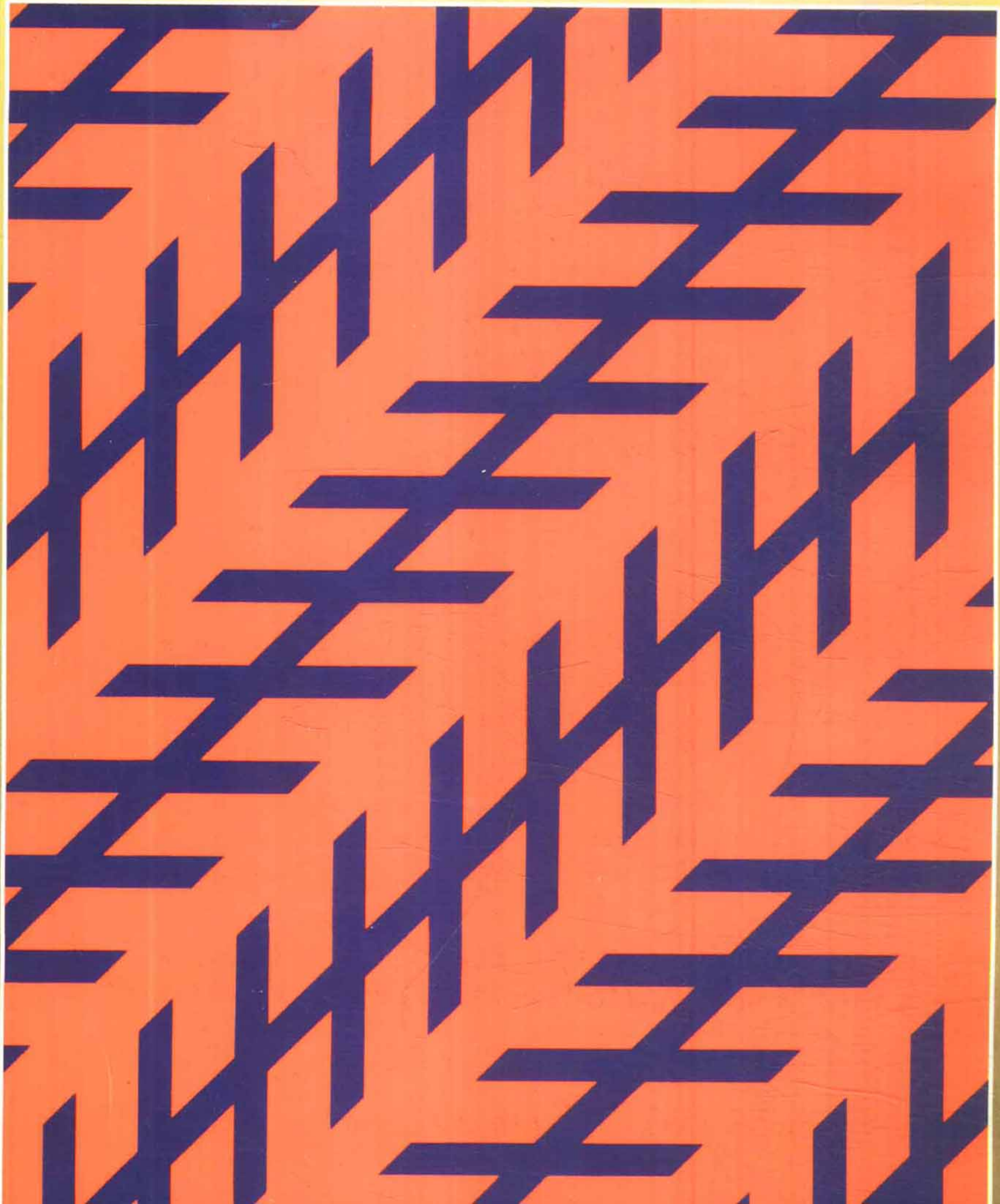
مجله ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۲۱

سال هفتم، تابستان ۱۳۷۶ شمارهٔ اول، بها ۲۰۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه وابسته به وزارت آموزش و پرورش

صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه ▢ مدیر مسئول: محمود ابراهیمی

سردبیر: حمیدرضا امیری ▢ مدیر داخلی: سیدمحمّدرضا هاشمی موسوی

اعضای هیئت تحریریه: آقایان: ▢ حمیدرضا امیری ▢ محمدهاشم رستمی ▢ احمد قندهاری ▢ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

▢ غلامرضا یاسی‌پور (با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقای پرویز شهریاری) ▢ مدیر فنی: هوشنگ آشتیانی

طراح و صفحه‌آرا: علی دانشور ـ حسین بابایی ▢ رسّام: علی خوش جام ▢ چاپ و صحافی: چاپخانه مدرسه

مطالب این شماره

■ سال هفتم، تابستان ۱۳۷۶، شمارهٔ اوّل.

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

● نگارش مقالات کمک‌درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی) ● طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن ● طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن ● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

■ هیئت تحریریه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.

■ مقالات مجله با رسم‌الخطِ انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.

■ مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.

■ مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

نشانی: خیابان سپهبدقرنی، پل کریمخان‌زند، کوچه شهیدمحمودحقیقت‌طلب، پلاک ۳۶

تلفن: ۹ـ۸۸۱۰۳۲۵، دورنویس (فاکس): ۸۸۲۰۵۹۹ صندوق‌پستی: ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹

حرف اوّل

به یاد آن شقایقِ پرپر

السلامُ علیکِ یا فاطمةَ الزهرا(س)

سلام‌ودرود به‌سرور زنان دوعالم‌والگوی یکتای‌آفرینش از ازل تا ابد. سلام خداودرود پروردگار براسوهٔ صبرواستقامت‌وایمان، اوکه اولین شهیدهٔ‌مظلومهٔ‌اسلام بود. سلام برپاره‌تن‌پیامبرخدا(ص)که‌تربیت‌یافتهٔ دامان پیامبر(ص) بود و آن‌چنان دلسوز و مهربان برای پدر که به او لقب «اُم ابیها» (مادر پدرش) داد. سلام بر مادر حسن(ع)، حسین(ع)، و زینب(س). سلام بر اُمُّ‌الائمه زهرای اطهر سلام‌الله علیها.

از هر زاویه‌ای که به زندگی حضرت زهرا(س) نگاه کنیم، جز زیبایی، ایمان، تقوی و وَرَع چیزی نمی‌یابیم. سراسر عمر کوتاه و پربرکت حضرت زهرا(س) به تعلیم و تعلّم، کمک به محرومین، مبارزه با کفر و نفاق، دفاع از حق و حقیقت و عبادت سپری شد. چه در جنگهای صدر اسلام که عهده‌دار کمک‌رسانی به رزمندگان در پشت جبهه بودند و چه در زمانی که پیامبر(ص) به شهادت رسیدند و چه در هنگامی‌که امام‌علی(ع) مأمور به سکوت بودند، حضرت فاطمه سلام‌الله علیها در خط مقدم جبهه برای احقاق حق غصب‌شدهٔ امامش علی‌علیه‌السلام و جلوگیری از انحراف در اسلام مبارزه کردند و سرانجام در این مبارزه به شهادت رسیدند.

بر حاشیهٔ برگ شقایق بنویسید — گل تاب فشار در و دیوار ندارد

عزیزان دانش‌آموز به ایّام فاطمیه نزدیک می‌شویم. آرزو می‌کنم در این ایّام از برکتِ وجود مقدسِ صدّیقه کبری حضرت فاطمهٔ‌زهرا(س) فیض برده و با مطالعه سیره زندگی ایشان و احادیث وارده از آن بانوی بزرگوار، بتوانیم راه صحیح زندگی را بیابیم.

در آستانهٔ شروع سال تحصیلی هستیم و امیدواریم إن‌شاءا... با برنامه‌ریزی دقیق، پشتکار و توکل به خدا سالی پُربار را آغاز کرده و بتوانید در تمامی مراحل تحصیل علم و دانش رشد کرده و به موازات آن شناخت و معرفت خودتان را نسبت به جهان هستی و خالق یکتایِ آن ـ جَل جَلاله ـ تکمیل کرده و با تمسک به‌ریسمانِ‌محکمِ ولایتِ اهل بیت ـ علیهم‌السلام ـ این معرفت را ثابت و پایدار کنید. موفق باشید.

والسّلام ـ سردبیر

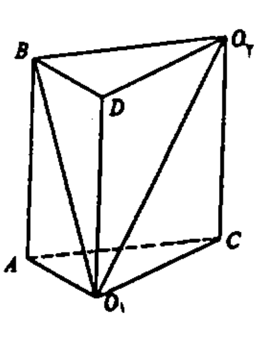
پرویز شهریاری

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۲۱)

اکنون برای مسالهٔ زیر (شبیه مسالهٔ ۸) تفسیری به یاری شکل پیدا کنید.

مسالهٔ ۱۰: دو کره، یکی به شعاع برابر ۱ و دیگری به شعاع برابر ۳ بر یکدیگر از بیرون مماس‌اند. از نقطهٔ M، که به فاصلهٔ ۳ از مرکز کرهٔ کوچکتر، دو خط راست گذرانده‌ایم که بر هر دو کره مماس باشند. مطلوب است محاسبهٔ زاویهٔ بین دو مماس، به شرطی که بدانیم، یکی از آنها، با خط راستی که از مرکزهای دو دایره گذشته است، زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد.

مرکزهای دو دایره را O_1 و O_2 و نقطه‌های تماسِ مماسی را که با O_1O_2 زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد، با دو کره، A و B می‌نامیم. این ساختمان را تا پدیدآمدن منشور O_1ACDBO_2 (که قاعده‌هایی مثلثی شکل دارد) تکمیل می‌کنیم (شکل ۹)



شکل ۹

چون یال AB بر یالهای AO_1 و BO_2 عمود است، بنابراین با منشوری قائم سر و کار داریم.

در مستطیل O_1CO_2D، قطر O_1O_2 با یال O_1D، زاویهٔ ۴۵ـ درجه می‌سازد، پس این مستطیل، یک مربع‌است. برای قطر این مربع داریم: $|O_1O_2| = ۴$، پس طول ضلع این مربع، برابر است با $۲\sqrt{۲}$. قاعده‌های این منشور، مثلثهای قائم‌الزاویه‌ای با رأسهای زاویهٔ قائمهٔ D_1 و O هستند (زیرا $|AC|^۲ - |AO_1|^۲ = ۱ - ۹ = |O_1C|^۲$). نقطهٔ M، بنابرشرط به‌فاصله ۳ از O_1 و روی‌ـ خط راست AB است. ولی $|O_1B| = ۳$.

بنابراین، دو حالت ممکن است: ۱) M بر نقطهٔ B منطبق باشد؛ ۲) M قرینهٔ نقطه B نسبت به نقطهٔ A باشد.

سپس توجه می‌کنیم که مماس دوم عبارت است از قرینهٔ AB نسبت به صفحهٔ MO_1O_2. بنابراین، زاویه بین دو مماس برابر است با دو برابر زاویهٔ بین یکی از آنها با صفحهٔ MO_1O_2 (یا مکمل آن).

حالت اول را مورد بررسی قرار می‌دهیم: M بر B منطبق است. باید زاویهٔ بین خط راست BA و صفحه BO_1O_2 را پیدا کنیم. این زاویه برابر است با زاویهٔ بین خط راست DO_1 با صفحهٔ BO_1O_2. هرم BDO_1O_2 را (که یک چهار وجهی

است). حجم این هرم برابر است با

$$\frac{1}{6}|BD||DO_2||DO_1| = \frac{4}{3}$$

مثلث BO_1O_2 را قاعدهٔ هرم می‌گیریم. داریم :

$$|BO_2| = 3,\ |BO_1| = 3,\ |O_1O_2| = 4$$

از این جا مساحت مثلث BO_1O_2 برابر $2\sqrt{5}$ می‌شود. اگر h را طول ارتفاعی بگیریم، که از D بر BO_1O_2 فرود آمده است، باید داشته باشیم :

$$\frac{2}{3}\sqrt{5}h = \frac{4}{3} \Rightarrow h = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

به این ترتیب، سینوس زاویهٔ بین DO_1 و صفحهٔ BO_1O_2، برابر $\frac{1}{\sqrt{10}}$ می‌شود. پس

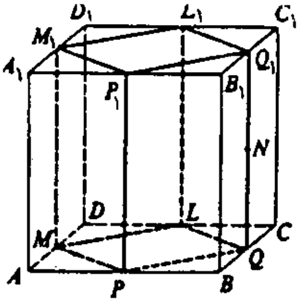
$$\alpha = 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}} \left(= 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$$

که در آن α همان زاویهٔ مجهول، یعنی زاویهٔ بین دو مماس است.

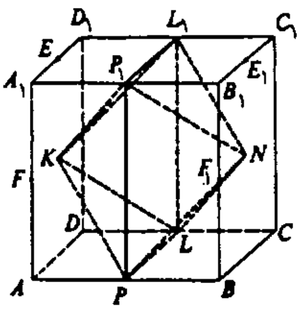
حالت دوم را به عهدهٔ خودتان می‌گذاریم. با وجود این، می‌توان پی‌برد که، پاسخ حالت دوم هم همان پاسخ حالت اول است. در واقع، AO_1، عمود مشترک AB و O_1O_2 است ؛ در ضمن، نقطهٔ M در حالت دوم، قرینهٔ نقطهٔ M در حالت اول نسبت به نقطهٔ A است. اشاره کنیم، شکلی را که در این جا مورد استفاده قرار دادیم، تنها ساختمانی نیست که بتواند ما را به نتیجه برساند می‌توان روشهای دیگری هم برای ملموس کردن مساله در جریان حل، پیدا کرد. به مسالهٔ دیگری توجه کنید :

مسالهٔ ۱۱. سه منشور منتظم با قاعده‌های چهارضلعی، در مکعبی با ضلع به طول واحد، به نحوی محاط شده‌اند که رأسهای هر منشور در وسط یالهای مکعب واقع شده‌اند. حجم بخش مشترک این سه منشور را پیدا کنید.

ساختمان شکل را به تدریج و گام به گام انجام می‌دهیم. در آغاز، مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ را رسم می‌کنیم. (این گام نخست است، ولی ما برای صرفه‌جویی آن را به طور جداگانه نداده‌ایم). گام دوم رسم منشور $PQLMP_1Q_1L_1M_1$، محاط در آن است (مجموعهٔ این دو گام، در شکل ۱۰ نشان داده شده است). اکنون باید به سراغ منشوری برویم که قاعده‌های آن بر وجه‌های ABB_1A_1 و DCC_1D_1 واقع‌اند. روشن است که وجه جانبی این منشور که از نقطه‌های P و L و وسط پاره خط‌های راست BB_1 و CC_1 می‌گذرد، از منشور اول، «گوشه‌ای» به رأس Q جدا می‌کند، که عبارت است از چهاروجهی (هرم) PQLN، که در آن، N، نقطه وسط پاره‌خط راست QQ_1 است. به همین ترتیب، «گوشه‌هایی» در رأسهای Q_1، M و M_1 هم جدا می‌شوند. در نتیجه چند وجهی PLL_1P_1KN به دست می‌آید (شکل ۱۱). اکنون باید منشور سوم را رسم کرد (که قاعده‌های آن روی وجه‌های BCC_1B_1 و ADD_1A_1 است) و بخشی از چند وجهی را که در بیرون مرزهای این منشور قرار



شکل ۱۰



شکل ۱۱

دارد، از آن حذف کرد. اگر بخواهیم، این بخش مشترک سه منشور را روی شکل نشان دهیم، چنان درهم می‌رود که، عینی بودن خود را، به کلی از دست می‌دهد. به همین مناسبت، بهتر است، دنبالهٔ ساختمان را در ذهن خود مجسم کنیم. بخش مشترک دو منشور عبارت است از اجتماع دو هرم منتظم با قاعدهٔ مشترک PLL_1P_1. همین چند وجهی (که یک هشت وجهی است) می‌تواند به عنوان برخورد دو هرم (غیر منتظم) با قاعدهٔ مشترک PNL_1K در نظر گرفته شود. مرز منشور سوم، از نقطه‌های F، E، F_1 و E_1، وسط یالهای A_1D_1، AA_1، BB_1 و B_1C_1 از مکعب می‌گذرد و یالهای جانبی P_1K، P_1P، P_1L_1 و P_1N از هرم PKL_1NP_1 را در نقطه‌های وسط آنها قطع می‌کند و بنابراین، این مرز $\frac{1}{8}$ حجم این هرم یا $\frac{1}{16}$ حجم هشت وجهی PKL_1NP_1L را می‌برد. همین استدلال را دربارهٔ هر یک از سه وجه جانبی دیگر منشور سوم می‌توان داشت.

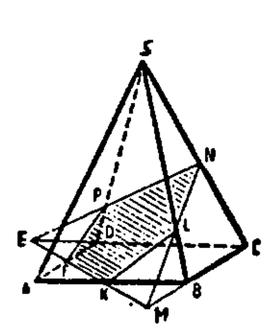
بنابراین، منشور سوم $\frac{۱}{۴}$ حجم هشت وجهی PLL_1P_1KN را از آن جدا می‌کند و بخش مشترک سه منشور حجمی برابر $\frac{۳}{۴}$ حجم آن دارد؛ یعنی حجم بخش مشترک برابر است با

$$\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۴}$$

III. دربارهٔ مقطع یک جسم، ضمن برخورد با یک صفحه. اغلب به مساله‌هایی برمی‌خوریم که در آنها صفحه‌ای یک چند وجهی (مکعب، هرم، منشور) را بریده است و می‌خواهیم بدانیم، این صفحه، حجم چند وجهی را به چه نسبتی قطع کرده است. برای حل چنین مساله‌هایی با دو گونه دشواری روبه‌رو می‌شویم: ۱) رسم مقطع و ۲) محاسبهٔ حجم هر یک از دو بخشی که بعد از برش چند وجهی به دست آمده است. ولی اگر برای حل مساله به ساختمان‌هایی بیرون از چند وجهی، تن در دهیم، می‌توانیم این دشواری‌ها را، تا حد زیادی کم کنیم. یکی از این مساله‌ها را دربارهٔ یک چند وجهی منتظم در نظر می‌گیریم (حل مساله، برای حالتهای کلی‌تر، یعنی چند وجهیهای دلخواه، تفاوت چندانی با این حالت ویژه ندارد).

مسالهٔ ۱۲. هرم منتظم SABCD به رأس S داده شده است. صفحه‌ای از نقطه‌های وسط یالهای AB، AD و CS گذرانده‌ایم. این صفحه، حجم هرم را به چه نسبتی قطع می‌کند؟

K و F را، به ترتیب، وسط ضلع‌های AB و AD می‌گیریم (شکل ۱۲)؛ این دو نقطه را به هم وصل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا امتداد ضلعهای CB و CD را به ترتیب، در M و E قطع



شکل ۱۲

کند. از مقایسهٔ مثلثهای AKF، BKM و DEF، به دست می‌آید:

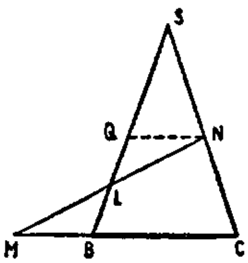
$$|MB|=\frac{۱}{۲}|BC| \quad \left(|MC|=\frac{۳}{۲}|BC|\right),$$

$$|ED|=\frac{۱}{۲}|DC| \quad \left(|EC|=\frac{۳}{۲}|DC|\right)$$

N را وسط یال CS می‌گیریم. نقطه‌های N و M، روی وجه SBC قرار دارند؛ بنابراین، خط راست MN، یال BS را در نقطه‌ای مانند L قطع می‌کند.

اکنون ببینیم، نقطهٔ L، یال BS را به چه نسبتی قطع می‌کند. برای این منظور، در مثلث CBS (شکل ۱۳)، خط راست NQ را ــ که وسط دو ضلع CS و BS را به هم وصل می‌کند ــ رسم می‌کنیم. مثلثهای NQL و LBM، که به این طریق به دست می‌آیند، با هم برابرند، زیرا:

$$|BM|=|NQ|=\frac{۱}{۲}|BC|, \quad L\hat{B}M=N\hat{Q}L, \quad B\hat{M}L=Q\hat{N}L$$



شکل ۱۳

از برابری این دو مثلث نتیجه می‌شود:

$$|BL|=|QL|$$

از این جا روشن می‌شود که نقطهٔ L، یال BS را به نسبت ۱ : ۳ بخش کرده است.

چون نقطه‌های E و N بر صفحه وجه SBC قرار دارند، خط راست EN، یال SD را در نقطه‌ای مانند P قطع می‌کند. به سادگی می‌توان ثابت کرد، این نقطه هم، یال DS را به نسبت ۱ : ۳ بخش می‌کند.

به این ترتیب توانستیم مقطع مورد نظر خود را بسازیم. صفحهٔ این مقطع، هرم را در پنج ضلعی LKFPN قطع و آن را به دو چند وجهی بخش می‌کند، که البته حجم آنها را نمی‌توان به سادگی پیدا کرد. برای محاسبهٔ دست کم یکی از این حجم‌ها باید ساختمانهای تازه‌ای اندیشید و چند هرم را مورد بررسی قرار داد.

اگر شکل را دقیقتر مورد مشاهده قرار دهیم، قانع میشویم که، حجم چند وجهی CDFKBLNP (که به وسیلهٔ مثلثهای DFP و KLB ، چهار ضلعیهای CNLB و CDPN، پنج ضلعیهای PFKLN و DFKBC احاطه شده است)، برابر است با حجم چهار وجهی NECM، به شرطی که حجمهای دو چهار وجهی LKBM و PEDF از آن کم شود.

حجم هر یک از این سه هرم را محاسبه می‌کنیم.

ارتفاع هرم مفروض SABCD را برابر h و طول ضلع قاعده آن را برابر a می‌گیریم ؛ در این صورت، حجم هرم SABCD ، چنین می‌شود.

$$V=\frac{1}{3}a^2h$$

چون نقطهٔ N وسط یال CS است، به سادگی می‌توان ثابت کرد، طول عمود وارد از این نقطه بر صفحهٔ ABCD، برابر است با نصف طول عمودی که از نقطهٔ S بر صفحهٔ ABCD فرود آید، یعنی طول این عمود برابر $\frac{1}{2}h$ می‌شود. به همین ترتیب روشن می‌شود، که طول هر یک از عمودهای وارد از نقطه‌های L و P بر صفحهٔ ABCD، برابر $\frac{1}{4}h$ است.

مساحت مثلث ECM برابر است با $\frac{9}{8}a^2$ و مساحت هر یک از مثلثهای DEF و BMK برابر است با $\frac{1}{8}a^2$ به این ترتیب، حجم هرم NECM چنین می‌شود :

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}h\times\frac{9}{8}a^2=\frac{3}{16}ha^2=\frac{9}{16}V$$

و حجم هر یک از هرمهای PEFD و LKBM برابر است با

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}h\times\frac{1}{8}a^2=\frac{1}{96}ha^2=\frac{1}{32}V$$

بنابراین، برای حجم چند وجهی CDFKBLNP به دست می‌آید :

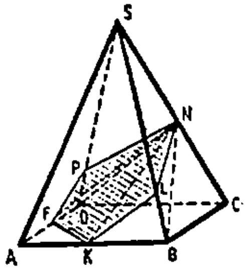
$$V_1=\frac{9}{16}V-2\times\frac{1}{32}V=\frac{1}{2}V$$

یعنی صفحهٔ مفروض، حجم هرم را به نسبت ۱ : ۱ تقسیم می‌کند.

توجه کنید : اگر برای محاسبهٔ حجم چند وجهی CDFKBLWP ، از این‌راه استفاده نمی کردیم، گرفتار محاسبه‌ای طولانی می‌شدیم. با وجود این، برای مقایسه، این راه طولانیتر را، که کمتر عینی و ملموس است، می‌آوریم.

دو صفحه، یکی از نقطه‌های K و B و N و دیگری از نقطه‌های N و D و F می‌گذرانیم (شکل ۱۴). این دو صفحه، ضمن برخورد، چند وجهی CDFKBLNP را به سه هرم بخش می‌کنند :

هرم NKBCDF (به رأس N و قاعده KBCDF)، هرم NKPL (به رأس N و قاعده KBL) و هرم NPDF (به رأس N و قاعده PDF).



شکل ۱۴

حجم این هرمها را محاسبه می‌کنیم.

چون نقطهٔ N یال CS را به دو بخش برابر تقسیم می‌کند، طول عمودی که از نقطهٔ N بر صفحه ABCD فرود آید، برابر با نصف طول ارتفاع هرم مفروض، یعنی برابر $\frac{1}{2}h$ است.

مساحت پنج ضلعی KBCDF ، برابر است با مساحت مربع ABCD ، به شرطی که مساحت مثلث AKF از آن کم شود، یعنی

$$S_{KBCDF}=a^2-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}a^2=\frac{7}{8}a^2$$

بنابراین حجم V_1 از هرم NKBCDF ، چنین می‌شود :

$$V_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}h\times\frac{7}{8}a^2=\frac{7}{48}ha^2=\frac{7}{16}V$$

(V را حجم هرم SABCD گرفته‌ایم).

اکنون V_2 ، حجم هرم NKBL را پیدا می‌کنیم.

یادآوری می‌کنیم، V ، حجم هرم SABCD، دو برابر حجم هرم SABC است که، در آن، C رأس و ABS قاعده باشد. ارتفاع هرم اخیر را h_1 می‌گیریم ؛ در این صورت

$$\frac{1}{2}V=\frac{1}{3}h_1.S_{ABS}\Rightarrow V=\frac{2}{3}h_1.S_{ABS}$$

چون نقطهٔ N وسط یال CS است، عمود وارد از این نقطه بر

صفحهٔ ABS (یعنی ارتفاع هرم NKBL) برابر $\frac{1}{2}h_1$ می‌شود.
در ضمن $|BL|=\frac{1}{4}|BS|$ و $|KB|=\frac{1}{2}|AB|$ بنابراین

$$S_{KBL}=|BL|.\sin K\hat{B}L\times\frac{1}{2}|KB|=\frac{1}{8}S_{ABS}$$

و حجم V_2 را می‌توان به این ترتیب بیان کرد :

$$V_2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}h_1\times\frac{1}{8}S_{ABS}=\frac{1}{32}V$$

به همین ترتیب V_3 ، حجم هرم NPDF هم به‌دست می‌آید :

$$V_3=\frac{1}{32}V$$

اکنون دیگر حجم چند وجهی CDFKBLNP محاسبه می‌شود :

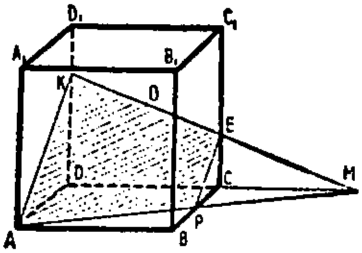
$$V_4=V_1+V_2+V_3=\frac{1}{2}V$$

یعنی هرم مفروض، به وسیلهٔ صفحهٔ قاطع، به نسبت ۱:۱ تقسیم شده است.

در مساله‌ای که حل کردیم، کم و بیش روشن بود که در مقطع، یک پنج ضلعی به دست می‌آید. ولی اگر یکی از نقطه‌های مشخص کنندهٔ مقطع، در درون چند وجهی قرار می‌گرفت، دیگر نمی‌شد شکل مقطع را، خیلی زود تصور کرد. حل چنین مساله‌هایی، اغلب طولانی و نیازمند ساختمانهای اضافی است. در این گونه موردها، می‌توان صفحه‌ای کمکی رسم کرد که از یک خط راستِ واقع بر مقطع مورد نظر و یک خط راستِ واقع بر یکی از وجه‌های چند وجهی گذشته باشد. بعد باید نقطهٔ برخورد این دو خط راست را پیدا کرد، یعنی یک نقطهٔ اضافی از مقطع که بر یکی از وجه‌های چند وجهی قرار دارد. دنبالهٔ کار، شبیه روشی است که برای حل مسالهٔ ۱۲ به کار گرفتیم.

مسالهٔ ۱۳. مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ، با یالهای جانبی AA_1 ، BB_1 و CC_1 مفروض است. اگر صفحه‌ای، از نقطهٔ A و وسط یال BC و مرکز وجه DCC_1D_1 بگذرانیم، حجم مکعب به چه نسبتی تقسیم می‌شود؟

وسط یال BC را P می‌نامیم (شکل ۱۵) خط راستی که از نقطه‌های A و P بگذرد، امتداد یال DC را در نقطهٔ M قطع می‌کند ؛در ضمن داریم : $|CM|=|DC|$. مرکز وجه DCC_1D_1 را O می‌نامیم. در این صورت، خط راستی که از نقطه‌های O و M می‌گذرد، یالهای CC_1 و DD_1 را به ترتیب در E و K قطع می‌کند. در ضمن نقطهٔ E یال C_1C را به نسبت ۱ :۲ و نقطهٔ K ، یال D_1D را به نسبت ۲ :۱ تقسیم می‌کند. حجم چند وجهی ABCDKE برابر است با تفاضل حجمهای دو چهار وجهی KAMD و EPMC. اگر حجم مکعب مفروض را V و حجم هرمهای KAMD و EPMC را به ترتیب V_1 و V_2 و حجم چند وجهی ABCDAE را V_3 بنامیم، به دست می‌آید (خودتان محاسبه کنید) :



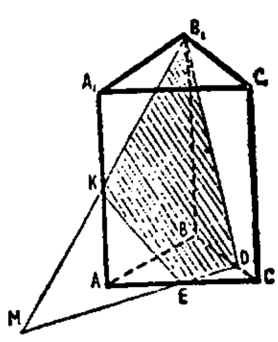
شکل ۱۵

$$V_1=\frac{2}{9}V,\ \ V_2=\frac{1}{36}V,\ \ V_3=\frac{7}{36}V$$

یعنی صفحه‌ای که مکعب را بریده است، حجم آن را به نسبت ۲۹ :۷ تقسیم می‌کند.

مسالهٔ ۱۴. منشور منتظم $ABCA_1B_1C_1$ ، با یالهای جانبی AA_1 ، BB_1 و CC_1 داده شده است. از وسط یالهای AA_1 و AC و رأس B صفحه‌ای گذرانده‌ایم. این صفحه، حجم منشور را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

وسط یال AA_1 را K می‌نامیم (شکل ۱۶). خط راستی که از نقطه‌های B_1 و K می‌گذرد، امتداد یال BA را در نقطهٔ M قطع می‌کند. در ضمن $|MA|=|AB|$. نقطه‌های M و E را با یک خط راست به هم می‌پیوندیم (E، وسط یال AC است) ؛ این خط راست، یال BC را در نقطهٔ D قطع می‌کند ؛ در ضمن پاره‌خط راست BC، در نقطهٔ D، به نسبت ۱:۲ تقسیم می‌شود.



شکل ۱۶

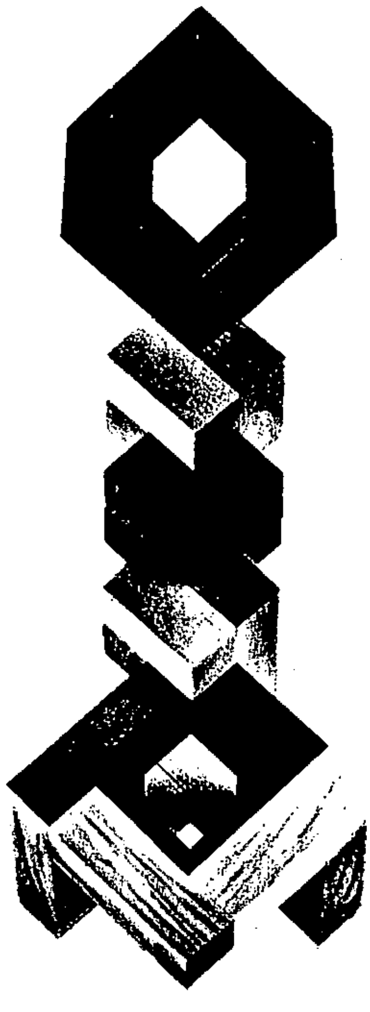
حجم جند وجهی $ABDEKB_۱(V_۳)$ برابر است با تفاوت حجمهای دو هرم $B_۱BDM$ و $KAEM(V_۲, V_۱)$ و داریم:

$$V_۱ = \frac{۴}{۹}V, \quad V_۲ = \frac{۱}{۱۲}V,$$

$$V_۳ = V_۱ - V_۲ = \frac{۱۳}{۳۶}V$$

که در آن V ، حجم منشور مفروض است. بنابراین، صفحهٔ مقطع، حجم منشور را به نسبت ۲۳ :۱۳ تقسیم می‌کند.

تابعد

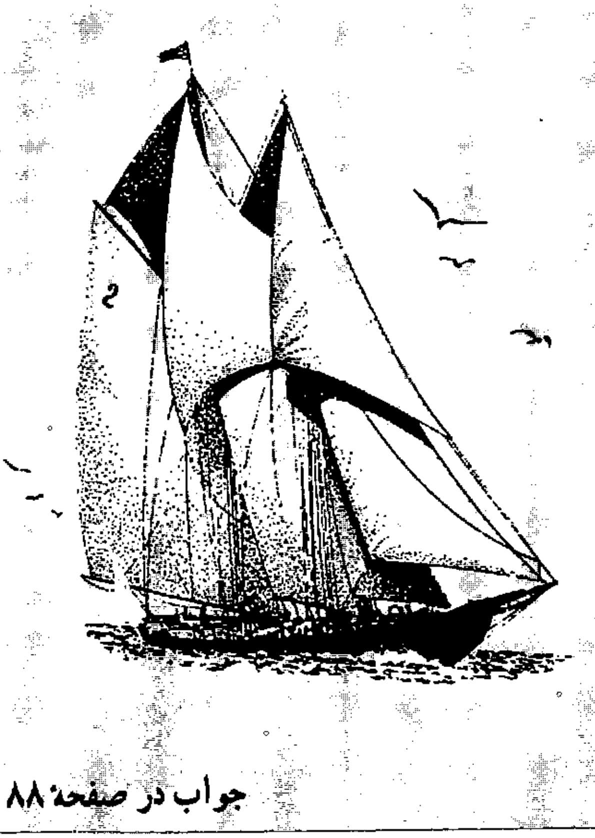


تفریح اندیشه ۱

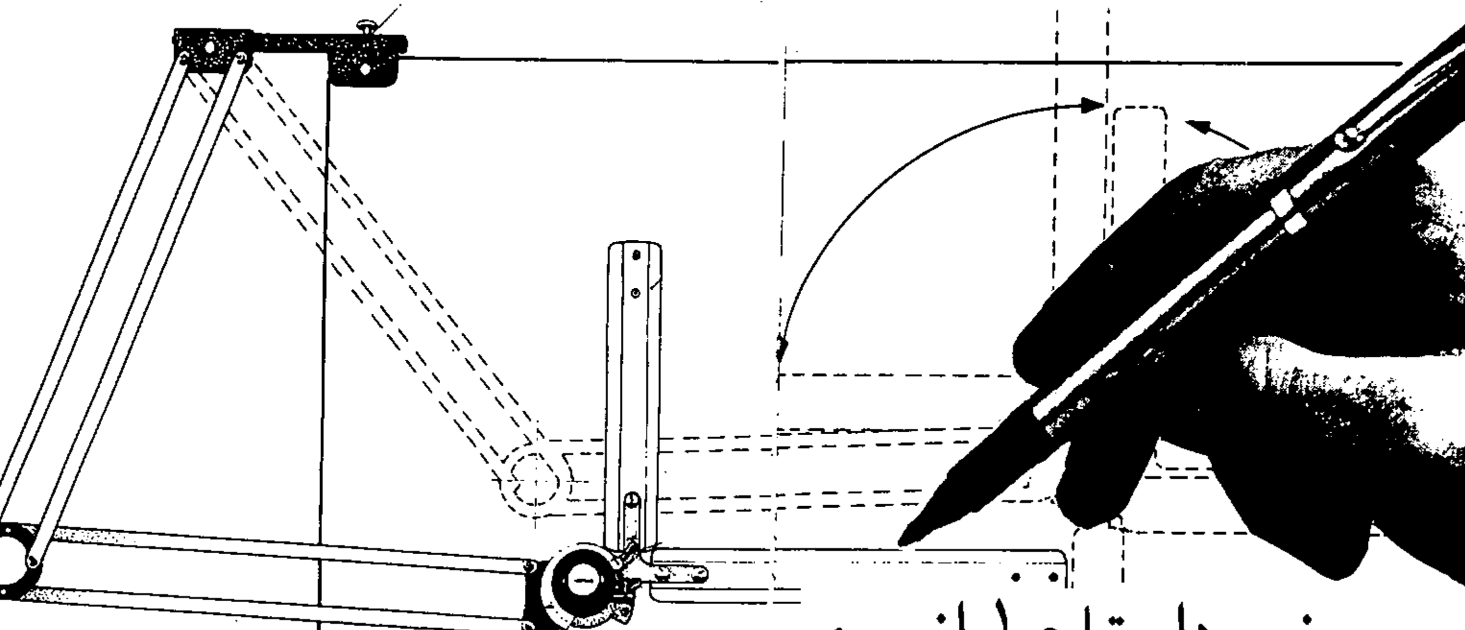
تعدادی جعبه

آقای اعتباری کارمند کشتیرانی با سفارش غیرمعمول بسته‌بندی ۱۰۰ جعبه روبرو شده بود. هر جعبه باید به شکل مکعب و ضلع هر مکعب یک اینچ طولانیتر از مکعب قبلی، و ضلع کوچکترین مکعب ۱ اینچ باشد.

می‌توانید راهی ساده برای یافتن سطح کل پارچهٔ لازم به او نشان دهید؟ و در ضمن حجم محصور توسط ۱۰۰ جعبهٔ مزبور را؟



جواب در صفحهٔ ۸۸

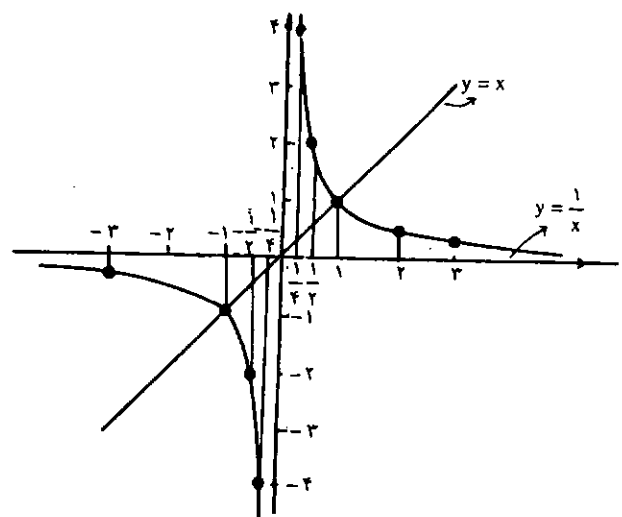


رسم نمـودار تابع $\frac{1}{f}$ از روی نمودار تابع f

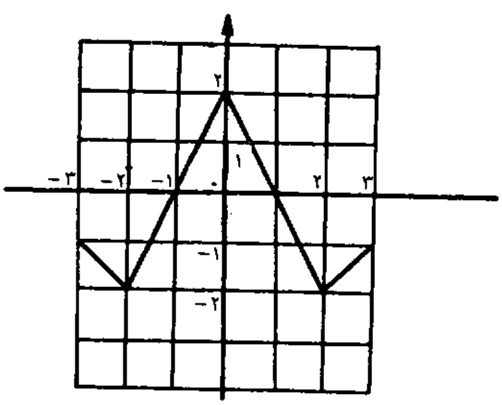
احمد قندهاری

۱ــ فرض کنیم تابع f به معادله $f(x)=x$ باشد. می‌خواهیم تابع به معـادله $y=\frac{1}{f(x)}$ یا $y=\frac{1}{x}$ را رسم کنیم. جدول زیر را تشکیل می‌دهیم. آن‌گاه به کمک مختصّات نقاط، نمودار تابع به معادله $y=\frac{1}{x}$ را رسم می‌کنیم.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)=x$	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$y=\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	تعریف نشده	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$



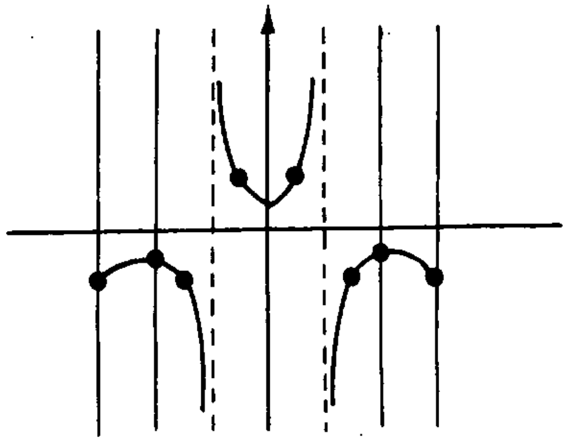
۲ــ فرض کنیم شکل زیر نمودار تابع f باشد. نمـودار تابع $y=\frac{1}{f}$ را رسم می‌کنیم.



نمودار تابع f

نتایج حاصل از نمودار را در جدول زیر تنظیم می‌کنیم.

x	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3
$f(x)$	-1	-2	-1	0	1	2	1	0	-1	-2	-1
$y=\frac{1}{f(x)}$	-1	$-\frac{1}{2}$	-1	تعریف نشده	1	$\frac{1}{2}$	1	تعریف نشده	-1	$-\frac{1}{2}$	-1



نمودار تابع $y=\frac{1}{f}$

۳ـ توجه : در مورد دو تابع f و $\frac{1}{f}$ نتایج زیر برقرار است . فرض می‌کنیم f تابعی پیوسته و $D_f \subset R$

الف : اگر f تابعی اکیداً صعودی باشد، آن‌گاه تابع $\frac{1}{f}$ ، اکیداً نزولی است.

ب : اگر f تابعی اکیداً نزولی باشد، آن‌گاه، تابع $\frac{1}{f}$ ، اکیداً صعودی است.

پ : اگر $f(x) > 0$ ، آن‌گاه $\frac{1}{f(x)} > 0$

ت : اگر $f(x) < 0$ ، آن‌گاه $\frac{1}{f(x)} < 0$

ث : اگر $f(x) = 1$ ، آن‌گاه $\frac{1}{f(x)} = 1$

ج : اگر $f(x) = -1$ ، آن‌گاه، $\frac{1}{f(x)} = -1$

چ : اگر $f(x) \to 0^+$ ، آن‌گاه $\frac{1}{f(x)} \to +\infty$

ح : اگر $f(x) \to 0^-$ ، آن‌گاه $\frac{1}{f(x)} \to -\infty$

خ : اگر $f(x) \to +\infty$ ، آن‌گاه $\frac{1}{f(x)} \to 0^+$ درنتیجه خط به معادله $y = 0$ مجانب افقی تابع $\frac{1}{f}$ است.

د : اگر $f(x) \to -\infty$ ، آن‌گاه، $\frac{1}{f(x)} \to 0^-$ درنتیجه خط به معادله $y = 0$ مجانب افقی تابع $\frac{1}{f}$ است.

ذ : اگر $b \neq 0$ و $M\Big|_{b}^{a}$ نقطه ماکزیمم (می‌نیمم) نسبی تابع f باشد، آن‌گاه $M'\Big|_{\frac{1}{b}}^{a}$ نقطه می‌نیمم (ماکزیمم) نسبی تابع $\frac{1}{f}$ است.

ر : اگر $P\Big|_{0}^{a}$ نقطه اکسترمم تابع f باشد، آن‌گاه خط به معادله $x = a$ انفصال مضاعف تابع $\frac{1}{f}$ است.

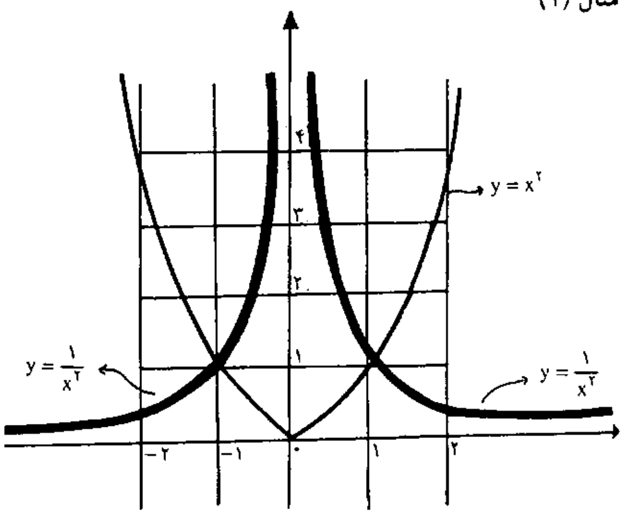
ز : اگر $K\Big|_{0}^{a}$ نقطه عادی تابع f باشد، آن‌گاه خط به معادله $x = a$ ، انفصال ساده تابع $\frac{1}{f}$ است.

س : صفرهای تابع f، معادلات مجانبهای قائم منحنی تابع $\frac{1}{f}$ است.

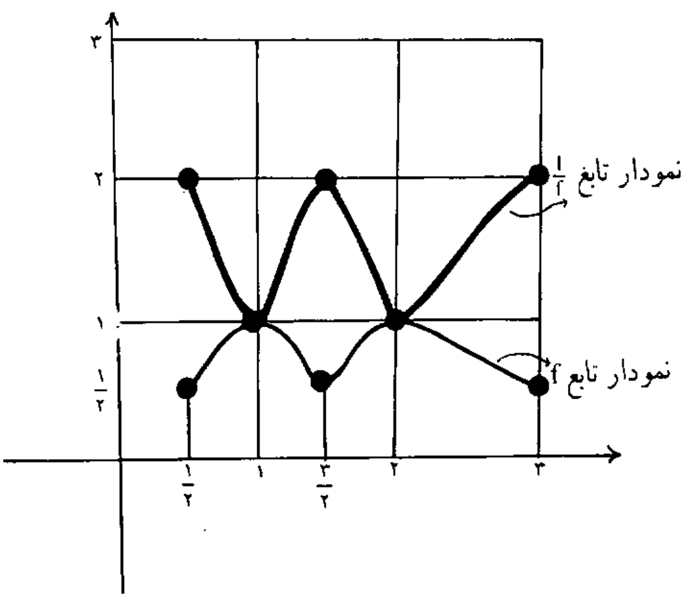
ش : اگر f تابع ثابت باشد، آن‌گاه $\frac{1}{f}$ هم تابع ثابت است.

با توجه به مطالب گفته شده نمودارهای چند تابع f و $\frac{1}{f}$ را در یک صفحه محورهای مختصّات رسم می‌کنیم.

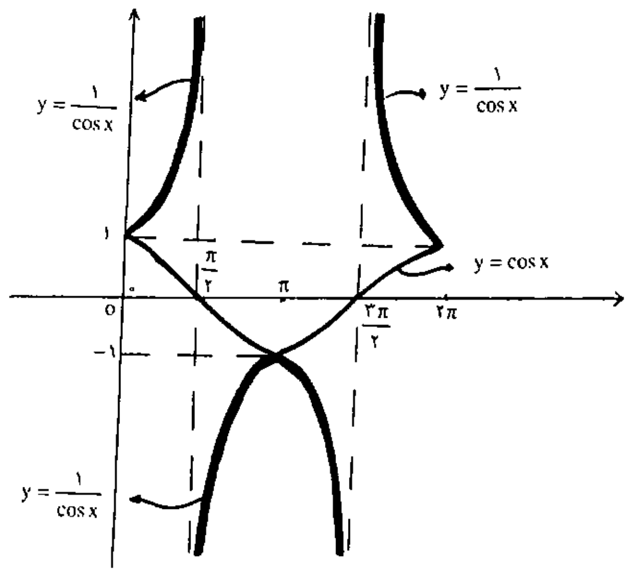
مثال (۱)

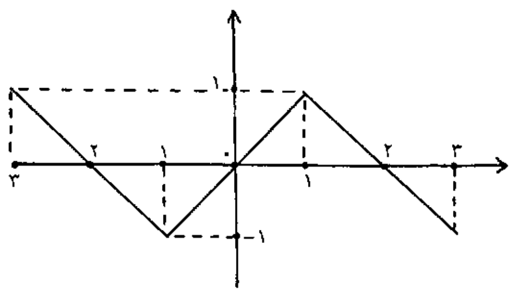


مثال (۲)

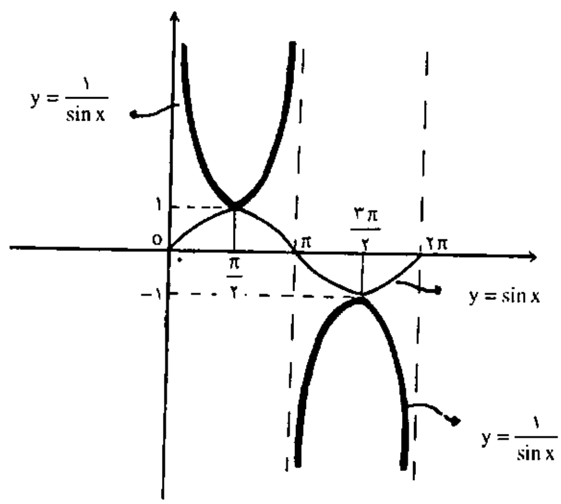


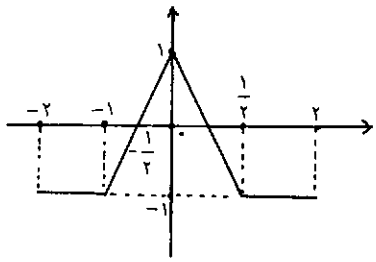
مثال (۳)

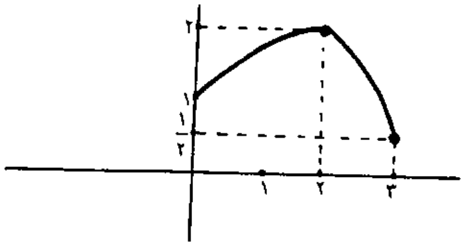




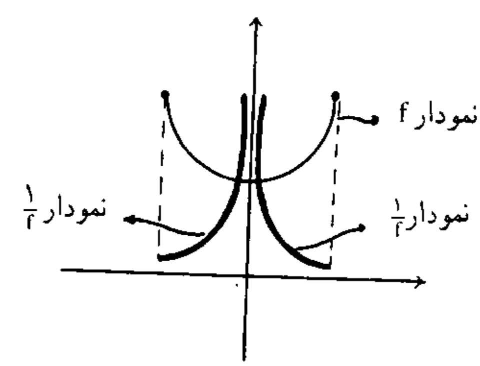
مثال (۴)

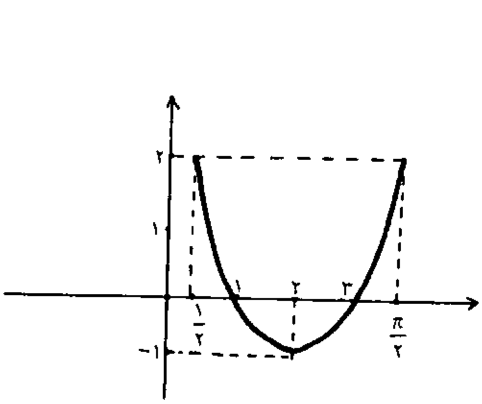




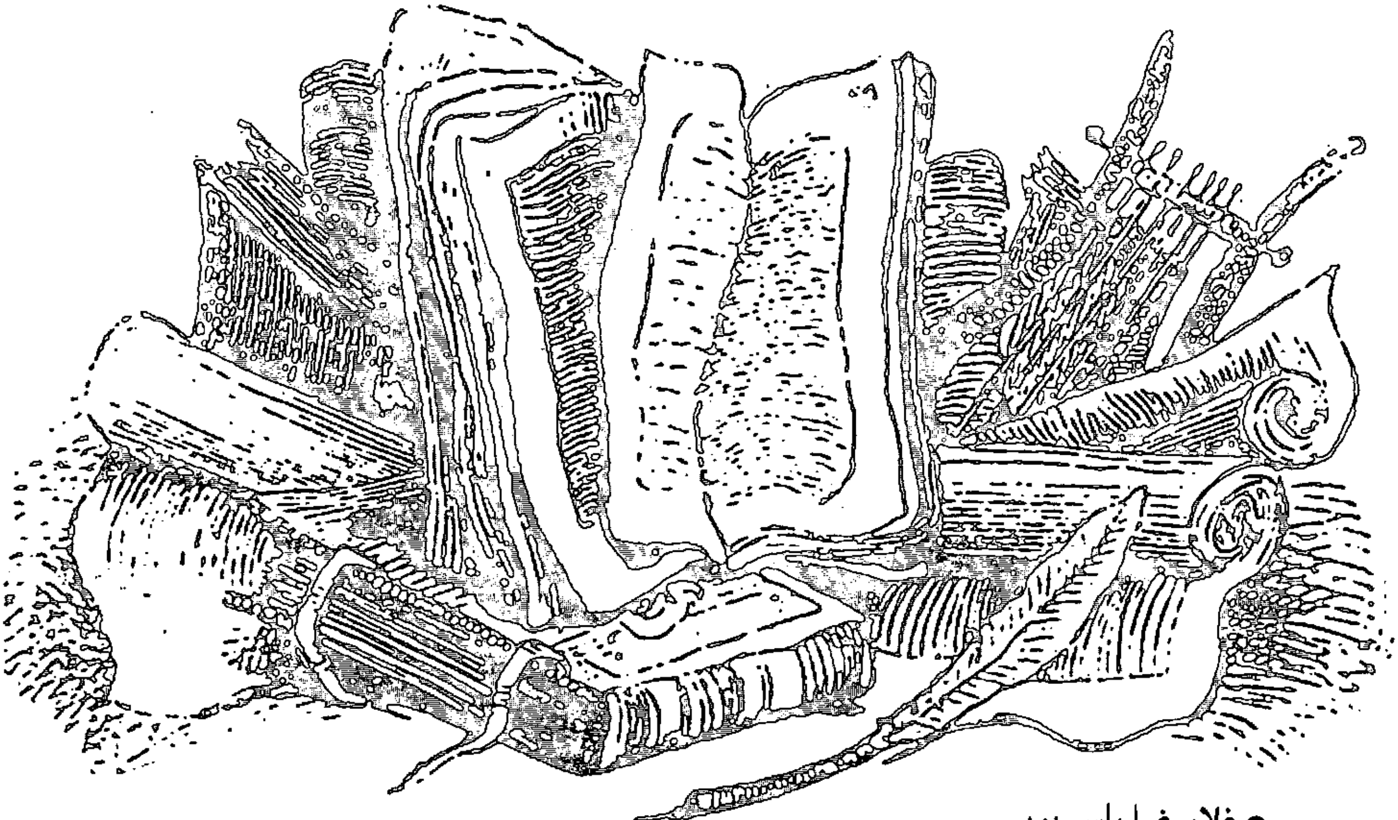


مثال (۵)





تمرین: نمودار تابع f داده شده است. نمودار تابع $\frac{۱}{f}$ را رسم کنید.



● غلامرضا یاسی‌پور

تاریخچهٔ مجلات ریاضی در ایران (۲۰)

در بررسی مجلات ریاضی ایران به شمارهٔ ۲۶ یکان رسیده‌ایم. دورهٔ جدید مجله با این شماره آغاز می‌شود. مجله تا این شماره بنا به گواهی عدد ۲۶، توفیق این را داشته است که ۲۶ شماره چاپ شود. علاوه بر این ۶ کتاب دیگر نیز از انتشارات این مجله تا این تاریخ، یعنی از خرداد ۱۳۴۵ است. این کتابها عبارت‌اند از: مجموعهٔ علمی یکان سال، یکان سال مخصوص، راهنمای ریاضیات متوسطه، معماهای ریاضی، مسائلی از حساب استدلالی، یکان سال ۱۳۴۴.

در این شمارهٔ مجله مصاحبه‌ای دارد با مرحوم پروفسور تقی فاطمی که از مطالب خواندنی آن است، از دیگر مطالب خواندنی مجله خاطراتی از کنگره‌های بین‌المللی ریاضیدانان به قلم دکتر محسن هشترودی است.

در این‌جا برای استفادهٔ بیشتر خوانندگان قسمتهایی از مصاحبه با استاد پروفسور تقی فاطمی را می‌آوریم.

ـ جناب استاد، اطلاع بر بیوگرافی جنابعالی، آرزوی همهٔ کسانی است که محضر درس شما را درک کرده‌اند. به علاوه، بیوگرافی حضرتعالی گوشه‌ای از تاریخ ریاضیات معاصر ایران خواهد بود. تقاضا دارد مختصری از شرح حال خود، سابقهٔ تحصیلات در ایران و در خارج، مقامات علمی که تاکنون عهده‌دار بوده‌اید، بیان فرمایید.

ـ قبل از تحصیلات عالیه، در یزد به عنوان «مفتش معارف» خدمت می‌کردم و ضمن آن در مدارس آن‌جا به تدریس اشتغال داشتم.

بعد که در اصفهان مدرسهٔ متوسطه دایر شد، به آن‌جا رفتم و دو سال آخر تحصیلات متوسطه را در مدرسهٔ صارمیه گذراندم. مدیر این مدرسه آقای ضیاءالدین جناب بودند، که هنوز هم مشغول به خدمت فرهنگ می‌باشند و اگر در کارخود توفیقی داشته‌ام، آن‌را مرهون تشویقهای ایشان می‌دانم. از جمله معلمان مرحوم مهندس علی ریاضی و مرحوم غلامحسین زیرک زاده بودند و دیگری استاد جلال همایی، که نه تنها حق تعلیم بر بسیاری از اشخاص را دارد، بلکه با تبحری که در بیشتر علوم و فنون دارد و با تحقیقات و تتبعاتی که در آثار گذشتگان از علمای ایرانی به عمل آورده است، فردی ممتاز می‌باشد.

در سال ۱۳۰۶ با اولین دستهٔ محصلین که از طرف وزارت

● استاد تقی فاطمی

جنگ به فرانسه اعزام می‌شد به این کشور رفتم. با وجود این‌که در امتحان مسابقهٔ اعزام رتبهٔ اول شده بودم و می‌توانستم رشتهٔ پزشکی را که آن موقع داوطلب زیاد داشت و از نظر مادی هم دورنمای خوبی داشت انتخاب کنم، اما به علت شوق باطنی، رشتهٔ معلمی را انتخاب کردم و داوطلب ورود به «دانشسرای عالی» Ecole Normale Supérieure پاریس شدم. در فرانسه هنوز دیپلم ایران را نمی‌شناختند. مرا در کلاس پایان تحصیلات متوسطه قبول کردند. اما بعد از یکی دو هفته که معلومات مرا سنجیدند به کلاس تهیهٔ «Mathématiques spe′ciales» دانشگاه منتقل شدم. به‌علاوه همین موضوع باعث شد که از آن تاریخ به بعد در فرانسه، دیپلم ایران را بشناسند. سه سال در کلاس تهیه ماندم و بعد در امتحان مسابقهٔ ورودی مدارس بزرگ شرکت کردم. در امتحان کتبی پذیرفته شدم، اما فقط در امتحان شفاهی «اکل نرمال سوپریور» شرکت کردم و پذیرفته شدم. طبق معمول در سال اول، دروس دورهٔ لیسانس ریاضی را تهیه کردم و گذراندم و در دو سال آخر دورهٔ مدرسه برای تعلیم و تدریس مهیا شدم و ضمناً یک دیپلم هندسهٔ عالی را گرفتم. بالاخره در آخرین مرحله، امتحان آگرگاسیون راگذراندم و قبول شدم. در این موقع، سال ۱۳۱۲، به ایران برگشتم. ابتدا دو سه ماهی منحصراً در مدارس نظام مشغول بودم. بعد، با اقداماتی که از طرف وزارت فرهنگ به عمل آمد به آن وزارت منتقل شدم و در دانشکدهٔ علوم و دانشسرای عالی به تدریس مشغول شدم، علاوه بر آن، در دانشکدهٔ فنی هم تدریس داشتم در ابتدای ورود، در چند رشته تدریس می‌کردم؛ علاوه بر مکانیک استدلالی که هنوز هم درس می دهم، مادامی که استاد به قدر کافی نبود، در دانشکدهٔ علوم، ریاضیات عمومی و آنالیز را نیزتدریس می‌کردم.

غیر از تدریس، فقط چند ماهی در وزارت فرهنگ به عنوان مدیر کل فنی خدمت کرده‌ام. بعد آن را کنار گذاشتم: شغل معلمی را به هر کار دیگر ترجیح می‌دهم.

ــ آیا جناب عالی تنها معلم ایرانی هستید که تحصیلات تخصصی خود را در دانشسرای عالی فرانسه گذرانده‌اید؟ و آیا این مدرسهٔ عالی هنوز هم از لحاظ تربیت معلم مقام اول را در دنیا دارد؟ دربارهٔ این مدرسهٔ عالی مختصری بیان فرمایید.

ــ در فرانسه چند مدرسهٔ عالی هست که به آنها مدارس بزرگ (Lesgrands Ecoles) می‌گویند. از معروفترین این مدارس یکی «پلی‌تکنیک» است که در زمان ناپلئون بزرگ تأسیس شده است. دیگری «اکل نرمال سوپریور» است که حدود صد سال از تأسیس آن می‌گذرد. هم امتحان مسابقهٔ ورودی و هم امتحان نهایی این مدرسه بسیار مشکل است. برای جواب دادن به بعضی از سؤالات امتحانی هفت یا هشت ساعت وقت می‌دهند. هرکس چه فرانسوی و چه غیر آن می‌تواند در امتحان

مسابقهٔ ورودی این مدرسه شرکت کند. تاکنون مردان بزرگی از این مدرسه بیرون آمده‌اند، مثل پوانکاره و رجال سیاسی یا علمی دیگر مانند ادوارد هریو، اغلب رؤسای دولتهای فرانسه فارغ‌التحصیلان این مدرسه هستند.

ـ آیا از ایرانیان فقط جناب عالی فارغ‌التحصیل آگرژهٔ این مدرسه هستید؟ آیا اشخاص دیگری هم هستند؟

ـ گمان می‌کنم تنها باشم.

ـ از زمان تأسیس مدارس به سبک جدید در ایران، چه استادان و معلمانی در تعلیم و اشاعهٔ ریاضیات تأثیر کلی داشته‌اند؟ و نحوهٔ تأثیر آنها چگونه بوده است؟

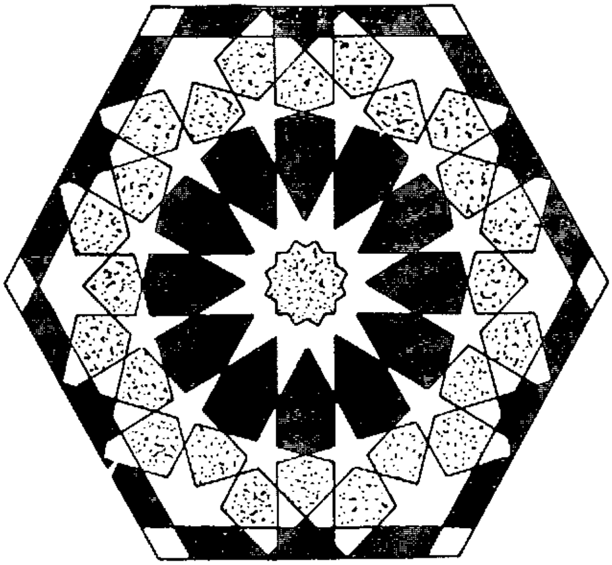
ـ سیر تکاملی دنیا تعلیم و پیشرفت ریاضیات را در ایران ایجاب کرده است. از معلمان قدیمی مرحوم غلامحسین رهنما، عشقی وافر به تدریس ریاضیات داشت و با وجود نداشتن تحصیلات منظم بیش از دیگران در پیشرفت ریاضیات ایران تأثیر داشته است. اشخاصی دیگر هم بوده‌اند که بیشتر تأثیر آنها از راه ترجمهٔ کتابهای ریاضی بوده است.

ـ از ابتدای تأسیس (مدارس ابتدایی، متوسطه و عالی) در ایران تاکنون چه تحولاتی در نحوهٔ تدریس ریاضیات انجام گرفته است؟ آیا این تحولات در جهت مطلوب آن انجام گرفته است یا در جهت عکس آن؟

ـ هیچ تغییر و تحولی حاصل نشده است. متأسفانه به همان سبک قدیمی، بدون تغییر برنامه، محفوظ مانده است. قریب چهل یا پنجاه سال است که برنامه‌ای از فرانسه ترجمه شده است و این برنامه تاکنون بدون هیچ تغییری اجرا شده است. چند مرتبه‌ای هم که تغییر برنامه عنوان شده است، فقط موادی از برنامهٔ سابق یا پیش و پس شده و یا حذف گردیده است، در حالی که در خود فرانسه، کل برنامه‌ها تغییر اساسی کرده است. طرز تدریس هم، با کمال تأسف، هیچ تغییر نکرده است.

ـ اقداماتی که تاکنون برای تربیت دبیران و معلمان ریاضی مدارس ایران انجام گرفته، تا چه حد موفقیت‌آمیز بوده است؟ به عقیدهٔ جناب عالی، آیا این اقدامات بر اساس صحیحی استوار بوده است؟

ـ تربیت معلم ریاضی از واجبات است، در این موضوع شکی نیست. آن‌چه هم که تاکنون دربارهٔ تربیت معلمان ریاضی ایران انجام گرفته لازم بوده اما به هیچ وجه کافی نبوده است. طرز تربیت ناقص است؛ از جهت کمیت، به قدر کافی دبیر و آموزگار تربیت نمی شود. از جهت کیفیت، وجود یک عده



معلمان علوم تربیتی برای تربیت معلم کافی نیست.

نکتهٔ مهم، انتخاب داوطلبان شغل معلمی است. باید با آنها مصاحبه شود و دقت شود که هم ذوق معلمی را داشته باشند و هم استعداد آن را و تنها به خاطر استخدام با رتبهٔ دبیری شرکت نکرده باشند. معلم باید دارای شرایط زیادی باشد، از جمله حاضرالذهن و حاضرالجواب باشد.

ـ نسبت به کمبود دبیر و آموزگار چه باید کرد؟ آیا کشورهای دیگر هم با این مسأله روبرو هستند؟

ـ در کشورهای دیگر هم این مسأله کاملاً حل نشده است. اما به نسبت زیادی از ما جلو هستند. حتی در آمریکا هم از این لحاظ در مضیقه هستند (اما در آنجا کسری دبیر را از دیپلمه‌ها تأمین نمی‌کنند). شاید در بعضی از کشورهای کاملاً پیشرفته مثل سوئد، این مساله حل شده باشد.

ـ دربارهٔ کتابهای درسی ریاضی که تاکنون در مدارس ایران مورد استفاده واقع شده است، نظر جناب عالی چیست؟ چه اقدام اساسی را برای بهبود وضع کتابهای درسی ضروری می‌دانید؟

ـ مؤلف کتاب باید در آن‌چه که می‌خواهد بنویسد، متبحر و به آن مسلط باشد. در قسمت ریاضی اشخاص زیادی نداشته‌ایم که در تعلیم ریاضیات متبحر و متخصص باشند، ناچار نمی‌توانسته‌اند مؤلف باشند. اما بعضی وقتها ترجمه‌های خوب شده است و این‌هم حداکثر کار خوبی بوده است که انجام گرفته است. بعضی هم که مترجم خوب نبوده‌اند و هر مطلبی را از گوشه‌ای فراهم آورده‌اند، کتاب آشفته‌ای تهیه کرده‌اند. تقریباً در ایران کتاب ریاضی خوب تألیف نشده است. آن‌چه انجام گرفته،

ترجمه بوده است، که اگر از کتابهای خوب ترجمه شده نتیجه خوب بوده است.

ــ راجع به تجدید نظری که اخیراً در مقاطع تحصیلی انجام گرفته و برنامه‌های آن در شرف تنظیم است، عقیدهٔ جناب عالی چیست؟

ــ اطلاعی ندارم.

ــ تدریس ریاضیات براساس نظریهٔ جدید را تا چه حد و از چه مرحله ای در مدارس ایران جایز می‌دانید؟

ــ به‌طورکلی ما هم باید با سایر کشورها همگام باشیم، نمی‌توانیم با روش قدیم درس بخوانیم، درحالی که اساس علوم و فنون تغییر کرده است. اما چگونه؟ باید سعی کنیم یاد بگیریم بسیاری از ایرانیان هستند که این رشته‌ها را تحصیل می‌کنند، آنها را بخواهیم، یا اینکه اشخاصی را برای این کار بفرستیم. برای معلمان شاغل هم باید کلاس کارآموزی ترتیب داد. کلاسی که واقعاً برای آنها آموزنده و قابل استفاده باشد، نه این‌که وقت آنها تلف شود و بالنتیجه بعدها هم از شرکت در چنین کلاسهایی خودداری کنند. علاوه بر آن، معلمان باید برای شرکت در کلاسهای کارآموزی یک نوع اجبار داشته باشند. قدرت مرکزی لازم است. باید راهنمایان تعلیماتی امین و وارد داشته باشیم تا گزارشهای دقیق و صحیحی بدهند و به گزارش ایشان هم ترتیب اثر داده شود.

بسیاری از قسمتهای برنامه هست که اصلاً اجرا نمی‌شود، مثلاً در کلاس پنجم ابتدایی طبق برنامه، تناسب باید از راه تحویل واحد انجام گیرد، اما تاکنون چنین نبوده است، با وجودی که راهنمایان تعلیماتی و بازرسان فنی هم داشته‌ایم. اصل آن است که معلمان علاقه‌مند باشند.

ــ برای پرورش خاص جوانان با استعداد چه روشی را پیشنهاد می‌فرمایید؟آیا تشکیل کلاسهای خاص را برای آنها جایز می‌دانید؟

ــ تشکیل کلاس مخصوصی برای آنها جایز نیست. جاهای دیگر هم چنین کلاسهایی نیست. باید تشویق شوند. در فرانسه به این‌گونه جوانان بورسهای تحصیلی می‌دهند و این کار از راه مسابقات انجام می‌گیرد.

ــ آیا جایز است که به محصلین با استعداد اجازه داده شود که بعضی از کلاسها را در تابستان بگذرانند. یعنی از یک کلاس به کلاس بالاتر جهش داشته باشند؟

ــ جهش از یک کلاس به کلاس بالاتر از لحاظ اطلاعات عمومی به محصل لطمه می‌زند، بهتر است که هرکس تمام کلاسها را ببیند.

ــ برای معلمان و دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی چه پیامی دارید که به وسیلهٔ مجلهٔ یکان به ایشان ابلاغ شود.

ــ معلمان به مقتضای شرایط سعی کنند، که همواره نسبت به تربیت فرزندان خود و ما، علاقهٔ خاص داشته باشند. موضوع اساسی آن است که مطالبی را که می‌خواهند بگویند، سعی داشته باشند برای مستمعین قابل فهم باشد. به عبارت ساده تر هیچ‌گاه در صدد اظهار فضل نباشند. فضل و امتیاز هر معلم در آن است که مطلبی را که می گوید، قابل استفاده باشد، نه آن‌که مسائلی را مطرح کند که شاید خودش هم برای حل آن احتیاج به مراجعهٔ به کتاب داشته باشد و این خود نکتهٔ مفید و مؤثری است.

غالباً دیده می‌شود که دانش‌آموزان از کتابهای علمی و حتی کتابهای درسی خود استفاده نمی‌کنند، و بیشتر اوقات، این مطلب بنابر توصیهٔ ضمنی معلمان انجام می‌گیرد. حال آنکه در مدرسه شاگرد باید طرز جدی خواندن کتاب و مطالعهٔ علمی را مثل یک مطلب درسی یاد بگیرد. محصل باید «محقق» بار آید و بتواند شخصاً دربارهٔ مطالب مورد علاقهٔ خویش به تحقیقات و مطالعات بپردازد. و با معلمین است که آنان را در این راه هدایت نمایند. خداوند همه را توفیق عنایت فرماید.

در حاشیهٔ تابع و مفهوم تابع
(قسمت سوّم)

• حمیدرضا امیری

اعمال جبری روی تابعها

اگر دو تابع f و g مفروض باشند، در این صورت مجموع $(f+g)$، تفاضل $(f-g)$، حاصل‌ضرب $(f.g)$ و خارج قسمت $(\frac{f}{g})$ این دو تابع تابعهایی هستند که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

الف) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

ب) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

ج) $(f.g)(x)=f(x).g(x)$

د) $(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

هـ) اگر $r\in\mathbb{R}$ و $(rf)(x)=rf(x)$

دامنهٔ تابعهای $(f+g)$، $(f-g)$ و $(f.g)$ دقیقاً اشتراک دامنه‌های f و g است و دامنهٔ $\frac{f}{g}$ نیز به جز نقاطی که $g(x)=۰$، اشتراک دامنه‌های f و g است. دامنه (rf) همان دامنهٔ f است.

برای درکِ بهتر و فهمِ عمیقتر به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال ۱: اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^{۲}-۱$، اولاً $(D_f\cap D_g)$ را مشخص کنید و ثانیاً حاصل $(f\pm g)$ و $(f.g)$ و $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.

$$D_f=\mathbb{R}^+\cup\{۰\}\quad,\quad D_g=\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow D_f\cap D_g=\mathbb{R}^+\cup\{۰\}$$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x}+x^{۲}-۱$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x}-x^{۲}+۱$$

$$(f.g)(x)=f(x).g(x)=\sqrt{x}(x^{۲}-۱)$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x}}{x^{۲}-۱}$$

توجه: دامنهٔ تابعهای $(f\pm g)$ و $(f.g)$ همان $D_f\cap D_g$ است ولی دامنهٔ تابع $(\frac{f}{g})(x)$ شامل ۱± نمی‌باشد یعنی،

$$D_{\frac{f}{g}}=\left(\mathbb{R}^+\cup\{۰\}\right)-\{-۱,۱\}$$

مثال ۲: اگردو تابع $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۵),(۴,۵),(۵,۰)\}$ و $g=\{(۱,۴),(۳,۰),(۵,۲),(۶,۱),(۷,۳)\}$ مفروض باشند، تابعهای $(f\pm g)$ و $(f.g)$ و $\frac{f}{g}$ و $(۴f)$ را مشخص کنید. قبل از هر چیز ابتدا $(D_f\cap D_g)$ را معین می‌کنیم،

$$D_f=\{۱,۲,۳,۴,۵\}\ ,$$

$$D_g=\{۱,۳,۵,۶,۷\}\Rightarrow D_f\cap D_g=\{۱,۳,۵\}$$

$\Rightarrow D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f.g} = \{۱,۳,۵\}$,

$D_{\frac{f}{g}} = \{۱,۳,۵\} - \{۳\} = \{۱,۵\}$

با توجه به $D_f \cap D_g$ واضح است که تابعهای $f+g$، $f-g$، و $f.g$ فقط می‌توانند روی ۱ و ۳ و ۵ اثر کنند و طبق تعریف داریم:

الف) $(f+g)(۱) = f(۱)+g(۱) = ۲+۴ = ۶$

$(f+g)(۳) = f(۳)+g(۳) = ۵+۰ = ۵$

$(f+g)(۵) = f(۵)+g(۵) = ۰+۲ = ۲$

به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$f+g = \{(۱,۲+۴),(۳,۵+۰),(۵,۰+۲)\}$

ب) به همین ترتیب $(f-g)$ نیز معین می‌شود (بعهدهٔ خواننده)، و در مورد $f.g$ داریم،

ج) $(f.g)(۱) = f(۱)\times g(۱) = ۲\times ۴ = ۸$

$(f.g)(۳) = f(۳)\times g(۳) = ۵\times ۰ = ۰$

$(f.g)(۵) = f(۵)\times g(۵) = ۰\times ۲ = ۰$

یا $\rightarrow f.g = \{(۱,۲\times ۴),(۳,۵\times ۰),(۵,۰\times ۲)\}$

د) $(\frac{f}{g})(۱) = \frac{f(۱)}{g(۱)} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$

$(\frac{f}{g})(۵) = \frac{f(۵)}{g(۵)} = \frac{۰}{۲} = ۰$

یا $\rightarrow \frac{f}{g} = \left\{(۱,\frac{۲}{۴}),(۵,\frac{۰}{۲})\right\} = \left\{(۱,\frac{۱}{۲}),(۵,۰)\right\}$

هـ) $(۴f)(۱) = ۴f(۱) = ۴\times ۲ = ۸$

$(۴f)(۲) = ۴f(۲) = ۴\times ۳ = ۸$

$(۴f)(۳) = ۴f(۳) = ۴\times ۵ = ۲۰$

$(۴f)(۴) = ۴f(۴) = ۴\times ۵ = ۲۰$

$(۴f)(۵) = ۴f(۵) = ۴\times ۰ = ۰$

و یا $\rightarrow ۴f = \{(۱,۴\times ۲),(۲,۴\times ۳),(۳,۴\times ۵),(۴,۴\times ۵),(۵,۴\times ۰)\}$

مثال ۳: اگر

$g(x) = \begin{cases} -x+۱ & x \geq ۲ \\ x-۲ & x < ۲ \end{cases}$ و $f(x) = \begin{cases} x^۲+۱ & x \geq ۱ \\ ۲x-۱ & x < ۱ \end{cases}$

مطلوب است محاسبهٔ $(f+g)$ و $f.g$

$D_g = D_f = \mathbb{R} \Rightarrow D_f \cap D_g = \mathbb{R}$

اگر $x \geq ۲ \Rightarrow (f+g)(x) = f(x)+g(x)$

$= (x^۲+۱)+(-x+۱) = x^۲ - x + ۲$

اگر $x < ۲$:

I) $۱ < x < ۲ \Rightarrow (f+g)(x) = (x^۲+۱)+(x-۲) = x^۲+x-۱$

II) $x < ۱ \Rightarrow (f+g)(x) = (۲x-۱)+(x-۲) = ۳x-۳$

III) $x = ۱ \Rightarrow (f+g)(۱) = f(۱)+g(۱) = ۲+(-۱) = -۱$

محاسبهٔ $(f.g)$ مطابق مطالب فوق و در حالتهای ذکر شده به عهدهٔ خواننده، واگذار می‌شود.

مثال ۴: اگر $f(x) = ۲\sqrt{x}$، و $g(x) = ۳\sqrt{x}$ تابع $(f.g)$ و دامنهٔ آن را مشخص کنید

$(f.g)(x) = f(x).g(x) = ۲\sqrt{x}\times ۳\sqrt{n} = ۶x$

در نگاه اول توقع داریم دامنهٔ $(f.g)$، $\mathbb{R}$ باشد زیرا $۶x$ برای هر عدد حقیقی معنی دارد امّا $D_f = \mathbb{R}^+ \cup \{۰\}$ و $D_g = \mathbb{R}^+ \cup \{۰\}$ و $D_{f.g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}^+ \cup \{۰\}$.

تذکر (قرارداد): برای نمایش $f.f$ از نماد $f^۲$ استفاده می‌شود و به همین ترتیب داریم:

$f^۳ = f.f^۲ \quad , \quad f^۴ = f.f^۳ \quad , \quad \ldots \quad , \quad f^n = f.f^{n-۱}$

ترکیب توابع

فرض کنیم تابع f با ضابطهٔ $f(x) = x^۲$ و تابع g با ضابطهٔ $g(x) = (x+۱)$ موجود بوده و بخواهیم عددی حقیقی مانند k را ابتدا تحت تأثیر تابع f و سپس حاصل آن را تحت تأثیر تابع g قرار دهیم در این صورت خواهیم داشت:

$f(k) = k^۲ \quad , \quad g(k^۲) = (k^۲+۱)$

حال اگر بخواهیم تابعی بسازیم که کار این دو تابع را یکجا برای ما انجام دهد و مستقیماً عدد حقیقی k را به $(k^۲+۱)$ تبدیل کند باید دو تابع f و g را با هم ترکیب کنیم، که در این صورت از نماد (gof) استفاده کرده و داریم:

$(gof)(x) = g(f(x))$

بنابراین با توجه به تابعهای f و g و تعریف فوق تابعی که

انتظارش را داشتیم به دست می‌آید،

$$(gof)(x)=g(f(x))=(f(x)+1)=(x^2+1)$$
$$\Rightarrow (gof)(k)=k^2+1$$

در واقع برای محاسبهٔ $(gof)(x)$ یا $g(f(x))$ در تابع g به جای xها، $f(x)$ را قرار می‌دهیم و همین مطلب به راحتی می‌تواند دامنهٔ (gof) را نیز برای ما تعریف کند پس:

$$D_{gof}=\left\{x\in D_f \middle| f(x)\in D_g\right\}$$

یعنی دامنهٔ gof شامل همهٔ xهایی از دامنهٔ f است (زیرا اول f باید روی آنها اثر کند) که تأثیر f روی آنها و یا حاصل $f(x)$ در دامنهٔ g واقع باشد (تا بتواند g روی آنها اثر کند).

توجه دارید که fog نیز به طریق مشابه تعریف خواهد شد و بنابراین،

$$D_{fog}=\left\{x\in D_g \middle| g(x)\in D_f\right\}$$

مثال ۱: اگر $f(x)=x^2-1$ و $g(x)=\frac{x+1}{x-1}$ مطلوب است محاسبهٔ (fog)، (gof)، (fof)، (gog) و دامنه‌های هر یک.

ابتدا دامنه‌های f و g را مشخص می‌کنیم که خواهیم داشت:

$$D_f=\mathbb{R} \quad , \quad D_g=\mathbb{R}-\{1\}$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2-1=\frac{4x}{(x-1)^2}$$

$$D_{fog}=\{x\in(\mathbb{R}-\{1\}) | g(x)\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}-\{1\}$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=\frac{(x^2-1)+1}{(x^2-1)-1}=\frac{x^2}{x^2-2}$$

$$D_{gof}=\{x\in\mathbb{R} | f(x)\in(\mathbb{R}-\{1\})\}=\left\{x\in\mathbb{R} \middle| (x^2-1)\neq 1\right\}$$

$$=\left\{x\in\mathbb{R} \middle| x\neq\pm\sqrt{2}\right\}$$

$$(fof)(x)=f(f(x))=(x^2-1)^2-1=x^4-2x^2$$

$$D_{fof}=\{x\in\mathbb{R} | f(x)\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$$

$$(gog)(x)=g(g(x))=\frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}=\frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{2}{x-1}}\Rightarrow x\neq 1$$

$g(g(x))=\frac{2x}{2}=x$ (با شرط $x\neq 1$)

$$D_{gog}=\{x\in(\mathbb{R}-\{1\}) | g(x)\in(\mathbb{R}-\{1\})\}$$

$$=\left\{x\in(\mathbb{R}-\{1\}) \middle| \frac{x+1}{x-1}\neq 1\right\}=\mathbb{R}-\{1\}$$

(زیرا برای هر عدد حقیقی مخالف یک همواره حاصل $\frac{x+9}{x-1}$ مخالف یک است).

مسائل حل شده

مسألهٔ ۱: تابع $h(x)=\sqrt{x^2-1}$ را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید. برای محاسبهٔ $h(x)$ ابتدا می‌توان (x^2-1) را محاسبه کرده و سپس از آن ریشهٔ دوم بگیریم پس اگر $f(x)=x^2-1$ و $g(x)=\sqrt{x}$ در این صورت:

$$g(f(x))=\sqrt{(x^2-1)}$$

مسألهٔ ۲: فرض کنید $g(x)=x^3-1$ و

$$f(x)=\begin{cases}2x & x\leq 1\\ 4 & 1<x<3\\ \sqrt[3]{x} & x>3\end{cases}$$

مطلوب است محاسبهٔ (fog)

$$fog(x)=f(g(x))=\begin{cases}2(x^3-1) & g(x)\leq 1\\ 4 & 1<g(x)<3\\ \sqrt[3]{(x^3-1)} & g(x)>3\end{cases}$$

$g(x)\leq 1\Rightarrow x^3-1\leq 1\Rightarrow x^3\leq 2\Rightarrow x\leq\sqrt[3]{2}$ از طرفی

$$1<g(x)<3\Rightarrow 1<x^3-1<3\Rightarrow 2<x^3<4$$
$$\Rightarrow\sqrt[3]{2}<x<\sqrt[3]{4}$$
$$g(x)>3\Rightarrow x^3-1>3\Rightarrow x^3>4\Rightarrow x>\sqrt[3]{4}$$

$$\Rightarrow fog(x)=\begin{cases}2x^3-2 & x\leq\sqrt[3]{2}\\ 4 & \sqrt[3]{2}<x<\sqrt[3]{4}\\ \sqrt[3]{x^3-1} & x>\sqrt[3]{4}\end{cases}$$

مسألهٔ ۳: اگر $f(x-1)=x^2-x+1$ باشد، $f(x)$ را بیابید.

برای حل این نوع مسائل $x-1=z$ فرض کرده و سپس $f(z)$ را پیدا کرده و در نهایت $f(x)$ را تشکیل می‌دهیم (به جای z ، x قرار می‌دهیم)

$$x-1=z\Rightarrow x=z+1\Rightarrow f(z)=(z+1)^2-(z+1)+1$$
$$\Rightarrow f(z)=z^2-3z+1\Rightarrow f(x)=x^2-3x+1$$

مسألهٔ ۴: اگر $f(4x)=\sqrt{\sin 4x-x}$ ، $f(x)$ را محاسبه کنید.

$$۴x = z \Rightarrow x = \frac{z}{۴}$$

$$\Rightarrow f(۴x) = f(z) = \sqrt{\sin(۴\frac{z}{۴}) - \frac{z}{۴}}$$

$$\Rightarrow f(z) = \sqrt{\sin z - \frac{z}{۴}} \Rightarrow f(x) = \sqrt{\sin x - \frac{x}{۴}}$$

مسئلهٔ ۵: اگر $f = \{(۲,۳),(۴,۵),(۱,۲),(۳,۲)\}$ و $g = \{(۱,۱),(۲,۷),(۳,۵)\}$ مطلوب است محاسبهٔ fog و gof و fof و $f^{-1}of$ و fof^{-1}.

$$D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$$

از طرفی می‌دانیم $D_f = \{۱,۲,۳,۴\}$ و $D_g = \{۱,۲,۳\}$ پس داریم،

$$D_{fog} = \{x \in \{۱,۲,۳\} | g(x) \in \{۱,۲,۳,۴\}\}$$
$$\Rightarrow D_{fog} = \{۱\}$$
$$D_{gof} = \{x \in \{۱,۲,۳,۴\} | f(x) \in \{۱,۲,۳\}\}$$
$$\Rightarrow D_{gof} = \{۲,۳\}$$
$$(fog)(x) = f(g(x)) \Rightarrow (fog)(۱) = f(g(۱)) = f(۱) = ۲$$
$$\Rightarrow fog = \{۱,۲\}$$

(تابع g، ۱ را به ۱ و f، ۱ را به ۲ تبدیل می‌کند. پس در نهایت (fog)، ۱ را به ۲ تبدیل می‌کند)

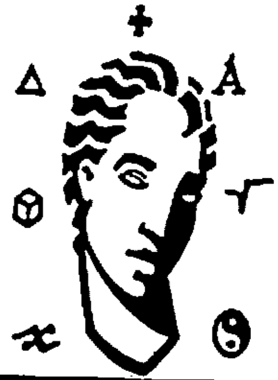
$$(gof)(x) = g(f(x)) \Rightarrow g(f(۲)) = g(۳) = ۵$$
و $g(f(۳)) = g(۲) = ۷ \Rightarrow gof = \{(۲,۵),(۳,۷)\}$

به همین ترتیب $fof = \{(۲,۲),(۱,۳),(۳,۳)\}$

(تابع f، ۲ را به ۳ و سپس ۳ را به ۲ تبدیل می‌کند پس fof ۲ را در نهایت به ۲ تبدیل می‌کند و ۱ را به ۳ و ۳ را به ۳)

$$f^{-1} = \{(۳,۲),(۵,۴),(۲,۱),(۲,۳)\}$$
$$fof^{-1} = \{(۳,۳),(۵,۵),(۲,۲)\} \text{ ،}$$
$$f^{-1}of = \{(۲,۲),(۴,۴),(۱,۱),(۳,۳)\}$$

آیا می‌توانید ضابطه‌ای برای بیان fof^{-1} و $f^{-1}of$ به دست آورید؟



تفریح اندیشه ۲

چه کسی بازی را آغاز می‌کند؟

یک روز بیشتر به مسابقهٔ سرنوشت‌ساز باقی نمانده است. مربی تیم تنها یکی از سه بازیکن رفعتی، پهلوان، یا علی‌آبادی را برای آغاز بازی انتخاب می‌کند رفعتی برای این که بداند چه کسی برای این کار انتخاب شده است در رختکن به مربی نزدیک می‌شود و می‌پرسد: آقای مربی، اگر پهلوان بازی را آغاز می‌کند، بگو که علی آبادی نمی‌کند. اگر من می‌کنم سکه‌ای بیانداز و اگر شیر آمد بگو پهلوان شروع نمی‌کند و اگر خط آمد بگو علی آبادی شروع نمی‌کند. شما که هیچ گاه رازتان را آشکار نمی‌کنید.

مربی درحالی که زیر دوش می‌رود می‌گوید: بعد از بیرون آمدن جوابت را می‌دهم.

ده دقیقه بعد بیرون می‌آید و درحالی که گلویش را صاف می‌کند می‌گوید: علی آبادی بازی نمی‌کند.

رفعتی فریاد می‌زند: گولت زدم! ده دقیقه قبل یک شانس از سه داشتم و اکنون شانس بین من و پهلوان است و به یک به دو افزایش یافته است.

مربی لبخندی زد و گفت: تو بازیکنی خنگ و ریاضیدانی خنگتر هستی. آن‌گاه بار دیگر زیر دوش رفت.

احتمال آغاز بازی برای هر بازیکن چقدر است؟

جواب در صفحهٔ ۸۸

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

از: 100 Great Problems of Elementary Mathematics

طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۱۹)

محاسبهٔ طول سهمی

تعیین *طول کمان سهمی*. راه‌حل ابتکاری زیرین در حل این مسأله از کتاب معروف «*Lectiones Geometrica*» اثر *اسحق بارو* «**Isaac Barrow**» (۱۶۷۷ ـ ۱۶۳۰) ریاضیدان انگلیسی است که در ۱۶۷۰ در لندن به چاپ رسید.

دستگاه مختصاتی را به سهمی نسبت می‌دهیم که محور xهای آن محور سهمی و محور yهای آن مماس به سهمی در رأس آن باشد. در این صورت، معادلهٔ سهمی به صورت $y^2 = 2px$ درمی‌آید. به این ترتیب، تنها به این نیاز داریم که طول *کمان رأسی* «apexarc» آن را حساب کنیم، یعنی کمانی از سهمی را که مبدأش رأس S سهمی است، زیرا هر کمان را می‌توان به صورت مجموع یا تفاضل دو کمان رأسی نمایش داد.

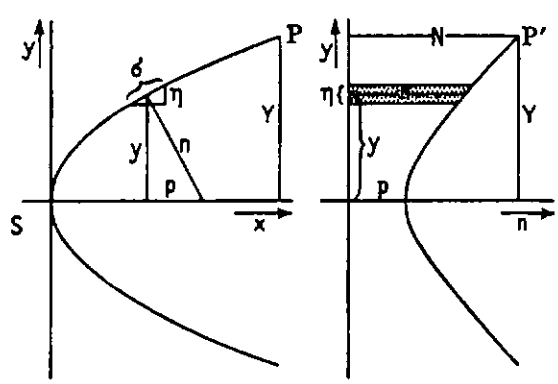
فرض می‌کنیم p، انتهای کمان رأسی SP دارای مختصات x و y، و طول کمان مورد نظر ما باشد.

از آن‌جا که تحت قائم سهمی برابر نصف پارامتر P است، بین y، عرض نقطه‌ای از سهمی، و n، قائم نظیر این نقطه، رابطه زیر برقرار است.

$$n^2 - y^2 = p^2$$

در این صورت اگر x|y، هر نقطهٔ سهمی از دستگاه مختصاتمان نقطهٔ n|yی را در دستگاه مختصات جدید n|y تخصیص دهیم، در دستگاه جدیدمان هذلولی متساوی‌الساقینی با نیم محور p به دست می‌آوریم.

نشان می‌دهیم که PL، P برابر SP، طول کمان سهمی، از لحاظ عددی برابر F، مساحت ذوزنقهٔ هذلولی‌ای است که توسط این هذلولی، محورهای آن، و عمود Nی محصور شده است که از P′، نظیر نقطهٔ Pی هذلولی، بر محور اقصر آن فرود آمده است. (N هم طول P′، نقطهٔ هذلولی، هم قائم سهمی در نقطهٔ P از سهمی است.)



قطعهٔ $\delta = AB$ از کمان سهمی SP را در نظر می‌گیریم که آن‌قدر کوچک است که فاصله‌ای راست (موسوم به عنصر) در نظر گرفته شود و از دو انتهای آن AC را، موازی با محور سهمی و $BC = b$ را، موازی با مماس رأسی سهمی، رسم می‌کنیم. در ضمن عرض y و n، قائم نقطهٔ وسط AB را رسم می‌کنیم، که مثلث قائم‌الزاویه‌ای را با اضلاع y، n، و p می‌دهند که مشابه مثلث ABC است. درنتیجهٔ این تشابه تناسب

$b:\delta = p:n$ را به دست می‌آوریم، و از آن معادلهٔ زیر را

$$p\delta = nb \qquad (۱)$$

از نقاط A' و B' نظیرهای نقاط A و B عمودهایی بر محور اقصر هذلولی وارد می‌کنیم، و ذوزنقهٔ هذلولی‌ای باریکی را به دست می‌آوریم که نظیر کمان $A'B'$ است. φ، مساحت این ذوزنقه، حاصلضرب b، ارتفاع آن و n، خط میانهٔ آن است (مورد اخیر به این علت n است که از مرکز ارتفاع مزبور می‌گذرد و بنابراین از نقطهٔ انتهایی y، عرض هذلولی، عبور می‌کند):

$$\varphi = nb \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) به دست می‌آوریم

$$p\delta = \varphi$$

اگر این معادله را در مورد هر عنصر کمان سهمی‌ای SP و ذوزنقهٔ هذلولی‌ای کوچک نظیر آن تشکیل دهیم، و اگر معادلات حاصل را با هم جمع کنیم، در سمت چپ p برابر طول کمان L و در سمت راست F، مساحت ذوزنقهٔ هذلولی‌ای موصوف در فوق، یعنی معادلهٔ زیر را به دست می‌آوریم.

$$PL = F$$

اکنون از رابطهٔ مربوط به مساحت F، یعنی

$$F = \frac{Ny}{2} + \frac{P^2}{2} L \frac{N+y}{P}$$

طول کمان مطلوب را به دست می‌آوریم.

$$L = \frac{Ny}{2P} + \frac{P}{2} L \frac{N+y}{P}$$

که در آن y نمایشگر عرض، و N نمایشگر قائم نقطهٔ انتهایی کمان است.

اکنون معادلهٔ به دست آمده را اندکی تغییر می‌دهیم.

فرض می‌کنیم T قسمتی از مماس سهمی گذرنده از P، محصور با P و محور yها، و τ زاویهٔ شیب سهمی در نقطهٔ P، یعنی زاویهٔ حاصل از مماس مزبور با محور xها (و، در عین حال زاویهٔ حاصل از قائم N با محور yها) باشد. در این صورت

$$\frac{Ny}{2P} = \frac{Xy}{2P\cos\tau} = \frac{X}{\cos\tau} = T$$

و

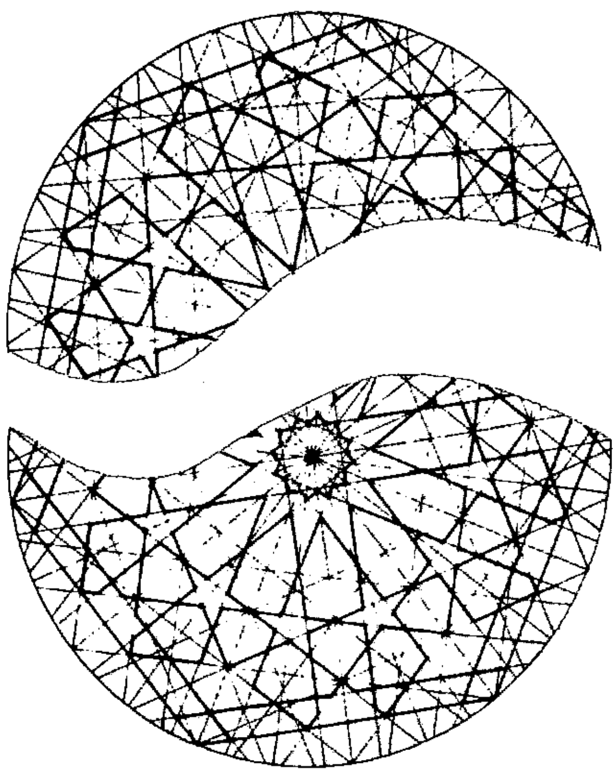
$$\frac{N+y}{P} = \frac{N+N\cos\tau}{N\sin\tau} = \frac{1+\cos\tau}{\sin\tau} = \frac{2\cos^2\frac{\tau}{2}}{2\sin\frac{\tau}{2}\cos\frac{\tau}{2}}$$

$$= \cot g\frac{\tau}{2}$$

در نتیجه

$$L = T + KL\cot g\frac{\tau}{2}$$

که در آن به جای $\frac{1}{2}P$ کوتاهترین شعاع کانونی را قرارداده‌ایم.



رادیکال

(قسمت پنجم)

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

حل معادلات رادیکالی

در حل معادلات باید به نکات زیر توجه کرد :

۱) برای حل معادلات رادیکالی با فرجهٔ زوج ابتدا حوزهٔ تعریف معادله را مشخص می‌کنیم. (در بعضی مواقع خاص، به‌وسیلهٔ حوزهٔ تعریف می‌توان ریشه‌های معادله را مشخص کرد و یا تعیین کرد که معادله جواب حقیقی‌ندارد.)سپس با به توان رساندن معادله به معادله‌ای خواهیم رسید که اگر قابل حل باشد ریشه‌های آن را به‌دست می‌آوریم، در این صورت ریشه‌هایی که در حوزهٔ تعریف معادلهٔ اولیه قرار داشته باشند، ریشه های معادلهٔ اصلی می‌باشند.

همچنین می‌توان بدون مشخص کردن حوزهٔ تعریف، معادله را به یک معادلهٔ قابل حل تبدیل کرد و پس از حل معادله، جوابهای آن را در معادلهٔ اولیه آزمایش کرد، هر کدام صدق کند ریشهٔ معادلهٔ اصلی می‌باشد.

۲) اگر برای دو معادله مانند :

$$A(x)=B(x) \qquad (1) \qquad ; \qquad C(x)=D(x) \qquad (2)$$

هر ریشهٔ معادلهٔ اول، ریشه‌ای از معادلهٔ دوم باشد، آنگاه معادلهٔ دوم را نتیجهٔ معادلهٔ اول گویند و می‌نویسند :

$$A(x)=B(x) \Rightarrow C(x)=D(x)$$

اگر به جای معادلهٔ مفروض، نتیجهٔ آن را درنظر بگیریم، آنگاه مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ دوم، شامل همهٔ ریشه‌های معادلهٔ اول است، ولی در بین مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ دوم، ممکن است عددهای دیگری هم وجود داشته باشد که آنها را، ریشه های خارجی (ریشه‌های بیگانه) معادلهٔ اصلی می‌نامند. بدیهی است با آزمایش ریشه‌ها می توان ریشه‌های خارجی معادله را از ریشه‌های حقیقی آن جدا کرد. برای مثال :

$$\sqrt[6]{x^4-1}=\sqrt[6]{x^2-1} \Rightarrow x^4-1=x^2-1$$

پس از حل معادلهٔ دوم، به‌دست می‌آید :

$$x_1=-1 \quad و \quad x_2=0 \quad و \quad x_3=1$$

که با آزمایش ریشه‌ها، نتیجه می شود که $x_2=0$ ، ریشهٔ معادلهٔ اصلی نیست و در واقع ریشهٔ خارجی معادلهٔ اصلی می‌باشد.

دو معادلهٔ (۱) و (۲) را هم‌ارز (معادل) گویند، هرگاه مجموعهٔ همهٔ جوابهای یکی بر مجموعهٔ همهٔ جوابهای دیگری منطبق باشد ؛ یا مجموعه جواب هر دو معادله تهی باشد.

از تعریف هم‌ارزی معادله‌ها نتیجه می‌شود که، به‌جای حل یک معادله، می‌توان معادلهٔ هم‌ارز با آن را حل کرد.

مثال ۱ :

معادلهٔ $\sqrt[3]{x}=1$ با معادلهٔ $x=1$ هم‌ارز است، زیرا عدد ۱ ریشهٔ هر یک از این معادله‌ها می‌باشد ؛ و هیچ‌کدام از این دو معادله، ریشهٔ حقیقی دیگری به‌جز ۱ ندارند.

مثال ۲ : معادلهٔ $\sqrt{\frac{x}{2}+1}=\sqrt{2-\frac{x}{2}}$ با معادلهٔ $\frac{x}{2}+1=2-\frac{x}{2}$ هم‌ارز است. زیرا با توجه به شرایط $\frac{x}{2}+1\geq 0$ و $2-\frac{x}{2}\geq 0$ ، اگر دو طرف معادلهٔ اصلی را مجذور کنیم :

$$\sqrt{\frac{x}{2}+1}=\sqrt{2-\frac{x}{2}} \Rightarrow \frac{x}{2}+1=2-\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{۲}+\frac{x}{۲}=۲-۱$$

$$\Rightarrow x=۱$$

درواقع عدد ۱، تنها ریشهٔ هر دو معادله است.

مثال ۳ : آیا دو معادلهٔ زیر هم‌ارزند :

$۴x^۲+۲x-۵=۲x-۱$ و $\sqrt[۴]{۴x^۲+۲x-۵}=\sqrt[۴]{۲x-۱}$

حل : مجموعهٔ همهٔ ریشه های معادلهٔ دوم، شامل دو عدد است :

$x_۱=-۱$ و $x_۲=۱$

آزمایش نشان می‌دهد که، عدد ۱-، به حوزهٔ تعریف معادلهٔ اول تعلق ندارد و در نتیجه نمی تواند ریشهٔ آن باشد، یعنی $x_۱=-۱$، ریشهٔ خارجی معادلهٔ اول است. به این ترتیب، این دو معادله، هم‌ارز نیستند.

۳) اگر معادله به‌صورت $x^۲=a$ و $a\ge ۰$، باشد ؛ جوابهای معادله $x=\sqrt{a}$، یا $x=-\sqrt{a}$ است.

۴) اگر معادله‌ای به‌صورت $x^۲=a$ و $a<۰$، باشد ؛ معادله دارای ریشهٔ حقیقی نیست، زیرا طرف اول تساوی عدد نامنفی و طرف دوم تساوی عددی همیشه منفی است.

۵) اگر معادله‌ای به‌صورت $A(x).B(x).C(x)=۰$، باشد ؛ که در آن $A(x)$ و $B(x)$ و $C(x)$ عبارتهایی برحسب یک متغیر x باشند، در این صورت : $C(x)=۰$ یا $B(x)=۰$ یا $A(x)=۰$، برای مثال از معادلهٔ $x\sqrt{x}\sqrt{x-۱}=۰$ نتیجه می‌شود :

$x\ge۱$ و $\sqrt{x-۱}=۰$ یا $\sqrt{x}=۰$ یا $x=۰$

۶) می‌دانیم اگر $A(x)=B(x)$ باشد، آنگاه :

$A^۲(x)=B^۲(x)$

امـا عکس این مطلب درست نیـست ؛ یعنی اگر $A^۲(x)=B^۲(x)$ باشد، آنگاه :

$A(x)=B(x)$ یا $A(x)=-B(x)$

برای مثال معادلهٔ $\sqrt{x}=\sqrt{۲-x}$ را می‌توان به‌صورت $x=۲-x$ یا $۲x=۲$ یا $x=۱$ نوشت. از معادلهٔ $x^۲=۴$ نتیجه می‌شود :

$x=۲$ یا $x=-۲$

۷) اگـر $A^۲(x)=B^۲(x)$ و $B(x)\ge۰$ و $A(x)\ge۰$ ($A(x)$ و $B(x)$ هم‌علامت باشند)، در این صورت می‌توان نوشت :
$A(x)=B(x)$

برای مثال معادلهٔ $(\sqrt{۲x+۱})^۲=(\sqrt{۲-۲x})^۲$ را می‌توان به‌صورت $۲x+۱=۲-۲x$ یا $۴x=۱$ یا $x=\frac{۱}{۴}$ نوشت.

مثال ۴ : معادلهٔ $۷+\sqrt{x}=۹$ را حل کنید.

حل : دامنهٔ متغیر x (حوزهٔ تعریف معادله) عبارت است از $x\ge۰$ ؛ بنابراین جواب معادله باید در شرط فوق صدق کند. داریم :

$$\sqrt{x}=۹-۷\Rightarrow\sqrt{x}=۲$$

اگر طرفین معادله را به توان ۲ برسانیم، نتیجه می‌شود $x=۴$، که در شرط $x\ge۰$ صدق می کند.

مثال ۵ : معادلهٔ $۷\sqrt{۴x-۱}+۵=۱۹$ را حل کنید.

حل : متغیر x باید در شرط $۴x-۱\ge۰$ یا $x\ge\frac{۱}{۴}$ صدق کند و داریم :

$$۷\sqrt{۴x-۱}+۵=۱۹\Rightarrow ۷\sqrt{۴x-۱}=۱۴\Rightarrow\sqrt{۴x-۱}=۲$$

$$\xrightarrow{\text{(دو طرف معادله را به توان ۲ می‌رسانیم)}}۴x-۱=۴\Rightarrow ۴x=۵$$

$$\Rightarrow\boxed{x=\frac{۵}{۴}}$$

که در شرط $x\ge\frac{۱}{۴}$ صدق می کند.

مثال ۶ : معادلهٔ $۳\sqrt{x-۴}+۱۴=۵$ را حل کنید.

حل : دامنهٔ متغیر x عبارت است از : $x-۴\ge۰$ یا $x\ge۴$ ؛ و داریم :

$$۳\sqrt{x-۴}+۱۴=۵\Rightarrow ۳\sqrt{x-۴}=-۹\Rightarrow\sqrt{x-۴}=-۳$$

چون طرف اول تساوی همیشه نامنفی و طرف دوم تساوی یک عدد منفی است، معادله دارای جواب نیست. در صورتی که به این نکته توجه نکنیم، و طرفین رابطهٔ به‌دست آمده را به توان ۲ برسانیم، خواهیم داشت :

$$x-۴=۹\Rightarrow x=۱۳$$

با این که $x=۱۳$ در شرط $x\ge۴$ صدق می کند، ولی با قرار دادن $x=۱۳$ در معادله به تناقض خواهیم رسید :

$x=۱۳:\ ۳\sqrt{۱۳-۴}+۱۴=۵\Rightarrow ۲۳=۵$ (تناقض)

بنابراین قبل از به توان ۲ رساندن طرفین تساوی باید به هم علامت بودن دو طرف تساوی توجه کرد تا گرفتار تناقض نشویم.

پس با توجه به تناقض اخیر نتیجه می‌شود که معادله دارای جواب نیست و مجموعهٔ جواب معادله تهی می‌باشد.

مثال ۷: معادلهٔ $4+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{8a^2}=8(1+\sqrt[3]{\frac{a^2}{64}})$ را حل کنید.

حل: حوزهٔ تعریف معادله مجموعهٔ اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) می‌باشد. و داریم:

$$4+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{8a^2}=8(1+\sqrt[3]{\frac{a^2}{64}})$$

$$\Rightarrow 4+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{2^3a^2}=8+8\sqrt[3]{\frac{a^2}{4^3}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{a^2}=4+2\sqrt[3]{a^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{a^2}=4 \xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۳)}} a^2=4^3 \Rightarrow a^2=64$$

$$\Rightarrow a^2=8^2 \Rightarrow a=-8 \text{ یا } a=8$$

$\Rightarrow$ مجموعه جوابهای معادله $=\{-8,8\}$

مثال ۸: معادلهٔ $x^8-3x^4+2=0$ را حل کنید.

حل: با فرض $x^4=t$، داریم:

$$x^4=t:\ t^2-3t+2=0 \Rightarrow (t-1)(t-2)=0$$

$$\Rightarrow t=1 \text{ یا } t=2$$

بنابراین:

$$x^4=1 \text{ یا } x^4=2 \Rightarrow x=\pm1 \text{ یا } x=\pm\sqrt[4]{2}$$

پس معادله دارای چهار ریشهٔ حقیقی است:

مجموعه جوابهای معادله $=\{-\sqrt[4]{2},-1,1,\sqrt[4]{2}\}$

مثال ۹: معادلهٔ $\sqrt{y}-y=-2$ را حل کنید.

حل: معادله را می‌توان به‌صورت $\sqrt{y}=y-2$ نوشت. با توجه به این معادله داریم:

$$y\geq 0 \text{ و } y-2\geq 0 \text{ یا } y\geq 2$$

که درنتیجه دامنهٔ متغیر معادله عبارت است از: $y\geq 2$. داریم:

$$\sqrt{y}-y=-2 \Rightarrow \sqrt{y}=y-2$$

$$\xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۲)}} y=(y-2)^2 \Rightarrow y=y^2-4y+4$$

$$\Rightarrow y^2-5y+4=0 \Rightarrow (y-1)(y-4)=0$$

$$\Rightarrow y=1 \text{ یا } \boxed{y=4}$$

پس فقط جواب $y=4$ قابل قبول است. زیرا در شرط $y\geq 2$ صدق می‌کند.

مثال ۱۰: معادلهٔ $\sqrt{z^2-16}=3$ را حل کنید:

حل: متغیر x باید در شرط $z^2-16\geq 0$ صدق کند، و داریم:

$$\sqrt{z^2-16}=3 \xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۲)}} z^2-16=9 \Rightarrow z^2=25$$

$$\Rightarrow \boxed{z=-5} \text{ یا } \boxed{z=5}$$

هر دو جواب قابل قبول است، زیرا در شرط $z^2-16\geq 0$ صدق می‌کنند.

مثال ۱۱: معادلهٔ $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}=1$ را حل کنید.

حل: متغیر x باید در شرایط $x-2\geq 0$ و $x-1\geq 0$ و یا $x\geq 2$ و $x\geq 1$ و درنتیجه در شرط $x\geq 2$ صدق کند و داریم:

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}=1 \Rightarrow \sqrt{x-2}=1-\sqrt{x-1}$$

$$\xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۲)}} x-2=1+x-1-2\sqrt{x-1}$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{x-1}=-2 \Rightarrow \sqrt{x-1}=1 \xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۲)}}$$

$$x-1=1 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

جواب $x=2$ قابل قبول است، زیرا در شرط $x\geq 2$ صدق می‌کند.

مثال ۱۲: معادلهٔ $\frac{6}{\sqrt{2m+1}}=2$ را حل کنید.

حل: متغیر m باید در شرط $2m+1>0$ یا $m>-\frac{1}{2}$ صدق کند، و داریم:

$$\frac{6}{\sqrt{2m+1}}=2 \Rightarrow 2\sqrt{2m+1}=6 \Rightarrow \sqrt{2m+1}=3$$

$$\xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۲)}} 2m+1=9$$

$$\Rightarrow 2m=8 \Rightarrow \boxed{m=4}$$

جواب $m=4$ قابل قبول است، زیرا در شرط $m>-\frac{1}{2}$ صدق می‌کند.

مثال ۱۳: معادلهٔ $\sqrt{u-1}=\frac{74}{\sqrt{u-1}}$ را حل کنید.

حل: متغیر u باید در شرط $u-1>0$ یا $u>1$ صدق کند، و داریم:

$$\sqrt{u-1}=\frac{74}{\sqrt{u-1}} \Rightarrow (\sqrt{u-1})^2=74 \Rightarrow u-1=74$$

$$\Rightarrow \boxed{u=75}$$

جواب $u=75$ قابل قبول است، زیرا در شرط $u>1$ صدق می‌کند.

مثال ۱۴: معادلهٔ $\sqrt{4x}=-2x$ را حل کنید.

حل : متغیر x باید در شرایط $4x \ge 0$ و $-2x \ge 0$ و یا $x \ge 0$ و $x \le 0$ و درنتیجه در شرط $x = 0$ صدق کند. با قرار دادن $x = 0$ در معادله داریم :

$$\sqrt{4(0)} = -2(0) \Rightarrow 0 = 0$$

پس $x = 0$ جواب معادله است.

مثال ۱۵ : معادلهٔ $x\sqrt{3} - \sqrt{12} = \sqrt{75} - \sqrt{27x^2}$ را حل کنید.

حل : دامنهٔ متغیر x مجموعهٔ اعداد حقیقی است : $x \in \mathbb{R}$ ، و داریم :

$$x\sqrt{3} - \sqrt{4\times 3} = \sqrt{25\times 3} - \sqrt{9\times 3x^2}$$
$$\Rightarrow x\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3} - 3|x|\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow x\sqrt{3} + 3|x|\sqrt{3} = 5\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow \sqrt{3}(x + 3|x|) = 7\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow x + 3|x| = 7$$

$$x \ge 0 : x + 3x = 7 \Rightarrow 4x = 7 \Rightarrow \boxed{x = \frac{7}{4}}$$

$$x < 0 : x - 3x = 7 \Rightarrow -2x = 7 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{7}{2}}$$

$$\Rightarrow \text{مجموعهٔ جوابهای معادله} = \left\{-\frac{7}{2}, \frac{7}{4}\right\}$$

معادلات زیر را حل کنید :

۱) $\sqrt[3]{4x-3} + \sqrt[3]{2x-1} = 2$

۲) $\sqrt{2x+7}\sqrt{6x-2} = 6\sqrt{3x-2}\sqrt{x}$

۳) $\dfrac{6x-2}{\sqrt[4]{(4x-1)^3}} = \sqrt[4]{4x-1}$

۴) $\sqrt[3]{x+2} = \sqrt{2x+3}$

۵) $\dfrac{\sqrt{2x+2} + \sqrt{2-2x}}{\sqrt{2x+2} - \sqrt{2-2x}} = \dfrac{1}{x}$

۶) $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{2x-3}$

۷) $\sqrt{2 + \sqrt{x^4 + 2}} = x$

۸) $\sqrt{22x+3} + \sqrt{2x-2} - \sqrt{18x+7} = \sqrt{2-2x}$

۹) $\sqrt{2x + 2\sqrt{2x-1}} + \sqrt{2x - 2\sqrt{2x-1}} = 2$

۱۰) $\sqrt[3]{x^5 + 32} + \sqrt[6]{x^5 + 32} = 2$

۱۱) $(x^2 - 1)^{74} + |x^{75} + 1| + \sqrt[76]{x^2 + 3x + 2} = 0$

۱۲) $\sqrt[5]{x\sqrt[3]{x\sqrt{64x}}} = 2$

۱۳) $\sqrt{2 - x + x^2} + \sqrt{1 - x + x^2} = 3$

۱۴) $\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2$

۱۵) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1-2x} + \sqrt[3]{x-1} = 0$

حل : ۱) دامنهٔ متغیر x مجموعهٔ اعداد حقیقی است $(x \in \mathbb{R})$ ؛ و با مکعب کردن دو طرف معادله به‌دست می‌آید :

$$4x - 3 + 2x - 1 + 3\sqrt[3]{4x-3}\sqrt[3]{2x-1}\left(\sqrt[3]{4x-3} + \sqrt[3]{2x-1}\right) = 8$$

بنابر شرط، عبارت $\sqrt[3]{4x-3} + \sqrt[3]{2x-1}$ برابر ۲ است، بنابراین خواهیم داشت :

$$6\sqrt[3]{(4x-3)(2x-1)} = 12 - 6x \qquad (1)$$

پس از مکعب کردن دو طرف معادله (۱)، و اختصار لازم خواهیم داشت :

$$(4x-3)(2x-1) = (2-x)^3 \quad ;$$
$$8x^2 - 10x + 3 = 8 - 12x + 6x^2 - x^3 \quad ;$$
$$x^3 + 2x^2 + 2x - 5 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 + 3x + 5) = 0$$
$$\Rightarrow x - 1 = 0 \text{ یا } x^2 + 3x + 5 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

جواب $x = 1$ در معادله صدق می‌کند. و معادلهٔ $x^2 + 3x + 5 = 0$ ریشه حقیقی ندارد. بنابراین معادله تنها یک ریشه حقیقی دارد.

۲) با حل دستگاه نامعادلات :

$$\begin{cases} 2x + 7 \ge 0 \Rightarrow x \ge -\dfrac{7}{2} \\ 6x - 2 \ge 0 \Rightarrow x \ge \dfrac{1}{3} \\ 3x - 2 \ge 0 \Rightarrow x \ge \dfrac{2}{3} \\ x \ge 0 \end{cases}$$

دامنهٔ متغیر x به‌دست می‌آید : $x \ge \frac{2}{3}$

با مجذور کردن دو طرف معادله، داریم :

$$(2x+7)(6x-2) = 36(3x-2)x \quad ;$$
$$12x^2+38x-14 = 108x^2-72x \quad ;$$
$$96x^2-110x+14=0 \Rightarrow (x-1)(96x-14)=0$$

$\Rightarrow x-1=0$ یا $96x-14=0$

$\Rightarrow \boxed{x=1}$ یا $x=\frac{7}{48}$ (قابل قبول نیست)

فقط جواب $x=1$ در شرط $x \ge \frac{2}{3}$، و همچنین در معادلهٔ اصلی صدق می‌کند.

۳) دامنهٔ متغیر x از حل نامعادلهٔ $4x-1>0$، به‌دست می‌آید :

$x > \frac{1}{4}$

اگر دو طرف معادله را در $\sqrt[4]{(4x-1)^3}$ ضرب کنیم :

$$\frac{6x-2}{\sqrt[4]{(4x-1)^3}} = \sqrt[4]{4x-1} \Rightarrow 6x-2=\sqrt[4]{(4x-1)^4}$$

$$\Rightarrow 6x-2=4x-1$$

$$\Rightarrow 2x=1 \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{2}}$$

جواب $x=\frac{1}{2}$ در شرط $x>\frac{1}{4}$، و همچنین در معادلهٔ اولیه صدق می‌کند.

۴) دامنهٔ متغیر x عبارت است از : $2x+3 \ge 0$ یا $x \ge -\frac{3}{2}$، و داریم :

$$\sqrt[3]{x+2}=\sqrt{2x+3} \xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۶)}} (x+2)^2=(2x+3)^3$$
$$\Rightarrow x^2+4x+4=8x^3+36x^2+54x+27$$
$$\Rightarrow 8x^3+35x^2+50x+23=0$$
$$\Rightarrow (x+1)(8x^2+27x+23)=0$$

$\Rightarrow x+1=0$ یا $8x^2+27x+23=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$

جواب $x=-1$ در شرط $x \ge -\frac{3}{2}$، و همچنین در معادلهٔ اولیه صدق می‌کند. و معادلهٔ $8x^2+27x+23=0$ ریشهٔ حقیقی ندارد. بنابراین معادله فقط یک ریشهٔ حقیقی دارد.

۵) از حل دستگاه نامعادلات :

$$\begin{cases} 2x+2 \ge 0 \Rightarrow x \ge -1 \\ 2-2x \ge 0 \Rightarrow x \le 1 \\ x \ne 0 \\ \sqrt{2x+2}-\sqrt{2-2x} \ne 0 \end{cases}$$

دامنهٔ متغیر x به‌دست می‌آید : $-1 \le x < 0$ و $0 < x \le 1$.

دو طرف معادله را در $x(\sqrt{2x+2}-\sqrt{2-2x})$ ضرب می‌کنیم :

$$\frac{\sqrt{2x+2}+\sqrt{2-2x}}{\sqrt{2x+2}-\sqrt{2-2x}} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow x(\sqrt{2x+2}+\sqrt{2-2x}) = \sqrt{2x+2}-\sqrt{2-2x}$$

$$\Rightarrow (x-1)\sqrt{2x+2}+(x+1)\sqrt{2-2x}=0$$

دو طرف معادلهٔ اخیر را بر $-\sqrt{2}$ تقسیم می‌کنیم :

$$(1-x)\sqrt{x+1}-(x+1)\sqrt{1-x}=0$$
$$\Rightarrow \sqrt{1-x}\sqrt{x+1}(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x})=0$$

$\Rightarrow \sqrt{1-x}=0$ یا $\sqrt{x+1}=0$ یا $\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}=0$

$\Rightarrow \boxed{x=1}$ یا $\boxed{x=-1}$ یا $x=0$ (قابل قبول نیست)

جواب $x=0$ به دامنهٔ متغیر تعلق ندارد، ولی آزمایش مستقیم نشان می‌دهد که دو عدد ۱ و ۱- ریشه‌های معادلهٔ اصلی می‌باشند.

۶) دامنهٔ متغیر x مجموعهٔ اعداد حقیقی است $(x \in \mathbb{R})$ ؛ و با مکعب کردن دو طرف معادله به‌دست می‌آید :

$$x-1+x-2+3\sqrt[3]{x-1}\,\sqrt[3]{x-2}\,(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}) = 2x-3$$

بنابر شرط، عبارت $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}$ برابر $\sqrt[3]{2x-3}$ است ؛ بنابراین خواهیم داشت :

$$3\sqrt[3]{x-1}\,\sqrt[3]{x-2}\,\sqrt[3]{2x-3}=0$$

$\Rightarrow \sqrt[3]{x-1}=0$ یا $\sqrt[3]{x-2}$ یا $\sqrt[3]{2x-3}=0$

$\Rightarrow \boxed{x=1}$ یا $\boxed{x=2}$ یا $\boxed{x=\frac{3}{2}}$

هر سه جواب در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند ؛ بنابراین :

مجموعه جوابهای معادله $= \left\{1, \frac{3}{2}, 2\right\}$

۷) دامنهٔ متغیر x از حل دستگاه نامعادلات : $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^4 + 2 \geq 0 \end{cases}$
به‌دست می‌آید : $x \geq 0$
و داریم :

$$\sqrt{2+\sqrt{x^4+2}} = x \xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۲)}} 2+\sqrt{x^4+2} = x^2$$
$$\Rightarrow \sqrt{x^4+2} = x^2 - 2$$

از $x \geq 0$ و معادلهٔ اخیر نتیجه می‌شود :

$$x^2 - 2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 2 \Rightarrow x \geq \sqrt{2}$$
$$\xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۲)}} x^4 + 2 = (x^2 - 2)^2$$
$$\Rightarrow x^4 + 2 = x^4 - 4x^2 + 4$$
$$\Rightarrow 4x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ریشه‌های به‌دست آمده در شرط $x \geq \sqrt{2}$ ، صدق نمی‌کنند.
بنابراین مجموعهٔ جواب معادله، مجموعهٔ تهی ($\varnothing$) است.

۸) با حل دستگاه نامعادلات :

$$\begin{cases} 22x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{-3}{22} \\ 2x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ 18x + 7 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{-7}{18} \\ 2 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases}$$

دامنهٔ متغیر x به‌دست می‌آید : $x = 1$
و با قرار دادن $x = 1$ در معادله، خواهیم داشت :

$$x = 1 : \ \sqrt{22x+3} + \sqrt{2x-2} - \sqrt{18x+7} = \sqrt{2-2x}$$
$$\Rightarrow \sqrt{25} - \sqrt{25} = 0$$

بنابراین معادله فقط یک ریشهٔ حقیقی دارد : $\boxed{x = 1}$

۹) حوزه تعریف معادله از حل دستگاه نامعادلات :

$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \\ 2x - 2\sqrt{2x-1} \geq 0 \\ 2x + 2\sqrt{2x-1} \geq 0 \end{cases}$$

به‌دست می‌آید : $x \geq \frac{1}{2}$ ؛ و داریم :

$$\sqrt{2x + 2\sqrt{2x-1}} + \sqrt{2x - 2\sqrt{2x-1}} = 2$$

دو طرف معادله را مجذور می‌کنیم :

$$2x + 2\sqrt{2x-1} + 2x - 2\sqrt{2x-1} + 2\sqrt{4x^2 - 4(2x-1)} = 4$$

پس از ساده کردن معادله خواهیم داشت :

$$4x + 4|x-1| = 4 \Rightarrow x + |x-1| = 1$$
$$x \geq 1: \ x + x - 1 = 1 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$
$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1: \ x - (x-1) = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

$$\Rightarrow \text{مجموعه جوابهای معادله} = \left\{x \,\middle|\, \frac{1}{2} \leq x \leq 1\right\}$$

بنابراین هر عدد که در شرط $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ صدق کند، جواب معادله است، یعنی معادله بی‌شمار جواب دارد.

۱۰) دامنهٔ متغیر x عبارت است از : $x^5 + 32 \geq 0$ یا $x \geq -2$ و با انتخاب $t = \sqrt[6]{x^5 + 32}$ ، داریم :

$$t^2 + t = 2 \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow (t-1)(t+2) = 0$$
$$\Rightarrow t = 1 \quad \text{یا} \quad t = -2$$

چون $t \geq 0$ است، پس فقط جواب $t = 1$ قابل قبول می‌باشد :

$$\sqrt[6]{x^5 + 32} = 1 \xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۶)}} x^5 + 32 = 1 \Rightarrow x^5 = -31$$
$$\Rightarrow \boxed{x = -\sqrt[5]{31}}$$

جواب $x = -\sqrt[5]{31}$ در شرط $x \geq -2$ صدق می‌کند.
بنابراین ریشهٔ معادله اصلی می‌باشد.

۱۱) متغیر x باید در شرط $x^2 + 3x + 2 \geq 0$ ، صدق کند.
با توجه به این که عبارتهای $(x^2-1)^{74}$ و $|x^{75}+1|$ و $\sqrt[76]{x^2 + 3x + 2}$ ، همیشه نامنفی می‌باشند، نتیجه می‌شود که طرف اول معادله همیشه نامنفی است و بنابراین معادله وقتی جواب دارد که هر سه عبارت با هم صفر شوند :

$$(x^2-1)^{74} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$
$$|x^{75} + 1| = 0 \Rightarrow x^{75} + 1 = 0 \Rightarrow x^{75} = -1 \Rightarrow x = -1$$
$$x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x+1)(x+2) = 0 \Rightarrow x = -1 \quad \text{یا} \quad x = -2$$

جواب $x = -1$ در شرط $x^2 + 3x + 2 \geq 0$ صدق می‌کند و همچنین ریشهٔ هر سه عبارت می‌باشد ؛ بنابراین معادله تنها یک ریشه دارد : $\boxed{x = -1}$

۱۲) متغیر x باید در شرط $64x \geq 0$ یا $x \geq 0$ ، صدق کند ؛ و داریم :

$$\sqrt[5]{x\sqrt[3]{x\sqrt{64x}}} = 2 \xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۵)}} x\sqrt[3]{x\sqrt{64x}} = 2^5$$

$$\xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۳)}} x^3 . x\sqrt{64x} = 2^{15}$$

$$\xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۲)}} x^8(64x) = 2^{30}$$

$$\Rightarrow 2^6 x^9 = 2^{30} \Rightarrow x^9 = 2^{24}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[9]{2^{24}} = \sqrt[9]{2^{18} \times 2^6} = 4\sqrt[9]{2^6} = 4\sqrt[3]{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 4\sqrt[3]{4}}$$

جواب $x = 4\sqrt[3]{4}$ در شرط $x \geq 0$ و در معادله اصلی صدق می‌کند. پس معادله تنها یک ریشهٔ حقیقی دارد.

۱۳) متغیر x باید در شرایط $x^2 - x + 2 \geq 0$ و $x^2 - x + 1 \geq 0$ و یا $(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} \geq 0$ و $(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq 0$ صدق کند: $x \in \mathbb{R}$. و با انتخاب $x^2 - x + 1 = t$ ، داریم:

$$\sqrt{t+1} + \sqrt{t} = 3 \Rightarrow \sqrt{t+1} = 3 - \sqrt{t}$$

$$\Rightarrow t + 1 = 9 - 6\sqrt{t} + t \Rightarrow 6\sqrt{t} = 8$$

$$\Rightarrow \sqrt{t} = \frac{4}{3} \xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۲)}} t = \frac{16}{9}$$

بنابراین:

$$x^2 - x + 1 = \frac{16}{9} \Rightarrow x^2 - x - \frac{7}{9} = 0 \Rightarrow 9x^2 - 9x - 7 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{333}}{18}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{9+\sqrt{333}}{18} \simeq 1/514 \\ \text{یا} \\ x_2 = \dfrac{9-\sqrt{333}}{18} \simeq 0/514 \end{array} \right.$$

بنابراین معادله، دارای دو ریشه حقیقی x_1 و x_2 می‌باشد.

۱۴) دامنهٔ متغیر x مجموعهٔ اعداد حقیقی است. $(x \in \mathbb{R})$،

و داریم:

$$(\sqrt[3]{2-\sqrt{3}})(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}) = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}}$$

بنابراین:

$$(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}})^x + \frac{1}{\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\right)^x} = 2$$

و با انتخاب $(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}})^x = y$ ، داریم:

$$y + \frac{1}{y} = 2 \Rightarrow y^2 + 1 = 2y \Rightarrow y^2 - 2y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (y-1)^2 = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$\Rightarrow (\sqrt[3]{2+\sqrt{3}})^x = 1 \Rightarrow \boxed{x = 0} \qquad \text{(جواب معادله)}$$

۱۵) دامنهٔ متغیر x مجموعهٔ اعداد حقیقی است. $(x \in \mathbb{R})$،

و با توجه به این نکته که اگر $u + v + t = 0$ باشد، آنگاه:

$$u^3 + v^3 + t^3 = 3uvt$$

بنابراین:

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1-2x} + \sqrt[3]{x-1} = 0$$

$$\Rightarrow x + 1 - 2x + x - 1 = 3\sqrt[3]{x(1-2x)(x-1)}$$

$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{x(1-2x)(x-1)} = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ یا } 1 - 2x = 0 \text{ یا } x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 0} \text{ یا } \boxed{x = \frac{1}{2}} \text{ یا } \boxed{x = 1}$$

پس، معادله دارای سه ریشهٔ حقیقی است:

$$\text{مجموعه جوابهای معادله} = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$$

آموزش ریاضی با تأکید بر کاربردها

● محسن صدیقی مشکنانی

دانشکده برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی اصفهان

چکیده:

ملاحظه می‌شود که هر چه از دبستان به سمت مقاطع بالاتر تحصیلی پیش می‌رویم، ارتباط مطالب دروس ریاضی با کاربردهای عملی آنها کمتر در آموزشها مطرح می‌شود. این در حالی است که محتوای دروس ریاضی در مقاطع مختلف دارای کاربردهای متعدد در شاخه‌های مختلف علوم و تکنولوژی است.

در این مقاله مزایا و معایب آموزش ریاضی با تأکید بر کاربردها مورد بررسی قرار گرفته و ضرورت پیگیری آن نتیجه‌گیری شده است. ملزومات و روشهای اجرایی در پیاده کردن این دیدگاه (برای دانش‌آموزان و دانشجویان ریاضی و غیرریاضی) نیز مطرح شده است.

● منظور از آموزش ریاضی با تأکید برکاربرد

منظورم از آموزش ریاضی با تأکید بر کاربرد این است که در هنگام تدریس بخشهای مختلف دروس ریاضی، مدرس حتی‌المقدور به گونه‌ای عمل کند که مخاطب به طور **صریح** و **ملموس** با (نمونه‌هایی از)کاربردهای آن بخش از درس، در **زمینه‌های غیرریاضی** آشنا گردد. به عبارت دیگر در آموزش ریاضی با تأکید بر کاربرد نکات زیر مورد توجه قرار گرفته است :

● اینکه صراحتاً به مخاطب گفته شود که این مطلب یک کاربرد ریاضی است. چرا که گرچه ممکن است بعضی از مخاطبان خود به این نکته توجه کرده باشند ولی تجربه شخصی من می‌گوید، بدون ذکر صریح کاربرد، تعداد کسانی که متوجه کاربرد شده‌اند بسیار کمتر از کسانی است که متوجه نشده‌اند. البته ذکر صریح می‌تواند با کلام، نوشتن عنوان و یا حتی با یک علامت (icon) باشد.

● اینکه برای مخاطب ملموس و مشخص باشد، لذا ذکر اینکه مثلاً فلان مطلب در امور نظامی کاربرد دارد کفایت نمی‌کند.

● کاربرد در زمینه‌های غیرریاضی باشد. مثلاً ذکر کاربرد مشتق در محاسبه ضریب زاویه کافی نیست.

● کاربرد در خلال درس و همراه مطالب درس مطرح گردد. لذا توضیحات کلی در مورد کاربردهای ریاضی در ابتدای درس یا کتاب، گرچه ضروری و مفید است ولی به هیچ‌وجه جوابگو نیست.

برداشت من این است که تمام مطالبی که در دروس مختلف ریاضی در سطوح مختلف آموزشی کشور (از دبستان تا دانشگاه)، ارائه می‌گردد به دلیل نیازی است که در جای دیگری به آن محتوا بوده است (در غیر این صورت اصولاً تدریس آن بخش از درس زاید است. فرض می‌کنیم در نظام آموزشی

کشور محتوای زاید به دانش‌آموز یا دانشجو ارائه نمی‌گردد).
طرح هر یک از مطالب دروس ریاضی به خاطر یک یا چند مورد از دلایل اصلی زیر است:

● نیاز مخاطب به استفاده از مفاهیم و روشهای مورد بحث کلاس در اجتماع، مثل مفهوم خط و چگونگی محاسبه مساحت یک مستطیل.

● ضرورت آشنایی مخاطب با روشهای حل مسأله، مثل تفکیک مسأله به مسأله‌های کوچکتر و استقرا.

● نیاز به مطلب مورد بحث در بخشهای دیگر همان درس و یا سایر دروس ریاضی، مثل موضوع حد و پیوستگی برای موضوع انتگرال.

● نیاز به مطلب مورد بحث برای پاسخگویی به نیازهای مطرح در دروس و یا رشته‌های غیرریاضی، مثل کاربرد منطق در نمایش دانش در علوم کامپیوتر.

به عبارت دیگر همین حالا هم آموزش ریاضی با توجه به کاربردهای آن تدوین شده است، اما این کاربردها برای مخاطبین آنها مورد تأکید قرار نمی‌گیرد.

● مزایا

● **کمک به انتقال سریع‌تر محتوا:** برای تمام کسانی که کار آموزشی کرده‌اند نقش مثال برای انتقال بهتر مطالب به مخاطب کاملاً واضح است. بیان کاربرد، در عمل بیان یک مثال واقعی در ارتباط با محتوای درس است.

● **کمک به ماندگاری محتوا در ذهن مخاطب:** فراری مطالب درس از مشکلات اصلی در فرآیند یادگیری است. استفاده از تداعی به ماندگاری مطلب در ذهن مخاطب کمک می‌کند. بیان کاربرد، در عمل ایجاد عامل مهمی برای تداعی و ماندگاری محتوا در ذهن مخاطب است.

● **ایجاد انگیزه برای فراگیری:** یکی از مهمترین عوامل در ارتقای کیفیت روند یادگیری، وجود انگیزه است. بیان کاربرد، یک عامل اصلی در ایجاد انگیزه است. به دفعات شاهد بوده‌ام که دانشجو به دلیل عدم اطلاع از کاربرد درس، آن را زاید دانسته و تلاشی برای یادگیری نداشته و یا در نهایت تنها برای گرفتن نمره مربوطه تلاش می‌کرده است. به گونه‌ای که پس از مدت کوتاهی چیزی از آن درس را به خاطر نداشته است.

● **کمک به ارتقای کیفی آموزش:** سه مطلب فوق به طور طبیعی بهبود کیفیت آموزش را به دنبال دارد.

● **رفع نیاز:** هنگامی که مخاطب در جای دیگری به محل ـ به‌کارگیری عملی آن بخش از درس ریاضی می‌رسد، همین بیان صریح کاربرد، به او کمک می‌کند، که سریعتر و طبیعتی‌تر با مطلب ریاضی مورد نیاز خود ارتباط برقرار کند. به عبارت دیگر، نیازی که به آن بخش از ریاضی داشته به نحو مطلوب‌تری (نسبت به روش جاری) برطرف می‌گردد. اهمیت این مطلب در مواقعی که بین زمان ارایه درس ریاضی و زمان مطرح شدن کاربرد آن، فاصله زیادی (چه بسا چند مسأله) وجود دارد، بسیار محسوس‌تر است.

● **تذکر جایگاه کارشناسان ریاضی به دیگران:** بیان کاربردها به دانشجوی امروز و کارگزاران آینده سایر رشته‌ها یادآوری می‌کند که بسیاری از اقدامات در رشته آنها دقیقاً براساس مطالب ریاضی و به کمک کارشناسان ریاضی صورت گرفته و یا باید صورت بگیرد. (متأسفانه برای بسیاری از متخصصین کشور، به خصوص کارشناسان و حتی کارشناسان ارشد رشته‌های دیگر ضرورت به کارگیری نظرات کارشناسان ریاضی ملموس و مطرح نیست!).

● **تذکر جایگاه کارشناسان ریاضی به خودشان:** بیان کاربردها در عین حال به دانشجویان ریاضی نشان می‌دهد که محتوای کار، و به عبارت دیگر خود آنها چه نقشی در فعالیتهای تخصصی اجتماع می‌توانند داشته باشند.

● **رفع خودناباوری:** به نظر من نکته فوق در این که دانشجویان ریاضی خود را باور داشته باشند بسیار مؤثر است. یکی از مسائلی که در بین دانشجویان ریاضی (و در کل علوم)، به خصوص در مقایسه با دانشجویان مهندسی و پزشکی، کاملاً محسوس هست، این نکته می‌باشد که دانشجوی کارشناسی ریاضی مشخص‌ترین جایگاه خود در اجتماع را تدریس می‌بیند. و علیرغم اینکه برای شأن معلم صحبتهای بسیاری مطرح می‌شود، در عمل یک مهندس یا پزشک از جایگاه اجتماعی

بالاتری برخوردار است. این موضوع تا آنجا پیش می‌رود که چه بسا دانشجوی ریاضی خود را از مرتبه پایین‌تری نسبت به دانشجوی مهندسی و پزشکی احساس می‌کند. به نظر من این که دانشجو بداند چه جایگاهی در شاخه‌های مختلف علوم و تکنولوژی می‌تواند داشته باشد در خود باوری او کاملاً مؤثر است.

● **استقبال بیشتر از رشته ریاضی:** مشاهده می‌شود اکثر قریب به اتفاق دانش‌آموزان نخبه‌ای که آزمون ورودی دانشگاه را پشت‌سر می‌گذارند به رشته‌های دیگر، به خصوص به رشته‌های مختلف مهندسی روی می‌آورند. به نظر من نکاتی که در مورد رفع خودناباوری و جایگاه متخصصین ریاضی در بالا گفته شد، موجب استقبال بیشتر داوطلبان نخبه به رشته ریاضی خواهد شد. شاید استقبال از شاخه ریاضی کاربردی (کامپیوتر) که در سالهای اخیر مطرح شده است مؤید این نظر باشد.

● **کمک به مطرح شدن کاربردهای جدید:** بسیاری از کاربردهای ریاضی، توسط متخصصین رشته‌های دیگر (با آگاهی محدودی که از ریاضی دارند) شکل می‌گیرد. با پیگیری آموزش ریاضی با تأکید بر کاربردها، چه بسا نطفه کاربردهای جدیدی در ذهن متخصصان ریاضی یا متخصصان رشته‌های دیگر شکل گیرد یا اینکه روشهای موجود بهتر شود.

● معایب

● **صرف وقت:** مهمترین عیبی که برای آموزش ریاضی با تأکید بر کاربرد مطرح است، صرف وقت برای بیان کاربردها و در نتیجه کاهش زمان برای بیان مباحث متداول درس ریاضی است. گرچه احتمال کمبود وقت برای بعضی مباحث درسی را نفی نمی‌کنم، ولی براساس دلایلی که در زیر مطرح می‌گردد، این کمبود خیلی جدی نیست و حداقل اینکه قابل جبران است.

۱. کاربرد می‌تواند محمل بیان مطلب اصلی باشد. کما اینکه آموزش سالهای اولیه دبستان عملاً این‌گونه است. «بخش تناسب و کمیتهای متناسب» از ریاضی سال اول دوره راهنمایی {۱}، یک مثال بسیار جالب است. تک تک مطالب درس، مثالها و حتی تمرینها با تکیه بر کاربردهای عملی نگاشته شده است (صفحات ۴۶ تا ۵۵). برخلاف مبحث زاویه از همین کتاب که ارتباطی با کاربرد زاویه در اجتماع ندارد (صفحات ۶۷ تا ۷۳)!

۲. بیان کاربرد، درک مطلب را سرعت می‌بخشد. در قسمت مزایای آموزش ریاضی با تأکید بر کاربرد دیدیم که همین بیان کاربردها می‌تواند موجب درک سریعتر و ماندگارتر مطلب اصلی گردد. به عبارت دیگر گرچه در قسمتی از بحث برای بیان کاربرد وقت صرف می‌کنیم. اما در مقابل برای جای دیگری از بحث، در وقت صرفه‌جویی می‌کنیم.

۳. زمانبندی ارائه درس می‌تواند با دیدگاه تأکید بر کاربردها صورت گیرد. اگر ایده آموزش ریاضی با تأکید بر کاربرد مورد قبول همکاران قرار گیرد، در آن صورت زمانبندی ارائه درس با این دیدگاه انجام خواهد شد و به خصوص با توجه به دو نکته قبل، این مشکل به صورت حاد نمی‌تواند مطرح باشد.

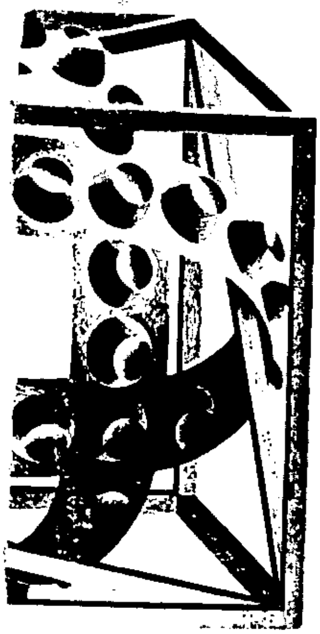
● **کم‌رنگی ریاضیات محض:** ممکن است مطرح شود که آموزش ریاضی با تأکید بر کاربرد نفی‌کننده ریاضیات محض است. ولی اینطور نیست. گرچه به جنبه‌های کاربردی ریاضی تأکید دارد، ولی نفی‌کننده فعالیتهای علاقمندان ریاضیات محض نیست. بخصوص که ریاضی محض بیشتر در سطوح بالای آموزش عالی و در جنبه‌های پژوهشی برای ریاضی‌دانان بسیار علاقمند مطرح است. بد نیست این حقیقت را مد نظر داشته باشیم که این افراد بخش بزرگی از مخاطبان آموزش ریاضی را تشکیل نمی‌دهند. در عین حال تلاش این گروه در کشف حقایق جدید ریاضی، کاربرد آن را در زمانی نزدیک یا دور به دنبال خواهد داشت.

ریاضیات گسسته

RALPH P. GRIMALDI

قسمت ششم

● ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور



مثال بعد نشان می‌دهد که ممکن است که گزاره‌های منطقاً هم‌ارز به وضعیات متفاوتی در کاربرد دانش کامپیوتری منجر شوند.

مثال ۲. ۱۴

جدول ۲. ۱۲ آشکار می‌کند که گزاره‌های مرکب $(p \wedge q) \to r$ و $p \to (q \to r)$ منطقاً هم‌ارزند.

در قطعه برنامه‌های پاسکال نشان داده شده در شکل ۲. ۱، x، y، z، و i متغیرهایی صحیح‌اند. قسمت (a)ی شکل از ساختاری تصمیم‌گیری **مقایسه‌پذیر** با گزاره‌ای به صورت $(p \wedge q) \to r$ استفاده می‌کنند. در این جا نیز در قسمت (b) داریم $p: x > 0$، $q: y > 0$، که چون به متغیرهای x، y مقادیر $i - 4$ (در مورد x) و $i*3 + 4$ (در مورد y) را نسبت دهیم، به گزاره تبدیل می‌شوند. اما باید مواظب بود! حرف r حکم **Writeln** را نمایش می‌دهد، «حکم اجراپذیر»ی که در واقع به مفهوم متعارف جمله‌ای خبری، که بتواند برچسب راست یا دروغ بخورد، گزاره **نیست**.

در قطعهٔ نشان داده شده در قسمت (a)، تعداد کل مقایساتی، $(x > 0)$ و $(y > 0)$، که طی اجرای برنامه‌مان انجام گرفته‌اند:

۱۰(برای $x > 0$) + ۱۰(برای $y > 0$) = ۲۰

است. از طرف دیگر، قطعهٔ نشان داده شده در قسمت (b) صورتی گزاره‌ای **مقایسه‌پذیر** با استلزامهای تودرتوی $p \to (q \to r)$ است. در این حالت مقایسهٔ $(y > 0)$، جز این که مقایسهٔ $(x > 0)$ اجرا و به عنوان راست محاسبه شود، اجرا نمی‌شود، نتیجتاً، در این مورد، تعداد کل مقایسه‌ها:

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to r$	$q \to r$	$p \to (q \to r)$
۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱
۰	۰	۱	۰	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱
۰	۱	۱	۰	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱
۱	۰	۱	۰	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

جدول ۱۲.۲

چون به i، ۱ و ۲ و ۳ را تخصیص دهیم) ۳+ (برای ۰ < x) ۱۰
۱۳ = (برای ۰ < y،
است. درنتیجه، برحسب تعداد کل مقایسه‌های انجام گرفته در هر یک از دو حالت فوق، قطعه برنامهٔ نشان داده شده در قسمت (b) به کفایت‌تر از قطعه برنامه‌ای است که در قسمت (a) نشان داده‌ایم. □

```
z := 4;
For i := 1 to 10 do
  Begin
    x := z - i;
    y := z + 3*i;
    If (x > 0) and (y > 0) then
      Writeln ('The value of the sum x + y is ', x + y)
  End;
(a)
```

```
z := 4;
For i := 1 to 10 do
  Begin
    x := z - i;
    y := z + 3*i;
    If x > 0 then
      If y > 0 then
        Writeln ('The value of the sum x + y is ', x + y)
  End;
(b)
```

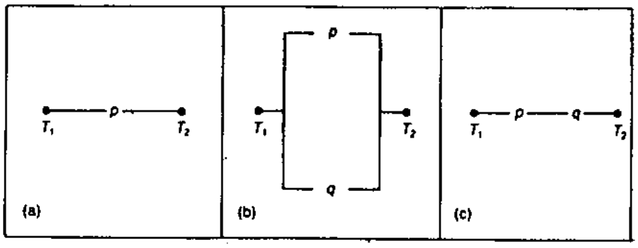
شکل ۱.۲

این بخش را با کاربردی در ساده کردن مدارهای سوییچی به پایان می‌بریم. در این مرحله قوانین منطق بسیار کارگشایند.

مدار سوییچی از سیمها و سوییچهایی تشکیل شده‌اند، که دو پایانهٔ T_1 و T_2 را به هم وصل می‌کنند. در هر چنین شبکه‌ای، هر سوییچ یا باز است (۰)، که در این صورت جریانی از آن نمی‌گذرد، یا بسته است (۱) که در این حال جریان از آن عبور می‌کند.

در شکل ۲.۲ در قسمت (a) شبکه‌ای با یک سوییچ داریم. هر یک از قسمتهای (b) و (c) دارای دو سوییچ (مستقل) اند.

در شبکهٔ قسمت (b)، جریان از T_1 به T_2 عبور می‌کند، اگر یکی از سوییچهای p، q بسته باشند. این شبکه را شبکه **موازی** می‌نامیم و با $p \vee q$ نمایش می‌دهیم. از شبکه قسمت (c)، برای این که جریان از T_1 به T_2 بگذرد، ضروری است که هر دو سوییچ p، q بسته باشند. در این حالت سوییچها به صورت سری اند و شبکه با $p \wedge q$ نمایش داده می‌شود.

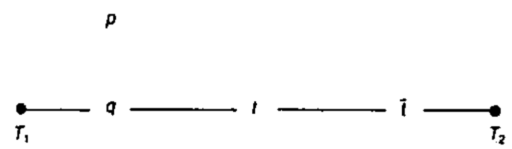


شکل ۲.۲

مثال ۲. ۱۵

سوییچهای شبکه‌ای نیاز به عملکرد مستقل از یکدیگر ندارند. شبکهٔ نشان داده شده در شکل ۳.۲ را در نظر بگیرید. در این مورد سوییچهای با برچسب t و $\bar{t}$ مستقل نیستند. این دو سوییچ را چنان هموند کرده‌ایم که t باز (بسته) است، اگر و تنها اگر $\bar{t}$ به‌طور همزمان بسته (باز) باشد. این مطالب برای سوییچهای q، $\bar{q}$ نیز صادق است. (نیز، مثلاً، سه سوییچ با برچسب p مستقل نیستند:)

این شبکه با



شکل ۳.۲

$$(p\vee q\vee r)\wedge(p\vee t\vee \bar{q})\wedge(p\vee \bar{t}\vee r)$$

نمایش داده می‌شود. با استفاده از قوانین منطق، گزارهٔ فوق را، که شبکهٔ مورد بحث را نمایش می‌دهد، به طریق زیر ساده می‌کنیم. (در این مورد، به خاطر سادگی کار، کاربردهای قواعد جانشینی را متذکر نمی‌شویم، اما قوانین مهم منطق به کار رفته را فهرست می‌کنیم.)

دلیل

$$(p\vee q\vee r)\wedge(p\vee t\vee \bar{q})\wedge(p\vee \bar{t}\vee r)$$
$$\Leftrightarrow p\vee[(q\vee r)\wedge(t\vee \bar{q})\wedge(\bar{t}\vee r)]$$

قانون توزیع‌پذیری ∨ بر ∧

$$\Leftrightarrow p\vee[([(q\vee r)\wedge t]\vee[(q\vee r)\wedge \bar{q}])\wedge(\bar{t}\vee r)]$$

قانون توزیع‌پذیری ∧ بر ∨

$$\Leftrightarrow p\vee\Big[\Big(\big[(q\vee r)\wedge t\big]\vee\big[(q\wedge\bar{q})\vee(r\wedge\bar{q})\big]\Big)\wedge(\bar{t}\vee r)\Big]$$

قانون توزیع‌پذیری ∧ بر ∨

$$\Leftrightarrow p\vee\Big[\Big(\big[(q\vee r)\wedge t\big]\vee(r\wedge\bar{q})\Big)\wedge(\bar{t}\vee r)\Big]\qquad q\wedge\bar{q}\Leftrightarrow F.$$

همانی برای ∨

$$\Leftrightarrow p\vee\Big[\Big(\big[(q\vee r)\wedge t\big]\wedge(\bar{t}\vee r)\Big)\vee\Big((r\wedge\bar{q})\wedge(\bar{t}\vee r)\Big)\Big]$$

چرا؟

چرا؟

$$\Leftrightarrow p\vee\Big[\big[(q\vee r)\wedge(t\wedge(\bar{t}\vee r))\big]\vee \big[(r\wedge\bar{q}\wedge\bar{t})\wedge(r\wedge\bar{q}\wedge r)\big]\Big]$$

چرا؟

$$\Leftrightarrow p\vee\Big[\big[(q\vee r)\wedge(t\wedge r)\big]\vee\big[(r\wedge\bar{q}\wedge\bar{t})\vee(r\wedge\bar{q})\big]\Big]$$

قانون جذب

$$\Leftrightarrow p\vee\Big[\big[(q\vee r)\wedge(t\wedge r)\big]\vee(r\wedge\bar{q})\Big]$$

قانون توزیع‌پذیری ∧ بر ∨

$$\Leftrightarrow p\vee\big[(q\wedge t\wedge r)\vee(r\wedge t\wedge r)\vee(r\wedge\bar{q})\big]$$

قانون خودنمایی

$$\Leftrightarrow p\vee\Big[\big((q\wedge t\wedge r)\vee(r\wedge t)\big)\vee(r\wedge\bar{q})\Big]$$

قانون جذب

$$\Leftrightarrow p\vee\big[(r\wedge t)\vee(r\wedge\bar{q})\big]$$

قانون توزیع‌پذیری ∧ بر ∨

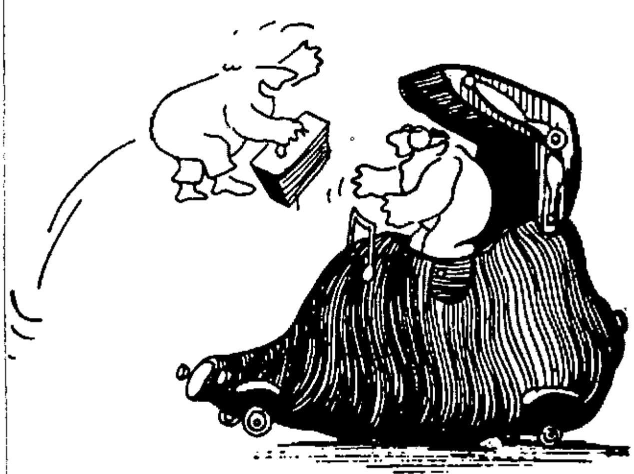
در نتیجه،

$$(p\vee q\vee r)\wedge(p\vee t\vee\bar{q})\wedge(p\vee\bar{t}\vee r)\Leftrightarrow p\vee\big[r\wedge(t\vee\bar{q})\big]$$

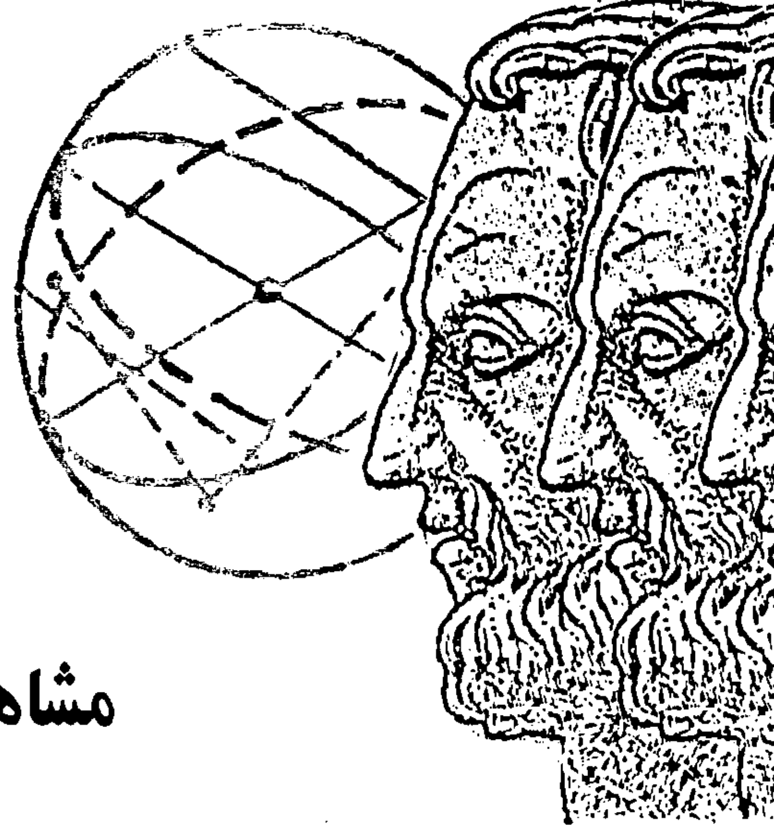
و شبکهٔ نشان داده شده در شکل ۳.۲ (b) به این مفهوم— هم‌ارز شبکهٔ اصلی است، که جریان از T_1 به T_2 در شبکهٔ (a) دقیقاً زمانی عبور می‌کند، که در شبکهٔ (b) چنین باشد. اما شبکهٔ (b) تنها چهار سوییچ، یعنی پنج سوییچ کمتر از شبکهٔ (a)، دارد. □

تفریح اندیشه ۳

مهرداد اتومبیلی را برای مسافرت به شهری که در ۱۰۰ کیلومتری محل اقامت او بود کرایه کرد. در نیمهٔ راه دوست خود را سوار کرد و با او ۵۰ کیلومتر آخر راه را پیمود تا به مقصد رسیدند. شب، هنگام مراجعت به شهر خودشان، مهرداد مجدداً دوستش را سوار اتومبیل کرد و در همان نقطه‌ای که او را سوار کرده بود پیاده کرد و به راه خود ادامه داد تا به شهرش رسید. در آنجا ۲۴ تومان بابت کرایه پرداخت. درصورتی که مهرداد و دوستش بخواهند کرایه اتومبیل را منصفانه به نسبت راهی که پیموده بودند بپردازند، سهم هرکدام چقدر است.



جواب در صفحهٔ ۸۸



برگرفته از: فرهنگ ریاضیات آکسفورد

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

مشاهیر ریاضی جهان

مک‌لورن ـ کولین[1] (۱۶۹۸ ـ ۱۷۴۶). مک‌لورن یکی از ریاضیدانهای قابل توجه اسکاتلندی است که در دانشگاههای آبردین[2] و ادین‌بورو[3] به کار اشتغال داشت. کارهای مهم بسیاری در حساب دیفرانسیل و انتگرال انجام داد، بنابراین استهزاآمیز است، که بیشتر معروفیت مک‌لورن به خاطر **سری‌مک‌لورن**[4] است، که تنها حالت خاصی از سری‌ای است که اکنون به **سری‌تیلور**[5] معروف او توسط جیمز گریگوری[6] و دیگران ابداع شده است. البته این مورد از موارد سرقت مطالب ادبی و علمی نیست، زیرا مک‌لورن این سری را در کتابی معروف آورده و نام خود را همراه آن کرده است.

اسحق نیوتن

نیوتن، ایزاک[7] (۱۶۴۲ ـ ۱۷۲۷). نیوتن به عنوان پسر کشاورزی در **لینکلن شایر**[8] تولد و رشد یافت، تا بر ریاضیات و فیزیک قرن هفدهم حکومت کند و در آنها انقلابی به وجود آورد. اساس حساب دیفرانسیل و انتگرال، نظریهٔ مکانیک، قانون جاذبه، نظریهٔ حرکت سیاره‌ای، نظریهٔ رنگها، **سری دوجمله‌ای**[9] و نتایج مهم بسیاری در نظریهٔ معادلات را به او مدیونیم. کار آنالیز عددی بدون **روش نیوتن**[10] لنگ می‌ماند. اظهارات در خور شایستگیهای نسبی ریاضیدانهایی با این درجه استعداد همواره بحث‌انگیز بوده است، اما در مورد نیوتن، از آن‌جا که به نظر می‌رسد که هم گاوس هم اینشتین مقام برتر را به نیوتن داده‌اند، نیاز به مجادله نیست. تنفری بیمارگونه از انتقاد، نیوتن را از نشر بسیاری از آثارش بازداشت. در ۱۶۸۴، **ادموند هالی**[11] که ستارهٔ دنباله‌داری به نام اوست، به نیوتن پیشنهاد کرد که در مورد قانون جاذبه‌ای که قوانین حرکت سیاره‌ای کپلر را به دست می‌دهد، تحقیق کند. نیوتن، که قبلاً در مورد این موضوع کار کرده بود، بلافاصله پاسخ داد که قانون مربع معکوس است. هالی که از این واقعه تقریباً تکان خورده

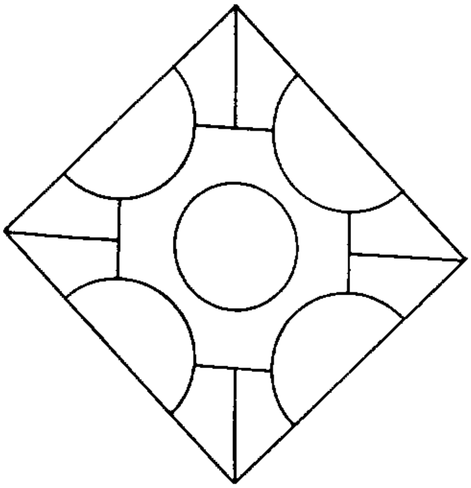
بود، بر آن شد که نیوتن را وادار به چاپ نتایجش بکند. و نیوتن سرانجام این کار را در صورت **اصول**[۱۲] اش، قدرتمندترین کار فرید در تاریخ طولانی ریاضیات، انجام داد. نیز متعصبانه در تاریخ شماری کتاب مقدس و کیمیا به کار پرداخت. نیوتن هنگام تصدی امور ضرابخانه مدیر بسیار قابلی بود و اصلاحات عمیقی در پول رایج بریتانیا انجام داد. مقبره و بنای یادبودش در کلیسای وست‌مینستر[۱۳] واقع است: ولتر در مورد نیوتن چنین گفت: «مدفون چونان سلطانی».

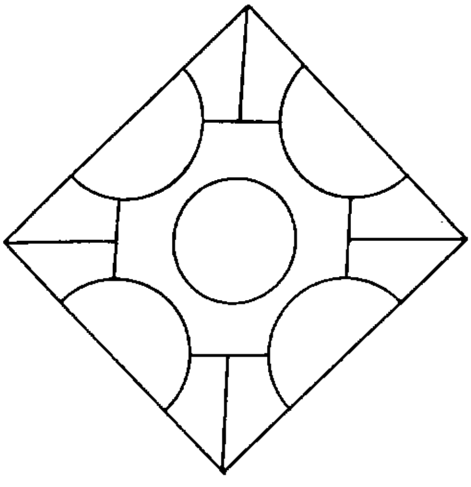
پاسکال، بلز[۱۴] (۱۶۲۳ ــ ۱۶۶۲). پاسکال در دنیا بیشتر به عنوان مؤلف **تفکرات**[۱۵] و متفکر مذهبی شناخته می‌شود، اما، به همان اندازه به عنوان ریاضیدان و فیزیکدان فعال بود. کارهای مهمی در هیدرواستاتیک (که در نتیجهٔ آنها واحد فشار پاسکال نامیده می‌شود) انجام داد، و بحثهایش با فرما در مورد مسألهٔ دومره[۱۶] نظریهٔ احتمال را بنیاد نهاد. **مثلث پاسکال**[۱۷]، نمودار ضرایب دوجمله‌ای، از آن او نبود، اما او آن را در محاسبات احتمال‌اش به کار برد. پاسکال در کار مربوط به یافتن مساحات اشکال منحنی‌الخط، کاری که به زودی منجر به حساب دیفرانسیل و انتگرال شد، نیز شرکت داشت. سهم اساسی پاسکال در این مورد، یافتن مساحت قوس سیکلوییدی است. این کار را برای منحرف کردن فکرش از درد دندان انجام داد. ممکن است دانشجویان هندسه با «شش ضلعی عرفانی» پاسکال آشنا باشند.

پئانو، گاسیب[۱۸] (۱۸۵۸ ــ ۱۹۳۲). پئانو به خاطر آکسیومی‌سازی اعداد صحیحش که توسعهٔ مهمی در تحلیل صوری حساب «معمولی» بود مشهور است. نیز اولین شخصی بود که مثالهایی از خمهای معروف به فضا پرکن به دست داد.

❑ یادداشتها

1– Maclaurin-Colin
2– Aberdeen
3– Edinburgh
4– Maclaurin series
5– Taylor series
6– James Gregory
7– Newton, Isaac
8– Lincolnshire
9– binomial series
10– Newton's method
11– Edmond Halley
12– Principia
13– Westminster Abbey
14– Pascal, Blaise
15– Pensées
16– de Méré
17– Pascal's triangle
18– Peano, Guiseppe





نامساویها در احتمال

$P_{(A)} \leq ?$

● سیامک جعفری

اهمیت حساب احتمالات بر کسی پوشیده نیست. حتی عامه مردم به کثرت از این کلمه «احتمال» در زندگی روزانه استفاده می‌کنند. احتمال، زبان همهٔ پدیده‌های طبیعی است.

این نظریه مانند بیشتر بخشهای ریاضیات دچار تغییرات اساسی شده است، که با ارائه نظریه‌های ریاضیدانان روسی براساس اصول متعارف شروع شده است و امروزه با نظریه مجموعه‌ها و توابع گره‌خورده است.

اگر U مجموعه یا فضای حوادث باشد و F یک مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های U باشد، عناصر F را حوادث تصادفی و F را میدان حوادث یا جبر می‌نامند. حادثه تصادفی U را حادثه یقینی و حادثه تصادفی $\overline{U}$ را حادثه غیرممکن خواهیم نامید. A و $\overline{A}$ حوادث معکوس هستند.

تعریف: با هر حادثه‌ای تصادفی از میدان حوادث F، عدد غیر منفی $P(A)$ را در تناظر گذاشته، که احتمال حادثه A نامیده می‌شود. آشکار است که: $P(U)=1$.

اگر دو حادثه A_1 و A_2 ناسازگار باشند داریم:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

این اصل در مورد حوادثی که دوبدو ناسازگار هستند قابل تعمیم است و بدون اثبات می‌پذیریم که با اصل زیر هم‌ارز است.

اگر حوادث A_1 و A_2 و A_3 و ... و A_n طوری باشند، که وقوع هر یک باعث وقوع دیگری شود، یعنی $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$ و حاصلضرب تمامی حوادث یک حادثه غیرممکن باشد، آنگاه:

$$n \longrightarrow \infty \Rightarrow P(A_n) \longrightarrow 0$$

که به نام اصل پیوستگی است.

در تعریف احتمال باید مجموعه حوادث ساده U، مجموعه حوادث F و تابع P که روی مجموعه F تعریف شدد است، معین و معرف باشند. این مجموعه P و F و U را که یک سه‌تایی مرتب (U, F, P) است، فضای احتمال می‌نامند.

نتایج:

I) $0 \leq P(A) \leq 1$

احتمال حادثه یقین $P(U)=1$ است و حادثه غیرممکن $P(\varnothing)=0$، زیرا

$U.U\varnothing = U$ یا $U+0=u$

بنابراین:

$$P(U \cup \varnothing) = P(U+0) = P(U) + P(0) = P(U)$$

از تساوی اخیر نتیجه می‌شود:

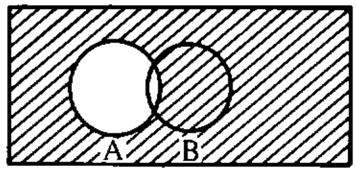
$P(\varnothing)=0$ یا $P(0)=0$

II) اگر $A \subset B$ باشد، یعنی احتمال وقوع B منوط به وقوع

A باشد :

$P(A) \le P(B)$

از روی شکل معلوم است که A و $\overline{A}B$ (یعنی $A' \cap B$) ناسازگارند. داریم :



$$A + \overline{A}B = A \cup (A' \cap B) = (A \cup A') \cap (A \cup B) =$$
$$M \cap (A \cup B) = A \cup B = B$$

تساوی اخیر به دلیل $A \subset B$ به دست می‌آید. بنابراین :

$$A + \overline{A}B = B \Rightarrow P(A + \overline{A}B) = P(B)$$
$$P(A) + P(\overline{A}B) = P(B)$$

از آن جا $P(\overline{A}B) \ge ۰$ پس :

$$P(A) \le P(B)$$

III) به کمک مطلب قبل می‌توان نشان داد :

$$A \cap B \subset A \Rightarrow P(A \cap B) \le P(A)$$
$$A \subset A \cup B \Rightarrow P(A) \le P(A \cup B)$$
$$A - B \subset A \Rightarrow P(A - B) \le P(A)$$

مثلاً برای اثبات رابطه اخیر حادثه A را بصورت تجزیه دو حادثه ناسازگار می‌توان نوشت $A - B$ و AB (یا $A \cap B$).

یعنی :

$$A = (A - B) + AB$$
$$P(A) = P[(A - B) + AB] = P(A - B) + P(AB)$$

از آنجا که $P(AB) \ge ۰$ نتیجه می‌شود :

$$P(A - B) \le P(A)$$

در ضمن نتیجه مفید روبرو نیز به دست می‌آید :

$$P(A - B) = P(A) - P(AB) \quad IV$$

نشان دهید که :

$$P(A + B) \le P(A) + P(B)$$

برای اثبات $A + B$ را به دو حادثه ناسازگار $A - B$ و B تجزیه می‌کنیم :

$$A + B = (A - B) + B$$
$$P(A + B) = P[(A - B) + B] = P(A - B) + P(B)$$

به کمک IV

$$P(A + B) = P(A) - P(AB) + P(B)$$

یا تساوی مهم

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

که از آنجا که $P(AB) \ge ۰$، نتیجه مورد نظر به دست می‌آید.

مطلب اخیر قابل تعمیم است.

اگر حادثه B باعث وقوع حادثه C شود، آنگاه احتمال شرطی حادثه B از احتمال شرطی حادثی C تجاوز نخواهد کرد.

$$P(B|A) \le P(C|A)$$

با توجه به صورت مسأله خواهیم داشت :

$$B \subset C$$
$$B \subset C \Rightarrow B \cap A \subset C \cap C$$
$$\Rightarrow P(BA) \le P(CA)$$

و $P(A) \ge ۰$

بنابراین اگر A اتفاق بیفتد یعنی $P(A) \ge ۰$ داریم :

$$\Rightarrow \frac{P(BA)}{P(A)} \le \frac{P(CA)}{P(A)}$$
$$\Rightarrow P(B|A) \le P(C|A)$$

مسائل حل شده

۱) ثابت کنید اگر $P(A \cap B) \le P(A) . P(B)$ آنگاه

$$P(A' \cap B') \le P(A') . P(B')$$

حل:

می‌دانیم :

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = ۱ - P(A \cup B)$$

ولی :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

بنابراین :

$$P(A' \cap B') = ۱ - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

از آنجا که :

$$P(A \cap B) \le P(A) . P(B)$$

می‌توان نتیجه گرفت :

$$P(A'\cap B')\leq 1-P(A)-P(B)+P(A).P(B)$$

یا :

$$P(A'\cap B')\leq [1-P(A)]\ [1-P(B)]$$

که خواهد شد :

$$P(A'\cap B')\leq P(A').P(B')$$

۲) اگر $AB\subset C$ باشد ثابت کنید :

$$P(A)+P(B)-P(C)\leq 1$$

(درباره تعمیم قضیه بحث کنید)

حل: بنا به قضیه

بنا به قضیه خوانده شده :

$$P(AB)\leq P(C)$$

می‌دانیم :

$$P(A)=P(AB)+P(AB')$$
$$P(B)=P(AB)+P(A'B)$$

اکنون :

$$P(A)+P(B)-P(C)\leq [P(AB)+P(AB')]+ [P(AB)+P(A'B)]-P(AB)$$

$$P(A)+P(B)-P(C)\leq P(AB)+P(AB')+P(A'B)$$

از آنجا که :

$$P(AB)+P(AB')=P(A)$$

و همچنین :

$$P(A'B)=P(B)-P(AB)$$

پس :

$$P(A)+P(B)-P(C)\leq P(A)+P(B)-P(AB)$$

برهان تمام است امّا :

$$\leq P(A+B)\leq 1$$
$$\leq 1-P(A+B)'$$
$$\leq 1-P(A'B')\leq 1$$

۳) ثابت کنید اگر $AB=\{\ \}$ آنگاه $P(A)\leq P(\overline{B})$

$$AB=\varnothing\Rightarrow A\cap B=\varnothing$$
$$\Rightarrow A\ ,\ B \quad \text{جدا از هم}$$
$$\Rightarrow A\subset B'$$
$$\Rightarrow P(A)\leq P(\overline{B})$$

مسایل

۱) اگر $ABC\subset D$ ثابت کنید :

$$P(A)+P(B)+P(C)-P(D)\leq 2$$

۲) اتحاد زیر و تعمیم آن را ثابت کنید.

$$P(A\cap B)\geq 1-P(\overline{A})-P(\overline{B})$$

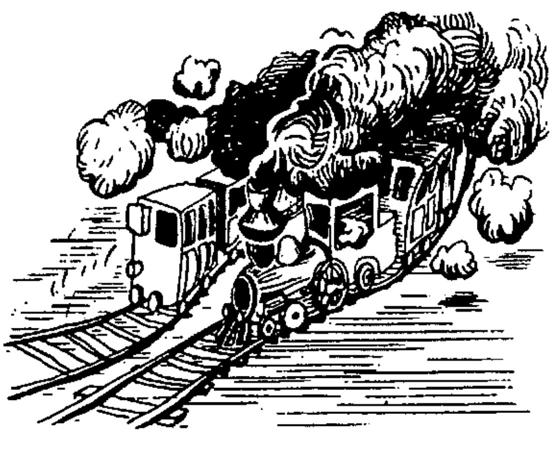
۳) تعمیم مسئله اجتماع حوادث را ثابت کنید.

$$P\left(\bigcup_n A_n\right)\leq \sum_n P(A_n)$$

تفریح اندیشه ۴

دو شهر به وسیلهٔ راه‌آهن به هم وصل شده‌اند و رأس هر ساعت یک ترن از هریک از این دو شهر، به طرف شهر مقابل حرکت می‌کند.

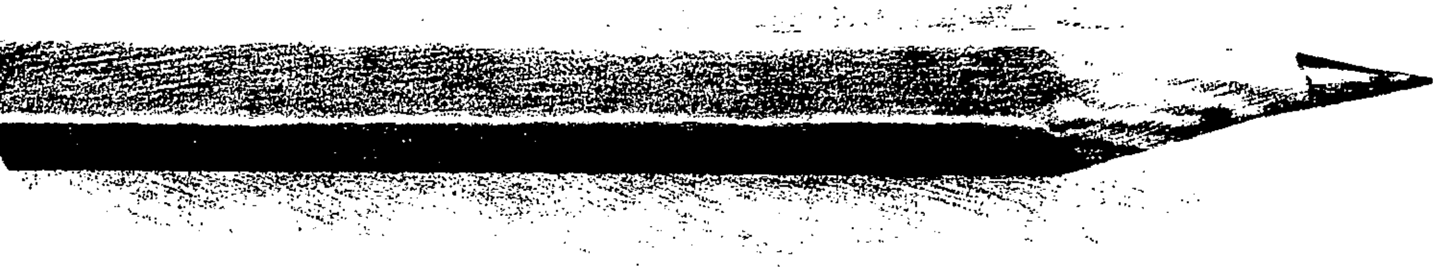
سرعت تمام ترنها یکسان و زمان پیمودن فاصله بین دو شهر ۵ ساعت است. هر ترن از شروع حرکت خود تا رسیدن به شهر مقابل با چند ترن مواجه می‌شود؟



جواب در صفحهٔ ۸۸

اثر جورج سامرز
ترجمهٔ حسن نصیرنیا

منطق خود را بیازمایید



کوچکترین حاصل جمع

(سه)	(دو)	(یک)
NEAL	ELSA	GALE
+ELSA	+GALE	+NEAL
GALE	NEAL	ELSA

در هریک از سه جمع بالا، هر حرف نمایشگر یک رقم متفاوت است. با وجود این، هر حرف در یک جمع با حرف همانند آن در جمع دیگر لزوماً یکی نیست.

به نَظر شما حاصل جمع کدام یک از جمعهای (یک)، (دو) و (سه) کوچکترین است؟

(**رهنمود:** برای دستیابی آسان به حل معما، توجه کنید که در هر جمع، فقط یک حرف هست که در ارتباط با یک رقم خاص کارکرد مشخّصی دارد. این رقم را بیابید و سپس دو رقمِ دیگر مرتبط با آن را، در هر جمع، مشخص کنید. به‌عبارت دقیقتر، نخستین و سومّین ستون از سمت راست هر جمع را با هم مقایسه کنید تا به راه حل دست یابید.)

* * *

پاسخ معمای منطقی

E در جمع (یک)، A در جمع (دو) و L در جمع (سه) هر سه کارکردِ یکسانی دارند.

در جمع (سه) یا	در جمع (دو) یا	در جمع (یک) یا
L + A = E L + E = ۱۰ + A	A + E = L A + L = ۱۰ + E	E + L = A E + A = ۱۰ + L
یا	یا	یا
L + E = A L + A = ۱۰ + E	A + L = E A + E = ۱۰ + L	E + A = L E + L = ۱۰ + A

با توجه به روابط بالا، می‌توان دریافت که فقط رقم ۵ در هر سه جمع کارکردِ یکسانی دارد. برای مثال:

۵ + ۴ = ۹　　　۵ + ۳ = ۸

۵ + ۹ = ۱۰ + ۴　　　۵ + ۸ = ۱۰ + ۳

بنابراین داریم:

(سه)	(دو)	(یک)
NEA۵	ELS۵	GAL۵
+E۵SA	+G۵LE	+N۵AL
GA۵E	NE۵L	۵ LSA

چنانچه به جای حروف L در جمع (یک)، E در جمع (دو) و A در جمع (سه) رقم بگذاریم، به ترتیب مقدارهای A، L و E در جمع مربوط به هرکدام به دست می‌آید. با روش آزمون و خطا و حذفِ مواردی که در آنها از ستون دوم به سوم انتقالِ ۱ داریم، می‌توانَ صورتهای متفاوت هر جمع را چنین نوشت:

(یک)

(پ)	(ب)	(الف)
G۱۶۵	G۷۲۵	G۶۱۵
+N۵۱۶	+N۵۷۲	+N۵۶۱
۵۶۸۱	۵۲۹۷	۵۱۷۶

(دو)

(ت)	(پ)	(ب)	(الف)
۹۴S۵	۸۳S۵	۷۲S۵	۶۱S۵
+G۵۴۹	+G۵۳۸	+G۵۲۷	+G۵۱۶
N۹۵۴	N۸۵۳	N۷۵۲	N۶۵۱

(سه)

(ت)	(پ)	(ب)	(الف)
N۹۴۵	N۸۳۵	N۷۲۵	N۶۱۵
+۹۵S۴	+۸۵S۳	+۷۵S۲	+۶۵S۱
G۴۵۹	G۳۵۸	G۲۵۷	G۱۵۶

با بررسی جمعهای ناتمامِ بالا، آشکار می‌شود که **جمعِ (یک) دارای کوچکترین حاصل جمع است.** برای کامل کردنِ جمعها باید به یادداشت که نخستین حرفِ هیچ یک از اعداد عوامل جمع نباید صفر باشد. همچنین توجه کنید که مقدارهای حروف باقیمانده باید با مقدارهای مشخص شده در هر جمع متفاوت باشد. بنابراین، جمعِ (یک) دارای چهار صورت ممکن، جمع (دو) فقط یک صورت و جمع (سه) دوصورت ممکن است:

(یک)

(پ)	(پ)	(ب)	(ب)
۳۱۶۵	۲۱۶۵	۳۷۲۵	۱۷۲۵
+۲۵۱۶	+۳۵۱۶	+۱۵۷۲	+۳۵۷۲
۵۶۸۱	۵۶۸۱	۵۲۹۷	۵۲۹۷

(دو)

(الف)
۶۱۳۵
+۲۵۱۶
۸۶۵۱

(سه)

(ب)	(الف)
۱۷۲۵	۲۶۱۵
+۷۵۳۲	+۶۵۴۱
۹۲۵۷	۹۱۵۶

منبع ترجمه: Summers, George J. *Test your Logic*. Dover Publications, Inc. New york.

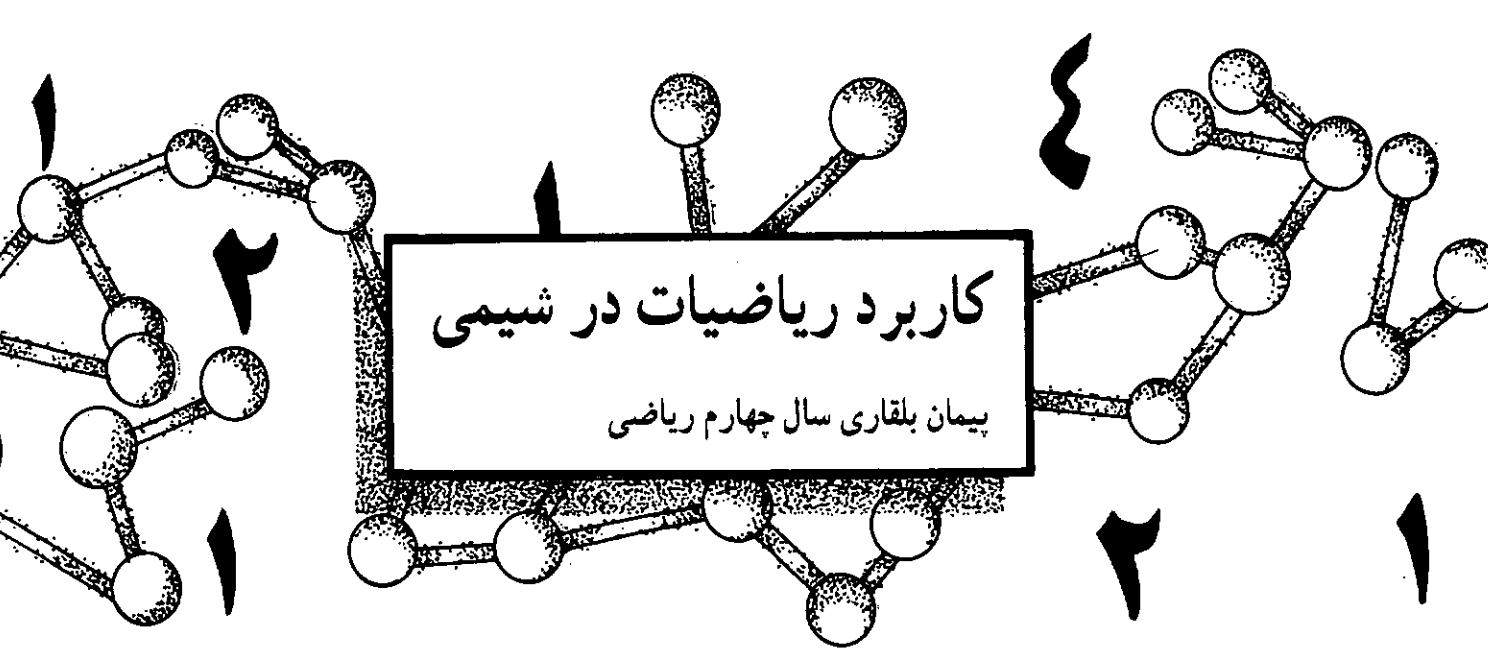
تفریح اندیشه ۵

شنهای زمان

مریم خانم میانسال برای پختن یک کیک دچار مشکل شده است. دستورالعمل پختن کیک این است که دقیقاً نه دقیقهٔ متوالی پخته شود، اما تنها چیزی که وی برای اندازه‌گیری زمان دارد دو ساعت شنی است. اولی گذشت چهار دقیقه و دومی گذشت هفت دقیقه را مشخص می‌کند.

درصورتی که روی‌ساعتها درجه‌بندی نشده باشد و نتوانیم شنهای آنها را منتقل کنیم، سریعترین راه مشخص کردن نه دقیقه با استفاده از این دو ساعت چیست؟ (ساعت را می‌توان با به پهلو قراردادن متوقف کرد.)

جواب در صفحهٔ ۸۸



کاربرد ریاضیات در شیمی

پیمان بلقاری سال چهارم ریاضی

تعریف هیبریداسیون: هرگاه چند اُربیتال اتمی متفاوت با هم ادغام و آمیخته شوند و از اختلاط آنان به همان تعداد اُربیتال کاملاً یکسان (از نظر شکل و سطح انرژی) تشکیل شود، این طرح یا مدل را هیبریداسیون می‌نامند و اُربیتالهای حاصل، اُربیتالهای هیبریدی نامیده می‌شوند که این اُربیتالها تنها از نظر جهت‌یابی در سطح یا فضا با یکدیگر تفاوت دارند. انواع هیبریداسیون: Sp و Sp^2 و Sp^3 و Sp^3d و...

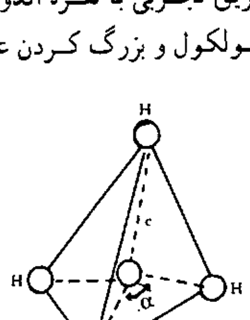
بحث در مورد هیبریداسیون Sp^3

در این نوع هیبریداسیون یک اُربیتال S با سه اُربیتال p هیبرید شده و ۴ اُربیتال هیبرید یکسان Sp^3 به وجود می‌آورند که هر اُربیتال Sp^3، $\frac{1}{4}$ خصلت اُربیتال S و $\frac{3}{4}$ خصلت اُربیتال p را دارند و گسترش طولی این نوع اُربیتالها را طبق قرار داد ۲ در نظر گرفته‌اند.

شکل مولکولهایی که اتم مرکزی آنان از هیبریداسیون Sp^3 استفاده می‌کنند، به صورت چهار وجهی می‌باشد، در حالی که زاویه پیوندی این نوع مولکولها $109°, 28'$ است، مانند مولکول متان

زاویهٔ پیوندی $= \alpha = 109°, 28' = 109/5°$

این زاویه را از طریق تجربی با نقره اندود کردن زاویه و عکسبرداری از مولکول و بزرگ کردن عکس و از طریق



مقیاسهای مناسب به دست می‌آورند. اما از اثبات منطقی و ریاضی آن غافل‌اند. حال به اثبات ریاضی آن به طور مثال در مورد مولکول متان می‌پردازیم.

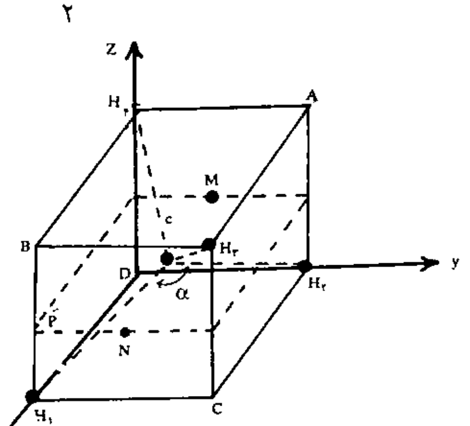
اثبات: ابتدا اوساط دو صفحهٔ (AH_2DH_4) و (BH_1CH_3) را با دو نقطهٔ M و N مشخص می‌کنیم حال ضلع مکعب را برابر مقدار a در نظر می‌گیریم. از هر سه نقطه مانند M و N و C فقط یک صفحه عبور می‌کند. آن صفحه را P می‌نامیم حال داریم:

$M(0, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}) \quad H_1(a,0,0)$

$N(a, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}) \quad H_2(0,a,0)$

M و N و C در یک صفحه واقع‌اند.

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{0+a}{2} = \dfrac{a}{2} \\ y_c = \dfrac{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}}{2} = \dfrac{a}{2} \\ z_c = \dfrac{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}}{2} = \dfrac{a}{2} \end{cases} \rightarrow C(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2}) \rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{CH_1}(\frac{a}{2},-\frac{a}{2},-\frac{a}{2}) \\ \overrightarrow{CH_2}(-\frac{a}{2},\frac{a}{2},-\frac{a}{2}) \end{cases}$$



زاویهٔ بین دو بردار $\vec{CH_1}$ و $\vec{CH_2}$ همان زاویهٔ پیوندی مولکول متان می‌باشد. پس داریم.

$$\boxed{\sin(19,30')=0/3338}$$

$$\cos\alpha=\cos(H_1\hat{C}H_2)=\frac{\vec{CH_1}\cdot\vec{CH_2}}{\left|\vec{CH_1}\right|\left|\vec{CH_2}\right|}=\frac{-\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}\times\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}}$$

$$=\frac{-\frac{a^2}{4}}{\sqrt{3}(\frac{a}{2})\times\sqrt{3}(\frac{a}{2})}=-\frac{1}{3}=-0/3333$$

$$\to\cos\alpha=-\sin(19,30')=-\sin(19/5^\circ)$$

$$=\cos(90^\circ+19/5^\circ)\to\alpha=109/5^\circ \quad \text{یا} \quad \boxed{\alpha=109,30'}$$

لازم به ذکر است که در بالا از $\sin(19,30')$ که برابر ۰/۳۳۳۸ است استفاده شده در حالی که اگر $2'$ از زاویه کم شود سینوس آن تقریباً ۰/۳۳۳۳ خواهد شد.

برای محاسبهٔ زاویهٔ مولکولهایی از قبیل مولکول متان، تتراکلرید کربن ... روش دیگری که به مراتب از روش اول کاملتر است توسط آقای علیرضا مظفری ارائه شده که شرح آن به صورت زیر می‌باشد.

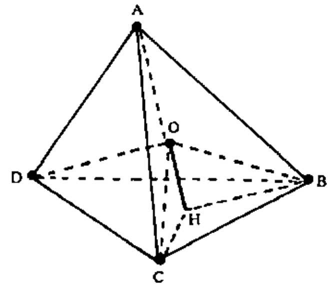
۱ ــ اگر AO را ادامه دهیم بر صفحهٔ مثلث BCD عمود می‌شود چون شکل مزبور چهار وجهی منظم می‌باشد.

$\Delta OHB: y^2=4-x^2$ رابطهٔ (I)

رابطهٔ (II)

$\Delta ABH: y^2=a^2-(2+x)^2\to y^2=a^2-4-x^2-4x$

$\Delta CHB: a^2=y^2+y^2-2y^2\cos 120$ رابطهٔ (III)



رابطهٔ I را در رابطه II جایگزین می‌کنیم.

$OA=OB=2$ طول پیوند

$$4-x^2=a^2-(2+x)^2=a^2-4-x^2-4x$$

رابطهٔ III را در رابطهٔ بدست آمده جایگزین می‌کنیم.

$$BH=HC=y\ ,\ OH=x$$

$$4-x^2=2y^2-2y^2(-\frac{1}{2})-4-x^2-4x$$

$$AB=BC=a$$

$$y^2=4-x^2, 4-x^2=3(4-x^2)-4-x^2-4x$$

$$\to 4-\cancel{x^2}=12-3x^2-4-\cancel{x^2}-4x$$

(زیرا اندازهٔ پاره خط منفی نمی‌شود)

$$\to -3x^2-4x+4=0\to\begin{cases}x'=\frac{2+4}{-3}=\frac{-6}{3}=-2\\ x=\frac{2-4}{-3}=\frac{2}{3}\end{cases}$$

رابطهٔ I و II $\Rightarrow 4-\cancel{x^2}=a^2-4-\cancel{x^2}-4x$

$$\to a^2=4x+8=\frac{8}{3}+8=\frac{32}{3}\to\boxed{a^2=10/6666}$$

$$\Delta AOB: a^2=4+4-8\cos c\to 10/6666$$

$$=8-8\cos c\to\cos c=\frac{2/6666}{-8}=-0/3333$$

$$0/3256<0/3333<0/3420$$

$$70<x<71$$

چون مقدار کسینوس منفی بود زاویه را از ۱۸۰ کم می‌کنیم

کم می‌شود به مقدار کسینوس اضافه می‌شود

$0/0164$	1°
$0/0077$	$x=0/4695$

$$\to 180-c=70/5304$$

$$\to c=109/469$$

1°	$60'$
4996	$x=18'$

$$\to\boxed{c=109^\circ,28'}$$

آموزش برنامه‌نویسی به زبان پاسکال (قسمت اول)

محمد رحیم
دبیر دبیرستان نمونهٔ دولتی امام صادق (ع)

مقدمه

از آن‌جا که زبان پاسکال هم به‌لحاظ آموزش و هم به‌لحاظ فراگیری آسان بوده و نیز علاوه بر آن دارای قابلیتهای بالایی است، سلسله مباحثی تحت عنوان آموزش زبان پاسکال ارائه می‌شود. سادگی ساختار زبان پاسکال باعث شده که طرفداران زیادی پیدا کند و درحال حاضر بسیاری از برنامه‌های کاربردی با این زبان نوشته می‌شوند. بنابر تجربه‌ای که نگارنده در امر تدریس و نیز برنامه‌نویسی به زبانهای ++C، Pascal، Assembly و غیره دارد، این نکته تأکید می‌گردد که هر زبان برنامه‌نویسی ویژگیهای خاص خود را دارد و باید هر زبان برنامه‌نویسی را همان‌گونه که هست یاد گرفت. نکته مهم دیگر این است که برای یادگیری هر زبان برنامه‌نویسی باید زیاد تمرین کرد تا اصول حاکم بر آن زبان به‌طورکامل درک شود و زبان پاسکال نیز از این امر جدا نیست.

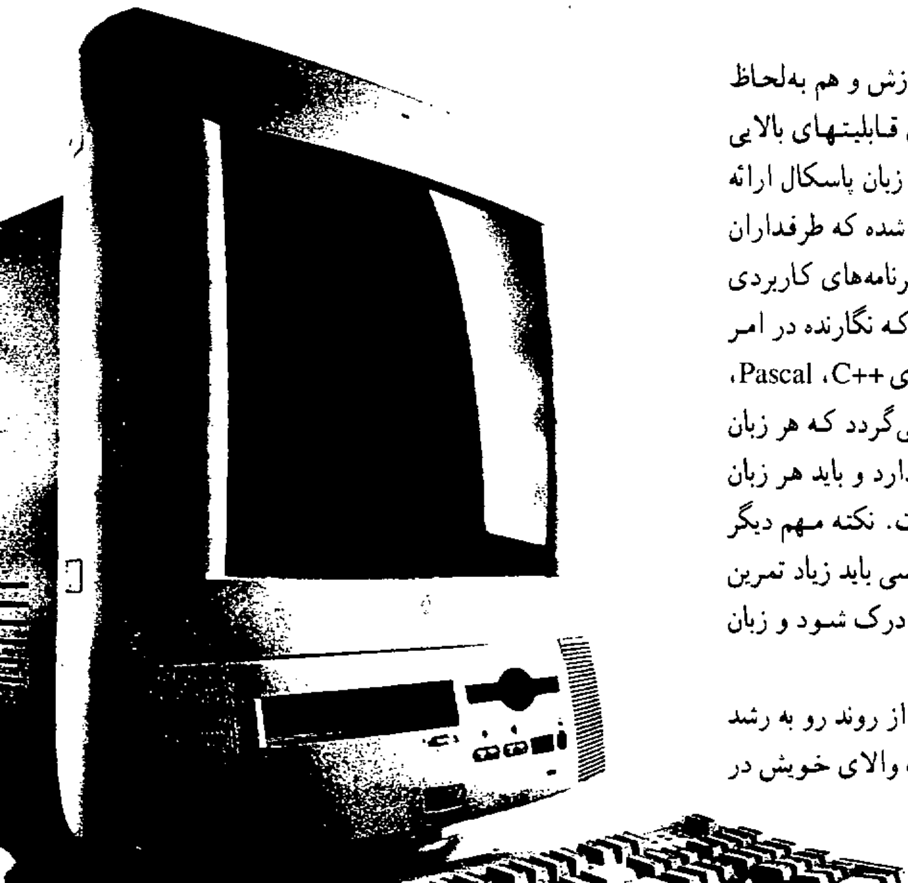
امید است که آینده‌سازان مملکت اسلامی از روند رو به رشد و سریع علم کامپیوتر عقب نمانده و با همت والای خویش در جهت غنای علمی و فرهنگی گام بردارند.

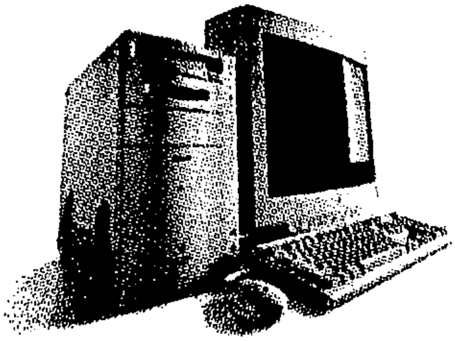
تاریخچه

زبان پاسکال اولین بار در سال ۱۹۷۰ میلادی توسط یک دانشمند علوم کامپیوتر به‌نام Niklaus Wirth در شهر زوریخ سویس طراحی شد و به افتخار ریاضیدان فرانسوی Bliase Pascal که اولین محاسبه‌گر مکانیکی را اختراع کرد، PASCAL نامگذاری گردید. زبان پاسکال جزو زبانهای نسل سوم (۱۹۷۰ـ ۱۹۶۲) است که برگرفته از زبان ALGOL 60 می‌باشد. زبان پاسکال سپس خود مبنایی برای طراحی زبانهایی چون Ada و Modula - 2 قرار گرفت. درسال ۱۹۸۳ مؤسسهٔ استاندارد ANSI و نیز مؤسسهٔ IEEE استاندارد زبان پاسکال را تدوین کردند. درحال حاضر مترجم[1] پاسکال نسبت به پاسکال استاندارد از سوی شرکتهای معتبر کامپیوتری توسعه یافته و نسخه‌های جدید آن در دسترس عموم قرار گرفته است.

طبقه‌بندی زبانها

توضیح این مطلب ضروری است که پردازندهٔ سیستم (CPU) فقط 0 و 1 را می‌فهمد، ولی برنامه‌هایی را که برای ما قابل فهم





است، نمی‌فهمد. از این‌رو باید یک رابط و یا واسطه‌ای وجود داشته باشد، تا برنامه‌هایی را که برای ما قابل فهم است، به کدهای قابل فهم برای سیستم (0 و 1) تبدیل کند که مترجم (Compiler) این‌کار را انجام می‌دهد. حال بسته به این‌که برنامه‌های نوشته شده به چه میزان به کدهای سیستم (0 و 1) نزدیک باشند، سطوح مختلفی را قائل می‌شویم. چون کدهایی که به زبان Assembly نوشته می‌شوند، به کدهای سیستم نزدیک هستند لذا به آن، زبان سطح پایین می‌گوییم. زبانهایی همچون Basic، Fortran، Pascal، Lisp، Prolog، Ada و... به این دلیل زبان سطح بالا نامیده می‌شوند که کاربر[2] نیازی به دانستن جزئیات سخت‌افزار نداشته و می‌تواند دستورات لازم را به‌گونه‌ای بنویسد، که برای خودش نیز قابل فهم باشد. برای مثال در زبان Basic دستور Print x که مقدار x را در خروجی چاپ می‌کند، دستور با مسمّایی بوده و کاربر درک معینی از آن دارد، ولی از طرفی کامپیوتر این دستور را نمی‌فهمد و این وظیفهٔ مترجم است که با 0 و 1 این دستور را به کامپیوتر بشناساند. در بیشتر مواقع، یک دستور در یک زبان سطح بالا معادل چندین دستور در یک زبان سطح پایین نظیر Assembly است. از طرفی در یک زبان سطح پایین باید با ثبّاتها[3] و وقفه‌ها[4] به طور کامل آشنا بود. شایان ذکر است که درحال حاضر بیش از ۲۰۰۰ زبان برنامه‌نویسی سطح بالا وجود دارد!، و این خود حکایت از ساده‌تر بودن برنامه‌نویسی به زبانهای سطح بالا دارد. به زبانهایی نظیر زبان C و forth که هم قابلیتهای یک زبان سطح بالا را دارند و علاوه بر آن به سخت‌افزار سیستم هم نزدیک هستند، زبان سطح متوسط یا میانه می‌گویند.

یادآور می‌شویم که کامپیوتر حتی 0 و 1 را هم نمی‌فهمد، بلکه آن را از طریق برقراری و عدم برقراری جریان و ایجاد اختلاف ولتاژ در مدارات cpu درک می‌کند.

امّا چرا پاسکال؟

علاوه بر مواردی که در مقدمه ذکر شد، ویژگیهایی که در زیر به آن اشاره می‌شود، تصویر قدرتمندانه‌ای را از مترجمهای جدید زبان پاسکال ارائه می‌دهد و ما را بر آن می‌دارد که از پاسکال به‌عنوان یک زبان همه‌منظوره استفاده کنیم. این ویژگیها عبارتند از :

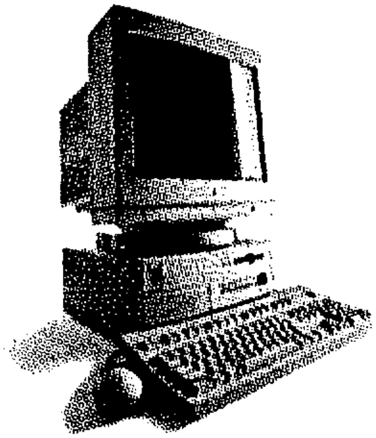
(۱) ساخت یافته بودن[5] (۲) انعطاف‌پذیری که به‌دلیل وجود توابع کتابخانه‌ای بسیار متنوع حاصل شده است (۳) توانایی پشتیبانی برنامه‌های بزرگ (۴) داشتن قابلیتهای گرافیکی خیلی خوب (۵) استفاده از دستورات زبان Assembly به‌عنوان بخشی از برنامه که باعث سرعت بخشیدن به برنامه می‌شود (۶) توانایی ارتباط با زبان C که خود یک زبان بسیار پیشرفته می‌باشد (۷) قابلیت برنامه‌نویسی OOP[6] که نگرشی جدید به شیوهٔ برنامه‌نویسی است (۸) قابلیت برنامه‌نویسی تحت Windows حتی به‌صورت OOP (۹) دسترسی به سیستم و در نتیجه توانایی برنامه‌نویسی سیستم[7].

ذکر این مطلب ضروری است که در آموزش زبان پاسکال قصد نداریم به ویژگیهای بالا بپردازیم، چرا که بحث آنها خارج از محدودهٔ آموزش ما می‌باشد و علاقه‌مندان در آینده می‌توانند جزئیات مربوط به هر یک از آنها را مورد مطالعه قرار دهند.

ساختار زبان پاسکال

ــ در زبان پاسکال حساسیت نسبت به حروف کوچک و بزرگ (Case sensitive) وجود ندارد و دستورات برنامه را می‌توان با حروف کوچک و یا بزرگ نوشت.

ــ در زبان پاسکال کلیه متغیرهای مورد استفاده در برنامه باید از پیش معرفی شده باشند.

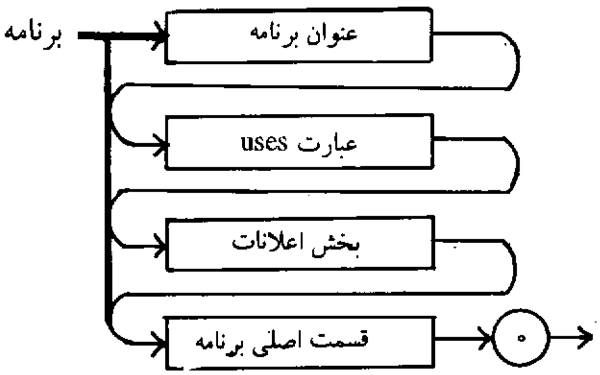


– در پایان هر دستور باید علامت ; گذاشته شود.

– تمامی دستورات برنامه در داخل بلوک (Block) قرار می‌گیرند.

– محدودیتی از نظر سطر و ستون وجود ندارد و می‌توان دستورات را پشت سر هم و یا زیر هم نوشت.

شکل ۱ ساختار کلی زبان پاسکال را نشان می‌دهد.



شکل ۱

توضیح هر یک از قسمتهای این ساختار به‌شرح زیر است :

عنوان برنامه (Program heading) : خط اول برنامه است و به این صورت می‌آید :

Program عنوان ;

در این‌جا «عنوان» نامی است که از قاعدهٔ شناسه‌ها که پس از این ذکر می‌شود، پیروی می‌کند. به‌طور معمول برای عنوان برنامه از اسمی استفاده می‌شود که عملکرد برنامه، الگوریتمهای خاصی که مورد استفاده قرار می‌گیرد، خلاصه‌ای از صورت مسأله، فرضیات و یا غیره را بیان کند. برای مثال اگر می‌خواهیم یک برنامهٔ معدل‌گیری بنویسیم، خوب است که عنوان برنامه چنین باشد و Program Average. متذکر می‌گردد که این خط از برنامه اختیاری بوده و مطابق شکل ۱، یک برنامه می‌تواند این قسمت را نداشته باشد.

عبارت Uses : در مورد کاربرد این خط از برنامه پس از این توضیح داده خواهد شد.

بخش اعلانات (Declaration) : کلیهٔ ثابتها، متغیرها، برچسبها (Label) و نیز نوعهای (Type) جدید در این قسمت از برنامه معرفی می‌شوند. نحوهٔ معرفی پس از این توضیح داده خواهد شد. مطابق شکل ۱، یک برنامه می‌تواند بخش اعلانات نداشته باشد.

قسمت اصلی برنامه (Main program) : کلیهٔ دستوراتی که بینBEGINو.END قرار گرفته و عملکرد کلی برنامه را مشخص می‌کنند. برای مثال، برنامهٔ زیر که فقط دارای عنوان و قسمت اصلی برنامه است، در خروجی BORHAN را چاپ می‌کند :

```
Program first - Program ;
BEGIN
   Write ( 'BORHAN');
END.
```

توضیح چند اصطلاح

(۱) کلمات رزرو شده یا کلمات کلیدی (Keyword) : به کلمات از پیش تعریف شده‌ای گفته می‌شود که مترجم پاسکال از آنها فقط یک مفهوم مشخص را درک می‌کند و ما نمی‌توانیم از آنها به‌جز در جایی که برای آنها درنظر گرفته شده است، استفاده کنیم مانند begin، End، program و write . فهرست کلمات

کلیدی در انتهای این نوشتار آمده است.

(۲) شناسه (Identifier) : هر کلمه‌ای که جزو کلمات کلیدی نباشد، از شناسه‌ها برای نامگذاری ثابتها، متغیرها، نوعها، عنوان برنامه، توابع[۸] و روالها[۹] استفاده می‌شود. اولین کارکتر[۱۰] شناسه باید یا حروف الفبا (کوچک یا بزرگ) یا خط فاصلهٔ زیر[۱۱] (_) باشد و به‌دنبال آن باید حروف الفبا، اعداد و یا خط فاصلهٔ زیر بیاید. طول شناسه حداکثر ۶۳ کارکتر است. برای مثال شناسه‌های borhan - 21 و Roshd - صحیح هستند، ولی استفاده از شناسه‌های 21-borhan و Roshd ! صحیح نمی‌باشد.

(۳) دستور یا جمله (statement) : هر عبارتی که برای مترجم پاسکال دارای مفهوم بوده و از کامپیوتر بخواهد که عملی را انجام دهد، برای مثال Write ('BORHAN').

(۴) ثابت (Constant) : به قسمتی از حافظه گفته می‌شود که مقدار آن در طول اجرای برنامه تغییر نمی‌کند.

(۵) متغیر (Variable) : به قسمتی از حافظه گفته می‌شود که نامی به آن داده شده و مقدار آن در طول اجرای برنامه تغییر می‌کند.

(۶) رشته (String) : مجموعه‌ای از کارکترها که بین دو علامت ' ' قرار گیرند مانند : 'borhan'

(۷) بلوک (Block) : کلیهٔ دستوراتی که بین Begin و End قرار می‌گیرند.

(۸) فرمت (Format) : به چگونگی ظاهر شدن خروجی می‌گوییم.

(۹) توضیحات (Comment) : درصورت لزوم می‌توان توضیحاتی را به برنامه اضافه کرد. این توضیحات فقط برای خوانایی برنامه آورده می‌شوند و بین دو آکولاد { } و یا بین (* *) قرار می‌گیرند و مترجم پاسکال در هنگام ترجمه به آنها توجهی نمی‌کند. به توضیحاتی که در برنامهٔ زیر آمده توجه کنید :

```
Program Second - program ;
BEGIN {beginning of program}
Write ('pascal programming language');
END. (* End of program*)
```

کلمات کلیدی زبان پاسکال

کلمات رزرو شده

AND	END	NIL	SHR
ARRAY	FILE	NOT	STRING
ASM	FOR	OBJECT	THEN
BEGIN	FUNCTION	OF	TO
CASE	GOTO	OR	TYPE
CONST	IF	PACKED	UNIT
CONSTRUCTOR	IMPLEMENTATION	PROCEDURE	UNTIL
DESTRUCTOR	IN	PROGRAM	USES
DIV	INLINE	RECORD	VAR
DO	INTERFACE	REPEAT	WHILE
DOWNTO	LABEL	SET	WITH
ELSE	MOD	SHL	XOR

شناسه‌های استاندارد

ثابتهای از پیش تعریف شده

false	maxint	maxlongint	true

نوعهای از پیش تعریف شده

boolean	double	longint	single
byte	extended	real	text
char	integer	shortint	word
comp			

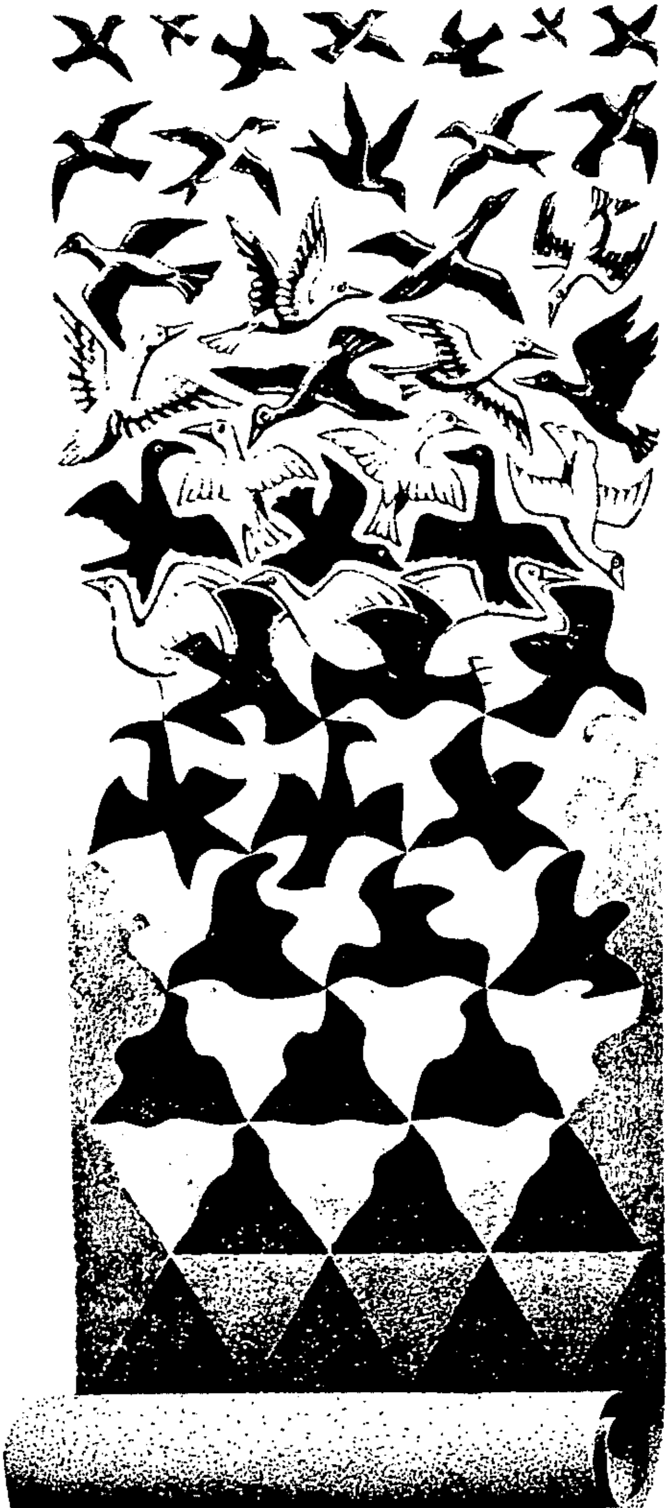
واژه‌نامهٔ ریاضی و کامپیوتر

۱. Compiler
۲. User
۳. register
۴. interrupt
۵. structured
۶. object oriented programming
۷. system programming
۸. function
۹. procedure
۱۰. character
۱۱. underscore

ترکیبیات

قابل استفاده دانش‌آموزان دورهٔ پیش‌دانشگاهی

● ترجمه و جمع‌آوری: سیمین اکبری‌زاده
دبیر ریاضی اراک



ترکیبیات شاخه‌ای بسیار قدیمی از ریاضیات است، که بیشتر هنگام مطالعهٔ جایگشتها و ترکیبها با آن آشنا شده‌ایم. در سالهای اخیر، هم به دلیل آن که کامپیوترها امکان محاسبات ترکیباتی را که پیش از این ممکن نبود، فراهم ساخته‌اند و هم به این دلیل که بسیاری از مسائل ریاضی که در تحقیقات علوم کامپیوتری مطرح شده‌اند، نیاز به روشهای ترکیبیاتی دارند، رشدی انفجارآمیز در این زمینه به‌وجود آمده است.

این مقاله شامل دو بخش می‌باشد: بخش اول: اصل طرد و شمول و کاربردهایی از آن

بخش دوم: تعیین تعداد روابط روی یک مجموعه n عضوی تحت شرایط خاص که هردو از مفاهیم ترکیبیات به‌شمار می‌روند.

اصل طرد و شمول وکاربردهایی از آن

هدف اصلی در این بخش، بیان اصل طرد و شمول و کاربرد آن می‌باشد. به همین منظور ابتدا خلاصه‌ای از جایگشتها و ترکیبها ارائه می‌گردد. لازم به ذکر است که هنگام پرداختن به این ۲ بحث، ۴ مورد با علامت ** مشخص شده‌اند، که به نظریه اشغال معروف می‌باشند و تنها جهت پاسخگویی به سؤالات احتمالی که ممکن است در بخش بعد (روابط و افرازها) برای شما مطرح شدند، بیان شده‌اند.

جایگشتها

۱ ــ ترتیب بدون تکرار : در حالت کلی اگر n شیء متمایز داشته باشیم و r عدد صحیحی باشد که $1 \leq r \leq n$، طبق اصل ضرب، تعداد جایگشتهای (انتخابهای مرتب) r اندازه‌ای n شیء مزبور عبارت است از : $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$ (البته به شرطی که مجاز به تکرار نباشیم).

** تعداد روشهایی که می‌توان r مهره متمایز را در n جعبه قرار داد، طوری که در هیچ جعبه‌ای بیش از یک مهره قرار نگیرد، برابر است با $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$.

۲ ــ ترتیب با تکرار: تحت شرایط ذکر شده در بالا، منتهی در صورت مجاز بودن تکرار، بنابه اصل ضرب n^r ترتیب ممکن با $r \geq 0$ موجود است.

** تعداد روشهایی که می‌توان r مهره متمایز را در n جعبه قرار داد، به شرطی که قرار گرفتن بیش از یک مهره در جعبه‌ها بلامانع باشد، n^r می‌باشد (مهره اول را در n جعبه می‌توان قرار داد و مهره دوم را نیز در n جعبه و ... مهره r ام را در n جعبه).

۳ ــ جایگشت اشیایی که شامل r نوع مختلفند . می‌دانیم تعداد جایگشتهای متمایز n شیء متمایز برابر است با $n!$. حال اگر n شیء متمایز نباشند، چه‌طور؟ این موضوع را با یک مثال روشن می‌کنیم. برای مثال می‌خواهیم ببینیم با حروف کلمه «شیمی» چند جایگشت می‌توان ساخت؟

اگر به‌طور موقتی برای تمایز دو حرف «ی» در کلمه شیمی این ۲ حرف را با $ی_1$ و $ی_2$ نشان دهیم، $4!$ جایگشت مختلف از حروف ش، $ی_1$، م، $ی_2$ وجود دارد. اما اگر زیرنویسها را حذف کنیم، آن‌گاه به عنوان نمونه دو جایگشت «م $ی_1$ ش $ی_2$» و «م $ی_2$ ش $ی_1$» هر دو «م ی ش ی» را نتیجه می‌دهند و بنابراین هر $2!$ جایگشتهای با زیرنویس، فقط یک آرایش بدون زیرنویس را به‌دست می‌دهند و تعداد کل آرایشهای حروف کلمه «شیمی» برابر است با $\frac{4!}{2!}=12$.

به‌طور کلی اگر n شیء با n_1 شیء از نوع اول، n_2 شیء از نوع دوم و ... و n_r شیء از نوع r ام با $n_1+...+n_r=n$ موجود باشند. در این صورت $\frac{n!}{n_1!n_2!...n_r!}$ ترتیب از n شیء داده شده وجود دارد. (اشیاء با هم نوع تمایز ناپذیرند).

مسأله۱ : با حروف کلمه pepper چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ حل : $\frac{6!}{3!2!1!}=60$

ترکیبها

۱ ــ ترکیب بدون تکرار : اگر n شیء متمایز داشته باشیم و r عدد صحیحی باشد که $0 \leq r \leq n$ تعداد ترکیبهای (انتخابهای نامرتب) r عضوی از این n شیء برابر است با $C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$. به شرطی که مجاز به تکرار نباشیم. به جای نماد $C(n;r)$ می‌توان از نماد $\binom{n}{r}$ استفاده کرد. توجه داشته باشیم که $\binom{n}{0}=1$.

توجه: $\binom{0}{0}=1$ و $\binom{n}{r}=0$ هرگاه $r>n$.

** تعداد روشهایی که می‌توان r مهره غیرمتمایز را در n جعبه قرار داد، طوری که در هیچ جعبه‌ای بیش از یک مهره قرار نگیرد، برابر است با $\binom{n}{r}$.

مساله۲ : یک دانش‌آموز به چند طریق می‌تواند به ۷ سؤال از ۱۰ سؤال پاسخ دهد، هرگاه او مجبور باشد از ۵ سؤال اول به ۳ سؤال و از ۵ سؤال آخر به ۴ سؤال پاسخ دهد؟

حل: تعداد روشهای انتخاب ۳ سؤال از ۵ سؤال اول $\binom{5}{3}$ می‌باشد و تعداد روشهای انتخاب ۴ سؤال از ۵ سؤال دوم $\binom{5}{4}$

می‌باشد. لذا طبق اصل ضرب $۵۰ = \binom{۵}{۴}\binom{۵}{۳}$ روش برای پاسخگویی موجود است.

۲ ــ قضیه: تعداد راههای افراز مجموعه‌ای از n شیء متمایز به r زیرمجموعه با n_1 شیء در اولین زیرمجموعه و ... و n_r شیء در r مین زیرمجموعه برابر است با

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_r!}$$

(اثبات به عهده خواننده است).

مسأله۳: به چند طریق می‌توان ۷ دانشمند را در یک اتاق سه‌تخته و دو اتاق دوتخته هتلی جای داد؟

حل: $\dfrac{۷!}{۳!.۲!.۲!} = \left[=\binom{۷}{۳}\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲}\right] \binom{۷}{۳,۲,۲}$

۳ ــ ترکیب با تکرار: نماد $\binom{n}{r}$ تعداد ترکیبهای n شیء مختلف را نشان می‌دهد که هربار r تای آنها را انتخاب کنیم. اکنون فرض کنیم از هریک از n شیء چند نمونه همانند، مانند ترکیبهای یکسان کتابها در یک کتابفروشی وجود داشته باشد، بنابراین می‌توانیم این سؤال را مطرح کنیم که برای n رستهٔ متمایز از اشیا، که از هریک از آنها حداقل r نمونه موجود است، چند ترکیب مختلف از r شیء وجود دارد (هر ترکیب ممکن است شامل چند شیء نامتمایز از اشیای یک رسته باشد.). برای روشن شدن این موضوع از یک مثال استفاده می‌کنیم.

مهره‌های یک بازی به ۴ رنگ قرمز، سفید، آبی، زرد هستند. به چند طریق می‌توان ۷ مهره را از بین آنها انتخاب کرد، هرگاه مجاز به تکرار انتخاب باشیم (یا هرگاه از هر رنگ مهره حداقل ۷ مهره داشته باشیم).

حل: ممکن است ۷ مهره انتخاب شده همرنگ باشند برای مثال قرمز، و یا ممکن است از رنگهای مختلف باشند.

چون تصمیم داریم ۷ مهره انتخاب کنیم، ۷ علامت «×» درنظر گرفته و با توجه به این که مهره‌ها ۴ نوعند، ۳ = ۱ ــ ۴ علامت «|» در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم هر آرایشی که با ۷ علامت «×» و ۳ علامت «|» تشکیل می‌شود، یک جواب مسأله است. برای مثال برای تعیین تعداد مهره‌های قرمز جای اولین «|» را تعیین کرد. و تعداد «×» هایی را که در سمت چپ آن است می‌شماریم. برای تعیین تعداد مهره‌های سفید، تعداد «×» که بین اولین و دومین «|» است می‌شماریم. به همین ترتیب، تعداد مهره‌های آبی و زرد را به ترتیب مساوی تعداد «×» های بین دومین و سومین «|»، و تعداد «×» های سمت راست سومین «|» قرار می‌دهیم. برعکس، اگر تعداد مهره‌های قرمز و سفید و آبی و زرد انتخاب شده به ترتیب ۲ و ۰ و ۱ و ۴ باشد، متناظر با این جواب می‌توان آرایش ×××× | × || ×× را درنظر گرفت. لذا تعداد راههای انتخاب با تکرار ۷ مهره از بین ۴ مهره متمایز، برابر است با تعداد حالاتی که می‌توان ۷ «×» و ۳ «|» را کنار هم قرار داد و این نیز طبق فرمول ۳ جایگشتها برابر است با $\dfrac{۱۰!}{۷!۳!} = \binom{۱۰}{۷}$

بنابراین تعداد انتخابهای با تکرار r شیء از n شیء متمایز برابر است با تعداد ترتیب‌های r تا «×» و ۱ ــ n تا «|» و این نیز برابر است با $\dfrac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = \binom{n+r-1}{r}$، که آن را با نماد $a(n,r)$ نمایش می‌دهند.

البته این فرمول را می‌توان با نوشتن رابطه بازگشتی مناسب و حل آن از طریق تابع مولد نیز به‌دست آورد.

نکته: عبارات زیر هم‌ارز هستند: ۱ ــ تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$ ، $x_i \geq 0$ ، $1 \leq i \leq n$

۲ ــ تعداد انتخابهای با **تکرار** r شیء از n شیء متمایز.

۳ ــ تعداد راههای توزیع r شیء مشابه در n ظرف متمایز، با فرض این که در هر ظرف، **بیش از یک شیء بتواند قرار گیرد**. و در هر ۳ مورد تعداد جوابها برابر است

با $\binom{n+r-1}{n-1} = (n+r-1)$ رابطهٔ

مثال۱: ۲۰ کتاب مختلف درنظر بگیرید، که از هرکدام تعداد نامحدودی در دسترس است. تعداد حالاتی که می‌توان ۱۰ کتاب ازبین آنها انتخاب کرد، به شرطی که الف) تکرار مجاز باشد، برابر است با $\binom{۲۰+۱۰-۱}{۱۰} = \binom{۲۹}{۱۰}$، چون موضوع انتخاب با تکرار ۱۰ شیء از ۲۰ شیء متفاوت است. ب) تکرار

مجاز نباشد (۱۰ کتاب منتخب متفاوت باشند)، برابر است با $\binom{20}{10}$.

مسأله۴ : به چند روش می‌توان ۷ سیب و ۶ پرتقال را بین ۴ نفر توزیع کرد، طوری که هر نفر حداقل یک سیب دریافت کند؟

حل: برای توزیع سیب‌ها، ابتدا به هر نفر یک سیب داده و سپس ۳ سیب باقیمانده را بین ۴ نفر توزیع می‌کنیم، لذا این توزیع به $20=\binom{4+3-1}{3}$ روش می‌تواند انجام شود، سپس ۶ پرتقال را به $84=\binom{9}{6}=\binom{4+6-1}{6}$ روش بین ۴ نفر توزیع می‌کنیم (برای مثال می‌توانیم ۶ پرتقال را به یک نفر بدهیم و به ۳ نفر دیگر پرتقال ندهیم). لذا طبق اصل ضرب $20\times 84=1680$ راه برای توزیع میوه‌ها تحت شرایط مذکور وجود دارد.

معادلات خطی با ضرایب واحد

توجه: x عدد صحیح و غیرمنفی است را به صورت $x\geq 0$ و x عدد صحیح و مثبت است را به صورت $x\geq 1$ یا $x>0$ (که x عدد صحیح است) نمایش می‌دهیم.

مثال ۲ : تعداد جوابهای صحیح و غیر منفی معادله $x_1+x_2+x_3+x_4=7$ با توجه به فرمول * برابر است با $120=\binom{10}{7}=\binom{4+7-1}{7}$ توجه داریم به این که $(x_1=3,\ x_2=3,\ x_3=0,\ x_4=1)$ و $(x_1=1,\ x_2=0,\ x_3=3,\ x_4=3)$ را **جوابهای متفاوت** گوییم.

به‌طور کلی تنها جوابهایی را یکسان درنظر می‌گیریم، که مقادیر x_1 ها و x_2 ها و x_3 ها و x_4 های آن به‌طور همزمان برابر باشند.

(در وضعیتی که ۱۲ جواب این چنینی درست مانند یک جواب رفتار کنند، جوابها تحت عنوان افرازهای عدد ۷ می‌آیند، که در بخش بعد توضیح داده خواهد شد).

مثال ۳ : برای پیدا کردن تعداد جوابهای صحیح و مثبت معادله① $x_1+x_2+x_3+x_4=32$ ابتدا هریک از متغیرها عدد یک را نسبت می‌دهیم. لذا هر جواب صحیح و مثبت معادله فوق با یک جواب صحیح و غیرمنفی معادله② $x_1+x_2+x_3+x_4=28$ متناظر است. برای مثال جواب $x_1=1,\ x_2=7,\ x_3=9,\ x_4=15$ از معادله ① با جواب $x_1=0,\ x_2=6,\ x_3=8,\ x_4=14$ از معادلهٔ ② متناظر است (کافی است برای پیدا کردن مقدار جوابهای معادله ①، به جوابهای به‌دست آمده از معادله ② یک را اضافه کنیم). لذا تعداد جوابهای هر دو معادله باهم برابر است که با توجه به فرمول* $\binom{31}{3}$ یا $\binom{31}{28}=\binom{4+28-1}{28}$ خواهد بود.

نتیجه ۱ : به‌طور کلی تعداد جوابهای صحیح و مثبت معادلهٔ $x_1+x_2+\dots+x_k=m$ برابر است با $\binom{m-1}{k-1}$ (اگر $k>m$ آن گاه $\binom{m-1}{k-1}=0$).

مثال ۴ : برای پیدا کردن تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=32$ ، $x_1,x_2\geq 5$ و $x_3,x_4\geq 7$. ابتدا به متغیرهای x_1 و x_2 عدد ۵ و به x_3 و x_4 عدد ۷ را نسبت می‌دهیم. لذا تعداد جوابهای معادله مذکور با شرایط فوق برابر است با تعداد جوابهای صحیح و غیرمنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=8$ و این نیز برابر است با $\binom{11}{3}$ یا $\binom{11}{8}=\binom{4+8-1}{8}$.

نتیجه ۲ : به‌طور کلی تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ $x_1+x_2+\dots+x_k=m$ در مجموعه اعداد صحیح نامنفی با شرط $x_1\geq c_1, x_2\geq c_2,\dots x_k\geq c_k$ برابر است با $\binom{m-c_1-c_2-\dots-c_k+k-1}{k-1}$.

مثال۵ : برای پیداکردن تعداد جوابهای صحیح $x_1+x_2+x_3+x_4=48$ و $x_1>5$، $x_2>6$، $x_3>7$، $x_4>8$ ابتدا به هریک از متغیرهای x_1 و x_2 و x_3 و x_4 به ترتیب اعداد ۶ و ۷ و ۸ و ۹ را نسبت می‌دهیم. بنابراین تعداد جوابهای معادله فوق با شرایط مذکور با تعداد جوابهای صحیح $x_1+x_2+x_3+x_4=18$ ، $x_i\geq 0$ ، $1\leq i\leq 4$ برابر است و تعداد جوابهای این معادله نیز $\binom{21}{3}=\binom{21}{18}=\binom{4+18-1}{18}$

می‌باشد.

نتیجه ۳ : به طور کلی تعداد جواب‌های صحیح معادله $x_1+x_2+\dots+x_k=m$ درشرایط $x_1>c_1, x_2>c_2,\dots,x_k>c_k$ برابر است با $\binom{m-c_1-c_2-\dots-c_k-1}{k-1}$.

تذکر : گرچه در مثالهایی که به کار بردیم، اعداد صحیح $c_1,c_2,\dots,c_k$ همگی مثبت انتخاب شده بودند. ولی این نتایج برای اعداد صحیح منفی و صفر نیز قابل استفاده هستند.

مسأله ۵ : تعداد جوابهای معادله $x_1+x_2+x_3+x_4=20$ را در مجموعه اعداد صحیح مثبت با شرط الف) $x_1>6$. ب) $x_1,x_2>6$. پ) $x_1,x_2,x_3>6$ به دست آورید.

حل: الف)

روش اول: $x_1+x_2+x_3+x_4=20$ ،

تعداد جوابها $x_1>6,\ x_2>0,\ x_3>0,\ x_4>0 \xRightarrow{\text{طبق نتیجه۳}}$

$$=\binom{20-6-1}{3}=\binom{13}{3}$$

روش دوم: $x_1+x_2+x_3+x_4=20$ ،

تعداد جوابها $x_1\ge 7,\ x_2\ge 1,\ x_3\ge 1,\ x_4\ge 1 \xRightarrow{\text{طبق نتیجه۲}}$

$$=\binom{20-7-1-1-1+4-1}{4-1}=\binom{13}{3}$$

ب) $x_1+x_2+x_3+x_4=20$ ،

تعداد جوابها $x_1\ge 7,\ x_2\ge 7,\ x_3\ge 1,\ x_4\ge 1 \xRightarrow{\text{طبق نتیجه۲}}$

$$=\binom{20-7-7-1-1+4-1}{4-1}=\binom{7}{3}$$

پ) $x_1+x_2+x_3+x_4=20$ ،

تعداد جوابها $x_1,x_2,x_3>6\ ,\ x_4>0 \xRightarrow{\text{طبق نتیجه۳}}$

$$=\binom{20-6-6-6-1}{4-1}=\binom{1}{3}=0$$

قضیه (اصل طرد و شمول)

فرض کنیم S مجموعه‌ای باشد که $|S|=N$ و $c_i\ (1\le i\le t)$ شرط یا خاصیتی باشد، که برای بعضی یا تمام اعضای S برقرار باشد و $\overline{N}$ یا $N(\overline{c}_1\overline{c}_2\dots\overline{c}_t)$ تعداد اعضایی از S باشد که هیچکدام از خواص فوق را نداشته باشد، آن گاه :

$$\overline{N}=N-\left[N(c_1)+N(c_2)+N(c_t)\right]+$$
$$\left[N(c_1c_2)+\dots+N(c_1c_t)+N(c_2c_3)+\dots+\right.$$
$$\left.N(c_2c_t)+\dots+N(c_{t-1}c_t)\right]$$
$$-\left[N(c_1c_2c_3)+N(c_1c_2c_4)+\dots+N(c_1c_2t)+\right.$$
$$N(c_1c_3c_4)+N(c_1c_3c_5)+\dots+N(c_1c_3c_t)+\dots+$$
$$\left.N(c_{t-2}c_{t-1}c_t)\right]+\dots+(-1)^t N(c_1c_2\dots c_t).$$

یا $\overline{N}=N(\overline{c}_1\overline{c}_2\dots\overline{c}_t)=N-\sum_{1\le i\le t}N(c_i)+\sum_{1\le i<j\le t}N(c_ic_j)-$
$\sum_{1\le i<j<k\le t}N(c_ic_jc_k)+\dots+(-1)^t N(c_1c_2\dots c_t)$

برای $1\le i\le t$ ، $N(c_i)$ تعداد اعضایی ازSاست که در شرط c_i صدق می‌کند. اگر $i\ne j$ ، $N(c_ic_j)$ تعداد عناصری از s است که هردو خاصیت c_i و c_j برای آنها برقرار است. اگر $1\le i,j,k\le t$ سه عدد باشند که دوبدو مساوی نباشند، $N(c_ic_jc_k)$ تعداد اعضایی از S است که در هر سه خاصیت c_i و c_j و c_k صدق می‌کند.

نتیجه : اگر $N(c_1 or c_2 or \dots c_t)$ تعداد اعضایی از S باشد که حداقل یکی از خواص را داشته باشد، آن‌گاه

$N(c_1$ یا c_2 یا ... یا $c_t)$ =

$$N-\overline{N}=\sum_{1\le i\le t}N(c_i)-\sum_{1\le i<j\le t}N(c_ic_j)+\dots+(-1)^{t-1}N(c_i\dots c_t)$$

(با حالت خاص این نتیجه در کتاب «جبر و احتمال» آشنا شده‌اید).

مثال ۶ : برای پیدا کردن تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=18$ با شرط $0\le x_i\le 7$ برای $x_i\ge 0$ ، $1\le i\le 4$ ، S را مجموعه جواب معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=18$ قرار می‌دهیم لذا

$$|S|=\binom{۴+۱۸-۱}{۱۸}=\binom{۲۱}{۱۸}=۱۳۳۰$$

گوییم یک‌جواب $x_۱$ ، $x_۲$ ، $x_۳$ ، $x_۴$ در شرط c_i صدق می‌کنند هرگاه برای $۱\le i\le ۴$ ، $x_i>۷$ (یا $x_i\ge ۸$) باشد. بنابراین برای حل مسأله باید $N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲\bar{c}_۳\bar{c}_۴)$ (یعنی تعداد عناصری از S که در شروط $c_۱,\dots,c_۴$ صدق نمی‌کند) را محاسبه کنیم.

$N(c_۱)$ یعنی تعداد جوابهای معادلهٔ $x_۱\ge ۸,\ x_۲,x_۳,x_۴\ge ۰$ ، $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۱۸$ ،

لذا طبق نتیجه ۲ خواهیم داشت:

$$N(c_۱)=\binom{۱۸-۸+۴-۱}{۴-۱}=\binom{۱۳}{۳} \text{ یا } \binom{۱۳}{۱۰}$$

و به همین ترتیب $N(c_۲)=N(c_۳)=N(c_۴)=\binom{۱۳}{۱۰}$.

$N(c_۱c_۲)$ یعنی تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ $x_۳,x_۴\ge ۰$ ، $x_۱,x_۲\ge ۸$ ، $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۱۸$ ، لذا طبق نتیجه ۲ خواهیم داشت:

$$N(c_۱c_۲)=\binom{۱۸-۸-۸+۴-۱}{۴-۱}=\binom{۵}{۳} \text{ یا } \binom{۵}{۲}$$

و به همین ترتیب

$$N(c_۱c_۳)=N(c_۱c_۴)=N(c_۲c_۳)=N(c_۲c_۴)=N(c_۳c_۴)=\binom{۵}{۲}$$

$\underline{N(c_۱c_۲c_۳)}$

یعنی تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ $x_۱,x_۲,x_۳\ge ۸,\ x_۴\ge ۰$ ، $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۱۸$ و چنین معادله‌ای جواب ندارد. لذا $N(c_۱c_۲c_۳)=۰$ و به همین ترتیب $\underset{۱\le i<j<k\le ۴}{N(c_ic_jc_k)}=۰$ و نیز $N(c_۱c_۲c_۳c_۴)=۰$ ، لذا

$$\bar{N}=N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲\bar{c}_۳\bar{c}_۴)=|S|-\sum_{۱\le i\le ۴}N(c_i)+\sum_{۱\le i<j\le ۴}N(c_ic_j)-\sum_{۱\le i<j<k\le ۴}N(c_ic_jc_k)+\sum_{۱\le i<j<k<t\le ۴}N(c_ic_jc_kc_t)=$$

$$\binom{۲۱}{۱۸}-\binom{۴}{۱}\binom{۱۳}{۱۰}+\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۲}-\binom{۴}{۳}\times ۰+\binom{۴}{۴}\times ۰=۲۴۶$$

مسأله ۶ : با ۲۶ حرف انگلیسی چند جایگشت می‌توان نوشت که شامل کلمات، car ، dog ، pun ، byte نباشد؟

حل: فرض می‌کنیم S مجموعهٔ تمام جایگشتهای متمایز ۲۶ حرف انگلیسی باشد. پس $|S|=N=۲۶!$. حال c_i را با توجه به صورت مسأله تعریف می‌کنیم. گوییم یک جایگشت موجود در S در شرط $c_۱$ صدق می‌کند، هرگاه آن جایگشت شامل کلمهٔ «car» باشد. لذا $N(c_۱)$ یعنی تعداد جایگشتهایی که با ۲۶ حرف انگلیسی می‌توان نوشت، هرگاه آن جایگشت شامل کلمهٔ «car» باشد. به این منظور ۳ حرف موجود در این کلمه را یک حرف درنظر گرفته، با ۲۳ حرف باقیمانده تشکیل ۲۴ حرف خواهند داد، لذا $N(c_۱)=۲۴!$ به همین ترتیب گوییم یک جایگشت در S در شروط $c_۲$ ، $c_۳$ و $c_۴$ صدق می‌کند، هرگاه آن جایگشت به ترتیب شامل کلمات شماره ۲ و ۳ و ۴ باشد. لذا $N(c_۲)=N(c_۳)=۲۴!$ و $N(c_۴)=۲۳!$. بنابراین برای یافتن جواب مسأله باید $N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲\bar{c}_۳\bar{c}_۴)$ را محاسبه کنیم.

$N(c_۱c_۲)$ ، یعنی تعداد جایگشتهای ۲۶ حرف انگلیسی که هم شامل «car» و هم شامل «dog» باشد و برای محاسبهٔ آن ۳ حرف موجود در «car» را یک حرف و ۳ حرف موجود در «dog» را نیز یک حرف درنظر گیریم. لذا $N(c_۱c_۲)$ برابراست با تعداد جایگشتهای این ۲ حرف و $۲۶-۶=۲۰$ حرف باقیمانده یعنی $N(c_۱c_۲)=۲۲!$. با روش مشابه خواهیم داشت

$$N(c_۱c_۳)=N(c_۲c_۳)=۲۲!$$

$$N(c_۱c_۴)=N(c_۲c_۴)=N(c_۳c_۴)=۲۱!$$

$$N(c_۱c_۲c_۳)=۲۰!$$

$$N(c_۱c_۲c_۴)=N(c_۲c_۳c_۴)=N(c_۱c_۳c_۴)=۱۹!$$

$$N(c_۱c_۲c_۳c_۴)=۱۷!$$

$$\bar{N}=N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲\bar{c}_۳\bar{c}_۴)=۲۶!-(۳\times ۲۴!+۲۳!)+$$
$$(۳\times ۲۲!+۳\times ۲۱!)-(۲۰!+۳\times ۱۹!)+۱۷!$$

مسأله ۷ : تعداد اعداد صحیح مثبت x را به طوری که $x\le ۹{,}۹۹۹{,}۹۹۹$ و جمع ارقام x ، ۳۱ شود را محاسبه کنید.

حل: با احتساب صفر به عنوان یک رقم هر عدد صحیح بین ۱ تا ۹۹۹۹۹۹۹ را به صورت عددی که ۷ رقم دارد تعبیر می‌کنیم. به طور مثال عدد صحیح ۸۲۰۰ را می‌توان به صورت ۰۰۰۸۲۰۰ نوشت. اگر ۷ رقم را $x_۷,\dots,x_۱$ درنظر بگیریم،

می‌توانیم مسأله را به صورت تعیین تعداد جوابهای صحیح معادله $x_1+x_2+x_3+\dots+x_7=31$ ، $0\le x_i\le 9$ ، $1\le i\le 7$ تعبیر کنیم.

S را مجموعه جواب معادلهٔ $1\le i\le 7$ ، $x_i\ge 0$ ، $x_1+x_2+\dots+x_7=31$ را درنظر می گیریم، از $|S|=\binom{7+31-1}{31}=\binom{37}{31}$.

برای $1\le i\le 7$ ، c_i را شرط $x_i\ge 10$ درنظر می‌گیریم.
لذا باید $N(\bar{c}_1\bar{c}_2\dots\bar{c}_7)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$c_1: x_1+x_2+\dots+x_7=31,\ x_1\ge 10,\ x_2,x_3,\dots,x_7\ge 0\leftrightarrow$$
$$x_1+x_2+\dots+x_7=21\quad \underset{1\le i\le 7}{x_i\ge 0}\Rightarrow N(c_1)=\binom{27}{21}$$

برای $1\le i\le 7$ داریم: $N(c_i)=\binom{27}{21}$

$$c_1c_2: x_1+x_2+\dots+x_7=31,\ x_1,x_2\ge 10,$$
$$x_3,x_4,\dots,x_7\ge 0\leftrightarrow$$
$$x_1+x_2+\dots+x_7=11,\ \underset{1\le i\le 7}{x_i\ge 0}\Rightarrow N(c_1c_2)=\binom{17}{11}$$

لذابرای $1\le i<j\le 7$ داریم: $N(c_ic_j)=\binom{7}{11}$ (که تعدادشان، به‌طور کلی $\binom{7}{2}$ می‌باشد).

$$c_1c_2c_3: x_1+x_2+\dots+x_7=31$$
$$x_1,x_2,x_3\ge 10,\ x_4,\dots,x_7\ge 0\leftrightarrow$$
$$x_1+x_2+\dots+x_7=1$$
$$\underset{1\le i\le 7}{x_i\ge 0}\Rightarrow N(c_1c_2c_3)=\binom{7}{1}$$

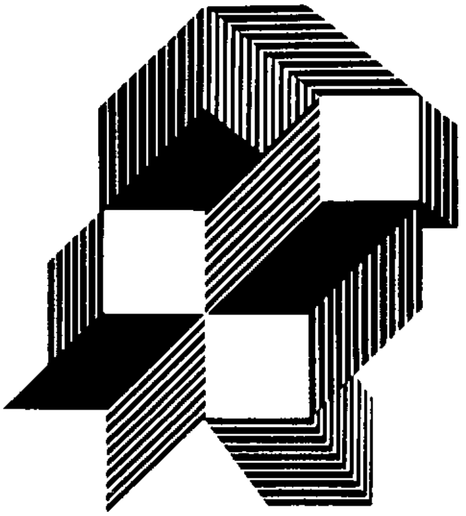
لذا برای $1\le i<j<k\le 7$ داریم: $N(C_iC_jC_k)=\binom{7}{1}$

(که تعدادشان $\binom{7}{3}$ می‌باشد.)

تعداد جوابهای معادله با داشتن ۴ شرط و بیشتر نیز صفر می‌باشد، لذا:

$$\overline{N}=N(\bar{c}_1\bar{c}_2\dots\bar{c}_7)=|S|-\sum_{1\le i\le 7}N(c_i)+\sum_{1\le i<j\le 7}N(c_ic_j)-\dots+(-1)^7\sum_{1\le i<j<\dots<t\le 7}N(c_ic_j\dots c_t)=$$
$$\binom{37}{31}-\binom{7}{1}\binom{27}{21}+\binom{7}{2}\binom{17}{11}-\binom{7}{3}\binom{7}{1}+0-0+0-0=\binom{37}{31}-\binom{7}{1}\binom{27}{21}+\binom{7}{2}\binom{17}{11}-\binom{7}{3}\binom{7}{1}$$

در این مسأله، برای تعیین(N)به ویژه از فرمولهای بدست آمده در نتایج استفاده نشده، تا چگونگی محاسبات به خوبی درک شود.



مسأله ۸ : تعداد جوابهای صحیح معادله $x_1+x_2+x_3+x_4=19$ را با شرط $3\le x_4\le 8$ ، $3\le x_3\le 7$ ، $0\le x_2\le 6$ ، $0\le x_1\le 5$ محاسبه کنید.

حل: $S: x_1+x_2+x_3+x_4=19,$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 3,\ x_4\ge 3\xRightarrow{\text{طبق نتیجه}}$$
$$N=\binom{19-3-3+4-1}{4-1}=\binom{16}{3}$$

c_i را با توجه به S و شرایط مسأله انتخاب می‌کنیم.

$$c_1(x_1\ge 6):\ x_1+x_2+x_3+x_4=19,$$

$x_1 \ge 6,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 3,\ x_4 \ge 3 \Rightarrow$

$$N(c_1)=\binom{19-6-3-3+4-1}{4-1}=\binom{10}{3}$$

$c_2(x_2 \ge 7):\ x_1+x_2+x_3+x_4=19,$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 7,\ x_3 \ge 3,\ x_4 \ge 3 \Rightarrow$

$$N(c_2)=\binom{19-7-3-3+4-1}{4-1}=\binom{9}{3}$$

$c_3(x_3 \ge 8):\ x_1+x_2+x_3+x_4=19,$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 8,\ x_4 \ge 3 \Rightarrow$

$$N(c_3)=\binom{19-8-3+4-1}{4-1}=\binom{11}{3}$$

$c_4(x_4 \ge 9):\ x_1+x_2+x_3+x_4=19,$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 3,\ x_4 \ge 9 \Rightarrow$

$$N(c_4)=\binom{19-3-9+4-1}{4-1}=\binom{10}{3}$$

$c_1c_2(x_1 \ge 6, x_2 \ge 7):\ x_1+x_2+x_3+x_4=19,$

$x_1 \ge 6,\ x_2 \ge 7,\ x_3 \ge 3,\ x_4 \ge 3 \Rightarrow$

$$N(c_1c_2)=\binom{19-6-7-6+3}{3}=1$$

$c_1c_3(x_1 \ge 6, x_3 \ge 8):\ x_1+x_2+x_3+x_4=19,$

$x_1 \ge 6,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 8,\ x_4 \ge 3 \Rightarrow$

$$N(c_1c_3)=\binom{5}{3}$$

با روش مشابه خواهیم داشت :

$$N(c_1c_4)=N(c_2c_3)=4,\ N(c_3c_4)=\binom{5}{2},$$

$$N(c_2c_4)=1$$

و نیز تعداد جوابهای معادله با داشتن ۳ شرط از شروط c_i و بیشتر صفر می‌باشد، لذا

تعدادجواب مسأله $= N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4)$

$$=\binom{16}{3}-\left[2\binom{10}{3}+\binom{9}{3}+\binom{11}{3}\right]+\left[2\binom{5}{2}+10\right]$$

مسأله ۹ : تعداد جوابهای معادله $x_1+x_2+\dots+x_6=34$ را در مجموعه اعداد صحیح مثبت زوج بیشتر از ۱۰ محاسبه کنید :

حل: قرار می‌دهیم $x_i=2y_i$ (برای $1 \le i \le 6$). لذا برای حل معادله مذکور باید معادلهٔ $y_1+y_2+\dots+y_6=17$ ‏ $(1 \le i \le 6)$ $1 \le y_i \le 5$ را حل کنیم. S را مجموعه جواب معادلهٔ $\underset{(1\le i\le 6)}{y_i \ge 1}$ ، $y_1+y_2+\dots+y_6=17$ و c_i را شرط $y_i \ge 6$ برای $1 \le i \le 6$ درنظر می‌گیریم. نتیجه خواهیم گرفت.

تعدادجوابهای معادله $= N(\bar{c}_1\dots\bar{c}_6)$

$$=\binom{16}{5}-\binom{6}{1}\binom{11}{5}+\binom{6}{2}\binom{6}{5}$$

مسأله ۱۰ : اگر یک تاس ۱۲ بار پرتاب شود، احتمال این که جمع اعداد ظاهر شده ۳۰ باشد، چیست؟

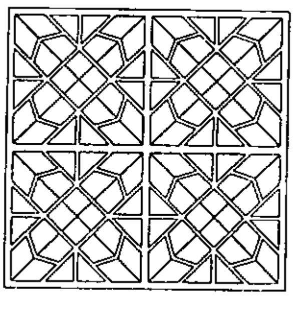
حل : S را مجموعه جواب معادلهٔ $1 \le i \le 12$ ، $1 \le x_i \le 6$ ، $x_1+x_2+\dots+x_{12}=30$ و c_i را شرط $x_i \ge 7$ برای $1 \le i \le 12$ درنظر می‌گیریم. نتیجه خواهیم گرفت :

$$\overline{N}=\binom{29}{18}-\binom{12}{1}\binom{23}{12}+\binom{12}{2}\binom{17}{6}-\binom{12}{3}$$

لذا

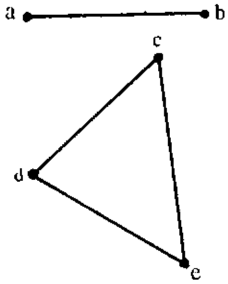
$$P=\frac{\overline{N}}{6^{12}}=\frac{\binom{29}{18}-\dots-\binom{12}{3}}{6^{12}}$$

البته چنین معادلاتی با استفاده ازتابع مولد نیز قابل حل هستند : که در بخش مربوط به آن توضیح داده خواهند شد.

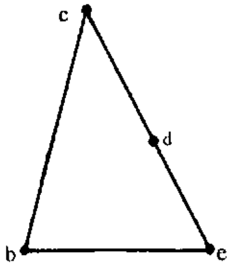


مسأله ۱۱ : تعداد جاده‌های دوطرفه بین ۵ روستا را، طوری که هیچ یک از آنها از بقیه روستاها جدا نباشند، محاسبه کنید :

حل: روستاها را با a و b و c و d و e نامگذاری می‌کنیم. بنابراین باید تعداد گرافهای بی‌جهت روی ۵ رأس را که هیچ رأسی در آن تنها (ایزوله، منفرد) نیست، پیدا کنیم (هدف شمردن جاده‌هایی مثل شکل (۱) است نه شکل (۲)).



شکل ۱



شکل ۲

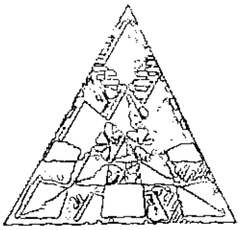
فرض می‌کنیم S مجموعهٔ گرافهای بی‌جهت روی $V=\{a,b,c,d,e\}$ باشد. با توجه به این که تعداد جاده‌های دوطرفه ممکن بین این ۵ روستا $\binom{5}{2}=10$ می‌باشد و برای هر جاده ۲ انتخاب وجود دارد (می‌تواند عضو S باشد یا نباشد)، لذا $N=|S|=2^{10}$ برای $1\le i\le 5$ ، c_i را شرط این که روستای iام از بقیه جدا باشد درنظر می‌گیریم. پس $N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4\bar{c}_5)$ مجهول است. $N(c_1)$ یعنی تعداد گرافهای بی‌جهت روی v طوری که روستای a از بقیه روستاها جدا باشد. تعداد جاده‌های ۲ طرفه بین ۴ روستای دیگر $\binom{4}{2}=6$ می باشد، لذا $N(c_1)=2^6$ و به همین‌ترتیب برای $1\le i\le 5$، $N(c_i)=2^6$.

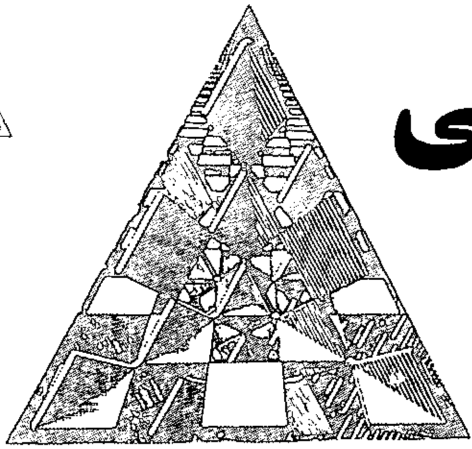
$N(c_1c_2)$ یعنی تعداد گرافهای بی‌جهت روی V طوری که روستاهای a و b با هیچ روستایی ارتباط نداشته باشند. تعداد جاده‌های دوطرفه بین ۳ روستای باقیمانده $\binom{3}{2}=3$ می‌باشد لذا $N(c_1c_2)=2^3$. به‌این‌ترتیب (برای $1\le i<j\le 5$) $N(c_ic_j)=2^3$ با روش مشابه نتیجه خواهد شد (برای $1\le i<j<k\le 5$)، $N(c_ic_jc_k)=2^1$ و نیز $N(c_ic_jc_kc_l)=2^0$ (برای $1\le i<j<k<l\le 5$) و

$$\overline{N}=|S|-\sum_{1\le i\le 5}N(c_i)+\sum_{1\le i<j\le 5}N(c_ic_j)-\sum_{1\le i<j<k\le 5}N(c_ic_jc_k)+\sum_{1\le i<j<k<l\le 5}N(c_ic_jc_kc_l)-N(c_1c_2c_3c_4c_5)$$

و $(1\le i\le j\le k\le l\le 5)N(c_1c_2c_3c_4c_5)=2^0$ و

$$\overline{N}=2^{10}-\binom{5}{1}2^6+\binom{5}{2}2^3-\binom{5}{3}2^1+\binom{5}{4}2^0-2^0=768$$



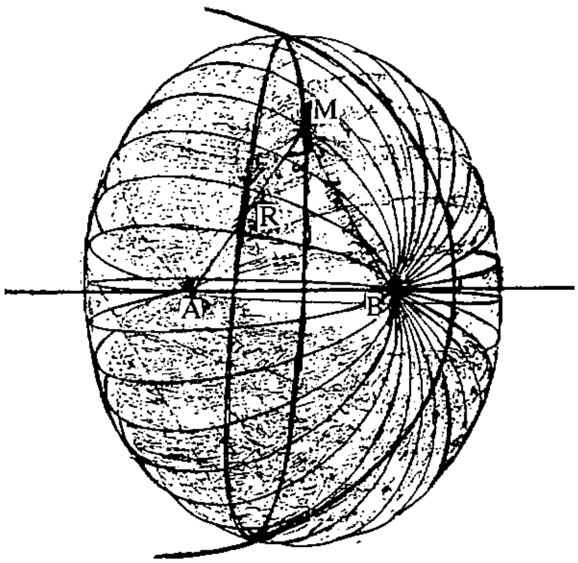


مکان هندسی

(قسمت یازدهم)

(اوّل، دوم، سوم، چهارم دبیرستان)

● محمد هاشم رستمی



مثال ۳ــ سه نقطهٔ A و B و C داده شده‌اند. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که فاصلهٔ آن از نقطهٔ A برابر مقدار معلوم R باشد و از آن نقطه پاره‌خط BC به زاویهٔ α دیده شود.

حل ــ صفحهٔ گذرنده بر سه نقطهٔ A و B و C را P می‌نامیم و $\overset{\frown}{AMB}$ کمان درخور زاویهٔ α وابسته به پاره‌خط BC را رسم می‌کنیم. از دوران این کمان درخور حول خط AB، مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویه α دیده می‌شود، به‌وجود می‌آید. حال کرهٔ به مرکز A و به شعاع R را رسم می‌کنیم. فصل مشترک این کره با مکان هندسی **بالا** (در صورت وجود)، جواب مسأله است.

مثال ۴ــ دو نقطهٔ $A(-۱,۲,۰)$ و $B(۰,۱,۳)$ داده شده‌اند. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را که از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویهٔ ۴۵° دیده می‌شود، تعیین کنید.

حل ــ فرض می‌کنیم $M(x,y,z)$ یک نقطه از مکان هندسی بالا باشد، خواهیم داشت:

$$A(-۱,۲,۰)\ ،\ B(۰,۱,۳)\ ،\ M(x,y,z) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AM}(x+۱,y-۲,z) \text{ و } \overrightarrow{BM}(x,y-۱,z-۳)$$

$$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}) = \cos ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$= \frac{(x+۱)x+(y-۲)(y-۱)+z(z-۳)}{\sqrt{(x+۱)^۲+(y-۲)^۲+z^۲}\sqrt{x^۲+(y-۱)^۲+(z-۳)^۲}} \Rightarrow$$

$$2\left[(x^2+x)+(y^2-3y+2)+(z^2-3z)\right]^2=$$
$$\left[(x+1)^2+(y-2)^2+z^2\right]\times\left[x^2+(y-1)^2+(z-3)^2\right]\Rightarrow$$
$$x^4+y^4+z^4+2x^3-6y^3-6z^3-5x^2+3y^2$$
$$+11z^2+2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-6x^2y+2xy^2-6x^2z$$
$$+2xz^2-6z^2y-6zy^2-8xy+12yz+26y-12x+6z$$
$$-42=0$$
$$x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+2(x^3-3y^3$$
$$-3z^3-3x^2y-3x^2z+y^2x-3y^2z+z^2x-3z^2y)-5x^2$$
$$+3y^2+11z^2-8xy+12yz-12x+26y+6z-42=0$$

معادلهٔ بالا یک رویهٔ درجهٔ چهارم را که مکان هندسی نقطهٔ موردنظر است، مشخص می‌کند.

مثال ۵ ــ دو نقطهٔ $A(3,0,0)$ و $B(0,0,3)$ و خط $D:\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}$ مفروض‌اند. نقطه‌ای روی خط D بیابید که از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویهٔ ۶۰ درجه دیده شود.

حل ــ نقطه برخورد مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویهٔ ۶۰ درجه دیده می‌شود، با خط D جواب مسأله است و به تعداد نقطه‌های برخورد، مسأله جواب دارد. اگر $M(x,y,z)$ یک نقطه از مکان هندسی بالا باشد، داریم:

$$M\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix}\quad A\begin{vmatrix}3\\0\\0\end{vmatrix}\quad B\begin{vmatrix}0\\0\\3\end{vmatrix}\Rightarrow \vec{AM}\begin{vmatrix}x-3\\y\\z\end{vmatrix}\quad \vec{BM}\begin{vmatrix}x\\y\\z-3\end{vmatrix}$$

$$A\hat{M}B=60^\circ\Rightarrow\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

$$=\frac{x(x-3)+y^2+z(z-3)}{\sqrt{(x-3)^2+y^2+z^2}.\sqrt{x^2+y^2+(z-3)^2}}$$

$$\Rightarrow 4(x^2-3x+y^2+z^2-3z)^2=\left[(x-3)^2+y^2+z^2\right]$$
$$\left[x^2+y^2+(z-3)^2\right]$$ معادلهٔ مکان هندسی

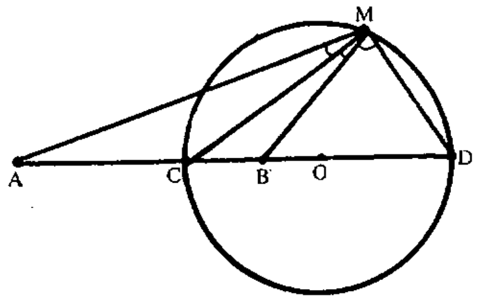
$$\begin{cases}4(x^2-3x+y^2+z^2-3z)^2=\left[(x-3)^2+y^2+z^2\right]\\ \left[x^2+y^2+(z-3)^2\right]\\ \frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}=t\Rightarrow x=2t,y=-t,z=2t\Rightarrow\end{cases}$$

$$4(4t^2-6t+t^2+4t^2-6t)^2=\left[(2t-3)^2+t^2+4t^2\right]$$
$$\left[(4t^2+1)t^2+(2t-3)^2\right]\Rightarrow 4(9t^2-12t)^2=(9t^2-12t$$
$$+9)^2\Rightarrow 9t^2-12t=A\Rightarrow 4A^2=(A+9)^2\Rightarrow 2A=$$
$$\pm(A+9)\Rightarrow A=9 \text{ و } A=-3\Rightarrow 9t^2-12t+3=0$$
$$\Rightarrow 3t^2-4t+1=0\quad t=1 \text{ و } t=\frac{1}{3} \text{ و } 9t^2-12t=9\Rightarrow$$
$$3t^2-4t-3=0\Rightarrow t_3=\frac{2+\sqrt{13}}{3} \text{ و } t_4=\frac{2-\sqrt{13}}{3}$$
$$\Rightarrow M_1(2,-1,2),M_2(\frac{2}{3},\frac{-1}{3},\frac{2}{3}),$$
$$M_3(\frac{4+2\sqrt{13}}{3},-\frac{2+\sqrt{13}}{3},\frac{4+2\sqrt{13}}{3}),$$
$$M_4(\frac{4-2\sqrt{13}}{3},-\frac{2-\sqrt{13}}{3},\frac{4-2\sqrt{13}}{3})$$

دو نقطه برخورد مربوط به کمان در خور زاویهٔ 60° وابسته به پاره‌خط AB است و دو نقطهٔ برخورد وابسته به کمان در خور زاویهٔ 120° وابسته به این پاره‌خط می‌باشد.

۷ــ دایرهٔ آپولونیوس ــ مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه مقدار ثابت k ($K\neq 0$ و $K\neq 1$) باشد، دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم می‌کند.

اثبات به روش هندسی ــ دو نقطهٔ ثابت A و B را روی صفحهٔ P در نظر گرفته، خط راست AB رارسم می‌کنیم و روی این خط دو نقطهٔ C و D را چنان اختیار می‌کنیم که پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم کنند، یعنی، $\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}=K$ (۱) باشد. دایرهٔ به قطر CD مکان هندسی موردنظر، یعنی مکان هندسی نقطه‌ای است که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر K است. زیرا:



اولاً ــ هر نقطه مانند M که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت K یعنی (۲) $\frac{MA}{MB}=k$ باشد، روی دایرهٔ به قطر CD قرار دارد. زیرا اگر از M به نقطه‌های A و B و C و D وصل کنیم، از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $\frac{MA}{MB}=\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}=k$ ، اما این رابطه نشان می‌دهد که MC و MD به‌ترتیب نیمسازهای زوایای داخلی و خارجی رأس M از مثلث AMB می‌باشند، که چون این دو نیمساز برهم عمودند، پس $C\hat{M}D=90^\circ$ و در نتیجهٔ نقطهٔ M روی دایرهٔ به قطر CD واقع است.

ثانیاً ــ هر نقطه مانند M که روی این دایره قرار داشته باشد، نسبت فاصله‌اش از A و B برابر k است. زیرا اگر از M به نقطه‌های A و B و C و D وصل کنیم، چون (ABCD) یک تقسیم توافقی است؛ پس دستگاه M – ABCD دستگاهی توافقی می‌باشد و چون دو شعاع غیرمتوالی این دستگاه توافقی یعنی MC و MD برهم عمود می‌باشند (زاویه $C\hat{M}D$ محاطی روبه‌رو به قطر و برابر 90° است)، پس این دو شعاع نیمسازهای زوایای داخلی و خارجی بین دو شعاع دیگر می‌باشند. یعنی MC نیمساز زاویهٔ داخلی AMB و MD نیمساز زاویهٔ خارجی AMB است. از طرفی می‌دانیم که نیمسازهای هر زاویه ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کنند. پس داریم: $\frac{CA}{CB}=\frac{MA}{MB}=k$.

این دایره را دایرهٔ آپولونیوس می‌نامند.

اثبات به روش تحلیلی ــ دو نقطهٔ ثابت A و B را در صفحهٔ P در نظر می‌گیریم؛ خط AB را محور xها و عمودمنصف پاره‌خط AB را محور yها اختیار می‌کنیم. اگر M(x,y) نقطه‌ای از مکان هندسی موردنظر یعنی نقطه‌ای باشد که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B مقدار ثابت k باشد، با فرض AB = a داریم:

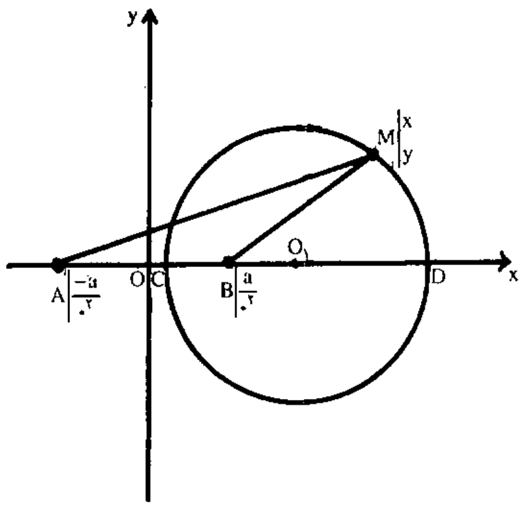
$$A(-\frac{a}{2},0),\ B(\frac{a}{2},0),\ M(x,y)\Rightarrow MA=\sqrt{(x+\frac{a}{2})^2+y^2}$$

$$MB=\sqrt{(x-\frac{a}{2})^2+y^2},\ \frac{MA}{MB}=K\Rightarrow\frac{\sqrt{(x+\frac{a}{2})^2+y^2}}{\sqrt{(x-\frac{a}{2})^2+y^2}}$$

$$=k\Rightarrow(x+\frac{a}{2})^2+y^2=k^2(x-\frac{a}{2})^2+k^2y^2\Rightarrow$$

$$(k^2-1)x^2+(k^2-1)y^2-a(k^2+1)x+(k^2-1)\frac{a^2}{4}=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-\frac{a(k^2+1)}{k^2-1}x+\frac{a^2}{4}=0 \qquad (1)$$



معادلهٔ (۱) معادلهٔ دایره‌ای است که مرکزش نقطهٔ $O_1(\frac{a(k^2+1)}{2(k^2-1)}$ و $0)$ و شعاعش $R=\left|\frac{ak}{k^2-1}\right|$ است. به عکس ثابت می‌شود هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادلهٔ (۱) صدق کند، نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر k است. قطر CD از این دایره پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند، زیرا داریم:

$$O_1A=\left|\frac{a(k^2+1)}{2(k^2-1)}+\frac{a}{2}\right| \text{ و } O_1B=\left|\frac{a(k^2+1)}{2(k^2-1)}-\frac{a}{2}\right| \text{ و}$$

$$O_1C=O_1D=R=\left|\frac{ak}{k^2-1}\right|\Rightarrow\overline{O_1C}^2=\overline{O_1D}^2=\overline{O_1A}.\overline{O_1B}$$

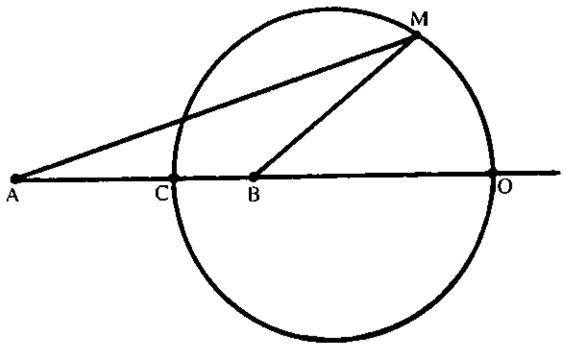
$$\Rightarrow\frac{a^2k^2}{(k^2-1)^2}=\left|\frac{a(k^2+1)}{2(k^2-1)}+\frac{a}{2}\right|.\left|\frac{a(k^2+1)}{2(k^2-1)}-\frac{a}{2}\right|$$

$$\Rightarrow\frac{a^2k^2}{(k^2-1)^2}=\frac{a^2}{4}(\frac{(k^2+1)^2}{(k^2-1)^2}-1)\Rightarrow\frac{a^2k^2}{(k^2-1)^2}=\frac{a^2k^2}{(k^2-1)^2}$$

بنابراین: مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه برابر مقدار ثابت k است، دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند.

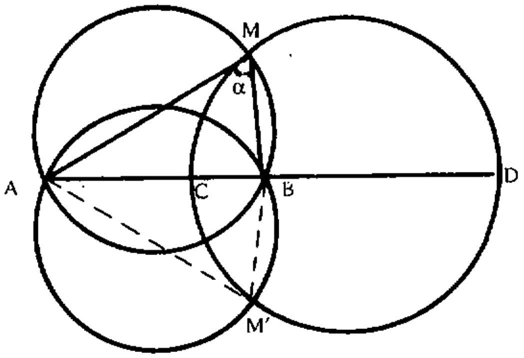
مثال ۱ ــ پاره‌خط AB به طول ۱۲ سانتیمتر در یک صفحه مفروض است. مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحه رابیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر ۲ است.

حل ــ نقطه‌های C و D را روی پاره‌خط AB و در امتداد آن چنان اختیار می‌کنیم، که این پاره‌خط را به نسبت ۲ تقسیم کنند. یعنی $\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}=۲$ باشد. در این صورت $CA=۸$ و $CB=۴$ و $DA=۲۴$ و $DB=۱۲$ سانتیمتر است. حال دایرهٔ به قطر CD را رسم می‌کنیم. این دایره مکان هندسی موردنظر است.

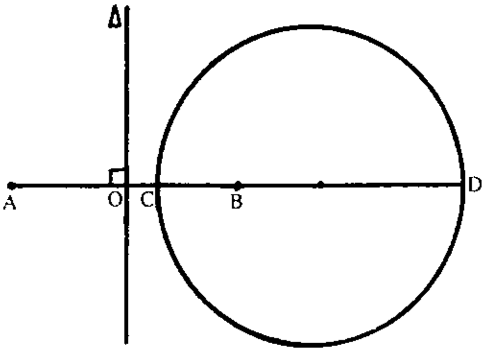


مثال ۲ ــ دو نقطهٔ A و B در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای از این صفحه راتعیین کنید که از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویهٔ α دیده شود و نسبت فاصلهٔ آن نقطه از دو نقطهٔ A و B برابر مقدار ثابت k باشد.

حل ــ کمان در خور زاویه α وابسته به پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. سپس مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحه را که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر k است، رسم می‌نماییم. نقطه‌های برخورد این دو مکان هندسی جواب مسأله‌اند ؛ و مسأله همواره دو جواب دارد.



مثال ۳ ــ دو نقطهٔ A و B در یک صفحه داده شده‌اند. آیا نقطه‌ای وجود دارد که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر عدد ثابت k باشد و این نقطه از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد؟

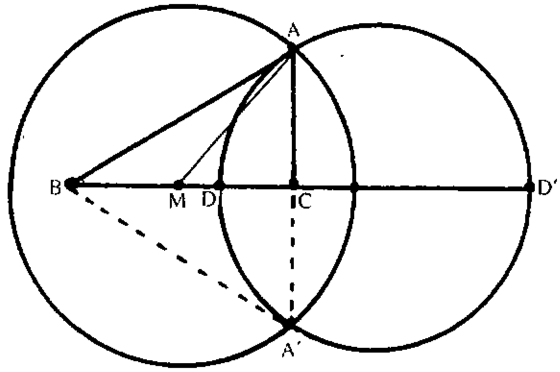


حل ــ نقطه‌های C و D را روی پاره‌خط AB و در امتداد آن چنان اختیار می‌کنیم که پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم کنند، سپس دایرهٔ به قطر CD رارسم می‌کنیم (دایرهٔ آپولونیوس). از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد، خط Δ عمودمنصف پاره‌خط AB است، که این خط را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن با AB را که وسط پاره‌خط AB است O می‌نامیم. امّا می‌دانیم بنابه رابطهٔ نیوتن در تقسیم توافقی، دو نقطهٔ C و D در یک طرف نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB قرار دارند (ABCD یک تقسیم توافقی است). بنابراین عمودمنصف پاره‌خط AB، دایرهٔ آپولونیوس یعنی مکان هندسی نقطه‌ای را که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر k است، هیچ‌گاه قطع نمی‌کند، لذا مسأله دارای جواب نیست.

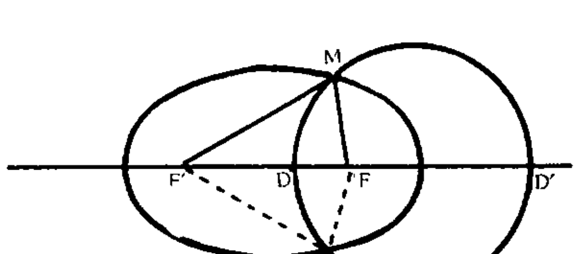
مثال ۴ ــ از مثلث ABC، اندازهٔ ضلع $BC=a$ و $\frac{AB}{AC}=\frac{b}{c}$ و طول میانهٔ رأس A (m_a) معلوم است. مثلث را رسم کنید.

حل ــ ابتدا پاره‌خط BC را به طول a رسم می‌کنیم. چون $\frac{AB}{AC}=\frac{b}{c}=k$ است، پس یک مکان هندسی رأس A دایره‌ای

است که قطرش پاره‌خط BC را به نسبت k تقسیم می‌کند. با مشخص کردن نقطه‌های D و D′ که پاره‌خط BC را به نسبت $\frac{b}{c}=k$ تقسیم می‌کنند، دایرهٔ به قطر DD′ را رسم می‌کنیم. از طرفی $AM=m_a$ معلوم است، پس مکان هندسی دیگر رأس A دایره‌ای به مرکز نقطهٔ M وسط پاره‌خط BC و به شعاع m_a است؛ این دایره رانیز رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این دو دایره، رأس A است. از A به B و C وصل می‌کنیم تا مثلث ABC رسم شود. در صورت متقاطع بودن دو دایرهٔ مکان هندسی، مسأله دارای دو جواب متساوی است.



مثال ۵ــ بیضی به کانونهای F و F′ و عدد ثابت ۲a درصفحه P مفروض است. نقطه‌ای از این بیضی را تعیین کنید، که نسبت فاصله‌اش از دو کانون F و F′ برابر ۲a باشد.



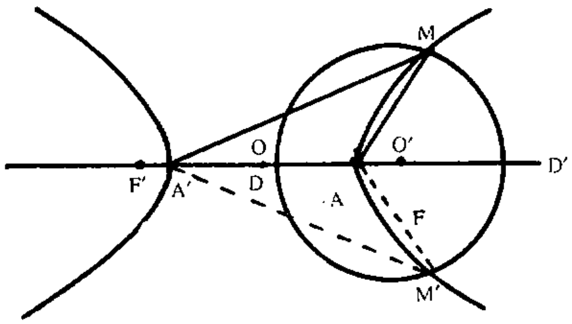
حل ــ می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت F و F′ برابر مقدارثابت ۲a است، دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط FF′ را به نسبت ۲a تقسیم می‌کند. این دایره (دایرهٔ به قطر DD′) را رسم می‌کنیم.

نقطه‌های برخورد این دایره با بیضی داده شده، جواب مسأله‌اند.

($\frac{\overline{DF'}}{\overline{DF}} = -\frac{\overline{D'F'}}{D'F} = 2a$ است).

مثال ۶ــ هذلولی به کانونهای F و F′ و عدد ثابت ۲a مفروض است. نقطه‌ای از این هذلولی را تعیین کنید که نسبت فاصله‌اش از دو رأس کانونی این هذلولی (A و A′) برابر مقدار ثابت K باشد.

حل ــ دو نقطهٔ D و D′ را روی محور کانونی هذلولی چنان تعیین می‌کنیم که پاره‌خط AA′ را به نسبت K تقسیم کنند. سپس دایرهٔ به قطر DD′، یعنی مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه را که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و A′ برابر K است رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد این دایره با هذلولی جواب مسأله است.



مثال ۷ــ دو نقطه $A(-1,2)$ و $B(3,0)$ دردستگاه مختصات xoy داده شده‌اند. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحهٔ مختصات را بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر $\frac{1}{2}$ باشد.

حل ــ فرض می‌کنیم $M(x,y)$ یک نقطه از مکان هندسی موردنظر باشد، یعنی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر $\frac{1}{2}$ است، دراین صورت داریم:

$$A\Big|_{2}^{-1},\ B\Big|_{0}^{3},\ M\Big|_{y}^{x} \Rightarrow MA=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}\ \text{و}$$

$$MB=\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}$$

$$\frac{MA}{MB}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}}{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow 4(x+1)^2$$

$$+4(y-2)^2=(x-3)^2+y^2\Rightarrow 3x^2+3y^2+14x-16y$$

$+۱۱=۰ \Rightarrow x^۲+y^۲+\frac{۱۴}{۳}x-\frac{۱۶}{۳}y+\frac{۱۱}{۳}=۰$

معادلهٔ دایرهٔ آپولونیوس.

مثال ۸ــ خط $D: y-۴x+۴=۰$ و دو نقطهٔ $A(-۴,۰)$ و $B(۰,۳)$ داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط D بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر ۳ باشد.

حل ــ معادلهٔ دایرهٔ آپولونیوس یعنی دایره‌ای که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت ۳ تقسیم می‌کند می‌نویسیم، و نقطهٔ برخورد آن با خط D را پیدا می‌کنیم. فرض می‌کنیم $M(x,y)$ یک نقطه از مکان هندسی بالا باشد، خواهیم داشت:

$A(-۴,۰)$ و $B(۰,۳), M(x,y) \Rightarrow MA=\sqrt{(x+۴)^۲+y^۲}$ و

$MB=\sqrt{x^۲+(y-۳)^۲}$

$\Rightarrow \frac{MA}{MB}=۳ \Rightarrow \frac{\sqrt{(x+۴)^۲+y^۲}}{\sqrt{x^۲+(y-۳)^۲}}=۳ \Rightarrow ۹x^۲+۹(y-۳)^۲$

$=(x+۴)^۲+y^۲$

$\Rightarrow ۸x^۲+۸y^۲-۸x-۵۴y+۶۵=۰ \Rightarrow$

$x^۲+y^۲-x-\frac{۲۷}{۴}y+\frac{۶۵}{۸}=۰$ معادلهٔ دایرهٔ آپولونیوس

$$\begin{cases} x^۲+y^۲-x-\frac{۲۷}{۴}y+\frac{۶۵}{۸}=۰ \\ y=۴x-۴ \end{cases} \Rightarrow$$

$x^۲+(۴x-۴)^۲-x-\frac{۲۷}{۴}(۴x-۴)+\frac{۶۵}{۸}=۰$

$\Rightarrow ۱۷x^۲-۶۰x+\frac{۴۰۹}{۸}=۰ \Rightarrow x_۱,x_۲=\frac{+۳۰\pm\sqrt{۲۴۷}}{۱۷}$

$\Rightarrow y_۱,y_۲=\frac{۱۲۰\pm ۴\sqrt{۲۴۷}}{۱۷}-۴$

$M_۱(\frac{۳۰+\sqrt{۲۴۷}}{۱۷},\frac{۵۲+۴\sqrt{۲۴۷}}{۱۷})$ و

$M_۲(\frac{۳۰-\sqrt{۲۴۷}}{۱۷},\frac{۵۲-۴\sqrt{۲۴۷}}{۱۷})$ نقطه‌های جواب مسأله

مثال ۹ ــ سه نقطهٔ $A(۲,-۱)$ و $B(-۲,۳)$ و $C(-۴,۰)$ در دستگاه مختصات xoy داده شده‌اند. نقطه‌ای در این صفحهٔ مختصات تعیین کنید که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد، و نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت B و C برابر $\sqrt{۲}$ باشد.

حل ــ نقطهٔ برخورد عمودمنصف پاره‌خط AB، با دایرهٔ آپولونیوسی که قطرش پاره‌خط BC را به نسبت $\sqrt{۲}$ تقسیم می‌کند، جواب مسأله است. بنابراین معادلهٔ این دو مکان هندسی را می‌نویسیم و نقطهٔ برخوردشان را تعیین می‌کنیم.

$A(۲,-۱),B(-۲,۳) \Rightarrow$ AB وسط $M(۰,۱)$،

$m/AB=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱} \Rightarrow m/AB=\frac{۳+۱}{-۲-۲}=-۱$

$\Rightarrow$ AB عمودمنصف $m=+۱$

$\Rightarrow y-۱=۱(x-۰)$

$\Rightarrow y=x+۱$. معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB

$B(-۲,۳)، C(-۴,۰)، M(x,y)، K=\sqrt{۲} \Rightarrow$

$MB=\sqrt{(x+۲)^۲+(y-۳)^۲}$

$MC=\sqrt{(x+۴)^۲+y^۲}$ ، $\frac{MB}{MC}=\sqrt{۲} \Rightarrow$

$\frac{\sqrt{(x+۲)^۲+(y-۳)^۲}}{\sqrt{(x+۴)^۲+y^۲}}=\sqrt{۲} \Rightarrow$

$۲(x+۴)^۲+۲y^۲=(x+۲)^۲+(y-۳)^۲$

$\Rightarrow x^۲+y^۲+۱۲x+۶y+۱۹=۰$ معادلهٔ دایرهٔ آپولونیوس

$$\begin{cases} y=x+۱ \\ x^۲+y^۲+۱۲x+۶y+۱۹=۰ \end{cases}$$

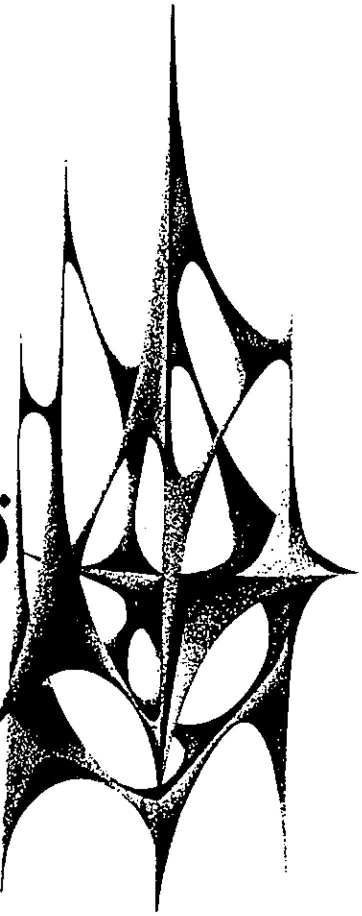
$\Rightarrow x^۲+(x+۱)^۲+۱۲x+۶(x+۱)+۱۹=۰$

$\Rightarrow ۲x^۲+۲۰x+۲۶=۰ \Rightarrow x^۲+۱۰x+۱۳=۰$

$\Rightarrow x_۱,x_۲=-۵\pm ۲\sqrt{۳} \Rightarrow y_۱,y_۲=-۴\pm ۲\sqrt{۳}$

$\Rightarrow M_۱(-۵+۲\sqrt{۳},-۴+۲\sqrt{۳})$ و

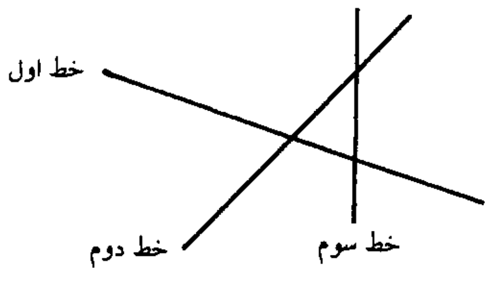
$M_۲(-۵-۲\sqrt{۳},-۴-۲\sqrt{۳})$ نقطه‌های جواب مسأله



تقسیم فضا به وسیلهٔ صفحات ...

● نهان علی اف ــ محمّد جهانشاهی

واضح است که n نقطه مختلف واقع در امتداد یک خط، این خط را به ۱+n قسمت تقسیم می‌کند. صفحه را یک خط به دو قسمت و دو خط دارای وضعیت عمومی این صفحه را به چهار قسمت تقسیم می‌کند. خط سومی که دو خط مذکور را قطع کند خود به سه قسمت تقسیم خواهد شد (توجه شود که خط سوم نیز باید نسبت به دو خط مذکور دارای وضعیت عمومی باشد). بنابراین خط فوق ۳ قسمت از ۴ قسمت بالا را به ۲ قسمت تقسیم می‌کند.



بنابراین ۳ خط فوق صفحه را به ۷ قسمت تقسیم می‌کند چهارمین خط با ۳ خط فوق خودش به چهار قسمت تقسیم می‌شود، لذا از ۷ قسمت بالا هر یک از ۴ قسمت آن را به ۲ قسمت تقسیم می‌کند، لذا چهار خط فوق صفحه را به ۴ + ۷ یعنی به ۱۱ قسمت تقسیم می‌کند. به این ترتیب n خط مستقیم صفحه را به

$$2+2+3+4+\ldots+n = 1+(1+2+3+\ldots+n) = 1+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=1+\frac{n[(n+1)+2]}{2} = 1+\frac{n(n-1)}{2}+n = 1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!} = \sum_{k=0}^{2}\frac{\overset{k}{n}}{k!}$$

که در آن

$$\overset{k}{n} = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots[n-(k-1)]$$

می‌باشد.

فضا را یک صفحه به ۲ قسمت و ۲ صفحه آن را به ۴ قسمت و ۳ صفحه آن را به ۸ قسمت تقسیم می‌کند (توجه شود که صفحه‌ها دارای وضعیت عمومی هستند). چهارمین صفحه با هر کدام از ۳ صفحه فوق در ۳ خط متمایز همدیگر را قطع خواهند کرد (با هر صفحه یک خط فصل مشترک خواهد داشت).

مطابق توضیحات بالا، از این که ۳ خطّ صفحه را به ۷ قسمت تقسیم می‌کند، چهارمین صفحه از ۸ قسمت فوق با ۷ قسمت آن تلاقی خواهد داشت و در نتیجه هر کدام از ۷ قسمت فوق را به ۲ قسمت تقسیم خواهد کرد. در نتیجه ۴ صفحه فضا را به ۸ + ۷ قسمت یعنی به ۱۵ قسمت تقسیم خواهد کرد. و پنجمین صفحه با چهار صفحه فوق در چهار خط متمایز تلاقی خواهد داشت، در نتیجه از این که چهار خط، صفحه را به ۱۱ قسمت تقسیم می‌کند، نتیجه می‌شود که پنجمین صفحه، از ۱۵ قسمت بالا، هر یک از ۱۱ قسمت آن را به ۲ قسمت تقسیم خواهد کرد و در نتیجه این صفحه همراه با چهار صفحه فوق فضا را به ۱۱ + ۱۵ = ۲۶ قسمت تقسیم خواهد کرد. اکنون با استقرای ریاضی نشان می‌دهیم n صفحه فضا را به $\sum_{k=0}^{3}\frac{\overset{k}{n}}{k!}$ قسمت تقسیم می‌کند:

درستی فرمول فوق برای $n=1,2,3,4,5$ در بالا نشان داده شد. برای مثال برای $n=5$ ملاحظه می‌کنیم.

$n=5,$

$$\sum_{k=0}^{3}\frac{\overset{k}{5}}{k!}=1+\frac{5}{1}+\frac{20}{2!}+\frac{60}{3!}=1+5+10+10=26$$

فرض استقرا: فرض کنیم m صفحه فضا را به $\sum_{k=0}^{3}\frac{\overset{k}{m}}{k!}$ قسمت تقسیم می‌کند. ثابت می‌کنیم حکم استقرای m + 1 صفحه فضا را به $\sum_{k=0}^{3}\frac{\overset{k}{(m+1)}}{k!}$ قسمت تقسیم می‌کند.

اثبات: m + 1 امین صفحه با m صفحه قبلی در m خط متمایز تلاقی خواهد کرد دیدیم که m خط صفحه را به $\sum_{k=0}^{2}\frac{\overset{k}{m}}{k!}$ قسمت تقسیم می‌کند. این m+1 امین صفحه، از $\sum_{k=0}^{3}\frac{\overset{k}{m}}{k!}$

قسمت، تعداد $\sum_{k=0}^{2}\frac{\overset{k}{m}}{k!}$ آن را، هر کدام را به ۲ قسمت تقسیم می‌کند. بنابراین با m + 1 صفحهٔ فضا به

$$\sum_{k=0}^{3}\frac{\overset{k}{m}}{k!}+\sum_{k=0}^{2}\frac{\overset{k}{m}}{k!}=$$

$$1+m+\frac{m(m-1)}{2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{6}+1+m+$$

$$\frac{m(m-1)}{2}=1+(m+1)+\frac{m(m+1)}{2}$$

$$+\frac{m(m-1)[m-2+3]}{6}=\sum_{k=0}^{3}\frac{\overset{k}{(m+1)}}{k!}$$

تقسیم می‌شود.

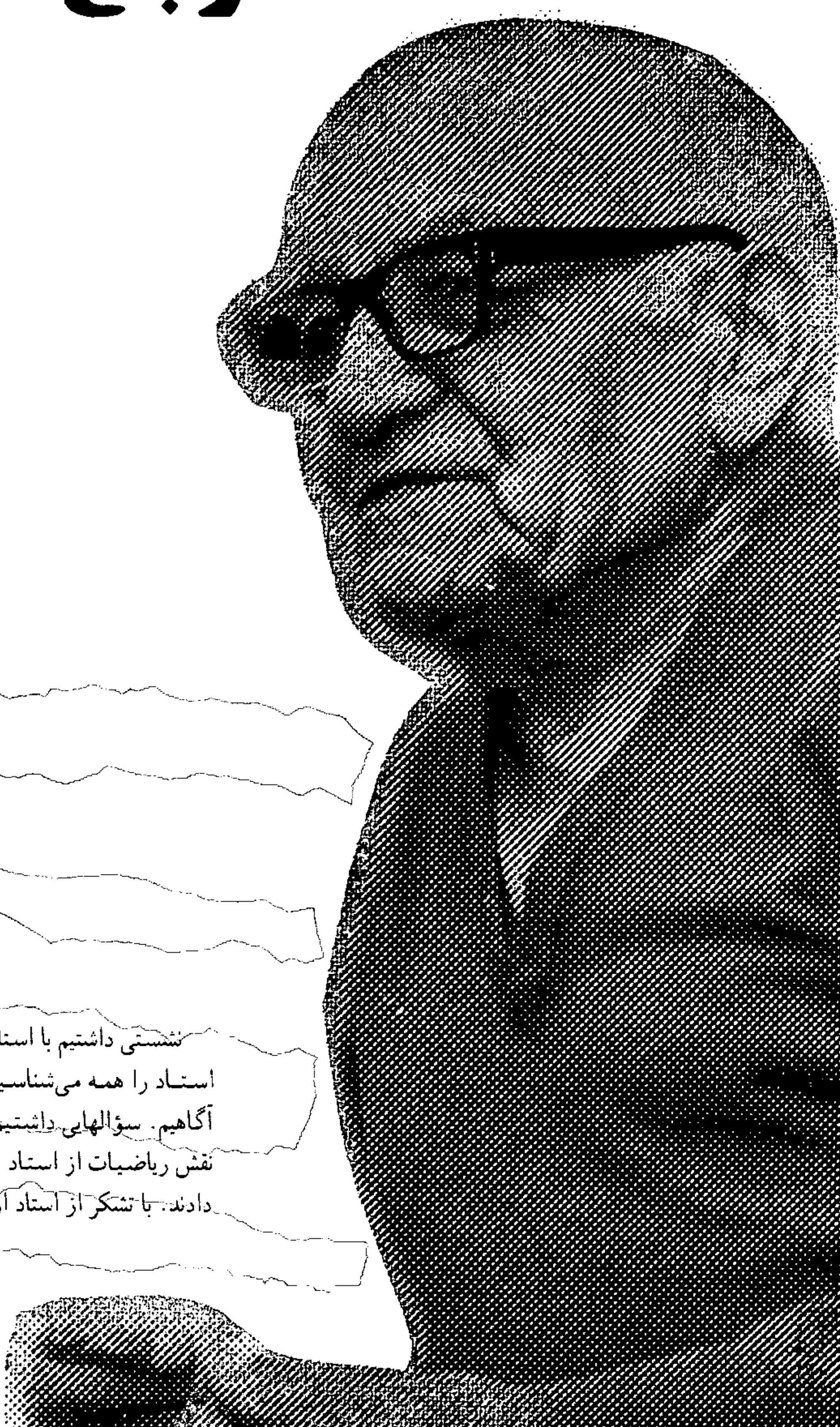
به این ترتیب n صفحه که دارای وضعیت عمومی هستند فضا را به $\sum_{k=0}^{3}\frac{\overset{k}{n}}{k!}$ قسمت تقسیم خواهد کرد. نهایتاً کره را یک خط به ۲ قسمت و ۲ خط آن را به ۴ قسمت و ۳ خط آن را به ۸ قسمت تقسیم می‌کند (خط در کره دایره عظیمه روی کره است). خط چهارم با هر کدام از ۳ خط قبلی در دو نقطه تلاقی دارد و در نتیجه با ۶ نقطه تلاقی، به ۶ قسمت تقسیم می‌شود بنابراین با توجه به این، از ۸ قسمت اول، ۶ قسمت آن هر کدام به ۲ قسمت تقسیم خواهد شد در نتیجه ۴ خط، سطح کره را به $2\times 7=8+6=14$ قسمت تقسیم خواهد کرد و به همین ترتیب پنجمین خط با ۴ خط قبلی، در ۸ نقطه تلاقی خواهد داشت لذا از ۱۴ قسمت سطح کره، ۸ قسمت آن را هر کدام به ۲ قسمت تقسیم خواهد کرد. بنابراین ۵ خط سطح کره را به $2\times 11=8+14=22$ قسمت تقسیم خواهد کرد. در مقایسه با حالت مستوی نتیجه می‌شود که n خط، سطح کره را به:

$$2\sum_{k=0}^{2}\frac{\overset{k}{(m-1)}}{k!}$$

قسمت تقسیم می‌کند.

در باغ تجربه‌ها

پای صحبت استاد احمد بیرشک



نشستی داشتیم با استاد ارجمند جناب آقای احمد بیرشک، استاد را همه می‌شناسیم و از تأثیرشان در ریاضیات ایران آگاهیم. سؤالهایی داشتیم دربارهٔ ریاضیات و کتابهای درسی و نقش ریاضیات از استاد که استاد با توجه خاص به آنها پاسخ دادند. با تشکر از استاد ارجمند آنها را با هم می‌خوانیم*

▲ استاد بیرشک لطفاً نقش ریاضیات را در علوم پایه و کامپیوتر توضیح بدهید.

□ ریاضیات در همهٔ علوم تأثیر دارد. حتی در زیست‌شناسی و حقوق هم تأثیر دارد. علوم پایه بدون ریاضیات کاری نمی‌توانند انجام بدهند. اگر ریاضیات نبود دسترسی به فضا به این کیفیت میسر نمی‌شد و اگر ریاضیات نبود شیمی این‌قدر پیشرفت نمی‌کرد. ولی همین‌طور که خدمتتان عرض کردم در علوم غیرعلمی هم مثل حقوق و زیست‌شناسی تأثیر شایانی دارد.

کامپیوتر بر یک قسمتی از ریاضیات متکی است که به مبنای ۲ اجرا می‌شود ریاضیات معمولی به مبنای ده می‌باشد، ولی کامپیوتر به مبنای ۲ است. اگر این ریاضیات نبود ممکن نبود این همه علوم را به‌صورت ساده درآورد، البته وقتی با مبنای ۲ حساب می‌کنیم، مفصلتر است، اما چون جوابش دو عدد ۰ است و ۱، دو عدد هستند، یکی از آنها یعنی قطع، دیگری یعنی وصل، بنابراین چون با برق کار می‌کند، قطع و وصل می‌شوند. پس ریاضیات به مبنای ۲ اساس کار کامپیوتر است.

▲ اطلاع دارید که هزارهٔ سوم را «هزارهٔ ریاضیات» نامگذاری کرده‌اند. لطفاً در رابطه با ریاضیات در هزارهٔ سوم برایمان صحبت کنید.

□ به عقیدهٔ من مطلقاً قابل پیش‌بینی نیست. به دلیل این‌که سرعت علم روزافزون نیست، دم‌افزون است. یعنی هر دم ترقی بیشتری می‌کند. بنابراین کسی نمی‌تواند پیش‌بینی کند درسال ۲۰۰۰ به بعد چقدر در این مورد پیشرفت خواهد داشت. به همین جهت سال ۲۰۰۰ را اسمش را گذاشته‌اند سال جهانی ریاضی و در آن‌جا در تمام کشورهای جهان تا این سال دربارهٔ ریاضیات بحث می‌کنند. در ایران هم دانشگاههایمان شروع کرده‌اند به تکیه دادن به گروههایی که کار انجام می‌دهند. اما برای این‌که در آینده چه خواهند کرد، آدم فکر می‌کند که رسیدیم به مقصد، اما تازه می‌بینیم یک چیز تازه‌تری هست. اگر بخواهیم درنظر بگیریم پیشرفت ریاضیات را در قرن نوزدهم و بیستم و بخواهیم حساب کنیم، باید بگوییم ریاضیات در قرن بیست و یکم دست‌کم چهار برابر قرن بیستم ترقی خواهد کرد.

▲ وضعیت آموزش ریاضی در ایران را چگونه می‌بینید و پیشنهادهای جنابعالی در این مورد چیست؟

□ آموزش ریاضی مدتها به جد گرفته نشده بود و سالهای متمادی بود که از تماس با علم روز محروم بودیم، ولی اخیراً شروع شد به انجام کارهایی و نوید خوبی می‌دهد به ما، مشروط به این‌که کمی جدی باشیم، ما در دانشگاههایمان تا به‌حال دربارهٔ ریاضیات جدی نبودیم. شاید بتوانم عرض کنم دربارهٔ هیچ‌یک از علوممان به اندازهٔ کافی جدی نبوده‌ایم، ولی فعلاً نهضتی شروع شده است و امیدواریم به جایی برسد.

▲ جناب استاد، به نظر جنابعالی کتابهای کمک درسی مفیدند؟ و به‌طورکلی شرایط یک کتاب کمک درسی خوب چه مواردی هستند؟

□ آن وقتی که من درس می‌خواندم، تعداد موادی که تدریس می‌شد از حالا کمتر بود، ولی مقداری که در هر ماده تدریس می‌شد از حالا بیشتر بود، یعنی عمق مدارس متوسطه در قدیم خیلی بیشتر از حالا بود. حالا آن‌قدر هست که فقط باید مقدار مختصری گفت و گذشت، پس کتابهای درسی مطلقاً کافی نیست. کتاب کمک درسی آن‌چه را که در کلاس نمی‌توان آموخت، به آدم می‌آموزد. به‌نظر من کتابهای کمک درسی اگر خوب تهیه شوند، بهترین کاری خواهد بود برای دانش‌آموزان و حتی دانشجویان.

▲ جناب بیرشک درحال حاضر وضع مقالات ریاضی ایران چگونه است؟

□ خوب است! عرض کنم به حضورتان در حدی که انجام می‌شود کمتر از آن‌چه که در دانشگاههاست نیست. نسبتاً‌اش خوب است و روز به روز هم بیشتر می‌شود. توجه به مقالات علمی خیلی زیاد شده است. الآن ما مجلاتی که کاملاً علمی هستند، یعنی صرفاً [علمی] هستند، متعدد داریم درنهایت توسط یک عده کوشش می‌شود که نقصها جبران شوند. خوب است.

▲ جناب استاد بیرشک بفرمایید به‌نظر شما تفاوت ریاضیات محض و کاربردی و نقش آنها در ابعاد مختلف چگونه است؟

□ توجه بفرمایید که خود متن سؤال می‌تواند مقدار قابل

ملاحظه‌ای از اختلافشان را توضیح دهد. ریاضیات کاربردی یعنی آنهایی که عملاً مورد استفاده هستند. طبعاً فایده‌شان برای جامعه زیادتر است، اما ثباتشان بر مقالات صرفاً ریاضی است. ما در مقالات صرفاً ریاضی مستقلاً کاری نکردیم و کاری نمی‌کنیم. الآن معدودی هستند از استادان ریاضی ما که مقالات صرفاً ریاضی مجلات خارجی را هم می‌خوانند.

▲ استاد به‌نظر شما فلسفهٔ ریاضیات چیست؟ آیا فلسفهٔ ریاضی بخشی از ریاضیات است یا بخشی از فلسفه؟

□ تعداد رشته‌های ریاضی درحال حاضر آن‌قدر زیادند که هیچ‌کس نمی‌تواند در همهٔ رشته‌های ریاضی تخصص داشته باشد. حتی در بعضی از رشته‌ها یک عمر لازم است که آدم تخصص پیدا کند. فلسفهٔ ریاضی به معنی فلسفه نیست، بلکه روشهایی را که برای آسان کردن درک ریاضی و ثمربخش بودن آن است، مجموعاً فلسفهٔ ریاضی را تشکیل می‌دهد. کتابهای فلسفهٔ ریاضی مرتب روی روشهای مختلف ریاضی بحث می‌کند.

▲ در این مرحله خوشحال می‌شویم از خاطرات خودتان برایمان بازگو کنید.

□ من دربارهٔ خاطراتم نمی‌توانم زیاد صحبت کنم، به‌دلیل این‌که عمرم دراز بوده و سراسر خاطره است. انتخاب کردن و گلچین کردن هم مشکل است، دیگر این‌که خاطرات افراد خیلی به درد دیگران نمی‌خورد. بنابراین من فقط می‌توانم دربارهٔ یک خاطرهٔ ریاضی که به قول یکی از دوستان به داستان می‌ماند صحبت کنم: من تحصیلاتم بسیار نامرتب بوده، برای این‌که در خدمت پدر بودم. پدر عضو گمرک بود و مجبور بود در مرزها خدمت کند. آن‌وقتها هم که من نوجوان بودم در مرزهایمان هیچ وسیلهٔ تحصیل نبود. درنتیجه مقدمات را پیش پدر آموختم و بعد هم خودم شروع کردم پیش خودم کار کردن. بنابراین خیلی جنبهٔ خودآموخته دارم. چیزهایی که یاد گرفتم خودم یاد گرفتم. باری در دورهٔ ابتدایی فقط شش ماه مدرسه رفتم، در دورهٔ متوسطه شش سال را در دو سال طی کردم. یعنی سالهای اول و دوم متوسطه را تابستان پیش خودم خواندم، پیش یک معلمی خواندم، سال سوم را در مدرسه خواندم سال چهارم را پیش خودم خواندم سال پنجم را در مدرسه خواندم سال ششم را پیش خودم خواندم تا دورهٔ متوسطه تمام شد.

خاطره‌ای که دارم دربارهٔ سال چهارم است. من سال سوم را که امتحان دادم کتابها را زدم زیر بغل و رفتم خدمت پدر، که تابستان را با هم باشیم، در آن‌جا تا توانستم تلاش کردم و یاد گرفتم. آمدم تهران که کلاس چهارم را امتحان بدهم و بروم کلاس پنجم. وقتی که آمدم شهریور گذشته بود و امتحانات تمام شده بود. هر مدرسه‌ای که رفتم برای امتحان تجدیدی گفتند امتحاناتمان تمام شده کاری نمی‌توانیم بکنیم. من هم نمی‌خواستم

یکسال عمرم تلف بشود. بعد از این‌که از همه‌جا ناامید شدم به من خبر دادند که در خیابان امیریه، خیابان منیریه، مدرسه‌ای هست به‌نام «**شرف مظفری**». آخرین امید بود. رفتم به مدرسه، مدیر مدرسه مردی بود خیلی جدی و با هیبت و وسط اتاق ایستاده بود. سلامی کردم و گفتم ماجرا این است، می‌خواهم امتحان بدهم. گفت: «امتحاناتمان تمام شده نمی‌توانیم امتحان بگیریم، پسر برو.» اصرار کردم، به‌دلیل این‌که آخرین امید بود، گفت: «بهت می‌گویم نمی‌توانیم. پسر اسمت چیست؟» گفتم: «اسمم احمد بیرشک است.» گفت: «احمد بیرشک تویی!؟» گفتم: «بله» گفت: «خوب برو به آن آقای ناظم که کنار استخر راه می‌روند بگو برایت یک فکری بکنند.» من با خوشحالی رفتم سراغ آقای ناظم. سلام کردم. آقای ناظم همان کسی بود که بعدها در وزارت آموزش و پرورش به وزارت رسید. **دکتر *مهران***، آن‌وقت اسمش ***صادقی*** بود، رفتم سلام کردم و مطلبم را گفتم. ایشان خیلی مؤدب، نه این‌که بگویند پسر برو، گفت: «خیلی معذرت می‌خواهم، خیلی دلم می‌خواست کاری انجام بدهم ولی امتحاناتمان تمام شده و کاری نمی‌توانیم بکنیم.» گفتم که آقای ناظم! آقای مدیر به من گفتند که بیایم خدمت شما برایم کاری انجام بدهید، نه‌این‌که بگویید نمی‌شود. گفت: «آقای مدیر فرمودند؟» گفتم: «بله». گفت: «خوب، اسم شما چیست؟» گفتم: «اسم بنده احمد بیرشک است.» گفت: «آقای احمد خان بیرشک جنابعالی هستید؟!» گفتم: «بله بنده هستم.» گفت: «خوب فردا صبح بیایید امتحان بدهید.» روز بعد رفتم امتحان دادم و بالاخره رفتم کلاس پنجم.

این مطلب برای من معما شده بود که آدمی که تهران را بلد نیست، دو تا آدم بزرگ مثل رئیس و ناظم یک مدرسه چه‌طور با اسمش آشنا هستند که اسمش مشکل‌گشا می‌شود؟! تحقیق کردم. بعد معلوم شد همان مدرسه که مدرسهٔ «**شرف**» بود شاگردی داشت در کلاس سوم، همکلاس من، می‌خواست امتحان بدهد، اینها دنبال این بودند که شاگرد اول ایران را بیرون بدهند، ***عبدالرسول دبیر*** شاگردشان بود، دنبالش بودند. امتحانات را داده بود بعد رفته بودند نتیجه را بگیرند دیده بودند عبدالرسول دبیر با معدل ۱۵/۸۷ شده شاگرد اول ایران. اما دو نفر معدل ۱۵/۸۷ دارند یکی عبدالرسول دبیر است و یکی به اسم احمد بیرشک، به‌خاطرشان مانده بود. پس وقتی من آمدم به ایشان گفتم اسمم احمدبیرشک است دیدند این همان کسی است که با شاگرد اولشان هم‌نمره است.

▲ با تشکر از استاد احمد بیرشک.

❊ این نوشته‌با استفاده از مصاحبه‌ای انجام شده‌که درسه برنامه‌در ۷۵/۹/۲۷ و ۷۵/۱۰/۴ و ۷۵/۱۰/۱۱ از برنامهٔ **در جهان ریاضی** شبکهٔ ۲ سراسری رادیو پخش شده است. مصاحبه‌کننده همکارمان آقای غلامرضا یاسی‌پور بوده‌اند. این برنامه را می‌توانیدسه‌شنبه شبها از ساعت ۹ تا ۹/۵۰ از همین شبکه بشنوید.

آموزش ترجمه متون ریاضی (۱۷)

حمیدرضا امیری
دانش آموزان دبیرستان نظام قدیم و جدید

1.1 Elementary results in coordinate geometry
If $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ and $P_2 \equiv (x_2, y_2)$, we obtain the following results directly from Fig. 1.1.

Distance P_1P_2 $\quad \sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]}$ (1.1)

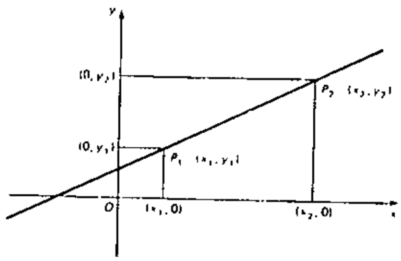
Gradient of P_1P_2 $\quad \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (1.2)

Mid-point of P_1P_2 $\quad \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$ (1.3)

Equation of P_1P_2 $\quad y - y_1 = m(x - x_1)$, (1.4)

$\equiv y = mx + c$,

where $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$, and $c = y_1 - mx_1$.



شکل ۱.۱

۱.۱ نتایج مقدماتی در هندسهٔ تحلیلی

اگر $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ و $P_2 \equiv (x_2, y_2)$، ما نتایج زیر را مستقیماً از شکل ۱.۱ به‌دست می‌آوریم.

فاصلهٔ P_1P_2 $\quad$ (۱.۱) $\sqrt{\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\right]}$

ضریب زاویهٔ P_1P_2 $\quad$ (۱.۲) $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

نقطهٔ وسط (میانی) P_1P_2 $\quad$ (۱.۳) $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

معادلهٔ P_1P_2 $\quad$ (۱.۴) $y - y_1 = m(x - x_1)$

$\equiv y = mx + c$

که $c = y_1 - mx_1, m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Other important results
Straight lines with gradients m_1, m_2 are perpendicular

$$\Leftrightarrow \quad m_1 m_2 = -1. \qquad (1.5)$$

Perpendicular distance of (x_1, y_1) from $ax + by + c = 0$ is

$$\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}. \qquad (1.6)$$

(The expression $ax_1 + by_1 + c$ is positive or negative depending on whether (x_1, y_1) is on one side of the line or the other; e.g., the points $(-2, 3)$ and $(1, 1)$ are on opposite sides of the line $5x - 2y + 1 = 0$ since $5.(-2) - 2.3 + 1 < 0$ and $5.1 - 2.1 + 1 > 0$.)

نتایج مهم دیگر

دو خط با ضریب زاویه‌های m_1 و m_2 بر یکدیگر عمودند $\Leftrightarrow m_1m_2 = -1$ (۱.۵) فاصلهٔ عمودیِ نقطهٔ (x_1, y_1) از خط $ax + by + c = 0$ عبارت است از،

(۱.۶) $\dfrac{^*ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$

(عبارت $ax_1 + by_1 + c$ یا مثبت است و یا منفی، بستگی به این که (x_1, y_1) در یک طرف خط یا در طرفِ دیگر خط واقع باشد. به‌عنوان مثال، نقاط (۳ و ۲-) و (۱ و ۱) در دو طرفِ مقابل از خط $5x - 2y + 1 = 0$ قرار دارند، به‌طوری‌که $5 \times (-2) - 2 \times 3 + 1 < 0$ ، $5 \times 1 - 2 \times 1 + 1 > 0$

Example 1 Find an equation of that line through the meet of the lines $3x + y - 5 = 0$, $8x - 3y - 19 = 0$ which is perpendicular to the line

$$9x + 7y - 4 = 0.$$

Method (i): Solving $3x + y - 5 = 0$, $8x - 3y - 19 = 0$ we have $x = 2$, $y = -1$. Gradient of $9x + 7y - 4 = 0$ is $-9/7$; hence the gradient of a perpendicular line is 7/9.
An equation of the required line is

$$y + 1 = \tfrac{7}{9}(x - 2)$$
$$\equiv 7x - 9y = 23.$$

مثال ۱: معادلهٔ خطی را بیابید که از محل تلاقی دو خط $۳x+y-۵=۰$ و $۸x-۳y-۱۹=۰$ عبور کرده و برخط $۹x+۷y-۴=۰$ عمود باشد.

روش اول: با حل $۳x+y-۵=۰$ و $۸x-۳y-۱۹=۰$ (در یک دستگاه) داریم، $x=۲$ و $y=-۱$. ضریب زاویهٔ خط $۹x+۷y-۴=۰$، $\frac{-۹}{۷}$ است، بنابراین ضریب زاویهٔ خط عمود بر آن $\frac{۷}{۹}$ خواهد بود.

معادلهٔ خط خواسته شده عبارت است از

$$y+۱=\frac{۷}{۹}(x-۲)$$
$$\equiv ۷x-۹y=۲۳$$

Method (ii): We use an important idea in coordinate geometry. The equation

$$(3x + y - 5) + \lambda(8x - 3y - 19) = 0,$$

where λ is any non-zero constant, is that of a straight line through the meet of $3x + y - 5 = 0$ and $8x - 3y - 19 = 0$, since the coordinates of this point clearly satisfy the equation for any value of λ. The gradient of this line is $(3 + 8\lambda)/(3\lambda - 1)$. Hence the line is perpendicular to $9x + 7y - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{3+8\lambda}{3\lambda-1} = \frac{7}{9}$$
$$\Leftrightarrow 9(3 + 8\lambda) = 7(3\lambda - 1)$$
$$\Leftrightarrow \lambda = -\tfrac{2}{3}.$$

Hence the required line is

$$3x + y - 5 - \tfrac{2}{3}(8x - 3y - 19) = 0$$
$$\equiv 7x - 9y = 23.$$

روش دوم: از یک ایدهٔ مهم در هندسهٔ مختصاتی استفاده می‌کنیم. معادلهٔ $(۳x+y-۵)+\lambda(۸x-۳y-۱۹)=۰$ که در آن λ یک مقدار ثابت ناصفر می‌باشد، معادلهٔ یک خط مستقیم است که از محل تلاقی $۳x+y-۵=۰$ و $۸x-۳y-۱۹=۰$ عبور می‌کند، و واضح است که مختصات این نقطه (محل تلاقی) به‌ازای هر مقدار λ در معادله صدق می‌کند. ضریب زاویهٔ این خط $\frac{(۳+۸\lambda)}{(۳\lambda-۱)}$ است. از آن‌جا که خط بر $۹x+۷y-۴=۰$ عمود است.

$$\Leftrightarrow \frac{۳+۸\lambda}{۳\lambda-۱}=\frac{۷}{۹}$$
$$\Leftrightarrow ۹(۳+۸\lambda)=۷(۳\lambda-۱) \Leftrightarrow \lambda=-\frac{۲}{۳}$$

بنابراین خط خواسته شده عبارت است از

$$۳x+y-۵-\frac{۲}{۳}(۸x-۳y-۱۹)=۰$$
$$\equiv ۷x-۹y=۲۳$$

Exercise 1.1

1 Find an equation of the straight line which passes through the intersection of the lines

$$5x - 7y + 1 = 0, \quad 3x + 9y - 5 = 0$$

and which passes through the origin.

2 The points A and B have coordinates (3,0) and (0, −3). Given that the area of the triangle ABP is $4\frac{1}{2}$ units², find the equations of the two lines on which P can lie.

3 Show that the equation

$$(4x + 3y - 6) + \lambda(2x - 5y - 16) = 0$$

represents a straight line for any value of λ.
Find the value of λ when the line
(a) passes through the origin,
(b) is parallel to the line $5x - 6y - 11 = 0$,
(c) is perpendicular to the line $x + 4y = 0$.

4 The points A, B, C and D have coordinates (3,8), (2,1), (12, −4) and (10,12) respectively. The mid-point of CD is P.
(a) Find an equation of the line BP.
(b) The lines AC and BP meet at Q. Find the coordinates of Q.
(c) The line through B, perpendicular to AC, meets AC at R. Find the coordinates of R and the distance BR.
(d) Hence, or otherwise, calculate the area of the triangle ABQ.

تمرین ۱.۱

۱ــ معادلهٔ خطی را بیابید که از محل تقاطع دو خط $۵x-۷y+۱=۰$ و $۳x+۹y-۵=۰$ عبور کند و همچنین از مبدأ مختصات بگذرد.

۲ــ نقاط A و B دارای مختصات (۳،۰) و (۰،۳-) می‌باشند. فرض کنیم مساحت مثلث ABP، $۴\frac{۱}{۲}$ واحد مربع است، معادلهٔ دو خطی را بیابید که نقطه P می‌تواند روی آنها واقع باشد.

۳ــ نشان دهید معادلهٔ

$(۴x+۳y-۶)+\lambda(۲x-۵y-۱۶)=۰$ برای هر مقدار λ یک خط مستقیم را نمایش می‌دهد. مقدار λ را بیابید، وقتی که خط

(الف) از مبدأ مختصات عبور می‌کند،

(ب) با خط $۵x-۶y-۱۱=۰$ موازی است،

(پ) برخط $x+۴y=۰$ عمود است.

۴ــ نقاط C ،B ،A و D به ترتیب دارای مختصات (۳،۸)، (۲،۱)، (۱۲،۴-) و (۱۰،۱۲) می‌باشند. نقطهٔ وسط CD، P است.

(الف) معادلهٔ خط BP را بیابید.

(ب) خطهای AC و BP در Q تلاقی می‌کنند. مختصات نقطهٔ

Q را بیابید.

(پ) خطی از B عبور کرده، بر AC عمود است، AC را در R تلاقی می‌کند. مختصات R و فاصلهٔ BR را بیابید.

(ت) سپس، یا از طرف دیگر، مساحت مثلث ABQ را محاسبه کنید.

5 The parallelogram $OABC$ lies in the first quadrant. The angle OAC is 90° and $OA = 15$. The equation of the straight line through O and A is $4y - 3x = 0$ and the equation of the straight line through O and C is $3y - 4x = 0$. Find
(a) the coordinates of A,
(b) an equation of the straight line through A and C,
(c) the coordinates of C,
(d) the coordinates of B.

6 The points (6, 13), (0, 3) and (5, 0) are the three vertices A, B and C, respectively, of a parallelogram $ABCD$.
(a) Calculate the coordinates of D.
(b) Prove that $ABCD$ is a rectangle.
(c) Calculate the ratio of the length of AB to the length of BC.
(d) The point P lies on CD and the area of the triangle PBC is one quarter of the area of the rectangle $ABCD$. Find the coordinates of P and an equation of the line BP.

7 The points A, B, C have coordinates (0, 2), (1, 4) and (3, −1) respectively. Given that $ABFC$ is a trapezium with CF parallel to AB and $CF = 2AB$, find
(a) the coordinates of F,
(b) an equation of the line BC,
(c) the coordinates of the point where AC cuts the x-axis,
(d) an equation of the line through B perpendicular to FC.

۵ــ متوازی‌الاضلاع OABC در ربع اول قرار دارد. زاویهٔ OAC، °۹۰ است و OA = ۱۵. معادلهٔ خط مستقیمی که از O و A عبور می‌کند ۴y − ۳x = ۰ و معادلهٔ خط مستقیمی که از O و C عبور می‌کند ۳y − ۴x = ۰ است. پیدا کنید،

(الف) مختصات A را،

(ب) معادلهٔ خطی را که از A و C عبور می‌کند،

(پ) مختصات C را،

(ت) مختصات B را.

۶ــ نقطه‌های (۶,۱۳)، (۰,۳) و (۵,۰) به‌ترتیب سه رأس A، B و C از متوازی‌الاضلاع ABCD می‌باشند.

(الف) مختصات D را محاسبه کنید.

(ب) ثابت کنید ABCD یک مستطیل است.

(پ) نسبت طول AB به طول BC را محاسبه کنید.

(ت) نقطهٔ P روی CD واقع است و مساحت مثلث PBC یک چهارم مساحت مستطیل ABCD است. مختصات P و معادلهٔ خط BP را بیابید.

۷ــ نقاط A، B و C به‌ترتیب دارای مختصات (۰,۲)، (۱,۴) و (۳,−۱) می‌باشند. فرض کنیم ABFC ذوزنقه‌ای است که در آن CF موازی AB و CF = ۲AB می‌باشد، پیدا کنید:

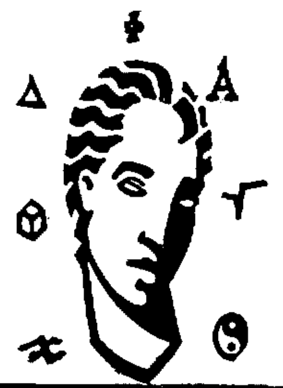
(الف) مختصات F را،

(ب) معادلهٔ خط BC را،

(پ) مختصات محل تلاقی خط AC با محور Xها

(ت) معادلهٔ خطی که از B عبور کرده و بر FC عمود باشد.

* چون عدد حاصل از کسر فوق نشان‌دهندهٔ فاصله است و فاصله نمی‌تواند منفی باشد باید همواره قدرمطلق عدد حاصل را در نظر بگیریم.



تفریح اندیشه ۶

موتورسواری مسیری را می‌پیماید که از چهارقسمت به طولهای مساوی تشکیل شده است.

در اولین قسمت، جاده صاف و هموار است و سرعت او ۱۰ کیلومتر در ساعت می‌باشد. قسمت دوم تپه‌ای است که سرعتش در این مسیر به ۵ کیلومتر در ساعت می‌رسد. در قسمت سوم که سراشیبی است سرعت موتورسوار ۳۰ کیلومتر در ساعت است.

در آخرین بخش، جاده صاف و هموار است و باد هم از پشت سر می‌وزد که در نتیجه او به ۱۵ کیلومتر در ساعت می‌رسد. سرعت متوسط این موتورسوار دراین مسیر چقدر است؟

جواب در صفحهٔ ۸۸

مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۱۸)

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

اعداد اول، تجزیه و رمزهای مخفی

قسمت چهارم

یک ذهن ریاضی حیرت‌انگیز

کارل فردریش گاوس در ۱۷۷۷ در برونسویک[1]، که اکنون در آلمان غربی است، متولد شد. پدرش بنّا بود و امید داشت که پسرش بتواند در کارها به او کمک کند. هنگامی که گاوس در سه سالگی توانست محاسبات پرداخت حقوق پدرش را تصحیح کند، چنین معلوم شد که شغل اخیر شغلی است که گاوس کوچک بسیار مناسب آن است. خوشبختانه از لحاظ آیندهٔ ریاضیات (اگر از فیزیک و نجوم چیزی نگوییم) درک حاکم آن ناحیه از نبوغ کودک خردسال آگاه شد و تعلیم مرتب او را برقرار ساخت.

گاوس در سن پانزده سالگی، در حالی که بسیار جلوتر از تواناییهای معلمان خود بود، به کالج *کارولین*[2] رفت. طی سه سال استادان این کالج مجبور به پذیرفتن این مطلب شدند که آنها را نیز پشت سر نهاده است.

گاوس در ۱۷۹۶، هنگامی که دانشجوی کالج بود، مطلب قابل توجه خود را در ارتباط با هندسهٔ یونانی و اعداد فرما مطرح کرد. این نتیجه در بخش هفتم و آخرین اثر عظیمش[3] ــ در چاپ امروزی کتابی ــ آمده است که در ۱۸۰۱ زمانی که گاوس هنوز تنها بیست و چهار سال داشت ظاهر شد، و مبنای اغلب نظریهٔ اعداد امروزه (شاخه‌ای از ریاضیات که با ویژگیهای اعداد طبیعی سر و کار دارد، و مطالب این فصل جزئی کوچک از آن است) قرار گرفت.

یکی از مسایل مورد علاقهٔ ریاضیدانهای یونان باستان ترسیم شکلهای مسطح (دایره‌ها، مثلثها، متوازی الاضلاعها، و غیره) تنها با استفاده از خط‌کش (نامدرج، و بنابراین تنها مناسب برای رسم خطوط مستقیم) و پرگار (تنها برای رسم کمانهای دایره‌ها، و انتقال یک طول با حرکت دادن آن در عرض صفحه) بود. با بهره‌گرفتن از ابتکارهایی غالباً جالب می‌توان تعداد بسیاری از شکلهای هندسی را تنها با استفاده از این دو وسیلهٔ ابتدائی رسم کرد. (چنین ترسیماتی پیش از اواسط دههٔ ۱۹۶۰ بخش مهمی از ریاضیات شاگردان دبیرستان را تشکیل می‌داد.) یونانیان خود چگونگی ترسیم n ضلعیهای منتظم را به ازای

$$n = ۳,\ ۴,\ ۵,\ ۶,\ ۸,\ ۱۰,\ ۱۲,\ ۱۵,\ ۱۶$$

می‌دانستند. (چندضلعی منتظم[۴] است اگر جمیع اضلاعش دارای یک طول و جمیع زاویه‌های داخلیش برابر باشند.)

آنچه که *گاوس* نوزده ساله اثبات کرد این بود که یک چندضلعی منتظم با n ضلع را می‌توان تنها با استفاده از خط‌کش و پرگار رسم کرد اگر و تنها اگر، $n = ۲^k$ به ازای عدد k ای یا

$$n = ۲^k p_۱ \; p_۲ \; \dots \; p_r \qquad (\text{به‌ازای } k \text{ ای})$$

که در آن $P_۱$، $P_۲$، ...، P_r اولهای فرمای متمایزند. در حالت خاص، به ازای هر اول فرمای P می‌توانیم چندضلعی منتظمی با P ضلع رسم کنیم. به‌ازای اولین اول فرما، $F_۰ = ۳$، مثلث متساوی‌الاضلاع را به دست می‌آوریم، که رسمش آسان است، و به ازای بعدی، $F_۱ = ۵$ پنج ضلعی منتظم را حاصل می‌کنیم. از آنجا که $F_۲ = ۱۷$ نیز اول فرماست، دستاورد گاوس نشان می‌دهد که ۱۷ضلعی منتظم را نیز می‌توان با استفاده از خط‌کش و پرگار رسم کرد. این دستاورد اولین (و تنها) پیشرفت در مورد رسم چندضلعیهای منتظم از زمان خود یونانیها بود، و گاوس از کشفش بقدری سرافراز گردید که بر این شد که بر سنگ قبرش یک ۱۷ ضلعی منتظم نقشه کنند. گرچه این تقاضا هیچگاه به انجام نرسید، اما چنین چندضلعی‌ای بر گوشه‌ای از یادمانی که به یاد وی در مولدش، برونسویک، بنا شد، نقش شده است.

اعداد تام

عدد ۶، همان‌گونه که فیثاغورسیان (پیروان فیثاغورس[۵]، ریاضیدان قرن ششم ق. م.) توجه کرده بودند، ویژگی نسبتاً مخصوصی دارد. این عدد برابر مجموع مقسوم‌علیه‌های خود (غیر از خودش) است:

$$۶ = ۱ + ۲ + ۳$$

عدد بعد از ۶، دارای این ویژگی، ۲۸ است. تنها اعداد شمارندهٔ ۲۸ عبارت‌اند از ۱، ۲، ۴، ۷، ۱۴، و خود ۲۸، و

$$۲۸ = ۱ + ۲ + ۴ + ۷ + ۱۴$$

فیثاغورسیان این عددها را *اعداد تام*[۶] می‌نامیدند.

نیکوماخوس[۷] ریاضیدان یونانی در Introduction Arithmeticae خود در قرن اول میلادی فهرست چهار عدد تام شناخته شده (بعد از ۶ و ۲۸) را به صورت ۴۹۶، و بعد از آن ۸۱۲۸ آورده است. پس از این سند دو حدس زیر زده شد: n امین عدد تام دارای n رقم است، و اعداد تام متناوباً به ۶ و ۸ ختم می‌شوند. اما هر دو حدس غلط بودند. مثلاً اعداد تام پنج رقمی وجود ندارند، و گذشته از این، گرچه پنجمین عدد تام یعنی، ۳۳۵۵۰۳۳۶، به ۶ ختم می‌شود، ششمین عدد تام که ۸۵۸۹۸۶۹۰۵۶ است، نیز چنین است. (اما این مطلب که هر عدد تام به ۶ یا ۸ ختم می‌شود راست است. این موضوع می‌تواند مستقیماً به اثبات رسد، و به این مطلب که در واقع کدام اعداد تام‌اند بستگی ندارد.)

اقلیدس در کتاب XI *مقدمات*[۸] اش، در حدود ۳۵۰ ـ ۳۰۰ ق.م. ثابت کرد اگر $۲^n - ۱$ اول باشد، عدد $۲^{n-۱}(۲^n - ۱)$ تام است. دو هزار سال بعد، *اویلر* نشان داد هر عدد تام زوج از این نوع است، و به این ترتیب رابطه‌ای نزدیک بین اولهای مرسن و اعداد تام مشخص شد، که بلافاصله دلالت بر این می‌کند که در حال حاضر دقیقاً سی عدد تام زوج شناخته شده موجودند. در واقع اعداد تام فردی شناخته نشده‌اند، و حدس زده‌اند که جمیع عددهای تام ضرورتاً زوج‌اند. اگر این حدس به اثبات نرسیده مدارکی چند به سود آن جمع آورده شده است. مشخص شده است هر عدد تام فرد، در صورت وجود، باید بزرگتر از $۱۰^{۱۰۰}$ و دست کم ۱۱ عامل اول متمایز داشته باشد. از طرف دیگر، شخص، در صورتی که تاریخ را در این مورد راهنما به حساب آوریم، باید در مورد حدس زدن دربارهٔ اعداد تام محتاط باشد. *پیتر بارلو*[۹] در ۱۸۱۱ در کتاب *Theory of Numbers* اش از $۲^{۳۰}(۲^{۳۱} - ۱)$، هشتمین عدد تام، عددی ۱۹ رقمی، که در ۱۷۷۲ توسط *اویلر* کشف شده بود چنین نوشت: «[این عدد] بزرگترین عددی است که در زمانه کشف خواهد شد؛ زیرا از آنجا که این اعداد بی‌آنکه سودمند باشند صرفاً شگفت‌انگیزند، احتمال نمی‌رود کسی دیگر سعی در یافتن عددی بعد از آن بکند.»

هر چند به نظر می‌رسد *بارلو* در مورد صرفاً شگفت‌انگیز بودن اعداد تام حق داشته باشد، وی آشکارا جذابیت شگفتیها

را، آن‌گونه که بخش اول این فصل به کفایت توضیح می‌دهد، دست‌کم گرفته است. و شک نیست که اعداد تام بسیار شگفت‌انگیزند. به عنوان نمونه، هر عدد تام (زوج) مثلثی[10] است؛ که بدین معنی است که آن را می‌توان توسط تعدادی مهره نمایش داد که برای ساختن مثلثی متساوی‌الاضلاع مرتب شده‌اند (که هم‌ارز به صورت $\frac{۱}{۲}n(n+۱)$ بودن، به‌ازای عدد n ی، است). واقعیت دیگر: اگر عدد تام غیر از ۶ ی را در نظر گرفته تمام ارقامش را با هم جمع کنیم، عددی که به دست می‌آوریم یکی بیش از مضربی از ۹ خواهد بود. مرتبط با این مطلب این دستاورد است که ریشهٔ رقمی[11] هر عدد تام ۱ است. (برای به دست آوردن ریشهٔ رقمی یک عدد جمیع ارقام آن عدد را جمع کرده، سپس جمیع ارقام عدد حاصل را جمع می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا به یک عدد تک رقمی برسیم.)

باز هم، هر عدد تام مجموع مکعبات فرد متوالی است. به عنوان نمونه:

$$۲۸ = ۱^{۳} + ۳^{۳}$$

$$۴۹۶ = ۱^{۳} + ۳^{۳} + ۵^{۳} + ۷^{۳}$$

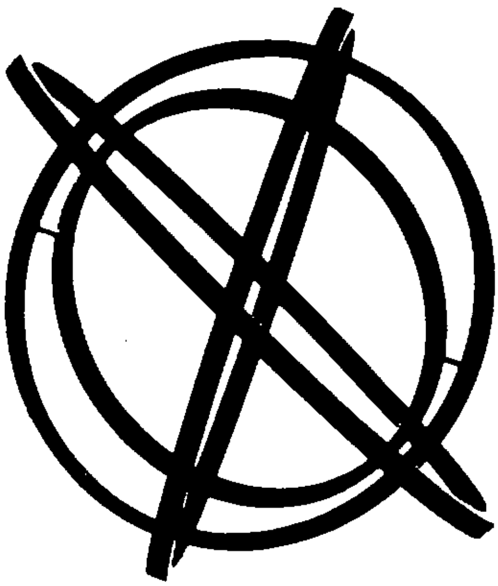
باز هم: اگر n تام باشد، مجموع معکوسهای جمیع مقسوم‌علیه‌های n همواره برابر ۲ است. به عنوان نمونه، ۶ دارای مقسوم‌علیه‌های ۱، ۲، ۳، ۶ است، و

$$\frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۶} = ۲$$

در واقع، در جستجوی این اعداد «شگفت» که، علی‌رغم ادعای *بارلو* در مورد بی‌فایده بودنشان، محاسبهٔ آنها شأن قضاوت در مورد اندازه گرفتن توان کامپیوترها را به دست آورده، کوشش بسیار به کار رفته است. به عنوان نمونه، عدد مرسن $M_{۸۱۹۱}$، اولین عدد در گسستن زنجیرهٔ اولهای مرسن منجر شونده به اولهای مرسن، را در نظر می‌گیریم (پیشین را ملاحظه کنید). با استفاده از آزمون *لوکاس ـ لمر* اثبات این که این عدد ۲۴۶۶ رقمی اول نیست (و در نتیجه عددی تام را به دست نمی‌دهد)، زمانی که اولین بار بر کامپیوتر ILLIAC – I در ۱۹۵۳ انجام شد، ۱۰۰ ساعت زمان گرفت. طی سالیان زمان محاسبهٔ آن به گونهٔ چشمگیری کم شد: ۵۰۲ ساعت بر IBM ۷۰۹۰، ۴۹ دقیقه بر ILLIAC – II، ۳۰۱ دقیقه بر IBM ۳۶۰–۹۱، و ۱۰ ثانیه بر CRAY – ۱..

❑ یادداشتها

1– Brunswick
2 – Caroline College
3– Disquisitiones Arithmeticae
4 – regular
5 – Pythagoras
6 – Perfect numbers
7 – Nicomachus
8 – Elements
9 – Peter Barlow
10– triangular
11– digital root



حل مسألهٔ مسابقه‌ای برهان ۱۹

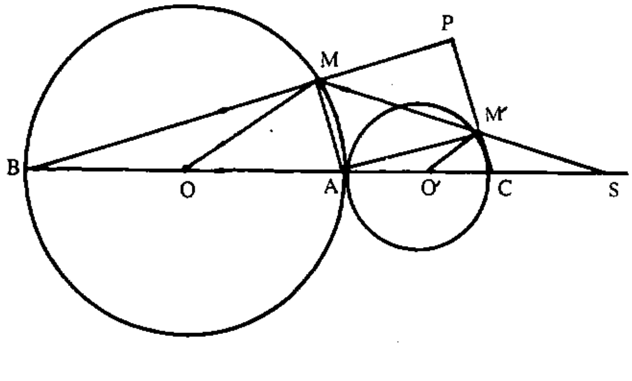
حل از آقای محمد امین سرایداری دانش‌آموز سال سوم دبیرستان شاهد سنندج

۱. چون $O'M' \parallel OM$ است، دو مثلث SOM و $SO'M'$ متشابه‌اند، بنابراین :

$$\frac{SO'}{SO}=\frac{O'M'}{OM}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow$$

$$\frac{SO-OO'}{SO}=\frac{۱}{۲}\ ,\ OO'=R+R'=۴+۲=۶\Rightarrow$$

$$\frac{SO-۶}{SO}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow SO=۱۲cm$$



چون $\frac{SO'}{SO}=\frac{۱}{۲}$ و دو نقطهٔ O و O' ثابتند، پس S نقطهٔ ثابتی است که پاره خط OO' را به نسبت نقصانی $\frac{۱}{۲}$ تقسیم می‌کند.

۲. چهار ضلعی $AMPM'$ مستطیل است. زیرا متوازی‌الاضلاعی است که زاویه‌هایش قائمه‌اند.

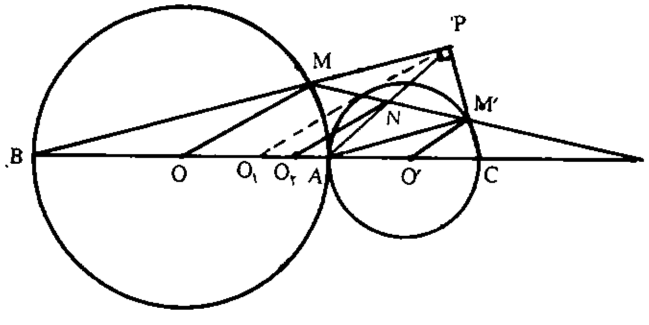
$A\hat{O}M=C\hat{O}'M'\Rightarrow M\hat{A}O=M'\hat{C}O'$,

$O\hat{M}B=O'\hat{M}'A\Rightarrow AM\parallel M'P$, $AM'\parallel MP$,

$A\hat{M}B=۹۰^\circ\Rightarrow A\hat{M}P=۹۰^\circ$

۳. چون $B\hat{P}C=۹۰^\circ$ و $BC=۱۲cm$ پاره خط ثابتی است، پس مکان هندسی نقطهٔ P دایره‌ای به قطر BC است. مرکز این دایره نقطه $O_۱$ وسط پاره خط BC و شعاع آن $R=۶cm$ است. برای تعیین مکان هندسی نقطهٔ N از N خطی موازی شعاعهای OM و $O'M'$ رسم می‌کنیم تا OO' را در نقطهٔ $O_۲$ قطع کند. در ذوزنقه $OMM'O'$، پاره خط میانه‌ای $NO_۲$ برابر است با :

$$NO_۲=\frac{MO+M'O'}{۲}=\frac{۴+۲}{۲}=۳cm$$



و چون O_2 وسط پاره خط OO' نقطهٔ ثابتی است، پس مکان هندسی نقطهٔ N دایره‌ای به مرکز نقطهٔ O_2 و به شعاع ۳ سانتی‌متر است.

۴. اگر $A\hat{O}M = ۶۰^\circ$ باشد، مثلث AOM متساوی‌الاضلاع و از آن جا : $AM = C_6 = R = ۴$ و در مثلث متساوی‌الساقین $AO'M'$، $A\hat{O'}M' = ۱۲۰^\circ$ است. بنابراین بنا به ویژگی مثلثی که زاویهٔ ۱۲۰° دارد، خواهیم داشت :

$$AM'^2 = O'A^2 + O'M'^2 + O'A.O'M' \Rightarrow$$
$$AM'^2 = ۴+۴+۲\times۲ = ۱۲ \Rightarrow AM' = ۲\sqrt{۳}$$

بنابراین اندازهٔ قطر مستطیل برابر است با :

$$AP = MM' = \sqrt{AM^2 + AM'^2} = \sqrt{۱۶+۱۲} = \sqrt{۲۸}$$
$$\Rightarrow MM' = ۲\sqrt{۷}$$

و مساحت مستطیل برابر است با :

$$S_{AMPM'} = AM.AM' = ۴\times۲\sqrt{۳} = ۸\sqrt{۳}cm^2$$

اسامی کسانی که حل کامل یا حل درست بخشی از مسألهٔ مسابقه‌ای برهان ۱۹ را فرستاده‌اند:

۱. خانم صدیقهٔ رضایی دانشجوی رشتهٔ زیست‌شناسی دانشگاه تبریز.

۲. خانم معصومهٔ خلخالی دانش‌آموز دوم دبیرستان فرزانگان کرج

۳. خانم سیده حبیبهٔ تابعی از استهبان

۴. خانم فتانه مرشد سلوک از اراک.

۵. خانم اعظم حقیقی دانش‌آموز سوم دبیرستان از مبارکهٔ اصفهان

۶. آقای هومن عرفانیان مزین دانش‌آموز ترم ۴ نظام جدید از منطقه ۱۰ تهران.

۷. آقای رضا سعدآبادی از نیشابور

۸. آقای محسن اجوری دانش‌آموز سوم ریاضی فیزیک از تهران.

۹. آقای محمد نجم‌زاده دانش‌آموز سال دوم دبیرستان علامه حلی اراک

۱۰. آقای سیروس نارنجی دانش‌آموز دوم دبیرستان شهید مصطفی خمینی از تبریز.

۱۱. آقای فرید نورآبادی دانش‌آموز دوم دبیرستان از مرند.

۱۲. آقای نعمت الله بسقر دانش‌آموز سال سوم ریاضی فیزیک از آق قلا، گرگان.

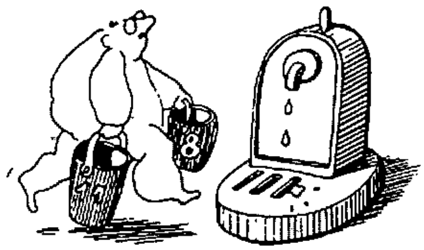
۱۳. آقای امیرامیدوار دانش‌آموز دبیرستان نمونهٔ دکتر حسابی از آباده.

۱۴. آقای البرز فراهانی از اراک.

۱۵. آقای نیما حجازی الحسینی دانش‌آموز سوم دبیرستان علامهٔ حلی تهران

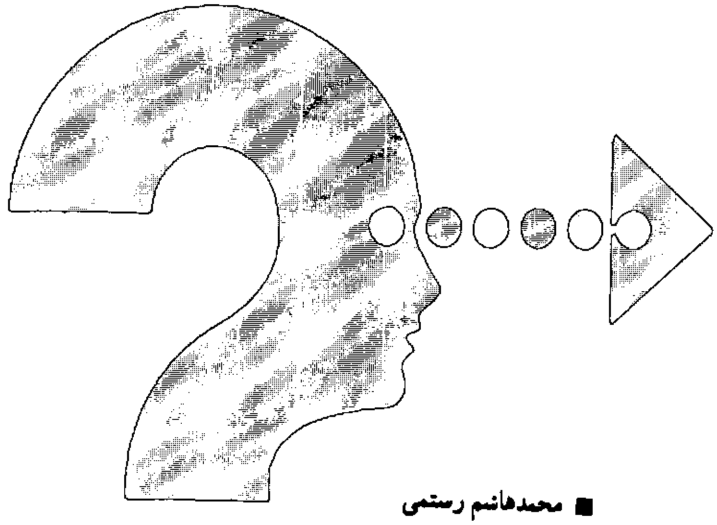
۱۶ ـ پوریا ولی، سال سوم ریاضی فیزیک (دبیرستان سازمان انرژی اتمی ایران)

تفریح اندیشه ۷



در نزدیکی شیر آب مهرداد دو سطل خالی دارد که گنجایش یکی ۸ لیتر و گنجایش دیگری ۱۱ لیتر است. او می‌خواهد کاری کند که مقدار آب داخل یکی از سطلها، دو برابر آب سطل دیگر باشد. بهترین روش برای انجام این کار کدام است؟

جواب در صفحهٔ ۸۸



مسائل برای حل

■ محمدهاشم رستمی
■ احمد قندهاری
■ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
■ حمیدرضا امیری
■ حسین ابراهیم‌زادهٔ قلزم

مسأله‌های ریاضیات ۱

۱ ــ با توجه به تعریف مجموعه‌های A و B و C، حاصل $(A\cup B)\cap C$ را بنویسید.

$$=\{x|x\in\mathbb{Z}\ ,\ -1\le x<6\}$$

$$B=\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ x\ge 1\}$$

$$C=\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ x\le 5\}$$

۲ ــ اگر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ $(k+2)$ عضوی ۹۶ واحد بیش از همهٔ زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ k عضوی باشد، k را بیابید.

۳ ــ حاصل عبارات زیر را به کمک اتحادها بیابید.

۱) $(a^3-2)(a^3+2)(a^{12}+4a^6+16)$

۲) $(2x-y)^3(y^2+4x^2)^3(2x+y)^3$

۴ ــ عبارتهای زیر را تجزیه کنید.

۱) $(a+b)^4+16$

۲) $x^2+5y+x-25y^2$

۵ ــ q و p را چنان تعیین کنید که باقیماندهٔ x^4+px^2+qx+2 بر x^2-2x+2 برابر $7x+4$ باشد.

۶ ــ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک $x^{45}+1$ و $x^{15}+1$ را تعیین کنید.

۷ ــ حاصل عبارت

$$\frac{p-a}{(p-q)(p-r)}+\frac{q-a}{(q-r)(q-p)}+\frac{r-a}{(r-p)(r-q)}$$

را بیابید.

مسأله‌های ریاضیات ۳

۱ ــ مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\frac{x^3-4x^2+5x}{(x^2+1)(x-1)}\ge 0$ را بیابید.

۲ ــ عبارت $p(x)=\frac{1}{x-4}+\sqrt{4-x^2}+\sqrt{x^2-4}$ به‌ازای چه مقادیری از x تعریف شده است.

۳ ــ معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\frac{4x-1}{2x+1}-\frac{2x-1}{2x-2}=\frac{2x+3}{4x^2-2x-2}$$

۴ ــ دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases}4^{3x-3y}=32\\9^{3x+3y}=243\end{cases}$$

۵ ــ معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\sqrt{x-2}=\sqrt{2x-3}-1$$

۶ ــ اگر $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & x\ge 2\\x+3 & x<2\end{cases}$ و $g(x)=x+4$، $f(g(0))$ و $g(f(-1))$ را حساب کنید.

۷ ـ اگر $A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ و $f(x)=x^2-3x$، حاصل $f(-A)+f(A)$ را حساب کنید.

۸ ـ آیا تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^5+1}{x^5-1}$ معکوس‌پذیر است؟ درصورتی که f معکوس‌پذیر است، ضابطهٔ تابع معکوس (f^{-1}) را بیابید.

۹ ـ در صورتی که $f(x)=\frac{x}{x+1}$ و $(fog)(x)=2x$، ضابطهٔ تابع g را بیابید.

۱۰ ـ هرگاه مبدأ مختصات به نقطهٔ $(-3,4)$ انتقال یابد، معادلهٔ جدید خط $2x-y=5$ را بنویسید.

مسأله‌های جبر و احتمال
سال سوم ریاضی

۱ ـ ثابت کنید، هرگاه اعداد مجموعهٔ $A=\{a_1,a_2,\dots,a_{n+1}\}$ (a_iها اعداد صحیح هستند) را بر n تقسیم کنیم، لااقل دو عدد از این مجموعه باقی‌مانده‌های یکسان خواهند داشت.

۲ ـ ثابت کنید، اگر $X\subseteq A$ و $X\subseteq A'$ آنگاه $X=\varnothing$ و اگر $A\subseteq x$ و $A\subseteq X'$ آنگاه $X=U$.

۳ ـ ثابت کنید، برای هر چهار مجموعهٔ دلخواه رابطهٔ زیر برقرار است:

$(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$

۴ ـ رابطهٔ R روی R^2 به‌صورت $(x,y)R(z,t)\Leftrightarrow x^2+y^2=z^2+t^2$ تعریف شده است، آیا این رابطه یک رابطهٔ هم‌ارزی است؟ در این صورت شکل کلاسهای هم‌ارزی این رابطه به چه صورتی است؟

۵ ـ بهزاد و ۸ نفر دیگر به‌طور تصادفی در یک ردیف می‌نشینند، احتمال آنکه بهزاد در مکان وسط نشسته باشد چقدر است؟

۶ ـ یک تاس طوری ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد زوج ۳ برابر روشدنِ هر عدد فرد است. اگر این تاس را بیاندازیم احتمال آنکه عدد حاصل کوچکتر از ۵ باشد، چقدر است؟

۷ ـ دو تاس را با هم می‌ریزیم و این عمل را ۶ بار تکرار می‌کنیم، احتمال آنکه دقیقاً ۴ بار مجموعِ دو تاس ۵ باشد چقدر است؟

۸ ـ نقطه‌ای را به تصادف از داخلِ سطح مربع $[0,2]\times[0,2]$ انتخاب می‌کنیم احتمال آنکه مختصات این نقطه در رابطه‌های $x>\frac{1}{2}$ و $y\geq\frac{1}{4}$ صدق کند، چقدر است؟

۹ ـ اگر $z=(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$ در این صورت حاصل Z^{1376} را محاسبه کنید.

مسأله‌های هندسهٔ تحلیلی
پیش‌دانشگاهی

۱ ـ الف. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که از مبدأ مختصات به فاصلهٔ $\sqrt{6}$ واقع است.

ب. مقدار a را چنان تعیین کنید که نقطه $A(a\ ,2a-1\ ,\ a+1)$ روی مکان هندسی فوق باشد.

۲ ـ اگر $a=i+2j-k$ و $b=-3i+j+2k$ باشند، $|3a-2b|$ را تعیین کنید.

۳ ـ اگر $a=(2,3,-1)$ و $b=2i-3k$ باشند، اندازهٔ جبری تصویر بردار b روی بردار a را به‌دست آورید.

۴ ـ مقدار m را چنان بیابید که زاویهٔ بین دو خط $D:\frac{x-2}{3}=\frac{y}{m}=\frac{z+1}{2}$ و $D':\begin{cases}x=t+1\\ y=-t\\ z=2t+3\end{cases}$ برابر 60° باشد.

۵ ـ معادله‌های متقارن قرینه خط $D:2x+1=y-2=-3z+1$ نسبت به محور xها را به‌دست آورید.

۶ ـ فاصلهٔ نقطهٔ $P(-1,0,2)$ را از خط Δ که از نقطهٔ $N(1,2,1)$ به موازات بردار $L=(3,2,1)$ رسم می‌شود، به‌دست آورید.

۷ ـ معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که در نقطه‌ای به طول ۲ برخط $D:\begin{cases}x=t-1\\ y=2t+1\\ z=-t+2\end{cases}$ عمود است.

مسأله‌های جبر خطی پیش‌دانشگاهی

۱ ــ در فضای برداری چندجمله‌ایهای نابیشتر از درجهٔ ۳ ثابت کنید بردارهای $(x^{۳}+x+۱)$ و $(x^{۲}+۲x-۱)$ و $(x+۲)$ و (x) مستقل خطی هستند.

۲ ــ اگر $V=\{v_{۱}, v_{۲}, v_{۳}\}$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}^{۳}$ باشد، ثابت کنید هر عضو $\mathbb{R}^{۳}$ را می‌توان به‌صورت **منحصر بفردی** برحسب ترکیب خطیِ اعضای V نوشت.

۳ ــ هسته و بُعد تصویر نگاشت خطی f با ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۰ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ را مشخص کرده و بررسی کنید، این نگاشت یک‌به‌یک یاپوشا است یا خیر.

۴ ــ اگر f یک نگاشت خطی از $\mathbb{R}^{۲}$ به $\mathbb{R}^{۲}$ و $f(۱,۰)=(۲,-۱)$ و $f(۰,۱)=(۱,۲)$ در این صورت حاصلِ $f(۳,۴)$ را به دست آورید.

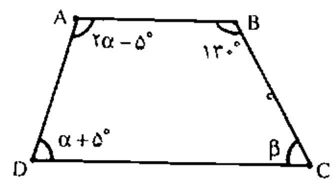
۵ ــ با استفاده از ویژگیهای دترمینان و بدون بسط ثابت کنید :

$$\begin{vmatrix} bc & ۱ & a \\ ac & ۱ & b \\ ab & ۱ & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & a & a^{۲} \\ ۱ & b & b^{۲} \\ ۱ & c & c^{۲} \end{vmatrix}$$

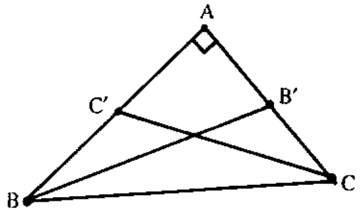
۶ ــ مقادیر ویژه و امتدادهای ویژهٔ نگاشت f با ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۲ & -۲ \end{bmatrix}$ را به‌دست آورید.

مسأله‌های هندسهٔ ۱

۱ ــ با توجه به ذوزنقه ABCD (شکل بالا)، اندازهٔ α و β و زاویه‌های این ذوزنقه را تعیین کنید.

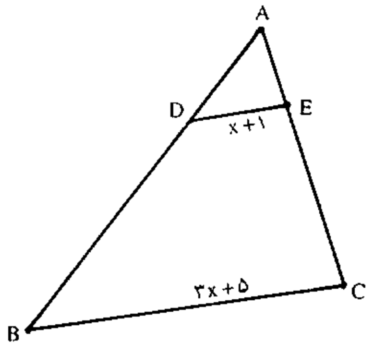


۲ ــ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC$(\hat{A}=۹۰^{\circ})$ اندازهٔ میانه‌های نظیر دو ضلع زاویهٔ قائمه $BB'=۲\sqrt{۷۳}$ و $CC'=۴\sqrt{۱۳}$ است. اندازهٔ وتر این مثلث را تعیین کنید.



۳ ــ مساحت شش ضلعی منتظمی برابر $۹۶\sqrt{۳}$ سانتی‌متر مربع است. اندازهٔ محیط مثلث متساوی‌الاضلاعی را که معادل این شش ضلعی منتظم است تعیین کنید.

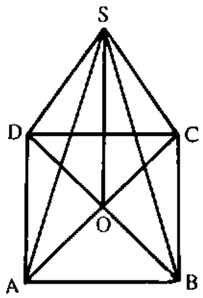
۴ ــ در مثلث ABC، DE‖BC و ۵AD = ۲DB است. اگر $DE=x+۱$ و $BC=۳x+۵$ باشد، اندازهٔ ضلع BC را بیابید.



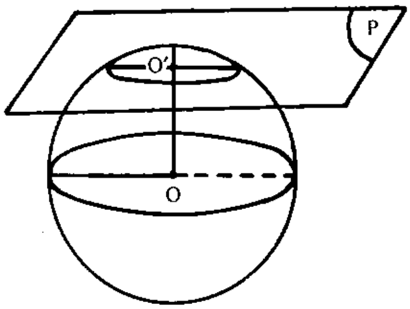
۵ ــ مساحت یک پنج ضلعی منتظم ۱۶ برابر مساحت پنج ضلعی منتظم دیگر است. نسبت ضلعهای این دو پنج ضلعی منتظم را تعیین کنید.

۶ ــ قاعدهٔ متوازی‌السطوح مایلی مربعی به ضلع $۴(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})$ است و دو وجه جانبی آن نیز مربع می‌باشند. اگر یالهای این متوازی‌السطوح با صفحهٔ قاعده زاویهٔ ۷۵° بسازند، اندازهٔ حجم متوازی‌السطوح را پیدا کنید.

۷ ــ هرم منتظم مربع‌القاعدهٔ SABCD داده شده است. اندازهٔ قطر قاعدهٔ این هرم برابر ۱۲ و اندازهٔ هر یال آن مساوی ۱۰ است. اندازهٔ حجم این هرم را تعیین کنید.



۸ ــ فصل مشترک یک صفحه با یک کره، دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی‌متر است. اگر فاصلهٔ مرکز کره از این صفحه برابر ۱۲ سانتی‌متر باشد، اندازهٔ حجم کره را به دست آورید.



مسأله‌های ریاضی ۵

۱ ــ اگر $A=\{x|x\leq ۳\}$ ، $B=\{x|-۴\leq x\leq ۶\}$ ، $C=\{x|x\geq ۱\}$ و $D=\{x|x\leq ۱\}$ باشد، فاصله‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $(A\cap C)\cup(B\cup D)$

ب) $(A\cup B)\cap(C\cup D)$

۲ ــ اگر $f(x)=ax+b$ و $g(x)=x^۲+۲x+۴$ باشد، مقدارهای a و b را چنان بیابید که $(fog)(x)+(gof)(x)=-۶x+۴$ باشد.

۳ ــ تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x^۳+ax\ , & x>۱ \\ bx+c\ , & x<۱ \\ \dfrac{ax+c}{bx+۲}\ , & x=۱ \end{cases}$ مفروض است.

مقدارهای a، b و c را چنان تعیین کنید که $\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۵$ و $\lim_{x\to ۱^-} f(x)=۳$ و $f(۱)=۱$ باشد.

۴ ــ هر یک از حدهای زیر را تعیین کنید :

الف) $\lim_{x\to ۷}\dfrac{x-۲-\sqrt{۲x+۱۱}}{\sqrt{x+۲}-۳}$

ب) $\lim_{x\to \frac{-\pi}{۸}}\dfrac{\sin(۴x+\frac{\pi}{۲})}{\frac{x}{۲}+\frac{\pi}{۱۶}}$

۵ ــ مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x^۲+۵x}$ را با استفاده از تعریف مشتق به‌دست آورید.

۶ ــ مشتق هر یک از تابعهای زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=\dfrac{(\sqrt{x}+۲)^۲(\sqrt{x}-۲)^۲}{x+\sqrt{x}}$

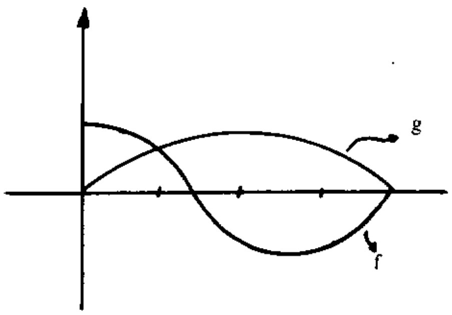
ب) $f(x)=\dfrac{۴\sin x\cos x\cos ۲x}{\cos^۲ ۲x-\sin^۲ ۲x}$

۷ ــ تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$ داده شده است. ضریبهای a، b و c را چنان بیابید که نمودار تغییرات تابع محور عرضها را در نقطه‌ای به عرض ۳- قطع کند و در ازای $x=۱$ دارای ماکزیمم یا می‌نیممی برابر ۴- باشد.

مسأله‌های حسابان ۱

مسأله (۱): تابع f با ضابطه $y=x-\sqrt{x-۲}$ با شرط $x\geq ۲$ مفروض است. برد تابع را به سه روش بیابید.

مسأله (۲): اگر نمودار دو تابع f و g به‌صورتهای زیر باشد آن‌گاه نمودار تابعهای $f+g$ و $f-g$ را رسم کنید.



مسأله (۳): به دو روش معادله درجه دوّمی با ضرایب گویا تشکیل دهید که یک ریشه آن $(۵-۲\sqrt{۳})$ باشد.

مسأله (۴) اگر $x \geq 0$ و $f(x)=x\sqrt{x}+3x+3\sqrt{x}$ آن‌گاه معادله تابع معکوس f را بیابید.

مسأله (۵): در تابع به معادله $f(x)=4x-1$ اگر $x \longrightarrow 1$ آن‌گاه $f(x) \longrightarrow 3$، چنانچه $|f(x)-3|<\frac{1}{100}$، آن‌گاه x در چه حدودی تغییر می‌کند.

مسأله (۶): در تابع به معادله $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ ، $c \neq 0$ اگر $O'\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$ مرکز تقارن منحنی تابع باشد و منحنی تابع محور yها را در نقطه‌ای به عرض (۱-) قطع کند، معادله تابع را مشخص کنید. سپس نمودار تابع را رسم کنید و معادلات خط مماس و خط قائم بر منحنی تابع را در نقطه تقاطع آن با محور عرضها بنویسید.

مسأله‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)

مسأله (۱): اولاً ثابت کنید (n^2-2n) وقتی $n \to +\infty$، حد متناهی ندارد. ثانیاً ثابت کنید.

$$n \in N \left\{ \lim_{n\to\infty}(n^2-2n)=+\infty \right.$$

مسأله (۲): نشان دهید سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{1-4k^2}$ همگرا است.

مسأله (۳): با استفاده از تعریف حد ثابت کنید

$$\left\{ \lim_{n\to 1}\frac{x^2+1}{x^2-4x+5}=1 \right.$$

مسأله (۴): اگر $-\infty<t<\infty$ و

$$M\left|\begin{matrix} x=\dfrac{t-2}{t(t-1)} \\ y=\dfrac{t+2}{t(t+1)} \end{matrix}\right.$$

همه مجانبهای منحنی مکان نقطه M را بیابید.

مسأله (۵): تابع f به معادله $y=f(x)=x^3+x$ مفروض است. معادلهٔ خط قائم بر منحنی تابع f^{-1} (معکوسِ تابع f) را در نقطه‌ای به طول (۱۰) واقع بر منحنی تابع f^{-1} بنویسید.

مسأله (۶): فرض کنید هزینه چاپ x کارت ویزیت $C(x)=2000+1/2x+30\sqrt[3]{x^2}$ تومان باشد. هزینه متوسط و هزینه نهایی برای ۳۳۷۵ کارت ویزیت چقدر است؟

مسأله (۷): معادله $\sin x-\operatorname{tg}x=0$ چند ریشه حقیقی متمایز دارد؟

ادب ریاضی

روشِ اصلِ موضوعی در ریاضیات امروز گسترش و توفیق زیادی پیدا کرده است.

سرچشمهٔ این روش را باید در کشف هندسهٔ نااقلیدسی لُباچفسکی دانست.

این روش، در تماس و برخوردی که با دیگر اندیشه‌ها داشته است، نه تنها روشهای تازه‌ای را به وجود آورده است، بلکه ضمناً موجب پیدایش شاخه‌های تازه‌ای در اندیشهٔ فیزیکی و ریاضی شده است، یکی از نمونه‌های حاصل از این روش، فضای هیلبرتی است که در مکانیک کوانتایی مورد استفاده قرار گرفته است.

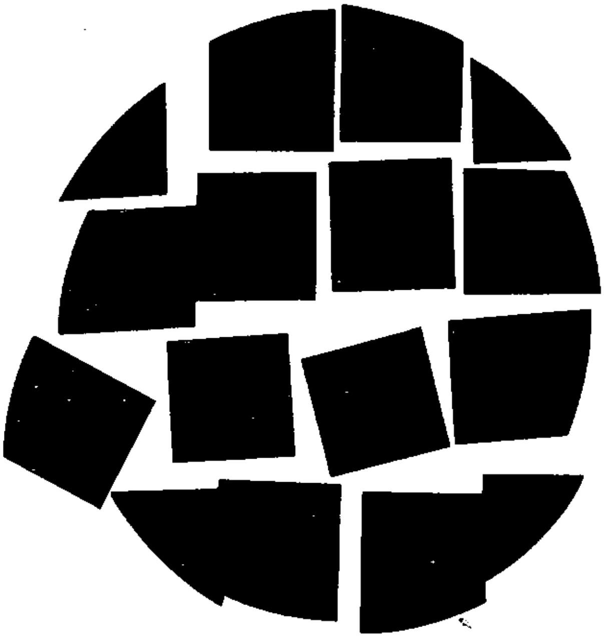
پیشرفت روش اصل موضوعی را می‌توان به دو مرحله تقسیم کرد:

مرحلهٔ نخست از لُباچفسکی آغاز می‌شود و با کوششهای هیلبرت دربارهٔ اصل موضوعی کردن ریاضیات پایان می‌یابد و مرحلهٔ دوم از زمان هیلبرت تا امروز ادامه دارد. این مرحله عبارت است از تلفیق مضامین هندسی با آموزشی که همراه با آن تکامل یافته است و به منطق صوری یا منطق ریاضی مشهور شده است.

* * *

*از کتاب: هندسه در گذشته و حال

حل مسایل برهان شماره ۲۰



حل مسایل امتحانی ریاضی (۱) پایان ترم

۱ـ $M=\{۱,۳,۵,۷,۹,۱۲\}$

الف) $\{۱,۳,۵,۷,۹\}$ ب) $\{۱۲\}$ ج) $\{۳,۹,۱۲\}$

۲ـ الف) $A-\varnothing=A$ ب) $A-A=\varnothing$

۳ـ الف) $۰/۰۰۰۰۵=۵\times۱۰^{-۵}$

ب) $۰/۰۰۰۷۹۴۲=۷/۹۴۲\times۱۰^{-۴}$

۴ـ الف) $(۱۴)^{۲r+۵}=۱۴^{۲۵}\Rightarrow$

$۲r+۵=۲۵\Rightarrow۲r=۲۰\Rightarrow\boxed{r=۱۰}$

ب) $x^{۱۰}.x^{۱۸}=x^{۳۲+r}\Rightarrow$

$x^{۲۸}=x^{۳۲+r}\Rightarrow۲۸=۳۲+r$

$\Rightarrow r=۲۸-۳۲=-۴\Rightarrow\boxed{r=-۴}$

۵ـ الف) $(۳x^۲y^۲)(-۷xy)+(xy)(-۵x^۲y^۲)$

$=-۲۱x^۳y^۳-۵x^۳y^۳$

$=-۲۶x^۳y^۳$

ب)

$(x^۲-۳x+۵)+(۲x^۲+۵x-۴)-(۳x^۲-۲x-۱)$

$=x^۲-۳x+۵+۲x^۲+۵x-۴-۳x^۲+۲x+۱$

$=۴x+۲$

۶ـ $x=۰/۶\overline{۵۴}\ ,\ ۱۰x=۶/\overline{۵۴}\ ,$

$۱۰۰۰x=۶۵۴/\overline{۵۴}\ ;\ ۱۰۰۰x-۱۰x=۶۵۴-۶$

$\Rightarrow۹۹۰x=۶۴۸\Rightarrow x=\frac{۶۴۸}{۹۹۰}=\frac{۳۲۴}{۴۹۵}$

۷ـ الف) $۹x^۲-۴ax+\frac{۴a^۲}{۹}$

ب) $۴x^۲+۴ax+a^۲$

۸ـ $x^۴+۳x^۳-۷x^۲+۲x+۱=x^۴-۴x^۲+۲x+۱$

$$\begin{array}{l|l}
x^۴-۴x^۲+۲x+۱ & x-۱ \\ \hline
\underline{-x^۴\mp x^۳} & x^۳+x^۲-۳x-۱ \\
x^۳-۴x^۲+۲x+۱ & \\
\underline{-x^۳\mp x^۲} & \\
-۳x^۲+۲x+۱ & \\
\underline{\mp۳x^۲\pm۳x} & \\
-x+۱ & \\
\underline{\mp x\pm۱} & \\
۰ &
\end{array}$$

۹ـ $x+y=p\ ,\ xy=q:$

$x^۳+y^۳=(x+y)^۳-۳xy(x+y)$

$x^۳+y^۳=p^۳-۳qp$

۱۰ـ با فرض $c(a-c)(a+c)\neq۰$ خواهیم داشت:

$$\frac{a^۲+ac}{a^۲c-c^۳}-\frac{a^۲-c^۲}{a^۲c+۲ac^۲+c^۳}+\frac{۲c}{c^۲-a^۲}-\frac{۳}{a+c}=$$

$$\frac{a(a+c)}{c(a-c)(a+c)}-\frac{(a-c)(a+c)}{c(a+c)^۲}+$$

$$+\frac{۲c}{(c-a)(c+a)}-\frac{۳}{a+c}=$$

$$\underset{\text{با توجه به فرض}}{=}\frac{a}{c(a-c)}-\frac{a-c}{c(a+c)}-$$

$$\frac{۲c}{(a-c)(a+c)}-\frac{۳}{a+c}$$

$$=\frac{a(a+c)-(a-c)^۲-۲c^۲-۳c(a-c)}{c(a-c)(a+c)}$$

$$=\frac{a^۲+ac-a^۲+۲ac-c^۲-۲c^۲-۳ac+۳c^۲}{c(a-c)(a+c)}$$

$$=\frac{۰}{c(a^۲-c^۲)}=۰$$

۱۱ـ

الف)

$(a^n-b^۳)(a^n+b^۳)=(a^n)^۲-(b^۳)^۲=a^{۲n}-b^۶$

ب) $(x^۲y^۳-۲)^۳=(x^۲y^۳)^۳-۶(x^۲y^۳)^۲$

$+۱۲(x^۲y^۳)-۸$

$=x^۶y^۹-۶x^۴y^۶+۱۲x^۲y^۳-۸$

۱۲ـ حاصل عبارت را به A نشان می‌دهیم:

$A=(۱-\frac{۱}{۳})(۱+\frac{۱}{۹})(۱+\frac{۱}{۸۱})(۱+\frac{۱}{۶۵۶۱})$

دو طرف برابری بالا را در $(۱+\frac{۱}{۳})$ ضرب می‌کنیم:

$(۱+\frac{۱}{۳})A=(۱+\frac{۱}{۳})(۱-\frac{۱}{۳})(۱+\frac{۱}{۹})(۱+\frac{۱}{۸۱})(۱+\frac{۱}{۶۵۶۱})$

$\frac{۴}{۳}A=(۱-\frac{۱}{۹})(۱+\frac{۱}{۹})(۱+\frac{۱}{۸۱})(۱+\frac{۱}{۶۵۶۱})$

$=(۱-\frac{۱}{۸۱})(۱+\frac{۱}{۸۱})(۱+\frac{۱}{۶۵۶۱})$

$=(۱-\frac{۱}{۶۵۶۱})(۱+\frac{۱}{۶۵۶۱})$

$=۱-\frac{۱}{(۶۵۶۱)^۲}\Rightarrow\boxed{A=\frac{۳}{۴}(۱-\frac{۱}{(۶۵۶۱)^۲})}$

۱۳ـ الف) $x^۲-۸x+۱۲=(x-۲)(x-۶)$

ب) $x^۴y^۲-x^۲y^۴=x^۲y^۲(x^۲-y^۲)$

$=x^۲y^۲(x-y)(x+y)$

۱۴ـ $\begin{cases}A=۳x-۶y+۹z=۳(x-۲y+۳z)\\B=-x+y+۲z\\C=۲x+۳y-z\end{cases}$

$\frac{A}{۳}+۲B-C=\frac{۳(x-۲y+۳z)}{۳}$

$+۲(-x+y+۲z)-(۲x+۳y-z)$

$=x-۲y+۳z-۲x+۲y+۴z-۲x-۳y+z$

$=-۳x-۳y+۸z$

۱۵ـ با شرط $۱<a$ و گویا بودن عدد a، خواهیم داشت:

$۱<\frac{۲a}{a+۱}<a\Rightarrow\begin{cases}\frac{۲a}{a+۱}>۱\\\frac{۲a}{a+۱}<a\end{cases}\overset{(a>۱)}{\Longrightarrow}$

$\begin{cases}۲a>a+۱\\۲a<a^۲+a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>۱\\a<a^۲\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}a>۱\\a^۲-a>۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>۱\\a(a-۱)>۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>۱\\a>۰\end{cases}\Rightarrow a>۱$

(برقرار است)

حل مسایل امتحانی ریاضی (۲) پایان ترم

۱ـ $A(-1,2)\ ,\ B(3,4)\ ,\ C(x,0)$

$$AC=\sqrt{(x+1)^2+4}\ ;\ AC^2=(x+1)^2+4$$

$$BC=\sqrt{(x-3)^2+16}\ ;\ BC^2=(x-3)^2+16$$

با توجه به فرض $AC=BC$ ، خواهیم داشت :

$$AC^2=BC^2$$
$$(x+1)^2+4=(x-3)^2+16$$
$$\Rightarrow x^2+2x+1+4=x^2-6x+9+16$$
$$\Rightarrow 8x=20\Rightarrow x=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}\Rightarrow \boxed{x=2/5}$$
$$\Rightarrow C(2/5,0)$$

۲ـ اگر نقـاط $A\left|\begin{matrix}a+b\\3a-mb\end{matrix}\right.$ ، $B\left|\begin{matrix}ma-4b\\b-2a\end{matrix}\right.$ نسبت به نقطهٔ $M\left|\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\right.$ قرینهٔ یکدیگر باشند :

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}\Rightarrow -1=\frac{a+b+ma-4b}{2}$$
$$\Rightarrow\ (1+m)a-3b=-2$$

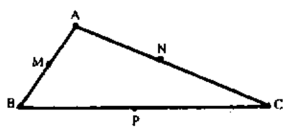
$$y_M=\frac{y_A+y_B}{2}\Rightarrow 1=\frac{3a-mb+b-2a}{2}$$
$$\Rightarrow a-(m-1)b=2$$

$$\begin{cases}(m+1)a-3b=-2\\ a-(m-1)b=2\end{cases}\quad \frac{m+1}{1}=\frac{-3}{-(m-1)}\Rightarrow m^2-1=3$$

$$\Rightarrow m^2=4\Rightarrow \boxed{m=\pm 2}$$

بنابراین به ازای $m=\pm 2$ دستگاه جواب ندارد و درنتیجه A و B نسبت به نقطهٔ M نمی‌توانند قرینهٔ یکدیگر باشند.

۳ـ نقاط $M\left|\begin{matrix}-2\\2\end{matrix}\right.$ ، $N\left|\begin{matrix}2\\-1\end{matrix}\right.$ ، $P\left|\begin{matrix}-1\\4\end{matrix}\right.$ وسط ضلعهای مثلث ABC هستند، بنابراین :



$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=-2\Rightarrow x_A+x_B=-4$$

$$x_N=\frac{x_A+x_C}{2}=2\Rightarrow x_A+x_C=4$$

$$x_P=\frac{x_B+x_C}{2}=-1\Rightarrow x_B+x_C=-2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_A+x_B=-2\\x_A+x_C=4\\x_B+x_C=-2\end{cases}\Rightarrow\ \begin{cases}x_B-x_C=-6\\x_B+x_C=-2\end{cases}\Rightarrow 2x_B=-8$$

$$\Rightarrow x_B=-4\ ,\ x_C=2\ ,\ x_A=2$$

به همین ترتیب :

$$y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=2\ \Rightarrow\ y_A+y_B=4$$
$$y_N=\frac{y_A+y_C}{2}=-1\Rightarrow y_A+y_C=-2$$
$$y_P=\frac{y_B+y_C}{2}=4\Rightarrow y_B+y_C=8$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y_A+y_B=4\\y_A+y_C=-2\\y_B+y_C=8\end{cases}\Rightarrow\ \begin{cases}y_B-y_C=6\\y_B+y_C=8\end{cases}\Rightarrow\ 2y_B=14$$

$$\Rightarrow y_B=7\ ,\ y_C=1\ ,\ y_A=-3$$

مختصات رأسهای مثلث ABC ، عبارتند از :

$$A(2,-3)\quad ,\quad B(-4,7)\quad ,\quad C(2,1)$$

مختصات G مرکز ثقل مثلث ABC چنین است :

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}=\frac{2-4+2}{3}=0$$

$$y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}=\frac{-3+7+1}{3}=\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow G(0,\frac{5}{3})$$

$$AG=\sqrt{4+\frac{196}{9}}=\frac{\sqrt{232}}{3}=\frac{2\sqrt{58}}{3}$$

$$BG=\sqrt{16+\frac{256}{9}}=4\sqrt{1+\frac{16}{9}}=\frac{20}{3}$$

$$CG=\sqrt{4+\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{40}}{3}=\frac{2\sqrt{10}}{3}$$

بنابراین مجموع فاصله‌های مرکز ثقل مثلث (محل تلاقی میانه‌ها) از رأسهای مثلث چنین است :

$$AG+BG+CG=\frac{2\sqrt{58}+20+2\sqrt{10}}{3}$$

۴ـ الف) ریشهٔ معادله‌ای که ریشه‌هایش ۵ واحد کمتر از ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x-2=0$ است را به y نشان می‌دهیم. در این صورت خواهیم داشت :

$$y=x-5\Rightarrow x=y+5$$
$$x=y+5\ :\ (y+5)^2-3(y+5)-2=0$$

$$\Rightarrow y^2+10y+25-3y-15-2=0\Rightarrow \boxed{y^2+7y+8=0}$$

ب)

$$y=\frac{-1}{x}\Rightarrow x=-\frac{1}{y}$$

$$x=-\frac{1}{y}\ :\ (-\frac{1}{y})^2-3(-\frac{1}{y})-2=0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{y^2}+\frac{3}{y}-2=0\Rightarrow -2y^2+3y+1=0$$
$$\Rightarrow \boxed{2y^2-3y-1=0}$$

ج)

$$y=x^2\Rightarrow x=\pm\sqrt{y}$$
$$x=\pm\sqrt{y}\ :\ (\pm\sqrt{y})^2-3(\pm\sqrt{y})-2=0$$
$$\Rightarrow \pm 3\sqrt{y}=y-2\Rightarrow 9y=y^2-4y+4$$
$$\Rightarrow \boxed{y^2-13y+4=0}$$

۵ـ الف) با شرایط زیر عبارت

$$P(x)=-x^2-(m+1)x+m$$

به ازای جمیع مقادیر x منفی است :

$$\begin{cases}\Delta=(m+1)^2+4m<0\\ a=-1<0\end{cases}\Rightarrow m^2+2m+1+4m<0$$

$$\Rightarrow m^2+6m+1<0$$
$$\Rightarrow -3-\sqrt{8}<m<-3+\sqrt{8}$$
$$\Rightarrow \boxed{-3-2\sqrt{2}<m<-3+2\sqrt{2}}$$

ب) معـادلهٔ $P(x)=0$ با شـرط $\Delta\geq 0$ ، دارای ریشهٔ حقیقی است :

$$\Delta=(m+1)^2+4m\geq 0\Rightarrow m^2+6m+1\geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{m\geq -3+2\sqrt{2}\ \text{یا}\ m\leq -3-2\sqrt{2}}$$

۶ـ دو طرف معـادلهٔ $x^2+x+1=0$ را در عبـارت $(x-1)$ که مخالف صفر فرض می‌شود ؛ ضرب می‌کنیم :

$$(x-1)(x^2+x+1)=0\Rightarrow x^3-1=0\Rightarrow x^3=1$$

بنابراین :

$$x_1^3=1\quad ,\quad x_2^3=1$$

در نتیجه، خواهیم داشت :

$$A=\frac{x_1}{x_2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}+\frac{x_2}{x_1}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}=\sqrt{\frac{x_1^3}{x_2^3}}+\sqrt{\frac{x_2^3}{x_1^3}}$$
$$\Rightarrow A=\sqrt{1}+\sqrt{1}=2\Rightarrow \boxed{A=2}$$

$$B=x_1^{3n+2}+x_2^{3n+2}+\frac{1}{x_1^{3n+2}}+\frac{1}{x_2^{3n+2}}$$
$$=x_1^{3n}.x_1^2+x_2^{3n}.x_2^2+\frac{1}{x_1^{3n}.x_1^2}+\frac{1}{x_2^{3n}.x_2^2}$$
$$=(x_1^3)^n.x_1^2+(x_2^3)^n.x_2^2+\frac{1}{(x_1^3)^n.x_1^2}+\frac{1}{(x_2^3)^n.x_2^2}$$
$$=x_1^2+x_2^2+\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$$

$$=(x_1^2+x_2^2)+\frac{x_1^2+x_2^2}{(x_1x_2)^2}=(x_1+x_2)^2$$

$$-2x_1x_2+\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$$

با توجه به $x_1+x_2=-1$ و $x_1x_2=1$ ، خواهیم داشت :

$$B=-1+\frac{-1}{1}=-2\Rightarrow \boxed{B=-2}$$

۷ ـ عبارت $P(x)$ وقتی به ازای مقادیر مختلف x ، عدد حقیقی است که داشته باشیم :

$$\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x(x^2-1)}\geq 0\\[2mm] \dfrac{x^2+1}{-x^3}\geq 0\end{cases}\Rightarrow -2\leq x<-1$$

۸ ـ می‌دانیم محور تقارن سهمی $y=ax^2+bx+c$ خط $x=\frac{-b}{2a}$ است. بنابراین :

$$x=\frac{-P^{75}}{4}=\frac{1}{2^{76}}\Rightarrow P^{75}=-\frac{2}{2^{75}}$$
$$\Rightarrow \boxed{P=-\frac{\sqrt[75]{2}}{2}}$$

۹ ـ با توجه به برابریهای زیر :

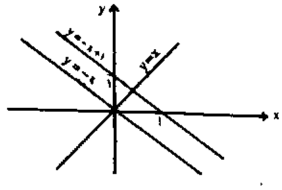
$$\sqrt{8}=2\sqrt{2}\ ,\ \sqrt[4]{4}=\sqrt{2}\ ,\ \sqrt[12]{64}=\sqrt{2}$$

خواهیم داشت :

$$\frac{1}{3\sqrt{8}+2\sqrt[4]{4}+2\sqrt[12]{64}+\sqrt[3]{2}-11\sqrt{2}}=$$
$$\frac{1}{6\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}-11\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}-2}\times\frac{\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{4}+4}{\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{4}+4}$$
$$=\frac{(\sqrt[3]{2}+\sqrt{2})(2\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}+4)}{-4}$$

۱۰ ـ الف) نمودار معـادلهٔ $(x^2-y^2)(x+y-1)=0$ چنین است :



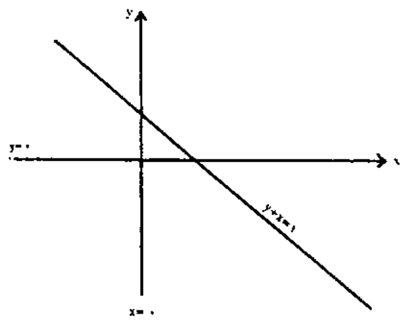
$x^2-y^2=0 \Rightarrow y=\pm x$

یا $x+y-1=0 \Rightarrow y=-x+1$

ب) نمودار معادلهٔ $x^2y^2+x^3y-x^2y=0$ چنین است:

$x^2y(y+x-1)=0 \Rightarrow x^2=0$ یا $y=0$ یا $y+x-1=0$

$\Rightarrow x=0$ یا $y=0$ یا $y+x=1$



۱۱ـ الف) طرف اول $=(\sin x+\cos x)(\tan x+\cot x)$

$=(\sin x+\cos x)(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x})$

$=(\sin x+\cos x)(\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x\sin x})$

$=(\sin x+\cos x)(\frac{1}{\cos x\sin x})$

$=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}=\frac{\sin x}{\sin x\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x\cos x}$

$=\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}$

$=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=$ طرف دوم

ب) با توجه به برابریهای زیر:

$\tan 135^\circ=\tan(180^\circ-45^\circ)=$
$\tan(-45^\circ)=-\tan 45^\circ=-1$
$\sin 330^\circ=\sin(360^\circ-30^\circ)=$
$\sin(-30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$
$\cos 240^\circ=\cos(180^\circ+60^\circ)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$
$\cot 225^\circ=\cot(180^\circ+45^\circ)=\cot(45^\circ)=1$
$\sin 210^\circ=\sin(180^\circ+30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$
$\cos 450^\circ=\cos(360^\circ+90^\circ)=\cos 90^\circ=0$
$\cot 135^\circ=\cot(180^\circ-45^\circ)=$
$\cot(-45^\circ)=-\cot 45^\circ=-1$
$\tan 225^\circ=\tan(180^\circ+45^\circ)=\tan 45^\circ=1$

خواهیم داشت:

$$\frac{4\tan 135^\circ+2\sin 330^\circ+\cos 240^\circ+5\cot 225^\circ}{20\sin 210^\circ+\cos 450^\circ-\cot 135^\circ+10\tan 225^\circ}$$

$$=\frac{4(-1)+2(-\frac{1}{2})+(-\frac{1}{2})+5}{20(-\frac{1}{2})+0-(-1)+10}=\frac{-4-1-\frac{1}{2}+5}{-10+1+10}=-\frac{1}{2}$$

۱۲ـ با استفاده از اتحاد $\sin^2 x=1-\cos^2 x$، می‌توان نوشت:

$\frac{\sin x}{1-\cos x}=\frac{1+\cos x}{\sin x} \quad (x\neq k\pi)$

بنابراین:

$(\frac{1+\cos x}{\sin x})^{2n-1}+3(\frac{1+\cos x}{\sin x})^{2n-1}=(\frac{1}{2})^{2n-3}$

$\Rightarrow 4(\frac{1+\cos x}{\sin x})^{2n-1}=(\frac{1}{2})^{2n-3}$

$\Rightarrow (\frac{1+\cos x}{\sin x})^{2n-1}=(\frac{1}{2})^{2n-1}$

$\Rightarrow \frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\cos x=\frac{1}{2}\sin x-1}$

۱۳ـ با استفاده از اتحاد $\sin^2 x+\cos^2 x=1$، خواهیم داشت:

$x=2\sin t-1 \Rightarrow (\frac{x+1}{2})^2=\sin^2 t$

و

$y=4\cos^2 t+1 \Rightarrow \frac{y-1}{4}=\cos^2 t$

$\sin^2 t+\cos^2 t=(\frac{x+1}{2})^2+\frac{y-1}{4}=1$

$\Rightarrow \frac{(x+1)^2}{4}+\frac{y-1}{4}=1 \Rightarrow \boxed{y=5-(x+1)^2}$

۱۴ـ سه عدد متوالی را به‌صورت $x+1$ ، x ، $x-1$، درنظر می‌گیریم. بنابراین:

$(x-1)x(x+1)=5(x-1+x+x+1)$

$x(x^2-1)=5(3x) \Rightarrow x(x^2-1)-15x=0$

$\Rightarrow x(x^2-1-15)=0 \Rightarrow x=0$ یا $x^2=16$

$\Rightarrow \boxed{x=0}$ یا $\boxed{x=\pm 4}$

مسأله دارای سه جواب است:

$(-1,0,1)$ یا $(3,4,5),(-5,-4,-3)$

۱۵ـ اگر انتهای کمان x در ناحیهٔ اول یا چهارم باشد tanx و cotx هردو مثبت هستند. از طرفی برای هر دو عدد مثبت a و b همیشه داریم:

$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ بنابراین با فرض $a=\tan x$ و $b=\cot x$ می‌توان نوشت:

$\frac{\tan x+\cot x}{2}\geq\sqrt{\tan x.\cot x}$

با توجه به اتحاد $\tan x.\cot x=1$، خواهیم داشت:

و درنتیجه: $\frac{\tan x+\cot x}{2}\geq\sqrt{1}$

$\tan x+\cot x\geq 2$

حل مسایل امتحانی ریاضی (۳) پایان ترم

۱ـ اگر M وسط AB باشد:

$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2\beta+\beta+3}{2}=\frac{3\beta+3}{2}$

$y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{\beta+\beta-4}{2}=\frac{2\beta-4}{2}=\beta-2$

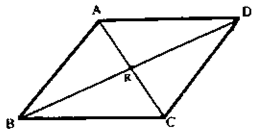
چون M روی خط $y=5$ است، پس:

$y_M=\beta-2=5 \Rightarrow \boxed{\beta=7}$:

$A(14,7)$ ، $B(10,3)$

درنتیجه: $M(12,5)$

۲ـ با توجه به شکل: $A(2,1)$ ، $B(-2,-1)$ ، $C(-1,-1)$ می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} x_R=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{x_B+x_D}{2} \\ y_R=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{y_B+y_D}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_A+x_C=x_B+x_D \\ y_A+y_C=y_B+y_D \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2-1=-2+x_D \\ 1-1=-1+y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x_D=3 \Rightarrow D(3,1) \\ y_D=1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x_R=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2} \\ y_R=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{1-1}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow R(\frac{1}{2},0) \Rightarrow \begin{vmatrix} \alpha=\frac{1}{2} \\ \beta=0 \end{vmatrix}$$

$X_B=x_B-\alpha=-2-\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}$,

$Y_B=y_B-\beta=-1-0=-1$

مختصات B در دستگاه جدید: $B(-\frac{5}{2},-1)$

۳ـ $\frac{2y}{x+y}-\frac{(x+y)}{(x-y)}+\frac{2x}{x^2-y^2}=3$

$\frac{2y(x-y)-(x+y)^2+2x}{(x+y)(x-y)}=3$

$\Rightarrow \frac{2xy-2y^2-x^2-y^2-2xy+2x}{x^2-y^2}=3$

$\Rightarrow \frac{2x-3y^2-x^2}{x^2-y^2}=3$

$\Rightarrow 2x-3y^2-x^2=3x^2-3y^2$

$\Rightarrow 4x^2-2x=0 \Rightarrow 2x(2x-1)=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$ یا

$\boxed{x=\frac{1}{2}}$

۴ـ الف)

$\sqrt{3}(\sqrt{2}-3\sqrt{5}+2\sqrt{3})=\sqrt{6}-3\sqrt{15}+2\sqrt{9}$
$=\sqrt{6}-3\sqrt{15}+6$

ب)

$\sqrt{75}+\sqrt{48}+2\sqrt{8}+2\sqrt{32}$
$=5\sqrt{3}+4\sqrt{3}+4\sqrt{2}+8\sqrt{2}$
$=9\sqrt{3}+12\sqrt{2}$

ج)

$\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{3}=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

$=\sqrt{3}+\sqrt{\frac{6}{3}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

۵ـ

$$(a-3)^2=(a-3)+4 \Rightarrow a^2-6a+9=a+1$$

$$\Rightarrow a^2-7a+8=0 \Rightarrow a_1=\frac{7+\sqrt{17}}{2}\,,$$

$$a_2=\frac{7-\sqrt{17}}{2}$$

۶ـ

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+2\sqrt{5}} \times \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})-2\sqrt{5}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})-2\sqrt{5}}$$

$$=\frac{3\sqrt{6}-6-6\sqrt{10}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2-20}$$

$$=\frac{6\sqrt{10}+6-3\sqrt{6}}{2\sqrt{6}+15} \times \frac{2\sqrt{6}-15}{2\sqrt{6}-15}$$

$$=\frac{(6\sqrt{10}+6-3\sqrt{6})(2\sqrt{6}-15)}{24-225}$$

$$=\frac{(15-2\sqrt{6})(6\sqrt{10}+6-3\sqrt{6})}{201}$$

۷

$$\begin{cases} x_1=x \\ x_2=x+\Delta x \end{cases} \Rightarrow x_2-x_1=\Delta x$$

$$\begin{cases} y_1=2x^2-3 \\ y_2=2(x+\Delta x)^2-3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y_2-y_1=2(x+\Delta x)^2-2x^2=\Delta y$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\left[x^2+2x(\Delta x)+(\Delta x)^2\right]-2x^2}{\Delta x}$$

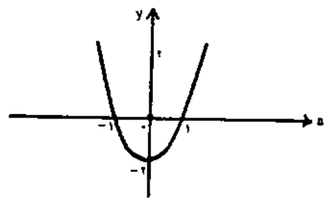
$$=\frac{\Delta x(4x+2\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x}=4x+2\Delta x}$$

۸ـ

$$y=4x^2-2$$

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
y	$+\infty$	2	-2	2	14	$+\infty$



۹ـ

$$y=[3x+1]=[3x]+1\ ,\ x\in[-1,2]$$

$-1 \le x < -\frac{2}{3}$: $-3 \le 3x < -2 \Rightarrow y=-3+1=-2$

$-\frac{2}{3} \le x < -\frac{1}{3}$: $-2 \le 3x < -1 \Rightarrow y=-2+1=-1$

$-\frac{1}{3} \le x \le 0$: $-1 \le 3x < 0 \Rightarrow y=-1+1=0$

$0 \le x < \frac{1}{3}$: $0 \le 3x < 1 \Rightarrow y=0+1=1$

$\frac{1}{3} \le x < \frac{2}{3}$: $1 \le 3x < 2 \Rightarrow y=1+1=2$

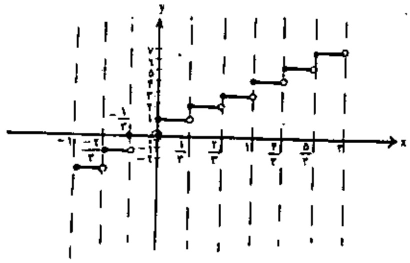
$\frac{2}{3} \le x < 1$: $2 \le 3x < 3 \Rightarrow y=2+1=3$

$1 \le x < \frac{4}{3}$: $3 \le 3x < 4 \Rightarrow y=3+1=4$

$\frac{4}{3} \le x < \frac{5}{3}$: $4 \le 3x < 5 \Rightarrow y=4+1=5$

$\frac{5}{3} \le x < 2$: $5 \le 3x < 6 \Rightarrow y=5+1=6$

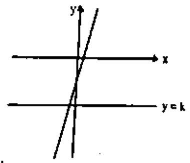
$x=2$: $y=7$



۱۰ـ

$$f(x)=4x-1$$

x	-1	0	1
$f(x)$	-5	-1	3



همیشه خط $y=k$، نمودار تابع f را فقط در یک نقطه قطع می‌کند. بنابراین f یک به یک است.

$$f(2)=4(2)-1=8-1=7\ ,\ g(f(2))=g(7)=\sqrt{7^2-4}$$

$$\Rightarrow g(7)=\sqrt{45} \Rightarrow \boxed{g(f(2))=\sqrt{45}}$$

۱۱ـ

$$2\log_2\sqrt{8}-4\log_3^{81}+\log_5^{25}=2\log_2^{2^3}-4\log_3^{3^4}+\log_5^{5^2}$$

$$=6\log_2^2-16\log_3^3+2\log_5^5$$

$$=6-16+2=-8$$

۱۲ـ

$$\log 2=a\ ,\ \log 3=b$$

$$\log 12=\log 4\times 3=\log 2^2+\log 3$$

$$=2\log 2+\log 3=2a+b$$

۱۳ـ

$$a_1=m\ ,\ a_5=3a_3$$

$$a_1+4d=3(a_1+2d) \Rightarrow 2a_1+2d=0 \Rightarrow d=-a_1$$

$$\Rightarrow \boxed{d=-m}$$

۱۴ـ

$$a_2=6 \Rightarrow a_1q=6 \quad (1)$$

$$a_8=\frac{1}{2} \Rightarrow a_1q^7=\frac{1}{2} \Rightarrow a_1^2q^{14}=\frac{1}{4} \quad (2)$$

از تقسیم رابطه‌های (۲) و (۱) خواهیم داشت:

$$\frac{a_1^2q^{14}}{a_1q}=\frac{\frac{1}{4}}{6}=\frac{1}{24} \Rightarrow a_1q^{13}=\frac{1}{24} \Rightarrow \boxed{a_{14}=\frac{1}{24}}$$

حل مسایل امتحانی ریاضی (۴) پایان ترم

۱ـ الف) مُد = ۸، میانه = ۸، $9=\frac{81}{9}=\bar{x}$ = میانگین

x_i	f_i	$(x_i-\bar{x})$	$(x_i-\bar{x})^2$	$f_i(x_i-\bar{x})^2$
7	2	−2	4	8
8	3	−1	1	3
9	1	0	0	0
11	2	2	4	8
12	1	3	9	9

$$S=\sqrt{\frac{\sum f(x-\bar{x})^2}{n}}=\sqrt{\frac{28}{9}}=\frac{2\sqrt{7}}{3}$$

۲ـ

$$\begin{cases} \Delta'=4^2-(m+1)^2<0 \\ a=m+1<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta'=16-(m+1)^2<0 \\ m<-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m+1)^2>16 \\ m<-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m>3 \text{ یا } m<-5 \\ m<-1 \end{cases} \Rightarrow \quad m<-1$$

بنابراین نامعادلهٔ $(m+1)x^2-8x+(m+1)<0$ به‌ازای $m<-1$ برای هر $x\in\mathbb{R}$ برقرار است.

۳ـ

$$P=\frac{5x^2+4x+1}{(5-x)(-x-x^2+6)}<0$$

x	$-\infty$ تا -3	-3 تا 2	2 تا 5	5 تا $+\infty$
$5-x$	+	+	+	−
$5x^2+4x+1$	+	+	+	+
$-x^2-x+6$	−	+	−	−
$P<0$	− جواب	+	− جواب	+

$\{x \mid x<-3 \vee 2<x<5\}$ = مجموعه جواب

۴ـ

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{-1}{2}\ ,\ \tan\alpha=3\ :$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3+\tan\beta}{1-3\tan\beta}=-\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\tan\beta=7}$$

۵ـ

$$\vec{OC}=\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}\ ,\ \vec{OB}=\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}\ ,\ \vec{OA}=\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}$$

$$\vec{AX}=\vec{XB}+2\vec{AC} \Rightarrow$$

$$\vec{OX}-\vec{OA}=\vec{OB}-\vec{OX}+2(\vec{OC}-\vec{OA}) \Rightarrow$$

$$\vec{OX}+\vec{OX}=\vec{OA}+\vec{OB}+2\vec{OC}-2\vec{OA} \Rightarrow$$

$$2\vec{OX}=\vec{OB}+2\vec{OC}-\vec{OA}$$

$$\Rightarrow 2\vec{OX}=\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2-4+3\\-2+8-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{OX}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{OX}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\2\end{bmatrix}}$$

۶ـ

$$\vec{u}=[2\ \ -4]\ ,\ \vec{v}=\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$$

یا $\vec{u}=2\vec{i}-4\vec{j}\ ,\ \vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}$

$$\vec{u}+\vec{v}=2\vec{i}-4\vec{j}+3\vec{i}-2\vec{j}=5\vec{i}-6\vec{j}$$

$$\left|\vec{u}+\vec{v}\right|=\sqrt{5^2+(-6)^2}=\sqrt{25+36}=\sqrt{61}$$

(طول بردار $\vec{u}+\vec{v}$)

$$\vec{u}.\vec{v}=[2\ \ -4]\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}=[6+8]=14$$

۷ـ

$$\begin{cases} mx-y=6 \\ -4x+my=2 \end{cases} \quad \frac{m}{-4}=\frac{-1}{m} \Rightarrow$$

$m^2 = 4 \Rightarrow \boxed{m = \pm 2}$

۸ـ $f(x) = x^2 - x \ , \ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$f(A) = A^2 - A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$= \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$= -2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -2I_{2\times 2} \Rightarrow \boxed{f(A) = -2I_{2\times 2}}$

۹ـ $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \ , \ A\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$

$(A.B)^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -10 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} \\ -1 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \ , \ B^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$B^{-1}.A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{9}{10} - \frac{2}{5} & -\frac{3}{10} + \frac{1}{5} \\ -\frac{6}{10} - \frac{2}{5} & \frac{2}{10} + \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} \\ -1 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

بنابراین:

$(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

۱۰ـ $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

الف) (تعداد عددهای چهار رقمی طبیعی) $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$

ب) (تعداد عددهای چهار رقمی طبیعی با ارقام مختلف) $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$

ج) (تعداد عددهای چهار رقمی طبیعی که همهٔ ارقام آنها فرد باشند.) $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$

۱۱ـ الف) $C(11,2) = \frac{11!}{2!(11-2)!} = \frac{11!}{2!9!} = 55$

$C(6,2) = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15$

(احتمال این که هردو مهره سیاه باشد) $\Rightarrow P$ (هردو سیاه) $= \frac{15}{55} = \frac{3}{11}$

ب) $C(6,1) = \frac{6!}{1!(6-1)!} = \frac{6!}{5!} = 6 \ ,$

$C(5,1) = \frac{5!}{1!(5-1)!} = \frac{5!}{4!} = 5$

$C(11,2) = \frac{11!}{2!(11-2)!} = \frac{11!}{2!\,9!} = 55$

(احتمال این که یک مهره سیاه و یک مهره سفید باشد) $\Rightarrow P$ (یکی سفید و یکی سیاه) $= \frac{6 \times 5}{55} = \frac{6}{11}$

حل مسأله‌های هندسهٔ ۱

نظام جدید آموزشی

● محمدهاشم رستمی

۱ ــ با توجه به ویژگی خطهای موازی و موربها داریم:

$x + 18^\circ = 48^\circ \Rightarrow x = 30^\circ ,$

$x + y = 180^\circ \Rightarrow 30^\circ + y = 180^\circ \Rightarrow y = 150^\circ$

۲ ــ هر زاویه از مثلث متساوی‌الاضلاع برابر ۶۰° است. از آن‌جا:

$B\hat{A}E = 60^\circ - 40^\circ = 20^\circ \Rightarrow x + 60^\circ + 20^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow x = 100^\circ$

$y + 60^\circ = 90^\circ \Rightarrow y = 30^\circ$

۳ ــ ضلعهای متناظر متساوی $AB = AE$ و $BC = DE$ می‌باشند. پس:

$5y - 3 = 4y + 5 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow AB = AE = 37$

$5x = x + 8 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow BC = DE = 10$

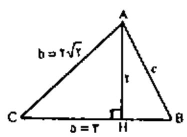
$\Rightarrow BE = 10 + 27 + 10 = 47$

محیط مثلث $ABE = AB + BE + EA = 37 + 47 + 37 = 121$

۴ ــ الف ــ با توجه به این که $S = \frac{1}{2}a.h_a$ است، خواهیم داشت:

$x^2 - 13 = \frac{1}{2}(x-1)(2x-6) \Rightarrow x^2 - 13 = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x = 16 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow a = 4 - 1 = 3 \Rightarrow h_a = 2$



ب ــ

$\Delta ACH: b^2 = AH^2 + CH^2 \Rightarrow (2\sqrt{2})^2 = 4 + CH^2$

$\Rightarrow CH = 2 \Rightarrow BH = 1 \quad , \quad \Delta AHB:$

$AB^2 = BH^2 + AH^2 = 1 + 4 = 5 \Rightarrow AB = \sqrt{5}$

$\Rightarrow C = \sqrt{5}$

$a.h_a = b.h_b = c.h_c$

$3 \times 2 = 2\sqrt{2} \times h_b = \sqrt{5} \times h_c \Rightarrow h_b = \frac{3\sqrt{2}}{2} ,$

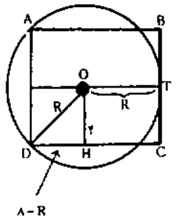
$h_c = \frac{6\sqrt{5}}{5} ,$

۵ ــ **حل از آنوشا علی اکبری از تهران.** از نقطهٔ O مرکز دایره به نقطهٔ T، نقطهٔ تماس BC با دایره، همچنین به نقطهٔ D وصل می‌کنیم و عمود OH را بر CD فرود می‌آوریم. با فرض این که شعاع دایره R باشد، داریم:

$OH = TC = \frac{BC}{2} = \frac{8}{2} = 4 \ , \quad OD = R \ ,$

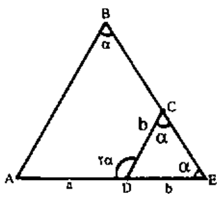
$DH = DC - HC = 8 - R$

$\Delta ODH: OD^2 = OH^2 + DH^2$



شعاع دایره $\Rightarrow R^2 = 16 + (8 - R)^2 \Rightarrow R = 5$

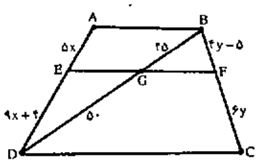
۶ ــ **حل از دانش‌آموز سروری از نیشابور.** نقطهٔ برخورد امتدادهای BC و AD را E می‌نامیم.



فرض می‌کنیم $\hat{B} = \alpha$ باشد. در این صورت $\hat{D} = 2\alpha$ است. به دلیل موازی بودن DC با AB داریم $D\hat{C}E = \alpha$. از طرفی زاویهٔ ADC زاویهٔ خارجی مثلث DCE است. پس: $A\hat{D}C = D\hat{C}E + C\hat{E}D$ از آن جا، $2\alpha = \alpha + C\hat{E}D$ پس $C\hat{E}D = \alpha$؛ درنتیجه مثلث DCE متساوی‌الساقین و $DC = DE = b$ است. حال بنا به قضیهٔ تالس داریم:

$\frac{ED}{EA} = \frac{DC}{AB} \Rightarrow \frac{b}{b+a} = \frac{b}{AB} \Rightarrow AB = b + a$

۷ ــ در مثلثهای ABD و BDC با توجه به قضیه تالس داریم:



$\frac{5x}{9x+4} = \frac{25}{50} \Rightarrow \frac{5x}{9x+4} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 4 \Rightarrow$

$AE = 20 \ , \ ED = 36 + 4 = 40 \Rightarrow AD = 20 + 40 = 60$

$\frac{4y-5}{6y} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 5 \Rightarrow$

$BF = 15 \ , \ FC = 30 \Rightarrow BC = 15 + 30 = 45$

۸ ــ الف ــ دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ACC' و ABB' در زاویهٔ حادهٔ $\hat{A}$ مشترکند. پس متشابه‌اند. از تشابه این دو مثلث نتیجه می‌شود:

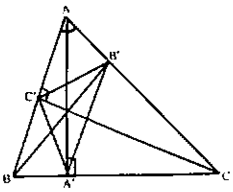
$\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$

از آن‌جا داریم:

$AB.AC' = AC.AB'$

ب ــ زاویهٔ A در دو مثلث ABC و $AB'C'$ مشترک است و رابطهٔ $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$ نیز برقرار است. بنابراین دو مثلث ABC و $AB'C'$ متشابه می‌باشند.

پ ــ اگر ارتفاع سوم مثلث را AA' بنامیم. مثلثهای



BC′A′ و CA′B′ نیز با مثلث ABC متشابه‌اند.

۹ ــ با فرض $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=k$ داریم:

$a=2k$ ، $b=3k$ ، $c=4k$

$V=a.b.c \Rightarrow 648=(2k)(3k)(4k)=24k^3 \Rightarrow$

$k^3=27 \Rightarrow k=3 \Rightarrow a=6$ ، $b=9$ ، $c=12$

$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{36+81+144}=\sqrt{261}$

کل $S=2(a+b)c+2ab=2(6+9)12+2(6\times 9)=468$

۱ ــ اندازهٔ ضلع شش ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع R برابر R است. پس $a=c_6=8cm$ است. از طرفی مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع a برابر است با $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ ، پس $S=\frac{3\times 64\sqrt{3}}{2}=96\sqrt{3}$ قاعدهٔ منشور. از آن‌جا:

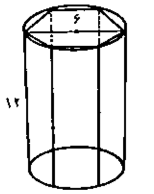
حجم منشور = سطح قاعده × ارتفاع $=96\sqrt{3}\times 12=1152\sqrt{3}$

سطح جانبی منشور = محیط قاعده × ارتفاع $=6\times 8\times 12=576$

سطح جانبی استوانه = محیط قاعده × ارتفاع

$=2\pi R\times h=2\pi\times 8\times 12=192\pi$

$\frac{\text{سطح جانبی منشور}}{\text{سطح جانبی استوانه}}=\frac{576}{192\pi}=\frac{3}{\pi}$

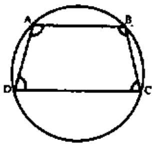


حل مسأله‌های هندسهٔ ۲ نظام جدید آموزشی

۱ ــ نخست ثابت می‌کنیم:

قضیه ــ اگر ذوزنقه‌ای متساوی الساقین باشد، آن ذوزنقه محاطی است.

اثبات ــ ذوزنقه متساوی الساقین ABCD را در نظر می‌گیریم.



داریم: $\hat{C}=\hat{D}$ و $\hat{A}=\hat{B}$

از طرفی $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360^\circ$

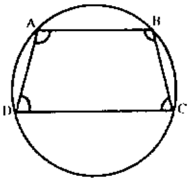
از آن‌جا خواهیم داشت: $\hat{A}+\hat{A}+\hat{C}+\hat{C}=360^\circ$

$\Rightarrow 2\hat{A}+2\hat{C}=360^\circ \Rightarrow \hat{A}+\hat{C}=180^\circ$

درنتیجه، ذوزنقه متساوی‌الساقین ABCD، محاطی است.

حال ثابت می‌کنیم:

عکس قضیه ــ اگر ذوزنقه‌ای محاطی باشد، آن ذوزنقه متساوی‌الساقین است.



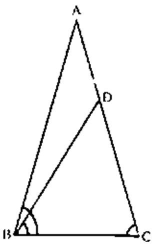
اثبات ــ ذوزنقه محاطی ABCD را در نظر می‌گیریم. به دلیل موازی بودن AB و CD کمانهای $\overset{\frown}{BC}$ و $\overset{\frown}{AD}$ برابرند. پس خواهیم داشت:

$\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}}{2}$ ، $\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{CD}}{2}$

درنتیجه $\hat{A}=\hat{B}$ است و به همین ترتیب ثابت می‌شود که $\hat{C}=\hat{D}$ است.

یعنی ذوزنقه محاطی ABCD متساوی‌الساقین است.

۲ ــ در مثلث BDC، $\hat{C}>D\hat{B}C$ است. زیرا به دلیل آن که نقطه D بین دو نقطهٔ A و C است، پاره‌خط BD داخل زاویهٔ ABC و بنابراین $A\hat{B}C>D\hat{B}C$ است. امّا به دلیل متساوی‌الساقین بودن مثلث ABC، $A\hat{B}C=\hat{C}$ است. پس $\hat{C}>D\hat{B}C$: درنتیجه $BD>DC$ است. (زیرا در هر مثلث، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچکتر).



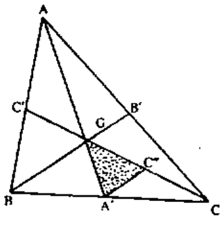
۳ ــ شرط نخست امکان مسأله آن است که $\begin{cases}4-m>0\\2m-3>0\end{cases}$ ، یعنی $\frac{3}{2}<m<4$ باشد. امّا شرط آن که سه مقدار a و b و c ضلعهای یک مثلث باشند، آن است که $|b-c|<a<b+c$ باشند. پس باید داشته باشیم:

$|(2m-3)-(4-m)|<3<(2m-3)+(4-m)$

$\Rightarrow |3m-7|<3<m+1$

در نتیجه حدود m عبارت است از: $2<m<\frac{10}{3}$.

۴ ــ فرض می‌کنیم مثلث رسم شده و مثلث ABC جواب مسأله باشد. میانه‌های AA′ و BB′ و CC′ از این مثلث را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد میانه‌ها را G می‌نامیم. از نقطهٔ A′ به نقطهٔ C″ وسط پاره‌خط GC وصل می‌کنیم: در مثلث BCG

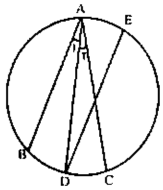


پاره‌خط A′C″ موازی BG و مساوی نصف آن است، زیرا وسطهای دو ضلع از این مثلث را به هم وصل کرده است. پس

$A'C''=\frac{BG}{2}=\frac{\frac{2}{3}m_b}{2}=\frac{1}{3}m_b$

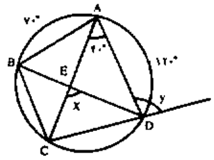
از طرفی $GA'=\frac{1}{3}m_a$ و $GC''=\frac{1}{2}GC=\frac{1}{3}m_c$ است. بنابراین سه ضلع مثلث GA′C″ معلوم است و این مثلث به دلیل معلوم بودن اندازهٔ سه ضلعش قابل رسم است. پس برای رسم مثلث ABC ابتدا مثلث GA′C″ را رسم می‌کنیم. سپس A′G را به اندازهٔ دو برابر خود امتداد می‌دهیم، تا نقطهٔ A به‌دست آید. GC″ را به اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم، تا نقطهٔ C به‌دست آید. از C به A′ وصل کرده CA′ را به اندازهٔ خود ادامه می‌دهیم، تا نقطه B حاصل شود. از A به B و C وصل می‌کنیم، مثلث ABC رسم می‌شود.

۵ ــ از برابری دو زاویه A_1 و A_2 داریم $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{DC}$. و از



موازی بودن DE و AB نتیجه می‌شود $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AE}$. در نتیجه داریم $\overset{\frown}{DC}+\overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{AE}+\overset{\frown}{EC}$ و یا $\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{AC}$. پس $DE=AC$ است.

۶ ــ داریم:

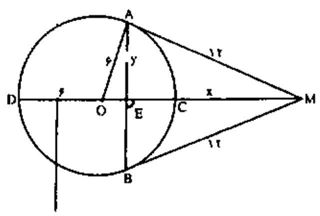


$C\hat{A}D=40^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{CD}=80^\circ$

$C\hat{E}D=x=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}}{2}=\frac{70^\circ+80^\circ}{2}=75^\circ$

$y=\frac{\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{DC}}{2}=\frac{120^\circ+80^\circ}{2}=100^\circ$

۷ ــ می‌دانیم که MO عمودمنصف AB است. یعنی $AE=EB=y$ است. از طرفی داریم:



$MC=x$ ، $MD=x+12$

$MB^2=MA^2=MC.MD \Rightarrow$

$144=x(x+12)\Rightarrow x^2+12x-144=0$

$\Rightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{180}}{2}=\frac{-6\pm 6\sqrt{5}}{2}\Rightarrow MC=x=3(\sqrt{5}-1)$

در مثلث قائم‌الزاویه OAM داریم:

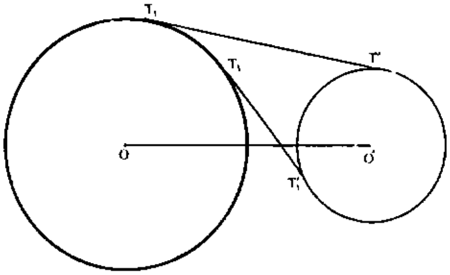
$$OM.AE = OA.AM \Rightarrow (3\sqrt{5} - 3 + 6)\times y = 6\times 12$$

$$y = \frac{72}{3(\sqrt{5}+1)} = \frac{24(\sqrt{5}-1)}{4} = 6(\sqrt{5}-1)$$

۸ـ اگر TT' یک مماس مشترک برونی دو دایره باشد، داریم:

$$TT' = \sqrt{d^2-(R-R')^2} \Rightarrow$$

$$TT' = \sqrt{100-(5-3)^2} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$$



و در صورتی که T_1T_1' یک مماس مشترک درونی دو دایره باشد داریم:

$$T_1T_1' = \sqrt{10^2-(5+3)^2} = 6$$

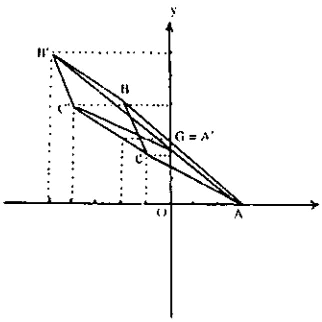
از آن‌جا نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{T_1T_1'}{TT'} = \frac{6}{4\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

۹ـ الف) با استفاده از ویژگی محل برخورد میانه‌های مثلث (مرکز ثقل مثلث) داریم:

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A+x_B+x_C}{3} = \frac{3+(-2)+(-1)}{3} = 0 \\ y_G = \frac{y_A+y_B+y_C}{3} = \frac{0+4+2}{3} = 2 \end{cases} \Rightarrow G(0,2)$$

ب) مثلث ABC را رسم می‌کنیم و نقطهٔ G مرکز ثقل مثلث را مشخص می‌سازیم. از A به G وصل می‌کنیم و از نقطه‌های B و C بردارهای $\vec{BB'}$ و $\vec{CC'}$ را مساوی بردار $\vec{AG}$ رسم



می‌کنیم. مثلث GB′C′ انتقال یافته مثلث ABC به اندازهٔ بردار $\vec{AG}$ است. واضح است که نقطهٔ A′ بر نقطهٔ G منطبق است.

پ) با توجه به این که تصویر نقطهٔ $A=(3,0)$، نقطهٔ $G=(0,2)$ است. پس اگر قانون انتقال را $T(x,y)=(x+h,y+k)$ در نظر بگیریم داریم:

$$h = 0-3 = -3 \ , \ k = 2-0 = 2$$

بنابراین قاعدهٔ این نگاشت، که یک انتقال است $T(x,y)=(x-3 \ , \ y+2)$ است.

ت)

$$A(3,0) \Rightarrow A' = G = (0,2)$$

$$B=(-2,4) \Rightarrow B' = (-2-3 \ , \ 4+2) \Rightarrow B' = (-5,+6)$$

$$C=(-1,2) \Rightarrow C' = (-1-3 \ , \ 2+2) \Rightarrow C' = (-4,4)$$

۱۰ـ دو نقطهٔ اختیاری از خط D را در نظر گرفته تبدیل یافته‌های آنها را تحت تبدیل $T(x,y)=(2x-1,y+2)$ به‌دست می‌آوریم.

$$P\in D, x_P=0 \Rightarrow y_P=3 \Rightarrow P=(0,3) \Rightarrow P'=(-1,5)$$

$$Q\in D, x_Q=1 \Rightarrow y_Q=1 \Rightarrow Q=(1,1) \Rightarrow Q'=(1,3)$$

حال اگر $M=(x,y)$ نقطه‌ای از خط D′ باشد، با توجه به این که شیب MP′ و P′Q′ با هم برابر است، داریم:

$$\text{شیب } MP' = \frac{y-5}{x+1} \ ,$$

$$\text{شیب } P'Q' = \frac{5-3}{-1-1} = -1 \Rightarrow \frac{y-5}{x+1} = -1$$

$$\Rightarrow y-5 = -x-1 \Rightarrow D': x+y-4=0$$ معادلهٔ خط D′

$$A\in D \ , \ x_A=2 \Rightarrow 4+y-3=0 \Rightarrow y=-1$$

$$\Rightarrow A=(2,-1)$$

$$\Rightarrow A'=(3,1)$$

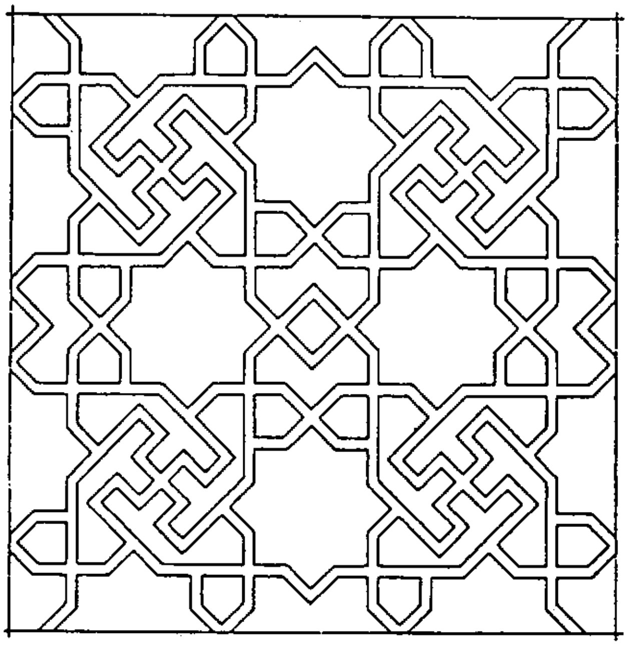
$$B\in D \ , \ y_B=5 \Rightarrow 2x+5-3=0 \Rightarrow x_B=-1$$

$$\Rightarrow B=(-1,5) \Rightarrow B'=(-3,7)$$

$$AB = \sqrt{(2+1)^2+(-1-5)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$A'B' = \sqrt{(3+3)^2+(1-7)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

چون $AB \neq A'B'$ است. پس تبدیل بالا یک ایزومتری نیست.



جوابهای تفریح اندیشه

پاسخ ۱:

سطح کل مطلوب را می‌توان در صورتی که بدانیم مجموع مربعات n عدد طبیعی اولیه

$$S=\frac{n+۳n^۲+۲n^۳}{۶}$$

است به سرعت محاسبه کرد. دراین حالت سطح کل $۶S$ است، زیرا هر جعبه ۶ وجه دارد، و در آن n برابر ۱۰۰ است.

اینچ مربع $۲,۰۳۰,۱۰۰ = {}^۳(۱۰۰)۲ + {}^۲(۱۰۰)۳ + ۱۰۰ =$ سطح

کل حجم جعبه‌ها مجموع مکعبات اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰۰ است. در اتحاد

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+\cdots+n^۳=(۱+۲+۳+\cdots+n)^۲$$

محاسبهٔ عبارت سمت راست، به عنوان تصاعدی حسابی، به ازای $n=۱۰۰$، کاری آسان است.

اینچ مکعب $۲۵,۵۰۲,۵۰۰ = {}^۲(۱۰۰\times\frac{۱+۱۰۰}{۲}) =$ حجم

اثبات مجاور اثبات ظریفی از این اتحاد منسوب به فیبوناتچی است. اثبات مزبور از مثلثهای شمارهٔ فرد نشان داده شده در چپ استفاده می‌کند.

```
                ۱
             ۳     ۵
         ۷     ۹     ۱۱
    ۱۳    ۱۵    ۱۷    ۱۹
    .            .     .
    .            .     .
    M     ...    L     n/s
```

توجه داشته باشید که تعداد جمله‌های واقع در هر سطر برابر آن شمارهٔ سطر است. تعداد کل جمله‌های واقع در مثلث تا هر سطر، n، مجموع

$$S=۱+۲+۳+\cdots+n$$

است که $\frac{(۱+n)n}{۲}$ می‌باشد. آخرین جملهٔ سطر nام، L، برابر $۲S-۱$ است؛ و اولین جملهٔ آن، M، برابر $L-۲(n-۱)$. مجموع عددهای واقع در هر سطر، n، عبارت است از

$$\frac{(M+L)n}{۲}=\frac{(۲L-۲n+۲)}{۲}=(۲S-n)n=n^۳$$

بنابراین، مجموع

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+\cdots+n^۳$$

مجموع اعداد واقع در سطرهای ۱ تا n است ـ یعنی، مجموع جمیع عددهای واقع در مثلث است. عددها به تصاعد حسابی‌اند و مجموعشان عبارت است از

$$\frac{(۱+L)S}{۲}=S^۲=(۱+۲+۳+\cdots+n)^۲$$

که همان است که می‌خواستیم.

اتحاد به کار رفته در محاسبهٔ سطح کل جعبه‌ها، یعنی

$$۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots+n^۲=\frac{n+۳n^۲+۲n^۳}{۶}$$

را می‌توان با استفاده از تعداد مثلثهای نشان داده شده در زیر به اثبات رساند. این مثلث را در هند باستان می‌شناختند. در صورت تمایل به آن بپردازید.

```
        ۱
      ۲   ۲
    ۳   ۳   ۳
   ...........
   n.........n
```

پاسخ ۲:

رفعتی به خودش کلک زده است. البته، راست است که علی‌آبادی قطعاً بازی را آغاز نمی‌کند و شانس بین او و پهلوان تقسیم می‌شود، اما، از آن‌جا که وی نمی‌داند چرا علی‌آبادی آغاز نمی‌کند، این اطلاع نمی‌تواند برشانسش تأثیر بگذارد، و آن همان ـ ۱ به ۳ـ باقی می‌ماند درحالی که احتمال انتخاب پهلوان ۲ به ۳ افزایش می‌یابد.

به بررسی احتمالهای این مطالب که چرا مربی گفت «علی‌آبادی بازی را آغاز نمی‌کند» می‌پردازیم.

الف) به علت این‌که پهلوان بازی را آغاز می‌کند: $\frac{۱}{۳}$

ب) به علت این که رفعتی بازی را آغاز می‌کند: $\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۲}$ (سکه خط می‌آید) $=\frac{۱}{۶}$

محاسبه مشخص می‌کند که احتمال آغازکردن وی نصف احتمال آغازکردن پهلوان است.

پاسخ ۳:

آنها در مجموع ۳۰۰ کیلومتر پیموده‌اند «حمل مسافر براساس کیلومتر چیزی است که متخصصان حمل و نقل آن را مسافر کیلومتر می‌نامند».

در اینجا هر مسافرکیلومتر ۸ = ۳۰۰ ÷ ۲۴۰۰ ریال است. بنابراین مهرداد ۱۶۰۰ ریال و دوستش ۸۰۰ ریال پرداخته‌اند.

اما در چنین مسألهٔ ساده‌ای چرا درگیر مسافر کیلومتر شویم، زیرا در اولین وحله می‌گوییم مهرداد نصف راه را به تنهایی پیموده است، در نتیجه ۱۲۰۰ ریال باید بپردازد.

آن‌گاه اتومبیل را با دوستش سوار می‌شود و باید ۶۰۰ ریال دیگر نیز برای این قسمت بپردازد. بنابراین مهرداد جمعاً ۱۸۰۰ و دوستش ۶۰۰ ریال خواهد پرداخت. در این حالت مسأله به اشتغال اتومبیل مربوط می‌شود نه به مسألهٔ حمل و نقل.

پاسخ ۴:

ترنی را در نظر می‌گیریم که از یک شهر به طرف شهر مقابل حرکت می‌کند. اولین ترنی را که می‌بینید، ترنی است که در لحظهٔ آغاز حرکت، از طرف مقابل به این شهر می‌رسد، و این، ترنی است که ۵ ساعت زودتر از ترن موردنظر، از شهر مقابل حرکت کرده است، و آخرین ترنی را که باآن مواجه می‌شود ترنی است که ۵ ساعت بعد از لحظه‌ای که ترن مورد نظر ما به شهر مقابل می‌رسد، از آن شهر می‌خواهد حرکت کند. بین این دو لحظه، ۱۰ ساعت فاصله زمانی وجود دارد که در این مدت ۱۱ ترن از شهر مقابل عزیمت کرده‌اند. بنابراین هر ترن از شروع حرکت از یک شهر تا رسیدن به شهر مقابل با ۱۱ ترن مواجه می‌شود.

پاسخ ۵:

کیک را در فر قرار داده، دو ساعت را به کار می‌اندازیم. هنگامی که اولی به پایان رسید، آن‌را سرو ته می‌کنیم. (زمان منقضی شده: ۴ دقیقه). دومی را نیز، زمانی که به پایان رسید، سرو ته می‌کنیم. هنگامی که اولی بار دیگر به پایان برسد (۸ دقیقه) دومی، از آن‌جا که آن را بار دیگر به‌کار انداخته‌اید، یک دقیقه کار کرده است، بنابراین آن‌را نیز بار دیگر برمی‌گردانیم. زمانی که یک دقیقه به پایان برسد کیک آماده است.

پاسخ ۶:

طول مسافت پیموده شده در هرقسمت را L می‌نامیم. موتور سوار برای پیمودن هر قسمت زمانهای زیر را صرف می‌کند:

ساعت $\frac{L}{۱۰}$: اولین قسمت

ساعت $\frac{L}{۵}$: دومین قسمت

ساعت $\frac{L}{۳۰}$: سومین قسمت

ساعت $\frac{L}{۱۵}$: چهارمین قسمت

مجموع زمان لازم برای پیمودن مسافت مورد نظر برابر است با:

$$\frac{L}{۱۰}+\frac{L}{۵}+\frac{L}{۳۰}+\frac{L}{۱۵}=\frac{۱۲L}{۳۰}=\frac{۲L}{۵}$$

چون سرعت برابر است با مسافت طی شده ($۴L$) تقسیم بر زمان مصرف شده ($\frac{۲L}{۵}$).

پس: کیلومتر در ساعت $۱۰ = \frac{۵\times۴}{۲} = ۴L:\frac{۲}{۵}L =$ سرعت

پاسخ ۷:

نحوهٔ انجام کار طبق جدول زیراست. عددهایی که زیر هم نوشته شده‌اند. مقدار آب موجود در هر سطل را در هر مرحله از کار نشان می‌دهند.

سطل اول	۱۱	۳	۳	۰	۱۱	۶	۶	۰	۱۱	۹	۹	۱	۱	۰	۱۱	۴
سطل دوم	۰	۸	۰	۳	۳	۸	۰	۶	۶	۸	۰	۸	۰	۱	۱	۸

Borhan

Vol. 7 No. 1

Serial numbers: 21 Summer 1997

In the name of God

Borhan is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:

Madrasse Publication - No. 36. Haghighat talab Street, Sepahbod gharany Ave, Tehran, Iran

Post code: 14155/1949

Contents:

روش ابوریحان بیرونی
(از ریاضیدانان مسلمان قرن چهارم)
برای تعیین قبله (سمت نماز)

مسأله یافتن جهت مکّه نسبت به مکانی مفروض از ضروریات دین اسلام بود، زیرا مکه جایگاه کعبه، مقدسترین مکان دنیای اسلام، و جهتی است که مسلمانان نمازهای پنجگانهٔ خود را باید رو به آن بخوانند. این جهت، به عربی، قبله نامیده می‌شود، و مسأله تعیین آن برای مسلمانان مهمّ است. از این روست که بسیاری از بزرگترین دانشمندان اسلامی توجه خود را به حل آن معطوف داشتند. ابوریحان بیرونی، در حوالی انتهای اثر کامل و دقیق خود در جغرافیای ریاضی - تحدید نهایات‌الاماکن - چنین می‌نویسد: با آنکه اکنون به پایان منظور خود (اندازه‌گیری پایانهای جایها) رسیده‌ایم، بایسته است که از آن بهره‌ای بیرون آوریم تا برای همهٔ مردمانی که در سرزمینی زندگی می‌کنند که به یافتن طول و عرض آن پرداختیم سودمند باشد یا خاص گروهی از مردم باشد و آن بهره که به همگان می‌رسد یافتن جهت قبله است. در هر حال، بیرونی چهار روش برای حل این مسأله عرضه می‌دارد. گرچه توضیح مفصّل هرکدام از این راه حلها خارج از حدود این کتاب است. ما به توصیف مسأله پرداخته و شرح می‌دهیم که چگونه می‌توان آن را به کمک مثلثات کروی حل کرد.

مسأله را در مورد سطح کرهٔ زمین در نظر گیرید. شکل زیر وضع را در مورد مکانی در شمال غربی مکّه نشان می‌دهد که در آن P قطب شمال، Z مکان مورد بحث، M محل مکه و WKFN خط استواست. (چون در زیر تنها کمانها را درنظر خواهیم داشت و هرگز به خطهای راست کاری نداریم بدون آنکه ابهامی پیش آید، به جای xy خواهیم نوشت: xy) بنابراین PZ و PM به ترتیب، نصف‌النهارهای محل و مکه‌اند و $\angle PZM$ سمت مکه، یعنی قبله است. به علاوه، ZM فاصله محل از مکه روی دایرهٔ عظیمه (برحسب درجه) است. چون KZP نصف‌النهار است، اگر در Z بایستیم و جهت دایره به امتداد ZP باشد، روی ما به شمال خواهد بود. در این صورت اگر به قدر زاویهٔ $\angle PZM$ به راست بچرخیم، رویمان به مکّه خواهد بود، زیرا ZM کوتاهترین مسیر ممکن تا آن شهر است. بنابراین، برای آنکه قبله را تعیین کنیم، باید $\angle PZM$ را محاسبه کنیم.

از کتاب گوشه‌هایی از ریاضیات دورهٔ اسلامی انتشارات فاطمی