رشد
برهان
فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی، اطلاع رسانی
مجله ریاضی
دوره ی متوسطه
ISSN 1735-4951

۵۲

• دوره‌ی شانزدهم • شماره‌ی ۲
• زمستان ۱۳۸۵ • بها ۳۰۰۰ ریال

- انسان موجودی تک بعدی نیست
- مجموعه های متناهی و نا متناهی
- فرمولی در اعداد اول و نتایج آن
- مسابقه های ریاضی در کشور های گوناگون جهان

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش وبرنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

مشاهیر ریاضی مسلمان

خوارزمی

خوارزمی . ابوعبدالله محمدبن موسی خوارزمی ، ریاضی‌دان ، منجم ، مورخ و جغرافیدان ایرانی نیمه‌ی دوم سده‌ی دوم و نیمه‌ی اول سده‌ی سوم .

وی ریاضیات و نجوم ایران پیش از اسلام و تعالیم مکتب جندی‌شاپور را با ریاضیات هندی درآمیخت و نخستین کتاب‌های حساب و جبر و نجوم را به زبان عربی نوشت . آثار او در بسط و پیشرفت ریاضیات ، چه در کشورهای اسلامی و چه در کشورهای اروپایی ، تأثیر فراوان داشت . کتاب حساب خوارزمی نخستین کتابی است که در دوره‌ی اسلامی راجع به فن حساب هندی تألیف شده است . بعضی از آثار موجود خوارزمی عبارت‌اند از :

۱ . مختصر من حساب الجبر و المقابلة ، که قدیمی‌ترین کتاب ریاضی موجود از دوره‌ی اسلامی است .

۲ . کتاب الجمع و التفریق ، نخستین کتابی که در دوره‌ی اسلامی درباره‌ی حساب با ارقام هندی نوشته شده است .

۳ . زیج ، که بیرونی به آن توجه داشته و در آثار خود از آن نام برده است .

اصطلاح الگوریتم که نزد اروپاییان برای فن حساب عملی ، در مقابل ارثماطیقی برای علم نظری اعداد به کار رفته ، تحریفی از نام الخوارزمی است .

سجزی

سجزی . ابوسعید احمدبن محمدبن عبدالجلیل سجزی ، ریاضیدان و منجم ایرانی ، متولد حدود ۳۳۰ و متوفی حدود ۴۱۵ .

از مردم سیستان و مشاهیر ریاضی‌دانان و منجمان سده‌ی چهارم است که بیشتر عمر خود را در شیراز به سر برده است . به‌خصوص در هندسه بسیار زبردست بود و درباره‌ی تقاطع قُطوع مخروطی و مسائل دیگر ریاضی تحقیقاتی کرد . بیرونی در «**آثار الباقیة**» وی را «مهندس» گفته است .

تا زمان سجزی ، ریاضی‌دانان مسأله‌ی تثلیث زاویه را با روش هندسه‌ی متحرک ، یعنی با حرکت دادن خط‌کش حل می‌کردند . سجزی این مسأله را با تقاطع دایره و هذلولی متساوی‌القطرین حل کرد و آن را روش هندسه‌ی ثابت نامید .

وی نخستین منجم دوره‌ی اسلامی بود که عملاً فرض حرکت وضعی زمین را به کار بست .

منبع : فرهنگ ریاضیات/گروه ریاضیات انتشارات مدرسه/ناشر : انتشارات مدرسه

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ۵۲

مجله‌ی ریاضی

دوره ی متوسطه

فصلنامه آموزشی، تحلیلی، اطلاع رسانی

دوره‌ی شانزدهم /شماره‌ی ۲/ زمستان ۱۳۸۵/شمارگان: ۲۰۰۰۰نسخه

- مدیر مسؤول: علیرضا حاجیان زاده
- سردبیر: حمیدرضا امیری
- مدیر داخلی: میرشهرام صدر
- طراح گرافیک: آزیتا کوثری
- ویراستار ادبی: کبری محمودی
- اعضای هیأت تحریریه: حمیدرضا امیری

محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری،
میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی،
سید محمدرضا هاشمی موسوی،
غلامرضا یاسی پور

و با تشکر از همکاری ارزنده‌ی
استاد پرویز شهریاری

- چاپ و صحافی: شرکت افست (سهامی عام)
- نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵

تلفن دفتر مجله: ۹ـ ۸۸۸۳۱۱۶۰ داخلی ۳۹۷

تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ـ ۷۷۳۳۵۱۱۰

www.roshdmag.ir

ISSN 1735 - 4951

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش وبرنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می کند:

- نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می شود.

مجلّه در حکّ، اصلاح، حذف و اضافه ی مقاله ها آزاد است.

مقاله های وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.

مقاله های رسیده مسترد نمی شود.

استفاده از مطالب مجلّه در کتاب ها یا مجله های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

باز این چه شورش است که در خلق عالم است

وقتی در سال ۶۱ هـ. ق، یزید نیزه‌ی ظلم و کینه‌توزی خود را به سمت گلوی اسلام ناب محمدی نشانه رفته بود و با تمام قوا قصد نابودی آن را داشت، امام حسین(ع) دیگر مدارا کردن را جایز ندانست و حیات این درخت مقدس را که هنوز نهالی بیش نبود، در معرض خطری جدی مشاهده کرد و تصمیم به قیام گرفت. عجیب است که هنوز از رحلت رسول اکرم(ص) حدود ۵۰ سال بیش‌تر نگذشته بود که این چنین قصد از ریشه بر کندن این درخت را داشتند.

حرکت امام حسین(ع) از کنار جدش پیامبر اکرم(ص) و مسیری که ایشان و خانواده‌ی بزرگوارشان طی کردند تا به کربلای معلاّ رسیدند، حرکتی الهی و سراسر درس پایداری، آزادگی و سرافرازی است؛ مسیری که قدم به قدم آن با هشیاری و به نیت امر به معروف، نهی از منکر و اصلاح دین جدشان رسول‌الله(ص) پیموده شد.

اسلام با این حرکت تولد دیگری یافت. این نهال نورس، با خون سیدالشهدا و یاران باوفایش سیراب گشت و امام خمینی(ره) چه زیبا فرمودند: «این محرم و صفر است که اسلام را زنده نگه داشته است.»

آری این محرم و صفر است که حامل زنده‌ترین، به‌روزترین، خالصانه‌ترین، عمیق‌ترین و زیباترین پیام‌های اسلامی و زندگی‌ساز اسلام ناب محمدی بوده و هست. کدام طبقه از مردم جامعه یا کدام گروه سنی از افراد جامعه از این پیام‌ها بی‌نصیب و محروم مانده‌اند؟ کدام ارزش والای معنوی برای انسان‌ها در کربلا و عاشورای حسینی مصداقی عینی و واقعی ندارد؟ وفاداری، مهربانی، ایثار، احترام، بندگی، خلوص نیت، عبادت، شجاعت، پایداری، عزت‌نفس و... همه‌ی این ارزش‌های مثبت، به‌وفور در واقعه‌ی کربلا، از شروع تا عاشورا، و بعد از آن در کوفه و شام مشاهده می‌شوند. قیام امام حسین(ع) برای دشمن معادله‌ای بود با یک جواب بدیهی: شکست خاندان رسول‌الله(ص). اما درحقیقت این واقعه و قیام، معادله‌ای بود با بی‌شمار جواب غیرصفر و مثبت که هریک از آن‌ها پیامی بود برای پیروان راه آن حضرت و تیری بر قلب دشمن.

یکی از جواب‌های این معادله نماز است و اقامه‌ی آن؛ حتی در سخت‌ترین شرایط، در ظهر عاشورا و در آن هیاهوی میدان نبرد و به قیمت قربانی شدن سربازانی رشید چون حبیب‌بن مظاهر(س). دوست دانش‌آموز، اگر فقط به همین یک پیام نهضت امام حسین(ع) توجه داشته باشیم و آن را به گوش جان بخریم، به بسیاری از پیام‌های دیگر نیز پاسخ مثبت داده‌ایم و از پیروان سیدالشهدا(ع) خواهیم بود.

انسان موجودی تک‌بعدی نیست

● پرویز شهریاری

ماکسیمیلیان ماری روب‌میر (۱۷۵۸-۱۷۹۳) مشهور به «فسادناپذیر» که در آغاز زیر تأثیر اندیشه‌های ژان‌ژاک روسو بود و سرانجام با گیوتین اعدام شد، می‌گوید: «می‌خواهیم نظامی به وجود آوریم که در آن همه‌ی عاطفه‌های پست و ناهنجار به زنجیر کشیده شوند و به جای آن‌ها، عاطفه‌های شایسته و ثمربخش به وسیله‌ی قانون بیدار شوند... می‌خواهیم در کشور خود، اخلاق را به جای خودپسندی، پاکدامنی را به جای افتخار، ... نفرت از عیب را به جای نفرت از بدبختی، غرور را به جای گستاخی، بزرگی روح را به جای خودنمایی، عشق به افتخار را به جای عشق به پول، شایستگی را به جای مکر، نبوغ را به جای ذوق، حقیقت را به جای زرق و برق، عظمت سعادت را به جای کسالت شهوت، بزرگی انسان را به جای کوچکی بزرگان، ملتی نیرومند و خوشبخت را به جای ملتی بی‌نوا و سبک‌مغز، و سخن کوتاه، همه‌ی فضیلت‌ها و معجزه‌های جمهوریت را به جای رذیلت‌ها و مضحکه‌های استبداد بنشانیم.»

الف

این درست است که ضمن برخورد با فرهنگ‌های دیگر، باید آگاه بود و جلوی عنصرهای منفی و ویرانگر فرهنگ بیگانه ایستاد و جامعه‌ی خود را از تقلید کورکورانه کنار کشید. اگر فرهنگ را مجموعه رفتارهای فردی و اجتماعی یک قوم یا ملت بدانیم، طبیعی است که در این مجموعه، هم عنصرهای سالم و پذیرفتنی وجود داشته باشند و هم عنصرهای نادرست و ضدارزش. چگونه می‌توان این دو گونه‌ی متضاد را از هم جدا کرد و سره را از ناسره بازشناخت؟ به نظر من تنها راه، جست‌وجوی ریشه‌هاست. از این راه است که می‌توان سرچشمه‌ی نادرستی‌ها را یافت و راه مبارزه با آن‌ها را شناخت. مدت‌هاست که جریان‌های تفرقه‌انداز مسلط بر جهان، تا اندازه‌ی زیادی به صورت یکسویه عمل می‌کنند و جهان سوم بی‌وقفه تحت تأثیر حرکت سیل‌آسای فرهنگ جهان اول، یعنی جهان سرمایه‌داری قرار گرفته است. این امری طبیعی است، چرا که جهان سرمایه‌داری همه‌ی امکانات پیشرفته را در اختیار دارد و گمان می‌کند، می‌تواند دیدگاه‌های خود را به دیگران بپذیراند و باور دارد که قادر است و حق دارد جهان را به سمتی بکشاند که دلخواه اوست.

کسی در این باره تردید ندارد که دانش، صنعت و نوآوری‌های علمی غرب نه‌تنها زیانبار نیستند، بلکه می‌توانند شرایط زندگی بهتر و انسانی‌تری را برای سیاره‌ی کوچک ما فراهم کنند. حتی بدبین‌ترین گروه‌ها هم، در عمل از رهاوردهای دانش و فن پایان سده‌ی بیستم و آغاز سده‌ی بیست و یکم بهره می‌گیرند. همه‌ی ما از اتومبیل و هواپیما استفاده می‌کنیم، موج‌های رادیویی و تلویزیونی را به خدمت می‌گیریم، در خانه‌های خود برق، گاز، آب لوله‌کشی، یخچال، چراغ گاز و... داریم. حتی در سطح ملی جنگ‌افزارهای ساخت غرب را به خدمت گرفته‌ایم و یا از ساخت داخلی آن‌ها استفاده می‌کنیم، و می‌کوشیم با به‌کارگیری مدرن‌ترین امکان‌های چاپی و ارتباطی، دیدگاه‌های خود را بپراکنیم و زمینه را برای گسترش آن‌ها آماده کنیم. به این ترتیب همه‌ی ما پذیرفته‌ایم، ضمن نفوذ و ورود فرهنگ غرب، عنصرهایی جدی و اساسی وجود دارند که نه‌تنها بد نیستند، بلکه وجودشان ضروری و لازمه‌ی زندگی امروزی است.

از بین عنصرهای منفی جهان سرمایه‌داری، برخی به رفتار فردی و شخصی و برخی دیگر به روندهای اجتماعی مربوطند. در این‌جا تنها به گونه‌ی دوم می‌پردازیم، چرا که ریشه‌ای هستند و

می‌توانند سمت‌گیری جامعه‌ی ما را در جهت جامعه‌ای سالم و انسانی و یا برعکس، به سوی جامعه‌ای غیرانسانی معین کنند. از سطح به عمق برویم و ریشه‌ها را دریابیم. در این صورت شاخ و برگ‌ها هم نیرو می‌گیرند و از حالت خمودگی بیرون می‌آیند. پند دادن و نشان دادن راه، تنها وقتی می‌تواند اثربخش باشد که به ریشه‌ها پرداخته باشیم و مسأله‌های سطحی و فرعی را به تبع آن‌ها حل شده بدانیم. این ریشه‌ها کدامند؟

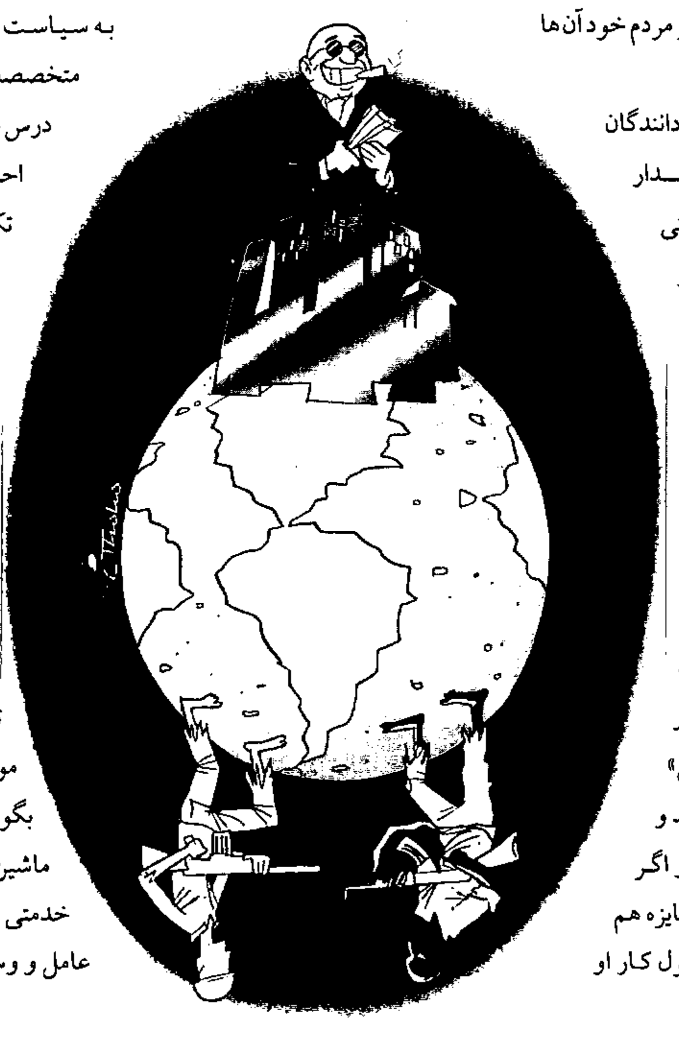
پروردن افراد جداگانه، برای تخصص‌های جداگانه و جلوگیری از رشد ذهنی این افراد، تلاشی است که در جامعه‌ی سرمایه‌داری، برای تک‌بُعدی کردن آدم‌ها انجام می‌شود

همه‌ی گرفتاری‌ها ناشی از خود نظام سرمایه‌داری است و نظام سرمایه‌داری به‌دنبال سود است؛ سود هرچه بیش‌تر و به هر طریق ممکن. سرمایه‌دار و سرمایه‌داری از هیچ ترفندی، هر قدر هم زشت و غیرانسانی، برای انباشتن سرمایه دریغ نمی‌کند و در این راه، نه اخلاق می‌شناسد و نه انسانیت. از فساد، دزدی، ریا، آدم‌کشی (حتی نسل‌کشی) هم رویگردان نیست. هر راهی که او را به سود بیش‌تر برساند، برایش «مقدس» است. ببینیم این سودجویی آزمندانه، در خود جامعه‌های پیشرفته‌ی سرمایه‌داری، حتی بر سر مردم خود آن‌ها چه آورده است؟

۱. سردمداران و گردانندگان

جامعه‌ای که بر مدار سرمایه‌داری می‌گردد (یعنی صاحبان اصلی سرمایه و نمایندگان آن‌ها در دستگاه‌های حکومتی)، به انسان‌های تک‌بُعدی نیاز دارند. هرکس تخصص شخصی خودش را داشته باشد و به تخصص دیگران و کار دیگران کاری نداشته باشد. کارگر در کار خودش «وظیفه‌شناس» باشد، بیش‌تر کار کند و کم‌تر توقع داشته باشد و اگر چنین باشد، گاه به گاه جایزه هم می‌گیرد. این که محصول کار او چیست، به کجا می‌رود، چه سودی برای جامعه‌ی انسانی دارد و از «آب کردن» محصول تولیدی او، چه سودی به چه کسانی می‌رساند، به او ربطی ندارد.

در مجلسی، چند دانش‌آموخته و متخصص ایرانی که در یکی از کشورهای سرمایه‌داری درس خوانده بودند، بر سر فرهنگ عمومی و رابطه‌ی فرد و جامعه بحث می‌کردند. یکی از این عزیزان با اعتقاد کامل می‌گفت، بهترین راه برای پیشرفت جامعه این است که هر کسی تلاش کند، در کار خود به حد بالایی از کارایی و تخصص برسد و در کار دیگران دخالت نکند. او که در زمینه‌ی الکترونیک تحصیل کرده بود، روایت می‌کرد: روزی ضمن عبور از خیابان، جلوی کیوسک یک روزنامه فروشی می‌ایستد و عنوان خبرها و مقاله‌ها را از نظر می‌گذراند. یکی از هم‌کلاسی‌هایش، که با روحیه‌ی کشور متبوعش تربیت شده بود، از راه می‌رسد و به دوست ما می‌گوید: چرا این‌جا ایستاده‌ای؟ پاسخ می‌دهد که می‌خواهم از اوضاع جهان آگاه شوم... دوستش با خشم به او می‌گوید: تو به کشور ما آمده‌ای تا در الکترونیک متخصص شوی، به اوضاع جهان و به سیاست چه کار داری؟ سیاست را به متخصصان سیاست واگذار... تو که به جای درس خودت، دنبال سیاست هستی، یک احمق تمام‌عیاری!... و این یعنی آدم تک‌بُعدی.



انسان مجموعه‌ای پیچیده است. نمی‌توان بخش‌های ذهنی و جسمی او را از یکدیگر جدا کرد. انسان موجودی اجتماعی است و باید در همه‌ی ارکان جامعه‌ی خود و جامعه‌ی جهانی دخالت کند. انسانی که به دانش رو آورده است، نمی‌تواند و نباید از هنر بی‌بهره باشد. انسان تک‌بُعدی، در واقع انسان نیست، موجودی است ماشینی، یا بهتر بگوییم، پیچی یا مهره‌ای از یک ماشین. نه نقش خود را می‌شناسد و نه خدمتی به جامعه‌ی انسانی می‌کند. او تنها عامل و وسیله‌ای در دست سرمایه‌دار است

که با بهره‌گیری از او، سود بیش‌تری برای خود می‌اندوزد.

پروردن افراد جداگانه، برای تخصص‌های جداگانه و جلوگیری از رشد ذهنی این افراد، تلاشی است که در جامعه‌ی سرمایه‌داری، برای تک‌بُعدی کردن آدم‌ها انجام می‌شود. اگر دانشمند ریاضی، از جامعه‌ی خود و از جامعه‌ی جهانی غافل باشد، اگر از هنر لذت نبرد، اگر در بحث‌های جامعه‌شناسی و سیاست دخالت نکند، اگر همراه دیگران به چاره‌اندیشی برای زدودن زشتی‌هایی که چهره‌ی انسانی زمان ما را آلوده کرده است، تلاش نکند و اگر... همان انسان تک‌بُعدی دلخواه سردمداران جامعه‌ی سرمایه‌داری می‌شود. انسان جان و خرد دارد و این دو را نمی‌توان از یکدیگر جدا کرد. جان سرچشمه‌ی هنر و خرد زاینده‌ی دانش است و انسان واقعی نمی‌تواند، از هیچ کدام روگردان باشد. در واقع، داشتن تخصص به هیچ وجه به معنای آن نیست که انسان، انسانیت خود را فراموش کند. انسان می‌تواند از موسیقی لذت ببرد، با رفتن به نمایشگاه‌های نقاشی و مجسمه‌سازی، روح و جان خود را تلطیف کند، از اوضاع جامعه‌ی خود و جامعه‌ی جهانی آگاه شود، عاطفه داشته باشد، به بهبود زندگی انسانی بیندیشد، در مبارزه به خاطر سلامت محیط زیست و به خاطر زندگی انسانی‌تر شرکت کند و... و در عین حال تخصص هم داشته باشد و در راه اعتلای دانش تخصصی خود بکوشد.

یکی از بزرگ‌ترین آفت‌های فرهنگ سرمایه‌داری، تک‌بعدی شدن انسان‌هاست که البته به مبارزه‌ای جدی برای تسلیم نشدن به آن نیاز داریم.

۲. آفت دیگر جهان سرمایه‌داری این است که هرکس تنها به خود و سود خود بیندیشد. هر کسی تنها در این اندیشه باشد که گلیم خود را از آب بیرون بکشد و به دیگران کاری نداشته باشد. از این دیدگاه است که فساد، دزدی، ریا، قدرت‌طلبی، انحصارطلبی، محدود کردن آزادی دیگران، توهین به کسانی که به گونه‌ای دیگر می‌اندیشند و تحقیر آن‌ها، استفاده از فشار و تهدید، خریدن و به خدمت گرفتن نیروی فکری و عملی برخی روشنفکران ساده‌اندیش، جاسوسی، ترور فیزیکی و روحی مخالفان و بسیاری زشتی‌های دیگر، در جامعه رواج می‌یابند، فاصله‌ی بین طبقه‌ها زیادتر می‌شود و بهره‌کشی و استثمار فزونی می‌یابد و به تدریج، عدالت اجتماعی و عاطفه و اخلاق انسانی نابود می‌شود و تنها سودجویی هرچه بیش‌تر، آن هم از هر راه ممکن، جای آن‌ها را می‌گیرد. هر وقت دیدید در جامعه‌ای اختلاف: سن، جنس، صنف و امثال آن عمده شده است، تلاش بر این است که اختلاف نسل‌ها، جنس‌ها و صنف‌های گوناگون، جای تبادل اندیشه را بگیرد. هر وقت دیدید دزدی رواج پیدا کرد و ترور فکری و جسمی (شبیه آنچه در اسرائیل و آمریکا وجود دارد) شدت گرفت، هر وقت دیدید آزادی طبیعی انسان‌ها محدود شده و وحشت جای تبادل اندیشه را گرفته است، هر وقت دیدید برای انجام هر وظیفه‌ای که به عهده‌ی دیگران است، باید بهایی بپردازید و... مطمئن باشید که در معرض هجوم فرهنگ سودجویانه‌ی جهان سرمایه‌داری قرار گرفته‌اید؛ فرهنگی که مثل خوره به جان جامعه افتاده است و آن را به تباهی می‌کشاند.

سود و سود بیش‌تر شعار سرمایه‌داری است و رواج این اندیشه، از جنبه‌های ویرانگر بخش منفی فرهنگ غرب است.

۳. جهان سرمایه‌داری و سردمداران آن دوست دارند با انسان‌های سطحی و ساده‌اندیش سروکار داشته باشند و به این منظور، راه‌هایی اندیشیده‌اند. کتاب‌ها و فیلم‌های پلیسی و جنایی را به صورتی گسترده پخش می‌کنند، از کف‌بینی، طالع‌بینی، فال قهوه و دیگر دانش‌های دروغین برای گمراه کردن ذهن‌ها یاری می‌گیرند، دوران ما را «عصر شتاب» نام نهاده‌اند و آثار بزرگان ادب جهان، چون **ویکتور هوگو، تولستوی، فاوست، آناتول فرانس** و **جان اشتاین بک** را در چند صفحه کوتاه می‌کنند تا کسی در «عصر شتاب» رغبت به خواندن اصل آن‌ها نداشته باشد. داستان‌ها و فیلم‌های فضایی عرضه می‌کنند که در آن‌ها، همه در اندیشه‌ی نابودی، ویرانی و کشتارهای جمعی‌اند. این اعتقاد را می‌پراکنند که انسان همیشه زبون بوده است و تا آخر زبون خواهد ماند؛ زمانی به خاطر جهل و بی‌تجربگی خود، زبون در برابر نیروهای طبیعت، و امروز زبون در برابر دانش و صنعت خود. انسان‌ها به دو گروه وحشی و متمدن تقسیم شده‌اند تا برای «آقایی» خود بر جهان، محملی تراشیده باشند. اختلاف‌های قومی، ملی، اعتقادی و دینی را بزرگ می‌کنند و دامن می‌زنند و از این راه، اندیشه‌های نژادپرستانه را رواج می‌دهند و جدایی قومی و نژادی را تبلیغ می‌کنند. و همه‌ی این‌ها به خاطر آن است که مردم به ریشه‌های اصلی سیه‌روزی خود، بی‌پناهی انسان‌ها، فقر، گرسنگی، بیماری، جنگ، غارتگری سرمایه‌داری و هزاران بلای دیگر نیندیشند. به طور دائم به دنبال نان باشند و در اندیشه‌ی پرداخت قسط‌های وام‌های خود، سرچشمه‌ی بدبختی‌ها را در وجود قوم‌ها، ملت‌ها، نسل‌ها یا صنف‌های دیگر بدانند و راه انسانی خود را برای رسیدن به زندگی انسانی‌تر، که به ناچار راه

«نظام مصرفی» به معنای خوردن، پوشیدن، نوشتن، خواندن و در جایی زیستن نیست. نظام مصرفی به معنای مصرف بی‌رویه و بیهوده‌ی کالا و نابود کردن سرچشمه‌های طبیعی، به خاطر انباشتن سود و سرمایه است

مبارزه با ستم دنیای سرمایه‌داری است، فراموش کنند.

پ

از «جامعه‌ی مصرفی» و «زندگی مصرفی» بسیار سخن گفته‌اند. ولی کم‌تر به ریشه‌ها پرداخته‌اند و به همین جهت، ماهیت امر برای مردم ناشناخته مانده است.

در برخورد ساده‌لوحانه، اغلب به مردم توصیه می‌شود: کم‌تر غذا مصرف کنید، به لباس خود اهمیت ندهید، بچه‌ها را به قناعت عادت دهید، و از زینت‌ها، چه بر سر و روی خود و چه بر در و دیوار خانه پرهیز کنید. می‌توانید به جای چینی از بشقاب ملامین استفاده کنید. دستمال پارچه‌ای، مناسب‌تر از دستمال کاغذی است. گوشت مرض دارد، برنج آدم را بیمار می‌کند، قند و شکر و شیرینی دشمن سلامتی هستند و...

البته برخی از این سفارش‌ها درست هستند، ولی عیب کار در این‌جاست که این‌ها را به مردمی می‌گویند که برای سیر کردن شکم فرزندان خود درمانده‌اند و از تهیه‌ی سرپناه برای زندگی و یا تهیه‌ی مداد و خودکار و دفترچه برای مشق فرزند خود عاجزند. با این همه، جامعه‌ی مصرفی با تمام توان خود در حرکت است. این وضع نه تنها درباره‌ی جهان سوم، که درباره‌ی جهان اول هم صدق می‌کنند... منابع اصلی مورد نیاز بشر به سرعت نابود می‌شوند و ریخت و پاش ادامه دارد. در ضمن، هر روز که می‌گذرد، پولدارها پولدارتر و بی‌چیزها بی‌چیزتر می‌شوند. گیر کار در کجاست؟

در این جا، تنها به نمونه‌ای کوچک، آن هم به صورتی گذرا می‌پردازیم.

مصرف کاغذ و مقوا

برای تهیه‌ی یک کیلوگرم کاغذ یا مقوا، به جز چیزهای دیگر، باید نزدیک به هفت کیلوگرم چوب مصرف کرد. ببینیم این کاغذ و مقوا در جهان سرمایه‌داری چگونه مصرف می‌شود؟

کسانی که سری به آمریکا یا کانادا زده‌اند، می‌دانند هر روز بدون استثنا انبوهی از نشریه‌های تبلیغاتی (که تنها به تبلیغ کالاهای کمپانی‌ها یا فروشگاه‌های بزرگ یا مرکزهای تفریحی و غیر آن می‌پردازند)، جلوی هر خانه و آپارتمانی ریخته می‌شود و یکی از کارهای روزانه‌ی صاحبان خانه‌ها، جابه‌جا کردن این انبوه کاغذ (که گاهی از پنج کیلوگرم هم تجاوز می‌کند) و ریختن آن‌ها به سطل زباله است. تنها در این‌جا کار خاتمه نمی‌یابد. در بسیاری از مواقع، بیش از هفتاد درصد صفحه‌های روزنامه‌ها و مجله‌ها را آگهی‌های تبلیغاتی پر کرده‌اند و کم‌تر از سی درصد صفحه‌های آن‌ها به مطلب و مقاله اختصاص دارد (که البته بسیاری از این مقاله‌ها هم «رپورتاژ آگهی» هستند).

خب، اگر آن‌طور که نظریه‌پردازان نظام سرمایه‌داری تبلیغ می‌کنند، نظام سرمایه‌داری را بهترین نظام برای زندگی بدانیم، آن‌وقت باید تلاش کنیم تا همین رویه، در تمامی جهان و برای تمامی مردم گسترش یابد. خودتان محاسبه کنید: اگر فرض کنیم هر فرد روزانه تنها یک کیلوگرم کاغذ، به صورت تبلیغ‌های بی‌معنی به هدر دهد (یعنی هفت کیلو چوب)، آن وقت جنگل‌های سیاره‌ی ما، چند سال دوام می‌آورند؟ هم‌اکنون هم که در بخش کوچکی از جهان (یعنی جهان سرمایه‌داری) چنین ریخت و پاشی وجود دارد، هر سال جنگل‌های جهان کیلومترها عقب‌نشینی می‌کنند و جای خود را به بیابان می‌دهند. و تازه این، به قیمت گرسنگی و برهنگی بخش عمده‌ی جهان (یعنی جهان سوم) است که سردمداران سرمایه‌داری می‌توانند نظام کنونی را ادامه دهند.

«نظام مصرفی» به معنای خوردن، پوشیدن، نوشتن، خواندن و در جایی زیستن نیست، نظام مصرفی به معنای مصرف بی‌رویه و بیهوده‌ی کالا و نابود کردن سرچشمه‌های طبیعی، به خاطر انباشتن سود و سرمایه است؛ چیزی که خاص نظام سرمایه‌داری است.

نظام مصرفی سرمایه‌داری نه انسانی است و نه امکان ادامه‌ی حیات دارد. به این دلیل انسانی نیست که رفاه و دست‌ودلبازی بخش ناچیزی از جهان، به قیمت رنج و تیره‌روزی اکثریت مردم دنیا فراهم می‌شود. به این دلیل انسانی نیست که برای حفظ آن باید بخش عمده‌ای از مردم جهان، جنگ، ویرانی و گرسنگی را تحمل کنند... در واقع غرش توپ‌ها، شلیک موشک‌ها و پرواز هواپیماها، جنگی است که برای مردم جهان مرگ و قحطی، و برای سرمایه‌دار سود و رفاه می‌آورد...

نظام سرمایه‌داری، به این دلیل امکان ادامه‌ی حیات ندارد که اگر وضع به همین شکل ادامه پیدا کند، نابود شدن منابع حیاتی، امکان زندگی را از گیاه و جانور و انسان می‌گیرد... بی‌جهت نیست، «نهضت‌های سبز» که برای حفظ سرچشمه‌های طبیعی مبارزه و برای پاک نگهداشتن محیط زیست تلاش می‌کنند و بازتاب‌دهنده‌ی وجدان انسان‌های شریف و پاک در سراسر جهان هستند، تا به این اندازه مورد پشتیبانی مردم و دانشمندان و صاحبان فرهنگ، و در عین حال، مورد بغض و خشم سرمایه‌داران قرار دارند.

مردم زندگی «مصرفی» ندارند. مردم حق دارند بعد از تلاش شبانه‌روزی، به اندازه‌ی کافی غذا داشته باشند، خوب بپوشند، از سرپناهی استفاده کنند، تفریح کنند و نگران زندگی فرزندان خود نباشند. این سرمایه‌داران و غارتگران هستند که «جامعه‌ی مصرفی» را ساخته‌اند و نه تنها زندگی مردم، که به طور کلی، «زندگی» را به خطر انداخته‌اند.

مجموعه های متناهی، نامتناهی شمارا و ناشمارا

● حمیدرضا امیری

وقتی صحبت از مجموعه‌های متناهی و در مقابل آن‌ها مجموعه‌های نامتناهی می‌شود، مجموعه‌هایی چون مجموعه‌ی اعداد اولِ یک رقمی یا مجموعه‌ی اعداد فرد دو رقمی به عنوان مجموعه‌های متناهی، و مجموعه‌هایی مانند مجموعه‌ی اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$) یا مجموعه‌ی اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) را می‌توان به عنوان مجموعه‌های نامتناهی درنظر گرفت. حال این سؤال پیش می‌آید که آیا مجموعه‌های نامتناهی مانند $\mathbb{N}$ و $\mathbb{R}$ در یک گروه محسوب می‌شوند؟!

در این مقاله می‌کوشیم، علاوه بر معرفی مجموعه‌های متناهی و نامتناهی، مجموعه‌های نامتناهی را به دو دسته‌ی نامتناهیِ شمارا و نامتناهیِ ناشمارا تقسیم و با مثال‌هایی تفاوت این دو گروه از مجموعه‌های نامتناهی را مشخص کنیم.

قبل از هر چیز به تعریف مفهوم تناظر یک به یک نیاز داریم که این مفهوم را به این صورت بیان می‌کنیم:

تناظر یک به یک: اگر A و B دو مجموعه باشند و به ازای هر عضو از A یک عضو از B و به ازای هر عضو از B یک عضو از A وجود داشته باشد، می‌گوییم A و B تناظر یک به یک دارند و می‌نویسیم $A \approx B$.

برای مثال، اگر فرض کنیم $A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $B = \{a,b,c,d,e,f\}$ در این صورت واضح است که $A \approx B$ که این تناظر یک به یک را به شکل زیر ملاحظه می‌کنید:

A:	۱	۲	۳	۴	۵	۶
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
B:	a	b	c	d	e	f

همان‌طور که در تعریف دقت کردید، مفهوم تناظر یک‌به‌یک بین دو مجموعه‌ی A و B هیچ محدودیتی برای نامتناهی بودن این دو مجموعه ایجاد نمی‌کند و اگر این مفهوم را به دقت به کار ببریم، به سادگی و به صورت زیر می‌توان

نشان داد که مجموعه‌ی اعداد طبیعی و مجموعه‌ی اعداد طبیعیِ زوج تناظر یک‌به‌یک دارند؛ یعنی $2\mathbb{N} \approx \mathbb{N}$

$$\begin{array}{lccccccc} \mathbb{N}: & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & \ldots\ldots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 2\mathbb{N}: & ۲ & ۴ & ۶ & ۸ & ۱۰ & ۱۲ & \ldots\ldots \end{array}$$

(کمی جلوتر همین تناظر یک‌به‌یک بین مجموعه‌های نامتناهی را به صورتی دقیق‌تر و با تعریف تابعی دوسویی، یعنی تابعی یک‌به‌یک و پوشا بین دو مجموعه، نشان خواهیم داد.)

حال به سراغ بحث اصلی می‌رویم و با تعریف مجموعه‌های متناهی و نامتناهی آغاز می‌کنیم.

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

تعداد حروف صدادار انگلیسی از تعداد حروف انگلیسی کم‌تر است زیرا مجموعه‌ی اول جزو مجموعه‌ی دوم است. آیا این اصل در مورد مجموعه‌هایی چون $\mathbb{N}$ و زیرمجموعه‌های آن نیز صادق است؟ آیا می‌توان گفت تعداد اعضای مجموعه‌ی اعداد طبیعی و زوج، از تعداد اعضای $\mathbb{N}$ کم‌تر است؟

برای پاسخ به این سؤال باید مفاهیم متناهی و نامتناهی را در مجموعه‌ها بررسی کنیم و برای آن تعریفی جامع و مانع ارائه دهیم.

قبل از بررسی دو مفهوم متناهی و نامتناهی، به دلیل وابستگی این دو مفهوم به مفهوم «تعداد اعضا»، ابتدا مفهوم **تعداد اعضا** را بررسی می‌کنیم.

در مورد مجموعه‌هایی مانند مجموعه‌ی دانش‌آموزان و مجموعه‌ی صندلی‌ها، راه مستقیمی که برای مقایسه‌ی تعداد اعضای این دو مجموعه وجود دارد، شمارش تعداد اعضای هر مجموعه و مقایسه‌ی اعداد حاصل است.

اما آیا از این طریق می‌توان تعداد نقاط دو قطعه خط یا تعداد اعداد طبیعی و اعداد طبیعی زوج را با هم مقایسه کرد؟

برای رهایی از این مشکل، استفاده از روش کانتور بهترین راه‌حل است و آن برقراری تناظر یک‌به‌یک بین دو مجموعه است.

اگر مجموعه‌ی A را مجموعه‌ی دانش‌آموزان خارج از کلاس و مجموعه‌ی B را مجموعه‌ی صندلی‌های داخل کلاس تصور کنیم و بخواهیم بین A و B تناظری یک‌به‌یک برقرار سازیم، سه حالت ممکن است رخ بدهد:

۱. حالتی که هیچ دانش‌آموزی خارج از کلاس نمانده باشد و هیچ صندلی خالی نیز در کلاس نباشد. در این حالت، بین دو مجموعه‌ی A و B تناظری یک‌به‌یک برقرار شده است که می‌گوییم تعداد اعضای A و B باهم برابرند (A و B هم‌عدد هستند).

۲. حالتی که همه‌ی صندلی‌ها اشغال شده باشند و تعدادی دانش‌آموز نیز در خارج کلاس باقی مانده باشند. در این‌جا تعداد اعضای A بیش‌تر از تعداد صندلی‌ها بوده است. در این حالت، B با زیرمجموعه‌ای از A هم‌عدد شده است و نیز A با هیچ زیرمجموعه‌ای از B هم‌عدد نیست.

۳. حالتی که همه‌ی دانش‌آموزان روی صندلی نشسته باشند، ولی بعضی از صندلی‌ها خالی مانده باشند. در این حالت می‌توان گفت: تعداد اعضای B بیش‌تر از تعداد اعضای A است.

حال می‌توان با استمداد از مفهوم تناظر یک‌به‌یک، مقایسه‌ی بین تعداد اعضای دو مجموعه مانند A و B را مستقل از مفهوم عدد به صورت این تعریف‌ها تعمیم داد:

تعریف: دو مجموعه‌ی A و B را هم‌عدد می‌گوییم و می‌نویسیم: $A \approx B$؛ هرگاه تناظری یک‌به‌یک بین A و B برقرار باشد.

تعریف: اگر مجموعه‌ی A با زیرمجموعه‌ای از B هم‌عدد باشد، ولی B با هیچ زیرمجموعه‌ای از A هم‌عدد نباشد، می‌گوییم A ضعیف‌تر از B است و می‌نویسیم $A < B$.

قضیه: رابطه‌ی هم‌عددی در مجموعه‌ی مجموعه‌ها یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

I) $A \approx A$

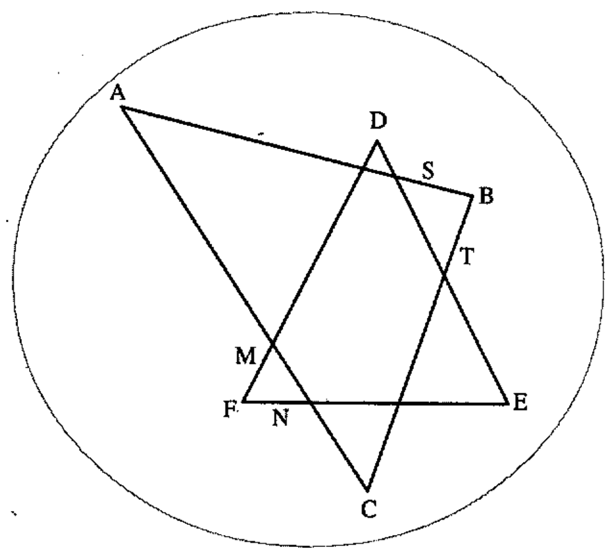
II) $A \approx B \Rightarrow B \approx A$

III) $A \approx B$ و $B \approx C \Rightarrow A \approx C$

قضیه‌ی زیر را که به قضیه‌ی «کانتور و برنشتاین» یا قضیه‌ی «هم‌ارزی» معروف است، می‌پذیریم:

قضیه: اگر مجموعه‌ی A با زیرمجموعه‌ای از B و نیز مجموعه‌ی B با زیرمجموعه‌ای از A هم‌عدد باشند، آن‌گاه دو مجموعه‌ی A و B با یکدیگر هم‌عدد خواهند بود.

مسأله: ثابت کنید مجموعه نقاط پاره‌خط AC و DE با یکدیگر هم‌عدد هستند.



اثبات: تناظری یک‌به‌یک بین مجموعه نقاط دو پاره‌خط AC و ST وجود دارد. پس AC با زیرمجموعه‌ای از DE هم‌عدد است و نیز بین مجموعه‌نقاط DE و MN تناظر یک‌به‌یک وجود دارد. پس DE با زیرمجموعه‌ای از AC هم‌عدد است. پس بنابر قضیه‌ی هم‌ارزی، AC و DE هم‌عددند.

تعریف: به ازای عدد طبیعی k، مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی با k را قطعه‌ی kام از اعداد طبیعی می‌نامیم و با N_k نشان می‌دهیم:

$$N_k = \{1,2,3,\dots,k\}$$

مثال: $N_4 = \{1,2,3,4\}$ و $N_8 = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

تعریف: مجموعه‌ی A را متناهی می‌نامیم، هرگاه تهی باشد یا با قطعه‌ای مانند N_k از اعداد طبیعی هم‌عدد باشد. اگر $A = \varnothing$ باشد، می‌گوییم تعداد اعضای A صفر است و اگر $A \approx N_k$ باشد، تعداد اعضای A را (که عددی منحصربه‌فرد است) k می‌نامیم و می‌نویسیم: $n(A) = k$

در واقع وقتی $A \approx N_k$، بنابر مطالب گفته شده، بین A و N_k تناظری یک‌به‌یک برقرار می‌شود و این به نوعی شمارش اعضای A توسط N_k محسوب می‌شود.

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$

$N_k = \{1,2,3,\dots,k\}$

تناظر یک‌به‌یک $f = \{(1,a_1),(2,a_2),\dots,(k,a_k)\}$

مجموعه‌های متناهی ویژگی‌هایی دارند که آن‌ها را از مجموعه‌های نامتناهی جدا می‌کنند. مهم‌ترین آن‌ها عبارتند از:

قضیه‌ی ۱: هر زیرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی متناهی، متناهی است و اگر A مجموعه‌ای متناهی باشد و $B \subseteq A$، آن‌گاه $0 \le n(B) \le n(A)$.

قضیه‌ی ۲: هیچ مجموعه‌ی متناهی نمی‌تواند با یک زیرمجموعه‌ی حقیقی خود (زیرمجموعه‌ی حقیقی A مجموعه‌ای است چون B که $B \neq A$ و $B \subset A$) هم‌عدد باشد.

قضیه‌ی ۳: اگر A و B مجموعه‌هایی متناهی باشند، در این صورت:

I) $(A \cup B)$ و $(A \cap B)$ و $(A - B)$ متناهی هستند

II) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

III) $n(A \times B) = n(A).n(B)$

حال این مسأله پیش می‌آید که مجموعه‌ای چون $\mathbb{N}$ با هیچ قطعه‌ای از $\mathbb{N}$ یعنی با هیچ قطعه‌ای از خودش هم‌عدد نیست. پس متناهی نیست. به چنین مجموعه‌هایی چه می‌توان گفت؟ درست است این مجموعه‌ها که متناهی نیستند، نامتناهی نامیده می‌شوند، یعنی در حالت کلی:

تعریف: مجموعه‌ی A را نامتناهی می‌نامیم، هرگاه متناهی نباشد. به عبارت دیگر، مجموعه‌ی A نامتناهی است، هرگاه تهی نباشد و با هیچ قطعه‌ای از اعداد طبیعی هم‌عدد نباشد.

مجموعه‌های نامتناهی نیز ویژگی‌های خاص خود را دارند که مهم‌ترین آن‌ها عبارتند از:

قضیه‌ی ۱: هر مجموعه که زیرمجموعه‌ای نامتناهی داشته باشد، نامتناهی است.

قضیه‌ی ۲: هر مجموعه که با یک زیرمجموعه‌ی حقیقی خود هم‌عدد باشد، نامتناهی است.

قضیه‌ی ۳: مجموعه‌ی اعداد طبیعی نامتناهی است (کاربرد قضیه‌ی ۲) (زیرا $\mathbb{N}$ با $2\mathbb{N}$ تناظر یک‌به‌یک دارد).

$$\begin{array}{lccccc} \mathbb{N}: & 1 & 2 & 3 & \dots\dots & n \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ 2\mathbb{N}: & 2 & 4 & 6 & \dots\dots & 2n \end{array} \qquad \begin{array}{l} f: \mathbb{N} \to 2\mathbb{N} \\ f(n) = 2n \end{array}$$

(f تابعی دوسویی است)

قضیه‌ی ۴: هر مجموعه که با یک مجموعه‌ی نامتناهی هم‌عدد باشد، نامتناهی است.

نتیجه: Z نامتناهی است.

$f: \mathbb{N} \to Z$

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{زوج } n \\[2mm] \dfrac{1-n}{2} & \text{فرد } n \end{cases}$$

(f تناظری یک‌به‌یک است یا تابعی دوسویی است)

سرانجام به بحث بسیار مهم و شاید تا حدی چالش‌برانگیز می‌رسیم به نام مفهوم شمارایی و ناشمارایی!

چه مجموعه‌هایی شمارا یا شمارش‌پذیرند؟ آیا مفهوم شمارش‌پذیری و مفهوم متناهی در مجموعه‌ها معادل یکدیگرند؟ برای پاسخ به این سؤال‌ها باید تعریف مجموعه‌های شمارا و ناشمارا به‌درستی تبیین شود.

تعریف: مجموعه‌ی A را شمارا یا شمارش‌پذیر می‌نامیم، هرگاه با $\mathbb{N}$ هم‌عدد باشد و اگر مجموعه‌ای متناهی یا شمارا باشد، آن را **حداکثر شمارا** می‌نامیم.

با توجه به تعریف بالا می‌توان گفت:

۱. مجموعه‌های شمارا نامتناهی هستند (زیرا با $\mathbb{N}$ هم‌عدد هستند)؛

۲. هر مجموعه‌ی متناهی حداکثر شماراست؛

۳. اعضای مجموعه‌های شمارا را می‌توان توسط $\mathbb{N}$ برچسب‌گذاری کرد. در واقع $\mathbb{N}$ مجموعه‌ای برچسب‌گذار است، همان‌طور که اگر A مجموعه‌ای متناهی باشد و $n(A) = k$، مجموعه‌ی A را می‌توان توسط $\mathbb{N}_k$ برچسب‌گذاری کرد؛

۴. مجموعه‌های شمارا دوبه‌دو هم‌عدد هستند؛

۵. هریک از مجموعه‌های $\mathbb{N}$ و $2\mathbb{N}$ (اعداد طبیعی زوج) و $2\mathbb{N}+1$، Z و W شمارا هستند؛

۶. مجموعه‌ی $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ شماراست؛

$f: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f(m,n) = 2^{m-1}(2n-1)$

(به عنوان تمرین ثابت کنید این تابع دوسویی است)

۷. مجموعه‌ی Z (اعداد صحیح) شماراست.

(ثابت می‌شود که f تابعی دوسویی است و

$f: \mathbb{N} \to Z$

$f(n) = \left[\dfrac{n}{2}\right] \times (-1)^n$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، اعداد صحیح و مثبت توسط تأثیر f روی اعداد طبیعی زوج و بقیه توسط اعداد طبیعی فرد تولید می‌شوند).

$f(1) = 0 \times (-1)^1 = 0\ ,\ \ f(2) = 1 \times (-1)^2 = 1$

$f(3) = 1 \times (-1)^3 = -1\ ,\ \ f(4) = 2 \times (-1)^4 = 2$

$f(5) = 2 \times (-1)^5 = -2\ ,\ \ f(6) = 3 \times (-1)^6 = 3$

$$f(2n+1) = \left[\frac{2n+1}{2}\right] \times (-1)^{2n+1} = n + \left[\frac{1}{2}\right] \times (-1)^{2n+1} = -n$$

$$f(2n) = \left[\frac{2n}{2}\right] \times (-1)^{2n} = n \times (-1)^{2n} = n$$

قضیه‌های مربوط به مجموعه‌های شمارا

قضیه‌ی ۱: هر مجموعه‌ی نامتناهی، زیرمجموعه‌ای شمارا دارد.

اثبات: فرض کنیم A مجموعه‌ای نامتناهی باشد. عضو دلخواهی از A انتخاب می‌کنیم و آن را a_1 می‌نامیم. چون A نامتناهی است، پس $A - \{a_1\}$ تهی نیست. عضو دلخواهی از $A - \{a_1\}$ انتخاب می‌کنیم و آن را a_2 می‌نامیم. پس $a_1 \neq a_2$. به‌همین ترتیب، به‌ازای عدد طبیعی n اعضای a_1 و a_2 و... و a_n را به طریق فوق که همگی دوبه‌دو متمایز هستند، انتخاب می‌کنیم و از مجموعه‌ی $A - \{a_1,\dots,a_n\}$ نیز عضو دلخواه a_{n+1} را. درنهایت مجموعه‌ی $B = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ را که مجموعه‌ای شمارا و زیرمجموعه‌ی A است می‌سازیم.

قضیه‌ی ۲: هر زیرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی شمارا، حداکثر شماراست.

اثبات: فرض کنیم A مجموعه‌ای شمارا باشد و $E \subseteq A$، اگر E متناهی باشد که حکم ثابت است و اگر E متناهی نباشد،

بنابر قضیه‌ی قبل، زیرمجموعه‌ای شمارا چون E_1 دارد. و چون A شماراست، پس $E_1 \approx A$. از طرف دیگر، $E \subseteq A$ و $E \approx E$ پس A زیرمجموعه‌ای هم‌عدد با E و E نیز زیرمجموعه‌ای هم‌عدد با A دارد. پس بنابر قضیه‌ی هم‌ارزی، $E \approx A$ و بنابراین E شماراست.

قضیه‌ی ۳: اگر A مجموعه‌ای شمارا و B مجموعه‌ای حداکثر شمارا و ناتهی باشد، مجموعه‌ی $A \times B$ شماراست.

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ شمارا} \Rightarrow A \approx \mathbb{N} \\ \\ B \text{ شمارا} \Rightarrow B \approx \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow A \times B \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N} \Rightarrow A \times B \text{ شماراست}$$

در اثبات فوق، از قضیه‌ی زیر که آن را بدون اثبات می‌پذیریم استفاده شده است:

$$\begin{array}{l} A \approx B \\ C \approx D \end{array} \Rightarrow A \times C \approx B \times D$$

قضیه‌ی ۴: اگر E مجموعه‌ای ناشمارا باشد و A زیرمجموعه‌ای حداکثر شمارا از E باشد، آن‌گاه $E - A \approx E$.

قضیه‌ی ۵: هر مجموعه‌ی نامتناهی حداقل با یک زیرمجموعه‌ی حقیقی خود هم‌عدد است. اگر A نامتناهی باشد و B زیرمجموعه‌ای متناهی و ناتهی از A باشد، واضح است که $(A-B)$ یک زیرمجموعه‌ی حقیقی A است و بنابر قضیه‌ی ۴، $A - B \approx A$.

شاید جالب‌ترین نتیجه‌ای که بتوان از مطالب گفته شده گرفت، شمارش‌پذیر بودن مجموعه‌ی اعداد گویا یعنی Q باشد که اگر فرض کنیم:

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m \in Z,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

واضح است که با فرض $(m,n) = 1$ (m و n نسبت به هم اول باشند)، هر $\frac{m}{n}$ را به شکل منحصربه‌فردی می‌توان به صورت زوج مرتب (m,n) نمایش داد. در این حالت و با توجه به تعریف ضرب دکارتی می‌توان نوشت:

$$\left\{ (m,n) \middle| m \in Z,\ n \in \mathbb{N} \right\} = Z \times \mathbb{N}$$

پس ملاحظه می‌کنید که $Q \approx Z \times \mathbb{N}$ و چون (قبلاً ثابت شد که $Z \times Z$ شماراست) $Z \times \mathbb{N}$ شماراست، پس Q نیز شماراست و نیز می‌توان نتیجه گرفت که $(\mathbb{R} - Q)$ یعنی مجموعه‌ی اعداد گنگ، مجموعه‌ای ناشماراست.

تفریح اندیشه

● حسین نامی ساعی

کی حوض پر می‌شود؟

یک لوله‌ی آب، حوضی را در ۳۵ دقیقه، لوله‌ی دیگری در ۴۰ دقیقه، و لوله‌ی بعدی در ۵۰ دقیقه پر می‌کنند. اگر هر سه لوله‌ی آب هم‌زمان باز باشند، در چه مدت حوض پر می‌شود؟

حل: حجم حوض را x لیتر فرض می‌کنیم. در این صورت، سرعت جریان آب از لوله‌ی اول برابر $\frac{x}{۳۵}$ لیتر در دقیقه است.

(چون: زمان × سرعت = حجم حوض)

بنابراین، مقدار آبی که در T دقیقه، از لوله‌ی اول جاری می‌شود، برابر است با: $\frac{x}{۳۵} \times T$ لیتر.

با باز بودن هر سه لوله در T دقیقه، زمان T به روش زیر محاسبه می‌شود:

$$\left(\frac{x}{۳۵} \times T\right) + \left(\frac{x}{۴۰} \times T\right) + \left(\frac{x}{۵۰} \times T\right) = x$$

$$\frac{T}{۳۵} + \frac{T}{۴۰} + \frac{T}{۵۰} = ۱$$

$$\frac{۴۰T + ۳۵T + ۲۸T}{۱۴۰۰} = ۱$$

$$\frac{۱۰۳T}{۱۴۰۰} = ۱ \Rightarrow T = \frac{۱۴۰۰}{۱۰۳} \simeq ۱۳/۶ \text{ دقیقه}$$

یعنی ۱۳/۶ دقیقه زمان لازم است تا با باز بودن هر سه لوله، حوض پر شود.

احمد قلندری

مقدمه

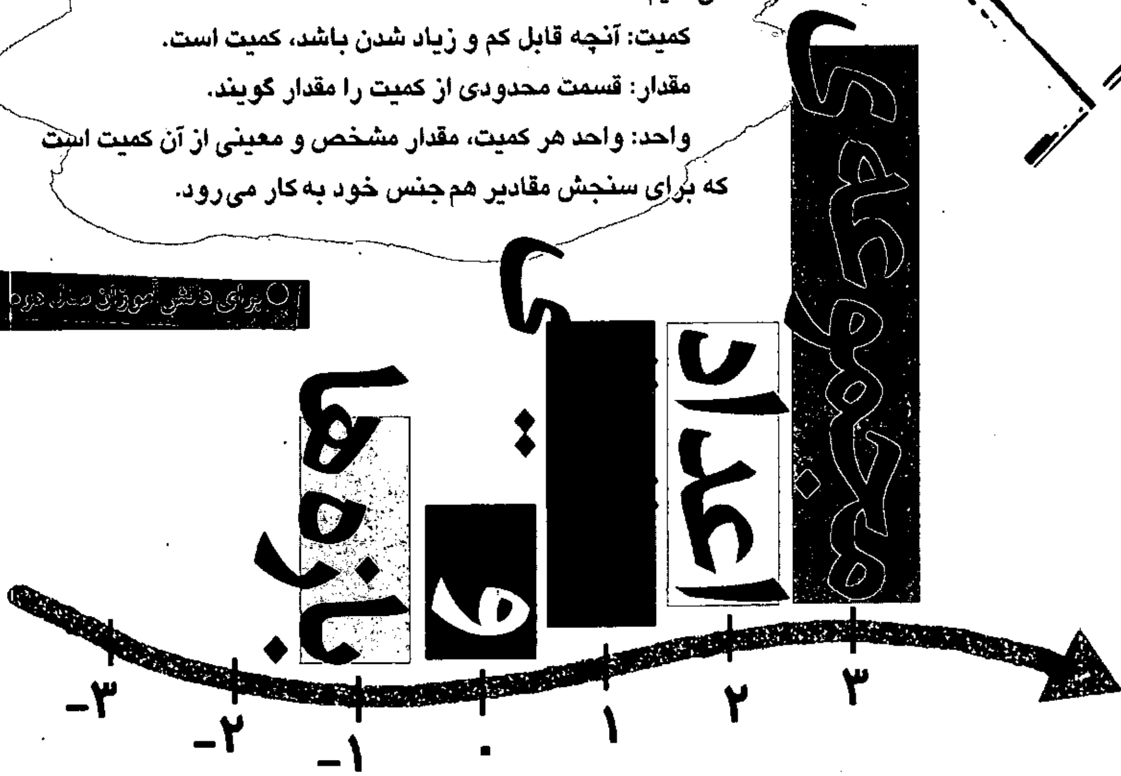
در بیان مطالب ریاضی به مفاهیمی مانند کمیت، مقدار، واحد و عدد برمی‌خوریم که ممکن است برای خواننده خیلی روشن نباشند. به همین خاطر، قبل از ورود به بحث اصلی، این مفاهیم را تعریف می‌کنیم.

کمیت: آنچه قابل کم و زیاد شدن باشد، کمیت است.

مقدار: قسمت محدودی از کمیت را مقدار گویند.

واحد: واحد هر کمیت، مقدار مشخص و معینی از آن کمیت است که برای سنجش مقادیر هم‌جنس خود به‌کار می‌رود.

برای دانش‌آموزان سال دوم



عدد: نتیجه‌ی سنجش هر مقدار از یک کمیت با واحد هم‌جنس خودش، عدد است.

انواع عدد: اعداد را به سه دسته تقسیم می‌کنند به نام‌های **اعداد اصلی، اعداد ترتیبی و اعداد شناسایی.**

اعداد اصلی: برای بیان کمیت به‌کار می‌روند. برای مثال، ساعت ۱۱ صبح، نمره‌ی ۱۷ در درس حسابان یا ۲۰ هزار تومان قرض. این اعداد قابل جمع و تفریق و ضرب و تقسیم با یکدیگر هستند.

اعداد ترتیبی: این اعداد صرفاً در مقایسه به‌کار می‌روند. برای مثال، حمید در درس فیزیک نفر سوم کلاس است، یا علی نفر هفتم در صف اتوبوس است. اعداد سوم و هفتم در این جملات، اعداد ترتیبی نامیده می‌شوند.

اعداد شناسایی: این اعداد صرفاً برای شناسایی به‌کار می‌روند. برای مثال، خیابان بیستم، کوچه‌ی پنجم، اتوبوس خط ۱۱۸.

اعداد چگونه پیدا شدند

پیدا شدن اعداد، از شمارش و اندازه‌گیری ناشی شده است. به این صورت که در زمان‌های قدیم، برای شمارش اشیا یا حیوانات یا... اعداد طبیعی کافی بودند. مثلاً پنج تا گوسفند یا ده تا درخت. اما با پیدایش تدریجی رابطه‌های اجتماعی در آن روزگار، برای بیان بدهی یا سود و زیان، دیگر اعداد طبیعی کافی نبودند و این نیاز، به پیدا شدن اعداد صحیح منجر شد. اما در سنجش مفاهیم و کمیت‌های پیوسته مانند زمان و دما، مقیاسی لازم بود که شامل اعدادی بین اعداد صحیح باشد. در نتیجه، اعدادی پیدا شدند به نام اعداد گویا: مانند $\frac{۲}{۵}$ و $\frac{۷}{۳}$ و $-\frac{۵}{۲}$ و...

در یونان باستان دریافته بودند، نسبت محیط دایره به قطرش، عددی است که نمی‌توان دقیقاً آن را با عددهای گویا بیان کرد؛ اگرچه به‌طور تقریب این عدد را $\frac{۲۲}{۷}$ در نظر می‌گرفتند که تقریب بسیار مناسبی است، زیرا:

$$\frac{۲۲}{۷} = ۳/۱۴۲۸۵۷$$

ولی بعدها معلوم شد که این عدد و عددهای نظیر آن، دسته‌ی جدیدی از اعداد را وارد ریاضی می‌کنند به نام عددهای اصم یا گنگ یا رادیکالی؛ مانند $\sqrt{۲}$ ، $\sqrt{۵}$ و π و $\sqrt{۷}$ و ....

پس از پیدا شدن این عددها، مجموعه‌ای را که شامل، اعداد صحیح و اعداد گویا و اعداد اصم باشد، مجموعه‌ی اعداد حقیقی نامیدند و آن را با $\mathbb{R}$ نشان دادند.

با این مقدمه، به تعریفی دقیق‌تر از مجموعه‌ی اعداد حقیقی می‌پردازیم.

مجموعه‌ی اعداد حقیقی: مجموعه‌ای است شامل زیر مجموعه‌های:

۱. مجموعه‌ی اعداد طبیعی (N)

مجموعه‌ی اعداد طبیعی را به صورت زیر نشان می‌دهند.

$$N = \{۱,۲,۳,\cdots,n,\cdots\}$$

۲. مجموعه‌ی اعداد صحیح نسبی (Z)

مجموعه‌ای است شامل اعداد طبیعی و قرینه‌ی آن‌ها و عدد صفر. این مجموعه را به صورت

$$Z = \{\cdots,-n,\cdots,-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,\cdots,n,\cdots\}$$

نشان می‌دهند.

۳. مجموعه‌ی اعداد صحیح گویا (Q)

مجموعه‌ای است شامل مجموعه‌ی Z و اعداد کسری یا اعشاری بین عضوهای Z؛ مانند

$$\{\cdots,-n,\cdots,-۴,-\frac{۲}{۳},-۱,-\frac{۱}{۱۰},۰,\cdots,\frac{۱}{۲},\cdots,۵,\cdots,\frac{۱۱}{۲},\cdots,n,\cdots\}$$

به بیان ریاضی، این مجموعه را به صورت زیر نشان می‌دهند.

$$Q = \left\{\frac{p}{q}\middle| p,q \in Z\ ,\ q \neq ۰\right\}$$

۴. مجموعه‌ی اعداد اصم یا گنگ (Q')

مجموعه‌ی $(\mathbb{R} - Q)$ را مجموعه‌ی اعداد اصم یا گنگ گویند و آن را با Q' نشان می‌دهند؛ مانند مجموعه‌ی $\{\cdots,-\sqrt{۱۵},\cdots,-\sqrt{۱۱},\cdots,-\sqrt{۲},\cdots,\sqrt{۳},\sqrt{۷},\cdots\}$ به بیان ریاضی، این مجموعه را به صورت زیر نشان می‌دهند.

$$Q' = \{x \in \mathbb{R} | x \notin Q\}$$

نکته‌ی ۱: بسط اعشاری هر عدد گویا ممکن است به سه شکل باشد:

الف) پایان‌پذیر باشد؛ مانند:

$$\frac{۴۵}{۱۲} = ۳/۷۵ \qquad \frac{۱۸}{۵} = ۳/۶ \qquad \frac{۵}{۸} = ۰/۶۲۵$$

ب) بی‌پایان ولی متناوب ساده باشد؛ مانند:

$$\frac{۵}{۱۱} = ۰/۴۵۴۵۴۵\cdots \qquad \frac{۳}{۱۱} = ۰/۲۷۲۷۲۷\cdots$$

ج) بی‌پایان ولی متناوب مرکب باشد؛ مانند:

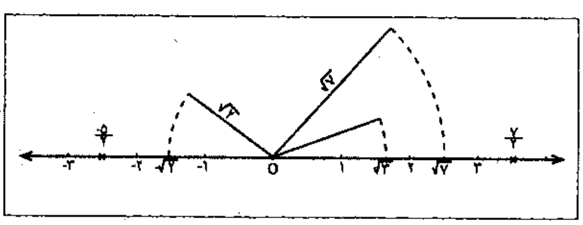
$$\frac{۱۱}{۱۵} = ۰/۷۳۳۳\cdots \qquad \frac{۱۳}{۱۸} = ۰/۷۲۲۲\cdots$$

نکته‌ی ۲: بسط اعشاری هر عدد اصم یا گنگ، بی‌پایان و غیر متناوب است؛ مانند:

$$\sqrt{۳} = ۱/۷۳۲۰۵۰۸۰۷\cdots , \sqrt{۷} = ۲/۶۴۵۷۱۳۱۱\cdots$$

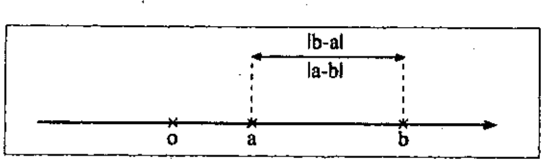
نکته‌ی ۳: عدد اصم یا گنگ را نمی‌توان به صورت عدد گویای $\frac{p}{q}$ نوشت که p و q نسبت به هم اول باشند. برای مثال، می‌توان ثابت کرد که $\sqrt{۲}$ را نمی‌توان به صورت عدد گویای $\frac{p}{q}$ نوشت که p و q نسبت به هم اول باشند (اثبات آن را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم).

نکته‌ی ۴: هر عدد حقیقی را می‌توان به صورت نقطه‌ای از یک محور مشخص کرد و برعکس هر نقطه از محور را می‌توان به یک عدد حقیقی مربوط ساخت. در واقع تناظری یک‌به‌یک بین اعداد حقیقی و نقاط یک محور وجود دارد.



مبدأ مختصات را متناظر با عدد ۰، اعداد مثبت را سمت راست مبدأ و اعداد منفی را سمت چپ مبدأ در نظر می‌گیرند.

فاصله‌ی بین اعداد حقیقی a و b روی یک محور: فاصله‌ی بین اعداد حقیقی a و b را روی یک محور با $|a - b|$ یا $|b - a|$ نشان می‌دهیم.



بازه‌ها

بسیاری از زیر مجموعه‌های اعداد حقیقی، بازه‌ها هستند.

فرض می‌کنیم $a,b \in \mathbb{R}$ ، $a < b$

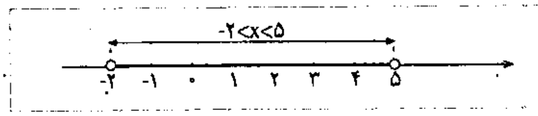
۱ . مجموعه‌ی اعداد حقیقی که در نامساوی $a < x < b$ صدق می‌کند، یعنی:

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

مثال: بازه‌ی $(-۲ , ۵)$ یعنی:

$$(-۲,۵) = \{x \in \mathbb{R} | -۲ < x < ۵\}$$

که نمایش آن روی محور چنین است:



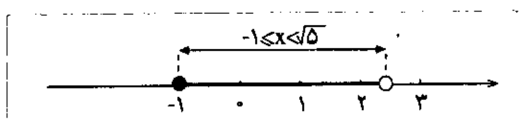
۲ . مجموعه‌ی اعداد حقیقی که در نامساوی $a \le x < b$ صدق می‌کند؛ یعنی:

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} | a \le x < b\}$$

مثال: بازه‌ی $[-۱,\sqrt{۵})$ یعنی:

$$[-۱,\sqrt{۵}) = \{x \in \mathbb{R} | -۱ \le x < \sqrt{۵}\}$$

که نمایش آن روی محور چنین است:



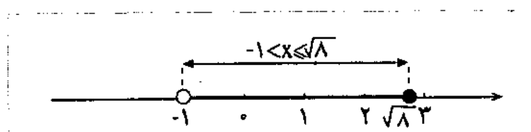
۳ . مجموعه‌ی اعداد حقیقی که در نامساوی $a < x \le b$ صدق می‌کند؛ یعنی:

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \le b\}$$

مثال: بازه‌ی $(-۱,\sqrt{۸}]$ یعنی:

$$(-۱,\sqrt{۸}] = \{x \in \mathbb{R} | -۱ < x \le \sqrt{۸}\}$$

که نمایش آن روی محور چنین است:



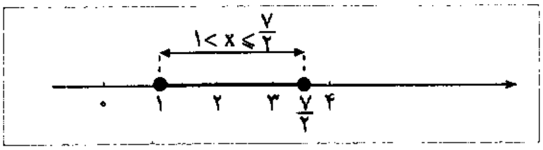
۴ . مجموعه‌ی اعداد حقیقی که در نامساوی $a \le x \le b$ صدق می‌کند؛ یعنی:

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a \le x \le b\}$$

مثال: بازه‌ی $[۱,\frac{۷}{۲}]$ یعنی:

$$[۱,\frac{۷}{۲}] = \{x \in \mathbb{R} | ۱ \le x \le \frac{۷}{۲}\}$$

که نمایش آن روی محور چنین است:

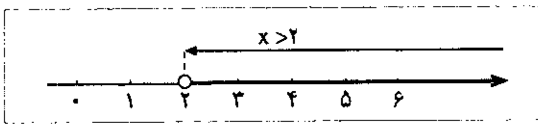


۵ . مجموعه‌ی اعداد حقیقی بزرگ‌تر از a، یعنی مجموعه‌ی اعداد حقیقی که در نامساوی $x > a$ صدق کند؛ یعنی:

$$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} | a < x\}$$

مثال: مجموعه‌ی اعداد حقیقی بزرگ‌تر از ۲، یعنی مجموعه‌ی اعداد حقیقی که در نامساوی $x > ۲$ صدق می‌کند؛ یعنی: $(۲,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} | ۲ < x\}$

که نمایش آن روی محور چنین است:

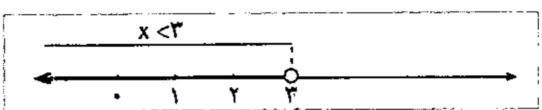


۶ . مجموعه‌ی اعداد حقیقی کوچک‌تر از a، یعنی مجموعه‌ی اعداد حقیقی که در نامساوی $x < a$ صدق کند؛ یعنی:

$$(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$$

مثال: مجموعه‌ی اعداد حقیقی کوچک‌تر از ۳، یعنی مجموعه‌ی اعداد حقیقی که در نامساوی $x < ۳$ صدق می‌کند؛ یعنی $(-\infty,۳) = \{x \in \mathbb{R} | x < ۳\}$

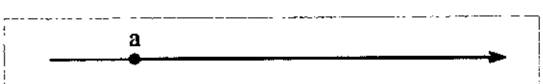
که نمایش آن روی محور چنین است:



۷ . مجموعه‌ی اعداد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی a، یعنی مجموعه‌ی اعداد حقیقی که در نامساوی $x \ge a$ صدق کند؛ یعنی:

$$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \ge a\}$$

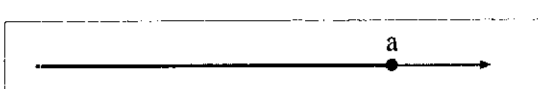
نمایش آن روی محور چنین است:



۸ . مجموعه‌ی اعداد حقیقی کوچک‌تر یا مساوی a، یعنی مجموعه‌ی اعداد حقیقی که در نامساوی $x \le a$ صدق کند؛ یعنی:

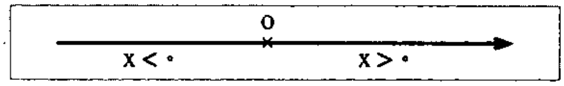
$$(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} | x \le a\}$$

نمایش آن روی محور چنین است:



۹ . مجموعه‌ی اعداد حقیقی IR را در بازه‌ها به صورت $(-\infty,+\infty)$ نشان می‌دهند.

$\{x\in \mathbb{R}\}=(-\infty,+\infty)$ که نمایش آن همه‌ی محور است.



قدر مطلق

$$|x|=\begin{cases} x\ ,\ x\geq ۰ \\ -x\ ,\ x<۰ \end{cases}$$

توجه کنید که حاصل $|x|$ عددی مثبت یا صفر است.

مثال: $|x-۲|=\begin{cases} (x-۲)\ ,\ x\geq ۲ \\ -(x-۲)\ ,\ x<۲ \end{cases}$

۱ . معادله‌ی قدرمطلق

$$\left.\begin{matrix} |x|=a \\ \text{یا} \\ x^۲=a^۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=\pm a\ ,\ a>۰$$

مثال: این معادله‌ها را حل کنید:

الف) $|۲x-۳|=۷$

حل:

$|۲x-۳|=۷\Rightarrow ۲x-۳=\pm ۷\Rightarrow ۲x=۳\pm ۷\Rightarrow$

$x=\frac{۳\pm ۷}{۲}\Rightarrow x_۱=\frac{۳+۷}{۲}=۵$ یا $x_۲=\frac{۳-۷}{۲}=-۲$

ب) $|۲x^۲-۷|=۱$

حل:

$|۲x^۲-۷|=۱\Rightarrow ۲x^۲-۷=\pm ۱\Rightarrow ۲x^۲=۷\pm ۱\Rightarrow$

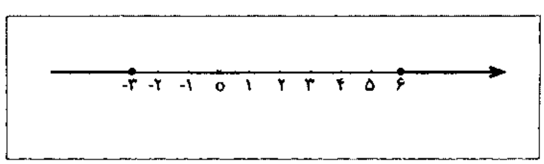
$$\begin{cases} ۲x^۲=۸ \\ \text{یا} \\ ۲x^۲=۶ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x^۲=۴ \\ \text{یا} \\ x^۲=۳ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=\pm ۲ \\ \text{یا} \\ x=\pm\sqrt{۳} \end{cases}$$

۲ . نامعادله‌ی قدرمطلق

الف)
$$\left.\begin{matrix} |x|\geq a \\ x^۲\geq a^۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow x\geq a \text{ یا } x\leq -a \quad a>۰$$

مثال: نامعادله‌ی $|۲x-۳|\geq ۹$ را حل کنید و جواب‌ها را روی محور نشان دهید.

حل:



$$|۲x-۳|\geq ۹\Rightarrow\begin{cases} ۲x-۳\geq ۹ \\ \text{یا} \\ ۲x-۳\leq -۹ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} ۲x\geq ۱۲ \\ \text{یا} \\ ۲x\leq -۶ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x\geq ۶ \\ \text{یا} \\ x\leq -۳ \end{cases}$$

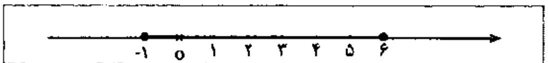
ب)
$$\left.\begin{matrix} |x|\leq a \\ x^۲\leq a^۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow -a\leq x\leq a\ ,\ a>۰$$

مثال: نامعادله‌ی $|۲x-۵|\leq ۷$ را حل کنید و جواب‌ها را روی محور نشان دهید.

حل:

$|۲x-۵|\leq ۷\Rightarrow -۷\leq ۲x-۵\leq ۷\Rightarrow$

$-۲\leq ۲x\leq ۱۲\Rightarrow -۱\leq x\leq ۶$

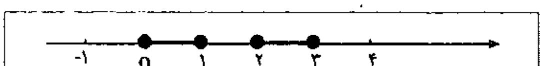


ج)
$$\left.\begin{matrix} a\leq |x|\leq b \\ a^۲\leq x^۲\leq b^۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow -b\leq x\leq -a \text{ یا } a\leq x\leq b \quad ۰<a<b$$

مثال: معادله‌ی $۱\leq |۲x-۳|\leq ۹$ را حل کنید و جواب‌ها را روی محور نشان دهید.

حل:

$$۱\leq|۲x-۳|\leq ۹\Rightarrow\begin{cases} -۳\leq ۲x-۳\leq -۱ \\ \text{یا} \\ ۱\leq ۲x-۳\leq ۳ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} ۰\leq ۲x\leq ۲ \\ \text{یا} \\ ۴\leq ۲x\leq ۶ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} ۰\leq x\leq ۱ \\ \text{یا} \\ ۲\leq x\leq ۳ \end{cases}$$



توجه: عدد میانی بازه‌ی (a,b) یا بازه‌ی $[a,b]$ برابر $\frac{a+b}{۲}$ است.

مثال: عدد میانی حاصل از بازه‌ی $(-\frac{۳}{۴},\frac{۷}{۲})\cap(-\frac{۱}{۲},\frac{۱۷}{۴})$ را بیابید.

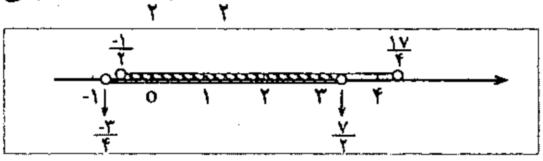
حل: $(-\frac{۳}{۴},\frac{۷}{۲})\cap(-\frac{۱}{۲},\frac{۱۷}{۴})=(-\frac{۱}{۲},\frac{۷}{۲})$

$$\text{عدد میانی}=\frac{\frac{۷}{۲}-\frac{۱}{۲}}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

به کمک محور نیز می‌توان مثال را حل کرد:

$$\text{اشتراک}=(-\frac{۱}{۲},\frac{۷}{۲})$$

$$\text{عدد میانی}=\frac{\frac{۷}{۲}-\frac{۱}{۲}}{۲}=\frac{۳}{۲}$$



برای دانش آموزان سال سوم

۲ بحث در وجود و علامت ریشه های معادله ی درجه ی دوم پارامتری

● محمدهاشم رستمی

اشاره:
در شماره قبل درباره ی وجود ریشه های معادله ی درجه دوم بحث کردیم، اینک در ادامه ی مطلب درباره ی علامت ریشه های معادله ی درجه دوم بحث می کنیم.

بحث در وجود و علامت ریشه های معادله ی درجه ی دوم پارامتری

اگر ریشه های معادله ی درجه ی دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ را x' و x'' بنامیم، مجموع ریشه های این معادله، $S = x' + x'' = -\frac{b}{a}$ و حاصل ضرب ریشه های آن $P = x'x'' = \frac{c}{a}$ است. یک روش برای نشان دادن درستی این مطلب، استفاده از دستور (b) برای حل معادله ی درجه ی دوم است. زیرا داریم:

$$\begin{cases} x' = \frac{-b + \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a} \\ x'' = \frac{-b - \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a} + \frac{-b - \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a}$$

$$\Rightarrow S = \frac{-b + \sqrt{b^۲ - ۴ac} - b - \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a} = -\frac{۲b}{۲a} = -\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \boxed{S = x' + x'' = -\frac{b}{a}}$$

$$P = x'x'' = \left(\frac{-b + \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a}\right)$$

$$= \frac{b^۲ - (b^۲ - ۴ac)}{۴a^۲}$$

$$\Rightarrow P = x'x'' = \frac{۴ac}{۴a^۲} = \frac{c}{a} \Rightarrow \boxed{P = x'x'' = \frac{c}{a}}$$

با استفاده از علامت حاصل ضرب ریشه های معادله ی درجه ی دوم، یعنی علامت $P = x'x'' = \frac{c}{a}$ و علامت مجموع ریشه ها، یعنی علامت $S = x' + x'' = -\frac{b}{a}$ می توانیم، علامت ریشه های معادله ی درجه دوم را تعیین کنیم. از طرف دیگر، چون وجود ریشه های معادله ی درجه دوم با استفاده از علامت $\Delta = b^۲ - ۴ac$ (یا علامت Δ') مشخص می شود، پس برای بحث در وجود و علامت ریشه های معادله ی درجه ی دوم باید، Δ ، $\frac{c}{a}$ و $-\frac{b}{a}$ را تعیین علامت کنیم.

مثال۱. وجود و علامت ریشه های معادله ی $۲x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$ را تعیین کنید (بدون حل کردن معادله).

حل:

داریم:

$a = ۲,\ b = -۳,\ c = ۱$

$\Delta = b^۲ - ۴ac = (-۳)^۲ - ۴(۲)(۱) = ۹ - ۸ = +۱ > ۰$

پس معادله دو ریشه ی متمایز دارد.

$P = x'x'' = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۲} > ۰ \Rightarrow$ دو ریشه هم علامت هستند

$S = x' + x'' = -\frac{b}{a} = \frac{-(-۳)}{۲} = +\frac{۳}{۲} > ۰ \Rightarrow$

درنتیجه هر دو ریشه ی معادله مثبت هستند.

مثال ۲. وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی $2x^2+13x+4=0$ را تعیین کنید (بدون حل کردن معادله).

حل:

داریم:

$$a=2,\quad b=13,\quad c=4$$

$$\Delta=b^2-4ac=(13)^2-4(2)(4)=169-32=137>0$$

پس معادله دو ریشه‌ی متمایز دارد

$$P=x'x''=\frac{c}{a}=\frac{4}{2}=2>0\Rightarrow$$ دو ریشه هم‌علامت هستند

$$S=x'+x''=-\frac{b}{a}=\frac{-13}{2}<0\Rightarrow$$ هر دو ریشه منفی هستند

مثال۳. وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی $5x^2-2x-3=0$ را تعیین کنید (بدون حل کردن معادله).

حل:

داریم:

$$a=5,\quad b=-2,\quad c=-3$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4(5)(-3)=4+60=64>0$$

پس معادله دو ریشه‌ی متمایز دارد.

$$P=x'x''=\frac{c}{a}=\frac{-3}{5}<0$$

بنابراین دو ریشه‌ی معادله مختلف‌العلامت هستند.

$$S=x'+x''=-\frac{b}{a}=\frac{-(-2)}{5}=+\frac{2}{5}>0$$

درنتیجه قدرمطلق ریشه‌ی مثبت بیش‌تر است.

نکته: وقتی در یک معادله‌ی درجه دوم، a و c مختلف‌العلامت باشند، Δ حتماً مثبت است، یعنی معادله دو ریشه‌ی متمایز دارد و این دو ریشه مختلف‌العلامت هستند. در این حالت برای این‌که بررسی کنیم قدرمطلق کدام ریشه بیش‌تر است، علامت $x'+x''=-\frac{b}{a}$ را تعیین می‌کنیم. اگر $-\frac{b}{a}>0$ باشد، قدرمطلق ریشه‌ی مثبت بیش‌تر است و اگر $-\frac{b}{a}<0$ باشد، قدرمطلق ریشه‌ی منفی بیش‌تر خواهد بود. در صورتی که $-\frac{b}{a}=0$ یعنی $b=0$ باشد، دو ریشه قرینه‌ی یکدیگرند.

مثال۴. وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی $7x^2+3x-2=0$ را بدون حل کردن معادله تعیین کنید.

حل: چون a و c مختلف‌العلامت هستند، پس معادله دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت دارد و چون:

$$x'+x''=-\frac{b}{a}=-\frac{3}{7}<0$$

پس قدرمطلق ریشه‌ی منفی بیش‌تر است.

به طور کلی برای بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ جدول زیر را داریم:

$\Delta>0$ معادله دو ریشه‌ی متمایز دارد	$\frac{c}{a}>0$ دو ریشه هم‌علامت هستند	$-\frac{b}{a}>0\Rightarrow$	هر دو ریشه مثبت هستند
		$-\frac{b}{a}<0\Rightarrow$	هر دو ریشه منفی هستند
	$\frac{c}{a}<0$ دو ریشه مختلف‌العلامت هستند	$-\frac{b}{a}>0\Rightarrow$	قدرمطلق ریشه‌ی مثبت بیش‌تر است
		$-\frac{b}{a}<0\Rightarrow$	قدرمطلق ریشه‌ی منفی بیش‌تر است
	$\frac{c}{a}=0$ یک ریشه صفر است	$-\frac{b}{a}>0\Rightarrow$	یک ریشه صفر و ریشه‌ی دیگر مثبت است
		$-\frac{b}{a}<0\Rightarrow$	یک ریشه صفر و ریشه‌ی دیگر منفی است
$\Delta=0$ معادله ریشه‌ی مضاعف دارد	$\frac{c}{a}>0$	$-\frac{b}{a}>0\Rightarrow$	ریشه‌ی مضاعف مثبت است
		$-\frac{b}{a}<0\Rightarrow$	ریشه‌ی مضاعف منفی است
	$\frac{c}{a}=0$	$x'=x''=0$	معادله ریشه‌ی مضاعف صفر دارد
$\Delta<0$ معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد	ریشه‌ی حقیقی وجود ندارد		

نکته‌ی مهم: برای بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم پارامتری باید Δ ، $\frac{c}{a}$ و $\frac{-b}{a}$ را برحسب پارامتر محاسبه و در جدولی تعیین علامت کنیم. به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۱. در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم پارامتری $x^{۲} - ۲(m+۱)x + ۳m + ۱ = ۰$ به ازای همه‌ی مقدارهای پارامتر m بحث کنید.

حل:

Δ یا Δ' ، $\frac{c}{a}$ و $-\frac{b}{a}$ را محاسبه و تعیین علامت می‌کنیم.

$$a = ۱,\ b = -۲(m+۱) \Rightarrow b' = -(m+۱),\ c = ۳m + ۱$$

$$\Delta' = b'^{۲} - ac = (m+۱)^{۲} - ۱(۳m+۱) = m^{۲} - m$$

$$\Delta' = ۰ \Rightarrow m^{۲} - m = ۰ \Rightarrow m(m-۱) = ۰ \Rightarrow \boxed{m = ۰, m = ۱}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{۳m+۱}{۱} = ۳m + ۱,\ ۳m + ۱ = ۰ \Rightarrow ۳m = -۱ \Rightarrow \boxed{m = -\frac{۱}{۳}}$$

$$\frac{-b}{a} = \frac{+۲(m+۱)}{۱} = ۲(m+۱), ۲(m+۱) = ۰ \Rightarrow m + ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow \boxed{m = -۱}$$

m	$-\infty$ تا -۱	-۱ تا $-\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$ تا ۰	۰ تا ۱	۱ تا $+\infty$
Δ	+	+	+	−	+
$\frac{c}{a}$	−	−	+	+	+
$\frac{-b}{a}$	−	+	+	+	+
R	دو ریشه‌ی مختلف‌العلامه، قدر مطلق ریشه‌ی منفی بزرگ‌تر است	دو ریشه‌ی مختلف‌العلامه، قدر مطلق ریشه‌ی مثبت بزرگ‌تر است	دو ریشه‌ی مثبت	ریشه ندارد	دو ریشه‌ی مثبت

$m = -۱$: $x_۱ = -x_۲$ ؛ $m = -\frac{۱}{۳}$: $x_۱ = ۰, x_۲ > ۰$ ؛ $m = ۰$: $x_۱ = x_۲ > ۰$ ؛ $m = ۱$: $x_۱ = x_۲ > ۰$

مثال ۲. در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم پارامتری $۲mx^{۲} - ۲(m-۳)x + m - ۳ = ۰$ به ازای همه‌ی مقدارهای پارامتر m بحث کنید (ریشه‌ها را $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۱ < x_۲$ بگیرید).

حل:

Δ' ، $\frac{c}{a}$ و $-\frac{b}{a}$ را محاسبه و تعیین علامت می‌کنیم.

داریم:

$$\Delta' = b'^{۲} - ac = (m-۳)^{۲} - ۲m(m-۳) = -m^{۲} + ۹,$$

$$\Delta' = ۰ \Rightarrow -m^{۲} + ۹ = ۰ \Rightarrow m^{۲} = ۹ \Rightarrow \boxed{m = +۳,\ m = -۳}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{m-۳}{۲m},\ m - ۳ = ۰ \Rightarrow \boxed{m = ۳},$$

$۲m = ۰ \Rightarrow \boxed{m = ۰}$ ریشه‌ی مخرج

$$-\frac{b}{a} = \frac{۲(m-۳)}{۲m},\ m - ۳ = ۰ \Rightarrow \boxed{m = ۳},$$

$۲m = ۰ \Rightarrow \boxed{m = ۰}$ ریشه مخرج

m	$-\infty$ تا -۳	-۳ تا ۰	۰ تا ۳	۳ تا $+\infty$
Δ'	−	+	+	−
$\frac{c}{a}$	+	+	−	+
$\frac{-b}{a}$	+	+	−	+
R	ریشه ندارد	$۰ < x_۱ < x_۲$	$x_۱ < ۰ < x_۲$	ریشه ندارد

در $m = ۰$، $\frac{c}{a}$ و $\frac{-b}{a}$ برابر ∞ است.

$m = -۳$: $x_۱ = x_۲ > ۰$ ؛ $m = ۰$: $x_۱ = \frac{۱}{۲}, x_۲ \to \infty$ ؛ $m = ۳$: $x_۱ = x_۲ = ۰$

مثال ۳. در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم پارامتری $x^{۲} + (۲m+۱)x + ۲m = ۰$ به ازای مقدارهای مختلف پارامتر m بحث کنید (ریشه‌های معادله را $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۱ < x_۲$ بگیرید).

حل:

Δ ، $\frac{c}{a}$ و $-\frac{b}{a}$ را محاسبه و تعیین علامت می‌کنیم.

داریم:

$$a = ۱,\ b = (۲m+۱),\ c = ۲m$$

$$\Delta = b^{۲} - ۴ac = (۲m+۱)^{۲} - ۴ \times ۲m = ۴m^{۲} + ۱ + ۴m - ۸m$$

$$\Rightarrow \Delta = ۴m^{۲} - ۴m + ۱ = (۲m-۱)^{۲},\ \Delta = ۰ \Rightarrow (۲m-۱)^{۲} = ۰$$

$$\Rightarrow ۲m - ۱ = ۰ \Rightarrow \boxed{m = \frac{۱}{۲}}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{۲m}{۱} = ۲m,\ ۲m = ۰ \Rightarrow \boxed{m = ۰}$$

$$-\frac{b}{a} = \frac{-(۲m+۱)}{۱} = -۲m - ۱,\ -۲m - ۱ = ۰ \Rightarrow \boxed{m = -\frac{۱}{۲}}$$

m	$-\infty$ تا $-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$ تا ۰	۰ تا $\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$ تا $+\infty$
Δ	+	+	+	+
$\frac{c}{a}$	−	−	+	+
$\frac{-b}{a}$	+	−	−	−
R	$x_۱ < ۰ < x_۲$, $\|x_۲\| > \|x_۱\|$	$x_۱ < ۰ < x_۲$, $\|x_۱\| > \|x_۲\|$	$x_۱ < x_۲ < ۰$	$x_۱ < x_۲ < ۰$

$x_۱ = -x_۲$ ($m = -\frac{۱}{۲}$)، $x_۱ < x_۲ = ۰$ ($m = ۰$)، $x_۱ = x_۲ < ۰$ ($m = \frac{۱}{۲}$)

نکته : نتیجه‌ی جدول مربوط به بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم پارامتری را می‌توان، هم به صورت جملات فارسی (مانند مثال۱) و هم به صورت نماد ریاضی (مانند مثال‌های ۲ و۳) نوشت.

مثال ۴ . معادله‌ی پارامتری $x^۲ + ۲x + m - ۳ = ۰$ داده شده است. به ازای مقدارهای متفاوت پارامتر m در وجود و علامت ریشه‌های این معادله بحث کنید.

حل:

Δ'، $\frac{c}{a}$ و $-\frac{b}{a}$ را محاسبه و تعیین علامت می‌کنیم. داریم:

$$a = ۱,\ b = ۲,\ c = m - ۳$$

$$\Delta' = b'^۲ - ac = (۱)^۲ - ۱(m - ۳) = ۱ - m + ۳ = -m + ۴,$$

$$\Delta' = ۰ \Rightarrow -m + ۴ = ۰ \Rightarrow \boxed{m = ۴}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{m - ۳}{۱} = m - ۳,\ m - ۳ = ۰ \Rightarrow \boxed{m = ۳}$$

$$-\frac{b}{a} = \frac{-۲}{۱} = -۲ < ۰$$

m	$-\infty$ تا ۳	۳ تا ۴	۴ تا $+\infty$
Δ'	+	+	−
$\frac{c}{a}$	−	+	+
$\frac{-b}{a}$	−	−	−
R	$x_۱ < ۰ < x_۲$, $\|x_۱\| > \|x_۲\|$	$x_۱ < x_۲ < ۰$	

$x_۱ < x_۲ = ۰$ ($m = ۳$)، $x_۱ = x_۲ < ۰$ ($m = ۴$)

آزمون‌ها

آزمون ۱ . برای آن‌که معادله‌ی زیر:

$$x^۲ - (۲m - ۳)x + m - ۲ = ۰$$

دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت داشته باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m > -۲$ ۲) $m < -۲$

۳) $m > ۲$ ۴) $m < ۲$

حل:

شرط لازم و کافی برای آن‌که معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ دارای دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت باشد، آن است که $\frac{c}{a} < ۰$ باشد. پس باید داشته باشیم:

$$\frac{c}{a} = \frac{m - ۲}{۱} = m - ۲ < ۰ \Rightarrow m < ۲$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

۲ . حدود m برای آن‌که معادله‌ی $۳x^۲ - ۲x + m - ۲ = ۰$ دارای دو ریشه‌ی مثبت باشد، کدام است؟

۱) $۲ < m < \frac{۸}{۳}$ ۲) $۲ < m < \frac{۷}{۳}$

۳) $m < \frac{۷}{۳}$ ۴) $m > ۲$

حل:

باید دستگاه نامعادله‌ی زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} \Delta' > ۰ \\ \frac{c}{a} > ۰ \\ -\frac{b}{a} > ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱ - ۳(m - ۲) > ۰ \\ \frac{m - ۲}{۳} > ۰ \\ \frac{۲}{۳} > ۰ \quad \text{همواره برقرار است} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۷ - ۳m > ۰ \\ m - ۲ > ۰ \\ \frac{۲}{۳} > ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m < \frac{۷}{۳} \\ m > ۲ \end{cases} \Rightarrow ۲ < m < \frac{۷}{۳}$$

پس گزینه‌ی ۲ درست است.

۳. مقدار m برای آن‌که معادله‌ی $x^2 + mx - 4 = 0$ دو ریشه‌ی قرینه داشته باشد، کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) ۰ ۴) ۴

حل:

شرط آن که معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دو ریشه‌ی قرینه داشته باشد، آن است که:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \dfrac{c}{a} < 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

در این مسأله باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} \Delta = m^2 + 16 > 0 \\ \dfrac{c}{a} = -4 < 0 \\ b = m = 0 \end{cases}$$

دو نامساوی $m^2 + 16 > 0$ و $-4 < 0$ همواره برقرارند، پس باید $m = 0$ باشد. یعنی گزینه‌ی (۳) درست است.

مسأله‌ها

۱. بدون حل کردن معادله‌های درجه‌ی دوم زیر، وجود و علامت ریشه‌های آن را مشخص کنید.

الف) $2x^2 - 5x - 3 = 0$

ب) $3x^2 + 5x - 3 = 0$

پ) $x^2 - 17x + 4 = 0$

ت) $\frac{1}{2}x^2 + 9x + 2 = 0$

ث) $3x^2 - 7x + 6 = 0$

ج) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

چ) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

ح) $2x^2 - 18 = 0$

خ) $3x^2 + 4 = 0$

د) $5x^2 = 0$

۲. در وجود ریشه‌های معادله‌های درجه‌ی دوم پارامتری زیر، به ازای همه‌ی مقدارهای پارامتر m بحث کنید.

الف) $mx^2 + (m-3)x + m - 4 = 0$

ب) $x^2 - 2mx + 1 = 0$

پ) $(m+1)x^2 - (2m-3)x + m + 1 = 0$

ت) $x^2 + (m-3)x + 4 = 0$

ث) $mx^2 + (m-1)x - 2m = 0$

ج) $x^2 - 2mx + 2m^2 + 1 = 0$

چ) $(m-1)x^2 + 2mx + m - 1 = 0$

۳. حدود m را چنان بیابید که معادله‌های درجه‌ی دوم پارامتری زیر، دارای ریشه‌ی حقیقی باشند.

الف) $(3m+1)x^2 - (4m-1)x + 12m = 0$

ب) $mx^2 + (m-1)x + 2m = 0$

پ) $(m+1)x^2 + 2mx + m - 1 = 0$

ت) $2mx^2 + 2(m-1)x + m - 1 = 0$

۴. ثابت کنید که معادله‌های درجه‌ی دوم پارامتری زیر، به ازای همه‌ی مقدارهای پارامتر m دارای ریشه‌ی حقیقی هستند.

الف) $mx^2 + (m-1)x - 1 = 0$

ب) $x^2 + (3m-2)x - m - 3 = 0$

پ) $x^2 + 2mx - m^2 - 1 = 0$

ت) $mx^2 + 2(m-1)x - m = 0$

۵. در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌های درجه‌ی دوم پارامتری زیر، به ازای همه‌ی مقدارهای پارامتر m بحث کنید.

الف) $x^2 - 4x + m = 0$

ب) $x^2 + 2mx + 9 = 0$

پ) $x^2 - 2mx + 3m = 0$

ت) $x^2 - 2(m+1)x + 3(m+1) = 0$

ث) $mx^2 - 3x + m = 0$

ج) $mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$

چ) $x^2 - 2mx + (m-3)^2 = 0$

ح) $mx^2 - 2(m+1)x + m - 5 = 0$

سلسله درس‌هایی از ریاضیات گسسته (۶)

فرمولی در اعداد اول و نتایج آن

● سید محمدرضا هاشمی موسوی
hashemi – moosavi@yahoo.com

● جست‌وجوی دستوری برای تعیین اعداد اول

از اساسی‌ترین مسأله‌هایی که در رابطه با اعداد اول مطرح می‌شوند، مسأله‌های زیرند:

۱. تعیین دستور کلی برای محاسبه‌ی p_n (n امین عدد اول) بر حسب n.

۲. تعیین دستور کلی که P_{n+1} را بر حسب P_n بیان کند.

۳. تعیین تابعی که مقادیرش همگی عدد اول باشند.

واضح است که در این مسأله‌ها و مسأله‌های مشابه، جواب‌های بی‌مایه از بحث خارجند. توزیع اعداد اول به حدی نامنظم است که بعضی از ریاضیدانان بزرگ (با اعتذار از محضر ولای ایشان)، شتابزده برخی از این مسأله‌ها را «نامعقول» شمرده‌اند. برای مثال، در صفحه‌ی ۵ کتاب مشهور «مدخلی بر تئوری اعداد»، چاپ سال ۱۹۴۵ هاردی‌ورایت، چنین آمده است: «البته باید به خاطر داشت که یک سؤال طبیعی، اغلب پس از بحث و بررسی، به صورت سؤالی به‌کلی نامعقول در می‌آید... آیا دستوری کلی برای nامین عدد اول P_n وجود دارد؟... گرچه این سؤال را به عنوان یک سؤال طبیعی، می‌توان مقبول دانست، اما به کلی نامعقول است.»

پس از آن‌که در آن ایام، دستور گونه‌هایی برای حل مسأله‌ی ۱ عرضه شد، در چاپ ۱۹۶۸ همان کتاب، پس از مقدمه‌ی ذکر شده چنین می‌خوانیم: «آیا دستور کلی برای nامین عدد اول P_n هست؟... چنین دستوری را نمی‌شناسیم... محققاً امکان وجود چنین دستوری بعیدالاحتمال است.» چنان‌که ملاحظه می‌شود، دیگر صحبتی از «نامعقول» بودن سؤال در میان نیست.

بنابراین، مسأله‌هایی از این قبیل که گذشت و به‌خصوص تفحص در صورت‌های گوناگون اعداد برای حل مسأله‌های (۱) و (۳)، موضوع تحقیقات فراوان ریاضیدانان بوده است.

در رابطه با مسأله‌ی (۳)، اعدادی به صورت‌های $a^n \pm 1$ که از مشهورترین آن‌ها اعداد اول فرما $(F(n) = 2^{2^n} + 1)$ و اعداد اول مرسن $(M_p = 2^p - 1)$ را می‌توان نام برد، مورد توجه قرار گرفتند. و در رابطه با مسأله‌ی (۲)، رابطه‌ای که $P_{n+1} \leq 3$ را برحسب «همه‌ی اعداد اول پیش از آن» بیان کند، رابطه‌ای است که گاندی[1] در کنگره‌ی ریاضیدانان مسکو در سال ۱۹۶۶ مطرح کرد.

در رابطه با مسأله‌ی (۳) باید گفت: از مسایل مهم مربوط به اعداد اول، مسأله‌ی توزیع آن‌ها در میان اعداد طبیعی است که مشکلات حل نشده‌ی بسیار دارد. قضیه‌ی زیر، پراکندگی اعداد اول را به خوبی آشکار می‌سازد و نشان می‌دهد که اعداد اول در میان اعداد طبیعی، مانند واحه‌هایی دور افتاده در صحرایی پهناورند.

قضیه: در رشته اعداد طبیعی، فواصلی هر قدر بزرگ که بخواهیم هست که خالی از اعداد اول است.

برهان اول: اگر n، عدد طبیعی دلخواهی باشد، از n عدد طبیعی متوالی زیر:

$(n+1)!+2, (n+1)!+3, \cdots, (n+1)!+(n+1)$

اولی بر ۲، دومی بر ۳و... و nامی بر n+۱ بخش‌پذیر است.

برهان دوم: فرض کنیم، p عددی اول باشد، هر قدربزرگ که بخواهیم و a حاصل‌ضرب اعداد اول از ۲ تا p باشد. واضح است که همه‌ی اعداد طبیعی متوالی زیر مرکب خواهند بود:

$a+2, a+3, \cdots, a+p$

تبصره: در مقابل این گونه قضیه‌ها، این قضیه برقرار است که اگر $n > 3$، آن‌گاه حداقل یک عدد اول بین n و $2n - 2$ وجود دارد. این قضیه در سال ۱۸۴۵ به وسیله‌ی **برتران** مطرح و برای اولین‌بار در سال ۱۸۵۰ به وسیله‌ی **چبیچف** اثبات شد. قضیه‌ای بالاتر از این نیز ثابت شده که **سرپینسکی** در کتاب خود آن را به چاپ رسانده است.

قضیه: اگر $n > 5$ (عدد طبیعی)، بین n و 2n لااقل دو عدد اول متمایز وجود دارد.

نتیجه‌ی ۱. اگر $n > 1$ عددی طبیعی باشد، بین n و 2n لااقل یک عدد اول وجود دارد.

اثبات: طبق قضیه‌ی چبیچف، این حکم برای عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۳صحیح است. برای عددهای طبیعی ۲ و ۳هم صحیح است؛ زیرا بین ۲ و ۴عدد اول ۳ و بین ۳و۶ عدد اول ۵ قرار دارد.

نتیجه‌ی ۲. برای عدد طبیعی $k > 1$، اگر P_k را نمادی برای kامین عدد اول به ردیف به‌کار بریم، می‌توان نوشت: $P_k < 2^k$ و داریم $P_2 = 3 < 2^2$. اگر برای عدد طبیعی k نابرابری $P_k < 2^k$ صحیح باشد، طبق نتیجه‌ی (۱)، لااقل یک عدد اول بین عددهای 2^k و 2^{k+1} وجود دارد که البته از P_k بزرگ‌تر است. بنابراین، نابرابری $P_{k+1} < 2^{k+1}$ هم با استقرای ریاضی صحیح است.

● چکیده‌ای از سیر تاریخی تلاش‌های دوهزار و سیصد ساله برای حل مسأله‌های اساسی اعداد اول

یکی از اولین پرسش‌هایی که درباره‌ی اعداد اول مطرح می‌شود چنین است: آیا تعداد اعداد اول محدود است یا نامحدود؟

پاسخ این سؤال برای اولین‌بار توسط **اقلیدس** (بیش از دوهزار و سیصد سال پیش) داده شد. او با نوعی استدلال ریاضی (برهان خلف) ثابت کرد، تعداد اعداد اول نامحدود است. از این زمان به بعد، ریاضیدانان کوشش بسیاری برای یافتن دستورهای سادهٔ حساب به‌کار بردند که به مدد آن‌ها بتوان، فقط اعداد اول را یافت؛ حتی اگر این دستورها همه‌ی اعداد اول را به‌دست ندهند.

فرما در این مورد حدس مشهوری دارد (که به صورت حکم قطعی بیان نشد) و آن حدس چنین است:

همه‌ی اعداد به صورت $F(n) = 2^{2^n} + 1$ اول هستند.

این حدس به ازای $n = 0, 1, 2, 3, 4$ صحیح است و این گونه اعداد اول را «اعداد اول فرما» نام نهادند.

در سال ۱۷۳۲، **اویلر** توانست $F(5)$ را به صورت زیر تجزیه کند:

$F(5) = 2^{2^5} + 1 = 641 \ . \ 6700417$

بنابراین ثابت شدکه $F(5)$ عدد اول نیست. بعدها، اویلر توانست ثابت کند، بسیاری دیگر از این اعداد تجزیه‌پذیر و در نتیجه مرکب هستند.

لازم به ذکر است که روش‌های بسیار عمیقی برای تجزیه‌ی این اعداد در هر حالت خاص لازم است و به‌خاطر عظمت اعداد، غالباً این روش‌ها با مشکلات رفع نشدنی مواجه می‌شوند. تا به امروز هنوز نتوانسته‌اند ثابت کنند که به ازای

$n > ۴$ ، بعضی دیگر از اعداد فرما عدد اول هستند.[۲]

تابع بسیار جالب و ساده دیگری که تعدادی از اعداد اول را به دست می‌دهد، تابع اویلر است:

$$f(n) = n^۲ - n + ۴۱$$

در واقع به ازای $n = ۱, ۲, ۳, \cdots, ۴۰$ ، عبارت $f(n)$ عدد اول به دست می‌دهد و حال آن‌که به ازای $n = ۴۱$ خواهیم داشت: $f(۴۱) = ۴۱^۲$ که عدد اول نیست.

تابع دیگری که به ازای $n = ۱, ۲, ۳, \cdots, ۷۹$ عدد اول تولید می‌کند، به صورت زیر است:

$$f(n) = n^۲ - ۷۹n + ۱۶۰۱$$

این تابع مولد اعداد اول نیز، به ازای $n = ۸۰$ با شکست مواجه می‌شود. **ریچارد کورانت** می‌گوید: **«در واقع جست‌وجوی عبارت‌های ساده‌ای که فقط عدد اول به دست دهند، کار بیهوده‌ای است و بیهوده‌تر از آن، کوشش برای یافتن دستوری جبری است که «همه‌ی» اعداد اول را به دست دهد.»**

از زمان اقلیدس تا هم‌اکنون، بشر در آرزوی فرمولی بوده است که فقط اعداد اول را بدهد. ابتدا فکر می‌کردند که یک چند جمله‌ای مانند $F(x)$ با ضرایب صحیح یافت می‌شود که وقتی به جای n مقدار صحیح گذاشته شود، عدد اول حاصل شود. اما به زودی دریافتند، اگر $F(a)=p$ اول باشد آن‌گاه $F(a+kp)$ برای هر k صحیح، بر p بخش‌پذیر است. یعنی ثابت شد که تابعی وجود ندارد و F نمی‌تواند فقط اعداد اول را توزیع کند. بعد از این‌که بشر از چند جمله‌ای ناامید شد، سراغ فرمول‌های غیرچند جمله‌ای رفت.

اولین کسی که فرمولی وجودی ارایه داد، **میلز**[۳] بود که قضیه‌ی زیبای آن چنین است:

قضیه (میلز): عددی حقیقی مانند a وجود دارد به طوری که $F(n) = \left\lfloor a^{۳^n} \right\rfloor_{n=۱,۲,\cdots}$ اعداد اول را می‌دهد.

بعد از میلز این قضیه توسط **کویپر**[۴] به شکل زیر تعمیم داده شد:

قضیه (کویپر): برای هر عدد صحیح $c \geq ۳$ ، یک عدد حقیقی a وجود دارد، به‌طوری که $(n \in N)F(n) = \left| a^{c^n} \right|$ اعداد اول را می‌دهد.

بعدها قید صحیح بودن c نیز برداشته شد.

قضیه: اگر $c > \frac{۸}{۳}$ یک عدد حقیقی باشد، آن‌گاه یک عدد حقیقی مثل a وجود دارد، به‌طوری که $(n \in N)F(n) = \left| a^{c^n_۱} \right|$ اعداد اول را می‌دهد.

و بالاخره **نیون**[۵] قضیه‌ی زیر را ثابت کرد:

قضیه (نیون): برای هر عدد حقیقی $c > ۱$ ، یک عدد حقیقی a وجود دارد، به‌طوری که $F(n) = \left\lfloor c^{a^n} \right\rfloor_{n=۱,۲,\cdots}$ اعداد اول را می‌دهد.

توجه: عدد حقیقی a در قضایای بالا یکتا نیست. به علاوه، همه‌ی این فرمول‌ها وجودی هستند و هیچ‌کدام حتی یک عدد اول را هم مشخص نمی‌کنند.

کار روی کشف فرمولی برای تولید اعداد اول ادامه یافت تا سرانجام توسط **ویلانز**[۶]، با استفاده از **«قضیه‌ی ویلسن»**، فرمولی برای تشخیص اعداد اول ارایه شد:

$$n \in N \; ; \; F(n) = \left\lfloor \operatorname{Cos}^۲ \pi \frac{(n-۱)!+۱}{n} \right\rfloor = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } n=۱ \text{ یا } n \text{ اول باشد} \\ ۰ & \text{اگر } n \text{ اول نباشد} \end{cases}$$

توضیح: در این تابع چون عدد $(n-۱)!$ به کار رفته، واضح است که کار با آن غیر عملی است و حتی برای عددی نزدیک به $n = ۱۰^{۱۰}$ هم، غیرقابل محاسبه است. به همین علت، این تابع تشخیص فقط می‌تواند جنبه‌ی تئوری داشته باشد (عدد $۱۰۰!$ نزدیک به عدد $۵^{۱۰۰}$ است، زیرا: $(n! \approx (\frac{n+۱}{۲})^n)$.

حال اگر $\pi(m)$ تعداد اعداد اول نابیش‌تر از m باشد:

$$\pi(m) = -۱ + \sum_{n=۱}^{m} F(n) \qquad (F: \text{تابع ویلانز})$$

و با توجه به این‌که kامین عدد اول، نابیش‌تر از ۲^k است؛ P_k (kامین عدد اول) را نیز در قالب فرمولی می‌توان ارایه داد.

به همین ترتیب، فرمول‌های دیگری نیز با استفاده از «قضیه‌ی ویلسن» به دست آمد که به صورت زیر هستند:

(٭) اگر $x(\frac{(x-۱)!^۲}{x} = \frac{۱}{x} + k$ (یک عدد صحیح)) اول باشد

(٭٭) اگر $x(x \nmid (x-۱)!^۲)$ اول نباشد

$$F(x) = \frac{\operatorname{Sin}^۲ \pi \frac{(x-۱)!^۲}{x}}{\operatorname{Sin}^۲ \frac{\pi}{x}} = \begin{cases} ۱ & (٭) \\ ۰ & (٭٭) \end{cases}$$

$$F(x,y) = \frac{y-۱}{۲}\left[\left| B^۲ - ۱ \right| - (B^۲ - ۱) \right] + ۲ \; ;$$

$$x,y \in N \ , \ B = x(y+1)-(y!+1)$$

طبق قضیه‌ی ویلسن، $(y+1)$ اول است و داریم $F(1,1)=2$ و اگر p یک عدد اول فرد باشد، آن‌گاه برای $y=p-1$ داریم:

$$x=\frac{1}{p}\left((p-1)!+1\right)$$

بنابراین:

$$F(x,y)=p$$

توضیح: عدد اول ۲ برای بی‌شمار مقدار x و y به دست می‌آید، ولی هر عدد اول فرد p فقط از یک زوج یکتای (x,y) به دست می‌آید.

فرمول جالب دیگری که در رابطه با یافتن n+1امین عدد اول، با داشتن اعداد اول کم‌تر از آن به دست آمد، توسط گاندی در کنگره‌ی ریاضیدانان مسکو در سال ۱۹۶۶ مطرح شد. به این شکل که اگر p_n، nامین عدد اول فرض شود و μ تابع موبیوس و $Q=P_1.P_2.....P_n$، آن‌گاه $P_{n+1}\geq 3$ از نابرابری زیر به دست می‌آید:

$$1<2^{P_{n+1}}\left(-\frac{1}{2}+\sum_{d|Q}\frac{\mu(d)}{2^d-1}\right)<2$$

توجه داشته باشید، برای هر عدد حقیقی a، حداکثر یک عدد صحیح k یافت می‌شود، به طوری که داشته باشیم:

$$1<2^k.a<2$$

جای شگفتی است که ریاضیدانی چون هاردی نتوانست چنین فرمول‌هایی را به‌دست آورد. او حتی فکر می‌کرد، چنین فرمول‌هایی وجود ندارند. زیرا در سخنرانی خود در سال ۱۹۲۸ در آمریکا گفته است: «مثلاً اگر کسی از من بخواهد فرمولی برای nامین عدد اول بنویسیم یا P_n را بر حسب P_{n+1} بیابم، فقط می‌توانم بگویم که سؤال نامعقولی کرده است و احتمالاً چنین فرمولی وجود ندارد.»

کاش به همین جمله بسنده می‌کرد. او سپس با ارایه‌ی فرمول‌ها و توجیه‌هایی نشان می‌دهد که چنین فرمول‌هایی نباید وجود داشته باشند. البته این سخنرانی خیلی با اهمیت بود و بعداً در مجموعه مقالات MAA که جایزه دریافت می‌کنند، قرار گرفت. ولی باور کردنی نیست، فرمولی که وجودش فقط قضیه‌ی ویلسن را نیاز داشت، چنین دور از ذهن ریاضیدانی نظیر هاردی باشد. اگر او هم حالا زنده بود، برایش باور نکردنی بود که زمانی چنین اظهار نظری کرده است.

در جست‌وجوی قانونی که حاکم بر توزیع اعداد اول باشد، مرحله‌ی قاطع هنگامی طی شد که ریاضیدانان کوشش‌های بیهوده را برای یافتن دستور ریاضی ساده‌ای که «همه»ی اعداد اول را به دست دهد، کنار گذاشتند و از تعیین تعداد واقعی اعداد اولی که در میان n عدد متوالی ابتدا بر واحد وجود دارد، صرف نظر کردند. به جای آن، وجهه‌ی همت خود را متوجه به‌دست‌آوردن اطلاعاتی درباره‌ی «میزان متوسط» توزیع اعداد اول در میان همه‌ی اعداد کردند.

گائوس به وسیله‌ی ملاحظات تجربی که از مطالعه‌ی جداول اعداد اول حاصل می‌شد، به این نتیجه رسید که نسبت $\frac{\pi(N)}{N}$ به تقریب برابر با $\frac{1}{LnN}$ است و هر قدر که N بزرگ‌تر می‌شود، این مقدار تقریبی به واقعیت نزدیک‌تر خواهد بود. او نشان داد که رابطه‌ی $\frac{\pi(N)}{N}\approx\frac{1}{LnN}$ به‌طور مجانبی برابر است و به این ترتیب، مسأله‌ی تعداد اعداد اول نیز به‌طور تقریبی حل شد:

$$\pi(N)\approx\frac{N}{LnN}$$

نتیجه: با ملاحظه‌ی سیر تاریخی مربوط به مسأله‌های اساسی اعداد اول در می‌یابیم که همه‌ی اطلاعات امروز ما بر پایه‌ی «**قضیه‌ی ویلسن**» بنا شده‌اند و می‌دانیم که هر تابع بر این قضیه متکی باشد، هیچ ارزش عملی نخواهد داشت و تنها برهانی تئوریک را در بر دارد.

ادامه دارد

زیرنویس

1. J. M. Gandhi

۲. مقاله‌ای تحت عنوان «تجزیه‌ی اعداد فرما» برای n>۴ و مرکب بودن آن‌ها، از این جانب آماده‌ی چاپ است.

3. W.H.Mills

4. L.Kuiper

5. I.Niven

6. C.P.Willans

منابع

۱. مصاحب، دکتر غلامحسین. تئوری مقدماتی اعداد (دوره ۵ جلدی)

۲. کورانت، ریچارد ورابینز، هربرت. ریاضیات چیست؟

۳. مجله رشد آموزش ریاضی. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی درسی آموزش‌وپرورش

۴. سرپینسکی، واتسلا. ۲۵۰ مسأله‌ی حساب.

5. The discovery of prime numbers formula and it's results & other top researches (uthor: S.M.R.Hashemi Moosavi)(Brill/Vsp)

6. www.primenumbersformula.com

۱

دنباله‌های عددی

برای دانش‌آموزان دوره‌ی پیش‌دانشگاهی رشته‌ی ریاضی

● دکتر محمدصادق عسگری

روش اثبات کرانداری و یا بی‌کرانی یک دنباله

۱. یک روش بررسی کرانداری و بی‌کرانی یک دنباله، با استفاده از تعریف‌ها آن است که بُرد دنباله را تشکیل دهیم. در این صورت، کران بالا و پائین بُرد دنباله، همان کران بالا و پائین دنباله است.

۲. می‌دانیم که بعضی از دنباله‌ها با جمله‌ی عمومی $f(n) = a_n$، در واقع تحدید تابع حقیقی $f(x)$ $(x \geq 1)$ روی مجموعه‌ی اعداد طبیعی هستند. بنابراین، برای بررسی کرانداری و بی‌کرانی این نوع دنباله کافی است، کرانداری تابع $f(x)$ را بررسی کنیم. در صورت کرانداری، تابع $f(x)$ برای هر $x \geq 1$ می‌توان کرانداری دنباله را نتیجه گرفت.

۳. کرانداری و بی‌کرانی بعضی از دنباله‌ها را می‌توان با استفاده از خواص اعداد طبیعی، خواص نامساوی‌ها و خواص قدرمطلق بررسی کرد.

مثال: کدام یک از دنباله‌های زیر، کراندار و کدام بی‌کران هستند؟

۱. $a_n = \frac{n^2}{2^n}$

اگر برد دنباله را تشکیل دهیم، داریم:

$$\text{بُرد دنباله}=\left\{\frac{n^2}{2^n}\middle| n\in\mathbb{N}\right\}=\left\{\dots,\frac{64}{256},\frac{49}{128},\frac{36}{64},\frac{25}{32},\frac{1}{2},1,\frac{9}{8}\right\}$$

ملاحظه می‌شود، برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم: $0<\frac{n^2}{2^n}<\frac{9}{8}$؛

یعنی دنباله کراندار است.

۲. $a_n=\frac{n}{n+1}$

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad 0<n<n+1\Rightarrow 0<\frac{n}{n+1}<1$$

یعنی این دنباله کراندار است.

۳. $a_n=\mathrm{Arctg}(\frac{1}{n})$

می‌دانیم، تابع $f(x)=\mathrm{Arctg}x$ صعودی است، درنتیجه داریم:

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad 0<\frac{1}{n}\le 1\Rightarrow \mathrm{Arctg}(0)<\mathrm{Arctg}(\frac{1}{n})\le \mathrm{Arctg}(1)$$

$$\Rightarrow 0<\mathrm{Arctg}(\frac{1}{n})\le\frac{\pi}{4}$$

یعنی دنباله کراندار است.

۴. $a_n=\frac{n^2+1}{2n^2-1}$

قرار می‌دهیم: $f(x)=\frac{x^2+1}{2x^2-1}\ (x\ge 1)$ و جدول تغییرات f را رسم می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{-6x}{(2x^2-1)^2}\le 0,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{2x^2+1}=\frac{1}{2}$$

x	1			$+\infty$
$f'(x)$	−	−	−	
$f(x)$	2	↘	↘	↘ $\frac{1}{2}$

تابع f نزولی است و همواره داریم: $\frac{1}{2}<f(x)\le 2$.

درنتیجه، برای هر $n\in\mathbb{N}$ نیز $2\ge\frac{n^2+1}{2n^2-1}>\frac{1}{2}$ ؛ یعنی دنباله کراندار است.

۵. $a_n=\frac{n^2+3n+6}{n+2}$

قرار می‌دهیم: $f(x)=\frac{x^2+3x+6}{x+2}\ (x\ge 1)$ و جدول تغییرات f را رسم می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{x^2+4x}{(x+2)^2}>0,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+6}{x+2}=+\infty$$

x	1				$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	+	+
$f(x)$	$\frac{10}{3}$	↗	↗	↗	↗ $+\infty$

تابع f صعودی است و همواره داریم: $f(x)\ge\frac{10}{3}$.

درنتیجه، برای هر $n\in\mathbb{N}$ نیز $\frac{n^2+3n+6}{n+2}\ge\frac{10}{3}$ ؛ یعنی دنباله از بالا بی‌کران است.

۶. $a_n=\frac{(-1)^n}{n^2}$

$$-1\le(-1)^n\le 1\Rightarrow\frac{-1}{n^2}\le\frac{(-1)^n}{n^2}\le\frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow -1\le\frac{-1}{n^2}\le\frac{(-1)^n}{n^2}\le\frac{1}{n^2}\le 1$$

$$\Rightarrow -1\le\frac{(-1)}{n^2}\le 1\Rightarrow$$ دنباله کراندار است.

۷. $a_n=(-1)^n\sqrt{n}$

$$\text{بُرد دنباله}=\left\{\dots-\sqrt{7},-\sqrt{5},-\sqrt{3},-1,\sqrt{2},2,\sqrt{6},\dots\right\}$$

دنباله بی‌کران است.

۸. $a_n=n^2+\sin n$

با روش برهان خلف ثابت می‌کنیم، دنباله‌ی a_n بی‌کران است. فرض کنیم دنباله‌ی a_n کراندار باشد (فرض خلف). درنتیجه، عدد حقیقی $M>0$ وجود دارد، به طوری که برای هر $n\in\mathbb{N}$، $|n^2+\sin n|\le M$:

$$n^2=|n^2+\sin n-\sin n|\le|n^2+\sin n|+|-\sin n|$$
$$\le M+|\sin n|\le M+1$$

$$\Rightarrow n^2\le M+1\Rightarrow n\le\sqrt{M+1}$$

یعنی مجموعه‌ی اعداد طبیعی از بالا کراندار است. اما این

تناقض است، بنابراین فرض خلف باطل است. درنتیجه دنباله‌ی a_n بی‌کران است.

مثال: دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ با فرمول بازگشتی:

$$a_1=1\ ,\ \ a_{n+1}=\frac{2(a_n+1)}{3}$$

مفروض است. آیا این دنباله کراندار است؟

حل: با استقرا ثابت می‌کنیم، برای هر $n\in\mathbb{N}$، $0<a_n<2$.

به ازای $n=1$، داریم: $a_1=1$. درنتیجه: $0<a_1<2$.

فرض کنیم، حکم به ازای $n=k$ برقرار باشد؛ یعنی $0<a_k<2$. ثابت می‌کنیم حکم به ازای $n=k+1$ نیز برقرار است.

$$0<a_k<2\Rightarrow 0<\frac{2}{3}a_k<\frac{4}{3}\Rightarrow \frac{2}{3}<\frac{2}{3}a_k+\frac{2}{3}<\frac{4}{3}+\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 0<\frac{2(a_k+1)}{3}<2\Rightarrow 0<a_{k+1}<2$$

بنابراین، برای هر $n\in\mathbb{N}$، $0<a_n<2$. درنتیجه، دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار است.

مثال: ثابت کنید دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ با فرمول بازگشتی زیر، کراندار است.

$$a_1=1\quad a_{n+1}=\frac{a_n+2}{2}$$

حل: با استقرا ثابت می‌کنیم، برای هر $n\in\mathbb{N}$، $0<a_n<2$. به ازای $n=1$ داریم: $a_1=1$. درنتیجه: $0<a_1<2$. فرض کنیم به ازای $n=k$، $0<a_k<2$. ثابت می‌کنیم، به ازای $n=k+1$ نیز: $0<a_{k+1}<2$.

$$0<a_k<2\Rightarrow 2<a_k+2<4\Rightarrow 1<\frac{a_k+2}{2}<2$$

$$\Rightarrow 0<a_{k+1}<2$$

درنتیجه برای هر $n\in\mathbb{N}$، $0<a_n<2$؛ یعنی دنباله کراندار است.

مثال: دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ با فرمول بازگشتی:

$$a_1=\sqrt{2}\quad a_n=\sqrt{a_{n-1}+2}$$

مفروض است. آیا این دنباله کراندار است؟

حل: با استقرا ثابت می‌کنیم، برای هر $n\in\mathbb{N}$، $\sqrt{2}\le a_n<2$.

به ازای $n=1$ داریم: $\sqrt{2}\le a_n=\sqrt{2}<2$. درنتیجه حکم برقرار است.

فرض کنیم، به ازای $n=k$ حکم برقرار باشد؛ یعنی $\sqrt{2}\le a_k<2$. ثابت می‌کنیم، به ازای $n=k+1$ نیز حکم برقرار است؛ یعنی $\sqrt{2}\le a_{k+1}<2$.

$$\sqrt{2}\le a_k<2\Rightarrow 2+\sqrt{2}\le a_k+2<4\Rightarrow 2\le 2+\sqrt{2}\le a_k+2<4$$

$$\Rightarrow 2\le a_k+2<4\Rightarrow \sqrt{2}\le\sqrt{a_k+2}<\sqrt{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\le a_{k+1}<2$$

یعنی دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار است.

مثال: دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ با فرمول بازگشتی:

$$x_1=-2\ ,\ \ x_{n+1}=\frac{n}{n+1}x_n$$

مفروض است. آیا این دنباله کراندار است؟

حل: با استقرا ثابت می‌کنیم، برای هر $n\in\mathbb{N}$، $-2\le x_n<0$.

به ازای $n=1$ داریم: $-2\le x_1=-2<0$. درنتیجه حکم برقرار است.

فرض کنیم به ازای $n=k$ حکم برقرار باشد؛ یعنی $-2\le x_k<0$. ثابت می‌کنیم به ازای $n=k+1$ نیز حکم برقرار است؛ یعنی $-2\le x_{k+1}<0$.

$$\begin{cases}-2\le x_k<0\\ \dfrac{k}{k+1}>0\end{cases}\Rightarrow\frac{-2k}{k+1}\le\frac{kx_k}{k+1}<0\Rightarrow -2\le\frac{-2k}{k+1}\le x_{k+1}<0$$

$$\Rightarrow -2\le x_{k+1}<0$$

یعنی دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار است.

مثال: دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ با فرمول بازگشتی زیر تعریف شده است:

$$x_1=\sqrt{2}\quad x_{n+1}=\sqrt{2x_n}\quad(n\ge 1)$$

ثابت کنید این دنباله کراندار است.

حل: با استقرا ثابت می‌کنیم، برای هر $n\in\mathbb{N}$، $\sqrt{2}\le x_n\le 2$.

به ازای $n=1$ داریم: $\sqrt{2}\le x_1=\sqrt{2}\le 2$. درنتیجه

حکم برقرار است.

فرض کنیم به ازای $n = k$ حکم برقرار باشد؛ یعنی $\sqrt{2} \le x_k \le 2$. ثابت می‌کنیم به ازای $n = k + 1$ نیز حکم برقرار است؛ یعنی: $\sqrt{2} \le x_{k+1} \le 2$.

$$\sqrt{2} \le x_k \le 2 \Rightarrow 2\sqrt{2} \le 2x_k \le 4 \Rightarrow \sqrt{2\sqrt{2}} \le \sqrt{2x_k} \le 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \le \sqrt{2\sqrt{2}} \le x_{k+1} \le 2 \Rightarrow \sqrt{2} \le x_{k+1} \le 2$$

درنتیجه، دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار است.

مثال: دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ با فرمول بازگشتی زیر تعریف شده است:

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = \frac{5}{4} \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1}) \ (n \ge 2)$$

ثابت کنید دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار است.

حل: فرض کنیم جمله‌ی عمومی دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$، به صورت $x_n = p^n$ باشد. عدد p را در صورت وجود به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} x_{n+1} = p^{n+1} \\ x_n = p^n \\ x_{n-1} = p^{n-1} \end{array}\right\} \Rightarrow 2x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$$

$$\Rightarrow 2p^{n+1} = p^n + p^{n-1} \Rightarrow 2p^{n+1} = p^{n-1}(p+1)$$

$$\Rightarrow 2p^2 = p + 1 \Rightarrow 2p^2 - p - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = -\frac{1}{2} \\ p = 1 \end{cases}$$

بنابراین، جمله‌ی عمومی دنباله را به صورت ترکیب خطی از دو عدد $p = -\frac{1}{2}$ و $p = 1$ درنظر می‌گیریم؛ یعنی: $x_n = A + \frac{(-1)^n B}{2^n}$. چون $x_1 = \frac{1}{2}$ و $x_2 = \frac{5}{4}$، بنابراین: $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{2^n}$ است. به‌علاوه، برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$-\frac{1}{2} \le \frac{(-1)^n}{2} \le \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} \le 1 + \frac{(-1)^n}{2^2} \le 1 + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \le x_n \le \frac{5}{4}$$

یعنی دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار است.

تفریح اندیشه

● حسین نامی ساعی

آب‌انبار چه‌قدر آب دارد؟

$\frac{1}{5}$ آب موجود در آب‌انباری را مصرف می‌کنیم. پس از آن، $\frac{1}{5}$ آب باقی‌مانده را نیز خارج می‌کنیم. بعد از این برداشت، آب باقی‌مانده در آب‌انبار به اندازه‌ی $\frac{1}{5}$ گنجایش آن است. حساب کنید چه کسری از آب‌انبار، آب داشته است؟

حل: فرض می‌کنیم، موجودی آب‌انبار برابر با x، و گنجایش آب‌انبار ۱ باشد. چون $\frac{1}{5}$ آب‌انبار به مصرف رسیده است، پس باقی‌مانده‌ی آب‌انبار $\frac{4}{5}x$ است. $\frac{1}{5}$ این مقدار نیز برابر است با: $\frac{1}{5} \times \frac{4}{5}x = \frac{4}{25}x$ بنابراین می‌توان معادله‌ی زیر را تشکیل داد:

$$\frac{4}{5}x - \frac{4}{25}x = \frac{1}{5}$$

$$25 \times (\frac{4}{5}x - \frac{4}{25}x) = 25 \times \frac{1}{5}$$

$$20x - 4x = 5 \Rightarrow 16x = 5$$

$$x = \frac{5}{16}$$

پس $\frac{5}{16}$ گنجایش آب‌انبار پر بوده است.

درس‌هــــایــــی از
هندسه تحلیلی

قرینه‌یابی در فضا ۲

برای دانش‌آموزان دوره‌ی
پیش‌دانشگاهی رشته‌ی ریاضی

● میرشهرام صدر
mir_sadr@yahoo.com

اشاره

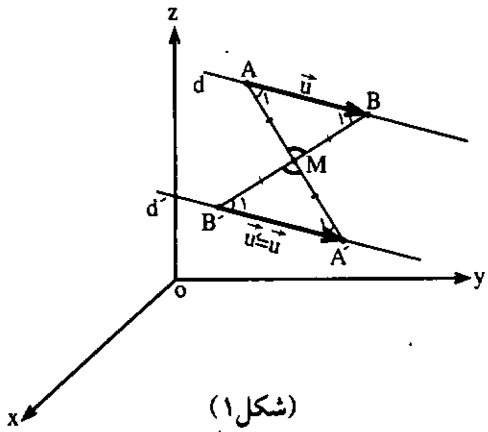
دانش‌آموزان دوره‌ی پیش‌دانشگاهی، معمولاً در آزمون‌های متعددی شرکت می‌کنند و در بعضی از آن‌ها، با مسائلی از درس هندسه‌ی تحلیلی روبه‌رو می‌شوند که به طور مستقیم از کتاب درسی طرح نشده‌اند، ولی با توجه به مطالبی که در کتاب درسی وجود دارد، می‌توانند به این‌گونه مسائل پاسخ دهند. یکی از این مباحث قرینه‌یابی در فضاست.

انگیزه‌ی اصلی نگارش این مقالات سؤالی بود که یک روز در کلاس درس هندسه‌ی تحلیلی دانش‌آموزان پرسیدند. آن‌ها می‌خواستند بدانند، معادله‌ی قرینه‌ی یک صفحه را نسبت به صفحه‌ی دیگر چگونه می‌توان تعیین کرد. در پاسخ به سؤال، مبحث قرینه‌یابی در فضا را مطرح کردم و نتیجه‌ی این تجربه را در قالب چند مقاله در مجله‌ی برهان ملاحظه می‌کنید.

در شماره‌ی قبل، قرینه‌ی نقطه نسبت به نقطه‌ی دیگر، قرینه‌ی نقطه نسبت به خط و قرینه‌ی نقطه نسبت به صفحه را بررسی کردیم. بهتر است قبل از مطالعه‌ی مقاله‌ی حاضر، قسمت اول آن را از شماره‌ی قبل مطالعه کنید. اینک ادامه مطلب را در پی می‌آوریم.

قرینه‌ی خط نسبت به نقطه

فرض کنیم d یک خط و M نقطه‌ای در فضا باشد. برای یافتن قرینه‌ی خط d نسبت به نقطه‌ی M، کافی است، دو نقطه‌ی دلخواه مانند A و B را روی خط d درنظر بگیریم، سپس قرینه‌ی این دو نقطه را نسبت به M به‌دست می‌آوریم و A' و B' می‌نامیم. بنابه تعریف، خط d' که از دو نقطه‌ی A' و B' می‌گذرد، قرینه‌ی خط d نسبت به نقطه‌ی M است.



(شکل۱)

قضیه: هرگاه d' قرینه‌ی خط d نسبت به نقطه‌ی M باشد، آن‌گاه داریم: $d \| d'$.

برهان: با توجه به شکل۱ و هم‌نهشت بودن دو مثلث MAB و $M'A'B'$ (ض‌زض) نتیجه می‌گیریم که: $\hat{A}_1 = \hat{A}'_1$ و $\hat{B}_1 = \hat{B}'_1$. پس بنابر عکس قضیه‌ی تالس: $d \| d'$.

با توجه به این قضیه می‌توان گفت که برای یافتن قرینه‌ی خط d نسبت به نقطه‌ی M، کافی است، قرینه‌ی یک نقطه‌ی دلخواه از خط d مانند A را نسبت به M پیدا کنیم و آن را A' بنامیم. خطی که از A' موازی با d رسم می‌شود، همان d' یعنی قرینه‌ی خط d نسبت به نقطه‌ی M است. بنابراین، برای یافتن معادله‌ی قرینه‌ی خط d نسبت به نقطه‌ی M مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحله‌ی۱. یک نقطه‌ی دلخواه مانند A روی خط d درنظر می‌گیریم.

مرحله‌ی۲. قرینه‌ی A را نسبت به نقطه‌ی M به‌دست می‌آوریم و آن را A' می‌نامیم (روش یافتن قرینه‌ی نقطه نسبت به نقطه‌ی دیگر، در شماره‌ی قبل به طور کامل بررسی شده است).

مرحله‌ی۳: معادله‌ی خطی که از A' می‌گذرد و موازی با d است، معادله‌ی قرینه‌ی خط d نسبت به نقطه‌ی M است.

توجه: در صورتی که نقطه‌ی M روی خط d باشد، قرینه‌ی خط d نسبت به نقطه‌ی M همان خط d است.

مسأله‌ی۱. معادله‌ی قرینه‌ی خط d به معادله‌ی زیر را نسبت به نقطه‌ی $M(1,-1,2)$ به‌دست آورید.

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+3}{-1}$$

حل

مرحله‌ی۱. در معادله‌ی خط d قرار می‌دهیم $x = 1$، تا مختصات نقطه‌ی دلخواه از خط d را به‌دست آوریم.

$$x = 1 \Rightarrow y = 0, z = -3; A(1,0,-3) \in d$$

مرحله‌ی۲. قرینه‌ی A را نسبت به نقطه‌ی M به‌دست می‌آوریم:

$$x_{A'} = 2x_m - x_A = 2 - 1 = 1$$
$$y_{A'} = 2y_m - y_A = -2 - 0 = -2$$
$$z_{A'} = 2z_m - z_A = 4 + 3 = 7$$

درنتیجه: $A'(1,-2,7)$.

مرحله‌ی۳. معادله‌ی خطی را می‌نویسیم که از نقطه‌ی A' می‌گذرد و موازی با خط d است.

بردار هادی خط d' $\quad \vec{u'} = \vec{u} = (2,3,-1)$

$$d': \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-7}{-1}$$

اکنون همین مسأله را به صورت یک تست می‌آوریم و برای آن راه‌حلی کوتاه ارائه می‌کنیم.

تست: معادله‌ی قرینه‌ی خط d به معادله‌ی زیر نسبت به نقطه‌ی $M(1,-1,2)$ کدام است؟

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+3}{-1}$$

۱) $\frac{x+3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+6}{-1}$

۲) $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-7}{-1}$

۳) $\frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-6}{1}$

۴) $\frac{x+1}{-2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+7}{-1}$

حل: گزینه‌ی ۳ صحیح است. زیرا اگر d' قرینه‌ی خط d نسبت به نقطه‌ی M باشد، آن‌گاه داریم:

الف) $d \| d'$، یعنی بردارهای هادی دو خط، با هم

موازی‌اند.

ب) قرینه‌ی یک نقطه‌ی دلخواه از d نسبت به M، در معادله‌ی خط d' صدق می‌کند.

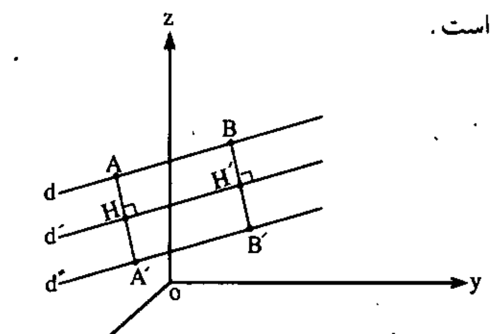
معادله‌های خط‌های گزینه‌های ۲ و ۳ با d موازی‌اند، پس یکی از این گزینه‌ها درست هستند. نقطه‌ی دلخواه $A(1,0,-3)$ را روی d درنظر می‌گیریم. ملاحظه می‌کنیم که قرینه‌ی این نقطه نسبت به M، نقطه‌ی $A'(1,-2,7)$ است و مختصات A' فقط در گزینه‌ی ۳ صدق می‌کند.

□

قرینه‌ی یک خط نسبت به خط دیگر

فرض کنیم d و d' دو خط در فضا باشند. در صورتی قرینه‌ی d نسبت به d' وجود دارد که d و d' در یک صفحه قرار داشته باشند، چون دو خط d و d' در یک صفحه‌ی موازی یا متقاطع هستند، بنابراین هر دو حالت را بررسی می‌کنیم.

حالت اول: اگر دو خط d و d' موازی باشند، دو نقطه‌ی دلخواه A و B را روی d در نظر می‌گیریم، و قرینه‌ی این دو نقطه را نسبت به d' پیدا می‌کنیم و A' و B' می‌نامیم. بنابه تعریف، خطی که از A' و B' می‌گذرد، قرینه‌ی d نسبت به d' است.



(شکل۲)

نتیجه: همان‌طور که در شکل۲ ملاحظه می‌کنید، دو خط d و d'' بر AA' عمودند؛ از آن‌جا که دو خط عمود بر یک خط با هم موازی هستند، نتیجه می‌گیریم که: $d \| d''$.

با توجه به نتیجه‌ی اخیر وقتی d موازی d' است، برای مشخص کردن قرینه‌ی d نسبت به d' نقطه‌ی دلخواهی مانند A را روی d درنظر می‌گیریم و قرینه‌ی این نقطه را نسبت به d' به‌دست می‌آوریم و A' می‌نامیم. اکنون خطی که از A' موازی با d می‌گذرد، قرینه‌ی d نسبت به d' است.

بنابراین، برای یافتن معادله‌ی قرینه‌ی خط d نسبت به خط d' $(d \| d')$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحله‌ی۱. نقطه‌ی دلخواه A را روی d مشخص می‌کنیم.

مرحله‌ی۲. قرینه‌ی A را نسبت به d' محاسبه می‌کنیم و A' می‌نامیم (روش یافتن قرینه‌ی نقطه نسبت به خط، در شماره‌ی قبل به‌طور کامل بررسی شده است).

مرحله‌ی۳. معادله‌ی خطی که از A' موازی با d می‌گذرد، قرینه‌ی d نسبت به d' است.

مسأله‌ی۲. معادله‌ی قرینه‌ی خط d را نسبت به خط d' پیدا کنید.

$$d: \frac{x}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$$

$$d': \frac{x+1}{4} = \frac{1-y}{2} = \frac{z-3}{2}$$

حل: دو خط d و d' موازی هستند. بنابراین طبق مراحل زیر عمل می‌کنیم:

مرحله‌ی۱. در معادله‌ی خط d قرار می‌دهیم $x=0$ تا مختصات نقطه‌ی دلخواه از d را به‌دست آوریم.

$$x = 0 \Rightarrow y = 0, z = 0; A(0,0,0)$$

مرحله‌ی۲. قرینه‌ی A را نسبت به خط d' به‌دست می‌آوریم، به این منظور، ابتدا تصویر نقطه‌ی A روی d' (یعنی نقطه‌ی H) را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

الف) معادله‌ی پارامتری خط d'

$$d': \begin{cases} x = 4t - 1 \\ y = -2t + 1 \\ z = 2t + 3 \end{cases}$$

ب) مختصات پارامتری تصویر نقطه‌ی A روی d'

$$H \in d' \Rightarrow \exists t' \in \mathbb{R} : H \begin{vmatrix} 4t' - 1 \\ -2t' + 1 \\ 2t' + 3 \end{vmatrix}$$

ج)

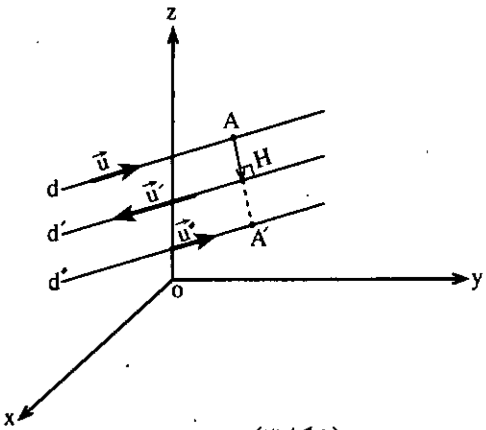
$$\overrightarrow{AH} = (4t' - 1, -2t' + 1, 2t' + 3)$$

بردار هادی خط d' $\quad \vec{u}' = (4, -2, 2)$

د)

$$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (4t' - 1, -2t' + 1, 2t' + 3) \cdot (4, -2, 2) = 0 \Rightarrow t' = 0$$

تصویر نقطه‌ی A روی خط d' $\quad t' = 0 \Rightarrow H(-1,1,3)$



(شکل۳)

اکنون با داشتن مختصات دو نقطه‌ی A و H می‌توانیم مختصات نقطه‌ی A' (شکل۳) را محاسبه کنیم.

$$A'\begin{cases} x_{A'} = ۲x_H - x_A = -۲ \\ y_{A'} = ۲y_H - y_A = ۲ \\ z_{A'} = ۲z_H - z_A = ۶ \end{cases} \Rightarrow A'(-۲,۲,۶) \quad \text{مختصات قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به خط } d'$$

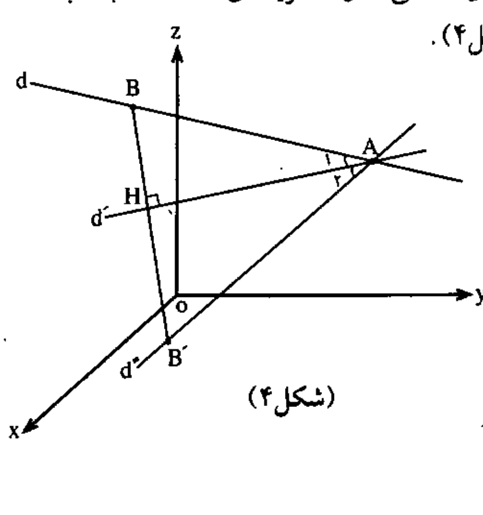
مرحله‌ی۳. معادله‌ی خطی که از A' موازی با d می‌گذرد، قرینه‌ی d نسبت به d' است.

$$A'(-۲,۲,۶), u''\| u = (-۲,۱,-۱) \xrightarrow{\text{(شکل۳)}} u'' = (-۲,۱,-۱)$$

$$d'': \frac{x+۲}{-۲} = \frac{y-۲}{۱} = \frac{z-۶}{-۱} \quad \text{معادله‌ی قرینه‌ی خط d نسبت به خط } d'$$

□

حالت دوم: اگر دو خط d و d' متقاطع باشند، مختصات محل تقاطع این دو خط را A می‌نامیم. سپس نقطه‌ی دلخواهی مانند B روی d درنظر می‌گیریم و قرینه‌ی این نقطه را نسبت به d' به‌دست می‌آوریم و B' می‌نامیم. بنابه تعریف، خطی که از A و B' می‌گذرد، قرینه‌ی خط d نسبت به d' است (شکل۴).



(شکل۴)

بنابراین، برای یافتن قرینه‌ی خط d نسبت به خط d'، به طوری که دو خط متقاطع باشند، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحله‌ی۱. مختصات محل تقاطع دو خط را محاسبه می‌کنیم (نقطه‌ی A).

مرحله‌ی۲. نقطه‌ی دلخواهی مانند B روی d درنظر می‌گیریم. سپس قرینه‌ی این نقطه را نسبت به خط d' محاسبه می‌کنیم (نقطه‌ی B').

مرحله‌ی۳. خطی که از A و B' می‌گذرد، همان قرینه‌ی خط d نسبت به خط d' است.

نتیجه: همان‌طور که در شکل ۴ ملاحظه می‌کنید، دو مثلث AHB و AHB' بنابر حالت «ض‌زض» هم‌نهشت هستند. درنتیجه: $\angle A_۱ = \angle A_۲$. پس d' نیمساز زاویه‌ی بین دو خط d و d'' است.

مسأله‌ی ۳. معادله‌ی قرینه‌ی خط d را نسبت به خط d' به دست آورید.

$$d: \frac{x-۱}{۱} = \frac{y-۲}{۲} = \frac{z-۳}{۳}$$

$$d': \frac{x-۳}{۲} = \frac{y-۱}{-۱} = \frac{z+۱}{-۴}$$

حل: دو خط d و d' متقاطع هستند، بنابراین طبق مراحل زیر عمل می‌کنیم:

مرحله‌ی ۱.

$$d: \begin{cases} x = t+۱ \\ y = ۲t+۲ \\ z = ۳t+۳ \end{cases}; \frac{t+۱-۳}{۲} = \frac{۲t+۲-۱}{-۱} = \frac{۳t+۳+۱}{-۴}$$

$$\Rightarrow \frac{t-۲}{۲} = \frac{۲t+۱}{-۱} = \frac{۳t+۴}{-۴}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{t-۲}{۲} = \frac{۲t+۱}{-۱} \Rightarrow t = ۰ \\ \frac{t-۲}{۲} = \frac{۳t+۴}{-۴} \Rightarrow t = ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \text{دو خط d و } d' \text{ متقاطع هستند}$$

$$t = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰+۱ \\ y = ۰+۲ \\ z = ۰+۳ \end{cases} \Rightarrow A(۱,۲,۳) \quad \text{مختصات محل تقاطع دو خط d و } d'$$

مرحله‌ی ۲. با فرض $x = ۲$ و قرار دادن آن در معادله‌ی خط d، مختصات نقطه‌ی دلخواهی مانند B از خط d به دست

می‌آید.

$$x=۲ \Rightarrow y=۴, z=۶; B(۲,۴,۶)$$

اکنون قرینه‌ی نقطه‌ی $B(۲,۴,۶)$ را نسبت به خط d' محاسبه می‌کنیم. به این منظور، ابتدا مختصات تصویر B را روی d' می‌یابیم و آن را H می‌نامیم.

الف)

$$d':\begin{cases} x=۲t+۳ \\ y=-t+۱ \\ z=-۴t-۱ \end{cases}$$ معادله‌ی پارامتری خط d'

ب)

$$H\in d' \Rightarrow \exists t'\in\mathbb{R}: H\left|\begin{array}{l} ۲t'+۳ \\ -t'+۱ \\ -۴t'-۱ \end{array}\right.$$ مختصات پارامتری نقطه‌ی H

ج)

$$\overrightarrow{BH}=(۲t'+۳-۲, -t'+۱-۴, -۴t'-۱-۶)$$

$$\overrightarrow{BH}=(۲t'+۱, -t'-۳, -۴t'-۷)$$

$$\vec{u}=(۲,-۱,-۴)$$ بردار هادی خط d'

$$\overrightarrow{BH}.\vec{u}=۰ \Rightarrow (۲t'+۱, -t'-۳, -۴t'-۷).(۲,-۱,-۴)=۰$$

$$\Rightarrow t'=-\frac{۱۱}{۷}$$

د)

$$t'=-\frac{۱۱}{۷} \Rightarrow H\left|\begin{array}{l} -\frac{۲۲}{۷}+۳ \\ \frac{۱۱}{۷}+۱ \\ \frac{۴۴}{۷}-۱ \end{array}\right. \Rightarrow H(-\frac{۱}{۷}, \frac{۱۸}{۷}, \frac{۳۷}{۷})$$

اکنون با داشتن مختصات دو نقطه‌ی B و H می‌توانیم، مختصات نقطه‌ی B' (قرینه‌ی B نسبت به d') را محاسبه کنیم:

$$x_{B'}=۲x_H-x_B=-\frac{۲}{۷}-۲=\frac{-۱۶}{۷}$$

$$y_{B'}=۲y_H-y_B=\frac{۳۶}{۷}-۴=\frac{۸}{۷}$$

$$z_{B'}=۲z_H-z_B=\frac{۷۴}{۷}-۶=\frac{۳۲}{۷}$$

$$\Rightarrow B'(-\frac{۱۶}{۷}, \frac{۸}{۷}, \frac{۳۲}{۷})$$ مختصات قرینه‌ی B نسبت به d'

مرحله‌ی ۳. معادله‌ی خطی که از دو نقطه‌ی A و B' می‌گذرد (d'')، قرینه‌ی d نسبت به d' است.

$$\overrightarrow{AB'}=(-\frac{۱۶}{۷}-۱, \frac{۸}{۷}-۲, \frac{۳۲}{۷}-۳)=(\frac{-۲۳}{۷}, \frac{-۶}{۷}, \frac{۱۱}{۷})$$

$$\vec{u}_۱ \parallel \overrightarrow{AB'} \Rightarrow \vec{u}_۱=(-۲۳,-۶,۱۱)$$ بردار هادی خط d''

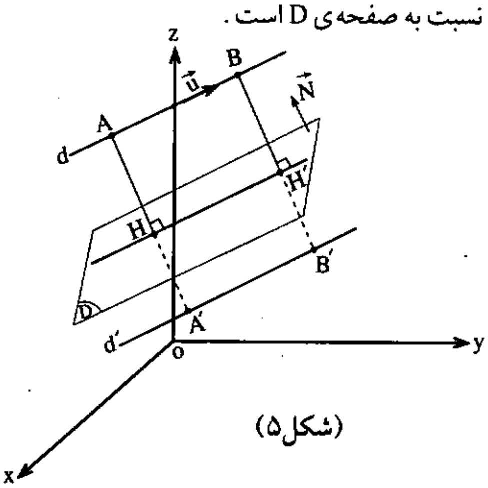
$$\frac{x-۱}{-۲۳}=\frac{y-۲}{-۶}=\frac{z-۳}{۱۱}$$ معادله‌ی قرینه‌ی خط d نسبت به خط d'

□

قرینه‌ی خط نسبت به صفحه

فرض کنیم d و D به ترتیب یک خط و یک صفحه در فضا باشند. چون وضعیت نسبی خط و صفحه در فضا دو حالت موازی یا متقاطع را دارد، بنابراین هر دو حالت را بررسی می‌کنیم.

حالت اول: اگر خط d با صفحه‌ی D موازی باشد، دو نقطه‌ی دلخواه A و B را روی d در نظر می‌گیریم، و قرینه‌ی این دو نقطه را نسبت به صفحه‌ی D پیدا می‌کنیم و ´A و ´B می‌نامیم؛ بنا به تعریف، خطی که از ´A و ´B می‌گذرد، قرینه‌ی خط d نسبت به صفحه‌ی D است.



(شکل۵)

نکته: H و ´H به ترتیب تصویر دو نقطه‌ی A و B روی صفحه‌ی D هستند. خطی که از H و ´H می‌گذرد (شکل ۵)، تصویر خط d روی صفحه‌ی D است.

نتیجه: همان‌طور که در شکل ۵ ملاحظه می‌کنید، دو خط d و ´d با خط ´HH موازی‌اند. از آن‌جایی که دو خط موازی با یک خط با هم موازی هستند، نتیجه می‌گیریم که: $d \parallel d'$.

با توجه به نتیجه‌ی اخیر در حالتی که خط d موازی صفحه‌ی D است، برای مشخص کردن قرینه‌ی خط d نسبت به صفحه‌ی D، نقطه‌ی دلخواهی مانند A روی d در نظر می‌گیریم، و قرینه‌ی این نقطه را نسبت به صفحه‌ی D به دست می‌آوریم و

A' می‌نامیم. اکنون خطی که از A' موازی با d می‌گذرد، قرینه‌ی خط d نسبت به صفحه‌ی D است. بنابراین برای یافتن معادله‌ی قرینه‌ی خط d نسبت به صفحه‌ی D ($d \| D$) مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحله‌ی ۱. نقطه‌ی دلخواه A را روی خط d مشخص می‌کنیم.

مرحله‌ی ۲. قرینه‌ی A را نسبت به صفحه‌ی D محاسبه می‌کنیم و A' می‌نامیم (روش یافتن قرینه‌ی نقطه نسبت به صفحه، در شماره‌ی قبل به طور کامل بررسی شده است).

مرحله‌ی ۳. معادله‌ی خطی که از A' موازی با d می‌گذرد، قرینه‌ی خط d نسبت به صفحه‌ی D است.

مسأله‌ی ۴. معادله‌ی قرینه‌ی خط d را نسبت به صفحه‌ی D به دست آورید.

$$d: \frac{x+۱}{۲} = \frac{y}{-۱} = \frac{z-۳}{-۲}$$

$$D: ۳x + ۴y + z = ۰$$

حل: خط d با صفحه‌ی D موازی است؛ زیرا بردار هادی خط و بردار نرمال صفحه بر هم عمودند: همان‌طور که ملاحظه می‌کنید:

$\vec{u} = (۲,-۱,-۲)$ بردار هادی خط d

$\vec{N} = (۳,۴,۱)$ بردار نرمال صفحه‌ی D

$$\vec{u}.\vec{N} = ۶ - ۴ - ۲ = ۰$$

مرحله‌ی ۱. با فرض $x = -۱$ و قرار دادن آن در معادله‌ی خط d، مختصات نقطه‌ی دلخواهی مانند A از d به دست می‌آید.

$$x = -۱ \Rightarrow y = ۰, z = ۳; A(-۱,۰,۳)$$

مرحله‌ی ۲. قرینه‌ی A را نسبت به صفحه‌ی D به دست می‌آوریم. به این منظور، ابتدا مختصات تصویر نقطه‌ی A روی صفحه‌ی D (یعنی نقطه‌ی H) را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

الف) $\vec{N} = (۳,۴,۱)$ بردار نرمال صفحه‌ی D است.

ب) معادله‌ی خطی را می‌نویسیم که از A بر صفحه‌ی D عمود می‌شود:

$$AH: \begin{cases} x = ۳t + ۱ \\ y = ۴t \\ z = t - ۳ \end{cases}$$ معادله‌ی پارامتری خط AH

ج)

$$H \in AH \Rightarrow \exists t' \in \mathbb{R}: H \begin{vmatrix} ۳t' + ۱ \\ ۴t' \\ t' - ۳ \end{vmatrix}$$

$$H \in D \Rightarrow ۳(۳t' + ۱) + ۴(۴t') + t' - ۳ = ۰ \Rightarrow t' = ۰$$

$$t' = ۰ \Rightarrow H(۱,۰,-۳)$$

د) اگر A' قرینه‌ی A نسبت به صفحه‌ی D باشد، آن‌گاه H وسط AA' است. بنابراین داریم:

$$x_{A'} = ۲x_H - x_A = ۲ + ۱ = ۳$$
$$y_{A'} = ۲y_H - y_A = ۰ + ۰ = ۰$$
$$z_{A'} = ۲z_H - z_A = -۶ - ۳ = -۹$$
$\Rightarrow A'(۳,۰,-۹)$ قرینه‌ی A نسبت به صفحه‌ی D

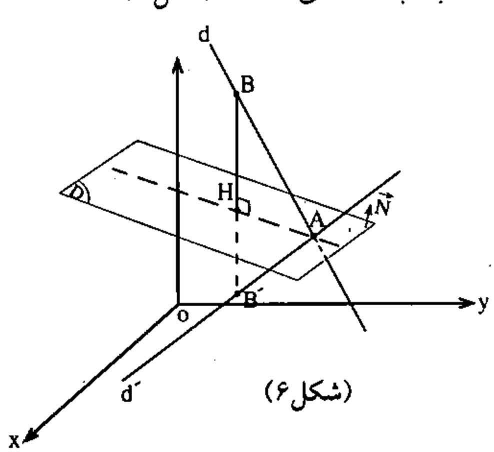
مرحله‌ی ۳. معادله‌ی خطی که از A' موازی با خط d رسم می‌شود، قرینه‌ی خط d نسبت به صفحه‌ی D است.

$A'(۳,۰,-۹)$ و $\vec{u'} \| \vec{u} = (۲,-۱,-۲)$

$$d': \frac{x-۳}{۲} = \frac{y}{-۱} = \frac{z+۹}{-۲}$$ معادله‌ی قرینه‌ی خط d نسبت به صفحه‌ی D

□

حالت دوم: اگر خط d و صفحه‌ی D متقاطع باشند، مختصات محل تقاطع خط و صفحه را A می‌نامیم، سپس نقطه‌ی دلخواهی مانند B روی خط d در نظر می‌گیریم و قرینه‌ی این نقطه را نسبت به صفحه‌ی D به دست می‌آوریم و B' می‌نامیم. بنا به تعریف، خطی که از A و B' می‌گذرد، قرینه‌ی خط d نسبت به صفحه‌ی D است (شکل ۶).



(شکل ۶)

نکته: خطی که از دو نقطه‌ی A و H (تصویر B روی صفحه‌ی D) می‌گذرد (شکل ۶)، تصویر خط d روی صفحه‌ی

D است.

برای یافتن قرینه‌ی خط d نسبت به صفحه‌ی D، به‌طوری که خط و صفحه متقاطع باشند، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحله‌ی ۱. مختصات محل تقاطع خط و صفحه را محاسبه می‌کنیم (نقطه‌ی A).

مرحله‌ی ۲. نقطه‌ی دلخواهی مانند B روی خط d در نظر می‌گیریم. سپس قرینه‌ی این نقطه را نسبت به صفحه‌ی D محاسبه می‌کنیم (نقطه‌ی ´B).

مرحله‌ی ۳. خطی که از A و ´B می‌گذرد، همان قرینه‌ی خط d نسبت به صفحه‌ی D است.

مسأله‌ی ۵. قرینه‌ی خط d را نسبت به صفحه‌ی D به دست آورید.

$$d: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$$

$$D: x + 5y - 3z = 7$$

حل: خط d و صفحه‌ی D متقاطع هستند، زیرا:

$\vec{N} = (1,5,-3)$ بردار نرمال صفحه‌ی D

$\vec{u} = (3,-2,1)$ بردار هادی خط d

$$\vec{u}.\vec{N} = 3 - 10 - 3 = -10 \neq 0 \Rightarrow d \nparallel D$$

مرحله‌ی ۱. مختصات محل تقاطع خط و صفحه را محاسبه می‌کنیم:

$$d: \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -2t - 1 \\ z = t \end{cases}$$

$$A \in d \Rightarrow \exists t' \in \mathbb{R}: A\left| \begin{array}{l} 3t' + 2 \\ -2t' - 1 \\ t' \end{array} \right.$$

$$A \in D \Rightarrow (3t' + 2) + 5(-2t' - 1) - 3(t') = 7$$
$$\Rightarrow t' = -1$$

$t' = -1 \Rightarrow A(-1,1,-1)$ مختصات تقاطع خط و صفحه

مرحله‌ی ۲. با قرار دادن $x = 2$ در معادله‌ی خط d، مختصات نقطه‌ی دلخواهی از آن، مانند B را محاسبه می‌کنیم:

$x = 2 \Rightarrow y = -1, z = 0; B(2,-1,0)$

اکنون مختصات قرینه‌ی B را نسبت به صفحه‌ی D به دست می‌آوریم. به این منظور، ابتدا مختصات تصویر نقطه‌ی B را روی D (یعنی نقطه‌ی H) به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

الف) $\vec{N} = (1,5,-3)$ بردار نرمال صفحه است.

ب) معادله‌ی خطی را می‌نویسیم که از B بر صفحه‌ی D عمود می‌شود:

$$BH: \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 5t + 1 \\ z = -3t \end{cases}$$ معادله‌ی پارامتری خط BH

ج)

$$H \in BH \Rightarrow \exists t' \in \mathbb{R}: H\left| \begin{array}{l} t' - 2 \\ 5t' + 1 \\ -3t' \end{array} \right.$$

$$H \in D \Rightarrow (t' - 2) + 5(5t' + 1) - 3(-3t') = 7$$
$$\Rightarrow t' = \frac{4}{35}$$

$$t' = \frac{4}{35} \Rightarrow H\left(-\frac{66}{35}, \frac{55}{35}, \frac{-12}{35}\right)$$

د) اگر ´B قرینه‌ی B نسبت به صفحه‌ی D باشد، آن‌گاه H وسط ´BB است. بنابراین داریم:

$$x_{B'} = 2x_H - x_B = -\frac{132}{35} - 2 = \frac{-202}{35}$$

$$y_{B'} = 2y_H - y_B = \frac{110}{35} + 1 = \frac{145}{35}$$

$$z_{B'} = 2z_H - z_B = \frac{-24}{35} - 0 = \frac{-24}{35}$$

$$\Rightarrow B'\left(\frac{-202}{35}, \frac{145}{35}, \frac{-24}{35}\right)$$

مرحله‌ی ۳. معادله‌ی خطی که از A و ´B می‌گذرد، قرینه‌ی خط d نسبت به صفحه‌ی D است.

$$A(-1,1,-1) \quad و \quad B\left(\frac{-202}{35}, \frac{145}{35}, \frac{-24}{35}\right)$$

$$\vec{u} = \vec{AB} = \left(\frac{-167}{35}, \frac{110}{35}, \frac{11}{35}\right) \parallel (-167,110,11)$$

$$d': \frac{x+1}{-167} = \frac{y-1}{110} = \frac{z+1}{11}$$ معادله‌ی قرینه‌ی خط d نسبت به صفحه‌ی D

ادامه دارد...

گراف همیلتنی

● احسان یارمحمدی

اشاره

در سال ۱۸۵۹ میلادی سر ویلیام روان همیلتن (۱۸۶۵ـ۱۸۰۵) ریاضیدان برجسته‌ی ایرلندی، نوعی بازی را که از یک دوازده‌وجهی که از چوب سفت و محکم، قطعه‌ای زنجیر و بیست پرچم تشکیل شده بود، به بازار عرضه کرد. در این بازی، هر رأس دوازده‌وجهی به نام یکی از شهرهای مهم و مشهور آن زمان نامگذاری شده بود، و بازیکن به عنوان جهانگرد، باید از یک شهر شروع به حرکت می‌کرد و سپس از شهرهای بعدی، تنها و تنها یک بار عبور می‌کرد و دوباره به همان شهری که حرکت خود را از آن آغاز کرده بود، بازمی‌گشت. در این بازی، جهانگرد از هر شهری که دیدار می‌کرد، یک پرچم را در رأس متناظر با آن شهر، در دوازده وجهی قرار می‌داد و به همین ترتیب تا شهر آخر. زنجیر نیز مسیر حرکت جهانگرد را نشان می‌داد. این بازی که به عنوان یک معما به بازار ارائه شده بود، آن قدر سهل و آسان بود که هر فرد عامی نیز می‌توانست آن را حل کند. به همین دلیل، فروش

آن در بازار، نه تنها با اقبال خوب مواجه نشد، بلکه به صورت کامل دچار شکست شد. عرضه‌ی این بازی توسط همیلتن باعث شد، رده‌ای خاص از گراف‌ها در نظریه‌ی گراف‌ها پا به عرصه‌ی ظهور بگذارند که به افتخار همیلتن، گراف‌های همیلتنی نامیده شدند.

مسیر همیلتنی: در گراف ساده‌ی $G = (V, E)$ با مجموعه رأس‌های $V = \{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_p\}$ و اندازه‌ی q، مسیری را که همه‌ی رأس‌های گراف G را یک‌بار و تنها یک‌بار مرور کند، مسیر همیلتنی می‌نامیم.

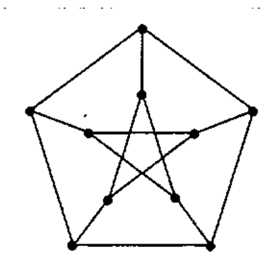
دور همیلتنی: در گراف ساده‌ی $G = (V, E)$ با مجموعه رأس‌های $V = \{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_p\}$ و اندازه‌ی q، دوری را که شامل همه‌ی رأس‌های گراف G باشد، دور همیلتنی می‌نامیم.

گراف همیلتنی: گراف ساده‌ی $G = (V, E)$ با مجموعه رأس‌های $V = \{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_p\}$ و اندازه‌ی q را همیلتنی می‌نامیم، اگر دارای دور همیلتنی باشد.

مثال ۱: شکل زیر، نمودار گراف پترسن است.

الف) مسیری همیلتنی در این گراف مشخص کنید.

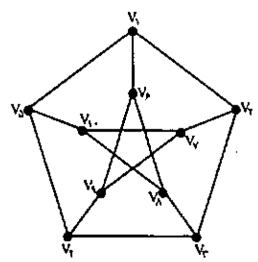
ب) آیا این گراف همیلتنی است؟ چرا؟



حل:

الف) گراف پترسن از مرتبه‌ی ۱۰ و اندازه‌ی ۱۵ است: بنابراین، مجموعه رأس‌های آن به صورت $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$ است.

اکنون رأس‌های گراف پترسن را به وسیله‌ی مجموعه رأس‌های متناظر با آن، برچسب‌گذاری یا به عبارت دیگر نامگذاری می‌کنیم. بنابراین، نمودار گراف پترسن به صورت زیر می‌شود:



با توجه به شکل بالا، هریک از مسیرهای زیر، یک مسیر همیلتنی برای گراف پترسن است.

۱. $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_{10} v_8 v_6 v_9 v_7$

۲. $v_{10} v_5 v_4 v_9 v_7 v_2 v_3 v_8 v_6 v_1$

۳. $v_4 v_9 v_6 v_8 v_3 v_2 v_1 v_5 v_{10} v_7$

ب) گراف پترسن همیلتنی نیست، چون در نمودار آن هیچ دور همیلتنی وجود ندارد.

قضیه‌ی ۱

گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی $p \leq 2$ همیلتنی نیست.

برهان

اگر گراف ساده‌ی G دارای مرتبه‌ی $p \leq 2$ باشد، به آن معناست که $p = 1$ یا $p = 2$ است که باعث پدیدار شدن سه گراف متمایز از یکدیگر می‌شود.

اگر $p = 1$ باشد، بنابراین گراف متناظر با یک رأس، گراف کامل K_1 است که گراف تهی $\overline{K_1}$ نیز تلقی می‌شود. اگر $p = 2$ باشد، در این صورت گراف متناظر با دو رأس یا گراف کامل K_2 یا گراف تهی $\overline{K_2}$ است.

بنابراین چون گراف‌های کامل K_1 و K_2 را به ترتیب می‌توان درخت‌های T_1 و T_2 نامید، درنتیجه در گراف کامل K_1 مسیری وجود ندارد که بخواهیم در مورد همیلتنی بودن یا نبودن آن بحث کنیم. در گراف K_2 هر چند که مسیری به طول

۱ وجود دارد، ولی این مسیر همیلتنی هیچ‌گاه نمی‌تواند یک دور باشد، و این با گراف همیلتنی در تناقض است.

گراف تهی $\overline{K_2}$ گرافی بدون یال با تعداد رأس ۲ است که گرافی ناهمبند است. درضمن، در گراف تهی $\overline{K_2}$ به علت وجود نداشتن یال، مسیری وجود ندارد که دوری وجود داشته باشد، و این با گراف همیلتنی در تناقض است.

قضیه‌ی ۲

گراف (ساده) همیلتنی G، همبند است.

برهان

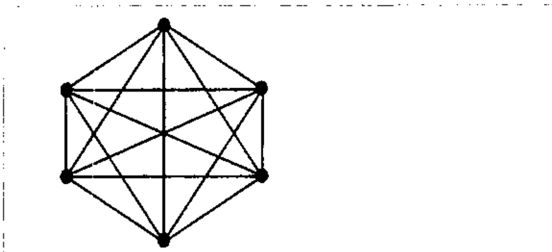
گراف G همیلتنی است، بنابراین دارای دور همیلتنی و به واسطه‌ی آن دارای مسیری همیلتنی است که هریک از رأس‌های گراف G را مرور می‌کند. بنابراین، هر ۲ رأس از مجموعه رأس‌های گراف G، به‌وسیله‌ی یک مسیر به یکدیگر مجاور می‌شوند. بدین معنی که بین هریک از رأس‌های گراف G یک مسیر وجود دارد که این تعریف گراف همبند است.

مثال ۲: در گراف ۵ـ منتظم G از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q، رابطه‌ی $q - 2p = 3$ برقرار است. آیا این گراف همیلتنی است؟ چرا؟

در گراف rـ منتظم G از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q، رابطه‌ی $rp = 2q$ برقرار است. بنابراین:

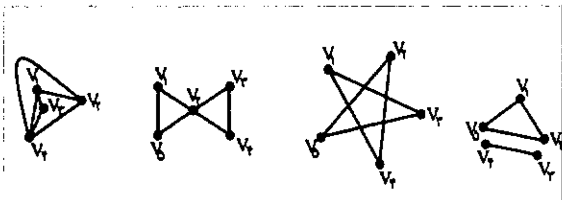
$$\begin{cases} 5p = 2q \\ q - 2p = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{5}{2}p \\ q = 2p + 3 \end{cases} \Rightarrow p = 6,\ q = 15$$

در گراف کامل K_p با اندازه‌ی q، رابطه‌ی $q = \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$ برقرار است. درنتیجه، این گراف ۵ـ منتظم G یک گراف کامل K_6 نیز هست و در آن حداقل یک دور با طول ۶ یافت می‌شود، پس این گراف همیلتنی است.



تمرین‌ها

۱. شکل‌های زیر نمودارهای گراف‌های ساده‌ی G_1، G_2، G_3 و G_4 هستند.



الف) کدام یک از گراف‌های ساده‌ی G_1، G_2، G_3 و G_4 دارای مسیر همیلتنی است؟ استدلال خود را به تفصیل بیان کنید.

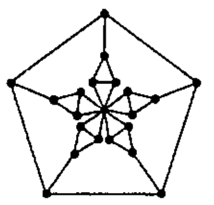
ب) کدام یک از گراف‌های مکمل متناظر با گراف‌های ساده‌ی G_1، G_2، G_3 و G_4 دارای دور همیلتنی است؟ دلیل خود را بیان کنید.

۲. ثابت کنید گراف کامل K_p با اندازه‌ی q، همیلتنی است.

۳. شکل زیر نمودار گراف «وُرک شاپ» است.

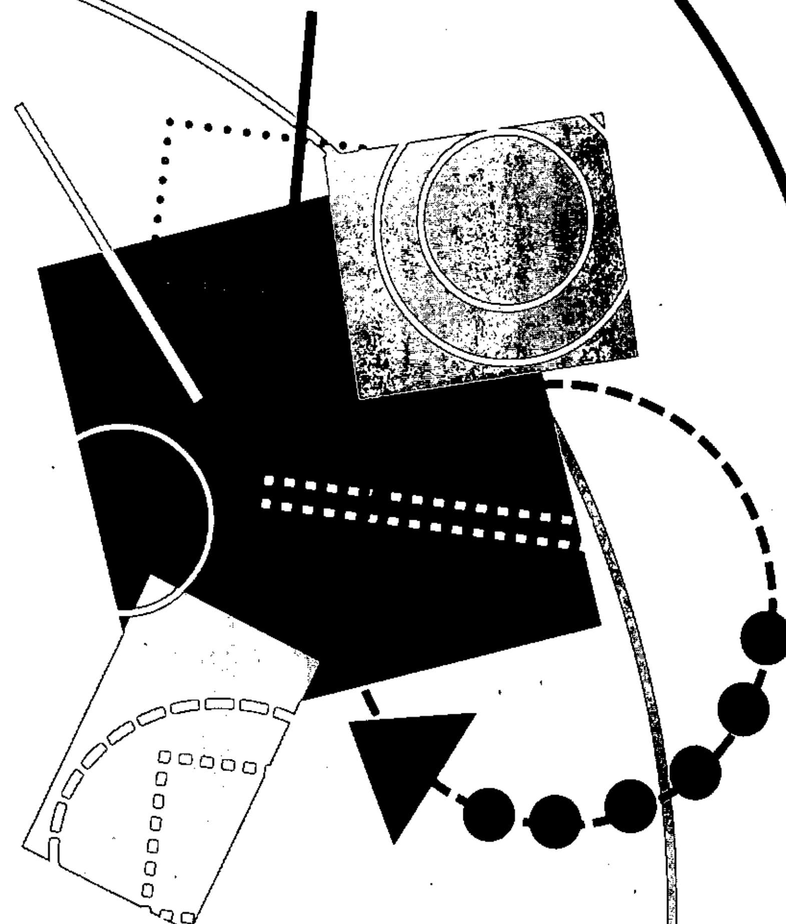
الف) آیا در این گراف مسیری که همه‌ی رأس‌های آن را یک‌بار و تنها یک‌بار مرور کند، وجود دارد؟ استدلال خود را شرح دهید.

ب) آیا گراف «وُرک شاپ» همیلتنی است؟ چرا؟



مسابقه‌های ریاضی در کشورهای گوناگون جهان ۴

المپیاد ریاضی انگلستان (۱۲ ژانویه‌ی ۲۰۰۰)



● ترجمه، هوشنگ شرقی

المپیاد ریاضی در کشور انگلستان از سال ۱۹۶۶ تاکنون، هر سال برگزار می‌شود. مجموعه مسائل المپیاد ریاضی این کشور، از آغاز تا سال ۱۹۹۶ در کتابی منتشر شده است که نگارنده آن را ترجمه و انتشارات مدرسه در سال ۱۳۸۲ منتشر کرده است. علاقه‌مندان برای آشنایی با نحوه‌ی برگزاری این رقابت‌ها و نوع سؤالات می‌توانند به کتاب فوق مراجعه کنند.[۱] سؤالات دور اول این رقابت‌ها که در سال ۲۰۰۰ میلادی، روز چهارشنبه دوازدهم ژانویه، برگزار شد، در این‌جا همراه با راهنمایی می‌آیند. مدت زمان آزمون سه ساعت و نیم و شامل پنج مسأله بوده است. هر مسأله ده امتیاز داشته و به کارگیری ماشین‌حساب و ابزارهای محاسبه‌ای در آزمون، ممنوع بوده است. اکنون صورت مسأله‌های مذکور، و نیز راه‌حل آن‌ها که از مترجم هستند، به ترتیب ارائه می‌شوند.

۱. مماس مشترک دو دایره‌ی متقاطع C_1 و C_2 به ترتیب در نقاط P و Q بر آن‌ها مماس است. دو دایره در نقاط M و N متقاطعند و N به PQ نزدیک‌تر از M است. خط راست PN

دایره‌ی $C_۲$ را در نقطه‌ی R قطع می‌کند. ثابت کنید MQ زاویه‌ی $\angle PMR$ را نصف می‌کند.

۲. نشان دهید که برای هر عدد طبیعی n، $۱۲۱^n - ۲۵^n + ۱۹۰۰^n - (-۴)^n$ بر ۲۰۰۰ بخش‌پذیر است.

۳. مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است. بین تمام نقاط P واقع بر محیط مثلث، نقطه‌ای را بیابید که به ازای آن مقدار AP+BP+CP مینیمم شود.

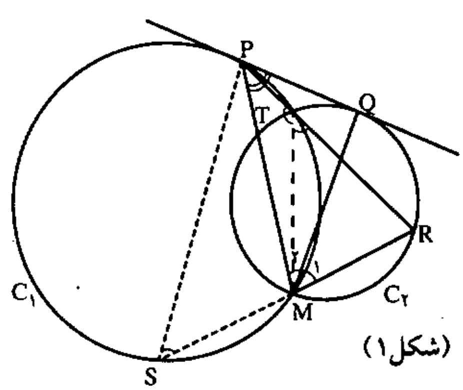
۴. برای هر عدد صحیح مثبت $k > ۱$، دنباله‌ی بازگشتی $\{a_n\}$ را با دو رابطه‌ی $a_۰ = ۱$ و $a_n = kn + (-۱)^n a_{n-۱}$ (به‌ازای هر $n \ge ۱$) تعریف می‌کنیم. همه‌ی مقادیر k را به دست آورید که به ازای آن‌ها، عدد ۲۰۰۰ جمله‌ای از دنباله باشد.

۵. هفت کوتوله تصمیم دارند چهار گروه برای شرکت در امتحان عصر طلایی[۲] تشکیل دهند. البته تعداد اعضای گروه‌ها یکسان نخواهد بود. برای مثال، ممکن است یک گروه شامل داک[۳] به تنهایی، گروه دیگر فقط شامل دوپی[۴] و گروهی هم شامل اسلیپی[۵] و هپی[۶] و گرامپی[۷] و گروه آخر شامل باشفول[۸] و اسنیزی[۹] باشد.

آن‌ها به چند طریق می‌توانند چهار گروه تشکیل دهند؟ (ترتیب گروه‌ها و نیز کوتوله‌های عضو آن‌ها مهم نیست، اما هر کوتوله فقط می‌تواند عضو یک گروه باشد). فرض کنید سفیدبرفی هم قبول کند که در گروه‌ها وارد شود، در این صورت آن‌ها به چند طریق می‌توانند گروه‌ها را تشکیل دهند؟

راهنمایی و حل مسائل

۱. نقطه‌ی برخورد PM با دایره‌ی $C_۱$ را T می‌نامیم و وتر مشترک MN را رسم می‌کنیم. همچنین MR را امتداد می‌دهیم تا دایره‌ی $C_۱$ را در S قطع کند و S را به P وصل می‌کنیم.



(شکل ۱)

چون چهارضلعی PNMS محاطی است، بنابراین $\hat{N}_۱ + \hat{S} = ۱۸۰^\circ$ و $\hat{N}_۱ + \hat{N}_۲ = ۱۸۰^\circ$ و درنتیجه: $\hat{S} = \hat{N}_۲$ و $\hat{N}_۲ = \frac{\overset{\frown}{MR}}{۲}$ و بنابراین: $\hat{S} = \frac{\overset{\frown}{MR}}{۲}$. همچنین در دایره‌ی $C_۱$ زاویه‌ی $M\hat{P}Q$ زاویه‌ی ظلی و برابر با $\frac{\overset{\frown}{PM}}{۲}$ است و زاویه‌ی $\hat{S}$ نیز محاطی و برابر $\frac{\overset{\frown}{PM}}{۲}$ است. بنابراین داریم: $\angle MPQ = \hat{S}$ و درنتیجه: $\angle MPQ = \frac{\overset{\frown}{MR}}{۲}$. حال در دایره‌ی $C_۲$، زاویه‌ی $\angle MPQ$، زاویه‌ی خارجی است و درنتیجه: $\angle MPQ = \frac{\overset{\frown}{MQ} - \overset{\frown}{TQ}}{۲}$ و بنابراین:

$$\frac{\overset{\frown}{MQ} - \overset{\frown}{TQ}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{MR}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{MQ} - \overset{\frown}{TQ} = \overset{\frown}{MR} \Rightarrow$$
$$\overset{\frown}{MR} + \overset{\frown}{RQ} - \overset{\frown}{TQ} = \overset{\frown}{MR} \Rightarrow \overset{\frown}{RQ} = \overset{\frown}{TQ} \Rightarrow \angle M_۱ = \angle M_۲$$

۲. می‌توان نوشت:

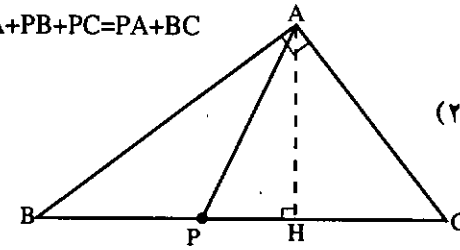
$$\begin{aligned} A &= ۱۲۱^n - ۲۵^n + ۱۹۰۰^n - (-۴)^n \\ &= (۱۹۰۰^n - ۲۵^n) + (۱۲۱^n - (-۴)^n) \\ &= (۱۹۰۰ - ۲۵)(\underbrace{۱۹۰۰^{n-۱} + ۱۹۰۰^{n-۲} \times ۲۵ + \cdots + ۲۵^{n-۱}}_{k}) \\ &+ (۱۲۱ - (-۴))(\underbrace{۱۲۱^{n-۱} + \cdots + (-۴)^{n-۱}}_{k'}) \\ &= ۱۸۷۵k + ۱۲۵k' = ۱۲۵(۱۵k + k') = ۱۲۵k'' \\ &\Rightarrow ۱۲۵|A \end{aligned}$$

بار دیگر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} A &= (۱۲۱^n - ۲۵^n) + (۱۹۰۰^n - (-۴)^n) \\ &= (۱۲۱ - ۲۵)(\underbrace{۱۲۱^{n-۱} + \cdots + ۲۵^{n-۱}}_{m}) \\ &+ (۱۹۰۰ - (-۴))(\underbrace{۱۹۰۰^{n-۱} + \cdots + (-۴)^{n-۱}}_{m'}) \\ &= ۹۶m + ۱۹۰۴m' = ۱۶(۶m + ۱۱۹m') = ۱۶m'' \\ &\Rightarrow ۱۶|A \Rightarrow ۱۶|A, ۱۲۵|A, \ (۱۶,۱۲۵) \\ &= ۱ \Rightarrow ۱۶ \times ۱۲۵|A \Rightarrow ۲۰۰۰|A \end{aligned}$$

۳. فرض می‌کنیم: $BC > AB \ge AC$ اگر نقطه‌ی P روی BC باشد، مطابق شکل۲ داریم:

PA+PB+PC=PA+BC

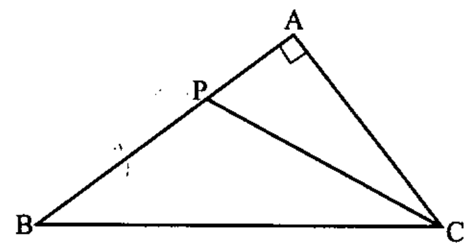


(شکل ۲)

و چون BC ثابت است، این مقدار وقتی مینیمم می‌شود که PA مینیمم شود و این در صورتی است که P روی H، (پای ارتفاع AH) باشد. در این حالت، مجموع فوق برابر است با:

$AH + BC = a + h_a$ (۱)

اما اگر P روی AB باشد، مطابق شکل ۳ داریم:



(شکل ۳)

PA+PB+PC=AB+PC

و چون AB ثابت است، این مقدار وقتی مینیمم می‌شود که PC مینیمم شود و این در صورتی است که P روی A باشد. در این حالت مجموع فوق برابر است با:

$AB + AC = b + c$ (۲)

درحالتی که P روی AC باشد نیز به همین نتیجه می‌رسیم. اکنون کافی است بین دو مقدار رابطه‌های (۱) و (۲) مقایسه‌ای انجام دهیم و کوچک‌ترین آن‌ها را انتخاب کنیم. می‌توانیم ثابت کنیم: $a + h_a > b + c$

برای این منظور توجه می‌کنیم که: $b = a\sin B$ و $c = a\cos B$ و $h_a = \frac{bc}{a} = a\sin B\cos B$ و درنتیجه:

$a + h_a = a(1 + \sin B\cos B)$ و $b + c = a(\sin B + \cos B)$

حال کافی است نشان دهیم: $1 + \sin B\cos B > \sin B + \cos B$

و یا: $1 - \sin B - \cos B + \sin B\cos B > 0$ و این معادل است با:

$(1 - \sin B)(1 - \cos B) > 0$

و درستی نامساوی اخیر واضح است. بنابراین مینیمم مقدار فوق برابر است با: $b + c$ و نقطه‌ی P باید روی A باشد.

۴. برای حل این مسأله، ابتدا تعداد زیادی از جملات دنباله را با استفاده از قانون دنباله می‌نویسیم:

$a_0 = 1,\ a_1 = k + (-1)a_0 = k - 1,$

$a_2 = 2k + (-1)^2 a_1 = 3k - 1$

$a_3 = 3k + (-1)^3 a_2 = 1, a_4 = 4k + (-1)^4 a_3 = 4k + 1,$

$a_5 = 5k + (-1)^5 a_4 = k - 1$

$a_6 = 6k + (-1)^6 a_5 = 7k - 1,\ a_7 = 7k + (-1)^7 a_6 = 1,$

$a_8 = 8k + (-1)^8 a_7 = 8k + 1$

$a_9 = 9k + (-1)^9 a_8 = k - 1,$

$a_{10} = 10k + (-1)^{10} a_9 = 11k - 1,$

$a_{11} = 11k + (-1)^{11} a_{10} = 1$

$a_{12} = 12k + (-1)^{12} a_{11} = 12k + 1,$

$a_{13} = 13k + (-1)^{13} a_{12} = k - 1,$

$a_{14} = 14k + (-1)^{14} a_{13} = 15k - 1$

$a_{15} = 15k + (-1)^{15} a_{14} = 1, \cdots$

اکنون نگاهی به شانزده جمله‌ی متوالی دنباله بیندازید:

$1, k-1, 3k-1, 1, 4k+1, k-1, 7k-1, 1, 8k+1, k-1,$
$11k-1, 1, 12k+1, k-1, 15k-1, 1, \cdots$

دلیل نوشتن این تعداد جمله آن است که نظام موجود بین آن‌ها را دریابید. به جز جمله‌ی اول (a_0) بقیه‌ی جملات نظام مشخصی دارند و به سادگی روشن است که هر چهار جمله‌ی متوالی یک نظم دارند. جملات دوم (a_1) و ششم (a_5) و دهم (a_9) و... همگی مساوی $k-1$ هستند و جملات چهارم (a_3)، هشتم (a_7)، دوازدهم (a_{11}) و... همگی مساوی ۱ هستند. به این ترتیب می‌توان برای هر $P \geq 1$ نوشت:

$a_{4P-3} = k - 1,\ a_{4P-1} = 1,\ a_{4P-2} = (4P - 1)k - 1,$
$a_{4P} = 4Pk + 1$

درستی این دستورات را می‌توان به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی اثبات کرد. برای مثال یکی از آن‌ها را اثبات می‌کنیم. با استقرا روی P، ثابت می‌کنیم: $a_{4P-3}=k-1$ به ازای $P=1$ درستی حکم واضح است: $a_1=k-1$. حال فرض می‌کنیم به ازای $P=n$ حکم درست باشد، یعنی $a_{4n-3}=k-1$ و ثابت می‌کنیم به ازای $P=n+1$ نیز حکم درست است: $a_{4n+1}=a_{4(n+1)-3}=k-1$.

برای این منظور می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} a_{4n-2} &= (4n-2)k+(-1)^{4n-2}a_{4n-3}=(4n-2)k+k-1 \\ &= (4n-1)k-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{4n-1} &= (4n-1)k+(-1)^{4n-1}a_{4n-2} \\ &= (4n-1)k-(4n-1)k+1=1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{4n} &= 4nk+(-1)^{4n}a_{4n-1}=4nk+1, \\ a_{4n+1} &= (4n+1)k+(-1)^{4n+1}a_{4n} \\ &= (4n+1)k-4nk-1=k-1 \end{aligned}$$

و درستی حکم ثابت می‌شود. اکنون می‌توانید درستی سایر حکم‌ها را نیز به همین صورت اثبات کنید.

حال به راحتی می‌توان پاسخ مسأله را به دست آورد. جملات ردیف $4P-1$ همگی مساوی ۱ هستند و جملات ردیف $4P-3$ مساوی $k-1$ هستند. بنابراین می‌توانند مساوی ۲۰۰۰ باشند:

$$k-1=2000 \Rightarrow k=2001$$

بنابراین، به ازای $k=2001$ بی‌شمار جمله‌ی مساوی ۲۰۰۰ در دنباله خواهیم داشت.

جملات ردیف $4P$ نمی‌توانند مساوی ۲۰۰۰ باشند، زیرا در این صورت داریم:

$$4Pk+1=2000 \Rightarrow 4Pk=1999,\ \ Pk=\frac{1999}{4}$$

و چون: $P, k \in Z$، این تساوی ممکن نیست. ولی جملات ردیف $4P-3$ نیز می‌توانند مساوی ۲۰۰۰ باشند:

$$(4P-1)k-1=2000 \Rightarrow (4P-1)k=2001=3\times23\times29$$

در این جا حالت‌های زیر قابل تصورند:

$$\begin{cases}4P-1=667\\ k=3\end{cases} \quad \begin{cases}4P-1=87\\ k=23\end{cases} \quad \begin{cases}4P-1=23\\ k=87\end{cases} \quad \begin{cases}4P-1=3\\ k=667\end{cases}$$

غیر قابل قبول

و از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$(k,P)=(87,6) \text{ یا } (23,22) \text{ و } (3,167)$$

بنابراین به طور خلاصه به ازای چهار مقدار متفاوت k، جمله‌ی ۲۰۰۰ می‌تواند در دنباله وجود داشته باشد. به ازای $k=2001$ بی‌شمار جمله (جملات a_1، a_5، a_9 و...)، به ازای $k=87$، جمله‌ی a_{21}، به ازای $k=23$، جمله‌ی a_{85} و به ازای $k=3$، جمله‌ی a_{665} مساوی ۲۰۰۰ است.

۵. تشکیل گروه‌ها فقط به سه صورت ممکن است: یک گروه چهارنفره و سه گروه یک نفره یا دو گروه یک نفره و یک گروه سه نفره و یک گروه دو نفره یا سه گروه دو نفره و یک گروه یک نفره.

در هریک از این حالت‌ها می‌توان تعداد راه‌های انتخاب گروه‌ها را محاسبه و حاصل آن‌ها را با هم جمع کرد:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\binom{7}{4}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{3!}=35 \quad \text{(حالت اول)} \\ &\frac{\binom{7}{3}\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{2!}=35\times6=210 \quad \text{(حالت دوم)} \\ &\frac{\binom{7}{2}\binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{1}{1}}{3!}=\frac{21\times10\times3}{6}=105 \quad \text{(حالت سوم)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\text{تعداد روش‌ها} = 35+210+105=350$$

درحالتی که عده‌ی افراد هشت نفر باشد نیز، با فرایندی مشابه، تعداد روش‌ها را خودتان به‌دست آورید.

زیرنویس

۱. راهنمای المپیاد ریاضی، مؤلف: تونی گاردینر، مترجم: هوشنگ شرقی، انتشارات مدرسه، چاپ اول، ۱۳۸۲.

2. Millennium Quiz

3. Doc

4. Dopey

5. Sleepy

6. Happy

7. Grumpy

8. Bashful

9. Sneezy

(زیرنویس‌های ۲ تا ۹، نام قهرمانان داستان معروف سفید برفی و هفت کوتوله هستند. مترجم)

اتحاد و معادله

تجزیه‌ی عبارت‌های جبری

(روشی تازه)

● پرویز شهریاری

تجزیه‌ی یک عبارت جبری به صورت ضرب عامل‌های خود، هم وسیله‌ای برای تشکیل اتحاد است و هم به حل معادله‌ها یاری می‌رساند. برای نمونه، به این مسأله توجه کنید:

مسأله: $f(x)$ به این صورت داده شده است:

$$f(x)=a(b+x)(b^2+x^2-a^2)(a+b-x)$$
$$-x(a+b)(a^2+b^2-x^2)(b+x-a)$$

$f(x)$ را به صورت ضرب چهار عامل تجزیه کنید و سپس معادله‌ی $f(x)=0$ را حل کنید.

حل: عبارت $f(x)$ به ازای $b=0$ و $x=a$ برابر صفر می‌شود، بنابراین بر $b(x-a)$ بخش‌پذیر است. پرانتزها را باز و $f(x)$ را نسبت به x منظم می‌کنیم. اگر آن را بر $b(x-a)$ تقسیم کنیم، در خارج قسمت به این عبارت می‌رسیم:

$$x^3+(a+b)x^2+(a^2-b^2)x+(a^2-b^2)(a+b)$$
$$=x^2(x+a+b)+(a^2-b^2)(x+a+b)$$
$$=(x+a+b)(x^2+a^2-b^2)$$

بنابراین مقدار $f(x)$ به این صورت است:

$$f(x)=b(x-a)(x+a+b)(x^2+a^2-b^2)$$

اگر $f(x)$ را همان عبارت نخستین در نظر بگیریم، یک اتحاد به دست می‌آید. برای $f(x)=0$ هم این چهار جواب را خواهیم داشت:

$$x_1=a,\ x_2=-(a+b),\ x_{3,4}=\pm\sqrt{b^2-a^2}$$

□

در این‌جا راهی برای تجزیه‌ی این عبارت جست‌وجو می‌کنیم:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \qquad (1)$$

ضریب‌های عبارت $f(x)$ را درست (مثبت، منفی یا صفر) می‌گیریم. ضریب بزرگ‌ترین درجه را هم مثبت فرض می‌کنیم:

$$a_n>0$$

n را درست و مثبت می‌گیریم، یعنی $f(x)$ برابر مقدار ثابت a_0 نیست.

چند جمله‌ای $g(x)$ را با توان مثبت کوچک‌تر از n، و ضریب‌های مثبت را «بخشیابی» از چند جمله‌ای $f(x)$ گوییم؛ به شرطی که بتوان چند جمله‌ای $h(x)$ را (که متمم بخشیاب می‌نامیم) به نحوی پیدا کرد که داشته باشیم:

$$f(x)=g(x).h(x)$$

وقتی که $f(x)$ بخشیابی نداشته باشد، آن را «غیرقابل

تحویل» می‌نامیم. ثابت می‌شود، هر چند جمله‌ای، حاصل ضربی از **چند جمله‌ای‌های غیرقابل تحویل است** (در این جا از تبدیل به عامل‌های درجه اول صحبتی نمی‌کنیم).

در این جا روش ساده و بسیار زیبای تجزیه‌ی چندجمله‌ای‌ها به عامل‌های خود، از همان راهی است که م. و. **یاکوکین** در کتاب «نظریه‌ی عددی تبدیل چندجمله‌ای‌ها» طرح کرده است. روشن است که برای تجزیه‌ی یک عبارت، اول باید قابل تحویل بودن آن را ثابت کرد و در صورت مثبت بودن جواب، یکی از عامل‌های آن را معین کرد. ما در این جا به همین مسأله می‌پردازیم.

چندجمله‌ای‌های مثبت

چندجمله‌ای (۱) را مثبت می‌نامیم، به شرطی که همه‌ی ضریب‌های آن نامنفی باشند:

$$a_n > 0,\ a_{n-1} \ge 0,\ \cdots,\ a_1 \ge 0,\ a_0 \ge 0$$

روشن است، حاصل ضرب دو (یا به طور کلی چند) چندجمله‌ای مثبت، یک چندجمله‌ای مثبت است. در حالت کلی، عکس این مطلب درست نیست. یعنی چندجمله‌ای‌های مثبتی وجود دارند که بخشیاب‌های نامثبت دارند؛ برای نمونه:

$$A = x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 4$$
$$= (x^2 + 2x + 2)(x^2 - x + 2)$$

به عنوان نخستین تقریب برای رسیدن به مسأله‌ی کلی تجزیه‌ی یک چندجمله‌ای دلخواه به صورت عامل‌های یاکوکین، این مسأله‌ی کمکی را می‌آوریم:

مسأله‌ی یاکوکین: برای هر چند جمله‌ای مثبت (با توان‌های مثبت و ضریب‌های درست)، دست کم یک زوج متمم یکدیگر با بخش‌های مثبت وجود دارد (و یا ثابت می‌کنیم که برای چندجمله‌ای مفروض، چنین زوجی پیدا نمی‌شود). یاکوکین این مسأله را بر پایه‌ی پیش‌قضیه‌ای ثابت می‌کند، به این شرح:

پیش‌قضیه‌ی ۱. بزرگ‌ترین ضریب حاصل ضرب gh دو چندجمله‌ای مثبت g و h، کم‌تر از بزرگ‌ترین ضریب هریک از عامل‌ها نیست.

اثبات: b_{i_0} و c_{i_0} را بزرگ‌ترین ضریب‌های چندجمله‌ای‌های g و h می‌گیریم. از آن جا که ضریب $a_{i_0+j_0}$ چندجمله‌ای p=gh با این دستور بیان می‌شود:

$$a_{i_0+j_0} = b_{i_0}c_{j_0} + \cdots$$

(چند نقطه‌ای که در این جا گذاشته‌ایم، به معنای برخی جمله‌های غیرمنفی متمم است) پس:

$$a_{i_0+j_0} \ge b_{i_0}c_{j_0}$$

بنابراین، بزرگ‌ترین ضریب چندجمله‌ای f هم کم‌تر از حاصل ضرب $b_{i_0}c_{j_0}$ نیست و درنتیجه کم‌تر از هریک از ضریب‌های b_{i_0} و c_{i_0} نیست (زیرا عددهای b_{i_0} و c_{i_0}، عددهایی درست و مثبت هستند).

از این به بعد، بزرگ‌ترین ضریب چندجمله‌ای مثبت را، ارتفاع آن می‌نامیم. اکنون m را عدد درست مثبتی در نظر می‌گیریم. هر چندجمله‌ای f را که ارتفاعی کم‌تر از m داشته باشد، به عدد درست و مثبت [f] نسبت می‌دهیم و فرض می‌کنیم:

$$[f] = f(m)$$

بنابراین، اگر داشته باشیم:

$$f(m) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

آن وقت خواهیم داشت:

$$[f] = a_n m^n + a_{n-1}m^{n-1} + \cdots + a_1 m + a_0$$

بنابراین، چون بنابر شرط، ارتفاع چندجمله‌ای f کم‌تر از m است، عددهای a_n، a_{n-1}، ...، a_1، a_0 رقم‌های [f] را در عددشماری با مبنای m تشکیل می‌دهند. به این ترتیب:

$$\overline{(a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)}_m$$

را برای هر چندجمله‌ای مثبت (۱) که ارتفاعی کم‌تر از m داشته باشد، داریم:

$$[f] = \overline{(a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)}_m$$

به زبان دیگر، برای آن که عدد [f] را در دستگاه عددشماری به مبنای m به دست آوریم، کافی است ردیف ضریب‌های چندجمله‌ای f را بنویسیم. روشن است که رابطه‌ی:

$$f \to [f]$$

ارتباطی یک به یک بین مجموعه‌ی چندجمله‌ای‌های مثبتی که ارتفاعی کم‌تر از m دارند (و شامل چندجمله‌ای با توان صفر هم می‌شوند)، و مجموعه‌ی همه‌ی عددهای مثبت درست دارند. چندجمله‌ای f را که متناظر با عدد a باشد، یعنی برای آن $[f] = a$، چندجمله‌ای می‌نامیم که به عدد a ارتباط دارد

(در مبنای m). برای به دست آوردن این عدد، باید عدد a را در عددشماری به مبنای m نوشت و رقم‌های این عدد را ضریب‌های چندجمله‌ای f انتخاب کرد. یادآوری می‌کنیم، چندجمله‌ای با توان صفر (که ما آن را در بررسی خود وارد نمی‌کنیم)، با عددهای کوچک‌تر از m و تنها با همان عددها، متناظر است.

از پیش قضیه‌ی ۱ و برابری:

$$f(m) = g(m)h(m)$$

می‌توان این قضیه را نتیجه گرفت:

قضیه‌ی ۱. همه‌ی بخشیاب‌های مثبت چندجمله‌ای f، ارتفاع‌هایی کوچک‌تر از m دارند. درضمن اگر داشته باشیم:

$$f = gh \qquad (۲)$$

این برابری هم برقرار است:

$$[f] = [g][h] \qquad (۳)$$

از این قضیه می‌توان به طور مستقیم، قاعده‌ی زیر را درباره‌ی تجزیه‌ی یک چندجمله‌ای مثبت به دو چندجمله‌ای مثبت نتیجه گرفت:

قاعده: f را یک چندجمله‌ای مثبت فرض کنید. عدد m را بزرگ‌تر از همه‌ی ضریب‌های چندجمله‌ای انتخاب می‌کنیم، عدد $[f]$ را پیدا و آن را به عامل‌های خود تجزیه می‌کنیم. برای هر زوج بخشیاب‌های متمم یکدیگر a و b از عدد $[f]$ (که بزرگ‌تر از m باشد)، چندجمله‌ای‌های مثبت g و h را در ارتباط با آن‌ها (در مبنای m) تشکیل می‌دهیم. همه‌ی بخشیاب‌های چندجمله‌ای f که متمم یکدیگر باشند، بین همین زوج‌های (h و g) خواهند بود. برای همه‌ی زوج‌ها، حاصل‌ضرب gh را تشکیل می‌دهیم و آن‌ها را با چندجمله‌ای f مقایسه می‌کنیم؛ از این مقایسه یا تجزیه، f به صورت ضرب دو چندجمله‌ای مثبت به دست می‌آید و یا روشن می‌شود که چندجمله‌ای f قابل تجزیه به دو چندجمله‌ی مثبت نیست.

این قاعده ثمربخش است و امکان عملی برای پیدا کردن بخشیاب‌های مثبت یک چندجمله‌ای مثبت را به ما می‌دهد. با این حال، آن را می‌توان کامل کرد، به شرطی که آن را با قاعده‌ی جدا کردن زوج‌هایی از بخشیاب عددهای $[f]$ که لازم نیستند، همراه کنیم؛ یعنی زوج‌هایی که منجر به بخشیاب‌های f نمی‌شوند. فرض کنید:

$$g = b_p x^p + \cdots + b_0$$

$$h = c_q x^q + \cdots + c_0$$

دو بخشیاب متمم چندجمله‌ای (۱) باشند. در این صورت:

$$n = p + q \qquad (۴´)$$

$$a_n = b_p c_q \qquad (۵´)$$

$$a_0 = b_0 c_0 \qquad (۶´)$$

به جز آن:

$$f(1) = g(1)h(1) \qquad (۷´)$$

برای هر عدد درست مثبت a که در دستگاه عدد شماری به مبنای m نوشته شده است، نماد $\tau(a)$ را به معنای یک واحد کم‌تر از عدد رقم‌های آن و $\sigma(a)$ را مجموع رقم‌های آن می‌گیریم. به جز این، نمادهای $A(a)$ و $B(a)$ را نخستین رقم عدد a (رقم یکان) و رقم سمت چپ آن (واحد رقم ردیف بالاتر) می‌گیریم. با این نامگذاری می‌توانیم، رابطه‌های (۴´) تا (۷´) را به این صورت بنویسیم:

$$\tau([f]) = \tau([g]) + \tau([h]) \qquad (۴´´)$$

$$B([f]) = B([g])B([h]) \qquad (۵´´)$$

$$A([f]) = A([g])A([h]) \qquad (۶´´)$$

$$\sigma([f]) = \sigma([g])\sigma([h]) \qquad (۷´´)$$

که از آن‌جا، خیلی زود به قانون زیر می‌رسیم:

قانون انتخاب: برای تشکیل زوج (h و g)، بخشیاب‌ها متمم یکدیگر از چندجمله‌ای f، باید تنها از آن زوج‌های (a و b) که بخشیاب‌های متمم عدد $[f]$ هستند و برای آن‌ها این رابطه‌ها برقرار است، استفاده کرد:

$$\tau([f]) = \tau(a) + \tau(b), \qquad (۴)$$

$$B([f]) = B(a)B(b), \qquad (۵)$$

$$A([f]) = A(a)A(b), \qquad (۶)$$

$$\sigma([f]) = \sigma(a)\sigma(b) \qquad (۷)$$

برقراری رابطه‌های (۴) و (۵) و (۶) را می‌توان «با نخستین نگاه»، از برابری $ab = [f]$ نتیجه گرفت. تحقیق رابطه‌ی (۷) کمی دشوارتر است، ولی حتی این رابطه را هم می‌توان «در ذهن» نتیجه گرفت.

رابطه‌های (۴´´) تا (۷´´)، نه تنها برای درستی برابری (۲)

لازم‌اند، بلکه کافی هم هستند. به جز این، این قضیه هم درست است:

قضیه‌ی ۲: چند جمله‌ای‌های g و h، بخشیاب‌های متمم a و b از عددهای [f]، تنها وقتی بخشیاب‌های متمم یکدیگر از چندجمله‌ای f هستند که رابطه‌ی (۷) برقرار باشد.

اثبات. چندجمله‌ای $f = gh$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید:

$$F = A_N x^N + A_{N-1}x^{N-1} + \cdots + A_1 x + A_0$$

همچنین فرض کنید، همچون قبل داشته باشیم:

$$f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$g = b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

$$h = c_q x^q + c_{q-1}x^{q-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

بنابراین: $N = p + q$. بنابر قانون ضرب چندجمله‌ای‌ها، هر ضریب A_k (k برابر ۰، ۱، ...، N) از چندجمله‌ای F برابر است با مجموع همه‌ی حاصل‌ضرب‌های $b_i c_j$، که در آن: $i + j = k$. به عنوان نمونه:

$$A_0 = b_0 c_0$$

$A_1 = b_1 c_0 + b_0 c_1$ و غیره

از طرف دیگر، بنابر شرط: $[f] = [g].[h]$، یعنی:

$$(\overline{a_n \cdots a_0})_m = (\overline{b_p \cdots b_0})_m \cdot (\overline{c_q \cdots c_0})_m$$

با توجه به قانون ضرب عددهای چندرقمی، برای محاسبه‌ی رقم a_0، واحد حاصل ضرب، باید رقم‌های b_0 و c_0 را در هم ضرب کرد و از حاصل ضرب b_0c_0 رقم واحد بالاتر («دهگان») را کم کرد. بنابراین، اگر در حاصل ضرب b_0c_0 به اندازه‌ی ε_0 «دهگان» داشته باشیم، آن‌وقت:

$$a_0 = b_0 c_0 - m\varepsilon_0 \Rightarrow a_0 = A_0 - m\varepsilon_0 \qquad (8_0)$$

سپس عدد «دهگان» حاصل ضرب برابر است با مجموع $b_1c_0 + b_0c_1 = A_1$، به اضافه‌ی عدد «دهگان» ε_0 که بعد از ضرب واحدها به دست آمده است. بنابراین، «رقم دهگان» از عدد $A_1 + \varepsilon_0$ به دست می‌آید، بعد از کم کردن «صدگان» آن. به زبان دیگر:

$$a_1 = A_1 + \varepsilon_0 - m\varepsilon_1 \qquad (8_1)$$

که در آن، ε_1 عددی نامنفی و درست است. به همین ترتیب:

$$a_2 = A_2 + \varepsilon_1 - m\varepsilon_2 \qquad (8_2)$$

و به طور کلی، برای $k = 0, 1, 2, \cdots, N$:

$$a_k = A_k + \varepsilon_{k-1} - m\varepsilon_k \qquad (8_k)$$

و در حالت خاص:

$$a_N = A_N + \varepsilon_{N-1} - m\varepsilon_N \qquad (8_N)$$

(به این ترتیب، به این نتیجه می‌رسیم که: $N \le n$.)

آنچه مربوط به رقم‌های از a_{N+1} تا a_n می‌شود، اگر این رقم‌ها وجود داشته باشند، یعنی $n > N$ باشد، آن‌ها رقم‌های عدد ε_N هستند (در مبنای عددشماری m):

$$\varepsilon_N = a_n m^{n-N} + \cdots + a_{N+2} m + a_{N+1} \qquad (9)$$

اگر برابری‌های (8_0) تا (8_N) را با هم جمع کنیم، به دست می‌آید:

$$a_0 + \cdots + a_n = (A_0 + \cdots + A_N) - (m-1)(\varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_{N-1}) - m\varepsilon_N$$

عدد $a_{N+1} + \cdots + a_n$ را به دو طرف این برابری اضافه می‌کنیم و برابری (۹) را در نظر می‌گیریم و به این رابطه می‌رسیم:

$$a_0 + \cdots + a_n = (A_0 + \cdots + A_N) - (m-1)(\varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_N) - \left[a_n(m^{n-N-1} - 1) + \cdots + a_{N+2}(m-1)\right]$$

ولی:

$$a_0 + \cdots + a_n = f(1) = \sigma([f])$$

و مشابه آن:

$$A_0 + \cdots + A_N = F(1) = g(1)h(1) = \sigma([g])\sigma([h]) = \sigma(a)\sigma(b)$$

بنابراین، با توجه به شرط:

$$a_0 + \cdots + a_n = A_0 + \cdots + A_N$$

و به این دلیل که:

$$(m-1)(\varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_N) + \left[a_n(m^{n-N-1} - 1) + \cdots + a_{N-2}(m-1)\right] = 0$$

که تنها به ازای:

$$\varepsilon_0 = \cdots = \varepsilon_{N-1} = \varepsilon_N = 0$$

برقرار است (که به معنای $a_{N+1} = \cdots = a_n = 0$ است).

به این ترتیب ثابت شد، با تغییر عددهای $a = [g]$ و $b = [h]$، «جابه‌جایی دهگان‌ها» پیش نمی‌آید؛ یعنی:

$$N = n$$

$$a_0 = A_0,\ a_1 = A_1,\ \ldots,\ a_n = A_n$$

قضیه‌ی ۲ به طور کامل ثابت شد. اثبات این قضیه به این معناست که: زوج‌های (a,b) که متمم یکدیگر از عدد $[f]$ هستند و درنتیجه‌ی استفاده از قاعده‌ی بالا به دست می‌آیند، به تغییر زوج‌های (g,h) که بخشیاب‌های متمم چندجمله‌ای f را معین می‌کنند، منجر نمی‌شوند. به زبان دیگر، برای این زوج‌ها، آزمایش $f = gh$ لزومی ندارد.

یادداشت: می‌دانیم، دو چندجمله‌ای درجه‌ی n، تنها وقتی بر هم منطبق هستند که در $n + 1$ نقطه مشترک باشند. با توجه به قضیه‌ی ۲، برای منطبق بودن چندجمله‌ای‌های f و $f = gh$ کافی است (بدون توجه به درجه‌ی آن‌ها) این چندجمله‌ای‌ها در دو نقطه‌ی $x = 1$ و $x = m$ یکسان باشند.

چند مثال. برای این‌که این روش را روشن کنیم، چند نمونه‌ی ساده ولی به اندازه‌ی کافی روشن‌کننده می‌آوریم.

مثال ۱. همه‌ی بخشیاب‌های این چندجمله‌ای مثبت را پیدا کنید:

$$f = 6x^6 + 7x^5 + 4x^2 + x + 7$$

ارتفاع این چندجمله‌ای برابر است با ۷، به نحوی که می‌توانیم m را برابر ۱۰ بگیریم. ولی به سادگی دیده می‌شود (برای نمونه از روی جدول عددهای اول) که عدد:

$$f(10) = 6700417$$

عددی اول است. بنابراین، این چندجمله‌ای بخشیاب‌های مثبت ندارد.

مثال ۲. مطلوب است همه‌ی بخشیاب‌های مثبت این چندجمله‌ای

$$f = 2x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 5x + 5$$

در این‌جا هم می‌توانیم $m = 10$ بگیریم. عدد:

$$f(10) = 255855$$

به این صورت، به عامل‌های اول تجزیه می‌شود:

$$255855 = 3 \times 5 \times 37 \times 461$$

بنابراین، می‌توان به پنج امکان تجزیه‌ی عدد $f(10)$ به حاصل‌ضرب دو بخشیاب بزرگ‌تر از ۱۰ رسید:

$$\begin{aligned} f(10) &= 15 \times 17057 \\ &= 111 \times 2305 \\ &= 185 \times 1383 \\ &= 37 \times 6915 \\ &= 461 \times 555 \end{aligned}$$

باید این شرط‌ها برقرار باشد:

$$A([f]) = A(a)A(b), \quad B([f]) = B(a)B(b)$$

که تنها تجزیه‌ی دوم قابل پذیرش است. این تجزیه برای کافی بودن شرط هم درست است:

$$3+5+5+8+5+5 = (1+1+1)(2+3+5)$$

$$(30 = 3 \times 10)$$

بنابراین: $(x^2+x+1)(2x^3+3x^2+5)$. به جز این، f بخشیاب‌های مثبت دیگری ندارد.

مثال ۳. این چندجمله‌ای را به ضرب عامل‌ها تجزیه کنید:

$$f = x^5 - 5x^4 + 13x^3 - 22x^2 + 27x - 20$$

این چندجمله‌ای مثبت نیست. ولی با ضرب آن در ۱- و تبدیل x به x-، به چندجمله‌ای مثبت تبدیل می‌شود. درنتیجه به این چندجمله‌ای می‌رسیم:

$$g = x^5 + 5x^4 + 13x^3 + 22x^2 + 27x + 20$$

برای تجزیه‌ی این چندجمله‌ای به صورت ضرب عامل‌های خود، می‌توان از دو روش استفاده کرد: نخست می‌توان $m = 100$ گرفت (باید در نظر داشت، به عنوان m بهتر است از 10^k استفاده کنیم که ساده‌تر می‌توان آن را به مبنای ده تبدیل کرد). پس از اندکی محاسبه، می‌توانیم برای عدد:

$$g(100) = 10513222720$$

این تجزیه را پیدا کنیم:

$$g(100) = 10304 \times 1020305$$

برای این که به دستگاه عددشماری با مبنای ۱۰۰ بپردازیم، کافی است این عددها را از راست به چپ به «مرزهای» دورقمی تقسیم کنیم:

$$1,05,13,22,27,20 = 1,03,04 \times 1,02,03,05$$

شرط کافی را آزمایش می‌کنیم:

$$(1+05+13+22+27+20)$$
$$= (1+03+04)(1+02+03+05)$$
$$(88 = 8 \times 11)$$

بنابراین:

$$x^5 + 5x^4 + 13x^3 + 22x^2 + 27x + 20$$
$$= (x^2 + 3x + 4)(x^3 + 2x^2 + 3x + 5)$$

و درنتیجه:

$$x^5 - 5x^4 + 13x^3 - 22x^2 + 27x - 20$$
$$= (x^2 - 3x + 4)(x^3 - 2x^2 + 3x - 5)$$

اگر بخواهیم از عددهای بزرگ پرهیز کنیم، می‌توان m را عدد کوچک‌تری گرفت. برای نمونه می‌توان فرض کرد $m = 30$. در این صورت خواهیم داشت:

$$g(30) = 28721630 = 2 \times 5 \times 7 \times 71 \times 5779$$

بدون زحمت روشن می‌شود که چندجمله‌ای g بخشیاب‌های درجه‌ی اول ندارد. بنابراین برای عدد $g(30)$ باید بخشیاب‌های متمم بزرگ‌تر از عدد 30^2، یعنی ۹۰۰ را انتخاب کرد. این زوج بخشیاب‌ها وجود دارند. به سادگی روشن می‌شود که تنها سه تا هستند:

$$g(30) = 5779 \times 4970$$
$$= 11558 \times 2485$$
$$= 28895 \times 994$$

شرط لازم (۶) را آزمایش می‌کنیم. یادآور می‌شویم، رقم سمت راست $A(a)$ از عدد a در دستگاه عددشماری با مبنای ۳۰ برابر است با باقی‌مانده‌ی تقسیم این عدد بر ۳۰ (روشن است که این یادآوری جنبه‌ی کلی دارد)، و با انجام این تقسیم خیلی زود به دست می‌آوریم:

$$A(5779) = 19, \quad A(4970) = 20,$$
$$A(11558) = 8, \quad A(2485) = 25,$$
$$A(28895) = 15, \quad A(994) = 4,$$
$$A(28721630) = 20$$

شرط (۶)، تنها برای زوج سوم صادق است. برای این زوج، شرط کافی (۷) را آزمایش می‌کنیم. عددهای ۲۸۸۹۵ و ۹۹۴ را در دستگاه عددشماری به مبنای ۳۰ قرار می‌دهیم و به دست می‌آید:

$$28895 = (1235)_{30}$$
$$994 = (134)_{30}$$

بنابراین:

$$\sigma(28895) = 11$$
$$\sigma(994) = 8$$

در عین حال، عدد $\sigma([g])$ برابر است با مجموع ضریب‌های چندجمله‌ای g، یعنی ۸۸. به این ترتیب، شرط (۷) هم صادق است و درنتیجه:

$$g = (x^3 + 2x^2 + 3x + 5)(x^2 + 3x + 4)$$

و دوباره به همان تجزیه حالت پیش می‌رسیم.

تعیین نوع مقطع مخروطی

برای دانش‌آموزان دوره‌ی پیش‌دانشگاهی

● حسین کریمی

در کتاب هندسه‌ی تحلیلی و جبر خطی پیش‌دانشگاهی دیدیم که معادله‌ی هر مقطع مخروطی در حالت کلی به صورت زیر است:

$$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

اگر $b^2-4ac>0$، آن‌گاه مکان عبارت است از دو خط متقاطع و یا هذلولی.

اگر $b^2-4ac<0$، آن‌گاه مکان عبارت است از تهی، نقطه، دایره و یا بیضی.

اگر $b^2-4ac=0$، آن‌گاه مکان عبارت است از تهی، خط، دو خط موازی، کل صفحه و یا سهمی.

حال می‌خواهیم با توجه به علامت b^2-4ac و وضعیت مرکز تقارن، نوع مکان را دقیقاً مشخص کنیم. برای این منظور، ابتدا به نکات زیر توجه می‌کنیم:

نکته‌ی ۱: اگر $b\neq 0$، آن‌گاه مکان نه دایره است و نه کل صفحه.

نکته‌ی ۲: اگر K نقطه‌ای دلخواه از مکان باشد و قرینه‌ی K نسبت به A، نقطه‌ای از همان مکان، آن‌گاه نقطه‌ی A مرکز تقارن آن مکان خواهد بود.

نکته‌ی ۳: نقطه‌ی $A\left(\alpha=\dfrac{2cd-be}{b^2-4ac},\beta=\dfrac{2ae-bd}{b^2-4ac}\right)$ مرکز تقارن $f(x,y)=0$ است که البته با انجام محاسباتی کمی خسته کننده، می‌توان درستی آن را تحقیق کرد. یعنی می‌توان نشان داد: $f(2\alpha-x,2\beta-y)=f(x,y)$ بدیهی است که $b^2-4ac\neq 0$ فرض شده است.

نکته‌ی ۴: اگر دو خط $\Delta:f'_x=0$ و $\Delta':f'_y=0$ به موازات هم نباشند، $(\Delta':bx+2cy+e=0,\Delta:2ax+by+d=0)$ یعنی $b^2-4ac\neq 0$، نقطه‌ی تلاقی آن‌ها همان نقطه‌ی A (که در نکته‌ی ۳ قید شد) است.

نکته‌ی۵: اگر دو خط $\Delta:f'_x=0$ و $\Delta':f'_y=0$ به موازات هم باشند $(b^2-4ac=0)$ نقطه‌ی منحصر به فرد A به عنوان مرکز تقارن وجود نخواهد داشت. در این صورت یکی از دو وضعیت زیر را داریم:

I) اگر $\Delta\neq\Delta'$، آن‌گاه مکان فاقد مرکز تقارن خواهد بود.

II) اگر $\Delta=\Delta'$، آن‌گاه مکان بی‌شمار مرکز تقارن خواهد داشت که هر نقطه از خط Δ را می‌توان به عنوان مرکز تقارن برای مکان در نظر گرفت.

نکته‌ی۶: نقطه، دو خط متقاطع، هذلولی و بیضی، یک مرکز تقارن دارند. تهی، یک خط و دو خط موازی، دارای بی‌شمار مرکز تقارن هستند. در مورد تهی، به انتفای مقدم در ترکیب شرطی نکته‌ی ۲ استناد می‌کنیم. در مورد یک خط، هر نقطه‌ی واقع بر آن، مرکز تقارن محسوب می‌شود. در مورد دو خط موازی، هر نقطه‌ی واقع بر خطی که موازی با آن دو و به یک فاصله از آن دو خط باشد را به عنوان مرکز تقارن می‌پذیریم. و بدیهی است که سهمی فاقد مرکز تقارن است.

اکنون نوع مکان‌ها را به طور دقیق معرفی می‌کنیم:

حالت اول. اگر $b^2-4ac>0$ و $f(\alpha,\beta)=0$ ، آن‌گاه مکان، دو خط متقاطع است؛ چرا که در این حالت، مرکز تقارن روی دو خط متقاطع واقع است.

مثال۱: نوع مکان هندسی به معادله‌ی $f(x,y)=10x^2+13xy-3y^2+7x+19y-6=0$ را تعیین کنید.

حل:

$$A:\begin{cases}\Delta: f'_x=0\\ \Delta': f'_y=0\end{cases}\Rightarrow A\begin{cases}20x+13y+7=0\\ 13x-6y+19=0\end{cases}\Rightarrow A(-1,1)$$

$$b^2-4ac=289>0$$

$$f(-1,1)=10-13-3-7+19-6=0$$

در نتیجه مکان دو خط متقاطع است.

حالت دوم. اگر $b^2-4ac>0$ و $f(\alpha,\beta)\neq 0$ ، آن‌گاه مکان یک هذلولی است؛ چرا که در این حالت، مرکز تقارن بر هذلولی واقع نیست و روی مکان قرار ندارد.

مثال۲: نوع مکان هندسی به معادله‌ی $f(x,y)=12x^2-5xy-3y^2-73x-20y+16=0$ را تعیین کنید.

حل:

$$A:\begin{cases}\Delta: f'_x=0\\ \Delta': f'_y=0\end{cases}\Rightarrow A\begin{cases}24x-5y-73=0\\ -5x-6y-20=0\end{cases}\Rightarrow A(2,-5)$$

$$b^2-4ac=169>0$$

$$f(2,-5)=48+50-75-146+100+16=-7\neq 0$$

در نتیجه مکان یک هذلولی است.

حالت سوم. اگر $b^2-4ac<0$ و $f(\alpha,\beta)<0$ ، آن‌گاه مکان یک بیضی است؛ چرا که در این حالت مرکز تقارن درون منحنی است.

مثال۳: نوع مکان هندسی به معادله‌ی زیر را تعیین کنید.

$$f(x,y)=3x^2+7xy+5y^2-20x-27y+11=0$$

حل:

$$A:\begin{cases}\Delta: f'_x=0\\ \Delta': f'_y=0\end{cases}\Rightarrow A\begin{cases}6x+7y-20=0\\ 7x+10y-27=0\end{cases}\Rightarrow A(1,2)$$

$$b^2-4ac=-11<0$$

$$f(1,2)=3+14+20-20-54+11=-26<0$$

در نتیجه مکان یک بیضی است.

حالت چهارم. اگر $b^2-4ac<0$ و $f(\alpha,\beta)=0$ ، آن‌گاه مکان یک نقطه است؛ چرا که در این حالت، مرکز تقارن روی مکان واقع است و مکان همان نقطه‌ی A است.

مثال۴: نوع مکان هندسی به معادله‌ی زیر را تعیین کنید.

$$f(x,y)=5x^2+10xy+25y^2-10x+70y+85=0$$

حل:

$$A:\begin{cases}\Delta: f'_x=0\\ \Delta': f'_y=0\end{cases}\Rightarrow A\begin{cases}10x+10y-10=0\\ 10x+50y+70=0\end{cases}\Rightarrow A(3,-2)$$

$$b^2-4ac=-400<0$$

$$f(3,-2)=45-60+100-30-140+85=0$$

در نتیجه مکان همان نقطه‌ی $A(3,-2)$ است.

حالت پنجم. اگر $b^2-4ac<0$ و $f(\alpha,\beta)>0$ ، آن‌گاه مکان تهی است؛ چرا که در این حالت مرکز تقارن خارج مکان واقع است.

مثال۵: نوع مکان هندسی به معادله‌ی زیر را تعیین کنید.

$$f(x,y)=13x^2+26xy+26y^2+26x+78y+66=0$$

حل:

$$A:\begin{cases}\Delta: f'_x=0\\ \Delta': f'_y=0\end{cases}\Rightarrow A\begin{cases}26x+26y+26=0\\ 26x+52y+78=0\end{cases}\Rightarrow A(1,-2)$$

$$b^2-4ac=-676<0$$

$$f(1,-2)=13-52+104+26-156+66=1>0$$

در نتیجه مکان تهی است.

حالت ششم. اگر $b^2-4ac=0$ و $\Delta\neq\Delta'$ ، آن‌گاه مکان یک سهمی است؛ چرا که در این حالت دو خط متمایز و موازی Δ و Δ' را داریم که فاقد نقطه‌ی مشترکند. یعنی نقطه‌ی A به عنوان مرکز تقارن وجود ندارد و می‌دانیم که سهمی نیز فاقد مرکز تقارن است.

مثال۶: نوع مکان هندسی به معادله‌ی زیر را تعیین کنید.

$$f(x,y)=4x^2+4xy+y^2-x+7y+11=0$$

حل:

$$\begin{cases}\Delta: f'_x=0\\ \Delta': f'_y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\Delta: 8x+4y-1=0\\ \Delta': 4x+2y+7=0\end{cases}$$

$$b^2-4ac=16-16=0$$

$\Delta\parallel\Delta'\ ,\ \Delta\neq\Delta'\Rightarrow$ مکان یک سهمی است

حالت هفتم. اگر $b^2-4ac=0$ و $\Delta=\Delta'$ و $f(x_B,y_B)>0$ که در آن B نقطه‌ی دلخواهی از Δ است، آن‌گاه مکان تهی

است؛ چرا که در این حالت مرکز تقارن خارج مکان واقع است.

مثال۷: نوع مکان هندسی به معادله‌ی زیر را تعیین کنید.

$$f(x,y)=x^2+6xy+9y^2+4x+12y+7=0$$

حل:

$$\begin{cases}\Delta: f'_x=0\\ \Delta': f'_y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\Delta: 2x+6y+4=0\\ \Delta': 6x+18y+12=0\end{cases}\Rightarrow \Delta=\Delta'$$

$B(1,-1)\in\Delta$ و

$b^2-4ac=36-36=0$

$f(1,-1)=1-6+9+4-12+7=3>0 \Rightarrow$ مکان تهی است

حالت هشتم. اگر $b^2-4ac=0$ و $\Delta=\Delta'$ و $f(x_B,y_B)=0$ که در آن B نقطه‌ی دلخواهی از Δ است، آن‌گاه مکان یک خط است که همان خط Δ است.

مثال ۸: نوع مکان هندسی به معادله‌ی زیر را تعیین کنید.

$$f(x,y)=9x^2+12xy+4y^2-30x-20y+25=0$$

حل:

$$\begin{cases}\Delta: f'_x=0\\ \Delta': f'_y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\Delta: 18x+12y-30=0\\ \Delta': 12x+8y+20=0\end{cases}\Rightarrow \Delta=\Delta'$$

$B(1,1)\in\Delta$ و

$b^2-4ac=144-144=0$

$f(1,1)=9+12+4-30-20+25=0\Rightarrow \Delta: 3x+2y=5$

در نتیجه مکان یک خط است.

حالت نهم. اگر $b^2-4ac=0$ و $\Delta=\Delta'$ و $f(x_B,y_B)<0$ که در آن B نقطه‌ی دلخواهی از Δ است، آن‌گاه مکان دو خط موازی است؛ چرا که در این حالت تمام مرکز تقارن‌ها (واقع بر Δ) در ناحیه‌ی بین دو خط موازی و به یک فاصله از آن دو خط واقعند.

مثال۹: نوع مکان هندسی به معادله‌ی زیر را تعیین کنید.

$$f(x,y)=4x^2-12xy+9y^2-12x+18y-7=0$$

حل:

$$\begin{cases}\Delta: f'_x=0\\ \Delta': f'_y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\Delta: 8x-12y-12=0\\ \Delta': -12x+18y+18=0\end{cases}\Rightarrow \Delta=\Delta'$$

$B(0,-1)\in\Delta$ و

$b^2-4ac=144-144=0$

$f(0,-1)=0-0+9-0-18-7=-16<0$

در نتیجه مکان دو خط موازی است.

بررسی نکته‌ی ۴

می‌دانیم $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$

مقدار $y'=-\dfrac{f'_x}{f'_y}=\dfrac{2ax+by+d}{bx+2cy+e}$ به ازای طول و عرض نقطه‌ی M واقع بر $f(x,y)=0$، نشان‌دهنده‌ی شیب خط مماس بر مکان است که از M رسم می‌شود. و نیز می‌دانیم، با شرط $b^2-4ac\neq 0$، $f(x,y)=0$ دارای مرکز تقارن A است (نکته‌ی۳). پس اگر شیب خط مماس در نقطه‌ی M برابر با m باشد، نقطه‌ی دیگری مانند M' از $f(x,y)=0$ وجود دارد که شیب خط مماس در آن نقطه نیز برابر m است.

حال فرض کنیم M نقطه‌ای از مکان باشد، به‌طوری که خط مماس در آن نقطه به موازات محور xهاست ($y'=0$) و M' را قرینه‌ی نقطه‌ی M نسبت به A فرض می‌کنیم. پس در آن نقطه نیز شیب خط مماس برابر ۰ است و این بدین معنی است که مقادیر طول و عرض نقاط M و M' در معادله‌ی $2ax+by+d=0$ و یا همان $f'_x=0$ صدق می‌کنند و چون A بین M و M' واقع است و در این‌جا $f'_x=0$ معرف یک خط است، پس $A\in f'_x=0$.

اکنون فرض کنیم N و به تبع آن N' نقاطی از $f(x,y)=0$ باشند که مماس بر مکان، در آن نقاط موازی محور yها باشد؛ یعنی به ازای طول و عرض آن نقاط، y' تعریف نشده باشد، یعنی $f'_y=0$. پس در صورت وجود N و N'، مقادیر طول و عرض آن نقاط در معادله‌ی $bx+2cy+d=0$ یعنی در $f'_y=0$ صدق می‌کند و چون A بین N و N' واقع است و در این‌جا $f'_y=0$ معرف یک خط است، پس $A\in f'_y=0$.

نتیجه: اگر $f'_x=0$ و $f'_y=0$ متقاطع باشند، از حل دستگاه $\begin{cases}\Delta: f'_x=0\\ \Delta': f'_y=0\end{cases}$ می‌توان مختصات مرکز تقارن $f(x,y)=0$ را به‌دست آورد.

در واقع توجه شود که $f'_x=0$ معرف شیب خط مماس نیست، بلکه معرف چگونگی ارتباط بین طول و عرض نقاطی از $f(x,y)=0$ است که در آن نقاط، خط مماس بر مکان، موازی محور xهاست. به همین ترتیب، $f'_y=0$ معرف چگونگی ارتباط بین طول و عرض نقاطی از $f(x,y)=0$ است که در آن نقاط خط مماس بر مکان، موازی محور yهاست.

مسائل برای حل

ریاضیات ۱

● میر شهرام صدر

۱. اگر داشته باشیم $M = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ مجموعه مرجع و $A = \{a,b,c,d,e\}$ و $B = \{a,c,e,f\}$ و $C = \{a,b,e\}$، مطلوب است:

الف ـ مجموعه $(A \cup B) - (A \cap C)$ را بنویسید.

ب ـ درستی رابطه $A \cup (B \cap C)' = A \cup B' \cup C'$ را تحقیق کنید.

۲. مجموعه $A = \{3k - 4 \mid 2 \leq k < 5, k \in \mathbb{N}\}$ را با تمام اعضایش مشخص کنید.

۳. ب.م.م دو عدد ۲۰۰ و ۱۹۶ چیست؟

۴. کسر متعارفی $0/12\overline{873}$ چیست؟

۵. نماد علمی اعداد زیر را بنویسید:

الف) 5823493×10^{3} ب) $0/0000000721$

۶. تقسیم کنید.

$$(x^3 + x^2 + 2yx^2 + 3yx + 2y^2) \div (x + 2y)$$

۷. مقدار عبارت زیر را به ازای $a = 1$ و $b = 2$ و $c = 3$ به‌دست آورید:

$$2a - c(b^2 - a)$$

۸. جای خالی را پر کنید. $(2x - ...)^2 = ... - 20x + ...$

۹. حاصل عبارت‌های زیر را بیابید:

الف) $(1 - x)(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)$

ب) $\dfrac{a + 2}{a - 3} + \dfrac{3}{a + 2}$

۱۰. اگر $x - \dfrac{1}{x} = 3$ حاصل عبارت $x^3 - \dfrac{1}{x^3}$ چیست؟

۱۱. تجزیه کنید.

الف) $12x^2 + 10x - 8$

ب) $(x + 2)^3 - 6x(x + 2) - 7$

ج) $x^5 + x^4 + 1$

۱۲. دامنه عبارت گویای زیر چیست؟

$$\frac{x - 5}{x^3 - 36x}$$

۱۳. عبارت زیر را خلاصه کنید.

$$\frac{\dfrac{x^2 + y^2}{xy} + 2}{\dfrac{x^2 - y^2}{2xy}}$$

ریاضیات ۲

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

۱. این عبارت را تعیین علامت کنید:

$$p = \frac{3}{x + 1} - \frac{4}{x - 1}$$

۲. حدود m را چنان بیابید که معادله‌ی درجه دوم زیر دارای ریشه‌ی مضاعف باشد:

$$x^2 + 2mx + 2m = 0$$

۳. حدود k را چنان تعیین کنید که عبارت درجه دوم داده شده همواره منفی باشد:

$$p = (2k - 4)x^2 + 4k - 4$$

۴. نامعادله را حل کنید:

$$\frac{-x^2(-x^2 + 1)(x^2 - 3x + 2)}{(x^2 + 1)(x^3 - 1)(x^2 - 3x)} \geq 0$$

۵. معادله را حل کنید:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 2} - \frac{x}{x + 2} = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

۶. این معادله‌ی اصم را حل کنید:

$$\sqrt{x - 3} + \sqrt{x - 4} = 1$$

۷. اگر $\sqrt{3}$ ریشه‌ی معادله‌ی درجه دوم زیر باشد، مقدار k را بیابید:

$$kx^2 - \sqrt{3}x - 6 = 0$$

۸. تابع $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر مفروض است:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 1} & x \geq 1 \\ x + 1 & x < 1 \end{cases}$$

الف) برد تابع را بیابید.

ب) نسبت $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ را در بازه‌ی (۱ و ۳-) بیابید.

ج) ابتدا ضابطه‌ی تابع fof را بیابید و سپس دامنه‌ی آن را تعیین کنید.

د) یک به یکی و پوشایی تابع f را بررسی کنید.

هـ) آیا تابع در بازه‌ی $[1, +\infty)$ معکوس‌پذیر است؟ در صورت معکوس‌پذیری، ضابطه‌ی تابع معکوس f^{-1} را بیابید.

۹. به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع با ضابطه‌ی زیر، همواره بالای محور xها واقع است؟

$$y = (m - 2)x^2 + \sqrt{3}x + m - 1$$

۱۰. از رابطه‌ی زیر f(x) را بیابید و مشخص کنید تابع f زوج است یا فرد؟

$$x^2 f(x) + 3f(-x) = 4x^4$$

هندسه ی ۱

● هوشنگ شرقی

۱ . به کمک استدلال استنتاجی ثابت کنید :

الف) مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث مساوی 180° است.

ب) مجموع سه زاویه‌ی خارجی هر مثلث برابر 360° است.

۲ . ثابت کنید در هر متوازی‌الاضلاع قطرها همدیگر را نصف می‌کنند و برعکس (یعنی هر چهار ضلعی که قطرهای آن همدیگر را نصف کنند، متوازی‌الاضلاع است).

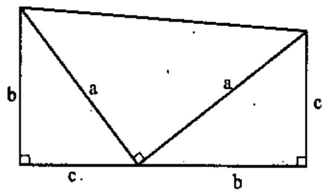
۳ . ثابت کنید در هر مثلث متساوی‌الساقین نیم‌سازهای دو زاویه‌ی مجاور به دو ساق با یکدیگر برابرند.

۴ . ثابت کنید مساحت هر لوزی برابر با نصف حاصل ضرب دو قطر آن است و سپس به کمک این موضوع ثابت کنید، در هر مربع طول قطر $\sqrt{2}$ برابر طول ضلع مربع است.

۵ . در مثلث ABC نیمسازهای دو زاویه‌ی B و C با یکدیگر زاویه‌ی 110° ساخته‌اند. اندازه‌ی زاویه‌ی A را به دست آورید.

۶ . ثابت کنید هر مثلثی که در آن نیمساز زاویه‌ی خارجی یک رأس موازی ضلع مقابل به آن رأس باشد، مثلث متساوی‌الساقین است.

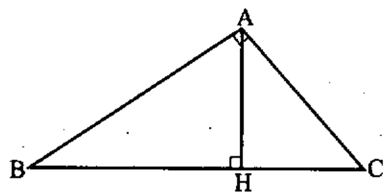
۷ . در شکل ذیل به کمک مساحت‌ها، قضیه‌ی فیثاغورس را در مثلث قائم‌الزاویه ثابت کنید.



۸ . در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\hat{A}=90^\circ$) ثابت کنید :

الف) $AC^2 = BC.CH$

ب) $AH^2 = BH.CH$



۹ . ثابت کنید مساحت هر مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر است با $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

۱۰ . در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\hat{A}=90^\circ$)، میانه‌های BM و CN را رسم می‌کنیم. ثابت کنید :

$$BM^2 + CN^2 = \frac{5}{4}BC^2$$

حسابان ۱

● احمد قندهاری

۱ . دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی زیر را بیابید؟

$$f(x) = \sqrt{2 - \sqrt{8 - x^2}}$$

۲ . نشان دهید تابع با ضابطه‌ی زیر، تابعی زوج است.

$$f(x) = \left[\frac{1}{1+x}\right] + \left[\frac{3-2x}{1-x}\right]$$

۳ . اگر f تابعی یک به یک باشد و $g(x) = \frac{2+f(x)}{2-f(x)}$، آن‌گاه ضابطه‌ی $g^{-1}(x)$ را بیابید.

۴ . اگر $x = 2$ یکی از صفرهای تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^3 - 2(\sqrt{2}+1)x^2 + (4\sqrt{2}+1)x - 2$ باشد، صفرهای دیگر تابع را بیابید.

۵ . اگر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ax^2 + bx + c$ محور yها را در نقطه‌ای به عرض -2 قطع کند و $M(2,-6)$ می‌نیمم نسبی تابع باشد، a، b و c را بیابید.

۶ . در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 5x - 2$، اگر $x \to 1^+$، آن‌گاه $f(x) \to 3$. اگر بخواهیم $|f(x) - 3| < \frac{1}{20}$، آن‌گاه حدود x را بیابید.

۷ . اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 5x + m = 0$ باشند و داشته باشیم $\alpha^2 + \beta^2 = 29$، مقدار عددی $(\alpha^3 + \beta^3)$ را بیابید.

۸ . از رابطه‌ی زیر مقدار عددی x را بیابید.

$$\tan 135^\circ - \cos 330^\circ = x \sin 120^\circ \cot 240^\circ$$

۹ . مطلوب است محاسبه‌ی :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3 + x - 2}{\sqrt{3x+1} - 2}$$

مسأله‌ی ۱۰ . اگر $x = 1$ و $x = \frac{5}{2}$ و $y = \frac{1}{2}$ معادله‌های مجانب‌های نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + 1}{cx^2 - 14x + d}$ باشند، a، b و c را بیابید.

جبر و احتمال

● هوشنگ شرقی

۱. به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی، درستی روابط زیر را برای هر عدد طبیعی n اثبات کنید:

الف) $\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}=\frac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$

ب) $n\geq 2: \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}>\frac{13}{24}$

ج) $n^3-n=6r \quad (r\in Z)$

۲. اولاً، با استدلال استنتاجی ثابت کنید، حاصل ضرب هر دو عدد گویا، عددی است گویا. ثانیاً، نشان دهید حاصل‌ضرب هر عدد گویای غیر صفر در هر عدد گنگ، عددی است گنگ. ثالثاً، با یک مثال نقض بررسی کنید که آیا حاصل‌ضرب دو عدد گنگ همواره عددی گنگ است یا خیر.

۳. به کمک استدلال برگشتی ثابت کنید:

$(a^4+b^4)(a^5+b^5)\leq 2(a^9+b^9)$

(a و b عددهای حقیقی و مثبت هستند.)

۴. S یک مجموعه‌ی ۷۰ عضوی از اعداد طبیعی است. ثابت کنید، اگر اعضای S را بر ۲۰ تقسیم کنیم، لااقل ۴ عضو دارای یک باقی مانده‌اند. حداقل تعداد اعضای S چه قدر باشد تا بتوان گفت، لااقل شش عضو دارای یک باقی مانده‌اند؟

۵. x و y و z را طوری پیدا کنید که داشته باشیم:

$\{x+y, x-y, 3\}=\{2, z\}$

هندسه ی ۲

● حسین کریمی

۱. مکان هندسی نقطه‌ای در فضا را که از یک پاره‌خط به فاصله‌ی ۴ باشد، به کمک استدلال استقرایی حدس بزنید و بیان کنید.

۲. در مثلث ABC سه میانه‌ی AM، BN و CP در نقطه‌ی G هم‌رأس هستند. ثابت کنید:

$AM+BN+CP>\frac{3}{4}(AB+AC+BC)$

۳. از مثلث ABC ضلع BC=a و ارتفاع $AH=h_a$ و BC+AC=a+b معلوم هستند. مثلث را رسم کنید.

۴. مثلثی را با معلوم بودن یک ضلع و دو ارتفاع نظیر دو ضلع دیگر رسم کنید.

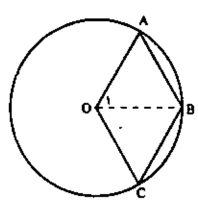
۵. نقطه‌ی D را به دلخواه درون مثلث PAK انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید محیط PDK از محیط PAK کوچک‌تر است.

۶. اگر زاویه‌ی بین دو قطر AC و BD از چهارضلعی دلخواه ABCD را α فرض کنیم، ثابت کنید مساحت ABCD برابر است با: $S=\frac{1}{2}AC.BD.\sin\alpha$.

۷. دایره‌ای به شعاع معلوم R رسم کنید که بر خط معلوم (D) و دایره‌ی مفروض (C′) مماس شود. مسأله چند جواب دارد؟

۸. از مثلث ABC، ضلع BC=8 و زاویه‌ی $A=60°$ و ارتفاع AH=3 داده شده است. اولاً مثلث را رسم کنید. ثانیاً فاصله‌ی مرکز دایره‌ی محیطی مثلث را تا ضلع BC به‌دست آورید.

۹. در شکل، OABC یک متوازی‌الاضلاع است. اندازه‌ی کمان AB چند درجه است؟



۱۰. ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین محیطی به قاعده‌های ۲ و ۱۰ سانتی‌متر مفروض است. مساحت دایره‌ی محیطی آن را تعیین کنید.

پاسخ تشریحی مسائل

ریاضیات ۱

۱. الف) $A\cup B=\{a,b,c,d,e,f\},\ A\cap C=\{a,b,e\}$

$(A\cup B)-(A\cap C)=\{c,d,f\}$

ب) $B\cap C=\{a,e\}\Rightarrow (B\cap C)'=\{b,c,d,f,g\}$

(۱) $\Rightarrow A\cup(B\cap C)'=\{a,b,c,d,e,f,g\}$

$B'=\{b,d,g\},\ C'=\{c,d,f,g\}$

(۲) $\Rightarrow A\cup B'\cup C'=\{a,b,c,d,e,f,g\}$

$(1)=(2)\Rightarrow A\cup(B\cap C)'=A\cup B'\cup C'$

۲. $2\le k<5,\ k\in N\Rightarrow k=2,3,4$

$A=\{3\times 2-4,\ 3\times 3-4,\ 3\times 4-4\}\Rightarrow A=\{2,5,8\}$

۳. $\left.\begin{array}{l}196=2^2\times 7^2\\ 200=2^3\times 5^2\end{array}\right\}\Rightarrow (196,200)=2^2=4$

۴. $x=0/1287387\ldots$

$\Rightarrow 10^2\times x=10^2\times 0/1287387\ldots$

$\Rightarrow 100x=12/873873\ldots$

$\Rightarrow 10^3\times 100x=10^3\times 12/873873\ldots$

$\Rightarrow 100000x=12873/873873\ldots$

$100000x-100x=12873/873873\ldots-12/873873\ldots$

$99900x=12861\Rightarrow x=\dfrac{12861}{99900}$

$x=\dfrac{1429}{11100}$

۵. الف) $5823493\times 10^3=5/823493\times 10^6\times 10^3$

$=5/823493\times 10^9$

ب) $0/0000000721=7/21\times 10^{-7}$

۶.

$$\begin{array}{l|l} x^3+x^2+2yx^2+3yx+2y^2 & x+2y \\ \cline{2-2} \underline{-x^3-2yx^2} & x^2+x+y \\ x^2+3yx+2y^2 & \\ \underline{-x^2-2yx} & \\ yx+2y^2 & \\ \underline{-yx-2y^2} & \\ 0 & \end{array}$$

۷. $2a-c(b^2-a)=2\times 1-3((2)^2-1)=2-3(4-1)$

$=2-9=-7$

۸. $(2x-5)^2=4x^2-20x+25$

۹. الف) $[(1-x)(1+x)](1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$

$=[(1-x^2)(1+x^2)](1+x^4)(1+x^8)$

$=[(1-x^4)(1+x^4)](1+x^8)$

$=(1-x^8)(1+x^8)=1-x^{16}$

ب) $\dfrac{a+2}{a-3}+\dfrac{3}{a+2}=\dfrac{(a+2)^2+3(a-3)}{(a-3)(a+2)}$

$=\dfrac{a^2+4a+4+3a-9}{(a-3)(a+2)}=\dfrac{a^2+7a-5}{(a-3)(a+2)}$

۱۰.

$(x^3-\dfrac{1}{x^3})=(x-\dfrac{1}{x})^3-3(x-\dfrac{1}{x})=3^3-3\times 3=18$

۱۱. الف) $A=12x^2+10x-8$

$\Rightarrow 12A=12(12x^2+10x-8)$

$\Rightarrow 12A=144x^2+10(12x)-96$

$\Rightarrow 12A=(12x+16)(12x-6)$

$\Rightarrow 12A=4(3x+4)\times 3(4x-2)$

$\Rightarrow 12A=12(3x+4)(4x-2)$

$\Rightarrow A=(3x+4)(4x-2)$

ب) $(x+2)^3-6x(x+2)-7$

$=x^3+6x^2+12x+8-6x^2-12x-7=x^3+1$

$=(x+1)(x^2-x+1)$

ج) $x^5+x^4+1=x^5+x^4+1+x^6-x^6$

$=(x^6+x^5+x^4)+(x^6-1)$

$=x^4(x^2+x+1)-(x^3-1)(x^3+1)$

$=x^4(x^2+x+1)-(x-1)(x^2+x+1)(x^3+1)$

$=(x^2+x+1)(x^4-(x-1)(x^3+1))$

$=(x^2+x+1)(x^4-x^4-x+x^3+1)$

$=(x^2+x+1)(x^3-x+1)$

۱۲. $x^3-36x=0\Rightarrow x(x^2-36)=0\Rightarrow x=0$ یا $x^2-36=0$

$\Rightarrow x=0$ یا $(x-6)(x+6)=0$

$\Rightarrow x=0$ یا $x=6$ یا $x=-6\Rightarrow D=R-\{-6,0,6\}$

۱۳.

$$\frac{\dfrac{x^2+y^2}{xy}+2}{\dfrac{x^2-y^2}{2xy}}=\frac{x^2+y^2+2xy}{xy}\div\frac{x^2-y^2}{2xy}=\frac{(x+y)^2}{xy}\times\frac{2xy}{x^2-y^2}$$

$$=\frac{(x+y)^2}{xy}\times\frac{2xy}{(x-y)(x+y)}=\frac{2(x+y)}{(x-y)}$$

۱. $p=\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{4}{x-1}=\dfrac{3(x-1)-4(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{-x-7}{x^2-1}$

$-x-7=0\ ;\ x=-7$ و $x^2-1=0\ ;\ x^2=1\ ;\ x=\pm1$

x		−۷		−۱		۱	
−x−۷	+	۰	−		−		−
x^2-1	+		+	۰	−	۰	+
P	+		−		+		−
		P = ۰		نامعین		نامعین	

$x<-7: p>0\ ;\ -7<x<-1: p<0\ ;\ x\neq\pm1$

$-1<x<1: p>0\ ;\ x>1: p<0\ ;\ x=-7: p=0$

۲. معادله‌ی درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ وقتی ریشه‌ی مضاعف دارد که مبین آن صفر شود:

$x^2+2mx+2m=0$

$\Delta=b^2-4ac=0\ ;\ \Delta=(2m)^2-4(1)(2m)=0\ ;$

$4m^2-8m=0\ ;\ 4m(m-2)=0\ ;\ \boxed{m=0 \text{ یا } m=2}$

۳. عبارت درجه دوم $p=ax^2+bx+c$ وقتی همواره منفی است که داشته باشیم:

$$\begin{cases}a<0\\ \Delta=b^2-4ac<0\end{cases}$$

$a=2k-4<0\ ;\ 2k<4\ ;\ k<2$ و

$\Delta=(4)^2-4(2k-4)(4k-4)<0$

$16-32(k-2)(k-1)<0\ ;\ 1-2(k^2-3k+2)<0\ ;$

$2k^2-6k+3>0$

در این جا باید دستگاه نامعادله‌های زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases}k<2\\ 2k^2-6k+3>0\end{cases}$$

$2k^2-6k+3=0\ ;\ k=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}<k<\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}: 2k^2-6k+3<0$

$k<\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$ یا $k>\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}: 2k^2-6k+3>0$

با توجه به $k<2$، جواب مسأله $k<\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$ است.

۴. برای حل نامعادله کافی است این عبارت را تعیین علامت کنیم:

$p=\dfrac{-x^2(-x^2+1)(x^2-3x+2)}{(x^2+1)(x^3-1)(x^2-3x)}$

$-x^2=0\ ;\ x=0$ (ریشه‌ی مضاعف) و $-x^2+1=0\ ;\ x^2=1\ ;\ x=\pm1$

$x^2-3x+2=0\ ;\ (x-1)(x-2)=0\ ;\ x=1$ یا $x=2$

$x^2-3x=0\ ;\ x(x-3)=0\ ;\ x=0$ یا $x=3$

$x^3-1=0\ ;\ x^3=1\ ;\ x=1$ و $x^2+1=0$ (ریشه‌ی حقیقی ندارد)

x		−۱		۰		۱		۲		۳	
$-x^2$	−		−	۰	−		−		−		−
$-x^2+1$	−	۰	+		+	۰	−		−		−
x^2-3x+2	+		+		+	۰	−	۰	+		+
x^2-3x	+		+	۰	−		−		−	۰	+
x^3-1	−		−		−	۰	+		+		+
x^2+1	+		+		+		+		+		+
P>۰	−		+		−		+		−		+
		P = ۰		نامعین		نامعین		P = ۰		نامعین	

مجموعه جواب نامعادله $=\{x\,|\,x>3\ ,\ 1<x\leq2\ ,\ -1\leq x<0\}$

۵. ابتدا حوزه‌ی تعریف معادله را تعیین می‌کنیم:

$x^2-4\neq0\ ;\ x^2\neq4\ ;\ x\neq\pm2$ (حوزه‌ی تعریف معادله) $D=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

$\dfrac{x^2-1}{x-2}-\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{x^3}{x^2-4}$

$\Rightarrow\ \dfrac{(x^2-1)(x+2)-x(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{x^3}{x^2-4}$

$x\neq\pm2: (x^2-1)(x+2)-x^2+2x=x^3\ ;$

$x^3+2x^2-x-2-x^2+2x=x^3\ ;\ x^2+x-2=0$

$(x-1)(x+2)=0\ ;\ x=1$ یا $x=-2\notin D\ ;\ \boxed{\text{جواب: } x=1}$

۶. ابتدا حوزه‌ی تعریف معادله را تعیین می‌کنیم:

$\begin{cases}x-3\geq0\\ x-4\geq0\end{cases};\ \begin{cases}x\geq3\\ x\geq4\end{cases};$ (حوزه‌ی تعریف معادله) $D=\{x\,|\,x\geq4\}$

$\sqrt{x-3}+\sqrt{x-4}=1\ ;\ \sqrt{x-3}=1-\sqrt{x-4}$

دو طرف معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$x-3=(1-\sqrt{x-4})^2\ ;\ x-3=1+x-4-2\sqrt{x-4}$

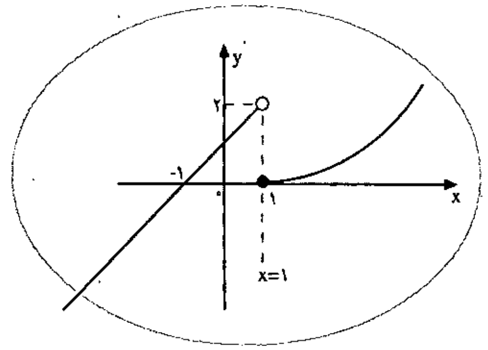
$-2\sqrt{x-4}=0\ ;\ \boxed{\text{جواب: } x=4}$

۷. چون $x=\sqrt{3}$ ریشه‌ی معادله است، بنابراین در معادله صادق است:

$x=\sqrt{3}: kx^2-\sqrt{3}x-6=0\ ;\ k(\sqrt{3})^2-\sqrt{3}(\sqrt{3})-6=0$

$3k-3-6=0\ ;\ 3k=9\ ;\ \boxed{\text{جواب: } k=3}$

۸. الف) برد تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1} & x\geq1\\ x+1 & x<1\end{cases}$ برابر $R_f=\mathbb{R}$ است، زیرا با توجه به نمودار تابع، بسیار بدیهی است:



ب) نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ در بازه‌ی (۱ و ۳-):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)+1-(x+1)}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

ج) ضابطه‌ی fof را تعیین می‌کنیم:

$$(fof)(x)=f(f(x))=\begin{cases}\sqrt{\sqrt{x-1}-1} & x\ge 1\\ (x+1)+1 & x<1\end{cases}$$

بنابراین:

$$(fof)(x)=\begin{cases}\sqrt{\sqrt{x-1}-1} & x\ge 1\\ x+2 & x<1\end{cases}$$

با توجه به ضابطه، دامنه‌ی تعریف تابع fof مجموعه‌ی اعداد حقیقی است:

$D_{fof}=\mathbb{R}$

د) با توجه به نمودار تابع، بدیهی است که تابع f پوشاست (زیرا برد تابع $\mathbb{R}$ است)، ولی یک به یک نیست؛ زیرا اگر مثلاً خط $y=1$ را با تابع قطع دهیم، این خط نمودار تابع را در دو نقطه قطع می‌کند.

هـ) با توجه به نمودار تابع، بدیهی است که تابع در بازه‌ی $[1,+\infty)$ یک به یک و درنتیجه معکوس‌پذیر است و ضابطه‌ی معکوس آن چنین است:

$x\ge 1: y=\sqrt{x-1}\ ;\ y^2=x-1\ ;\ x=y^2+1\ ;$

$f^{-1}(x)=x^2+1$

۹. این مسأله معادل است با این که در تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ پارامترها را چنان تعیین کنیم که y همیشه مثبت باشد:

$$y=(m-2)x^2+\sqrt{3}x+m-1$$

$$\begin{cases}a>0\\ \Delta=b^2-4ac<0\end{cases};\quad \begin{cases}a=m-2>0\\ \Delta=(\sqrt{3})^2-4(m-2)(m-1)<0\end{cases};$$

$$\begin{cases}m>2\\ 3-4(m^2-3m+2)<0\end{cases};\quad -4m^2+12m-8+3<0\ ;$$

$$-4m^2+12m-5<0\ ;\ -4m^2+12m-5=0\ ;\ m=\frac{-6\pm\sqrt{16}}{-4}$$

$$m=\frac{-6\pm 4}{-4}\ ;\ m_1=\frac{5}{2}\ ,\ m_2=\frac{1}{2}\ ;\ m>\frac{5}{2}\ \text{یا}\ m<\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases}m>2\\ m<\frac{1}{2}\ \text{یا}\ m>\frac{5}{2}\end{cases};\quad \boxed{\text{جواب}: m>\frac{5}{2}}$$

۱۰. در رابطه‌ی مفروض، x را به x- تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} x^2\times \\ -3\times \end{array}\begin{cases}x^2f(x)+3f(-x)=4x^4\\ x^2f(-x)+3f(x)=4x^4\end{cases}$$

$$x^4f(x)-9f(x)=4x^6-12x^4$$

$$(x^4-9)f(x)=4x^4(x^2-3)$$

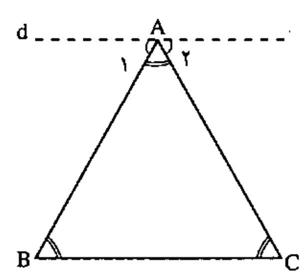
$$x\neq\pm\sqrt{3}: f(x)=\frac{4x^4(x^2-3)}{x^4-9}=\frac{4x^4}{x^2+3}$$

با توجه به $f(-x)=f(x)$، تابع f(x) زوج است.

هندسه‌ی ۱

۱.

الف) خط راست d را از A موازی BC رسم می‌کنیم. به کمک قضیه‌ی خطوط موازی و مورب می‌توان نوشت:

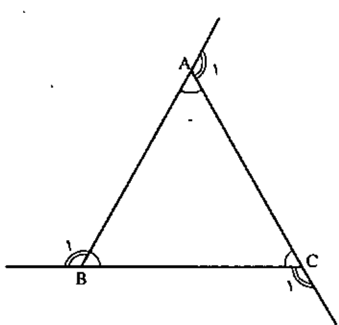


$$\left.\begin{array}{l} d\parallel BC, \text{مورب}\ AB\Rightarrow \hat{A}_1=\hat{B}\\ d\parallel BC, \text{مورب}\ AC\Rightarrow \hat{A}_2=\hat{C}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}_1+\hat{A}_2=\hat{B}+\hat{C}$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1+\hat{A}_2+\hat{A}=\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}$$

$$\Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$$

ب)

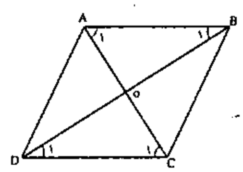


$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1=180^\circ-\hat{A}\\ \hat{B}_1=180^\circ-\hat{B}\\ \hat{C}_1=180^\circ-\hat{C}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}_1+\hat{B}_1+\hat{C}_1=$$

$$(180^\circ-\hat{A})+(180^\circ-\hat{B})+(180^\circ-\hat{C})$$

$$=540^\circ-(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C})=540^\circ-180^\circ=360^\circ$$

. ۲



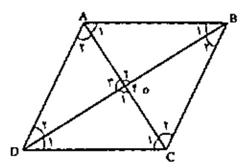
فرض	ABCD متوازی‌الاضلاع است
حکم	$OA = OC$ و $OB = OD$

اثبات :

$AB \parallel CD$، مورب $BD \Rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{D}_۱$

$AB \parallel CD$، مورب $AC \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{C}_۱$

(ز ض ز)
$\hat{A}_۱ = \hat{C}_۱, \hat{B}_۱ = \hat{D}_۱, AB = CD \Rightarrow \Delta OAB \cong \Delta OCD$
$\Rightarrow OA = OC, OB = OD$



فرض	$OA = OC$ و $OB = OD$
حکم	ABCD متوازی‌الاضلاع است

اثبات :

$\left.\begin{array}{l} OA = OC \\ OB = OD \\ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta OAB \cong \Delta OCD$ (ض ز ض)

$\Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{C}_۱$ مورب و $AC \Rightarrow AB \parallel CD$ (۱)

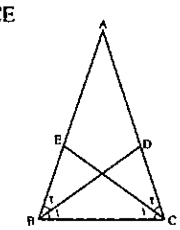
$OA = OC, OB = OD, \hat{O}_۳ = \hat{O}_۲ \Rightarrow \Delta OAD \cong \Delta OBC$
(ض ز ض)

$\Rightarrow \angle A_۲ = \angle C_۲$ مورب و $AC \Rightarrow AD \parallel BC$ (۲)

ABCD متوازی‌الاضلاع است. $\Leftarrow$ (۲) و (۱)

. ۳

فرض	$AB = AC, \hat{B}_۱ = \hat{B}_۲, \hat{C}_۱ = \hat{C}_۲$
حکم	$BD = CE$



اثبات :

$AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \Rightarrow$

$\hat{B}_۱ = \hat{B}_۲ = \hat{C}_۱ = \hat{C}_۲$

$\hat{B}_۱ = \hat{C}_۱, \hat{B} = \hat{C}, BC = BC \Rightarrow \Delta BCE \cong \Delta BCD$ (زض‌ز)

$\Rightarrow BD = CE$

۴ . از چهار رأس لوزی، خط‌های راستی موازی دو قطر رسم می‌کنیم تا چهار ضلعی MNPQ درست شود. چون قطرهای لوزی بر یکدیگر عمودند، پس MN و NP و PQ و QM نیز دو به‌دو بر هم عمودند و MNPQ مستطیل است. بنابراین مساحت این مستطیل برابر است با: $S = MN \times NP = BD \times AC$ از طرف دیگر چون قطر هر مستطیل آن را به دو مثلث هم‌نهشت تجزیه می‌کند، داریم:

$\Delta OAB \cong \Delta ANB, \Delta OAD \cong \Delta AMD, \Delta BOC \cong \Delta BDC,$
$\Delta COD \cong \Delta CQD \Rightarrow S_{ABCD} = S_{ANB} + S_{BPC} + S_{QCD} + S_{AMD}$

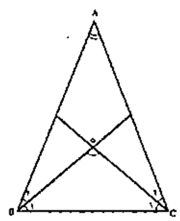
$\Rightarrow S_{MNPQ} = ۲S_{ABCD} = AC \times BD \Rightarrow S_{ABCD} = \dfrac{AC \times BD}{۲}$

. ۵

$\angle BOC = ۱۱۰^\circ \Rightarrow \angle B_۱ + \angle C_۱ = ۱۸۰^\circ - ۱۱۰^\circ = ۷۰^\circ$

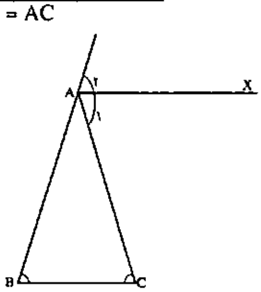
$\Rightarrow \dfrac{\angle B}{۲} + \dfrac{\angle C}{۲} = ۷۰^\circ \Rightarrow \angle B + \angle C = ۱۴۰^\circ$

$\Rightarrow ۱۸۰^\circ - \hat{A} = ۱۴۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۴۰^\circ$



. ۶

فرض	$\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲, Ax \parallel BC$
حکم	$AB = AC$



اثبات :

$Ax \parallel BC$ مورب و $AC \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{C}$

$Ax \parallel BC$ مورب و $AB \Rightarrow \hat{A}_۲ = \hat{B}$

$\hat{A}_۱ = \hat{C}, \hat{A}_۲ = \hat{B}, \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \Rightarrow AB = AC$

۷ . مساحت ذوزنقه را از دو راه به دست می‌آوریم: به کمک دستور مساحت ذوزنقه، و به کمک مجموع مساحت‌های سه مثلث قائم‌الزاویه. و آن‌ها را با هم مساوی قرار می‌دهیم:

$$S = \frac{b+c}{۲} \times (b+c) = \frac{(b+c)^۲}{۲} = \frac{b^۲ + c^۲ + ۲bc}{۲} \quad (۱)$$

$$S = \frac{bc}{۲} + \frac{bc}{۲} + \frac{a^۲}{۲} \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \frac{b^۲ + c^۲ + ۲b^۲}{۲} = \frac{۲bc + a^۲}{۲} \Rightarrow$$

$$b^۲ + c^۲ + ۲bc = a^۲ + ۲bc \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲$$

۸. الف:

$$\Delta ABH:\ AB^۲ = AH^۲ + BH^۲ = AH^۲ + (BC - CH)^۲$$

$$= AH^۲ + BC^۲ + CH^۲ - ۲BC.CH$$

$$= (\underbrace{AH^۲ + CH^۲}_{AC^۲}) + (BC^۲ - ۲BC.CH)$$

$$\Rightarrow AB^۲ = AC^۲ + BC^۲ - ۲BC.CH$$

$$= AC^۲ + AB^۲ + AC^۲ - ۲BC.CH$$

$$\Rightarrow AC^۲ = BC.CH$$

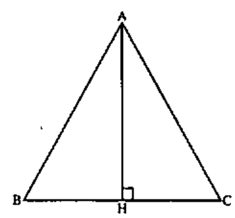
ب:

$$\Rightarrow ۲AC^۲ - ۲BC.CH = ۰ \Rightarrow AC^۲ = BC.CH$$

$$\Delta ACH:\ AC^۲ = AH^۲ + CH^۲ \Rightarrow AH^۲ = AC^۲ - CH^۲$$

$$= BC.CH - CH^۲ = CH(\underbrace{BC - CH}_{BH}) = BH.CH$$

۹. می‌دانیم که در هر مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع هر رأس، میانه هم است، بنابراین داریم:



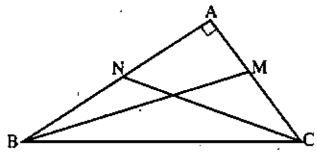
$$BH = CH = \frac{a}{۲}$$

$$\Rightarrow AH^۲ = AC^۲ - CH^۲ = a^۲ - \frac{a^۲}{۴} = \frac{۳a^۲}{۴} \Rightarrow$$

$$AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}AH.BC = \frac{۱}{۲}(\frac{\sqrt{۳}}{۲}a).a = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$

۱۰.



$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABM:\ AB^۲ + AM^۲ = BM^۲\\ \Delta ACN:\ AC^۲ + AN^۲ = CN^۲\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow BM^۲ + CN^۲ = AB^۲ + AM^۲ + AC^۲ + AN^۲$$

$$= AB^۲ + (\frac{AC}{۲})^۲ + AC^۲ + (\frac{AB}{۲})^۲$$

$$= \frac{AC^۲}{۴} + AC^۲ + \frac{AB^۲}{۴} + AB^۲ = \frac{۵}{۴}(\underbrace{AB^۲ + AC^۲}_{BC^۲}) = \frac{۵}{۴}BC^۲$$

حسابان

۱.

$$\begin{cases}۸ - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \leq ۸ \Rightarrow -۲\sqrt{۲} \leq x \leq ۲\sqrt{۲}\\ ۲ \geq \sqrt{۸ - x^۲} \Rightarrow ۴ \geq ۸ - x^۲ \Rightarrow x^۲ \geq ۴ \Rightarrow \begin{cases}x \geq ۲\\ \text{یا}\\ x \leq -۲\end{cases}\end{cases}$$

$$\begin{cases}-۲\sqrt{۲} \leq x \leq ۲\sqrt{۲}\\ x \geq ۲ \ \text{یا}\ x \leq -۲\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}۲ \leq x \leq ۲\sqrt{۲}\\ -۲\sqrt{۲} \leq x \leq -۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow D_f = [-۲\sqrt{۲}, -۲] \cup [۲, ۲\sqrt{۲}]$$

۲.

$$D_f = \mathbb{R} - \{-۱, ۱\}$$

$$\left[\frac{۳ - ۲x}{۱ - x}\right] = \left[\frac{۱ + ۲ - ۲x}{۱ - x}\right] = \left[\frac{۱ + ۲(۱ - x)}{۱ - x}\right] = \left[\frac{۱}{۱ - x} + ۲\right]$$

$$= \left[\frac{۱}{۱ - x}\right] + ۲$$

$$\Rightarrow f(x) = \left[\frac{۱}{۱ + x}\right] + \left[\frac{۱}{۱ - x}\right] + ۲$$

$$f(-x) = \left[\frac{۱}{۱ - x}\right] + \left[\frac{۱}{۱ + x}\right] + ۲ \Rightarrow f(-x) = f(x)$$

۳.

$$g(x) = \frac{۲ + f(x)}{۲ - f(x)}$$

$$f(x) = y \Rightarrow f^{-۱}(y) = x, g(x) = \frac{۲ + y}{۲ - y} \Rightarrow g^{-۱}(\frac{۲ + y}{۲ - y}) = x$$

$$\Rightarrow g^{-۱}(\frac{۲ + y}{۲ - y}) = f^{-۱}(y)$$

$$\Rightarrow \frac{۲ + y}{۲ - y} = x \Rightarrow ۲ + y = ۲x - xy \Rightarrow y(۱ + x) = ۲x - ۲$$

$$\Rightarrow y = \frac{۲x - ۲}{x + ۱} \Rightarrow g^{-۱}(x) = f^{-۱}(\frac{۲x - ۲}{x + ۱})$$

۴. $f(x)$ را بر $x - ۲$ تقسیم می‌کنیم. سپس خارج قسمت را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$f(x) = x^۳ - ۲\sqrt{۲}x^۲ - ۲x^۲ + ۴\sqrt{۲}x + x - ۲ \ \Big|\ \frac{x - ۲}{x^۲ - ۲\sqrt{۲}x + ۱}$$

$$x^۲ - ۲\sqrt{۲}x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{\sqrt{۲} \pm \sqrt{۲ - ۱}}{۱} = \sqrt{۲} \pm ۱$$

۵.

$$f(x) = ax^۲ + bx + c \quad A(۰, -۲) \quad M(۲, -۶)$$

$$A(۰, -۲) \in f \Rightarrow -۲ = ۰ + ۰ + c \Rightarrow \boxed{c = -۲}$$

$x_{Min} = -\frac{b}{۲a} = ۲ \Rightarrow ۴a = -b$

$y_{Min} = \frac{۴ac-b^۲}{۴a} = -۶ \Rightarrow \frac{-۸a-b^۲}{۴a} = -۶ \Rightarrow ۸a+b^۲ = ۲۴a$

$b^۲ = ۱۶a^۲ \Rightarrow ۸a+۱۶a^۲ = ۲۴a \Rightarrow ۱۶a^۲-۱۶a=۰$

$۱۶a(a-۱)=۰,\ a\neq ۰ \Rightarrow a-۱=۰\Rightarrow \boxed{a=۱}$

$۴a=-b \Rightarrow ۴=-b\Rightarrow \boxed{b=-۴}$

.۶

$|f(x)-۳|<\frac{۱}{۲۰} \Rightarrow |۵x-۲-۳|<\frac{۱}{۲۰}\Rightarrow |۵(x-۱)|<\frac{۱}{۲۰}$

$\Rightarrow ۵|x-۱|<\frac{۱}{۲۰}\Rightarrow |x-۱|<\frac{۱}{۱۰۰}\quad \begin{cases} x\to ۱^+ \\ |x-۱| = ۰ < x-۱\end{cases}$

$\Rightarrow ۰<x-۱<\frac{۱}{۱۰۰}\Rightarrow ۱<x<۱+\frac{۱}{۱۰۰}\Rightarrow ۱<x<\frac{۱۰۱}{۱۰۰}$

.۷

$x^۲-۵x+m\ ;\ S=۵\ ;\ P=m$

$\alpha^۲+\beta^۲ = S^۲-۲P=۱۹\Rightarrow ۲۵-۲m=۱۹$

$\Rightarrow ۶=۲m\Rightarrow \boxed{m=۳}$

$S=۵\ ;\ P=۳$

$\alpha^۳+\beta^۳=S^۳-۳PS=(۵)^۳-۳(۳)(۵)=۱۲۵-۴۵$

$\Rightarrow \alpha^۳+\beta^۳=۸۰$

.۸

$\tan ۱۳۵° - \cos ۳۳۰° = x\sin ۱۲۰° \cot ۲۴۰°$

$\tan ۱۳۵° = \tan(\pi-۴۵°) = -\tan ۴۵° = -۱$

$\cos ۳۳۰° = \cos(۲\pi-۳۰°)=\cos ۳۰° = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\sin ۱۲۰° = \sin(\pi-۶۰°)=\sin ۶۰°=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\cot ۲۴۰° = \cot(\pi+۶۰°)=\cot ۶۰° = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$

$-۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲} = x(\frac{\sqrt{۳}}{۲})(\frac{\sqrt{۳}}{۳}) \Rightarrow -\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲}=\frac{x}{۲}$

$\Rightarrow x=-(۲+\sqrt{۳})$

.۹

$A=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۳+x-۲}{\sqrt{۳x+۱}-۲}=\frac{۰}{۰}$

$=\lim_{x\to ۱} \frac{(x^۳-۱)+(x-۱)}{\sqrt{۳x+۱}-۲}\times\frac{\sqrt{۳x+۱}+۲}{\sqrt{۳x+۱}+۲}$

$=\lim_{x\to ۱}\frac{[(x-۱)(x^۲+x+۱)+(x-۱)](\sqrt{۳x+۱}+۲)}{۳x+۱-۴}$

$=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x^۲+x+۲)\times(\sqrt{۳x+۱}+۲)}{۳(x-۱)}$

$=\frac{(۱+۱+۲)(\sqrt{۴}+۲)}{۳}=\frac{۱۶}{۳}$

۱۰. یک تابع کسری وقتی مجانب افقی دارد که درجه‌ی صورت از درجه‌ی مخرج بیش‌تر نباشد. چون $y=\frac{۱}{۲}$ مجانب افقی است پس: $\boxed{a=۰}$.

$x=۱$ و $x=\frac{۵}{۲}$ ریشه‌های معادله‌ی (۰= مخرج) هستند. بنابراین:

$x'+x''=۱+\frac{۵}{۲}\Rightarrow\frac{۱۴}{c}=\frac{۷}{۲}\Rightarrow\boxed{c=۴}$

$x'.x''=۱\times\frac{۵}{۲}\Rightarrow\frac{d}{c}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow\frac{d}{۴}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow\boxed{d=۱۰}$

$f(x)=\frac{bx^۲+۱}{cx^۲-۱۴x+d}$

$x\to\pm\infty\Rightarrow y=\frac{b}{c}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{b}{۴}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\boxed{b=۲}$

جبر و احتمال

۱. (الف) $n=۱:\ \frac{۱}{۲^۱}=\frac{۲^۲-۱-۲}{۲^۱}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$

فرض استقرا: $n=k:\ \frac{۱}{۲^۱}+\frac{۲}{۲^۲}+\dots+\frac{k}{۲^k}=\frac{۲^{k+۱}-k-۲}{۲^k}$

حکم استقرا: $n=k+۱:\ \frac{۱}{۲^۱}+\frac{۲}{۲^۲}+\dots+\frac{k}{۲^k}+\frac{k+۱}{۲^{k+۱}}=\frac{۲^{k+۲}-(k+۱)-۲}{۲^{k+۱}}$

با توجه به فرض استقرا در عبارت سمت چپ حکم، مجموع k جمله‌ی نخست را جایگزین می‌کنیم:

$\frac{۲^{k+۱}-k-۲}{۲^k}+\frac{k+۱}{۲^{k+۱}}=\frac{۲(۲^{k+۱}-k-۲)+k+۱}{۲^{k+۱}}=$

$\frac{۲^{k+۲}-۲k-۴+k+۱}{۲^{k+۱}}=\frac{۲^{k+۲}-(k+۱)-۲}{۲^{k+۱}}$ (حکم ثابت شد.)

(ب) $n=۲:\ \frac{۱}{۲+۱}+\frac{۱}{۲+۲}>\frac{۱۳}{۲۴}\Rightarrow\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}=\frac{۷}{۱۲}=\frac{۱۴}{۲۴}>\frac{۱۳}{۲۴}$

(فرض استقرا) $n=k:\ \frac{۱}{k+۱}+\frac{۱}{k+۲}+\dots+\frac{۱}{k+k}>\frac{۱۳}{۲۴}$

$n=k+۱:\ \frac{۱}{(k+۱)+۱}+\frac{۱}{(k+۱)+۲}+\dots+\frac{۱}{k+۱+k-۱}+$

$\frac{۱}{k+۱+k}+\frac{۱}{k+۱+k+۱}>\frac{۱۳}{۲۴}$ (حکم استقرا)

به دو طرف فرض استقرا، دو جمله‌ی $\frac{۱}{k+۱+k}$ و $\frac{۱}{k+۱+k+۱}$ را می‌افزاییم:

$\frac{۱}{k+۱}+\frac{۱}{k+۲}+\dots+\frac{۱}{k+k}+\frac{۱}{k+۱+k}+\frac{۱}{k+۱+k+۱}>$

$\frac{۱۳}{۲۴}+\frac{۱}{k+۱+k}+\frac{۱}{k+۱+k+۱}$

$$\Rightarrow \frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\dots+\frac{1}{k+k}+\frac{1}{k+1+k}+\frac{1}{k+1+k+1} > \frac{13}{24}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}$$

حال برای اثبات حکم، کافی است ثابت کنیم:

$$\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}>0$$

و برای اثبات این موضوع از استدلال برگشتی کمک می‌گیریم:

$$\frac{1}{2k+1} > \frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+2} \Rightarrow \frac{1}{2k+1} > \frac{2-1}{2(k+1)}$$

$$\frac{1}{2k+1}>\frac{1}{2k+2}\Rightarrow 2k+1<2k+2$$

و درستی رابطه‌ی اخیر واضح است. اکنون استدلال اصلی را هم ارائه می‌دهیم:

$$2k+1<2k+2 \Rightarrow \frac{1}{2k+1}>\frac{1}{2k+2}\Rightarrow \frac{1}{2k+1}>\frac{2-1}{2k+2}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2k+1}>\frac{2}{2k+2}-\frac{1}{2k+2}\Rightarrow \frac{1}{2k+1}>\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2(k+1)}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}>0\Rightarrow$$

$$\frac{13}{24}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}>\frac{13}{24}$$

$$\overset{\text{با توجه به فرض (۱)}}{\Rightarrow} \frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\dots+\frac{1}{(k+1)+(k+1)}>\frac{13}{24}$$ (حکم ثابت شد.)

ج) $n=1\Rightarrow 1^3-1=6r\Rightarrow 0=6r \quad (r=0)$

(فرض استقرا) $n=k\Rightarrow k^3-k=6r'$

(حکم استقرا) $n=k+1\Rightarrow (k+1)^3-(k+1)=6r''$

برای اثبات حکم می‌نویسیم:

$$(k+1)^3-(k+1)=k^3+3k^2+3k+1-k-1$$
$$=(k^3-k)+3k(k+1)$$

چون یکی از دو عدد متوالی k و $k+1$ زوج هستند، پس $k(k+1)$ نیز زوج است. همچنین طبق فرض: $k^3-k=6r'$، بنابراین:

$$(k+1)^3-(k+1)=6r'+3(2m)=6(r'+m)=6r''$$

۲. اولاً:

$$x=\frac{m}{n}, m,n\in Z,\ n\neq 0,\ y=\frac{p}{q}, p,q\in Z,\ q\neq 0$$

$$\Rightarrow xy=\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{mp}{np}=\frac{r}{s}, r,s\in Z,\ s\neq 0\Rightarrow xy\in Q$$

ثانیاً: از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم، x گویا، y گنگ و xy گویا باشد. در این صورت داریم:

$$x\in Q, x\neq 0, y\notin Q, xy\in Q\Rightarrow$$

$$x=\frac{m}{n}, m,n\in z, n\neq 0, xy=\frac{p}{q}, p,q\in z, q\neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{m}{n}y=\frac{p}{q}\Rightarrow y=\frac{\frac{p}{q}}{\frac{m}{n}}=\frac{r}{s}, r,s\in z, s\neq 0$$

$$\Rightarrow y\in Q$$

و این با فرض $y\notin Q$ در تناقض است.

ثالثاً: مثال نقض $x=\sqrt{2}\notin Q$ و $y=\sqrt{8}\notin Q$ را می‌آوریم:

$xy=\sqrt{8}\times\sqrt{2}=\sqrt{16}=4\in Q$ (حکم نادرست است.)

۳. استدلال برگشتی:

$$(a^4+b^4)(a^5+b^5)\le 2(a^9+b^9)\Rightarrow$$

$$a^9+a^4b^5+b^4a^5+b^9\le 2a^9+2b^9\Rightarrow$$

$$a^9+b^9-a^4b^5-b^4a^5\ge 0\Rightarrow$$

$$a^4(a^5-b^5)-b^4(a^5-b^5)\ge 0\Rightarrow (a^5-b^5)(a^4-b^4)\ge 0$$

$$\Rightarrow (a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)\ge 0$$

$$\Rightarrow (a-b)^2(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)\ge 0$$

که نابرابری فوق با توجه به این‌که a و b مثبت هستند، درست است. اکنون خودتان استدلال اصلی را با توجه به استدلال برگشتی تنظیم کنید.

۴. باقی مانده‌های تقسیم عددهای طبیعی بر ۲۰، ۰، ۱، ۲، ... و ۱۹ می‌توانند باشند؛ یعنی بیست حالت برای آن‌ها وجود دارد. حال اگر این ۷۰ عدد، در بیست گروه تقسیم شده باشند (بدترین حالت ممکن)، باز هم وقتی شصتمین عدد را در نظر بگیریم، در هر گروه سه عدد قرار می‌گیرند و عدد شصت‌ویکم، در یکی از گروه‌ها واقع می‌شود. این یعنی چهار عدد در یک گروه بوده‌اند و چهار عدد دارای یک نوع باقی مانده خواهند بود. اینک با توجه به برابری ۱۰۱=۱+۲۰×۵ نتیجه می‌گیریم، اگر ۱۰۱ عدد داشته باشیم، لااقل ۶ تای آن‌ها در تقسیم بر ۲۰ یک نوع باقی مانده خواهند داشت.

۵. می‌توان حالت‌های متفاوت زیر را در نظر گرفت:

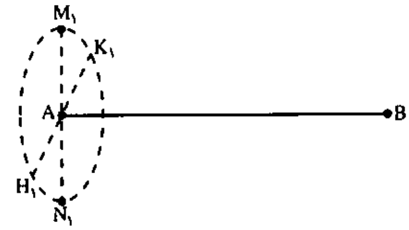
$$\begin{cases}x+y=2\\x-y=3\\z=3\end{cases}\qquad \begin{cases}x+y=3\\x-y=2\\z=3\end{cases}\qquad \begin{cases}x+y=2\\x-y=2\\z=3\end{cases}$$

و از آن‌جا سه دسته جواب زیر را خواهیم داشت:

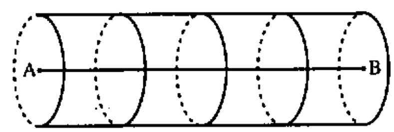
$(x=\frac{5}{2}, y=-\frac{1}{2}, z=3)$ یا $(x=\frac{5}{2}, y=\frac{1}{2}, z=3)$ یا $(x=2, y=0, z=3)$

هندسه‌ی ۲

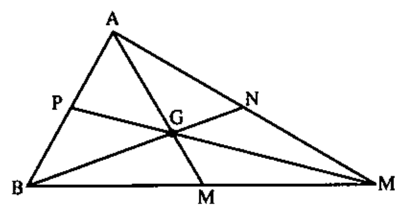
۱. اطراف پاره‌خط AB در فضا، نقاطی به فاصله‌ی ۴ سانتی‌متر از آن در نظر می‌گیریم؛ مثل M_1 و N_1 و K_1 و H_1 و... که همگی از پاره‌خط AB به فاصله‌ی ۴ سانتی‌متر باشند و پای عمودهای مرسوم از این نقاط بر AB، نقطه‌ی A باشد.



بدین ترتیب، این نقاط روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۴ سانتی‌متر قرار دارند. با در نظر گرفتن چند نقطه‌ی دیگر با شرایط بالا حدس می‌زنیم، مکان فوق، سطح جانبی استوانه‌ی قائمی است که AB محور آن است.



۲.



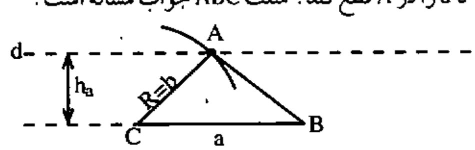
$$\left.\begin{array}{l} GA+GB>AB \\ GA+GC>AC \\ GB+GC>BC \end{array}\right\} \Rightarrow ۲(GA+GB+GC)>AB+AC+BC$$

با توجه به این‌که: $GA=\frac{۲}{۳}AM$ و $GB=\frac{۲}{۳}BN$ و $GC=\frac{۲}{۳}CP$ داریم:

$$\frac{۴}{۳}(AM+BN+CP)>AB+AC+BC \Rightarrow$$

$$(AM+BN+CP)>\frac{۳}{۴}(AB+AC+BC)$$

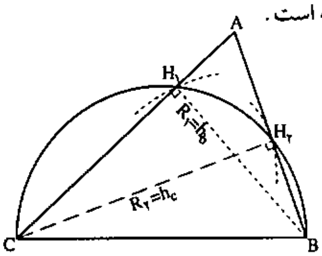
۳. پاره‌خط BC=a را رسم می‌کنیم و خط d را موازی با آن، به فاصله‌ی h_a در نظر می‌گیریم (d، مکان هندسی رأس A است) به مرکز نقطه‌ی C دایره‌ای به شعاع AC=b رسم می‌کنیم تا d را در A قطع کند. مثلث ABC جواب مسأله است.



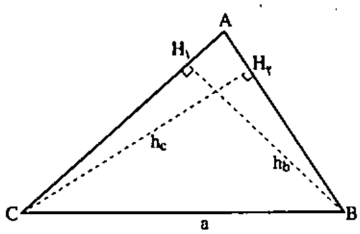
۴.

روش اول: فرض کنیم ضلع‌های BC=a و $BH_۱=h_b$ و $CH_۲=h_c$ را داشته باشیم.

ابتدا پاره‌خط BC=a را رسم می‌کنیم و سپس دایره‌ای به قطر BC می‌کشیم. سپس به مرکز B و به شعاع h_b کمانی رسم می‌کنیم تا دایره‌ی قبلی را در $H_۱$ قطع کند و به مرکز C و به شعاع h_c کمان دیگری رسم تا دایره‌ی اولیه را در $H_۲$ قطع کند. نقطه تلاقی امتداد $BH_۲$ و $CH_۱$ را A می‌نامیم. مثلث ABC جواب مسأله است.



روش دوم: مثلث قائم‌الزاویه‌ی $BCH_۱$ را با در دست داشتن BC=a و $BH_۱=h_a$ رسم می‌کنیم و به همین ترتیب مثلث $BCH_۲$ را می‌کشیم و نقطه‌ی A را محل تلاقی امتداد $CH_۱$ و $BH_۲$ در نظر می‌گیریم. مثلث ABC جواب مسأله است.



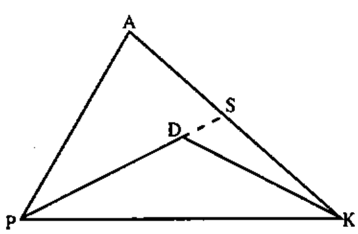
۵.

$$\begin{cases} PA+AS>PS=PD+DS \\ DS+SK>DK \end{cases}$$

$$\Rightarrow PA+AS+DS+SK>PD+DS+DK$$

$$\Rightarrow PA+AK>PD+DK \Rightarrow$$

$$PA+AK+PK>PD+DK+PK$$



۶.

$$S_{ADO}=\frac{۱}{۲}OD\times AH=\frac{۱}{۲}OD\times OA\times \sin\alpha$$

با توجه به این‌که $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ و مانند بالا داریم:

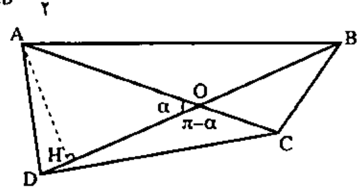
$$S_{AOB}=\frac{۱}{۲}OA.OB.\sin\alpha$$

$$S_{OCD}=\frac{۱}{۲}OC.OD.\sin\alpha \text{ ، } S_{OBC}=\frac{۱}{۲}OC.OB.\sin\alpha$$

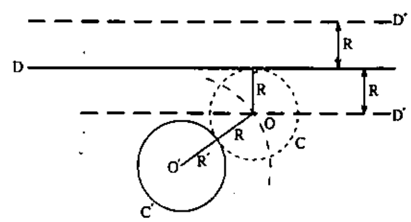
$$\Rightarrow S_{ABCD}=S_{oAD}+S_{OAB}+S_{OCD}+S_{OBC}=$$

$$\frac{۱}{۲}\sin\alpha(OD.OA+OA.OB+OC.OD+OB.OC)$$

$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}\sin\alpha.AC.BD$$



۷. خط D' را به موازات D و به فاصله‌ی R از آن در نظر می‌گیریم. دایره‌ای به مرکز O' و به شعاع $R + R'$ رسم می‌کنیم تا D' را در O قطع کند. دایره‌ی به مرکز O و به شعاع R جواب مسأله است.



بحث: اگر دایره به شعاع $R + R'$ باشد و D' و D'' را قطع کند، مسأله ۴ جواب دارد.

اگر دایره به شعاع $R + R'$ باشد و D' را قطع و مماس بر D'' باشد، مسأله ۳ جواب دارد.

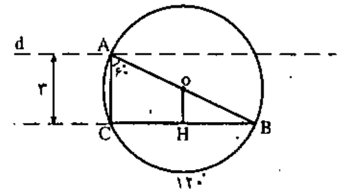
اگر دایره به شعاع $R + R'$ باشد و فقط D' را قطع کند، مسأله ۲ جواب دارد.

اگر دایره به شعاع $R + R'$ باشد و مماس بر D' باشد و نقطه‌ی مشترکی با D'' نداشته باشد، مسأله ۱ جواب دارد.

اگر دایره به شعاع $R + R'$ باشد و نه با D' و نه با D'' نقطه‌ی مشترکی نداشته باشد، مسأله فاقد جواب است.

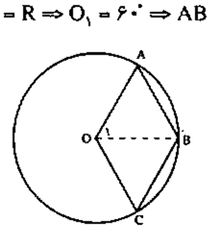
۸. ابتدا ضلع $BC=۸$ و کمان در خور زاویه‌ی ۶۰° را رسم می‌کنیم. سپس خط d را به فاصله‌ی ۳ و به موازات BC رسم می‌کنیم. محل تلاقی d با کمان در خور، همان رأس A است.

$$OH = \frac{BC}{۲\tan \hat{A}} = \frac{۸}{۲\sqrt{۳}} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$



۹. $OA = OC = R \Leftarrow$ چهار ضلعی لوزی است.

$$OA = AB = OB = R \Rightarrow O_۱ = ۶۰^\circ \Rightarrow AB = ۶۰^\circ$$

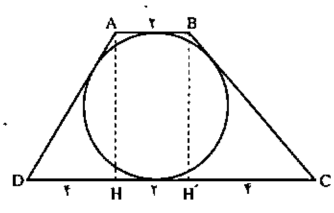


۱۰.

$$AB = HH' = ۲$$
$$\Rightarrow DH = CH' = ۴$$

به دلیل محیطی بودن ذوزنقه داریم:

$$AD + BC = ۲ + ۱۰ = ۱۲$$
$$\Rightarrow BC = ۶ \Rightarrow BH' = \sqrt{۳۶ - ۱۶} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$
$$S = \pi R^۲ = \pi(\sqrt{۵})^۲ = ۵\pi$$



دفتر انتشارات کمک آموزشی

آشنایی با مجله های رشد

مجله های رشد توسط دفتر انتشارات کمک آموزشی سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وابسته به وزارت آموزش و پرورش، با این عناوین تهیه و منتشر می شوند:

مجله های دانش‌آموزی (به صورت ماهنامه ـ ۸ شماره در هر سال تحصیلی ـ منتشر می شوند):

- **رشد کودک** (برای دانش‌آموزان آمادگی و پایه ی اول دوره ی ابتدایی)
- **رشد نوآموز** (برای دانش‌آموزان پایه های دوم و سوم دوره ی ابتدایی)
- **رشد دانش آموز** (برای دانش‌آموزان پایه های چهارم و پنجم دوره ی ابتدایی).
- **رشد نوجوان** (برای دانش‌آموزان دوره ی راهنمایی تحصیلی).
- **رشد جوان** (برای دانش‌آموزان دوره ی متوسطه).

مجله های عمومی (به صورت ماهنامه ـ ۸ شماره در هر سال تحصیلی منتشر می شوند):

- **رشد معلم، رشد آموزش ابتدایی، رشد آموزش راهنمایی تحصیلی، رشد تکنولوژی آموزشی، رشد مدرسه فردا، رشد مدیریت مدرسه**

مجله های تخصصی (به صورت فصلنامه و ۴ شماره در سال منتشر می شوند):

- رشد برهان راهنمایی (مجله ی ریاضی، برای دانش‌آموزان دوره ی راهنمایی تحصیلی)، رشد برهان متوسطه (مجله ی ریاضی، برای دانش‌آموزان دوره ی متوسطه)، رشد آموزش معارف اسلامی، رشد آموزش جغرافیا رشد آموزش تاریخ، رشد آموزش زبان و ادب فارسی، رشد آموزش زبان رشد آموزش زیست شناسی، رشد آموزش تربیت بدنی، رشد آموزش فیزیک، رشد آموزش شیمی، رشد آموزش ریاضی، رشدآموزش هنر، رشد آموزش قرآن، رشد آموزش علوم اجتماعی، رشد آموزش زمین شناسی، رشد آموزش فنی و حرفه‌ای و رشد مشاورمدرسه.

مجله های رشد عمومی و تخصصی برای آموزگاران ،معلمان،مدیران و کادر اجرایی مدارس
دانشجویان مراکز تربیت معلم و رشته های دبیری دانشگاه ها
و کارشناسان تعلیم و تربیت تهیه و منتشر می شوند.

• نشانی: تهران، خیابان ایرانشهرشمالی، ساختمان شماره۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۸، دفتر انتشارات کمک آموزشی.
تلفن و نمابر: ۸۸۳۰۱۴۷۸

برگ اشتراک مجله های رشد

شرایط

۱ـ واریز مبلغ ۲۰/۰۰۰ ریال به ازای هر عنوان مجله درخواستی، به صورت علی‌الحساب به حساب شمارهٔ ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت شعبه سه راه آزمایش (سرخه‌حصار) کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست.

۲ـ ارسال اصل رسید بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک.

- **نام مجله :** ....
- **نام و نام خانوادگی:** ....
- **تاریخ تولد:** ....
- **میزان تحصیلات:** ....
- **تلفن:** ....
- **نشانی کامل پستی:**

استان: .... شهرستان: ....

خیابان: ....

....

پلاک: .... کدپستی: ....

- **مبلغ واریز شده:** ....
- **شماره و تاریخ رسید بانکی:** ....
- **آیا مایل به دریافت مجله درخواستی به صورت پست پیشتاز هستید؟ بله ☐ خیر ☐**

امضا:

نشانی: تهران ـ صندوق پستی مشترکین ۱۶۵۹۵/۱۱۱

نشانی اینترنتی: www.roshdmag.ir

پست الکترونیک: Email:info@roshdmag.ir

☎ امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ـ۷۷۳۳۹۷۱۳ـ۱۴

☎ پیام گیر مجلات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲ ـ ۸۸۸۳۹۲۳۲

یادآوری:

- هزینه برگشت مجله در صورت خوانا و کامل نبودن نشانی، بر عهده مشترک است.
- مبنای شروع اشتراک مجله از زمان وصول برگ اشتراک است.
- برای هر عنوان مجله برگ اشتراک جداگانه تکمیل و ارسال کنید (تصویر برگ اشتراک نیز مورد قبول است).

معرفی سایت های ریاضی جهان

Mathematics.com

آدرس اینترنتی : http://www.mathematics.com

فهرست اصلی :

۱ . ریاضیات Math
۲ . روی خط یادگیری Online Learning
۳ . مدرسه‌ی خانگی Home School
۴ . جبر Algebra
۵ . آموزش Education
۶ . فعالیت‌های ریاضیاتی Math Activities
۷ . آموزش مقدماتی Elementary Education
۸ . یادگیری زبان‌ها Learn Languages
۹ . آموزش خصوصی ریاضی Math Tutoring
۱۰ . کمک در زمینه‌ی ریاضیات Math Help
۱۱ . نویسندگی Writing
۱۲ . آموزش ریاضی Math Education
۱۳ . کمک‌های آموزشی Education Helps

توضیح : هریک از فهرست‌های موضوعی بالا نیز شامل عنوان‌هایی است که در سایت به تفصیل شرح داده شده‌اند .

GraphTheory.com

آدرس اینترنتی : http://www.graphtheory.com

موضوع سایت : شاخه‌ای بسیار زیبا و جالب توجه از ریاضیات گسسته به نام «نظریه گراف» .

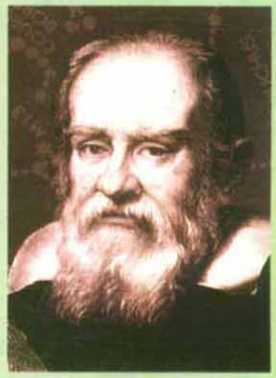
فهرست اصلی :

۱ . نظریه گراف و کاربردهای آن
(Graph Theory and It's Applications)
۲ . هندبوک نظریه‌ی گراف
(Hand Book of Graph Theory)
۳ . نظریه‌ی گراف مکان‌نگر
(Topological Graph Theory)

فهرست منابع نظریه‌ی گراف :

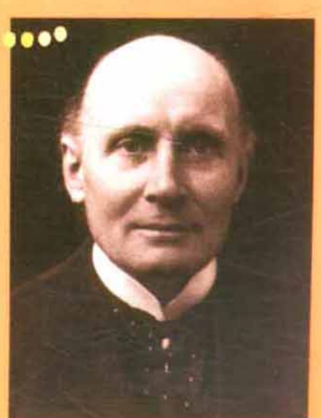
۱ . تحقیق (Research)
۲ . همایش ها (Conferences)
۳ . ژورنال ها (Journals)
۴ . قضیه‌ی چهار رنگ (The Four-Color Theorem)

زبان حال ریاضی دانان



جهان را نمی توان فهمید،
مگر آن که زبانش را بیاموزیم و
با حروفی که نگاشته شده
است، آشنا شویم و این همان
زبان ریاضیات است.
گالیلئو گالیله

تناقض نیست اگر بگوییم، در نظری ترین
حالات ریاضی ممکن است به عملی ترین کاربردها
بیش از پیش نزدیک باشیم.
آلفرد نورث وایتهد



برهان خلف حرکتی است ظریف تر از هر
حرکت شطرنج؛ شطرنج باز ممکن است یک
پیاده یا حتی یک سوار را فدای بازی کند، ولی
ریاضی دان تمام بازی را فدا می کند.
ج. اچ. هاردی

بر گرفته از کتاب زبان حال ریاضی دان
به روایت دکتر علی اکبر عالم زاده