ISSN:1735-4951
www.roshdmag.ir

رشد برهان ۶۰

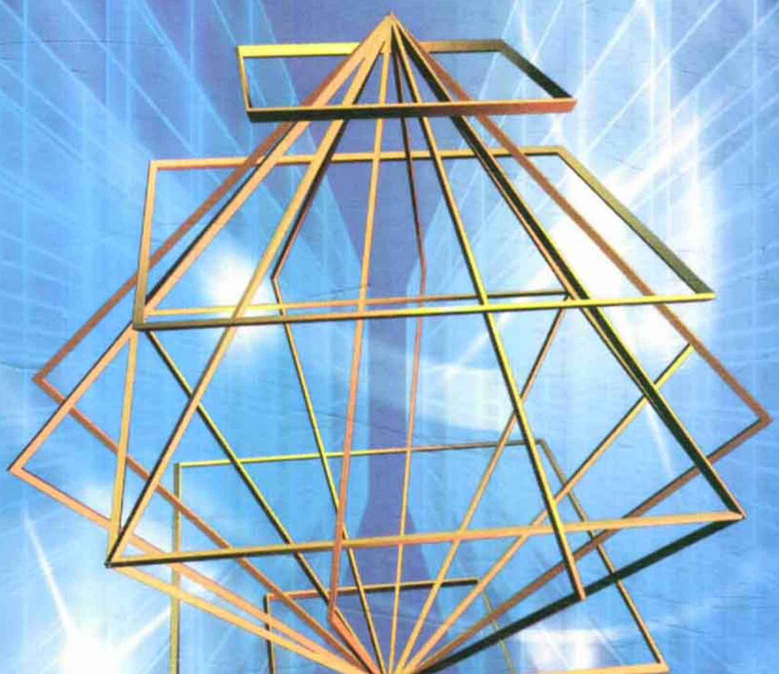
مجله ی ریاضی

دوره ی متوسطه

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

• دوره ی هجدهم • شماره ی ۲ • زمستان ۱۳۸۷ • بها: ۴۰۰۰ ریال



- حد تابع در یک نقطه
- مجموعه ی زیرمجموعه ها
- بلندای خئوپس
- ریاضیات در ایران

ریاضی‌دانان مسلمان

ابوعلی حبوبی

ابوعلی حسن بن حارث حبوبی خوارزمی
فقیه و دانشمند و ریاضی‌دان مسلمان ایرانی
(نیمه‌ی دوم سده‌ی چهارم)

قاضی و فقیه و از دانشمندان نیمه‌ی دوم قرن چهارم و معاصر با ابونصر عراق و بوزجانی و بیرونی بوده و با آنان درباره‌ی مطالب علمی مکاتبه می‌کرده و در ریاضیات دست داشته است.

ابونصر عراق در رساله‌ی معرفة القسی الفلکیه از وی یاد کرده و بیرونی در کتاب استخراج الاوتار حل دو مسأله‌ی هندسی را از وی آورده است و کاشانی نیز در کتاب مفتاح الحساب روشی را که وی برای حل مسائل حساب فرایض به‌کار می‌برده در ضمن سه مثال آورده است.

ابوعلی حبوبی از بوزجانی دستوری برای محاسبه‌ی مساحت مثلث بر حسب اضلاع آن خواسته بوده و بوزجانی جواب او را طی رساله‌ی مختصری داده است. این دستور با رمزها و اصطلاحات کنونی چنین نوشته می‌شود: به فرض آن‌که طول‌های اضلاع مثلث a و b و c باشد مساحت مثلث مساوی است با

$$\sqrt{\left[\left(\frac{c+b}{۲}\right)^{۲}-\left(\frac{a}{۲}\right)^{۲}\right]\left[\left(\frac{c-b}{۲}\right)-\left(\frac{a}{۲}\right)^{۲}\right]}$$

اثر ریاضی موجود وی

کتاب الاستقصاء و التجنیس فی علم الحساب

در این کتاب کاربرد حساب خطأین و جبر در حل مسائل مربوط به وصایا مورد بحث قرار گرفته است. از این کتاب چند نسخه در مشهد و اروپا موجود است.

تبصره. مؤلف جلد سوم فهرست کتابخانه‌ی آستان قدس رضوی نوشته است که ابوعلی حسن بن حارث خوارزمی حبوبی کتاب استقصاء را در زمان آتسز خوارزمشاه تصنیف کرده و این اشتباه است و بر و کلمان هم همین اشتباه را تکرار کرده است. آتسزخوارزمشاه در ۵۲۱ تا ۵۵۱ یعنی در نیمه‌ی دوم قرن ششم هجری بوده و حال آن‌که ابوعلی حبوبی در حدود دویست سال پیش از آن تاریخ با بیرونی و بوزجانی مکاتبه می‌کرده است.

از طرف دیگر مؤلف جلد هشتم فهرست کتابخانه‌ی آستان قدس رضوی (ص ۲۷) نسبت «حبوبی» را به زعم خود غلط انگاشته و نسبت او را «خیوقی» پنداشته و این نیز اشتباه است.

باید متذکر شوم که سوتر نیز از تاریخ زندگی ابوعلی حبوبی اطلاع نداشته و چون یک نسخه از کتاب استقصاء که در آکسفورد موجود است تاریخ کتابتش در سال ۶۳۹ هجری بوده سوتر نوشته است که ابوعلی حبوبی بیش از تاریخ ۶۳۹ می‌زیسته (که البته درست است).

منبع
زندگی‌نامه‌ی ریاضی‌دانان دوره‌ی اسلامی، ابوالقاسم قربانی، مرکز نشر دانشگاهی

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ۶۰

مجله‌ی ریاضی

دوره‌ی متوسطه

فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی واطلاع رسانی

دوره‌ی هجدهم /شماره‌ی ۲/ زمستان ۱۳۸۷/شمارگان: ۱۶۰۰۰ نسخه

ISSN 1735 - 4951 www.roshdmag.ir

صندوق الکترونیکی سردبیر: Borhanm@roshdmag.ir

پیام‌گیر نشریات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲-۸۸۸۳۹۲۳۲

- نشانی دفتر مجلّه: تهران؛ صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵ تلفن دفتر مجله: ۸۸۳۰۵۸۶۲

تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ ـ ۷۷۳۳۵۱۱۰

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز

را در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می کند:

- نگارش مقاله‌های کمک‌درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می شود.

مجلّه در حکّ، اصلاح، حذف و اضافه ی مقاله ها آزاد است.

مقاله های وارده ،باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.

مقاله‌های رسیده مسترد نمی شود.

رونویسی یا فهمیدن!

یادداشت سردبیر

H66Amiri@yahoo.com

در این مجال می‌خواهم به عنوان یک معلم ریاضی کمی درددل کنم و حتی کمی هم راهنمایی. شاید تعدادی از شما دانش‌آموزان عزیز این حرف‌ها را به گوش جان بخرید!

بهتر است کمی راجع به کمال و به کمال رسیدن انسان‌ها صحبت کنیم. اصولاً یکی از بارزترین ویژگی‌های انسان که به خوبی او را از همه‌ی موجودات دیگر جدا می‌کند، ویژگی یا قدرت یادگیری اوست. کسب علم و معرفت، از ویژگی‌هایی است که فقط انسان از آن برخوردار است. در قرآن کریم، در احادیث و روایات و حتی در ادبیات و شعر ایرانیان، همواره درباره‌ی کسب و طلب علم و دانش‌اندوزی، تأکید و تأیید فراوان می‌شود، اما آیا فقط کسب علم و دانش برای به کمال رسیدن انسان کافی است؟ البته که این علم‌اندوزی و دانش‌آموزی لازم است، ولی کافی نیست!

در واقع، برای پرواز به سمت کمال، دو بال لازم داریم که یکی از آن‌ها رسیدن به معرفت است، ولی بال دوم که در واقع مکمل این معرفت است، چیست؟ آیا برای رسیدن به این معرفت و پس از نیل به آن برای ادامه‌ی حرکت به سمت کمال که حرکتی است دنباله‌دار و مستمر، به تلاش، کوشش و پشتکار نیاز نداریم؛ همان که در آموزه‌های دینی ما به مجاهدت و سعی از آن نام برده‌اند.

آری، عزیزان دانش‌آموز، به قول شاعر بزرگ ایرانی، «نابرده رنج گنج میسر نمی‌شود». این جمله در واقع تفسیری است از آیه‌ی مبارکه‌ی «لیس للانسان الا ماسعی». باید برای رسیدن به معرفت و کسب علم تلاش کنید، پشتکار داشته باشید و پس از مشخص کردن هدف و برنامه‌ریزی برای رسیدن به آن، با تلاش و سخت‌کوشی و تمرین و ممارست، به هدف نزدیک شوید و به سمت تعالی و کمال حرکت کنید.

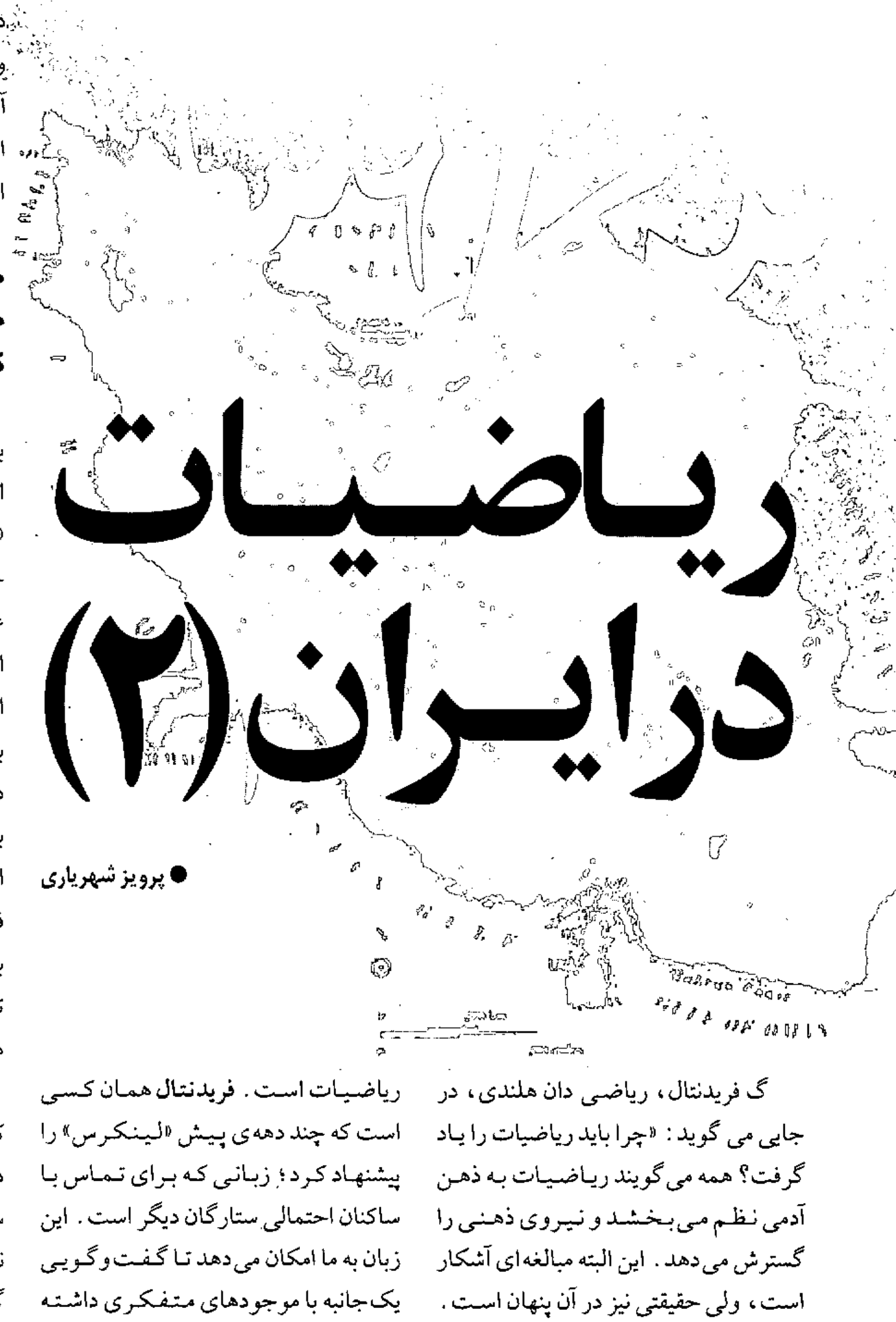
مشکلی که متأسفانه امروزه در مراکز آموزشی ما و بین بسیاری از دانش‌آموزان رواج پیدا کرده، راحت‌طلبی و به دنبال لقمه‌های حاضر و آماده و حتی جویده‌شده است. تا جایی که وقتی به مسئله‌ای تا حدی سخت در ریاضیات برخورد می‌کنند، یا به دنبال حل تشریحی آن هستند و یا بعد از کمی فکر کردن، آن را کنار می‌گذارند تا از معلم خود یا شخص دیگری سؤال کنند و اگر معلّم جواب سؤال را ندهد و بخواهد فقط با راهنمایی، دانش‌آموز خود را به تأمل و تفکر وادارد تا خودش به جواب برسد و از حل آن لذت ببرد، معلم خوبی نیست. در واقع معلم خوب از نظر چنین دانش‌آموزانی، مساوی است با معلمی که حل مسئله را به راحتی در اختیار دانش‌آموزان خود قرار دهد، لقمه را بجود و در دهان آن‌ها بگذارد و حتی به جای آن‌ها قورت بدهد! کلاس‌های درس ریاضی بیشتر به کلاس‌های جزوه‌نویسی یا به اعتقاد من کلاس رونویسی تبدیل می‌شوند!

در یک کلاس، مسئله‌ای (مسئله‌ای در احتمال شرطی) را به سه روش حل کردم و به سه جواب متفاوت رسیدم. بعد از دانش‌آموزان خواستم، به صورت گروهی (دو یا سه نفری) روی این مسئله بحث و مشخص کنند، جواب درست کدام است و اگر به یکی از جواب‌ها رسیدند، دلیل نادرست بودن دو جواب دیگر را هم بیان کنند. پس از صرف حدود ۳۰ دقیقه زمان، دانش‌آموزان دو تا سه جواب دیگر را هم برای مسئله یافتند که با جواب‌های من فرق داشت. بعضی از گروه‌ها نیز دلایل بسیار جالبی برای رد یا قبول جواب‌های من پیدا کردند. با جمع‌بندی و بحث روی جواب‌های دانش‌آموزان، به سه چهار نتیجه و تذکر مهم دست پیدا کردیم.

شاید در شروع کلاس و پس از طرح مسئله از طرف من، بسیاری از دانش‌آموزان فکر می‌کردند چرا آقا جواب صحیح را بیان نمی‌کند؟ شاید خودش هم شک دارد و بلد نیست! ولی در آخر کلاس، همگی راضی بودند و تلاشی که برای تجزیه و تحلیل آن مسئله انجام شده بود، بسیاری از نقاط مبهم را در مسائلی شبیه به آن برطرف کرد. حتی بچه‌های کلاس عادت کرده‌اند، وقتی حل مسئله‌ای را روی تخته می‌نویسم، به دقت گوش دهند و اشکالات خود را بپرسند و وقتی کاملاً حل مسئله را فهمیدند، آن را در دفتر خود یادداشت کنند. ولی نه از روی تخته، بلکه بدون نگاه کردن به تخته و فقط با استفاده از یافته‌های خودشان. این نوع نوشتن، دیگر دیکته نوشتن یا رونویسی نیست، بلکه تمرینی است بر آن‌چه که آموخته‌اند.

پس بیایید از همین فردا در کلاس درس به صورت فعال و پرتلاش ظاهر شویم و فقط به دنبال آماده‌شده‌ها و راحت‌الحلقوم‌ها نباشیم!

ریاضیات در ایران (۲)



● پرویز شهریاری

گ فریدنتال، ریاضی دان هلندی، در جایی می گوید: «چرا باید ریاضیات را یاد گرفت؟ همه می گویند ریاضیات به ذهن آدمی نظم می بخشد و نیروی ذهنی را گسترش می دهد. این البته مبالغه‌ای آشکار است، ولی حقیقتی نیز در آن پنهان است. کسی که با ریاضیات سروکار دارد، اندوخته‌ای از تجربه‌ی ریاضی را با خود دارد و به طور طبیعی و حتی ناخودآگاه در هر گام و هر اقدام خود، از روش‌های اندیشیدن ریاضی استفاده می کند.»

این نوعی داوری منصفانه درباره‌ی ریاضیات است. **فریدنتال** همان کسی است که چند دهه‌ی پیش «لینکرس» را پیشنهاد کرد؛ زبانی که برای تماس با ساکنان احتمالی ستارگان دیگر است. این زبان به ما امکان می دهد تا گفت‌وگویی یک‌جانبه با موجودهای متفکری داشته باشیم که به هیچ‌کدام از زبان‌های زمینی آشنایی ندارند و در ضمن چیزی درباره‌ی زندگی زمینی نمی دانند. البته نمی‌توان منتظر پاسخ یا پرسش از گیرنده‌ی احتمالی پیام بود؛ چرا که رفتن و برگشتن پیام‌های رادیویی، چه بسا سده‌ها طول بکشد و به زندگی کوتاه ما دست ندهد. آدمی باید به طور عادی بر منطق مسلط باشد و غنی‌ترین تخیل را داشته باشد؛ شخصیتی خارق‌العاده داشته باشد. کوتاه‌سخن، ریاضی‌دان باشد تا بتواند در برابر خود، چنین مسئله‌ای را قرار دهد و از عهده‌ی حل آن برآید. حتی در این تلاش بلند پروازانه‌ی فریدنتال، با وجود این که درباره‌ی «منافع» آن حتی در آینده‌ی نزدیک نمی‌توان با خوش‌بینی اظهارنظر کرد، عنصر اساسی عبارت است از خدمت به انسان.

حق با کیست؟ هواداران ریاضیات خالص یا دوستداران ریاضیات کاربردی؟

این پرسش تازه نیست و از دیرباز مورد بحث ریاضی‌دانان و غیر ریاضی‌دانان بوده است. می‌دانیم دانشمندان و فیلسوفان «دوران طلایی یونان»، تنها به ریاضیات خالص، ریاضیاتی که هیچ گونه فایده‌ی عملی نداشته باشد، علاقه‌مند بودند. افلاطون تجربه را تحقیر می کرد و ارسطو، اگرچه در پیری به تجربه و مشاهده گرایش بیشتری پیدا کرد، با اتکا به استدلال‌های ذهنی و تلاش در مجرد کردن همه‌ی بنیان‌های اعتقادی، در واقع به نحوی با استاد خود افلاطون هم سویی داشت. فیثاغورس ابهام را چون زشتی و ظلمت، به بدی نسبت می‌داد و وضوح و تعبیر دقیق را تنها از راه کشف رمزهای عدد، که وسیله همه‌ی پدیده‌ها موجود است، میسر می‌دید.

آندره آروسفل، در سخنرانی خود در کنگره‌ی ریاضی‌دانان در «لیون» (فرانسه) در اوت ۱۹۶۹ یا شهریور ۱۳۴۸، علت سقوط دانش یونانی را همین مجردگرایی نمایندگان دانش یونانی قلمداد کرد. او گفت: «اصل اقلیدس، محصول سالیان دراز فعالیت‌های گوناگون بشری در طول بیش از ۱۸۰۰ سال در زمینه‌های مساحی، کشاورزی و اندازه‌گیری سطح و حجم و نماینده‌ی اوج اندیشه‌ی انسانی بوده است. ولی گرایش ریاضی‌دانان یونانی به ساختن ریاضیات مجرد و کوتاه شدن دست

فیزیک‌دانان در پدید آوردن رابطه‌های لازم برای اندیشه‌های خودشان، دانش یونانی را از پیشرفت بازداشت»

فه ایکس کلاین، ریاضی‌دان آلمانی، در سال ۱۸۹۳ در سخن‌رانی مقدماتی کنگره‌ی ریاضی‌دانان در شیکاگو، با زبان دیگری نگرانی خود را از تخصص گرایی ریاضی‌دانان و دور شدن آنان از دانش عمومی ابراز داشت. او گفت: «پیشینیان بزرگ ما، **لاگرانژ و گوس**، به همه‌ی مسئله‌های ریاضیات و کاربرد آن‌ها احاطه داشتند. کششی که در سده‌ی نوزدهم، به سمت ویژه‌کاری و تخصص به‌وجود آمد، موجب کم شدن علاقه‌ی ریاضی‌دانان به دانش عمومی شد. با وجود این در دوره‌های اخیر، تمایل به یکی کردن شاخه‌های به‌ظاهر گوناگون و دور از هم نظریه‌های ریاضی، دوباره پیدا شده است. به یاری مفهوم گروه، این امکان را به‌دست آوردیم که هندسه و نظریه‌ی عددها را که در دورانی طولانی هر کدام در مسیری یک‌بُعدی و مستقیم و با روش‌ها و مسئله‌های به‌کلی متفاوتی پیش می‌رفتند، به عنوان دو جنبه‌ی متفاوت از یک نظریه، بررسی کنیم.»

شاید بتوان نماینده‌ی مشخص ریاضیات خالص را در زمان ما، گروه **نیکلای بورباکی** در فرانسه دانست. این نام بیشتر یک عنوان حقوقی و یک نام مستعار است که گروهی از شایسته‌ترین ریاضی‌دانان فرانسوی را دربرگرفته و بیش از ۵۰ سال است که با ارزش‌ترین کتاب‌های نظری ریاضیات را زیر همین عنوان و با نام «مقدمه‌های ریاضیات» منتشر می‌کنند. ولی حتی این نمایندگان «جریان محض ریاضیات هم» اهمیت ریاضیات را در ساختمان پرشکوه آینده‌ی جامعه‌ی انسانی انکار نمی‌کنند. بورباکی نقش خود را هم‌چون معمار چیره‌دستی می‌داند که به تجدیدبنای مرکز قدیمی شهر مشغول است و لازم نمی‌بینند تا درباره‌ی کناره‌ها و حومه‌ی شهر صحبت کند؛ زیرا خود نیاز زندگی، کوی‌ها و ساختمان‌های تازه را ایجاد می‌کند.

«وظیفه‌ی ریاضی‌دان، تجدیدبنا و سازمان‌دهی مرکز شهری است که ریاضیات نام دارد». ساختمان این شهر با دامنه‌ی گسترده و به یاری کسان با استعداد در جریان است. ولی حتی آن که در مرکز شهر زندگی می‌کند، نمی‌تواند رابطه‌ی خود را با تمامی اطراف خود به‌کلی قطع کند. بسیاری از ریاضی‌دانان به تدریج از مرکز گذشته‌اند و به کناره‌ها رو آورده‌اند. جایی که هوا آفتاب بیشتری دارد و در همان جا در شهرها و کشورهای همسایه، آغاز به ساختن راه‌های تازه کرده‌اند؛ جایی که دورنمای گسترده‌تر و پهنه‌ی گشوده‌تر و آزادی و امکان بیشتر، الهام‌بخش فعالیت آن‌ها شده است. به همین دلیل است که اطراف و کناره‌ها جان می‌گیرند، محله‌هایی که به شهرهای زندگی نزدیک‌ترند و رابطه‌ی بیشتری با آن‌ها دارند، مسکونی‌تر می‌شوند. فیزیک، صنعت، اقتصاد، بیولوژی، پزشکی و مانند آن، و محله‌هایی که به کلی جوان‌اند، به‌وجود می‌آیند. به‌سختی می‌توان درباره‌ی هدف این محله‌ها و شهرک‌ها صحبت کرد؛ به‌ویژه که آگاهی بر همه‌ی آن‌ها کار ساده‌ای نیست».

با همه‌ی این‌ها، مضمون عینی آن ریاضیاتی که در دنیای قدیم و در سده‌های میانه به‌دست آمده است، هنوز و برای ریاضیات امروزی هم گنجینه‌ای پرارزش و ذخیره‌ای طلایی به شما می‌رود.

هرکسی استعداد یادگیری ریاضیات را دارد

ریاضیات هم مثل هر جنبه‌ی دیگری از شناخت آدمی، هم دانش است و هم هنر. ریشه‌های علمی و هنری در هر موجودی که با کار خلاق انسان سروکار دارد، دیده می‌شود. اگر بخشی از دانش را قابل آزمایش و هنر را نتیجه‌ی خلاقیت و استعداد خاص انسان بدانیم، معلوم می‌شود که در همه‌ی فعالیت‌های انسانی، دانش و هنر به‌هم پیوسته‌اند. تا آن‌جا که شما موسیقی را یاد می‌گیرید، دانش است، ولی از آن‌جا که می‌خواهید چیزی تازه ارائه کنید، هنر نام دارد. شما می‌توانید نُت‌خوانی را یاد بگیرید، روش به دست گرفتن ویولن را هم بیاموزید و حتی می‌توانید در اثر تمرین و آزمایش، بسیاری از آهنگ‌های موجود را بنوازید. تا این‌جا با جنبه‌هایی از موسیقی سروکار دارید که دارای قانون است و بنابراین هرکسی می‌تواند دیر یا زود آن‌ها را فرا بگیرید. ولی هرکسی که از این قانون‌ها آگاه شد، هنوز «آهنگ‌ساز» نیست. از این‌جاست که هنر آغاز می‌شود و استعدادهای هنری بروز می‌کنند.

این را هم بگوییم که هیچ معیاری وجود ندارد که از آغاز بتوان استعداد هنری را کشف کرد. چه‌بسیار کسانی که در میان مردم وجود دارند و اگر با قانون‌های موسیقی آشنا می‌شدند و امکانات لازم را در اختیار داشتند، می‌توانستند موسیقی‌دان هنرمندی از کار درآیند. طبعاً درباره‌ی ریاضیات هم به همین گونه است. تا آن‌جای ریاضیات که به قاعده درآمده و زاویه‌های گوناگون آن روشن شده است، «دانش» است و برای هرکسی قابل دست‌رس. ولی از آن‌جایی که به مرز ناشناخته‌ای از ریاضیات برمی‌خوریم، نیاز به خلاقیت دارد، استعداد می‌خواهد و هنر.

همین‌جا این مطلب را هم بگوییم که تدریس ریاضی هم از این قاعده جدا نیست. شرط لازم معلمی ریاضی دانستن است، یعنی روشن است که معلم ریاضی باید بر آن‌چه می‌خواهد درس بدهد، مسلط باشد، ولی این کافی نیست. معلم باید هنر معلمی داشته باشد؛ چیزی که بدون آن می‌تواند موجب سرخوردگی و سردرگمی بسیاری از دانش‌آموزان با استعداد شود. هرکسی که معلمی می‌کند باید بر موضوع‌های درس خود تسلط داشته باشد، ولی هرکس که تسلط کافی بر مسئله‌ها و قضیه‌های ریاضی داشته باشد، نمی‌تواند معلم خوبی باشد.

ادامه دارد...

حد در یک نقطه (۱)

● احمد قندهاری

۱. میل کردن x به سمت یک عدد

فرض کنید می‌خواهیم x را از سمت چپ عدد ۲، به ۲ نزدیک کنیم، ولی به آن نرسد؛ به صورت زیر:

$$x = ۱، ...، ۱/۴، ...، ۱/۷، ...، ۱/۹، ۱/۹۹، ۱/۹۹۹، ۱/۹۹۹۹، ...$$

ملاحظه می‌کنید که هر قدر تعداد ۹های سمت راست مُمیز را زیاد کنیم، عدد حاصل مرتباً به ۲ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود، ولی به آن نمی‌رسد. چون x از طرف اعداد کمتر از ۲ به آن نزدیک شده است، می‌نویسیم:

$$x \to ۲^-$$

حال x را از طرف اعداد بزرگ‌تر از ۲ به عدد آن نزدیک می‌کنیم؛ به صورت زیر:

$$x = ۳، ...، ۲/۷، ...، ۲/۳، ...، ۲/۱، ۲/۰۱، ۲/۰۰۱، ۲/۰۰۰۱، ۲/۰۰۰۰۱، ...$$

باز هم ملاحظه می‌کنیم، هر قدر تعداد ۰ های بین ممیز و عدد ۱ را زیاد کنیم، عدد حاصل مرتباً به ۲ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود، ولی به آن نمی‌رسد. چون x از طرف اعداد بزرگ‌تر از ۲ به آن نزدیک شده است، می‌نویسیم:

$$x \to ۲^+$$

همسایگی

نامساوی $|x-۲| < ۱$ را درنظر می‌گیریم و آن را حل می‌کنیم؛ به صورت زیر:

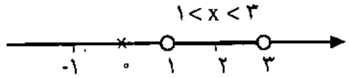
$$|x-۲| < ۱ \Rightarrow -۱ < x-۲ < ۱ \Rightarrow ۱ < x < ۳$$

عدد میانی بازه‌ی (۳و۱)، عدد ۲ است. فرض می‌کنیم $x = ۲$.

اگر x را مرکز قرار دهیم، آن‌گاه بازه‌ی (۳و۱) را یک همسایگی متقارن به مرکز $x = ۲$ به شعاع ۱ گوییم. چنان‌چه از بازه‌ی (۳و۱)، مرکز همسایگی را برداریم، یعنی $(۱,۳) - \{۲\}$، آن‌گاه این همسایگی را یک همسایگی متقارن محذوف (مرکز حذف‌شده) عدد ۲ به شعاع ۱ گوییم.

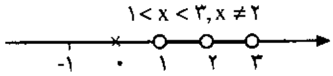
همسایگی متقارن عدد ۲ به شعاع ۱

$$۱ < x < ۳$$



همسایگی متقارن محذوف عدد ۲ به شعاع ۱

$$۱ < x < ۳, x \neq ۲$$



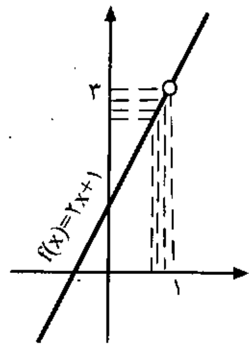
توجه: در حالت کلی، نامساوی $|x-a|<r$ یا $a-r<x<a+r$ را یک همسایگی متقارن به مرکز a و شعاع r گوییم.

حدّ چپ تابع

بررسی حدّ چپ تابع را با یک مثال شروع می‌کنیم. فرض کنید تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=2x+1$ باشد. می‌خواهیم در این تابع x را از طرف اعداد کوچک‌تر از ۱ به ۱ نزدیک و رفتار تابع f را در این فرایند بررسی کنیم. برای درک بهتر، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹۹
f(x)	۲/۸	۲/۹۸	۲/۹۹۸	۲/۹۹۹۸	۲/۹۹۹۹۸

ملاحظه می‌کنیم، وقتی x از طرف اعداد کوچک‌تر از ۱ به آن نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود، رفتار تابع نشان می‌دهد که f(x) به عدد ۳ نزدیک و نزدیک‌تر شده است. به نظر می‌رسد، وقتی $x\to1^-$، آن‌گاه حدّ f(x) برابر ۳ است. از این جدول نتایج زیر به دست می‌آید:



$0<1-x<0/1 \Rightarrow |f(x)-3|<0/2$

$0<1-x<0/01 \Rightarrow |f(x)-3|<0/02$

$0<1-x<0/001 \Rightarrow |f(x)-3|<0/002$

$0<1-x<0/0001 \Rightarrow |f(x)-3|<0/0002$

$0<1-x<0/00001 \Rightarrow |f(x)-3|<0/00002$

این نتایج را به صورت زیر هم می‌توان نشان داد:

اگر بخواهیم $|f(x)-3|<0/2$ باشد، باید: $0<1-x<0/1$

اگر بخواهیم $|f(x)-3|<0/02$ باشد، باید: $0<1-x<0/01$

اگر بخواهیم $|f(x)-3|<0/002$ باشد، باید: $0<1-x<0/001$

اگر بخواهیم $|f(x)-3|<0/0002$ باشد، باید: $0<1-x<0/0001$

اگر بخواهیم $|f(x)-3|<0/00002$ باشد، باید: $0<1-x<0/00001$

می‌توان گفت: f(x) را به حدّ خودش به هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم نزدیک کنیم، به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی به ۱ نزدیک کنیم.

مثال: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=2x+1$ را در نظر می‌گیریم و $x\to1^-$. می‌خواهیم: $|f(x)-3|<\frac{1}{250}$ باشد. تعیین کنید x را چه‌قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم.

حل: چنین عمل می‌کنیم:

$$|f(x)-3|<\frac{1}{250} \Rightarrow |(2x+1)-3|<\frac{1}{250} \Rightarrow |2x-2|<\frac{1}{250}$$

$$\Rightarrow 2|x-1|<\frac{1}{250} \Rightarrow \underset{x\to1^-}{|x-1|}<\frac{1}{500} \Rightarrow 0<1-x<\frac{1}{500}$$

یعنی x باید از سمت چپ عدد ۱ به عدد ۱ آن‌قدر نزدیک شود که فاصله‌اش تا عدد ۱ کمتر از $\frac{1}{500}$ باشد.

پس اگر بخواهیم f(x) به ۳ آن‌قدر نزدیک شود که فاصله‌ی f(x) از عدد ۳ کمتر از $\frac{1}{250}$ باشد، باید x را از سمت چپ به عدد ۱ آن‌قدر نزدیک کنیم که فاصله‌ی ۱ تا عدد x کمتر از $\frac{1}{500}$ شود.

تمرین: اگر در مثال بالا بخواهیم $|f(x)-3|<\frac{1}{720}$ باشد، تعیین کنید x را از سمت چپ چه‌قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم.

جواب: $0<1-x<\frac{1}{1440}$

تعریف حدّ چپ تابع

فرض می‌کنیم تابع f در بازه‌ی (a,x_0) تعریف شده باشد. می‌گوییم حدّ چپ تابع f وقتی $x\to x_0^-$، عدد حقیقی L است؛ اگر بتوان f(x) را به هر اندازه‌ی دل‌خواه به L نزدیک کنیم، به شرطی که $x<x_0$ را به اندازه‌ی کافی به x_0 نزدیک کنیم. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L$$

تمرین: می‌دانیم: $\lim_{x\to2^-}(4x+3)=11$، می‌خواهیم $|11-(4x+3)|<\frac{1}{400}$ باشد. تعیین کنید x را چه‌قدر باید از سمت چپ ۲ به عدد ۲ نزدیک کنیم.

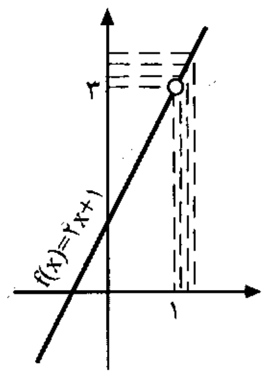
جواب: $0<2-x<\frac{1}{1600}$

حدّ راست تابع

دوباره تابع با ضابطه‌ی $f(x)=2x+1$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم، x از طرف اعداد بزرگ‌تر از ۱ به عدد ۱ نزدیک شود؛ یعنی $x\to1^+$. می‌خواهیم رفتار تابع f را بررسی کنیم. به این منظور جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

x	۱/۱	۱/۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۰۰۱
f(x)	۳/۲	۳/۰۲	۳/۰۰۲	۳/۰۰۰۲	۳/۰۰۰۰۲

ملاحظه می‌کنیم، وقتی $x > ۱$ و به عدد ۱ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود، رفتار تابع نشان می‌دهد که مقدار تابع (f(x)) به عدد ۳ نزدیک و نزدیک‌تر شده است. به‌نظر می‌رسد که وقتی $x \to ۱^+$، آن‌گاه حدّ f(x) برابر ۳ است. از این جدول نتایج زیر به‌دست می‌آید:



$$۰ < x - ۱ < ۰/۱ \Rightarrow |f(x) - ۳| < ۰/۲$$
$$۰ < x - ۱ < ۰/۰۱ \Rightarrow |f(x) - ۳| < ۰/۰۲$$
$$۰ < x - ۱ < ۰/۰۰۱ \Rightarrow |f(x) - ۳| < ۰/۰۰۲$$
$$۰ < x - ۱ < ۰/۰۰۰۱ \Rightarrow |f(x) - ۳| < ۰/۰۰۰۲$$
$$۰ < x - ۱ < ۰/۰۰۰۰۱ \Rightarrow |f(x) - ۳| < ۰/۰۰۰۰۲$$

این نتایج را به صورت زیر نیز می‌توان بیان کرد:

اگر بخواهیم $|f(x) - ۳| < ۰/۲$ باشد، باید: $۰ < x - ۱ < ۰/۱$

اگر بخواهیم $|f(x) - ۳| < ۰/۰۲$ باشد، باید: $۰ < x - ۱ < ۰/۰۱$

اگر بخواهیم $|f(x) - ۳| < ۰/۰۰۲$ باشد، باید: $۰ < x - ۱ < ۰/۰۰۱$

اگر بخواهیم $|f(x) - ۳| < ۰/۰۰۰۲$ باشد، باید: $۰ < x - ۱ < ۰/۰۰۰۱$

اگر بخواهیم $|f(x) - ۳| < ۰/۰۰۰۰۲$ باشد، باید: $۰ < x - ۱ < ۰/۰۰۰۰۱$

می‌توان گفت: می‌توانیم $|f(x) - ۳|$ را به هر اندازه که بخواهیم، کوچک کنیم؛ به شرطی که x را از سمت راست به عدد ۱ به اندازه‌ی کافی نزدیک کنیم.

مثال: تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ۲x + ۱$ را در نظر می‌گیریم و $x \to ۱^+$. می‌خواهیم $|f(x) - ۳| < \frac{۱}{۷۵۰}$ باشد. تعیین کنید x را چه‌قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم.

حل:

$$|f(x)-۳| < \frac{۱}{۷۵۰} \Rightarrow |۲x+۱-۳| < \frac{۱}{۷۵۰} \Rightarrow |۲(x-۱)| < \frac{۱}{۷۵۰}$$

$$\Rightarrow ۲|x-۱| < \frac{۱}{۷۵۰} \Rightarrow \underset{x\to ۱^+}{|x-۱|} < \frac{۱}{۱۵۰۰} \Rightarrow ۰ < x-۱ < \frac{۱}{۱۵۰۰}$$

پس x را از طرف اعداد بزرگ‌تر از ۱ به عدد ۱ آن‌قدر باید نزدیک کنیم که $x - ۱$ کمتر از $\frac{۱}{۱۵۰۰}$ باشد.

تعریف حدّ راست تابع

فرض می‌کنیم تابع f در بازه‌ی $(x_۰, b)$ تعریف شده باشد. می‌گوییم حدّ راست تابع f وقتی $x \to x_۰^+$، عدد حقیقی L است؛ اگر بتوان f(x) را به هر اندازه‌ی دل‌خواه به L نزدیک کنیم، به شرطی که x را از طرف اعداد بزرگ‌تر از $x_۰$ به اندازه‌ی کافی به $x_۰$ نزدیک کنیم. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to x_۰^+} f(x) = L$$

مثال: داریم: $\lim_{x\to ۱^+}(-۴x+۳) = -۱$. می‌خواهیم: $|(-۴x+۳)+۱| < \frac{۱}{۳۰۰}$. x را از طرف اعداد بزرگ‌تر از ۱ چه‌قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم؟

حل:

$$|(-۴x+۳)+۱| < \frac{۱}{۳۰۰} \Rightarrow |-۴x+۴| < \frac{۱}{۳۰۰} \Rightarrow |-۴(x-۱)| < \frac{۱}{۳۰۰}$$

$$\Rightarrow ۴|x-۱| < \frac{۱}{۳۰۰} \Rightarrow \underset{x\to ۱^+}{|x-۱|} < \frac{۱}{۱۲۰۰} \Rightarrow ۰ < x-۱ < \frac{۱}{۱۲۰۰}$$

پس x را از طرف اعداد بزرگ‌تر از ۱ به عدد ۱ آن‌قدر باید نزدیک کنیم که $x - ۱$ کمتر از $\frac{۱}{۱۲۰۰}$ باشد.

تعریف حدّ تابع در $x_۰$

فرض می‌کنیم تابع f در یک همسایگی $x_۰$ تعریف شده باشد (ممکن است تابع در خود $x_۰$ تعریف نشده باشد). می‌گوییم حدّ f(x) وقتی $x \to x_۰$، برابر عدد حقیقی L است، اگر بتوان f(x) را به هر اندازه‌ی دل‌خواه به L نزدیک کنیم؛ به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی به $x_۰$ نزدیک کنیم. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to x_۰} f(x) = L$$

به عبارت دیگر، حدّ f(x) وقتی $x \to x_۰$، برابر عدد حقیقی L است، اگر بتوان $|f(x) - L|$ را هر اندازه که بخواهیم کوچک کنیم؛ به شرطی که $|x - x_۰|$ را به اندازه‌ی کافی کوچک کنیم.

مثال: تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ۳x - ۵$ را در نظر می‌گیریم. اگر $x \to ۱$، آن‌گاه حدّ f(x) برابر ۲- است. می‌خواهیم $|f(x)+۲| < \frac{۱}{۱۰۰}$ باشد. x را چه‌قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم؟

حل:

$$|f(x)+۲| < \frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow |۳x-۵+۲| < \frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow |۳x-۳| < \frac{۱}{۱۰۰}$$

$\Rightarrow |3(x-1)|<\frac{1}{100} \Rightarrow 3|x-1|<\frac{1}{100}$ یا $|x-1|<\frac{1}{300}$

$0<|x-1|<\frac{1}{300}$

پس x را آن قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم که $|x-1|$ (که مثبت است) کوچک‌تر از $\frac{1}{300}$ بشود.

توجه: اگر $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$ و $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L$ باشد، آن‌گاه می‌گوییم تابع f در x_0 حد دارد و حد آن برابر عدد حقیقی L است.

قضایای حد

قضیه‌ی ۱. فرض می‌کنیم a و b اعداد حقیقی و $n\in N$ باشد.

الف) $\lim_{x\to a} b=b$

ب) $\lim_{x\to a} x=a$

ج) $\lim_{x\to a} x^n=a^n$

قضیه‌ی ۲. فرض می‌کنیم a، b و L اعداد حقیقی و $n\in N$ و $\lim_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim_{x\to a} g(x)=L_2$ باشد. آن‌گاه داریم:

الف) $\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=L_1\pm L_2$

ب) $\lim_{x\to a} b\,f(x)=b\,L_1$

ج) $\lim_{x\to a} f(x).g(x)=L_1.L_2$

د) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L_1}{L_2}$ با شرط $L_2\neq 0$

قضیه‌ی ۳. اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L_1\in\mathbb{R}$ و $\lim_{x\to a} g(x)=0$ باشد، آن‌گاه:

$\lim_{x\to a} f(x).g(x)=L(0)=0$

قضیه‌ی ۴. اگر $f(x)=m_0x^n+m_1x^{n-1}+\cdots+m_n$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n باشد، آن‌گاه:

$\lim_{x\to a} f(x)=m_0a^n+m_1a^{n-1}+\cdots+m_n$

قضیه‌ی ۵. اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ باشد، آن‌گاه:

$\lim_{x\to a}|f(x)|=|L|$

قضیه‌ی ۶. اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ و $L\geq 0$ و $n\in N$ باشد، آن‌گاه: $\lim\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{L}$. اگر n فرد باشد، شرط $L\geq 0$ لازم نیست.

قضیه‌ی ۷. اگر $\forall x\in\mathbb{R}$ و $f(x)\leq g(x)$ و f و g در a حد داشته باشند، آن‌گاه: $\lim_{x\to a} f(x)\leq \lim_{x\to a} g(x)$.

قضیه‌ی ۸. حد یک تابع در $x=a$ در صورت وجود یکتاست.

مثال: به کمک قضیه‌ی حد، حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-8x}{x^3+4x-1}$

$$=\frac{\lim_{x\to 1}(x^2-8x)}{\lim_{x\to 1}(x^3+4x-1)}=\frac{\lim_{x\to 1}x^2-\lim_{x\to 1}8x}{\lim_{x\to 1}x^3+\lim_{x\to 1}4x-\lim_{x\to 1}1}=\frac{1-8}{1+4-1}=\frac{-7}{4}$$

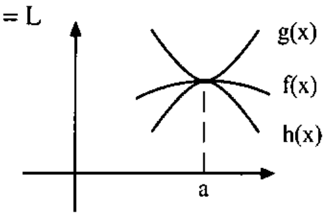
ب) $\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{x^2-x+4}{3x^2+x+4}}=\sqrt[3]{\frac{\lim_{x\to 1}(x^2-x+4)}{\lim_{x\to 1}(3x^2+x+4)}}$

$$=\sqrt[3]{\frac{\lim_{x\to 1}x^2-\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}4}{\lim_{x\to 1}(3x^2)+\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}4}}=\sqrt[3]{\frac{1-1+4}{3+1+4}}=\sqrt[3]{\frac{4}{8}}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

قضیه‌ی فشردگی

فرض می‌کنیم به ازای هر x در یک همسایگی a، f(x) بین g(x) و h(x) باشد، هرگاه g(x) و h(x) وقتی $x\to a$، دارای حد $L\in\mathbb{R}$ باشند، آن‌گاه:

$\lim_{x\to a} f(x)=L$



مثال: اگر $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ باشد، می‌دانیم $-1\leq\sin\frac{1}{x}\leq 1$ و (با فرض $x>0$) داریم: $-x\leq x\sin\frac{1}{x}\leq x$

آن‌گاه: $\lim_{x\to 0^+}(-x)\leq\lim_{x\to 0^+}x\sin\frac{1}{x}\leq\lim_{x\to 0^+}(x)$

$0\leq\lim_{x\to 0^+}x\sin\frac{1}{x}\leq 0\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}x\sin\frac{1}{x}=0$

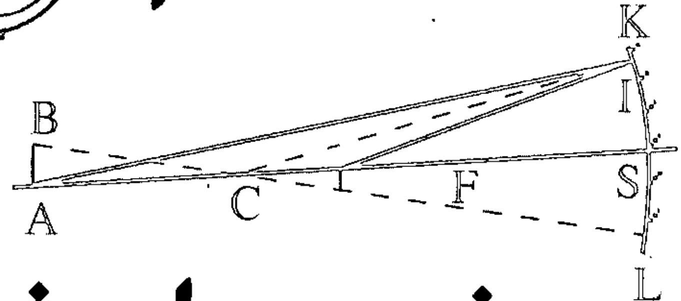
چنان‌چه $x<0$ باشد، داریم: $-x\geq x\sin\frac{1}{x}\geq x$ و:

$\lim_{x\to 0^-}(x)\leq\lim_{x\to 0^-}x\sin\frac{1}{x}\leq\lim_{x\to 0^-}(-x)\Rightarrow 0\leq\lim_{x\to 0^-}x\sin\frac{1}{x}\leq 0$

$\Rightarrow\lim_{x\to 0^-}x\sin\frac{1}{x}=0$

پس: $\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$

❑❑❑



قضیه‌ی نیم‌ساز مثلث و کاربردهایی از آن

●دکتر احمد شرف‌الدین

اشاره

در مقاله‌ی حاضر، قضیه‌ی نیم‌ساز مثلث و کاربردهایی از آن آمده است. اثبات قضیه‌ها از آن نگارنده است و امکان دارد، تازگی داشته باشد. فهرست مطالب را در این‌جا یاد می‌کنیم:

۱. اثبات‌های تازه برای قضیه‌ی نیم‌ساز مثلث (نیم‌ساز هر زاویه‌ی مثلث، ضلع روبه‌رو را به نسبت دو ضلع دیگر مثلث بخش می‌کند).

۲. اثبات تازه‌ای برای همرسی سه نیم‌ساز داخلی مثلث.

۳. قضیه‌ای درباره‌ی دو مثلث که دارای یک زاویه‌ی مساوی و یک زاویه‌ی مکمل‌اند.

۴. تعمیم قضیه‌ی نیم‌ساز مثلث در چهاروجهی.

۵. محاسبه‌ی طول نیم‌ساز مثلث با به‌کارگیری دستور دکارت در تقسیم توافقی.

۶. به‌کارگیری قضیه‌ی نیم‌ساز مثلث در اثبات فرمول‌های دکارت و نیوتن در آینه‌های کروی (برگرفته از یک کتاب فیزیک).

۷. کاربرد یک رابطه‌ی توافقی تازه در اثبات قضیه‌ی اساسی قطب و قطبی.

* * *

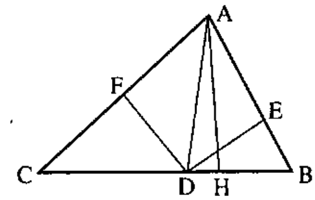
اثبات مطالب یاد شده در فهرست

۱. قضیه: نیم‌ساز هر زاویه‌ی مثلث، ضلع روبه‌رو را بر نسبت دو ضلع دیگر بخش می‌کند.

برهان نخست. مثلث ABC و نیم‌ساز AD را درنظر می‌گیریم. می‌خواهیم درستی تساوی بعد را ثابت کنیم:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

برای اثبات، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم و از نقطه‌ی D پای نیم‌ساز، دو عمود DE و DF را به ترتیب بر دو خط AB و AC فرود می‌آوریم.



مساحت‌های دو مثلث ADB و ADC را به ترتیب S_1 و S_2 می‌نامیم. دو رابطه زیر را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} S_1=\frac{1}{2}\overline{DB}.\overline{AH} \\ S_2=\frac{1}{2}\overline{DC}.\overline{AH} \end{cases}$$

از دو تساوی بالا نتیجه می‌شود:

$$(a)\qquad \frac{S_1}{S_2}=\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$$

نیز دو رابطه‌ی زیر محقق است:

$$\begin{cases} S_1=\frac{1}{2}\overline{AB}.\overline{DE} \\ S_2=\frac{1}{2}\overline{AC}.\overline{DF} \end{cases}$$

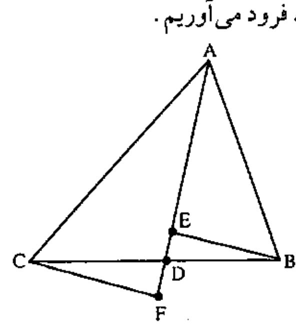
چون $\overline{DE}=\overline{DF}$ (زیرا نقطه‌ی D روی نیم‌ساز زاویه‌ی A قرار دارد) پس:

$$(b)\qquad \frac{S_1}{S_2}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

از دو رابطه‌ی (a) و (b)، رابطه‌ی مطلوب به‌دست می‌آید:

❁ ❁ ❁

برهان دوم: در مثلث ABC، از دو رأس B و C، دو عمود BE و CF را بر نیم‌ساز AD فرود می‌آوریم.



دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABE و ACF متشابه‌اند. زیرا زاویه‌های آن‌ها مساوی است (توجه می‌کنیم که خط AD نیم‌ساز زاویه‌ی A است). از تشابه دو مثلث یاد شده، رابطه‌ی زیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{CF}}$$

دو مثلث DBE و DCF متشابه‌اند، زیرا دو خط BE و CF موازی‌اند. پس:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{CF}}$$

از مقایسه‌ی دو رابطه‌ی اخیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$$

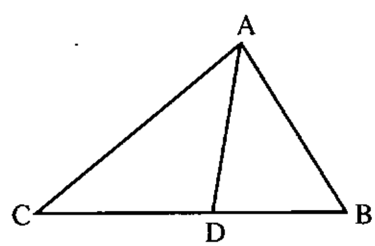
❁ ❁ ❁

برهان سوم: نخست قضیه‌ی سینوس‌ها را در مثلث یادآوری می‌کنیم:

قضیه‌ی سینوس‌ها: در مثلث ABC، رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

a، b، c طول‌های اضلاع روبه‌رو به زاویه‌های A، B، C هستند.



با به‌کارگیری قضیه‌ی سینوس‌ها، در مثلث ADB چنین می‌نویسیم:

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(ADB)}=\frac{\overline{DB}}{\sin(BAD)}$$

و نیز در مثلث ADC می‌نویسیم:

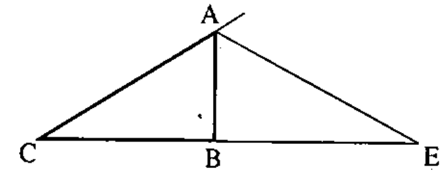
$$\frac{\overline{AC}}{\sin(ADC)}=\frac{\overline{DC}}{\sin(DAC)}$$

از دو رابطه‌ی اخیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$$

(توجه کنیم که چون دو زاویه‌ی ADC و ADB مکمل‌اند، سینوس‌های مساوی دارند.)

تمرین: قضیه‌ی ۱ را درباره‌ی نیم‌ساز خارجی مثلث ثابت کنید.

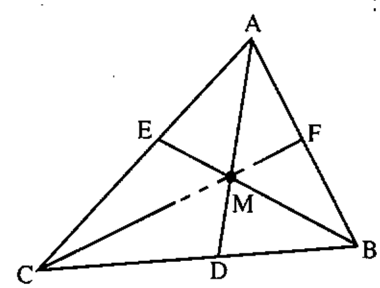


$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{EC}}$$

***

۲. قضیه: نیم‌سازهای داخلی هر مثلث همرس‌اند.

برهان: در مثلث ABC نیم‌سازهای داخلی AD، BE و CF را درنظر می‌گیریم:



نقطه‌ی برخورد دو نیم‌ساز AD و BE را M و نقطه‌ی برخورد دو نیم‌ساز AD و CF را N می‌نامیم. ثابت می‌کنیم که دو نقطه‌ی M و N برهم منطبق‌اند و از آن نتیجه می‌گیریم که سه نیم‌ساز داخلی هر مثلث همرس‌اند.

خط BE نیم‌ساز زاویه‌ی B در مثلث ABD است. بنابر قضیه‌ی (۱) می‌توان نوشت:

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MD}}$$

خط CF نیم‌ساز زاویه‌ی C از مثلث ACD است. بنابر قضیه‌ی (۱) می‌توان نوشت:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{ND}}$$

خط AD نیم‌ساز زاویه‌ی A از مثلث ABC است. بنابر قضیه‌ی (۱) می‌توان نوشت:

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CD}}$$

از سه رابطه‌ی اخیر نتیجه می‌شود:

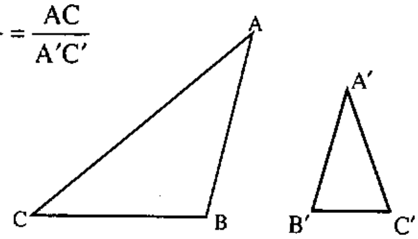
$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{ND}}$$

از این رابطه نتیجه می‌گیریم که نقطه‌ی M بر نقطه‌ی N منطبق است و صحت قضیه‌ی مورد نظر ثابت می‌شود.

***

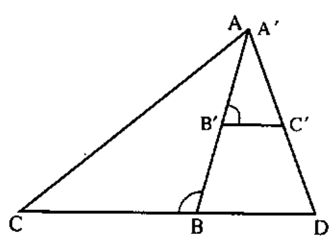
۳. قضیه: اگر در دو مثلث ABC و A′B′C′، دو زاویه‌ی A و A′ مساوی و دو زاویه‌ی B و B′ مکمل باشند، آن‌گاه چنین داریم:

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$



یعنی نسبت اضلاع مقابل به دو زاویه‌ی مساوی، برابر است با نسبت اضلاع مقابل به دو زاویه‌ی مکمل

برهان: دو مثلث ABC و A′B′C′ را مانند شکل زیر پهلوی هم می‌گذاریم:



نقطه‌ی برخورد دو خط BC و A′C′ را D می‌نامیم. چون دو زاویه‌ی B و B′ مکمل‌اند، پس دو خط BD و B′C′ موازی‌اند. چون دو زاویه‌ی A و A′ مساوی‌اند، پس خط AB نیم‌ساز زاویه‌ی CAD در مثلث ACD است. از تشابه دو مثلث A′B′C′ و A′BD رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{A'C'}{A'D} = \frac{B'C'}{BD}$$

بنابر قضیه‌ی (۱) درباره‌ی نیم‌ساز، می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{A'D}{BD} = \frac{AC}{BC}$$

از دو رابطه‌ی اخیر رابطه‌ی زیر که مطلوب است، حاصل می‌شود:

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

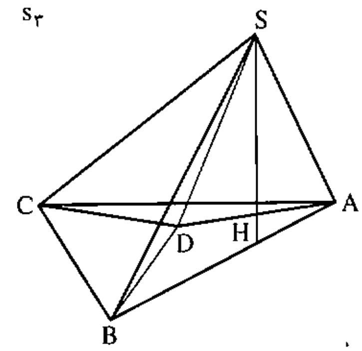
***

۴. تعمیم قضیه‌ی نیم‌ساز مثلث به صورت قضیه‌ی نیم‌ساز در چهاروجهی (طرح نگارنده)

در چهاروجهی SABC، نیم‌ساز سه‌وجهی SABC را SD

می‌نامیم.
مساحت‌های سه مثلث SAB، SBC و SCA را به ترتیب S_1، S_2، و S_3 می‌نامیم. مساحت‌های سه مثلث DAB، DBC، و DCA را به ترتیب s_1، s_2 و s_3 می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم تساوی‌های زیر برقرار است:

$$\frac{S_1}{s_1}=\frac{S_2}{s_2}=\frac{S_3}{s_3}$$



برهان: قضیه‌ی نیم‌ساز مثلث را یادآور می‌شویم: اگر خط AD نیم‌ساز زاویه‌ی A از مثلث ABC باشد، چنین داریم:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}$$

این تساوی را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{DC}$$

تساوی اخیر ما را رهنمون می‌شود که قضیه‌ی مذکور در بالا، یعنی قضیه‌ی نیم‌ساز در چهاروجهی را حدس بزنیم. برای اثبات قضیه، ارتفاع AH و نیم‌ساز AD را رسم می‌کنیم (یادآور می‌شویم که نیم‌ساز یک سه‌وجهی خطی است که فاصله‌ی هر نقطه از آن، از سه وجه آن سه‌وجهی یکسان باشد). حجم‌های سه چهاروجهی SDAB، SDBC و SDCA را به ترتیب V_1، V_2، و V_3 می‌نامیم. رابطه‌های زیر را می‌نویسیم:

$$\mathrm{I}\begin{cases}V_1=\frac{1}{3}s_1.\overline{AH}\\ V_2=\frac{1}{3}s_2.\overline{AH}\\ V_3=\frac{1}{3}s_3.\overline{AH}\end{cases}$$

از نقطه‌ی D پای نیم‌ساز AD، عمودهای DH_1، DH_2، و DH_3 را به ترتیب بر سه وجه SAB، SBC، و SCA رسم می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$\mathrm{II}\begin{cases}V_1=\frac{1}{3}S_1.\overline{DH_1}\\ V_2=\frac{1}{3}S_2.\overline{DH_2}\\ V_3=\frac{1}{3}S_3.\overline{DH_3}\end{cases}$$

از رابطه‌های I و II، رابطه‌های زیر نتیجه می‌شود:

$$\mathrm{III}\begin{cases}\frac{S_1}{s_1}=\frac{\overline{DH_1}}{\overline{AH}}\\ \frac{S_2}{s_2}=\frac{DH_2}{AH}\\ \frac{S_3}{s_3}=\frac{DH_3}{AH}\end{cases}$$

اما: $\overline{DH_1}=\overline{DH_2}=\overline{DH_3}$ (زیرا خط SD، نیم‌ساز سه‌وجهی SABC است و لذا فاصله‌ی نقطه‌ی D از سه وجه سه‌وجهی SABC مساوی است). از تساوی‌های III نتیجه می‌شود:

$$\frac{S_1}{s_1}=\frac{S_2}{s_2}=\frac{S_3}{s_3}$$

❁ ❁ ❁

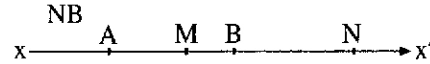
نقش نیم‌سازهای مثلث در اثبات قضیه‌های تقسیم توافقی

در سطرهای آینده از تقسیم توافقی یاد می‌کنیم. سپس فرمول دکارت و فرمول نیوتن را در تقسیم توافقی می‌نویسیم. در شماره‌ی ۵، دستور دکارت را در تقسیم توافقی، برای محاسبه‌ی طول نیم‌ساز مثلث به‌کار می‌بریم. در شماره‌ی ۶، قضیه‌ای از تقسیم توافقی را مطرح و اثبات می‌کنیم و از این قضیه در شماره‌ی ۷ بهره می‌گیریم. در شماره‌ی ۷، کاربرد دستور دکارت و نیوتن را در آینه‌های کروی یاد می‌کنیم (در این شیوه‌ی اثبات، از قضیه‌ای مربوط به نیم‌سازهای داخلی و خارجی مثلث بهره گرفته شده است). مطلب شماره‌ی ۷ را از کتاب فرانسوی «تصویرها در علم نور»[1] اثر **فلوری**[2] و **ماتیو**[3] برگرفته‌ام. در شماره‌ی ۸، یک دستور تازه در تقسیم توافقی عرضه کرده‌ام و آن را برای اثبات یکی از قضیه‌های اساسی هندسه به‌کار برده‌ام.

الف) تعریف تقسیم توافقی: بر محور $x'x$، دو نقطه‌ی A و B اختیار می‌کنیم. دو نقطه‌ی M و N را روی محور $x'x$ طوری انتخاب می‌کنیم که تساوی بعد برقرار باشد. در این صورت می‌گوییم

پاره‌خط AB به وسیله‌ی دو نقطه‌ی M و N به توافق تقسیم شده است و نیز می‌گویند چهار نقطه‌ی A، B، C و D تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند.

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$$



ب) دستور دکارت و نیوتن در تقسیم توافقی: اگر چهار نقطه‌ی A، B، C، و D تشکیل تقسیم توافقی بدهند، دو رابطه‌ی زیر محقق‌اند:

$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AM}} + \frac{1}{\overline{AN}} \quad \text{دستور دکارت}$$

$$\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = \overline{OM}.\overline{ON} \quad \text{دستور نیوتن}$$

(نقطه‌ی O وسط پاره‌خط AB است)

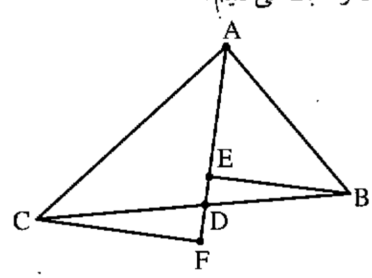
* * *

۵. محاسبه‌ی طول نیم‌ساز مثلث (با به‌کارگیری دستور دکارت). در مثلث ABC، طول نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی A که آن را به AD نشان می‌دهیم، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{2\cos\frac{A}{2}}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$$

(محاسبه‌ی طول نیم‌ساز زاویه‌ی A بر حسب اندازه‌ی زاویه‌ی A و طول‌های دو ضلع دو طرف زاویه‌ی A).

این فرمول، در کتاب‌های مثلثات ثابت شده است. در سطرهای زیر، با به‌کارگیری فرمول دکارت در تقسیم توافقی، درستی فرمول یاد شده در بالا را ثابت می‌کنیم.



برای اثبات مطلب، دو عمود BE و CF را بر نیم‌ساز AD وارد می‌کنیم. ابتدا ثابت می‌کنیم که چهار نقطه‌ی A، D، E و F تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند. از تشابه دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABE و ACF رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{BE}{AE} = \frac{CF}{AF}$$

از تشابه دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی BDE و CDF رابطه‌ی ذیل به‌دست می‌آید:

$$\frac{BE}{DE} = \frac{CF}{DF}$$

از مقایسه‌ی دو رابطه‌ی اخیر، رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AF}}$$

بنابر رابطه‌ی اخیر، چهار نقطه‌ی A، D، E، و F تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند. پس رابطه‌ی زیر محقق است:

$$\frac{2}{\overline{AD}} = \frac{1}{\overline{AE}} + \frac{1}{\overline{AF}} \quad \text{رابطه‌ی دکارت}$$

از سوی دیگر چنین داریم:

$$\overline{AE} = \overline{AB}.\cos\frac{A}{2}$$

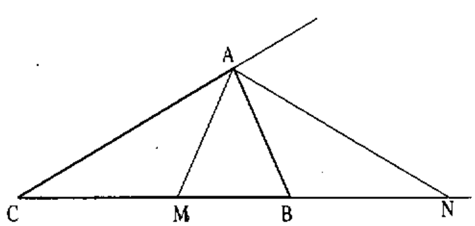
$$\overline{AF} = \overline{AC}.\cos\frac{A}{2}$$

از سه رابطه‌ی اخیر، رابطه‌ی مطلوب به‌دست می‌آید.

* * *

۶. بهره‌گیری از خاصیت نیم‌سازهای مثلث در تقسیم توافقی. در مثلث ABC، اگر دو نقطه‌ی M و N به ترتیب پاهای نیم‌سازهای داخلی و خارجی زاویه‌ی A باشند، آن‌گاه چهار نقطه‌ی C، B، M، و N تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند.

برهان. چون Am نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی A است، پس بنابه قضیه‌ی ۱ چنین داریم:



$$\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$$

چون AN نیم‌ساز خارجی زاویه‌ی A است، پس چنین داریم:

$$\frac{NB}{NC} = \frac{AB}{AC}$$

از دو رابطه‌ی اخیر، رابطه‌ی زیر نتیجه می‌شود:

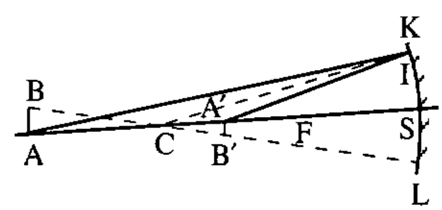
$$\frac{MB}{MC} = \frac{NB}{NC}$$

پس چهار نقطه‌ی B، C، M، N تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند.

۞۞۞

۷. کاربرد قضیه‌ی ۶ در آینه‌های کروی

در آینه‌ی کروی M، مرکز را C، رأس را S و کانون را F می‌نامیم. تصویر شکل AB را به $A'B'$ نموده‌ایم. تصویر شکل AB را به $A'B'$ نموده‌ایم. برای ترسیم تصویر $A'B'$، شعاع تابش دل‌خواه $A\hat{I}$ را رسم می‌کنیم و زاویه‌ی $C\hat{I}A'$ را برابر زاویه‌ی $A\hat{I}C$ می‌سازیم. نقطه‌ی A' تصویر نقطه‌ی A به‌دست می‌آید (زیرا می‌دانیم که شعاع تابش و شعاع بازتاب نسبت به شعاعی از آینه که از نقطه‌ی فرود می‌گذرد، قرینه‌اند)



چون زاویه‌ی دهانه‌ی آینه، یعنی زاویه‌ی گشادگی KCS، کوچک است (مثلاً در حدود $\frac{1}{20}$ رادیان یا سه درجه) پس زاویه‌ی $C\hat{I}S$ محسوساً یک زاویه‌ی قائمه است؛ زیرا مثلث $C\hat{I}S$ متساوی‌الساقین است و در این مثلث، زاویه رأس کوچک است. پس خط IS محسوساً نیم‌ساز زاویه‌ی خارجی AIA' است.

مختصر آن‌که خط KC نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی مثلث AKA' است و خط KS خیلی به نیم‌ساز خارجی مثلث AKA' نزدک است. پس چهار نقطه‌ی A، A'، C و S، محسوساً تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند و می‌توانیم دستورهای زیر را به کار بریم:

رابطه‌ی دکارت $\qquad \frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}} = \frac{1}{\overline{SF}}$

رابطه‌ی نیوتن $\qquad \overline{FA}.\overline{FA'} = \overline{SF}^2$

۞۞۞

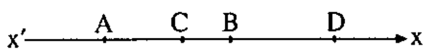
۸. یک رابطه‌ی توافقی تازه

در سطرهای بعد با به‌کارگیری خواص نیم‌سازهای داخلی و خارجی مثلث، یک رابطه‌ی توافقی تازه ارائه می‌شود کاربردی از آن در اثبات قضیه‌ی اساسی قطب و قطبی یاد می‌شود (این رابطه‌ی توافقی از آن نگارنده است).

اگر نقاط A، B، C و D تشکیل تقسیم توافقی دهند، رابطه‌های زیر محقق است:

$$(1)\quad \overline{AB}^2 = \overline{AC}.\overline{AD} + \overline{BC}.\overline{BD}$$

$$(2)\quad \overline{CD}^2 = \overline{CA}.\overline{CB} + \overline{DA}.\overline{DB}$$



الف) برهان جبری: بنا به تعریف تقسیم توافقی چنین داریم:

$$(3)\quad \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

بر محور $x'x$ که منطبق بر خط AB است، نقطه‌ی A را مبدأ می‌گیریم (برای آسانی محاسبه). طول‌های نقطه‌های B، C و D را روی این محور، به‌ترتیب b، c و d می‌نامیم. رابطه‌ی ۳ به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{-c}{b-c} = \frac{d}{b-d}$$

و یا:

$$c(d-b) = d(b-c)$$

به دو طرف رابطه‌ی بالا عبارت $-b(d-b)$ را می‌افزاییم. حاصل می‌شود:

$$(c-b)(d-b) = d(b-c) - b(d-b)$$

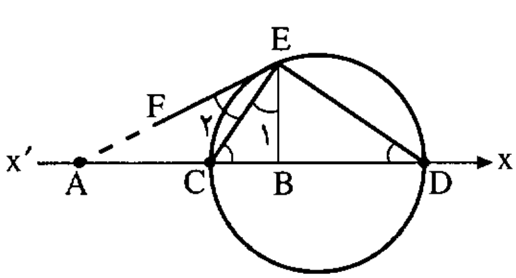
پس از اختصار نتیجه می‌شود:

$$b^2 = cd + (c-b)(d-b)$$

رابطه‌ی ۴، همان رابطه‌ی ۱ است.

با استدلالی مشابه آن‌چه گذشت، می‌توان درستی رابطه‌ی ۲ را ثابت کرد.

ب) برهان هندسی: روی محور $x'x$ چهار نقطه‌ی A، B، C و D را که تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند، در نظر می‌گیریم. برای اثبات رابطه‌ی ۱، دایره‌ای به قطر CD و عمود BE را بر خط CD رسم می‌کنیم و نقطه‌ی برخورد آن را با دایره، E می‌نامیم.



از نقطه‌ی E، مماس EF را بر دایره رسم می‌کنیم.
این خط مماس بر نقطه‌ی A می‌گذرد. (برای اثبات می‌گوییم، دو زاویه‌ی D و E_1 برابراند، زیرا هردو متمم زاویه‌ی C هستند و نیز دو زاویه‌ی E_1 و E_2 برابراند، زیرا اندازه دو زاویه‌ی D و E_2، هر دو نصف اندازه‌ی کمان AC هستند. پس خط EC نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی BEF و خط DE که بر خط EC عمود است، نیم‌ساز خارجی زاویه‌ی BEF است. پس بنابر قضیه‌ی ۶، خط EF بر نقطه‌ی A می‌گذرد).

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABE چنین داریم:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{EB}^2$$

از تشابه دو مثلث AEC و AED نتیجه می‌شود:

$$\overline{AE}^2 = \overline{AC}.\overline{BD}$$

در مثلث قائم‌الزاویه ECD، پاره‌خط EB ارتفاع است، پس چنین داریم:

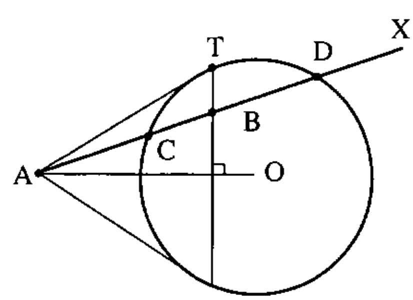
$$\overline{BE}^2 = -\overline{BC}.\overline{BD}$$

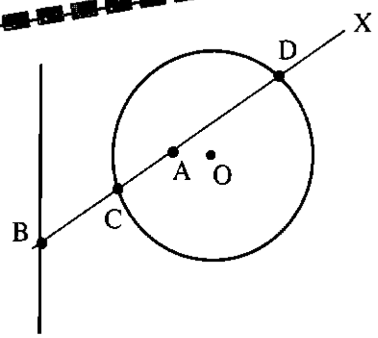
از سه رابطه‌ی اخیر، رابطه‌ی ۱ نتیجه می‌شود.
اثبات رابطه‌ی ۲، با اثبات پیشین مشابه است.

***

۹. کاربرد رابطه‌ی توافقی یاد شده در شماره‌ی ۸

الف) اثبات تازه‌ای از قضیه‌ی اساسی قطب و قطبی.
دایره‌ی (O,R) و نقطه‌ی ثابت A در صفحه‌ی آن را در نظر می‌گیریم. خط متحرک AX در صفحه‌ی دایره، دور نقطه‌ی A می‌چرخد و دایره را در دو نقطه‌ی متغیر C و D قطع می‌کند. مطلوب است مکان هندسی نقطه‌ی B از خط متحرک AX، به‌طوری که چهار نقطه‌ی A، B، C و D تشکیل تقسیم توافقی بدهند.





برهان: بنابر رابطه‌ی توافقی یادشده در شماره ۸ می‌نویسیم:

$$(1)\quad \overline{AB}^2 = \overline{AC}.\overline{AD} + \overline{BC}.\overline{BD}$$

یکی از قضیه‌های هندسه می‌گوید، اگر از نقطه‌ی دل‌خواه A واقع در صفحه‌ی دایره (O,R) قاطع دلخواهی رسم کنیم و نقاط تقاطع آن را با دایره، B و C بنامیم، چنین داریم:

$$\overline{AB}.\overline{AC} = \overline{AO}^2 - R^2$$

بنابر قضیه‌ی پیش گفته، دو رابطه‌ی زیر را می‌نویسیم:

$$(2)\quad \begin{cases} \overline{AC}.\overline{AD} = \overline{AO}^2 - R^2 \\ \overline{BC}.\overline{BD} = \overline{BO}^2 - R^2 \end{cases}$$

رابطه‌ی ۱ با رعایت دو رابطه‌ی ۲ به صورت زیر درمی‌آید:

$$\overline{BA}^2 - \overline{BO}^2 = \overline{AO}^2 - 2R^2 = \text{ثابت}$$

یعنی تفاضل مربع‌های فاصله‌های نقطه‌ی متحرک B از دو نقطه‌ی ثابت A و O مقداری است ثابت. پس مکان آن نقطه خطی راست عمود بر خط AO.

***

ب) کاربرد رابطه‌ی توافقی یادشده در شماره‌ی ۸. در شکل آینه‌ی کروی، چهار نقطه‌ی A، ′A، C و D، محسوساً تقسیم توافقی تشکیل می‌دهند و بنابر رابطه‌ی توافقی یادشده در شماره‌ی ۸، می‌توان نوشت:

$$\overline{SC}^2 = \overline{SA}.\overline{SA'} + \overline{CA}.\overline{CA'}$$

و یا:

$$R^2 = 4f^2 = \overline{SA}.\overline{SA'} + \overline{CA}.\overline{CA'}$$

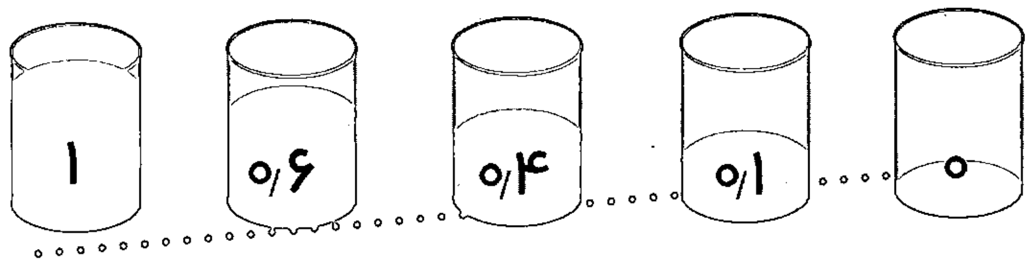
در رابطه‌ی بالا، f فاصله‌ی کانونی است و SA و ′SA فاصله‌های رأس آینه از شئ و تصویراند و CA و ′CA فاصله‌های مرکز آینه از شیء و تصویراند.

---

1. Images optiques   2. P. fleury   3. J. P. mathieu

● دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی
عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی

مقدمه‌ای بر نظریه‌ی مجموعه‌های فازی (۲)



یادآوری

در بخش پیشین به شرح تاریخچه‌ای از پیدایش منطق فازی و مجموعه‌های فازی پرداختیم. اشاره کردیم که بنیان‌گذار نظریه‌ی فازی پروفسور لطفی عسگرزاده، استاد «دانشگاه برکلی» آمریکا بود که در سال ۱۹۶۵ با ارائه‌ی اولین مقاله‌ی خود، مجموعه‌های فازی را به جهان علم شناساند. مادر ایشان روس و پدر ایشان ایرانی بود. وی در سن ۱۰ سالگی در سال ۱۹۳۱ میلادی به همراه خانواده به ایران مراجعت کرد و پس از طی تحصیلات متوسطه در «دبیرستان البرز» تهران (کالج البرز سابق)، در سال ۱۹۴۲ موفق به اخذ درجه‌ی لیسانس رشته‌ی برق و الکترونیک از دانشگاه تهران شد. طی جنگ جهانی دوم بود که او برای ادامه‌ی تحصیلات به کشور آمریکا رفت و درنهایت در سال ۱۹۴۹ درجه‌ی دکترای خود را از دانشگاه کلمبیا در رشته‌ی مهندسی برق دریافت داشت.

از معرفی نظریه مجموعه‌های فازی توسط وی بیش از ۴۰ سال می‌گذرد و تاکنون بیش از ۱۵ هزار مقاله‌ی علمی توسط دانشمندان جهان درباره‌ی منطق فازی و کاربردهای آن در مجلات معتبر علمی منتشر شده‌اند. این اهمیت نظریه مجموعه‌های فازی و منطق فازی را که ابتدا مخالفان زیادی داشت، مشخص می‌کند. پیدایش این نظریه سبب شد، منطق دوگانه‌ی (سیاه و سفید) ارسطویی به منطق چندارزشی (خاکستری) تبدیل شود و به طراحی ماشین‌هایی هوشمند انجامید که تا قبل از معرفی این منطق، قادر به تشخیص مفاهیمی به‌جز صفر و یک نبودند.

ایده‌ی اساسی در منطق فازی آن است که برای هر حالت ممکن همیشه نمی‌توان یک قاعده‌ی خاص را به کار برد. تعداد قواعدی که بتوانند هر حالت را به طور دقیق تعریف کنند، بسیار محدود است.

این قواعد تنها نقاط گسسته‌ای از تمام حالات پیوسته‌ی ممکن را، مشخص می‌کنند و ما با ترکیب این قواعد می‌توانیم، تقریبی برای یک حالت مشخص را به‌دست آوریم. منطق فازی، یک مدل ریاضی در اختیار ما می‌گذارد که تحت آن می‌توان تصمیم‌گیری کرد و مراحل تعیین مقدار را به شکل الگوریتم نشان داد. حال به ادامه‌ی بحث می‌پردازیم.

در قسمت قبل مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ را به صورت زیر تعریف کردیم:

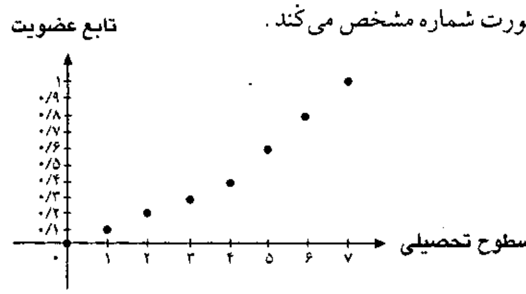
$$\tilde{A}=\left\{(x,\mu_{\tilde{A}}(x))\,|\,x\in X\right\}$$

که در آن، X مجموعه مرجع (جهانی) و $\mu_{\tilde{A}}$ تابع عضویت مجموعه‌ی $\tilde{A}$ است. در این قسمت ابتدا چند مثال از یک مجموعه‌ی فازی را بیان می‌کنیم. چون مجموعه‌ی فازی با تابع عضویت خود مشخص می‌شود، لذا برای معرفی یک مجموعه‌ی فازی باید تابع عضویت مناسبی را که توصیف قابل قبولی از آن مجموعه‌ی فازی باشد، بیان کرد و خواهیم دید که تابع عضویت یک مجموعه‌ی فازی منحصر به فرد نیست.

ابتدا مجموعه‌ی فازی افراد باسواد جامعه را درنظر می‌گیریم. در این حالت، مقادیر تابع عضویت را به شکل زیر می‌توان معرفی کرد:

افراد بی‌سواد ⇐ ۰ و افراد با تحصیلات ابتدایی ⇐ ۰/۱ و
افراد با تحصیلات راهنمایی ⇐ ۰/۲ و افراد با تحصیلات دبیرستان ⇐ ۰/۳ و
افراد با تحصیلات فوق‌دیپلم ⇐ ۰/۴ و افراد با تحصیلات لیسانس ⇐ ۰/۶ و
افراد با تحصیلات فوق‌لیسانس ⇐ ۰/۸ و افراد با تحصیلات دکترا و بالاتر ⇐ ۱

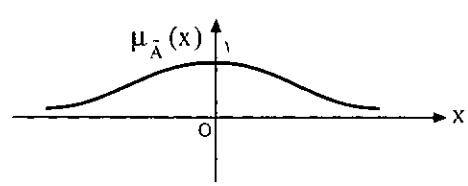
نمودار زیر نمایشی از تابع عضویت این مجموعه‌ی فازی است که در آن، محور افقی سطوح تحصیلی هشت‌گانه مذکور را به صورت شماره مشخص می‌کند.



به عنوان مثالی دیگر، مجموعه‌ی فازی تقریباً صفر را درنظر می‌گیریم. اگر $\tilde{A}$ نام این مجموعه‌ی فازی باشد، تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}$ را می‌توان به صورت زیر انتخاب کرد:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=e^{-x^2}\ ,\quad x\in\mathbb{R}$$

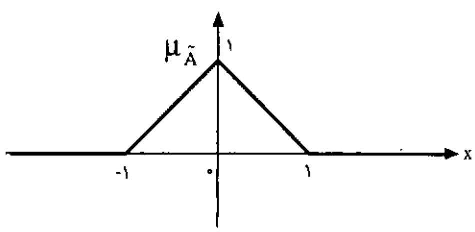
شکل زیر این تابع را نمایش می‌دهد.



ملاحظه می‌کنیم، هر قدر به عدد صفر نزدیک‌تر شویم، مقدار تابع عضویت به حداکثر خود یعنی ۱ نزدیک می‌شود و هر قدر از صفر دور شویم، مقدار تابع عضویت به حداقل خود یعنی ۰ نزدیک می‌شود. اما فقط این تابع توصیفی برای مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ نیست و توابع دیگری را هم می‌توان معرفی کرد که به‌عنوان تابع عضویت این مجموعه به کار روند. مثلاً $\mu_{\tilde{A}}(x)=\frac{1}{1+x^2}$ ضابطه‌ی دیگری برای تابع عضویت $\tilde{A}$ است که در آن: $\mu_{\tilde{A}}(0)=1$. هم‌چنین تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}$ را به شکل زیر می‌توان معرفی کرد:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}x+1 & -1<x\le 0\\ 1-x & 0\le x<1\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

شکل زیر نمایشی از این تابع عضویت را مشخص می‌کند. در این حالت، مقدار تابع عضویت به ازای $|x|\ge 1$، صفر تعریف شده است.



به این ترتیب برای یک مجموعه‌ی فازی می‌توان چندین تابع عضویت انتخاب کرد.

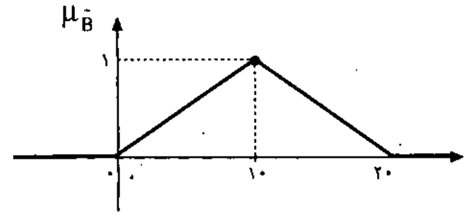
حال مجموعه‌ی فازی تقریباً ۱۰ را در نظر می‌گیریم. اگر $\tilde{B}$ نام این مجموعه‌ی فازی باشد، نمونه‌ای از تابع عضویت برای آن عبارت است از: $\mu_{\tilde{B}}:\mathbb{R}\to[0,1]$

$$\mu_{\tilde{B}}(x)=\frac{1}{1+(x-10)^4}$$

در این‌جا نیز ملاحظه می‌شود که $\mu_{\tilde{B}}(10)=1$ و هر قدر از عدد ۱۰ دورتر می‌شویم، مقدار $\mu_{\tilde{B}}$ به صفر نزدیک‌تر می‌شود. برای این مجموعه‌ی فازی توابع عضویت دیگری پیدا کنید. شاید پس از قدری بررسی و دقت بتوانید تابع عضویت $\mu_{\tilde{B}}$ را با ضابطه‌ی زیر مطرح کنید.

$$\mu_{\tilde{B}}(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{10} & 0\le x\le 10\\[2mm] \dfrac{20-x}{10} & 10\le x\le 20\\[2mm] 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

نمودار این تابع عضویت به شکل زیر است.



همان‌طور که در مثال‌های فوق مشاهده شد، در معرفی ضابطه‌ی تابع عضویت، به عضو یا اعضایی از مجموعه‌ی مرجع که به طور کامل ویژگی مربوطه را دارند، عدد ۱ را نظیر می‌کنیم و برای سایر اعضای مجموعه مرجع، بسته به آن‌که چه قدر از ویژگی مورد نظر دورتر هستند، مقادیری از صفر تا کمتر از یک را نظیر می‌کنیم. مثال زیر نمونه‌ای از یک مجموعه‌ی فازی است که بیش از یک عضو عدد ۱ را به خود نظیر می‌کند. مجموعه‌ی فازی اعداد حقیقی تقریباً بین ۲۰ و ۴۰ را درنظر می‌گیریم. تابع عضویت این مجموعه‌ی فازی که آن را با $\tilde{C}$ نمایش می‌دهیم، با ضابطه‌ی زیر معرفی می‌شود:

$$\mu_{\tilde{C}}(x)=\begin{cases} \dfrac{۱}{۱+(x-۲۰)^۲} & ۱۰\le x\le ۲۰ \\ ۱ & ۲۰\le x\le ۴۰ \\ \dfrac{۱}{۱+(x-۴۰)^۲} & ۴۰\le x\le ۵۰ \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در این حالت، برای تمامی مقادیر از ۲۰ تا ۴۰ مقدار تابع عضویت ۱ تعریف می‌شود.

نکته: هر عدد حقیقی $a\in\mathbb{R}$ را می‌توان متناظر با یک مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ در نظر گرفت که تابع عضویت زیر را داراست:

$\mu_{\tilde{A}}:\mathbb{R}\to[۰,۱]$

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} ۱ & x=a \\ ۰ & x\ne a \end{cases}$$

در ادامه، به معرفی چند عمل مهم در مجموعه‌های فازی می‌پردازیم. ابتدا مفهوم زیرمجموعه بودن و تساوی دو مجموعه‌ی فازی را مطرح می‌کنیم.

۱. فرض کنیم $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو مجموعه‌ی فازی باشند که در مجموعه‌ی مرجع X تعریف شده‌اند. در این صورت:

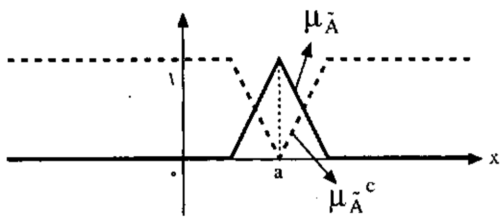
الف) $\tilde{A}\subset\tilde{B} \iff \mu_{\tilde{A}}(x)\le\mu_{\tilde{B}}(x)\ ,\ \forall x\in X$

ب) $\tilde{A}=\tilde{B} \iff \mu_{\tilde{A}}(x)=\mu_{\tilde{B}}(x)\ ,\ \forall x\in X$

۲. مکمل مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ در X را با $\tilde{A}^c$ نمایش می‌دهیم و به این صورت تابع عضویت آن را به دست می‌آوریم:

$$\mu_{\tilde{A}^c}(x)=۱-\mu_{\tilde{A}}(x)\ ,\ x\in X$$

شکل زیر نمونه‌ای از تابع عضویت یک مجموعه‌ی فازی و مکمل آن را نمایش می‌دهد:



۳. فرض کنیم $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو مجموعه‌ی فازی در X باشند. در این صورت اشتراک این دو مجموعه‌ی فازی یک مجموعه‌ی فازی است که تابع عضویت آن به شکل زیر معرفی می‌شود:

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)=\min\{\mu_{\tilde{A}}(x)\ ,\ \mu_{\tilde{B}}(x)\}\ ,\ \forall x\in X$$

۴. فرض کنیم $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو مجموعه‌ی فازی در X باشند. در این صورت، اجتماع این دو مجموعه‌ی فازی یک مجموعه‌ی فازی است که تابع عضویت آن به شکل زیر معرفی می‌شود:

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x)=\max\{\mu_{\tilde{A}}(x)\ ,\ \mu_{\tilde{B}}(x)\}\ ,\ \forall x\in X$$

سؤالی که برای خواننده پیش می‌آید این است که: «آیا خواص نظریه‌ی مجموعه‌های قطعی نظیر $A\cap A^c=\phi$ ، $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$ ، در مجموعه‌های فازی نیز برقرار است؟» در این‌جا A^c به معنای متمم A است. در حالت کلی نمی‌توان گفت تمام خواص مجموعه‌های قطعی در مجموعه‌های فازی برقرار است، چرا که ما در مجموعه‌های فازی با توابع عضویت آن‌ها کار می‌کنیم. مثال زیر را در نظر بگیرید.

فرض کنید: $X=\{۱,۲,۳,\cdots,۱۰\}$. دو مجموعه‌ی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را در X به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{A}=\{(۲,۰/۴),(۳,۰/۶),(۴,۰/۸),(۵,۱),(۶,۰/۸),(۷,۰/۶),(۸,۰/۴)\}$$

$$\tilde{B}=\{(۱,۰/۲),(۲,۰/۴),(۴,۰/۹),(۵,۱),(۷,۰/۶),(۸,۰/۳)\}$$

اولاً مطلوب است $\tilde{A}^c$ و $\tilde{B}^c$ ، ثانیاً تحقیق کنید آیا: $\tilde{A}\cup\tilde{A}^c=X$ و $\tilde{A}\cap\tilde{A}^c=\phi$ ، و ثالثاً تحقیق کنید: آیا $(\tilde{A}\cup\tilde{B})^c=\tilde{A}^c\cap\tilde{B}^c$.

حل: اولاً، توجه می‌کنیم که در $\tilde{A}$ عضوی نظیر ۱ در X با درجه‌ی عضویت ۰ وجود دارد که چنین اعضایی را در مجموعه‌ی فازی معمولاً نمی‌نویسند، ولی این اعضا در $\tilde{A}^c$ با درجه‌ی عضویت ۱ وجود دارند. برای سایر اعضا نیز درجه‌ی عضویت را از یک کم می‌کنیم. لذا:

$$\tilde{A}^c=\{(۱,۱),(۲,۰/۶),(۳,۰/۴),(۴,۰/۲),(۶,۰/۲),(۷,۰/۴),(۸,۰/۶),(۹,۱),(۱۰,۱)\}$$

$$\tilde{B}^c = \{(1,0/8),(2,0/6),(3,1),(4,0/1),(6,1),(7,0/4),(8,0/7),(9,1),(10,1)\}$$

ملاحظه می‌کنیم، درجه‌ی عضویت ۵ در هر دو مجموعه‌ی فازی فوق صفر است، لذا این عضو قید نشده است.

ثانیاً، با توجه به تعاریف min-max در اشتراک و اجتماع دو مجموعه‌ی فازی داریم:

$$\tilde{A}\cap\tilde{A}^c = \{(2,0/4),(3,0/4),(4,0/2),(6,0/2),(7,0/4),(8,0/4)\}$$

و:

$$\tilde{A}\cup\tilde{A}^c = \{(1,1),(2,0/6),(3,0/6),(4,0/8),(5,1),(6,0/8),(7,0/6),(8,0/6),(9,1),(10,1)\}$$

مشاهده می‌کنیم که در تنظیم این دو مجموعه، به ترتیب مینی‌مم و ماکزی‌مم درجه‌های عضویت هر یک از اعضای X درنظر گرفته می‌شود. در این حالت: $\tilde{A}\cap\tilde{A}^c \neq \phi$ و $\tilde{A}\cup\tilde{A}^c \neq X$. توجه می‌کنیم که ϕ و X مجموعه‌هایی قطعی هستند. به این ترتیب این دو خاصیت در حالت فازی برقرار نیستند.

ثالثاً:

$$\tilde{A}\cup\tilde{B} = \{(1,0/2),(2,0/4),(3,0/6),(4,0/9),(5,1),(6,0/8),(7,0/6),(8,0/4)\}$$

$$\Rightarrow (\tilde{A}\cup\tilde{B})^c = \{(1,0/8),(2,0/6),(3,0/4),(4,0/1),(6,0/2),(7,0/4),(8,0/6),(9,1),(10,1)\}$$

و با توجه به مجموعه‌های $\tilde{A}^c$ و $\tilde{B}^c$ مذکور در قسمت اولاً، خواهیم داشت:

$$\tilde{A}^c\cap\tilde{B}^c = \{(1,0/8),(2,0/6),(3,0/4),(4,0/1),(6,0/2),(7,0/4),(8,0/6),(9,1),(10,1)\}$$

به این ترتیب: $(\tilde{A}\cup\tilde{B})^c = \tilde{A}^c\cap\tilde{B}^c$

به طور کلی می‌توان ثابت کرد، براساس تعاریف min-max از اشتراک و اجتماع دو مجموعه‌ی فازی، قوانین دمورگان برقرار هستند؛ یعنی برای هر دو مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ در X داریم:

$$\begin{cases}(\tilde{A}\cap\tilde{B})^c = \tilde{A}^c\cup\tilde{B}^c\\(\tilde{A}\cup\tilde{B})^c = \tilde{A}^c\cap\tilde{B}^c\end{cases}$$

در قسمت بعدی، به معرفی چند تعریف مهم دیگر در مجموعه‌های فازی و نیز عمل ضرب در مجموعه‌های فازی می‌پردازیم.

1. Fuzzy set theory and its applications, H. J. Zimmermann, third edition, Kluwer Acadmic Publishers, London, 1996.

۲. آشنایی با نظریه مجموعه‌های فازی، دکتر سیدمحمود طاهری، انتشارات جهاددانشگاهی، ۱۳۷۵.

معرفی سایت‌های ریاضی جهان

● احسان یارمحمدی

اسم سایت: **Intmath**

آدرس اینترنتی سایت: http://www.intmath.com

در صفحه‌ی اصلی این سایت بخشی به نام درس‌های ریاضی (Math Lessons) وجود دارد که شامل زیرعنوان‌های ذیل می‌باشد.

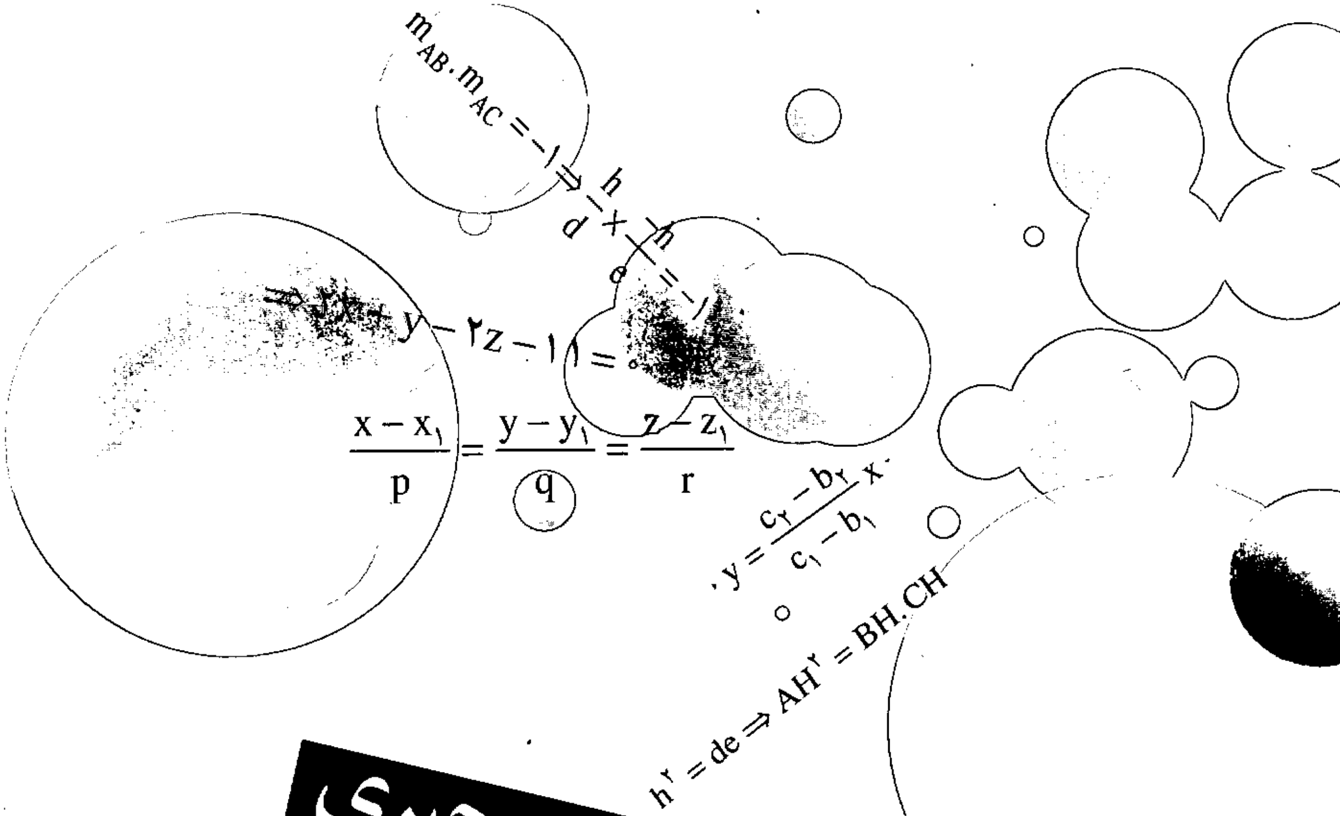
※ مثلثات (Trigonometry)

۱. توابع مثلثاتی (Trigonometric Functions)
۲. نمودارهای توابع مثلثاتی (Graphs of Trigonometric Functions)
۳. مثلثات تحلیلی (Analytic Trigonometry)

※ جبر (Algebra)

۱. اعداد (Numbers)
۲. جبر پایه (Basic Algebra)
۳. عامل‌یابی و کسری‌ها (Factoring & Fractions)
۴. معادلات درجه‌ی دوم (Quadratic Equations)
۵. توان‌ها و رادیکال‌ها (Exponents & Radicals)
۶. توابع نمایی و لگاریتمی (Exponential & Logarithmic Functions)
۷. معادله‌های چندجمله‌ای درجه‌ی بالاتر (Polynomial Equations of Higher Degree)
۸. دستگاه‌های معادلات (Systems of Equations)
۹. ماتریس‌ها و دترمینان‌ها (Matrices and Equations)
۱۰. نامعادله‌ها (Inequalities)
۱۱. سری‌ها و قضیه دوجمله‌ای (Series and Binomial Theorem)

ادامه در صفحه‌ی ۲۷



رویکرد هندسی- رویکرد جبری در آموزش هندسه (۵)

● محمدهاشم رستمی

اشاره

«یکی از مهم‌ترین پیوندها و اتصال‌ها در همه‌ی ریاضیات اتصال و پیوند بین هندسه و جبر است»

(از استانداردهای موضوعی NCTM)

در شماره‌های پیشین درباره‌ی رویکرد هندسی، رویکرد جبری مختصاتی در آموزش هندسه در فضاهای ۲ بعدی و ۳ بعدی بحث شد، در ادامه، مثال‌های دیگری از هندسه در ۳ بعد را ذکر می‌کنیم و آن‌ها را با دو رویکرد هندسی و جبری مختصاتی حل می‌کنیم.

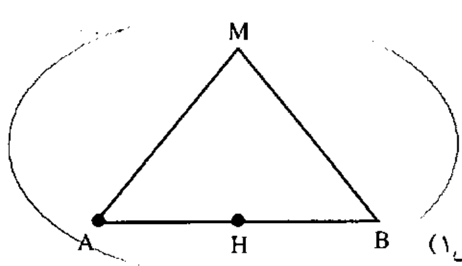
مثال ۴. صفحه‌ی عمودمنصف یک پاره‌خط

ثابت کنید، مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو نقطه‌ی ثابت داده شده به یک فاصله قرار دارد، صفحه‌ای است که از وسط پاره‌خط واصل بین این دو نقطه می‌گذرد و بر این پاره‌خط عمود است.

اثبات:

الف) روش هندسی

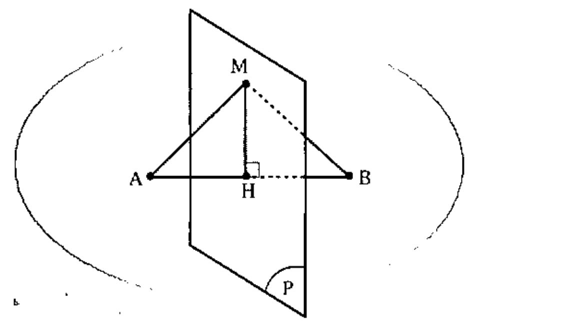
دو نقطه‌ی ثابت A و B را درنظر می‌گیریم و وسط پاره‌خط AB را H می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم، مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از این دو نقطه به یک فاصله قرار دارد، صفحه‌ای است که در نقطه‌ی H بر AB عمود است.



(شکل ۱)

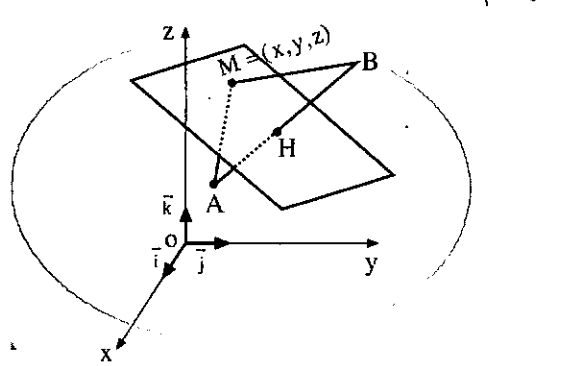
برای اثبات، فرض می‌کنیم، M یک نقطه‌ی دل‌خواه از این مکان هندسی باشد؛ یعنی داشته باشیم:

$$MA = MB$$



از M به نقطه‌ی H وسط پاره‌خط AB وصل می‌کنیم. در مثلث متساوی‌الساقین MAB، میانه‌ی MH عمودمنصف پاره‌خط AB است. پس نقطه‌ی M روی خطی قرار دارد که در نقطه‌ی ثابت H بر پاره‌خط AB عمود است. این ویژگی برای هر نقطه‌ای مانند M که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله قرار داشته باشد، برقرار است. یعنی همه‌ی این نقطه‌ها روی خط‌هایی قرار دارند که در نقطه‌ی H بر AB عمودند. اما می‌دانیم، مکان هندسی خط‌هایی که در یک نقطه از یک خط بر آن خط عمود هستند، صفحه‌ای است که در آن نقطه بر آن خط عمود است. این صفحه را P می‌نامیم. صفحه‌ی P چون از وسط پاره‌خط AB نیز می‌گذرد، پس صفحه‌ی عمودمنصف پاره‌خط AB است.

نکته: می‌دانیم که در هر مثلث متساوی‌الساقین، میانه‌ی نظیر قاعده‌ی مثلث، عمود بر قاعده و درنتیجه، عمودمنصف قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقین است. ما از این ویژگی برای اثبات استفاده کرده‌ایم.



ب) رویکرد جبری: دستگاه مختصات قائم $O - xyz$ را درنظر می‌گیریم. اگر دو نقطه‌ی ثابت، $A = (x_1, y_1, z_1)$ و $B = (x_2, y_2, z_2)$ باشند، می‌خواهیم مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را تعیین کنیم که از این دو نقطه به یک فاصله است. برای اثبات از روش مستقیم تعیین معادله‌ی مکان هندسی یک نقطه، استفاده می‌کنیم. به این ترتیب که فرض می‌کنیم $M = (x, y, z)$ یکی از نقطه‌های مکان هندسی موردنظر باشد؛ یعنی نقطه‌ای باشد که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله است. در این صورت خواهیم داشت:

$$MA = MB \Rightarrow \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$$
$$= \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2}$$
$$\Rightarrow x^2 + x_1^2 - 2x_1x + y^2 + y_1^2 - 2y_1y + z^2 + z_1^2 - 2z_1z$$
$$= x^2 + x_2^2 - 2x_2x + y^2 + y_2^2 - 2y_2y + z^2 + z_2^2 - 2z_2z$$
$$\Rightarrow 2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + 2(z_2 - z_1)z + (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) -$$
$$(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) = 0 \qquad (1)$$

به‌طوری که دیده می‌شود، معادله‌ی(۱) معادله‌ی یک صفحه است، زیرا معادله‌ای است درجه اول نسبت به x، y و z (یعنی به صورت $ax + by + cz + d = 0$). این صفحه بر بردار $\overrightarrow{AB}$ عمود است، زیرا بردار قائم آن عبارت است از:

$$\vec{N} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

این بردار، همان بردار $\overrightarrow{AB}$ است، چون داریم:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

از طرف دیگر، این صفحه از نقطه‌ی H وسط پاره‌خط AB می‌گذرد، زیرا مختصات این نقطه، یعنی:

$$H = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

در معادله‌ی صفحه‌ی P، یعنی در معادله‌ی(۱) صدق می‌کند:

$$2(x_2 - x_1)\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right) + 2(y_2 - y_1)\left(\frac{y_2 + y_1}{2}\right) +$$
$$2(z_2 - z_1)\left(\frac{z_2 + z_1}{2}\right) + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) = 0$$
$$x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 + z_2^2 - z_1^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2 = 0$$
$$\Rightarrow 0 = 0$$

بنابراین صفحه‌ی P، صفحه‌ی عمودمنصف پاره‌خط AB است و این صفحه مکان هندسی نقطه‌ای از فضاست که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله قرار دارد.

نکته. در رویکرد تحلیلی برای تعیین معادله‌ی صفحه‌ی عمودمنصف یک پاره‌خط و یا در واقع مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو نقطه‌ی ثابت A و B به یک فاصله است، می‌توانستیم دستگاه مختصات قائم $O - xyz$ را چنان انتخاب کنیم که مبدأ مختصات منطبق بر نقطه‌ی H، وسط پاره‌خط AB و پاره‌خط AB روی محور $x'ox$ قرار گیرد (شکل۴). در این صورت، مختصات دو نقطه‌ی A و B به‌صورت $A = (x_1, 0, 0)$ و $B = (-x_1, 0, 0)$ خواهد بود. اکنون اگر $M = (x, y, z)$ را نقطه‌ای از مکان هندسی موردنظر اختیار کنیم، یعنی نقطه‌ای باشد که از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله است، خواهیم داشت:

$$MA = MB \Rightarrow \sqrt{(x-x_1)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}$$

$$= \sqrt{(x+x_1)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}$$

$$\Rightarrow (x-x_1)^2+y^2+z^2=(x+x_1)^2+y^2+z^2 \Rightarrow 4x_1x=0$$

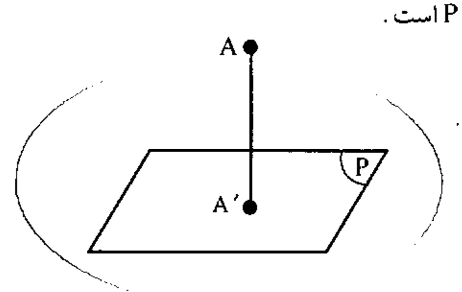
$\Rightarrow x = 0 \quad (1)$ معادله‌ی صفحه‌ی عمودمنصف پاره‌خط AB

بردار قائم این صفحه $\vec{N} = (1,0,0)$ است که همان بردار یکه‌ی محور xهاست که خط AB روی آن قرار دارد. در ضمن این صفحه از نقطه‌ی $O = (0,0,0)$ که وسط پاره‌خط AB است نیز می‌گذرد. پس حکم مسئله درست است.

به‌طوری که دیده می‌شود، انتخاب مناسب دستگاه مختصات قائم، محاسبه را ساده‌تر می‌کند.

مثال۵. مجموعه‌ی صفحه‌هایی را مشخص کنید که دو نقطه‌ی ثابت A و B از هر یک از آن‌ها به یک فاصله باشند.

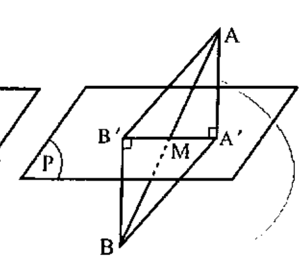
تعریف: فاصله‌ی یک نقطه از یک صفحه، طول عمودی است که از آن نقطه بر آن صفحه فرود می‌آید و محصور بین آن نقطه و پای عمود است. در شکل۱، پاره‌خط AA' فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی P است.



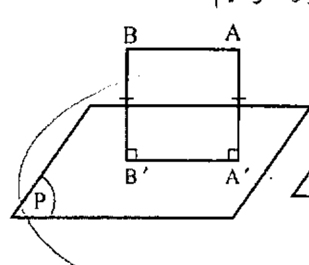
اثبات:

الف) روش هندسی

از این راهبرد (استراتژی) استفاده می‌کنیم که مسئله را حل‌شده درنظر می‌گیریم. یعنی فرض می‌کنیم، صفحه‌ی P یکی از صفحه‌هایی باشد که دو نقطه‌ی A و B از آن به یک فاصله‌اند. اگر پاره‌خط‌های AA' و BB' به‌ترتیب فاصله‌های نقطه‌های A و B از صفحه‌ی P باشندو از A' به B' وصل کنیم، بنابر آن که دو نقطه‌ی A و B در یک طرف صفحه‌ی P (شکل۲) و یا در دو طرف این صفحه (شکل۳) باشند، دو حالت زیر را خواهیم داشت:

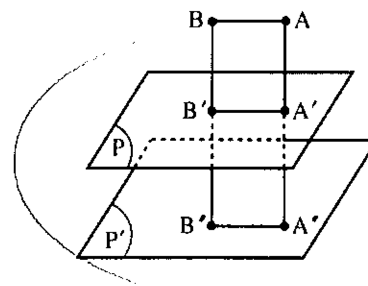


(شکل۲)



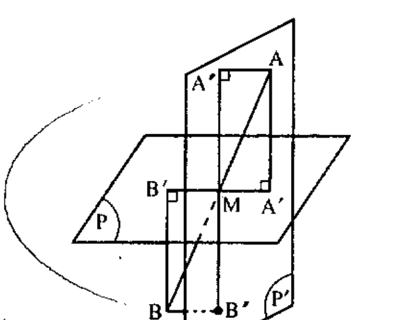
(شکل۳)

حالت اول: در حالتی که دو نقطه‌ی A و B در یک طرف صفحه‌ی P باشند، (شکل۱)، چهارضلعی $AA'B'B$ متوازی‌الاضلاع و در واقع مستطیل است؛ زیرا AA' با BB' موازی (دو خط عمود بر یک صفحه موازی‌اند) و $AA' = BB'$ (بنابه فرض) است. بنابراین $AB = A'B'$ و AB موازی $A'B'$ است. درنتیجه AB با صفحه‌ی P موازی است. یعنی هر صفحه‌ای که با خط AB موازی باشد، جواب مسئله است و تمام صفحه‌هایی از فضا که با خط AB موازی‌اند، یک مجموعه صفحه‌ی جواب مسئله هستند (شکل۴).



(شکل۴)

حالت دوم: در حالتی که دو نقطه‌ی A و B در دو طرف صفحه‌ی P باشند، چهارضلعی $AA'BB'$ متوازی‌الاضلاع است؛ زیرا $AA' = BB'$ و $AA' \| BB'$ است. اما در متوازی‌الاضلاع، قطرها منصف یکدیگرند. پس نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB روی صفحه‌ی P است، زیرا M وسط پاره‌خط $A'B'$ نیز هست (شکل۳). درنتیجه، صفحه‌ی دل‌خواه P که دو نقطه‌ی A و B از آن به یک فاصله‌اند و در دو طرف این صفحه هستند، از نقطه‌ی M وسط پاره‌خطAB می‌گذرد. پس تمام صفحه‌هایی کهس این ویژگی را دارند، یعنی از نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB می‌گذرند، مجموعه‌ای دیگر از صفحه‌های جواب مسئله هستند (شکل۵).



(شکل۵)

با توجه به نکات بالا می‌توانیم بگوییم: دو مجموعه صفحه وجود دارد که دو نقطه‌ی ثابت A و B از هر یک از آن‌ها به یک فاصله‌اند:

- یک دسته، مجموعه‌ی صفحه‌هایی است که با خط AB، یعنی خط واصل بین آن دو نقطه، موازی‌اند.
- دسته‌ی دیگر، مجموعه‌ی صفحه‌هایی است که بر نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB، یعنی بر نقطه‌ی وسط آن پاره‌خط، بی‌گذرند.

نکته‌ی مهم: این مسئله، یک مسئله‌ی کلیدی است که برای حل چند مسئله‌ی دیگر به کار می‌رود.

ب) روش جبری ـ مختصاتی

دستگاه مختصات قائم $O-xyz$ را درنظر می‌گیریم. اگر مختصات دو نقطه‌ی ثابت A و B نسبت به این دستگاه را $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ بنامیم، می‌خواهیم مجموعه‌ی صفحه‌هایی را مشخص کنیم که این دو نقطه از هر یک از آن صفحه‌ها به یک فاصله‌اند. فرض می‌کنیم صفحه‌ی $P: ax+by+cz+d=0$، یکی از این صفحه‌ها باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$AA' = \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \text{فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی P}$$

$$BB' = \frac{|ax_2+by_2+cz_2+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \text{فاصله‌ی نقطه‌ی B از صفحه‌ی P}$$

$$AA' = BB' \Rightarrow \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|ax_2+by_2+cz_2+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\Rightarrow |ax_1+by_1+cz_1+d| = |ax_2+by_2+cz_2+d|$$

$$\Rightarrow ax_1+by_1+cz_1+d = ax_2+by_2+cz_2+d$$

$$\Rightarrow a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)+c(z_2-z_1)=0 \qquad (1)$$

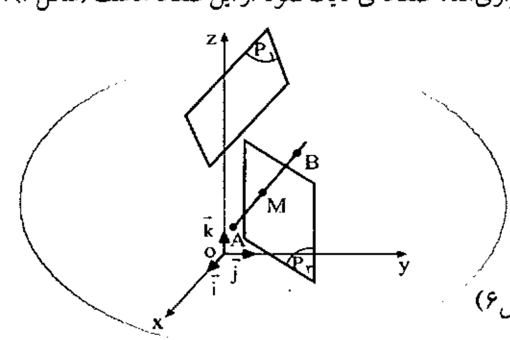
$$ax_1+by_1+cz_1+d = -(ax_2+by_2+cz_2+d)$$

$$\Rightarrow a(x_2+x_1)+b(y_2+y_1)+c(z_2+z_1)+2d=0 \qquad (2)$$

● با توجه به این که بردار قائم صفحه‌ی اختیاری P، بردار $\vec{N}=(a,b,c)$، و بردار $\overrightarrow{AB}$ نیز به تصاویر $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ است، رابطه‌ی (۱) حاصل ضرب درونی دو بردار $\vec{N}$ و $\overrightarrow{AB}$ را نشان می‌دهد؛ یعنی داریم:

$$\vec{N}.\overrightarrow{AB}=0$$

اما دو بردار $\vec{N}$ و $\overrightarrow{AB}$ هر دو مخالف صفرند، پس نتیجه می‌شود که دو بردار $\vec{N}$ و $\overrightarrow{AB}$ بر هم عمودند و این مطلب نشان می‌دهد که صفحه‌ی P با بردار $\overrightarrow{AB}$ موازی است. درنتیجه، یک مجموعه صفحه‌های جواب مسئله، صفحه‌هایی هستند که با بردار $\overrightarrow{AB}$ (یا خط AB) موازی‌اند. صفحه‌ی P یک نمونه از این صفحه‌هاست (شکل۶).



(شکل۶)

● رابطه‌ی (۲) نشان می‌دهد که صفحه‌ی اختیاری P از نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB گذشته است، زیرا داریم:

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right) \text{ وسط پاره‌خط AB}$$

$$P: ax+by+cz+d=0$$

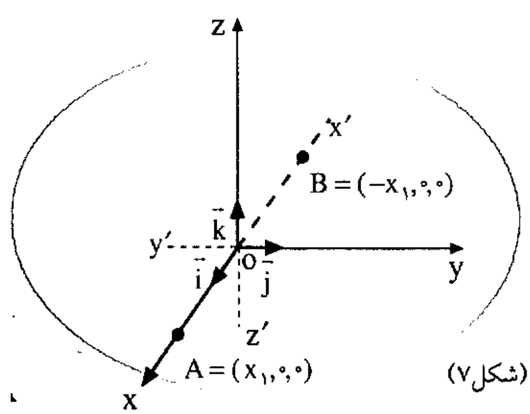
مختصات M در معادله‌ی P

$$\Rightarrow a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+b\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)+c\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)+d=0$$

$$\Rightarrow a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2)+c(z_1+z_2)+2d=0 \quad (2)$$

که این رابطه، همان رابطه‌ی (۲) است.

بنابراین، مجموعه‌ی دیگر صفحه‌های جواب مسئله، تمام صفحه‌هایی هستند که از نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB می‌گذرند. به بیان دیگر، هر صفحه‌ای که از نقطه‌ی M، وسط پاره‌خط AB بگذرد، دو نقطه‌ی A و B از آن به یک فاصله‌اند. صفحه‌ی P_2 یک نمونه از این صفحه‌هاست (شکل۶).



(شکل۷)

تمرین. در رویکرد جبری ـ مختصاتی برای حل این مسئله، دستگاه مختصات O-xyz را چنان اختیار کنید که نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB روی نقطه‌ی O، مبدأ مختصات این دستگاه مختصات، و دو نقطه‌ی A و B روی یکی از محورهای مختصات، مثلاً روی محور xها، قرار گیرند. در این صورت، اگر $A=(x_1,0,0)$ باشد، $B=(-x_1,0,0)$ خواهد بود. حال اگر یک صفحه‌ی دل‌خواه جواب مسئله را $P: ax+by+cz+d=0$ بگیریم، مسئله را خودتان حل کنید (شکل۷).

این راه‌حل را با راه‌حل قبلی مقایسه کنید. کدام ساده‌تر است؟ چرا؟

سؤال: صفحه‌ی عمودمنصف پاره‌خط AB جزو کدام مجموعه از صفحه‌های جواب مثال ۵ است؟

---

۱. برای اطلاعات بیشتر درباره‌ی تعیین معادله‌ی مکان هندسی نقطه‌ها، به کتاب مکان‌های هندسی (جلد اول) از «انتشارات مدرسه» مراجعه کنید.

□□□

با راهیان المپیادهای ریاضی (۱۲)

● غلامرضا یاسی‌پور

نگاهی به نقاط انتهایی

این بخش شامل نابرابری‌هایی است که با استفاده از این ویژگی به اثبات می‌رسند که: توابع حقیقی خاصی در نقاط انتهایی بازه‌ی تعریفشان به اکسترممشان می‌رسند. در این مورد دو نوع تابع را بررسی می‌کنیم: توابع خطی، که هر دو اکسترمم را در نقاط انتهایی «حوزه»[1]ی مربوطه‌شان دارند، و توابع محدب که ماکزیممشان بر مرز حوزه‌ی مربوطه‌شان به‌دست می‌آید. روش کار، در نظر گرفتن عبارت به صورت تابعی خطی یا محدب در هریک از متغیرها به‌طور جداگانه، و به کار بردن آن برای محصور کردن عبارت مورد نظر از بالا یا پایین است. روش‌های مذکور را در مسئله‌ای توضیح می‌دهیم که در امتحان انتخابی رومانیایی المپیاد بین‌المللی ریاضی در ۱۹۸۰ آمده است.

● *به ازای عدد مثبت مفروض a، مطلوب است ماکزیمم:*

$$\sum_{k=1}^{n}(a-a_1)(a-a_2)\cdots(a-a_{k-1})a_k(a-a_{k+1})\cdots(a-a_n)$$

که در آن a_1 ، a_2 ، ... ، a_n ، به‌طور مستقل، روی بازه‌ی $[0,a]$ تغییر می‌کند.

به ازای شاخص k، مقادیر a_1 ، a_2 ، ... ، a_{k-1} ، a_{k+1} ، ... ، a_n را ثابت در نظر می‌گیریم و به عبارت مفروض به عنوان تابعی در a_k می‌اندیشیم. این تابع، خطی است، بنابراین ماکزی‌ممش بر بازه‌ی $[0,a]$ در یکی از نقاط انتهایی به دست می‌آید. با تکرار این استدلال در مورد هر متغیر، نتیجه می‌گیریم که عبارت مورد نظر، به ازای انتخاب خاصی از a_k مساوی ۰ یا a، که در آن $k=1,2,\cdots,n$ ، به ماکزی‌ممش می‌رسد.

اگر جمیع a_k ها برابر ۰ باشند، یا دو یا بیش از دو a_k برابر a باشند، مجموع برابر ۰ است.

اگر a_k برابر a و بقیه‌ی a_k ها برابر ۰ باشند، عبارت برابر a^n است؛ درنتیجه این ماکزی‌مم مطلوب است.

اکنون به مثالی می‌پردازیم که در مسابقه‌ی ریاضی پاتنم[2] آمده و با استفاده از توابع محدب حل شده است.

● *فرض می‌کنیم n عددی طبیعی است و $x_i\in[0,1]$ ، $i=1,2,\cdots,n$. ماکزی‌مم مجموع $\sum_{i<j}|x_i-x_j|$ را بیابید.*

توجه داشته باشید که تابع $f(x)=|x-a|$ ، به‌ازای ثابت a، محدب است. بنابراین، اگر x_2 ، x_3 ، ... ، x_n را ثابت نگه داریم، عبارت مورد نظر، به علت آن‌که مجموعی از توابع محدب است، تابعی محدب در x_1 محسوب می‌شود. بنابراین، به‌خاطر ماکزی‌مم کردن آن، باید x_1 را به صورت یکی از نقاط انتهایی بازه اختیار کنیم. همین استدلال چون در مورد بقیه‌ی اعداد به‌کار رود، به این نتیجه منجر می‌شود که ماکزی‌مم مجموع، زمانی به‌دست می‌آید که جمیع x_i ها ۰ یا ۱ باشند.

فرض می‌کنیم p مورد از آن‌ها ۰ و $n-p$ مورد از آن‌ها ۱ باشند. در این صورت، مجموع مورد نظر برابر $p(n-p)$ است. با در نظر گرفتن این مقدار به‌عنوان تابعی از p، نتیجه می‌گیریم که چون n زوج باشد، ماکزی‌مم مربوطه به ازای $p=n/2$ به‌دست می‌آید و برابر $n^2/4$ است. و چون n فرد باشد، ماکزی‌مم مورد نظر به‌ازای $p=(n\pm1)/2$ حاصل می‌شود، و برابر $(n^2-1)/4$ است.

موارد زیر مسائلی از این دست‌اند.

۱. فرض می‌کنیم: $0\le a,b,c,d\le 1$. ثابت کنید:

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)+a+b+c+d\ge 1$$

۲. اعداد نامنفی a، b، c، A، B، C و k در رابطه‌ی زیر صدق می‌کنند:

$$a+A=b+B=c+C=k$$

ثابت کنید:

$$aB+bC+cA\le k^2$$

۳. فرض می‌کنیم، به ازای هر $k=1,2,\cdots,n$ ، $0\le x_k\le 1$ است. ثابت کنید:

$$x_1+x_2+\cdots+x_n-x_1x_2\cdots x_n\le n-1$$

۴. مقدار ماکزی‌مم مجموع زیر را که در آن، به ازای هر $i=1,2,\cdots,n$ ، $\frac{1}{2}\le a_i\le 1$ باشد، بیابید:

$$S_n=a_1(1-a_2)+a_2(1-a_3)+\cdots+a_n(1-a_1)$$

۵. فرض می‌کنیم $n\ge 2$ ، و به ازای هر $i=1,2,\cdots,n$ ، $0\le x_i\le 1$ است. نشان دهید:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)-(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1)\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$$

و زمانی را معین کنید که برابری برقرار است.

۶. فرض می‌کنیم، a_1 ، a_2 ، ... ، a_{19} اعدادی حقیقی از بازه‌ی $[-98,98]$ هستند. مقدار ماکزی‌مم $a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{19}a_1$ را بیابید.

۷. ثابت کنید، به ازای اعداد a، b و c در بازه‌ی $[0,1]$:

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\le 1$$

۸. اگر $a,b,c,d,e\in[p,q]$ ، با $p>0$ ، ثابت کنید:

$$(a+b+c+d+e)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e})\le 25$$
$$+6(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}})^2$$

۹. ثابت کنید، اگر $1\le x_k\le 2$ ، $k=1,2,\cdots,n$ باشد، در این صورت:

$$(\sum_{k=1}^{n}x_k)(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k})^2\le n^3$$

جواب‌ها

نگاهی به نقاط انتهایی

۱. عبارت سمت چپ نابرابری تابعی خطی از هریک از چهار متغیر است، و مینی‌مم آن در یکی از نقاط انتهایی بازه‌ی تعریف به دست می‌آید. بنابراین تنها باید به بررسی $a,b,c,d\in\{0,1\}$ بپردازیم. اگر دست‌کم یکی از آن‌ها ۱ باشد، عبارت برابر $a+b+c+d$ می‌شود که بزرگ‌تر از ۱ یا برابر ۱ است. اگر جمیع آن‌ها صفر باشند، عبارت برابر ۱ می‌شود که نابرابری را اثبات می‌کند.

۲. نابرابری، هم‌ارز این نابرابری است:

$$a(k-b)+b(k-c)+c(k-a)\le k^2$$

اگر سمت چپ را به‌عنوان تابعی از a در نظر بگیریم، خطی است. شرایط صورت مسئله مستلزم آن است که بازه‌ی تعریف $[0,k]$ است. نتیجه می‌شود که برای ماکزی‌مم‌کردن سمت چپ به انتخاب $a\in\{0,k\}$ نیاز داریم.

با تکرار استدلالی مشابه در مورد b و c نتیجه می‌گیریم که ماکزی‌مم سمت چپ به ازای $(a,b,c)\in\{0,k\}^3$ به‌دست می‌آید.

با بررسی هشت وضعیت ممکن درمی‌یابیم که این ماکزی‌مم k^2 است و مسئله حل می‌شود.

(جمع المپیادهای ریاضی متحد)

۳. x_2 ، x_3 ، ...، x_n را ثابت در نظر می‌گیریم و به بررسی تابع $f:[0,1]\to R$ ،

$$f(x)=x+x_2+\cdots+x_n-xx_2\cdots x_n$$

می‌پردازیم. این تابع در x خطی است. درنتیجه ماکزی‌مم خود را در یکی از نقاط انتهایی بازه‌ی $[0,1]$ به‌دست می‌آورد. بنابراین، برای ماکزی‌مم کردن سمت چپ نابرابری، باید x_1 را ۰ یا ۱ انتخاب کنیم، و بنا به تقارن، این مطلب در مورد متغیرهای دیگر نیز برقرار است. البته اگر جمیع x_i ها برابر ۱ باشند، در این صورت برابری خواهیم داشت. اگر دست‌کم یکی از آن‌ها ۰ باشد، در این صورت حاصل‌ضربشان نیز صفر است، و مجموع n-۱ جمله‌ی دیگر حداکثر n-۱ می‌شود که نابرابری را اثبات می‌کند.

(مسابقه‌ی ریاضی رومانی)

۴. عبارت در هر یک از متغیرها خطی است. بنابراین، همانند راه‌حل‌های مسائل پیشین، ماکزی‌مم آن به ازای

$$a_k=\frac{1}{2} \text{ یا } 1 \text{ و } k=1,2,\cdots,n$$

به دست می‌آید. اگر به ازای هر k، $a_k=\frac{1}{2}$ باشد، آن‌گاه خواهیم داشت: $S_n=\frac{n}{4}$. نشان می‌دهیم که مقدار S_n نمی‌تواند از این عدد تجاوز کند.

اگر دقیقاً m تعداد از a_k ها برابر ۱ باشند، در این صورت m جمله از مجموع، صفرند. هم‌چنین، حداکثر m جمله برابر $\frac{1}{2}$ هستند. یعنی، جمله‌هایی به‌صورت: $a_k(1-a_{k+1})$ با $a_k=1$ و $a_{k+1}=\frac{1}{2}$. هریک از جمله‌های باقی‌مانده دارای هر دو عامل برابر $\frac{1}{2}$ است و درنتیجه برابر $\frac{1}{4}$ می‌شود. به این ترتیب، مقدار مجموع حداکثر عبارت است از:

$$m.0+\frac{m}{2}+\frac{(n-2m)}{4}=\frac{n}{4}$$

که نشان می‌دهد، ماکزی‌مم مورد نظر $\frac{n}{4}$ است.

(امتحان انتخابی IMO رومانی، ۱۹۷۵)

۵. سمت چپ نابرابری را با $S(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ نمایش می‌دهیم. این عبارت نسبت به هریک از متغیرهای x_i خطی است. مانند قبل، نتیجه می‌گیریم که اثبات نابرابری هنگامی که x_i ها برابر ۰ یا ۱ باشند، کفایت می‌کند.

اگر دقیقاً k مورد از x_i ها برابر ۰ باشند و بقیه برابر ۱، آن‌گاه:

$$S(x_1,x_2,\cdots,x_n)\le n-k$$

و از آن‌جا که مجموع

$$x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1$$

دست‌کم $n-2k$ است، $S(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ کمتر از یا برابر با مقدار زیر است:

$$n-k-(n-2k)=k$$

بنابراین، ماکزی‌مم S کمتر از یا برابر با $\min(k,n-k)$ است که حداکثر $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ است. نتیجه می‌شود که به‌ازای n زوج، برابری وقتی برقرار است که:

$$(x_1,x_2,x_3,\cdots)=(1,0,1,0,\cdots,1,0) \quad \text{یا} \quad (0,1,0,1,\cdots,0,1)$$

و به ازای n فرد، وقتی برقرار است که جمیع جفت‌های (x_i,x_{i+1}) ، $i=1,2,\cdots,n$ شامل یک صفر و یک ۱ باشند، به استثنای یک جفت که شامل دو ۱ است (با قرارداد $x_{n+1}=x_1$).

(المپیاد ریاضی بلغارستان، ۱۹۹۵)

۶. مجموعی که مینی‌مم آن را می‌خواهیم نسبت به هر متغیر، خطی است. درنتیجه مینی‌مم مورد نظر به‌ازای $a_i\in\{-98,98\}$ ای به‌دست می‌آید. از آن‌جا که تعداد شاخص‌ها فرد است، اگر به شاخص‌های mod ۱۹ نگاه کنیم، iای چنان موجود است که a_i و a_{i+1} دارای یک علامت‌اند. درنتیجه، مجموع مورد بحث دست‌کم از این قرار خواهد بود:

$$-18\times98^2+98^2=-17\times98^2$$

و برابری به ازای مقادیر زیر به دست می‌آید:

$$a_1=a_3=\cdots=a_{19}=-98,\ a_2=a_4=\cdots=a_{18}=98$$

۷. به ازای هر دو عدد نامنفی a و β، تابع

$$x\to\frac{\alpha}{x+\beta}$$

به‌ازای $x\ge0$ هم‌گراست. زیرا عبارت مفروض، چون به‌عنوان تابعی از هریک از سه متغیر در نظر گرفته شود، مجموع دو تابع محدب و دو تابع خطی است، و بنابراین محدب. به این ترتیب، هنگامی که دو متغیر ثابت باشند، ماکزی‌مم مورد نظر زمانی به‌دست می‌آید که متغیر سوم در یکی از نقاط انتهایی بازه باشد. بنابراین، مقادیر عبارت همواره کمتر از بزرگ‌ترین مقدار حاصل از انتخاب $a,b,c\in\{0,1\}$ هستند. بررسی ساده‌ای از هشت حالت ممکن نشان می‌دهد که مقدار عبارت مورد نظر نمی‌تواند از ۱ تجاوز کند.

(USAMO, 1980)

۸. اگر چهار عدد از اعداد را ثابت و پنجمی را به‌عنوان متغیر x در نظر بگیریم، آن‌گاه سمت چپ، تابعی به‌صورت $\alpha x+\beta/x+\gamma$ ، با α ، β ، γ ی مثبت و x متغیر روی بازه‌ی $[p,q]$ درمی‌آید. این تابع بر بازه‌ی $[p,q]$ ، به علت مجموع یک تابع خطی و محدب بودن، محدب است. بنابراین، ماکزی‌مم خود را در یکی از (یا هر دو) نقاط انتهایی بازه‌ی تعریف آن به‌دست می‌آورد.

این مجموع مانند قبل، نشان می‌دهد که اگر سعی در ماکزی‌مم کردن مقدار عبارت مورد نظر داریم، کافی است که اجازه دهیم a، b، c، d و e مقادیر p و q را اختیار کند.

اگر n عدد از این اعداد برابر p، و $n-5$ عدد برابر q باشند، آن‌گاه سمت چپ برابر

$$n^2+(5-n)^2+n(5-n)\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)=25$$
$$+n(5-n)\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$$

می‌شود. مقدار ماکزی‌مم $n(5-n)$ زمانی به‌دست می‌آید که n برابر ۲ یا ۳ باشد و در این حال خواهیم داشت:

$$n(5-n)=6$$

و نابرابری به اثبات می‌رسد.

(USAMO, 1977).

۹. با استفاده از نابرابری AM − GM می‌توان نوشت:

$$\sqrt[3]{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)^2}\le\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k+\frac{1}{x_k}+\frac{1}{x_k}}{3}$$

تابع $x+\frac{2}{x}$ در بازه‌ی $[1,2]$ محدب است. بنابراین ماکزی‌مم خود را در یکی از نقاط انتهایی این بازه به‌دست می‌آورد. نیز، مقدار این تابع در هریک از نقاط انتهایی برابر ۳ است. این موضوع نشان می‌دهد که:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k+\frac{1}{x_k}+\frac{1}{x_k}}{3}\le n$$

و نابرابری به اثبات می‌رسد.

در این‌جا خاطرنشان می‌کنیم، همین ایده را می‌توان در اثبات صورت عمومی‌تر این نابرابری که از جی. اچ. سولوسی[3] است، و، به ازای $x_i\in[a,b]$ و $i=1,2,\cdots,n$، برقرار است ـ یعنی نابرابری زیر ـ به‌کار برد:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)^{ab}\le\left(\frac{a+b}{1+ab}n\right)^{1+ab}$$

(L. Panaitopol)

---

1. domain
2. W. L. Putnam Mathematical Competition
3. Gh. Söllösy

معرفی سایت‌های ریاضی جهان

● احسان یارمحمدی

ادامه‌ی مطالب صفحه‌ی ۱۹

* نمودارها (Graphs)

۱. توابع و نمودارها (Functions and Graphs)

۲. هندسه‌ی تحلیلی صفحه
(Plane Analytical Geometry)

۳. حرکت‌شناسی (Kinematics)

۴. بردارها (Vectors)

* مشتق‌گیری (Differentation)

۱. مقدمه‌ای به حسابان (Introduction to Calculus)

۲. مشتق‌گیری (Differentation)

۳. کاربردهای مشتق‌گیری
(Applications of Differentation)

۴. مشتق توابع غیرجبری
(Differentation of Transcendental Functions)

* احتمال (Probability)

۱. شمارش (Counting)

۲. احتمال (Probability)

* انتگرال‌گیری (Integration)

۱. انتگرال‌گیری (Integration)

۲. کاربردهای انتگرال‌گیری
(Applications of Integration)

۳. روش‌های انتگرال‌گیری (Methods of Integration)

برگزیده‌ای از سؤالات المپیادهای ریاضی

کشور انگلستان در سال‌های ۲۰۰۱ و ۲۰۰۲

● ترجمه و تالیف: هوشنگ شرقی

اشاره

درباره‌ی مسابقات و المپیادهای ریاضی در کشور انگلستان قبلاً توضیحاتی داده‌ایم. علاقه‌مندان می‌توانند به کتاب «راهنمای المپیاد ریاضی» (مقدمه‌ای بر حل مسائل براساس ۳۲ دوره المپیاد ریاضی بریتانیا)، ترجمه‌ی این جانب، از «انتشارات مدرسه» مراجعه کنند. در این شماره پنج مسئله از مسائل المپیادهای فوق در سال‌های ۲۰۰۱ و ۲۰۰۲ را همراه با حل آن‌ها آورده‌یم.

* * *

مسائل

۱. می‌دانیم که:

$$34! = 295232799cd96041408476186096435ab\cdots\cdots$$

رقم‌های a، b، c و d را به‌دست آورید.

۲. مثلث ABC که در آن $AB < AC$ و دایره‌ی محیطی آن S() مفروض‌اند. عمودی از A بر BC رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه‌ی دیگر P قطع کند. نقطه‌ی X روی خط AC مفروض است و BX، دایره‌ی S را در نقطه‌ی دیگر Q قطع می‌کند. ثابت کنید $BX = CX$، اگر و تنها اگر PQ قطری از S باشد.

۳. فرض کنید x، y و z عددهای حقیقی مثبت باشند؛

به‌طوری‌که: $x^۲+y^۲+z^۲=۱$. ثابت کنید:

$$x^۲yz+xy^۲z+xyz^۲ \le \frac{۱}{۳}$$

۴. همه‌ی عددهای صحیح و مثبت m و n را به‌گونه‌ای به‌دست آورید که n فرد باشد و داشته باشیم:

$$\frac{۱}{m}+\frac{۴}{n}=\frac{۱}{۱۲}$$

۵. همه‌ی عددهای حقیقی و مثبت x را که در معادله‌ی زیر صادق هستند، به‌دست آورید:

$$x+\left\lfloor\frac{x}{۶}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{x}{۲}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{۲x}{۳}\right\rfloor$$

که در این معادله، $\lfloor t \rfloor$ نماد بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی x است.

حل مسائل

۱. می‌دانیم که اگر n عددی طبیعی و $\alpha \le n$ عددی اول باشد، تعداد عوامل α در $n!$ از دستور $\left\lfloor\frac{n}{\alpha}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{\alpha^۲}\right\rfloor+\dots$ به‌دست می‌آید (به سادگی می‌توانید علت آن را دریابید). و چون تعداد صفرهای سمت راست $n!$ از توان ۱۰ در آن به‌دست می‌آید، پس درواقع، تعداد ۵های موجود در $n!$ (توان ۵) معادل تعداد صفرهای سمت راست $n!$ است. (چرا؟) لذا تعداد صفرهای سمت راست $n!$ برابر است با: $\left\lfloor\frac{n}{۵}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{۲۵}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{۱۲۵}\right\rfloor+\dots$ و بنابراین تعداد صفرهای سمت راست $۳۴!$ مساوی است با: $\left\lfloor\frac{۳۴}{۵}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{۳۴}{۲۵}\right\rfloor=۷$.

درنتیجه: $b=۰$.

اما هم‌چنین روشن است که اگر صفرهای سمت راست این عدد را حذف کنیم، عدد حاصل، یعنی $\frac{۳۴!}{۱۰^۷}$، باید بر ۸ بخش‌پذیر باشد. (به توان ۲ در $۳۴!$ دقت کنید.) پس باید عدد سه‌رقمی سمت راست آن، یعنی $\overline{۳۵a}$ بر ۸ بخش‌پذیر و زوج باشد. لذا ۸ یا ۶ یا ۴ یا ۲ = a و با امتحان کردن به سادگی درمی‌یابیم که تنها ۳۵۲ بر ۸ بخش‌پذیر است و درنتیجه: $a=۲$.

اما برای یافتن c و d توجه می‌کنیم که $۳۴!$ باید بر ۹ و بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد. از بخش‌پذیری آن بر ۹ نتیجه می‌شود که مجموع ارقام آن بر ۹ بخش‌پذیر است. با محاسبه‌ای ساده درمی‌یابیم، مجموع ارقام این عدد برابر است با: $۱۴۱+c+d$. و چون باقی‌مانده‌ی ۱۴۱ بر ۹، مساوی ۶ است، پس باید $c+d+۶$ مضرب ۹ باشد:

$$c+d+۶=۹k \Rightarrow c+d=۹k-۶$$

و با توجه به این‌که $۰ \le c+d \le ۱۸$، با قرار دادن مقادیر $k=۱,۲$ خواهیم داشت: ۱۲ یا ۳ = $c+d$ و درنتیجه:

$(c,d)=(۰,۳)$ یا $(۱,۲)$ یا $(۲,۱)$ یا $(۳,۰)$ یا $(۳,۹)$ یا $(۴,۸)$

یا $(۵,۷)$ یا $(۶,۶)$ یا $(۷,۵)$ یا $(۸,۴)$ یا $(۹,۳)$

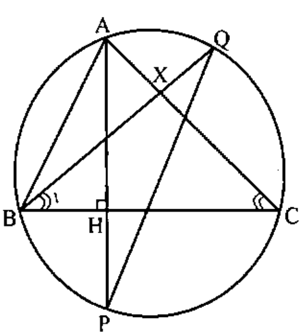
هم‌چنین، می‌دانیم که باقی‌مانده‌ی تقسیم یک عدد بر ۱۱ از جمع و تفریق ارقام آن به‌دست می‌آید؛ یعنی:

$$۳۴! \overset{۱۱}{\equiv} ۰-۰+۰-۰+۰-۰+۰-۲+۵-۳+۴-۶+۹-۰+۶-۸$$
$$+۱-۶+۷-۴+۸-۰+۴-۱+۴-۰+۶-۹+d-c+۹-۹+۷$$
$$-۲+۳-۲+۵-۹+۲=۱۹+d-c \Rightarrow ۱۹+d-c \overset{۱۱}{\equiv} d-c-۳$$
$$\Rightarrow d-c=۱۱k'+۳ \text{ و } ۰ \le d-c \le ۸ \Rightarrow d-c=۳$$

و تنها جوابی که در این شرط صدق می‌کند، $c=۰$ و $d=۳$ است.

۲. فرض کنیم مطابق شکل: $BX \times CX$. در این صورت: $\hat{B}_۱=\hat{C}$ و با توجه به ویژگی زوایای محاطی نتیجه می‌شود:

$$CQ=AB$$



هم‌چنین، با توجه به ویژگی زوایای داخلی می‌توان نوشت:

$$\hat{H}=\frac{CP+AB}{۲}=۹۰^\circ \Rightarrow CP+AB=۱۸۰^\circ$$

$\Rightarrow CP+CQ=۱۸۰^\circ \Rightarrow PQ=۱۸۰^\circ \Rightarrow$ PQ قطر است.

برعکس، اگر بدانیم PQ قطر است، به طریق مشابه می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l} PQ=۱۸۰^\circ \Rightarrow CP+CQ=۱۸۰^\circ \\ \hat{H}=\frac{CP+AB}{۲}=۹۰^\circ \Rightarrow CP+AB=۱۸۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow AB=CQ$$

$$\Rightarrow \hat{B}_۱=\hat{C} \Rightarrow BX \times CX$$

۳. با توجه به نابرابری «کوشی- شوارتز» می‌توان نوشت:

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2) \ge (ax+by+cz)^2$$

اگر در این نابرابری فرض کنیم: $a=b=c=xyz$ نتیجه می‌شود:

$$\underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{1}(x^2y^2z^2+x^2y^2z^2+x^2y^2z^2)$$

$$\ge (x^2yz+xy^2z+xyz^2)^2$$

$$\Rightarrow 3x^2y^2z^2 \ge (x^2yz+xy^2z+xyz^2)^2$$

$$\Rightarrow x^2yz+xy^2z+xyz^2 \le \sqrt{3}xyz \qquad (*)$$

هم‌چنین، با توجه به نامساوی واسطه‌های حسابی- هندسی (AM − GM) خواهیم داشت:

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{3} \ge \sqrt[3]{x^2y^2z^2} \Rightarrow 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \le \underbrace{x^2+y^2+z^2}_{1}$$

$$\Rightarrow 27x^2y^2z^2 \le 1 \Rightarrow xyz \le \frac{1}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3}xyz \le \frac{1}{3}$$

و با مقایسه با نامساوی (*) نتیجه می‌شود:

$$x^2yz+xy^2z+xyz^2 \le \frac{1}{3}$$

۴.

$$\frac{1}{m}+\frac{4}{n}=\frac{1}{12} \Rightarrow 12n+48m=mn$$

$$\Rightarrow m=\frac{12n}{n-48} \Rightarrow m=\frac{12(n-48)+12\times 48}{n-48}$$

$$=12+\frac{12\times 48}{n-48} \Rightarrow n-48 \mid 12\times 48 = 2^6\times 3^2$$

حال با دادن مقادیر فرد به n که با شرط فوق صادق باشد، نتیجه می‌شود:

$n=49$ یا 51 یا $57 \Rightarrow (m,n)=(588,49)$ یا $(204,51)$ یا $(76,57)$

۵. فرض می‌کنیم، $x=6y$ و از آن‌جا به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$6y+\lfloor y\rfloor=\lfloor 3y\rfloor+\lfloor 4y\rfloor$$

و با فرض $y=n+p$ که در آن $n\in Z^+$ و $0\le p<1$ است، نتیجه می‌شود:

$$6n+6p+n=3n+\lfloor 3p\rfloor+4n+\lfloor 4p\rfloor$$

$$\Rightarrow 6p=\lfloor 3p\rfloor+\lfloor 4p\rfloor$$

حال با فرض $0\le p<\frac{1}{4}$ نتیجه می‌شود: $0\le 3p<\frac{3}{4}$ و $\lfloor 3p\rfloor=0$ و $0\le 4p<1$ و $\lfloor 4p\rfloor=0$ و درنتیجه: $6p=0$ و $p=0$ و $y=n$ و $x=6n$. یعنی تمام عددهای طبیعی مضرب ۶ یک جواب معادله هستند.

اما اگر $\frac{1}{4}\le p<\frac{1}{3}$ باشد، آن‌گاه؛ $\frac{3}{4}\le 3p<1$ و $\lfloor 3p\rfloor=0$ و $1\le 4p<\frac{4}{3}$ و $\lfloor 4p\rfloor=1$ و معادله به‌صورت $6p=0+1$ درمی‌آید و $p=\frac{1}{6}$ که در بازه‌ی ($\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$) نیست.

اگر $\frac{1}{3}\le p<\frac{1}{2}$ باشد، آن‌گاه: $1\le 3p<\frac{3}{2}$ و $\lfloor 3p\rfloor=1$ و $\frac{4}{3}\le 4p<2$ و $\lfloor 4p\rfloor=1$ و درنتیجه: $6p=2$ و $p=\frac{1}{3}$ و $y=n+\frac{1}{3}$ و $x=6n+2$. یعنی عددهای طبیعی که باقی‌مانده‌ی آن‌ها بر ۶ مساوی ۲ باشد نیز جوابی از معادله هستند.

اگر $\frac{1}{2}\le p<\frac{2}{3}$ باشد، آن‌گاه: $\frac{3}{2}\le 3p<2$ و $[3p]=1$ و $2\le 4p<\frac{8}{3}$ و $\lfloor 4p\rfloor=2$ و درنتیجه: $6p=3$ و $p=\frac{1}{2}$ که از آن‌جا خواهیم داشت: $y=n+\frac{1}{2}$ و $x=6n+3$.

اگر $\frac{2}{3}\le p<\frac{3}{4}$ باشد، آن‌گاه: $2\le 3p<\frac{9}{9}$ و $\lfloor 3p\rfloor=2$ و $\frac{8}{3}\le 4p<3$ و $\lfloor 4p\rfloor=2$ و $6p=4$ و $p=\frac{2}{3}$ و $y=n+\frac{2}{3}$ و $x=6n+4$.

و اگر $\frac{3}{4}\le p<1$ باشد، آن‌گاه $\frac{9}{4}\le 3p<3$ و $3\le 4p<4$ و $\lfloor 3p\rfloor=2$ و $\lfloor 4p\rfloor=3$ و $6p=5$ و $p=\frac{5}{6}$ و $y=n+\frac{5}{6}$ و $x=6n+5$. بنابراین:

$$x\in\{6n+r \mid n\in\mathbb{N}, r=0 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3 \text{ یا } 4 \text{ یا } 5\}$$

□□□

تولید یک مجله (بخش دوم)

● دکتر غلامرضا یاسی‌پور

اشاره

در شماره‌های قبل قسمت اول مصاحبه با سردبیر مجله‌ی رشد برهان دوره‌ی متوسطه را ملاحظه کردید. اینک در ادامه‌ی آن، قسمت دوم مصاحبه را می‌آوریم.

● سؤال بعدی که شما هم اشاره‌ی مختصری به آن کردید، این است که آموزش ریاضی در این دوره تقریباً ۲۰ ساله‌ای که شما در جریانش بودید چه پیشرفت‌هایی کرده است و چه نواقصی دارد؟ البته اگر دارد!

■ روشن است که در طول این سال‌ها آموزش ریاضی تغییر کرده و بسیاری از تغییرات آن هم، تغییرات اجباری بوده است. یعنی وقتی منابع دارند فراوان می‌شوند، وقتی رسانه‌ها دارند تغییر می‌کنند، وقتی امکانات آموزشی و کمک‌آموزشی بیشتر می‌شوند، طبعاً آموزش ریاضی هم تغییر پیدا می‌کند. اما تغییری که باید به لحاظ محتوایی و ساختاری داشته باشد، به نظر من هنوز رخ نداده است. یعنی آموزش ریاضی در حال حاضر در دبیرستان‌ها، نسبت به سال‌های ۶۶، ۶۷ و ۶۸، شاید فقط پنج درصد از لحاظ روش تغییر کرده است. البته ممکن است در محتوا هم تغییراتی رخ داده باشد که قطعاً هم همین‌طور است. بسیاری از این تغییرات به ناچار بوده است. یعنی کتاب درسی تغییر کرده و نحوه‌ی ارائه‌ی مطالب در کتاب درسی تغییر کرده، من معلم هم تغییر کرده‌ام، بر آن اساس. اما اگر بخواهیم آموزش ریاضی امروز دنیا را درنظر بگیریم، خیلی با آن فاصله داریم. یعنی در آموزش ریاضی امروز دنیا نظریه‌هایی پیاده شده، کارهایی انجام گرفته و کلاس‌هایی برای معلمان گذاشته شده است که در آموزش ما اثری از آن‌ها نیست.

کمی می‌آیم عقب‌تر و این جریان را نگاه می‌کنم. زمانی که من می‌خواستم لیسانس بگیرم، واحدهای اصلی، لیسانس دبیری

ریاضی با لیسانس ریاضی محض یکسان بود و فقط در چند واحد تربیتی تفاوت وجود داشت. ما چند واحد به اسم واحدهای تربیتی، مثل روان‌شناسی کودک و نوجوان، تمرین دبیری، بررسی کتب دبیرستانی داشتیم که آن‌ها نداشتند. اما آیا واقعاً این واحدها برای من که می‌خواهم آموزشگر ریاضی بشوم، کافی‌اند؟ کدام یک از نظریه‌هایی که الان در دنیا برای آموزش ریاضی پیاده می‌شوند و براساس آن‌ها آموزشگر ریاضی تربیت می‌شود، در ایران وجود دارد؟ چه در دوره‌ی کارشناسی چه در دوره‌ی کارشناسی ارشد. دوره‌ی دکترا هم که ما هنوز در ایران نداریم، داریم؟

می‌خواهم بپرسم، کدام یک از این نظریه‌ها، الان به آن‌ها که می‌خواهند دبیر ریاضی شوند، تدریس می‌شود؟ هنوز همان واحدهایی که ما زمان دانشجویی می‌خواندیم، به دانشجویان رشته‌ی دبیری ریاضی تدریس می‌شود. البته از امسال اصلاً رشته‌ای تحت عنوان دبیری وجود ندارد! آیا دبیران ما در طول دوره‌ی دبیری، معلم ریاضی می‌شوند؟ کدام یک از این دوره‌های ضمن خدمت به آن بحث اصلی آموزش ریاضی می‌پردازد؟ هیچ کدام. اگر معلمینی مطالعاتی داشته‌اند و روی قضیه‌ای کار کرده‌اند، شخصی بوده است. یعنی اگر من پنج درصد، ده درصد تغییر کرده‌ام، خودم کتاب و مقاله خوانده‌ام و با چند نفر که آموزش ریاضی را خوب کار کرده‌اند، آشنا بوده‌ام و از ایشان استفاده کرده‌ام. این ده درصد پیشرفت در زمینه‌ی آموزش ریاضی بوده است و در غیر این صورت، فقط تغییرات اجباری داشته‌ایم.

● **ما دهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران را برگزار کرده‌ایم. این ده کنفرانس آموزش ریاضی که برگزار شده و همت زیادی نیز صرف آن شده و دبیران هم در این کنفرانس‌ها شرکت کرده، مقاله داده یا به‌عنوان مستمع حضور داشته‌اند، هیچ تأثیری روی آموزش ریاضی در ایران نداشته‌اند؟**

■ نمی‌شود بگوییم تأثیر نداشته‌اند. حتماً تأثیر گذاشته‌اند، اما تأثیر قطعاً در حد و اندازه‌ی آن کسانی بوده که در کنفرانس‌ها شرکت کرده‌اند. آیا مثلاً بنده بعد از کنفرانس آمده‌ام کلاسی دایر کنم تا تجربیاتی را که کسب کرده‌ام، به بقیه منتقل کنم؟ آیا کتابی که در این زمینه چاپ شده، در اختیار همه‌ی معلمین ریاضی قرار گرفته است؟ آیا فیلم‌های کنفرانس، کلاس‌ها و سخن‌رانی‌هایی که به‌صورت موازی برگزار و همه هم ضبط شده‌اند، در اختیار معلمین قرار گرفته‌اند؟ نه! چند نفر می‌توانند در یک کنفرانس آموزشی شرکت کنند؟ بیشتر از دو هزار نفر؟ آن هم در سطح دوره‌های ابتدایی و راهنمایی و متوسطه. چون می‌دانید که کنفرانس‌های آموزشی، فقط دوره‌ی متوسطه را پوشش نمی‌دهد.

● **آقای امیری، شما به دو سؤال بعدی ما هم جواب دادید. حال یک سؤال خصوصی مطرح می‌کنم و بعد دوباره می‌رویم سراغ سؤال‌های عمومی. کدام استاد بیشترین تأثیر را بر شما داشته است؟ و چرا؟**

■ در دوره‌ی راهنمایی، معلم دینی ما آقایی بود به نام احمد زمانی که من همیشه تحت تأثیر ایشان بودم. گرچه ایشان معلم دینی بودند، اما در خیلی از زمینه‌ها معلم من بودند. روش و منش معلمی ایشان این انگیزه را به من داد که پا در این عرصه بگذارم و به کار معلمی علاقه‌مند شدم. در دوره‌ی متوسطه معلمین خوب خیلی داشتم که اگر بخواهم یکی را از بین همه‌ی آن خوب‌ها بگویم، آقای مهندس مهرداد هستند که مکانیک به ما درس می‌دادند. ایشان الان قطعاً بازنشست شدند. من ایشان را تا دو سه سال پیش هم می‌دیدم. یک بار خدمتشان رسیدم و مطلع شدم، با مجله‌ی رشد آموزش فیزیک همکاری داشتند و دارند. در دوره‌ی کارشناسی در دانشگاه، از استادم، جناب آقای دکتر نشوادیان، معلم ریاضی بودن را یاد گرفتم. همواره دوست داشته‌ام که پا جای پای ایشان بگذارم و همیشه مدیونشان هستم. دست همه‌ی این عزیزان را می‌بوسم.

● **نظرتان درباره‌ی مدارس غیرانتفاعی چیست؟ چه‌قدر در همان رشته‌ی خودتان تأثیر دارند؟ بیشتر بحثم، بحث ریاضی است.**

■ الان مدارس ما تبدیل شده‌اند به مدارس غیرانتفاعی. یعنی اکثریت با مدارس غیرانتفاعی است.

● **یعنی تعدادشان بیشتر است؟**

■ بله، الان در تهران حداقل در دوره‌ی متوسطه، تعداد مدارس غیرانتفاعی بیشتر از مدارس دولتی است.

● **تأثیرشان چگونه است؟ خوب؟ متوسط؟ بد؟**

■ در نظام آموزشی ما، مدیر نقش خیلی مهمی دارد و خیلی تأثیرگذار است. اگر مدیر یک مدرسه‌ی غیرانتفاعی، آدم فرهنگی باتجربه‌ای باشد، مدرسه را به آن‌چه که باید باشد، تبدیل می‌کند. چون در نهایت که فرقی نمی‌کند! نظام آموزشی ما نظامی متمرکز است، یعنی همان کتاب درسی که در مدرسه‌ی غیرانتفاعی باید تدریس شود، در مدرسه‌ی دولتی هم باید تدریس شود. اما اگر مدیر آدمی فرهنگی باشد، این کار به نحو احسن انجام می‌شود.

من فکر می‌کنم، اگر به مدرسه‌ی غیرانتفاعی از این دریچه نگاه کنیم که امکانات آموزشی بهتری دارند و معلم‌ها حقوق و حق‌التدریس بهتری می‌گیرند، بنابر این کار بهتری ارائه می‌شود، اشتباه نکرده‌ایم. اما آیا مخاطبینی که روبه‌روی این معلم‌ها و در این مدارس در حال درس خواندن هستند، اکثریت هستند؟ در پاسخ به این پرسش دچار اشکال می‌شویم. یعنی آیا ما امکانات آموزشی و معلمین خوب را برای عده‌ای که نمی‌گویم خیلی کم، اما در اقلیت هستند، به کار نگرفته‌ایم؟ ما باید بتوانیم این امکانات را توسعه دهیم. البته من شنیده‌ام چنین کاری

در شرف انجام است. یعنی قرار شده است، امسال در اداره‌ی مدارس وزارت تعاون و وزارت آموزش و پرورش تعامل داشته باشند و مدیریت به‌صورت هیئت امنایی صورت بگیرد. در این صورت بازده خوب خواهد شد. در واقع، آن امکاناتی که الان در مدارس غیرانتفاعی خوب ما هست، ان‌شاءالله به مدارس دولتی هم آورده شود.

بنابراین، مدارس غیرانتفاعی خوب کم نداریم. مدارس غیرانتفاعی که قبل از انقلاب اسلامی ملی بودند و حالا شده‌اند غیرانتفاعی، آن موقع هم تأثیرگذارترین مدارس بودند؛ مثل البرز و هشترودی و مدارس اسلامی مانند علوی. الان هم مدارسی داریم که تأثیرگذارند. یعنی خروجی‌هایشان آدم‌هایی هستند که فقط درس نخوانده‌اند. درس زندگی یاد گرفتند، علم آموخته‌اند و در جامعه می‌توانند گلیم خودشان و بقیه را از آب بیرون بکشند.

● **سؤال بعدی که در واقع مهم‌ترین سؤال است: کنکور و معضل آن؟ یعنی شما آیا این روش تستی برای ریاضیات را ـ چون بحث ما بحث اختصاصی ریاضیات است ـ می‌پسندید یا خیر؟ آیا برای آن دلیلی دارید و یا فقط نمی‌پسندید و یا نه می‌پسندید؟**

■ چند وقت پیش هم آقای شرقی، سردبیر مجله‌ی ریاضی که مبتکران چاپ می‌کند، همین سؤال را کرد. البته در پاسخ به سؤال‌های ایشان نظرم را کامل و باز نگفتم. یک همایشی بود در منطقه ۱، چون من مسئولیت گروه ریاضی منطقه‌ی ۱ را هم دارم، تقریباً چهار سال پیش همایشی در این منطقه برگزار کردیم، تحت عنوان «نقش کنکور در آموزش ریاضی» که خود شما از سخن‌ران‌های آن همایش بودید، در سالن شهید مولایی. البته اسم همایش ما این نبود. اسم اصلی آن چنین بود: «نقش مخرب کنکور در آموزش ریاضی» که ما مخربش را برداشتیم. گفتیم خود آن‌ها که می‌آیند، می‌شنوند و پی به آن می‌برند.

کنکور دارد تیشه می‌زند به آموزش ریاضی. این را من با اعتقاد کامل می‌گویم و پای حرفم هم هستم. در جایی که من باید مفاهیم را با عمق بسیار بالا درس بدهم، یعنی آن هدف اصلی آموزش ریاضی که فکر کردن و به تفکر واداشتن مخاطبم است، به او شعبده‌بازی و روش‌های تست زدن را یاد می‌دهم. محدودش می‌کنم به زمان و می‌گویم تو باید در این زمان فکر کنی و در این زمان به من جواب بدهی. پس مجبورم به او فرمول بدهم. در واقع، خلاقیت را از بین می‌برم و مفاهیم را نصفه‌نیمه یاد می‌دهم.

یادم هست، در آن همایش من از آقای قندهاری خواستم، تعدادی از تست‌های کنکور را نقد کند. ایشان خیلی استادانه این کار را انجام داد. تست کنکور را مثال می‌زد و نشان می‌داد به همه و می‌گفت این تست کنکور است. بنده اگر بخواهم این مسئله‌ی ریاضی را سر کلاس دبیرستان حل کنم، این‌طور حل می‌کنم که از لحاظ ساختار آموزشی، حل آن روشی کاملاً منطقی دارد. ولی اگر بخواهم به دانش‌آموزم سر کلاس کنکور درس بدهم، این‌طور حل می‌کنم که در سه خط به جواب می‌رسد و یا با حذف گزینه‌ها و روش‌های دیگر، در یک خط به جواب می‌رسم. توجه داشته باشید، وقتی من این‌جور درس می‌دهم، این مفاهیم از قلم می‌افتند! حالا اگر چنین مسئله‌ای با این شرایط طرح شود، دانش‌آموزی که آن را به روش کنکوری یاد گرفته است، دیگر نمی‌تواند جواب دهد. ده پانزده تا مسئله را به همین ترتیب مقایسه می‌کرد.

مسلم است که کنکور دارد به آموزش ریاضی ضربه می‌زند، ولی این که ما چاره‌ای داریم یا نداریم یا بحث‌هایی که در حاشیه مطرح است، بماند. به هر صورت، این تعیین سرنوشت یک مملکت است آقای یاسی‌پور. این بچه‌ها که دارند دانشگاه می‌روند، فردا می‌خواهند آینده‌سازان مملکت اسلامی ما بشوند. وقتی من کنکور برگزار می‌کنم، سرنوشت این مملکت را رقم می‌زنم، رقم زدن سرنوشت یک مملکت در مدت چهار ساعت اصلاً فاجعه است! اصلاً اقدام به این کار به نظر من اشکال دارد. این سرنوشت که با کم‌ترین عامل مزاحم تغییر می‌کند. وقتی این حرف را می‌زنم، تعجب می‌کنید. درحالی‌که عده‌ای نشسته‌اند سر جلسه‌ی کنکور، بیرون یک اره‌ی برقی شروع می‌کند به کار کردن! آیا آن‌ها که در جلسه‌ی کنکور نشسته‌اند، حواسشان پرت می‌شود یا نه؟ آیا تأثیری در قبولی‌شان دارد یا نه؟ این قبولی در سرنوشت مملکت تأثیر دارد یا نه؟ پس سرنوشت یک مملکت با صدای یک اره‌ی برقی تغییر می‌کند!

اما چاره چیست؟ ما چندین راه پیشنهاد کرده‌ایم، اما تا به حال توجه نشده است. وظیفه‌ی اصلی سازمان سنجش، سنجش است، نه گزینش. الان سازمان سنجش ما، سازمان سنجش و گزینش است! سازمان سنجش باید امتحان‌های استاندارد را از دبیرستان تا دیپلم و حتی پیش‌دانشگاهی برگزار کند. کنکور هم چرا باید یک‌بار در سال باشد؟ وقتی سؤال استاندارد مطرح شود، سه بار در سال کنکور بدهند! یعنی سه زمان را تعیین کنند تا اگر یک نفر نشست سر جلسه‌ی کنکور، این احساس را نداشته باشد که اگر امروز را از دست داد، زندگی‌اش را از دست داده است. هر چهار ماه یک‌بار کنکور بگیرند. در کنکور هم فقط نمره‌ی خام مهم است. سازمان سنجش نمره‌ی خام کنکور و سال‌های دبیرستان را در اختیار دانشگاه‌ها قرار می‌دهد. دانشگاه‌ها خودشان گزینش می‌کنند. این سنجش می‌کند، دانشگاه‌ها گزینش می‌کنند. گزینش براساس طبقه‌بندی خود دانشگاه‌ها و براساس رشته‌هایی که دارند، انجام می‌شود. حالا ممکن است دانشگاه‌ها کنکور بگیرند یا سؤال تشریحی بدهند. آن را دیگر خودشان می‌دانند. دانشگاه حتماً دلش برای خودش

می‌سوزد و می‌کوشد طوری گزینش کند که بهترین‌ها را برگزیند.

از طرف دیگر، کنکور به این شکل نباید برگزار شود. درست است که سرعت انتقال اهمیت دارد، اما سرعت انتقال را در جایگاه خودش اندازه‌گیری کنیم. برای یک درس، بیاییم سرعت انتقال بگذاریم و یا ضریبی بگذاریم. اما آیا همه‌ی آن‌هایی که فارغ‌التحصیل شده‌اند، دکترا دارند و به مدارج خیلی بالا رسیده‌اند، از سرعت انتقال خیلی بالا برخوردار بوده‌اند؟ این‌طور نبوده است! به تحقیق و پژوهش دست زده‌اند و ماه‌ها و سال‌ها روی این مسئله فکر کرده‌اند. وقتی یک درس را بگذاریم برای سنجش سرعت انتقال، هر سؤال بقیه‌ی درس‌ها چرا باید یک دقیقه و نیم زمان داشته باشد؟ سه دقیقه زمان بدهند برای آن. در این صورت می‌توانند سؤال‌های کامل و پنج گزینه‌ای طرح کنند و وقت هم بدهند، تا واقعاً یک گزینش درست انجام شود.

● **پیشنهاد شما برای بهبود آموزش ریاضی چیست؟ شما در کنفرانس‌های متعدد آموزش ریاضی شرکت می‌کنید و حتماً سخن‌رانی‌هایی هم داشته‌اید. اگر می‌شود به‌طور مختصر، از پیشنهادهایی که در این جلسه‌ها مطرح کرده‌اید و در ذهن دارید، چند نمونه بفرمایید.**

■ اگر بخواهیم آموزش ریاضی ما دچار تحول شود، باید آموزشگران ریاضی را متحول کنیم. یعنی دبیران و معلمین ریاضی ما باید متحول شوند. آموزش‌وپرورش باید بیاید با دانشگاه‌ها قرارداد ببندد. حداقل از دبیران ریاضی که نقش مهمی در جامعه دارند، بخواهد که در این دوره‌ها شرکت کنند. به آن‌ها امکانات بدهد و آن‌ها را با نظریه‌های به‌روز آموزش ریاضی در دنیا آشنا کند.

● **آخرین و مهم‌ترین سؤال بنده این است که تأثیر ایمان در پیشرفت علمی دانش‌آموزان چیست؟ البته شما به این سؤال در هر شماره‌ی برهان در یادداشت سردبیر جواب می‌دهید و من سؤالم را از آن‌جا ایده گرفته‌ام. منتها می‌خواهیم خیلی شسته‌ورفته و خلاصه بفرمایید، ایمان چه‌قدر می‌تواند در پیشرفت علمی دانش‌آموزان تأثیر داشته باشد؟**

■ این سؤال به ظاهر ساده، اما بسیار پیچیده است. من فکر می‌کنم ایمان در علم دو وجه دارد، یعنی از دو دریچه باید به آن نگاه کرد. یکی، هنگامی که متعلم در حال یادگیری علم است، ایمان در آن فراگیری علم چه نقشی دارد؟ چون ما کسانی را هم داریم که به هیچ‌چیز ایمان ندارند، اما خیلی هم خوب علم فراگرفته‌اند.

دوم، پس از آن‌که این متعلم علم را فراگرفت، هنگامی که می‌خواهد آن را به‌کار بندد، نقش ایمان خیلی بالا می‌رود. مخاطبین ما، پس از این‌که علم را فراگرفتند، باید از آن ایمانی که دارند، استفاده کنند و کاربردهای آن علم را در جهتی سوق دهند که به نفع جامعه، مملکت و دینشان باشد.

من خودم شخصاً، تأثیر ایمان را در هر دو مقطعی که خدمتتان گفتم، دیده‌ام و لمس کرده‌ام. یعنی بارها وقتی روی مسئله‌ی ریاضی فکر می‌کردم و نمی‌توانستم مسئله را حل کنم، یا دیگر احساس می‌کردم که فکرم به جایی قد نمی‌دهد، آن مسئله را کنار می‌گذاشتم و می‌رفتم آیاتی از قرآن می‌خواندم، دورکعت نماز می‌خواندم یا می‌نشستم به خلقتم و به خالقم فکر می‌کردم. وقتی قدری آرامش پیدا می‌کردم و به سراغ آن مسئله می‌رفتم، خیلی راحت آن مسئله حل می‌شد. این بارها برایم اتفاق افتاده است. غالباً هم ساعت ۱۲ شب به بعد بوده است. فکر می‌کنم یک «بسم‌الله الرحمن الرحیم» از طرف یک عالم و دانشمند، به‌ویژه یک ریاضی‌دان، تأثیرش از این‌که شاید دو ساعت یک موعظه‌گر بخواهد موعظه کند، بیشتر است.

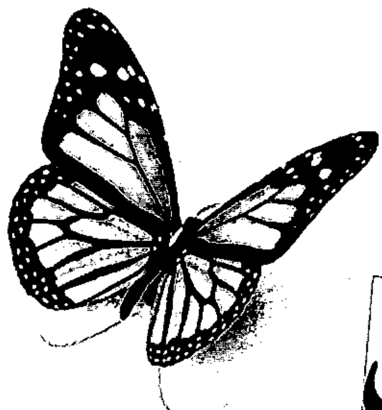
امیدوارم همه‌ی دانش‌آموزان ایران اسلامی به این مسئله توجه کنند که علم و ایمان را توأم با هم پیش ببرند، این‌ها را نمی‌شود از هم جدا کرد. آن جنبه‌ی عملی را، ایمان خیلی خوب می‌تواند تقویت کند و ثمربخش‌تر سازد.

● **خیلی ممنون آقای امیری، همین افتخار برای شما بس که نزدیک به ۲۰ سال توانستید مجله‌ی برهان را ادامه دهید و هیئت تحریریه را نگه دارید. با تشکر از شما و آقای صدر که در این برنامه شرکت کردید. اگر حرف آخری دارید، بفرمایید.**

■ می‌خواستم این‌جا چند تا تشکر داشته باشم. می‌دانید که در این مسیر ۲۰ ساله با تمام فراز و نشیب‌هایش، من تنها نبوده‌ام و کمک‌هایی که به من شده است، اول از همه از طرف خانواده‌ام و به‌ویژه همسرم بوده است. اول تشویق‌های خانواده‌ام و همکاری‌ها و هم‌یاری‌های آن‌ها و بعد همکاران بسیار بسیار دلسوزی که من در این مسیر داشته‌ام. چون مجله برهان تا شماره ۳۸ در انتشارات مدرسه چاپ و توزیع می‌شد باید از آقای برادری که معاون فرهنگی «انتشارات مدرسه» هستند نام ببرم که همیشه در مورد برهان خیلی به من کمک می‌کردند. آقای آشتیانی که مسئول تولید بودند ما خیلی در تولید اذیتشان کردیم. بعد تک‌تک اعضای هیئت تحریریه که هیچ‌گاه مرا تنها نگذاشتند و ما هر وقت خواستیم، با ایثار وقت‌شان آمدند و نشستیم، برنامه‌ریزی کردیم و به موقع مقالات را به ما دادند. دیگر، برادر و همکار بسیار محترمم، جناب آقای صدر که زحمت این مجله را سالیان سال است به‌دوش می‌کشند. چون من قدری درگیر کار تألیف و تدریس شدم، نقش ایشان در زمینه‌ی اداره‌ی مجله خیلی پررنگ‌تر شد. و سرانجام مسئولین و دست‌اندرکاران فعلی «دفتر انتشارات کمک‌آموزشی»، مدیر مسئول محترم و سایر کارکنان مجله که پشت صحنه هستند، حروف‌چین‌ها، گرافیست‌ها، نمونه‌خوان‌ها و همه.

● **به هر حال اجر شما با خداوند. والسلام علیکم و رحمة‌الله و برکاته.**

□□□



هم‌نهشتی و کاربردهای آن (۴)

۲ ۳ ۵ ۷ ۱۱ ۱۳ ۱۷ ۱۹ ۲۳ ۲۹ ۳۱ ۳۷ ۴۱ ۴۳...۲۰۰۳...

● سید محمدرضا هاشمی موسوی
hashemi – moosavi@yahoo.com

اشاره

در قسمت قبل به برخی از کاربردهای هم‌نهشتی اشاره شد. اینک در این شماره، قضیه‌ی کوچک فرما و کاربردهای آن را در محاسبات باقی‌مانده‌ی تقسیم اعداد توانی و حل معادله‌های سیاله‌ی درجه‌ی nام شرح می‌دهیم و به‌کارگیری این قضیه را برای حل مسئله‌های خلاق و پر ابتکار نشان خواهیم داد.

قضیه‌ی کوچک فرما

اگر p عدد اول مفروض و $(a,p)=1$ آن‌گاه:

$$a^{p-1}\overset{p}{\equiv}1$$

نتیجه: اگر p عدد اول مفروض باشد، آن‌گاه:

$$a^{p}\overset{p}{\equiv}a$$

مثال۱. باقی‌مانده‌ی تقسیم 2^{87} بر ۷ را تعیین کنید.

حل: با توجه به قضیه‌ی کوچک فرما می‌توان نوشت:

$$p;\ 2^{p-1}\overset{p}{\equiv}1 \quad \text{اول}$$

$$\begin{cases}7\in\mathbb{P} & (\text{مجموعه اعداد اول})\\ (2,7)=1\end{cases}\xrightarrow[(p=7)]{(\text{فرما})}2^{7-1}\overset{7}{\equiv}1\ ;$$

$$2^{6}\overset{7}{\equiv}1\xrightarrow{(\text{به توان }14)}(2^{6})^{14}\overset{7}{\equiv}1$$

$$2^{84}\overset{7}{\equiv}1\ ;\ 2^{3}\times2^{84}\overset{7}{\equiv}2^{3}\ ;\ 2^{87}\overset{7}{\equiv}8\overset{7}{\equiv}1\ ;\ 2^{87}\overset{7}{\equiv}1$$

مثال۲. باقی‌مانده‌ی تقسیم $N = 5^{12} + 6^{12} + \cdots + 17^{12}$ را بر ۱۳ بیابید.

حل: با توجه به قضیه‌ی فرما:

$$\begin{cases}13\in\mathbb{P}\\(5,13)=1\end{cases}\xrightarrow{(\text{فرما})}5^{13-1}\overset{13}{\equiv}1\ ;\ 5^{12}\overset{13}{\equiv}1$$

چون ۶، ۷، ... ۱۲ و هم‌چنین ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷ نسب به ۱۳ اول هستند و عدد ۱۳ اول است، با استفاده از قضیه‌ی فرما می‌توان نوشت:

$$6^{13-1}\overset{13}{\equiv}1,\ 7^{13-1}\overset{13}{\equiv}1,\ \cdots,\ 12^{13-1}\overset{13}{\equiv}1\ \ (13^{12}\overset{13}{\equiv}0)$$

$$14^{13-1}\overset{13}{\equiv}1,\ 15^{13-1}\overset{13}{\equiv}1,\ 16^{13-1}\overset{13}{\equiv}1,\ 17^{13-1}\overset{13}{\equiv}1$$

از جمع دو طرف هم‌نهشتی‌ها:

$$N = 6^{12}+7^{12}+\cdots+17^{12}\overset{13}{\equiv}\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\text{۱۲ مرتبه}}\equiv 12$$

بنابراین، باقی‌مانده‌ی تقسیم N بر ۱۳ عدد ۱۲ است:

$$N\overset{13}{\equiv}12$$

مثال۳. باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت زیر، بر ۱۱ بر فرض این‌که x، y و z بر ۱۱ بخش‌پذیر نباشند، چه عددی است؟

$$M = x^{1000}+y^{300}+z^{80}+1382^{1382}$$

حل:

$$11\in\mathbb{P}\ ,\ 11\nmid x\ ;\ (x,11)=1\xrightarrow{(\text{فرما})}x^{11-1}\overset{11}{\equiv}1$$

$$,\ 11\nmid y\ ;\ (y,11)=1\xrightarrow{(\text{فرما})}y^{11-1}\overset{11}{\equiv}1$$

$$,\ 11\nmid z\ ;\ (z,11)=1\xrightarrow{(\text{فرما})}z^{11-1}\overset{11}{\equiv}1$$

پس:

$$x^{10}\overset{11}{\equiv}1\ ,\ y^{10}\overset{11}{\equiv}1\ ,\ z^{10}\overset{11}{\equiv}1$$

$$(x^{10})^{100}\overset{11}{\equiv}1\ ;\ x^{1000}\overset{11}{\equiv}1\ ;\ (y^{10})^{30}\overset{11}{\equiv}1\ ;\ y^{300}\overset{11}{\equiv}1\ ,\ z^{80}\overset{11}{\equiv}1$$

با توجه به بخش‌پذیری بر ۱۱ می‌توان نوشت:

$$1382^{1382}\overset{11}{\equiv}(2-8+3-1)^{1382}=(-4)^{1382}=(4^{10})^{138}\times(4)^2$$

$$\underset{(\text{فرما})}{\overset{11}{\equiv}}(1)^{138}\times16\overset{11}{\equiv}5$$

پس:

$$M = x^{1000}+y^{300}+z^{80}+1382\overset{11}{\equiv}1+1+1+5=8$$

بنابراین:

$$M\overset{11}{\equiv}8$$

مثال۴. باقی‌مانده‌ی تقسیم 87^{128} بر ۱۹ را بیابید.

حل:

$$87\overset{19}{\equiv}11\ ;\ 87^{128}\overset{19}{\equiv}11^{128}=11^{18\times7}\times11^2=(11^7)^{18}\times121$$

$$(11^7)^{19-1}\times121\underset{(\text{فرما})}{\overset{19}{\equiv}}1\times7=7\ ;\ 87^{128}\overset{19}{\equiv}7$$

مثال۵. عدد $(7^{15}+k)$ مضرب ۱۷ است. کوچک‌ترین عدد طبیعی k را تعیین کنید.

حل:

$$\begin{cases}17\in\mathbb{P}\\(7,17)=1\end{cases}\xrightarrow{(\text{فرما})}7^{17-1}\overset{17}{\equiv}1\ ;\ 7^{16}\overset{17}{\equiv}1$$

$$7^{16}\overset{17}{\equiv}1+2(17)=35\ \Rightarrow\ 7^{15}\overset{17}{\equiv}5\overset{17}{\equiv}5-17=-12\ ;$$

$$7^{15}+12\overset{17}{\equiv}0\ ;\ k=12$$

مثال۶. اگر p عدد اول بزرگ‌تر از ۷ باشد، ثابت کنید که عدد $N = p^{12}-1$ بر ۱۰۵ بخش‌پذیر است.

حل: با توجه به برابری ۷×۵×۳=۱۰۵ و قضیه‌ی کوچک فرما (p عدد اول بزرگ‌تر از ۷):

$$(p,3)=1\ ;\ p^{3-1}\overset{3}{\equiv}1\ ;\ p^2\overset{3}{\equiv}1\ ;\ (p^2)^6\overset{3}{\equiv}1\ ;\ p^{12}\overset{3}{\equiv}1$$

$$(p,5)=1\ ;\ p^{5-1}\overset{5}{\equiv}1\ ;\ p^4\overset{5}{\equiv}1\ ;\ (p^4)^3\overset{5}{\equiv}1\ ;\ p^{12}\overset{5}{\equiv}1$$

$$(p,7)=1\ ;\ p^{7-1}\overset{7}{\equiv}1\ ;\ p^6\overset{7}{\equiv}1\ ;\ (p^6)^2\overset{7}{\equiv}1\ ;\ p^{12}\overset{7}{\equiv}1$$

با توجه به هم‌نهشتی‌های اخیر، بدیهی است که ۳، ۵ و ۷ عدد $N = p^{12}-1$ را می‌شمارند. بنابراین، حاصل‌ضرب این سه عدد نیز N را می‌شمارد: $3\times5\times7=105\,|\,N=p^{12}-1$.

مثال۷. باقی‌مانده‌ی عدد $(29^{30}+31^{28})^{1387}$ بر ۸۹۹ را تعیین کنید.

حل: در حالت کلی نشان می‌دهیم که اگر p و q دو عدد اول متمایز و m و n دو عدد طبیعی باشند، داریم:

$$p^{m(q-1)}+q^{n(p-1)}\overset{pq}{\equiv}1$$

$$\begin{cases}\text{اول}\ p,(p,q)=1\ ;\ p^{q-1}\overset{q}{\equiv}1\ ,\ q^{p-1}\overset{q}{\equiv}0\longrightarrow p^{q-1}+q^{p-1}\overset{q}{\equiv}1\\ \text{اول}\ q,(p,q)=1\ ;\ q^{p-1}\overset{p}{\equiv}1\ ,\ p^{q-1}\overset{p}{\equiv}0\longrightarrow p^{q-1}+q^{p-1}\overset{p}{\equiv}1\end{cases}$$

از رابطه‌های هم‌نهشتی اخیر:

$$p^{q-1}+q^{p-1}\overset{pq}{\equiv}1$$

هم‌چنین:

$$\begin{cases}(p,q)=1\ ;\ p^{q-1}\overset{q}{\equiv}1\ ;\ p^{m(q-1)}\overset{q}{\equiv}1\ ,\ q^{p-1}\overset{q}{\equiv}0\ ;\ q^{n(p-1)}\overset{q}{\equiv}0\\ (p,q)=1\ ;\ q^{p-1}\overset{p}{\equiv}1\ ;\ \underset{(\text{فرما})}{p^{n(q-1)}}\overset{p}{\equiv}1\ ,\ p^{q-1}\overset{p}{\equiv}0\ ;\ p^{m(q-1)}\overset{p}{\equiv}0\end{cases}$$

از جمع هم‌نهشتی‌ها:

$$p^{m(q-1)}+q^{n(p-1)}\overset{q}{\equiv}1\ ,\ p^{m(q-1)}+q^{n(p-1)}\overset{p}{\equiv}1$$

از دو هم‌نهشتی فوق:

$$\text{اول } q,p\ ,\ (p,q)=1\ ;\ p^{m(q-1)}+q^{n(p-1)}\overset{pq}{\equiv}1$$

$$p=29\ ,\ q=31\ :\ (29^{30}+31^{28})^{1387}\overset{899}{\equiv}1\ (899=29\times31)$$

مثال۸. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد زیر را بر ۱۵ تعیین کنید.

$$N=2^1+2^2+2^3+\dots+2^{1388}$$

حل:

از هم‌نهشتی $2^4\overset{15}{\equiv}1$ نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$\underbrace{2^{4n}\overset{15}{\equiv}1}_{\text{باقی‌مانده ۱}}\xrightarrow{(\times2)}\underbrace{2^{4n+1}\overset{15}{\equiv}2}_{\text{باقی‌مانده ۲}}\xrightarrow{(\times2)}\underbrace{2^{4n+2}\overset{15}{\equiv}4}_{\text{باقی‌مانده ۴}}\xrightarrow{(\times2)}\underbrace{2^{4n+3}\overset{15}{\equiv}8}_{\text{باقی‌مانده ۸}}$$

بنابراین:

$$N=2^1+2^2+2^3+2^4+\dots+2^{1385}+2^{1386}+2^{1387}+2^{1388}$$

$$N\overset{15}{\equiv}\underbrace{2+4+8+1}_{\text{دسته‌ی باقی‌مانده‌های دوره‌ی اول}}+\dots+\underbrace{2+4+8+1}_{\text{دسته‌ی باقی‌مانده‌های دوره‌ی آخر}}=\frac{1388}{4}(\overbrace{2+4+8+1}^{15})=347\times15$$

پس:

$$N\overset{15}{\equiv}347\times15\overset{15}{\equiv}0$$

بنابراین، N بر ۱۵ بخش‌پذیر است:

$$N\overset{15}{\equiv}0$$

مثال۹. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N=2^{2^1}+2^{2^2}+2^{2^3}+2^{2^4}+\dots+2^{2^{1387}}$ را بر ۱۱ بیابید.

حل: از هم‌نهشتی بدیهی $4\overset{11}{\equiv}2^{2^1}$ به نتایج زیر می‌رسیم:

$$(2^{2^1})^2\overset{11}{\equiv}4^2=16\overset{11}{\equiv}5\ ;\ 2^{2^2}\overset{11}{\equiv}5\ ,\ (2^{2^2})^2\overset{11}{\equiv}5^2$$

$$2^{2^3}\overset{11}{\equiv}25\overset{11}{\equiv}3\ ,\ (2^{2^3})^2\overset{11}{\equiv}3^2\ ;\ 2^{2^4}\overset{11}{\equiv}9\ ,\ (2^{2^4})^2\overset{11}{\equiv}9^2\ ;$$

$$2^{2^5}\overset{11}{\equiv}81\overset{11}{\equiv}4\ ,\dots$$

از تقسیم متوالی جمله‌ها بر ۱۱ به ترتیب باقی‌مانده‌های تکراری ۴، ۵، ۳و۹ حاصل می‌شوند؛ پس:

$$N=2^{2^1}+2^{2^2}+2^{2^3}+2^{2^4}+\dots+2^{2^{1387}}\overset{11}{\equiv}$$

$$\underbrace{\overbrace{(4+5+3+9)}^{21}+\dots}_{\text{تعداد ۳۴۶ پرانتز چهار جمله‌ای}}+\underbrace{\overbrace{(4+5+3)}^{\text{سه جمله‌ی منفرد آخر}}}_{12}$$

$$N\overset{11}{\equiv}346(21)+12\overset{11}{\equiv}(6-4+3)(10)+1=51$$

$$N\overset{11}{\equiv}51\overset{11}{\equiv}7\ ;\ N\overset{11}{\equiv}7$$

مثال۱۰. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد زیر را بر ۴۱ بیابید.

$$N=2^{1!}+2^{2!}+2^{3!}+2^{4!}+\dots+2^{1387!}$$

حل: با توجه به این‌که ۴۱ عدد اول است و $(2,41)=1$، از قضیه‌ی کوچک فرما، داریم:

$$2^{41-1}\overset{41}{\equiv}1\ ;\ 2^{40}\overset{41}{\equiv}1\ ;\ 2^{40k}\overset{41}{\equiv}1$$

با توجه به این که اگر $n\geq5$ باشد، آن‌گاه $n!$ مضرب ۴۰ خواهد بود:

$$n\geq5\ :\ 2^{n!}=2^{40k}\overset{41}{\equiv}1$$

بنابراین:

$$N=2^{1!}+2^{2!}+2^{3!}+2^{4!}+2^{5!}+\dots+2^{1387!}$$

$$\overset{41}{\equiv}2^1+2^2+2^6+2^{24}+\underbrace{1+1+\dots+1}_{\text{تعداد یک‌ها }=1387-4}$$

$$N\overset{41}{\equiv}2+4+64+16^*+1383=1469\overset{41}{\equiv}34\ ;\ N\overset{41}{\equiv}34$$

$$*(2^7=128\overset{41}{\equiv}5\ ;\ (2^7)^3\overset{41}{\equiv}5^3\ ;\ 2^{21}\overset{41}{\equiv}125\overset{41}{\equiv}2\ ;\ 2^{24}\overset{41}{\equiv}16)$$

مثال۱۱. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $\overline{x51y}$ بر ۷۲ برابر صفر شود، تقسیم $N=(y^x+x^y)^{1387}$ بر ۸۰ چه باقی‌مانده‌ای خواهد داشت؟

حل. بدیهی است که با توجه به ۹×۸=۷۲، عدد $\overline{x51y}$ بر ۸و۹ بخش‌پذیر است؛ پس:

$$\begin{cases}\overline{x51y}\overset{8}{\equiv}0\ ;\ \overline{51y}\overset{8}{\equiv}0\ ;\ 510+y\overset{8}{\equiv}0\\ \overline{x51y}\overset{9}{\equiv}0\ ;\ x+5+1+y\overset{9}{\equiv}0\ ;\ x+y+6\overset{9}{\equiv}0\end{cases}$$

از حل دستگاه فوق مقادیر xو y به دست می‌آید:

$$510+y\overset{8}{\equiv}0\ ;\ y\overset{8}{\equiv}-510\ ;\ y\overset{8}{\equiv}-510+8(64)=2\ ;\ y\overset{8}{\equiv}2$$

چون y یک رقمی است، بنابراین از هم‌نهشتی بالا جواب $y=2$ حاصل می‌شود.

$$x+y+6\overset{9}{\equiv}0\ ;\ x+2+6\overset{9}{\equiv}0\ ;\ x\overset{9}{\equiv}-8\ ;\ x\overset{9}{\equiv}-8+9=1\ ;\ x\overset{9}{\equiv}1$$

چون x یک رقمی است، بنابراین از هم‌نهشتی بالا جواب $x=1$ حاصل می‌شود.

$$N=(2^1+1^2)^{1387}=3^{1387}\ ;\ 3^4=81\overset{80}{\equiv}1\ ,\ (3^4)^{346}\overset{80}{\equiv}1$$

$$3^{1384}\overset{80}{\equiv}1\ ;\ 3^3\times3^{1384}\overset{80}{\equiv}3^3\ ;\ 3^{1387}\overset{80}{\equiv}27\ ;\ N\overset{80}{\equiv}27$$

مثال۱۲. اگر n عددی صحیح باشد، ثابت کنید که $M=(\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}+\frac{7n}{15})^{2009}$ نیز عددی صحیح است.

حل: با توجه به برابری زیر:

$$\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}+\frac{7n}{15}=\frac{3n^5+5n^3+7n}{15}$$

کافی است، نشان دهیم برای هر n داریم:

$$15\,|\,(3n^5+5n^3+7n)$$

و یا برای هر n، عدد $3n^5+5n^3+7n$ بر ۳ و ۵ بخش‌پذیر است. هم‌نهشتی‌های زیر بدیهی هستند:

$$3n^5+5n^3+7n\overset{3}{\equiv}2n^3+n\equiv 2n^3-2n=2(n^3-n)\underset{(\text{فرما})}{\overset{3}{\equiv}}0$$

$$3n^5+5n^3+7n\overset{5}{\equiv}3n^5+2n\overset{5}{\equiv}3n^5-3n=3(n^5-n)\underset{(\text{فرما})}{\overset{5}{\equiv}}0$$

بنابراین، طبق قضیه‌ی فرما $((a,p)=1\ ;\ a^p\overset{p}{\equiv}a)$ نتیجه می‌شود که M عددی صحیح است.

مثال ۱۳. با استفاده از قضیه‌ی کوچک فرما، معادله‌ی هم‌نهشتی زیر را حل کنید:

$$(x^{35}+22x^{19}+28x^3)^{1388}\overset{17}{\equiv}0$$

حل: با توجه به قضیه‌ی فرما $(x^{17}\overset{17}{\equiv}x)$، هم نهشتی‌های زیر برای هر x بدیهی است:

$$x^{17}\overset{17}{\equiv}x\ ;\ x^{34}\overset{17}{\equiv}x^2\ ;\ x^{35}\overset{17}{\equiv}x^3$$

$$22x^{19}\overset{17}{\equiv}5x^{19}\overset{17}{\equiv}5x^2.x^{17}\overset{17}{\equiv}5x^2.x=5x^3\ ,\ 28x^3\overset{17}{\equiv}11x^3$$

بنابراین:

$$(x^{35}+22x^{19}+28x^3)^{1388}\overset{17}{\equiv}(x^3+5x^3+11x^3)^{1388}=$$

$$(17x^3)^{1388}\overset{17}{\equiv}0(x\in Z)$$

معادله‌ی هم‌نهشتی، در واقع یک اتحاد همیشه برقرار است و به ازای هر x، صحیح و درست است. روش دیگر این است که معادل عبارت را بر $(x^{17}-x)$ تقسیم کنیم:

$$(x^{35}+x^{19}+x^3)^{1388}\overset{17}{\equiv}[(x^{17}-x)(x^{18}+6x^2+17x^3)]^{1388}$$

مثال ۱۴. با استفاده از قضیه‌ی کوچک فرما نشان دهید که برای هر عدد اول $p>5$، بی‌نهایت عدد به صورت $N=999\cdots9999$ وجود دارند که بر p بخش‌پذیرند.

حل: در واقع باید نشان دهیم، هم‌نهشتی $10^n\overset{p}{\equiv}1$ برای بی‌نهایت عدد مثبت صحیح برقرار است.

از آن‌جا که $p>5$ و $(p,10)=1$ و بنابر قضیه‌ی کوچک فرما $10^{p-1}\overset{p}{\equiv}1$، پس هر عدد صحیح n که مضربی از $(p-1)$ است، جواب مسئله خواهد بود: $n=k(p-1)$

مثال ۱۵. اگر p عددی اول باشد و $x^p+y^p=z^p$، توسط قضیه‌ی کوچک فرما ثابت کنید که p عبارت $(x+y-z)$ را می‌شمارد.

حل: بر طبق قضیه‌ی فرما $(x^p\overset{p}{\equiv}x)$، بلافاصله نتیجه می‌شود:

$$x^p+y^p-z^p\overset{p}{\equiv}x+y-z$$

بنابراین، اگر $x^p+y^p\overset{p}{\equiv}z^p$ باشد، آن‌گاه: $x+y-z\overset{p}{\equiv}0$. به روش دیگر، به سادگی از جمع جبری $x^p\overset{p}{\equiv}x$، $y^p\overset{p}{\equiv}y$ و $z^p\overset{p}{\equiv}z$ می‌توان نوشت:

$$x^p+y^p-z^p\overset{p}{\equiv}x+y-z$$

از فرض اول بودن p و برابری $x^p+y^p=z^p$:

$$\underbrace{x^p+y^p}_{z^p}-z^p\overset{p}{\equiv}z^p-z^p=0$$

بنابراین:

$$x+y-z\overset{p}{\equiv}0\quad (p\,|\,(x+y-z))$$

تعیین رقم یکان عدد

برای تعیین رقم یکان هر عد مانند N، کافی است باقی‌مانده‌ی تقسیم آن عدد را بر ۱۰ تعیین کنیم:

$$N\overset{10}{\equiv}r<10$$

نتیجه: اگر $n\geq5$ باشد، آن‌گاه: $n!\overset{10}{\equiv}0$

در واقع اگر $n\geq5$، رقم یکان عدد n! برابر صفر است.

مثال ۱۶. رقم یکان عدد $N=1!+2!+3!+\cdots+1388!$ را تعیین کنید.

حل: کافی است باقی‌مانده‌ی تقسیم N بر ۱۰ را تعیین کنیم که در واقع همان رقم یکان است:

$$N=1!+2!+3!+4!+5!+\cdots+1388!\overset{10}{\equiv}1+2+6+24+0+0+\cdots+0$$

$$N\overset{10}{\equiv}33\overset{10}{\equiv}3 \text{ و } N\overset{10}{\equiv}3\ (\text{رقم یکان } N)$$

مثال ۱۷. رقم یکان عدد زیر را تعیین کنید.

$$N=1389^1+1389^2+1389^3+\cdots+1389^{1387}$$

حل: کافی است باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد N را بر ۱۰ تعیین کنیم:

$$N=1389^1+1389^2+1389^3+\cdots+1389^{1387}\overset{10}{\equiv}(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\cdots+(-1)^{1387}$$

$$N\overset{10}{\equiv}-1+1-1+\cdots+1-1\overset{10}{\equiv}-1\equiv9\ ;\ N\equiv9$$

بنابراین، رقم یکان عدد N برابر ۹ است.

تعیین رقم یکان اعداد توان‌دار

برای تعیین رقم یکان اعداد توان‌دار، کافی است توان عدد را بر

۴ تقسیم کنیم که در این صورت دو حالت برای باقی‌مانده پیش می‌آید. حالت اول این است که باقی‌مانده صفر شود. در این حالت به جای توان، عدد ۴ را جای‌گزین می‌کنیم. حالت دوم باقی‌مانده‌ی غیرصفر است که در این حالت به جای توان عدد، همان عدد باقی‌مانده‌ی غیر صفر را قرار می‌دهیم:

$$a^n \overset{۱۰}{\equiv} \begin{cases} a^۴ & \text{n بر ۴ بخش‌پذیر باشد} \\ a^r & \text{n بر ۴ باقی‌مانده‌ی ناصفر r دهد} \end{cases}$$

نکته: اگر رقم یکان عددی یکی از اعداد ۰ یا ۱ یا ۵ یا ۶ باشد، تمام توان‌های طبیعی آن عدد نیز دارای همان رقم یکان خواهند بود:

$$a \overset{۱۰}{\equiv} ۰ \;;\; a^n \overset{۱۰}{\equiv} ۰ \;;\; a \overset{۱۰}{\equiv} ۱ \;;\; a^n \overset{۱۰}{\equiv} ۱$$

$$a \overset{۱۰}{\equiv} ۵ \;;\; a^n \overset{۱۰}{\equiv} ۵ \;;\; a \overset{۱۰}{\equiv} ۶ \;;\; a^n \overset{۱۰}{\equiv} ۶$$

برای تعیین رقم یکان یک عدد، از هم‌نهشتی های زیر نیز می‌توان استفاده کرد:

$$a \overset{۱۰}{\equiv} ۳ \;;\; a^{۲n} \overset{۱۰}{\equiv} ۱ \;,\; a \overset{۱۰}{\equiv} ۲ \text{ یا } ۸ \;;\; a^{۴n} \overset{۱۰}{\equiv} ۶$$

$$a \overset{۱۰}{\equiv} ۹ \;;\; a^n \overset{۱۰}{\equiv} \begin{cases} ۱ & \text{n زوج} \\ ۹ & \text{n فرد} \end{cases} \;,\; a \overset{۱۰}{\equiv} ۴ \;;\; a^n \overset{۱۰}{\equiv} \begin{cases} ۴ & \text{n فرد} \\ ۶ & \text{n زوج} \end{cases}$$

مثال۱۸. رقم یکان عدد زیرا را تعیین کنید.

$$M = ۱۰۱^{۱۳۸۹} + ۱۰۲^{۱۳۸۹} + \cdots + ۹۸۹^{۱۳۸۹}$$

حل: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۱۳۸۹ بر ۴ برابر ۱ است. پس:

$$M \overset{۱۰}{\equiv} \underbrace{۱۰۱^۱ + ۱۰۲^۱ + \cdots + ۹۸۹^۱}_{\text{تعداد جملات}=۸۸۹} = \frac{۸۸۹}{۲}(۲ \times ۱۰۱ + ۸۸۸(۱))$$

$$M \overset{۱۰}{\equiv} \frac{۸۸۹}{۲} \times ۱۰۹۰ = ۸۸۹ \times ۵۴۵ \overset{۱۰}{\equiv} ۹ \times ۵ = ۴۵ \overset{۱۰}{\equiv} ۵ \;;\; M \overset{۱۰}{\equiv} ۵$$

(رقم یکان M)

مثال۱۹: رقم یکان عدد زیر را بیابید.

$$N = (۱۳۸۸)^{۲!} + (۱۳۸۸)^{۴!} + \cdots + (۱۳۸۸)^{۱۰۰۰!}$$

حل: با توجه به (n بر ۴ بخش‌پذیر) $a^n \overset{۱۰}{\equiv} a^۴$، می‌توان نوشت:

$$N \overset{۱۰}{\equiv} (-۲)^۲ + \underbrace{(-۲)^۴ + (-۲)^۴ + (-۲)^۴ + \cdots + (-۲)^۴}_{\text{۴۹۹ جمله}} =$$

$$۲^۲ + ۴۹۹ \times ۲^۴ \overset{۱۰}{\equiv} ۴ + (-۱)(-۴)$$

$N \overset{۱۰}{\equiv} ۸$ (رقم یکان N)

مثال۲۰: رقم یکان عدد M را بیابید.

$$M = ۱۳۸۷^{۱۱} + ۱۳۸۷^{۱۴} + ۱۳۸۷^{۱۷} + \cdots + ۱۳۸۷^{۱۳۸۸}$$

حل: تعداد جملات عدد M برابر $(\frac{۱۳۸۸-۱۱}{۳}+۱)$ یا ۴۶۰ است و با توجه به هم‌نهشتی $۱۳۸۷^k \overset{۱۰}{\equiv} ۷^k$، برای تعیین رقم یکان M می‌توان رقم یکان مجموع زیر را تعیین کرد:

$$M \overset{۱۰}{\equiv} ۷^{۱۱} + ۷^{۱۴} + ۷^{۱۷} + \cdots + ۷^{۱۳۸۸}$$

از طرف دیگر، با توجه به هم‌نهشتی $۷^۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۳$ یا $(۷^{n+۳} \overset{۱۰}{\equiv} ۳(۷^n))$، می‌توان نوشت $(۷^{۱۱} \overset{۱۰}{\equiv} ۳)$:

$$M \overset{۱۰}{\equiv} \underbrace{\overbrace{(۳+۹+۷+۱)}^{۲۰} + \overbrace{(۳+۹+۷+۱)}^{۲۰} + \cdots + \overbrace{(۳+۹+۷+۱)}^{۲۰}}_{\frac{۴۶۰}{۴}=۱۱۵ \text{ پرانتز چهارجمله‌ای}}$$

$M \overset{۱۰}{\equiv} ۱۱۵ \times ۲۰ \overset{۱۰}{\equiv} ۰ \;;\; M \overset{۱۰}{\equiv} ۰$ (رقم یکان M)

مثال۲۱. رقم یکان عدد $N = (۱!)^۱ + (۲!)^۲ + \cdots + (۲۰۰۸!)^{۱۳۸۷}$ را تعیین کنید.

حل: با توجه به این نکته که باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد n! برای هر $n \geq ۵$ بر ۱۰ برابر صفر است:

$$N \overset{۱۰}{\equiv} ۱ + ۲^۲ + ۶^۳ + ۲۴^۴ + ۰ + ۰ + ۰ + \cdots + ۰$$

$N \overset{۱۰}{\equiv} ۱ + ۴ + ۶ + ۶ = ۱۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۷ \;;\; N \overset{۱۰}{\equiv} ۷$ (رقم یکان N)

مثال۲۲. رقم یکان عدد $N = (۱۳۸۸)^{۲۰۰۸!} + (۱۳۸۹)^{۲۰۰۹!}$ را بیابید.

حل: اعداد !۲۰۰۸ و !۲۰۰۹ بر ۴ بخش‌پذیرند. بنابراین به جای هریک ۴ قرار می‌دهیم:

$N \overset{۱۰}{\equiv} (-۲)^۴ + (-۱)^۴ = ۱۶ + ۱ = ۱۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۷ \;;\; N \overset{۱۰}{\equiv} ۷$ (رقم یکان N)

مثال۲۳. رقم یکان عدد $M = (۱۳۸۷)^{۸۸k+۳} + (۲۰۰۷)^{۴۴k+۴}$ را تعیین کنید.

حل:

$M \overset{۱۰}{\equiv} ۷^{۸۸k+۳} + ۷^{۴۴k+۴} \overset{۱۰}{\equiv} ۷^۳ + ۷^۴ \overset{۱۰}{\equiv} ۷(-۱) + (-۱)^۲$ (رقم یکان M)

$$M \overset{۱۰}{\equiv} -۷ + ۱ = -۶ \overset{۱۰}{\equiv} ۴ \;;\; M \overset{۱۰}{\equiv} ۴$$

مثال۲۴. رقم یکان عدد $N = ۱۳۸۷^{۷^{۷^۷}}$ را بیابید.

حل: رقم یکان N معادل رقم یکان $M = ۷^{۷^{۷^۷}}$ است؛ بنابراین:

$$۷^۷ \overset{۲}{\equiv} ۱^۷ = ۱ \;;\; ۷^۷ = ۲t + ۱ \;;\; ۷^{۷^۷} = ۷^{۲t+۱} = (۷^۲)^t \times ۷ = ۴۹^t \times ۷$$

$$۷^{۷^۷} \overset{۴}{\equiv} (۱)^t(۳) = ۳ \;;\; ۷^{۷^۷} = ۴k + ۳ \;;\; M = ۷^{۴k+۳}$$

$$M \overset{۱۰}{\equiv} ۷^۳ = ۷^۲ \times ۷ \overset{۱۰}{\equiv} (-۱)(-۳) = ۳ \;;\; M \overset{۱۰}{\equiv} ۳ \;;\; N \overset{۱۰}{\equiv} ۳$$

(رقم یکان N)

مثال۲۵ . بافرض

$M=(1!)^1+(2!)^2+(3!)^3+\cdots+(1387!)^{2008}$ ، رقـــم یکان $S=M^{M^M}$ را بیابید .

حل :

$$M=(1!)^1+(2!)^2+(3!)^3+(4!)^4+\cdots+(1387!)^{2008}\overset{4}{\equiv}$$
$$1+2^2+6^3+0+0+\cdots+0\ ;$$

$$M\overset{4}{\equiv}1\ ;\ M^M\overset{4}{\equiv}1\ ;\ M^M=4k+1$$

$$M=(1!)^1+(2!)^2+(3!)^3+\cdots+(1387!)^{2008}\overset{10}{\equiv}1+$$
$$2^2+6^3+24^4+0+0+\cdots$$

$$M\overset{10}{\equiv}1+4+6+6=17\overset{10}{\equiv}7\ ;\ S=M^{M^M}\overset{10}{\equiv}7^{4k+1}\overset{10}{\equiv}7\ ;\ S\overset{10}{\equiv}7$$

(رقم یکان S)

تمرین

۱ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد 4^{1001} بر ۲۰۰۳ را توسط قضیه‌ی کوچک فرما بیابید .

۲ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد
$M=(7^{12}+8^{12}+9^{12}+\cdots+19^{12})^{1389}$ را بر ۱۳ بیابید .

۳ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت
$N=(x^{2000}+y^{900}+z^{800})^{2009}$ بر ۱۱ ، با فرض این‌که x ، y و z بر ۱۱ بخش‌پذیر نباشند ، چه عددی است؟

۴ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عـدد $M=(38^{88}+87^{128})^{89}$ را بر ۱۹ بیابید .

۵ . عدد $N=7^{2008}+k$ مضرب ۱۷ است . کوچک‌ترین عدد طبیعی k را بیابید .

۶ . اگر p عدد اول بزرگ‌تر از ۷ باشد ، ثابت کـنـید کـه عـدد $M=p^{12}-1$ بر اعداد ۱۵ ، ۲۱ ، ۳۵ و ۱۰۵ بخش‌پذیر است .

۷ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N=(29^{30}+31^{28}-2)^{2009}$ را بر ۸۹۹ بیابید .

۸ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عـدد $M=(5^{2010}+7^{2012})^{2009}$ را بر ۳۵ تعیین کنید .

۹ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد
$N=1^{2003}+2^{2003}+3^{2003}+\cdots+4004^{2003}$ را بـــــر ۲۰۰۳ بیابید .

۱۰ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد
$M=3^1+3^2+3^3+3^4+\cdots+3^{2009}$ را بر ۸ بیابید .

۱۱ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد
$N=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{2008}$ را بر ۱۵ تعیین کنید (با سه روش) .

۱۲ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد
$M=2^{2^1}+2^{2^2}+2^{2^3}+2^{2^4}+\cdots+2^{2^{2009}}$ را بر ۱۱ بیابید .

۱۳ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد
$N=3^1+3^3+3^5+3^7+\cdots+3^{2009}$ را بر ۱۳ بیابید .

۱۴ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد
$M=2^{1!}+2^{2!}+2^{3!}+2^{4!}+\cdots+2^{2009!}$ را بر ۴۱ بیابید .

۱۵ . اگر باقی‌مانده‌ی عـدد $M=\overline{x51y}$ را بـر ۷۲ برابر صفـر شود ، باقی‌مانده‌ی عدد $N=(y^{x^{2009}}+x^{y})^{1389}$ را بر ۸۰ بیابید .

۱۶ . رقم یکان عـدد $N=1!+2!+3!+\cdots+2009!$ را تعیین کنید .

۱۷ . رقم یکان عدد $M=(1+2+3+\cdots+2009)!$ را بیابید .

۱۸ . رقم یکان عدد
$N=(2009^1+2009^2+2009^3+\cdots2009^{2009})^{2009}$ را بیابید .

۱۹ . رقم یکان عدد $M=2^1+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{2009}$ را بیابید .

۲۰ . رقم یکان عدد
$N=101^{2009}+102^{2009}+\cdots+989^{2009}$ را بیابید .

۲۱ . رقم یکان عدد
$M=(2008)^{2!}+(2008)^{4!}+\cdots+(2008)^{1000!}$ را بیابید .

۲۲ . رقم یکان عدد
$N=(2007)^{11}+(2007)^{14}+(2007)^{17}+\cdots+(2007)^{2009}$ را بیابید .

۲۳ . رقم یکان عدد
$M=(1!)^1+(2!)^2+(3!)^3+\cdots+(1388!)^{2009}$ را بیابید .

۲۴ . اگر داشته باشیم :
$M=1!+3!+5!+\cdots+2009!$ و $N=2!+4!+6!+\cdots+2008!$
رقم یکان عدد $S=(M^N+N^M)^{1389}$ را تعیین کنید .

۲۵ . رقم یـکـان عـدد $N=(2008)^{1388!}+(2009)^{1389!}$ را بیابید .

۲۶ . رقم یکان عدد $M=(2007)^{88k+2}+(1387)^{44k+4}$ را تعیین کنید .

۲۷ . رقم یکان عدد $N=1387^{7^7}+2007^{7^7}$ را بیابید .

۲۸ . رقـــم یـــکـــان عـــدد $S=M^{M^M}$ را بـــا فـــرض $M=(1!)^1+(2!)^2+\cdots+(2009!)^{1389}$ بیابید .

۲۹ . رقم سمت راست عدد
$N=(1!+3!+\cdots+2009!)(2!+4!+\cdots+2008!)$ را بیابید .

۳۰ . با استفاده از قضیه‌ی فرما ، یک سری از جواب‌های عمومی معادله‌ی $x^p+y^p=z^m$ را با فرض $(p,m)=1$ به دست آورید . (p اول است) . (رجوع شود به رشد برهان ۵۴)

□□□

نماد تجسمی جهت اثبات مساحت دایره به روش علمی کاربردی

● عبدالساده نیسی

مساحت دایره

این قاعده از دیرباز و از رابطه‌ی مجذور شعاع ضرب در عدد پی πR^2 بدست می‌آید. با توجه به این که برای اثبات این معادله از طریق معادلات پیشرفته روش‌های مختلفی وجود دارد اما هیچ کدام از آن‌ها برای مقاطع تحصیلی تا حد متوسط قابل ادراک نمی‌باشد، بنابراین لازم دیده شد که علاوه بر اثبات این قضیه و بیان نقش عدد π در مساحت دایره یک نماد تجسمی از مراحل تکوین این قضیه طراحی و جهت تجسم و مشاهدات عینی مورد استفاده قرار گیرد.

اثبات مساحت دایره:

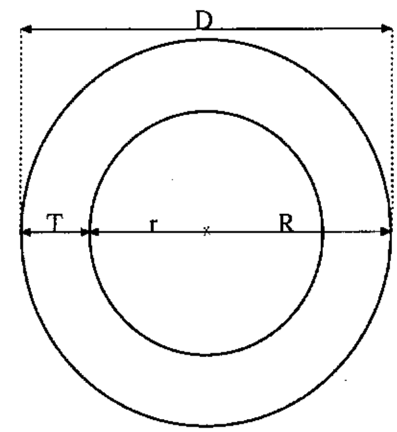
عدد π که مقدار آن ۳/۱۴ یا به طور دقیق‌تر ۳/۱۴۱۵۹۲۷ می‌باشد عددی است ثابت و به عنوان رابط میان محیط و قطر دایره تعریف می‌شود.

محیط دایره $= D\pi = 2\pi R$

این عد(π) که نقش آن در محیط دایره شفاف و قابل احساس می‌باشد در مساحت دایره به سادگی مشهود نیست و نیاز به اثبات و استدلال دارد. برای این موضوع پس از تحقیق و بررسی پیرامون

مساحت دایره جهت رسیدن به نقش عدد π و اثبات مساحت از راه ساده‌ای اقدام گردید. از این‌رو به اثبات مساحت حلقه محصور میان دو دایره پرداخته شد.

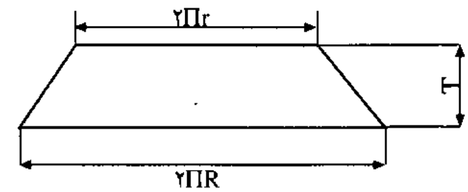
$$S_2 = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi(R+r)(R-r)$$
$$R + r = D - T$$
$$R - r = T$$
$$S_2 = \pi T(D - T)$$



مساحت حلقه مورد نظر از طریق روش معمول بدست آمد. اما نقش عدد π معلوم نمی‌باشد با در نظر گرفتن این مطلب که نقش عدد π در رابطه محیط دایره روشن و قابل لمس می‌باشد اگر مساحت حلقه با روشی محاسبه شود که محیط هر دو دایره در آن موثر باشد و جواب واحدی حاصل گردد نقش عدد π در مساحت حلقه و سپس دایره روشن خواهد شد.

راه‌حل:

در ذهن خود حلقه را درنظر می‌گیریم تا به‌صورت ذوزنقه متساوی‌الساقین مجسم شود. با این فرض مساحت ذوزنقه را بدست می‌آوریم اگر جواب با جواب قبلی یکی باشد به هدفی که پیگیری کرده‌ایم خواهیم رسید.



مساحت ذوزنقه $\Rightarrow S_{tr} = \dfrac{2\pi R + 2\pi r}{2} \times T$

$$S_{tr} = \pi T(R + r)$$

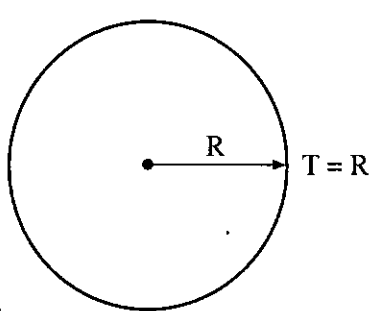
جواب به‌دست آمده برای مساحت ذوزنقه که از طریق محیط دو دایره محاسبه شده است با مساحت حلقه یکسان می‌باشد و می‌توان به‌راحتی نقش عدد π را در این اثبات مشاهده نمود.

حال اگر بخواهیم نقش این عدد را در مساحت دایره احساس نماییم به‌طریق زیر عمل می‌شود:

اثبات مساحت دایره:

با توجه به رابطه به‌دست آمده برای مساحت حلقه و ذوزنقه یعنی
$S = \pi T(R + r)$
اگر مقدار T را آن‌قدر بزرگ نماییم تا به اندازه‌ی R شود به‌خودی خود مقدار r صفر (۰) خواهد شد.

$$S = \pi R(R + 0)$$
$$S = \pi R^2$$



فیثاغورس در جزیره ساموس، نزدیک کرانه‌های ایونی، زاده شد. او در عهد قبل از ارشمیدس، زنون و اودوکس (۵۶۹ تا ۵۰۰ (پیش از میلاد)) می‌زیست. او در جوانی به سفرهای زیادی رفت و این امکان را پیدا کرد تا با کاهنان مصر، بابل و مغان ایرانی آشنا شود و دانش آن‌ها را بیاموزد. به طوری که معروف است فیثاغورس، دانش مغان را آموخت. او روی‌هم رفته، ۲۲ سال در سرزمین‌های خارج از یونان بود و چون از سوی پولوکراتوس، شاه یونان، به آمازیس، فرعون مصر سفارش شده بود، توانست به سادگی به رازهای کاهنان مصری دست یابد. او مدت‌ها در این کشور به سر برد و در خدمت کاهنان مصری به شاگردی پرداخت و آگاهی‌ها و باورهای بسیار کسب کرد و از آن‌جا روانه بابل شد و دوران شاگردی را از نو آغاز کرد.

وقتی او در حدود سال ۵۳۰، از مصر بازگشت، در زادگاه خود مکتب اخوتی (که امروزه برچسب مکتب فیثاغورس بر آن خورده است) را بنیان گذاشت. هدف او از بنیان نهادن این مکتب این بود که بتواند مطالب عالی ریاضیات و مطالبی را تحت عنوان نظریه‌های فیزیکی و اخلاقی تدریس کند و پیشرفت دهد.

فیثاغورس نیز به مانند سقراط جانب احتیاط را نگاه داشت و چیزی ننوشت. تعالیم وی از طریق شاگردانش به دست ما رسیده است.

شیوه تفکر این مکتب با سنت قدیمی دموکراسی، که در آن زمان بر ساموس حاکم بود، متضاد بود. و چون این مشرب فلسفی با مذاق مردم ساموس خوش نیامد، فیثاغورس به ناچار، زادگاه‌اش را ترک گفت و به سمت شبه‌جزیره آپنین (از سرزمین‌های وابسته به یونان) رفت و در کراتون مقیم شد.

در افسانه‌ها چنین آمده است که متعصبان آیینی و سیاسی، توده‌های مردم را علیه او شوراندند و به ازای نور هدایتی که وی راهنمای ایشان کرده بود مکتب و معبد او را آتش زدند و وی در میان شعله‌های آتش جان سپرد.

وی نظرات ریاضی خویش را با موضوعات فلسفی و باورهای آیینی درهم آمیخته بود. او در عین حال هم عارف و هم ریاضیدان بود و به قولی یک دهم شهرت او نتیجه نبوغ وی و مابقی ماحصل ارشاد و رسالت اوست.

mir_sadr@yahoo.com

● میرشهرام صدر

بلندای خئوپس

برای آن‌که نقش فیثاغورس را در تبیین اصول ریاضیات درک کنیم، لازم است کمی درباره جایگاه ریاضیات در عصر وی و پیشرفت‌هایی که تا زمان وی صورت گرفته بود، بدانیم که این هم به نوبه خود، درخور توجه است. جالب است بدانید با این که مبنای ریاضیات بر «استدلال» استوار است، قبل از فیثاغورس هیچ کس نظر روشنی درباره این موضوع نداشت که استدلال باید مبنی بر مفروضات باشد. به عبارتی استدلال، مسئله‌ی تعریف شده‌ای نبود.

در واقع می‌توان گفت بنا به قول مشهور، فیثاغورس در بین اروپاییان اولین کسی بود که روی این نکته اصرار ورزید که در هندسه باید ابتدا «اصول موضوع» و «اصول متعارفی» را معین کرد و آنگاه به اتکاء آن‌ها که «مفروضات» هم نامیده می‌شوند، روش استنتاج متوالی را پیش گرفت به پیش رفت. از نظر تاریخی «اصول متعارفی» عبارت بود از «حقیقتی لازم و خودبه‌خود واضح».

این‌که فیثاغورس استدلال را وارد ریاضیات کرد، از مهم‌ترین حوادث علمی است و قبل از فیثاغورس، هندسه عبارت بود از مجموعه قواعدی که ماحصل تجارب و ادراکات متفرق بوده‌اند؛ تجارب و قواعدی که هیچ‌گونه ارتباطی با هم نداشتند حتی کسی در آن زمان حدس نمی‌زد مجموعه‌ی این قواعد را بتوان از عده‌ی بسیار کمی اصول نتیجه گرفت. در صورتی که امروزه حتی تصور این موضوع که ریاضیات بدون استدلال چه وضع و حالی داشته است برای ما ممکن نیست. اما در آن عصر این موضوع گام بلندی به سوی نظام قدرتمند هندسه محسوب می‌شد.

قضیه فیثاغورس

یکی از معروف‌ترین قضیه‌ها در هندسه است و اهمیت آن ناشی از کاربردش در حل مسائل هندسه می‌باشد. از کاربردهای مهم این قضیه می‌توان در محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو نقطه در صفحه و فضا و معادله‌ی دایره در صفحه (هندسه تحلیلی) نام برد. بیشتر دانش‌آموزان این قضیه را به خوبی می‌شناسند و در حل مسائل از آن کمک می‌گیرند، قضیه‌ی فیثاغورس می‌گوید:

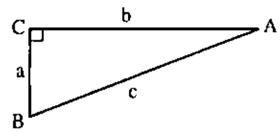
«در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر»

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

در این مقاله با دو روش عملی درستی قضیه‌ی فیثاغورس را بررسی کرده، هم‌چنین درستی قضیه فیثاغورس به روش‌های جبری و تحلیلی ثابت می‌کنیم و در انتها؛ با طرح یک مسأله کاربردی، ارتفاع هرم خئوپس را محاسبه می‌کنیم.

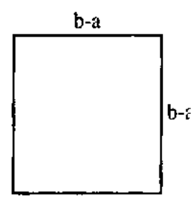
روش عملی اول. برای بررسی درستی قضیه فیثاغورس با روش عملی مراحل زیر را انجام می‌دهیم.

مرحله‌ی اول: مثلث قائم‌الزاویه ABC را با طول ضلع‌های a، b و c ($c>b>a$) درنظر می‌گیریم (شکل۱).



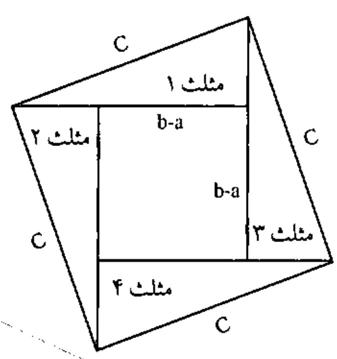
(شکل۱)

مرحله‌ی دوم: مربعی به طول b-a به صورت زیر را رسم می‌کنیم:



(شکل۲)

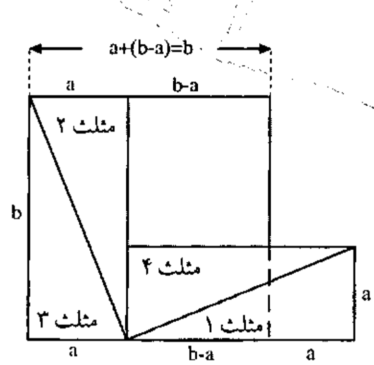
مرحله‌ی سوم: چهار مثلث مانند ΔABC در شکل۱ را در چهار طرف ضلع‌های این مربع به صورت زیر قرار می‌دهیم. (شکل۳)



(شکل۳)

همان‌طور که در شکل ۳ ملاحظه می‌کنید، مربعی به ضلع c به وجود می‌آید که مساحت آن برابر با $S = c^2$ است.

مرحله‌ی چهارم: اکنون می‌خواهیم مساحت شکل۳ را به روش دیگری محاسبه کنیم، برای این منظور مثلث ۱ را کنار مثلث ۴ و مثلث ۳ را کنار مثلث ۲ قرار می‌دهیم. (شکل۴)



(شکل۴)

شکل ۴ از دو مربع به ضلع‌های a و b تشکیل شده است، پس مساحت آن برابر است با:

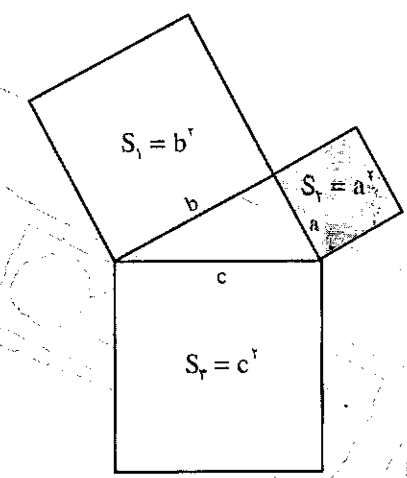
$$S = a^2 + b^2$$

با توجه به مساحت شکل‌های ۳ و ۴ درمی‌یابیم که:

$$\begin{cases} S = c^2 \\ S = a^2 + b^2 \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

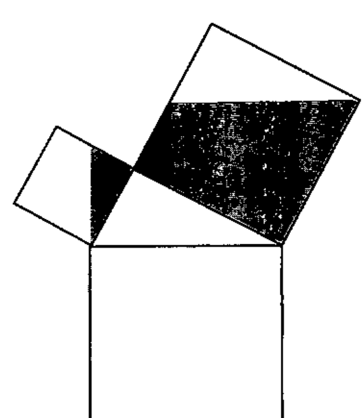
با توجه به رابطه‌ی اخیر درستی قضیه‌ی فیثاغورس برقرار است.
□

روش عملی دوم. مثلث قائم‌الزاویه ABC را با طول ضلع‌های c, b, a $(c > b > a)$ در نظر می‌گیریم و روی وتر این مثلث یک مربع بزرگ به طول c و روی دو ضلع زاویه قائمه دو مربع دیگر به طول‌های b و a بنا می‌کنیم. (شکل۵)



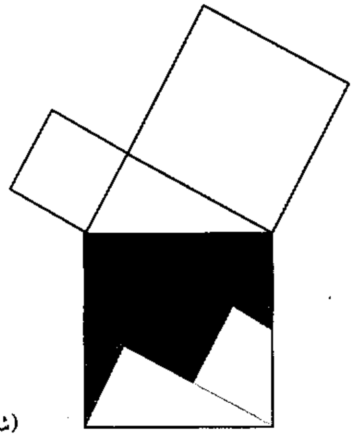
(شکل۵)

اکنون سطح مربع‌های کوچک‌تر را که روی ضلع‌های زاویه‌ی بنا شده‌اند، به قطعات کوچک‌تری تقسیم می‌کنیم. (شکل۶)



(شکل۶)

در این مرحله می‌توانیم با قطعات کوچک‌تری که به‌دست آورده‌ایم، سطح مربع بزرگ‌تر را کاملاً بپوشانیم یا موزاییک کنیم.



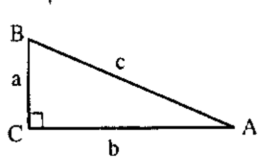
(شکل۷)

با توجه به دو شکل ۶ و ۷ ملاحظه می‌کنیم که مجموع مساحت‌های دو مربع کوچک‌تر برابر با مساحت مربع بزرگ‌تر است، از آن‌جا که مجموع مساحت‌های دو مربع کوچک‌تر برابر با $a^2 + b^2$ است و مساحت مربع بزرگ‌تر برابر با c^2 می‌باشد، درستی قضیه فیثاغورس برقرار است، یعنی در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

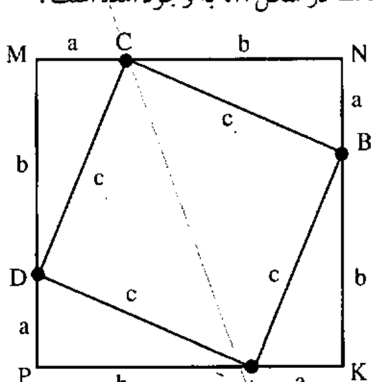
اثبات جبری قضیه‌ی فیثاغورس

مثلث قائم‌الزاویه ABC را با طول ضلع‌های c, b, a $(c > b > a)$ درنظر می‌گیریم.



(شکل۸)

می‌خواهیم در این مثلث نشان دهیم که: $c^2 = a^2 + b^2$
برای این منظور شکل زیر را رسم می‌کنیم (شکل۹) همان‌طور که ملاحظه می‌کنید این شکل از کنار هم قرار گرفتن چهار مثلث مانند ΔABC در شکل ۸، به وجود آمده است.



(شکل۹)

در شکل ۹، یک مربع بزرگ مشاهده می‌کنید که طول هر ضلع آن برابر با a+b است، درنتیجه مساحت آن برابر است با:

$$S = (a + b)(a + b)$$

مربع CBAD به ضلع C وجود دارد که مساحت آن برابر با $S_1 = c^2$ و مساحت هر مثلث قائم‌الزاویه برابر با $S_2 = \frac{1}{2}ab$ است؛
با توجه به شکل ۹ ملاحظه می‌کنید:

$$S_{MNPK} = S_{CBAD} + 4S_{BNC}$$
$$\Rightarrow S = S_1 + 4S_2$$
$$\Rightarrow (a+b)(a+b) = c^2 + 4(\frac{1}{2}ab)$$
$$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$
$$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

درنتیجه حکم ثابت شد.

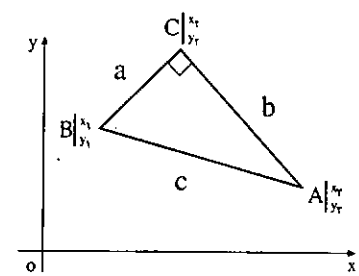
اثبات تحلیلی قضیه‌ی فیثاغورس

مثلث قائم‌الزاویه ABC را با مختصات رأس‌های $B(x_1, y_1)$، $C(x_2, y_2)$ و $A(x_3, y_3)$ و طول ضلع‌های a، b و c درنظر می‌گیریم به طوری که $c > b > a$، (شکل ۱۰) می‌خواهیم با روش تحلیلی ثابت کنیم:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

برای این منظور طول ضلع‌های مثلث را به کمک مختصات رأس‌های آن به دست می‌آوریم، سپس درستی رابطه‌ی ذیل را نشان می‌دهیم:

$$BC^2 + AC^2 = AB^2$$



(شکل۱۰)

$$AB = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$$
$$BC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$AC = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$$

$$\begin{aligned} BC^2 + AC^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 \\ &= x_2^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + y_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 \\ &\quad + x_3^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + y_3^2 + y_2^2 - 2y_2y_3 \\ &= x_1^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_3^2 + 2(x_2^2 + y_2^2 \\ &\quad - x_2x_3 - x_1x_2 - y_2y_3 - y_1y_2) \qquad (1) \end{aligned}$$

از طرفی چون مثلث ABC در رأس C قائمه است، پس: $m_{BC} = \frac{-1}{m_{AC}}$؛ درنتیجه داریم:

$$m_{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \; ; \; m_{AC} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

$$m_{BC} = \frac{-1}{m_{AC}} \Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 - x_3}{y_3 - y_2}$$
$$\Rightarrow (x_2 - x_1)(x_2 - x_3) = (y_2 - y_1)(y_3 - y_2)$$
$$\Rightarrow x_2^2 + y_2^2 - x_2x_3 - x_1x_2 - y_2y_3 - y_1y_2$$
$$= -y_1y_3 - x_1x_3 \qquad (2)$$

اکنون رابطه‌ی (۲) را در رابطه‌ی (۱) جایگزین می‌کنیم:

$$\begin{aligned} BC^2 + AC^2 &= x_1^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_3^2 + 2(-y_1y_3 - x_1x_3) \\ &= (x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_3) + (y_1^2 + y_3^2 - 2y_1y_3) \\ &= (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 = AB^2 \\ &\Rightarrow BC^2 + AC^2 = AB^2 \end{aligned}$$

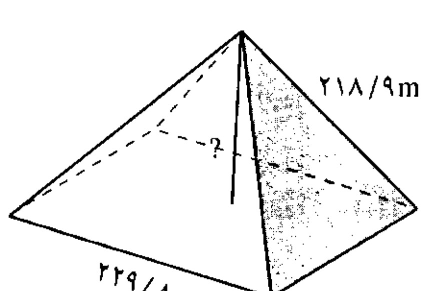
درنتیجه حکم ثابت شد.

در این قسمت از مقاله به ارائه یک مسأله کاربردی از قضیه فیثاغورس می‌پردازیم.

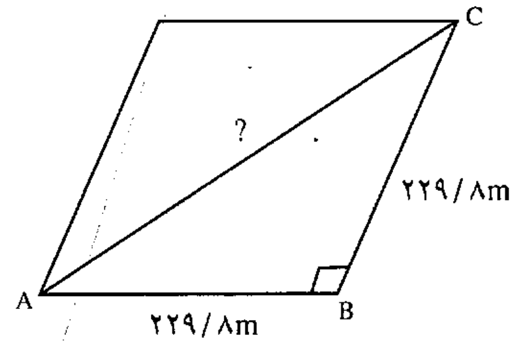
بلندای هرم خنوپس

جیزه یکی از شهرهای کشور مصر است. شهر جیزه در استان جیزه قرار دارد و هرم آن یعنی هرم بزرگ جیزه شهرت جهانی دارد. هرم بزرگ جیزه در اصل همان هرم خنوپس[1] (کئوپس) بزرگ‌ترین هرم از اهرام سه‌گانه‌ی مصر است. ساخت این هرم در زمان حیات فرعون خنوپس آغاز شد ولی مدت‌ها بعد از مرگ او به پایان رسید. این هرم هم مانند هرم‌های دیگر شامل مقبره‌ی شاه و ملکه به صورت مجزا است که البته بعد از اکتشاف هر دو خالی بوده‌اند. سطح زیربنای هرم، یک مربع به طول ۲۲۹/۸ متر است و در بنای آن سنگ‌هایی از یک تن تا چهل تن به کار رفته‌اند. گفته می‌شود که حدود ۱۰۰,۰۰۰ کارگر برای ساختن این بنا، بیشتر از ۲۰ سال زحمت کشیده‌اند.

قاعده‌ی هرم خنوپس مربعی به طول ۲۲۹/۸ متر و هر یال جانبی آن به طول ۲۱۸/۹ متر است. می‌خواهیم ارتفاع این هرم را پیدا کنیم.



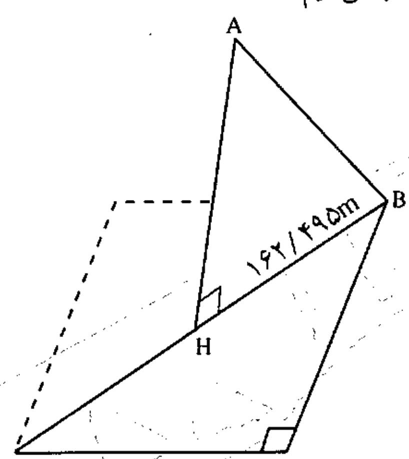
برای این منظور ابتدا قطر مربع مقطع هرم را به کمک رابطه‌ی فیثاغورس مشخص می‌کنیم.



در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

$$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲$$
$$\Rightarrow AC^۲ = (۲۲۹/۸)^۲ + (۲۲۹/۸)^۲ = ۱۰۵۶۱۶/۰۸$$
$$\Rightarrow AC = \sqrt{۱۰۵۶۱۶/۰۸} = ۳۲۴/۹۹$$

اکنون با توجه به شکل زیر در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABH، بلندای خئوپس[1] را محاسبه می‌کنیم.



$$AB^۲ = AH^۲ + BH^۲ \Rightarrow AH^۲ = AB^۲ - BH^۲$$
$$\Rightarrow AH^۲ = (۲۱۸/۹)^۲ - (۱۶۲/۴۹۵)^۲ = ۲۱۵۱۲/۵۸$$
$$\Rightarrow AH^۲ = \sqrt{۲۱۵۱۲/۵۸} = ۱۴۶/۶۷$$

1. cheops

1. http://mathematica.ludibunda.ch

2. http://www.mathsisfun.com

3. http://www.subtangent.com

4. http://fa.wikipedia.org

تفریح اندیشه

۱. مکعبی به ضلع ۴ اینچ (هر اینچ حدود ۲/۵ سانتی‌متر است) را رنگ و سپس آن را به ۶۴ مکعب یک اینچی تقسیم کرده‌ایم. یکی از این مکعب‌های کوچک را به تصادف برمی‌داریم و می‌اندازیم. احتمال این‌که هیچ یک از پنج وجه دیده شونده‌ی آن رنگ نشده باشد، چیست؟

***

۲. سعید که آدم عجولی است، از پله‌ی برقی متحرک واقع در مسیرش با نرخ یک پله در هر ثانیه بالا می‌رود و پس از ۲۰ پله بالای آن می‌رسد. روز بعد، باز هم در حالی که پله‌ی برقی در حرکت است، با نرخ دو پله در ثانیه از آن بالا می‌رود و در ۳۲ پله به بالای آن می‌رسد. در صورتی که پلکان برقی متوقف باشد، چند پله از پایین تا بالا دارد؟

***

جواب: $\frac{۳}{۱۶}$.

حل: از ۶۴ مکعب یک اینچی، وجوه ۸ مکعب رنگ نشده است و ۲۴ مکعب دارای یک وجه رنگ شده‌اند. احتمال انتخاب مکعبی با هیچ وجه رنگ نشده $\frac{۸}{۶۴}$ است. احتمال انتخاب یک مکعب با یک وجه رنگ شده و انداختن آن به طوری که وجه رنگ شده‌ی آن نشان داده نشود، عبارت است از:

$$\frac{۲۴}{۶۴} \cdot \frac{۱}{۶} = \frac{۴}{۶۴}$$

بنابراین، احتمال این‌که چنین مکعبی را انتخاب کنیم، آن را بیندازیم و وجه رنگ شده‌ای به چشم نخورد، برابر است با:

$$\frac{۸}{۶۴} + \frac{۴}{۶۴} = \frac{۱۲}{۶۴} = \frac{۳}{۱۶}$$

***

جواب: ۸۰.

حل: زمانی که سعید با نرخ یک پله در هر ثانیه، از پله‌ی برقی بالا می‌رود، برای رسیدن به بالای پلکان، به ۲۰ ثانیه نیاز دارد. هنگامی که با نرخ دو پله در ثانیه بالا می‌رود، برای رسیدن به بالای پلکان، ۱۶ ثانیه وقت می‌خواهد؛ بنابراین:

۱۶(۲+نرخ پله برقی) = ۲۰(۱+نرخ پله برقی)

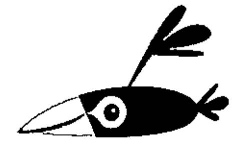
با حل این معادله به دست می‌آوریم:

۳ پله در ثانیه=نرخ پله‌ی برقی

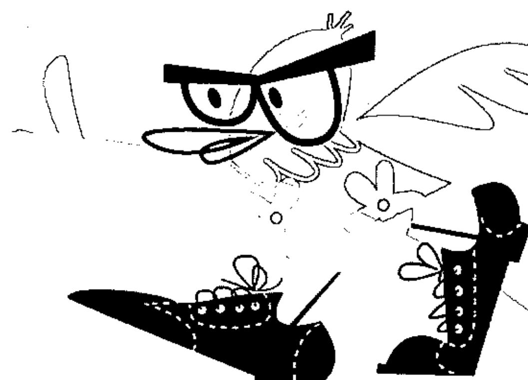
بنابراین، فاصله‌ی پایین تا بالای پله‌ی برقی برابر است با:

پله ۸۰=۲۰(۱+۳)

مجموعه‌ی زیرمجموعه‌ها



● حمیدرضا امیری



می‌دانیم اگر مجموعه‌ی A دارای n عضو باشد آنگاه ۲^n زیر مجموعه دارد، حال اگر همه‌ی این زیر مجموعه‌ها را اعضای مجموعه‌ای در نظر بگیریم، آن را مجموعه‌ی توانی[1] A نامیده و با $p(A)$ نمایش می‌دهیم. پس، $p(A)$ یعنی مجموعه‌ی شامل همه‌ی زیر مجموعه‌های A که اگر تعداد اعضای A را با $|A|$ و تعداد اعضای $p(A)$ را با $|p(A)|$ نمایش دهیم خواهیم داشت:

$$\text{I)}\quad |A| = n \Leftrightarrow |p(A)| = ۲^n$$

$$\text{II)}\quad B \subseteq A \Leftrightarrow B \in p(A)$$

تذکر مهم: چون همواره $\varnothing \subseteq A$ پس بنابر (II) همواره $\varnothing \in p(A)$ و بنابراین همواره برای هر مجموعه‌ی دلخواه مانند A داریم، $p(A) \neq \varnothing$.

مثال۱: اگر $A = \{۲,۳,۴\}$ در این صورت

$$p(A) = \{\varnothing, A, \{۲\}, \{۳\}, \{۴\}, \{۲,۳\}, \{۲,۴\}, \{۳,۴\}\}$$

مثال۲: اگر $A = \varnothing$ در این صورت

$$p(A) = \{\varnothing\}$$

مثال۳: اگر $|A| = ۲$ (A مجموعه‌ای ۲ عضوی است) در این صورت مجموعه‌ی $p(p(p(A)))$ چند عضو دارد؟

$$|A| = ۲ \Rightarrow |p(A)| = ۲^۲ = ۴ \Rightarrow |p(p(A))| = ۲^۴ = ۱۶$$

$$\Rightarrow |p(p(p(A)))| = ۲^{۱۶}$$

مثال۴: اگر A و B دو مجموعه باشند ثابت کنید:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow p(A) \subseteq p(B)$$

حل: ابتدا فرض می‌کنیم $A \subseteq B$ و ثابت می‌کنیم $p(A) \subseteq p(B)$ ، (به روش عضوگیری دلخواه)

[فرض کنیم $X \in p(A) \Rightarrow X \subseteq A \xrightarrow{A \subseteq B} X \subseteq B \Rightarrow X \in p(B)$]

$\Rightarrow p(A) \subseteq p(B)$

حال فرض می‌کنیم $p(A) \subseteq p(B)$ و ثابت می‌کنیم $A \subseteq B$ ،

[فرض کنیم $x \in A \Rightarrow \{x\} \subseteq A \Rightarrow \{x\} \in p(A) \xrightarrow{p(A) \subseteq p(B)} \{x\} \in p(B)$

$\Rightarrow \{x\} \subseteq B \Rightarrow x \in B] \Rightarrow A \subseteq B$

نتیجه: اگر A و B دو مجموعه باشند همواره داریم:

$$A = B \Leftrightarrow p(A) = p(B)$$

مثال ۵: برای هر دو مجموعه‌ی دلخواه مانند A و B ثابت کنید:

$$\text{(I)}\quad p(A) \cap p(B) = p(A \cap B)$$

$$\text{(II)}\quad p(A) \cup p(B) \subseteq p(A \cup B)$$

حل: برای اثبات روابط فوق نیاز به بیان دو ویژگی در مجموعه‌ها و بین اعمال اجتماع و اشتراک داریم یعنی:

$$\text{I)}\ \begin{matrix} A \subseteq B \\ A \subseteq C \end{matrix} \Leftrightarrow A \subseteq (B \cap C)$$

$$\text{II)}\ \begin{matrix} A \subseteq B \\ A \subseteq C \end{matrix} \Rightarrow A \subseteq (B \cup C)$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید عکس رابطه‌ی (II) در حالت کلی برقرار نمی‌باشد. و مثال‌های نقض فراوانی می‌توان برای آن یافت در صورتی که رابطه‌ی (I) به صورت یک قضیه‌ی دو شرطی بیان شده و اثبات این روابط به‌خصوص از روش عضوگیری دلخواه بسیار ساده است!

حال رابطه‌ی (I) را ثابت می‌کنیم،

فرض کنیم $[x \in [p(A)\cap p(B)] \Leftrightarrow x\in p(A)\ ,\ x \in p(B)$
$\Leftrightarrow x\subseteq A\ ,\ x\subseteq B \Leftrightarrow x \subseteq (A\cap B)\Leftrightarrow x\in p(A\cap B)]$
$\Rightarrow p(A)\cap p(B) = p(A\cap B)$

(توجه دارید که تمام روابط برگشت پذیر بوده و تساوی بین دو مجموعه حاصل شد)

در اثبات رابطه‌ی (II) که در زیر مشاهده خواهید کرد با توجه به رابطه‌ی ذکر شده که قبلاً یک طرفه بودن آن تأکید شد، فقط $p(A)\cup p(B)\subseteq p(A\cup B)$ ثابت می‌شود

فرض کنیم $[x\in[p(A)\cup p(B)] \Leftrightarrow x\in p(A)\ ,\ x\in p(B)$
$\Leftrightarrow x\subseteq A\ ,\ x\subseteq B \Rightarrow x\subseteq(A\cup B)\Rightarrow x\in p(A\cup B)]$
$\Rightarrow p(A)\cup p(B)\subsetneq p(A\cup B)$

اگر فرض کنیم $A=\{۱\}$ و $B=\{۲,۴\}$ در این صورت $A\cup B=\{۱,۲,۴\}$ و با تشکیل $p(A)$ و $p(B)$ و $p(A\cup B)$ مشاهده می‌کنید که $\{۱,۲,۴\}\in p(A\cup B)$ ولی $\{۱,۲,۴\}\notin p(A)\cup p(B)$ پس عکس رابطه‌ی (II) برقرار نمی‌باشد.

مثال ۶: اگر A و B دو مجموعه باشند ثابت کنید:

$A\cap B=\varnothing \Leftrightarrow p(A)\cap p(B)=\{\varnothing\}$

حل:

فرض کنیم $A\cap B=\varnothing \Rightarrow p(A\cap B)=p(\varnothing)=\{\varnothing\}$ (۱)

از طرفی: $p(A\cap B)=p(A)\cap p(B)$ (۲)

$(۱),(۲)\Rightarrow p(A)\cap p(B)=\{\varnothing\}$

فرض کنیم $p(A)\cap p(B)=\{\varnothing\}\xrightarrow{(۲)}$
$p(A\cap B)=\{\varnothing\}\Rightarrow A\cap B=\varnothing$

مثال ۷: برای هر دو مجموعه‌ی دلخواه ثابت کنید:

$p(A-B)\subseteq p(A)-P(B)$

و سپس برای عکس رابطه، مثال نقض بزنید.

فرض کنیم $x\in p(A-B)\Rightarrow x\subseteq(A-B)\xrightarrow{(A-B)\subseteq A}$
$x\subseteq A\ ,\ x\nsubseteq B\Rightarrow x\in p(A)\ ,\ x\notin p(B)\Rightarrow$
$x\in(p(A)-p(B))]\Rightarrow p(A-B)\subseteq p(A)-p(B)$

حال اگر فرض کنیم $A=\{۱,۲\}$ و $B=\{۲,۳\}$ در این صورت واضح است که، $\{۱,۲\}\in p(A)-p(B)$ در صورتی که $(A-B)=\{۱\}$ و $p(A-B)=\{\varnothing,\{۱\}\}$ و $\{۱,۲\}\notin p(A-B)$ بنابراین عکس رابطه‌ی فوق برقرار نمی‌باشد.

مثال ۸: اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند ثابت کنید:

$p(A)-p(B)=p(A)-p(A\cap B)$

حل: می‌دانیم در حالت کلی و برای هر دو مجموعه‌ی دلخواه همواره $(A-B)=A-(A\cap B)$، بنابراین می‌توان نوشت:

$$p(A)-p(B)=p(A)-[\underbrace{p(A)\cap p(B)}_{p(A\cap B)}]=p(A)-p(A\cap B)$$

نتیجه‌ی مهم: با توجه به این که $|A-B|=|A|-|A\cap B|$ ($|A|$ یعنی تعداد اعضای A) پس می‌توان نوشت:

$$|p(A)-p(B)|=|p(A)|-\left|\underbrace{p(A)\cap p(B)}_{p(A\cap B)}\right|=|p(A)|-|p(A\cap B)|$$

مثال ۹: اگر $A=\{a,\{a\},\{a\},\{a\},b\}$ و $B=\{b,\{a\},\{\{a\}\},\{b\}\}$ در این صورت مجموعه‌ی $p(A)-p(B)$ چند عضو دارد؟

حل: می‌دانیم $A\cap B=\{b,\{a\}\}$ مجموعه‌ای ۲ عضوی است پس،

$|p(A)-p(B)|=|p(A)|-|p(A\cap B)|=۲^۴-۲^۲=۱۶-۴=۱۲$

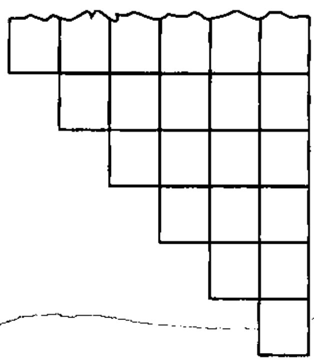
مثال ۱۰: اگر $A=\{a,\{a\},\{\{a\}\},\{a,\{a\}\}\}$ در این صورت مجموعه‌ی $p(A)-A$ چند عضو دارد؟

حل: $|p(A)-A|=|p(A)|-|p(A)\cap A|$

بنابراین باید بررسی کنیم که $p(A)$ و A چند عضو مشترک دارند، با توجه به تعریف مجموعه‌ی A واضح است که $\{a\}\in p(A)$ و $\{\{a\}\}\in p(A)$ و $\{a,\{a\}\}\in p(A)$ که همگی اعضای A نیز هستند پس، $|p(A)\cap A|=۳$ و لذا داریم،

$|p(A)|-|p(A)\cap A|=۲^۴-۳=۱۳$

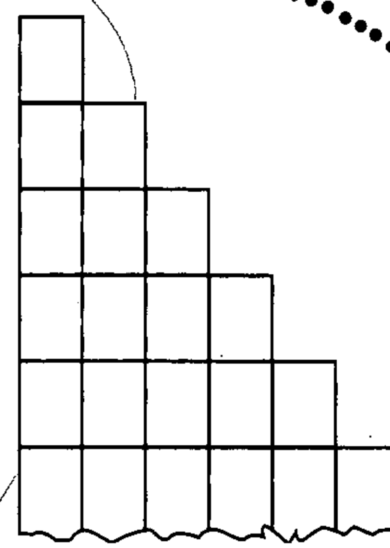
1. power set



• ترجمه: شهین نهبنا

نگاهی به سری‌های هندسی

$\sum_{k=1}^{n} k$ و $\sum_{k=1}^{n} k^{2}$



چکیده

در این مقاله، با نگاهی نو و جدید به سری‌های هندسی پرداخته‌ایم و از شکل‌های آشنای هندسی، برای اثبات جمع‌های جبری آموخته شده استفاده کرده‌ایم. برای اثبات رابطه‌ی اول از مساحت مربع‌های ایجاد شده در سطرها که روی هم قرار گرفته‌اند و در رابطه‌ی دوم از مکعب‌هایی به ضلع یک واحد استفاده شده است. سپس به کمک برش‌های داده شده، شکل‌ها محدودتر شده‌اند تا راحت‌تر بتوان مساحت و حجم آن‌ها را محاسبه کرد. در نهایت، مجموع مساحت‌ها در رابطه‌ی اول و نیز مجموع حجم‌ها در رابطه‌ی دوم، همان رابطه‌ی آشنای سری‌های هندسی را نتیجه‌گیری کرده است. هدف این مقاله، آشنایی دانش‌آموزان و همکاران با دیدگاهی دیگر برای اثبات سری‌هاست تا عزیزان با فهم بیشتر مسائل ریاضی و تجزیه و تحلیل آن‌ها، تأثیر مثبت تفکر ریاضی را دریابند.

مقدمه

تجربیات جدید و پژوهش در ریاضی، سبب می‌شود که انسان با بصیرت بیشتری به سامان‌دهی ذهن و اندیشه‌ی خویش بپردازد و برای رویارویی با چالش‌های علمی در بستر تدریس آماده شود. اکثر آموزشگران ریاضی، یادگیری ریاضی را مبنای توفیق فرد در حل مسئله، هم در زندگی عادی و هم در حوزه‌های دیگر مانند شیمی، فیزیک و... می‌دانند. بنابراین بهتر است، به‌دنبال روش‌های جدید و جذاب برای اثبات آموخته‌های قبلی باشیم تا نشان دهیم، ریاضی اگر زیبا و فهمیدنی باشد، بازتابی از طبیعت و جهان اطراف ماست.

قبلاً با دو نمونه از جمع‌های جبری زیر آشنا شده‌ایم:

$$1)\ 1+2+3+4+\cdots+(n-1)+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$2)\ 1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2=\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

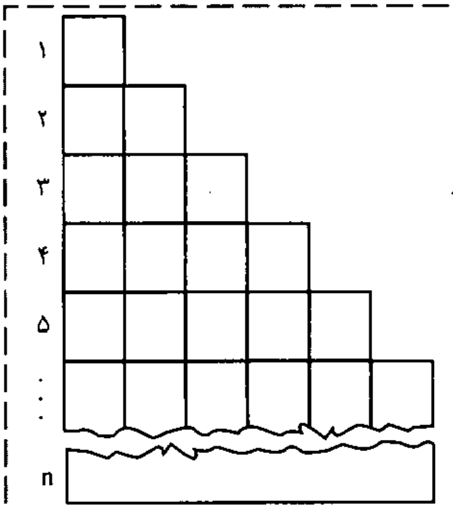
حال می‌خواهیم به $\sum_{k=1}^{n} k$ و $\sum_{k=1}^{n} k^2$ از منظر هندسی بنگریم و آن‌ها را اثبات کنیم.

برای اثبات اولین جمع؛ مربع‌هایی را داریم که با استفاده از مساحت آن‌ها، اتحاد بالا اثبات می‌شود. و برای دومین جمع، آرایشی از مکعب‌ها را داریم که حجم آن‌ها به اثبات اتحاد می‌انجامد.

اثبات اولین مجموع

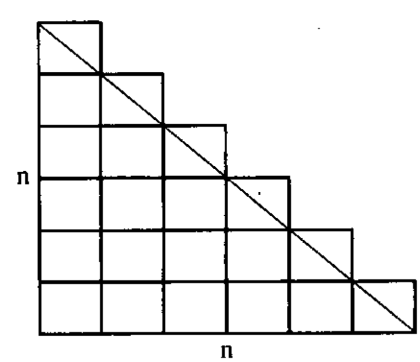
برای اثبات اولین مجموع، مربع‌هایی به طول ضلع یک واحد را داریم، که در شکل ۱ نشان داده شده‌اند. با توجه به شکل می‌بینیم که یک مربع روی اولین سطر، دو مربع روی دومین سطر، سه مربع روی سومین سطر و... تا n مربع روی nامین سطح قرار دارد. این مربع‌ها جمع زیر را می‌سازند:

$$۱+۲+۳+\cdots+(n-۱)+n$$



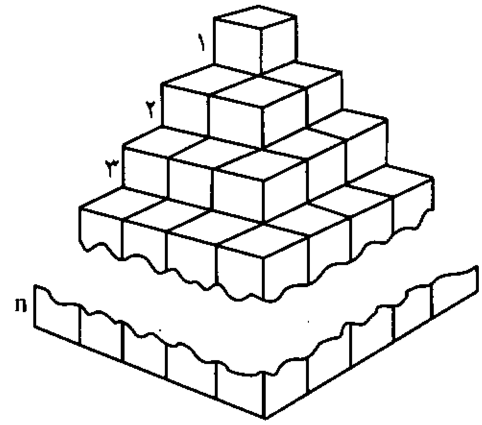
شکل ۱ الگوی پلکانی از مربع‌های واحد

علاوه بر این، می‌توان شکل بالا را با جدا کردن قسمت‌هایی از آن به شکل ۲ تبدیل کرد. مساحت مثلث بزرگ در شکل ۲، $\frac{n^۲}{۲}$ است؛ زیرا n سطر و n ستون دارد. از طرف دیگر، نیم شدن مربعات باقی‌مانده در شکل، نشان می‌دهد که مساحت آن‌ها نیز نصف شده است و چون در n سطر، n مثلث داریم، پس مساحت آن‌ها می‌تواند $(\frac{۱}{۲})n$ باشد. به این ترتیب، مجموع مساحت‌ها در شکل ۲ یا $\sum_{k=۱}^{n} k$ برابر با $\frac{n^۲}{۲}+\frac{n}{۲}$ خواهد شد که برابر است با: $\frac{n(n+۱)}{۲}$.



شکل ۲

اثبات دومین مجموع

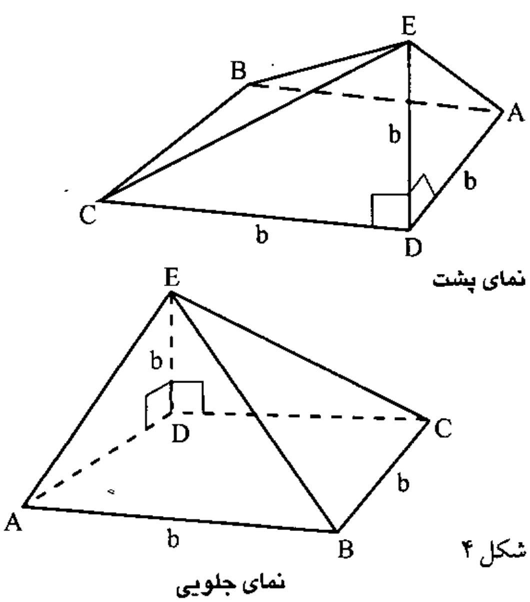


شکل ۳ لایه‌هایی از مکعب‌ها

حال برای مجموع دوم، اگر بخواهیم $\sum_{k=۱}^{n} k^۲$ را به‌وسیله‌ی شکل‌های هندسی نمایش دهیم، باتوجه به شکل ۳ تعداد مکعب‌ها در هر سطر برابر با $k^۲$ است. یعنی یک مکعب در اولین سطر، چهار مکعب در دومین سطر، نه مکعب در سومین سطر و همین‌طور تا آخر، تا nامین سطر. به‌طور کلی ما در شکل ۳، $n^۲$ مکعب داریم که اگر تعداد آن‌ها شمارش شود، حجم شکل، مجموع زیر خواهد بود:

$$۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots+(n-۱)^۲+n^۲$$

برای این قسمت هم از روشی که در جمع اول اعمال شد، بهره می‌گیریم. پس شکل ۳ را با برش‌هایی تقسیم می‌کنیم که بدین وسیله شکل‌های زیر ایجاد خواهند شد:

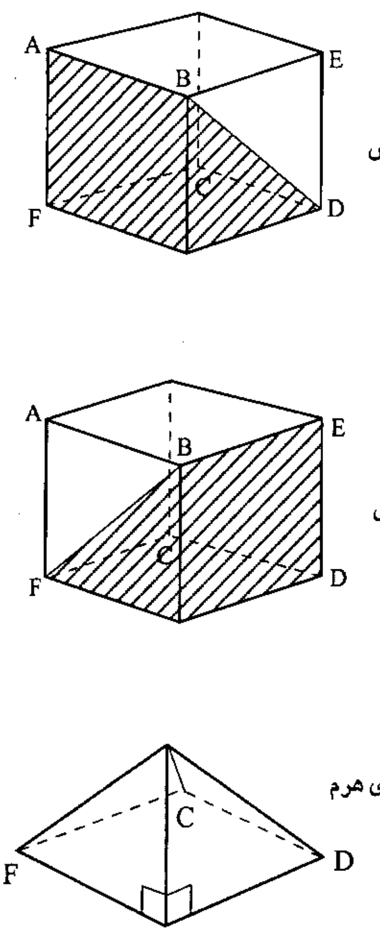


شکل ۴

نمای پشت و جلویی تقسیم‌ها، هرم‌هایی با قاعده‌ی ABCD هستند و DE عمودی است که برای قاعده‌ی ABCD ارتفاع محسوب می‌شود. ضلع‌ها و لبه‌های دیگر یکسان هستند و طولی برابر b دارند. پس فرمول حجم هرم تشکیل‌شده به این صورت خواهد بود:

(مساحت قاعده هرم) (ارتفاع) $\div 3 = (b^2)(b) \div 3 = \frac{b^3}{3}$

شکل‌های ۵، عمل برش را در مکعب شکل ۳ از نگاهی دیگر نشان می‌دهند. مکعب به‌وسیله‌ی برش‌هایی به دو قسمت از AB به CD برش داده شده و سپس به‌وسیله‌ی چرخش مکعب، عمل برش از لبه‌ی BE به CD انجام شده است.



الف) اولین برش

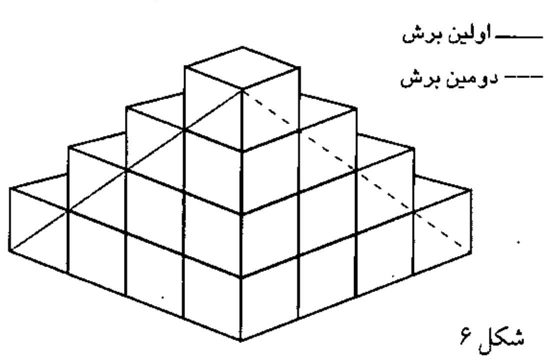
ب) دومین برش

ج) باقی‌مانده‌ی هرم

شکل ۵

بالاخره و در نهایت از تقسیم شکل ۳، مکعب به دو تکه جداگانه تقسیم می‌شود.

حجم هرم به‌دست آمده $\frac{b^3}{3}$ است. پس حجم باقی‌مانده‌ی هرم $\frac{2b^3}{3}$ می‌شود (شکل ۵ـ الف). این برش‌ها را به طور کلی می‌توان به صورت شکل ۶ نمایش داد.



شکل ۶

پس می‌توان گفت: چون مکعب n سطر دارد، حجم هرم بزرگ $\frac{1}{3}n^3$ است و تکه‌های باقی‌مانده نیز $\frac{2}{3}n$ حجم دارند. حال تنها قسمت‌هایی که هنوز محاسبه نشده‌اند، نیمه‌هایی هستند که در قسمت‌های بالایی قرار گرفته‌اند و به صورت $(n-1)$ لایه مکعب نصف شده روی n لایه هستند و حجم آن‌ها به این صورت محاسبه می‌شود:

$$\frac{1}{2}(1+2+3+\cdots+(n-1))$$

که با استفاده از مجموع اول، مقدار آن $\frac{1}{2}((n-1)\frac{n}{2})$ به دست می‌آید.

بنابراین، مجموع حجم شکل و در نتیجه $\sum_{k=1}^{n} k^2$ برابر است با:

$$\underbrace{\frac{n^3}{3}}_{(I)}+\underbrace{\frac{(n-1)\times n}{2}}_{(II)}+\underbrace{\frac{2n}{3}}_{(III)}$$

(I) حجم هرم بزرگ

(II) قسمت بالایی مکعبات نیمه

(III) باقی‌مانده مکعبات پس از برش دوباره

بنابراین داریم:

$$\frac{n^3}{3}+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{2n}{3}=\frac{2n^3+3n(n-1)+4n}{6}$$

$$=\frac{n(2n^2+3(n-1)+4)}{6}$$

$$=\frac{n(2n^2+3n+1)}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

و این همان جوابی است که انتظار داشتیم.

□□□

مسائل برای حل

ریاضیات ۱

مجتبی رفیعی

۱. اگر $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ و $b,d > 0$، آن‌گاه ثابت کنید:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

۲. حدود a را چنان بیابید که عدد گویای $\frac{a}{20}$ بین دو عدد $\frac{2}{5}$ و $0/3$ قرار گیرد.

۳. حاصل عبارت $\frac{\left(|3-\sqrt{3}|-|4-\sqrt{24}|\right)\times\sqrt{15}}{\sqrt{145}}$ را با دقت دو رقم اعشار به‌دست آورید.

۴. مجموعه‌ی $(A \cup B)$ شش عضو، مجموعه‌ی $(A \cap B)$ سه عضو و مجموعه‌ی $(A - B)$ نیز دو عضو دارد. مجموعه‌ی $(B - A)$ چند عضو دارد؟

۵. اگر $A = \left\{x \middle| \frac{x}{2} \in Z\right\}$ و $B = \left\{x \middle| \frac{x}{4} \in Z\right\}$، مجموعه‌ی $A - B$ را با علائم ریاضی مشخص کنید.

۶. اگر $a = 5^{-3}$ و $b = -5^{2}$، حاصل عبارت $A = \frac{a^{7}b^{3}(a^{2}b^{3})^{-1}}{(a^{-2}b^{2})^{-1}(ab)^{2}}$ را حساب کنید.

۷. جرم هر الکترون تقریباً $9/1 \times 10^{-25}$ گرم است. جرم یک جسم ۲۵۴۹ تنی چند برابر جرم الکترون است؟ حاصل را به صورت نماد علمی بنویسید (هر تن برابر ۱۰۰۰ کیلوگرم است).

۸. مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{4-\sqrt{3}}}$ را گویا کنید.

۹. اگر a و b دو عدد باشند که $a + b = 1$، درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید:

الف) $a^{2} - a = b^{2} - b$

ب) $a(a+1) + b(b+1) = 2(1-ab)$

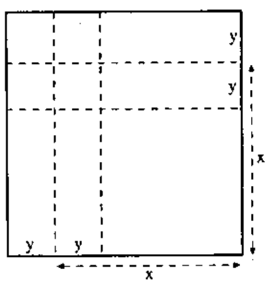
۱۰. حاصل عبارت $x(1-x)(x+1)(x^{2}+x^{6}+x^{4})$ را به‌دست آورید.

۱۱. عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $50x^{2} - 30xy - 56y^{2}$

ب) $ab(a-b) + bc(b-c) + ac(c-a)$

۱۲. تساوی $(x+y)^{2} - (x-y)^{2} = 4xy$ را به کمک شکل زیر ثابت کنید.



ریاضیات ۲

هوشنگ شرقی

۱. معادله‌های زیر را حل کنید:

الف) $\frac{3x-2}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} = \frac{4x+3}{x+5}$

ب) $\sqrt{4x+1} + \sqrt{x-1} = \sqrt{8x}$

۲. مجموعه جواب‌های هریک از نامعادله‌های زیر را به‌دست آورید:

الف) $\frac{3x}{x+2} + \frac{4}{x-2} \geq \frac{9}{x^{2}-4}$

ب) $-1 \leq \frac{3x-1}{x-2} \leq 1$

۳. معادله‌ی درجه دوم $3mx^{2} + 2mx + (1-m) = 0$ مفروض است. حدود m را طوری به‌دست آورید که معادله‌ی فوق دو ریشه حقیقی منفی داشته باشد.

۴. دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{4-x^{2}} + \sqrt[4]{\frac{x^{2}-1}{x}}$ را به‌دست آورید.

۵. نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x-[x]}{[x]-1}$ را در بازه‌ی $[-2,3)$ رسم کنید.

۶. نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x-1 & x > 1 \\ 2-x & -1 \leq x \leq 1 \\ -2x & x < -1 \end{cases}$ را رسم کنید و از روی آن یک‌به‌یک و پوشایی f را تحقیق کنید. هم‌چنین مقدار $f(f(f(\frac{1}{2})))$ را به‌دست آورید.

۷. نشان دهید تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $f(x) = x(x^{2} - 3x + 3)$ معکوس‌پذیر است و ضابطه‌ی معکوس آن را به‌دست آورید.

۸. ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض است. ماتریس دو در دوی X را طوری بیابید که داشته باشیم:

$$A^{2} + A^{-1} = A^{3} + AX$$

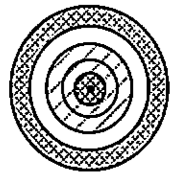
۹. m را طوری بیابید که دستگاه معادلات زیر اولاً ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد، ثانیاً بی‌شمار جواب داشته باشد.

$$\begin{cases} mx + (m+1)y = m-1 \\ (m+2)x + (4m-2)y = m \end{cases}$$

هندسه‌ی ۱

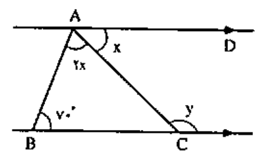
محمدهاشم رستمی

۱ . در شکل، پنج دایره‌ی هم‌مرکز و به شعاع‌های a، ۲a، ۳a، ۴a و ۵a دیده می‌شوند. مساحت کدام یک از قسمت‌های هاشورخورده بیشتر است؟



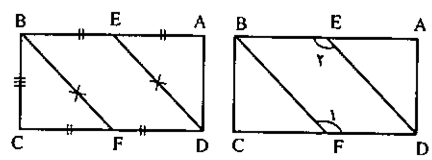
۲ . به ازای چه مقدارهایی از پارامتر m، مقادیر $m-1$، $2m+3$ و ۵، می‌توانند ضلع‌های یک مثلث متساوی‌الساقین باشند؟

۳ . اندازه‌ی x و y را با توجه به شکل زیر تعیین کنید. AD موازی BC است.



۴ . در شکل داده شده:

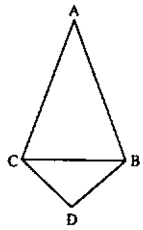
الف) $\hat{2}=\hat{1}$ ، BF=DE و BF نیم‌ساز زاویه‌ی B و DE نیم‌ساز زاویه‌ی D و $\hat{B}=\hat{D}=90^\circ$ است. ثابت کنید: BC=AD



ب) BC=AD ، E وسط AB ، F وسط CD ، AB=CD و BF=DE است.

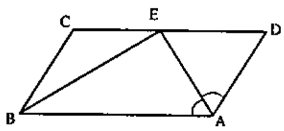
ثابت کنید $\hat{A}=\hat{C}$.

۵ . اگر BC قاعده‌ی مشترک دو مثلث متساوی‌الساقین ABC و DBC باشد، مثلث‌های هم‌نهشت ایجادشده را مشخص کنید و دلیل هم‌نهشتی آن‌ها را بنویسید.



۶ . مجموع زاویه‌های درونی یک nضلعی محدب 1440° است. مجموع زاویه‌های برونی این nضلعی چه‌قدر است؟

۷ . ABCD متوازی‌الاضلاعی است که در آن AB = ۲BC است. نیم‌ساز زاویه‌ی A، ضلع CD را در نقطه‌ی E قطع می‌کند. ثابت کنید:

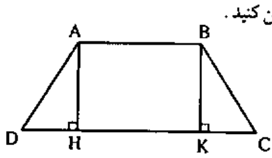


الف) BE نیم‌ساز زاویه‌ی $A\hat{B}C$ است.

ب) مثلث AEB در رأس E قائم‌الزاویه است.

۸ . عدد مساحت یک لوزی را بیابید که مساحت آن با $x^2+2x+16$ ، یک قطرش با $x+5$ و قطر دیگرش با $2x$ مشخص شده باشد.

۹ . مساحت ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین ABCD را که AH و BK ارتفاع آن هستند، در هریک از حالت‌های زیر تعیین کنید.



الف) AB = ۱۲ ، CD = ۲۴ ، AD = ۱۰

ب) AC = ۲۵ ، AH = ۱۵ ، BC = ۱۸

۱۰ . اندازه‌ی x و y را در هریک از موارد زیر تعیین کنید:

الف) $\frac{x}{3}=\frac{y-2}{5}=\frac{1}{2}$

ب) $\frac{x-y}{5}=\frac{x+y}{7}=1$

حسابان ۱

احمد قندهاری

۱ . تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor$ را در بازه‌ی $[-3,3]$ رسم کنید. سپس حدهای $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}f(x)$ را بیابید.

۲ . تابع با ضابطه‌ی زیر

$$f(x)=(a-1)x^3+(a-2)x^2+(ab-8)x+(a-b+4)$$

مفروض است. a و b را چنان بیابید که: اولاً، تابع f فرد باشد. ثانیاً، تابع f زوج باشد.

۳ . اگر صفرهای دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=x^2+5x+4$ و $g(x)=ax^2+bx+6$ مساوی باشند، مقدار عددی a و b را بیابید.

۴ . ثابت کنید: $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$

۵ . صحت اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha+\sin^2\alpha.\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

۶ . در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=5x-1$ ، اگر $x\to 1^-$ باشد، آن‌گاه: $f(x)\to 4$. اگر بخواهیم $|f(x)-4|<\frac{1}{200}$ باشد، آن‌گاه حدود x را بیابید.

۷ . اگر f تابعی یک به یک باشد و داشته باشیم: $g(x)=\frac{2+f(x)}{2-f(x)}$ ، آن‌گاه $g^{-1}(x)$ را بیابید.

۸ . حاصل $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}+x-5}{\sqrt{x+6}-3}$ را بیابید.

۹ . حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x)$ را بیابید.

۱۰ . تابع با ضابطه‌ی زیر مفروض است. a و b را چنان بیابید که تابع f در $x=1$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+b|x| \ , & x<1 \\ \left\lfloor x-\frac{7}{2}\right\rfloor \ , & x=1 \\ a\sin(x-1)+b\lfloor x+1\rfloor \ , & x>1 \end{cases}$$

جبر و احتمال

حمیدرضا امیری

۱. با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید:

$5^n - 4n - 1 = 16r \qquad r \in Z \qquad n \in \mathbb{N}$

۲. با ارائه مثال نقض هر یک از احکام زیر را رد کنید.

الف: اگر a و b و c عدد اول باشند، آن‌گاه a+b+c نیز اول است.

ب: $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^2 < n!$

ج: اگر n مضرب ۴ باشد آن‌گاه ۳n مضرب ۸ است.

د: $a < b, c < d \Rightarrow a - c < b - d$

۳. با استفاده از اثبات بازگشتی درستی نامساوی زیر را ثابت کنید:

$2x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x + 6 > 0$

۴. با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید حاصل ضرب هر سه عدد صحیح متوالی مضرب ۳ است.

۵. با استفاده از برهان خلف ثابت کنید:

اگر $n \in Z$، n^2 مضرب ۵ باشد، n نیز مضرب ۵ است.

۶. در یک جمع برای آن‌که حداقل ۳ نفرشان در یک روز هفته و در یک ماه سال به دنیا آمده باشند بایستی حداقل چند نفر باشند؟

۷. اگر یک مجموعه ۲۷ عضوی از میان اعداد طبیعی از ۱ الی ۵۲ انتخاب کنیم ثابت کنید حداقل ۲ عضو انتخابی نسبت به هم اولند.

۸. اگر $n \in Z, A_n = (\frac{-1}{n}, \frac{2n+1}{n})$ مطلوب است

الف: $\bigcup_{i=3}^{5} A_i$

ب: $A_4 - \bigcup_{i=2}^{5} A_i$

۹. با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید.

$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

$(A \cup B) - (B \cup C) = (A - B) - C$

۱۰. تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی یک مجموعه ۲n عضوی از تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی یک مجموعه n عضوی ۱۲ تا بیشتر است. n را بیابید.

۱۱. اگر دو زوج مرتب $(\{5,b,c\},(0,a))$ و $(\{b\},(d-1,4))$ برابر باشند مطلوب است مقادیر a و b و c و d.

۱۲. درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

۱۳. اگر $A = \{x^2 | x \in z, -3 \le x \le 3\}$ و $B = \{x | x \in z, |x| < 2\}$

الف: رابطه زیر را که از A در B تعریف شده با اعضاء مشخص کنید.

$aRb \Leftrightarrow a^2 | b$

ب: چند رابطه روی مجموعه توانی B می‌توان تعریف کرد؟

۱۴. اگر مجموعه A دارای ۲۵ عضو و مجموعه $A^2 - B^2$ دارای ۵۴۴ عضو باشد آن‌گاه مجموعه $A \cap B$ چند عضوی است؟

۱۵. نمودار رابطه زیر را رسم کنید.

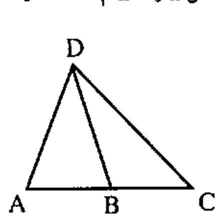
$R = \{(x,y) | x \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \le 2, |x| > |y|\}$

هندسه‌ی ۲

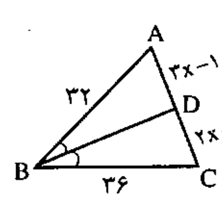
محمدهاشم رستمی

۱. با استفاده از استدلال استقرایی، رابطه‌ای را که مجموع تعداد ضلع‌ها و قطرهای یک nضلعی محدب را بیان می‌کند، حدس بزنید و چگونگی انجام کار را بنویسید.

۲. در مثلث ACD (شکل زیر) داریم AC=CD و AD=DB. ثابت کنید $A\hat{B}D > A\hat{D}B$.



۳. در شکل، BD نیم‌ساز زاویه‌ی B از مثلث ABC است. اندازه‌ی محیط مثلث ABC را تعیین کنید.



۴. مجموع فاصله‌ی هر نقطه واقع در درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن مساوی $12\sqrt{3}$ سانتی‌متر است. اندازه‌ی مساحت این مثلث چه‌قدر است؟

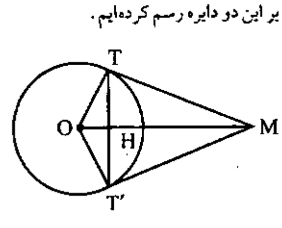
۵. ثابت کنید که در هر مثلث، میانه‌ی نظیر یک ضلع از نصف مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر و از نصف قدر مطلق تفاضل آن دو ضلع بزرگ‌تر است.

۶. مثلث ABC را با داده‌های BC=a، $\hat{B} = \alpha$ و ارتفاع $AH = h_a$ رسم کنید.

۷. در دایره‌ی C(5,10) دو وتر موازی و مساوی AB و CD ترتیب به طول‌های ۱۰ و $10\sqrt{3}$ رسم شده‌اند. اندازه‌ی کمان‌های $\widehat{AC}$ و $\widehat{BD}$ را تعیین کنید.

۸. دو دایره‌ی C و C′ هر کدام از مرکز دیگری می‌گذرند. در صورتی که خط‌المرکزین این دو دایره ۵ سانتی‌متر باشد، نقطه‌ای در صفحه‌ی این دو دایره تعیین کنید که وتر رسم شده از این نقطه در دایره‌ی C، به طول ۸ سانتی‌متر و وتر رسم شده از این نقطه در دایره‌ی C′ به طول ۶ سانتی‌متر باشد.

۹. از نقطه‌ی M که به فاصله‌ی ۲۰ سانتی‌متر از مرکز دایره‌ی C(5,12) قرار دارد، دو مماس MT و MT′ را بر این دو دایره رسم کرده‌ایم.



تعیین کنید:

۱. طول مماس‌های MT و MT′

۲. طول وتر TT′

۳. پاره‌خط OH

۴. اندازه‌ی زاویه‌ی $T\hat{M}T'$

پاسخ تشریحی مسائل

ریاضیات ۱

۱. برای آن‌که تشخیص دهیم، از دو عدد گویای مثبت کدام یک بزرگ‌تر است، کافی است آن‌ها را به شکلی بنویسیم که مخرج مساوی داشته باشند. سپس هر عدد که صورتش بزرگ‌تر بود، بزرگ‌تر است. بنابراین، مخرج هر دو کسر را به ۲۰ تبدیل می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{۲}{۵}=\frac{۸}{۲۰}\\ ۰/۳=\frac{۳}{۱۰}=\frac{۶}{۲۰}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{۶}{۲۰}<\frac{a}{۲۰}<\frac{۸}{۲۰}\Rightarrow ۶<a<۸$$

۲.

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\Rightarrow ad<bc\Rightarrow ab+ad<ab+bc$$

$$\Rightarrow a(b+d)<b(a+c)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d} \qquad (۱)$$

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\Rightarrow ad<bc\Rightarrow ad+cd<bc+cd$$

$$\Rightarrow d(a+c)<c(b+d)$$

$$\Rightarrow \frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d} \qquad (۲)$$

$$(۱)\text{ و }(۲)\Rightarrow \frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$$

۳. با دقت دو رقم اعشار داریم:

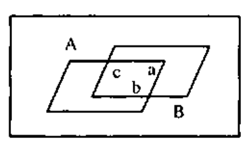
$\sqrt{۳}=۱/۷۳$ و $\sqrt{۱۵}=۳/۸۷$ و $\sqrt{۲۴}=۳/۸۹$ و $\sqrt{۱۴۵}=۱۲/۰۴$

$$\frac{\left(|۳-\sqrt{۳}|-|۴-\sqrt{۲۴}|\right)\times\sqrt{۱۵}}{\sqrt{۱۴۵}}$$

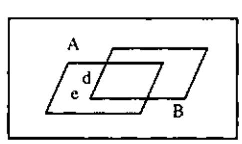
$$=\frac{\left(|۳-۱/۷۳|-|۴-۴/۸۹|\right)\times ۳/۸۷}{۱۲/۰۴}$$

$$=\frac{(۱/۲۷-۰/۸۹)\times ۳/۸۷}{۱۲/۰۴}=\frac{۰/۳۸\times ۳/۸۷}{۱۲/۰۴}=\frac{۱/۴۷}{۱۲/۰۴}=۰/۱۲$$

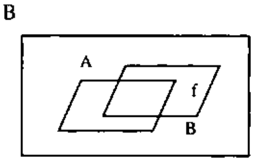
۴. فرض کنیم $A\cup B=\{a,b,c,d,e,f\}$. چون $A\cap B$ سه عضو دارد؛ بنابراین سه عضو دلخواه a، b و c را برای آن در نظر می‌گیریم. هم‌چنین مجموعه‌ی $A-B$ دو عضو دارد. بنابراین دو عضو دلخواه e، d را برای آن در نظر می‌گیریم. درنتیجه $B-A$ فقط می‌تواند یک عضو داشته باشد.



A∩B



A-B



B-A

۵. ابتدا مجموعه‌ها را با اعضای آن‌ها مشخص می‌کنیم:

$$\frac{x}{۲}=k\Rightarrow x=۲k\Rightarrow A=\{۲k|k\in Z\}$$

$$=\{\cdots,-۶,-۴,-۲,۰,۲,۴,۶,\cdots\}$$

$$\frac{x}{۴}=k\Rightarrow x=۴k\Rightarrow A=\{۴k|k\in Z\}$$

$$=\{\cdots,-۸,-۴,۰,۴,۸,\cdots\}$$

$$A-B=\{\cdots,-۶,-۴,-۲,۰,۲,۴,\cdots\}-\{\cdots,-۸,-۴,۰,۴,۸,\cdots\}$$

$$=\{\cdots,-۶,-۲,۲,۶,\cdots\}=\{x|x=۴k-۲,k\in Z\}$$

۶. ابتدا کسر را ساده و سپس مقادیر a و b را جای‌گذاری می‌کنیم.

$$A=\frac{a^{۷}b^{۳}(a^{۲}b^{۲})^{-۱}}{(a^{-۲}b^{۲})^{-۱}(ab)^{۲}}=\frac{a^{۷}b^{۳}(a^{۲})^{-۱}(b^{۲})^{-۱}}{(a^{-۲})^{-۱}(b^{۲})^{-۱}a^{۲}b^{۲}}$$

$$=\frac{a^{۷}b^{۳}a^{-۲}b^{-۲}}{a^{۲}b^{-۲}a^{۲}b^{۲}}=\frac{a^{۵}b}{a^{۴}b^{۰}}=a^{۵-۴}b=ab\xrightarrow{a=۵^{-۳},\,b=-۵^{۳}}$$

$$۵^{-۳}\times(-۵)^{۳}=\frac{۱}{۵^{۳}}\times(-۵)^{۳}=-\frac{۵^{۳}}{۵^{۳}}=-۱$$

۷. برای این‌که $۹/۱\times۱۰^{-۲۵}$ g را به کیلوگرم (kg) تبدیل کنیم، کافی است این عدد را بر ۱۰۰۰ تقسیم کنیم:

$$\frac{۹/۱\times۱۰^{-۲۵}}{۱۰۰۰}=۹/۱\times۱۰^{-۲۵-۳}=۹/۱\times۱۰^{-۲۸}\,kg \qquad (۱)$$

برای تبدیل ۲۵۴۹ تن به کیلوگرم (kg) کافی است این عدد را در ۱۰۰۰ ضرب کنیم:

$$۲۵۴۹\times۱۰۰۰=۲/۵۴۹\times۱۰^{۳}\times۱۰^{۳}=۲/۵۴۹\times۱۰^{۶}\,kg \qquad (۲)$$

برای این‌که تشخیص دهیم جرم جسم چند برابر جرم الکترون است، کافی است نسبت زیر را تشکیل دهیم:

$$\frac{۲/۵۴۹\times۱۰^{۶}}{۹/۱\times۱۰^{-۲۸}}=\frac{۲/۵۴۹}{۹/۱}\times۱۰^{۶-(-۲۸)}=۲۳/۱۹۵۹\times۱۰^{۳۴}$$

$$=۲/۳۱۹۵۹\times۱۰^{۳۵}$$

۸.

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴-\sqrt{۳}}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴-\sqrt{۳}}}\times\frac{\sqrt[۳]{(۴-\sqrt{۳})^{۲}}}{\sqrt[۳]{(۴-\sqrt{۳})^{۲}}}=\frac{\sqrt[۳]{(۴-\sqrt{۳})^{۲}}}{\sqrt[۳]{(۴-\sqrt{۳})^{۳}}}$$

$$=\frac{\sqrt[۳]{(۴-\sqrt{۳})^{۲}}}{۴-\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt[۳]{(۴-\sqrt{۳})^{۲}}}{۴-\sqrt{۳}}\times\frac{۴+\sqrt{۳}}{۴+\sqrt{۳}}$$

$$=\frac{(۴+\sqrt{۳})\sqrt[۳]{(۴-\sqrt{۳})^{۲}}}{۱۶-۳}=\frac{(۴+\sqrt{۳})\sqrt[۳]{(۴-\sqrt{۳})^{۲}}}{۱۳}$$

۹. الف) دو طرف برابری $a+b=۱$ را در $(a-b)$ ضرب می‌کنیم:

$$a+b=۱\Rightarrow(a-b)(a+b)=(a-b)$$

$$\Rightarrow a^{۲}-b^{۲}=a-b$$

$$\Rightarrow a^{۲}-a=b^{۲}-b$$

ب) دو طرف برابری $a+b=۱$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\left.\begin{array}{l}a+b=۱\\ (a+b)^{۲}=۱\end{array}\right\}\oplus\Rightarrow(a+b)^{۲}+(a+b)=۲$$

$$\Rightarrow a^{۲}+۲ab+b^{۲}+a+b=۲$$

$$\Rightarrow(a^{۲}+a)+(b^{۲}+b)=۲-۲ab$$

$$\Rightarrow a(a+۱)+b(b+۱)=۲(۱-ab)$$

۱۰.

$$x(۱-x)(x+۱)(x^{۲}+x^{۶}+x^{۴})=x(۱-x^{۲})\left[x^{۲}(۱+x^{۴}+x^{۲})\right]$$

$$=x\times x^{۲}\left[(۱-x^{۲})(۱+x^{۲}+x^{۴})\right]$$

$$=x^{۳}(۱-x^{۶})=x^{۳}-x^{۹}$$

۱۱.

الف)

$$۵۰x^{۲}-۳۰xy-۵۶y^{۲}=۲(۲۵x^{۲}-۱۵xy-۲۸y^{۲})$$

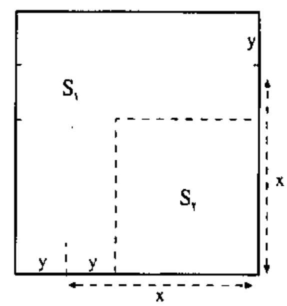
$$=۲\left[(۵x)^{۲}-۳y(۵x)-۲۸y^{۲}\right]$$

$$=۲(۵x-۷y)(۵x+۴y)$$

ب)

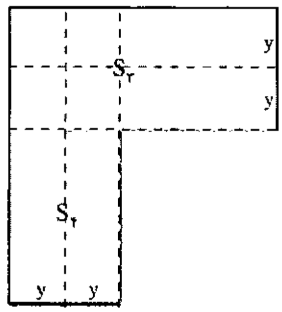
$$ab(a-b)+bc(b-c)+ac(c-a)$$
$$=a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+ac(c-a)$$
$$=a^2b-bc^2-ab^2+b^2c+ac(c-a)$$
$$=b(a^2-c^2)-b^2(a-c)-ac(a-c)$$
$$=(a-c)\left[b(a+c)-b^2-ac\right]$$
$$=(a-c)(ba+bc-b^2-ac)$$
$$=(a-c)(ba-ac+bc-b^2)$$
$$=(a-c)\left[a(b-c)-b(b-c)\right]=(a-c)(b-c)(a-b)$$

۱۲. طول ضلع مربع بزرگ برابر $x+y$ است، پس مساحت آن برابر است با $S_1=(x+y)^2$. طول ضلع مربع کوچک برابر با $x-y$ است. پس مساحت این مربع برابر است با $S_2=(x-y)^2$.



در صورتی که این دو را از هم کم کنیم، سمت چپ تساوی به دست می‌آید.

$$S_1-S_2=(x+y)^2-(x-y)^2 \qquad (1)$$



اکنون مساحت دو مستطیل سایه‌خورده در شکل قبل را محاسبه می‌کنیم:

$$S_3=(x+y)(2y)$$
$$S_4=(x-y)(2y)$$
$$\Rightarrow S_3+S_4=(x+y)(2y)+(x-y)(2y)$$
$$=2xy+2y^2+2xy-2y^2$$
$$=4xy \qquad (2)$$

با توجه به روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$$

ریاضیات ۲

۱.

الف) $$\frac{(x+2)(3x-2)+(x+1)^2}{(x+1)(x+2)}=\frac{4x+3}{x+5}$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2-2x+6x-4+x^2+2x+1}{x^2+3x+2}=\frac{4x+3}{x+5}$$
$$\Rightarrow (4x^2+6x-3)(x+5)=(x^2+3x+2)(4x+3)$$
$$\Rightarrow 4x^3+20x^2+6x^2+30x-3x-15=4x^3+3x^2+12x^2+9x+8x+6$$
$$\Rightarrow 26x^2+27x-15=15x^2+17x+6 \Rightarrow 11x^2+10x-21=0$$
$$\Rightarrow x=1 \text{ یا } x=-\frac{21}{11}$$

ب) $$(\sqrt{4x+1}+\sqrt{x-1})^2=(\sqrt{8x})^2$$

$$\Rightarrow 4x+1+x-1+2\sqrt{4x^2-3x-1}=8x$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{4x^2-3x-1}=3x \Rightarrow 4(4x^2-3x-1)=9x^2$$
$$\Rightarrow 7x^2-12x-4=0 \quad \Delta=144-4(7)(-4)=256$$
$$\Rightarrow x=\frac{12\pm16}{14} \Rightarrow x_1=2\ ,\ x_2=-\frac{2}{7}$$

پاسخ $x_2=-\frac{2}{7}$ غیر قابل قبول است. (چرا؟) و معادله تنها یک ریشه‌ی $x=2$ دارد.

۲.

الف) $$\frac{3x(x-2)+4(x+2)}{(x+2)(x-2)}\geq\frac{9}{(x-2)(x+2)}$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2-6x+4x+8-9}{(x+2)(x-2)}\geq 0 \Rightarrow \frac{3x^2-2x-1}{(x+2)(x-2)}\geq 0$$

$3x^2-2x-1=0 \Rightarrow x=1$ یا $x=-\frac{1}{3}$ و $(x+2)(x-2)=0$

$\Rightarrow x=2$ یا $x=-2$

x	$-\infty$ — -2	-2 — $-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$ — 1	1 — 2	2 — $+\infty$
$3x^2-2x-1$	+	+	−	+	+
$x+2$	−	+	+	+	+
$x-2$	−	−	−	−	+
P	+	−	+	−	+

$$\Rightarrow x<-2 \text{ یا } -\frac{1}{3}\leq x\leq 1 \text{ یا } x>2$$

ب) $$-1\leq\frac{3x-1}{x-2}\leq 1 \Rightarrow \left|\frac{3x-1}{x-2}\right|\leq 1 \Rightarrow |3x-1|\leq|x-2|$$

$$\Rightarrow (3x-1)^2\leq(x-2)^2 \Rightarrow (3x-1)^2-(x-2)^2\leq 0$$
$$\Rightarrow (3x-1+x-2)(3x-1-x+2)\leq 0 \Rightarrow (4x-3)(2x+1)\leq 0$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{3}{4}$$

۳. $$\Delta>0\ ,\ x_1+x_2<0\ ,\ x_1x_2>0$$

$$\Rightarrow \Delta=4m^2-12m(1-m)>0 \Rightarrow 16m^2-12m>0$$
$$\Rightarrow 4m(4m-3)>0 \Rightarrow m>\frac{3}{4} \text{ یا } m<0 \qquad (1)$$
$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=\frac{-2m}{3m}=-\frac{2}{3}<0 \qquad (2)$$
$$x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{1-m}{3m}>0 \Rightarrow 0<m<1 \qquad (3)$$

(۱) و (۲) و (۳) $\Rightarrow \boxed{\frac{3}{4}<m<1}$

۴.

$$\begin{cases} 4-x^2\geq 0 \\ \dfrac{x^2-1}{x}\geq 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 4-x^2=0\Rightarrow x=\pm 2 \\ x^2-1=0\Rightarrow x=\pm1\ ,\ x=0 \end{matrix}$$

x	$-\infty$ — -2	-2 — -1	-1 — 0	0 — 1	1 — 2	2 — $+\infty$
$P_1=4-x_2$	−	+	+	+	+	−
x^2-1	+	+	−	−	+	+
x	−	−	−	+	+	+
$P_2=\frac{x^2-1}{x}$	−	−	+	−	+	+
$P_1\geq 0 , P_2\geq 0$						

$$\Rightarrow D_f=[-1,0)\cup[1,2]$$

۵.

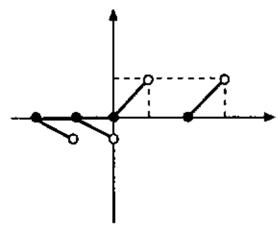
$$-2 \le x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow y = \frac{x+2}{-3} \qquad \begin{array}{c|cc} x & -2 & -1 \\ \hline y & 0 & \frac{-1}{3} \end{array}$$

$$-1 \le x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = \frac{x+1}{-2} \qquad \begin{array}{c|cc} x & -1 & 0 \\ \hline y & 0 & \frac{-1}{2} \end{array}$$

$$0 \le x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = -x \qquad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 0 & 1 \end{array}$$

$$1 \le x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = -$$

$$2 \le x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow y = x - 2 \qquad \begin{array}{c|cc} x & 2 & 3 \\ \hline y & 0 & 1 \end{array}$$

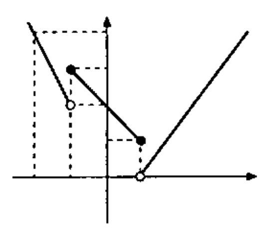


۶. با توجه به نمودار تابع، واضح است که این تابع نه یک‌به‌یک است و نه پوشا. با درنظر گرفتن ضابطه‌ی تابع داریم:

$$f(\tfrac{1}{2}) = 2 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}$$

$$\Rightarrow f(f(\tfrac{1}{2})) = f(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{3}{2} - 1 = \tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(f(f(\tfrac{1}{2}))) = f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{3}{2}$$



۷. نشان می‌دهیم که f یک‌به‌یک است:

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Rightarrow x_1(x_1^2 - 3x_1 + 3) = x_2(x_2^2 - 3x_2 + 3)$$

$$\Rightarrow x_1^3 - 3x_1^2 + 3x_1 = x_2^3 - 3x_2^2 + 3x_2$$

$$\Rightarrow x_1^3 - 3x_1^2 + 3x_1 - 1 = x_2^3 - 3x_2^2 + 3x_2 - 1 \Rightarrow (x_1 - 1)^3 = (x_2 - 1)^3$$

$$\Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

و برای تعیین ضابطه‌ی معکوس f، نقش‌های x و y را عوض می‌کنیم:

$$x = y(y^2 - 3y + 3) \Rightarrow x = y^3 - 3y^2 + 3y$$

$$\Rightarrow x - 1 = y^3 - 3y^2 + 3y - 1 \Rightarrow x - 1 = (y-1)^3$$

$$\Rightarrow y - 1 = \sqrt[3]{x-1} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x-1} + 1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1} + 1$$

۸.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 2 \times 2 - 3 \times 1 = 1 \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2.A = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ a+2c & b+2d \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ a+2c & b+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 & -36 \\ -12 & -17 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+3c = -17 \\ a+2c = -12 \end{cases} \begin{cases} 2b+3d = -36 \\ b+2d = -17 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = 2, & c = -7 \\ b = -21, & d = 2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 2 & -21 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

۹.

اولاً:

$$\frac{m}{m+2} = \frac{m+1}{4m-2} \neq \frac{m-1}{m}$$

$$\Rightarrow 4m^2 - 2m = m^2 + 3m + 2 \Rightarrow 3m^2 - 5m - 2 = 0$$

$$\Delta = 25 + 24 = 49$$

$$m = \frac{5 \pm 7}{6} \Rightarrow m = 2, \quad m = -\frac{1}{3}$$

به ازای $m = -\frac{1}{3}$ دستگاه غیرممکن است و ریشه‌ی حقیقی ندارد.

ثانیاً: به ازای $m = 2$ تساوی $\frac{m}{m+2} = \frac{m+1}{4m-2} = \frac{m-1}{m}$ برقرار شده و دستگاه مبهم است و بی‌شمار جواب دارد.

هندسه‌ی ۱

۱. مساحت دو قسمت هاشورخورده را محاسبه می‌کنیم.

قسمت هاشورخورده در وسط، مساحت دایره‌ای به شعاع $3a$ است، پس مساحت آن برابر است با:

$$\pi(3a)^2 = 9\pi a^2$$

قسمت هاشورخورده‌ی دیگر، تاج دایره‌ی حاصل از دو دایره‌ی هم‌مرکز به شعاع‌های $4a$ و $5a$ است، پس مساحت آن برابر است با:

$$\pi(5a)^2 - \pi(4a)^2 = 25a^2 - 16a^2 = 9\pi a^2$$

پس مساحت‌های این دو قسمت با هم مساوی هستند.

۲. شرط آن‌که سه عدد داده‌شده‌ی a، b و c، اندازه‌ی ضلع‌های یک مثلث متساوی‌الساقین باشد، آن است که اولاً: نامساوی مضاعف $|b-c| < a < b+c$ برقرار باشد. ثانیاً: $b=c$ یا $c=a$ یا $a=b$ باشد.

بنابراین با فرض $a = m-1$، $b = 2m+3$ و $c = 5$ باید داشته باشیم:

$$(\mathrm{I})\begin{cases} |2m+3-5| < m-1 < 2m+3+5 \\ 2m+3 = 5 \end{cases}$$

$$\text{یا } (\mathrm{II})\begin{cases} |2m+3-5| < m-1 < 2m+3+5 \\ m-1 = 5 \end{cases}$$

$$\text{یا } (\mathrm{III})\begin{cases} |2m+3-5| < m-1 < 2m+3+5 \\ m-1 = 2m+3 \end{cases}$$

یکی از این دستگاه‌ها را حل می‌کنیم. داریم:

$$\begin{cases} |2m-2| < m-1 < 2m+8 \\ 2m = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-1 > |2m-2| \\ m-1 < 2m+8 \\ m = 1 \end{cases}$$

دستگاه جواب ندارد

$$\Rightarrow m > 1 \Rightarrow \begin{cases} m-1 > 2m-2 \\ m > -9 \\ m = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > -9 \\ m = 1 \end{cases}$$

دستگاه جواب ندارد.

$$\Rightarrow m < 1 \Rightarrow \begin{cases} m-1 > -2m+2 \\ m > -9 \\ m = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m > -9 \\ m = 1 \end{cases}$$

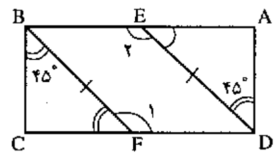
پس در حالتI، به ازای هیچ مقداری از m مثلث نمی‌تواند متساوی‌الساقین باشد. حالت‌های II و III را خودتان حل کنید.

۳. داریم:

$$AD \parallel BC \Rightarrow A\hat{C}B = x \quad \text{و} \quad \Delta ABC: \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow ۲x + ۷۲^\circ + x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۳x = ۱۰۸ \Rightarrow x = ۳۶^\circ$$
$$x + y = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۳۶^\circ + y = ۱۸۰^\circ \Rightarrow y = ۱۴۴^\circ$$

۴.

الف) دو مثلث ADE و CBF به حالت (ز ض ز) هم‌نهشت هستند؛ زیرا داریم:



$$\begin{cases} A\hat{E}D = ۱۸۰^\circ - \hat{۲} \\ B\hat{F}C = ۱۸۰^\circ - \hat{۱} \Rightarrow A\hat{E}D = B\hat{F}C \\ \hat{۱} = \hat{۲} \end{cases}$$

$$A\hat{D}E = F\hat{B}C = \frac{۹۰^\circ}{۲} = ۴۵^\circ \;,\; BF = DE$$

از هم‌نهشت بودن این دو مثلث نتیجه می‌شود: BC=AD

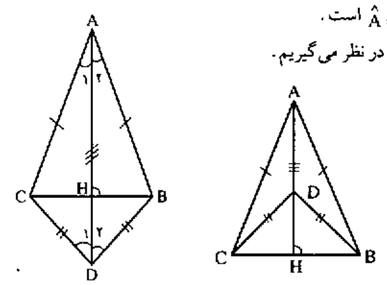
ب) دو مثلث ADE و BCF به حالت (ض ض ض) هم‌نهشت‌اند، زیرا داریم:

بنا به فرض BC=AD، بنابه فرض BF=DE

$$AB = CD \Rightarrow \frac{AB}{۲} = \frac{CD}{۲} \Rightarrow AE = CF$$

در نتیجه $\hat{A} = \hat{C}$ است.

۵. دو حالت در نظر می‌گیریم.



حالت اول) دو مثلث متساوی‌الساقین در دو طرف قاعده‌ی مشترک BC باشند. از A به D وصل می‌کنیم و نقطه‌ی برخورد AD با قاعده‌ی BC را H می‌نامیم. مثلث‌های ABD و ACD به حالت برابری سه ضلع هم‌نهشت‌اند. زیرا ضلع AD در هر دو مشترک است و AB=AC و BD=DC است. مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی ABH و ACH، هم‌چنین مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی BHD و CHD نیز هم‌نهشت هستند، زیرا می‌دانیم که به‌دلیل نیم‌ساز بودن AD برای زاویه‌های A و D (به دلیل تساوی‌های $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$ و $\hat{D}_۱ = \hat{D}_۲$)، AD عمودمنصف BC است)

حالت دوم) دو مثلث در یک طرف قاعده‌ی مشترک BC باشند. در این حالت نیز دو مثلث ABD و ACD به حالت (ض ض ض) هم‌نهشت هستند. اکنون اگر AD را ادامه دهیم تا ضلع BC را در نقطه‌ی H قطع کند، مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی ABH و ACH، هم چنین مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی DBH و DCH هم‌نهشت‌اند. زیرا در این حالت نیز AD عمودمنصف قاعده‌ی BC است.

در واقع در هر دو حالت، خطی که رأس‌های دو مثلث متساوی‌الساقین ABC و DBC را به هم وصل می‌کند، عمودمنصف قاعده‌ی BC است.

نکته: در صورتی که نقطه‌ی برخورد AD با قاعده‌ی مشترک BC را در نظر نگیریم، تنها دو مثلث ABD و ACD (در هر دو حالت) به دلیل برابری سه ضلع، هم‌نهشت هستند

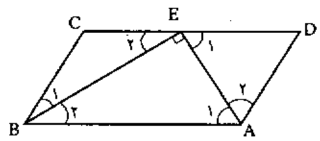
۶. مجموع زاویه‌های خارجی هر n ضلعی محدب ۳۶۰° است. بنابراین نیازی به محاسبه‌ی تعداد ضلع‌های این n‌ضلعی محدب نیست.

۷.

الف) چون AE نیم‌ساز زاویه‌ی A است، پس $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$ است. اما $\hat{A}_۱ = \hat{E}_۱$ است، زیرا AB موازی CD و AE قاطع این دو خط است. پس $\hat{A}_۲ = \hat{E}_۱$ و درنتیجه مثلث ADE متساوی‌الساقین هستند؛ یعنی AD=DE. اما $AD = BC = \frac{۱}{۲}AB = \frac{۱}{۲}CD$ است، پس $DE = \frac{۱}{۲}CD$، یعنی E وسط ضلع CD است. از آن‌جا خواهیم داشت:

$$ED = CE = \frac{۱}{۲}CD = \frac{۱}{۲}AB = CB$$

از CE=CB نتیجه می‌شود که $\hat{E}_۲ = \hat{B}_۱$ است، اما به‌دلیل موازی بودن CD و AB، $\hat{E}_۲ = \hat{B}_۲$ است. در نتیجه $\hat{B}_۱ = \hat{B}_۲$ است؛ یعنی BE نیم‌ساز زاویه‌ی B است.



ب) بنا به یکی از ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع داریم:

$$\hat{A}+\hat{B}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱+\hat{A}_۲+\hat{B}_۱+\hat{B}_۲=۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow ۲\hat{A}_۱+۲\hat{B}_۲=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱+\hat{B}_۲=۱۸۰^\circ \quad (۱)$$

اما در مثلث ABE داریم:

$$\hat{A}_۱+\hat{B}_۲+A\hat{E}B=۱۸۰^\circ \quad (۲)$$

از رابطه‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌شود:

$$A\hat{E}B=۹۰^\circ$$

یعنی مثلث AEB در رأس قائم‌الزاویه است.

۸. اگر مساحت لوزی را با S و قطرهای آن را با d و d′ نشان دهیم، داریم:

$$S = x^۲ + ۲x + ۱۶ \;,\; d = x + ۵ \;,\; d' = ۲x \;,\; S = \frac{۱}{۲}d.d'$$
$$\Rightarrow x^۲ + ۲x + ۱۶ = \frac{۱}{۲}(x+۵)(۲x) \Rightarrow x^۲ + x + ۱۶ = x^۲ + ۵x$$
$$\Rightarrow ۴x = ۱۶ \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow S = ۱۶+۸+۱۶ = ۴۰ \text{ واحد سطح}$$

۹. می‌دانیم که در ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین ABCD، به‌دلیل هم‌نهشتی دو مثلث ADH و BCK، DH=CK و در نتیجه $CD = AB - ۲DH$ است. از آن‌جا داریم:

الف)

$$CD - AB = ۲DH \Rightarrow ۲۴ - ۱۲ = ۲DH$$
$$\Rightarrow DH = ۶ \;,\; AD^۲ = AH^۲ + DH^۲$$
$$۱۰۰ = AH^۲ + ۳۶ \Rightarrow AH^۲ = ۶۴ \Rightarrow AH = ۸$$
$$S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{۱}{۲}(AB+CD)AH = \frac{۱}{۲}(۱۲+۲۴)\times\frac{۸}{۲} = ۷۲ \text{ واحد سطح}$$

ب)

$$AC^۲ = AH^۲ + CH^۲ \Rightarrow ۶۲۵ = ۲۲۵ + CH^۲$$
$$\Rightarrow CH^۲ = ۴۰۰ \Rightarrow CH = ۲۰$$
$$AD = BC = ۱۸ \;,\; AD^۲ = AH^۲ + DH^۲ \Rightarrow ۳۲۴ = ۲۲۵ + DH^۲$$
$$\Rightarrow DH^۲ = ۹۹ \Rightarrow DH = ۳\sqrt{۱۱} \Rightarrow CD = CH + HD = ۲۰ + ۳\sqrt{۱۱}$$
$$AB = CD - ۲DH = ۲۰ + ۳\sqrt{۱۱} - ۶\sqrt{۱۱} = ۲۰ - ۳\sqrt{۱۱}$$
$$S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{۱}{۲}(AB+CD)\times\frac{AH}{۲} = \frac{۱}{۲}(۲۰+۳\sqrt{۱۱}+۲۰-۳\sqrt{۱۱})\times\frac{۱۵}{۲}$$
$$\Rightarrow S_{\text{ذوزنقه}} = ۱۵۰ \text{ واحد سطح}$$

۱۰.

الف)

$$\frac{x}{۳} = \frac{y-۲}{۵} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{x}{۳} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = \frac{۳}{۲}$$
$$\frac{y-۲}{۵} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow y - ۲ = \frac{۵}{۲} \Rightarrow y = \frac{۹}{۲}$$

ب)

$$\frac{x-y}{۵} = \frac{x+y}{۷} = ۱$$

$$\begin{cases} \frac{x-y}{۵} = ۱ \\ \frac{x+y}{۷} = ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = ۵ \\ x + y = ۷ \end{cases} \Rightarrow x = ۶ \;,\; y = ۱$$

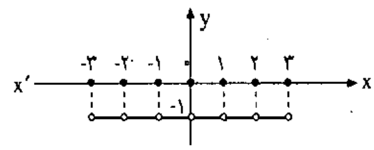
راه دوم: $\frac{(x-y)+(x+y)}{۵+۷} = ۱ \Rightarrow \frac{۲x}{۱۲} = ۱ \Rightarrow x = ۶$

$$\frac{(x-y)-(x+y)}{۵-۷} = ۱ \Rightarrow \frac{-۲y}{-۲} = ۱ \Rightarrow y = ۱$$

حل ۱. داریم: $f(x)=\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor=\begin{cases}0, & x\in Z\\ -1, & x\notin Z\end{cases}$

$\lim_{x\to 2} f(x)=-1$

$\lim_{x\to\sqrt{3}^-} f(x)=-1$



حل ۲. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots$ ، $n\in N$ وقتی فرد است که ضرایب توان‌های زوج x و عدد ثابت معادله، مساوی صفر باشد. و وقتی زوج است که ضرایب توان‌های فرد x مساوی صفر باشد.

$f(x)=(a-1)x^3+(a-2)x^2+(ab-8)x+(a-b+4)$

f فرد باشد: $\begin{cases}a-2=0\\ a-b+4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=6\end{cases}$

f زوج باشد: $\begin{cases}a-1=0\\ ab-8=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=8\end{cases}$

حل ۳. اگر صفرهای دو تابع هم‌درجه، مساوی باشند، باید ضرایب آن‌ها متناسب باشند؛ یعنی:

$\frac{a}{1}=\frac{b}{5}=\frac{6}{4}\Rightarrow\frac{a}{1}=\frac{6}{4}\Rightarrow\boxed{a=\frac{3}{2}}$ و $\frac{b}{5}=\frac{6}{4}\Rightarrow\boxed{b=\frac{15}{2}}$

توجه: می‌توان معادله‌ی $x^2+5x+4=0$ را حل کرد و ریشه‌های آن را در معادله‌ی $ax^2+bx+6=0$ قرار داد.

حل ۴. فرض می‌کنیم $x=\frac{\pi}{7}$ و حاصل عبارت سمت چپ برابر A باشد. پس:

$\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x=A$

دو طرف تساوی را در $2\sin x$ ضرب می‌کنیم. سپس هر جمله‌ی سمت چپ را به حاصل جمع تبدیل می‌کنیم.

$2\cos 2x\sin x+2\cos 4x\sin x+2\cos 6x\sin x=2A\sin x$

داریم:

$2\cos a\sin b=\sin(a+b)-\sin(a-b)$

$\text{عبارت سمت چپ}=\sin 3x-\sin x+\sin 5x-\sin 3x+\sin 7x-\sin 5x=2A\sin x$

$\Rightarrow 2A\sin x=-\sin x+\sin 7x$ و $x=\frac{\pi}{7}$

$2A\sin\frac{\pi}{7}=-\sin\frac{\pi}{7}+\underbrace{\sin\pi}\Rightarrow 2A\sin\frac{\pi}{7}=-\sin\frac{\pi}{7}\Rightarrow A=-\frac{1}{2}$

حل ۵.

$A=\underbrace{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}_{1}+\sin^2\alpha+\sin^2\alpha.\tan^2\alpha$

$A=1+\sin^2\alpha(1+\tan^2\alpha)=1+\sin^2\alpha(\frac{1}{\cos^2\alpha})$

$=1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

حل ۶.

$|f(x)-4|<\frac{1}{200}\Rightarrow|5x-5|<\frac{1}{200}\Rightarrow|x-1|<\frac{1}{1000}$

$x\to 1^-\Rightarrow|x-1|=0<1-x$

$|x-1|<\frac{1}{1000}\Rightarrow 0<1-x<\frac{1}{1000}\xrightarrow{\text{در (۱-) ضرب می‌کنیم}}$

$-\frac{1}{1000}<x-1<0\Rightarrow 1-\frac{1}{1000}<x<1\Rightarrow\frac{999}{1000}<x<1$

حل ۷. $f(x)=y\Rightarrow f^{-1}(y)=x \qquad (1)$

$g(x)=\frac{2+y}{2-y}\Rightarrow g^{-1}(\frac{2+y}{2-y})=x \qquad (2)$

با مقایسه‌ی (۱) و (۲): $g^{-1}(\frac{2+y}{2-y})=f^{-1}(x)$

$\frac{2+y}{2-y}=x\Rightarrow 2x-xy=2+y\Rightarrow y(1+x)=2x-2\Rightarrow y=\frac{2x-2}{1+x}$

$\Rightarrow g^{-1}(x)=f^{-1}(\frac{2x-2}{1+x})$

حل ۸. صورت و مخرج را هم در مزدوج صورت و هم در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

$\lim_{x\to 3}\frac{(x-5)+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+6}-3}=\frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 3}\frac{(x-5)+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+6}-3}\times\frac{(x-5)-\sqrt{x+1}}{(x-5)-\sqrt{x+1}}\times\frac{\sqrt{x+6}+3}{\sqrt{x+6}+3}$

$=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-11x+24}{x+6-9}\times\frac{\sqrt{x+6}+3}{(x-5)-\sqrt{x+1}}$

$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-8)}{x-3}\times\frac{\sqrt{x+6}+3}{(x-5)-\sqrt{x+1}}$

$=(3-8)\times\frac{3+3}{-2-2}=-5(-\frac{3}{2})=\frac{15}{2}$

حل ۹.

داریم: $a-b=(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{ab})$

$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x)=+\infty-\infty$

$=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x)\times\frac{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}+x^2+x\sqrt[3]{x^3+x^2}}{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}+x^2+x\sqrt[3]{x^3+x^2}}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2-x^3}{x^2+x^2+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$

حل ۱۰. باید حدّ راست و حدّ چپ و مقدار تابع در $x=1$ برابر باشند.

حدّ راست $\lim_{x\to 1^+}f(x)=a\sin 0+b\lfloor 2^+\rfloor=0+2b=2b$

حدّ چپ $\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(ax^2+bx)=a+b$

مقدار تابع $f(1)=\lfloor 1-\frac{7}{2}\rfloor=\lfloor -\frac{5}{2}\rfloor=-3$

$2b=-3\Rightarrow\boxed{b=-\frac{3}{2}}$

$a+b=-3\Rightarrow a-\frac{3}{2}=-3\Rightarrow\boxed{b=-\frac{3}{2}}$

جبر و احتمال

۱.

$۵^n - ۴n - ۱ = ۱۶r$

$n = ۱ \Rightarrow ۵^۱ - ۴(۱) - ۱ = ۰ = ۱۶ \times ۰$

فرض: $\begin{matrix} n = k \\ k \geq ۱ \end{matrix} \Rightarrow ۵^k - ۴k - ۱ = ۱۶r'$

حکم: $n = k + ۱ \Rightarrow ۵^{k+۱} - ۴(k+۱) - ۱ = ۱۶r''$

$r', r'' \in z$

ف $\times ۵ \Rightarrow ۵^{k+۱} - ۵ \times ۴k - ۵ = ۸۰r'$

$\Rightarrow ۵^{k+۱} - ۴k - ۴ - ۱ = ۸۰r' + ۱۶k$

$\Rightarrow ۵^{k+۱} - ۴(k+۱) - ۱ = ۱۶\underbrace{(۵r' + k)}_{r''} = ۱۶r''$

۲.

الف) $\begin{matrix} a = ۲ \\ b = ۳ \\ c = ۵ \end{matrix} \Rightarrow a + b + c = ۱۰$

ب) $n = ۱ \Rightarrow ۱^۲ < ۱!$ یا هر مثال نقض مناسب دیگر

ج) $n = ۴ \Rightarrow ۳n = ۱۲ \neq ۸k$

د) $\begin{matrix} ۳ < ۶ \\ -۵ < -۱ \end{matrix} \Rightarrow ۸ < ۵$ یا هر مثال نقض دیگر

۳.

$۲x^۲ - ۴xy + ۴y^۲ - ۲x + ۶ > ۰$

$\Leftrightarrow (x^۲ - ۴xy + ۴y^۲) + (x^۲ - ۲x + ۱) + ۵ > ۰$

$\Leftrightarrow (x - ۲y)^۲ + (x - ۱)^۲ + ۵ > ۰$ بدیهی

۴. چون $a \in Z$ بنابراین یکی از حالت‌های زیر را خواهیم داشت:

$a = ۳k \to a(a+۱)(a+۲) = ۳k(a+۱)(a+۲) = ۳k'$

$a = ۳k + ۱ \to a(a+۱)(a+۲) = a(a+۱)(\overbrace{۳k+۱+۲}^{۳(k+۱)}) = ۳k'$

$a = ۳k + ۲ \to a(a+۱)(a+۲) =$

$a(۳k+۲+۱)(a+۲) = ۳\underbrace{(k+۱)a(a+۲)}_{k''} = ۳k''$

۵.

فرض: $n^۲ = ۵k \;,\; n \in z \;,\; k, k' \in Z$

حکم: $n = ۵k'$

اثبات: برهان خلف

$n \neq ۵k' \Rightarrow n = ۵k' \pm ۱ \Rightarrow n^۲ = (۵k' \pm ۱)^۲ = ۲۵k'^۲ \pm ۱۰k' + ۱$

$= ۵k'' + ۱$

$n = ۵k' \pm ۲ \Rightarrow$ مشابه $n^۲ = (۵k' \pm ۲)^۲ \Rightarrow n^۲ = ۵k'' + ۱$

۶.

$۷ \times ۱۲ = ۸۴$ لانه

$\left[\frac{n}{۸۴}\right] + ۱ = ۳ \Rightarrow \left[\frac{n}{۸۴}\right] = ۲ \Rightarrow n = \overbrace{۸۴ \times ۲}^{۱۶۸} + ۱ = ۱۶۹$

۷.

$A = \{۱, ۲, \ldots, ۵۲\}$

$(۱,۲)(۳,۴), \ldots, (۵۱,۵۲) \Rightarrow$ ۲۶ لانه

طبق اصل لانه کبوتر حداقل ۲ عضو از ۲۷ عضو انتخابی نسبت به‌هم اولند.

۸.

$A_۳ = (-\frac{۱}{۳}, \frac{۷}{۳}) \qquad A_۴ = (-\frac{۱}{۴}, \frac{۹}{۴})$

$A_۵ = (-\frac{۱}{۵}, \frac{۱۱}{۵}) \qquad A_۲ = (-\frac{۱}{۲}, \frac{۵}{۲})$

$\bigcup_{i=۳}^{۵} A_i = (-\frac{۱}{۳}, \frac{۷}{۳})$

$\bigcap_{i=۲}^{۵} A_i = (-\frac{۱}{۵}, \frac{۱۱}{۵})$

$A_۴ - \bigcap_{i=۲}^{۵} A_i = (-\frac{۱}{۴}, \frac{۹}{۴}) - (-\frac{۱}{۵}, \frac{۱۱}{۵}) = (-\frac{۱}{۴}, -\frac{۱}{۵}] \cup [\frac{۱۱}{۵}, \frac{۹}{۴})$

۹.

الف $(A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)'$

$= (A \cap B) \cap (A' \cup C') = [(A \cap B) \cap A'] \cup [(A \cap B) \cap C']$

$= (A \cap B) \cap C' = A \cap (B \cap C') = A \cap (B - C)$

ب $(A \cup B) - (B \cup C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)' =$

$(A \cup B) \cap (B' \cap C') = [(A \cup B) \cap B'] \cap C' =$

$[(A \cap B') \cup \underbrace{(B \cap B')}_{\varnothing}] \cap C' = (A \cap B') \cap C' = (A - B) - C$

۱۰.

$\binom{۲n}{۲} = \binom{n}{۲} + ۱۲ \Rightarrow \frac{۲n(۲n-۱)(۲n-۲)!}{۲!(۲n-۲)!} =$

$\frac{n(n-۱)(n-۲)!}{۲(n-۲)!} + ۱۲ \Rightarrow ۴n^۲ - ۲n = n^۲ - n + ۲۴ \Rightarrow$

$۳n^۲ - n - ۲۴ = ۰ \Rightarrow n = \frac{۱ \pm \sqrt{۲۸۹}}{۶} \to \begin{cases} n = ۳ \\ n = -\frac{۸}{۳} \end{cases}$

۱۱.

$(\{b\}, (d-۱, ۴)) = (\{۵, b, c\}, (۰, a))$

$b = c = ۵ \qquad a = ۴ \qquad d - ۱ = ۰ \to d = ۱$

۱۲.

$(x,y) \in (A \times B) \cap (C \times D) \Leftrightarrow (x,y) \in A \times B, (x,y)$

$\in (C \times D) \Leftrightarrow (x \in A, y \in B), (x \in C, y \in D)$

$\Leftrightarrow (x \in A, x \in C), (y \in B, y \in D) \Leftrightarrow$

$x \in A \cap C,\; y \in B \cap D \Leftrightarrow (x,y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$

$:(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

۱۳.

$A = \{۰, ۱, ۴, ۹\}$ الف: $R = \{(۰,۰), (۱,-۱)(۱,۰)(۱,۱)(۴,۰)(۹,۰)\}$

$B = \{-۱, ۰, ۱\}$ ب $n(p(B)) = ۲^۳ = ۸ \Rightarrow$

تعداد رابطه‌ها $= ۲^{۸ \times ۸} = ۲^{۶۴}$

۱۴.

$n(A) = ۲۵$

$n(A^۲ - B^۲) = ۵۴۴ \Rightarrow (n(A))^۲ - (n(A \cap B))^۲ = ۵۴۴$

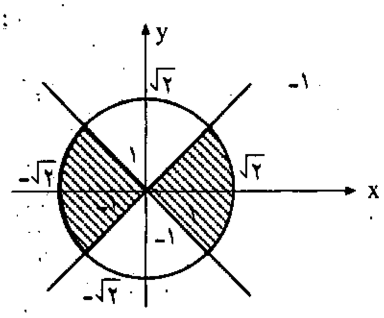
$\Rightarrow ۶۲۵ - x = ۵۴۴$

$x = ۸۱ \Rightarrow n(A \cap B) = ۹$

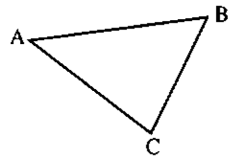
۱۵.

رسم $x^۲ + y^۲ \geq ۲$

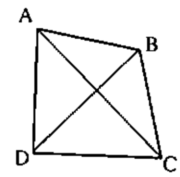
رسم $|x| > |y|$



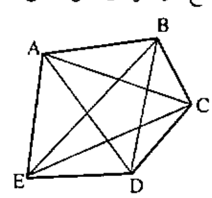
۱ . یک سه ضلعی، یک چهار ضلعی، یک پنج ضلعی، یک شش ضلعی و یک هفت ضلعی را در نظر می‌گیریم و قطرهای آن‌ها را نیز در صورت وجود رسم می‌کنیم.



ـ مجموع تعداد ضلع‌ها و قطرهای مثلث (سه ضلعی) مساوی ۳ است.
ـ مجموع تعداد ضلع‌ها و قطرهای چهارضلعی، مساوی ۶ است.

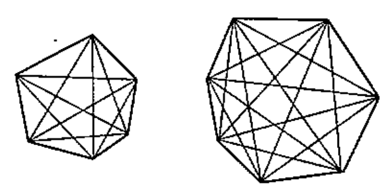


ـ مجموع تعداد ضلع‌ها و قطرهای پنج ضلعی مساوی ۱۰ است.
ـ مجموع تعداد ضلع‌ها و قطرهای شش ضلعی، مساوی ۱۵ است.



ـ مجموع تعداد ضلع‌ها و قطرهای هفت ضلعی، مساوی ۲۱ است.
پس جدول زیر را داریم:

تعداد ضلع‌ها	۳	۴	۵	۶	۷
مجموع تعداد ضلع‌ها و قطرها	۳	۶	۱۰	۱۵	۲۱



مجموع تعداد ضلع‌ها و قطرهای یک چندضلعی، در واقع تعداد پاره‌خط‌هایی است که از وصل کردن دو به دوی رأس‌های آن چند ضلعی ایجاد می‌شود. بنابراین به بررسی این مطلب می‌پردازیم که از هر رأس یک چند ضلعی، چند پاره‌خط (ضلع و قطر) رسم می‌شود.

ـ از هر رأس یک سه ضلعی، ۲ پاره‌خط رسم می‌شود.
ـ از هر رأس یک چهار ضلعی، ۳ پاره‌خط رسم می‌شود.
ـ از هر رأس یک پنج ضلعی، ۴ پاره‌خط رسم می‌شود.
ـ از هر رأس یک شش ضلعی، ۵ پاره‌خط رسم می‌شود.
ـ از هر رأس یک هفت ضلعی، ۶ پاره‌خط رسم می‌شود.

پس جدول زیر را داریم:

تعداد رأس‌های چند ضلعی	۳	۴	۵	۶	۷
تعداد پاره‌خط‌های رسم شده از هر رأس	۲	۳	۴	۵	۶

بنابراین تعداد پاره‌خط‌های رسم شده از تمام رأس‌های چند ضلعی‌های بالا طبق جدول زیر است:

تعداد رأس‌های چند ضلعی	۳	۴	۵	۶	۷
تعداد همه‌ی پاره‌خط‌های رسم شده از رأس‌ها	۳×۲	۴×۳	۵×۴	۶×۵	۷×۶

اما هر رأس دوبار منظور شده است. بنابراین تعداد پاره‌خط‌های واصل بین تمام رأس‌های یک چند ضلعی (در واقع مجموع تعداد ضلع‌ها و قطرهای چندضلعی) طبق جدول زیر است:

تعداد رأس‌ها (یا ضلع‌ها)	۳	۴	۵	۶	۷
تعداد ضلع‌ها و قطرها	$\frac{۳×۲}{۲}=۳$	$\frac{۴×۳}{۲}=۶$	$\frac{۵×۴}{۲}=۱۰$	$\frac{۶×۵}{۲}=۱۵$	$\frac{۷×۶}{۲}=۲۱$

جدول ۱ نشان می‌دهد که تعداد پاره‌خط‌های رسم شده از هر رأس یک چند ضلعی، از تعداد رأس‌ها یکی کمتر است.

تعداد رأس‌ها (یا ضلع‌ها)	۳	۴	۵	۶	۷
تعداد پاره‌خط‌های رسم شده از هر رأس	۳−۱=۲	۴−۱=۳	۵−۱=۴	۶−۱=۵	۷−۱=۶

با توجه به جدول بالا، جدول‌های ۲ و ۳ به صورت زیر درمی‌آیند:

تعداد رأس‌ها (یا ضلع‌ها)	۳	۴	۵	۶	۷
تعداد پاره‌خط‌های رسم شده از همه‌ی رأس‌ها با تکرار رأس‌ها	۳(۳−۱)	۴(۴−۱)	۵(۵−۱)	۶(۶−۱)	۷(۷−۱)

تعداد رأس‌ها (یا ضلع‌ها)	۳	۴	۵	۶	۷
تعداد پاره‌خط‌های رسم شده از همه‌ی رأس‌ها بدون تکرار آن‌ها؛ یعنی مجموع تعداد ضلع‌ها و قطرها	$\frac{۳(۳-۱)}{۲}=۳$	$\frac{۴(۴-۱)}{۲}=۶$	$\frac{۵(۵-۱)}{۲}=۱۰$	$\frac{۶(۶-۱)}{۲}=۱۵$	$\frac{۷(۷-۱)}{۲}=۲۱$

بنابراین به این حدس می‌رسیم که مجموع تعداد ضلع‌ها و قطرهای یک nضلعی محدب مساوی $\frac{n(n-۱)}{۲}$ است.

برای $n=۳$ داریم: $۳=\frac{۳(۳-۱)}{۲}$. برای $n=۴$ داریم: $\frac{۴(۴-۱)}{۲}=۶$

برای $n=۵$ داریم: $۱۰=\frac{۵(۵-۱)}{۲}$. برای $n=۶$ داریم: $\frac{۶(۶-۱)}{۲}=۱۵$

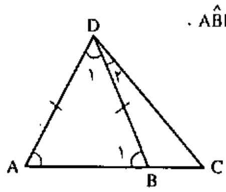
۲ . با توجه به شکل و داده‌های مسئله داریم:

$$AD=DB \Rightarrow \hat{A}=\hat{B}_۱=A\hat{B}D \qquad (۱)$$

$$AC=CD \Rightarrow \hat{A}=A\hat{D}C=\hat{D}_۱+\hat{D}_۲ \qquad (۲)$$

از رابطه‌ی ۲ نتیجه می‌شود که $\hat{A}>\hat{D}_۱$ است. اما بنابه رابطه‌ی ۱، $\hat{A}=\hat{B}_۱$ است.

پس $\hat{B}_۱>\hat{D}_۱$ و یا $A\hat{B}D>A\hat{D}B$.



۳ . بنابه ویژگی نیم‌ساز زاویه‌ی درونی در مثلث داریم:

$$\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}$$

از آن‌جا، با توجه به شکل خواهیم داشت:

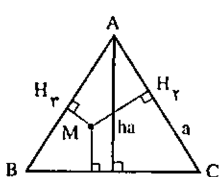
$$\frac{۳x-۱}{۲x+۳}=\frac{۳۲}{۳۶} \Rightarrow \frac{۳x-۱}{۲x+۳}=\frac{۸}{۹} \Rightarrow ۲۷x-۹=۱۶x+۲۴$$

$$\Rightarrow ۱۱x=۳۳ \Rightarrow x=۳ \Rightarrow AC=۵x+۲=۵\times۳+۲=۱۷$$

$$\Rightarrow \text{محیط مثلث}=AB+AC+BC=۳۲+۱۷+۳۶=۸۵$$

۴ . می‌دانیم که مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع در درون هر مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن، مساوی ارتفاع آن مثلث است. بنابراین اگر ارتفاع این مثلث را h_a فرض کنیم، خواهیم داشت:

$h_a=۱۲\sqrt{۳}$



اکنون اگر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را a و مساحت آن را S بگیریم، می‌دانیم:

$$h_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}\ ,\ s = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

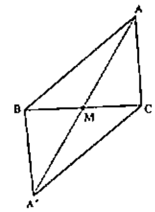
از آن‌جا خواهیم داشت:

$$12\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = 24$$

$$s = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{576\sqrt{3}}{4} = 144\sqrt{3}$$ واحد سطح

۵. مثلث ABC و میانه‌ی AM از آن را درنظر می‌گیریم. می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$AM < \frac{1}{2}(AB + AC)$$



برای اثبات، میانه‌ی AM را به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی A' به‌دست آید. از A' به B و C وصل می‌کنیم. چهارضلعی $ABA'C$ متوازی‌الاضلاع است. زیرا قطرهای آن (AA' و BC) یکدیگر را نصف کرده‌اند. بنابراین (۱) $BA' = AC$ است.

اما در مثلث ABA' داریم:

$$AA' < AB + BA' \qquad (2)$$

در رابطه‌ی ۲ به جای AA' مساوی‌اش $2AM$ و به جای BA' مقدار مساوی‌اش AC را قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$2AM < AB + AC \Rightarrow AM < \frac{1}{2}(AB + AC)$$

$$2AM < AB + AC \Rightarrow AM < \frac{1}{2}(AB + AC) \qquad (1)$$

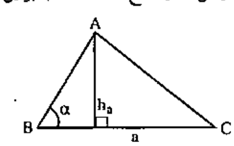
از طرفی در همین مثلث $AA'B$ داریم:

$$AA' > |AB - BA'| \Rightarrow 2AM > |AB - AC|$$

$$\Rightarrow AM > \frac{1}{2}|AB - AC| \qquad (2)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) حکم مسأله نتیجه می‌شود.

۶. فرض می‌کنیم مسئله حل شده و مثلث ABC با معلومات $BC = a$ ، $\hat{B} = \alpha$ و $AH = h_a$ جواب مسئله باشد. به طوری که دیده می‌شود، طول ضلع BC معلوم است: پس این ضلع را می‌توان رسم کرد. از طرف دیگر، برای رأس A دو مکان وجود دارد؛ یکی ضلع دیگر زاویه‌ی $\hat{B} = \alpha$ و دیگری خطی موازی ضلع BC و به فاصله‌ی h_a از آن (در طرف ضلع زاویه‌ی $\hat{B} = \alpha$). زیرا h_a فاصله‌ی رأس A از ضلع BC است. بنابراین برای رسم مثلث ABC چنین عمل می‌کنیم:



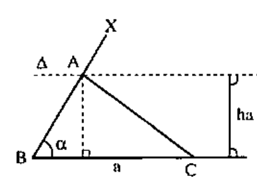
الف) پاره‌خط $BC = a$ را رسم می‌کنیم.

ب) از نقطه‌ی B نیم‌خط Bx را چنان رسم می‌کنیم که با ضلع BC زاویه‌ی $\hat{B} = \alpha$ را بسازد.

پ) خطی موازی ضلع BC و به فاصله‌ی h_a از آن رسم می‌کنیم و آن را Δ می‌نامیم (در همان طرفی که Bx قرار دارد).

ت) نقطه‌ی برخورد خط Δ با نیم‌خط Bx، رأس A از مثلث ABC است.

ث) از A به C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسئله است. این مسئله همواره جواب دارد.



نکته: این مسئله در کتاب کار هندسه‌ی (۲) از انتشارات مدرسه، به روش دیگری حل شده است. آن راه‌حل را نیز ببینید.

۷. قطر عمود بر این دو وتر موازی را رسم می‌کنیم. نقطه‌ی برخورد آن با AB و CD را به ترتیب H و K می‌نامیم و از O به A و C وصل می‌کنیم. می‌دانیم که هر قطر عمود بر وتر،

برگ اشتراک مجله های رشد

شرایط:

۱. واریز مبلغ ۳۰/۰۰۰ ریال به ازای هر عنوان مجله درخواستی، به صورت علی‌الحساب به حساب شماره‌ی ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت شعبه سه راه آزمایش (سرخه‌حصار) کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست

۲. ارسال اصل رسید بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک

- **نام مجله :** ....
- **نام و نام خانوادگی:** ....
- **تاریخ تولد:** ....
- **میزان تحصیلات:** ....
- **تلفن:** ....
- **نشانی کامل پستی:**

استان: .... شهرستان: ....

خیابان: ....

....

پلاک: .... کدپستی: ....

- **مبلغ واریز شده:** ....
- **شماره و تاریخ رسید بانکی:** ....
- **آیا مایل به دریافت مجله درخواستی به صورت پست پیشتاز هستید؟ بله ☐ خیر ☐**

امضا:

نشانی: تهران ـ صندوق پستی ۱۶۵۹۵/۱۱۱

نشانی اینترنتی: www.roshdmag.ir

پست الکترونیک: Email:info@roshdmag.ir

☎ امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ ـ ۷۷۳۳۵۱۱۰

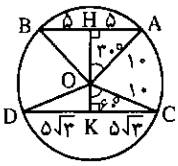
☎ پیام‌گیر مجلات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲ ـ ۸۸۸۳۹۲۳۲

یادآوری:

- هزینه برگشت مجله در صورت خوانا و کامل نبودن نشانی، بر عهده مشترک است.
- مبنای شروع اشتراک مجله از زمان وصول برگ اشتراک می‌باشد.
- برای هر عنوان مجله برگ اشتراک جداگانه تکمیل و ارسال کنید (تصویر برگ اشتراک نیز مورد قبول است)

آن وتر و کمان نظیرش را نصف می‌کند. بنابراین در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی OHA و OKC داریم:

$AH = \frac{AB}{2} = \frac{10}{2} = 5$, $OA = 10$



$\Rightarrow \sin A\hat{O}H = \frac{AH}{OA} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow A\hat{O}H = 30°$

$CK = \frac{CD}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

$\Rightarrow \sin C\hat{O}K = \frac{CK}{OC} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60°$

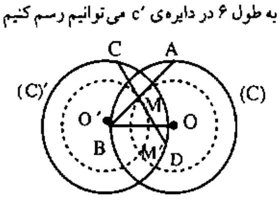
پس داریم:

$A\hat{O}H + C\hat{O}K = 30° + 60° = 90° \Rightarrow A\hat{O}C = 180° - 90° = 90°$

$\Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} = A\hat{O}C = 90°$

نکته: با توجه به این که $A\hat{O}B = 60°$ و $C\hat{O}D = 120°$ است، $\widehat{AB} = 60°$ و $\widehat{CD} = 120°$ خواهد بود.

۸. دو دایره که هر کدام از مرکز دیگری بگذرند، دو دایره‌ی متقاطع مساوی‌اند که طول خط‌المرکزین آن‌ها مساوی شعاع مشترکشان است. بنابراین اگر مرکزهای دو دایره‌ی (c) و (c′) را به ترتیب O و O′ بنامیم، خط‌المرکزین این دو دایره‌ی OO′ مساوی ۵ سانتی‌متر است. از طرف دیگر، می‌دانیم، مکان هندسی وسط وترهایی به طول l در دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R، دایره‌ای به همین مرکز و به شعاع $\sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}$ است. بنابراین مکان هندسی وسط وترهایی به ۸ در دایره‌ی (c)، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $\sqrt{5^2 - \frac{8^2}{4}} = 3cm$ و مکان هندسی وسط وترهایی به طول ۶ در دایره‌ی (c′) دایره‌ای به مرکز O′ و به شعاع $\sqrt{5^2 - \frac{6^2}{4}} = 4cm$ است. این دو دایره را رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد آن‌ها (در صورت وجود) جواب مسئله است. اگر این دو نقطه را M و M′ بنامیم، از این دو نقطه وتری به طول ۸ در دایره‌ی c و وتری به طول ۶ در دایره‌ی c′ می‌توانیم رسم کنیم.



نکته: همان طور که اشاره شد، ممکن است مسئله جواب نداشته باشد و این در صورتی است که دو دایره‌ی مکان هندسی وسط وترها، یکدیگر را قطع نکنند. برای بررسی این مطلب می‌توانیم شرط متقاطع بودن آن‌ها را بررسی کنیم. در این مسئله، $d = oo' = 5$ ، $R_1 = 3$ و $R_2 = 4$ است و داریم:

$|R_2 - R_1| = 1 < d = 5 < R_1 + R_2 = 7$

پس دو دایره‌ی مکان هندسی وسط وترها، یکدیگر را قطع می‌کنند و مسئله دو جواب دارد (نقطه‌های M و M′).

۹. با توجه به این که $O\hat{T}M = O\hat{T'}M = 90°$ و OM عمودمنصف TT′ و OM نیم‌ساز زاویه‌های TMT′ و TOT′ است، داریم:

$$OM = 20, OT = OT' = R = 12, MT^2 = OM^2 - OT^2 \quad (1)$$

$$\Rightarrow MT^2 = 400 - 144 = 256 \Rightarrow MT = MT' = 16$$

$$OM.TH = OT.MT = \frac{1}{2}S_{OMT} \quad (2)$$

$$\Rightarrow 20 \times TH = 12 \times 16 \Rightarrow TH = 9/6 = \frac{1}{2}TT' \Rightarrow TT' = 19/2$$

$$OT^2 = OH.OM \Rightarrow 144 = OH \times 20 \Rightarrow OH = 7/2 \quad (3)$$

$$T\hat{M}T' = 2O\hat{M}T , \ tg\,O\hat{M}T = \frac{OT}{MT} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \quad (4)$$

$$\Rightarrow O\hat{M}T = Arctg(\frac{4}{3}) \Rightarrow T\hat{M}T' = 2Arctg(\frac{3}{4})$$

ریاضی‌دانان مسلمان

ابوالفتح اصفهانی

ابوالفتح محمدبن قاسم‌بن فضل اصفهانی
ریاضی دان ایرانی (زنده و فعّال در ۵۱۳)

بیشتر مورخان درباره‌ی تاریخ زندگانی وی اشتباه کرده او را از ریاضیدانان سده‌ی چهارم دانسته‌اند و نام او را هم به صورت‌های مختلف از قبیل «ابوالفتح بن محمدبن قاسم‌بن فضل» و «ابوالفتح محمودبن محمدبن قاسم‌بن فضل» و «محمودبن قاسم‌بن فضل» و «محمودبن عمربن ابی الفضل» ثبت کرده‌اند. آن‌چه به تحقیق درباره‌ی وی می‌توان گفت این است که وی از ریاضیدانان زبردست اواخر قرن پنجم و اوایل قرن ششم بوده و بدون تردید در سال ۵۱۳ زنده بوده و معاصر با ابوکالیجار گرشاسف بن علی بن فرامرز حسام امیرالمؤمنین پنجمین پادشاه سلسله‌ی کاکویه اصفهان و همدان بوده که از ۴۸۸ تا حدود ۵۱۳ حکومت داشته‌اند. وی تحریر نوی از مقالات پنجم تا هفتم مخروطات اپولونیوس پرداخته و در سال ۵۱۳ ملخّصی از کتاب مخروطات فراهم آورده و آن را به نام ابوکالیجار مذکور ساخته است.

آثار ریاضی موجود وی

۱. تلخیص المخروطات

مخروطات اپولُونیوس دارای هشت مقاله بوده که مقاله‌ی هشتم آن از دیرباز مفقود شده و فقط مقالات اول تا هفتم آن به دست مسلمین رسیده است. این هفت مقاله در قرن سوم هجری توسط هلال حمصی (چهار مقاله‌ی اول) و ثابت بن قره (سه مقاله‌ی پنجم تا هفتم) از یونانی به عربی ترجمه شد.

ابوالفتح اصفهانی در سال ۵۱۳ از این هفت مقاله تلخیصی فراهم آورد و آن را تلخیص المخروطات نامید. این تلخیص از این جهت مورد توجه ریاضیدانان است که چون متن یونانی مقالات پنجم تا هفتم مخروطات نیز بعداً از بین رفت این سه مقاله از روی ترجمه‌ی لاتینی همین تلخیص المخروطات به دست اروپاییان رسید.

تلخیص المخروطات در سال ۱۶۶۱م به زبان لاتینی ترجمه شد و سپس در سال ۱۹۲۳م از روی ترجمه‌ی لاتینی به زبان فرانسوی برگردانده شد.

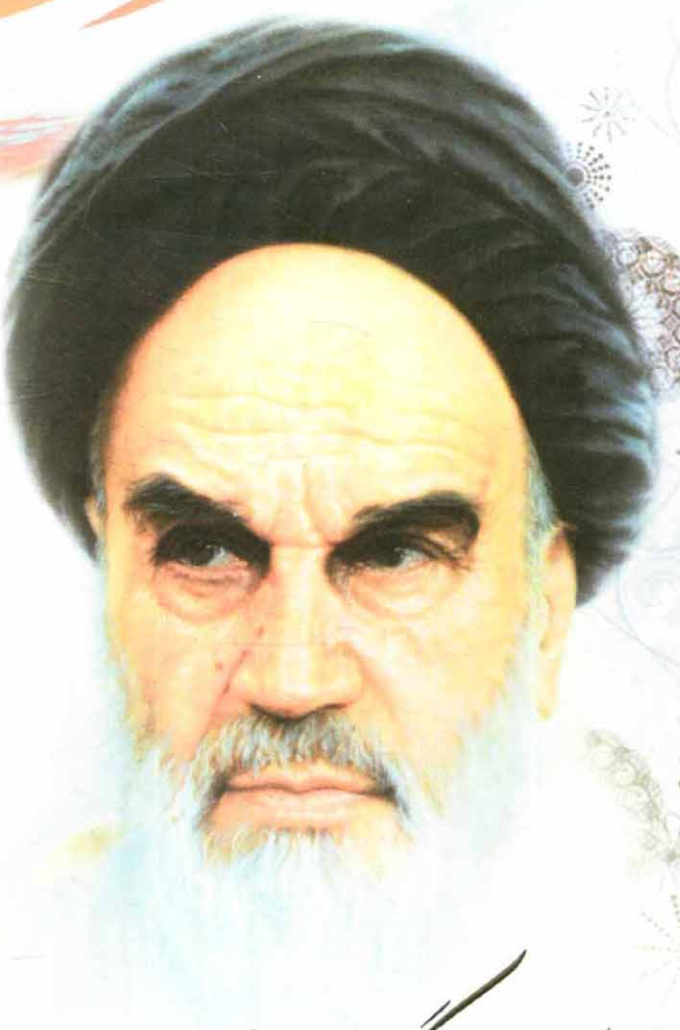
از تلخیص المخروطات چند نسخه‌ی خطی موجود است و از آن جمله است یک نسخه به خط قطب‌الدین شیرازی که متعلق به کتابخانه سرای در استانبول (به شماره‌ی ۳۴۵۵) است و نسخه‌ای دیگر به خط قوشچی (علاء‌الدین علی‌بن محمد) که متعلق به کتابخانه‌ی ایاصوفیا (به شماره‌ی ۲۷۲۴) است. عکس این نسخه به شماره‌های ۵۷۰ و ۵۷۱ و فیلم آن به شماره‌ی ۳۸۵ در کتابخانه‌ی دانشگاه تهران موجود است. این نسخه چنین شروع می‌شود: «هذا کتاب تلخیص المخروطات ممالخصه الشیخ محمودبن قاسم بن فضل الاصفهانی» و در صفحه‌ی چهارم آن آمده است: «لخزانة کتب مولانا الملک الاجل السیدالمنعم العالم العادل المؤید المظفر المنصور عضدالدین علاء‌الدوله... ابی کالیجار گرشاسف بن علی‌بن فرامرز... حسام امیرالمؤمنین اطال الله بقاه...»

ابوالفتح اصفهانی در پایان مقاله‌ی هفتم تلخیص المخروطات خاطرنشان می‌سازد که این ملخص را از کتاب مخروطات برای ابوکالیجار فراهم آورده و گمان می‌برد که وی نخستین کسی است که این کار را انجام داده و تاریخ اتمام و تحریر کتاب را ۵۱۳ هجری معین می‌کند (و فرغ من اتمامه و تحریره فی شهور سنة ثلث عشرة و خمسمائة هجریه النبویه).

۲. ترجمه‌ی فارسی مخروطات

سوتر نوشته است که نسخه‌ی خطی شماره‌ی ۲۹۶ کتابخانه‌ی فلورانس شامل ترجمه‌ی فارسی هر هفت مقاله‌ی اپولونیوس توسط ابوالفتح اصفهانی است. در منابع دیگر از این ترجمه سخنی به میان نیامده و این مطلب باید مورد تحقیق و بررسی قرار گیرد.

منبع
زندگی‌نامه‌ی ریاضی‌دانان دوره‌ی اسلامی، ابوالقاسم قربانی، مرکز نشر دانشگاهی



سی امین سالگرد پیروزی
انقلاب اسلامی مبارک باد

جوان ها قدر جوانی شان را بدانند که صرف کنند در علم و در تقوا و در سازندگیِ خودشان که اشخاص امین صالح بشوند. مملکت با اشخاص امین صالح می تواند مستقل باشد.

امام خمینی (ره)