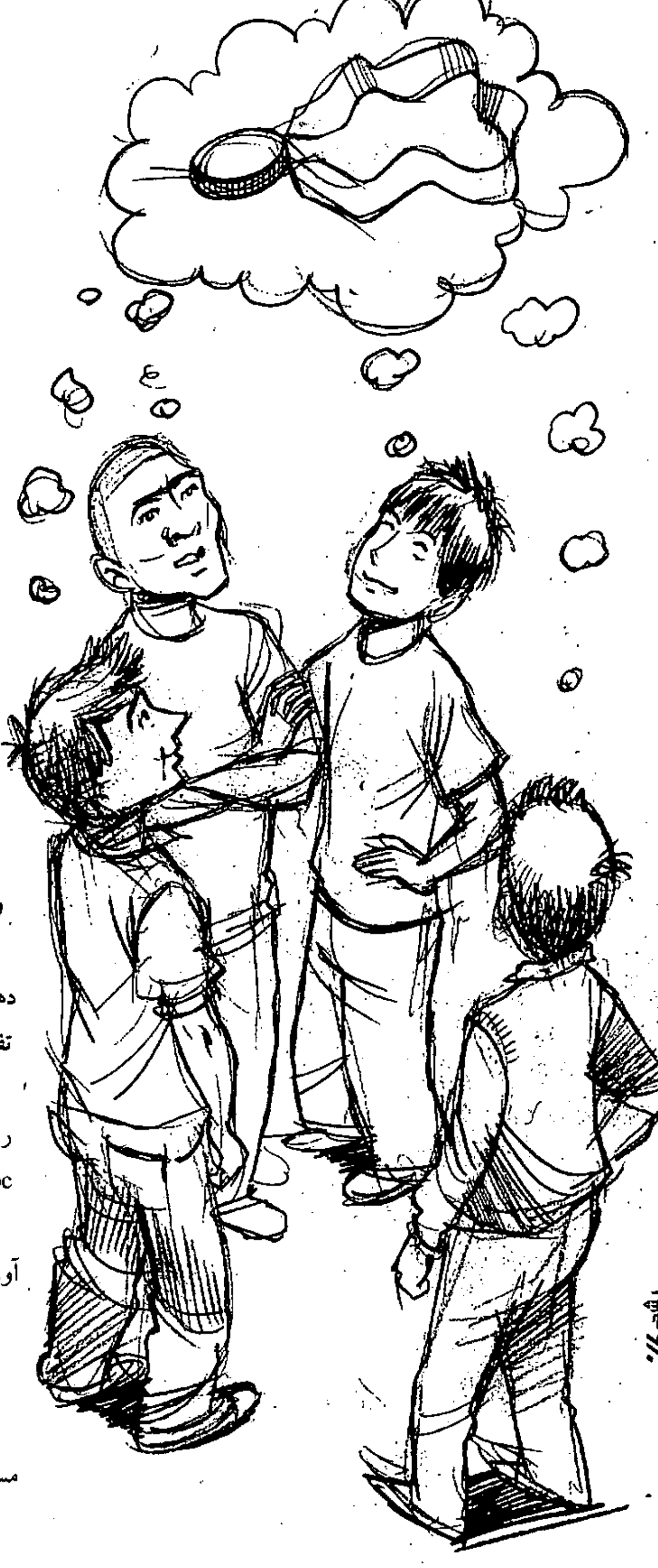
$$\begin{cases}\text{مجموع بالاریمان}=\Delta x\sum_{i=1}^{n} f(u_i)=\Delta x\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\\ \text{مجموع پایین ریمان}=\Delta x\sum_{i=1}^{n} f(l_i)=\Delta x\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\end{cases}$$

اگر C_i نقطه‌ی دلخواهی در بازه‌ی $[x_{i-1},x_i]$ باشد، آن‌گاه:

$$\text{مجموع ریمان}=\Delta x\sum_{i=1}^{n} f(c_i)$$

مسابقه های ریاضی در

○ هوشنگ شرقی



منتخبی از مسائل مسابقات ریاضی دبیرستان‌های آمریکا

اشاره

مسابقات ریاضی دبیرستانی آمریکا در سه سطح متفاوت برگزار می‌شود:

- سطح مقدماتی: که با ۳۰ سؤال پنج گزینه‌ای نسبتاً آسان برگزار می‌شود.
- سطح متوسط: که با ۱۵ سؤال تشریحی متوسط برگزار می‌شود.
- سطح عالی: که همان المپیاد ملی ریاضی کشور آمریکاست و مشابه المپیاد بین‌المللی برگزار می‌شود.

اینک سؤال‌های منتخب سطح متوسط (AIME) در دهه‌ی ۱۹۸۰ میلادی را به شرح زیر همراه با راه‌حل آن‌ها تقدیم می‌کنیم.

۱. تعداد عددهای صحیح پنج رقمی به فرم «۳۷abc» را در مبنای ۱۰ به‌دست آورید، به طوری که عددهای ۳۷abc، ۳۷bca و ۳۷cab، بر ۳۷ بخش‌پذیر باشند.

۲. مقدار $10(x+y)$ را از دستگاه معادلات زیر به دست آورید.

$$\begin{cases} \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + y = ۴۳/۸ \\ x + y - \lfloor x \rfloor = ۱۸/۴ \end{cases}$$

توضیح: $\lfloor z \rfloor$ بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی z است.

کشورهای گوناگون دنیا (۵)

۳ . در جدول ۳×۳ ذیل ، هر حرف معرف یک عدد صحیح متمایز غیرصفر است . هریک از اعداد سه رقمی abc ، def ، ghi ، adg ، beh ، cfi و aei بر ۱۱ بخش‌پذیر هستند . حداکثر مقدار ممکن برای عدد سه رقمی ceg چیست؟

a	b	c
d	e	f
g	h	i

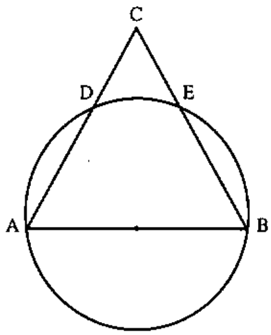
۴ . در مثلث ABC ، فرض کنید D و E به ترتیب نقاطی روی اضلاع AC و BC باشند ، به طوری که DE موازی AB باشد و فرض کنید P نقطه‌ی برخورد AE و BD باشد . اگر مساحت مثلث ABP ، ۳۶ واحد و مساحت مثلث EDP ، ۲۵ واحد سطح باشد ، مساحت مثلث ABC را به‌دست آورید .

۵ . فرض کنید x و y عددهای حقیقی باشند با قدرمطلق‌های متفاوت که در معادلات
$$\begin{cases} x^3 = 13x + 3y \\ y^3 = 3x + 13y \end{cases}$$
صدق کنند . مقدار عددی $(x^2 - y^2)^2$ را به‌دست آورید .

۶ . برای هر آرایش از اعداد ۱ ، ۴ ، ۷ ، ۱۰ ، ۱۳ ، ۱۶ ، ۱۹ ، ۲۲ ، ۲۵ و ۲۸ روی محیط یک دایره ، فرض کنید N معرف بزرگ‌ترین ده عددی باشد که از جمع هر عدد و دو عدد همسایه‌اش به‌دست می‌آید . کمترین مقدار N که قابل نمایش است ، چیست؟

۷ . اگر x ، y و z عددهای صحیح مثبت متمایزی باشند ، به طوری که $y^2 - zx = -103$ و $z^2 - xy = 22$ ، مقدار $x^2 - yz$ را به‌دست آورید .

۸ . در شکل ذیل در مثلث ABC ، $AB = 30$ قطر دایره است . اگر $AD = \frac{AC}{3}$ و $BE = \frac{BC}{4}$ ، مساحت مثلث چه‌قدر است؟



۹ . عدد طبیعی N را دارای خاصیت «جمع وارون» گوییم هرگاه عدد صحیح سه رقمی abc یافت شود ، به طوری که a و c غیرصفر باشند و N = abc + cba . چند عدد طبیعی با خاصیت جمع وارون وجود دارند؟

حل مسائل

۱ . اگر x ، y و z را به ترتیب معادل با عددهای سه رقمی abc ، bca و cab درنظر بگیریم ، به راحتی می‌توان دید که :

$10z - x = 999c$ ، $10y - z = 999b$ و $10x - y = 999a$

و چون ۹۹۹ بر ۳۷ بخش‌پذیر است ، با توجه به روابط بالا نتیجه می‌شود که اگر از میان x ، y و z ، یکی بر ۳۷ بخش‌پذیر باشد ، دوتای دیگر هم‌چنین خواهند بود . بنابراین کافی است ، مضرب‌های ۳۷ را به جای سه رقم سمت راست عدد قرار دهیم :

۳۷۰۰۰ و ۳۷۰۳۷ و ۳۷۰۷۴ و ۳۷۱۱۱ و ... و ۳۷۹۹۹

و چون $27 \times 37 = 999$ ، لذا ۲۸ عدد متفاوت وجود دارند .

۲ . فرض کنید p و q جزء اعشاری عددهای x و y باشند؛ یعنی: $x = \lfloor x \rfloor + p$ و $y = \lfloor y \rfloor + q$. با جایگزینی در معادله‌ها داریم :

$$\begin{cases} \lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor + q = 43/8 \\ \lfloor y \rfloor + p + q = 18/4 \end{cases}$$

و از این دو معادله نتیجه می‌شود :

$$\begin{cases} q = 0/8 \\ p + q = 1/4 \end{cases}$$

$$\begin{cases}\lfloor x\rfloor + 2\lfloor y\rfloor = 43\\ \lfloor y\rfloor = 17\end{cases}$$

و درنتیجه: $p = 0/6$ و:

و از آن‌جا: $\lfloor x\rfloor = 9$ و: $y = 17/8$ ، $x = 9/6$ و:

$$10(x+y) = 274$$

۳. با توجه به قوانین بخش‌پذیری بر ۱۱ (به کتاب‌های تئوری اعداد مراجعه کنید)، می‌توان نوشت:

$$a+c \overset{11}{\equiv} b \text{ و } d+f \overset{11}{\equiv} e \text{ و } g+i \overset{11}{\equiv} h \text{ و } a+g \overset{11}{\equiv} d$$

$$b+h \overset{11}{\equiv} e \text{ و } c+i \overset{11}{\equiv} f \text{ و } a+i \overset{11}{\equiv} e$$

و از جمع چند مورد از روابط بالا خواهیم داشت:

$$(a+c)+(g+i)+(d+f)+(b+h)+e \overset{11}{\equiv} b+h+e+e+e \overset{11}{\equiv} 4e$$

و درنتیجه: $4e \overset{11}{\equiv} 1$ (زیرا سمت چپ، مجموع همه‌ی رقم‌های جدول و برابر است با: $1+2+3+\ldots+9 = 45 \overset{11}{\equiv} 1$) و بنابراین: $e = 3$ و درنتیجه از برابری‌های: $d+f \overset{11}{\equiv} b+h \overset{11}{\equiv} a+i \overset{11}{\equiv} 3$ خواهیم داشت:

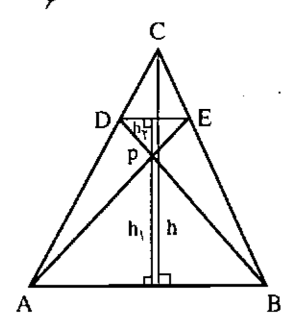
$$\{\{d,f\},\{b,h\},\{a,i\}\} = \{\{1,2\},\{5,9\},\{6,8\}\}$$

که از آن‌جا داریم: $\{c,g\} = \{4,7\}$

برای حداکثر کردن ceg، باید $c = 7$ و $g = 4$ باشد. این کار مقدور است و آرایش زیر شرایط مسأله را تأمین می‌کند. بنابراین حداکثر ceg، ۷۳۴ است.

۱	۸	۷
۵	۳	۹
۴	۶	۲

۴. چون مثلث‌های ABC و ABP قاعده‌ی مشترک AB را دارند، لذا اگر بتوانیم نسبت ارتفاع‌های آن‌ها (h و h_1) را به‌دست آوریم، می‌توانیم مساحت مثلث ABC را بیابیم. فرض کنید h_2 ارتفاع مثلث DEP باشد. چون $\Delta DEP \sim \Delta ABP$ (با نسبت مساحت‌های $\frac{25}{36}$)، لذا نسبت ارتفاع‌های آن‌ها برابر نسبت تشابه آن‌ها، یعنی $\frac{5}{6}$ است. علاوه بر آن، مثلث‌های DEC و ABC با نسبت تشابه $\frac{5}{6}$، متشابه هستند. درنتیجه:



$$h_1 + h_2 = \frac{1}{6}h \;,\; h_1 = \frac{6}{11}(h_1+h_2) = \frac{1}{11}h$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = 11S_{ABP} = 396$$

۵. با جمع و تفریق دو معادله‌ی مسئله نتیجه می‌گیریم:

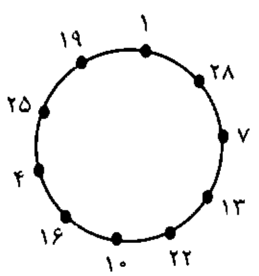
$$\begin{cases}x^3+y^3 = 16(x+y)\\ x^3-y^3 = 10(x-y)\end{cases} \overset{(x\neq\pm y)}{\Rightarrow} \begin{cases}x^2-xy+y^2 = 16\\ x^2+xy+y^2 = 10\end{cases}$$

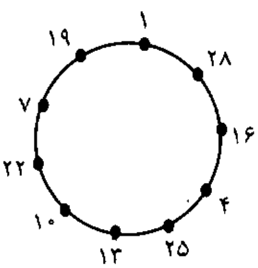
$$\Rightarrow x^2+y^2 = 13 \;,\; xy = -3$$

$$(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2+(2xy)^2 \Rightarrow 169 = (x^2-y^2)^2+36$$

$$\Rightarrow (x^2-y^2)^2 = 133$$

۶. با کمی دقت درمی‌یابیم که این عددها جملات یک تصاعد حسابی با قدر نسبت ۳ (و جمله‌ی اول ۱) هستند. مجموع همه‌ی این عددها به جز ۱، مساوی ۱۴۴ است. چون $48 = \frac{144}{3}$ ، پس اگر ۱ را جدا کنیم و بقیه‌ی عددها را در سه بخش سه‌تایی منظم کنیم، میانگین مقدار هر بخش مساوی ۴۸ خواهد بود و درنتیجه، جواب مسئله حداقل ۴۸ می‌شود و می‌توان با آرایش‌های زیر نشان داد که همین جواب مسئله است:





۷. با تفریق معادله‌ی اول از معادله‌ی دوم به تساوی زیر می‌رسیم:

$$(x+y+z)(z-y) = 5^3$$

و چون حاصل $x+y+z$ مثبت و از $z-y$ بزرگ‌تر است، نتیجه می‌شود که: ۵ یا $1 = z-y$ و یا $z = y+1$ یا $z = y+5$

در حالت اول، $x+y+z = 125$ و درنتیجه:

$$x = 125-y-z = 125-y-(y+1)$$

یعنی: $x = 124-2y$. با جایگزینی x و z در معادله‌ی اولیه خواهیم داشت: $3y^2-122y-21 = 0$ و با حل این معادله درمی‌یابیم که برای y جواب صحیح به‌دست نمی‌آید.

در حالت دوم $x+y+z = 25$ و درنتیجه:

$$x = 25-y-z = 25-y-(y+5) = 20-2y$$

با جایگزینی x و z در معادله‌ی اولیه به معادله‌ی

$3y^2 - 10y + 3 = 0$ می‌رسیم و از آن‌جا: $y = 3$ یا $\frac{1}{3}$، که با توجه به صحیح بودن y، $y = 3$ قابل قبول است و از آن‌جا: $z = 8$ و $x = 14$ و درنتیجه: $x^2 - yz = 14^2 - 24 = 172$

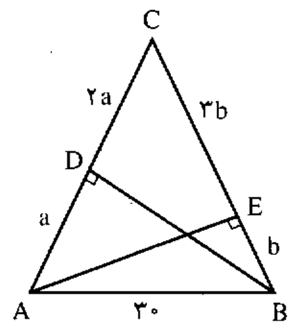
۸. چون AB قطر دایره است، $DB \perp AC$ و $AE \perp BC$. بنابراین با رسم شکل به معادله‌های زیر می‌رسیم:

$$CB^2 = (4b)^2 = (2a)^2 + DB^2 = (2a)^2 + 30^2 - a^2 = 3a^2 + 30^2$$

$$AC^2 = (3a)^2 = (3b)^2 + AE^2 = (3b)^2 + 30^2 - b^2 = 8b^2 + 30^2$$

و از معادلات بالا نتیجه می‌شود: $a = 6\sqrt{5}$ و $DB = 12\sqrt{5}$ و درنتیجه:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(3a)(DB) = 540$$



۹. می‌توان نوشت:

$$(abc) + (cba) = (100a + 10b + c) + (100c + 10b + a) = 101(a + c) + 20b$$

با فرض $a + c = s$، با توجه به این که a و c غیرصفر هستند و a+c هر مقدار از ۲ تا ۱۸ را می‌پذیرد، لذا برای s، ۱۷ مقدار متفاوت ممکن است. چون هیچ محدودیتی در مورد رقم b وجود ندارد، پس ده امکان متفاوت برای ما وجود دارد. با این محدودیت‌ها می‌بینیم که عبارت $101s + 20b$ حداکثر می‌تواند $17 \times 10 = 170$ مقدار متفاوت را بپذیرد. نشان می‌دهیم این ۱۷۰ ترکیب s و b نتایج متمایزی می‌دهند.

فرض کنید، s و s' عددهای صحیح مثبت متمایزی باشند، به طوری که: $2 \le s$ و $s' \le 18$. b و b' نیز عددهای صحیحی باشند، به طوری که: $0 \le b, b' \le 9$. اگر $101s + 20b = 101s' + 20b'$، آن‌گاه $101(s - s') = 20(b' - b)$. و از این معادله نتیجه می‌شود: $101 \mid b' - b$. چون b و b' رقم هستند و ۱۰۱ عددی اول است، لذا: $|b' - b| \le 9$. و این ممکن نیست مگر این که $b' - b = 0$ باشد. درنتیجه $b = b'$ و از آن‌جا $s = s'$. بنابراین ۱۷۰ عدد صحیح مثبت با خاصیت «جمع وارون» وجود دارد.

تفریح اندیشه

حسین نامی ساعی

کارگران خاک بردار

مسئله: تعدادی کارگر، خاک‌برداری جوی آبی را به عهده گرفتند. اگر همه‌ی کارگران با هم شروع به کار می‌کردند، جوی آب در ۲۴ ساعت کنده می‌شد. ولی ابتدا فقط یک نفر شروع به کار کرد و پس از مدتی، دومی به او ملحق شد. سپس بعد از همین مدت سومی و بعد از او پس از گذشت همان مدت، چهارمی و... تا آخری شروع به‌کار کردند. ضمناً معلوم شد که نفر اول ۱۱ برابر آخری کار کرده است. نفر آخر چند ساعت کار کرده است؟

حل: اگر نفر آخر x ساعت کار کرده باشد، اولی 11x ساعت کار کرده است. اگر عده‌ی کل کارگران را y فرض کنیم، تعداد کل ساعت‌های کار عبارت است از مجموع جملات یک تصاعد حسابی نزولی که جمله‌ی اول آن 11x و جمله‌ی آخرش x است؛ یعنی:

$$Sn = \frac{n}{2}(t_1 + t_n) = \frac{y(11x + x)}{2} = 6xy$$

از طرف دیگر می‌دانیم که اگر تمام y کارگر با هم شروع به کار کنند، کندن جوی آب را در ۲۴ ساعت تمام می‌کنند. یعنی برای انجام تمام کار 24y ساعت وقت لازم است. بنابراین:

$$6xy = 24y$$

عدد y نمی‌تواند مساوی صفر شود و بنابراین می‌توان طرفین معادله را به y ساده کرد. در این صورت خواهیم داشت:

$$6x = 24 \Rightarrow x = 4$$

بنابراین، آخرین کارگری که وارد کار شده، ۴ ساعت کار کرده است.

ما به مسئله جواب دادیم، ولی اگر علاقه‌مند باشیم که عده‌ی کارگران را بدانیم، موفق به تعیین آن نمی‌شویم. با وجودی که برای حل مسئله عده‌ی کارگران را y گرفتیم و این y در معادله هم وارد شد، ولی برای محاسبه‌ی آن، مفروضات مسئله کافی نیستند.

برای دانش‌آموزان سال سوم و پیش‌دانشگاهی

بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم

قسمت ۱

● محمدهاشم رستمی

معادله‌ی درجه‌ی سوم به صورت کلی زیر است.

$$(a\neq 0)\quad ax^3+bx^2+cx+d=0$$

اگر ضریب‌های b، c و d نیز همگی مخالف صفر باشند، معادله‌ی درجه‌ی سوم را کامل می‌نامند؛ مانند معادله‌های زیر:

$$2x^3-5x^2+3x-2=0$$

$$x^3+2x^2+5x+6=0$$

اما اگر یکی از ضریب‌های b یا c یا d مساوی صفر باشد، معادله‌ی درجه‌ی سوم را ناقص می‌نامند؛ مانند معادله‌های زیر:

الف) $d=0$، $ax^3+bx^2+cx=0$

ب) $c=0$، $ax^3+bx^2+d=0$

پ) $b=0$، $ax^3+cx+d=0$

ت) $b=d=0$، $ax^3+cx=0$

ث) $c=d=0$، $ax^3+bx^2=0$

ج) $b=c=d=0$، $ax^3=0$

حل این معادله‌ها در حالت‌های (الف)، (ت)، (ث) و (ج) ساده است، زیرا با فاکتورگیری از عامل مشترک در حالت‌های (الف)، (ت) و (ث)، معادله‌ی درجه‌ی ۳ به حاصل ضرب یک معادله‌ی درجه‌ی اول و یک معادله‌ی درجه‌ی دوم تبدیل می‌شود که با حل آن‌ها، جواب‌های معادله به‌دست می‌آید و در حالت (ج)، نیز جواب معادله $x=0$ است.

اما در حالت‌های (ب) و (پ)، حل معادله‌ی درجه‌ی سوم ناقص، مانند حالت‌های دیگر نیست و ما اینک در جست‌وجوی راه‌حل آن‌ها هستیم. یعنی، مسئله‌ای که ما با آن سروکار داریم، حل معادله‌ی درجه‌ی سوم کامل و یا حل معادله‌ی درجه‌ی سوم ناقص به صورت‌های زیر است:

$ax^3+bx^2+d=0$ یا $ax^3+cx+d=0$

با توجه به $a\neq 0$، با تقسیم کردن دو طرف معادله‌های (ب) و (پ) بر a داریم:

(ب′) $$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{d}{a}=0$$

(پ′) $$x^3+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$$

معادله‌ی (ب′) با فرض $A=\frac{b}{a}$ و $B=\frac{d}{a}$ به صورت $x^3+Ax^2+B=0$، و معادله‌ی (پ′) با فرض $p=\frac{c}{a}$ و $q=\frac{d}{a}$ به صورت $x^3+px+q=0$ درمی‌آید. نکته‌ی جالب توجه آن است که با تبدیل $x=\frac{1}{X}$ در معادله‌ی (ب′)، این معادله به صورت معادله‌ی (پ′) درمی‌آید. توجه کنید:

$$x=\frac{1}{X}, x^3+Ax^2+B=0$$
$$\Rightarrow(\frac{1}{X})^3+A(\frac{1}{X})^2+B=0$$
$$\Rightarrow\frac{1}{X^3}+\frac{A}{X^2}+\frac{B}{1}=0\Rightarrow\frac{1+AX+BX^3}{X^3}=0\Rightarrow$$
$$BX^3+AX+1=0\Rightarrow X^3+\frac{A}{B}X+\frac{1}{B}=0$$
$$\Rightarrow X^3+PX+q=0$$

– اما نکته‌ی جالب‌تر آن است که با تبدیل $x=X-\frac{b}{3a}$، معادله‌ی درجه‌ی سوم کامل $ax^3+bx^2+cx+d=0$ نیز به معادله‌ی درجه‌ی سوم ناقص $X^3+PX+q=0$ تبدیل می‌شود. (چرا؟) توجه کنید:

$x=X-\frac{b}{3a}$ و $ax^3+bx+cx+d=0$

$$\Rightarrow a(X-\frac{b}{3a})^3+b(X-\frac{b}{3a})^2+c(X-\frac{b}{3a})+d=0$$
$$\Rightarrow a(X^3-3X^2\times\frac{b}{3a}+3(\frac{b}{3a})^2X-\frac{b^3}{27a^3})$$
$$+b(X^2+\frac{b^2}{9a^2}-\frac{2b}{3a}X)+cX-\frac{bc}{3a}+d=0$$
$$\Rightarrow aX^3-bX^2+\frac{b^2}{3a}X-\frac{b^3}{27a^2}+bX^2+\frac{b^3}{9a^2}$$
$$-\frac{2b^2}{3a}X+cX-\frac{bc}{3a}+d=0$$
$$\Rightarrow aX^3+(\frac{-b^2}{3a}+c)X+(\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{bc}{3a}+d)=0$$
$$\Rightarrow X^3+(-\frac{b^2}{3a^2}+\frac{c}{a})X+(\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a})=0 \quad (*)$$

با فرض $p=\frac{-b^2}{3a^2}+\frac{c}{a}$ و $q=\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a}$ خواهیم داشت:

$$X^3+pX+q=0$$

مثال. معادله‌های درجه‌ی سوم زیر را به صورت معادله‌ی درجه‌ی سوم $X^3+PX+q=0$ درآورید.

الف) $2x^3-12x^2+5x-7=0$

ب) $3x^3+9x^2+5=0$

حل: داریم:

الف. در این معادله، $a=2$، $b=-12$، $c=5$ و $d=-7$ است و داریم:

$$x=X-\frac{b}{3a}\Rightarrow x=X-\frac{-12}{3(2)}=X+2\Rightarrow x=X+2$$

پس در معادله‌ی داده شده x را به $X+2$ تبدیل می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$2(X+2)^3-12(X+2)^2+5(X+2)-7=0$$
$$\Rightarrow 2(X^3+6X^2+12X+8)-12(X^2+4X+4)$$
$$+5X+10-7=0$$
$$\Rightarrow 2X^3+12X^2+24X+16-12X^2-48X$$
$$-48+5X+10-7=0$$
$$\Rightarrow 2X^3-19X-29=0$$

طرفین این معادله را بر ضریب X^3 یعنی بر ۲ تقسیم می‌کنیم. داریم:

$$X^3-\frac{19}{2}X-\frac{29}{2}=0$$

و این معادله به صورت $X^3+pX+q=0$ است $(p=-\frac{19}{2} \quad q=\frac{-29}{2})$.

نکته: می‌توانستیم در دستور (*) به جای a، b، c و d مقدار قرار دهیم تا معادله‌ی بالا به دست آید. اما حفظ کردن دستور (*) مشکل است، پس ترجیح دارد، به روش مستقیم عمل کنیم.

ب) در معادله‌ی درجه‌ی سوم $3x^3+9x^2+5=0$، داریم:

$a=3$ و $b=9$ و $c=0$ و $d=5$

$$x=X-\frac{b}{3a}\Rightarrow x=X-\frac{9}{9}=X-1\Rightarrow x=X-1$$

$$x=X-1\xrightarrow{\text{در معادله ی داده شده}}3(X-1)^3+9(X-1)^2+5=0$$
$$\Rightarrow 3(X^3-3X^2+3X-1)+9(X^2-2X+1)+5=0$$

$$\Rightarrow 3X^3 - 9X^2 + 9X - 3 + 9X^2 - 18X + 9 + 5 = 0$$

$$3X^3 - 9X + 11 = 0$$

دو طرف این معادله را بر ضریب X^3 یعنی بر ۳ تقسیم می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$X^3 - 3X + \frac{11}{3} = 0$$

و این معادله به صورت $X^3 + PX + q = 0$ است $(q = \frac{11}{3}\ ,\ P = -3)$.

نکته‌ی۱. برای تبدیل معادله‌ی $3x^3 + 9x^2 + 5 = 0$ به معادله‌ی درجه‌ی سوم به‌صورت $X^3 + PX + q = 0$، می‌توانیم از تغییر متغیر $x = \frac{1}{X}$ استفاده کنیم. توجه کنید:

$$3x^3 + 9x^2 + 5 = 0, x = \frac{1}{X} \Rightarrow 3(\frac{1}{X})^3 + 9(\frac{1}{X})^2 + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{X^3} + \frac{9}{X^2} + 5 = 0 \Rightarrow \frac{3 + 9X + 5X^3}{X^3} = 0$$

$$\Rightarrow 3 + 9X + 5X^3 = 0 \Rightarrow 5X^3 + 9X + 3 = 0$$

$$\Rightarrow X^3 + \frac{9}{5}X + \frac{3}{5} = 0$$

و این معادله به صورت $X^3 + pX + q = 0$ است.

نکته‌ی۲. چون در روش اول $x = X - 1$ و در روش دوم $x = \frac{1}{X}$ اختیار شده است، پس معادله‌های ناقص به‌دست آمده در دو روش بالا، از نظر ضرایب عددی، متفاوت خواهند بود؛ یعنی نباید این تصور را داشته باشیم که در هر دو راه‌حل، به یک معادله‌ی درجه‌ی سوم ناقص به صورت $X^3 + pX + q = 0$ و با ضرایب یکسان می‌رسیم.

نکته‌ی۳. به طور کلی، معادله‌ی درجه‌ی سوم $ax^3 + bx^2 + d = 0$، با تغییر متغیر $x = \frac{1}{X}$، به معادله‌ی درجه‌ی سوم به صورت $X^3 + pX + q = 0$ تبدیل می‌شود.

نکته‌ی مهم۱. با توجه به مطالب بیان شده، هر معادله‌ی درجه‌ی سوم کامل را می‌توان با استفاده از تغییر متغیر، به معادله‌ی درجه‌ی سوم به صورت $X^3 + pX + q = 0$ تبدیل کرد. بنابراین، برای بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم کامل $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ کافی است در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم ناقص $X^3 + pX + q = 0$ بحث کنیم.

برای این کار، معادله‌ی بالا را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$X^3 + pX + q = 0 \Rightarrow X^3 + pX = -q$$

اما این معادله، معادله‌ی تقاطع منحنی تابع $y = X^3 + pX$ و خط $y = -q$ است.

$$\begin{cases} y = X^3 + pX \\ y = -q \end{cases}$$

بنابراین، برای بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم $X^3 + pX + q = 0$ کافی است، طول‌های نقطه‌های برخورد منحنی $y = X^3 + pX$ و خط $y = -q$ را تعیین کنیم. برای این کار، این منحنی و خط را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم می‌کنیم و به ازای مقدارهای متفاوت p و q، تعداد نقطه‌های برخورد آن‌ها و اندازه‌ی جبری طول این نقطه‌های برخورد را تعیین می‌کنیم.

نکته‌ی مهم۲. هرگاه معادله‌ی درجه‌ی سوم داده شده، خود به صورت $x^3 + px + q = 0$ باشد، برای بحث در وجود و علامت ریشه‌های آن نیازی به تغییر متغیر نیست و این معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^3 + px = -q$$

این معادله، معادله‌ی تقاطع منحنی تابع $y = x^3 + px$ و خط راست $y = -q$ است. بنابراین، برای بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم $x^3 + px + q = 0$، منحنی تابع $y = x^3 + px$ و خط $y = -q$ را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم می‌کنیم و تعداد نقطه‌های برخورد آن‌ها و همچنین اندازه‌ی جبری طول نقطه‌های برخوردشان را به ازای مقدارهای متفاوت p و q مشخص می‌سازیم.

بدیهی است که به تعداد نقطه‌های برخورد منحنی تابع $y = x^3 + px$ و خط $y = -q$، معادله‌ی درجه‌ی سوم $x^3 + px + q = 0$ دارای جواب است و علامت ریشه‌ها را نیز با توجه به محل نقطه‌های تقاطع می‌توان تعیین کرد. برای رسم نمودار تابع $y = x^3 + px$، مشتق این تابع را محاسبه می‌کنیم و مساوی صفر قرار می‌دهیم. داریم:

$$y = x^3 + px \Rightarrow y' = 3x^2 + p\ ,\ y' = 0 \Rightarrow 3x^2 + p = 0$$

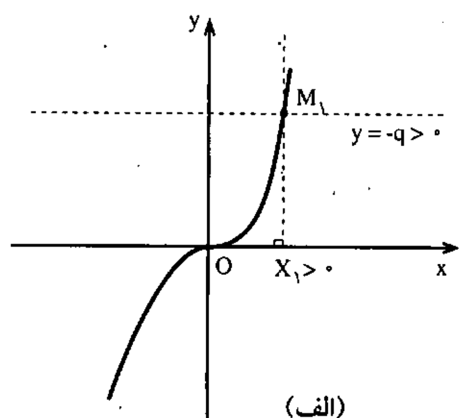
دو حالت وجود دارد:

حالت اول: $p > 0$ است. در این صورت، مشتق ریشه ندارد، زیرا:

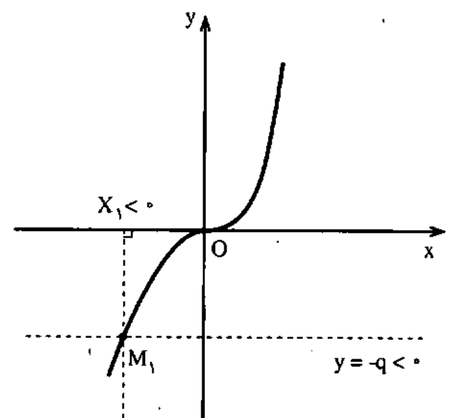
$$3x^2 + p = 0 \Rightarrow 3x^2 = -p \Rightarrow x^2 = \frac{-p}{3} < 0$$

بنابراین، جهت تغییرات تابع در این حالت ثابت است که چون ضریب x^2 در مشتق مثبت است، مشتق تابع همواره مثبت و نمایش تغییرات آن همواره صعودی است. جدول تغییرات این تابع در این حالت به صورت زیر و نمودار آن به صورت شکل زیر است.

x	$-\infty$				$+\infty$
y'		+	+	+	
y	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$



(الف)



(ب)

خط $y = -q$ ، نمودار تغییرات تابع $y = x^3 + px$ را تنها در یک نقطه قطع می‌کند که:

۱. اگر $-q > 0$ ، یعنی $q < 0$ باشد، طول نقطه‌ی تلاقی مثبت است. لذا معادله‌ی $x^3 + px + q = 0$ تنها یک ریشه‌ی مثبت دارد (شکل الف).

۲. اگر $-q < 0$ ، یعنی $q > 0$ باشد، طول نقطه‌ی تلاقی منفی است. لذا معادله‌ی $x^3 + px + q = 0$ ، تنها یک ریشه‌ی منفی دارد (شکل ب).

پس در حالت اول، یعنی وقتی $p > 0$ است، معادله‌ی درجه‌ی سوم $x^3 + px + q = 0$ تنها یک ریشه دارد که علامت آن مخالف علامت q است و اندازه‌ی این ریشه از دستور زیر که به دستور «کاردان» معروف است به‌دست می‌آید:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

حالت دوم: $p < 0$ است. در این حالت مشتق دو ریشه دارد:

$$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 + p = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{-p}{3} > 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$$

چون دو ریشه متمایزند، پس تابع دو نقطه‌ی ماکزیمم و می‌نیمم دارد. برای تعیین اندازه‌ی ماکزیمم یا می‌نیمم تابع باید ریشه‌های مشتق، یعنی $x = \sqrt{\frac{-p}{3}}$ و $x = -\sqrt{\frac{-p}{3}}$ را در تابع قرار دهیم. داریم:

$$x_1 = -\sqrt{\frac{-p}{3}} \xrightarrow{\text{در تابع}} y_1 = \left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)^3 + p\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)$$

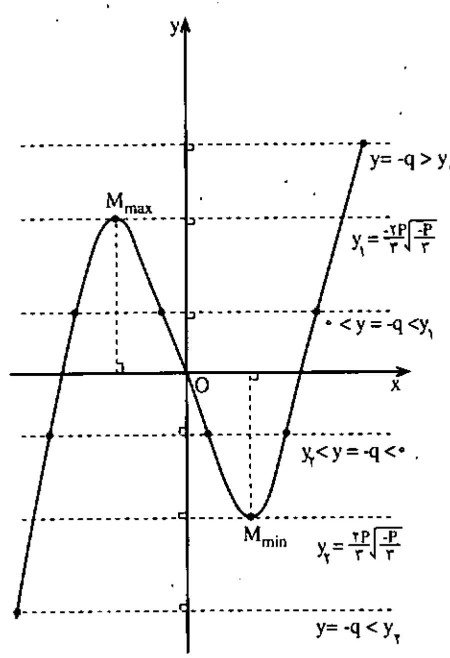
$$\Rightarrow y_1 = \frac{+p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}} - p\sqrt{\frac{-p}{3}} = \frac{-2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$$

$$x_2 = +\sqrt{\frac{-p}{3}} \xrightarrow{\text{در تابع}} y_2 = \left(+\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)^3 + p\left(+\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{-p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}} + p\sqrt{\frac{-p}{3}} = +\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$$

جدول تغییرات تابع در این حالت به صورت زیر است :

x	$-\infty$		$-\sqrt{-\frac{p}{3}}$		$\sqrt{-\frac{p}{3}}$		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	$\frac{-2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$	↘	$\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$	↗	$+\infty$
			max		min		



نمودار تغییرات تابع در این حالت، به صورت شکل بالا است. اکنون اگر خط $y=-q$ را در همین دستگاه محورهای مختصات رسم کنیم، وقتی q در بازه‌ی $(-\infty,+\infty)$ تغییر کند، حالت‌های زیر را خواهیم داشت :

۱. اگر $\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}} < y=-q < \frac{-2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$ ، یا $q^2 < \frac{-4p^3}{27}$ یا $4p^3+27q^2<0$ باشد، خط $y=-q$ ، نمودار تغییرات تابع $y=x^3+px$ را در سه نقطه قطع می‌کند؛ یعنی معادله‌ی $x^3+px+q=0$ سه ریشه دارد. در این صورت، اگر $-q<0$ ، یعنی $q>0$ باشد، معادله دارای یک ریشه‌ی منفی و دو ریشه‌ی مثبت است. و اگر $-q>0$ ، یعنی $q<0$ باشد، یک ریشه‌ی مثبت و دو ریشه‌ی منفی خواهد داشت.

۲. اگر خط $y=-q$ بر نمودار تغییرات تابع مماس باشد، یعنی $-q=\frac{-2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$ ، و یا $-q=\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$ ، یعنی $q^2=\frac{-4p^3}{27}$ و یا $4p^3+27q^2=0$ باشد، معادله‌ی $x^3+px+q=0$ یک ریشه‌ی ساده و یک ریشه‌ی مضاعف دارد که:

● اگر $-q<0$ ، یعنی $q>0$ باشد، ریشه‌ی ساده منفی و ریشه‌ی مضاعف مثبت است.

● و اگر $-q>0$ ، یعنی $q<0$ باشد، ریشه‌ی ساده مثبت و ریشه‌ی مضاعف منفی است.

در این حالت، ریشه‌ی ساده و ریشه‌ی مضاعف از دستورهای زیر به دست می‌آیند :

$$\text{ریشه‌ی ساده} = x_1 = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$$

$$\text{ریشه‌ی مضاعف} = x_2 = x_3 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$$

۳. اگر q- خارج بازه‌ی $[y_2, y_1]$ ، یعنی $-q>y_1=\frac{-2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$ و یا $-q<y_2=\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$ و یا $q^2>\frac{-4p^3}{27}$ و یا $4p^3+27q^2>0$ باشد، خط $y=-q$ نمودار تغییرات تابع را تنها در یک نقطه قطع می‌کند که :

● اگر $-q<0$ ، یعنی $q>0$ باشد، طول نقطه‌ی تقاطع منفی است.

● اگر $-q>0$ ، یعنی $q<0$ باشد، طول نقطه‌ی تقاطع مثبت است.

پس در این حالت معادله تنها یک ریشه دارد که اگر $q>0$ باشد، ریشه‌ی معادله منفی است و اگر $q<0$ باشد، ریشه‌ی معادله مثبت است.

نکته: با توجه به این‌که وقتی $p>0$ است، $4p^3+27q^2>0$ است، می‌توان گفت که اگر در معادله‌ی $x^3+px+q=0$ ، $4p^3+27q^2>0$ باشد، معادله تنها یک ریشه دارد که علامت آن مخالف علامت q است.

ادامه دارد...

درخت تو گر بار دانش بگیرد
به زیر آوری چرخ نیلوفری را

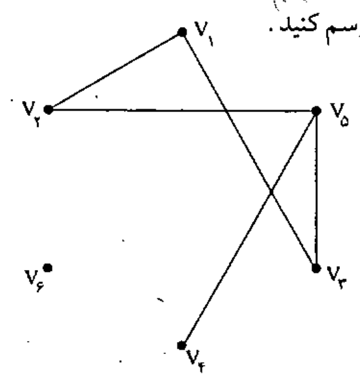
درخت چیست؟

برای دانش‌آموزان دوره‌ی پیش‌دانشگاهی

● حمیدرضا امیری

هر مجموعه‌ی n عضوی مانند V، و هر مجموعه شامل تعدادی یا هیچ یا همه‌ی زیرمجموعه‌های دوعضوی از V مانند E، گرافی چون $G=(V,E)$ را تعریف می‌کنند که این نمودار یا گراف، شامل تعدادی نقطه یا رأس، به تعداد اعضای V و تعدادی خط (یال) بین رئوس، به تعداد اعضای E می‌باشد؛ به طوری که بین دو رأس V_i و V_j یال رسم می‌شود، هرگاه $\{V_i,V_j\}\in E$، که در این حالت دو رأس مذکور را **رأس‌های مجاور** می‌نامند (می‌توان برای راحتی به جای $\{v_i,v_j\}$ نوشت: V_iV_j).

مثال: اگر $V=\{V_1,V_2,V_3,V_4,V_5,V_6\}$ و $E=\{V_1V_2,V_1V_3,V_2V_5,V_3V_5,V_4V_5\}$ در این صورت گراف $G=(V,E)$ را رسم کنید.



اصطلاحات و قراردادهای مقدماتی

در هر گراف، تعداد رأس‌ها را مرتبه‌ی گراف و تعداد یال‌ها را اندازه‌ی گراف می‌نامند و به ترتیب با p و q نمایش می‌دهند. هم‌چنین، تعداد یال‌هایی که از رأس a عبور می‌کنند، درجه‌ی آن رأس نامیده و با (dega) نشان داده می‌شود. اگر درجه‌ی یک رأس عددی زوج باشد، آن رأس را **رأس زوج** و اگر فرد باشد، آن را **رأس فرد** می‌نامیم. چنان‌چه از یک رأس یالی عبور نکند، آن رأس را **ایزوله** می‌نامند. بزرگ‌ترین درجه‌ی یک رأس در یک گراف، ماکزیمم درجه‌ی گراف، و کوچک‌ترین درجه، می‌نیمم درجه‌ی گراف نامیده می‌شود. این دو عدد را به ترتیب با Δ و δ نشان می‌دهند.

در مثال قبل، گرافی رسم شده از مرتبه‌ی ۶ و با اندازه‌ی ۴ (۶ رأس و ۴ یال) که رأس V_6 ایزوله است و داریم:

$$\deg V_6=0,\ \deg V_1=2,\ \deg V_2=2,\ \deg V_3=2$$
$$\deg V_4=1,\ \deg V_5=3$$

رأس‌های V_6 و V_1 و V_2 و V_3 همگی زوج، و رأس‌های V_4 و V_5 فرد هستند. در این گراف، همواره $\Delta=3$ و $\delta=0$ (ماکزیمم و می‌نیمم درجه).

حال که یادآوری اجمالی روی مقدمات و تعاریف در

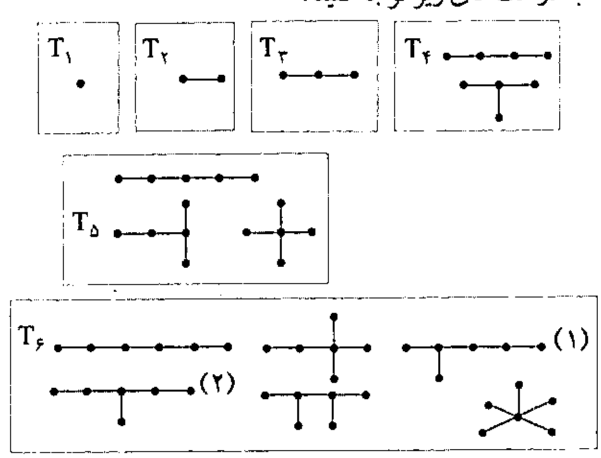
گراف‌های ساده انجام شد، آماده‌ایم تا به سراغ دسته‌ی خاصی از گراف‌ها به نام «درخت» برویم. ولی قبل از آن توصیه می‌کنم، مفاهیمی چون مسیر، دور، هم‌بندی گراف‌ها، گراف کامل، گراف‌های r ـ منتظم و گراف تهی را یک بار مطالعه کنید، تا آماده باشیم برای کشیدن درخت!

تعریف درخت

هر گراف هم‌بند که دور نداشته باشد، «درخت» نامیده می‌شود. پس در واقع درخت‌ها دسته‌ی خاصی از گراف‌های هم‌بند هستند که ویژگی‌های خاص خودشان را دارند. مهم‌ترین ویژگی آن‌ها، فاقد دور بودن است. از تعریف درخت چنین برمی‌آید که اگر گرافی هم‌بند نباشد یا دور داشته باشد، درخت نیست.

گراف‌های زیر درخت نیستند:

درخت از مرتبه‌ی P را با نماد T_p نشان می‌دهیم که درخت‌های T_1 و T_2 و T_3 درخت‌هایی منحصربه‌فرد هستند و از T_3 به بالا، یعنی T_4 و T_5 و...، منحصربه‌فرد نیستند. به درخت‌های زیر توجه کنید:



توجه دارید که در T_6، درخت‌های شماره‌ی (۱) و (۲) با هم فرق اساسی دارند. اگرچه تعداد رأس‌های درجه‌ی ۳، ۲ و ۱ در آن‌ها برابر است، ولی رأس درجه‌ی ۳، در (۱) با دو رأس درجه‌ی ۱ و یک رأس درجه‌ی ۲ مجاور است و در (۲) با دو رأس درجه‌ی ۲ و یک رأس درجه‌ی ۱ مجاورت دارد.

اگر اطلاعاتی راجع به هیدروکربن‌ها در شیمی آلی داشته باشید، شباهت‌های بسیاری را بین ساختمان مولکولی آن‌ها و درخت‌ها مشاهده می‌کنید. در واقع، اگر هر هیدروژن و کربن را در حکم یک رأس و پیوند مولکولی بین آن‌ها را یال تصور کنیم، هر هیدروکربن یک درخت است که در این صورت، از تمام قضایا و نکته‌هایی که در گراف‌ها بیان و اثبات می‌شود، می‌توان در این بخش از علم شیمی استفاده کرد.

نکته‌ی بسیار مهمی که از تعریف درخت می‌توان دریافت این است که چون درخت، گرافی هم‌بند است که دور ندارد، پس می‌توان گفت در بین گراف‌های هم‌بند از مرتبه‌ی P، درخت T_p کمترین تعداد یال را دارد و البته K_p (گراف کامل) دارای بیشترین یال ممکن است. در واقع، اگر حتی یک یال به یک درخت اضافه شود (بدون اضافه کردن رأس)، در آن دور ایجاد می‌شود و دیگر درخت نیست. و نیز اگر یک یال از هر جای آن حذف کنیم، گرافی ناهم‌بند پدید می‌آید که باز هم درخت نیست. همین خاصیت درخت‌ها ما را به یک شرط لازم برای هم‌بندی می‌رساند. بدین صورت که: «در هر گراف از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q، اگر $q < p-1$ آن‌گاه این گراف همواره ناهم‌بند است.»

به بیان دیگر، اگر گراف G هم‌بند باشد، در این صورت حداقل مقدار برای تعداد یال‌های آن $q = p-1$ است. (رابطه‌ی $p = q+1$ یا $q = p-1$ بین مرتبه و اندازه، در تمام درخت‌ها برقرار است که به صورت قضیه‌ای در درخت‌ها بیان و اثبات می‌شود.) بین درخت‌های از مرتبه‌ی $p \ge 3$، همواره برای هر $p \ge 3$ یک درخت وجود دارد که به صورت یک خط مستقیم است یا می‌توان آن را به یک خط مستقیم تبدیل کرد. برای مثال، برای $p = 5$ و $p = 4$ در شکل‌های قبل ملاحظه کردید که درخت‌های زیر:

ویژگی خط مستقیم را دارند که ما از این به بعد به چنین درخت‌هایی، «درخت ساده» می‌گوییم.

واضح است که در هر درخت ساده از مرتبه‌ی p، همواره $\Delta = 2$ (ماکزیمم درجه‌ی درخت ۲ است) و چنین درخت‌هایی دارای ۲ رأس از درجه‌ی ۱ و $(p-2)$ رأس از درجه ۲ هستند. و برعکس اگر در یک درخت از مرتبه‌ی p داشته باشیم: $\Delta = 2$، چنین درختی حتماً درخت ساده خواهد بود! بنابراین می‌توان گفت: «شرط لازم و کافی برای آن‌که درخت T از مرتبه‌ی p درختی ساده باشد، آن است که: $\Delta = 2$.»

حال به بیان و در مواردی اثبات قضیه‌های مقدماتی در درخت‌ها می‌پردازیم و سپس کاربردهای این قضایا را در حل آزمون‌ها و آزمون‌ها با هم بررسی می‌کنیم.

قضیه‌ی ۱ : در هر درخت از مرتبه‌ی p، همواره بین هر دو رأس دقیقاً یک مسیر وجود دارد (اثبات این قضیه در کتاب درسی ریاضیات گسسته وجود دارد).

نتیجه از قضیه‌ی ۱ : تعداد کل مسیرهای متمایز در هر درخت از مرتبه‌ی p، برابر است با: $\binom{p}{2}$. و می‌دانیم:

$$\binom{p}{2}=\frac{p(p-1)}{2}$$

اثبات : مطابق قضیه‌ی ۱، بین هر دو رأس که بتوان از میان p رأس انتخاب کرد، فقط و فقط یک مسیر منحصربه‌فرد قابل تعریف است. لذا تعداد مسیرها برابر است با تعداد انتخاب‌های ۲ رأس از بین p رأس؛ یعنی: $\binom{p}{2}$.

آزمون : در درخت T از مرتبه‌ی p، ۳۶ مسیر متمایز بین رأس‌ها قابل تعریف است. در این درخت در حالت ساده چند رأس درجه‌ی ۲ وجود دارد؟

الف) ۹ ب) ۷ ج) ۶ د) ۸

حل : با توجه به نتیجه‌ی قبل داریم:

$$\binom{p}{2}=\frac{p(p-1)}{2}=36\Rightarrow p(p-1)=72\Rightarrow p=9$$

(حاصل ضرب دو عدد صحیح و متوالی برابر با ۷۲ است؛ یعنی: ۹×۸.)

در درخت ساده‌ی T_9، تعداد رأس‌های درجه‌ی ۲ برابر است با: ۷=۲-۹. پس گزینه‌ی ب صحیح است.

قضیه‌ی ۲ : اگر در یک درخت داشته باشیم: $\Delta=k$، آن‌گاه این درخت حداقل k رأس از درجه‌ی ۱ دارد.

اثبات : می‌دانیم در هر درخت، هر یال که از یک رأس عبور کند، در نهایت حداقل به یک رأس درجه‌ی ۱ ختم خواهد شد. زیرا دو سر یال‌های از درجه‌ی ۱ در درخت‌ها نمی‌توانند به هم وصل باشند (چون دور ایجاد می‌شود که با تعریف درخت تناقض دارد). لذا اگر $\Delta=k$ فرض شود، پس حداقل یک رأس در گراف وجود دارد که درجه‌ی آن k است و بنابراین k یال از آن رأس عبور می‌کند. چون هر یال حداقل به یک رأس درجه‌ی ۱ ختم می‌شود. پس حداقل k رأس از درجه‌ی ۱ در چنین درختی وجود خواهد داشت.

قضیه‌ی ۳ : در هر درخت از مرتبه‌ی $p\ge 2$، حداقل دو رأس از درجه‌ی ۱ وجود دارد.

اثبات : حکم قضیه برای درخت از مرتبه‌ی ۲ برقرار است؛ زیرا T_2، دقیقاً دو رأس از درجه‌ی ۱ دارد. حال برای $p\ge 3$ حکم را در دو حالت ثابت می‌کنیم:

I) اگر $\Delta=2$، طبق قضایای قبل درخت ساده است و دقیقاً دو رأس از درجه‌ی ۱ دارد.

II) اگر $\Delta\ge 3$ طبق قضیه‌ی ۲، درخت حداقل سه رأس از درجه‌ی ۱ و درنتیجه حداقل دو رأس از درجه‌ی ۱ خواهد داشت.

قضیه‌ی ۴ : در هر درخت از مرتبه‌ی p و با اندازه‌ی q داریم: $p=q+1$. (اثبات این قضیه در کتاب درسی ریاضیات گسسته وجود دارد.)

نتیجه‌ی مهم : در هر درخت، همواره مجموع مرتبه و اندازه‌ی عددی فرد است.

اثبات) روش اول : چون $p=q+1$، پس: $p-q=1$. بنابراین p و q می‌باید دو عدد نامنفی و متوالی باشند. و می‌دانیم، از هر دو عدد صحیح و متوالی، همواره یکی زوج و دیگری فرد است و مجموع یک عدد زوج با یک عدد فرد، همواره فرد است.

روش دوم:

$$p=q+1\Rightarrow p+q=q+1+q\Rightarrow p+q=\underbrace{2q+1}_{\text{فرد}}$$

قضیه‌ی ۵ : در هر درخت از مرتبه‌ی p و با اندازه‌ی q، همواره تعداد رأس‌های درجه‌ی ۱ از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{تعداد رأس‌های درجه‌ی ۱}=2+\sum_{d_i\ge 3}(d_i-2)$$

اثبات : فرض کنیم، x تعداد رأس‌های درجه‌ی ۱ در گراف T از مرتبه‌ی p و با اندازه‌ی q باشد. در این صورت با توجه به قضیه‌ی اصلی در گراف‌ها (مجموع درجات رئوس دو برابر تعداد یال‌هاست) داریم:

$$\sum_{i=1}^{p}d_i=2q\xrightarrow{q=p-1}\sum_{i=1}^{p}d_i=2p-2\Rightarrow\sum_{i=1}^{p}d_i-2p=-2$$

$$\xrightarrow{\sum_{i=1}^{p}2=2p}\sum_{i=1}^{p}d_i-\sum_{i=1}^{p}2=-2\Rightarrow\sum_{i=1}^{p}(d_i-2)=-2$$

$$\Rightarrow\sum_{d_i=1}(d_i-2)+\sum_{d_i=2}(d_i-2)+\sum_{d_i\ge 3}(d_i-2)=-2$$

$$\Rightarrow -x+0+\sum_{d_i\ge 3}(d_i-2)=-2\Rightarrow x=\sum_{d_i\ge 3}(d_i-2)+2$$

آزمون : اگر $S: 4,4,x,3,y,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1$ دنباله‌ی

درجه‌ی رئوس یک درخت باشد، در این صورت (x^2+y^2) کدام است؟

الف) ۱۷ ب) ۱۳ ج) ۲۵ د) ۱۶

حل: با توجه به رابطه‌ی $p=q+1$ در هر درخت، چون در این درخت تعداد رئوس $p=14$ است، پس $q=13$ و $2q=26$. در صورتی که مجموع درجات رئوس یا مجموع جملات دنباله عبارت است از:

$$5+4+x+3+y+2+1+1+\dots+1=26 \Rightarrow x+y=5$$

و با توجه به نزولی بودن دنباله و این که تعداد رأس‌های فرد باید زوج باشد، یکی از دو عدد x و y باید فرد باشد. لذا تنها حالت ممکن $x=3$ و $y=2$ حاصل می‌شود که در این صورت $x^2+y^2=13$ پس گزینه‌ی ب صحیح است.

آزمون: در یک درخت، چهار رأس درجه‌ی ۳ و دو رأس درجه‌ی ۴ و سه رأس درجه‌ی ۵ موجود است و $\Delta=5$، این گراف چند رأس از درجه‌ی ۱ دارد؟

الف) ۱۴ ب) ۱۳ ج) ۱۵ د) ۱۶

حل: گزینه‌ی د صحیح است، زیرا:

$$\text{تعداد رأس‌های درجه‌ی ۱} = 2+\sum_{d_i\geq 3}(d_i-2)$$
$$=2+(3-2)+(3-2)+(3-2)+(3-2)+(4-2)+(4-2)$$
$$+(5-2)+(5-2)+(5-2)=2+4+4+6=16$$

آزمون: در یک درخت از مرتبه‌ی p و با اندازه‌ی q داریم: $2q-p=6$. در این درخت حاصل $(p+q)$ کدام است؟

الف) ۱۳ ب) ۱۵ ج) ۱۶ د) ۱۸

حل: گزینه‌ی ب صحیح است؛ زیرا:

$$\begin{cases}2q-p=6\\ p-q=1\end{cases} \qquad q=7\Rightarrow p=8\Rightarrow p+q=15$$

(توجه دارید که گزینه‌های ج و د اعداد زوج هستند و مجموع مرتبه و اندازه هیچ‌گاه نمی‌تواند زوج باشد.)

آزمون: اگر در درخت T، همه‌ی رأس‌ها فرد باشند، کدام گزینه درست است؟

الف) اندازه‌ی T فرد است.

ب) اندازه‌ی T زوج است.

ج) T حداقل سه رأس درجه‌ی ۱ دارد.

د) درخت T ساده است.

حل: گزینه‌ی الف صحیح است، زیرا تعداد رأس‌های فرد باید زوج باشد. طبق فرض، همه‌ی رأس‌ها فرد هستند و اگر p تعداد آن‌ها باشد، باید p زوج باشد و چون p و q متوالی هستند، پس q فرد است.

آزمون: میانگین درجات رئوس یک درخت ۱/۸ است. در این درخت مجموع مرتبه و اندازه کدام است؟

الف) ۱۷ ب) ۱۹ ج) ۲۱ د) ۱۳

حل: میانگین درجات رئوس عبارت است از مجموع درجات رئوس تقسیم بر تعداد رئوس؛ یعنی:

$$\text{میانگین درجات رئوس} = \frac{2q}{p}$$

پس داریم:

$$\frac{2q}{p}=1/8\Rightarrow \frac{2q}{q+1}=1/8\Rightarrow 2q=1/8q+1/8$$

$$\Rightarrow 0/2q=1/8\Rightarrow q=\frac{1/8}{0/2}=9\Rightarrow p=10\Rightarrow p+q=19$$

پس گزینه‌ی ب صحیح است.

آزمون: در یک درخت، درجه‌ی هر رأس ۱ یا ۲ است و تعداد رئوس درجه‌ی ۲، سه برابر تعداد رئوس درجه‌ی ۱ است. مجموع درجات رئوس زوج در این گراف کدام است؟

الف) ۱۰ ب) ۱۲ ج) ۱۴ د) ۱۶

حل: گزینه‌ی ب صحیح است؛ زیرا فرض می‌کنیم x و y به ترتیب تعداد رأس‌های درجه‌ی ۱ و درجه‌ی ۲ باشند. در این صورت، طبق فرض داریم: $y=3x$ و می‌توان نوشت:

$$\text{تعداد رئوس} = x+y=p$$
$$\text{مجموع درجات رئوس} = x+2y=2q=2(p-1)=2p-2$$

$$\Rightarrow -2\begin{cases}x+y=p\\ x+2y=2p-2\end{cases}\Rightarrow -x=-2\Rightarrow x=2\xrightarrow{3x=y}y=6$$

پس این درخت شش رأس از درجه‌ی ۲ (رأس زوج) دارد و مجموع درجات رئوس زوج برابر است با: $6\times 2=12$.

آزمون: اگر به گرافی هم‌بند، ۴ یال اضافه شود، گراف k_5 حاصل می‌شود. از این گراف چند یال حذف کنیم تا به درختی از مرتبه‌ی ۵، یعنی T_5 تبدیل شود؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴

حل: گزینه‌ی ب صحیح است؛ زیرا فرض کنیم، گراف موردنظر G باشد و اندازه‌ی G، همان q باشد. پس طبق فرض:

$$q+4=\frac{5\times 4}{2}\Rightarrow q=10-4=6$$

و می‌دانیم، درخت از مرتبه‌ی ۵ دارای ۴ یال است، پس باید از ۶ یال، ۲ یال کم کنیم تا به درخت مرتبه‌ی ۵ تبدیل شود.

(حل مسأله‌های لاینحل ۲۳۰۰ ساله)

کشف فرمول اعداد اول و نتایج آن*

قسمت ۲

● سید محمدرضا هاشمی موسوی**

hashemi – moosavi@yahoo.com

اشاره:

در قسمت اول مقاله با تاریخ جستجو برای کشف فرمول اعداد اول و تلاش‌های فراوان ریاضیدانان در طی ۲۳۰۰ سال گذشته آشنا شدیم و اینک با کشف فرمول اعداد اول و نتایج بسیار ارزنده آن که به قرار ذیل است آشنا می‌شویم:

✓ توابع تشخیص اعداد اول

✓ توابع مولد اعداد اول

✓ توابع مولد اعداد اول بسیار بزرگ ناشناخته

✓ تعیین تعداد اعداد اول به طور دقیق

✓ حل معادله زتای ریمان

✓ تعیین kامین عدد اول

✓ تعریف مجموعه اعداد اول

✓ تعریف مجموعه‌های اعداد اول مرسن و تام

✓ اثبات بی‌نهایت بودن اعداد اول دوقلو و تعریف مجموعه دوقلوهای اول

✓ حل معادله‌های درجه‌ی nام سیال در حالت عمومی

۱. کشف تابع مولد همه‌ی اعداد اول (۱۳۸۲/۵/۱۴)

ابتدا ماتریسی از صفر و یک برای اعداد فرد طبیعی با توجه به بخش‌پذیری آن‌ها بر هر یک از اعداد فرد تشکیل می‌دهیم:

+	۱	۳	۵	۷	۹	۱۱	۱۳	۱۵	۱۷	۱۹	۲۱	۲۳	۲۵	۲۷	۲۹	۳۱	۳۳	۳۵	۳۷	۳۹	۴۱	
۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	…
۳	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	…
۵	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	…
۷	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	…
۹	۱	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	…
۱۱	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	…
۱۳	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	…
۱۵	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	…
۱۷	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	…
۱۹	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	…
۲۱	۱	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	…

جدول (۱)

توضیح: در صورتی که اعداد ستونی بر اعداد سطری بخش‌پذیر باشند، در جدول تقاطع آن‌ها را یک و در غیر این صورت صفر قرار می‌دهیم. توجه داشته باشید:

- ستون اول فقط ۱ است؛ زیرا همه‌ی اعداد، مضرب عدد ۱ هستند.
- ستون دوم مضارب عدد ۳ را نشان می‌دهد.
- ستون سوم مضارب عدد ۵ را نشان می‌دهد.
- به همین ترتیب هر ستون مضارب یک عدد است.

با توجه به سطرهای جدول ملاحظه می‌شود، در حالتی که در مقابل هر عدد ستونی فقط دو عدد ۱ نوشته شده باشد، درواقع آن عدد ستونی عددی اول است؛ زیرا:

«هر عدد اول تنها بر یک و خودش بخش‌پذیر است.»

می‌دانیم: «برای تشخیص عدد مفروض N کافی است که N را بر اعداد اول نابیش‌تر از $\sqrt{N}$ تقسیم کنیم.» برای تشخیص اعداد ستونی کافی است به سطر آن عدد توجه شود. در صورتی که در هر سطر بیش‌تر از دو عدد ۱ وجود داشته باشد، درواقع آن عدد ستونی اول نیست. برای مثال، سطر مربوط به عدد ۱۵ دارای چهار عدد ۱ است؛ زیرا بر ۱، ۳، ۵ و ۱۵ بخش‌پذیر است. بنابراین، عدد ۱۵ مرکب است. ولی سطرهای مربوط به اعداد ۳، ۵، ۷، ...، ۱۷ و ۱۹، و... فقط دارای دو عدد ۱ است، پس این اعداد اول هستند.

برای تشخیص اعداد، کافی است توابعی را بیابیم که هریک از ستون‌های جدول را تولید کنند؛ به‌عبارت دیگر، همه‌ی اعداد صفر یا یک هر ستون را به همان ترتیب ستونی (از بالا به پایین) ارایه کنند. ضابطه‌ی عمومی این گونه توابع به صورت زیر است:

$$F_{2k+1}(x)=\left\lfloor\frac{2k+1}{x}\left\lfloor\frac{x}{2k+1}\right\rfloor\right\rfloor$$

x	$F_3(x)=\left\lfloor\frac{3}{x}\left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor\right\rfloor$	$F_5(x)=\left\lfloor\frac{5}{x}\left\lfloor\frac{x}{5}\right\rfloor\right\rfloor$	$F_7(x)=\left\lfloor\frac{7}{x}\left\lfloor\frac{x}{7}\right\rfloor\right\rfloor$	$F_9(x)=\left\lfloor\frac{9}{x}\left\lfloor\frac{x}{9}\right\rfloor\right\rfloor$	$F_{11}(x)=\left\lfloor\frac{11}{x}\left\lfloor\frac{x}{11}\right\rfloor\right\rfloor$	…
۱	۰	۰	۰	۰	۰	…
۳	۱	۰	۰	۰	۰	…
۵	۰	۱	۰	۰	۰	…
۷	۰	۰	۱	۰	۰	…
۹	۱	۰	۰	۱	۰	…
۱۱	۰	۰	۰	۰	۱	…
۱۳	۰	۰	۰	۰	۰	…
۱۵	۱	۱	۰	۰	۰	…
۱۷	۰	۰	۰	۰	۰	…
۱۹	۰	۰	۰	۰	۰	…
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

جدول (۲)

با توجه به جدول و با توجه به این که برای تشخیص عدد N کافی است، آن را بر اعداد اول نابیش‌تر از $\sqrt{N}$ تقسیم کنیم، N را بر اعداد فرد نابیش‌تر از آن تقسیم می‌کنیم. پس، مجموع توابع اعداد ستونی x کافی است تا عدد فرد نابیش‌تر از $\lfloor\sqrt{N}\rfloor$ محاسبه شود. درنتیجه، اگر N اول باشد، تنها یک عدد ۱ در سطر عدد N خواهیم داشت:

$$S^* = \left\lfloor \frac{\sqrt{2m+1}+1}{2} \right\rfloor \quad \text{و} \quad (1) \quad \sum_{k=0}^{S^*} F_{2k+1}(x) = 1 \quad (\text{N عدد اول})$$

اگر N مرکب باشد:

$$(2) \qquad \sum_{k=0}^{S^*} F_{2k+1}(x) > 1 \quad (\text{N عدد مرکب})$$

(ستون اول : $F_1(x) = 1$)

بنابراین، اگر N عددی فرد باشد و $m \in \mathbb{N}$ ($N = 2m+1$):

$$\Delta_{N(m)} = \left\lfloor \frac{1 + \left\lfloor \frac{3}{2m+1} \right\rfloor}{1 + \sum_{k=1}^{S^*} \left\lfloor \frac{2k+1}{2m+1} \left\lfloor \frac{2m+1}{2k+1} \right\rfloor \right\rfloor} \right\rfloor$$

$$= \begin{cases} 1 & N = 2m+1 \text{ اول باشد} \\ 0 & N = 2m+1 \text{ مرکب باشد} \end{cases} \qquad (3)$$

توجه: عدد $N = 2m+1$، یا اول است و یا مرکب و این دو حالت توسط تابع تشخیص $\Delta_{N(m)}$ معین خواهد شد و همیشه تنها دو حالت (۳)، یعنی ۰ و ۱ پیش خواهد آمد. بنابراین اگر تابعی با استفاده از $\Delta_{N(m)}$ بنویسیم، یک تابع پوشاست (در مجموعه اعداد فرد بزرگ‌تر از ۱):

$$1)\ H(m) = (2m+1-p)\Delta_{N(m)} + p$$

$$2)\ H(m) = p\left(\frac{2m+1}{p}\right)^{\Delta_{N(m)}}$$

※ توجه: p عدد اول دلخواه است.

توضیح: عبارت $\left\lfloor \frac{3}{2m+1} \right\rfloor$ فقط برای تشخیص استثنایی عدد ۳ است و اگر $m > 1$ اختیار شود، این عبارت از $\Delta_{N(m)}$ حذف می‌شود:

$$m > 1:\ \Delta_{N(m)} = \left\lfloor \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{S^*} \left\lfloor \frac{2k+1}{2m+1} \left\lfloor \frac{2m+1}{2k+1} \right\rfloor \right\rfloor} \right\rfloor$$

این دو تابع هم‌ارز هستند و با فرض این‌که $p = 2$ اختیار شود، دامنه و برد آن‌ها چنین است:

$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots\}$ (مجموعه اعداد اول)

$D_H = \mathbb{N}$ (مجموعه اعداد طبیعی) و $R_H = \mathbb{P}$

توجه: با فرض $p = 2$، برد هر یک از توابع با ضابطه‌های (۱) یا (۲)، مجموعه اعداد اول است.

● **نتیجه**: مجموعه اعداد اول تعریف‌پذیر است:

$$\mathbb{P} = \left\{ H(m) : m \in \mathbb{N},\ H(m) = 2\left(\frac{2m+1}{2}\right)^{\Delta_{N(m)}} \right\}$$

۲. تابع مولد اعداد اول با استفاده از قضیه‌ی ویلسن

قضیه‌ی ویلسن: اگر p اول باشد، آن‌گاه $(p-1)! \equiv -1$ و برعکس.

نکته: با توجه به قضیه‌ی ویلسن، توابع تشخیص اعداد طبیعی مثل N را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تذکر: عدد یک نه اول است و نه مرکب.

$$1)\ \Delta_1 = \left\lfloor \cos^2 \pi \frac{(n-1)!+1}{n} \right\rfloor = \begin{cases} 1 & \text{n اول باشد} \\ 0 & \text{n اول نباشد} \end{cases}$$

$$2)\ \Delta_2 = \frac{\sin^2 \pi \frac{(n-1)!^2}{n}}{\sin^2 \frac{\pi}{n}}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{n اول باشد } \left(\frac{(n-1)!^2}{n} = \frac{1}{n} + k \ (\text{عدد صحیح})\right) \\ 0 & \text{n اول نباشد } \left(n \mid (n-1)!^2\right) \end{cases}$$

$$3)\ \Delta_3^{(*)} = \left\lfloor \frac{n}{(n-1)!+1} \left\lfloor \frac{(n-1)!+1}{n} \right\rfloor \right\rfloor = \begin{cases} 1 & \text{n اول باشد} \\ 0 & \text{n اول نباشد} \end{cases}$$

هریک از این توابع (Δ_i) را می‌توان برای تشخیص عددی

طبیعی مثل N به کار برد. ولی چون کار با عدد $(N-1)!$ حتی برای N نه چندان بزرگ غیر عملی است، پس این نوع توابع را فقط به عنوان برهانی تئوریک می‌پذیریم.

با توجه به قضیه‌ی ویلسن، تابع تشخیص اعداد را می‌توان یکی از توابع فوق (Δ_i) در نظر گرفت و با آن، تابع مولد اعداد اول را ساخت. چون هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ مرکب است، پس بهتر است N را عدد فرد بزرگ‌تر از یک در نظر بگیریم:

$$N = 2m+1:\ \Delta_m = \left\lfloor \frac{N}{(N-1)!+1}\left\lfloor\frac{(N-1)!+1}{N}\right\rfloor\right\rfloor$$

در صورتی که p عدد اول دلخواهی باشد، با توجه به تابع تشخیص Δ_m توابع مولد اعداد اول پوشا به صورت زیر هستند:

$$1)H_p(m) = p\left(\frac{2m+1}{p}\right)^{\Delta_m}$$

$$2)H_p(m) = (2m+1-p)\Delta_m + p$$

نکته: این دو تابع هم‌ارز هستند و هریک را می‌توان به‌عنوان تابع مولد اعداد اول به کار برد. واضح است که به تعداد اعداد اول (نامحدود)، تابع مولد اعداد اول می‌توان نوشت:

$$P = 2: H_2(m) = 2\left(\frac{2m+1}{2}\right)^{\Delta_m};\ H_2(m) = (2m-1)\Delta_m + 2$$

$$P = 3: H_3(m) = 3\left(\frac{2m+1}{3}\right)^{\Delta_m};\ H_3(m) = 2(m-1)\Delta_m + 3$$

$$P = 5: H_5(m) = 5\left(\frac{2m+1}{5}\right)^{\Delta_m};\ H_5(m) = 2(m-2)\Delta_m + 5$$

$$P = 7: H_7(m) = 7\left(\frac{2m+1}{7}\right)^{\Delta_m};\ H_7(m) = 2(m-3)\Delta_m + 7$$

. . . .

m	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰...
$H_2(m)$	۳	۵	۷	۲	۱۱	۱۳	۲	۱۷	۱۹	۲...
$H_3(m)$	۳	۵	۷	۳	۱۱	۱۳	۳	۱۷	۱۹	۳...
$H_5(m)$	۳	۵	۷	۵	۱۱	۱۳	۵	۱۷	۱۹	۵...
$H_7(m)$	۳	۵	۷	۷	۱۱	۱۳	۷	۱۷	۱۹	۷...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$H_p(m)$	۳	۵	۷	p	۱۱	۱۳	p	۱۷	۱۹	p...

نتیجه: دو تابع پوشای مولد اعداد که همه‌ی اعداد اول را به ترتیب تولید می‌کنند و به جای اعداد مرکب، عدد اول ۲ را جایگزین می‌کنند، به صورت زیر هستند:

$$1)H(m) = 2\left(\frac{2m+1}{2}\right)^{\left\lfloor \frac{m}{(m-1)!+1}\left\lfloor\frac{(m-1)!+1}{m}\right\rfloor\right\rfloor};\ D_H = \mathbb{N},\ R_H = \mathbb{P}$$

$$2)H(m) = 2\left(\frac{2m+1}{2}\right)^{\left\lfloor \frac{1+\left\lfloor\frac{3}{2m+1}\right\rfloor}{1+\sum_{k=1}^{s}\left\lfloor\frac{2k+1}{2m+1}\left\lfloor\frac{2m+1}{2k+1}\right\rfloor\right\rfloor}\right\rfloor};\ D_H = \mathbb{N},\ R_H = \mathbb{P}$$

توجه: این دو تابع و توابع معادل آن‌ها به نام **«فرمول‌های اعداد اول» (H.M)** نام‌گذاری شده‌اند که دامنه‌ی این توابع، مجموعه اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$) و برد آن‌ها، مجموعه اعداد اول ($\mathbb{P}$) هستند.

۳. تابع مولد اعداد اول با استفاده از تابع حسابی φ اویلر

با استفاده از تابع $\varphi(n)$ (فی اویلر)، تابع با ضابطه زیر را می‌توان برای تشخیص اعداد به کار برد ($n \neq 1$):

$$4)\ \Delta_4^{(*)} = \left\lfloor\frac{\varphi(n)}{n-1}\right\rfloor = \begin{cases} 1 & \text{اول باشد } n \\ 0 & \text{اول نباشد } n \end{cases}$$

$\varphi(n)$ از دترمینان مرتبه‌ی n زیر به دست می‌آید:

$$\varphi(n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & n \end{vmatrix}$$

توجه: با استفاده از ماتریسی نظیر ماتریسی که ابتدای مقاله ارایه شد، ثابت می‌شود که $\varphi(n)$ از دترمینان بالا محاسبه می‌شود و هم‌چنین می‌دانیم:

$$n = p^r.q^s.t^u\cdots,\quad \varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{t}\right)\cdots$$

توضیح: ستون اول این دترمینان همه یک و ستون آخر آن اعداد طبیعی $1,2,3,\cdots,n$ است. در ستون kام، هر درایه‌ای که سطرش به k بخش‌پذیر است یک و بقیه جاهای ستون، صفر قرار می‌دهیم ($\varphi(n)$: تعداد اعداد پیش از n که نسبت به n اول هستند).

نتایج کشف فرمول اعداد اول:

۱ . تابع تعیین تعداد اعداد اول یعنی $\pi(N)$ ، تا عدد فردی مثل N به طور دقیق :

$$\pi(N)=\frac{N+1}{2}-\sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}}\left\lfloor 2^{-\Delta_{N(m)}}\right\rfloor$$

توجه : توسط این تابع (π) ، حل یکی از مسأله‌های هفت‌گانه‌ی انستیتوی clay (مسأله‌های لاینحل جهانی هزاره‌ی هفت میلیون دلاری) ارایه شده است که دو سال به داوری گذاشته می‌شود (معادله‌ی زتای ریمان $\zeta(s)=0$) .

● جواب معادله‌ی زتای ریمان :

$$\lfloor s\rfloor>1:\ \pi(p)=\frac{p+1}{2}-\sum_{m=1}^{\frac{p-1}{2}}\left\lfloor s^{-\Delta_{N(m)}}\right\rfloor$$

۲ . تعیین k امین عدد اول :

$\pi(N)=k$: ($k: N=2m+1$ امین عدد اول)

$$P_k(m)=\left\lfloor\frac{1}{\left|k-\frac{N+1}{2}+\sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}}\left\lfloor 2^{-\Delta_{N(m)}}\right\rfloor\right|+1}\right\rfloor . N$$

$$P_k(m)=\begin{cases}N & \text{اگر N ، k امین عدد اول باشد}\\ 0 & \text{اگر N ، k امین عدد اول نباشد}\end{cases}$$

بنابراین، اگر k امین عدد اول را به P_k نمایش دهیم، می‌توان نوشت (با استفاده از قضیه‌ی چبیچف داریم: $P_k<2^k$):

$$P_k=\sum_{m=1}^{2^k}P_k(m)$$

۳. تعریف مجموعه‌های اعداد اول مرسن و تام:

($\mathbb{M}$: مجموعه اعداد اول مرسن)

$$\mathbb{M}=\left\{M(n): n\in\mathbb{N}, M(n)=3\left(\frac{2^{n+1}-1}{3}\right)^{\Delta_{N(2^n-1)}}\right\}$$

$$=\left\{3,7,31,127,\dots,2^{30402457}-1,\dots\right\}$$

($\mathbb{F}$: مجموعه اعداد تام)

$$\mathbb{F}=\left\{F(n): n\in\mathbb{N}, M(n)\in\mathbb{M}, F(n)=2^{n-1}M(n)\right\}$$

$$=\{6,28,496,\dots\}$$

توضیح : عدد تام عددی است که مجموع همه‌ی مقسوم‌علیه‌های کوچک‌تر از آن برابر خود عدد است .

۴. تابع مولد اعداد اول بسیار بزرگ ناشناخته

تابع مولد اعداد بزرگ‌تر از بزرگ‌ترین عدد اول $M_{43}=2^{30402457}-1$ (عدد مرسن سال ۲۰۰۶) به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$M_{43}=2^{30402457}-1=2n+1;\quad n=\frac{M_{43}-1}{2}=2^{30402456}-1$$

$$H(m)=\left[2(m+n)+1-M_{43}\right]\Delta_{N(m+n)}+M_{43}$$

یا :

$$H(m)=M_{43}\left[\frac{2(m+n)+1}{M_{43}}\right]^{\Delta_{N(m+n)}}$$

با توجه به عبارت زیر :

$$\Delta_{N(m+n)}=\left\lfloor\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{S^{*}}\left\lfloor\frac{2k+1}{2(m+n)+1}\left\lfloor\frac{2(m+n)+1}{2k+1}\right\rfloor\right\rfloor}\right\rfloor$$

$$=\begin{cases}1 & N=2(m+n)+1 \text{ اول باشد}\\ 0 & N=2(m+n)+1 \text{ مرکب باشد}\end{cases}$$

تابع با ضابطه‌های زیر، همیشه یا عدد اول M (بزرگ‌ترین عدد شناخته شده‌ی اول مرسن) را و یا عددهای اول بعد از این عدد را تولید می‌کنند :

$$1)\ m\in\mathbb{N}: H(m)=\left[2(m+n)+1-M_{43}\right]^{\Delta_{N(m+n)}}+M_{43}$$

$$=\begin{cases}N & N=2(m+n)+1 \text{ اول باشد}\\ M_{43} & N=2(m+n)+1 \text{ مرکب باشد}\end{cases}$$

$$2)\ m\in\mathbb{N}: H(m)=M_{43}\left[\frac{2(m+n)+1}{M_{43}}\right]^{\Delta_{N(m+n)}}$$

$$= \begin{cases} N & \text{اول باشد } N \\ M_{۴۲} & \text{مرکب باشد } N \end{cases}$$

* توجه : این دو تابع را می‌توان توابع مولد اعداد بسیار بزرگ اول ناشناخته منظور کرد .

۵. اثبات بی‌نهایت بودن اعداد اول دوقلو و تعریف مجموعه‌ی T (Twin):

$$T = \{n \in \mathbb{N} - \mathbb{H} : (۶n - ۱, ۶n + ۱)\} \cup \{(۳,۵)\}$$

$$= \{(۳,۵), (۵,۷), (۱۱,۱۳), (۱۷,۱۹), (۲۹,۳۱), (۴۱,۴۳), \cdots\}$$

زیرنویس

* این توابع تشخیص ، توسط مؤلف مقاله ارایه شده‌اند .

منبع

* کتاب انتشارات بین‌المللی Brill/Vsp ، نوشته‌ی سید محمدرضا هاشمی موسوی :

The discovery of prime numbers formula and its results & other top researches

(uthor: S. M. R. Hashemi Moosavi)

** سایت کاشف :

www.primenumbersformula.com

خبر ــ مجله‌ی ریاضی توان

ناشر : مبتکران
سال نشر : ۱۳۸۵
قیمت : ۴۰۰ تومان
محل نشر : تهران
تعداد صفحات : ۴۸

به مجموعه‌ی نشریات ریاضی کشورمان ، یک نشریه‌ی جدید اضافه شد !

مجله‌ی ریاضی توان ویژه دوره‌ی متوسطه ، نخستین شماره خود را در نیمه آبان سال ۸۵ منتشر کرد . پیش از این مجله‌ی ریاضی توان ویژه دوره‌ی راهنمایی تحصیلی به صورت فصل‌نامه در پانزده شماره منتشر شده بود و اکنون مجله‌ی ریاضی توان ویژه دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی پا به عرصه مطبوعات گذاشته است .

در نخستین شماره این مجله مطالب زیر را ملاحظه می‌کنید :

آشنایی بیشتر با سه جمله‌ای درجه دوم ، گزارشی از چهل و هفتمین المپیاد بین‌المللی ریاضی ، مسائل مسابقه‌ای برای دانش‌آموزان و مسائلی برای حل ، آمار و احتمال ، ایستگاه اندیشه و سرگرمی ، روش‌های تدریس ریاضی و تاریخ ریاضیات (سخنرانی استاد پرویز شهریاری) ، سئوالات المپیاد آزمایشی ریاضی مبتکران ، مسابقه آزاد ریاضی و... دست‌اندرکاران مجله ریاضی رشد برهان متوسطه ، انتشار مجله ریاضی توان ویژه دوره‌ی متوسطه را نشانه اعتلای فرهنگ ریاضی کشور دانسته و برای نویسندگان و مسئولین آن آرزوی موفقیت می‌کنند .

پاسخ جدول‌های سودوکو

۶	۷	۵	۴	۸	۹	۳	۲	۱
۸	۳	۴	۶	۱	۲	۷	۵	۹
۱	۹	۲	۳	۷	۵	۶	۸	۴
۴	۱	۷	۲	۶	۸	۵	۹	۳
۵	۲	۸	۹	۳	۴	۱	۷	۶
۹	۶	۳	۷	۵	۱	۲	۴	۸
۲	۸	۶	۵	۹	۳	۴	۱	۷
۷	۵	۱	۸	۴	۶	۹	۳	۲
۳	۴	۹	۱	۲	۷	۸	۶	۵

حل جدول ۱

۷	۶	۳	۹	۸	۵	۲	۱	۴
۸	۱	۲	۷	۶	۴	۳	۹	۵
۵	۹	۴	۳	۱	۲	۸	۶	۷
۱	۴	۵	۲	۹	۸	۶	۷	۳
۳	۷	۹	۴	۵	۶	۱	۸	۲
۶	۲	۸	۱	۷	۳	۴	۵	۹
۴	۵	۱	۸	۲	۷	۹	۳	۶
۹	۳	۶	۵	۴	۱	۷	۲	۸
۲	۸	۷	۶	۳	۹	۵	۴	۱

حل جدول ۲

۴	۱	۶	۲	۵	۹	۳	۸	۷
۷	۳	۹	۴	۸	۱	۲	۶	۵
۸	۲	۵	۷	۳	۶	۹	۱	۴
۳	۵	۸	۶	۲	۴	۷	۹	۱
۲	۷	۱	۸	۹	۵	۶	۴	۳
۶	۹	۴	۳	۱	۷	۸	۵	۲
۵	۸	۳	۱	۶	۲	۴	۷	۹
۱	۶	۷	۹	۴	۳	۵	۲	۸
۹	۴	۲	۵	۷	۸	۱	۳	۶

حل جدول ۳

با راهیان المپیادهای ریاضی
قسمت ۵

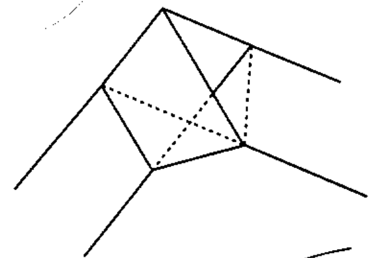
● غلامرضا یاسی‌پور

سؤال‌ها

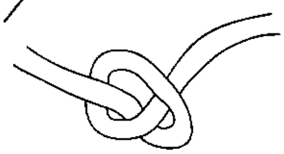
چندضلعی‌های منتظم

در این بخش، به بحث درباره‌ی دو روشی می‌پردازیم که برای حل مسائل مربوط به چندضلعی‌های منتظم به کار می‌روند.

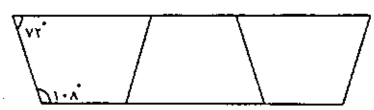
روش اول شامل استفاده از تقارن‌های این چندضلعی‌هاست. این روش را با واقعیت جالب مربوط به ترسیم پنج ضلعی منتظم توضیح می‌دهیم. البته روش کلاسیک ترسیم این چندضلعی با خط کش و پرگار موجود است، اما راه ساده‌تری نیز برای انجام این کار وجود دارد. بر نواری کاغذی، ساده‌ترین گره، گره‌ی یک پیچی را انجام می‌دهیم. سپس آن را مانند شکل ۱ تسطیح می‌کنیم. پس از بریدن دو سر نوار، پنج ضلعی منتظم به دست می‌آید.



شکل ۱



برای متقاعد شدن در این مورد که پنج ضلعی به‌دست آمده منتظم است، شکل۲ را ملاحظه کنید. در این شکل، پنج ضلعی مزبور از تا کردن ذوزنقه‌های متساوی الساقین برابر حاصل شده است. ویژگی توضیح دهنده‌ی این پدیده آن است که با دوران پنج ضلعی، اقطار پنج ضلعی را می‌توان به یکدیگر تبدیل کرد و به این ترتیب، ذوزنقه‌های تعیین شده با سه ضلع و یک قطر را می‌توان با عمل دوران، یکی از دیگری به دست آورد.



شکل ۲

در روش دوم از مثلثات استفاده می‌کنیم. این روش یا از تحویل روابط متری به اتحادهای مثلثاتی بهره می‌گیرد، یا به استفاده از اعداد مختلطی رجوع می‌کند که به صورت مثلثاتی نوشته شده‌اند. مثال استفاده از مثلثات را با مسأله‌ی زیر به‌دست می‌دهیم؛ مثالی که به توصیف رابطه‌ای می‌پردازد که در چندضلعی منتظمی با ۱۴ ضلع برقرار است:

فرض می‌کنیم $A_1A_2A_3\dots A_{14}$، چندضلعی منتظمی با ۱۴ ضلع و محاط در دایره‌ای به شعاع R باشد. ثابت کنید:

$$A_1A_3^2 + A_1A_7^2 + A_3A_7^2 = 7R^2$$

طول‌های سه قطعه‌ی مورد بحث را بر حسب زوایا، و R (شعاع دایره‌ی محیطی چندضلعی) بیان می‌کنیم. از آن‌جا که وترهای A_1A_3، A_3A_7 و A_1A_7 در کمان‌هایی به ترتیب به اندازه‌های $\pi/7$، $2\pi/7$ و $3\pi/7$ محاط شده‌اند (شکل۳)، طول‌هایشان برابر $2R\sin\pi/7$، $2R\sin 2\pi/7$ و $2R\sin 3\pi/7$ است. درنتیجه، اتحاد مورد اثبات با اتحاد زیر هم‌ارز است.

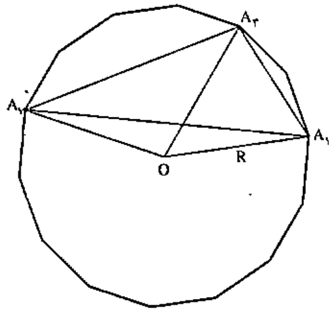
$$4R^2(\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{3\pi}{7}) = 7R^2$$

با استفاده از فرمول‌های دو برابر زاویه به‌دست می‌آوریم:

$$4R^2(\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{3\pi}{7})$$
$$= 2R^2(1-\cos\frac{2\pi}{7}+1-\cos\frac{4\pi}{7}+1-\cos\frac{6\pi}{7})$$

برای محاسبه‌ی مجموع:

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$$



شکل۳

آن را در $\sin 2\pi/7$ ضرب و از فرمول‌های ضرب به جمع استفاده می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{2}(\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{6\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}-\sin\frac{4\pi}{7}) = -\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{7}$$

در این مورد از این واقعیت استفاده کرده‌ایم که:

$$\sin 8\pi/7 = \sin(2\pi - 6\pi/7) = -\sin 6\pi/7$$

درنتیجه، مجموع فوق برابر $-\frac{1}{2}$ است، و اتحاد به دست می‌آید.

در ادامه مسائلی را در این زمینه به خوانندگان تقدیم می‌کنیم.

۱. فرض می‌کنیم ABC و BCD دو مثلث متساوی الاضلاع مشترک در یک ضلع است. خطی گذرنده از D، AC را در M و AB را در N قطع می‌کند. ثابت کنید زاویه‌ی بین خطوط BM و CN $60°$ است.

۲. فرض می‌کنیم ABCDE یک پنج ضلعی منتظم و M نقطه‌ای درون آن و چنان است که $\angle MBA = \angle MEA = 42°$. ثابت کنید: $\angle CMD = 60°$.

۳. بر اضلاع یک شش ضلعی دارای مرکز تقارن، مثلث‌های متساوی الاضلاعی بیرون از آن رسم می‌کنیم. رأس‌هایی از این مثلث‌ها که رئوس شش ضلعی درونی نیستند، یک شش ضلعی منتظم می‌سازند. ثابت کنید که وسط‌های اضلاع این شش ضلعی، رأس‌های یک شش ضلعی منتظم‌اند.

۴. فرض می‌کنیم $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ یک هفت ضلعی منتظم است. ثابت کنید:

$$\frac{1}{A_1A_2}=\frac{1}{A_1A_3}+\frac{1}{A_1A_4}$$

۵. فرض می‌کنیم $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$، $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$ و $C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7$، هفت‌ضلعی‌های منتظمی با سطوح به ترتیب S_A، S_B و S_C هستند و نیز فرض می‌کنیم: $A_1A_2 = B_1B_3 = C_1C_4$. ثابت کنید:

$$\frac{1}{2}<\frac{S_B+S_C}{S_A}<2-\sqrt{2}$$

۶. فرض می‌کنیم $P_1P_2P_3\ldots P_{12}$ یک دوازده‌ضلعی منتظم است. ثابت کنید که P_1P_5، P_4P_8 و P_3P_6 متقارب‌اند.

۷. درون مربع ABCD، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ABK، BCL، CDM و DAN را رسم می‌کنیم. ثابت کنید، وسط‌های قطعات KL، LM، MN و NK، و وسط‌های AN، AK، BK، BL، CL، CM، DM و DN رأس‌های یک دوازده‌ضلعی منتظم‌اند.

جواب‌ها

۱. به‌خاطر بیاورید اگر نقطه‌ی B را حول نقطه‌ی A به اندازه‌ی زاویه‌ی °۶۰ به نقطه‌ی C دوران دهیم، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. این موضوع، مستلزم آن است که مثلث متساوی‌الساقین با زاویه‌ی °۶۰ متساوی‌الاضلاع است. این ملاحظه این مطلب را مطرح می‌کند که بسیاری از مسائل شامل مثلث‌های متساوی‌الاضلاع را می‌توان با یافتن دوران °۶۰ پنهانی حل کرد. و همانطور که در زیر خواهیم دید، این همان وضعیت مسئله‌ی مورد بحث‌مان است. فرض می‌کنیم که نقطه‌ی Q محل تقاطع BM با موازی از A با BC است (شکل۴). ابتدا ثابت می‌کنیم، مثلث AQN متساوی‌الاضلاع است. از آن‌جا که $\angle QAN = 60°$، کافی است نشان دهیم دو ضلع این مثلث برابرند. از مثلث‌های مشابه MQA و MBC نتیجه می‌گیریم:

$$AQ / BC = MA / MC = MA / (MA + BC)$$

نیز، از مثلث‌های مشابه NMA و NDB نتیجه می‌گیریم:

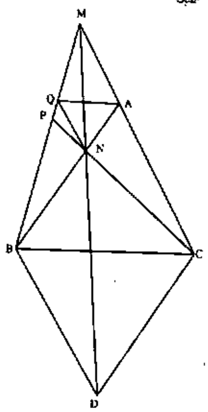
$$NA / NB = MA / BD$$

از آن‌جا که:

$$AB = BC = BD$$

نتیجه می‌شود:

$$NA / AB = MA / (MA + BC) = AQ / AB$$



شکل ۴

بنابراین: AQ=NA. از آن‌جا که مثلث AQN متساوی‌الاضلاع است، Q را می‌توان از N با دورانی °۶۰ حول A به‌دست آورد. و نیز از آن‌جا که مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است، B را می‌توان از C با همین دوران حاصل کرد. درنتیجه، BM را می‌توان از CN با دورانی °۶۰ به دست آورد که نشان می‌دهد، دو خط مورد بحث زاویه‌ی °۶۰ می‌سازند [کتاب درسی دبیرستانی رومانی].

۲. ثابت می‌کنیم مثلث MCD متساوی‌الاضلاع است. از آن‌جا که مثلث متساوی‌الاضلاع شکل متقارن‌تری نسبت به مثلث متساوی‌الساقین دارد، ساده‌تر آن است که مسأله را قهقرایی درنظر بگیریم و از یکتایی شکل هندسی مورد بحث استفاده کنیم. به این منظور، فرض می‌کنیم M' نقطه‌ای درون پنج ضلعی منتظم و چنان است که $\overset{\Delta}{M'CD}$ متساوی‌الاضلاع است (شکل۵). در این صورت، مثلث‌های $CM'B$ و $DM'E$، هر دو با داشتن دو ضلع برابر متساوی‌الساقین‌اند. داریم:

$$\angle M'CB = \angle DCB - \angle DCM' = 108° - 60° = 48°$$

و بنابه تقارن:

$$\angle M'DE = 48°$$

بنابراین:

$$\angle M'BC = \angle M'ED = (180° - 48°) / 2 = 66°$$

نتیجه می‌شود که:

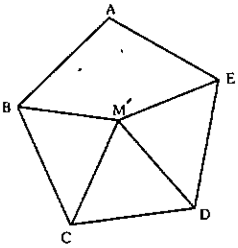
$$\angle M'BA = \angle M'EA = 42°$$

بنابراین، $M = M'$ و مطلب به اثبات می‌رسد.

۳. برای حل مسأله، از مثلثات و دقیق‌تر، از اعداد مختلط نوشته شده به صورت مثلثاتی استفاده می‌کنیم. با قرار دادن شکل هندسی مورد بحث در صفحه‌ی مختلط، هر رأس را به مختصات اعداد مختلطی وابسته می‌کنیم که آن را به عنوان یک نقطه با همان حرف نمایش می‌دهیم. فرمول‌های جمع مربوط به سینوس و کسینوس مبین آن هستند که ضرب در $e^{i\alpha}$، دوران

پاد ساعتگردی به اندازه‌ی زاویه‌ی α حول مبدأ به دست می‌دهد.

دستگاه مختصاتی چنان اختیار می‌کنیم که مبدأ آن در مرکز تقارن شش‌ضلعی منتظم باشد. فرض می‌کنیم، $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ شش‌ضلعیی در جهت ساعتگرد، و $A_6A_1B_6$، $A_5A_6B_5$، $A_4A_5B_4$، $A_3A_4B_3$، $A_2A_3B_2$، و $A_1A_2B_1$ مثلث‌هایی متساوی‌الاضلاع، و C_1، C_2، C_3، C_4، C_5 و C_6 به ترتیب، وسط‌های قطعات $B_1B_2, B_2B_3, \dots, B_6B_1$ باشند. از آن‌جا که B_1 از دوران A_2 حول A_1، به اندازه‌ی $\frac{\pi}{3}$، در جهت پاد ساعتگرد به دست آمده است.



شکل ۵

$$B_1 = A_1 + e^{i\frac{\pi}{3}}(A_2 - A_1) = (1 - e^{i\frac{\pi}{3}})A_1 + e^{i\frac{\pi}{3}}A_2$$
$$= e^{-i\frac{\pi}{3}}A_1 + e^{i\frac{\pi}{3}}A_2$$

به همین ترتیب،

$$B_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}A_2 + e^{i\frac{\pi}{3}}A_3$$

نتیجه می‌گیریم که:

$$C_1 = \frac{1}{2}(e^{-i\frac{\pi}{3}}A_1 + A_2 + e^{i\frac{\pi}{3}}A_3)$$

$$C_2 = \frac{1}{2}(e^{-i\frac{\pi}{3}}A_2 + A_3 + e^{i\frac{\pi}{3}}A_4)$$

از طرف دیگر، اگر C_1 را حول مبدأ، در جهت ساعتگرد، به اندازه‌ی $\frac{\pi}{3}$ دوران دهیم، نقطه‌ای به مختصات $\frac{1}{2}(e^{-i\frac{2\pi}{3}}A_1 + e^{-i\frac{\pi}{3}}A_2 + A_3)$ را به دست می‌آوریم که همان C_2 است؛ زیرا بنابه تقارن: $A_4 = -A_1$، و:

$$e^{-2\pi i/3} = -e^{\pi i/3}$$

همین استدلال را برای نشان دادن این موضوع به‌کار می‌بریم که C_i از دوران C_{i+1} حول مبدأ، در جهت ساعتگرد، به اندازه‌ی $\frac{\pi}{3}$، به‌دست می‌آید. درنتیجه، $C_1C_2C_3C_4C_5C_6$ شش‌ضلعی منتظمی به مرکز مبدأ است.

۴. این مسئله شباهت بسیاری با مسئله‌ای دارد که در مقدمه‌ی این بخش حل کردیم، و از همان نوع اعمال مثلثاتی باید استفاده کنیم. شش‌ضلعی مورد بحث را در دایره‌ای به شعاع R محاط می‌کنیم. اضلاع AB، AC و AD مقابل کمان‌هایی به اندازه‌های $2\pi/7$، $4\pi/7$ و $6\pi/7$ هستند. درنتیجه:

$$AB = 2R\sin\pi/7$$
$$AC = 2R\sin 2\pi/7$$
$$AD = 2R\sin 3\pi/7$$

اتحادی که می‌خواهیم اثبات کنیم، هم‌ارز اتحاد مثلثاتی زیر است:

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin\frac{3\pi}{7}}$$

با حذف مخرج‌ها به دست می‌آوریم:

$$\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7} = \sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}$$

به اثبات این برابری می‌پردازیم. فرمول ضرب به جمع را در مورد هریک از این جملات به کار می‌بریم و به دست می‌آوریم:

$$-\cos\frac{5\pi}{7} + \cos\frac{\pi}{7} = -\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{\pi}{7}$$

از آن‌جا که:

$$2\pi/7 + 5\pi/7 = 3\pi/7 + 4\pi/7 = \pi$$

نتیجه می‌گیریم:

$$\cos 2\pi/7 = -\cos 5\pi/7$$
$$\cos 3\pi/7 = -\cos 4\pi/7$$

که برابری را اثبات می‌کند [کتاب درسی دبیرستانی رومانی].

تبصره: این اتحاد از قضیه‌ی بطلمیوس که در مورد چهارضلعی محاطی ABCD به کار رفته است نیز به دست می‌آید.

۵. فرض می‌کنیم: $A_1A_4 = c$، $A_1A_3 = b$ و $A_1A_2 = a$. مسأله‌ی پیشین نشان می‌دهد:

$$a/b + a/c = 1$$

از آن‌جا که مثلث‌های $A_1A_2A_3$ و $B_1B_2B_3$ مشابه‌اند:

$$B_1B_2 / B_1B_3 = a/b$$

درنتیجه:

$$B_1B_2 = a^2/b$$

به همین ترتیب:

$C_1C_2 = a^2/c$

بنابراین:

$$\frac{S_B+S_C}{S_A} = \frac{a^2}{b^2}+\frac{a^2}{c^2}$$

در این صورت:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^2}{c^2} > \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

توجه داشته باشید که برابری به این علت ممکن نیست که: $a/b \neq a/c$. این مطلب نیمی از نابرابری را اثبات می‌کند. از طرف دیگر،

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^2}{c^2} = \left(\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\right)^2 - \frac{2a^2}{bc} = 1-\frac{2a^2}{bc}$$

در مثلث $A_1A_3A_4$ ، $A_3A_4 = a$. درنتیجه، با استفاده از قانون سینوس‌ها رابطه‌ی

$$\frac{a^2}{bc} = \frac{\sin^2\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}} = \frac{\sin^2\frac{\pi}{7}}{8\sin^2\frac{\pi}{7}\cos^2\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}}$$

$$= \frac{1}{8\cos^2\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}} = \frac{1}{4(\cos\frac{2\pi}{7}+1)\cos\frac{2\pi}{7}}$$

را به‌دست می‌آوریم که مخرج آن را با استفاده از فرمول‌های دو برابر زاویه، تبدیل کرده‌ایم. از آن‌جا که:

$2\pi/7 > \pi/4, \cos 2\pi/7 < \cos\pi/4 = \sqrt{2}/2$

خواهیم داشت:

$$\frac{a^2}{bc} > \frac{1}{4\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

نتیجه می‌شود:

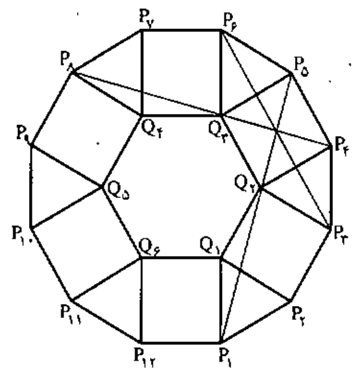
$a^2/b^2 + a^2/c^2 < 1-(\sqrt{2}-1) = 2-\sqrt{2}$

که سمت راست نابرابری مسأله را به اثبات می‌رساند [المپیاد ریاضی بلغارستان، ۱۹۹۵].

۶. حل مسأله مبتنی بر این ویژگی دوازده ضلعی منتظم است که می‌توان آن را مطابق شکل ۶، به شش مثلث متساوی‌الاضلاع $P_1P_2Q_1$ ، $P_3P_4Q_2$ ، $P_5P_6Q_3$ ، $P_7P_8Q_4$ ، $P_9P_{10}Q_5$ و $P_{11}P_{12}Q_6$ ، شش مربع $P_{12}P_1Q_1Q_6$ ، $P_{10}P_{11}Q_6Q_5$ ، $P_8P_9Q_5Q_4$ ، $P_6P_7Q_4Q_3$ ، $P_4P_5Q_3Q_2$ و $P_2P_3Q_2Q_1$ ، و یک شش‌ضلعی منتظم $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ تجزیه کرد. در مثلث متساوی‌الساقین $Q_1P_1Q_2$ ، $\angle P_1Q_1Q_2 = 150°$. درنتیجه: $\angle Q_1Q_2P_1 = 15°$. از آن‌جا که:

$\angle Q_1Q_2P_1 + \angle Q_1Q_2Q_3 + \angle Q_3Q_2P_5 = 15° + 120° + 45° = 180°$

نقاط P_1 ، Q_2 و P_5 بر یک خط راست واقع‌اند. به همین ترتیب، P_4 ، Q_3 و P_8 بر خط راست قرار دارند. آنچه باقی می‌ماند، نشان دادن این نکته است که خط P_3P_6 از مرکز مربع $P_4P_5Q_3Q_2$ می‌گذرد، و این موضوع، از این واقعیت سرچشمه می‌گیرد که شش‌ضلعی $P_3P_4P_5P_6Q_3Q_2$ نسبت به مرکز این مربع متقارن است [23rd W.L. Putnam Mathematical Competition, 1963].



شکل ۶

۷. راه‌حلی صرفاً هندسی ممکن است، اما اعداد مختلط، تنظیم اطلاعات داده شده را بهتر امکان‌پذیر می‌کنند. با رأس‌های مربع داده شده، مختصات زیر را وابسته می‌کنیم:

$A(-1-i), B(1-i), C(1+i), D(-1+i)$

در این صورت، مختصات K، L، M و N، به‌ترتیب عبارت‌اند از:

$(\sqrt{3}-1)i, -(\sqrt{3}-1), -(\sqrt{3}-1)i, (\sqrt{3}-1)$

درنتیجه، وسط‌های قطعات KL، LM، MN و NK دارای مختصات $\pm(\sqrt{3}-1)\pm(\sqrt{3}-1)i$ و وسط‌های قطعات AK، BK، BL، CL، CM، DM، DN و AN دارای مختصات زیرند:

$\pm(2-\sqrt{3})\pm i$ و $\pm 1\pm(2-\sqrt{3})i$

اگر تمام موارد را توسط عامل $\sqrt{2}/2(\sqrt{3}-1)$ ساده کنیم، ملاحظه خواهیم کرد که دوازده رأس دوازده ضلعی، با تمام اختیارات علامت‌های بعلاوه و منها، عبارت‌اند از:

$$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i, \pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i, \pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$$

با نوشتن این اعداد به صورت مثلثاتی ملاحظه می‌کنیم که می‌شوند:

$\cos 2k\pi/12 + i\sin 2k\pi/12, k = 0,1,2,\dots,11$

درنتیجه، مختصات مختلط رئوس دوازده ضلعی موردنظر، ریشه‌های دوازدهم واحدند که ثابت می‌کند، دوازده‌ضلعی، منتظم است [19th IMO, 1977].

۲
دنباله های عددی

دکتر محمدصادق عسگری

عضو هیأت علمی دانشگاه آزاد اسلامی ـ واحد مرکز

تعریف زیردنباله‌ی اعداد طبیعی

اگر $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ی اعداد طبیعی باشد، آن‌گاه با حذف تعداد متناهی یا تعداد نامتناهی از جملات این دنباله، دنباله‌ای جدید حاصل می‌شود که آن را زیردنباله‌ای از اعداد طبیعی می‌گویند. به عبارت دیگر، دنباله‌ی $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ را یک زیردنباله از دنباله‌ی $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ می‌گویند، هرگاه به ازای هر $t \in \mathbb{N}$ و k، اگر $k < t$، آن‌گاه $n_k < n_t$.

به اجمال می‌توان گفت، زیردنباله‌ی $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ از اعداد طبیعی، دنباله‌ای از اعداد طبیعی است که جملاتش رفته رفته بزرگ‌تر و بزرگ‌تر می‌شوند. مثلاً هریک از دنباله‌های:

۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, …, P_n, …

۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۴, …, ۲n, …

۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱, ۱۳, …, ۲n − ۱, …

زیردنباله‌هایی از $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ هستند.

تعریف زیردنباله

اگر $f = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله از اعداد حقیقی باشد، آن‌گاه با حذف تعداد متناهی یا تعداد نامتناهی از جملات این دنباله، دنباله‌ای جدید به‌وجود می‌آید که آن را زیردنباله‌ای از دنباله‌ی $f = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ می‌گویند. همچنین، اگر $N = \{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ زیردنباله‌ای از اعداد طبیعی باشد، در این صورت دنباله‌ی foN را یک زیردنباله از دنباله‌ی $f = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ می‌گویند که جمله‌ی عمومی آن به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad foN(k) = f(n_k) = f_{n_k}$$

بنابراین $foN = \{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ را یک زیردنباله از دنباله‌ی $f = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ می‌گویند.

تعریف ساده‌تر زیردنباله

اگر $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله از اعداد حقیقی و $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک زیردنباله از اعداد طبیعی باشد، در این صورت، دنباله‌ی $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ را یک زیردنباله از دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ می‌گویند.

مثال: دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ با جمله‌ی عمومی $a_n=(-1)^n$ مفروض است. می‌دانیم، این دنباله به صورت $-1,1,-1,1,\dots,(-1)^n,\dots$ نیز نمایش داده می‌شود.

اگر زیردنباله‌ی $n_i=2i$ از اعداد طبیعی را در نظر بگیریم، آن‌گاه $a_{n_i}=a_{2i}=(-1)^{2i}=1$ یک زیردنباله از دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ است که به صورت $1,1,1,\dots$ و یا $\{a_{2i}\}_{i=1}^{\infty}$ نمایش داده می‌شود.

هم‌چنین، اگر زیردنباله‌ی $n_i=2i+1$ از اعداد طبیعی را در نظر بگیریم، آن‌گاه دنباله‌ی $a_{n_i}=a_{2i+1}=(-1)^{2i+1}=-1$ یک زیردنباله از دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ است که به صورت $-1,-1,-1,\dots$ یا $\{a_{2i+1}\}_{i=1}^{\infty}$ نمایش داده می‌شود.

نکته: در هر دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$؛ زیردنباله‌ی $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ را زیردنباله‌ی حاصل از جملات با اندیس زوج و زیردنباله‌ی $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ را زیردنباله‌ی حاصل از جملات با اندیس فرد می‌گویند.

مثال: در دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ با جمله‌ی عمومی $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$ زیردنباله‌های حاصل از جمله‌های با اندیس زوج و اندیس فرد را مشخص کنید.

حل:

زیردنباله‌ی حاصل از جمله‌های با اندیس زوج، دنباله‌ی $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ است که a_{2k} به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$a_{2k}=\frac{(-1)^{2k}}{2k}=\frac{1}{2k}$$

این زیردنباله به صورت $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\dots,\frac{1}{2k},\dots$ و یا $\left\{\frac{1}{2k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ نمایش داده می‌شود.

به طور مشابه، زیردنباله‌ی حاصل از جملات با اندیس فرد، دنباله‌ی $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ است که در آن a_{2k-1} برابر است با:

$$a_{2k-1}=\frac{(-1)^{2k-1}}{2k-1}=\frac{-1}{2k-1}$$

این زیردنباله نیز به صورت $-1,-\frac{1}{3},-\frac{1}{5},\dots,\frac{-1}{2k-1},\dots$ و یا $\left\{\frac{-1}{2k-1}\right\}_{k=1}^{\infty}$ نمایش داده می‌شود.

مثال: هر یک از دنباله‌های زیر، یک زیردنباله از دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ با جمله‌ی عمومی $a_n=\frac{n}{n+1}$ است.

$$a_n=\frac{n}{n+1}:\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{5}{6},\dots,\frac{n}{n+1},\dots$$

$$a_{2k}=\frac{2k}{2k+1}:\frac{2}{3},\frac{4}{5},\frac{6}{7},\dots,\frac{2k}{2k+1},\dots$$

$$a_{2k-1}=\frac{2k-1}{2k}:\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{5}{6},\frac{7}{8},\dots,\frac{2k-1}{2k},\dots$$

$$a_{3k}=\frac{3k}{3k+1}:\frac{3}{4},\frac{6}{7},\frac{9}{10},\frac{12}{13},\dots,\frac{3k}{3k+1},\dots$$

$$a_{3k+1}=\frac{3k+1}{3k+2}:\frac{4}{5},\frac{7}{8},\frac{10}{11},\frac{13}{14},\dots,\frac{3k+1}{3k+2},\dots$$

$$a_{3k-1}=\frac{3k-1}{3k}:\frac{2}{3},\frac{5}{6},\frac{8}{9},\frac{11}{12},\frac{14}{15},\dots,\frac{3k-1}{3k},\dots$$

$$a_{2^k}=\frac{2^k}{2^k+1}:\frac{2}{3},\frac{4}{5},\frac{8}{9},\frac{16}{17},\frac{32}{33},\dots,\frac{2^k}{2^k+1},\dots$$

دنباله‌های کران‌دار و بی‌کران

اگر $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله از اعداد حقیقی باشد، در این صورت، مجموعه‌ی $\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$ را بُرد دنباله می‌گویند. دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ را از بالا یا پایین یا به طور کلی، کران‌دار خوانیم، هرگاه مجموعه‌ی بُرد دنباله از بالا یا پایین و یا به طور کلی کران‌دار باشد.

همچنین دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ را بی‌کران خوانیم، هرگاه بُرد آن حداقل از یک طرف بی‌کران باشد. کران‌داری یک دنباله را به صورت‌های زیر نیز می‌توان تعریف کرد.

تعریف دنباله‌ی از بالا کران‌دار

گوییم دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ از بالا کران‌دار است، اگر عدد حقیقی M موجود باشد؛ به طوری که برای هر $n\in\mathbb{N}$، $a_n\le M$، در این صورت، عدد حقیقی M را یک کران بالای دنباله (کران بالای بُرد دنباله) می‌گویند.

مثال ۱: دنباله‌های $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ و $\left\{(-1)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ و

$\left\{\frac{2n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ از بالا کران‌دار هستند، زیرا:

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ \ n<n+1\Rightarrow \frac{n}{n+1}<1$$

$$\forall n\in\mathbb{N};\ \ -1\le(-1)^n\le 1$$

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ \ 2>0\Rightarrow 2n+2>2n\Rightarrow \frac{2n}{n+1}<2$$

مثال ۲: دنباله‌های $\left\{\frac{n^2+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{2n+1\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{2^n-1\}_{n=1}^{\infty}$ از بالا بی‌کران هستند، زیرا بُرد هر کدام، از بالا بی‌کران است:

$$\left\{\frac{n^2+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}\ :\text{بُرد دنباله}=\left\{\frac{n^2+1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$$

$$=\left\{2,\frac{5}{2},\frac{10}{3},\frac{17}{4},\frac{26}{5},\ldots\right\}$$

$$\{2n+1\}_{n=1}^{\infty}\ :\text{بُرد دنباله}=\{2n+1:n\in\mathbb{N}\}=\{3,5,7,9,11,\ldots\}$$

$$\{2^n-1\}_{n=1}^{\infty}\ :\text{بُرد دنباله}=\{2^n-1:n\in\mathbb{N}\}=\{0,3,7,15,31,\ldots\}$$

تعریف دنباله‌ی از پایین کران‌دار

دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ را یک دنباله‌ی از پایین کران‌دار خوانیم، اگر عدد حقیقی N موجود باشد؛ به طوری که برای هر $n\in\mathbb{N}$، $N\le a_n$. در این صورت، عدد حقیقی N را یک کران پایین دنباله (کران پایین بُرد دنباله) می‌گویند.

مثال ۱: دنباله‌های $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{n^2+1\}_{n=1}^{\infty}$ و $\left\{\frac{n+2}{n+3}\right\}_{n=1}^{\infty}$ از پایین کران‌دار هستند، زیرا:

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ \ -1\le(-1)^n\le 1$$

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ \ n\ge 1\Rightarrow n^2+1\ge 2$$

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ \ \frac{3}{4}\le\frac{n+2}{n+3}<1$$

مثال ۲: دنباله‌های $\{-n^2\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{1-3^n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\left\{\frac{-n^2}{n+1}\right\}$ از پایین بی‌کران است، زیرا بُرد این دنباله‌ها از پایین بی‌کران است:

$$\{-n^2\}_{n=1}^{\infty}\ :\text{بُرد دنباله}=\{-n^2:n\in\mathbb{N}\}=\{\ldots,-9,-4,-1\}$$

$$\{1-3^n\}_{n=1}^{\infty}\ :\text{بُرد دنباله}=\{1-3^n:n\in\mathbb{N}\}=\{\ldots,-26,-8,-2\}$$

$$\left\{\frac{-n^2}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}\ :\text{بُرد دنباله}=\left\{\frac{-n^2}{n+1}:n\in\mathbb{N}\right\}=\left\{\ldots,\frac{-9}{4},\frac{-4}{3},\frac{-1}{2}\right\}$$

تعریف دنباله‌ی کران‌دار

گوییم دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ کران‌دار است، اگر این دنباله از بالا و پایین کران‌دار باشد. به عبارت دیگر، دنباله‌ی فوق را کران‌دار گوییم، اگر عدد حقیقی $M>0$ موجود باشد؛ به طوری که برای هر $n\in\mathbb{N}$، $-M\le a_n\le M$ یا $|a_n|\le M$.

مثال ۱: دنباله‌های $\left\{\frac{n+1}{2n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ و $\left\{\frac{n^2+n}{n^2+n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ و $\left\{\frac{1}{n^2+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ کران‌دار هستند، زیرا:

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ \ \frac{1}{2}<\frac{n+1}{2n+1}\le\frac{2}{3}\Rightarrow-\frac{2}{3}\le\frac{n+1}{2n+1}\le\frac{2}{3}$$

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ \ \frac{2}{3}\le\frac{n^2+n}{n^2+n+1}<1\Rightarrow-1<\frac{n^2+n}{n^2+n+1}<1$$

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ \ 0<\frac{1}{n^2+1}<\frac{1}{2}\Rightarrow-\frac{1}{2}<\frac{1}{n^2+1}<\frac{1}{2}$$

مثال ۲: دنباله‌های $\{(-1)^n n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{2^n+n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\left\{\frac{(-1)^n n^2}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ بی‌کران هستند، زیرا بُرد این دنباله‌ها حداقل از یک طرف بی‌کران است:

$$\{(-1)^n n\}_{n=1}^{\infty}\ :\text{بُرد دنباله}=\{\ldots,-3,-1,2,4,\ldots\}$$

$$\{2^n+n\}_{n=1}^{\infty}\ :\text{بُرد دنباله}=\{3,6,11,20,\ldots\}$$

$$\left\{\frac{(-1)^n n^2}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}\ :\text{بُرد دنباله}=\left\{\ldots,\frac{-25}{6},\frac{-9}{4},\frac{-1}{2},\frac{4}{3},\frac{16}{5},\ldots\right\}$$

تعاریف کران‌داری یک دنباله را می‌توان با علائم ریاضی به شکل زیر بیان کرد:

a_n از بالا کران‌دار است $\Leftrightarrow \exists M\in\mathbb{R}\ \ \forall n\in\mathbb{N}:\ a_n\le M$

a_n از بالا بی‌کران است $\Leftrightarrow \forall M\in\mathbb{R}\ \ \exists n\in\mathbb{N}:\ a_n>M$

a_n از پایین کران‌دار است $\Leftrightarrow \exists N\in\mathbb{R}\ \ \forall n\in\mathbb{N}:\ N\le a_n$

a_n از پایین بی‌کران است $\Leftrightarrow \forall N\in\mathbb{R}\ \ \exists n\in\mathbb{N}:\ a_n<N$

a_n کران‌دار است $\Leftrightarrow \exists M>0\ \ \forall n\in\mathbb{N}:\ |a_n|\le M$

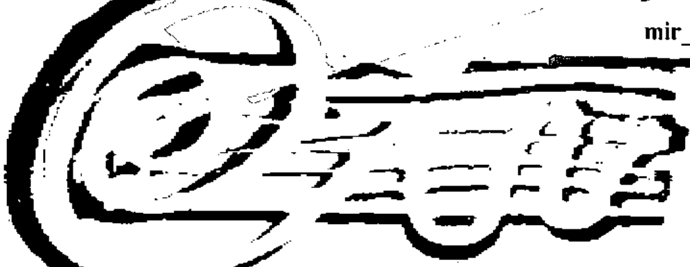
a_n بی‌کران است $\Leftrightarrow \forall M>0\ \ \exists n\in\mathbb{N}:\ |a_n|>M$

برای دانش‌آموزان سال دوم

تابع جزء صحیح

(قسمت ۱)

● میرشهرام صدر
mir_sadr@yahoo.com



ورود به مطلب

زنگ دوم دوشنبه‌ی هفته‌ی آخر آذر، قرار بود تابع جزء صحیح را به دانش‌آموزان سال دوم تدریس کنم. با خود گفتم، قبل از تعریف جزء صحیح، بهتر است با مثالی ساده درس را شروع کنم؛ شاید دانش‌آموزان مفهوم جزء صحیح را با مثال روزمره بهتر درک کنند و بی‌درنگ این مثال را طرح کردم.

مثال: بچه‌ها فکر می‌کنید بین ۱ تا ۵۰۰، چند عدد وجود داشته باشد که بر ۱۳ بخش‌پذیر باشند؟

بعد از بحث میان بچه‌ها، اغلب آن‌ها بر این باور بودند که بهتر است، تعداد مضارب طبیعی ۱۳ را بین ۱ تا ۵۰۰ محاسبه کنیم و چنین عمل کردند:

۱۳×۱ و ۱۳×۲ و ۱۳×۳ و ۱۳×۴ و ...

آن‌ها دنباله‌ای ساخته بودند که مضارب طبیعی ۱۳ را نشان می‌داد و آخرین جمله‌ی این دنباله، کوچک‌تر از ۵۰۰ بود؛ ولی مقدار آن را نمی‌دانستند. به آن‌ها گفتم، با توجه به تعریف تقسیم می‌توان، جملهٔ آخر این دنباله را محاسبه کرد:

$$\begin{array}{r|l} ۵۰۰ & ۱۳ \\ \underline{۳۹} & ۳۸ \\ ۱۱۰ & \\ \underline{۱۰۴} & \\ ۶ & \end{array}$$

روشن است که آخرین عدد طبیعی کوچک‌تر از ۵۰۰ که بر ۱۳ بخش‌پذیر است، برابر با ۱۳×۳۸ است.

بنابراین، دنباله‌ی اعداد دانش‌آموزان را کامل کردم:

۱۳×۱ و ۱۳×۲ و ۱۳×۳ و... و ۱۳×۳۸

در نتیجه، از ۱ تا ۵۰۰ سی‌وهشت عدد وجود دارند که بر ۱۳ بخش‌پذیرند و مسأله حل شد.

اما به‌طور ساده‌تر و بدون تشکیل دنباله، و فقط با استفاده از الگوریتم تقسیم هم می‌توان به این موضوع پی برد.

$$۵۰۰=۳۸\times۱۳+۶$$

$$\Rightarrow \frac{۵۰۰}{۱۳}=۳۸+\frac{۶}{۱۳} \qquad (۱)$$

رابطه‌ی ۱ به این معناست که در تقسیم ۵۰۰ بر ۱۳ سی‌وهشت عدد وجود دارند که مضرب ۱۳ هستند. اکنون به رابطه‌ی ۱ بیشتر توجه می‌کنیم. در این رابطه، ۳۸ را جزء صحیح یا بخش درست عدد $\frac{۵۰۰}{۱۳}$ و $\frac{۶}{۱۳}$ را جزء اعشاری یا بخش کسری $\frac{۵۰۰}{۱۳}$ می‌نامیم. جزء صحیح $\frac{۵۰۰}{۱۳}$ را با نماد $\left[\frac{۵۰۰}{۱۳}\right]$ نمایش می‌دهیم. بنابراین: $\left[\frac{۵۰۰}{۱۳}\right]=۳۸$

نتیجه: هرگاه n و k عددهایی طبیعی باشند، تعداد عددهای طبیعی از ۱ تا n که بر k بخش‌پذیرند، برابر با $\left[\frac{n}{k}\right]$ است.

□

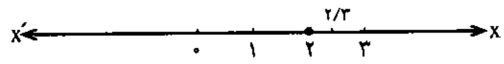
جزء صحیح

برای هر عدد حقیقی مانند x، عدد صحیحی مانند n وجود دارد، به‌طوری که: $n \le x < n+1$. در این صورت، جزء صحیح x را برابر با n تعریف می‌کنیم. جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نمایش می‌دهیم. بنابراین داریم:

$n \le x < n+۱ \Leftrightarrow [x] = n$

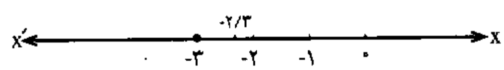
برای مثال، وقتی عدد $x = ۲/۳$ را در نظر می‌گیریم، ملاحظه می‌کنیم که عدد صحیح $n = ۲$ موجود است، به‌طوری‌که:

$۲ \le ۲/۳ < ۲+۱ \Rightarrow [۲/۳] = ۲$



به‌همین‌صورت، وقتی عدد $x = -۲/۳$ را در نظر می‌گیریم، ملاحظه می‌کنیم که عدد صحیح $n = -۳$ موجود است، به‌طوری‌که:

$-۳ \le -۲/۳ < -۳+۱ \Rightarrow [-۲/۳] = -۳$



به عبارت دیگر، می‌توان جزء صحیح x را به این صورت تعریف کرد: «بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی x را، جزء صحیح x می‌گوییم.»

مثال:

الف) $-۲ = [-۱/۷]$؛ زیرا: $-۲ \le -۱/۷ < -۱$.

ب) $۵ = [۵]$؛ زیرا: $۵ \le ۵ < ۶$.

ج) هرگاه داشته باشیم: $۴ \le x < ۵$، در این صورت $[x] = ۴$.

د) هرگاه داشته باشیم: $[x] = ۷$، در این صورت $۷ \le x < ۸$.

هـ) $[\sqrt{۲}] = ۱$؛ زیرا: $۱ \le \sqrt{۲} \simeq ۱/۴ < ۲$.

و) $[-\pi] = -۴$؛ زیرا: $-۴ \le -\pi \simeq -۳/۱۴ < -۳$.

ز) $\left[\frac{۱۷}{۳}\right] = ۵$؛ زیرا: $۵ \le \frac{۱۷}{۳} = ۵/\overline{۶} < ۶$.

ح) $\left[\frac{۳}{\pi}\right] = ۰$؛ زیرا: $۰ \le \frac{۳}{\pi} \simeq ۰/۹۵ < ۱$، با توجه به این که $\pi \simeq ۳/۱۴$.

مثال: معادله‌ی $۲ + ۲[x] = ۸$ را حل کنید.

$۲ + ۲[x] = ۸ \Rightarrow ۲[x] = ۶ \Rightarrow [x] = ۳ \Rightarrow ۳ \le x < ۴ \Rightarrow x \in [۳,۴)$

جزء اعشاری

هرگاه x یک عدد حقیقی باشد، به‌طوری‌که $[x] = k$، می‌توان نوشت:

$x = k + \alpha \;;\; (۰ \le \alpha < ۱)$

اکنون اگر در این رابطه قرار دهیم $k = [x]$، خواهیم داشت:

$$x = [x] + \alpha \;;\; (۰ \le \alpha < ۱)$$
$$\Rightarrow x - [x] = \alpha \;;\; (۰ \le \alpha < ۱) \qquad (۲)$$

بنابه‌تعریف، مقدار $x - [x]$ را که همان مقدار α است؛ جزء اعشاری یا بخش کسری x تعریف می‌کنیم. با توجه به رابطه‌ی ۲ ملاحظه می‌کنیم، جزء اعشاری هر عدد حقیقی همواره نامنفی و کوچک‌تر از ۱ است.

مثال: جزء اعشاری عددهای $۳\sqrt{۲}$ و $-۲\sqrt{۳}$ را به‌دست آورید.

حل: فرض کنیم: $x = ۳\sqrt{۲}$ و $y = -۲\sqrt{۳}$. بنابراین داریم:

$x = ۳\sqrt{۲} \simeq ۴/۲ \Rightarrow [x] = [۴/۲] = ۴$

جزء اعشاری $۳\sqrt{۲}$ $= x - [x] \simeq ۴/۲ - ۴ = ۰/۲$

$y = -۲\sqrt{۳} \simeq -۳/۴ \Rightarrow [x] = [-۳/۴] = -۴$

جزء اعشاری $-۲\sqrt{۳}$ $= x - [x] \simeq -۳/۴ - (-۴) = ۰/۶$

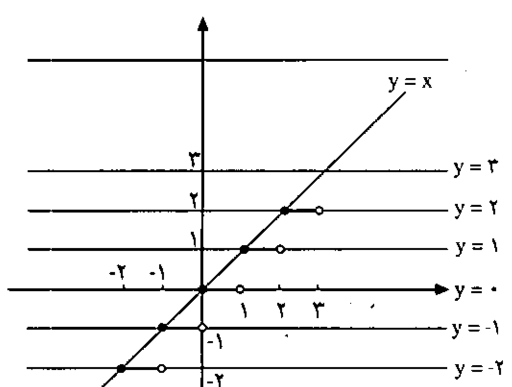
❑

تابع جزء صحیح

تابع با ضابطه‌ی $f(x) = [x]$ که دامنه‌ی آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ و برد آن مجموعه‌ی اعداد صحیح Z است، تابع جزءصحیح گفته می‌شود. بنابراین تابع جزء صحیح به‌این صورت است:

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \longrightarrow Z \\ f(x) = [x] \end{cases}$$

می‌دانیم که نمودار تابع جزء صحیح چنین است:



(شکل۱)

در این‌جا می‌خواهیم به بررسی خواص و رفتار تابع جزءصحیح بپردازیم. بنابراین موارد زیر را تحقیق می‌کنیم.

❑ یک به‌یک بودن تابع؛

❑ فرد یا زوج بودن تابع؛
❑ متناوب بودن تابع؛
❑ معکوس‌پذیری تابع؛
❑ صعودی یا نزولی بودن تابع

بررسی یک‌به‌یک بودن تابع

تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x]$ یک‌به‌یک نیست، زیرا برای هر $x_1, x_2 \in D_f$ داریم:

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow [x_1]=[x_2] \not\Rightarrow x_1=x_2$$

از طرف دیگر، با توجه به شکل ۱ ملاحظه می‌کنیم، (برای مثال) خط به معادله‌ی $y=1$ نمودار تابع را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کند.
فرض کنید: $x_1=1/7$ و $x_2=1/3$ $(x_1 \neq x_2)$. ملاحظه می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(x_1)=[1/7]=1 \\ f(x_2)=[1/3]=1 \end{cases} \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$$

بنابراین در تابع، جزء صحیح $f(x_1)$ می‌تواند برابر با $f(x_2)$ باشد، در حالی که $x_1 \neq x_2$.

بررسی فرد یا زوج بودن تابع

تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x]$ فرد یا زوج نیست، زیرا برای هر $x \in D_f$ داریم:

$$\begin{cases} -x \in D_f = \mathbb{R} \\ f(-x) \neq \pm f(x) \end{cases}$$

از یک طرف، با توجه به شکل ملاحظه می‌کنیم، نمودار این تابع نسبت به محور y ها متقارن نیست، پس این تابع نمی‌تواند زوج باشد. از طرف دیگر، مبدأ مختصات مرکز تقارن این تابع نیست، پس این تابع نمی‌تواند فرد باشد.
برای مثال فرض کنیم: $x=2/3$. بنابراین داریم:

$$x=2/3 \Rightarrow \begin{cases} f(-x)=[-2/3]=-3 \\ \pm f(x)=\pm[2/3]=\pm 2 \end{cases} \Rightarrow f(-x) \neq \pm f(x)$$

بررسی متناوب بودن تابع

تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x]$ متناوب نیست؛ زیرا برای هر $T \neq 0, x \in D_f$ داریم:

$$\begin{cases} (x \pm T) \in D_f = \mathbb{R} \\ f(x+T)=[x+T] \neq [x] \Rightarrow f(x+T) \neq f(x) \end{cases}$$

نکته: تابع به معادله‌ی $f(x)=ax-[ax]$ متناوب و دوره‌ی تناوب اصلی آن $T=\frac{1}{a}$ است $(a \neq 0)$. زیرا برای هر $x \in D_f = \mathbb{R}$ داریم: $(x \pm T) \in D_f$ و هم‌چنین:

$$f(x+T)=f(x+\frac{1}{a})=a(x+\frac{1}{a})-\left[a(x+\frac{1}{a})\right]$$
$$=ax+1-[ax+1]$$
$$=ax+1-([ax]+1)=ax-[ax]=f(x)$$
$$\Rightarrow f(x+T)=f(x)$$

بررسی معکوس‌پذیری تابع

چنان‌که ملاحظه کردید، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x]$ یک‌به‌یک نیست. در نتیجه، این تابع معکوس‌پذیر نمی‌باشد.

بررسی صعودی یا نزولی بودن تابع

تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x]$ در بازه‌های $n \in z; [n, n+1)$ صعودی و نزولی است، زیرا برای هر $x_1, x_2 \in [n, n+1)$ که $x_1 < x_2$ خواهیم داشت:

$$n \le x_1 < x_2 < n+1 \Rightarrow [x_1]=[x_2]$$

بنابراین، رابطه‌ی $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ برقرار است. پس تابع f صعودی است.
هم‌چنین، رابطه‌ی $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$ برقرار است. پس تابع f نزولی است.

❑

خاصیت‌های تابع جزء صحیح

خاصیت ۱. $[x] \le x < [x]+1$

زیرا با فرض این‌که $[x]=n \in z$، داریم:

$$n \le x < n+1$$

و این رابطه برقراری است.

مثال: مقدار x را از این معادله به‌دست آورید:

$$\left[\frac{6x+5}{8}\right]=\frac{15x-7}{5}$$

حل: چون $\left[\frac{6x+5}{8}\right]$ عددی صحیح است، بنابراین:

$$\frac{15x-7}{5}=k \in Z \ (1) \Rightarrow 15x-7=5k$$

$$\Rightarrow x=\frac{5k+7}{15} \ (2)$$

با جایگزینی رابطه‌های ۱ و ۲ در معادله داریم:

$$\left[\frac{\frac{6(5k+7)}{15}+5}{8}\right]=k \Rightarrow \left[\frac{10k+39}{40}\right]=k \in Z$$

$$\Rightarrow k \le \frac{10k+39}{40} < k+1$$

اکنون باید دستگاه نامعادله‌های زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases}\dfrac{10k+39}{40}\ge k\\[2mm] \dfrac{10k+39}{40}<k+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k\le\dfrac{13}{10}\\[2mm] k>-\dfrac{1}{30}\end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{30}<k\le\frac{13}{10}\quad(3)$$

چون k عددی درست است و در رابطه‌ی ۳ صدق می‌کند، پس $k=0$ یا $k=1$ که با قرار دادن این مقدارها به جای k در رابطه‌ی ۲، مقدارهای x به‌دست می‌آیند.

$$k=0\Rightarrow x=\frac{7}{15}$$

$$k=1\Rightarrow x=\frac{4}{5}$$

در نتیجه، معادله‌ی مفروض دارای دو ریشه‌ی $\frac{7}{15}$ و $\frac{4}{5}$ است.

خاصیت ۲. هرگاه $n\in Z$ و $x\in R$ داریم:

$$[x+n]=[x]+n$$

زیرا اگر $m\le x<m+1$، آن‌گاه $[x]=m$ و هم‌چنین:

$$m\le x<m+1\Rightarrow m+n\le x+n<(m+n)+1$$
$$\Rightarrow [x+n]=m+n=[x]+n$$

مثال:

$$[-5.3+2]=[-5.3]+2=-6+2=-4$$
$$[x+7]=[x]+7$$
$$[3x-4]=[3x]-4$$
$$[x+[x]+1]=[x]+[x]+1=2[x]+1$$

مثال: معادله‌ی $\left[\frac{x}{2}+1\right]-2\left[\frac{x}{2}-3\right]=4$ را حل کنید.

حل:

$$\left[\frac{x}{2}+1\right]-2\left[\frac{x}{2}-3\right]=4\Rightarrow\left[\frac{x}{2}\right]+1-2\left(\left[\frac{x}{2}\right]-3\right)=4$$

$$\Rightarrow\left[\frac{x}{2}\right]+1-2\left[\frac{x}{2}\right]+6=4\Rightarrow-\left[\frac{x}{2}\right]=-3$$

$$\Rightarrow\left[\frac{x}{2}\right]=3\Rightarrow 3\le\frac{x}{2}<4\Rightarrow 6\le x<8$$

در نتیجه مجموعه جواب این معادله به صورت $[6,8)$ است.

خاصیت ۳. برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$0\le x-[x]<1$$

اگر فرض کنیم: $[x]=n$، بنابراین:

$$\begin{cases}n\le x<n+1\\ [x]=n\end{cases}\Rightarrow [x]\le x<[x]+1$$

$$\Rightarrow [x]-[x]\le x-[x]\le[x]+1-[x]\Rightarrow 0\le x-[x]<1$$

مثال: اگر $x-k=2\left[\frac{x}{2}+1\right]$، در این صورت مجموعه مقادیر k را به‌دست آورید.

حل:

$$x-k=2\left(\left[\frac{x}{2}\right]+1\right)\Rightarrow x-k=2\left[\frac{x}{2}\right]+2$$

$$\Rightarrow\frac{x}{2}-\frac{k}{2}=\left[\frac{x}{2}\right]+1\Rightarrow\frac{x}{2}-\left[\frac{x}{2}\right]=\frac{k}{2}+1$$

چون $0\le\frac{x}{2}-\left[\frac{x}{2}\right]<1$، بنابراین داریم:

$$0\le\frac{k}{2}+1<1\Rightarrow-1\le\frac{k}{2}<0\Rightarrow-2\le k<0$$

در نتیجه، مجموعه مقادیر k به صورت $[-2,0)$ است.

خاصیت ۴. برای هر عدد حقیقی مانند x داریم:

$$[-x]=\begin{cases}-[x] & x\in Z \quad \text{حالت اول}\\ -[x]-1 & x\notin Z\end{cases}$$

برهان:

حالت اول: اگر $x=n\in Z$، در این صورت $[x]=n$ و داریم:

$$x=n\Rightarrow-x=-n\Rightarrow[-x]=[-n]=-n\Rightarrow[-x]=-n$$

از طرف دیگر، $[x]=n$. بنابراین داریم:

$$[-x]=-[x]$$

حالت دوم: اگر $x\notin Z$، بنابراین $n\in Z$ موجود است، به‌طوری‌که $n<x<n+1$. در نتیجه $[x]=n$ و داریم:

$$n<x<n+1\xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}\ -1]{\text{طرفین را در}}-(n+1)<-x<-n$$

$$\Rightarrow-n-1<-x<-n$$

از طرف دیگر $[x]=n$ یا $-[x]=-n$. در نتیجه داریم:

$$-[x]-1<-x<-[x]\Rightarrow[-x]=-[x]-1$$

مثال: معادله‌ی $3-2[-x]=1$ را حل کنید.

$$3-2[-x]=1\Rightarrow-2[-x]=-2\Rightarrow[-x]=1$$

حالت اول: اگر $x\in Z$، در این صورت $[-x]=-[x]$. پس داریم:

$$[-x]=1 \text{ و } x\in Z\Rightarrow-[x]=1\Rightarrow[x]=-1$$
$$\Rightarrow-1\le x<0\Rightarrow x\in[-1,0)$$
$$x\in[-1,0) \text{ و } x\in Z\Rightarrow x=-1$$

حالت دوم: اگر $x \notin Z$ ، در این صورت $[-x]=-[x]-1$. پس داریم:

$$[-x]=1 \text{ و } x\notin Z \Rightarrow -[x]-1=1 \Rightarrow [x]=-2$$
$$\Rightarrow -2\le x<-1 \Rightarrow x\in[-2,1)$$
$$x\in[-2,1) \text{ و } x\notin Z \Rightarrow x\in(-2,-1)$$

مجموعه جواب معادله $=(-2,-1)\cup\{-1\}=(-2,-1]$

خاصیت۵. برای هر عدد حقیقی مانند x داریم:

$$[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in Z \quad \text{حالت اول}\\ -1 & x\notin Z \quad \text{حالت دوم}\end{cases}$$

برهان:

حالت اول: اگر $x\in Z$ ، با توجه به خاصیت ۴ داریم:

$$[-x]=-[x]\Rightarrow [x]+[-x]=[x]-[x]=0$$

حالت دوم: اگر $x\notin Z$ با توجه به خاصیت ۴ داریم:

$$[-x]=-[x]-1\Rightarrow [x]+[-x]=[x]-[x]-1=-1$$

مثال: مجموعه جواب معادله‌ی $3[x]+2[-x]=6$ را به‌دست آورید.

حل:

حالت اول: اگر $x\in Z$ ، در این صورت $[x]+[-x]=0$.

بنابراین داریم:

$$3[x]+2[-x]=6\Rightarrow [x]+2([x]+[-x])=6$$
$$\Rightarrow [x]=6\Rightarrow 6\le x<7$$
$$6\le x<7 \text{ و } x\in Z\Rightarrow x=6$$

حالت دوم: اگر $x\notin Z$ ، آن‌گاه $[x]+[-x]=-1$.

بنابراین داریم:

$$3[x]+2[-x]=6\Rightarrow [x]+2([x]+[-x])=6$$
$$\Rightarrow [x]-2=6\Rightarrow [x]=8\Rightarrow 8\le x<9$$
$$8\le x<9 \text{ و } x\notin Z\Rightarrow x\in(8,9)$$

مجموعه جواب معادله $=(8,9)\cup\{6\}$

مثال: معادله‌ی $\left[\frac{5}{3x-7}\right]+\left[\frac{-5}{3x-7}\right]=0$ چند جواب دارد؟

حل: فرض کنیم $k=\frac{5}{3x-7}$ ، بنابراین داریم:

$$[k]+[-k]=0$$

رابطه‌ی اخیر برای هر $k\in Z$ برقرار است. بنابراین معادله بی‌شمار ریشه به‌صورت زیر دارد:

$$k=\frac{5}{3x-7}\Rightarrow x=\frac{7k+5}{3k}$$

برای هر $k\in z \neq 0$ ریشه‌ای از معادله به‌دست می‌آید.

خاصیت۶. اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید:

$[x+y]=[x]+[y]+1$ یا $[x+y]=[x]+[y]$

برهان: برای هر $y\in R$ و x داریم:

$$x=[x]+\alpha\ ;\ 0\le\alpha<1$$

$$y=[y]+\beta\ ;\ 0\le\beta<1$$

اکنون فرض کنیم $[x]=n$ و $[y]=m$ که $m\in Z$ و n؛

پس:

$$x+y=[x]+[y]+\alpha+\beta$$
$$\Rightarrow x+y=n+m+\alpha+\beta$$

$$\Rightarrow [x+y]=[n+m+\alpha+\beta]$$
$$\Rightarrow [x+y]=n+m+[\alpha+\beta]$$
$$\Rightarrow [x+y]=[x]+[y]+[\alpha+\beta] \quad (1)$$

از طرف دیگر داریم:

$$\begin{cases}0\le\alpha<1\\ 0\le\beta<1\end{cases}\Rightarrow 0\le\alpha+\beta<2$$

بنابراین دو حالت را در نظر می‌گیریم.

حالت اول: اگر $0\le\alpha+\beta<1$ ، بنابراین $[\alpha+\beta]=0$. در نتیجه با توجه به رابطه‌ی ۱ داریم:

$$[x+y]=[x]+[y]$$

حالت دوم: اگر $1\le\alpha+\beta<2$ ، پس $[\alpha+\beta]=1$. در نتیجه با توجه به رابطه‌ی ۱ داریم:

$$[x+y]=[x]+[y]+1$$

نتیجه: با توجه به خاصیت۶ برای عددهای حقیقی x و y می‌توان نوشت:

$$[x+y]\le[x]+[y]$$

منابع

۱. امیری، حمیدرضا و صدر، میرشهرام و حسینی، سیدعلی. خودآموز ریاضیات۲. مؤسسه‌ی آموزش از راه دور. چاپ دوم. ۱۳۸۵.

۲. قندهاری، احمد و امیری، حمیدرضا. تابع. انتشارات مدرسه‌ی برهان. چاپ اول. ۱۳۷۶.

۳. فرهنگ ریاضیات. گروه ریاضی انتشارات مدرسه. انتشارات مدرسه‌ی برهان. چاپ سوم. ۱۳۸۵.

۴. شهریاری، پرویز. ریاضیات محاسبه‌ای۳. انتشارات مجید. چاپ دوم. ۱۳۷۵.

معرفی سایت‌های ریاضی جهان

۱. AAAmath.com

آدرس اینترنتی: http://www.aaamath.com

فهرست اصلی:

۱. محتویات (Contents)
۲. عنوان‌های ریاضی (Math Topics)
۳. سطوح دسته‌بندی‌های سنی مدرسه‌ای
(Grade School Levels)

فهرست مطالب با عنوان‌های ریاضی:

۱. جبر (Algebra)
۲. اعشاری‌ها (Decimals)
۳. تقسیم (Division)
۴. معادلات (Equations)
۵. برآورد (Estimation)
۶. کسرها (Fractions)
۷. هندسه (Geometry)
۸. نمودارها (Graphs)
۹. ریاضیات ذهنی (Mental Math)
۱۰. آمار (Statistics)

۲. Maths Is Fun

آدرس اینترنتی: http://www.mathsisfun.com

فهرست اصلی:

۱. فهرست ریاضی (Math Menu)
۲. معماها (Puzzles)
۳. محاسبات (Calculators)
۴. مطالب دیگر (Other Bits)

عنوان‌های فهرست ریاضی:

۱. عدد و جبر (Number & Algebra)
۲. شکل، فضا و اندازه (Shape, Space & Measure)
۳. هندسه (Geometry)
۴. جابه‌جایی اطلاعات (Handling Data)
۵. گوناگون (Miscellaneous)

۳. Karl's Calculus Tutor

آدرس اینترنتی: http://www.karlscalculus.org

فهرست موضوعی:

۱. نظریه‌ی اعداد (Number Theory)
۲. حدود (Limits)
۳. پیوستگی (Continuity)
۴. مشتق‌ها (Derivatives)
۵. کاربردهای مشتق (Applications of Derivatives)
۶. نماها و لگاریتم‌ها (Exponentials and Logarithms)
۷. توابع مثلثاتی (Trigonometric Functions)
۸. ترفندهای بیشتر به وسیله‌ی مشتق‌ها
(More Tricks With Derivatives)
۹. تمرین میان ترم (Practice Middle-Term)
۱۰. انتگرال‌ها (Integrals)
۱۱. روش‌های انتگرال گیری (Methods of Integrations)
۱۲. کاربردهای انتگرال‌ها (Application of Integrals)

۴. Math-net

آدرس اینترنتی: http://www.math-net.org

موضوع سایت: ارائه‌ی اطلاعات و آگاهی‌های بین‌المللی پیرامون ریاضیات در چارچوب یک دستگاه ارتباطی منظم و با برنامه

فهرست اصلی:

۱. رویدادها (Events)
۲. پیشنهادها (Recommendations)
۳. عضویت (Membership)
۴. اتحادیه‌ی بین‌المللی ریاضیات
(International Mathematical Union)
۵. اخبار (News)

۵. Mathbook.com

آدرس اینترنتی: http://www.mathbook.com

ویژگی اصلی سایت: مطالب آن در قالب بسته‌هایی حاوی مطالبی پیرامون ریاضی ارائه شده است.

فهرست موضوعی

۱. بسته‌ی هندسه‌ی تحلیلی (Analytic Geometry Store)
۲. بسته‌ی ریاضیات باستان (Ancient Mathematics Store)
۳. بسته‌ی جبر بول (Boolean Algebra Store)
۴. بسته‌ی حساب دیفرانسیل و انتگرال (Calculus Store)
۵. بسته‌ی هندسه‌ی اقلیدسی (Euclidean Geometry Store)
۶. بسته‌ی عدد فیبوناچی (Fibonacci Number store)
۷. بسته‌ی حساب دبیرستانی
(High School Arithmetic Store)
۸. بسته‌ی تاریخ ریاضیات (History Mathematics Store)
۹. بسته‌ی انتگرال‌ها (Integrals Store)
۱۰. بسته‌ی جبر خطی (Linear Algebra Store)
۱۱. بسته‌ی لگاریتم‌ها (Logarithms Store)
۱۲. بسته‌ی بازی‌های ریاضی (Math Games Store)
۱۳. بسته‌ی معماهای ریاضی (Math Puzzles store)
۱۴. بسته‌ی جبر ماتریسی (Matrix Algebra store)
۱۵. بسته‌ی نظریه‌ی اعداد (Number Theory Store)
۱۶. بسته‌ی نظریه احتمال (Probability Theory Store)
۱۷. بسته‌ی آمار (Statistics Store)
۱۸. بسته‌ی نظریه‌ی نسبیت (Theory of Relativity Store)
۱۹. بسته‌ی توپولوژی (Topology Store)
۲۰. بسته‌ی مثلثات (Trigonometry Store)

مربع لاتین $n \times n$

۱,۲,۳,...,n

و کاربردهای آن

● سیمین اکبری‌زاده
دبیر ریاضی ناحیه یک اراک

مربع لاتین

مربع لاتین عبارت است از ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های ۱،۲،۳،...،n ، به طوری که در هیچ سطر و ستونی، درایه‌ها تکراری نباشند؛ مثل:

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

آزمون۱ . در یک جدول ۴×۴ ، عددهای ۱ تا ۴ به صورتی نوشته شده‌اند که در هیچ سطر و ستونی عدد تکراری وجود ندارد. عددهای نوشته شده در چهار تا از خانه‌های این جدول را، مطابق شکل زیر می‌دانیم. عدد موجود در خانه‌ای که با * مشخص شده است، چه می‌تواند باشد؟

۱			
	۲		۳
		*	
			۲

الف) ۱ ب) ۴ ج) ۳ د) ۲ هـ) نامعلوم.

پاسخ: درایه مورد نیاز در مرحله‌ی iام را با a_i نام‌گذاری می‌کنیم.

۱	a_3	a_4	a_1
	۲		۳
	a_5	*	a_2
			۲

a_1 : عددی به‌جز ۱ ، ۳ و ۲ باید باشد، لذا ۴ است.
a_2 : عددی به جز ۴ ، ۳ و ۲ باید باشد، لذا ۱ است.
a_3 : عددی به‌جز ۱ ، ۴ و ۲ باید باشد، لذا ۳ است.
a_4 : عددی به‌جز ۱ ، ۳ و ۴ باید باشد، لذا ۲ است.
a_5 : عددی به‌جز ۳ ، ۲ و ۱ باید باشد، لذا ۴ است.

و نهایتاً، * عددی به‌جز ۲ ، ۱ و ۴ باید باشد، لذا ۳ است. پس باید گزینه‌ی ج علامت زده شود.

آزمون۲ . در خانه‌های خالی مربع زیر به چند طریق می‌توان اعداد ۱ تا ۳ را قرار داد، به طوری که در هیچ سطر و ستونی عدد تکراری نباشد؟

	۳	

الف) ۲ ب) ۴ ج) ۶ د) ۸ هـ) ۱۲

پاسخ: برای a_1 دو حالت وجود دارد: ۱ یا ۲. در هر حالت، ستون دوم پر می‌شود. و حالا برای a_2 هم دو حالت وجود دارد: ۱ یا ۲. با قرار دادن عدد در خانه‌ی a_2، ستون‌های اول و سوم به‌طور یکتا پر می‌شوند. پس تعداد حالات ۴=۲×۲، و گزینه‌ی درست «ب» است.

	a_1	
a_2	۳	

جواب‌ها عبارت‌اند از:

۱)

۳	۲	۱
۱	۳	۲
۲	۱	۳

۲)

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۳)

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

۴)

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

آزمون۳. به چند طریق می‌توان جدول نیمه‌پر زیر را با اعداد ۱ تا ۴ طوری پر کرد که در هیچ سطر و ستونی عدد تکراری نداشته باشیم؟

۱	۲		
	۱	۲	
		۱	

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ هـ) !۴

پاسخ: دو خانه‌ی خالی سطر اول را به‌صورت «۴-۳» یا «۳-۴» می‌توان پر کرد. اگر این دو درایه را از چپ به راست به‌ترتیب با سه و چهار پر کنیم، به‌ترتیب درایه‌های چهارم سطر دوم، اولِ سطر دوم، چهارمِ سطر سوم، اولِ سطر سوم، دوم سطرِ سوم، و درنهایت درایه‌های سطر چهارم به‌صورت یکتا تعیین می‌شوند. بنابراین، برای هریک از دو روش پر کردن سطر اول، یک حالت برای پر کردن بقیه‌ی جدول وجود دارد. پس جواب ۲=۱×۲، و گزینه‌ی درست ج است. جواب‌ها عبارت‌اند از:

۱)

۱	۲	۴	۳
۳	۱	۲	۴
۴	۳	۱	۲
۲	۴	۳	۱

۲)

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

دو مربع لاتین متعامد

دو مربع لاتین $n \times n$، $L_1 = [a_{ij}]$ و $L_2 = [b_{ij}]$ را متعامد گوییم، هرگاه درایه‌های ماتریس $[(a_{ij}, b_{ij})]$ که از زوج‌های مرتب تشکیل شده‌اند، تکراری نباشند. مثلاً دو مربع لاتین ۳×۳ زیر متعامد هستند.

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} (1,1) & (2,2) & (3,3) \\ (2,3) & (3,1) & (1,2) \\ (3,2) & (1,3) & (2,1) \end{bmatrix}$$

مربع‌های لاتین متعامد، علاوه بر جذابیت ریاضی، کاربردهای فراوانی در طرح‌های آزمایشی، کشاورزی، داروسازی، رمزنگاری و نظریه‌ی کدگذاری دارند که در ادامه، دو نوع از این کاربردها را ارائه خواهیم کرد.

کاربرد مربع لاتین

کاربرد ۱. مربع‌های لاتین در طرح آزمایش‌ها کاربرد دارند. مثلاً، آزمایشی از کارایی ماشین‌های گوناگون نخ‌ریسی در یک کارخانه را می‌توان با استفاده از دو مربع لاتین متعامد به صورت زیر انجام داد. فرض کنید، پنج ماشین نخ‌ریسی با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ توسط پنج کارگر به نام‌های **اکبر، بابک، جواد، داود** و **هرمز** در پنج روز اول هفته به کار گرفته می‌شوند و می‌خواهیم کارآیی این ماشین‌ها را روی پنج نوع متفاوت از الیاف A، B، C، D و E آزمایش کنیم.

چهارشنبه	سه‌شنبه	دوشنبه	یکشنبه	شنبه	
۱A	۲B	۳C	۴D	۵E	اکبر
۲D	۴C	۵A	۳E	۱B	بابک
۳B	۵D	۲E	۱C	۴A	جواد
۴E	۳A	۱D	۵B	۲C	داود
۵C	۱E	۴B	۲A	۳D	هرمز

هر کارگر، هر روز با یکی از پنج ماشین کار می‌کند و یکی از پنج نوع از الیاف را می‌آزماید. هدف این است که بعد از روز پنجم، هر کارگر با هر پنج ماشین و با هر پنج نوع از الیاف کار کرده باشد. این جدول که از دو مربع لاتین متعامد ۵×۵ گرفته شده است، این مسأله را حل می‌کند. با توجه به جدول فوق، مثلاً بابک روز سه‌شنبه با ماشین شماره‌ی ۳ الیاف نوع E را به کار می‌گیرد. بدین ترتیب می‌توانیم کارایی هر نوع ماشین را با هر نوع از الیاف آزمایش کنیم و نظر کارگران را هم دخالت دهیم.

کاربرد ۲. به ازای هر n داده شده می‌توان یک مربع لاتین از مرتبه‌ی n ساخت. از مربع‌هایی که در زیر به ازای $n = 4$ و $n = 5$ ساخته شده‌اند، می‌توان به راحتی برای حالت کلی نیز ایده گرفت.

۱	۲			
۲				
۳				
۴	۳			

۱	۲		
۲			
			۳

دقت کنید که در هر دو مربع فوق، بعضی از درایه‌های گوشه‌ای نوشته شده‌اند. در مربع اول چهار تا و در دیگری شش تا از درایه‌ها نوشته شده‌اند. جالب این است که اگر در هریک از این دو مربع، فقط این درایه‌ها را به ما بدهند، می‌توانیم بقیه‌ی درایه‌ها را به طور یکتا به دست آوریم. مثلاً دو مربع زیر کامل‌شده‌ی مربع‌های بالا هستند.

۱	۲	۳	۴	۵
۲	۳	۴	۵	۱
۳	۴	۵	۱	۲
۴	۵	۱	۲	۳
۵	۱	۲	۳	۴

۱	۲	۳	۴
۲	۳	۴	۱
۳	۴	۱	۲
۴	۱	۲	۳

تعداد درایه‌های داده شده در حالت کلی $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ است (منظور از نماد [ ] جزء صحیح است). حال فرض کنید، درایه‌های یک مربع لاتین اطلاعاتی است که شما می‌خواهید به شخص مورد اعتماد خود بدهید. یک مربع $n \times n$ از n^2 اطلاعات تشکیل می‌شود. طبق الگوی فوق، فقط کافی است که حدود $\frac{1}{4}$ از اطلاعات را منتقل کنید. شخص مورد اعتماد می‌تواند بقیه را به طور یکتا پیدا کند.

سودوکو

«سودوکو»[1] واژه‌ای ژاپنی به معنای عددهای بی‌تکرار است و به جدول اعدادی گفته می‌شود که امروزه یکی از سرگرمی‌های رایج در کشورهای گوناگون جهان به شمار می‌آید.

نخستین جدول سودوکو را یک ریاضی‌دان اروپایی در قرن هجدهم طراحی کرد. سودوکو انواع گوناگون ساده، متوسط، دشوار و خیلی دشوار دارد. سودوکوهای بسیاری هم برای کودکان طراحی می‌شوند. کتاب‌های گوناگون و متنوعی نیز برای آموزش طراحی و حل این نوع جدول منتشر شده‌اند. این جدول هم‌اکنون در بسیاری از روزنامه‌های معتبر دنیا هر روزه به چاپ می‌رسد و کتاب‌های مجموعه‌ی این جدول‌ها نیز توسط بخش انتشارات هر روزنامه منتشر می‌شود. این بازی که در «نمایشگاه بین‌المللی بازی و سرگرمی آلمان» به عنوان محبوب‌ترین و پرطرفدارترین بازی شناخته شده است، قانون بسیار ساده و روشنی دارد.

نوع متداول سودوکو در واقع نوعی جدول است که ۹ ستون عمودی و ۹ ستون افقی دارد، و البته کل جدول هم به ۹ ستون کوچک‌تر تقسیم می‌شود. شما باید اعداد ۱ تا ۹ را در هریک از جدول‌های کوچک‌تر بدون تکرار بنویسید؛ به صورتی که در هر ستون بزرگ‌تر افقی یا عمودی هیچ عددی تکرار نشود. در واقع، هم باید از تمام اعداد ۱ تا ۹ در همه‌ی ستون‌های عمودی و افقی استفاده کنید و هم باید هیچ عددی تکرار نشود و در همه‌ی مربع‌های ۳ ستونی کوچک‌تر نیز به همین ترتیب همه‌ی اعداد ۱ تا ۹ بیایند و تکرار هم نشوند. همیشه به عنوان راهنمایی چند عدد در جدول از قبل مشخص می‌شوند تا بقیه‌ی اعداد را شما پیدا کنید.

سودوکو واژه‌ای ژاپنی است، اما ریشه‌ی این بازی را باید در آمریکای شمالی جست‌وجو کرد. نخستین نمونه‌های شناخته‌شده‌ی این بازی در سال ۱۹۷۹ در مجله‌ی «بازی‌های حروف و معماهای با مداد دل»[۲] به چاپ رسید. طراح این جدول‌ها ناشناس است، اما ویل شورتز، دبیر جدول روزنامه‌ی «نیویورک تایمز» توانسته است، در روندی منطقی که بی‌شباهت به حل سودوکو نیست، حدس بزند این ناشناس که بوده است. شورتز فهرست همکاران شماره‌های گوناگون مجله‌ی دل را بررسی کرد و توانست تنها یک نام مشترک را در شماره‌های حاوی سودوکو پیدا کند، نامی که در شماره‌های دیگر تکرار نشده بود: هوارد گارنز، معمار، اهل ایندیانا پلیس، متوفی به سال ۱۹۸۹. مسئولان فعلی در مجله‌ی معماهای دل گفته‌اند، در آرشیو مطالب مجله سندی وجود ندارد که گارنز را طراح این جدول‌ها معرفی کند، اما آن‌ها نتیجه‌گیری روزنامه‌نگار نیویورک تایمز را رد نکرده‌اند.

ادامه‌ی داستان آسان‌تر است. مجله‌ی دل به چاپ این معماها ادامه داد و در سال ۱۹۸۴، مجله‌ی ژاپنی «نیکولی» جدول‌هایی با همان ساختار را به چاپ رساند. نیکولی این جدول را «سوجی و ادکوشین نی کاگیرو» نام نهاد که چیزی جز برگردان ژاپنی «اعداد باید یکتا باشند» نیست. خیلی زود مردم این اسم طولانی را خلاصه کردند و آن را سودوکو نام نهادند؛ یعنی اعداد یکتا. نشریه‌ی نیکولی این نام را به ثبت رساند و جدول هم به این نام مشهور شد. جالب این‌جاست که هنوز بسیاری از ژاپنی‌ها این جدول را با نام انگلیسی آن می‌شناسند: «نامبر پلیس» یا «جاگذاری اعداد». در حالی که انگلیسی‌ها واژه‌ی ژاپنی سودوکو را ترجیح می‌دهند.

اتفاق مهم بعدی در نیمکره‌ی جنوبی زمین روی داد. **واین گولد**، شهروند نیوزیلندی که پیش از تغییر حاکمیت هنگ‌کنگ در این منطقه به قضاوت مشغول بود، در سفری به ژاپن با سودوکو آشنا شد و برنامه‌ای رایانه‌ای برای طراحی این جدول‌ها نوشت. او مسئولان روزنامه‌ی تایمز لندن را به چاپ این جدول‌ها تشویق کرد و درنهایت، توانست اولین جدولش را در نوامبر ۲۰۰۴ به چاپ برساند. تأثیر این جدول در انگلستان بسیار سریع و شدید بود! دیگر روزنامه‌های لندن به صف چاپ‌کنندگان سودوکو پیوستند و خیلی زود رقابتی شدید آغاز شد؛ به‌طوری که روزنامه‌ی «دیلی تلگراف»، سودوکو را در صفحه‌ی اول به چاپ رساند. همه تلاش می‌کردند، بهترین سودوکو را طراحی کنند.

برنامه‌های رایانه‌ای بسیاری برای طراحی سودوکو نوشته شدند و کار به جایی رسید که در جولای ۲۰۰۵، تورنومنت سودوکو برگزار شد و رسانه‌های تصویری انگلستان آن را به شکل گسترده‌ای تحت پوشش قرار دادند. در پایان تورنومنت، سودوکوی بزرگی به ضلع ۹۲ متر در تپه‌ای سبز در نزدیکی شهر بریستول حجاری شد. ولی خیلی زود مشخص شد، لقب بزرگ‌ترین سودوکوی جهان به اندازه‌ی خود جدول تأثیرگذار نیست.

در بهار سال ۲۰۰۵، سودوکو به آمریکا رفت و مردم هم از این معمای جدید استقبال کردند. شدت استقبال به قدری زیاد بود که تولید محصولات خانگی کاهش یافت. مردم به جای کار به حل سودوکو روی آورده بودند! با این حال، هم‌زبانان بریتانیایی آن‌ها اشتیاق بیشتری نشان دادند.

قوانین راهنما: اگر شما هم مداد به‌دست بگیرید و چند جدول سودوکو را حل کنید، به سرعت می‌توانید قوانین و روش‌های مفیدی را کشف کنید. ابتدایی‌ترین راهبرد حل این معماها این است که هر خانه را بررسی کنید و تمام اعدادی را که می‌توانند در آن قرار بگیرند، فهرست کنید. برای این کار هم کافی است بررسی کنید، کدامین عدد است که با سطر و ستون متناظر خود مغایرتی ندارد. اگر خانه‌ای را پیدا کردید که فقط می‌توانست یک عدد داشته باشد، می‌توانید عدد مذکور را در آن خانه بنویسید.

روش کامل‌تر این است که تمام خانه‌های یک ردیف، ستون یا واحد (مربع‌های کوچک ۳×۳) را بررسی کنید. معمولاً در هر ردیف یا ستون چند خانه از قبل پر شده‌اند. تمام عددهایی را که می‌توانند در هر خانه قرار بگیرند، فهرست کنید و خانه‌ای را که تنها یک گزینه‌ی ممکن دارد، پر کنید. با پر کردن هر خانه، عدد متناظر از دیگر فهرست‌ها حذف می‌شود و حل به همین ترتیب ادامه می‌یابد. بسیاری از سودوکوها را می‌توان با تکرار همین دو روش ساده حل کرد.

کیپرا، ریاضی‌دان اهل مینسوتا توضیح می‌دهد، قوانین سودوکو رده‌بندی‌های متفاوتی دارند که روز به روز هم پیچیده‌تر می‌شوند. قوانین سطح اول آن‌هایی هستند که یک خانه را به یک عدد یا یک عدد را به یک خانه محدود می‌کنند. در سطح دوم قوانینی هستند که به دو خانه‌ی درون یک سطر، ستون یا واحد اعمال می‌شوند؛ بدین شکل که این دو خانه نمی‌توانند با بیش از دو حالت پر شوند. درنتیجه این دو حالت از دیگر خانه‌های سطر، ستون یا واحد متناظر حذف می‌شوند. قوانین سطح سوم بر سه خانه اعمال می‌شوند و عددهای متناظر را در سایر خانه‌ها حذف می‌کنند. به همین شکل می‌توان قوانین را تا سطح نهم که در مورد ۹ خانه‌ی تشکیل دهنده‌ی یک سطر، ستون یا واحد اظهارنظر می‌کنند، تعمیم داد.

تمرین. اعداد ۱ تا ۹ را در هریک از سطرها، ستون‌ها و مربع‌های کوچک ۳ در ۳ طوری قرار دهید که فقط یک بار تکرار شوند.

۶	۷		۴					
	۳				۲		۵	
			۳		۵			۴
۴		۷		۶		۵	۹	۳
		۸	۹		۴	۱	۷	
۹					۱			
			۵				۱	۷
				۴	۶			۲
	۴				۷	۸		

جدول ۱

		۳	۹				۱	
		۲		۶	۴	۳		۵
					۲			۷
	۴	۵			۸			
	۷				۶			۲
			۱			۴		
۴	۵				۷			۶
	۳			۴				
			۶	۳				۱

جدول ۲

۴	۱			۵	۹	۳		
					۱	۲		
۸	۲					۹		
		۸		۲	۴		۹	
		۱			۵			۳
۶	۹			۱	۷			۲
۵						۴	۷	
			۹	۴		۵	۲	
								۶

جدول ۳

پاسخ تمرین را در ص ۳۰ مجله ملاحظه نمایید.

تفریح اندیشه

● حسین نامی ساعی

ابعاد مستطیل

مسئله: اضلاع یک مستطیل اعدادی صحیح هستند. اگر بدانیم عددی که نماینده‌ی محیط مستطیل است، با عدد نماینده‌ی مساحت آن برابر است. ابعاد مستطیل را پیدا کنید.

حل: اگر ابعاد مستطیل را x و y فرض کنیم، این معادله را خواهیم داشت:

$$۲x + ۲y = x.y$$

و از آن‌جا:

$$x = \frac{۲y}{y - ۲}$$

برای این‌که x و y اعدادی مثبت باشند، باید عدد $y-۲$ هم مثبت، یعنی y بزرگ‌تر از ۲ باشد.

حالا معادله را چنین می‌نویسیم:

$$x = \frac{۲y}{y - ۲} = \frac{۲(y - ۲) + ۴}{y - ۲} = ۲ + \frac{۴}{y - ۲}$$

برای این‌که x عددی صحیح مثبت باشد، باید $\frac{۴}{y - ۲}$ هم عددی صحیح مثبت باشد و به ازای $y > ۲$ وقتی این شرط برقرار است که y یکی از اعداد ۳، ۴ یا ۶ باشد و در این صورت مقادیر متناظر x مساوی ۶، ۴ و ۳ می‌شود. به این ترتیب شکل مجهول، مستطیلی خواهد بود به ابعاد ۳ و ۶ و یا مربعی به ضلع ۴.

تجزیه‌ی چند جمله ای های دلخواه

۱۲

• پرویز شهریاری

فرض کنید قاعده‌ای برای مقایسه‌ی چندجمله‌ای f با چندجمله‌ای دیگر f^* داده باشند. این قاعده را هم‌ریختی ضرب می‌نامیم، به شرطی که $f \to f^*$ یک به یک باشد (یعنی از $f^* = g^*$، نتیجه شود $f = g$)، و اگر هر بار که این برابری برقرار باشد: $f = gh$، این برابری هم درست باشد: $f^* = g^*h^*$.

در ضمن، اگر برای هر چندجمله‌ی f و چندجمله‌ای‌های g' و h' که دارای همان ویژگی باشند: $f^* = g'h'$، چندجمله‌ای‌های g و h وجود داشته باشند؛ به نحوی که: $f = gh$، و $h^* = h'$ و $g^* = g'$.

روشن است، هرگاه به ما یک هم‌ریختی ضرب داده باشند،

مسئله‌ی مربوط به تجزیه‌ی چندجمله‌ای f به صورت عامل‌های خود، به طور کامل هم‌ارز تجزیه‌ی چندجمله‌ای f به صورت ضرب عامل‌ها خواهد بود.

مثال: برای هر چندجمله‌ای $f(x)$ از درجه‌ی n، فرض می‌کنیم:

$$f^*(x) = (-1)^n f(-x) \qquad (1)$$

روشن است که تناظر $f \to f^*$، یک هم‌ریختی ضرب است. اگر چندجمله‌ای f دارای علامت‌های متناوب باشد، آن‌وقت چندجمله‌ای f^* یک چندجمله‌ای مثبت می‌شود. بنابراین، با استفاده از رابطه‌ی (۱) می‌توان به مسئله‌ای رسید که تجزیه‌ی چندجمله‌ای را به مسئله‌ی «یاکوکین» که در شماره‌ی قبل آن را حل کردیم، یعنی مسئله‌ی چندجمله‌ای مثبت برساند.

گاهی بهتر است، از هم‌ریختی ضرب نه در تمامی چندجمله‌ای، بلکه تنها در زیرمجموعه‌ی M آن استفاده کنیم. در این مورد لازم است، به جای مجموعه‌ی f، مجموعه‌ی M را به کار گیریم که شامل همه‌ی بخشیاب‌های این چندجمله‌ای است.

مثال: فرض کنید M_n، مجموعه‌ی همه‌ی چندجمله‌ای‌هایی باشد که درجه‌ی آن‌ها از n تجاوز نمی‌کند و مقدار ثابت آن‌ها مخالف صفر است. به هر چندجمله‌ای زیر:

$$f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

از این مجموعه، چندجمله‌ای f^* را نسبت می‌دهیم که همان ضریب‌ها را داشته باشد، ولی در جهت عکس. یعنی چندجمله‌ای که با این دستور معین شده باشد:

$$f^* = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

به سادگی دیده می‌شود: $f^*(x) = x^n f(\frac{1}{x})$ که به روشنی $f \to f^*$ را نتیجه می‌دهد، عبارت است از یک هم‌ریختی ضرب. برای نمونه، این چندجمله‌ای را درنظر می‌گیریم:

$$f(x) = 7x^6 + x^5 + 4x^4 + 7x + 6$$

به‌کارگیری مستقیم روش «یاکوکین» درباره‌ی این چندجمله‌ای، به محاسبه‌ای کم و بیش طولانی نیاز دارد. ولی اگر به چندجمله‌ای f^* بپردازیم، به همان مثال ۱ می‌رسیم که در شماره‌ی قبل دیدیم؛ البته باید جدول عددهای اول را در اختیار داشته باشیم.

□

از این به بعد، نقش اساسی را هم‌ریختی ضرب برای $f \to f_c$ به عهده دارد که درباره‌ی چندجمله‌ای‌های با دستور $f_c(x) = f(x + c)$ درست است که در آن، c عدد درست ثابتی است.

چندجمله‌ای مثبت (با ضریب‌های درست) را «مثبت کامل» گوییم، وقتی هریک از بخشیاب‌های آن هم مثبت باشد. روشن است که برای هر چندجمله‌ای مثبت کامل، مسئله‌ی یاکوکین هم‌ارز است با مسئله‌ی کلی تجزیه‌ی چندجمله‌ای به عامل‌ها.

قضیه‌ی ۱. برای هر چندجمله‌ای f (با توان‌های مثبت و ضریب‌های درست و ضریب بزرگ‌ترین درجه‌ی مثبت)، عدد نامنفی c وجود دارد، به نحوی که چندجمله‌ای f_c مثبت کامل باشد.

برای اثبات این قضیه، راحت‌تر است که چندجمله‌ای با ضریب‌های حقیقی (و نه درست) را درنظر بگیریم. در آغاز فرض می‌کنیم، همه‌ی توان‌های چندجمله‌ای و نیز ضریب بزرگ‌ترین توان، مثبت باشند. بخشیاب چندجمله‌ای f را، اکنون چندجمله‌ای دلخواه g با ضریب‌های حقیقی می‌گیریم (توان‌های g را مثبت و کوچک‌تر از n چندجمله‌ی f، و ضریب بزرگ‌ترین درجه را هم مثبت فرض می‌کنیم).

مثل حالت چندجمله‌ای با ضریب‌های درست و با ضریب‌های مثبت، به شرطی که همه‌ی ضریب‌های این چندجمله‌ای نامنفی باشند، آن را مثبت و اگر همه‌ی ضریب‌های بخشیاب‌های آن مثبت باشند، آن را مثبت کامل می‌نامیم. یادآوری می‌کنیم، چندجمله‌ای با ضریب‌های درست در این مفهوم، با مفهومی که در این‌جا برای چندجمله‌ای‌های مثبت کامل آوردیم، تطبیق نمی‌کند (درباره‌ی چندجمله‌ای‌های با ضریب‌های درست، آن را «مثبت کامل با عددهای درست» می‌نامیم). در واقع، همه‌ی بخشیاب‌های با ضریب‌های مثبت چندجمله‌ای‌های دارای ضریب‌های درست می‌توانند مثبت باشند، در حالی که این چندجمله‌ای‌ها ممکن است بخشیاب‌هایی داشته باشند که نامنفی و دارای ضریب‌های حقیقی (گنگ) باشند. روشن است که هر مثبت کامل (به مفهوم تازه) چندجمله‌ای با ضریب‌های درست، باید مثبت کامل با عددهای درست باشد. بنابراین قضیه‌ی ۱ به طور مستقیم از قضیه‌ی ۲، به این شرح، نتیجه می‌شود:

قضیه‌ی ۲. برای هر چندجمله‌ای f_0 با ضریب‌های حقیقی (و ضریب بزرگ‌ترین درجه‌ی مثبت)، عدد نامنفی و درست c وجود دارد که برای آن $f_0(x) = f_0(x + c)$ مثبت کامل باشد.

برای اثبات قضیه‌ی ۲، باید با دقت ساختار چندجمله‌ای‌های مثبت کامل با ضریب‌های حقیقی را تجزیه و تحلیل کنیم. چندجمله‌ای با ضریب‌های حقیقی را «نیم‌پایدار» می‌نامیم، وقتی که بخش‌های حقیقی همه‌ی ریشه‌های آن نامثبت باشند. روشن است که نتیجه‌ی چندجمله‌ای نیم‌پایدار، یک چندجمله‌ای نیم‌پایدار است و برعکس، هر بخشیابی از چندجمله‌ای نیم‌پایدار، یک چندجمله‌ای نیم‌پایدار است.

پیش‌قضیه‌ی ۱. چندجمله‌ای با ضریب‌های حقیقی، تنها وقتی مثبت کامل است که نیم‌پایدار باشد.

اثبات: روشن است که حاصل ضرب چندجمله‌ای‌های مثبت کامل، مثبت کامل است و برعکس، هر بخشیاب چندجمله‌ای مثبت کامل، مثبت کامل است. در ضمن می‌دانیم، هر چندجمله‌ای با ضریب‌های حقیقی، به صورت حاصل ضرب چندجمله‌ای‌های خطی و درجه‌ی دوم قابل تجزیه است. بنابراین کافی است، پیش‌قضیه را تنها برای چندجمله‌ای‌های اخیر ثابت کنیم. ولی در این حالت، اثبات پیش‌قضیه، خیلی زود به طور مستقیم و یا محاسبه‌ی ریشه‌ها به دست می‌آید.

برای اثبات قضیه‌ی ۲ تنها توجه می‌کنیم که برای هر ریشه‌ی α از چندجمله‌ای f، $\alpha - c$ ریشه‌ای از چندجمله‌ای f_c است، و برعکس، برای هر ریشه‌ی β از چندجمله‌ای f_c، عدد $\beta + c$ ریشه‌ای از چندجمله‌ای f است. به این ترتیب، همه‌ی شرط‌های قضیه‌ی ۲ برقرار هستند.

با اثبات قضیه‌ی ۲، قضیه‌ی ۱ هم به طور کامل ثابت می‌شود. اگر به چندجمله‌ای‌های با ضریب‌های درست برگردیم، این قاعده را برای تجزیه‌ی هر چندجمله‌ای از این گونه، به‌دست می‌آوریم.

قاعده. برای این که چندجمله‌ای f با ضریب‌های درست را تجزیه کنیم، باید:

۱. عدد درست و نامنفی c را طوری پیدا کنیم که چندجمله‌ای $g = f_c$ مثبت کامل باشد؛

۲. چندجمله‌ای g را به ضریب عامل‌ها تجزیه کنیم:

$$g = g_1 \dots g_r$$

۳. چندجمله‌ای‌های f_1، ... و f_r را برای چندجمله‌ای f با این دستورها پیدا کنیم: $f_1 = (g_1) - c, \dots, f_r = (g_r) - c$

تحقق قاعده‌ی ۳ خود به خود حاصل می‌شود و برای قاعده‌ی ۲ باید آن‌چه را در بند مربوط به «چندجمله‌ای مثبت» گفتیم، انجام داد. و اما آن‌چه به قاعده‌ی ۱ مربوط می‌شود. برای پیدا کردن عدد c معنایش می‌کنیم، ریشه‌های چندجمله‌ای f را به تقریب محاسبه کنیم (تا یک رقم بعد از ممیز) و به عنوان عدد c، کم‌ترین عدد درست را انتخاب کنیم که بزرگ‌تر از بخش‌های حقیقی همه‌ی ریشه‌های آن باشد.

روش دیگر محاسبه‌ی عدد c بر این اساس است که قدرمطلق مقدار بخش حقیقی هر عدد مختلط، بزرگ‌تر از مدول آن نباشد. به این ترتیب، هر عدد c بزرگ‌تر از مدول همه‌ی ریشه‌های چندجمله‌ای f، که این ویژگی را دارد، مثبت کامل (نیم‌پایدار) است. از طرف دیگر، به سادگی می‌توان آزمایش کرد، مدول همه‌ی ریشه‌های چندجمله‌ای f از عدد $\frac{A}{a_n} + 1$ تجاوز نمی‌کند که در آن، $a_n > 0$ ضریب بزرگ‌ترین درجه‌ی چندجمله‌ای f، و A بزرگ‌ترین قدرمطلق مقدار سایر ضریب‌هاست. بنابراین هر عدد درست c، بزرگ‌تر از عدد ۱۱، و برای هدف ما مفید است.

راه سوم محاسبه‌ی عدد c این است که ما می‌توانیم پیش‌بینی کنیم، چندجمله‌ای مفروض نیم‌پایدار است یا نه. در این حالت، چندجمله‌ای f_c را پشت سر هم برای مقدارهای c، از ۰ به بالا آزمایش و نیم‌پایدار بودن آن را تحقیق می‌کنیم که به هر حال به مقدار لازم c می‌رسیم.

برای این که نیم‌پایدار بودن را معین کنیم، معیارهای متفاوتی وجود دارند. از بین این معیارها، ساده‌ترین آن‌ها را که متعلق به رائوس است، انتخاب می‌کنیم. فرض کنید:

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0$$

چندجمله‌ای دلخواهی با ضریب‌های حقیقی باشد. این جدول را تشکیل می‌دهیم:

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\dots$	a_{n-2k}
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\dots$	a_{n-2k-1}
$a_n a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-2}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$a_n a_{n-2k-1} - a_{n-1} a_{n-2k}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

قانون تشکیل دو سطر اول این جدول روشن است. اکنون به سطرهای $p \geq 2$ می‌پردازیم.[1] در qامین جا از $(p+1)$امین سطر، حاصل ضرب نخستین جمله‌ی $(p-1)$امین سطر در $(q+1)$امین جمله‌ی pامین سطر منهای حاصل ضرب نخستین جمله‌ی pامین سطر در $(q-1)$امین جمله‌ی $(p-1)$امین را قرار می‌دهیم. به سادگی دیده می‌شود، چنان عددی مثل $s \geq 1$ پیدا می‌شود که اولین جمله‌ی sامین سطر مخالف صفر است؛ در این صورت نخستین جمله‌های همه‌ی سطرهای بعدی برابر صفر می‌شوند.

معیار رائوس: چندجمله‌ای f تنها وقتی مثبت نیم‌پایدار است که نخستین جمله‌های نخستین سطرهای s جدول، مثبت باشند. اثبات این معیار بسیار دشوار است و ما آن را در این جا نمی‌آوریم.

یادداشت: هر سه روش به عدد c منجر می‌شود که برای آن، چندجمله‌ای f_c مثبت کامل، و مثل چندجمله‌ای با ضریب‌های حقیقی نیم‌پایدار است. از آن‌جا که ما چندجمله‌ای f_c را لازم داریم که ویژگی مثبت کامل در عددهای درست را داشته باشد، می‌توان این مبحث را حذف کرد. در حالت کلی هیچ معیاری برای مثبت کامل با عددهای درست وجود ندارد.

مسائلی برای حل

ریاضیات ۱

○ مجتبی رفیعی

۱. اگر $A=\{1,2,3,\dots,10\}$ ، $B=\{1,2,3,\dots,20\}$ و $A\subset X\subseteq B$. به جای X چند مجموعه می‌توان قرار داد؟

۲. مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که دو عدد $M=18^4\times125^{a-5}$ و $N=9^{b-2}\times25^2$ نسبت به هم اول باشند.

۳. مقادیر m و n را چنان تعیین کنید که عبارت x^4+mx+n بر عبارت x^2-2x-3 بخش‌پذیر باشد.

۴. اگر $x^2+x+1=0$ ، حاصل عبارت $x^3+\frac{1}{x^3}$ را حساب کنید.

۵. این عبارت‌ها را تجزیه کنید:

الف) $2x^2+5x-3$

ب) $y^3(a-x)-x^3(a-y)+a^3(x-y)$

۶. نشان دهید معادله‌ی خطی که از دو نقطه‌ی $A(p,0)$ و $B(0,q)$ می‌گذرد، به صورت $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$ است.

۷. اگر $x=\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}-\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$ باشد، حاصل x^3-3x را بیابید.

۸. طول قطر مستطیلی ۸ سانتی‌متر و زاویه‌ی بین دو قطر آن 60° است. مساحت مستطیل چند سانتی‌متر است؟

۹. معادله‌ی $2x^4-13x^3+24x^2-13x+2=0$ را حل کنید.

۱۰. انتهای کمان مقابل به زاویه‌ی θ در کدام ناحیه باشد تا تساوی زیر به ازای هر $\theta\neq\frac{k\pi}{2};(k\in Z)$ برقرار باشد؟

$$\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\frac{1}{\cos\theta}-\tan\theta$$

۱۱. عددی را بر اعداد ۵ و ۷ و ۸ تقسیم کرده‌ایم. باقی‌مانده‌ها به ترتیب ۲ و ۵ و ۷ و مجموع خارج قسمت‌ها برابر ۲۰ شده است. این عدد کدام است.

۱۲. اگر رأس سهمی $y=ax^2+2ax-3$ روی نیمساز ناحیه‌های اول و سوم قرار داشته باشد، مقدار a را تعیین کنید.

۱۳. مقادیر طبیعی n را چنان بیابید که داشته باشیم:

$$16^{2n-1}>8^{n+7}$$

ریاضیات ۲

○ سهرام صدر

۱. عبارت زیر را تعیین علامت کنید.

$$\frac{x^2-4}{(3-2x)(4x^2-4x+1)}$$

۲. حدود m را طوری تعیین کنید که نامساوی زیر به ازای جمیع مقادیر x برقرار باشد.

$$(-3m)x^2+2mx+1>0$$

۳. نامعادله‌ی زیر را حل کنید.

$$|2x+1|\le|x-2|$$

۴. معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$\frac{x-1}{2x}-\frac{1}{2x+1}=\frac{7-3x}{4x^2+2x}$$

۵. اگر $f(x)=ax+b$ باشد، حاصل $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را حساب کنید.

۶. معکوس تابع زیر را به دست آورید.

$$\begin{cases} f(x)=\frac{3x+7}{x+2} \\ R-\{2\}\to R-\{3\} \end{cases}$$

۷. اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ و $Ax=\begin{bmatrix}7 & 8\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ باشد، مطلوب است تعیین ماتریس x.

۸. به ازای چه مقدار m این دستگاه جواب دارد.

$$\begin{cases} 2mx-4y=6 \\ -4x+2my=2 \end{cases}$$

۹. عبارات زیر را حساب کنید.

الف) $\log_{25}^{\sqrt{125}}$ ‏ ‏ ‏ ب) $\log_{7}^{49}$

۱۰. معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید. $2\log_7^x=\log_7^{81}$

۱۱. اگر جمله‌ی عمومی یک تصاعد حسابی $t_n=2n+1$ باشد، مجموع ۳ جمله‌ی اول این تصاعد را حساب کنید.

۱۲. چهار واسطه‌ی هندسی بین $\frac{3}{8}$ و $\frac{128}{81}$ درج کنید.

۱۳. اگر $\sin\alpha=\frac{2}{3}$ و $\cos\beta=\frac{1}{5}$ (α و β حاده هستند)، عبارات $\cos(\alpha+\beta)$ را محاسبه کنید.

۱۴. هرگاه $\bar{v}_1=\begin{bmatrix}3\\ \sqrt{3}\end{bmatrix}$ و $\bar{v}_2=\begin{bmatrix}2\sqrt{3}\\ -2\end{bmatrix}$ باشد، زاویه‌ی بین دو بردار را محاسبه کنید.

۱۵. ارقام ۲، ۳، ۵، ۶ و ۷ را داریم. تعیین کنید:

الف) با آن‌ها چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت.

ب) چه تعداد از این اعداد فرد هستند.

ج) چه تعداد از آن‌ها کوچک‌تر از ۴۰۰ هستند.

هندسه ی ۱

هوشنگ شرقی

۱. به کمک استدلال استنتاجی ثابت کنید، دو زاویه‌ی متقابل به رأس با هم برابرند.

۲. از دو زاویه‌ی متمم، اندازه‌ی یکی چهاربرابر دیگری است. اندازه‌های دو زاویه را به‌دست آورید.

۳. ثابت کنید در هر مثلث متساوی‌الساقین، نیمساز زاویه‌ی خارجی رأس، موازی قاعده است.

۴. از نقطه‌ی M وسط ضلع AB از مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، عمود MD را بر وتر BC وارد می‌کنیم. ثابت کنید: $DC^2 - DB^2 = AC^2$

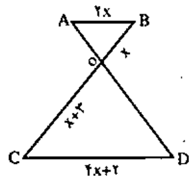
۵. از نقاط P و Q عمودهای PA و QB را بر خط d رسم می‌کنیم (P و Q یک طرف d قرار دارند). خطوط QA و PB یکدیگر را در نقطه‌ی R قطع می‌کنند و از R عمود RC را بر d رسم می‌کنیم.

ثابت کنید: $\frac{1}{RC} = \frac{1}{PA} + \frac{1}{QB}$

۶. مساحت ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقینی را که طول دو قاعده‌ی آن ۸ و ۱۴ سانتی‌متر و طول هر یک از دو ساق آن ۵سانتی‌متر است، به‌دست آورید.

۷. در مثلث ABC ($\hat{C} > \hat{A}$)، نقطه‌ی D را روی ضلع AB طوری در نظر می‌گیریم که $\hat{A} = B\hat{C}D$ باشد. اگر $BC=2$ و $AB=5$، طول AD را به‌دست آورید.

۸. در شکل زیر، $AB \parallel CD$ و اندازه‌ی پاره‌خط‌ها برحسب x روی شکل مشخص شده است. نسبت مساحت مثلث OAB به مساحت مثلث OCD را به‌دست آورید.



۹. ظرفی به‌شکل منشور قائم داریم که قاعده‌ی آن مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲۰ سانتی‌متر و ارتفاع آن $10\sqrt{3}$ سانتی‌متر است. این ظرف را پر از آب می‌کنیم و سپس محتویات آن را در ظرف دیگری به شکل استوانه و به شعاع قاعده‌ی ۵ سانتی‌متر خالی می‌کنیم. سطح آب تا چه ارتفاعی در این ظرف بالا می‌آید؟

۱۰. حجم و مساحت کل هرمی را به‌دست آورید که قاعده‌ی آن مربعی به ضلع ۲ سانتی‌متر و ارتفاع آن $\sqrt{7}$ سانتی‌متر باشد و وجه‌های جانبی آن، مثلث‌هایی متساوی‌الساقین و هم‌نهشت باشند.

حسابان

احمد قندهاری

۱. تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4$ مفروض است:

الف) ثابت کنید این تابع در $\mathbb{R}$ یک به یک است.

ب) ضابطه‌ی تابع معکوس را بیابید.

۲. تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ مفروض است، تابع را چنان مشخص کنید، تا نمودار آن محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱- قطع کند و خط‌های $x = -2$ و $y = 1$ معادله‌های مجانب‌های آن باشند.

۳. مطلوب است محاسبه‌ی $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 6x^2} - x)$

۴. تابع با ضابطه‌ی

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}} & , \quad x < 0 \\ \left[x - \frac{5}{2}\right] + a & , \quad x = 0 \\ \frac{|x|}{x} + b & , \quad x > 0 \end{cases}$$

مفروض است. a و b را چنان بیابید تا این تابع در $x = 0$ پیوسته باشد.

۵. تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 - 4x + 3$ مفروض است. در نقطه‌ی به طول ۳ واقع بر منحنی، قائمی بر منحنی رسم می‌کنیم. این خط قائم نمودار تابع f را در نقطه‌ی دیگری به نام B قطع می‌کند. اندازه‌ی OB را بیابید.

۶. این معادله‌های مثلثاتی را حل کنید و جواب‌های کلی آن‌ها را بنویسید.

الف) $2\sin 2x - 2\sqrt{2}\cos x - 2\sin x + \sqrt{2} = 0$

ب) $\cos 2x + 5\sin x - 4 = 0$

۷. در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \tan^2 4x + \cot^2 2x$، $f'(\frac{\pi}{12})$ را بیابید.

۸. در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & , \quad x \geq 2 \\ x^2 - 4x & , \quad x < 2 \end{cases}$، a و b را چنان بیابید که تابع در $x = 2$ مشتق‌پذیر باشد.

۹. نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = \cos^2 x + \cos x - 2$ را وقتی $0 \leq x \leq 2\pi$ رسم کنید.

۱۰. در کره‌ای به شعاع $R = 6$، مخروط دواری به حجم ماکزیمم محاط کرده‌ایم. ارتفاع مخروط را بیابید.

جبر و احتمال

هوشنگ شرقی

۱. با استفاده از قضیه‌ی استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}\quad (n\in N)$$

۲. اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید:

$$x^2+y^2\ge 2(x+y-1)$$

۳. می‌دانیم $\sqrt{3}$ عدد گنگ است. ثابت کنید عدد $1+\sqrt{3}$ نیز گنگ است.

۴. از ۸۰۰ نفر دانش‌آموزان یک مدرسه، حداقل چند دانش‌آموز در یک روز سال متولد شده‌اند؟ چرا؟ (سال را ۳۶۵روز در نظر بگیرید.)

۵. با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید، اگر هفت برابر یک عدد زوج را با یک عدد فرد جمع کنیم، حاصل همواره عددی فرد است.

۶. با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

$$(A\cup B)-(B\cup C)=(A-B)-C$$

۷. اگر $A=\{4^x \mid x\in Z,\ -1\le x\le 1\}$ و $B=\{x \mid x\in Z,\ x^2\le 3\}$ عضوهای مجموعه‌ی $(A\times B)-A^2$ را مشخص و نمودار آن را رسم کنید.

۸. رابطه‌ی R روی IR^2 به این صورت تعریف شده است:

$$(x,y)R(z,t)\Leftrightarrow x^2-t^2=z^2-y^2$$

الف) ثابت کنید R همواره یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

ب) کلاس هم‌ارزی $[(-2,3)]$ را مشخص کنید.

۹. نمودار رابطه‌ی $R=\{(x,y)\in IR^2 \mid |x|\le 1,\ |y|\le 1\}$ را در دستگاه مختصات رسم کنید.

۱۰. سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو بیاید، آن‌گاه تاس را می‌ریزیم و اگر پشت بیاید، سکه را دوبار دیگر پرتاب می‌کنیم. مطلوب است تعیین:

الف) فضای نمونه‌ای این پیشامد.

ب) پیشامد A که در آن دقیقاً یک‌بار سکه رو بیاید.

ج) پیشامد B که حداقل دوبار سکه پشت بیاید.

د) $A\cap B'$

۱۱. سه لامپ را از میان ۱۵ لامپ که پنج عدد آن‌ها بدون هیچ اثر خارجی معیوب هستند، انتخاب می‌کنیم. تعیین کنید احتمال این‌که:

الف) هیچ کدام معیوب نباشند.

ب) فقط یکی از لامپ‌ها معیوب باشد.

۱۲. تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال آمدن عددهای فرد آن، پنج برابر احتمال آمدن عددهای زوج است. احتمال آمدن هر کدام از اعداد را حساب کنید.

۱۳. نقطه‌ی (x,y) را درون دایره‌ی $S=\{(x,y)\in IR^2 \mid x^2+y^2\le 4\}$ به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که نقطه‌ی مورد نظر در $A=\{(x,y)\in IR^2 \mid x^2+y^2\le 1\}$ باشد را تعیین کنید.

۱۴. سکه‌ی سالمی را ۱۰ بار پرتاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن که هفت بار رو بیاید.

۱۵. برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ی S ثابت کنید:

$$P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$$

۱۶. اگر $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$ ، $P(A\cap B)=\frac{1}{3}$ و $P(A')=\frac{3}{8}$ باشند، مطلوب است:

الف) $P(B)$ ب) $P(B-A)$

---

۱. از نقطه‌ی o محل تلاقی قطرهای لوزی ABCD، چهار عمود 'OA و 'OB و 'OC و 'OD را بر ضلع‌های لوزی فرود می‌آوریم. ثابت کنید چهارضلعی A'B'C'D' مستطیل است.

۲. در چهارضلعی محدب، کدام نقطه است که مجموع فاصله‌های آن تا رأس‌ها می‌نیمم است؟

۳. از مثلثی، دو میانه و یک ضلع نظیر یکی از میانه‌ها معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۴. از نقطه‌ی تماس دو دایره‌ی مماس خارجی، دو خط چنان رسم می‌کنیم تا دو دایره را در چهار نقطه‌ی دیگر قطع کنند. ثابت کنید این چهار نقطه، چهار رأس یک ذوزنقه‌اند.

۵. کمانی از یک دایره معلوم است. مرکز آن را پیدا کنید.

۶. از نقطه‌ی مفروض A وتری به طول a در دایره‌ی C(O,R) رسم کنید. $(a<2R)$

۷. نگاشتی بنویسید که تصویر هر نقطه‌ای عبارت باشد از تصویر قائم آن نقطه بر نیمساز ناحیه‌های اول و سوم.

۸. نقاط A(3,8) و B(6,7) مفروض‌اند، معادله‌ی محور تقارن آن‌ها را بنویسید.

۹. ثابت کنید نقطه‌ی A(2,1) مرکز تقارن نمودار به معادله‌ی $y=\frac{x+1}{x-2}$ است.

۱۰. چند خط می‌توان رسم کرد که دو خط موازی و خطی را که با هر دو خط متنافر است، قطع کند؟

۱۱. دو نقطه‌ی O و 'O و دو خط راست D و 'D در فضا مفروض‌اند. دو خط متوازی معین کنید که یکی از آن‌ها از نقطه‌ی O بگذرد و خط D را قطع کند، و دیگری از نقطه‌ی 'O بگذرد و خط 'D را قطع کند.

۱۲. ثابت کنید مکان هندسی نقاطی از فضا که از دو نقطه‌ی معلوم A و B به یک فاصله هستند، صفحه‌ای است که از وسط قطعه خط AB می‌گذرد و بر AB عمود است.

هندسه‌ی ۲

حسین کریمی

ریاضیات ۱

۱ . مجموعه‌ی X مجموعه‌ای است که همه‌ی اعضای مجموعه‌ی A را داراست و عضوهای ۱۱،۱۲،۱۳،...،۲۰ را نیز می‌تواند اختیار کند. بنابراین، تعداد مجموعه‌هایی که جای X می‌توانند قرار گیرند، برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $\{11,12,13,\dots,20\}$ یعنی: $2^{10}=1024$

۲ .

$$M=18^4\times125^{a-5}=2^4\times3^8\times5^{3a-15}$$
$$N=9^{b-2}\times25^2=3^{2b-4}\times5^4$$

برای این‌که M و N نسبت به هم اول باشند، باید در M عامل ۵ و در N عامل ۳ را حذف کنیم. در این صورت باید داشته باشیم: $3a-15=0\Rightarrow a=5$ و $2b-4=0\Rightarrow b=2$

۳ . مقسوم را بر مقسوم‌علیه تقسیم می‌کنیم و آن را متحد با صفر قرار می‌دهیم.

$$\begin{array}{l|l}
x^4+0x^3+0x^2+mx+n & x^2-2x-3 \\ \cline{2-2}
+x^4-2x^3-3x^2 & x^2+2x+7 \\
\underline{\quad - \quad + \quad +\quad} & \\
2x^3+3x^2+mx+n & \\
+2x^3-4x^2-6x & \\
\underline{\quad - \quad + \quad +\quad} & \\
7x^2+(m+6)x+n & \\
+7x^2-14x-21 & \\
\underline{\quad - \quad + \quad +\quad} & \\
(m+20)x+n+21 &
\end{array}$$

$$(m+20)x+n+21\equiv0\Rightarrow\begin{cases}m+20=0\Rightarrow m=-20\\ n+21=0\Rightarrow n=-21\end{cases}$$

۴ .

$$x^2+x+1=0\Rightarrow x+1+\frac{1}{x}=0\Rightarrow x+\frac{1}{x}=-1$$
$$x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})^3-3\times(x+\frac{1}{x})=(-1)^3-3(-1)=2$$

۵ .

$$\text{(الف)}\ 2x^2+5x-3=2x^2-x+6x-3$$
$$=x(2x-1)+3(2x-1)$$
$$=(2x-1)(x+3)$$

$$\text{(ب)}\ y^3(a-x)-x^3(a-y)+a^3(x-y)$$
$$=y^3a-y^3x-x^3a+x^3y+a^3(x-y)$$
$$=-a(x^3-y^3)+xy(x^2-y^2)+a^3(x-y)$$
$$=(x-y)\left[-a(x^2+xy+y^2)+xy(x+y)+a^2\right]$$
$$=(x-y)\left[-ax^2-axy-ay^2+x^2y+xy^2+a^2\right]$$
$$=(x-y)\left[x^2(y-a)+xy(y-a)-a(y^2-a^2)\right]$$
$$=(x-y)(y-a)\left[x^2+xy-ay-a^2\right]$$
$$=(x-y)(y-a)\left[(x-a)(x+a)+y(x-a)\right]$$
$$=(x-y)(y-a)(x-a)(x+a+y)$$

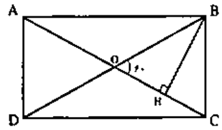
۶ .

$$m_{AB}=\frac{0-q}{p-0}=-\frac{q}{p}$$
$$y-0=-\frac{q}{p}(x-p)\Rightarrow y=-\frac{q}{p}x+q$$
$$\Rightarrow y+\frac{q}{p}x=q\Rightarrow\frac{y}{q}+\frac{x}{p}=1$$

۷ . می‌دانیم $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$. با توجه به این اتحاد داریم:

$$x^3=(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}-\sqrt[3]{1-\sqrt{2}})^3$$
$$=(1+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})-3\sqrt[3]{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}\times(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}-\sqrt[3]{1-\sqrt{2}})$$
$$=2\sqrt{2}+3x\Rightarrow x^3-3x=2\sqrt{2}$$

۸ . مستطیل ABCD را رسم می‌کنیم. فرض کنیم O محل برخورد دو قطر باشد. از B عمود BH را بر قطر AC فرود می‌آوریم. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OBH، داریم:



$$\sin60^\circ=\frac{BH}{OB}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{BH}{4}\Rightarrow BH=2\sqrt{3}$$

مساحت مستطیل ABCD دو برابر مساحت $A\hat{B}C$ است.

$$S_{ABCD}=2\times S_{A\hat{B}C}=2\times\frac{AC\times BH}{2}=8\times2\sqrt{3}=16\sqrt{3}$$

۹ . دو طرف معادله را بر x^2 که مخالف صفر است تقسیم می‌کنیم:

$$2x^2-13x+24-\frac{13}{x}+\frac{2}{x^2}=0$$
$$\Rightarrow2(x^2+\frac{1}{x^2})-13(x+\frac{1}{x})+24=0$$
$$2\left[(x+\frac{1}{x})^2-2\right]-13(x+\frac{1}{x})+24=0$$
$$\xrightarrow{x+\frac{1}{x}=y}2(y^2-2)-13y+24=0$$
$$y=\frac{13\pm\sqrt{9}}{4}=\frac{13\pm3}{4}\Rightarrow y_1=\frac{13+3}{4}=4\ ,\ y_2=\frac{13-3}{4}=\frac{5}{2}$$
$$y=4\Rightarrow x+\frac{1}{x}=4\Rightarrow x^2-4x+1=0\Rightarrow\begin{cases}x=2+\sqrt{3}\\ x=2-\sqrt{3}\end{cases}$$
$$y=\frac{5}{2}\Rightarrow x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}\Rightarrow2x^2-5x+2=0\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ x=\frac{1}{2}\end{cases}$$

۱۰ . داریم:

$$\text{سمت راست تساوی}=\frac{1}{\cos\theta}-\tan\theta=\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$\text{سمت چپ تساوی}=\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\sqrt{\frac{(1-\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}}$$
$$=\sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}}=\sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}}=\frac{|1-\sin\theta|}{|\cos\theta|}$$

چون همواره $-1\le\sin\theta\le1$ ، بنابراین $1-\sin\theta\ge0$ و $|1-\sin\theta|=1-\sin\theta$.

با توجه به طرف دوم تساوی، باید شرایطی را فراهم کنیم که داشته باشیم: $|\cos\theta|=\cos\theta$

یعنی ناحیه‌ای را تعیین کنیم که $\cos\theta\ge0$. پس این تساوی به شرط آن‌که انتهای کمان مقابل θ در ناحیه‌ی اول یا چهارم باشد، برقرار می‌شود.

۱۱ .

$$\frac{x-2}{5}+\frac{x-5}{7}+\frac{x-7}{8}=20\Rightarrow$$
$$280\times\frac{x-2}{5}+280\times\frac{x-5}{7}+280\times\frac{x-7}{8}=280\times20$$

$$۵۶(x-۲)+۴۰(x-۵)+۳۵(x-۷)=۵۶۰۰$$
$$\Rightarrow ۵۶x-۱۱۲+۴۰x-۲۰۰+۳۵x-۲۴۵=۵۶۰۰$$
$$\Rightarrow ۱۳۱x-۵۵۷=۵۶۰۰ \Rightarrow x=۴۷$$

۱۲.

$$y=ax^۲+۲ax-۳ \Rightarrow y=a(x^۲+۲x-\frac{۳}{a})$$
$$\Rightarrow y=a\left[(x+۱)^۲-۱-\frac{۳}{a}\right] \Rightarrow y=a(x+۱)^۲-(a+۳)$$

رأس سهمی $A(-۱,-a-۳)$

$$-۱=-a-۳ \Rightarrow a=-۲$$

۱۳.

$$۱۶^{۲n-۱} > ۸^{n+۷} \Rightarrow ۲^{۸n-۴} > ۲^{۳n+۲۱}$$
$$\Rightarrow ۸n-۴ > ۳n+۲۱ \Rightarrow ۵n > ۲۵ \Rightarrow n > ۵$$

ریاضیات ۲

۱. ریشه‌ی هریک از عبارات را محاسبه کنید.

$$A=\frac{x^۲-۴}{(۳-۲x)(۴x^۲-۴x+۱)}$$

$$x^۲-۴=۰ \Rightarrow x^۲=۴ \Rightarrow x=\pm ۲$$

$$۳-۲x=۰ \Rightarrow -۲x=-۳ \Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

$$۴x^۲-۴x+۱=۰ \Rightarrow \Delta=b^۲-۴ac=۱۶-۴(۴)\times ۱=۱۶-۱۶=۰$$

$$\Rightarrow x=\frac{-b}{۲a}=\frac{+۴}{۴\times ۲}=\frac{۱}{۲}$$ ریشه مضاعف

ریشه‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم و در جدول قرار می‌دهیم.

x		-۲		$\frac{۱}{۲}$		$\frac{۳}{۲}$		۲	
$x^۲-۴$	+	۰	−		−		−	۰	+
$۳-۲x$	+		+		+	۰	−		−
$۴x^۲-۴x+۱$	+		+	۰	+		+		+
A	+	۰	−	∞	−	∞	+	۰	−

۲. در معادله‌ی فوق، اگر $\Delta<۰$ و $-۳m>۰$ ($a>۰$)، عبارت به ازای جمیع مقادیر x مثبت است.

$$\Delta=b^۲-۴ac=(۲m)^۲-۴(-۳m)(۱)=۴m^۲+۱۲m<۰$$

$$۴m(m+۳)<۰; \begin{cases} ۴m=۰ \Rightarrow m=۰ \\ m+۳=۰ \Rightarrow m=-۳ \end{cases}$$

$$-۳m>۰ \Rightarrow m<۰$$

m		-۳		۰	
$۴m^۲+۱۲m$	+	۰	−	۰	+
$۴m^۲+۱۲m<۰$			جواب		

اشتراک $m<۰$ و $-۳<m<۰$ برابر است با $-۳<m<۰$

جواب: $-۳<m<۰$

۳.

$$|۲x+۱| \le |x-۲|$$

طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(۲x+۱)^۲ \le (x-۲)^۲ \Rightarrow ۴x^۲+۴x+۱ \le x^۲-۴x+۴$$
$$\Rightarrow ۴x^۲+۴x+۱+۴x-x^۲-۴ \le ۰ \Rightarrow ۳x^۲+۸x-۳ \le ۰$$

$$\begin{cases} \Delta=b^۲-۴ac=۶۴-۴(۳)(-۳)=۶۴+۳۶=۱۰۰ \\ a=۳ \\ b=۸ \\ c=-۳ \end{cases}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a} \Rightarrow x=\frac{-۸\pm\sqrt{۱۰۰}}{۲\times ۳} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-۸+۱۰}{۶}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳} \\ x=\frac{-۸-۱۰}{۶}=-۳ \end{cases}$$

x		-۳		$\frac{۱}{۳}$	
$۳x^۲+۸x-۳$	+	۰	−	۰	+

جواب: $-۳ \le x \le \frac{۱}{۳}$

۴. ابتدا دامنه‌ی عبارت را تعیین می‌کنیم. به این منظور باید مخرج تک‌تک کسرها را مساوی صفر قرار دهیم.

$$۲x=۰ \Rightarrow x=۰$$

$$۲x+۱=۰ \Rightarrow ۲x=-۱ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}$$

$$۴x^۲+۲x=۰ \Rightarrow ۲x(۲x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=-\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

دامنه $D=\mathbb{R}-\left\{۰,-\frac{۱}{۲}\right\}$

مخرج مشترک $۴x^۲+۲x=۲x(۲x+۱)$ است.

$$\frac{x-۱}{۲x}-\frac{۱}{۲x+۱}=\frac{۷-۳x}{۴x^۲+۲x}$$

$$\frac{(۲x+۱)(x-۱)-۲x}{۲x(۲x+۱)}=\frac{۷-۳x}{۴x^۲+۲x}$$

درنتیجه داریم:

$$(۲x+۱)(x-۱)-۲x=۷-۳x$$

$$۲x^۲+x-۲x-۱-۲x=۷-۳x \Rightarrow ۲x^۲=۸ \Rightarrow x^۲=۴ \rightarrow x=\pm ۲$$

هر دو ریشه قابل قبول‌اند، چون متعلق به دامنه هستند.

۵. برای تعیین $f(x+\Delta x)$ در $f(x)$ به جای x، باید $x+\Delta x$ را جایگزین کنیم.

$$f(x)=ax+b \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\frac{a(x+\Delta x)+b-ax-b}{\Delta x}=\frac{ax+a\Delta x-ax}{\Delta x}=\frac{a\Delta x}{\Delta x}=a$$

۶. برای این‌که تابع معکوس‌پذیر باشد، شرط زیر باید برقرار باشد (شرط یک به یک بودن).

$$f(x_۱)=f(x_۲) \Rightarrow x_۱=x_۲$$

$$\frac{۳x_۱+۷}{x_۱+۲}=\frac{۳x_۲+۷}{x_۲+۲} \Rightarrow (۳x_۱+۷)(x_۲+۲)=(۳x_۲+۷)(x_۱+۲)$$

$$\Rightarrow ۳x_۱x_۲+۶x_۱+۷x_۲+۱۴=۳x_۱x_۲+۶x_۲+۷x_۱+۱۴$$

$$\Rightarrow ۷x_۲-۶x_۲=۷x_۱-۶x_۱ \Rightarrow x_۲=x_۱$$

در نتیجه تابع یک به یک است. برای به‌دست آوردن معکوس

باید x را بر حسب y محاسبه کنیم.

$$f(x)=y=\frac{3x+7}{x+2}\Rightarrow xy+2y=3x+7\Rightarrow$$

$$xy-3x=7-2y\Rightarrow x(y-3)=7-2y\Rightarrow x=\frac{7-2y}{y-3}$$

در رابطه‌ی بالا به جای yها x قرار می‌دهیم.

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{7-2x}{x-3}$$

۷. ماتریس $X=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم:

$$AX=\begin{bmatrix}7&8\\1&2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-2&3\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&8\\1&2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-2a+3c&-2b+3d\\a(1)+0(c)&1(b)+0(d)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&8\\1&2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-2a+3c&3d-2b\\a&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&8\\1&2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\\-2a+3c=7\xrightarrow{a=1}-2\times1+3c=7\Rightarrow 3c=7+2=9\Rightarrow c=\frac{9}{3}=3\\3d-2b=8\xrightarrow{b=2}3d-2\times2=8\Rightarrow 3d=8+4\Rightarrow 3d=12\Rightarrow d=4\end{cases}$$

۸. برای این‌که دستگاه فوق جواب داشته باشد، باید دترمینان ماتریس ضرایب صفر نباشد.

$$\begin{cases}2mx-4y=4\\-4x+2my=2\end{cases}\quad A=\begin{bmatrix}2m&-4\\-4&2m\end{bmatrix}\Rightarrow|A|\neq0$$

$$\Rightarrow 4m^2-(-4)(-4)\neq0\Rightarrow 4m^2-16\neq0\Rightarrow m^2-4\neq0$$

$$m^2\neq4\Rightarrow m\neq\pm2$$

۹.

الف) $\log_{25}^{\sqrt{125}}=\log_{5^2}^{\sqrt{5^3}}=\log_{5^2}^{5^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{3}{2}}{2}\log_5^5$

$$\Rightarrow\frac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{1}}\times1\Rightarrow\frac{3}{4}$$

ب) $\log_7^{49^2}=\log_7^{(7^2)^2}=\log_7^{7^4}=4\log_7^7=4\times1=4$

۱۰.

$$2\log_9^x=\log_9^{81}\Rightarrow\log_9^{x^2}=\log_9^{81}\Rightarrow x^2=81\Rightarrow x=\pm9$$

۱۱. باید t_1، t_2 و t_3 را محاسبه و مجموع آن‌ها را به‌دست آوریم.

$t_n=2n+1$

$n=1\Rightarrow t_1=2\times1+1=3$

$n=2\Rightarrow t_2=2\times2+1=4+1=5$

$n=3\Rightarrow t_3=2\times3+1=6+1=7$

$t_1+t_2+t_3=3+5+7=15$

۱۲. چون باید چهار جمله بین $\frac{3}{8}$ و $\frac{128}{81}$ درج کنیم، پس $a=t_1=\frac{3}{8}$ و $t_6=\frac{128}{81}$ است.

$$\underset{a}{\frac{3}{8}}\ ,\ \underset{t_2}{\square}\ ,\ \underset{t_3}{\square}\ ,\ \underset{t_4}{\square}\ ,\ \underset{t_5}{\square}\ ,\ \underset{t_6}{\frac{128}{81}}$$

$$a_n=aq^{n-1}\Rightarrow a_6=aq^5\Rightarrow\frac{128}{81}=\frac{3}{8}\times q^5\Rightarrow$$

$$q^5=\frac{128}{81}\div\frac{3}{8}=\frac{128}{81}\times\frac{8}{3}\Rightarrow q^5=\frac{1024}{243}$$

$$q^5=\frac{2^{10}}{3^5}\Rightarrow q^5\Rightarrow(\frac{2^2}{3})^5\Rightarrow q^5=(\frac{4}{3})^5\Rightarrow q=\frac{4}{3}$$

$$t_2=aq=\frac{3}{8}\times\frac{4}{3}\Rightarrow t_2=\frac{1}{2}$$

$$t_3=aq^2=\frac{3}{8}\times(\frac{4}{3})^2=\frac{2}{3}$$

$$t_4=aq^3=qt_3=\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$$

$$t_5=aq^4=qt_4=\frac{4}{3}\times\frac{8}{9}=\frac{32}{27}$$

۱۳.

$$\sin\alpha=\frac{2}{3}\Rightarrow\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-(\frac{2}{3})^2=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$$

$\cos\alpha=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\pm\sqrt5}{3}$؛ حاده $\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt5}{3}$

$$\cos\beta=\frac{1}{5}\Rightarrow\sin^2\beta=1-\cos^2\beta\Rightarrow\sin^2\beta=1-(\frac{1}{5})^2$$

$$=1-\frac{1}{25}=\frac{24}{25}\Rightarrow\sin\beta=\sqrt{\frac{24}{25}}=\pm\frac{\sqrt{24}}{5};$$

حاده $\beta\Rightarrow\sin\beta=\frac{\sqrt{24}}{5}$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{\sqrt5}{3}\times\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\frac{\sqrt{24}}{5}$$

$$=\frac{\sqrt5-4\sqrt6}{15}$$

۱۴.

$$\vec{v_1}.\vec{v_2}=x_1x_2+y_1y_2=(2\sqrt3\times3)+(-2\times\sqrt3)$$

$$=6\sqrt3-2\sqrt3=4\sqrt3$$

$$\vec{v_1}.\vec{v_2}=|\vec{v_1}||\vec{v_2}|\cos\theta\Rightarrow4\sqrt3=\sqrt{x_1^2+y_1^2}\times\sqrt{x_2^2+y_2^2}\cos\theta$$

$$\Rightarrow4\sqrt3=\sqrt{3^2+\sqrt3^2}\times\sqrt{(2\sqrt3)^2+(-2)^2}\cos\theta$$

$$\Rightarrow4\sqrt3=(2\sqrt3)(4)\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{4\sqrt3}{8\sqrt3}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\cos60^\circ=\cos\theta\Rightarrow\theta=60^\circ$$

۱۵. باید تبدیل (جایگشت) ۳ شیء از ۵ شیء را به‌دست آوریم.

الف) $p(5,3)=\frac{5!}{2!}=\frac{5\times4\times3\times2!}{2!}=60$

ب) برای این‌که اعداد فرد باشند، باید رقم یکان آن‌ها فرد باشد. پس برای رقم یکان سه انتخاب ۳و۵و۷ را داریم. لذا یکی از این اعداد انتخاب می‌شوند و چهار عدد برای انتخاب دهگان و سپس سه عدد برای جایگزینی در صدگان وجود دارند.

یکان دهگان صدگان

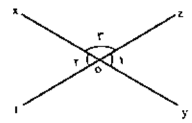
$\boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{3}\Rightarrow3\times4\times3=36$

ج) چون اعداد باید از ۴۰۰ کوچک‌تر باشند، لذا در صدگان آن‌ها فقط دو عدد ۲ و ۳ می‌توانند قرار گیرند. پس برای صدگان دو انتخاب داریم. پس از انتخاب یکی از اعداد فوق، چهار انتخاب برای دهگان و سپس سه انتخاب برای یکان وجود دارد.

یکان دهگان صدگان

$\boxed{2}\ \boxed{4}\ \boxed{3}\Rightarrow2\times4\times3=24$

۱.



$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_1+\hat{O}_3=180^\circ\\ \hat{O}_2+\hat{O}_3=180^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow$$

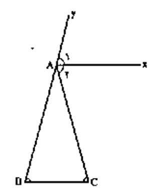
$\hat{O}_1+\hat{O}_3=\hat{O}_2+\hat{O}_3 \Rightarrow \hat{O}_1+\hat{O}_2$

۲.

$$\begin{cases}\hat{\alpha}+\hat{\beta}=90^\circ \Rightarrow 4\hat{\beta}+\hat{\beta}=90^\circ \Rightarrow 5\hat{\beta}=90^\circ\\ \hat{\alpha}=4\hat{\beta} \quad \Rightarrow \hat{\beta}=18^\circ, \alpha=72^\circ\end{cases}$$

۳.

فرض	$AB=AC, \hat{A}_1=\hat{A}_2$
حکم	$AX \parallel BC$



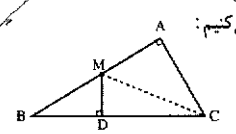
اثبات:

$AB=AC \Rightarrow \hat{B}=\hat{C}$

$\angle YAC=\angle B+\angle C=2\hat{A}_2=2\hat{B} \Rightarrow$

$\hat{B}=\hat{A}_2 \Rightarrow \hat{C}=\hat{A}_2,\ \underset{\text{مورب}}{AC} \Rightarrow AX \parallel BC$

۴. از M به C وصل می‌کنیم:



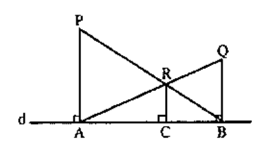
$DC^2+MD^2=MC^2=AC^2+AM^2=AC^2+MB^2$

$\Rightarrow DC^2+MD^2-MB^2=AC^2$

$\Rightarrow AC^2=DC^2-(\underbrace{MB^2-MD^2}_{BD^2})$

$\Rightarrow AC^2=DC^2-DB^2$

۵.



$\Delta PBA: RC \parallel PA \Rightarrow$

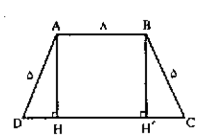
$\dfrac{RC}{PA}=\dfrac{BC}{BA}$ (۱)

$\Delta QBA: RC \parallel QB \Rightarrow \dfrac{RC}{QB}=\dfrac{AC}{BA}$ (۲)

(۱) و (۲) $\Rightarrow \dfrac{RC}{QB}+\dfrac{RC}{PA}=\dfrac{BC}{BA}+\dfrac{AC}{BA}=\dfrac{BC+AC}{BA}=\dfrac{BA}{BA}=1$

$\Rightarrow RC(\dfrac{1}{QB}+\dfrac{1}{PA})=1 \Rightarrow \dfrac{1}{QB}+\dfrac{1}{PA}=\dfrac{1}{RC}$

۶.



$CD=14\text{cm},\ AB=8\text{cm} \Rightarrow$

$HH'=AB=8\text{cm} \Rightarrow CH'+DH=6\text{cm}$

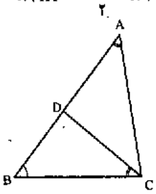
$\Rightarrow CH'=DH=3\text{cm}$

$\Delta DAH: AD^2=AH^2+DH^2 \Rightarrow AH^2=5^2-3^2=16$

$\Rightarrow AH=4\text{cm}$

$\Rightarrow S_{ABCD}=\dfrac{AB+CD}{2}\times AH=\dfrac{14+8}{2}\times 4=44\text{cm}^2$

۷.



$$\left.\begin{array}{l}\angle BCD=\angle A\\ \angle B=\angle B\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta BCD \sim \Delta ABC$$

$\Rightarrow \dfrac{CD}{AC}=\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{BC}{AB}\Rightarrow$

$BC^2=AB.BD \Rightarrow 4=5BD \Rightarrow BD=\dfrac{4}{5}=0/8$

$\Rightarrow AD=AB-BD=5-0/8=4/2$

۸.

$AB \parallel CD \Rightarrow \Delta OAB \sim \Delta OCD \Rightarrow$

$\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{OB}{OC}\Rightarrow \dfrac{2x}{4x+2}=\dfrac{x}{x+3}\Rightarrow \dfrac{2}{4x+2}=\dfrac{1}{x+3}\Rightarrow$

$4x+2=2x+6 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2 \Rightarrow \dfrac{AB}{CD}=\dfrac{2}{5}\Rightarrow$

$\dfrac{S_{OAB}}{S_{OCD}}=K^2=\dfrac{4}{25}$

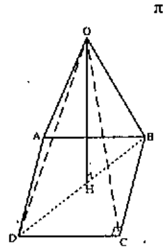
۹.

$S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 400=100\sqrt{3}\Rightarrow$

(منشور) $V=sh=(100\sqrt{3})(10\sqrt{3})=3000\text{cm}^3$

(استوانه) $V=\pi r^2h'=25\pi h=3000 \Rightarrow h=\dfrac{120}{\pi}=38\text{cm}$

۱۰.



$S_{ABCD}=4\text{cm}^2 \Rightarrow$

$V=\dfrac{1}{3}Sh=\dfrac{1}{3}\times 4\times\sqrt{7}=\dfrac{4\sqrt{7}}{3}\text{cm}^3$

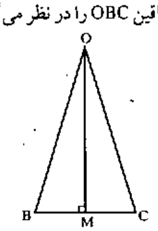
$BD^2=BC^2+CD^2=4+4=8 \Rightarrow BD=2\sqrt{2}$

$\Rightarrow BH=\sqrt{2}$

$\Delta OHB: OH^2+BH^2=OB^2 \Rightarrow OB^2=7+2=9$

$\Rightarrow OB=3\text{cm} \Rightarrow OB=OC=OD=OA=3\text{cm}$

اکنون مثلث متساوی‌الساقین OBC را در نظر می‌گیریم:



$OB^2=OM^2+BM^2 \Rightarrow 9=OM^2+1 \Rightarrow OM=2\sqrt{2}\Rightarrow$

$S_{OBC}=\dfrac{1}{2}OM.BC=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 2=2\sqrt{2}\Rightarrow$

(هرم) $S=4(2\sqrt{2})+4=4+8\sqrt{2}$

الف) $f(x)=x^۳-۳x^۲+۳x+۴$

$f'(x)=۳x^۲-۶x+۳=۳(x^۲-۲x+۱)=۳(x-۱)^۲\ge ۰$

چون $f'(x)\ge ۰$ و معادله‌ی $f'(x)=۰$ یک ریشه دارد، بنابراین تابع f اکیداً صعودی است. پس یک‌به‌یک است.

ب) $y=x^۳-۳x^۲+۳x-۱+۵=(x-۱)^۳+۵$

$\Rightarrow (x-۱)^۳=y-۵\Rightarrow x-۱=\sqrt[۳]{y-۵}\Rightarrow x=۱+\sqrt[۳]{y-۵}$

نقش x و y را عوض می‌کنیم، پس:

$f^{-۱}(x)=y=۱+\sqrt[۳]{x+۵}$

۲. $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

$(۰,-۱)\in f\Rightarrow -۱=\dfrac{۰+b}{۰+d}\Rightarrow \boxed{b=-d}$

مجانب قائم: $cx+d=۰\ ,\ x=-۲\Rightarrow -۲c+d=۰\Rightarrow \boxed{d=۲c}$

$\Rightarrow \boxed{b=-۲c}$

مجانب افقی: $y=\dfrac{a}{c}\ ,\ y=۱\Rightarrow \dfrac{a}{c}=۱\Rightarrow \boxed{a=c}$

$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow y=\dfrac{cx-۲c}{cx+۲c}\Rightarrow y=\dfrac{c(x-۲)}{c(x+۲)},c\neq ۰$

$\Rightarrow y=\dfrac{x-۲}{x+۲}$

۳. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[۳]{x^۳+۶x^۲}-x)=+\infty-\infty$

$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[۳]{x^۳+۶x^۲}-x)\times\dfrac{\sqrt[۳]{(x^۳+۶x^۲)^۲}+x\sqrt[۳]{x^۳+۶x^۲}+x^۲}{\sqrt[۳]{(x^۳+۶x^۲)^۲}+x\sqrt[۳]{x^۳+۶x^۲}+x^۲}$

$=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^۳+۶x^۲-x^۳}{x^۲+x^۲+x^۲}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{۶x^۲}{۳x^۲}=\dfrac{۶}{۳}=۲$

۴. باید حد راست و حد چپ و مقدار تابع مساوی باشند.

$\lim_{x\to۰^-}f(x)=\lim_{x\to۰^-}\dfrac{۲\sqrt{۲}\sin x}{\sqrt{۱-\cos۲x}}$

$=\lim_{x\to۰^-}\dfrac{۲\sqrt{۲}\sin x}{\sqrt{۲\sin^۲x}}$

حدچپ: $=\lim_{x\to۰^-}\dfrac{۲\sqrt{۲}\sin x}{-\sqrt{۲}\sin x}=-۲$

حد راست: $\lim_{x\to۰^+}f(x)=\lim_{x\to۰^+}(\dfrac{|x|}{x}+b)=\lim_{x\to۰^+}(\dfrac{x}{x}+b)=\boxed{۱+b}$

مقدار تابع: $f(۰)=\left[۰-\dfrac{۵}{۲}\right]+a=\boxed{-۳+a}$

$۱+b=-۲\Rightarrow\boxed{b=-۳}\ ,\ -۳+a=-۲\Rightarrow a=۱$

۵. $y=x^۲-۴x+۳\quad x_N=۳$

$y_N=۹-۱۲+۳=۰\Rightarrow N(۳,۰)$ پای قائم

$y'_x=۲x-۴\ ,\ x=۳\Rightarrow m_{\text{مماس}}=۶-۴=۲\Rightarrow$

$m_{\text{قائم}}=-\dfrac{۱}{۲}\quad y-y_N=m_{\text{قائم}}(x-x_N)\Rightarrow$

معادله‌ی خط قائم $y-۰=-\dfrac{۱}{۲}(x-۳)\Rightarrow y=-\dfrac{۱}{۲}(x-۳)$ (۳)

$\begin{cases}y=x^۲-۴x+۳\\ y=-\dfrac{۱}{۲}(x-۳)\end{cases}\Rightarrow x^۲-۴x+۳=-\dfrac{۱}{۲}(x-۳)$

$\Rightarrow (x-۱)(x-۳)+\dfrac{۱}{۲}(x-۳)=۰$

$(x-۳)(x-۱+\dfrac{۱}{۲})=۰\Rightarrow (x-۳)(x-\dfrac{۱}{۲})=۰$

$\Rightarrow\begin{cases}x=۳=x_N\\ \boxed{x=\dfrac{۱}{۲}=x_B}\end{cases}$

$y_B=(\dfrac{۱}{۲})^۲-۴(\dfrac{۱}{۲})+۳\Rightarrow y_B=\dfrac{۱}{۴}-۲+۳\Rightarrow\boxed{y_B=\dfrac{۵}{۴}}$

$OB=\sqrt{x_B^۲+y_B^۲}=\sqrt{\dfrac{۱}{۴}+\dfrac{۲۵}{۱۶}}=\sqrt{\dfrac{۲۹}{۱۶}}=\dfrac{\sqrt{۲۹}}{۴}\Rightarrow OB=\dfrac{\sqrt{۲۹}}{۴}$

۶. الف) $\underbrace{۴\sin x.\cos x-۲\sqrt{۲}\cos x}-\underbrace{۲\sin x+\sqrt{۲}}=۰$

$۲\cos x(۲\sin x-\sqrt{۲})-(۲\sin x-\sqrt{۲})=۰$

$(۲\sin x-\sqrt{۲})(۲\cos x-۱)=۰$

۱) $۲\sin x-\sqrt{۲}=۰\Rightarrow \sin x=\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}=\sin\dfrac{\pi}{۴}\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi+\dfrac{\pi}{۴}\\ x=۲k\pi+\dfrac{۳\pi}{۴}\end{cases}$

۲) $۲\cos x-۱=۰\Rightarrow \cos x=\dfrac{۱}{۲}=\cos\dfrac{\pi}{۳}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\dfrac{\pi}{۳}$

ب) $\cos۲x+۵\sin x-۴=۰$

$۱-۲\sin^۲x+۵\sin x-۴=۰\Rightarrow ۲\sin^۲x-۵\sin x+۳=۰$

مجموع ضرایب صفر است $\Rightarrow\begin{cases}\sin x=۱\Rightarrow x=۲k\pi+\dfrac{\pi}{۲}\\ \sin x=\dfrac{c}{a}=\dfrac{۳}{۲}\end{cases}$ غیرممکن

۷. $f(x)=\tan^۲۴x+\cot^۲۲x$

$f'(x)=۴(۴)(۱+\tan^۲۴x).\tan^۳۴x-۲(۲)(۱+\cot^۲۲x).\cot g۲x$

$f'(\dfrac{\pi}{۱۲})=۱۶(۱+\tan^۲\dfrac{\pi}{۳})\tan^۳\dfrac{\pi}{۳}-۴(۱-\cot^۲\dfrac{\pi}{۶})\cot\dfrac{\pi}{۶}$

$f'(\dfrac{\pi}{۱۲})=۱۶(۱+۳)(۳\sqrt{۳})-۴(۱+۳)\sqrt{۳}$

$f'(\dfrac{\pi}{۱۲})=۶۴(۳\sqrt{۳})-۱۶\sqrt{۳}=۱۷۶\sqrt{۳}$

۸.

$f(x)=\begin{cases}ax^۳+bx & ,x\ge ۲\\ x^۲-۴x & ,x<۲\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۳ax^۲+b & ,x\ge ۲\\ ۲x-۴ & ,x<۲\end{cases}$

این تابع باید در $x=۲$ پیوسته باشد و $f'_+(۲)=f'_-(۲)$

پیوستگی: $۸a+۲b=۴-۸\Rightarrow ۸a+۲b=-۴\Rightarrow ۴a+b=-۲$

مشتق: $f'_+(۲)=f'_-(۲)\Rightarrow ۱۲a+b=۴-۴\Rightarrow ۱۲a+b=۰$

$\begin{cases}۴a+b=-۲\\ -۱۲a-b=۰\end{cases}\Rightarrow -۸a=-۲\Rightarrow\boxed{a=\dfrac{۱}{۴}}$

$۱۲a+b=۰\ ,\ a=\dfrac{۱}{۴}\Rightarrow ۳+b=۰\Rightarrow\boxed{b=-۳}$

۹. $y = \cos^2 x + \cos x - 2 \qquad 0 \le x \le 2\pi$

$y'_x = -2\sin x\cos x - \sin x = 0 \Rightarrow -\sin x(2\cos x + 1) = 0$

$1)\ \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$

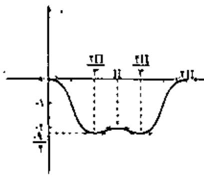
$2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$

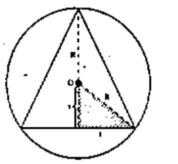
$$\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

$x = 0$ یا $2\pi \Rightarrow y = 0$ و $y = 0 \Rightarrow \cos^2 x + \cos x - 2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \Rightarrow x = 0\ ,\ 2\pi \\ \cos x = -2 \quad \text{غیرممکن} \end{cases} \Leftarrow \text{مجموع ضرایب صفر است}$$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π		$\frac{4\pi}{3}$		2π
y'_x	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
y	0		$-\frac{9}{4}$		-2		$-\frac{9}{4}$		0





شعاع قاعده‌ی مخروط: r و $R=6$

$x > 0$ و ارتفاع مخروط $h=R+x$

در مثلث قائم‌الزاویه شکل داریم: $r^2 = R^2 - x^2$

$V = \pi r^2 . \frac{h}{3} = \frac{\pi}{3} hr^2 = \frac{\pi}{3}(R + x)(R^2 - x^2)$ و $R=6$

$V = \frac{\pi}{3}(6 + x)(36 - x^2) \Rightarrow$

$V'_x = \frac{\pi}{3}[(36 - x^2) - 2x(6 + x)] = 0$

$(6 - x)(6 + x) - 2x(6 + x) = 0 \Rightarrow (6 + x)(6 - x - 2x) = 0$

$\Rightarrow \underbrace{(6 + x)}_{+}(6 - 3x) = 0 \Rightarrow 6 - 3x = 0 \Rightarrow x = 2$

$\Rightarrow h = R + x \Rightarrow h = 6 + 2 \Rightarrow h = 8$

جبر و احتمال

۱. $n = 1 :\ \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

فرض استقرا: $n = k :\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k}$

حکم استقرا:

$n = k + 1 :\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$

برای اثبات حکم، به جای مجموع k جمله‌ی نخست در سمت چپ برابری حکم، از فرض استقرا جایگزین می‌کنیم:

$1 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - (\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}}) = 1 - \frac{2 - 1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$

۲. از استدلال بازگشتی استفاده می‌کنیم:

$x^2 + y^2 \ge 2x + 2y - 2 \Rightarrow$

$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) \ge 0 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \ge 0$

که با توجه به نامنفی بودن $(x-1)^2$ و $(y-1)^2$، درستی نامساوی اخیر واضح است. اکنون استدلال اصلی را هم می‌نویسیم:

$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \ge 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 \ge 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 \ge 2x + 2y - 2 \Rightarrow x^2 + y^2 \ge 2(x + y - 1)$

۳. از برهان خلف کمک می‌گیریم. فرض می‌کنیم $1+\sqrt{3}$ عددی گویا باشد:

$1 + \sqrt{3} = \frac{m}{n}, m, n \in Z, n \ne 0 \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{m}{n} - 1 = \frac{m - n}{n}$

$m - n = p\ ,\ m, n \in z \Rightarrow p \in Z \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{p}{n} \in Q$

و این با فرض مسأله (گنگ بودن $\sqrt{3}$) تناقض دارد.

۴. چون $2\times365+70=800$، اگر دانش‌آموزان در روزهای متفاوت سال هم به دنیا آمده باشند، ۷۳۰ نفر نخست می‌توانند در ۳۶۵ روز سال، از نظر روز تولد، توزیع شوند؛ به طوری که هر دو نفر در یک روز به دنیا آمده باشند. در نتیجه، نفر هفتصدوسی‌ویکم، روزی به دنیا آمده است که دو نفر دیگر همان روز به دنیا آمده‌اند. بنابراین لااقل سه نفر در یک روز سال به دنیا آمده‌اند.

۵. $a = 2k \Rightarrow 7a + 1 = 14k + 1 = 2(7k) + 1 = 2k' + 1$

۶. $(A \cup B) - (B \cup C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)'$

$= (A \cup B) \cap (B' \cap C') = C' \cap [B' \cap (A \cup B)]$

$= C' \cap [(B' \cap A) \cup \underbrace{(B' \cap B)}_{\varnothing}] = C' \cap (B' \cap A)$

$= (A \cap B') \cap C' = (A - B) - C$

۷. $A = \left\{\frac{1}{4}, 1, 4\right\}\ ,\ B = \{-1, 0, 1\} \Rightarrow$

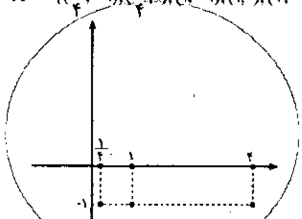
$A \times B = \{(\frac{1}{4}, -1), (\frac{1}{4}, 0), (\frac{1}{4}, 1), (1, -1), (1, 0),$

$(1, 1), (4, -1), (4, 0), (4, 1)\},$

$A^2 = \{(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}), (\frac{1}{4}, 1), (\frac{1}{4}, 4), (1, \frac{1}{4}), (1, 1), (1, 4),$

$(4, \frac{1}{4}), (4, 1), (4, 4)\} \Rightarrow$

$A \times B - A^2 = \{(\frac{1}{4}, -1), (\frac{1}{4}, 0), (1, -1), (1, 0), (4, -1), (4, 0)\}$



۸. خاصیت بازتابی: $(x, y)R(x, y) \Rightarrow x^3 - y^2 = x^3 - y^2$

$(x, y)R(z, t) \Leftrightarrow (z, t)R(x, y)$

خاصیت تقارنی: $x^3 - t^2 = z^3 - y^2 \Leftrightarrow z^3 - y^2 = x^3 - t^2$

$(x, y)R(z, t)\ ,\ (z, t)R(r, s)$

$$\begin{cases} x^3 - t^2 = z^3 - y^2 \\ z^3 - s^2 = r^3 - t^2 \end{cases}$$

خاصیت تراگذری: $x^3 - s^2 = r^3 - y^2 \Rightarrow (x, y)R(r, s)$

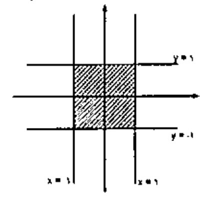
بنابراین R سه خاصیت بازتابی، تقارنی و تراگذری را دارد و یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

$[(-2, 3)] = ? \quad (-2, 3)R(x, y) \Rightarrow$

$(-2)^3 - y^2 = x^3 - 3^2 \Rightarrow x^3 + y^2 = 1 \Rightarrow$

$[(-۲,۳)]=\{(x,y)\mid x,y\in R, x^۳+y^۲=۱\}$

۹. $|x|\le ۱ \Rightarrow -۱\le x\le ۱\ ,\ |y|\le ۱\Rightarrow -۱\le y\le ۱$



۱۰. الف)

S={(۱ ور)و(۲ ور)و(۳ ور)و(۴ ور)و(۵ ور)و(۶ ور)و
(رو رو پ)و(پ و پ و پ)و(پ و رو پ) و (رو پ و پ)}

ب)

A={(۱ ور)و(۲ ور)و(۳ ور)و(۴ ور)و(۵ ور)و(۶ ور)و
(پ و رو پ)و(رو پ و پ)}

ج) B={(پ و پ و پ)و(پ و رو پ)و(رو پ و پ)}

د) $A\cap B'=A-B=$ {(۱ ور)و(۲ ور)و(۳ ور)و(۴ ور)و(۵ ور)و(۶ ور)}

۱۱. الف)

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۱۰}{۳}}{\binom{۱۵}{۳}}=\frac{\frac{۱۰!}{۳!۷!}}{\frac{۱۵!}{۳!۱۲!}}=\frac{\frac{۱۰\times۹\times۸}{۶}}{\frac{۱۵\times۱۴\times۱۳}{۶}}$$

$$=\frac{۱۰\times۹\times۸}{۱۵\times۱۴\times۱۳}=\frac{۲۴}{۹۱}$$

ب)

$$P(B)=\frac{\binom{۵}{۱}\binom{۱۰}{۲}}{\binom{۱۵}{۳}}=\frac{۵\times۴۵}{\frac{۱۵\times۱۴\times۱۳}{۶}}=\frac{۵\times۴۵\times۶}{۱۵\times۱۴\times۱۳}=\frac{۴۵}{۹۱}$$

۱۲.

$$\begin{cases}P(۱)=P(۳)=P(۵)=۵P(۲)=۵P(۴)=۵P(۶)\\ P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=۱\end{cases}$$

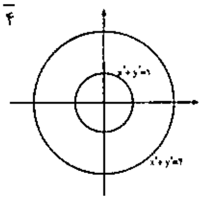
$$\Rightarrow ۵P(۲)+P(۲)+۵P(۲)+P(۲)+۵P(۲)+P(۲)=۱\Rightarrow$$

$$۱۸P(۲)=۱\Rightarrow\ P(۲)=P(۴)=P(۶)=\frac{۱}{۱۸},$$

$$P(۱)=P(۳)=P(۵)=\frac{۵}{۱۸}$$

۱۳.

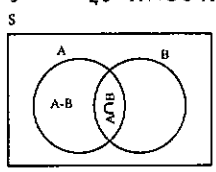
$$P(A)=\frac{S_۱}{S}=\frac{\pi(۱)^۲}{\pi(۲)^۲}=\frac{۱}{۴}$$



۱۴.

$$P(A)\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۱۰}{۷}}{۲^{۱۰}}=\frac{\frac{۱۰!}{۷!۳!}}{۲^{۱۰}}=\frac{۱۰\times۹\times۸}{۶\times۲^{۱۰}}=\frac{۱۵}{۱۲۸}$$

۱۵. با توجه به شکل و تساوی $A-B=A\cap B'$ ، واضح است که $A\cap B'$ و $A\cap B$ دو پیشامد ناسازگار هستند. بنابراین داریم:



$$(A\cap B)\cap(A\cap B')=\varnothing\Rightarrow$$

$$P[\underbrace{(A\cap B)\cup(A\cap B')}_{A}]=P(A\cap B)+P(A\cap B')\Rightarrow$$

$$P(A)-P(A\cap B)=P(A\cap B')$$

۱۶.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B),$$

$$P(A')=۱-P(A)=\frac{۳}{۸}\Rightarrow P(A)=\frac{۵}{۸},$$

$$\frac{۳}{۴}=\frac{۵}{۸}+P(B)-\frac{۱}{۳}$$

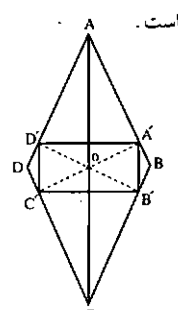
$$\Rightarrow P(B)=\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۳}-\frac{۵}{۸}=\frac{۱۱}{۲۴}$$

ب) $P(B-A)=P(B)-P(B\cap A)=\frac{۱۱}{۲۴}-\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۸}$

هندسه‌ی ۲

۱. A' و O و C' روی یک خط واقع‌اند. $\Leftarrow \left.\begin{array}{l}OA'\perp AB\\ OC'\perp CD\\ AB\parallel CD\end{array}\right\}$

به همین ترتیب، نقاط B' و O و D' نیز روی یک خط قرار دارند. چون نقطه‌ی O محل تلاقی نیمسازهای لوزی است، پس فاصله‌ی آن از ضلع‌ها یکسان است؛ یعنی: $OA'=OB'=OC'=OD'$. پس در چهارضلعی $A'B'C'D'$ قطرها همدیگر را نصف می‌کنند و با هم برابرند. درنتیجه، چهارضلعی مستطیل است.



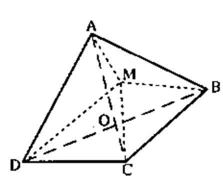
۲. ثابت می‌کنیم در چهارضلعی محدب ABCD، مجموع فاصله‌های محل تلاقی قطرها تا رأس‌ها می‌نیمم است. نقطه‌ی دلخواه M را درنظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم:

$$OA+OB+OC+OD<MA+MB+MC+MD$$

$$\Delta MAC: MA+MC>AC\Rightarrow OA+OC<MA+MC$$

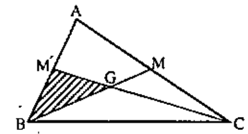
$$\Delta MBD: MB+MD>BD\Rightarrow OB+OD<MB+MD$$

با جمع کردن طرفین نامساوی‌های فوق، حکم به‌دست می‌آید.



۳. فرض کنیم از مثلث ABC اطلاعات زیر معلوم باشند: b و m_b و m_c.

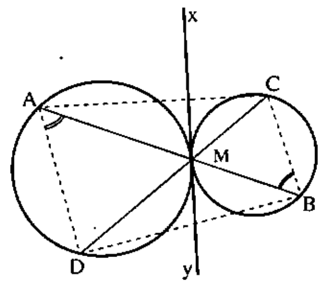
مثلث $BM'G$ را با داشتن طول سه ضلع آن ($BM'=\frac{C}{۲}$ و $GM'=\frac{m_c}{۳}$ و $BG=\frac{۲}{۳}m_b$) رسم می‌کنیم. BG را به اندازه‌ی نصف خود تا نقطه‌ی M و BM' را به اندازه‌ی خود تا نقطه‌ی A امتداد می‌دهیم. محل تلاقی خطوط AM و $M'G$ نقطه‌ی C خواهد بود.



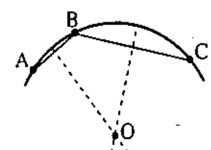
۴ . از نقطه‌ی M خط xy مماس مشترک دو دایره را رسم می‌کنیم . با توجه به شکل داریم :

$$BC \parallel AD \Leftarrow A\hat{B}C = B\hat{A}D \Leftarrow \begin{cases} \dfrac{MC}{2} = A\hat{B}C = x\hat{M}C \\ y\hat{M}D = x\hat{M}C \\ \dfrac{MD}{2} = B\hat{A}D = y\hat{M}D \end{cases}$$

بنابراین چهارضلعی ACBD ذوزنقه است .



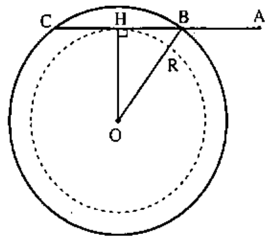
۵ . روی کمان معلوم، سه نقطه‌ی A و B و C را اختیار می‌کنیم . محل تلاقی عمودمنصف‌های دو وتر AB و BC مرکز دایره است .



۶ . فرض کنیم قاطع ABC جواب مسأله باشد، یعنی $BC = a$.

$$\Delta OHB: OH^2 = R^2 - HB^2 = R^2 - (\frac{a}{2})^2 \Rightarrow OH = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2}$$

پس برای رسم وتر موردنظر مسأله، ابتدا دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2}$ رسم می‌کنیم . سپس از نقطه‌ی A مماسی بر دایره‌ی جدید رسم می‌کنیم . وتر ایجاد شده روی دایره‌ی اول، جواب مسأله است .



۷ . نقطه‌ی $A(a,b)$ را درنظر می‌گیریم . قرینه‌ی آن نسبت به نیمساز ربع‌های اول و سوم عبارت است از $A'(b,a)$. بنابراین مختصات تصویر قائم آن روی نیمساز ربع‌های اول و سوم عبارت است از $(\frac{a+b}{2}$ و $\frac{b+a}{2})$، بنابراین داریم :

$$T(x,y) = (\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2})$$

۸ . $A(3,8), B(6,7) \Rightarrow m_{AB} = \frac{7-8}{6-3} = \frac{-1}{3} \Rightarrow m_d = 3$

M وسط $AB \Rightarrow M(\frac{9}{2}, \frac{15}{2})$

دفتر انتشارات کمک آموزشی

آشنایی با مجله‌های رشد

مجله‌های رشد توسط دفتر انتشارات کمک آموزشی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وابسته به وزارت آموزش و پرورش، با این عناوین تهیه و منتشر می‌شوند:

مجله‌های دانش‌آموزی (به صورت ماهنامه ـ ۸ شماره در هر سال تحصیلی ـ منتشر می‌شوند):

● رشد کودک (برای دانش‌آموزان آمادگی و پایه‌ی اول دوره‌ی ابتدایی)
● رشد نوآموز (برای دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دوره‌ی ابتدایی)
● رشد دانش‌آموز (برای دانش‌آموزان پایه‌های چهارم و پنجم دوره‌ی ابتدایی)
● رشد نوجوان (برای دانش‌آموزان دوره‌ی راهنمایی تحصیلی)
● رشد جوان (برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه)

مجله‌های عمومی (به صورت ماهنامه ـ ۸ شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند):

● رشد معلم، رشد آموزش ابتدایی، رشد آموزش راهنمایی تحصیلی، رشد تکنولوژی آموزشی، رشد مدرسه فردا، رشد مدیریت مدرسه

مجله‌های تخصصی (به صورت فصلنامه و ۴ شماره در سال منتشر می‌شوند):

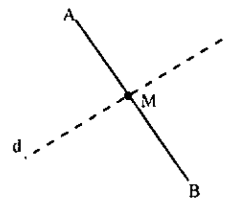
● رشد برهان راهنمایی (مجله‌ی ریاضی، برای دانش‌آموزان دوره‌ی راهنمایی تحصیلی)، رشد برهان متوسطه (مجله‌ی ریاضی، برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه)، رشد آموزش معارف اسلامی، رشد آموزش جغرافیا، رشد آموزش تاریخ، رشد آموزش زبان و ادب فارسی، رشد آموزش زبان، رشد آموزش زیست‌شناسی، رشد آموزش تربیت بدنی، رشد آموزش فیزیک، رشد آموزش شیمی، رشد آموزش ریاضی، رشد آموزش هنر، رشد آموزش قرآن، رشد آموزش علوم اجتماعی، رشد آموزش زمین‌شناسی، رشد آموزش فنی و حرفه‌ای و رشد مشاوره مدرسه.

مجله‌های رشد عمومی و تخصصی برای آموزگاران، معلمان، مدیران و کادر اجرایی مدارس دانشجویان مراکز تربیت معلم و رشته‌های دبیری دانشگاه‌ها و کارشناسان تعلیم و تربیت تهیه و منتشر می‌شوند.

◆ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهرشمالی، ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۸، دفتر انتشارات کمک آموزشی.
تلفن و نمابر: ۸۸۳۰۱۴۷۸

$$d: y-\frac{۱۵}{۲}=۳(x-\frac{۹}{۲})$$
$$\Rightarrow d: y=۳x-۶$$

زیرا عمودمنصف پاره‌خط AB، محور تقارن محسوب می‌شود و A و B قرینه‌ی یکدیگرند نسبت به خط d.



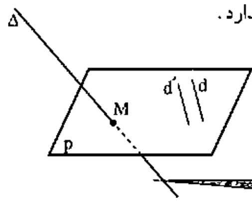
۹. ضابطه‌ی بازتاب نسبت به نقطه‌ی $A(۲,۱)$ عبارت است از:

$$T(x,y)=(۲\alpha-x,۲\beta-y)=(۴-x,۲-y)$$

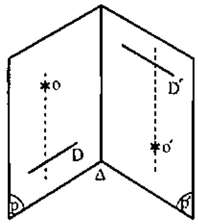
بنابراین، اگر x را به $۴-x$ و y را به $۲-y$ تبدیل کنیم، نباید معادله‌ی منحنی تغییر کند.

$$۲-y=\frac{۴-x+۱}{۴-x-۲}\Rightarrow ۲-y=\frac{۵-x}{۲-x}\Rightarrow -y=\frac{۵-x-۴+۲x}{۲-x}$$
$$\Rightarrow -y=\frac{x+۱}{۲-x}\Rightarrow y=\frac{x+۱}{x-۲}$$

۱۰. بی‌شمار یا هیچ. فرض کنید خطوط d و 'd موازی باشند و خط Δ با هر دو متناظر باشد. تمام خطوطی که d و 'd را قطع می‌کنند، درون صفحه‌ی p قرار دارند (صفحه‌ی p شامل دو خط d و 'd است). اگر خط Δ صفحه‌ی p را قطع کند، تمام خطوطی که از M بگذرند، d و 'd را قطع کنند، جواب مسأله‌اند و اگر Δ با صفحه‌ی p موازی باشد، مسأله جواب ندارد.

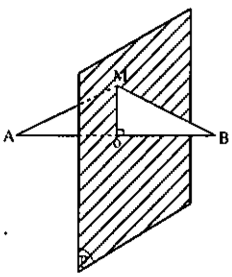


۱۱. صفحه‌ی p را بر نقطه‌ی O و خط D و صفحه‌ی 'p گذرا از 'O و شامل 'D را در نظر می‌گیریم و فصل مشترک دو صفحه را خط Δ می‌نامیم. از O و 'O دو خط به موازات Δ رسم می‌کنیم. این دو خط در صفحات p و 'p واقع‌اند. بنابراین، اولی خط D و دومی 'D را قطع می‌کند. پس این دو خط مزبور جواب مسأله‌اند.



۱۲. وسط پاره‌خط AB را نقطه‌ی O می‌نامیم و از نقطه‌ی O صفحه‌ی p را بر خط AB عمود می‌کنیم.

اولاً: اگر M از نقطه‌های A و B به یک فاصله باشد، مثلث MAB متساوی‌الساقین و MO عمودمنصف AB است و نقطه‌ی M در صفحه‌ی p قرار دارد.



ثانیاً: اگر M نقطه‌ای از صفحه‌ی p باشد، خط MO و AB عمود است و چون O وسط AB قرار دارد، MO عمودمنصف پاره‌خط AB خواهد بود. درنتیجه: MA=MB.

برگ اشتراک مجله های رشد

شرایط

۱ـ واریز مبلغ ۲۰/۰۰۰ ریال به ازای هر عنوان مجله درخواستی، به صورت علی‌الحساب به حساب شمارهٔ ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت شعبه سه راه آزمایش (سرخه حصار) کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست.

۲ـ ارسال اصل رسید بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک.

- نام مجله: ....
- نام و نام خانوادگی: ....
- تاریخ تولد: ....
- میزان تحصیلات: ....
- تلفن: ....
- نشانی کامل پستی:

استان: .... شهرستان: ....

خیابان: ....

پلاک: .... کدپستی: ....

- مبلغ واریز شده: ....
- شماره و تاریخ رسید بانکی: ....
- آیا مایل به دریافت مجله درخواستی به صورت پست پیشتاز هستید؟ بله ☐ خیر ☐

امضا:

نشانی: تهران ـ صندوق پستی مشترکین ۱۶۵۹۵/۱۱۱

نشانی اینترنتی: www.roshdmag.ir

پست الکترونیک: Email:info@roshdmag.ir

☎ امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ـ ۷۷۳۳۵۱۱۰ـ ۷۷۳۳۹۷۱۳ـ۱۴

☎ پیام‌گیر مجلات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲ـ ۸۸۸۳۹۲۳۲

یادآوری:

- هزینه برگشت مجله در صورت خوانا و کامل نبودن نشانی، بر عهده مشترک است.
- مبنای شروع اشتراک مجله از زمان وصول برگ اشتراک است.
- برای هر عنوان مجله برگ اشتراک جداگانه تکمیل و ارسال کنید (تصویر برگ اشتراک نیز مورد قبول است).

زبان حال ریاضی دانان

با وجود اهمیتی که کاربرد ریاضیات دارد، این کاربرد نباید ملاک ارزش آن باشد.

دیوید هیلبرت

به نظر می‌رسد که ریاضیات حس جدیدی غیر از احساس عادی به ریاضی دان می بخشد.

چارلز داروین

اگر تار و پود ریاضیات جدید که توسط هزاران کارگر بافته شده به صورت وسیع و پیچیده است، در عوض افکار اصلی محیط بر آن بسیار ساده‌اند و اگر هدف این افکار عمیق و نامحدود است در عوض هر کس که هوش و استعدادی داشته باشد می‌تواند آن‌ها را درک کند.

ای.تی.بل

بر گرفته از کتاب زبان حال ریاضی دان
به روایت دکتر علی اکبر عالم زاده

آموزش ریاضی • آموزش زبان و ادب فارسی • آموزش زبان • آموزش جغرافیا • آموزش شیمی • آموزش زیست‌شناسی زمین‌شناسی

آموزش معارف اسلامی • برهان • فنی و حرفه‌ای • برهان • آموزش تاریخ • آموزش علوم اجتماعی

◆ راهی مطمئن بسوی تقویت بنیه‌ی علمی دانش‌آموزان و معلمان ◆

از کجا بخریم؟

مژده به همکاران محترم آموزش و پرورش، دانشجویان و دانش‌آموزان عزیز که تمایل به دریافت محصولات دفتر انتشارات کمک آموزشی (نشریات رشد عمومی و تخصصی و کتاب‌های رشد) را دارند.

از این تاریخ، غیر از سازمان آموزش و پرورش استان‌ها، اداره آموزش و پرورش شهرستان‌ها و مناطق، نمایشگاه دائمی نشریات رشد واقع در فروشگاه مرکزی انتشارات مدرسه در تهران مجلات رشد را به طور مستقیم عرضه می‌کنند.

تهران، خیابان کریم‌خان، ابتدای ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره چهار آموزش و پرورش،

کتاب‌فروشی انتشارات مدرسه تلفن: ۸۸۸۲۲۶۶۸ امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶