انتشارات مدرسه

مجله ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۱

سال دوم، زمستان ۱۳۷۱، شماره مسلسل ۵، بهاء ۵۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم

(باتشکر از همکاری ارزندهٔ آقایان پرویز شهریاری و محمد عابدی)

● مسئول فنی: هوشنگ آشتیانی

● صفحه آرا: مهرزاد طاهری

● رسام: فرخ نیکزاد

● حروفچینی: یگانه

● تیراژ: ۵۰۰۰۰ نسخه

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱ ـ نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث درسی کتب ریاضی دبیرستان)

۲ ـ طرح مسائل کلیدی (برای دانش آموزان) به همراه حل آن

۳ ـ طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش آموزان)به همراه حل آن

۴ ـ طرح معماهای ریاضی

۵ ـ نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه ولطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

● مقالات وارده باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.
● هیئت تحریریه درحکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقالات آزاداست.
● مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

□ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهرشمالی، پلاک ۲٦۸، ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش وپرورش تلفن: ۸۸۲٦۰۰۷

انتشارات مدرسه

مطالب این شماره

شرح روی جلد: دراین‌طرح تاحدودی سیرتکاملی ریاضیات ونیز شاخه‌های مختلف آن مشخص شده‌است.

مطالب پشت جلد: از پرویز شهریاری

سخن سردبیر

خواهران و برادران مسلمانم

تاکنون هیچ چیز را مفیدتر و ارزنده‌تر از آرامش روحی و راحتی خیال، به هنگام مطالعه و تدریس ریاضیات نیافته‌ام.

تنها در زمانی که دلم آرام بوده و روحم در آسایش، قادر به حل مسأله‌های مشکل ریاضی بوده‌ام و یقین دارم که برای شما عزیزان نیز چنین است.

«تنها مشکلی را که دنیای علم و صنعت امروز حل‌نکرده مشکل آرامش روحی است. هر روز آمار بیماریهای روانی، جنون و مصرف قرص اعصاب زیادتر می‌شود، هیچ‌چیزی به‌انسان آرامش نمی‌دهد جز یاد خدا و ایمان و انس و عشق و توکل به او ... آری، با یاد خداوند دلها آرام می‌گیرد و بهترین یاد خدا همان نماز است، کمبود امروز بشر، علم و تخصص نیست بلکه دل آرام است.*»

اما برای ما که مسلمانیم و به مسلمانیمان افتخار می‌کنیم چگونه میسر است تا به چنین آرامش روحی و راحتی خیال دست یابیم و مزهٔ شیرین مطالعه ریاضیات را بچشیم و از آن بهره ببریم؟ آری فقط با یاد خدا دلها آرام می‌گیرد و روح در آسایش و آرامش است و جان کلام در یک کلمه خلاصه، «نماز».

حضرت حق در قرآن کریم می‌فرمایند «الا بذکر الله تطمئن القلوب» (با یاد خداست که دلها آرام می‌گیرد.) و چه ذکری ارزشمندتر و مفیدتر از نماز. فواید این ذکر با ارزش و برشماری آنها به سمت بی‌نهایت میل می‌کند که فعلاً از پرداختن به آنها معذوریم و از لابه‌لای آنها تنها به همین نکتهٔ مهم که دست یابی به آرامش روحی است بسنده می‌کنیم، آرامشی که می‌تواند سرمنشأ همهٔ موفقیتها و نیکیها و پیشرفتها؛ از جمله موفقیت در علم و نیز مطالعه و تحقیق باشد.

به شما خواهران و برادران مسلمانم در هرکجای این میهن اسلامی که هستید توصیه‌هایی برادرانه دارم:

- به نماز و ارتباط با خدای متعال بهای بیشتری داده و بهترین اوقات خود را که همان اول وقت نماز است برای این امر مهم اختصاص دهید.
- هرگاه خواهان آرامش روحی و نجات از اضطراب هستید به خداوند توکل کنید و درجهت نیلِ به این منظور، به نماز روی آورید که امنیتِ محض است و آرامش مطلق.
- توسط نماز می‌توانید به هر درجه‌ای از تمرکز که بخواهید، رسیده و پس‌از آن و در پناه آن به مطالعه، تحقیق و یا حل مسائل ریاضیات بپردازید، زیرا همان طور که قبلاً ذکر کردم تمرکز و راحتی خیال عامل بسیار مهمی در یادگیری و فهم مطالب ریاضی می‌باشد.

توفیق همهٔ شما عزیزان را در تمامی مراحل تحصیل و زندگی از خدای متعال خواستارم و در این زمینه (تأثیر نماز در راحتی خیال و مطالعه و فهم ریاضیات) پذیرای مطالب و نظرات شما هستم.

والسلام

---

* نقل از کتاب یکصد و چهارده نکته از نماز نوشته محسن قرائتی

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۵)

پرویز شهریاری

درباره «واژه نامهٔ ریاضی» و شرایط تنظیم آن در شمارهٔ قبل صحبت کردیم و به‌دلیل محدود بودن صفحه‌های فصل‌نامهٔ برهان ناگزیر شدیم، که آن را در نقطه‌ای ناتمام بگذاریم. هم اکنون به دنبالهٔ بحث می‌پردازیم:

۴) در جست‌وجوهای خود، تاریخ ریاضیات را فراموش نکنید، چراکه «از تاریخ باید درس گرفت»

هرکه نامُخت از گذشت روزگار
نیز ناموزد ز هیچ آموزگار
رودکی

درمورد مفهوم، موضوع، استدلال و هرقضیه‌ای بهتر است به تاریخچهٔ آن مراجعه کنید. تاریخ ریاضیات خیلی چیزها به‌ما می‌آموزد مثلاً آیا می‌دانید، چرا هرعددی راکه نتوان به صورت نسبت دو عدد درست نشان‌داد (یعنی، عددهای غیرگویا را) **گنگ** می‌نامند. فیثاغورس و هواداران او در سده‌های پیش‌از میلاد، معتقد به «حکومت عدد برجهان» بودند. آنها می‌گفتند که تنها به کمک عدد و شکل است که می‌توان جهان را شناخت و چون هرشکلی را هم، به یاری اندازه‌های آن و رابطه‌های بین این اندازه‌ها می‌توان بیان کرد، بنابراین، عدد، حاکم مطلق جهان است. **فیلولانوس فیثاغورسی** (سدهٔ چهارم پیش از میلاد) می‌گفت: «بدون عدد، هیچ چیز را نمی‌توان درک کرد یا شناخت» و **نیکوماک فیثاغورسی** معتقد بود که: «عدد واقعی‌ترین واقعیتهاست و، به همین مناسبت، جاویدان است». آنها معتقد بودند حتی خصلتها، رفتارها و پدیده‌های کیفی را هم می‌توان با عدد بیان کرد. مثلا: هر دو عددی مثل ۲۲۰ و ۲۸۴ را، نشانهٔ «دوستی» و «تفاهم» می‌دانستند، زیرا مجموع مقسوم علیه‌های عدد ۲۲۰ (بجز خود ۲۲۰) برابر ۲۸۴ و مجموع مقسوم علیه‌های عدد ۲۸۴ (بجز خودش) برابر ۲۲۰ می‌شود و این گونه عددها را «عددهای دوست» یا به قول ریاضی‌دانان پیشین ایرانی «عددهای متحابه» می‌نامیدند. [تاکنون بیش‌از ۱۰۰ زوج عدد متحابه شناخته‌شده است، ولی هنوز این مسأله حل نشده‌است که: آیا مجموعهٔ زوج عددهای متحابه، مجموعه‌ای متناهی است یا نامتناهی؟]

درضمن؛ هواداران فیثاغورس، نقطه را واحد مکان می‌دانستند، بنابراین، از دیدگاه آنها، پاره‌خط راست از پهلوی هم قرار گرفتن تعداد معینی نقطه (اگرچه این تعداد، خیلی زیاد باشد) به‌دست می‌آید [نخستین کسی که خط را به‌عنوان مسیر حرکت نقطه تعریف کرد «**خیام نیشابوری**» بود] و، بنابراین، نسبت طولهای دو پاره‌خط راست، برابر نسبت تعداد نقطه‌های سازندهٔ آنهاست، یعنی نسبت هر دوپاره‌خط راست را می‌توان با نسبت دو عدد درست نشان داد. به زبان ریاضیات امروز، نسبت هر دوپاره خط راست، عددی است گویا

ولی **فیثاغورس** و یایکی از هواداران او، قضیهٔ معروف فیثاغورس را (و به‌احتمال زیاد، تجربه و استقراء و نه استدلال منطقی) پیدا کردند. امروز می‌دانیم، بنابراین قضیه، طول قطر مربع به ضلع واحد، برابراست با $\sqrt{2}$؛ به عبارت بهتر؛ نسبت طول قطر به طول ضلع هر مربع، برابر $\sqrt{2}$ است. ولی یونانیها، جز عددهای درست و نسبتهای آنها را نمی‌شناختند و برای «بیان» طول قطر مربع دچار اشکال می‌شدند. پس معلوم شد، عدد، که قادر است هر پدیده‌ای را توضیح دهد، از بیان طول قطر مربع عاجز است. از طرفی فلسفهٔ فیثاغورسی

دچار شکست شده بود و می‌رفت که به‌فراموشی سپرده شود. هواداران فیثاغورس این راز را از دیگران مخفی داشتند و سوگند خوردند که، دربارهٔ آن، با کسی صحبت نکنند تا بتوانند جمع خود و «مذهب» خود را حفظ کنند. ولی پیش خود، سعی کردند با نوعی نامگذاری، فلسفهٔ ذهنی خود را توجیه کنند؛ گفتند با دو نوع پدیده سروکار داریم: پدیده‌های قابل بیان با عدد که آنها را «گویا» (یا مُنْطِق) می‌نامیم و پدیده‌هایی که با عدد «قابل بیان» نیستند، آنها را گُنگ (یا اصم) [و یا به قول خود یونانیها الوگون (ALOGON)] نام می‌دهیم. این بود تاریخچهٔ بسیار فشرده‌ای از پیدایش نامهای «عدد گویا» و «عدد گنگ». تامدتها، که عددهای گنگ را نمی‌شناختند، از مقدارهای تقریبی آنها استفاده می‌کردند. یکی از این راهها این بود که مثلاً: برای $\sqrt{۲}$، کسرهایی برابر ۲ را درنظر می‌گرفتند که مخرج آنها، عددی مجذور کامل باشد و آن قدرجلو می‌رفتند تا صورت کسر، نزدیک به یک مجذور کامل شود، مثلا:

$$۲ = \frac{۲۸۸}{۱۴۴} \approx \frac{۲۸۹}{۱۴۴} = (\frac{۱۷}{۱۲})^۲ \Rightarrow \sqrt{۲} \approx \frac{۱۷}{۱۲} = ۱\frac{۵}{۱۲}$$

کسانی هستند که، «تاریخ ریاضیات را به دیدهٔ حقارت می‌نگرند و می‌گویند: چه فایده‌ای دارد که با راه حلهای **هدرون اسکندرانی** یا **ابوالوفای بوزجانی** آشنا شویم؟ این راه حلها در طول تاریخ سوهان خورده‌اند و ما امروز از چنان راه حلهای شسته و رُفته‌ای آگاهی داریم که لزومی ندارد به سراغ راه‌حلهای دشوار و گاه بچگانهٔ پیشینیان برویم. مگر ما می‌خواهیم متخصّص در تاریخ یا جامعه شناسی، بشویم؟ کار ما ریاضیات است، باید رو به آینده داشت و گذشته را فراموش کرد. تاریخ ریاضیات را باید در کتابهای تاریخ عمومی نوشت تا، متخصصّان تاریخ مثل سایر زمینه‌ها، از تاریخ ریاضیات هم آگاه باشند. همچنین جامعه‌شناسان هم ناگزیرند تاریخ ریاضیات را مطالعه کنند تا بتوانند، براساس آن، دگرگونی‌های اجتماعی و فکری بشر را بررسی کنند...»

وقتی به سراغ «تاریخ عمومی» می‌روید، حتی در مفصل‌ترین آنها که به جزء جزء زندگی انسانهای زراندوز و زورمند پرداخته‌اند، بازهم نشانی از تاریخ ریاضیات نمی‌بینید. شما می‌توانید کتابهای زیادی دربارهٔ «تاریخ سیاسی جهان» پیدا کنید، «تاریخ دگرگونیهای اقتصادی» و همراه آن، «تاریخ دگرگونیهای اجتماعی» گونه‌های مختلف و با دیدگاههای متفاوت تنظیم شده و مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته‌است، ولی هنوز تاریخ دگرگونیهای اندیشهٔ بشری، یعنی تاریخ تفکر و رابطهٔ متقابل آن با سایر دگرگونیها، به‌صورتی علمی تدوین نشده‌است. بزرگانی همچون **سمیت** (دربارهٔ تاریخ ریاضیات)، **جرج سارتون** (دربارهٔ تاریخ دانش به طورکلی) و **ابوالقاسم قربانی** (دربارهٔ ریاضی دانان ایرانی)، مصالح و مواد لازم را، برای تنظیم چنین کتابی فراهم کرده‌اند، ولی هنوز کار تدوین آن آغاز نشده‌است. چه‌کسی باید به این مهم بپردازد؟ شما و نسل بالندهٔ جوانان امروز! وظیفهٔ همهٔ دانشمندان و پژوهشگران و از آن جمله ریاضی دانان است که بخصوص، درجهت تنظیم تاریخ پیشرفت دانش ریاضیات بکوشند. کتابهای درسی ما باید به گونه‌ای ترتیب یابد که دانش‌آموزان ما، هم از دگرگونیهای فکری و علمی در سراسر جهان و هم از روند تکاملی دانش در کشور خودمان، آگاه شوند.

تاریخ ریاضیات چه‌فایده‌ای دارد؟ تاریخ ریاضیات به ما می‌آموزد که ریاضیات، دانشی زنده و پویاست و، بدون این که گذشتهٔ خود را نفی کند، همیشه به سمت دقت بیشتر و کارآیی بیشتر پیش رفته‌است. تاریخ ریاضیات به ما نشان می‌دهد که، دانش ریاضی، برخلاف آن چه برخیها گمان می‌کنند، در درون خود متحجّر نشده و با قانونهای جامد ولی تغییر سروکار ندارد، یعنی ریاضیات هم، مثل هر دانش‌دیگری، قانونمند است، تکامل می‌پذیرد، گذشتهٔ خود را اصلاح می‌کند و همیشه در تلاش برای «بهتر شدن»، «دقیقتر شدن» و «نزدیکی بیشتر باواقعیتهای جهان خارج» است: ریاضیات، دانشی انسانی است، برخرد آدمی تکیه دارد و در خدمت بشر و جامعهٔ بشری است. به همین مناسب، تاریخ ریاضیات، روحیهٔ انسان دوستی و همیاری را تقویت می‌کند و نشان می‌دهد که، تلاش اهریمنی نفاق افکنان و جنگ افروزان، تا چه حد، مانع پیشرفت انسان و رسیدن به آرمانهای متعالی او می‌باشد. تاریخ ریاضیات، ما را با شیوهٔ کار ریاضی‌دانان و انگیزه‌های علمی آنها آشنا می‌کند. **ما می‌توانیم** به یاری تاریخ ریاضیات، جای خاصی را در جهان دانش بیابیم، که از آن جایگاه به زندگی فکری بشری سروسامان ببخشیم...

از همین حالا، که روی نیمکتهای دبیرستان نشسته‌اید، مطالعهٔ خود

را در تاریخ ریاضیات بیشتر کنید و برای هر موضوعی و هر مفهومی، هرقضیه‌ای و هر مسأله‌ای، در جست‌وجوی تاریخچهٔ آن باشید و از این راه واژه نامهٔ ریاضی خود را غنی‌تر کنید. شما می‌توانید یکی از آن کسانی باشید که در آینده، «تاریخ تحولات ریاضی» را تنظیم می‌کنند. برای رسیدن به چنین هدفی، باید از همین امروز دست به کار شوید؛ و با پشتکار و پیگیریهای مستمر تحقیق خود را آغاز کنید...

۵) دانش ریاضیات همانند هر دانش‌دیگری در خدمت انسان است. آن چه در ریاضیات می‌خوانیم؛ «بازی با علامتهای و شکلها» نیست، بلکه قانونهایی است که بر طبیعت و زندگی عملی ما حکومت می‌کند. کار ریاضیات، وضع **قانونهای «من‌درآوردی» نیست**؛ ریاضیات قانونهای موجود و حاکم برطبیعت و جامعه را کشف می‌کند. رابطه‌ها و شکلهایی که در ریاضیات، با آنها سروکار داریم، دستگیره‌هایی هستند که به یاری آنها، می‌توان نیازهای عملی دانشهای دیگر و به‌طورکلی؛ نیازهای فکری انسان را برآورده کرد. **نیوتون و لایب نیتز**، تنها به‌دلیل نبوغ خود و تنها از راه «بازی ذهنی باعلامتها»، مشتق و دیفرانسیل را کشف نکردند. **نیوتون** ضمن بررسیهای خود در مکانیک و برای دستیابی به‌قانونی که بتوان، به کمک آن، سرعت و شتاب هر جسم متحرک، و از آن جمله جرمهای آسمانی را، مشخص کرد؛ به مفهوم مشتق رسید. و **لایب نیتز**، در درون ریاضیات، و برای حل کلی مسألهٔ مماس بر منحنی، به‌آن دست یافت [اگر بخواهید از نقطه‌ای (واقع بر منحنی یا بیرون آن)، مماسی بر منحنی رسم کنید، نمی‌توانید راه حلی کلی به کمک پرگار و خط کش ارائه دهید. برای دایره و بیضی و سهمی ـ و به‌طور کلی، مقطعهای مخروطی ـ روش رسم مماس را، به کمک پرگار و خط‌کش، از قدیم می‌شناختند، ولی از این روشها، برای رسم مماس بریک منحنی غیرمشخص، کاری ساخته نبود؛ ولی مشتق راه‌حل کلی رسم مماس برمنحنی را، با شرط معلوم بودن معادلهٔ منحنی، به ما می‌دهد: مشتق یک تابع، یعنی مقدار ضریب زاویهٔ مماس برمنحنی.]

تنها نبوغ **خوارزمی** نبود که موجب پیدایش دانش‌جبر شد. او کتاب «جبر» را به‌این خاطر نوشت که در عمل، برای حل بسیاری از مسأله‌های موردنیاز زندگی ـ مثل عمل کردن به‌وصیّتها و تقسیم ارث ـ دشواریهایی وجود داشت و ریاضیات موجود، نمی‌توانست پاسخگوی آنها باشد خوارزمی را باید مبتکر «آلگوریتم محاسبه‌ای» و. بنابراین، پایه‌گذار «نظریهٔ انفورماتیک» دانست. خود واژهٔ «آلگوریتم»، که باترجمهٔ کتاب «حساب» **خوارزمی** به زبان لاتین، در ابتدا، به‌هرگونه محاسبهٔ عددی گفته می‌شد، همان شکل لاتینی شدهٔ نام «الخوارزمی» است. هنوز واژهٔ «جبر» هم، که امروز در همهٔ زبانها متداول گشته است به همان شکل خود حتی با حرف تعریف عربی «اَلْ» (به صورت «اَلْجَبْرْ»)] بیان می‌شود، که این نامگذاری یادگار «**خوارزمی**» برروی این شاخه از ریاضیات می‌باشد.

شما نمودار تابع باضابطهٔ $y=\frac{1}{2}ax^2$ $(a>0)$ را رسم می‌کنید. ولی بحث دربارهٔ $y=\frac{1}{2}ax^2$ و نمودار آن، که در ریاضیات، به‌صورتی انتزاعی و جدا از کاربرد آن انجام می‌گیرد، می‌تواند در عمل، بسیاری از مسأله‌های کاربردی را حل کند. اگر یکی از زاویه‌های حادهٔ مثلث قائم‌الزاویه‌ای را α و ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه و پهلوی این زاویه را x بگیرید، مساحت‌مثلث ـ که‌آن را S می‌نامیم ـ به‌صورت $S=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha . x^2$ در می‌آید که، در واقع، با معلوم بودن α، همان رابطهٔ $y=\frac{1}{2}ax^2$ است ($\operatorname{tg}\alpha=a$ ، $S=y$). در قانون سقوط آزاد یک جسم (که به‌وسیلهٔ **گالیله** کشف شد)، مسافتی که به‌وسیلهٔ جسم پیموده می‌شود (β) برحسب زمان (t)، بارابطهٔ $\beta=\frac{1}{2}gt^2$ بیان می‌شود ($g\approx 9/81$)؛ دراین‌هم به‌همان رابطهٔ $y=\frac{1}{2}ax^2$ ($\beta=y$، $t=x$ و $g=a$) می‌رسیم. مقدار حرارتی که ضمن عبور جریان برق، در واحد زمان تولید می‌شود، بادستور $Q=\frac{1}{2}RI^2$ به‌دست می‌آید که، درآن، I شدت جریان و R مقاومت سیم حامل برق است؛ همان رابطهٔ $y=\frac{1}{2}ax^2$ ($Q=y$ ، $R=a$ و $I=x$). انرژی جسمی را که حرکت‌می‌کند، برحسب جرم و سرعت آن، بارابطهٔ $E=\frac{1}{2}mv^2$ نشان می‌دهند؛ دوباره رابطهٔ $y=\frac{1}{2}ax^2$ ظاهر شد ($E=y$ ، $m=a$ و $v=x$) و...

می‌بینیم، بررسی تابع باضابطهٔ $y=\frac{1}{2}ax^2$، اگرچه به ظاهر عملی انتزاعی است و در آن، هیچ صحبتی ازنحوهٔ «بهتر زندگی کردن» نمی‌رود، در واقع، مشکل‌گشای بسیاری از مسأله‌های مربوط به زندگی و عمل است...

در «واژه نامهٔ ریاضی» خود، کاربردها را فراموش نکنید. جست‌وجو کنید آیا می‌توانید برای مفهوم یافرمولی که با آن سروکار

دارید، کاربردی عملی پیدا کنید؟ آیا خود این مفهوم یا فرمول، به‌طور مستقیم کاربردی عملی دارد، یاواسطه‌ای است برای رسیدن به مفهومها و فرمولهای دیگری که، از آنها می‌توان در عمل استفاده کرد. کاوش در پیدا کردن کاربردهای ریاضیات، مطالعهٔ آن را، دلپذیرتر و علاقهٔ شما را بیشتر می‌کند.

۶) سالها پیش، در تلویزیون بحثی فلسفی دربارهٔ «نظریهٔ شناخت» ترتیب داده‌بودند. بحث به «ذهنی بودن»، یا «عینی بودن» ریاضیات کشیده‌شد و تقریبا هردو طرف بحث، با کلی‌گویی و عبارات مبهم و حتی گاهی با یک ضرب‌المثل و یا یک بیت شعر، تلاش می‌کردند نظر خود را تحمیل کنند. یکی می‌گفت: «ریاضیات محصول ذهن آدمی است و هیچ ربطی به‌جهان مادی ندارد و، بنابراین نمی‌تواند به شناخت ما از جهان یاری برساند. اساس ریاضیات، بر «نقطه بنانهاده‌شده است و نقطه، یعنی «هیچ» و طبیعی است که نمی‌توان از «هیچ» به «همه‌چیز» رسید»؛ و دیگری پاسخ می‌داد؛ «ریاضیات، پایه همه دانشهای ماست. مثلا، اگر معادلهٔ درجهٔ دوم نبود، چگونه می‌توانستیم فضاپیهای خود را، به فضا بفرستیم؟» و...

دشواری ذهنی نفر اول این بود که می‌خواست، مثل فیثاغورس و ارسطو، از مجموع نقطه‌ها و باکنار هم گذاشتن آنها، خود را به «خط» و «سطح» و «جسم» برساند و، دست کم، از بررسیهای ریاضی خیام در مورد «نسبتها» اطلاع نداشت که: پاره‌خط راست، مجموعه‌ای متناهی از نقطه‌ها نیست و با پهلوی هم چیدن آنها به‌دست نمی‌آید، بلکه پاره‌خط راست را باید نتیجهٔ دو عامل دانست: «نقطه» و «حرکت»، خط، نه از نقطه‌های جدا ازهم، بلکه ضمن حرکت نقطه به‌دست می‌آید. حرکت، در ذات طبیعت است، حرکت، کیفیتی زاینده و آفریننده است، حرکت (در معنای عام خود)، عامل اصلی تغییرها و دگرگونیهای کیفی است.

اما پاسخ نفر دوم!: به‌کلی بی‌ربط و مبهم بود. چگونه معادله درجه دوم، موجب حرکت سفینه‌های فضایی می‌شود؟! چه رابطه‌ای بین این دو وجود دارد؟ آیا اگر کسی معادلهٔ درجهٔ دوم را بشناسد، به‌معنای آن‌است که از قانونهای مربوط به فرستادن سفینه‌ها به‌فضا آگاه‌است؟ این طور، سهل اندیشی و کلی‌گویی به یقین، ناشی از ناآگاهی آنها بوده است.

هرگز کلی‌گویی نکنید. دانش با شعاردادن، سازگارنیست. جمله‌های مبهم و نامفهوم ـ هرچند به ظاهر بتواند حقیقتی را بیان کند ـ چیزی را به شنونده نمی‌دهد. کسی که اهل دانش‌است، باید حرفهای خود را، مشخّص و بدون هیچ ابهامی عرضه کند، مثلا جمله‌های مبهم اداری، مانند عبارت: «باید ترتیب کارها داده شود» یا «ترتیبی بدهید که...» هرگز بااصول علمی مطابقت ندارد باید معلوم کرد که، این «ترتیب» کدام است و به چه نحوی باید داده‌شود؟ وگرنه برای هر مسأله‌ای به‌ابهام می‌توان نوشت: «ترتیبی بدهید تا مسأله حل شود».

هرجا که لازم است، مثال بزنید و نمونه بیاورید. دربیان هر مطلبی سعی کنید هم برای خودتان و هم برای دیگران، قانع کننده باشد. هیچگاه با یک «ضرب‌المثل» و یا با یک «بیت شعر» سروته مطلب را هم نیاورید. در هر زمانی وبرای هر مقصودی، می‌توان ضرب‌المثلها یا شعرهای متناقضی پیداکرد. می‌توان، برای «اثبات» تعلیم‌پذیری انسان و تأثیر آموزش «دلیل» آورد که:

دوستی با مردم دانا، چو زرّین کاسه‌است
نشکند، گربشکند، باید زنو پرداختن

یا:

دوستی با مردم نادان، سفالین کاسه‌است
بشکند، گر نشکند، باید به دور انداختن

این شیوه را، ادیبان ما «تمثیل» می‌خوانند و تمثیل، یعنی مثال آوردن و درست نیست که بااین روش ریاضیات را استدلال کنیم. مثال برای روشنتر کردن موضوع آورده می‌شود. در نوشته‌های باقی‌مانده از ریاضی‌دانان و محاسبان هزاره‌های پیش، گاه به گاه، به‌جای استدلال منطقی تنها از تمثیل سود می‌جستند. ریاضی‌دانان هند باستان اغلب برای اثبات یک قضیهٔ هندسی، شکل را رسم می‌کردند و، بدون هیچ توضیحی، در کنار آن می‌نوشتند «مشاهده کن». ولی شکل، یک مُدل است که می‌تواند با نارساییهایی همراه باشد. اندک اشتباه یا بی‌دقتی در رسم شکل می‌تواند ما را به نتیجه‌ای نادرست برساند. البته رسم شکل، برای عینی کردن مطلب لازم است، ولی اگر همراه بااستدلال منطقی نباشد، چیزی را نمی‌تواند ثابت کند.

علاوه براینها، شکل و مثال، اگر هم درست انتخاب شده باشد، ممکن است حالت خاصی از مسأله یا قضیه باشد و نتواند حالتهای

دیگر را توضیح بدهد. به این مثال توجه کنید:

در دنبالهٔ عددهای

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots \qquad (1)$$

سه جملهٔ بعدی و، به طور کلی، جملهٔ عمومی را پیدا کنید.

در نظر اول می‌توان بلافاصله پاسخ را داد: سه جملهٔ بعدی عبارت‌انداز: ٦ ، ۷ و ۸ و جملهٔ عمومی دنبالهٔ (۱) به صورت $a_n=n$ است (a_n ، یعنی جمله nام دنباله).

ولی اگر اندکی دقت کنیم، این مسأله، بی‌نهایت جواب دارد. می‌توان جملهٔ عمومی دنبالهٔ (۱) رابه‌صورت:

$$a_n = \frac{1}{120}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)+n$$

درنظر گرفت که، دراین صورت، سه جملهٔ بعدی چنین می‌شود:

$$a_6=7 \qquad a_7=13 \qquad a_8=29$$

پاسخ درست، برای جمله عمومی دنبالهٔ (۱) را می‌توان به‌صورت

$$a_n= A\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5)+n \qquad (2)$$

نوشت که، درآن، A می‌تواند هرعددی (گویا یا گنگ) باشد و، دراین صورت، سه جملهٔ بعدی دنبالهٔ (۱) چنین‌اند:

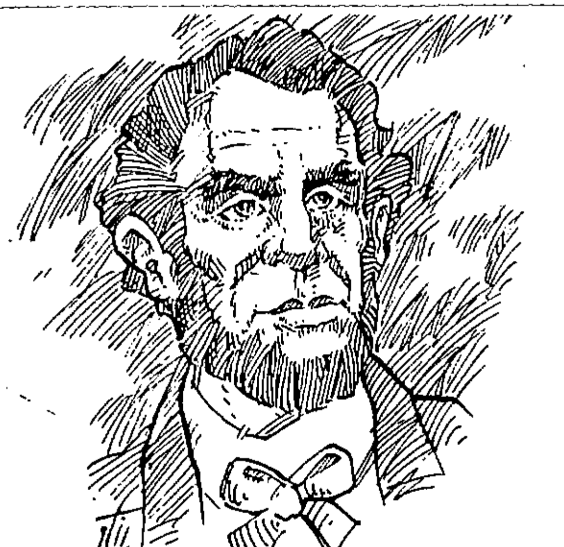
$$a_6= 120A+6,\ a_7= 720A+7,\ a_8= 2520A+8.$$

که به‌ازای $A=0$ ، همان عددهای ٦ ، ۷ ، ۸ به‌دست می‌آیند. اکنون، خودتان در این باره بیندیشید: آیا برابری (۲)؛ برای جملهٔ عمومی دنبالهٔ (۱) ، واقعاً کلی است؟ آیا می‌توان جمله عمومی دنباله (۱) رابه‌صورت دیگری نوشت و، برای سه جمله‌بعدی، عددهایی به‌دست آورد که از برابری (۲) به‌دست نمی‌آیند؟ آیا براین نتیجه‌گیری که گمان برده‌ایم، برابری (۲)، حل مسأله را به پایان رسانده است، درست است؟

واژه نامهٔ ریاضی شما باید روشن، قابل فهم، قانع کننده، منطقی و به دور از هر ابهامی باشد. نظر یک دانشمند، یا یک شاعر و فیلسوف را می‌توان نقل کرد، ولی به یاد داشته باشید که، این نقل قول، تنها می‌تواند به‌عنوان خلاصه‌ای از نظر شما و به‌عنوان تأکیدی برآنچه ثابت کرده‌اید، باشد، نه به‌عنوان تنها استدلال شما. ضرب‌المثل، شعر، نقل قول، جمله‌های مبهم و شعارگونه، هر قدر آراسته و دلپذیر باشند، نمی‌توانند به‌جای استدلال منطقی بنشینند و نقش آن رابه‌عهده بگیرند.

تابعد

ادب ریاضی



اززمانی‌که عضو کنگره شد شش کتاب اقلیدس را مطالعه‌کرد و تقریباً درآن مهارت‌یافت. دوره‌ای از انضباط سخت‌روحی‌را با نیت اصلاح استعدادهای ذهنی خود، به‌خصوص توانائیهای منطق و زبانش، آغازکرد. ازاین‌جا می‌توان شیفتگی‌اش رابه‌اقلیدس تازمانی‌که توانست هر شش‌کتاب اقلیدس رابه‌راحتی اثبات‌کند، دریافت.

آبراهام لینکلن (نوشتهٔ خودش)

اتوبیوگرافی کوتاه

نکاتی درباره توابع متناوب یا توابع دوره‌ای

احمد قندهاری

تعریف: تابع f را وقتی «متناوب» یا «دوره‌ای» گوییم که عدد مثبتی مانند T_{1} وجود داشته‌باشد به طوری که:

$$\forall x \in D_f \implies (x+T_{1}) \in D_f \wedge f(x+T_{1})=f(x)$$

در این صورت کوچکترین مقدار T_{1} را T می‌نامیم و T را «دوره» یا «تناوب» اساسی تابع f گوییم.

مثلاً در تابع $f(x)=\sin x$ داریم:

$$\sin(x+2k\pi)=\sin x \implies f(x+2k\pi)=f(x)$$

$$\implies T_{1}=2k\pi \implies T=2\pi$$

$T=2\pi$ را «دوره» یا «تناوب» اساسی تابع گوییم.

همچنین در تابع $f(x)=tg\,x$ داریم:

$$tg(x+k\pi)=tg\,x$$

$$\implies f(x+k\pi)=f(x) \implies$$

$$T_{1}=k\pi \implies T=\pi$$

$T=\pi$ را دوره یا تناوب اساسی تابع گوییم.

۱- تناوب اساسی توابع:

$\sin^{2n}ax$ و $\cos^{2n}ax$ و $tg^{n}ax$ و $cotg^{n}ax$

$n\in N$ برابر $(\frac{\pi}{a})$ است. $a>0$

اثبات: درمورد $f(x)=\sin^{2n}ax$ ثابت می‌کنیم تناوب اساسی $(\frac{\pi}{a})$ است.

می‌دانیم:

$$\sin^{2n}(ax+k\pi)=\sin^{2n}ax$$

$$f(x+T_{1})=\sin^{2n}a(x+T_{1})=\sin^{2n}(ax+aT_{1})$$

اگر:

$$aT_{1}=k\pi \implies f(x+T_{1})=\sin^{2n}(ax+k\pi)$$

$$=\sin^{2n}ax=f(x)$$

پس $K\in Z$:

$$aT_{1}=k\pi \implies T_{1}=\frac{k\pi}{a} \implies \boxed{T=\frac{\pi}{a}}$$

مثال: $n\in N$

$$f(x)=\sin^{2n}4x \implies T=\frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{4}$$

۲- تناوب اساسی توابع $\sin^{2n-1}ax$ و $\cos^{2n-1}ax$ برابر $(\frac{2\pi}{a})$ است.

$n\in N$ و $a>0$

اثبات: در مورد $f(x)=\cos^{2n-1}ax$ ثابت می‌کنیم:

$$T=\frac{2\pi}{a}$$

می‌دانیم:

$$\cos^{2n-1}(ax+2k\pi)=\cos^{2n-1}ax$$

$$f(x+T_{1})=\cos^{2n-1}a(x+T_{1})=\cos^{2n-1}(ax+aT_{1})$$

اگر :

$$aT_1 = 2k\pi \Longrightarrow f(x=T_1)$$
$$= \cos^{2n-1}(ax+2k\pi) = \cos^{2n-1}ax = f(x)$$

پس

$$aT_1 = 2k\pi \Longrightarrow T_1 = \frac{2k\pi}{a} \Longrightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{a}}$$

مثال :

$$f(x) = \sin^7 6x \Longrightarrow T = \frac{2\pi}{a} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

۳- تناوب اساسی تـابع $f(x) = nx - [nx]$ برابر $(\frac{1}{n})$ است .

اثبات:

$$f(x) = nx - [nx]$$
$$f(x+T_1) = n(x+T_1) - [n(x+T_1)]$$
$$f(x+T_1) = nx + nT_1 - [nx + nT_1]$$

اگر nT_1 عدد صحیح باشد ، داریم:

$$nT_1 = K \in Z \quad .$$
$$f(x+T_1) = nx + nT_1 - [nx] - nT_1 =$$
$$nx - [nx] = f(x) \Longrightarrow nT_1 = K \quad , \quad K \in Z$$
$$T_1 = \frac{k}{n} \Longrightarrow \boxed{T = \frac{1}{n}}$$

۴- اگر تابعی ازچند تابع تشکیل‌شده باشد،کوچکترین مضرب مشترك، تناوبهای‌اساسی‌آنها، تناوب اساسی تابع‌اصلی خواهد بود .

مثال : تناوب اساسی تابع

$$f(x) = \sin\frac{3x}{2} + \cos\frac{4x}{3} + tg\frac{4x}{3}$$

را بیابید .

حل :

$$T_{\sin\frac{3x}{2}} = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{4\pi}{3}$$

$$T_{\cos\frac{4x}{3}} = \frac{2\pi}{\frac{4}{3}} = \frac{3\pi}{2}$$

$$T_{tg\frac{4x}{3}} = \frac{\pi}{\frac{4}{3}} = \frac{3\pi}{4}$$

حال باید بین $\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{2}$ و $\frac{4\pi}{3}$ کـوچکتریـن مضرب مشترك‌را گرفت. برای تعیین کوچکترین مضرب‌مشترك‌چند کسر، کافیست از صورتهـای کسر کوچکتریـن مضرب مشترك و از مخرجهای‌آن بزرگترین مقسوم علیه مشترك‌را گرفت.

$$4\pi \quad 3\pi \quad 3\pi \Longrightarrow 12\pi = \text{ك م م}$$
$$3 \quad 2 \quad 4 \Longrightarrow 1 = \text{ب م م}$$
$$\Longrightarrow T_{f(x)} = 12\pi$$

۵- يك‌تابع ممکن‌است متناوب‌باشد ولی‌تناوب اساسی نداشته باشد مانند:

$f(x) = c$ تابع ثابت

زیرا :

$$\forall x \in R : (x+T_1) \in R \wedge f(x+T_1) = f(x) = c$$

امـا برای این تـابـع کوچکتریـن مقدار مثبت T_1 وجـود ندارد .

پس‌تابع‌ثابت $f(x) = c$ متناوب‌هست ولی‌تناوب‌اساسی ندارد .

۶- اگرکمان یک تابع مثلثاتی به صورت $(ax+b)$ نباشد، تابع متناوب نیست. مثلاً توابع:

$$h(x)=tg\frac{1}{x} \text{ و } g(x)=\cos x^2 \text{ و } f(x)=\sin\sqrt{x}$$

متناوب نمی‌باشد.

۷- اگر f تابعی متناوب وتناوب اساسی داشته باشدآن گاه تابع $|f|$ نیز متناوب‌است.

در بعضی‌ازتوابع، تناوب‌اساسی تابع $|f|$ برابرتناوب اساسی‌تابع f است ودر بعضی از توابع تناوب اساسی‌تابع $|f|$ نصف‌تناوب‌اساسی‌تابع f است. برای‌راحت‌ترپیدا کردن‌تناوب اساسی‌تابع $|f|$ بهتراست، T تناوب اساسی تابع f را نصف کرده درتابع $|f|$ به‌صورت زیربررسی کنیم:

اگر درتابع $g(x)=|f|$ داشته‌باشیم:

$$\forall x\in D_g : g(x+\frac{T}{2})=g(x)$$

نتیجه می‌گیریم: تناوب اساسی تابع $|f|$، $(\frac{T}{2})$ است.

در غیر این صورت تناوب اساسی تابع $|f|$ همان (T) است.

مثال ۱: تناوب اساسی تابع g را بیابید:

$$g(x)=|\sin^2x+\sin x|$$

$$T_{(\sin^2x+\sin x)}=2\pi$$

$$g(x+\pi)=|\sin^2(x+\pi)+\sin(x+\pi)|=$$

$$|\sin^2x-\sin x|\neq g(x) \implies T_{g(x)}=2\pi$$

مثال ۲: تناوب اساسی تابع g را بیابید:

$$g(x)=|tgx+cotgx|$$

$$T_{(tgx+cotgx)}=\pi$$

$$g(x+\frac{\pi}{2})=\left|tg(x+\frac{\pi}{2})+cotg(x+\frac{\pi}{2})\right|$$

$$=|-cotgx-tgx|=|tgx+cotgx|=g(x)$$

$$\implies T_{g(x)}=\frac{\pi}{2}$$

۸- اگرتابعی تناوب‌اساسی داشته باشد. چنانچه به‌کمک فرمولها،شکل‌ظاهری آن‌راعوض کنیم و تناوب‌اساسی کوچکتری حاصل‌شود، آن تناوب اساسی‌کوچکتر، تناوب اساسی تابع خواهد بود.

مثال: تناوب اساسی تابع به معادله:

$$f(x)=\sin^2x+\cos^4x$$

را بیابید.

تناوب اساسی تابع ظاهراً: $T=\pi$.

اما:

$$f(x)=\sin^2x+(\cos^2x)^2$$

$$=\frac{1-\cos 2x}{2}+(\frac{1+\cos 2x}{2})^2$$

$$f(x)=\frac{2-2\cos 2x+1+\cos^2 2x+2\cos 2x}{4}$$

$$=\frac{3+\cos^2 2x}{4} \implies T_{\text{جدید}}=\frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{2}$$

$$\implies T_{f(x)}=\frac{\pi}{2}$$

۹- اگر f تابعی متناوب باتناوب‌اساسی T باشد،آن‌گاه توابع $f>0$ $\sqrt[n]{f}$, $\sin(f)$ ، $tg(f)$ ، $cotg(f)$, $Arc\sin(f)$ و $Arc\cos(f)$ ، $Arctg(f)$, $Arccotg(f)$, $cosec(f)$, $f>0$ $\log(f)$ نیز متناوب‌اند و تناوب اساسی آنها همان (T) است.

اثبات: اگر f تابعی متناوب با تناوب‌اساسی(T) باشد، ثابت می‌شود تـابع : $g(x)=\operatorname{Arccotg}(f(x))$ نیز متناوب است و تناوب اساسی آن همان (T) است.

داریم :

$$\forall x\in D_f:(x+T)\in D_f \wedge f(x+T)=f(x)$$

$$\Longrightarrow g(x+T)=\operatorname{Arccotg}(f(x+T))$$

$$=\operatorname{Arccotg}(f(x))=g(x)$$

توجه: در مورد تابع $\sqrt[n]{f}$ ، اگـر n زوج و $f>0$ ، ممکن‌است بخشی‌از فاصلهٔ تناوب‌اساسی‌در دامنهٔ‌تابع‌قرار گیرد مثلا در تابع $f(x)=\sqrt{\sin x}$ ، $T=2\pi$ و اگر فاصلهٔ تناوب را $[0\ ,\ 2\pi]$ اختیارکنیم فـاصلهٔ $(\pi\ ,\ 2\pi)$ عضو دامنهٔ $f(x)$ نیست.

۱۰- اگر f تابعی متناوب‌با تناوب اساسی T باشد، آن گاه توابع $g(x)=\cos(f(x))$ و $g(x)=\sec(f(x))$ نیز متناوب‌است. برای‌تعیین تناوب‌اساسی تابع g ، می‌توان چنین عمل‌کرد :

اگـر $\forall_x\in D_g:g(x+\frac{T}{2})=g(x)$ نتیجه‌می‌گیریم تناوب‌اساسی تابع g ، $(\frac{T}{2})$ است، درغیراین‌صورت‌تناوب اساسی‌تابع g همان T خواهد شد.

مثال : تناوب‌اساسی تابع به معادلهٔ

$$g(x)=\sec(\sin x)$$

را بیابید.

داریم: $T_{(\sin x)}=2\pi$

$$g(x+\pi)=\sec(\sin(x+\pi))=\sec(-\sin x)$$

$$=\sec(\sin x)=g(x)\Longrightarrow T_{g(x)}=\pi$$

۱۱- تناوب اساسی چهارتابع زیر $\frac{\pi}{2a}$ است:

$$f_1(x)=\sin^{2n}ax+\cos^{2n}ax \qquad n\in N\ ,\ n\neq 1$$

$$f_2(x)=tg^{2n}ax+cotg^{2n}ax \qquad n\in N$$

$$f_3(x)=|\sin^n ax|+|\cos^n ax| \qquad n\in N\ ,\ n\neq 2$$

$$f_4(x)=|tg^n ax|+|cotg^n ax| \qquad n\in N$$

اثبات: ثابت می‌کنیم تناوب اساسی تابع

$$f_1(x)=\sin^{2n}ax+\cos^{2n}ax$$

$n\in N$ و $n\neq 1$ برابر $\frac{\pi}{2a}$ است.

فرض می‌کنیم تناوب تابع f برابر T_1 باشد:

$$f(x+T_1)=\sin^{2n}a(x+T_1)+\cos^{2n}a(x+T_1)$$

$$f(x+T_1)=\sin^{2n}(ax+aT_1)+\cos^{2n}(ax+aT_1)$$

اگر

$$aT_1=\frac{(2k-1)\pi}{2}\Longrightarrow f(x+T_1)=f(x)$$

زیرا :

$$\begin{cases}\sin^{2n}(ax+\frac{(2k-1)\pi}{2})=\cos^{2n}ax\\ \cos^{2n}(ax+\frac{(2k-1)\pi}{2})=\sin^{2n}ax\end{cases}$$

$$\Longrightarrow aT_1=\frac{(2k-1)\pi}{2}$$

$$\Longrightarrow T_1=\frac{(2k-1)\pi}{2a}\Longrightarrow \boxed{T=\frac{\pi}{2a}}$$

مثال : تناوب اساسی تـابع $f(x)=\sin^6x+\cos^6x$ را بیابید.

حل : بنا به دستور شماره (۱۱)

$$T=\frac{\pi}{2a}=\frac{\pi}{2}$$

راه دوم :

$$f(x)=\sin^6x+\cos^6x=1-3\sin^2x\cos^2x$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x \implies T=\frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{2}$$

۱۲- توابعی نظیر تابع $f(x)=\sin\pi x+\cos 2x$ متناوب نیست، زیرا:

$$T_{\sin\pi x}=\frac{2\pi}{a}=\frac{2\pi}{\pi}=2$$

$$T_{\cos 2x}=\frac{2\pi}{a}=\frac{2\pi}{2}=\pi$$

چون بین دو عدد (۲) و (π) کوچکترین مضرب مشترك وجود ندارد . پس تابع متناوب نیست .

همچنین توابعی نظیر تابع ؛

$$f(x)=\sin\frac{x}{\sqrt{2}}+\cos\frac{x}{\sqrt{3}}$$

متناوب نمی‌باشد زیرا؛ مانند مثال قبل بین تناوبهای اساسی توابع $\sin\frac{x}{\sqrt{2}}$ و $\cos\frac{x}{\sqrt{3}}$ کوچکترین مضرب مشترك وجود ندارد.

۱۳- تابع $f(x)=\cos|x|$ متناوب است و تناوب اساسی آن (2π) است زیرا: $\cos|x|=\cos x$

ولی توابع $\sin|x|$ و $tg|x|$ و $cotg|x|$ متناوب نیست. (چرا؟)

۱۴- توابع مرکب جبری ومثلثاتی مانند تابع

$$f(x)=x^2-4x+\sin x$$

متناوب نیست. ولی می‌توان توابع مرکبی ساخت که قسمت جبری آن به فرم $nx-[nx]$ باشد ومتناوب هم باشد.

مانند: تابع $f(x)=2x-[2x]+\sin\pi x$

زیرا :

$$\begin{cases}T_{(2x-[2x])}=\frac{1}{2}\\ T_{\sin\pi x}=2\end{cases}$$

بین (۲) و ($\frac{1}{2}$) کوچکترین مضرب مشترك(۲) است

پس: $T_{f(x)}=2$.

۱۵- اگر :

$$f(x)=\frac{a\sin x+b\cos x}{a'\sin x+b'\cos x}\ ،\ \frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$$

اگر به همین‌صورت تناوب‌اساسی‌را پیداکنیم $T=2\pi$ خواهد شد ولی اگر عوامل کسر را بر $\cos x\neq 0$ تقسیم کنیم آن گاه $f(x)=\frac{a\,tgx+b}{a'\,tgx+b'}$ که دراین‌صورت: $T=\pi$ خواهدشد.

پس: $T_{f(x)}=\pi$.

۱۶- اگرمعادلهٔ تابع به صورت حاصل ضرب سینوسها و کسینوسها باشد، باید آن‌را به حاصل جمع تبدیل کنیم سپس تناوب اساسی تابع‌را تعیین کنیم.

مثال .

$$f(x)=2\sin\frac{7x}{2}\cdot\sin\frac{3x}{2}$$

$$f(x)=\cos\left(\frac{7x}{2}-\frac{3x}{2}\right)-\cos\left(\frac{7x}{2}+\frac{3x}{2}\right)$$

$$=\cos 2x-\cos 5x$$

$$T_{\cos 2x}=\pi\ ,\ T_{\cos 5x}=\frac{2\pi}{5}\implies T_{f(x)}=2\pi$$

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی

Vector Algebra

P. Gusyatnikov and S. Reznichenko

غلامرضا یاسی‌پور

خوانندهٔ عزیز! همانطور که در سرمقالهٔ شمارهٔ پیش وعده داده بودیم از این شماره به بعد قسمتی از مجله را به ترجمهٔ متون ریاضی اختصاص می‌دهیم در آن سعی بر این داریم که اولاً متنی را انتخاب کنیم که به‌کار دروس ریاضی شما بیاید و ثانیاً آن‌را چنان ارائه دهیم که به‌آموزش فن‌ترجمه کمك کند و به این ترتیب بایك عمل به دو هدف برسیم و برای این کار هم متن اصلی را که به زبان انگلیسی است می‌آوریم و هم ترجمهٔ آن را وهم معانی فارسی اصطلاحات آن را ، بنابراین لازم است که خوانندهٔ علاقه‌مندی که مایل به آموختن فن ترجمه است ابتدا اصطلاحات مزبور را بیاموزد وسپس به ترجمه بپردازد و درآخر آن را با ترجمهٔ داده‌شده مقایسه کند و خطاهای احتمالی خود را بیابد ودر ضمن ازآموختن موضوع آمـده شده در متن غافل نماند و توفیق از خداوند متعال است.

Complex Numbers

Sec. 5.1. Complex Numbers and Operations on Them

اعداد مختلط

بخش ۱. اعداد مختلط و اعمال راجع به‌آنها

Consider the set C whose elements are all possible ordered pairs z of real numbers: (a, b), $a \in R$, $b \in R$. Let us introduce into this set the notion of equality of elements and define the basic arithmetic operations in the following way.

Let z_1 be an ordered pair (a_1, b_1), and z_2 an ordered pair (a_2, b_2). The ordered pairs z_1 and z_2 are said to be *equal* (written: $z_1 = z_2$) if and only if $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$. In other words, $z_1 = z_2$ if and only if z_1 and z_2 represent the same ordered pair of real numbers.

مجموعهٔ C ، کـه عناصرش جمیع جفتهای ممکن اعداد حقیقی z اند ، یعنی، $b \in R$ و $a \in R$ و (a , b) ، را در نظر می‌گیریم. دراین مجموعه وبه‌طریق زیر، مفهوم تساوی عناصر را معرفی واعمال‌حسابی اساسی (چهار عمل اصلی حساب) را تعریف می‌کنیم.

فرض می‌کنیم z_1 جفت مرتب (a_1 , b_1) ، و z_2 جفت مرتب (a_2 , b_2) بـاشد. جفتهای مـرتب z_1 و z_2 را مساوی می‌گویند (و $z_1 = z_2$ می‌نویسند) اگر و تنها اگر $a_1 = a_2$ ، $b_1 = b_2$. به عبارت‌دیگر، $z_1 = z_2$ اگر و تنها اگر z_1 و z_2 یك‌جفت مرتب از اعداد حقیقی‌را نمایش دهند.

The *sum* $z_1 + z_2$ of ordered pairs $z_1 = (a_1, b_1)$ and $z_2 = (a_2, b_2)$ is defined as an ordered pair $(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$. The *product* $z_1 z_2$ of ordered pairs z_1 and z_2 is defined as an ordered pair $(a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2)$.

For example, if $z_1 = (1, 2)$, $z_2 = (5, -3)$, then $z_1 + z_2 = (1 + 5, 2 + (-3)) = (6, -1)$, $z_1 z_2 = (1 \cdot 5 - 2 \cdot (-3), 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 5) = (11, 7)$.

The *difference* $z_1 - z_2$ of ordered pairs z_1 and z_2 is defined as an ordered pair $(a_1 - a_2, b_1 - b_2)$. If $a_2^2 + b_2^2 >$

0), then the *quotient* $\frac{z_1}{z_2}$ of ordered pairs z_1 and z_2 is defined as the ordered pair

$$\left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2},\ \frac{-a_1b_2+b_1a_2}{a_2^2+b_2^2}\right).$$

For example, if $z_1=(0,\ 5)$ and $z_2=(1,\ -2)$ then $z_1-z_2=(0-1,\ 5-(-2))=(-1,\ 7)$;

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(0,\ 5)}{(1,\ -2)}=\frac{0\cdot 1+5\cdot(-2)}{1^2+(-2)^2},\quad \frac{-0\cdot(-2)+5\cdot 1}{1^2+(-2)^2}=(-2,\ 1).$$

A set C of ordered pairs $z=(a,\ b)$ of real numbers $a\in R$, $b\in R$ in which the notion of equality and arithmetic operations are introduced by the above method is called the set of *complex numbers*. Any element $z=(a,\ b)\in C$ is termed a *complex number*.

A complex number of the form $(a,\ 0)$, where a is a real number, is identified with the real number a itself and is denoted by the same letter, that is, we write $(a,\ 0)=a\in R$. In such identification, the operations on real numbers and complex numbers corresponding to them are agreed: if $a_1\in R$, $a_2\in R$, then

$$(a_1,\ 0)\pm(a_2,\ 0)=(a_1\pm a_2,\ 0)=a_1\pm a_2;$$
$$(a_1,\ 0)\cdot(a_2,\ 0)=(a_1a_2-0\cdot 0,\ a_1\cdot 0+0\cdot a_2)$$
$$=(a_1a_2,\ 0)=a_1a_2;$$
$$a_2\neq 0\Rightarrow\frac{(a_1,\ 0)}{(a_2,\ 0)}=\left(\frac{a_1a_2+0\cdot 0}{a_2^2+0^2},\ \frac{-a_1\cdot 0+0\cdot a_2}{a_2^2+0^2}\right)$$
$$=\left(\frac{a_1}{a_2},\ 0\right)=\frac{a_1}{a_2}.$$

مجموع z_1+z_2 ی جفتهای مرتب $z_1=(a_1,\ b_1)$ و $z_2=(a_2,b_2)$ به صورت جفت مرتب (a_1+a_2,b_1+b_2) تعریف می‌شود. z_1z_2 حاصل‌ضرب جفتهای مرتب z_1 و z_2 به صورت‌جفت مرتب $(a_1a_2-b_1b_2\ ,\ a_1b_2+b_1a_2)$ تعریف شده است.

به عنوان مثال: اگـر $z_1=(1,2)$، $z_2=(5,-3)$، در این صورت:

$$z_1+z_2=(1+5,2+(-3))=(6,-1)$$
$$z_1z_2=(1\cdot 5-2\cdot(-3)\ ,$$
$$1\cdot(-3)+2\cdot 5)=(11,7)$$

z_1-z_2، تفاضل جفتهای مرتب z_1 و z_2 بـه صورت جفت مـرتب $(a_1-a_2\ ,\ b_1-b_2)$ تعریف می‌شود. اگـر $a_2^2+b_2^2>0$ این‌صورت، $\frac{z_1}{z_2}$، خارج قسمت جفتهای مرتب z_1 و z_2، به صورت‌جفت مرتب:

$$\left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2},\frac{-a_1b_2+b_1a_2}{a_2^2+b_2^2}\right)$$

تعریف می‌شود.

به عنوان مثال: اگر $z_1=(0,5)$ و $z_2=(1,-2)$، دراین صورت:

$$z_1-z_2=(0-1,5-(-2))=(-1,7)$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(0,5)}{(1,-2)}=$$
$$\frac{0\cdot 1+5\cdot(-2)}{1^2+(-2)^2},\frac{-0\cdot(-2)+5\cdot 1}{1^2+(-2)^2}=(-2,1)$$

مجموعهٔ C ازجفتهای‌مرتب $z=(a,b)$ از اعدادحقیقی $a\in R$، $b\in R$ کـه در آن مفهوم تساوی و اعمال حسابی، بـا استفاده‌از روش‌فوق، معرفی‌شده‌اند مجموعهٔ‌اعدادمختلط نامیده می‌شود. هرعنصر $z=(a\ ,\ b)\in C$، به عدد مختلط مصطلح است.

عدد مختلط به‌صورت $(a,0)$، که در آن a عددی‌حقیقی است، باخود عدد حقیقی a یکی‌است و با همین حرف نمایش داده می‌شود، یعنی، می نویسیم

$$(a,0)=a\in R$$

در یکی سازی‌ای چنین، اعمال راجع بـه اعداد حقیقی واعداد مختلط متناظر با آنها سازگارند: اگر $a_1\in R$، $a_2\in R$، در این صورت:

$$(a_1,0)\pm(a_2,0)=(a_1\pm a_2,0)=a_1\pm a_2$$
$$(a_1,0)\cdot(a_2,0)=(a_1a_2-0\cdot 0,a_1\cdot 0+0\cdot a_2)$$
$$=(a_1a_2,0)=a_1a_2$$
$$a_2\neq 0\Longrightarrow\frac{(a_1,0)}{(a_2,0)}=$$
$$\left(\frac{a_1a_2+0\cdot 0}{a_2^2+0^2},\frac{-a_1\cdot 0+0\cdot a_2}{a_2^2+0^2}\right)=\left(\frac{a_1}{a_2},0\right)=\frac{a_1}{a_2}$$

The complex number (0, 1) is called the *imaginary unit*; it is denoted by i:

$$i = (0,\ 1).$$

The complex number $0 = (0,\ 0)$ is called *zero*.

The elements of the set C are sometimes called simply numbers (if it is clear that complex numbers are meant).

The operations of finding the sum and difference of complex numbers z_1 and z_2 are called the addition and subtraction of the numbers z_1 and z_2, respectively, and the operations of finding the product and quotient of the complex numbers z_1 and z_2 the multiplication and division of the number z_1 by the number z_2, respectively. The division of a complex number z by the complex number 0 is not defined. The product of the complex numbers z_1 and z_2 is sometimes denoted by $z_1 \cdot z_2$. For any natural number n the *power* z^n of the complex number z is determined by induction in the following way: $z^1 = z$, $z^n = z \cdot z^{n-1}$, $n \geqslant 2$.

If $z = (a,\ b)$ is a complex number, then the complex number $(-a,\ -b)$ is said to be *opposite* to the complex number z and is symbolized as $-z$. The complex number $(a,\ -b)$ is called the *complex conjugate* of the number z; it is denoted by $\bar{z}$. The *modulus* $|z|$ of a complex number $z = (a,\ b)$ is defined as a nonnegative real number $\sqrt{a^2 + b^2}$. Thus,

$$z = (a,\ b) \Rightarrow -z = (-a,\ -b),\quad \bar{z} = (a,\ -b),$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

عدد مختلط $(۰,۱)$ به واحد انگاری موسوم‌است؛ و با i نمایش داده می‌شود:

$$i = (۰,۱)$$

عدد مختلط $۰ = (۰,۰)$ به صفر موسوم می‌باشد.

عناصرمجموعهٔ C را گاهی (ودرصورتی‌که آشکار باشد که به معنی‌عدد مختلط‌اند) به‌طور ساده عدد می‌نامند.

اعمال‌یافتن مجموع و تفاضل اعداد مختلط $z_۱$ و $z_۲$، به ترتیب، جمع وتفریق اعداد $z_۱$ و $z_۲$ نامیده‌می‌شوند، و اعمال پیداکردن حاصل‌ضرب وخارج‌قسمت دوعدد مختلط $z_۱$ و $z_۲$، به ترتیب به ضرب و تقسیم عدد $z_۱$ و عدد $z_۲$ موسومند. تقسیم عدد مختلط z برعدد مختلط ۰ تعریف نشده است. حاصل‌ضرب اعداد مختلط $z_۱$ و $z_۲$، گاهی: با $z_۱ . z_۲$ نمایش‌داده می‌شود. توان z^n از عدد مختلط z، به ازای‌هرعدد طبیعی n، با استفاده از استقرا و به‌طریق زیرمعین می‌شود:

$$z^۱ = z \quad , \quad z^n = z \cdot z^{n-۱} \ , \ n \geqslant ۲$$

اگر $z = (a, b)$ عددی مختلط باشد، دراین‌صورت عدد مختلط $(-a\ , -b)$ را مقابل عدد مختلط z می‌گویند و به صورت $-z$ علامتی می‌کنند. عدد مختلط $(a\ , -b)$ به مزدوج مختلط عدد z موسوم است؛ و با $\bar{z}$ نمایش داده می‌شود. $|z|$، قدر مطلق عدد مختلط $z = (a, b)$ به‌صورت عددحقیقی‌نامنفی $\sqrt{a^۲ + b^۲}$ تعریف‌شده است. به این‌ترتیب،

$$z = (a\ ,\ b) \implies -z = (-a\ ,\ -b)\ ,$$

$$\bar{z} = (a\ , -b)$$

$$|z| = \sqrt{a^۲ + b^۲}$$

If $z = (a,\ 0) = a \in R$, then $|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = |a|$, that is, the modulus of a complex number identified with a real number a is equal to the absolute value of the real number a.

Example 5.1.1. Prove that if $z = -z$, then $z = 0$, if $z = \bar{z}$, then $z \in R$.

△ Let $z = (a,\ b)$, $z = -z$, that is, $(a,\ b) = (-a,\ -b)$. By the definition of equality of complex numbers, $a = -a$, $b = -b$, $2a = 2b = 0$. Thus, $a = b = 0$, $z = (a,\ b) = (0,\ 0) = 0$.

If $z = \bar{z}$, that is $(a,\ b) = (a,\ -b)$, then $a = a$, $b = -b$. In this case $2b = 0$, $b = 0$. This means that $z = (a,\ b) = (a,\ 0) = a \in R$. ▲

Example 5.1.2. Prove that for any real numbers c and d $(d \neq 0)$ and any complex number $z = (a,\ b)$ the following equalities are fulfilled:

$$cz = (ca,\ cb),\quad \frac{z}{d} = \left(\frac{a}{d},\ \frac{b}{d}\right) \qquad (5.1)$$

(on the right-hand side of these equalities, c and d are understood as real numbers, whereas on the left-hand side as complex numbers $(c,\ 0)$ and $(d,\ 0)$).

△ $c \cdot z = (c,\ 0)(a,\ b) = (ca - 0 \cdot b,\ cb + 0 \cdot a) = (ca,\ cb)$;

$$\frac{z}{d} = \frac{(a,\ b)}{(d,\ 0)} = \left(\frac{ad + b \cdot 0}{d^2 + 0^2},\ \frac{-a \cdot 0 + bd}{d^2 + 0^2}\right) = \left(\frac{a}{d},\ \frac{b}{d}\right).$$

The formula (5.1), in particular, implies that

$$1 \cdot z = (1 \cdot a,\ 1 \cdot b) = (a,\ b) = z,\ (-1) \cdot z = ((-1) \cdot a,$$

$$(-1) \cdot b) = (-a,\ -b) = -z,$$

$$\frac{z}{1} = \left(\frac{a}{1},\ \frac{b}{1}\right) = (a,\ b) = z,$$

$$\frac{z}{-1} = \left(\frac{a}{-1},\ \frac{b}{-1}\right) = (-a,\ -b) = -z. \quad (5.2)$$

اگر $z=(a,0)=a\in R$ ، دراین صورت:

$$|z|=\sqrt{a^2+0^2}=|a|$$

یعنی، قدرمطلق عدد مختلط یکسان با عددحقیقی a ، برابر قدر مطلق عددحقیقی a است.

مثال ۱.۰۱. ثابت کنید که اگر $z=-z$ ، در این صورت $z=0$ ، اگر $z=\bar{z}$ ، دراین‌صورت $z\in R$.

Δ فرض می‌کنیم $z=(a,b)$ ، $z=-z$ ، یعنی،

$$(a,b)=(-a,-b)$$

بنا به تعریف تساوی اعداد مختلط، $a=-a$ ، $b=-b$ ، $2a=2b=0$. به این ترتیب، $a=b=0$ ،

$$z=(a,b)=(0,0)=0$$

اگر $z=\bar{z}$ ، یعنی $(a,b)=(a,-b)$ ، دراین‌صورت $a=a$ ، $b=-b$. دراین‌حالت $2b=0$ ، $b=0$. این بدان معنی است که

$$z=(a,b)=(a,0)=a\in R \quad \Delta$$

مثال ۱.۰۲. ثابت کنید که به‌ازای هرعدد حقیقی c و d، $(d\neq 0)$ و هرعدد مختلط $z=(a\ ,\ b)$ ، تساویهای زیر برقرارند:

$$cz=(ca,cb),\qquad \frac{z}{d}=\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right) \qquad (1)$$

(c و d ، در سمت‌راست این تساویها ، به صورت اعداد حقیقی درنظر گرفته می‌شوند، درحالی که در سمت‌چپ آنها، به‌صورت اعداد مختلط $(c,0)$ و $(d,0)$ دانسته می‌شوند).

Δ

$$c\cdot z=(c,0)(a,b)=(ca-0\cdot b,\ cb+0\cdot a)$$
$$=(ca,cb)$$

$$\frac{z}{d}=\frac{(a,b)}{(d,0)}=\left(\frac{ad+b\cdot 0}{d^2+0^2},\frac{-a\cdot 0+bd}{d^2+0^2}\right)$$

$$=\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)\ \Delta$$

فرمول (۱)، درحالت خاص، مستلزم این‌است که:

$$1\cdot z=(1\cdot a,1\cdot b)=(a,b)=z\ ,$$

$$(-1)\cdot z=((-1)\cdot a,(-1)\cdot b)=$$
$$(-a,-b)=-z$$

$$\frac{z}{1}=\left(\frac{a}{1},\frac{b}{1}\right)=(a,b)=z$$

$$\frac{z}{-1}=\left(\frac{a}{-1},\frac{b}{-1}\right)=(-a,-b)=-z \qquad (2)$$

Example 5.1.3. Prove that for any complex numbers $z_1=(a_1,b_1)$ and $z_2=(a_2,b_2)$ the following relationships are fulfilled (here and henceforward, the operations in the parentheses are to be performed first):

$$z_1-z_2=z_1+(-z_2); \qquad (5.3)$$

$$z_2\neq 0 \Rightarrow \frac{1}{z_2}=\frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2},\ \frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{|z_2|^2}. \qquad (5.4)$$

Δ Indeed, $z_1+(-z_2)=(a_1,b_1)+(-a_2,-b_2)=(a_1+(-a_2),\ b_1+(-b_2))=(a_1-a_2,\ b_1-b_2)=z_1-z_2$.

مثال ۱.۳. ثابت کنید که به‌ازای هرعدد مختلط

$$z_1=(a_1,b_1) \text{ و } z_2=(a_2,b_2)$$

روابط زیر برقرارند (در اینجا و از این مرحله به بعد، باید ابتدا اعمال داخل پرانتزها انجام شوند):

$$z_1-z_2=z_1+(-z_2) \qquad (3)$$

$$z_2\neq 0 \Longrightarrow \frac{1}{z_2}=\frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2},\qquad \frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{|z_2|^2} \qquad (4)$$

Δ در واقع :

$$z_1+(-z_2)=(a_1,b_1)+(-a_2,-b_2)=$$
$$(a_1+(-a_2)\ ,\ b_1+(-b_2))=$$
$$(a_1-a_2\ ,\ b_1-b_2)=z_1-z_2$$

Example 5.1.4. Prove that for any complex number $z = (a, b)$ the following equality is fulfilled:

$$z = a + bi. \qquad (5.5)$$

Conversely, if a and b are real numbers and $z = a + bi$, then $z = (a, b)$.

□ If $a \in R$, $b \in R$, then, by the formula (5.1), $bi = b \cdot (0, 1) = (b \cdot 0, b \cdot 1) = (0, b)$. Therefore $a + bi = (a, 0) + (0, b) = (a + 0, 0 + b) = (a, b)$.

The notation (5.5) of a complex number $z = (a, b)$ is called the *algebraic form of the notation* of the number z. The numbers $a \in R$ and $b \in R$ in the algebraic notation (5.5) of the complex number z are given specific names. The number a is called the *real part* of the complex number z (written: $a = \operatorname{Re} z$), and the number b the *imaginary part* of the complex number z (written: $b = \operatorname{Im} z$). It is readily checked that

$$\operatorname{Re}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Re} z_1 \pm \operatorname{Re} z_2,$$
$$\operatorname{Im}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Im} z_1 \pm \operatorname{Im} z_2.$$

Further,

$$\frac{1}{z_2} = \frac{(1, 0)}{(a_2, b_2)} = \left(\frac{1 \cdot a_2 + 0 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \frac{-1 \cdot b_2 + 0 \cdot a_2}{a_2^2 + b_2^2}\right) = \left(\frac{a_2}{a_2^2 + b_2^2}, \frac{-b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right) = \left(\frac{a_2}{|z_2|^2}, \frac{-b_2}{|z_2|^2}\right).$$

By the formula (5.1),

$$\frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(a_2, -b_2)}{|z_2|^2} = \left(\frac{a_2}{|z_2|^2}, \frac{-b_2}{|z_2|^2}\right) = \frac{1}{z_2}.$$

Finally,

$$\frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(a_1, b_1) \cdot (a_2, -b_2)}{|z_2|^2} = \frac{(a_1 a_2 - b_1 \cdot (b_2), a_1 \cdot (-b_2) + b_1 a_2)}{|z_2|^2} = \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{|z_2|^2}, \frac{-a_1 b_2 + b_1 a_2}{|z_2|^2}\right) = \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \frac{-a_1 b_2 + b_1 a_2}{a_2^2 + b_2^2}\right) = \frac{z_1}{z_2}.$$

مثال ۱ .۴. ثابت کنید که به‌ازای هر عدد مختلط

$$z = (a, b)$$

تساوی زیر برقرار است:

$$z = a + bi \qquad (۵)$$

برعکس، اگر a و b اعدادی حقیقی و $z = a + bi$، در این صورت $z = (a, b)$.

اگر $a \in R$، $b \in R$، در این‌صورت، بنابه‌فرمول (۱)،

$$bi = b \cdot (0, 1) = (b \cdot 0, b \cdot 1) = (0, b)$$

بنابراین:

$$a + bi = (a, 0) + (0, b) = (a + 0, 0 + b) = (a, b)$$

نماد (۵) عدد مختلط $z = (a, b)$ به صورت جبری نماد عدد z موسوم است. به اعداد $a \in R$ و $b \in R$ واقـع در نماد جبری (۵) عدد مختلط z، نامهای خاصی داده شده‌است. عدد a به جزء حقیقی عدد مختلط z موسوم است (و $a = \operatorname{Re} z$ نوشته می‌شود)، و عدد b جزء انگاری عددمختلط z نامیده (و $b = \operatorname{Im} z$ نوشته) می‌شود. به سادگی می‌توان امتحان کرد که:

$$\operatorname{Re}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Re} z_1 \pm \operatorname{Re} z_2$$

$$\operatorname{Im}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Im} z_1 \pm \operatorname{Im} z_2$$

گذشته از این:

$$\frac{1}{z_2} = \frac{(1, 0)}{(a_2, b_2)} = \left(\frac{1 \cdot a_2 + 0 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \frac{-1 \cdot b_2 + 0 \cdot a_2}{a_2^2 + b_2^2}\right)$$
$$= \left(\frac{a_2}{a_2^2 + b_2^2}, \frac{-b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right) = \left(\frac{a_2}{|z_2|^2}, \frac{-b_2}{|z_2|^2}\right)$$

بنا به فرمول (۱):

$$\frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(a_2, -b_2)}{|z_2|^2} = \left(\frac{a_2}{|z_2|^2}, \frac{-b_2}{|z_2|^2}\right) = \frac{1}{z_2}$$

سرانجام:

$$\frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(a_1, b_1) \cdot (a_2, -b_2)}{|z_2|^2}$$

$$= \frac{(a_1 a_2 - b_1 \cdot (b_2), a_1 \cdot (-b_2) + b_1 a_2)}{|z_2|^2}$$

$$= \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{|z_2|^2}, \frac{-a_1 b_2 + b_1 a_2}{|z_2|^2}\right)$$

$$= \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \frac{-a_1 b_2 + b_1 a_2}{a_2^2 + b_2^2}\right) = \frac{z_1}{z_2} \quad \Delta$$

If $\operatorname{Im} z = 0$, then, as we agreed above, the number $z = a + 0 \cdot i = (a, 0)$, is a real number a. The complex numbers $z = (0, b) = 0 + bi = bi$, whose real part is equal to zero, are called *pure imaginary*. The number $0 = 0 + 0i$ is both real and pure imaginary at the same time.

In what follows the notation (5.5) will be understood only as an algebraic notation of the complex number $z = (a, b)$, that is, the numbers a and b in the notation (5.5) will be regarded only as real numbers, although it will not be stipulated.

It is obvious that if $z = (a, b) = a + bi$, then $\bar{z} = a - bi$.

Example 5.1.5. Prove that

$$i^2 = -1 \tag{5.6}$$

$$\triangle i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$$

اگر $\operatorname{Im} z = ۰$ ، درایـن صورت، همان‌گونه که در فوق قرار گذاشتیم، عدد:

$$z = a + ۰ \cdot i = (a, ۰)$$

عدد حقیقی a است. عدد مختلط $z = (۰, b) = ۰ + bi = bi$، که جزءحقیقیش برابرصفر است، انگاری محض نامیده‌می‌شود. عدد $۰ = ۰ + ۰i$ در آن واحد هم حقیقی ، هم انگاری محض است .

درآنچه‌که بعداز این می‌آید، نماد (۵)، تنها به عنوان نمادجبری عدد مختلط $z = (a, b)$ دانسته می‌شود، یعنی اعداد a و bی واقع‌درنماد (۵) تنها‌به عنوان اعدادی حقیقی درنظر گرفته می‌شوند، گرچه به‌آن تصریح نخواهد شد.

واضح است‌که اگر : $z = (a, b) = a + bi$ ، در ایـن صورت $\bar{z} = a - bi$.

مثال ۵۰۱. ثابت‌کنید‌که :

$$i^۲ = -۱ \tag{۶}$$

$$i^۲ = i.i = (۰, ۱) \cdot (۰, ۱) = (۰.۰ - ۱.۱, ۰.۱ + ۱.۰) = (-۱, ۰) = -۱ \quad \blacktriangle$$

ترجمهٔ بعضی لغات و اصطلاحات

Complex Numbers	اعداد مختلط
Operations	اعمال
Set	مجموعه
Element	عنصر
Ordered Pairs	جفتهای مرتب
Real Numbers	اعدادحقیقی
Equality	تساوی، برابری
Basic	اساسی
Addition	جمع
Subtraction	تفریق
Multiplication	ضرب
Division	تقسیم
Natural Number	عدد طبیعی
Power	توان
Induction	استقرا
Opposite	مقابل
Complex Conjugate	مزدوج مختلط
Modulus	قدر مطلق
Nonnegative	نامنفی
Absolute Value	قدر مطلق
To Prove	اثبات کردن
Formula	فرمول
Relation	رابطه
Notation	نماد
Algebraic Form	صورت جبری
Algebraic Notation	نماد جبری
Real Part	جزء حقیقی
Imaginary Part	جزء انگاری
Pure Imaginary	انگاری محض
Arithmetic Operations	اعمال حسابی
Equal	مساوی، برابر
Sum	مجموع
Product	حاصل‌ضرب
Difference	تفاضل
Quotient	خارج‌قسمت
Notion	مفهوم
Method	روش
Imaginary Unit	واحد انگاری یا موهومی
Zero	صفر

قانون اثبات شرطی[۱]

● غلامرضا یاسی‌پور

با هراستدلال[۲] گزارهٔ شرطی[۳]ای متناظر است که مقدمش[۴] ترکیب عطفی[۵] مقدمات[۶] آن استدلال و تالیش[۷] نتیجهٔ[۸] آن است، و استدلال درست[۹] است اگر و تنها اگر شرطی متناظرش صادق[۱۰] باشد. اگر نتیجهٔ استدلالی گزاره‌ای شرطی به صورت $A \Rightarrow C$ باشد، و ترکیب عطفی مقدمات آن را با P نمایش بدهیم، در این صورت استدلال مزبور درست است اگر و تنها اگر ترکیب شرطی

$$P \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

صادق باشد، اما این صورت گزاره‌ای[۱۱] بنا به اصل صدور[۱۲] معادل

$$(P \wedge A) \Rightarrow C$$

است، به این ترتیب دو استدلال

P

$\therefore A \Rightarrow C$

و

P

A

$\therefore C$

که اولی معادل $P \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ و دومی معادل $(P \wedge A) \Rightarrow C$ است، خود معادل‌اند، و از این طریق قانون **اثبات شرطی**[۱۳] که آن را با .C.P اختصار می‌کنیم حاصل می‌شود:

قانون C.P. : هر استدلال بانتیجهٔ شرطی را می‌توان به استدلالی معادل با آن که مقدماتش، مقدمات استدلال اصلی به اضافهٔ مقدمه جدیدی است که مقدم نتیجهٔ استدلال اصلی است و نتیجه‌اش تالی نتیجهٔ استدلال اصلی است، تبدیل کرد.

اکنون باذکر چند مثال به توضیح این قانون می‌پردازیم.

مثال ۱ . درستی استدلال زیر را اثبات کنید:

$(A \vee B) \Rightarrow (C \wedge D)$

$(D \vee E) \Rightarrow F / \therefore A \Rightarrow F$

این استدلال بنا به قانون اثبات شرطی معادل استدلال زیر است، بنابراین به‌جای اثبات آن به اثبات استدلال زیر می‌پردازیم:

۱. $(A \vee B) \Rightarrow (C \wedge D)$

۲. $(D \vee E) \Rightarrow F$

۳. A $/ \therefore F$ (C.P.)[۱۴]

۴. $A \vee B$ ۳ , Add.

۵. $C \wedge D$ ۴ , ۱ , M.P.

۶. $D \wedge C$ ۵ , Com

۷. D ۶ , Sim p.

۸. $D \vee E$ ۷ , Add.

۹. F ۸ , ۲ , M.P.

قانون اثبات شرطی را، همان‌طور که مثال زیرنشان می‌دهد، می‌توان بیش از یک‌بار به کار برد.

مثال ۲. درستی استدلال زیر را تحقیق کنید:

$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

$B \Rightarrow (C \Rightarrow D) / \therefore A \Rightarrow (B \Rightarrow D)$

با دو بار استفاده کردن از .C.P استدلال زیر را به دست آورده، آن را اثبات می‌کنیم:

۱. $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

۲. $B \Rightarrow (C \Rightarrow D)$ / $\therefore$ $A \Rightarrow (B \Rightarrow D)$

۳. A / $\therefore$ $B \Rightarrow D$ (C.P.)

۴. B / $\therefore$ D (C.P.)

۵. $B \Rightarrow C$ ۱ , ۳ , M.P.

۶. C ۴ , ۵ , M.P.

۷. $C \Rightarrow D$ ۲ , ۴ , M.P.

۸. D ۶ , ۷ , M.P.

مثال ۳. درستی استدلال زیر را تحقیق کنید:

$$(T \Rightarrow E) \wedge (A \Rightarrow L) \ / \therefore \ (T \vee A) \Rightarrow (E \vee L)$$

باتوجه به .C.P استدلال داده شده را به صورت زیر درمی‌آوریم:

۱. $(T \Rightarrow E) \wedge (A \Rightarrow L)$ / $\therefore$ $(T \vee A) \Rightarrow (E \vee L)$

۲. $T \vee A$ / $\therefore$ $E \vee L$ (C.P.)

۳. $E \vee L$ ۲ , ۱ , C.D.

مثال ۴. درستی استدلال زیر را تحقیق کنید:

$E \Rightarrow S$

$E \Rightarrow (S \Rightarrow N)$

$S \Rightarrow (N \Rightarrow F)$ / $\therefore$ $E \Rightarrow F$

باتوجه به .C.P داریم:

۱. $E \Rightarrow S$

۲. $E \Rightarrow (S \Rightarrow N)$

۳. $S \Rightarrow (N \Rightarrow F)$

۴. E / $\therefore$ F (C.P.)

۵. S ۱ , ۴ , M.P.

۶. $N \Rightarrow F$ ۵ , ۳ , M.P.

۷. $S \Rightarrow N$ ۴ , ۲ , M.P.

۸. $S \Rightarrow F$ ۶ , ۷ , H.S.

۹. F ۵ , ۸ , M.P.

یادداشتها:

1. The Rule of Conditional Proof
2. Argument
3. Conditional Statement
4. Antecedent
5. Conjunction
6. Premisses
7. Consequent
8. Conclusion
9. Valid
10. Tautology (ترکیبی که‌ستون آخرجدول‌ارزشش تنها T دارد.)
11. Statement Form
12. Principle of Exportation
13. Conditional Proof

۱۴. اختصار .C.P را برای این نوشته‌ایم که مشخص کنیم؛ مقدمه و نتیجهٔ جدید را بااستفاده از قانون اثبات شرطی آورده‌ایم.

مرجع: Symbolic Logic, Irving M. Copi

تفریح اندیشهٔ ۱

با استفاده از پنج رقم ۱، ۲، ۳، ۴، و ۵ می‌توان کلاً ۱۲۰ عدد تشکیل داد. اگر این اعداد را به‌ترتیب صعودی: ۱۲۳۴۵، ۱۲۳۵۴، ۱۲۴۵۳، تا ۵۴۳۲۱ قراردهیم، کدام عدد ۷۵امین عدد واقع دراین ترتیب است؟

جواب در صفحهٔ ۹۶

تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران (۴)

عشق می‌ورزم وامید که این فن شریف
چون هنرهای دگرموجب حرمان نشود
«حافظ»

بیت بالا از آنِ حافظ است اما در ابتدای اولین سرمقالهٔ سردبیر مجلهٔ آشتی با ریاضیات[۱] آمده است. سردبیر مجله نیز مانند حافظ و سلفش ظهیر از دست هنرهای خود به فریاد است[۲] و امیدوار است این هنر آخرین، این آخرین ملجا، یعنی عشق ورزیدن، دیگر او را عذاب ندهد و دیگر موجب حرمانش نشود.

مجله آشتی با ریاضیات در بهار سال ۱۳۵۶ به سردبیری استاد ارجمند **پرویز شهریاری** توسط **دانشگاه آزاد ایران** آن روز پا به عرصهٔ مطبوعات ایران گذاشته است. کودکی که امروز نوجوانی ۱۵ ساله شده، نام و نشانی پیداکرده، و همراه با آن والبته با حسن و ملاحتی[۳] که داشته جای در کتابخانه‌ها گرفته است، و تا امروز[۴] که این مقاله را می‌نویسیم به **شست و هفتمین** شمارهٔ خود رسیده است.

قطع مجله، رقعی است و تعداد صفحاتش ۱۱۲ صفحه. شماره‌های اول و دوم و سومش قیمت ندارند اما قیمت شمارهٔ چهارمش ۵۰ ریال است، و **شمارهٔ سی و چهارم*** یعنی آخرین شماره‌اش به ۵۰۰ ریال به فروش می‌رسد.

دورکن اساسی مجله پرداختن به تاریخ ریاضی و ریاضیدانها، و کاربرد ریاضیات است و این کاربرد را حتی به معمّاها و تفریحات ریاضی تسری داده و از این راه به طنز رسیده است. مثلا در ابتدای مقاله‌ای از دکتر **علیرضاامیرمعز** چنین آمده است:

شخصی به ملانصرالدین گفت: ملا بچه شدی بانخ‌بازی می‌کنی؟! ملا گفت: بیشتر عمرت تلف شده‌است چون قدرت تمرکز حواست را خیلی کم به کاربرده‌ای. اگر توانستی این دستورهای ساده را بخوانی و یادبگیری، آن‌وقت تمرکز حواست تازه متوسط است. اگر همه را از حفظ شدی آن‌وقت یک ریال به‌تو می‌دهم[۵].

و به این ترتیب نویسنده از طنز به بازی و از بازی به ریاضی راهی گشوده است.

مجله گرچه برای عامهٔ مردم نوشته‌شده عوامانه نیست. ظریف و لطیف است اما از دقت و صلابت برخوردار است و در آن از سهل‌انگاری و بی‌توجهی‌های خاص مجلات عامه پسند خبری نیست. مطالبش متنوع است، چنانکه افرادی با معلومات دبیرستانی و سلیقه‌های گوناگون به راحتی می‌توانند اغلب مقالات آن را بخوانند و با اندکی سعی بدانند و از آن بالاتر لذت ببرند و بالاخره چنانکه از نام مجله نیز برمی‌آید با ریاضیات آشتی کنند. خوانندگان مجله خود متوجه این امر بوده‌اند و به همین مناسبت هم یکی از خوانندگان آن در این مورد نامه‌ای نوشته که قسمتی از آن را در زیر می‌خوانیم:

یاد دارم که وقتی به مدرسه می‌رفتم و حساب و هندسه می‌خواندم از هرکس که درباب فایدهٔ این کار می‌پرسیدم می‌گفت: معلوم است، هرکس باید بتواند بدهکاری و بستانکاری وسود و زیانش را حساب کند و مساحت اتاق و زمین و ملکش را اندازه بگیرد. من که نه زمین و ملکی داشتم، نه بدهکاری و بستانکاری، و نه می‌خواستم فروشنده و بازرگان شوم، هیچ ندانستم چرا باید این همه روزهایم صرف حساب سود و زیان

و بده و بستان بازرگانان مسأله‌هایم شود؟

سالها گذشت و اصول و مقدمات ریاضی را طوطی‌وار فراگرفتم و امتحانها را یکی پس‌از دیگری گذراندم. نوبت به جبر و هندسهٔ استدلالی[6] رسید و اندک اندک جنبهٔ منطقی ریاضیات چهرهٔ زیبایش را آشکار ساخت و من شیفتهٔ این زیبایی شدم ـ حسن و جمالی که در تقارن، استحکام و بی‌کرانگی آن نهفته بود.

البته زندگی کوتاه‌تر و دشوارتر از آن است که بتوان به هرآنچه دوست داشتنی است دست یافت و من همچنان‌که از موسیقی بهره‌ای نبردم، جهانگرد نشدم ... ریاضیدان هم نشدم، اما قلبم از محبت آنها مالامال ماند و یادشان را عزیز داشتم.

من که از ریاضیات جز مقدماتی نمی‌دانم، دیدم که به یاری همان مقدمات می‌توانم مقاله‌های آشتی با ریاضیات را بخوانم و از آن چیزهای فراوان تازه‌ای بیاموزم و دریافتم که خودم هم می‌توانم در این آموزش شرکت کنم[7].

دراینجا برای آشنا کردن خوانندگان به ذکر فرازهایی از بعضی از مقالات مجلهٔ مورد بحث می‌پردازیم و در آخر نیز دو مقالهٔ کامل آن را ذکر می‌کنیم.

در مقالهٔ: **چرخ در ریاضی جدید**[8] چنین آورده‌شده که:

یک روز ملانصرالدین، جای چرخ، چیز عجیب و غریبی به گاریش بسته بود و الاغش معطل مانده بود. مردی از راه رسید و از او پرسید: «این چه بساطی است که راه انداخته‌ای؟ با این چرخ چهارگوش که گاری راه نمی‌رود؟» ملاگفت: «متریک چرخ را به

$$f(A,B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

بدل کرده‌ام. صبر کن تا متریک زمین را هم عوض کنم آن وقت همهٔ کارها درست می‌شود.»

مسأله: شکل زمین را پیدا کنید که چرخ بگردد.

درمقالهٔ : **چراپدر و مادرها نمی‌توانند مسأله‌ها راحل‌کنند؟**[9] چنین آمده که:

در سالهای اخیر، گفتگوهای زیادی دربارهٔ روش جدید آموزش ریاضیات پیش‌آمده است، هرکسی نظر خود را دراین باره ابراز داشته است که چرا «جان» نمی‌تواند از عهدهٔ محاسبه برآید. من هم برای خودنظری دارم و می دانم که چرا «جان» نمی‌تواند محاسبه کند: اشکال را باید دراینجا جستجو کرد که پدران و مادران دیگر از عهدهٔ کمک به درسهای بچه‌هایشان برنمی‌آیند.

در روزهای خوش گذشته، وقتی که هنوز خبری از «ریاضیات جدید» نبود، بچه‌ها تکلیفهایشان را در منزل انجام می‌دادند و پدر و مادرها به آنها کمک می‌کردند، اشتباه‌های آنها را تصحیح می‌کردند و تنبیه یا تشویقشان می‌کردند. ولی حالا مسأله‌ها طوری هستند، که نه دانش‌آموزان و نه پدر و مادرها، حتی گمان حل آنها را هم نمی‌توانند داشته باشند.

و به این ترتیب مشکل اصلی تعلیم و تربیت ریاضی را مطرح کرده‌است. مشکل اصلی فقط این نیست که پدر و مادرها نمی‌دانند؛ یعنی مطابق با پیشرفت علم پیشرفت نکرده‌اند بلکه این نیز هست که بچه‌ها هم نمی‌دانند یعنی مطابق با پیشرفت علم پیش‌نرفته‌اند و به عبارت دیگر چون مسألهٔ یاددادن حل نشده مسألهٔ یادگرفتن لاینحل مانده است.

در مقالهٔ **تاریخ ریاضیات و آنچه باید برای آن بشود**[10] دربارهٔ ریاضی و تاریخ آن، از قلم **جورج سارتن**[11] چنین می‌خوانیم که:

تاریخ ریاضیات نشاط بخش است، زیرا در پیش روی ما منظره‌ای از سلسلهٔ بی‌پایان پیروزیهای فکر انسان را نمایان می‌سازد. پیروزیهایی که با شکستها خنثی نشده، یعنی بدون فرومایگی و اهانت و بدون قساوتهاست، و در عین حال به ما کمک می‌کند که بدبینی را به دور افکنیم. این پیروزیها هر قدر عظیم باشد، مورّخ موقع شناس هنوز انتظار پیروزیهای بیشتر و بزرگتری را دارد. آیا کار هر ریاضیدان موفقی را خلف برجسته‌تری دنبال می‌کند؟ تاریخ نشان می‌دهد که هرنظریهٔ ظاهراکامل و جامع همیشه جز پله‌ای برای رسیدن به نظریه‌ای بهتر نبوده‌است، و نظریه‌های تازه همانهاست که وقتی یکی پس از دیگری به‌وجود می‌آیند، چنانند که گویی جایی برایشان نیست.

... عالم ریاضیات هم‌اکنون چنان وسیع و متنوع است که فکر یک شخص به تنهایی قادر به درک آن نیست. این مسألهٔ افزایش احتیاج به ارزیابیهای ریاضی، تحلیلهای تاریخی و مطالعات فلسفی را نشان می‌دهد.[12]

اما این تاریخ ریاضیات است که بدون شکست و اهانت و فرومایگی و قساوت است و تاریخ ریاضیدانها چنین نیست. در تاریخ ریاضیدانها هم شکست وجود دارد هم اهانت، و هم فرومایگی هست و هم قساوت، در مقالهٔ **بزرگان دانش ریاضی**[۱۳] راجع به سرگذشت داوید هیلبرت[۱۴] چنین می‌خوانیم که:

آخرین دههٔ زندگی هیلبرت و بسیاری از دوستان و شاگردانش بر اثر جنایتها و شکنجه‌های حکومت هیتلری قرین تیرگی اندوهباری بود. او را در ۱۹۴۱ به گناه سرفرو نیاوردن به نظام نازی دستگیر کردند و به اردوگاه کار اجباری فرستادند. در سال ۱۹۴۳ به علت پیری و بیماری وخیم ـ و اطمینان از اینکه دیگر عمرش سرآمده است ـ آزادش کردند، و او یک ماه بعد در ۱۴ فوریهٔ ۱۹۴۳ درگوتینگن[۱۵] وفات یافت.

باز در مقاله‌ای تحت عنوان فاجعهٔ اسکندریه[۱۶] در مورد **هیپاتی**[۱۷] چنین می‌خوانیم که:

در روز روشن، دریکی از خیابانهای مرکزی اسکندریه، و در جلو چشمان بسیاری از مردم این شهر قدیمی، او را وحشیانه کشتند. وقتی‌که او از کتابخانهٔ اسکندریه برمی‌گشت، انبوه جمعیت خشمگین و خرافاتی، درکمین او انتظار می‌کشیدند. او را از درشکه‌اش بیرون آوردند و به‌طرف کلیسا کشاندند. جمعیت متعصّب باچشمان خون گرفته[۱۸]، دستهای او را شکستند و بدنش را زیر ضربات سخت خردکردند. بعد لباسهایش را پاره پاره کردند و پوستش را با چاقوهای صدفی کندند، و سرآخر، جسد بی‌جان وی را، روی کومهٔ آتش سوزاندند.

آری داستان ریاضیات چنان است و ماجرای ریاضیدانها چنین. فعلاً از این مقوله می‌گذریم و شرح این هجران و این خون جگر را برای وقت دگر[۱۹] می‌گذاریم.

گفتیم که یکی از ارکان اساسی مجلهٔ آشتی با ریاضیات آشنا کردن خواننده با تاریخ ریاضیات است و در این مورد هم ریاضیات گذشته مورد نظر است هم ریاضیات معاصر، و هم به ریاضیات ایران می‌پردازد و هم به ریاضیات جهان. برای آشنا شدن با بعضی از مقاله‌های مربوط به این مقوله نگاهی مختصر به مقالهٔ **محمدبن موسی خوارزمی**[۲۰] بنیانگذار جبر می‌افکنیم:

«جبر و مقابله صنعتی‌است از صناعات حساب. این دانش وسیلهٔ نیکویی است برای به دست آوردن پاسخ صحیح، برای مسایل مشکل وصیت وارث و معاملات و فرضیات[۲۱]. از آن جهت جبر می‌گویند که کاهشها و استثناها در آن جبران می‌شود، و از آن جهت مقابله می‌گویند که مقادیر را در برابر هم قرار می‌دهد و مشابهات را حذف می‌کند.»

ابوعبدالله کاتب خوارزمی در «مفاتیح العلوم» «اواخر سدهٔ چهارم هجری»

«جبر و مقابله یکی از فروع علم حساب است ... نخستین کسی که در این فن کتاب نوشت، خوارزمی است ...»

مقدمهٔ ابن‌خلدون[۲۲] «اواخر سدهٔ هشتم»

«بزرگترین ریاضیدان عصر، و اگر همهٔ شرایط را درنظر آوریم، یکی از بزرگترین ریاضیدانان همهٔ اعصار، خوارزمی بود.»

جورج سارتن در «مقدمه بر تاریخ علم»

محمدبن‌موسی خوارزمی یکی از نخستین و بزرگترین ریاضیدانان و اخترشناسانی است که در بغداد کار می‌کرد. از زندگی او چیز زیادی نمی‌دانیم، جز اینکه در خوارزم (خیوه) در نیمهٔ دوم سدهٔ دوم هجری قمری (نیمهٔ دوم سدهٔ هشتم میلادی) به‌دنیا آمد، قسمت عمدهٔ زندگی خود را، به‌عنوان یک ریاضیدان بزرگ، در بغداد و در زمان مأمون خلیفهٔ عباسی گذراند، در بیت‌الحکمه رفت و آمد داشت و در حدود سال ۲۳۲ هجری قمری درگذشت.

نخستین اثری که خوارزمی در بغداد به‌وجود آورد، تنظیم جدول سینوسها بود.

کتاب جبر خوارزمی (کتاب المختصر فی‌حساب الجبرو المقابله)، نقشی بسیار اساسی در تاریخ ریاضیات دارد. این کتاب بعدها به زبان لاتینی ترجمه شد[۲۳] و مدتها تنها کتاب درسی ریاضی در تمام اروپای غربی بود.

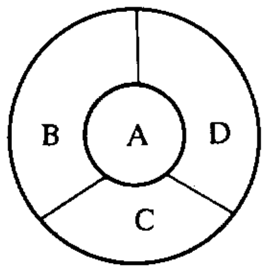
در کتاب جبر خوارزمی راه‌حل معادله‌های درجه اول و درجه دوم شرح داده‌شده است.

در رابطه با تاریخ ریاضیات معاصر نگاهی کوتاه به مقالهٔ **مسألهٔ چهار رنگ**[۲۴] می‌اندازیم:

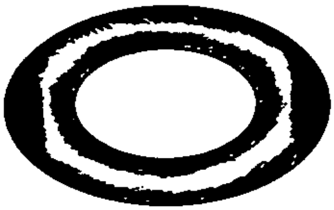
مسألهٔ چهار رنگ یکی از قدیمی‌ترین و مشهورترین مسأله‌های توپولوژی در نظریهٔ گرافهاست که از دیر باز مورد توجه ریاضیدانها بوده است. صورت ریاضی این مسأله ـ که حدود یک قرن پیش ارائه شده‌است ـ بدین شرح است: «برای رنگامیزی هر نقشهٔ مسطح (مانند نقشهٔ جهان در روی یک صفحهٔ کاغذ) حداقل چند رنگ‌نیاز داریم به قسمی که هر دو ناحیه (یا دو کشور) هم مرز[۲۵]، همرنگ نباشند.»

مسألهٔ مذکور توسط برادر فرانسیس گوتری[۲۶] دانشجوی ریاضی ادینبورو که درسال ۱۸۵۰ به آن برخورد در اختیار دومورگان[۲۷] قرار گرفت، و او مسأله را درمیان تمام ریاضیدانان انگلستان منتشر کرد.

ریاضیدانها دریافتند که به سهولت می‌توان نشان داد که برای رنگامیزی بعضی از نقشه‌ها سه رنگ کافی نیست، فی‌المثل، برای رنگامیزی نواحی A، B، C و D ی شکل



زیر چهار رنگ لازم است. همین‌طور ثابت شده که پنج رنگ همیشه کافی است.[۲۸] هم‌چنین ثابت کردند نقشه‌هایی که برای آنها چهار رنگ کافی نیست ـ درصورت وجود ـ باید شکل پیچیده‌ای داشته باشند. مثلا در مورد سطوحی مانند چنبره[۲۹] که مرتبط ساده نیستند (شکل زیر) ثابت کرده‌اند که هفت رنگ برای رنگ کردن هرنقشه در روی چنبره کافی است و بعضی از نقشه‌ها در روی چنبره، دقیقا، به‌هفت رنگ‌نیاز دارند.



پروفسور هیکن[۳۰] ـ استاد ریاضیات دانشگاه ایلینوی آمریکا ـ باصرف پانزده سال کار روی این مسأله، سرانجام در تابستان ۱۹۷۶ موفق شد ثابت کند که در تئوری گرافها، هر نوع گرافی را می‌توان به یکی از ۱۸۵ هزار حالت خاص تبدیل کرد. و درنتیجه اگر او می‌توانست مسأله را برای این حالت خاص حل کند، اثباتش کامل می‌شد. او برای مطالعهٔ این حالتها از کامپیوتر یاری جست، و حدود سه شبانه روز وقت کامپیوتر مرکز آی ـ بی ـ ام دانشگاه ایلینوی راگرفت و بالاخره عملا نشان داد که برای هریک از این حالتهای خاص، چهار رنگ کافی است.

بـه ایـن تـرتیب، مسألهٔ چهار رنگ، که یک مسألهٔ توپولوژیک است، نه تنها در مورد صفحه بلکه برای همهٔ سطوحی که با صفحه **همانديسه**[۳۱] اند نیز حل شده است. حداقل تعداد رنگی را، که برای رنگ کردن یک نقشه لازم است، اصطلاحا **عدد کروماتیک**[۳۲] آن نقشه می‌نامند.

مجله نه تنها به ماتم مرگ ریاضیدانهای گذشته می‌نشیند که در سوگ ریاضیدانهای معاصر نیز مویه سر می‌کند و موی از سر می‌کند[۳۳]، و در فوت دکتر هشترودی[۳۴] چنین می‌نویسد:

دکتر محسن هشترودی در سیزدهم شهریور ۱۳۵۵ در تهران بدرود حیات گفت. همه او را می‌شناسند و از زندگی، آثار و انسانیت او آگاهند. به همین مناسبت بهتر دیدیم که به‌جای تکرار گفته‌ها، نوشته‌ای از استاد را در اینجا چاپ کنیم تا راهی برای تجدید عهد دانش پژوهان با استاد خودباشد.

و آنگاه به چاپ مقاله‌ای چاپ نشده از استاد به نام اندیشه‌هایی دربارهٔ دانش و صنعت و هنر آینده و کاربرد ریاضیات در آنها[۳۵] می‌پردازد و ضمن آن «وسعت ذهن و اندیشهٔ این مرد بزرگ[۳۶]» را نشان می‌دهد[۳۷]

مجله جای به جای به طرح معمایی یا نکته‌یی می‌پردازد اما حتی در این کار نیز ارتباطش را باعمل از دست نمی‌دهد. در این مورد به ذکر چند مطلب می‌پردازیم:

یک معمای کهن[۳۸]

آن چیست که؛ سه سر، چهار شاخ، شش چشم، شش گوش، سه دهان، دودست و ده پا دارد و خرمی و آبادانی جهان از اوست؟

این معما دریک کتاب آموزشی پهلوی آمده است به نام ماتیکان یوشت فریان و دست‌کم مربوط به پانزده قرن پیش است و پاسخ معما یک جفت‌گاونر به خیش بسته است که مردی با آن زمین را شخم می‌زند.

* * *

- زندگی تنها به این درد می‌خورد که انسان به دو کار مشغول شود: اول ریاضیات بخواند، دوم ریاضیات را به دیگران بیاموزد.[۳۹]

پواسون

تعمیم ریاضی[۴۰]

ــ ریاضیدانان داستانی ساخته‌اند دربارهٔ منطق علمی.

ریاضیدان می‌گوید: یک فیزیکدان یقین می‌کند ۶۰ برتمامی عددها بخش‌پذیر است. متوجه می‌شود فرضیه‌اش برای عددهای ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، و ۶ درست است. چند عدد دیگر ۱۰ ، ۱۵ ، ۲۰ ، ۳۰ را که «تصادفا» انتخاب کرده‌است، تجربه می‌کند. چون ۶۰ براین اعدادهم بخش‌پذیر است، نتیجه می‌گیرد که داده‌های تجربی کافی است تافرضیه‌اش ثابت شود.

فیزیکدان می‌گوید: پس دربارهٔ مهندسان چی می‌گویید؟ یک مهندس فکر می‌کند تمام عددهای فرد عدد اول هم هستند. بعد نوبت ۹ می‌رسد که متأسفانه ۹ عدد اول نیست ولی ۱۱ و ۱۳ که بعد می‌آیند باز عددهای اولند. تصمیم می‌گیرد دوباره به سراغ ۹ برگردد. کلنجار می‌رودو عاقبت به این نتیجه می‌رسد که ۹ یک اشتباه آزمایشی است.

مهندس می‌گوید: پس پزشکان چی؟ یک پزشک برای بیماری که مسمومیت خونی دارد و هیچ امیدی به نجاتش نیست شوربا تجویز می‌کند. تصادفا بیمار شوربا می‌خورد و معالجه می‌شود. پزشک می‌نشیند یک کتاب علمی می‌نویسد و در آن اعلام می‌کند شوربا مسمومیت خونی را رفع می‌کند. بعد یک بیمار دیگر باز مسمومیت خونی دارد پیشش می‌آید و پزشک ما باز شوربا تجویز می‌کند. بیمار شوربا می‌خورد و می‌میرد. آن وقت پزشک کتابش راتصحیح می‌کند و این‌طور می‌نویسد که شوربا فقط در ۵۰ درصد موارد مسمومیت خونی را برطرف می‌کند.

پزشک می‌گوید: پس خود ریاضیدان چطور وقتی از او بپرسید: چطور می‌شود یک شیر را در بیابان به دام انداخت؟ می‌گوید: «به‌دام انداخت یعنی چه؟ بنابر تعریف اصولا شیر باید پشت میله‌های قفس باشد. پس کافی است شکارچی این طرف میله‌ها باشد تا شیر در قفس بماند.»

از کتاب «همه‌جا ریاضی ....»

* * *

ــ تنها داشتن فکر خوب کافی نیست، مهم این است که آن را خوب به کار ببریم.[۴۱]

«دکارت»

ازخصوصیات دیگر مجله چربیدن مقالات توصیفی آن برمسائل آن است. مجله حل‌المسائل نیست، گرچه به حد معقول به مسأله و حل آن می‌پردازد و در این راه از آوردن هر نوع مسأله حتی مسألهٔ مسابقه‌ای نیز دریغ نمی‌کند.

همان‌گونه که قبلا هم اشاره شد مطالب مجله متنوع است و در آن

از هر چمن گلی و از هر خروار مشتی به چشم می‌خورد. نویسندگان و مترجمان مجله هم متنوع‌اند و در میان آنها نیز همه نوع آدمی به چشم می‌آیند چه مجله با علم و عقلشان یار است و به ترک و تازیشان کاری ندارد[۴۲] و تنها، به ترکتازیشان در صحنهٔ علم و ادب می‌نگرد.

سخن گفتن از جمیع مطالب مجله ولو به اختصار در حوصلهٔ کوچک مقالهٔ ما نمی‌گنجد، از طرف دیگر دلمان نمی‌آید که از این آشنایان، بیگانه‌وار بگذریم[۴۳] پس راه میانه را برمی‌گزینیم[۴۴] و در این راه برای تمتع خاطر خوانندگان از هر خرمنی، خوشه‌ای می‌آوریم.[۴۵]

سه خانه داریم و سه مرکز آب و گاز و برق. باید آب و گاز و برق این سه خانه را از این سه مرکز نیرو تأمین کنیم، ولی دستور اکید داریم که لوله‌های آب و گاز و برق را از رو یا زیر یکدیگر عبور ندهیم.

تجربه‌نشان می‌دهد که این کار غیرممکن است و برای اینکه متوجه عدم امکان آن شویم، وقت زیادی از ما گرفته خواهدشد و شاید دست آخر، هنوز باور نکنیم که چنین کاری عملی نیست. ولی چون این یک مسألهٔ توپولوژی است، باتوجه به روشهای توپولوژی پی می‌بریم که چنین شکلی در اثر تبدیلات توپولوژی اصولا عوض شدنی نیست.[۴۶]

«توپولوژی هندسهٔ شیرین و اسرارآمیز[۴۷]»

هدف عمدهٔ تعلیم ریاضی توسعهٔ برخی استعدادهای ذهن است، و در میان این استعدادها شهود کم ارزشترین نیست. به‌وسیلهٔ شهود است که جهان ریاضی باجهان واقعی در تماس است، و اگر عالم ریاضیات محض بتواند بی‌شهود به نتیجه‌ای برسد همیشه لازم خواهدبود که برای پرکردن مغاکی که نماد را از واقعیت جدا می‌کند به آن توسل جوید. مرد عمل همیشه به شهود نیاز دارد، و درمقابل هر هندسه‌دان محض باید صد مرد عمل وجودداشته‌باشد.

بامنطق می‌توان ثابت کرد و با شهود می‌توان آفرید. دانستن اینکه چگونه انتقاد کنیم خوب است، اما دانستن اینکه چگونه باید خلق کرد بهتر است. می‌توانید بفهمید که ترکیبی درست است یا نیست، اما چه ناپسندیده وضعی است اگر هنر انتخاب کردن بین همهٔ ترکیبهای امکان‌پذیر را نداشته‌باشید. منطق به ما می‌گوید که در فلان یا فلان راه می‌توان مطمئن بود که به مانعی بر نمی‌خوریم، اما نمی‌گوید کدام راه به سرمنزل مقصود منتهی می‌شود. برای دانستن این مطلب لازم است بتوان از دور دید، و استعدادی که دیدن را می‌آموزد‌مشهود است.

«هندسه، راهی به ریاضیات[۴۸]»

راستی چرا به هندسه کمتر توجه می‌کنند؟ احمد سر این موضوع حسابی مرا سؤال پیچ کرد. به او گفتم که درست است هندسه درس زیبا و جالبی است، ولی امروزه نه‌تنها فرصت پرداختن به آن کم است، بلکه چند ده سال پیش بود که ریاضیدان معروفی به نام تارسکی[۴۹] دستورالعملی جهت حل مسائل هندسه ارائه داد. این است که دیگر مطالعهٔ آن چندان جالب نیست، مگر برای تفنن.

«یادی از گذشته[۵۰]»

شکل مغنی یا رابطهٔ سینوسها در مثلث کروی

در قرن چهارم هجری چند تن از ریاضیدانان اسلامی که به تحقیقات نجومی مشغول بودند در صدد برآمدند رابطه‌ای در مثلث‌کروی[۵۱] به دست آورند که آنها را از به‌کار بردن شکل قطاع یا قضیهٔ منلائوس که به کار بردنش در مسائل نجومی دشوار بود، بی‌نیاز سازد، آنها قضیه‌ای کشف کردند که در آن لزوم به قاطع یا هیچ مقداری غیر از مقادیر اضلاع و زوایای خود مثلث اصلی نبود و این قضیه را شکل مغنی یا قانون الهیئة نام نهادند که امروزه به نام قضیهٔ سینوسها در مثلث‌کروی موسوم است و آن چنین است که در هر مثلث کروی ABC به‌اضلاع a ، b ، c رابطهٔ زیر بین جیب زوایای آن برقرار است[۵۲]:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

«ابتکارات علمی ابوالوفای بوزجانی در مثلثات[۵۳]»

یادداشت‌ها

۱. نام فعلی این مجله آشنائی با ریاضیات است.

۲. مرا ز دست هنرهای خویشتن فریاد
که هریکی به دگرگونه داردم ناشاد
بزرگتر زهنر در عراق عیبی نیست
زمن مپرس که‌این عیب برتو چون افتاد
«ظهیرالدین فاریابی»

۳. حسنت‌به‌اتفاق ملاحت، جهان‌گرفت
آری به اتفاق، جهان می‌توان گرفت
«حافظ»

۴. یعنی فروردین ۱۳۷۱ ش.

۵. آشتی با ریاضیات شمارهٔ ۲ صفحهٔ ۱۴؛ مقالهٔ : مقدمات جبربازی بانخ، از دکتر علیرضاامیرمعز

٦. شاید منظورنویسنده حساب استدلالی باشد.

۷. همان مرجع، شمارهٔ ۴ صفحهٔ ۱ ، مقالهٔ : از یک نامه.

۸. همان مرجع، شمارهٔ ۱ صفحهٔ ۲۴، از دکتر علیرضا امیرمعز

۹. همان مرجع، شمارهٔ ۱ ؛ صفحه ۵۵ ، از آرت بوخوالدطنزنویس آمریکایی ترجمهٔ؛ پرویز شهریاری

۱۰. همان مرجع، شمارهٔ ۲، صفحهٔ ۱ ، از غلامحسین صدری افشار

۱۱. نویسندهٔ معروف کتاب تاریخ علم. جلد اول این کتاب توسط مترجم ارجمند آقای احمدآرام به زبان فارسی ترجمه شده‌است.

۱۲. عبارات مزبورطبق گفتهٔ نویسندهٔ مقاله ازمقالهٔ
The study of the history of mathematics.
جورج سارتن است.

۱۳. همان مرجع، شمارهٔ ۱، صفحهٔ ۸۲ ، نام نویسنده مشخص نشده‌است.

۱۴. ریاضیدان آلمانی و یکی از بزرگترین ریاضیدانهای نیمهٔ اول قرن بیستم، واضع نظریهٔ تغییرناپذیرها یا ناورداها «invariants» و مطرح کنندهٔ ۲۳ مسألهٔ مهم و قابل بررسی قرن‌بیستم که اکثر آنها حل شده‌است. از مقالهٔ اخیرالذکر.

۱۵. شهری آلمانی که دانشگاهی معروف به‌همین نام در آن است «Göttingen»

۱٦. همان مرجع، شمارهٔ ۱ صفحهٔ ۸٦ از؛ د. لوو ترجمهٔ ؛ پرویز شهریاری.

۱۷. زن ریاضیدان و فیلسوف قرن چهارم و پنجم میلادی اسکندریه از مقالهٔ اخیرالذکر.

۱۸. از حمیدی شیرازی در بت شکن بابل می‌خوانیم که:
ذوق خون مخلوق را بفشردنای
وان تبرزن پیش و پس بنهادپای
استخوانی خُرد شد رگها درید
از تبر خون ریخت از رگها جهید

۱۹. تعبیر از مولوی و از دفتر اول مثنوی اوست:
شرح این هجران و این خون جگر
این زمان بگذار تاوقت دگر

۲۰. همان مرجع، شمارهٔ ۲ صفحهٔ ۴ ،نوشتهٔ پرویز شهریاری.

۲۱. به‌عبارت دیگر ریاضیاتی است نظری و عملی هردو.

۲۲. ابوزیدعبدالرحمن بن‌محمد از بزرگان حکما و مورخان (و. تونس ۷۳۲ ـ ف. ۸۰٦ یا ۸۰۸ ه. ق.) به‌دعوت حاکم ناس به آن دیار رفت و به سعایت حاسدان به زندان افتاد. پس از رهایی به شاعری گرایید، به قسطنطنیه و غرناطه و قشتاله سفر کرد و عاقبت در قلعهٔ بنی سلامه عزلت گزید و به نوشتن تاریخ معروف خود پرداخت.

۲۳. این کتاب توسط مرحوم حسین خدیوجم به زبان فارسی ترجمه شده است.

۲۴. همان مرجع، شمارهٔ ۳ صفحهٔ ۱۴ از محمدحسین احمدی تحت عنوان: سرانجام، یکی از مسأله‌های دشوار ریاضی حل شد.

۲۵. در این قضیه باید مقصود از «دوکشور هم مرز» مشخص شود. برای صورت دقیقتر این قضیه به کتاب هندسه‌های جدید ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور مراجعه کنید، البته در این مورد می‌توان به کل مقالهٔ مورد بحث نیز رجوع کرد.

۲٦. Francis Guthrie

۲۷. منطقی معروف انگلیسی که قضایایش در منطق ریاضی معروف است.

۲۸. در مورد این مسأله و مسائل مشابه آن به کتاب مسائل پیکارجوی ریاضی تألیف یاگلوم ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور مراجعه کنید.

۲۹. Torus

۳۰. Haycken

۳۱. Homeomorphic ، همانساریخت.

۳۲. Chromatic Number عدد فامی

۳۳. تعبیر از نظامی در لیلی و مجنون است و در مورد مادر لیلی در مرگ دختر نوجوان خود:

مادر که عروس را چنان دید
گویی که قیامت آن زمان دید
درحسرت روی و موی فرزند
برمی‌زد و روی و موی می‌کند
هر مویه که داشت خواندش از بر
هر موی که داشت کندش از سر

۳۴. استادنامدار ریاضیات دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران، هنگام پرداختن به مجلهٔ یکان سخن بیشتری از او خواهیم گفت.

۳۵. برای مقاله به شمارهٔ سوم مجله صفحهٔ ۴۵ رجوع کنید.

۳۶. عبارت داخل گیومه از مجله است.

۳۷. برخلاف بعضی‌از معاصران که براستاد می‌تازند. رجوع کنید به مقالهٔ دکترمنصوری در شمارهٔ ۴، سال ۸، مجلهٔ فیزیک؛ نشریهٔ گروه فیزیک.مرکز نشر دانشگاهی.

۳۸. همان مرجع، شمارهٔ ۳ صفحهٔ ۱۰۱.

۳۹. همان مرجع، شمارهٔ ۴ صفحهٔ ۴۱.

۴۰. همان مرجع، شمارهٔ ۴ صفحهٔ ۶۷.

۴۱. همان مرجع، شمارهٔ ۴ صفحهٔ ۱۰۷.

۴۲. تعبیر از مولانا و از دفتر دوم مثنوی شریف اوست:

روح با علم است و با عقل است یار
روح را با ترکی و تازی چه کار

۴۳. تعبیر از بیت زیراست:

برما به خشم می‌نگرد دلربای ما
بیگانه‌وار می‌گذرد آشنای ما

۴۴. البته اگر دچار زلزلهٔ تزلزل نشویم.

۴۵. تعبیر از سعدی و در بوستان اوست:

تمتع زهر گوشه‌ای یافتم
زهر خرمنی خوشه‌ای یافتم.

۴۶. برای توضیح این مطلب به کتاب هندسه‌های جدید فوق‌الذکر رجوع کنید.

۴۷. همان مرجع، سال دوم شمارهٔ ۱ صفحهٔ ۸. مقاله، ترجمهٔ هرمز شهریاری است.

۴۸. همان مرجع، سال دوم شمارهٔ ۱ صفحهٔ ۲۵، مقاله، ترجمهٔ احمدبیرشک و علی‌اکبر عالم‌زاده است.

۴۹. «Tarski» منطقی معاصر.

۵۰. همان مرجع، سال دوم شمارهٔ ۱ صفحهٔ ۵۹، هوشنگ شکرانیان.

۵۱. برای اطلاع از مثلث کروی به کتاب مثلثات مستقیم‌الخط وکروی پرویز شهریاری رجوع کنید.

۵۲. برای برهان قضیه، به‌اصل مقاله مراجعه کنید.

۵۳. همان‌مرجع، سال دوم شمارهٔ ۱ صفحهٔ ۷۹، جعفرآقایانی چاوشی.

ادب و ریاضی

در جوانی امیدوار بودم که به سرانجام رساندن این تحقیقات در نجوم برایم مقدور باشد، اینک، درعهد کهولت، آن امید را از دست نهاده‌ام، چه موانعی در راهم پدیدار شده‌است. ولی آنچه دربارهٔ آن می‌گویم شاید توجه محققان آینده را برانگیزد. علم نجوم زمان ما چیزی عرضه نمی‌کند که بتوان از آن معنی و واقعیّت محصّلی بیرون کشید. مُدلی که در زمانهٔ ما پیش نهاده‌اند، فقط بامحاسبات موافق است نه با موجودیت واقعی.

ابن رُشد، قرن ششم هجری،
«زندگینامهٔ علمی دانشمندان اسلامی»

در حاشیه مجموعه‌ها

● حمیدرضا امیری

مورد استفاده دانش‌آموزان سال اول

اصولاً در هرنظریه از ریاضیات پس از بیان تعریفها و اصول حاکم برآن، قضیه‌هایی طرح و اثبات می‌شوند و پس‌از اثبات به‌شکل ابزارهایی‌قوی درمی‌آیند که برای‌پیشبرد، رشد و تکامل آن نظریه مورداستفاده واقع شده و به خصوص در حل مسأله‌های مربوط به‌آن ازتعریفها و قضیه‌های اثبات شده بهره‌گیری می‌گردد.

نظریهٔ مجموعه‌ها که زمانی یکی‌از بحرانهای ریاضیات به شمار می‌رفت- ونیز امرزوه از اصلی‌ترین و زیربنایی‌ترین شاخه‌ها ونظریه‌های ریاضیات است - از این قاعده مستثنی نمی‌باشد. در کتاب ریاضیات جدید سال اول پس از تعریف مجموعه[1] و تعریفهای دیگر به دو مفهوم **عضویت و جزئیت** (زیر مجموعه بودن) برخورد می‌کنیم که به ترتیب برای نشان دادن **عضو** یك مجموعه یا تعلق به یك مجموعه داشتن از نماد (∈) و برای‌بیان **زیر مجموعه** یك‌مجموعه‌ازنماد (⊂) استفاده شده است. ابتدا درحاشیهٔ همین دو مفهوم اندکی تأمل می‌کنیم وتا حدودی به بررسی آنها می‌پردازیم:

قبل از آن این مسأله را روشن‌کنیم، که وقتی می‌گوییم «مجموعه، گردایه‌ای‌است از **اشیاء دو به‌دومتمایزومشخص**» این اشیاء چه هستند واین بسیار مهم‌است، توجه‌کنید:

اگربحث ما راجع‌به‌عددها باشد هرعدد یك شی ریاضی است، اگربحث ما دربارهٔ نجوم‌باشد هرستاره‌یاسیاره یك شی است، اگربحث مادرحاشیهٔ مجموعه‌ها باشد هرمجموعه‌می‌تواند یك شئی باشد و....

بنابراین اعضای یك مجموعه می‌توانند خودشان‌مجموعه باشند و به چنین مجموعه‌ای؛ **مجموعهٔ مجموعه‌ها** می‌گویند.

حال اگر A یك مجموعهٔ دلخواه باشد و a عضوی از مجموعه A، می‌نویسیم $a \in A$ و این به شرطی است که شی a واقعاً به صورت‌یك عضودر A واقع باشد. به مثالهای زیرتوجه کنید:

مثال۱- فرض‌کنیم

$$A=\{\underline{a},\underline{\{a,b\}}\ ,\ \underline{\{b\}}\ ,\ \underline{\{a,\{a\}\}}\}$$

واضح‌است‌که مجموعهٔ A دارای ۴ عضو است‌که زیرآنها‌خط کشیده شده است. گـزارهٔ $a \in A$ درست، $\{a\} \in A$ نادرست (زیرا شی $\{a\}$ به صورت یك عضو از اعضای A در مجموعه A نیست)، گزارهٔ $\{b\} \in A$ درست، گزاره $b \in A$ نادرست و گزارهٔ $\{a,\{a\}\} \in A$ درست می‌باشد.

مثال۲- اگر $A=\{\underline{a}\ ,\ \underline{\{a\}}\ ,\ \underline{\{\{a\}\}}\}$ داریم:

$$a \in A\ ,\ \{a\} \in A\ ,\ \{\{a\}\} \in A$$

اما درك‌مفهوم زیرمجموعه نیاز به دقت بیشتری دارد ما تعریف می‌کنیم «مجموعهٔ A زیرمجموعهٔ مجموعهٔ B است‌اگروتنها اگر

---

[1] ــ «مجموعه، گردایه‌ای‌است از **اشیاء دو به دو متمایز و مشخص**» (درحقیقت این‌گزاره تعبیری است برای مشخص‌کردن مجموعه، نه‌تعریف مجموعه)

هرعضو مجموعهٔ A عضوی‌از مجموعهٔ B نیز باشد» و یا باز بان ریاضی‌تعریف زیرمجموعه‌را می‌توان به‌شکل‌زیر بیان کرد:

$$[^1A\subseteq B \iff \forall x\in A \implies x\in B]$$

(وقتی‌نماد $\subseteq$ رابه‌جای $\subset$ به‌کار می‌بریم مجموعهٔ A می‌تواند مساوی با مجموعهٔ B نیز باشد).

مثال۳- اگرفرض کنیم:

$$A=\{\underline{a}\ ,\ \underline{\{b,\ \{a\}\}}\ ,\ \underline{\{a,b\}}\ ,\ \underline{\{b\}}\}$$

در این صورت:

الف) $\{a\}\subset A$ (زیرا $a\in\{a\}$ و $a\in A$)

ب) $\{a,\{b\}\}\subset A$ (زیرا $a\in A$ ونیز $\{b\}\in A$)

ج) $\{a,b\}\not\subset A$ (زیرا $a\in A$ ولی $b\notin A$)

د) $\{\underline{\{a,b\}}\ ,\ \underline{\{b\}}\}\subset A$

(زیرا $\{b\}\in A$ و نیز $\{a,b\}\in A$)

نکته: هرگاه مجموعهٔ A دلخواه و دارای n عضو باشد $(n=0,1,2,\cdots,k)$ در این صورت تعداد زیر مجموعه‌های مجموعهٔ A عبارت است از 2^n.

مثال ۴ - اگرمجموعهٔ A دارای ۶۴ زیرمجموعه باشد، معین کنیدکه A چند عضو دارد؟

$$2^n=64 \implies 2^n=2^6 \implies n=6$$

پس مجموعهٔ A دارای ۶ عضو است.

تذکر: باتوجه‌به تعریف زیر مجموعه؛ واضح است کـه هرمجموعه، زیرمجموعهٔ‌خودش می‌باشد ونیز در کتاب‌ریاضیات جدیداول ثابت شده‌که مجموعهٔ تهی[2] زیر مجموعهٔ هرمجموعه است بنابر این اگرخودمجموعه ومجموعهٔ‌تهی‌را زیرمجموعه‌های بـدیهی بنامیم ؛ هـرمجموعه دارای (2^n-2) زیـر مجموعهٔ غیر بدیهی است.

مثال ۵ - هـرگاه تعداد زیر مجموعه‌های یـك مجموعهٔ $(k+1)$ عضوی ۴۸ واحدکمتراز تعداد زیر مجموعه‌های یك مجموعهٔ $(k+3)$ عضوی باشد، عدد طبیعی k را معین کنید.

$2^{(k+1)}=$ تعداد زیرمجموعه‌های‌مجموعهٔ $(k+1)$ عضوی

$2^{(k+3)}=$ تعداد زیرمجموعه‌های‌مجموعهٔ $(k+3)$ عضوی

$$\overset{\text{طبق‌فرض}}{\implies} 2^{(k+1)}+48=2^{(k+3)}$$

$$\implies 2^k\times 2+48=2^k\times 2^3$$

حال اگرفرض کنیم $x=2^k$ خواهیم‌داشت:

$$2x+48=8x \implies 6x=48 \implies x=8$$

$$2^k=x \implies 2^k=8 \implies 2^k=2^3 \implies \boxed{k=3}$$

تعریف : مجموعهٔ توانی مجموعهٔ A رابا P(A) نمایش می‌دهیم وآن مجموعه عبارت‌است از «مجموعهٔ شامل همهٔ زیر مجموعه‌های A».

مثال۶- هرگـاه $A=\{2\ ,\ 3\ ,\ 4\}$ ، $P(A)$ را معین کنید.

$$P(A)=\{\{2\},\{3\},\{4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{2,3,4\},\varnothing\}$$

مثال ۷ - هرگاه A یك‌مجموعه۲عضوی‌باشد معین کنید:

$$P(P(P(A)))$$

چند عضو دارد.

$P(A)$ تعداد اعضای $=$ تعدادزیرمجموعه‌های A $=2^2=4$

$P(P(A))$ تعداد اعضای $=$ $P(A)$ تعداد زیر مجموعه‌های $=2^4=16$

---

۱ ــ هرگاه علاوه براینکه $A\subseteq B$ ، $B\subseteq A$ نیز باشد در این صورت تعریف می‌کنیم $A=B$.

۲ ــ هرمجموعه‌که فاقد عضوباشد تهی می‌نامیم و به‌صورتهای $\varnothing$ یا $\{\ \ \}$ آن‌را نمایش می‌دهیم.

تعدادزیرمجموعه‌های$P(P(A))$ = تعداداعضای$P(P(P(A)))$
$=2^{16}$

حال به بحث اصلی خود یعنی استفاده از قضیه‌های اثبات شده و قانونهای به اثبات رسیده در حل مسأله‌ها و یا اثبات قانونهای دیگر باز می گردیم.

در نظریه مجموعه‌ها و بین مجموعه‌ها اعمالی چون اجتماع، اشتراك و تفاضل تعریف می کنیم که هریك از این اعمال به نوبهٔ خود دارای قضیه‌ها، خواص و ویژگیهایی می باشند که در این مقاله ابتدا به تعریف و معرفی بسیار مختصری از آن پرداخته و سپس به استفاده‌های بعضی از آنها در حل مسأله‌ها می پردازیم.

تعریف عمل اجتماع : هرگاه A و B دومجموعه دلخواه باشند اجتماع A و B را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$(A\cup B)=\{x|x\in A \vee x\in B\}$$

$$x\in(A\cup B) \iff x\in A \vee x\in B$$

(تعریف کاربردی اجتماع)

از تعریف اجتماع واضح است که اگرعضوی دریکی ازدو مجموعه باشد در اجتماع آنها نیز می باشد و در حالت کلی «هرمجموعه، زیرمجموعهٔ اجتماع خودش باهرمجموعهٔ دیگر است. مثلا $A\subseteq(A\cup B)$».

قضیه اصلی اجتماع . هرگاه A و B دومجموعه دلخواه باشند و $A\subseteq B$ دراین‌صورت $A\cup B=B$ وبرعکس.

نتیجه‌های حاصل از قضیهٔ اصلی اجتماع: (M مجموعهٔ مرجع و $\varnothing$ مجموعهٔ تهی فرض‌شده است.)

الف) می‌دانیم : $A\subseteq A \overset{\text{قضیهٔ اصلی}}{\Longrightarrow} A\cup A=A$

ب) می‌دانیم : $\varnothing\subseteq A \overset{\text{قضیهٔ اصلی}}{\Longrightarrow} A\cup\varnothing=A$

ج) می‌دانیم : $A\subseteq M \overset{\text{قضیهٔ اصلی}}{\Longrightarrow} A\cup M=A$

و نیزدر کتاب سال اول اثبات شده (به روش عضو گیری دلخواه) که $A\cup A'=M$.

تعریف عمل اشتراك : اشتراك دومجموعهٔ A و B را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(A\cap B)=\{x|x\in A \wedge x\in B\}$$

با استفاده از تعریف اشتراك واضح است که اگر عضوی در اشتراك دو مجموعه واقع شود در هریك ازآن دو مجموعه نیز می باشد ودرحالت کلی «اشتراك دومجموعه زیرمجموعهٔ هریك ازآن دو مجموعه‌است، مثلا: $A\cap B\subseteq A$ یا $A\cap B\subseteq B$»

قضیهٔ اصلی اشتراك : هرگاه A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند و $A\subseteq B$ دراین صورت $A\cap B=A$ وبرعکس.

نتیجه‌های حاصل از قضیهٔ اصلی اشتراك:

الف) $A\subseteq A \overset{\text{قضیهٔ اصلی}}{\Longrightarrow} A\cap A=A$

ب) $\varnothing\subseteq A \Longrightarrow A\cap\varnothing=\varnothing$

ج) $A\subseteq M \Longrightarrow A\cap M=A$

د) چون A و A' (A' متمم مجموعهٔ A است) جدا ازهم می باشند پس $A\cap A'=\varnothing$.

$$(1)-A'=\{x\in M|x\notin A\} \Longrightarrow$$

$$\underline{(A')'}=\{x\in M|x\notin A'\}=\{x\in M|x\in A\}=\underline{A}$$

خواص اعمال اجتماع و اشتراك

(در کلیهٔ خواص زیرمجموعه‌های A و B و C، مجموعه‌هایی دلخواه می باشند.)

۱) $\begin{cases}A\cup B=B\cup A\\ A\cap B=B\cap A\end{cases}$ خاصیت جابجایی

$$۲)\ \begin{cases} A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C \\ A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C \end{cases}$$

خاصیت شرکت‌پذیری

دراستفاده ازخاصیت شرکت‌پذیری به نکات زیر توجه می‌کنیم:

الف) در استفاده از این خاصیت، ترتیب قرار گرفتن مجموعه‌ها حفظ‌شده وجابجایی صورت نمی‌گیرد.

ب) زمانی از شرکت‌پذیری استفاده می‌شود که اعمال بین ۳ مجموعه‌همگی اجتماع یا اشتراك باشد.

ج) شرکت‌پذیری برای ۳ مجموعه امکان‌پذیر است و اگر تعدادمجموعه‌ها بیش‌از۳ مجموعه باشد، مثلا اگر ۴ مجموعه‌باشند باید ۲ مجموعه‌را یك مجموعه فرض‌کرده و با دومجموعهٔ دیگر شرکت‌پذیری‌را به‌کار ببریم به مثال زیر توجه کنید:

$$\overbrace{(A\cup B')}^{D}\cup(B\cup C)=[\overbrace{(A\cup B')}^{D}\cup B]\cup C$$
$$=[A\cup(B'\cup B)]\cup C$$
$$=(A\cup M)\cup C=M\cup C=M$$

$$۳)\ \begin{cases} A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C) \\ A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \end{cases}$$

خاصیت توزیع‌پذیری یا پخشی

دراستفاده ازخاصیت پخشی‌به نکات زیر توجه می‌کنیم:

الف) درخاصیت پخشی‌همواره‌از دوعمل‌استفاده‌می‌شود، یا یك مجموعه با عمل اجتماع در اشتراك دو مجموعه توزیع می‌شود وَیا یك مجموعه با عمل‌اشتراك در اجتماع دو مجموعه توزیع می‌شود وما حق‌توزیع اشتراك دراشتراك یا اجتماع در اجتماع‌را نداریم. به مثال زیر توجه کنید:

$$(A\cap B)\cap(A\cap B')\overset{\text{جابه‌جایی}}{=}(A\cap B)\cap(B'\cap A)$$
$$\overset{\text{شرکت‌پذیری}}{=}[(A\cap B)\cap B']\cap A$$
$$\overset{\text{شرکت‌پذیری}}{=}[A\cap(B\cap B')]\cap A$$
$$=(A\cap\varnothing)\cap A=\varnothing\cap A=\varnothing$$

ب) اگر تعداد مجموعه‌ها بیش‌از ۳ مجموعه باشد، مثلا: ۴ مجموعه داشته‌باشیم ابتدا دومجموعه‌را یك مجموعه در نظر گرفته ودر دومجموعهٔ دیگر توزیع می‌کنیم. به مثال زیر توجه کنید:

$$\overbrace{(A\cap B)}^{D}\cap(A'\cup B)=$$
$$[\overbrace{(A\cap B)}^{D}\cap A']\cup[\overbrace{(A\cap B)}^{D}\cap B]$$
$$=[(B\cap A)\cap A']\cup[A\cap(B\cap B)]$$
$$=[B\cap(A\cap A')]\cup(A\cap B)$$
$$=(B\cap\varnothing)\cup(A\cap B)=\varnothing\cup(A\cap B)=(A\cap B)$$

حال مثال‌قبل را به روشی دیگر بررسی می‌کنیم:

$$(A\cap B)\cap(A'\cup B)$$
$$\overset{\text{جابجایی}}{=}\overbrace{(A'\cup B)}^{D}\cap(A\cap B)$$
$$\overset{\text{شرکت پذیری}}{=}[\overbrace{(A'\cup B)}^{D}\cap A]\cap B$$
$$\overset{\text{پخشی}}{=}[(A'\cap A)\cup(B\cap A)]\cap B$$
$$\overset{\text{جابجایی}}{=}[\varnothing\cup(A\cap B)]\cap B=(A\cap B)\cap B$$
$$\overset{\text{شرکت‌پذیری}}{=}A\cap(B\cap B)=A\cap B$$

$$۴)\ \begin{cases} (A\cup B)'=A'\cap B' \\ (A\cap B)'=A'\cup B' \end{cases}$$

خاصیت متمم‌گیری (قوانین دمورگان)

تذکر ۱) با توجه به قوانین دمورگان همواره می‌توان اجتماع را به اشتراک تبدیل کرد و برعکس. به مثالهای زیر توجه کنید:

۱) $(A' \cap B') = (A \cup B)'$

۲) $[(A \cup B') \cup (A' \cap B)]'$

$$= [\underbrace{(A \cup B')}_{D} \cup \underbrace{(A \cup B')'}_{D'}]' = M' = \varnothing$$

تذکر۲) قوانین دمورگان قابل تعمیم است.

$$(A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots \cup A_n)' = (\bigcup_{i=۱}^{n} A_i)'$$

$$= (A_۱' \cap A_۲' \cap \cdots \cap A_n') = \bigcap_{i=۱}^{n} A_i'$$

$$(A_۱ \cap A_۲ \cap \cdots \cap A_n)' = (\bigcap_{i=۱}^{n} A_i)'$$

$$= (A_۱' \cup A_۲' \cup \cdots \cup A_n') = \bigcup_{i=۱}^{n} A_i'$$

۵) $\begin{cases} A \cup (A \cap B) = A \\ A \cap (A \cup B) = A \end{cases}$ قوانین جذب

اثبات) روش اول:

می‌دانیم $\rightarrow (A \cap B) \subseteq A$

$$\xRightarrow{\text{قضیهٔ اصلی اجتماع}} A \cup (A \cap B) = A$$

می‌دانیم $\rightarrow A \subseteq (A \cup B)$

$$\xRightarrow{\text{قضیهٔ اصلی اشتراک}} A \cap (A \cup B) = A$$

روش دوم:

$$\underline{A \cup (A \cap B)} = \overbrace{(A \cap M)}^{A} \cup (A \cap B)$$

$$= A \cap (M \cup B) = A \cap M = \underline{A}$$

$$\underline{A \cap (A \cup B)} = \overbrace{(A \cup \varnothing)}^{A} \cap (A \cup B)$$

$$= A \cup (\varnothing \cap B) = A \cup \varnothing = \underline{A}$$

تعریف عمل تفاضل: هرگاه A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، $(A - B)$ مجموعه‌ای است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(A - B) = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

بنابراین:

$$x \in (A - B) \iff x \in A \wedge x \notin B$$

با توجه به تعریف تفاضل به راحتی می‌توان ثابت کرد که،

$$(A - B) = (A \cap B')$$

زیرا: $[x \in (A - B) \iff x \in A \wedge x \notin B$

$\iff x \in A \wedge x \in B' \iff x \in (A \cap B')]$

$\iff (A - B) = (A \cap B')$

اکنون با توجه به تعریفهای اعمال اجتماع، اشتراک و تفاضل و بیان قضیه‌ها و خواص مربوط به آنها، می‌توانیم از این قضیه‌ها و خواص به عنوان ابزارهایی در حل مسأله‌ها استفاده کنیم، که البته روشهای به‌کار گرفته شده در زیر منحصر به فرد نمی‌باشند.

مسألهٔ ۱) ثابت کنید هرگاه $A \subseteq B$ آنگاه:

$$(A - B) = \varnothing$$

ثابت می‌کنیم که دو مجموعهٔ A و B' با توجه به فرض، مجموعه‌هایی جدا ازهم هستند.

$$(x \in A \overset{A \subseteq B}{\Longrightarrow} x \in B \Longrightarrow x \notin B')$$

$$\Longrightarrow \overbrace{A \cap B'}^{(A - B)} = \varnothing \Longrightarrow (A - B) = \varnothing$$

مسألهٔ ۲) ثابت کنید هرگاه $(A - B) = (B - A)$ آنگاه $A = B$

$$(A-B)=(B-A) \Longrightarrow (A\cap B')=(B\cap A')$$
$$\Longrightarrow \underbrace{(A\cap B')\cup A}_{\text{جذب}}=(B\cap A')\cup A$$
$$\Longrightarrow A=A\cup B$$
$$\xRightarrow{\text{عکس قضیهٔ اصلی}} B\subseteq A \quad (۱)$$
$$(A\cap B')=(B\cap A')$$
$$\Longrightarrow B\cup(A\cap B')=\underbrace{B\cup(B\cap A')}_{\text{جذب}}$$
$$\Longrightarrow (A\cup B)=B \xRightarrow{\text{عکس قضیهٔ اصلی}} A\subseteq B \quad (۲)$$

با توجه به (۱) و (۲) نتیجه می گیریم که: $A=B$

مسألهٔ ۳) ثابت کنید هر گاه $(A-B)=A$ آنگاه:

$(B-A)=B$

$$(B-A)=B-\overbrace{(A-B)}^{A}$$
$$=B-(A\cap B')=B\cap(A\cap B')'$$
$$=B\cap(A'\cup B)\overset{\text{جذب}}{=}B$$

مسألهٔ ۴) ثابت کنید هر گاه $(A-B)=\varnothing$ آنگاه $A\subseteq B$ (عکس مسألهٔ ۱)

$$(A-B)=\varnothing \Longrightarrow (A\cap B')=\varnothing$$
$$\Longrightarrow (A\cap B')\cup B=\varnothing\cup B$$
$$\Longrightarrow (A\cup B)=B \Longrightarrow A\subseteq B$$

مسألهٔ ۵) ثابت کنید هر گاه $(A\cap B)=(A\cup B)$ آنگاه $A=B$.

ثابت می کنیم $A\cap B=A$،

$$(A\cap B)=(A\cup B) \Longrightarrow$$
$$(A\cap B)\cap A=\overbrace{(A\cup B)\cap A}^{\text{جذب}}$$
$$\Longrightarrow (A\cap B)=A \xRightarrow{\text{قضیهٔ اصلی اشتراک}} A\subseteq B \quad (۱)$$

از طرفی چون طبق فرض $(A\cap B)=(A\cup B)$ پس:

$$(A\cup B)=A \Longrightarrow B\subseteq A \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می شود که: $A=B$.

مسألهٔ ۶) ثابت کنید هر گاه $A\cap B=M$ آنگاه:

$B=M$ و $A=M$

$$(A\cap B)=M \Longrightarrow \overbrace{(A\cap B)\cup A}^{\text{جذب}}=(M\cup A)$$
$$\Longrightarrow A=M$$
$$(A\cap B)=M \Longrightarrow \overbrace{(A\cap B)\cup B}^{\text{جذب}}$$
$$=(M\cup B) \Longrightarrow B=M$$

تمرین : ثابت کنید هر گاه $(A\cup B)=\varnothing$ آنگاه:

$B=\varnothing$ و $A=\varnothing$

(اثبات به عهده خواننده)

مسألهٔ ۷) ثابت کنید هر گاه:

$$\begin{cases} A\cup B=A\cup C \\ A\cap B=A\cap C \end{cases}$$

آنگاه $B=C$.

$$\underline{B}\overset{\text{جذب}}{=}B\cap(A\cup B)$$
$$\overset{\text{طبق فرض}}{=} B\cap(A\cup C)\overset{\text{پخشی و جابجایی}}{=}(A\cap B)\cup(B\cap C)$$
$$\overset{\text{طبق فرض}}{=} (A\cap C)\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap C$$

$$\overset{\text{طبق فرض}}{=} \overbrace{(A\cup C)\cap C}^{\text{جذب}}=C$$

مسألهٔ ۸) ثابت کنید اشتراک از چپ روی تفاضل توزیع پذیر است یعنی:

$$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$$

سمت راست $=(A\cap B)\cap(A\cap C)'$

$$=(A\cap B)\cap(A'\cup C')$$

$$\overset{\text{جابجایی}}{=}(A'\cup C')\cap(A\cap B)$$

$$\overset{\text{شرکت‌پذیری}}{=}[(A'\cup C')\cap A]\cap B=(C'\cap A)\cap B$$

$\underset{\text{و شرکت‌پذیری}}{\overset{\text{جابجایی}}{=}} A\cap(B\cap C')=A\cap(B-C)=$ سمت چپ

تمرین: ثابت کنید تفاضل از راست بر اشتراک توزیع پذیر است یعنی:

$$(A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C)$$

(اثبات به عهده خواننده)

مسألهٔ ۹) ثابت کنید تفاضل از راست بر اجتماع توزیع‌پذیر است یعنی:

$$(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$$

$$(A\cup B)-C=(A\cup B)\cap C'$$

$$=(A\cap C')\cup(B\cap C')=(A-C)\cup(B-C)$$

مسألهٔ ۱۰) ثابت کنید که هرگاه $A\subseteq B\subseteq C$ آنگاه:

$$(A\cup B)=(B\cap C)$$

$$\left.\begin{array}{l} A\subseteq B \xRightarrow{\text{قضیهٔ اصلی اجتماع}} (A\cup B)=B \\ B\subseteq C \xRightarrow{\text{قضیهٔ اصلی اشتراک}} (B\cap C)=B \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$(A\cup B)=(B\cap C)$$

مسألهٔ ۱۱) هرگاه $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$، ثابت کنید:

$$\begin{cases} A\cup C\subseteq B\cup D \\ A\cap C\subseteq B\cap D \end{cases}$$

و سپس با استفاده از این مسأله ثابت کنید:

الف) اگر $A\subseteq X$ و $A'\subseteq X$ آنگاه $X=M$.

ب) اگر $X\subseteq A$ و $X\subseteq A'$ آنگاه $X=\varnothing$.

حل: فرض کنیم $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$، روابط بالا را از طریق عضوگیری دلخواه ثابت می‌کنیم:

[فرض کنیم $x\in(A\cup C) \xRightarrow{\text{تعریف اجتماع}} x\in A \vee x\in C$

$\xRightarrow{\text{طبق فرض}} x\in B \vee x\in D \xRightarrow{\text{تعریف اجتماع}} x\in(B\cup D)$]

$$\Longrightarrow (A\cup C)\subseteq(B\cup D)$$

و به همین طریق ثابت می‌شود:

$$(A\cap C)\subseteq(B\cap D)$$

حال به اثبات الف و ب می‌پردازیم.

حل الف) داریم:

$$\left.\begin{cases} A\subseteq X \\ A'\subseteq X \end{cases}\right\}\Longrightarrow (A\cup A')\subseteq(X\cup X)$$

$$\Longrightarrow M\subseteq X \quad (۱)$$

و با توجه به تعریف مجموعهٔ مرجع می‌دانیم که:

$$X\subseteq M \quad (۲)$$

و با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) و تعریف تساوی بین دو مجموعه، نتیجه می‌گیریم که: $X=M$.

حل ب) داریم:

$$\left.\begin{array}{l} X\subseteq A \\ X\subseteq A' \end{array}\right\} \Rightarrow (X\cap X)\subseteq(A\cap A')$$

$$\Rightarrow X\subset\varnothing \quad (۱)$$

و با توجه به اینکه همواره تهی زیر مجموعهٔ هرمجموعه است داریم:

$$\varnothing\subseteq X \quad (۲)$$

بنا براین از رابطه‌های (۱) و (۲) و تعریف تساوی بین دو مجموعه، نتیجه می‌گیریم که $X=\varnothing$.

درخاتمه متذکرمی‌شوم که دراین مقاله سعی‌شد از روش عضوگیری دلخواه، برای اثبات تساوی بین مجموعه‌ها، کمتر استفاده شود وبیشتر قوانین و قضیه‌های بیان شده، به‌کار گرفته شدند. توفیق شما را از خداوند متعال خواستارم.

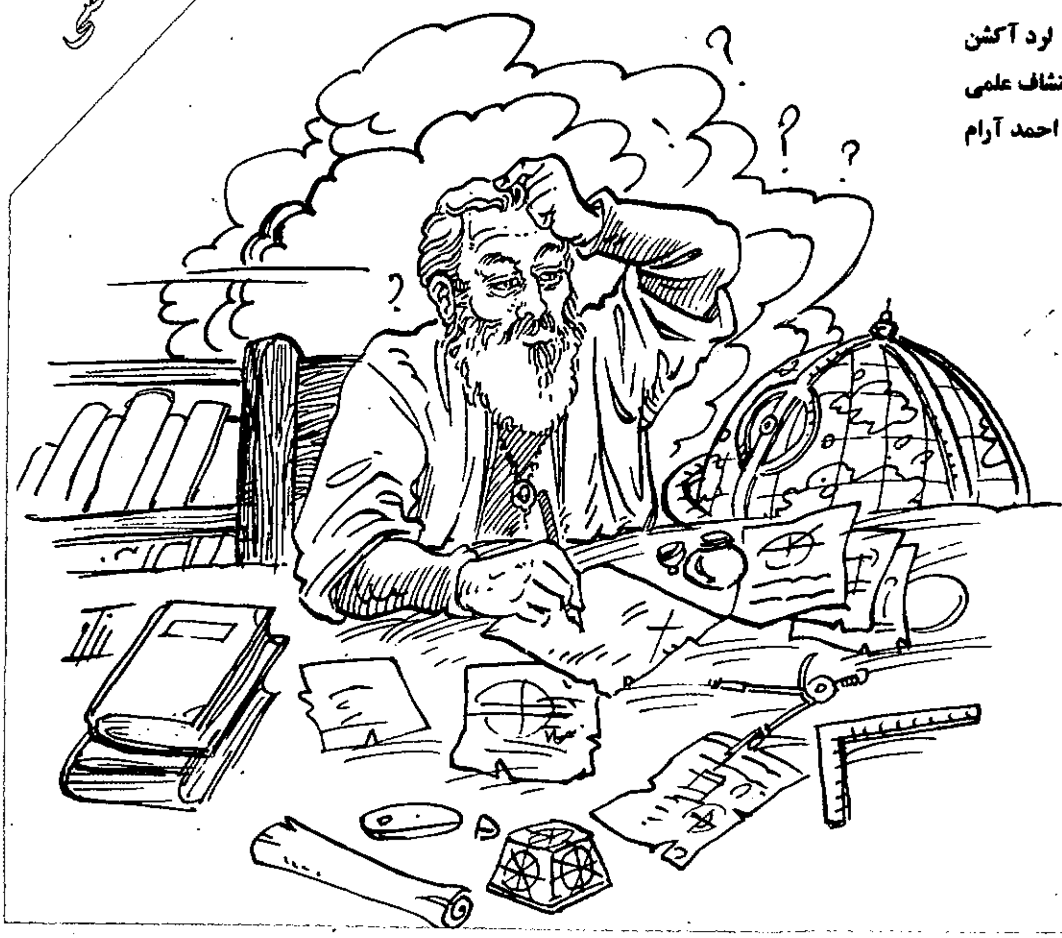
ادب ریاضی

هیچ چیز برای مردعلم ضروریتر از تاریخ آن و منطق اکتشاف نیست ... راه کشف کردن خطا، به‌کاربردن فرضیّه و تخیّل و روش آزمودن.

لرد آکشن

منطق اکتشاف علمی

کارل ریموند پوپر ترجمهٔ احمد آرام



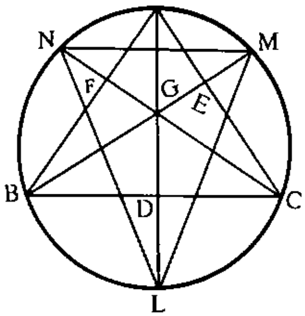
مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۳)

اشتاینر ـ لموس[1] و مثلث خودمیانه[2]

پاری[3]

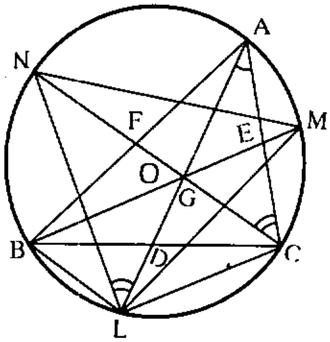
قضیهٔ مشهور اشتاینر ـ لموس براین است که اگر دونیمساز داخلی مثلثی مساوی باشند دراین صورت مثلث متساوی الساقین است. این قضیه این نکته را به زیبایی تشریح می‌کند که اثبات عکس یک قضیه می‌تواند بسیار مشکلتر از خود قضیه باشد. اثر قضیهٔ اشتاینر ـ لموس در بسیاری از مقالات قابل ملاحظه است.

با بررسی مثلث حاصل از برخوردهای ثانی میانه‌های مثلث با دایرهٔ محیطی آن، می‌توان مطلب جالب دیگری راجع به این موضوع به‌دست آورد. فرض می‌کنیم G نقطهٔ میانه‌ای[4] مثلث ABC باشد و میانه‌های مثلث اضلاع مقابل آن را در DEF و دایرهٔ محیطی آن را بار دیگر در LMN تلاقی کنند.



شکل ۱

هنگامی که ABC متساوی‌الساقین باشد LMN نیز بنا به تقارن، بارأس L متساوی‌الساقین است (شکل ۱). اما آیا عکس این مطلب درست است، یعنی، اگر LMN متساوی‌الساقین باشد ABC لزوماً متساوی‌الساقین است؟ مشاهدهٔ شکل ۱ آشکار می‌کند که عکس قضیهٔ مورد بحث راست است، اما ملاحظهٔ شکل ۲ نشان می‌دهد که عکس مزبور محققاً نادرست است. بنابراین شرایطی که مثلث نامتساوی‌الساقین ABC مثلث متساوی‌الساقین LMN ی را به‌وجود می‌آورد کدامند؟



شکل ۲

اگر اضلاع مثلث مورد بحث را abc و میانه‌های AD و BE و CF را به ترتیب d و e و f بنامیم، در این صورت

$$4d^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$$
$$4e^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2$$
$$4f^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$$

و قوت G نسبت به دایرهٔ محیطی عبارت است از

$$AG.GL = BG.GM = CG.GN = g^2 \quad \text{(مثلاً)}$$

اما مثلثهای AGC و NGL متساوی‌الزوایا و مشابه‌اند، بنابراین

$$\frac{NL}{AC} = \frac{GL}{GC} = \frac{AG.GL}{AG.GC}$$

باقراردادن $AG = \frac{2d}{3}$، $GC = \frac{2f}{3}$ و $AC = b$ داریم

$$NL = \frac{9g^2 b}{4df}$$

به‌همین ترتیب از مثلثهای AGB و MGL

$$LM = \frac{9g^2c}{4de}$$

از $NL = LM$ داریم

$$\frac{9g^2b}{4df} = \frac{9g^2c}{4de}$$

بنابراین $b/f = c/e$ و $4b^2e^2 = 4c^2f^2$

درنتیجه

$$b^2(2c^2 + 2a^2 - b^2) = c^2(2a^2 + 2b^2 - c^2)$$

بنابراین،

$$2a^2(b^2 - c^2) = b^4 - c^4 = (b^2 + c^2)(b^2 - c^2)$$

و $b^2 = c^2$، حالت متساوی‌الساقین، یا $2a^2 = b^2 + c^2$، حالت نامتساوی‌الساقین. هنگامی که $2a^2 = b^2 + c^2$ داریم

$$4d^2 = 3a^2 , 4e^2 = 3c^2 , 4f^2 = 3b^2$$

درنتیجه،

$$d = \frac{a\sqrt{3}}{2} , e = \frac{c\sqrt{3}}{2} , f = \frac{b\sqrt{3}}{2}$$

و $d : e : f = a : c : b$. بنابراین میانه‌ها متناسب بااضلاع، البته در ترتیبی متفاوت‌اند.

نظر به رابطهٔ غیرمعمول فوق، مثلث مورد بحث را مثلث خودمیانه نامیده‌اند.

رابطهٔ $d = \frac{3\sqrt{a}}{2}$ مکان هندسی رأس A ی خودمیانه را با معلوم بودن قاعدهٔ BC مشخص می‌کند.

اگر مثلث متساوی‌الاضلاع αBC یی را بر قاعدهٔ BC (بانقطهٔ وسط D) بناکنیم دراین صورت مکان هندسی A دایرهٔ به مرکز D باشعاع $D\alpha$ است.

عبارت $2a^2 = b^2 + c^2$ رابطه‌ای با قضیهٔ فیثاغورس به‌دست می‌دهد و در واقع می‌توان بی‌نهایت مثلث خودمیانه از مثلثهای فیثاغورسی خاصی به‌طریق زیر به‌دست آورد:

اگر x، y، z اضلاع مثلثی فیثاغورسی با $x>y>z$ و $\frac{x}{2}>z$ باشد، دراین صورت x، $(y + z)$، $(y - z)$ مثلثی خودمیانه است. به‌عنوان مثال، سه‌تائی فیثاغورسی ۱۳، ۱۲، ۵ سه‌تائی خودمیانه‌ای ۱۳، ۱۷، ۷ را، که کوچکترین مثلث خود میانه بااضلاع درست است، به‌دست می‌دهد.

مثلث خودمیانه دارای بعضی از خواص جالب هندسی است:

(a) نقطهٔ میانه‌ای G نقطهٔ وسط وتر میانه‌ای AL است.

(b) BGCL متوازی‌الاضلاع است.

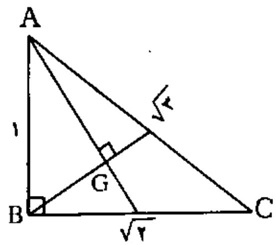
(c) مثلثهای BGL و CLG غیرمستقیماً مشابه ABC اند.

(d) خط اویلری OG برمیانهٔ AG عموداست.

(e) نقطهٔ اشتاینری[5] بر L، واقع برمیانهٔ AG، منطبق است.

(f) اگر K نقطهٔ لموینی[6] باشد، دراین صورت GK موازی BC است.

(g) اگر T نقطهٔ فرمائی[7] باشد، دراین صورت قطعات AT، BT و CT تصاعدی حسابی با $AT = \frac{BT+CT}{2}$ می‌سازند.



شکل ۳

با بازگشت به رابطهٔ فیثاغورسی، تنها یک مثلث خودمیانهٔ قائم‌الزاویه، با اضلاع $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$، ۱ موجود است (شکل ۳). درضمن مثلث مزبور تنها مثلث با دوضلع عمود و دو میانهٔ عمود برهم است.

یادداشت‌ها

1. Steiner - Lehmus
2. Automedian Triangle
3. C. F. PARRY
4. Median Point

۵ ـ چهارمین تقاطع بیضی محیطی «Circumellipse» اشتاینر (مرکز درنقطهٔ میانه‌ای) بادایرهٔ محیطی.

٦ ـ «Lemoine Point»، نیز معروف به نقطهٔ قرینهٔ میانه‌ای «Symmedian Point» یعنی مزدوج حافظ زاویه «Isogonal Conjugate» (یاقرینهٔ) نقطهٔ میانه‌ای.

۷ ـ نقطهٔ هم زاویهٔ داخلی «Internal Isogonic Point»؛ نیز نقطهٔ کمترین فاصلهٔ مجتمع از رؤس مثلث.

در باغ تجربه‌ها

(مصاحبه با تلاشگری پیروز)

در این شماره مصاحبه‌ای با یکی از دانش‌آموزان موفق ترتیب داده‌ایم که جزء نفرات اول کنکور سراسری بوده و درحال حاضر از دانشجویان موفق رشتهٔ ریاضی است که درمقطع فوق لیسانس مشغول تحصیل می‌باشد.
و لازم به تذکراست که ایشان مراحل دانشگاهی را در کمتر از زمان معمول طی کرده‌اند.
باشد که در این مصاحبه برای شما عزیزان دانش‌آموز ره‌آوردی داشته‌باشیم.

□ خواهش می‌کنم خودتان را معرفی کنید.

یعقوب فرجامی، فرزند داوود؛ متولّد سال ۱۳۴۸ شمسی، اهلِ یکی از روستاهای تبریز؛ به نام «علی‌آباد» هستم. پدرم سواد قرآنی دارد و مادرم اصلاً سواد ندارد. چهار خواهر و دو برادر دارم که برادرهایم تا دورهٔ راهنمایی بیشتر نخواندند. دوران دبستان و دبیرستان خود را در شهرستان قم گذراندم و بعد از آن وارد دانشگاه صنعتی شریف شدم.

□ خانوادهٔ شما درطول تحصیل چه تسهیلاتی برایتان فراهم کردند؟

تسهیلاتی که خانواده‌ام برایم فراهم کردند، در حدّ متوسط بود.

□ از چه زمانی به ریاضیات علاقه‌مند شدید؟

نمی‌توانم بگویم از چه موقعی به ریاضی علاقه‌مند شدم ولی می‌توانم بگویم که درسال اوّل و دوّم نظری ریاضیاتم خیلی بد بود. از کسینوس فاکتور می‌گرفتم و اصلا نمی‌دانستم «تعیین علامت» یعنی چه؟ معلّمهایم به من اعتراض می‌کردند و می‌گفتند: «پسرجان اشتباهی رشتهٔ ریاضی را انتخاب کرده‌ای.» براثر تحقیر معلّمها، چنان حالتی در من ایجاد شد که یک مرتبه تصمیم قاطعی گرفتم. یک کتاب انگلیسی را برداشتم و از روی آن معادله‌های درجهٔ دوّم را خواندم و مطالعه‌ام را هرلحظه بیشتر کردم بسیار کوشیدم تا رفته رفته درسم خوب شد.

□ به چه علومی غیراز ریاضیات علاقه دارید؟

کامپیوتر و ساختمان داده‌ها، شیمی آلی و بحث ایزومرها، بلورشناسی، مقاومت مصالح و معماری.

□ کدام‌یک از معلمهای شما بیشترین تأثیر را در شما داشته است؟

قادر نیستم که بگویم کدام یک از معلّمهایم بیشتر برمن تأثیر گذاشته‌است ولی هریک از آنها، یک تأثیر خاص و

بسزایی داشته‌است، مثل دبیر تاریخ که برایمان از طریقهٔ درس خواندن صحبت می‌کرد و یا دبیر ادبیّات که در مورد سطح علمی صحبت می‌کرد برای ما رهنمود خوبی بود.

□ چه خاطره‌هایی از دوران تحصیل خود به یاد دارید؟

خاطره‌هایم خیلی زیاد هستند فقط به یکی، دوتای آن اشاره می‌کنم. در سال پنجم ابتدایی، من و یک دانش‌آموزی به نام علیرضابیگدلی (که در المپیاد ریاضی سال ۶۷ قبول شد) برای مسابقات بین مدارس انتخاب شده بودیم. چون من بازیگوش بودم؛ حذفم کردند و یک دانش‌آموز دیگری به نام «رفیعی» را به‌جای من فرستادند. خیلی برایم سخت بود و آن موقع گریهٔ زیادی کردم. از دورهٔ راهنمایی هم یک خاطرهٔ خوبی دارم. مدیر مدرسهٔ ما مرحوم آقای دانش بود. یک روز روی نرده‌ها نشسته بودم و سرمی‌خوردم. وقتی رسیدم پایین دیدم آقای مدیر جلویم ایستاده‌است. متعجب به من نگاه می‌کرد گفت: «اگر از بالا می‌افتادی و می‌مردی چه کسی می‌بایست جوابگو باشد؟» چیزی نتوانستم بگویم. همان روزها یک دانش‌آموز به علت ضربهٔ مغزی جانش را از دست داده بود. آقای دانش با دستهایش مرا لمس کرد و با مهربانی اشاره کرد که بروم. من از آن به بعد دیگر این کار را انجام ندادم. از دبیرستان هم خاطره‌های خوبی دارم مخصوصا از دبیرهای فیزیک و ریاضی که خیلی با آنها صمیمی بودم و حتّی به منزلشان می‌رفتم و گاهی هم سرمسأله‌ای با آنها شرطبندی می‌کردم.

□ آیا دوستان شما تأثیری بر شما داشته‌اند؟

در جهت تأثیر مثبت؛ دوستی و ارتباط زیاد من با علیرضابیگدلی در سال چهارم دبیرستان، برایم خیلی مفید بود خصوصاً شیوه‌هایی که در حل مسائل و با دقتی که داشت برای من بسیار ستودنی بود.

در دانشگاه هم خصوصیّات اخلاقی و سطح علمی و حتی تیزهوشی افراد بر من بسیار مؤثر بوده و تأثیر خاصی داشته است.

□ به نظر شما کتابهای درسی اعم از دبیرستان و دانشگاهی باید دارای چه ویژگیهایی باشند؟

کتب درسی دانشگاه معمولاً کتابهای جالبی است اگر چه برای هر درس، تأکید می‌شود کتابی راکه انتخاب شده مرجع اصلی تحقیق قرار دهیم ولی در کنارآن دانشجو آزاد است به هرکتاب دیگری که بخواهد مراجعه کند.

کتابهای درسی دانشگاه بویژه در رشتهٔ ریاضی؛ به چند دسته تقسیم می‌شوند: یکی کتابهایی که افراد پیش کسوت آنها را نوشته‌اند، مثل «کتاب جبر» ؛ وان درواپردن . این گونه کتابها معمولا ایده‌های زیادی در خود دارند ولی خیلی از مطالب جنبی در آن گفته نشده‌است، به‌علاوه در این نوع کتابها روش توضیح چندان مناسب نمی‌باشد. یعنی در این نوع کتابها سعی نشده‌است، یک مطلب را با مثالهای زیاد و رسم شکل و تشبیه و تمثیل به خواننده تفهیم کند بلکه فقط ایده‌های اصلی راگفته و رفته است. کتابهای بعدی؛ کتابهایی هستند که در آن مطالب اصلی باشیوه‌ای زیبا و آسان بیان شده و از مثال بسیار و توضیح خوبی برای تفهیم به خواننده استفاده شده‌است. این کتابها برای یادگیری خوب هستند ولی همانند کتابهای دستهٔ اول به خواننده، ایده نمی‌دهند. اگر چه ممکن است، دید خواننده را بازتر کند.

یک دستهٔ دیگر از کتابها، آنهایی هستند که بیشتر به طور توضیحی در مورد مطلب بحث می‌کنند و مطالب خاصی را دنبال می‌نمایند که معمولاً به عنوان مرجع برای مطالعهٔ بیشتر انتخاب می‌شوند.

و دیگر کتب، دایرةالمعارفها می‌باشند که تقریباً مطالب زیادی دریک موضوع رادر خود به طور جامع دارد. و بیشتر برای رفع اشکال مورداستفاده قرار می‌گیرد.

باتوضیحی که داده شد می‌توان گفت که در دانشگاه تلاش بیشتری برای یادگیری انجام می‌شود تا در دبیرستان. مطالب دبیرستان هرکدام مقدّمه و خلاصه‌ای از یک مبحث گسترده است که حتّی در این حد هم دارای اشکال هستند. به طور کلی شیوهٔ تنظیم دروس دبیرستانی صحیح نیست. به کتاب ریاضی دبیرستان نگاهی بیفکنیم. تعریف تابع درسال دوّم و سوّم و چهارم آمده است، همچنین مبحث حدّ و مشتق و نیز قسمت رسم منحنی که چندین صفحهٔ جبر و آنالیز سال چهارم را اشغال کرده‌است. بنده هنوز تا این زمان نفهمیده‌ام، رسم منحنی با آن همه مشقّت و زحمت، به چه درد می‌خورد؟! یا بحث معادلهٔ درجهٔ سوّم، که درسال سوم روش منحنیِ آن مطرح شده‌است و سال چهارم بحث در مورد آن دارد! و فکر نمی‌کنم با روشی که درسال چهارم برای معادلهٔ درجهٔ سوّم ارائه داده شده است کسی بتواند یک ریشه از یک معادلهٔ درجه سوّم به دست آورد. در بین کتابهای دبیرستانی، فقط کتب فیزیک برای من جالب بوده‌است و آنها را بسیار پسندیده‌ام.

□ آیا وجود کتابهای جنب درسی را لازم می‌دانید؟

به نظر بنده هر دانش‌آموزی باید بااین گونه کتب آشنا باشد زیرا دید بهتری به آنها خواهد داد و دانش‌آموزان نباید از این نوع کتابها غافل بمانند حتی در درس تاریخ.

□ به‌نظر شما میزان آگاهی یک ریاضی‌دان از دیگر علوم باید تا چه اندازه‌ای باشد و آیا این آگاهی لازم است؟

نمی‌دانم این سؤال را چگونه باید جواب دهم. ریاضی‌دانهایی موفّق بوده‌اند که در بسیاری از علوم چیره دست بوده‌اند مثل: «جان فون نویمان» یا «پولیا» و ریاضی‌دانهایی هم هستند که خیلی تخصّصی کار کرده‌اند و کاری به دیگر علوم نداشته‌اند، «آرتین» چنین بود.

ولی در کلّ بهتر است به جای این که رشته‌های غیراز ریاضی را یاد بگیریم وقت بیشتری روی یک رشته بگذاریم. امروزه علم آنقدر تخصصی شده‌است که مسلط شدن به هریک از آنها عمر درازی را می‌خواهد. درحال حاضر جامع بودن در علوم به درد نمی‌خورد، تخصصی و تبحر مورد نیاز است.

□ آگاهی خود شما از دیگر علوم تا چه اندازه‌ای است؟

بنده حتی در رشتهٔ ریاضی هم به اندازهٔ کافی آگاهی ندارم ولی از آنجایی که شوق یادگیری دانش و صنعت در من وجود داشت به آموزشها و کارهای بسیاری روی نهادم از جمله منبت‌کاری، آلومینیوم کاری، تراشکاری و تعمیر لوازم خانگی، و سپس به خطاطی و زبانهای عربی و آلمانی و فرانسه. یک مدتی شیمی خواندم بعدمکانیک. ریاضی هم می‌خواندم. البته همهٔ اینها را بیشتر در تابستان انجام می‌دادم. اما در مجموع حاصل آنها برایم هیچ بود. اگر یک رشته را پی‌گیری می‌کردم و تمام وقت خودم را صرف همان می‌نمودم برای من خیلی مفیدتر بود.

□ محیط دبیرستان را برای پرورش ریاضی مناسب دیده‌اید یا محیط دانشگاه را؟

دانشگاه خیلی بهتر است چون آدم تخصصی‌تر درس می‌خواند اگر چه در دانشگاه گرفتاری آدم زیادتر است، و یک دانشجو دریک ترم به‌اندازه چهار دانش‌آموز دریک سال تحصیلی کار انجام می‌دهد ولی بازهم در اینجا پرورش علم اصولی وبهتر است.

□ آیا ضمن تحصیلات خود مجلّه‌های علمی را مطالعه می‌کردی؟

خیلی سالها قبل دانستنیها و ماشین و دانشمند و ... را می‌خواندم بعدها مجله رشد ریاضی را خواندم. درحال حاضر هم فرصت ندارم تا نگاهی به یکی از آنها بیندازم و فقط گاه گاهی مجله ماشین را می‌بینم.

□ یک دبیر ریاضی باید دارای چه خصوصیاتی باشد؟

اولاً میزان آگاهی یک دبیر از موضوع تدریس باید بسیار بالا باشد. در ثانی هر دبیر، درسی را تدریس کند که رشتهٔ اختصاصی اوست. بنده خودم بسیار دیده‌ام که مثلاً لیسانس زبان انگلیسی، تدریس فیزیک می‌کند. این طریق تدریس نمی‌تواند دانش‌آموزی را در تحصیل یاری کند اگر هم چیزی بیاموزد یا اتفاقی است یا ممکن است زمینه‌ای قبلی در دانش‌آموز وجود داشت. دبیری که از اطلاعات لازم و تبحّر کافی از مورد تدریس خود داشته باشد می‌تواند هم ایده‌های بهتری به دانش‌آموز ارائه دهد و هم در علاقه‌مند کردن دانش‌آموز به راه کسب دانش، مفید خواهد بود.

از لحاظ اخلاقی هم معمولاً دبیران صبور و با صلابت، تأثیر عاطفی بیشتری روی دانش‌آموزان خود می‌گذارند.

□ یک استاد ریاضی باید دارای چه خصوصیاتی باشد؟

یک استاد باید بتواند خوب درس بدهد و ایجادانگیزه کند. مطلبی که بنده می‌خواهم عرض کنم در مورد روابط استاد و دانشجو است؛ استاد باید دانشجویش را درک کند، باید بتواند موقعیت دانشجو را تشخیص دهد، این دانشجویان دیگر بچه نیستند که فقط کارشان درس‌خواندن باشد، این دانشجویان در ابتدای زندگیشان بامشکلات بغرنجی روبه‌روهستند، بعضی از آنها در مقابل کوچکترین مشکلات خودشان را می‌بازند و بعضی دیگر از مشکل خاصی رنج می‌برند. یک استاد باید بتواند در مواقع خاص همانند یک پدردلسوزانه رفتار کند تجربیات زندگی خودش را به دانشجویش یادبدهد. یک استاد باید دانشجویش را از سردرگمی نجات دهد، اما متأسفانه در بعضی کلاسهاروابط استاد و دانشجونزدیک و صمیمانه نیست.

□ در آینده قصد دارید، چه کاری انجام دهید؟

دلم می‌خواهد که ریاضی بخوانم در ریاضی مسلّط شوم؛ می‌خواهم فهمیدن و حل مسائل ریاضی برایم مشکل نباشد، و بالاخره تحقیقاتم را در ریاضی بیشتر کنم ولی خُب واضح است که اینها برای آدم نان نمی‌شود، باید راهی برای امرار معاش پیدا کرد، این در حال حاضر یک مشکل بزرگی است برای محققان هر رشته‌ای از دانش. این را هم به این ترتیب فکر می‌کنم که تدریس کنم و یک کار تجاری یا تولیدی هم کنار آن داشته‌باشم که خرجی‌ام در بیاید. شاید این برایتان خیلی خنده‌دار باشد ولی کار در این دنیا زیاد است خرجی آدم یک طوری در می‌آید به‌اندازه‌ای که آدم زندگی‌اش را بچرخاند، استادان ما مگر چه کاری انجام می‌دهند اکثرشان اصلاً به فکر پول و درآمد حقوق نیستند. برای آنها حل یک مسأله مشکل یا حل نشده خیلی مهمتر از داشتن یک ماشین لوکس و یا دو قطعه زمین است اگر من هم توانستم درسم را بخوانم که این طور است اگر هم توانستم به‌سطوح بالای ریاضی برسم کارهای دیگری انجام می‌دهم. به ریاضی هم در کنار آن می‌پردازم، خلاصه و بی‌پرده بگویم، برای من دارایی دنیا اگرچه هدف نیست ولی لازم است. در عین حال اگر دریک اندازه‌ای در ریاضی بتوانم موفق شوم و خودم را ارضا کنم بقیه‌اش را خدا کریم است.

به عنوان نمونهٔ حکایتی را نقل می‌کنم؛ بنده از یک معامله‌ای خبر داشتم، به یکی از اساتیدمان گفتم، استاد اگر

بتوانی یک مقدار پول در این معامله بگذاری سود بسیاری نصیب شما می‌شود، ماکه پول نداریم اگر شما دارید این کار را بکنید. او همان طور که داشت مقاله‌ای را می‌خواند با خونسردی تمام گفت: اگر بتوانم این مسأله را حل کنم برایم خیلی سودمندتر خواهدبود.

□ کدام یک از شاخه‌های ریاضی، تأثیر بیشتری بر شما داشته است؟

مباحث مختلف و متفاوتی در کتب ریاضی هست که در هر یک از آنها نکته‌های اصلی و اساسی وجود دارد که بزرگانی آن را نگاشته‌اند که هرکس هر کدام از آنها را بخواند تأثیر زیادی خواهدگرفت. فکرنمی‌کنم بتوان روی یک شاخه، انگشت گذاشت. مثلاً درجبرخطی کتاب «satake» برایم جالب بود. درهندسه انتگرالی «santalo» ؛ در هندسه دیفرانسیل کتاب «klingenberg» ، در آنالیز کتاب «رودین» و کتاب «کلموگرف وفومین»، درنظریهٔ حلقه‌ها کتاب «Mc Coy» و ...

□ دانشمندان مورد علاقهٔ شما کدام‌اند و دلیل این علاقه چیست؟

در مورد دانشمندان نمی‌توانم اظهار نظرکنم و بگویم فلان دانشمند بهترین است ولی عظمت و زیبایی کارهای تعدادی از آنها برایم خیره کننده بوده است مثلا «ریمان» با عمر کوتاهی که داشت کارهایش خیلی زیاد و اساسی و نوظهور بود یا «پوانکاره» مثلاً شاید عجیب باشد ولی از کاراتئودوری که ممکن است برایتان ناآشنا باشد خیلی خوشم می‌آید چون در هر مورد راهی راکه برای حل مسائل انتخاب می‌کرد خیلی جالب و اساسی و مستقل بود. این دسته دانشمندانی که کارهای جالب و چشمگیری دارند بسیاراند و تعدادی از آنهایی که به خاطر دارم عرض می‌کنم؛ « Thurston ، Novikov، Milnor ، Sigel، Artin » و بسیاری دیگر ...

□ معلم خصوصی برای دانش‌آموز مفید است یا خیر؟

بنده خودم در حال حاضر تدریس خصوصی می‌کنم. این نوع تدریس یکی دوسال است که باب شده‌است و بحث زیادی هم به میان کشیده‌است. به‌هرصورت بایستی دانست که هدف از معلم خصوصی چیست؟ آیا آمادگی بهتر و بیشتر برای درس است؟ یا برای امتحان؟ یا برای تجدیدی؟ یا برای کنکور؟ و اگر معلم خصوصی به طور مداوم برای همراهی درس دانش‌آموز است پس مدرسه برای چیست؟ به‌علاوه دانش‌آموز به امید معلم خصوصی‌اش در مدرسه درس را یادنمی‌گیرد پس وقتش تلف می‌شود. اگر برای امتحان است اعم از تجدیدی و غیر تجدیدی، کار به این صورت است که یکی دو روز قبل امتحان از معلم خصوصی می‌خواهند که به دانش‌آموز درس را یاد بدهد اگر دانش‌آموز درس را بلد باشد معلم خصوصی فقط کمکش می‌کند مطالب رابهتر یادبگیرد، مسائل بیشتری حل کند و خلاصه مسلط‌تر شود ولی اگر دانش‌آموز در تمام سال درس را نخوانده‌باشد و نمرات قبلی‌اش هم خراب و پایین است در چند روز درس یکساله را یادگرفتن غیر ممکن است اگر چه شاید با زحمت و تاحدی شانس نمرهٔ قبولی بگیرد. اگر معلم خصوصی برای کنکور است نقش آن به دو صورت تقسیم می‌شود یکی این که دانش‌آموز در درس ضعیف است در این صورت مدت زیادی لازم هست که رئوس مطالب و نکات مهم گفته شود، سپس روشهای تستی و فنون جنگ کنکور آموزش داده‌شود که اگر معلم مسلط باشد و باتجربه و دانش‌آموز هم تلاش بکند شاید نتیجه نسبتاً خوب باشد ولی اگر دانش‌آموز درس را بلد و بسیاری از تستها راهم می‌داند. ولی روشهای تستی و کنکوری را نمی‌داند. در یک زمان‌بندی مناسب معلم خصوصی می‌تواند به او روشهای تستی را یاد بدهد تا بتواند به خوبی از عهده تشریح برآید. حال به بحث دیگری می‌پردازیم. اگر معلم خصوصی خودش به دروس چندان مسلط نباشد و یا این که روش تدریس او با

روح و روان دانش‌آموز سازگار نباشد، چنین تدریسی وقت تلف کردن است. از طرفی دیگر گاهی دیده می‌شود (این مطلب را بنده خودم دیده‌ام) که چون پسر فلانی، معلم خصوصی دارد ما هم یک معلم خصوصی برای فرزندمان بگیریم که از او عقب نیفتد! معلم خصوصی گرفتن برای این نوع آدمها خوب است چون که خیال می‌کنند کار سنجیده و درستی انجام داده‌اند! این جور معلم خصوصی گرفتنها فقط به خاطر رسیدن به یک اطمینان است، که درحقیقت بی‌معناست و معلوم است که نتیجه‌ای درست نخواهدداشت به‌علاوه دانش‌آموز به پشت‌گرمی این که معلم خصوصی دارد خیالش راحت است و سرکلاس و مدرسه هم درس نمی‌خوانند، از طرف دیگر بعضی معلمها هم فقط به‌خاطر این که پولی در آورده باشند درس می‌دهند و هیچ به‌نفس آموزش صحیح توجه ندارند و بالطبع یادگیری دانش‌آموز را نادیده می‌گیرند. و فقط با ظاهری آراسته و ژست‌گیریهای حرفه‌ای به تدریس می‌روند. واضح است که این گونه ماکتهای متحرک، حاصل چندانی به بار نخواهند آورد. هدف از تدریس خصوصی به نظر بنده عبارت است از این که: اولاً معلمی که تدریس خصوصی می‌کند باید به درس مسلط‌تر باشد و روش تدریس را به‌نحو کامل و خوب بداند. حال چند حالت را درنظر می‌گیریم: ۱) معلم اصلی (معلم مدرسه) خوب درس نمی‌دهد یا به درس مسلط نیست، در این صورت معلم خصوصی به طور مداوم می‌تواند به دانش‌آموز کمک کند و او را تا هنگام امتحان راهنمایی کند. ۲) دانش‌آموزی که درسش خوب است و فقط می‌خواهد خودش را از لحاظ درسی تقویت کند در این صورت نیز معلم خصوصی مناسب است. معلم خصوصی باید چنین دانش‌آموزانی را به سطحی بالاتر بکشد و تکالیف بیشتری از او بخواهد. ۳) دانش‌آموزی که درسش ضعیف است و می‌خواهد برای امتحان آماده شود در این صورت وظیفهٔ معلم خصوصی (درمدت زمان بیشتری) این است که برای دانش‌آموز تمرین حل کند و از او امتحان بگیرد و به اشکالهای اساسی‌اش پی‌ببرد تا برای امتحان آماده شود. (البته تلاش دانش‌آموز در درجه اول اهمیت واقع است). ۴) دانش‌آموز برای تست و کنکور می‌خواهد درس بخواند در این صورت معلم خصوصی باتوجه به وضعیت درسی دانش‌آموز به او مطالب و نکات مهم را می‌گوید همراه با مثال و با توجه به این که در این شرایط دانش‌آموز بایستی اکثر مطالب را بلد باشد. معلم به همراه دانش‌آموز شروع به تست زدن می‌کند و نکات مهم را خاطر نشان می‌کند و از دانش‌آموز می‌خواهد که در مدتی معین به چند تست جواب دهد و حاصل کار را بررسی کرده و رفع اشکال می‌کند. (راهنماییهای کلی هم در مورد کنکور لازم است.)

□ به‌نظر شما طریقهٔ گزینش دانشجو به روشهای موجود در دانشگاهها مناسب است؟

تستهایی که در کنکور سراسری داده می‌شود به نظر بنده هیچ معیار درستی برای سنجش ندارد چون بعضی از استعداد خوبی برخوردارند ولی فن کنکور را بلد نیستند یعنی شرکت در کنکور غیراز داشتن یک سری اطلاعات کافی علمی، تبحّری لازم در آن فن نیاز است که خُب بعضیها بلدند و بعضیها از آن غافل هستند. اما جواب سؤال شما، درحال حاضر بهترین راه گزینش کنکور همین راه متداول است که با این حجم و تعداد داوطلب فکر نمی‌کنم راه دیگری بتوان در پیش‌گرفت خصوصاً درسالهای اخیر دو مرحله‌ای هم شده و معدل را تأثیر داده‌اند. قبولی در خرداد هم شرط شرکت در کنکور است. مطمئنا اگر می‌شد قسمتی از سؤالات تشریحی باشد بهتر بود ولی این امکان ندارد چون که تصحیح این اوراق توسط چند نفر مصحح برگزیده شاید بیشتر به طول بکشد. البته فکر می‌کنم گزینش دانشجو باروش کنکور فعلی روش مناسبی باشد. و نمی‌توان روش دیگری را درپیش گرفت تا بعد.

□ خوش‌بختی را درچه می‌بینید؟

خوش‌بختی یعنی این که آدم از دُرون پُر باشد و در

خودش بتواند اطمینان ایجاد کند تا به آسودگی راه یابد. هم‌چنین کسی بتواند درست بفهمد و خوب تشخیص دهد.

□ به‌نظر شما خواندن ریاضیات تا چه حد لازم است؟

خواندن ریاضیات برای چه کسی؟ یک پزشک لازم نیست زیاد ریاضی بخواند، ولی یک فیزیک‌دان باید مقدار زیادی ریاضی بداند. یک ریاضی‌دان، ریاضی می‌خواند که لذت ببرد و حدی برای آن قایل نیست، ولی به طور کلی هرکسی مقداری ریاضی باید بداند که بتواند مسائل اولیه خود را در حساب حل کند.

□ آیا ریاضیات را صرفاً به خاطر ریاضیات می‌خوانید؟ چرا؟

فکر می‌کنم بله ریاضی را فقط برای ریاضی می‌خوانم یعنی می‌خوانم که ریاضی بیشتر بدانم چون که از خواندن و فهمیدن ریاضی لذّت می‌برم.

□ آیا حاضرید (درصورت امکان) به‌جای ریاضی دروس و یاحرفه‌های دیگری را انتخاب کنید؟ چرا؟

اگر منظور شما این باشد ریاضی را کنار بگذارم و دنبال کار دیگری بروم نه، ولی دلم می‌خواهد درکنار ریاضی یک کاری داشته‌باشم که بازده مالی آن، کمکی برای ریاضی خواندن باشد، از اینها گذشته من که از ریاضی ناراحت نیستم احساس راحتی می‌کنم چرا ولش کنم، بنده نمی‌گویم که چیزهای دیگر به درد نمی‌خورد بلکه هر رشته برای خودش جایی دارد. برای بنده ریاضی بهتر از همه رشته‌هاست ولی این را هم بگویم که خواندن ریاضی تنها هدف بنده نیست چون که در هر صورت باید بتوانم کاری برای کشورم انجام دهم، خدمتی بکنم، این یک وظیفه است برای من ولی این وظیفه را چه طور انجام دهم نمی‌دانم.

□ ریاضی چه نقشی در زندگی شما دارد؟

برای زندگی شوق لازم است، یک احساس رضایت از زنده بودن می‌خواهد. ریاضیات این شور و شوق را در من **ایجادمی‌کند** و خواندن آن برایم شادی آفرین است، شاید به‌طور غیرمستقیم نقشهای دیگری نیز داشته باشد که فعلا نمی‌دانم یا این که یادم نمی‌آید.

□ آیا ریاضیات توانسته است کنجکاویها و جست‌وجوهای ذهنی شما را ارضا کند؟

کنجکاویها خیلی متفاوت هستند مثلا فلان دستگاه چطوری کار می‌کند، یک «میکرو پروسسور» چطور کار می‌کند، فلان بیماری چرا عارض می‌شود، داروها چطور در بدن اثر می‌کنند که ناگفته پیداست ریاضیات این گونه کنجکاویها را نمی‌تواند ارضا کند ولی خود ریاضیات کنجکاوی زیادی دارد مثلا آیا حلقه‌ای هست که یک حلقه تقسیم نباشد و مقسوم علیه صفر هم نداشته‌باشد، مجموعه اساسی یک گروه «کلابینی» در صفحه چه شکلی دارد؟ اندازه‌پذیر است؟ متقارن است؟ بسته است؟ فشرده است؟ آیا اثبات راحتتر و جالبتر برای اثبات فلان قضیه هست؟ گروه «ایزومتری‌های» فلان فضا چیست؟ گروه همانریختی‌هایش چه؟ آیا فلان فضا را می‌توان به صورت یک فضای خارج قسمتی نوشت؟ و ... اینها و امثال اینها برای بنده دانستنش از دانستن طرز کار یک «میکروپروسسور» جالب و لذت بخش است اگر جواب آنها را بدانم و بفهمم پشت سرشان مسائل دیگری خواهند آورد جالبتر و زیباتر.

□ به نظر شما ریاضی «محض» جوابگوی چه نیازی از نیازهای انسانهاست؟

ریاضی محض شاید بعضی قسمتهایش کار بردی هم داشته‌باشد ولی به‌طور کلی فقط خود ریاضی محض منظور است و حداقل چیزی که برایم دارد این است که مطالعه و فهمیدن آن لذتی وافر به بنده می‌دهد، خلاصه این که حس زیبا پرستی دوستداران ریاضی را ریاضی «محض» ارضا می‌کند.

□ کدام یک از شاخه‌های ریاضی جذابتر است؟ چرا؟

هریک از شاخه‌های ریاضی زیبا هستند منتها بعضیها یک رشته آن را بیشتر دوست دارند. اما به‌طور کلی رشته‌های زیر از ریاضی برایم بسیار بسیار جالب بوده‌اند، نظریهٔ اعداد تحلیلی، نظریهٔ گروههای فشرده و عمل گروه هندسه انتگرالی، نظریهٔ حلقه‌ها، توپولوژی، آنالیز مختلط، هندسه ریمانی و ...

بنده، در خاتمهٔ این مصاحبه، از تمامی دست‌اندرکاران مجلهٔ ریاضی «برهان» که موجبات این گزارش را برای من فراهم کردند سپاسگزاری می‌کنم و همچنین برای دانش‌آموزان ایران اسلامی آرزوی موفقیت و پیروزی دارم.

ادب و ریاضی

زبان ریاضیات دشوار ولی فناناپذیر است. من گمان نمی‌کنم هیچ یک از محققین کنونی در ادب یونانی بتواند لطایف نهفته در دیالوگهای افلاطون یا طنزهای آریستوفانس را بدان تمامی و کمال که یک ریاضیدان هرمعنی و مقصودی را در کارهای ارشمیدس می‌فهمد درک کند.

م. ه. ا. نیوسن
دکتر غلامحسین مصاحب
تئوری مقدماتی اعداد

یادی از استاد ضیاء هشترودی

● دکتر احمد شرف‌الدین

روان‌شاد دکتر «محسن هشترودی» دانشمندی برجسته بود. برادر بزرگ وی به نام «ضیاء هشترودی» که او نیز به رحمت ایزدی پیوسته‌است از دبیران ریاضی و دانشمندی شایسته بود. استاد «ضیاء هشترودی» به زبانهای فرانسه و عربی تسلط کامل داشت. وی ریاضی «عالی» را خود فراگرفت و بسیار مبتکر بود. من در دبیرستان افتخار شاگردی ایشان را داشتم. روزی یکی از همدکلاسیها به کمک یك رابطهٔ مثلثاتی، یك مسئلهٔ هندسه طرح نمود و حل آن را از استاد ضیاء هشترودی خواست. استاد حل زیبایی برای مسئله عرضه نمود که به ذکر آن خواهم پرداخت. شایان توجه است که مقام علمی استاد «ضیاء هشترودی» بسیار بالاتر از حل این مسأله است. حل این مسأله را از این نظر که برای دانش‌آموزان کاملا مناسب و دلپذیر است یاد می‌کنم تا یادی از آن دبیر ارجمند کرده باشم.

یاد استاد محسن هشترودی و استاد ضیاء هشترودی را گرامی بداریم.

شرح مسئلهٔ هندسه:

در بسیاری از کتابهای مثلثات رابطهٔ زیر به عنوان تمرین مطرح می‌شود:

$$(۱)\quad \mathrm{Arc}tg\,۱=\mathrm{Arc}tg\frac{۱}{۲}+\mathrm{Arc}tg\frac{۱}{۳}$$

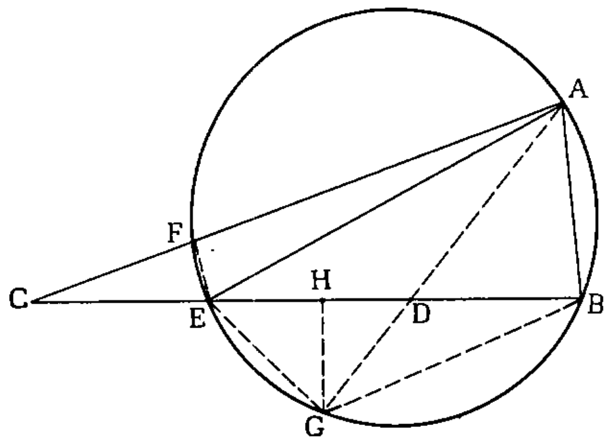
اثبات درستی رابطهٔ (۱)، به‌کمك رابطهٔ مثلثاتی زیر انجام می‌گیرد:

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{(tg\alpha+tg\beta)}{۱-tg\alpha tg\beta}$$

به‌کمك رابطهٔ (۱)، می‌توان مسئله‌هندسی زیر را طرح کرد:

در مثلث قائم‌الزاویه ABC که در آن $B=۹۰^\circ$ است طول ضلع BC سه‌برابر طول ضلع AB فرض‌شده‌است. دو نقطهٔ D و E ضلع BC را به سه قسمت مساوی $CE=ED=DB$ بخش می‌کنند. ثابت کنید رابطهٔ زیر برقرار است:

$$(۲)\quad \angle ADB=\angle AEB+\angle ACB$$



برهان. چون زاویهٔ ADB زاویهٔ خارجی مثلث AED است پس:

$$(۳)\quad \angle ADB=\angle AED+\angle EAD$$

پس برای اثبات درستی رابطهٔ (۲) کافی است ثابت کنیم که:

$$(۴) \quad \angle ACB = \angle EAD$$

از نقطهٔ E عمود EF' را برخط AC فرود می‌آوریم. دایرهٔ γ به قطر AE بردونقطهٔ F و B می گذرد. محل تلاقی دایره γ و خط AD را نقطهٔ G می‌نامیم. طول ارتفاع GH از مثلث متساوی‌الساقین EGD نصف طول پاره‌خط ED است پس:

$$(۵) \quad GH = \frac{۱}{۳} HB$$

وچون:

$$(۶) \quad AB = \frac{۱}{۳} BC$$

پس دو مثلث قائم‌الزاویه ABC و GHB متشابهند. بنابراین:

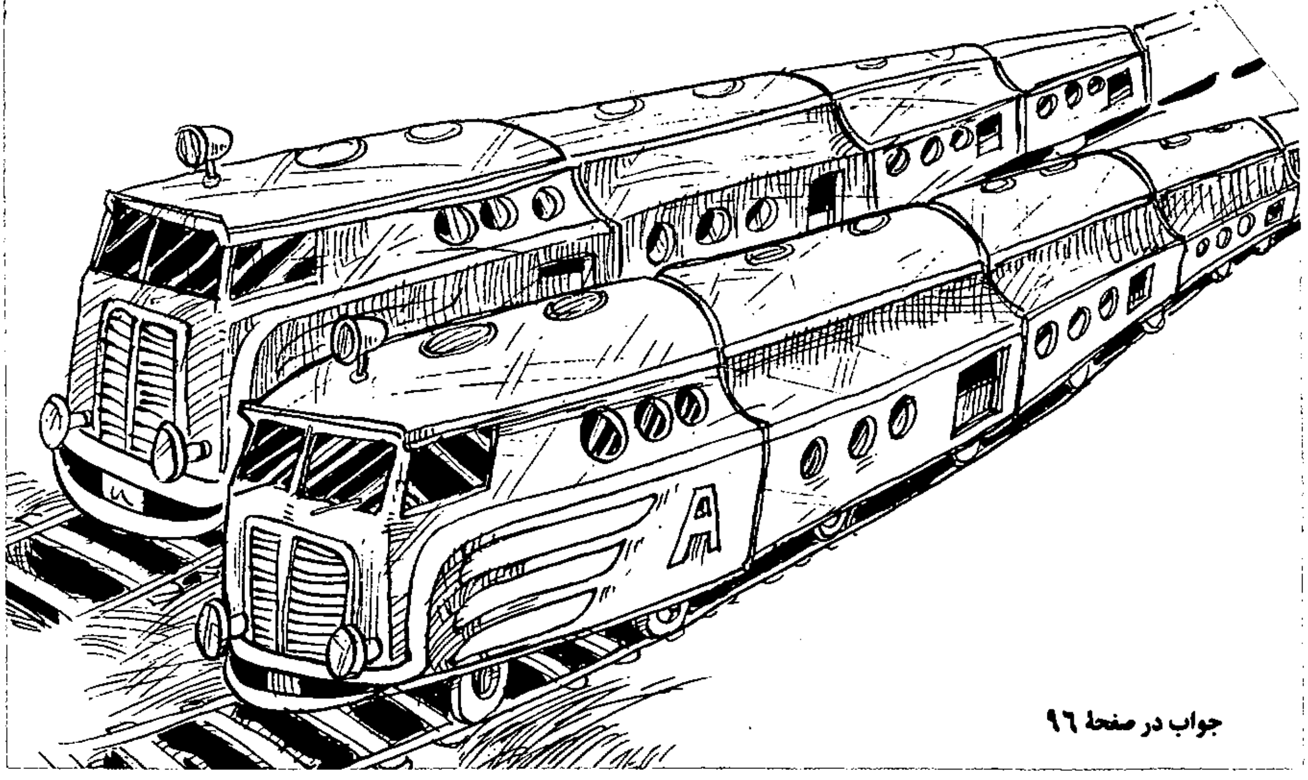
$$(۷) \quad \angle HBG = \angle ACB$$

اما دوزاویهٔ EAG و EBG مساوی‌اند (دو زاویهٔ محاطی مقابل به یك کمان) پس: $\angle EAG = \angle ACB$، و این همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

تفریح اندیشه ۲

قطار A به‌طول ۲۰۰ متر است. قطار B، ۴۰۰ متر طول دارد. دو قطار در خطوطی موازی با سرعتهای ثابت حرکت می‌کنند. در حرکت به جهات یکسان، A در ۱۵ ثانیه از B می‌گذرد:

در حرکت به جهات عکس، در ۵ ثانیه از یکدیگر می‌گذرند: سرعت هر قطار (m/s) چیست؟



جواب در صفحهٔ ۹۶

بررسی تقارن محوری و مرکزی

در تابعهای sin x و cos x

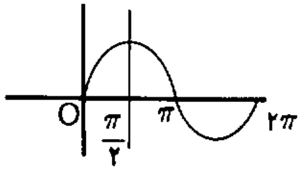
علی حسن‌زاده ماکوئی

الف : تقارن محوری: اگر در بازهٔ $[-a,a]$ و $a>0$ تابع $y=f(x)$ زوج باشد محور yها محور تقارن نمودار آن است. اگر تابع $f(x)$ درفاصلهٔ مذکور فرد باشد، ویا، نه‌فرد باشد ونه زوج ولی با انتقال مبدأ مختصات به نقطهٔ $O'(\alpha,0)$ تابع $Y=f(X+\alpha)$ در دستگاه‌جدیدتابع زوجی‌شود خط $x=\alpha$ (محور yهای‌جدید) ، محور تقارن منحنی است.

اینك مطالب فوق را در تابعهای مثلثاتی: $\sin x$ و $\cos x$ بررسی می کنیم.

۱. تابع ، $y=\sin x$ را در نظر می‌گیریم : اگر مبدأ مختصات را به نقطهٔ $O'(\frac{\pi}{2},0)$ منتقل کنیم:خواهیم‌داشت:

$$y=Y+0 \text{ و } x=\alpha+X \Rightarrow Y=\cos X$$



با توجه به زوج‌بودن تابع $y=\cos x$ ، به‌نظرمی‌رسد که خط $x=\frac{\pi}{2}$ یکی‌از محورهای تقارن‌منحنی، $y=\sin x$ است. ولی‌باید توجه داشت‌که درتابعهای مثلثاتی متناوب مسألهٔ تقارن به سادگی‌تابعهای جبری نیست. بستگی به دامنهٔ تغییرات تابع دارد.

مثلا در تابع ، $y=\sin x$ اگر فاصلهٔ تغییرات x بازهٔ $[0,2\pi]$ باشد، منحنی‌فاقد محور تقارن است بلکه قسمتهایی از آن‌که درفاصلهٔ $[0,\pi]$ و $[\pi,2\pi]$ قرار دارند، هریك‌جداگانه دارای محور تقارن می باشند که به‌ترتیب عبارتنداز:

$$x=\frac{3\pi}{2} \quad \text{و} \quad x=\frac{\pi}{2}$$

درصورتی که اگر فاصلهٔ تغییرات را بازهٔ $[0,3\pi]$ یا ... و یا $[0,(2n+1)\pi]$ و $n\in N$ اختیارکنیم منحنی تابع‌در هریك‌از فاصله‌های مزبور دارای یك محور تقارن می‌باشدکه به ترتیب عبارتنداز:

$$(2n+1)\frac{\pi}{2} , \cdots , 3\frac{\pi}{2}$$

بنابراین بیان این مطلب که منحنی تابع، $y=\sin x$ درفاصلهٔ $[0,(2n+1)\pi]$ و $n\in N$ دارای $(2n+1)$ محور تقارن است، نادرست می‌باشد.

مثال : تابع $y=\sin x$ را درنظرمی گیریم. تحقیق کنید اولا: منحنی‌تابع درفاصلهٔ $[0,2\pi]$ محورتقارن‌ندارد. ثانیا: در فاصلهٔ $[0,3\pi]$ خط $x=\frac{3\pi}{2}$ محور تقارن آن است.

حل . اولا اگر خط $x=\frac{\pi}{2}$ محور تقارن تابع باشد داریم :

و $y=\sin(\frac{\pi}{۲}+X)=\cos X$

$$\circ\leqslant x\leqslant ۲\pi \implies \frac{-\pi}{۲}\leqslant X\leqslant\frac{۳\pi}{۲}$$

با توجه به کرانه‌های دامنه که متقارن نیستند. تابع $\cos X$ درفاصلهٔ مزبور زوج نیست. درنتیجه: منحنی فاقد محور تقارن است.

ثانیا:

$$y=\sin(\frac{۳\pi}{۲}+X)=-\cos X$$

$$\circ\leqslant x\leqslant ۳\pi \implies \frac{-۳\pi}{۲}\leqslant X\leqslant\frac{۳\pi}{۲}$$

با توجه به کرانه‌های دامنه، تابع $y=-\cos X$ زوج است.

پس محور yها یعنی خط $x=\frac{۳\pi}{۲}$ محور تقارن منحنی است.

با توجه به مطالب فوق به آسانی می‌توان تحقیق کرد که

° منحنی تابع: $y=\sin x$ در فاصلهٔ:

$$k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+(۲n+۱)\pi\ ,\ k\in Z\ ,\ n\in N$$

فقط دارای یك محور تقارن به معادلهٔ:

$$x=(k+n+\frac{۱}{۲})\pi$$

است. زیرا:

$$y=\sin[(k+n+\frac{۱}{۲})\pi+X]=(-۱)^{k+n}\cos X$$

و $-(n+\frac{۱}{۲})\pi\leqslant X\leqslant(n+\frac{۱}{۲})\pi$

۲. با استفاده از مطالب فوق بـه آسانی می‌توان نتیجه گرفت، منحنی تابع $y=\cos x$ در هریك از فاصله‌های:

$$[\circ,۲n\pi]\ ,\ n\in N\ ,\ \cdots\ ,\ [\circ,۲\pi]$$

یك محور تقارن دارد که به ترتیب عبارتند از:

$$x=n\pi\ ,\ \cdots\ ,\ x=\pi$$

درحالت کلی منحنی تابع: $y=\cos x$ درفاصلهٔ

$$k\pi\leqslant x\leqslant(k+۲n)\pi\ ,\ k\in Z\ ,\ n\in N$$

یك محور تقارن به معادلهٔ: $x=(k+n)\pi$ دارد.

ب: تقارن مرکزی. بـه ازای $n\in N$ و $k\in Z$ به آسانی می‌توان تحقیق کرد که:

۱. درفاصلهٔ $k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+۲n\pi$ نقطهٔ:

$$\omega\left|\begin{array}{l}(k+n)\pi\\ \circ\end{array}\right.$$

مرکز تقارن منحنی $y=\sin x$ است.

۲. درفاصله $k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+(۲n+۱)\pi$ نقطهٔ:

$$\omega\left|\begin{array}{l}(k+n+\frac{۱}{۲})\pi\\ \circ\end{array}\right.$$

مرکز تقارن منحنی $y=\cos x$ است.

۳. درمورد تقارن تابعهای: $tg x$ و $cotg x$ متذکر می‌شود که منحنی این تابعها محور تقارن ندارند و مرکز تقارن آنها به ترتیب عبارتند از:

در فاصلهٔ $(k-\frac{۱}{۲})\pi<x<(k+\frac{۱}{۲})\pi$ نقطهٔ

$$\omega(k\pi,\circ)$$

مرکز تقارن منحنی $tg x$ است.

در فاصلهٔ $k\pi<x<(k+۱)\pi$ نقطهٔ

$$\omega(k\pi+\frac{\pi}{۲}\ ,\ \circ)$$

مرکز تقارن منحنی $cotg x$ است.

شگفتیهای ریاضی

اثر مایک ستیوبن*
ترجمهٔ حسن نصیرنیا

Mathematical curiosities

ازیادداشتهای ارسالی ستیوبن برای مترجم

سالهاست که من الگوهای عددی جمع‌آوری می‌کنم. الگوهای زیر از جملهٔ بهترین الگوهایی است که تاکنون فراهم آورده‌ام. به این امید که از آنها لذّت ببرید.

به‌نظر شما این الگو شگفت‌انگیز نیست؟

(مربعها و مکعبها را دنباله‌ای از اعداد فرد در برگرفته است.)

$$۱^۲ = ۱$$
$$۲^۲ = ۱ + ۳$$
$$۳^۲ = ۱ + ۳ + ۵$$
$$۴^۲ = ۱ + ۳ + ۵ + ۷$$
$$۵^۲ = ۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹$$
$$۶^۲ = ۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ + ۱۱$$
$$۷^۲ = ۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ + ۱۱ + ۱۳$$
$$۸^۲ = ۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ + ۱۱ + ۱۳ + ۱۵$$
$$۹^۲ = ۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ + ۱۱ + ۱۳ + ۱۵ + ۱۷$$
$$۱۰^۲ = ۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ + ۱۱ + ۱۳ + ۱۵ + ۱۷ + ۱۹$$
$$۱۱^۲ = ۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ + ۱۱ + ۱۳ + ۱۵ + ۱۷ + ۱۹ + ۲۱$$
$$۱۲^۲ = ۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ + ۱۱ + ۱۳ + ۱۵ + ۱۷ + ۱۹ + ۲۱ + ۲۳$$
$$۱۳^۲ = ۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ + ۱۱ + ۱۳ + ۱۵ + ۱۷ + ۱۹ + ۲۱ + ۲۳ + ۲۵$$
$$۱۴^۲ = ۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ + ۱۱ + ۱۳ + ۱۵ + ۱۷ + ۱۹ + ۲۱ + ۲۳ + ۲۵ + ۲۷$$
$$۱۵^۲ = \underbrace{۱}_{۱^۳} + \underbrace{۳ + ۵}_{۲^۳} + \underbrace{۷ + ۹ + ۱۱}_{۳^۳} + \underbrace{۱۳ + ۱۵ + ۱۷ + ۱۹}_{۴^۳} + \underbrace{۲۱ + ۲۳ + ۲۵ + ۲۷ + ۲۹}_{۵^۳ \ldots} \ldots$$

خواه باور کنید، خواه باور نکنید، می‌توان همهٔ توانهای مثبتِ اعداد صحیحِ مثبت را از دنبالهٔ اعداد فرد متوالی استخراج کرد.

$$\underbrace{۱}_{۱^۵},\ ۳,\ \underbrace{۵ + ۷ + ۹ + ۱۱}_{۲^۵},\ ۱۳,\ ۱۵,\ ۱۷,\ \underbrace{۱۹ + \ldots + ۳۵}_{۳^۵},\ ۳۷, \ldots, ۴۷,\ \underbrace{۴۹ + \ldots + ۷۹}_{۴^۵ \ldots}, \ldots$$

برقرار کردن تساوی میان مربعهای اعداد متوالی

$$۳^۲ + ۴^۲ = ۵^۲$$

$$۱۰^۲ + ۱۱^۲ + ۱۲^۲ = ۱۳^۲ + ۱۴^۲$$

$$۲۱^۲ + ۲۲^۲ + ۲۳^۲ + ۲۴^۲ = ۲۵^۲ + ۲۶^۲ + ۲۷^۲$$

$$۳۶^۲ + ۳۷^۲ + ۳۸^۲ + ۳۹^۲ + ۴۰^۲ = ۴۱^۲ + ۴۲^۲ + ۴۳^۲ + ۴۴^۲$$

$$۵۵^۲ + ۵۶^۲ + ۵۷^۲ + ۵۸^۲ + ۵۹^۲ + ۶۰^۲ = ۶۱^۲ + ۶۲^۲ + ۶۳^۲ + ۶۴^۲ + ۶۵^۲$$

(والی آخر)

برقرار کردن تساوی میان اعداد صحیح متوالی

$$۱ + ۲ = ۳$$

$$۴ + ۵ + ۶ = ۷ + ۸$$

$$۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ = ۱۳ + ۱۴ + ۱۵$$

$$۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰ = ۲۱ + ۲۲ + ۲۳ + ۲۴$$

$$۲۵ + ۲۶ + ۲۷ + ۲۸ + ۲۹ + ۳۰ = ۳۱ + ۳۲ + ۳۳ + ۳۴ + ۳۵$$

$$۳۶ + ۳۷ + ۳۸ + ۳۹ + ۴۰ + ۴۱ + ۴۲ = ۴۳ + ۴۴ + ۴۵ + ۴۶ + ۴۷ + ۴۸$$

(والی آخر)

شبهِ الگویی از توانها

$$۳^۱ < ۴^۱$$

$$۳^۲ + ۴^۲ = ۵^۲$$

$$۳^۳ + ۴^۳ + ۵^۳ = ۶^۳$$

$$۳^۴ + ۴^۴ + ۵^۴ + ۶^۴ > ۷^۴$$

سه‌الگوی زیبا

$$(۱ + ۲ + ۳ + ۴)^۲ = ۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + ۴^۳ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ \times ۹ = ۱۰^۲$$

$$۱۵۳ = ۱^۳ + ۵^۳ + ۳^۳ = ۱ + ۲ + ۳ + ... + ۱۷ = ۱! + ۲! + ۳! + ۴! + ۵!$$

$$۶ \times ۶ \times ۶ = (۱ + ۲ + ۳)^۳ = (۱ \times ۲ \times ۳)^۳ = ۱^۳ \times ۲^۳ \times ۳^۳ = ۳^۳ + ۴^۳ + ۵^۳ = ۶^۳$$

برخی تقارنهای تاریخی

معروفترین دانشمند جهان آلبرت اینشتین، در ۱۴ مارس (سومین ماه فرنگی) متولد شد. اما این روز همان پی (۳/۱۴) یعنی معروفترین عدد ما است.

عبارت $e^{\pi i} + ۱ = ۰$ بدان سبب منحصر به فرد است که پنج تا از مهمترین ثابتهای ریاضیات را در بَردارد. اما در اینجا نیز یک تقارن تاریخی وجود دارد. نخست، معادله رابه این صورت می‌نویسیم:

$$e^{\pi i} = -۱$$

- نماد e توسط «اویلر» ابداع شد و او آن را متداول کرد.
- نماد i توسط «اویلر» ابداع شد ولی او آن را متداول نکرد.
- نماد پی (pi) توسط «اویلر» ابداع نشد ولی او آن را متداول کرد.
- نماد ۱- توسط «اویلر» ابداع نشد و او آن را متداول نکرد.

حاصل ضرب نخستین هفت عدد اوّل ۵۱۰۵۱۰ می‌شود. این عدد با عدد ۵۱۰ که در تقسیمبندی موضوعی «ملویل دیویی» به ریاضیات اختصاص یافته‌است، تا اندازه‌ای تقارن دارد. طبق روش طبقه‌بندی دهدهی دیویی، نظریهٔ اعداد با عدد ۵۱۲/۸۱ مشخص می‌شود. این یک تقارن به شمار می‌رود، زیرا نظریهٔ اعداد عبارت است از بررسی روابط عجیب میان اعداد صحیح و ...

$$۵۱۲ = ۲^۹ \quad \text{درحالی که} \quad ۸۱ = ۹^۲$$

در روش طبقه‌بندی دیویی، عدد ۵۳۳/۳۳۱ به موضوع «عدد شناسی» اختصاص یافته است. اگر معکوس این عدد را با خودِ عدد جمع کنید، خواهید داشت:

$$\begin{array}{r} ۱۳۳/۳۳۵\,+ \\ ۵۳۳/۳۳۱ \\ \hline ۶۶۶/۶۶۶ \end{array}$$

یک الگوی زیبای دیگر

$$۶۶۶ = \begin{cases} ۱^۶ - ۲^۶ + ۳^۶ \\ ۶+۶+۶+۶^۳+۶^۳+۶^۳ \\ ۱^۳+۲^۳+۳^۳+۴^۳+۵^۳+۶^۳+۵^۳+۴^۳+۳^۳+۲^۳+۱^۳ \end{cases}$$

نماهای شگفت‌انگیز

$$۳۴۳۵ = ۳^۳ + ۴^۴ + ۳^۳ + ۵^۵$$

$$۲^۵۹^۲ = ۲,۵۹۲$$

$$۳^۴ \times ۴۲۵ = ۳۴,۴۲۵$$

$$۹۹۸,۰۰۱ = (۹۹۸ + ۰۰۱)^۲$$

جمع بستن ارقام

$$\frac{۲۴,۰۶۲}{۳۶,۰۹۳} = \frac{۲+۴+۰+۶+۲}{۳+۶+۰+۹+۳}$$

فاکتوریلهای جالب توجه

$$۱۴۵ = ۱! + ۴! + ۵!$$

$$۴۰,۵۸۵ = ۴! + ۰! + ۵! + ۸! + ۵!$$

توانهای تغییر یابنده

$$۱^۱ + ۶^۱ + ۷^۱ + ۱۷^۱ + ۱۸^۱ + ۲۳^۱ = ۲^۱ + ۳^۱ + ۱۱^۱ + ۱۳^۱ + ۲۱^۱ + ۲۲^۱$$

$$۱^۲ + ۶^۲ + ۷^۲ + ۱۷^۲ + ۱۸^۲ + ۲۳^۲ = ۲^۲ + ۳^۲ + ۱۱^۲ + ۱۳^۲ + ۲۱^۲ + ۲۲^۲$$

$$۱^۳ + ۶^۳ + ۷^۳ + ۱۷^۳ + ۱۸^۳ + ۲۳^۳ = ۲^۳ + ۳^۳ + ۱۱^۳ + ۱۳^۳ + ۲۱^۳ + ۲۲^۳$$

$$۱^۴ + ۶^۴ + ۷^۴ + ۱۷^۴ + ۱۸^۴ + ۲۳^۴ = ۲^۴ + ۳^۴ + ۱۱^۴ + ۱۳^۴ + ۲۱^۴ + ۲۲^۴$$

$$۱^۵ + ۶^۵ + ۷^۵ + ۱۷^۵ + ۱۸^۵ + ۲۳^۵ = ۲^۵ + ۳^۵ + ۱۱^۵ + ۱۳^۵ + ۲۱^۵ + ۲۲^۵$$

(به این عبارتهای عجیب، چند درجه‌ایها می‌گویند. فهرستی از این عبارتها را می‌توان در کتاب زیر دید:
Madachy, J.S. Mathematics on Vacation, Scribners, 1966.)

* مایک ستیوبن (Mike stueben) دبیر برجستهٔ ریاضیات و معماپرداز سرشناس، سالها عهده‌دار تهیه و تنظیم ستونِ سرگرمیهای علمی مجلهٔ معروف «دیسکاوره» بوده‌است. در طی هفت سال گذشته ترجمهٔ بسیاری از نوشته‌های او تحت عنوان «استدلالهای معمایی» در مجلاّت علمی کشورما درج و سپس درقالب دو جلد کتاب (از سوی انتشارات مدرسه) تجدید چاپ شده‌است. (م.)

بسط دو جمله‌ای «خیام» ـ «نیوتن» و تعمیم آن

سید محمدرضا هاشمی موسوی

در جبر، هرعبارت بـه صورت کلی $(a+b)^n$ را دو جمله‌ای «نیوتن» وچند جمله‌ای هم‌ارز با آن‌را بسط دوجمله‌ای «نیوتن» می‌گویند. به عنوان مثال؛ دو جمله‌ای نیوتن به ازای $n=0$ و $n=1$ و $n=2$ و $n=3$ و... به‌شکل زیراست‌که طرف‌دوم آن بسط دوجمله‌ای است. یعنی داریم:

$$(a+b)^0=1$$
$$(a+b)^1=a+b$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

. . . .

. . . .

اگرضریبهای این چند جمله‌ایها را به ترتیب زیر بنویسیم:

۱

۱   ۱

۱   ۲   ۱

۱   ۳   ۳   ۱

. . . .

شکلی شبیه مثلث حاصل می‌شودکه مجموع هر دو عدد هرسطر یکی‌از ضریبهای سطربعد را می‌دهد و روی دو ساق مثلث عدد ثابت ۱ قراردارد. دراین‌صورت به‌کمك مثلث‌فوق‌اعداد واقع درسطر بعد به دست می‌آید ودر نتیجه ضرایب بسط دوجمله‌ای‌را برای‌هرعددطبیعیnمی‌توان‌نوشت.مثلاسطرپنجم‌عبارت‌است‌از:

۱   ۴   ۶   ۴   ۱

این اعدادضریبهای بسط دوجمله‌ای $(a+b)^4$ بوده و داریم:

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

با در نظر گرفتن ضریبها ونظم خاصی‌که بین جمله‌های بسط موجوداست‌نتیجه می‌شودکه بسط دوجمله‌ای‌نیوتن‌دارای ویژگیهایی است‌که باکمك آنها نیز می‌توان به ازای هرعدد طبیعیn، عبارت $(a+b)^n$ رابه صورت‌یك‌چندجمله‌ای‌تبدیل کرده وضرایب جمله‌ها را حساب‌کرد.

این ویژگیها عبارتند از:

۱ـ این‌بسط‌دارای $(n+1)$ جملهٔ‌متمایز‌است وبرحسب a و b چند جمله‌ای درجهٔ n متقارن وهمگن است.

۲ـ ضریب هرجمله‌در بسط برابراست با حاصل ضرب ضریب جملهٔ قبل در توان حرف a درآن جمله، تقسیم برتعداد جمله‌هایی‌که تاآن جمله نوشته شده است.

۳ـ وقتی‌برحسب توان‌نزولی a نوشته شود با جملهٔ a^n شروع وبه جملهٔ b^n ختم می‌شود.

۴ـ درهرجمله در مقایسه با جملهٔ‌قبل یك‌واحد ازتوان a کسر ویك واحدبه توان b اضافه می‌شود.

۵ـ جمله‌هایی‌که از دوطرف به یك‌فاصله‌باشندضریبهایی متساوی دارند.

۶ـ مجموع‌توان a وتوان b در هـرجمله برابر مقدار ثابت n است.

۷ـ مجموع ضریبهای‌بسط برابراست‌با: 2^n.

۸ـ هرگاه ضریب‌جملهٔ pام باضریب‌جملهٔ rام‌بسط‌برابر

باشد، آنگاه داریم: $p+r=n+2$.

۹ـ جملهٔ kام بسط از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$(n! = n\times(n-1)(n-2)\times\cdots\times 3\times 2\times 1,\ 0!=1)$$

(نماد ضریب جمله kام $\binom{n}{k}$ ویا C_n^k است).

$$C_n^k a^{n-k+1}b^{k-1} \text{ و یا } \binom{n}{k}a^{n-k+1}b^{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}a^{n-k+1}b^{k-1}$$

با توجه به ویژگیهای فوق بسط دوجمله‌ای نیوتن‌را برای هرعدد طبیعی n می‌توان نوشت، به عنوان مثال، برای $n=5$ داریم:

$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

و درحالت کلی داریم:

$$(a+b)^n = a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+\cdots+b^n$$

هرگاه در دستور فوق b را به $-b$ تبدیل کنیم ضریبهای جمله‌های بالا یك درمیان مثبت ومنفی می‌شوند یعنی:

$$(a-b)^n = a^n-na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+\cdots+(-1)^nb^n$$

بدیهی‌است با اختیار کردن $a=b=1$ مجموع‌ضریبهای بسط دوجمله‌ای به دست‌خواهدآمد. درنتیجه مجموع ضریبها در بسط $(a-b)^n$ برابرصفر است و داریم:

$$1-n+\frac{n(n-1)}{2!}-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}+\cdots+(-1)^n=0$$

مثال ۱: در بسط دو جمله‌ای $(3x+2y)^{n^2}$ مقدار n را چنان تعیین کنید که مجموع‌ضریبهای بسط برابر ۶۲۵ شود.

حل: برای بـه دست‌آوردن مجمـوع ضریبهای بسط، $x=y=1$ اختیار می‌کنیم ودر نتیجه داریم:

$$(3+2)^{n^2}=625$$

$$5^{n^2}=5^4 \Longrightarrow n^2=4 \Longrightarrow n=\pm 2$$

مثال ۲: در بسط دو جمله‌ای $(k^3x^2+3)^7$ مقدار k را چنان تعیین کنید که مجموع‌ضریبهای بسط برابر ۱۲۸ باشد.

حل: برای‌به‌دست‌آوردن مجموع‌ضریبهای‌بسط، $x=1$ اختیار می‌کنیم و در نتیجه داریم:

$$(k^3+3)^7=128$$

$$(k^3+3)^7=2^7 \Longrightarrow k^3+3=2$$

$$\Longrightarrow k^3=-1 \Longrightarrow k=-1$$

مثال ۳: مجموع ضریبهای عددی بسط:

$$(3x^2y-y^3z-zt)^{100}$$

را حساب‌کنید.

حل: با اختیار کردن، $x=y=z=t=1$ داریم:

$$\text{مجموع‌ضرایب} = (3-1-1)^{100}=1^{100}=1$$

مثال ۴: مجموع‌جبری‌ضرایب عددی‌را درچند جمله‌ای که از‌بسط عبارت‌زیر به دست می‌آید، پیداکنید:

$$(x^7-3x^5+x^3y^2-x^{15}y^3z^7+z)^{21}+(x^5-y^3z^2+xyz)^{15}+(x+y)^5-12$$

حل: با اختیارکردن، $x=y=z=1$ داریم:

$$\text{مجموع ضرایب } (-1)^{21}+(1)^{15}+(2)^5-12=20$$

مثال ۵: به ازای چه مقادیری از n مجموع ضریبهای بسـط $\left(\sqrt[5]{x^3}+\frac{1}{\sqrt{x^2}}\right)^n$ از مجمـوع ضریبـهـای بسـط $\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{y}\right)^{2n}$، ۹۹۲ واحدکمتراست.

حل : با اختیار کردن، $x=y=۱$ ، باید داشته باشیم:

$$۲^{۲n}=۲^n+۹۹۲ \Longrightarrow$$

$$(۲^n)^۲-(۲^n)-۹۹۲=۰ \Longrightarrow$$

$$(۲^n-۳۲)(۲^n+۳۱)=۰ \Longrightarrow ۲^n=۳۲$$

$$(۲^n+۳۱\neq ۰) \Longrightarrow ۲^n=۲^۵ \Longrightarrow n=۵$$

مثال ۶ : اگردر بسط، $(x+y)^n$ ضریب جملهٔ نوزدهم باضریب جملهٔهفتم برابرباشد، n را حساب کنید.

حل : باتوجه به فرمول، $p+r=n+۲$ داریم:

$$۱۹+۷=n+۲ \Longrightarrow n=۲۴$$

مثال ۷ : جملهٔ ششم در بسط $(۲x^۳+y^۲)^۷$ را تعیین کنید.

حل : با استفاده از فرمول ،

$$C_n^k=\frac{n!}{(k-۱)!(n-k+۱)!}$$

ضریب جملهٔ kام. وهمچنین جملهٔعمومی بسط $(a+b)^n$ یعنی: $C_n^k a^{n-k+۱}b^{k-۱}$ داریم:

$$a=۲x^۳$$

$$\begin{cases} n=۷ \\ k=۶ \end{cases} \Longrightarrow \text{جملهٔ ششم} =C_۷^۶(۲x^۳)^۲(y^۲)^۵$$

$$b=y^۲$$

$$\text{جملهٔ ششم} =\frac{۷!}{۵!\,۲!}۴x^۶y^{۱۰}=۸۴x^۶y^{۱۰}$$

مثال ۸ : اگر در بسط دوجمله‌ای، $(\sqrt[۴]{x^۳}+\frac{۱}{\sqrt[۵]{x^۴}})^n$ جملهٔشانزدهم مستقل‌از x باشد، n را حساب کنید.

حل : $\text{جملهٔشانزدهم} =C_n^{۱۶}a^{n-۱۵}b^{۱۵}$

$$=C_n^{۱۶}(\sqrt[۴]{x^۳})^{n-۱۵}(\frac{۱}{\sqrt[۵]{x^۴}})^{۱۵}$$

$$=C_n^{۱۶}x^{\frac{۳(n-۱۵)}{۴}}\times x^{-\frac{۴\times ۱۵}{۵}}=C_n^{۱۶}x^{\frac{۳(n-۱۵)}{۴}-۱۲}$$

$$=C_n^{۱۶}x^{\frac{۳n-۴۵-۴۸}{۴}}=C_n^{۱۶}x^{\frac{۳n-۹۳}{۴}}$$

چون جملهٔشانزدهم مستقل‌از x است پس باید فاقد x باشد و این وقتی ممکن است که داشته‌باشیم:

$$\frac{۳n-۹۳}{۴}=۰ \Longrightarrow ۳n-۹۳=۰$$

$$\Longrightarrow n=\frac{۹۳}{۳} \Longrightarrow n=۳۱$$

مثال ۹ : جملهٔ مستقل‌از x را دربسط دوجمله‌ای

$$(\sqrt[۷]{x^۵}+\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}})^{۲۹}$$

به دست آورید.

حل :

$$\text{جمله}\ (k+۱)\text{ام} =C_n^{k+۱}a^{n-k}b^k$$

$$=C_n^{k+۱}(\sqrt[۷]{x^۵})^{۲۹-k}(\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}})^k$$

$$=C_n^{k+۱}x^{\frac{۵(۲۹-k)}{۷}}\times x^{\frac{-۲k}{۳}}$$

$$=C_n^{k+۱}x^{\frac{۱۵(۲۹-k)-۱۴k}{۲۱}} \xRightarrow{\text{چون‌فاقد x است}}$$

$$\frac{۱۵(۲۹-k)-۱۴k}{۲۱}=۰ \Longrightarrow k=۱۵$$

بنابراین‌جملهٔ $(k+۱=۱۶)$ام مستقل از x است. یعنی جملهٔ شانزدهم فاقد x است (باتوجه‌به تقارن هرجمله نسبت به جملهٔ وسط بسط، آیا مسئله جواب دیگری دارد؟ در صورت وجود آن‌را بیابید) .

مثال ۱۰ : ضریب x^{-27} را در بسط $(x^5-\frac{1}{x^7})^9$ پیدا کنید.

حل : جملهٔ عمومی بسط چنین است:

$$T_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}(-b)^k \quad (\text{جملهٔ } (k+1)\text{ام } (a-b)^n)$$

$$\Longrightarrow T_{k+1}=(-1)^k\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \Longrightarrow$$

$$T_{k+1}=(-1)^k\binom{9}{k}(x^5)^{9-k}\left(\frac{1}{x^7}\right)^k$$

$$T_{k+1}=(-1)^k\binom{9}{k}(x^{45-5k})(x^{-7k})$$

$$=(-1)^k\binom{9}{k}x^{45-12k} \Longrightarrow 45-12k=-27$$

$$12k=45+27 \Longrightarrow 12k=72$$

$$\Longrightarrow k=\frac{72}{12}=6 \Longrightarrow k=6$$

$$T_7=(-1)^6\binom{9}{6}x^{-27}=\frac{9!}{6!\,3!}x^{-27}$$

$$=\frac{7\times8\times9}{2\times3}x^{-27}=84x^{-27}$$

بنابراین ضریب جملهٔ هفتم برابر ۸۴ است که ضریب x^{-27} می‌باشد.

مثال ۱۱ : مطلوب است جمله‌های گویا در بسط دو جمله‌ای: $(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2})^5$.

حل : با استفاده از جملهٔ عمومی خواهیم داشت:

$$T_{k+1}=C_5^k(\sqrt[3]{3})^{5-k}(\sqrt{2})^k \quad (\text{جملهٔ } (k+1)\text{ام})$$

$$T_{k+1}=C_5^k\, 3^{\frac{5-k}{3}}\times 2^{\frac{k}{2}}$$

اگر T_{k+1} گویا باشد باید اعداد $\frac{k}{2}$ ، $\frac{5-k}{3}$ صحیح باشند و با توجه به اینکه $k\leqslant 6$ ، بنابراین اولا باید k اعداد زوج کوچکتر یا مساوی ۶ باشد و ثانیا $\frac{5-k}{3}$ باید عدد صحیح باشد.

بنابراین تنها $k=2$ در شرایط فوق صدق می‌کند. یعنی تنها جملهٔ گویا در بسط ، جملهٔ سوم یعنی

$$C_5^2(\sqrt[3]{3})^3(\sqrt{2})^2=60$$

است.

مثال ۱۲ : در بسط عبارت $(1+x)^n$ بزرگترین ضریب را پیدا کنید.

حل : ضریب جملهٔ عمومی بسط $(1+x)^n$ برابر C_n^k بوده و بنابراین باید تعیین کنیم به ازای چه مقادیری از k ضریب C_n^k حداکثر خواهد بود. می‌دانیم:

$$C_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\times2\times3\times\cdots\times k}$$

$$=C_n^{k-1}\frac{n-k+1}{k}$$

اگر k مقدارهای ۱و۲و۳ و ... را اختیار کند فاکتور

$$\left[\frac{n+1}{k}-1\right]$$

در عبارت : $C_n^k=C_n^{k-1}\frac{n-k+1}{k}$ تنزل می‌یابد و در نتیجه اگر $\frac{n+1}{k}-1>1$ باشد، مقدار C_n^k مرتبا افزایش خواهد یافت. یعنی:

$$\frac{n+1}{k}-1>1 \Longrightarrow \frac{n+1}{k}>2$$

$$\Longrightarrow \frac{n+1}{2}>k$$

باتوجه به نامساوی فوق اکنون باید بزرگترین مقدار k را انتخاب کرد. بنابراین اگر n زوج یا فرد باشد داریم:

الف) اگر $n=2m$ باشد:

$$\frac{n+1}{2}=\frac{2m+1}{2}=m+\frac{1}{2}>k$$

لذا اگر k مقادیر، $k=0,1,2,\dots,m$ را اختیار کند عبارت $\frac{n+1}{2}$ بزرگتر از m بوده و از آنجا، $k=m=\frac{n}{2}$ خواهد بود. پس بزرگترین تعداد ترکیبها $C_n^{\frac{n}{2}}$ خواهد بود. به‌عبارت دیگر جملهٔ وسط بزرگترین جمله است، با شرط $n=2m$.

ب) اگر $n=2m+1$ باشد:

$$\frac{n+1}{2}=\frac{2m+2}{2}=m+1>k$$

لذا اگر k مقادیر، $k=0,1,2,\dots,m$ را اختیار کند، عبارت $\frac{n+1}{2}$ بزرگتر از m خواهد بود و در نتیجه داریم:

$$k=m=\frac{n-1}{2}$$

در حالتی که $k=m+1$ باشد فاکتور: $\frac{n+1}{k}-1$ برابر یك است زیرا داریم:

$$\frac{n+1}{k}-1=\frac{2m+2}{m+1}-1=1$$

و بنابراین نتیجه می‌شود:

$$C_n^{m+1}=C_n^m \Rightarrow C_n^{\frac{n+1}{2}}=C_n^{\frac{n-1}{2}}$$

* بنابراین به طور خلاصه می‌توان گفت که بزرگترین ضریب در بسط عبارت $(1+x)^n$ هنگامی که n عدد زوج باشد $C_n^{\frac{n}{2}}$ و اگر n عدد فرد باشد $C_n^{\frac{n-1}{2}}$ یا $C_n^{\frac{n+1}{2}}$ خواهد بود.

مثال ۱۳ : به‌ازای چه مقادیری از $n\in N$ و $n<100$ بسط دو جمله‌ای $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\right)^{n^2}$ دارای جمله‌های مستقل از x می‌باشد.

حل :

$$\text{جملهٔ } (k+1)\text{ام}=\binom{n^2}{k}a^{n^2-k}\cdot b^k=\binom{n^2}{k}(\sqrt[3]{x})^{n^2-k}$$

$$\times\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\right)^k=\binom{n^2}{k}x^{\frac{n^2-k}{3}}\cdot x^{\frac{-2k}{5}}$$

$$\text{جملهٔ } (k+1)\text{ام}=\binom{n^2}{k}x^{\frac{5n^2-11k}{15}}$$

$$\xRightarrow{\text{(جملهٔ مستقل از x)}} 5n^2-11k=0 \Rightarrow$$

$$n^2=\frac{11}{5}k \xRightarrow{\text{k ضریبی از ۵}} k=5s$$

$$\Rightarrow n^2=\frac{11}{5}\times 5s=11s \Rightarrow n=\sqrt{11s}$$

$$\xRightarrow[\text{s مضربی از یازده و مربع نیز می‌باشد}]{\text{چون } n\in\mathbb{N} \text{ می‌باشد پس}} s=11m^2$$

$$\Rightarrow n=11m \Rightarrow (n<100)$$

$$11m<100 \Rightarrow m<9\frac{1}{11}$$

$$\Rightarrow m\in\{1,2,3,\dots,9\}$$

$$\Rightarrow n\in\{11,22,\dots,99\}$$

(با توجه به تقارن در بسط و جابه‌جایی دو جمله، مسأله دارای جوابهای دیگری می‌تواند باشد؟)

مثال ۱۴ : مطلوب است محاسبهٔ x برای اینکه جملهٔ چهارم بسط:

$$\left[\sqrt[12]{10x}+(\sqrt{10x})^{\frac{1}{\log x+2}}\right]^6$$

مساوی ۲۰۰ باشد.

حل : جملهٔ چهارم چنین است:

$$\text{جملهٔ چهارم} = C_6^3(\sqrt{10x})^{\frac{3}{\log x+2}}(\sqrt[12]{10x})^3 = 200$$

$$\Rightarrow 20(10x)^{\frac{3}{2\log x+4}}(10x)^{\frac{1}{4}} = 200 \Rightarrow$$

$$(10x)^{\frac{6+\log x+2}{4(\log x+2)}} = 10$$

$$(10x)^{\frac{8+\log x}{4(\log x+2)}} = 10 \xrightarrow{\text{از طرفین تساوی لگاریتم می‌گیریم}}$$

$$\left[\frac{8+\log x}{4(\log x+2)}\right]\log 10x = 1$$

$$(8+\log x)(\log x+1) = 4(\log x+2)$$

$$\Rightarrow 8\log x+8+\log^2 x+\log x = 4\log x+8$$

$$\log^2 x+5\log x = 0 \Rightarrow \log x(\log x+5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\log x = 0 \rightarrow x_1 = 1\\ \log x+5 = 0 \rightarrow x_2 = 10^{-5}\end{cases}$$

بنابراین به ازای $x = 1$ یا $x = 10^{-5}$ جملهٔ چهارم بسط فوق مساوی ۲۰۰ می‌شود.

مثال ۱۵ : به ازای چه مقدار از n ، ضرایب جمله‌های دوم و سوم و چهارم در بسط عبارت:

$$(\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{y})^{\frac{1+2+\dots+n}{1+n}}$$

تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند.

حل : با توجه به فرض مسأله باید ضرایب جمله‌های دوم وسوم وچهارم تشکیل تصاعد حسابی بدهند یعنی جملهٔ سوم باید واسطهٔ حسابی جمله‌های دوم وچهارم باشد. ابتدا دوجمله‌ای فوق را به شکل ساده‌تری می‌نویسیم. یعنی :

$$(\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{y})^{\frac{n(n+1)}{2(n+1)}} = (\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{y})^{\frac{n}{2}}$$

اینک باید مقدارهای :

$$C_{\frac{n}{2}}^{3}\ ,\ C_{\frac{n}{2}}^{2}\ ,\ C_{\frac{n}{2}}^{1}$$

یعنی به ترتیب:

$$\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)}{6}\ ,\ \frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2}\ ,\ \frac{n}{2}$$

تشکیل تصاعد حسابی بدهند. بنابراین داریم:

$$\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2} = \frac{\frac{n}{2}+\frac{1}{6}\left[\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\right]}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right) = \frac{n}{2}+\frac{1}{6}\left[\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\right]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{n}{2}\right)^3 - 9\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 14\left(\frac{n}{2}\right) = 0$$

$$\frac{n}{2}\left[\left(\frac{n}{2}\right)^2 - 9\left(\frac{n}{2}\right) + 14\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\frac{n}{2} = 0\\ \frac{n}{2} = 7\\ \frac{n}{2} = 2\end{cases} \xrightarrow{n>4} \begin{cases}n = 0\\ n = 14\\ n = 4\end{cases}$$

بنابراین یک مقدار موردقبول برای n به دست می‌آید که عبارت است از: $n = 14$.

مثال ۱۷ : می‌دانیم e پایهٔ لگاریتم طبیعی است و مقدار آن چنین است:

e = ۲/۷۱۸۲۸ ...

و به شکل بسته به صورت حدی :

$$e = \underset{n \to \infty}{\text{حد}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

نمایش می‌دهند.

از تعریف فوق ثابت کنید:

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

حل : ابتدا دو جمله‌ای $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ را بسط می‌دهیم و سپس از هر یك از جملات حد می‌گیریم یعنی:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left[1+\frac{n}{1!}\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots\right]$$

$$e=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}(1)+\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\frac{n}{1!}\left(\frac{1}{n}\right)+\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left[\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2\right]+\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left[\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3\right]+\cdots$$

$$e=1+\frac{1}{1!}+\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left[\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}\right]+\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left[\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!}\right]+\cdots$$

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots=2/71828\ldots$$

مثال ۱۸ : مقدار $\frac{1}{\sqrt{32}}$ را تا چهار رقم اعشار محاسبه کنید.

حل :

$$\frac{1}{\sqrt{32}}=(32)^{-\frac{1}{2}}=(6^2-4)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{6}\left(1-\frac{4}{6^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}\left[1-\left(\frac{2}{6}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{3^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3^2}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3^4}+\cdots\right)$$

$$=0/17677$$

از بسط دوجمله‌ای اخیر داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{32}}=0/17677$$

مثال ۱۹ : نشان دهید ریشهٔ nام هرعدد حقیقی یعنی $\sqrt[n]{a}$ را می‌توان به مجموع بی‌نهایت عدد گویا نمایش داد. به عبارت دیگر هرعدد گنگ (اصم) مجموع بی‌نهایت عدد گویا می‌باشد.

برهان : برای اثبات، کافی است $\sqrt[n]{a}$ را به سری بسط دهیم. برای این منظور درحالت کلی a^m را بسط می‌دهیم و از آنجا با اختیار $m=\frac{1}{n}$ حکم ثابت می‌شود. برای بسط a^m به سری به ترتیب زیرعمل می‌کنیم:

$$a^m=\frac{1}{a^{-m}}=\left(1-1+\frac{1}{a}\right)^{-m}$$

$$=\left(1-\left(\frac{a-1}{a}\right)\right)^{-m}$$

$$=1+m\left(\frac{a-1}{a}\right)+\frac{m(m+1)}{2!}\left(\frac{a-1}{a}\right)^2+\cdots$$

بنابراین داریم:

$$a^m=1+m\left(\frac{a-1}{a}\right)+\frac{m(m+1)}{2!}\left(\frac{a-1}{a}\right)^2+\frac{m(m+1)(m+2)}{3!}\left(\frac{a-1}{a}\right)^3+\dots$$

$$m=\frac{1}{n}:\ \sqrt[n]{a}=1+\left(\frac{a-1}{na}\right)+\frac{n+1}{2!}\left(\frac{a-1}{na}\right)^2+\frac{(n+1)(2n+1)}{3!}\left(\frac{a-1}{na}\right)^3+\dots \qquad (1)$$

مثال ۲۰ : مقدار $\sqrt[3]{5}$ را با تقریب دلخواه به توسط سری حساب کنید.

حل : با توجه به بسط $\sqrt[n]{a}$ به سری می‌توان $\sqrt[3]{5}$ را با تقریب دلخواه حساب کرد.

با توجه به تساوی (۱) داریم:

$$\sqrt[3]{5}=1+\left(\frac{4}{15}\right)+\frac{4}{2!}\left(\frac{4}{15}\right)^2+\frac{4\times 7}{3!}\left(\frac{4}{15}\right)^3+\dots\simeq 1/7099\dots$$

مثال ۲۱ : عبارت $s_n=x^n+y^n$ را برحسب s و p بیان کنید.

حل :

$$\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases} \Longrightarrow X^2-sX+p=0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{s+\sqrt{s^2-4p}}{2} \\ y=\dfrac{s-\sqrt{s^2-4p}}{2} \end{cases} \quad (\Delta=s^2-4p)$$

اینك برای بیان s_n برحسب s و p کافی است مقادیر x و y را جایگزین کنیم. یعنی:

$$s_n=\left(\frac{s+\sqrt{\Delta}}{2}\right)^n+\left(\frac{s-\sqrt{\Delta}}{2}\right)^n$$

$$\xrightarrow{\text{پس از اختصار لازم}} s_n=\frac{1}{2^{n-1}}\left[s^n+\frac{n(n-1)}{2!}s^{n-2}\Delta+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}s^{n-4}\Delta^2+\dots\right]$$

رابطهٔ فوق بیان s_n را برحسب s و p نشان می‌دهد.

تعمیم دستور بسط دوجمله‌ای

ایدهٔ بسط دو جمله‌ای یعنی بسط $(x+y)^n$ الهام‌آور تعمیم آن یعنی بسط چند جمله‌ای $(x+y+z+\dots)^n$ است. برای به دست آوردن ضریبهای بسط چند جمله‌ای فوق ابتدا لازم است روش تعیین ضریبهای بسط دوجمله‌ای را به‌وسیلهٔ ترکیب ارائه‌دهیم وسپس روش‌ارائه داده‌شده را تعمیم‌دهیم و از آنجا ضریبهای بسط چندجمله‌ای را به دست آوریم. در اینجا با یك مثال روش تعیین ضریبهای بسط دوجمله‌ای‌را با روش ترکیب نشان می‌دهیم. به عنوان مثال، بسط زیررا درنظر می گیریم:

$$(x+y)^5=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$$

همان طور که مشاهده می‌شود سمت راست تساوی فوق دارای‌شش‌جملهٔ x^5 ، $5x^4y$ ، $10x^3y^2$ ، $10x^2y^3$ ، $5xy^4$ و y^5 است. آنچه دراینجا موردنظراست این است که‌ضریبهای این جمله‌ها را یعنی ، ۱،۵،۱۰،۱۰،۵،۱ ، را به وسیلهٔ نظریهٔ ترکیبها بیان‌کنیم. اینك‌نتایج ضرب‌چند دو جمله‌ای را بررسی می‌کنیم. مثلا برای‌ضرب $(A+B)$ در $(C+D)$ داریم:

$$(A+B)(C+D)=AC+AD+BC+BD$$

در مجموع اخیرهر کدام ازجمله‌ها، حاصل‌ضرب دونماد است، که یکی‌ازاولین‌پرانتز ودیگری‌از پرانتزدوم‌حاصل‌ضرب اصلی‌گرفته شده است. مشاهده می‌شود که برای انتخاب یك نماد از دوجمله‌ای اول و یك نماد از دو جمله‌ای دوم دقیقا $2\times 2=4$ راه مختلف وجود دارد . اکنون حاصل ضرب سه دوجمله‌ای زیررا بررسی می‌کنیم:

$$(A+B)(C+D)(E+F)=ACE+ADE+BCE$$
$$+BDE+ACF+ADF+BCF+BDF$$

به‌طور مشابه‌توجه می‌کنیم که این‌عبارت نیز شامل‌هشت جمله است،که هریك، حاصل‌ضرب سه‌نمادی است که به ترتیب از سه دو جمله‌ای انتخاب شده‌اند . مجدداً می‌بینیم که به $۲\times۲\times۲=۸$ طریق می‌توان سه نماد را،که هرکدام ازیك دوجمله‌ای‌هستند، انتخاب کرد. نتایج مشابهی برای حاصل‌ضرب توسیع‌یافتهٔ چهار یا پنج یا n ، چند جمله‌ای وجود دارد. حال حاصل‌ضرب :

$$(A+B)(C+D)(E+F)(g+h)(R+S)$$

را درنظرمی گیریم. بسط عبارت فوق از مجموع

$$۲\times۲\times۲\times۲\times۲=۲^۵=۳۲$$

جمله تشکیل یافته است. به عنوان نمونه‌ای از جمله‌ها می‌توان جملهٔ $ACRhE$ را درنظر گرفت که به‌طور کلی هرجملهٔ بسط، حاصل‌ضرب پنج‌نماد است که هرنماد از یکی‌از پنج‌دوجمله‌ای اصلی انتخاب‌شده است. حال دراینجا باتوجه‌به مطلبهای‌اخیر، $(x+y)^۵$ رابه‌صورت حاصل‌ضرب زیردرنظر می‌گیریم.

یعنی :

$$(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$$

و بدیهی است برای انتخاب پنج نماد ، هر کدام فقط از یك پرانتز، ۳۲ راه موجود است، اما ۳۲ جملهٔ حاصل‌همگی ازهم متمایز نیستند. به عنوان مثال، اگرعبارت $x^۲y^۳$ را به ترتیب از ضرب xها و yهای بخصوصی نتیجه‌بگیریم ومثلا داشته‌باشیم:

$$xyyyx=x^۲y^۳$$

واضح‌است‌که عبارتهای : $xxyyy$ ، $xyxyy$ ، $yyxyx$، وغیره نیز بازهم $x^۲y^۳$ را نتیجه می‌دهند. به‌بیان دیگر عبارت $x^۲y^۳$ دربسط $(x+y)^۵$ ، دقیقا به تعداد راههایی‌است‌که دو x وسه y را بتوان باترتیبهای مختلف‌نوشت ودرنتیجه باتوجه به نظریهٔ ترکیبها داریم: $C(۵,۳)=C(۵,۲)$. یعنی تعداد راههای نوشتن دو x وسه y دریك‌ردیف

(به‌طورکلی با فرض، $r+s=n$ داریم:

$$(C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{n!}{s!(n-s)!}=C(n,s)$$

چنین است:

$$C(۵\,,۲)=C(۵\,,۳)=\frac{۵!}{۲!\,۳!}=\frac{۵!}{۳!\,۲!}=۱۰$$

تحلیل فوق، عدد ۱۰ راکه ضریب $x^۲y^۳$ دربسط دو جمله‌ای $(x+y)^۵$ است را نشان می‌دهد . با روشی مشابه می‌توان ضریبهای دیگررا به دست آورد، بنابراین خواهیم داشت:

$$(x+y)^۵=C(۵,۰)x^۵+C(۵,۱)x^۴y$$
$$+C(۵,۲)x^۳y^۲+C(۵,۳)x^۲y^۳+C(۵,۴)xy^۴$$
$$+C(۵,۵)y^۵$$

در اینجا با تعمیم این الگو، برای بسط دو جمله‌ای $(x+y)^n$ که در آن n عددصحیح مثبت‌دلخواهی‌است‌خواهیم داشت :

$$(x+y)^n=C(n,۰)x^n+C(n,۱)x^{n-۱}y$$
$$+\cdots+C(n,n)y^n$$

لازم به توضیح‌است‌که اغلب‌نماد $\binom{n}{k}$ را مخصوصا در بسط دو جمله‌ای، به‌جای $C(n,k)$ و یا C_n^k به‌کار می‌برند، که درنتیجه بسط دوجمله‌ای به‌صورت زیرنوشته می‌شود:

$$(x+y)^n=\binom{n}{۰}x^n+\binom{n}{۱}x^{n-۱}y+\binom{n}{۲}x^{n-۲}y^۲$$
$$+\cdots+\binom{n}{k}x^{n-k}y^k+\cdots+\binom{n}{n}y^n$$

بنابراین بسط دوجمله‌ای با روش ترکیب به شکل زیر حاصل می‌شود :

$$(x+y)^n=x^n+nx^{n-۱}y+\frac{n(n-۱)}{۲!}x^{n-۲}y^۲$$
$$+\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۳!}x^{n-۳}y^۳+\ldots+y^n$$

اینك دراینجا باروشی مشابه و با استفاده از ترکیب، ضریبهای بسط چندجملـه‌ای $(x+y+z+\dots)^n$ را می‌تـوان نتیجه گرفت. به عنوان مثال، بسط $(x+y+z)^9$ دارای جمله‌ای به صورت $x^3y^4z^2$ است زیرا مجموع توانهای آنها برابر

$$3+4+2=9$$

است. این جملهٔ بخصوص در بسط زیر:

$$(x+y+z)^9=\underbrace{(x+y+z)(x+y+z)\dots(x+y+z)}_{\text{۹ مرتبه}}$$

به همان تعدادی ظاهر می‌شود که می‌توان x را ازسه عامل از نه عامل، و y را ازچهار عامل از شش عامل باقیمانده و z را از دو عامل باقیمانده انتخاب کرد. نظیر استدلالی که در حالت بسط دو جمله‌ای ارائه شد در اینجا نیز می‌توان عبارت $x^3y^4z^2$ را به حالتهای گوناگونی مانند:

$$zxyzxyyxy \text{ ، } xyzxyzxyy \text{ ، } yxxzyzyyx$$

وغیره نوشت وازاین مدل نتیجه زیررا به‌دست آورد، یعنی ضریب جملهٔ $x^3y^4z^2$ در بسط سه‌جمله‌ای چنین است:

$$C(9,3)\times C(6,4)\times C(2,2)$$

که برابر است با:

$$x^3y^4z^2 \text{ ضریب جملهٔ } = \frac{9!}{6!3!}\times\frac{6!}{2!4!}\times\frac{2!}{0!2!}$$

$$=\frac{9!}{3!\,4!\,2!}$$

به‌طور کلی می‌توان نتیجه گرفت که ضریب جملهٔ $x^ay^bz^c$ در بسط $(x+y+z)^n$ با فرض اینکه n عدد صحیح مثبت و مخالف صفر و برابر $a+b+c$ باشد مساوی است با:

$$x^ay^bz^c \text{ ضریب } = \frac{n!}{a!\,b!\,c!}$$

(با فرض $a+b+c=n$)

بنابراین دراینجا دیگرمی‌توان نتیجه گرفت که به ازای هرعدد صحیح مثبت n ، بسط چند جمله‌ای $(x+y+z+t+\dots)^n$ برابربا مجموع تمام‌جمله‌هایی به صورت زیر است:

$$\frac{n!}{a!\,b!\,c!\,d!\dots}x^ay^bz^ct^d\dots$$

که در آن $a،b،c،d$ ، ... روی‌تمام جوابهای معادلهٔ

$$a+b+c+d+\dots=n$$

از مجموعهٔ اعدادصحیح نامنفی تغییرمی‌کنند. بدیهی است‌که با اختیار کردن $c=d=\dots=0$ داریم:

$$\frac{n!}{a!\,b!}x^ay^b$$

با شرط $a+b=n$ و یا به عبارت دیگر

$$\frac{n!}{a!(n-a)!}x^ay^{n-a}$$

که همان‌جملهٔ عمومی بسط دوجمله‌ای است.

مثال ۲۲ : در بسـط $(x+y+z+t)^{19}$ ضرایـب جمله‌هایی به صورت $x^5y^6z^7t^2$ و $x^{12}y^7$ و $x^4y^2z^3t^{10}$ و $x^4y^{10}z^9t^{-4}$ را بنویسید.

حل : بسط فوق دارای جمله‌هایی به شکل

$$\frac{19!}{a!\,b!\,c!\,d!}x^ay^bz^ct^d$$

است با شرط $a+b+c+d=19$ و $a،b،c،d$ نامنفی.

بسط فوق جملهٔ $x^5y^6z^7t^2$ را شامل نمی‌شود زیرا داریم:

$$5+6+7+2=20$$

همچنین شامل جملهٔ $x^4y^{10}z^9t^{-4}$ نیز نمی‌شود زیـرا توان t منفی است.

اما دوجملهٔ دیگر در بسط فوق موجودمی‌باشند وضریبهای آنان چنین است:

$$\text{ضریب } x^{12}y^{7} = \frac{19!}{12!\,7!\,0!\,0!} = \frac{19!}{12!\,7!}$$

$$(12+7+0+0=19)$$

$$\text{ضریب } x^{4}y^{2}z^{3}t^{10} = \frac{19!}{4!\,2!\,3!\,10!}$$

$$(4+2+3+10=19)$$

مثال ۲۳ : ضریب $xy^2z^3t^4u^5v^6w^7$ در بسط

$$(x+y+z+t+u+v+w)^{28}$$

چیست؟

حل :

$$\text{ضریب } xy^2z^3t^4u^5v^6w^7 = \frac{28!}{1!\,2!\,3!\,4!\,5!\,6!\,7!}$$

$$(1+2+3+4+5+6+7=28)$$

مثال ۲۴ : مجموع ضرایب بسط

$$(x+y+z+t+w)^{100}$$

چند رقمی است ($\log 2 = 0/301$).

حل: با اختیار کردن $x=y=z=t=w=1$ داریم: $(1+1+1+1+1)^{100}$ و در نتیجه مجموع ضرایب بسط فوق برابر 5^{100} می‌شود که برای تعیین تعداد ارقام آن از لگاریتم استفاده می‌کنیم.

یعنی:
$$\log 5^{100} = 100\log 5 = 100\log\frac{10}{2}$$
$$=100(\log 10-\log 2)=100(1-0/301)$$
$$=100(0/699)=69/9 \Longrightarrow$$

$$\text{تعداد ارقام} = \text{مفسر} + 1 = 69+1 = 70$$

پس ۷۰ رقمی است.

مثال ۲۵ : مجموع تمام عددهایی به صورت

$$\frac{15!}{a!\,b!\,c!\,d!}$$

که در آن a و b و c و d روی تمام عددهای صحیح نامنفی تغییر می‌کنند و در شرط $a+b+c+d=15$ صدق می‌کنند را بنویسید.

حل : مجموع اعداد برابر است با 4^{15} زیرا اعداد دقیقا ضریبهای بسط $(x+y+z+t)^{15}$ می‌باشند.

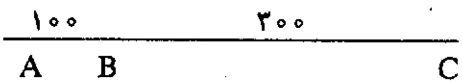
مثال ۲۶ : به‌ازای چه مقدارهایی از n، جملهٔ $x^5y^2z^n$ می‌تواند یک جمله از بسط $(x+y+z)^{n^2-15n+70}$ باشد.

حل : شرط این که جمله‌ای از بسط فوق باشد این است که داشته باشیم:

$$5+2+n=n^2-15n+70$$
$$n^2-16n+63=0 \Longrightarrow (n-7)(n-9)=0$$
$$\Longrightarrow n=7 \text{ یا } n=9$$

تفریح اندیشه ۳

A به فاصلهٔ ۱۰۰ متر از B و B به فاصلهٔ ۳۰۰ متر از C است. آنها با سرعتهای ثابت به سمت راست حرکت می‌کنند. در ۶ دقیقه A، B را می‌گیرد، و در ۶ دقیقهٔ بعد A، C را می‌گیرد. درچند دقیقه B، C را گرفته است؟



جواب در صفحهٔ ۹۶

طرح و حل مسائل اساسی ریاضی (۳)

به روشهای مقدماتی

ازکتاب : مسائل پیکارجوی ریاضی

مسألهٔ چهار دروغگو. می‌دانیم که هر یك از چهار شخص A، B، C، وD، تنها دریکی از سه مورد راست می گویند. فرض می‌کنیم که A جمله‌ای بگوید، و بعد D بیان کند که C می گوید که B می گوید که A راست می گوید. احتمال این که A واقعاً راست بگوید چیست؟

تبصره. مسألهٔ فوق‌را می‌توان به‌طریق زیر نیز تنظیم کرد. تکه کاغذی بـه A می‌دهیم و او با بعلاوه یا منها علامتی بر آن می گذارد؛ می‌دانیم که احتمال بعلاوه نوشتنA، ۱/۳ است. بعد از این کار، A کاغذ را به B رد می کند، و او ممکن است قبل‌از ردکردن آن به C یا علامتی بر آن نگذارد یا علامت قبلی را تغییر دهد. سپس C تکه کاغذ مزبور را، شاید پس‌از تغییر دادن علامت آن، به D رد می کند؛ سرانجام D آن‌را ، شاید پس از تغییر دادن علامت آن، به داوری امین می‌دهد . داور برکاغذ علامت بعلاوه را ملاحظه می کند. می‌دانیم که B، C، وD هریك علامت مزبور را با احتمال ۲/۳ تغییرمی‌دهند. دراین صورت، احتمال این که درابتدا A علامت بعلاوه را نوشته‌باشد چیست؟

حل . مسأله‌را طبق‌تنظیم‌داده شده در تبصره حل می کنیم. اما ، فرض می کنیم که A به‌جای در دست داشتن یك تکه کاغذ سفید، تکه‌ای با علامت بعلاوه داشته باشد. در این صورت او می‌تواند یا آن‌را دست‌نخورده باقی‌بگذارد یا علامت آن را به منها تغییردهد، ومی‌دانیم که احتمال این که آن‌را دست‌نخورده باقی‌بگذارد ۱/۳ است.

آزمایش موردبحث عبارت‌از ردکردن کاغذاز A به B به C به D و ملاحظهٔ نتیجهٔ نهایی است. فرض می کنیم X این پیش آمد باشدکه A علامت‌بعلاوه مزبوررا باقی بگذارد و Y این پیش‌آمد باشدکه نتیجهٔ نهایی علامت بعلاوه باشد. در این صورت باید $\Pr\{X|Y\}$، احتمال شرطی X بامعلوم‌بودن Y، را پیداکنیم. این مقدار برابر $\Pr\{X\cap Y\}/\Pr\{Y\}$ است. برای محاسبهٔ $\Pr\{Y\}$ ملاحظه می کنیم‌که برای این که علامت نهایی‌بعلاوه‌باشد باید به دفعاتی به تعداد زوج‌تغییر کرده باشد (زیرا به صورت بعلاوه آغاز شده است). بنابراین یا ۰، یا ۲ ، یا ۴ مرتبه‌تغییر کرده است. احتمال این که ۰ مرتبه تغییر کرده باشد $(۱/۳)^۴ = ۱/۸۱$، و احتمال‌این که چهار بار تغییر کرده باشد $(۲/۳)^۴ = ۱۶/۸۱$ است . بـرای محاسبهٔ احتمـال این که دو بار تغییر کرده‌باشد، توجه می کنیم‌که $\binom{۴}{۲}=۶$ طریق انتخاب دو شخصی‌که آن را تغییر داده‌اند موجوداند. به ازاء هرانتخاب این اشخاص، احتمال این که آنها علامت را تغییر دهند و دو نفر دیگر آن‌را دست‌نخورده باقی بگذارند.

$$(۲/۳)^۲(۱/۳)^۲ = ۴/۸۱$$

است. به‌این ترتیب احتمال دقیقاً دوتغییر

$$۶\cdot ۴/۸۱ = ۲۴/۸۱$$

است. بنابراین

$$\Pr\{Y\} = ۱/۸۱ + ۲۴/۸۱ + ۱۶/۸۱ = ۴۱/۸۱$$

برای این که پیش‌آمد $X\cap Y$ رخ‌دهد باید تغییراتی به تعداد

زوج بوده باشند، اما A هیچ یك از این تغییرات را انجام نمی‌دهد. بنابراین یا ۰ یا ۲ تغییر بوده است. احتمال ۰ تغییر مانند قبل $1/81 = (1/3)^4$ است، اما در این مرحله احتمال دو تغییر تنها

$$\binom{3}{2}(2/3)^2(1/3)^2 = 12/81$$

است، زیرا اشخاصی که تغییرات مزبور را انجام می‌دهند می‌توانند تنها به $3 = \binom{3}{2}$ طریق انتخاب شوند. بنابراین

$$\Pr\{X \cap Y\} = 1/81 + 12/81 = 13/81$$

و بنابراین

$$\Pr\{X|Y\} = (13/81)/(41/81) = 13/14$$

تبصره. مسألهٔ فوق را می‌توان به طریق زیر تعمیم داد. فرض می‌کنیم n شخص A_1، …، A_n مفروض باشند. تکه کاغذی با علامت بعلاوه به A_1 داده می‌شود و او آن را به A_2 و او آن را به A_3 وغیره رد می‌کند؛ سرانجام A_n آن را به داور رد می‌کند. در مرحله i ام، A_i اختیار تغییر علامت را پیش از رد کردن آن دارد؛ فرض می‌کنیم که هر A_i این اختیار را با احتمال p، با $0 < p < 1$، به‌کار می‌برد.

اکنون فرض می‌کنیم که داور علامت بعلاوه‌ای را در پایان این جریان ملاحظه می‌کند. احتمال این که A_1 علامت مزبور را بی‌تغییر باقی گذاشته باشد چیست؟ (تنظیم این مسأله را به صورت مسألهٔ n دروغگو به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.)

به خاطر سهولت در علامت‌نویسی، $q = 1 - p$ قرار می‌دهیم؛ به این ترتیب q احتمال این است که A_i علامت مربوطه را تغییر ندهد.

فرض می‌کنیم X پیش‌آمد این که A_1 علامت مورد بحث را تغییر ندهد باشد، و Y پیش‌آمد این که علامت نهایی بعلاوه باشد. در این صورت باید

$$\Pr\{X|Y\} = \Pr\{X \cap Y\}/\Pr\{Y\}$$

را حساب کنیم.

برای پیدا کردن $\Pr\{Y\}$، توجه داشته باشید که به‌خاطر این که علامت نهایی بعلاوه باشد، باید به دفعاتی به تعداد زوج، $2k$، با $0 \leqslant 2k \leqslant n$، تغییر علامت داده باشد. احتمال این را، که علامت مورد بحث دقیقاً $2k$ مرتبه عوض شده باشد، محاسبه می‌کنیم. $\binom{n}{2k}$ طریق انتخاب اشخاصی که تغییرات مزبور را انجام می‌دهند موجوداند. فرض می‌کنیم این افراد انتخاب شده باشند؛ برای تصریح کار فرض می‌کنیم که افراد مزبور

$$A_1, \ldots, A_{2k}$$

باشند. احتمال این که تمام آنها علامت مربوطه را تغییر دهند، اما اشخاص باقی‌مانده، یعنی، A_{2k+1}، …، A_n آن را دست نخورده باقی بگذارند،

$$\overbrace{p \cdot p \cdots\cdots p}^{2k}\ \overbrace{q \cdot q \cdots\cdots q}^{n-2k} = p^{2k}q^{n-2k}$$

است. استدلالی مشابه درمورد هر گروه $2k$ نفره‌ای که تغییرات مزبور را انجام دهند به‌کار می‌رود، بنابراین احتمال موردنظر عبارت است از

$$\binom{n}{2k}p^{2k}q^{n-2k}$$

بنابراین

$$\Pr\{Y\} = \binom{n}{0}q^n + \binom{n}{2}p^2q^{n-2}$$

$$+ \binom{n}{4}p^4q^{n-4} + \cdots$$

که در آن سری مورد بحث به مجرد این که $2k$ بزرگ‌تر از n بشود به‌پایان می‌رسد. برای محاسبهٔ مقدار فوق به‌صورت بسته، قضیهٔ دوجمله‌ای را درمورد $(q+p)^n$ و $(q-p)^n$ به کار می‌بریم. در این صورت حاصل می‌شود

$$(q+p)^n=\binom{n}{0}q^n+\binom{n}{1}q^{n-1}p+\binom{n}{2}q^{n-2}p^2$$

$$+\binom{n}{3}q^{n-3}p^3+\dots+\binom{n}{n}p^n$$

$$(q-p)^n=\binom{n}{0}q^n-\binom{n}{1}q^{n-1}p$$

$$+\binom{n}{2}q^{n-2}p^2-\binom{n}{3}q^{n-3}p^3+\dots+(-1)^n\binom{n}{n}p^n$$

با جمع این دو تساوی و سپس تقسیم بر ۲ی آن، ملاحظه‌می‌کنیم که

$$\frac{(q+p)^n+(q-p)^n}{2}=\binom{n}{0}q^n+\binom{n}{2}q^{n-2}p^2$$

$$+\binom{n}{4}q^{n-4}p^4+\dots=\Pr\{Y\}$$

این رابطه، از آن‌جا که $q+p=1$ ، می‌تواند برای به دست دادن

$$\Pr\{Y\}=[1+(1-2p)^n]/2$$

ساده شود.

بعد باید $\Pr\{X\cap Y\}$ را به دست آوریم. برای رخ‌دادن $X\cap Y$ باید تعداد زوجی‌از اشخاص علامت مذکور را تغییر دهند، اما A_1 نباید یکی از آنها باشد. بنابراین اگر دقیقاً $2k$ نفر علامت مذکور را تغییر دهند، می‌توانند تنها به $\binom{n-1}{2k}$ طریق انتخاب شوند.

هنگامی که $2k$ نفر موردبحث انتخاب‌شدند، احتمال این که علامت مزبور را تغییر دهند درحالی که $n-2k$ نفر دیگر آن را دست نخورده باقی بگذارند همچنان $p^{2k}q^{n-2k}$ است. بنابراین

$$\Pr\{X\cap Y\}=\binom{n-1}{0}q^n+\binom{n-1}{2}p^2q^{n-2}$$

$$+\binom{n-1}{4}p^4q^{n-4}+\dots$$

$$=q\left\{\binom{n-1}{0}q^{n-1}+\binom{n-1}{2}p^2q^{n-3}\right.$$

$$\left.+\binom{n-1}{4}p^4q^{n-5}+\dots\right\}$$

عبارت داخل آکولاد را می‌توان مانند فوق محاسبه‌کرد، و به دست آورد:

$$\Pr\{X\cap Y\}=q\,\frac{1+(1-2p)^{n-1}}{2}$$

سرانجام

$$\Pr\{X|Y\}=\frac{\Pr\{X\cap Y\}}{\Pr\{Y\}}$$

$$1=(1-p)\frac{1+(1-2p)^{n-1}}{1+(1-2p)^n}$$

استدلال به کاررفته در این راه‌حل را می‌توان در تعداد بسیاری‌ازمسائل نظریهٔ احتمال، به‌خصوص درنظریهٔ سلسله‌های مارکوف* به‌کاربرد.

---

*Markov Chains

مورد زیر را ملاحظه کنید:

J. G. Kemeny and J. L. Snell, Finite Markov Chains, Princeton, 1960

تفریح اندیشهٔ ۴

ضرب ۴ در ۲۱۷۸ پاسخی می‌دهد که مقلوب ۲۱۷۸ است،

۴ × ۲۱۷۸ = ۸۷۱۲

عددی چهار رقمی بیابید که چون در ۹ ضرب شود همین مورد را به دست دهد.

جواب در صفحهٔ ۹۶

مقالاتی از خوانندگان

● مسعود ساروی
(مجتمع دانشگاهی علوم دریایی نوشهر)

(۱) تحلیل دیگری در بارهٔ قانون پخشی درضرب بردارها

بیشتر مؤلفان کتابهای درسی ضرب برداری را با فرمول حاصل از مختصات قائم تعریف می‌کنند. بنابراین اتحادهای برداری نظیر قانون پخشی، یعنی:

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$

را می‌توان با استفاده از عملیات جبری به صورت معمولی نتیجه‌گیری نمود. اما عیب چنین محاسبه‌ای از مفهوم هندسی آن ناشی می‌شود که برای آسودگی عملیات جبری، نادیده گرفته می‌شوند.

در بعضی از کتابها هم این ضرب به صورت هندسی تعریف شده‌است و قانون پخشی با توجه به این دیدگاه نتیجه گیری می‌شود. به عنوان مثال، کتاب «حساب دیفرانسیل با هندسهٔ تحلیلی»، (تألیف، جورج. ب- توماس) را می‌توان نام برد.

بحث زیر با استفاده از تحلیل علم فشار و موازنهٔ سیالات ساکن (هیدرواستاتیك) برای قانون پخشی در کتاب «تحلیل برداری» (تألیف، گیبس و ویلسون) اقتباس شده است.

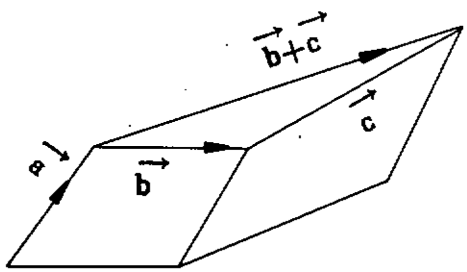
یك پنج وجهی با کناره‌های:

$$\vec{b}+\vec{c}\ ,\ \vec{c}\ ,\ \vec{b}\ ,\ \vec{a}$$

به‌صورتی که درشکل نشان داده‌شده‌است، را درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم این جسم به وسیلهٔ مایعی (بی‌وزن) با فشار تنظیم شده، پرشده باشد، در هریك از وجوه، مایع یك نیرویی اعمال می‌کند که عمود برهرسطح از همان وجه وجهت آن به صورت عمودی خارج از آن وجه می‌باشد. برای راحتی کار فرض می‌کنیم ثابت تناسب برابر واحد باشد. بنابراین نیروها درهرپنج وجه جسم به ترتیب برابراند با:

$$\vec{b}\times\vec{a}\ ,\ \vec{a}\times\vec{c}\ ,\ \vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})-\frac{1}{2}\vec{b}\times(\vec{b}+\vec{c})\ ,\ \frac{1}{2}\vec{b}\times(\vec{b}+\vec{c})$$

قانون پخشی به راحتی با توجه به این موضوع که برآیند این نیروها باید صفر باشد، به دست می‌آید.



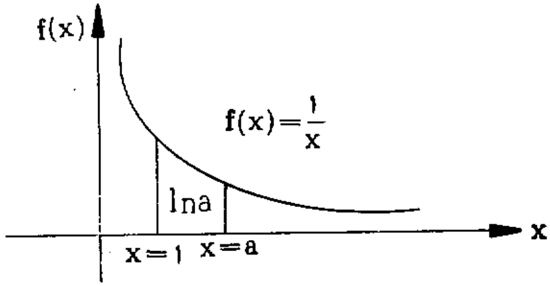
(۲) روش دیگری برای اثبات رابطهٔ:

$$\ln a+\ln b=\ln ab$$

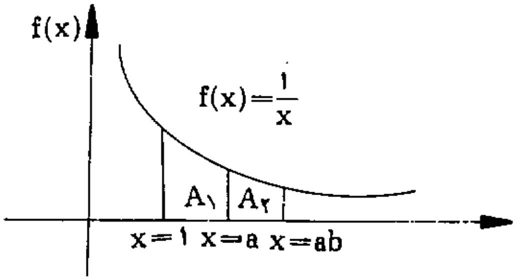
می‌دانیم:

$$\int_{1}^{a}\frac{dx}{x}=\ln a$$

که با استفاده از نمودار $f(x)=\frac{1}{x}$ حاصل $\ln a$ مقدار مساحت زیرمنحنی محدود به خطوط $x=a$ ، $x=1$ و $y=0$ است.



ناحیه‌های A_1 و A_2 از نمودار زیر را در نظر می گیریم:



بدیهی است که:

$$A_1=\int_1^a dx/x=\ln a \qquad (1)$$

و

$$A_1+A_2=\int_1^{ab} dx/x=\ln ab \qquad (2)$$

با تعویض متغیر $x=at$ داریم:

$$A_2=\int_a^{ab} dx/x=\int_1^b dt/t=\ln b \qquad (3)$$

که با جاگذاری (۱) و (۳) در (۲) می گیریم:

$$\ln a+\ln b=\ln ab$$

به طریقی مشابه می‌شود نشان داد که:

$$\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b}$$

بکوش تا در صناعت خویش کامل شوی و متذوّق* مباش، چه متذوّق را سیری نیست.

از تعلیمات علی‌ابن احمدنسوی به شاگردانش
نسوی نامه ترجمهٔ ابوالقاسم قربانی

* کسی که در علمی متخصص نیست و از هرچمن گلی برمی‌چیند.

جواب نامه‌ها

■ **آقای علی ناجی دانش‌آموز سال سوم ریاضی دبیرستان البرز**

ضمن عرض سلام و تشکر ازنامهٔ محبت‌آمیز شما و آرزوی موفقیت برای شما مخصوصاً در زمینه‌های المپیاد ریاضی و فیزیک، باید به‌عرض برسانیم که برای شکوفایی خلاقیت و ابتکار خود می‌توانید از کتاب‌هایی نظیر کتب زیر استفاده کنید:

۱ـ بازآموزی هندسه ۲ـ مسائل المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف

۳ـ تئوری اعداد ۴ـ ریاضیات چیست ۵ـ متمم‌جبروآنالیزو ....

■ **آقای‌علی‌عمیدی دانش‌آموزسال‌سوم‌ریاضی دبیرستان آزادگان‌گرمسار**

ضمن عرض سلام وتشکراز زحمات‌بی‌دریغ شماوامید همکاری هرچه بیشتر و روزافزون با مجلهٔ خودتان، باید به‌عرض برسانیم که مقالهٔ شما به‌دست ما رسید و پس از بحث و تبادل نظر امیدواریم امکان درج آن در شماره‌های آیندهٔ مجله بوجود آید. همچنین در انتظار مقالات بعدی شما هستیم.

■ **آقای سیامک جعفری مهندسی شیمی دانشکدهٔ نفت**

ضمن عرض سلام و تشکر از مقالهٔ شما در رابطه با اثبات برداری و مثلثاتی قضایای سوا و منلائوس، باید به‌عرض برسانیم که مقالهٔ شما پس از بحث‌وبررسی لازم در شماره‌های آینده متناسب با محتوای مجله به‌نام خودتان به‌چاپ خواهد رسید و درآخر از نظرات و پیشنهادات شما سپاسگزاریم و امید است تا حدامکان به آنها ترتیب اثر دهیم. با همکاری هرچه بیشتر و مقالات و نظرات بعدی خودتان ما را یاری کنید.

■ **آقای حسین سبزرو دانش‌آموز سال چهارم ریاضی منطقهٔ ۱۶ تهران**

از مسائل ارسالی شما متشکریم و سعی می‌شود در شماره‌های آینده از مسائل و مقالات شما در جای مناسب استفاده شود. به‌امید همکاری مجدد شما و مقالات و مسائل بعدی شما هستیم.

■ **آقای سیامک جعفری**

ضمن عرض سلام و تشکر از مقالهٔ ارسالی شما، باید به‌عرض برسانیم که در برنامهٔ درسی دبیرستانهای ایران در روابط برداری و نمایش بردار از علامت $\rightarrow$ استفاده شده است، مثلاً بردار AB یا V بنابراین استفاده از مقالهٔ شما برای مقطع دبیرستان ایجاد دوگانگی برای دانش‌آموزان می‌نماید، منتظر مقالات دیگری از شما در ارتباط با ریاضیات دبیرستانی هستیم.

■ **آقای جعفریه**

ضمن تشکر از مقاله شما باید به‌عرض برسانیم که مقاله‌ای بسیار کلی و عمومی درمورد آلگوریتم ضرب اعداد m رقمی در n رقمی و محاسبهٔ آنان به‌طور مستقیم درصورت‌امکان در شماره‌های‌بعدی مجله خواهدآمد.

■ **آقای افشین تاجیان دانش‌آموز سال چهارم ریاضی**

ضمن تشکر از مقالهٔ ارسالی شما به‌عرض می‌رسانیم که سعی کنید حتی‌الامکان مقالات را در سطح دانش‌آموزان دبیرستان ارائه دهید تا قابل استفادهٔ آنان باشد تا امکان درج آن در مجله بوجود آید.

■ **آقای‌عباس‌روح‌الامینی‌دانش‌آموزدبیرستان‌نمونه‌شهیدمصطفی‌خمینی**

با تشکر از شما برای ارسال مسائل برای حل، درصورت امکان از مسائل شما در جای مناسب استفاده خواهدشد. سعی کنید که صورت مسائل کوتاه و جواب آنان نیز طولانی نباشد.

■ **آقای فرشید شکوهی لیسانسیهٔ ریاضی کاربردی**

ضمن عرض سلام وتقدیرازنامهٔ‌شمادررابطه‌با محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to 0} x^n \sin \frac{1}{x^n}$ نکاتی را متذکر می‌شویم.

در محاسبهٔ حد فوق شما نتیجه‌گیری زیر را ارائه داده‌اید:

$$-1 \leqslant \sin \frac{1}{x^n} \leqslant 1 \Rightarrow -x^n \leqslant x^n \sin \frac{1}{x^n} \leqslant x^n \qquad (1)$$

که در حالت عمومی درست نیست. و فقط درحالت $x \to 0^+$ و n زوج درست‌می‌باشد. زیرااگر $x \to 0^-$ و n عددی فردباشد نتیجه‌چنین‌خواهدشد:

$$-1 \leqslant \sin \frac{1}{x^n} \leqslant 1 \Rightarrow x^n \leqslant x^n \sin \frac{1}{x^n} \leqslant -x^n \qquad (2)$$

که از روابط (۱) و (۲) و با توجه به قضیهٔ فشار داریم:

$$\lim_{x\to 0} x^n \sin \frac{1}{x^n} = 0$$

■ **خانم ویدا برفر (دبیر ریاضی)**

ضمن عرض سلام و تشکر از مقاله و مسائل ارسالی شما، به‌عرض می‌رسانیم که پس از بحث و تبادل نظر امیدواریم که امکان درج مقالهٔ شما در شماره‌های آیندهٔ مجله بوجود آید. ضمناً مسائل را در سطح مطلوب‌تری ارائه دهید.

معرفی کتابهای ریاضی

دورهٔ کامل خودآموز هندسهٔ علوم تجربی
برای دانش‌آموزان دبیرستان و داوطلبان کنکور.

مؤلفان: محمد هاشم رستمی ـ محمد علی واعظیان

ناشر: نشرگزاره.

ریاضیات محض و به خصوص هندسه در تقویت قوهٔ تفکر و شکوفایی استعدادها نقش مهمی به عهده دارند.

پروفسور جورج پولیا George Polya (۱۹۸۵ ـ ۱۸۸۷) ریاضی‌دان برجسته قرن حاضر و استاد مسلّم روش تدریس ریاضی می‌گوید: «اگر تعلیم و تربیت عمومی، درصدد ارزانی داشتن اندیشهٔ نظام منطقی به دانش‌آموزان و دانشجویان است، باید در آن، مقام خاصی برای استدلالهای هندسی درنظر گرفته شود. حتی استدلالهای ساده ممکن است از دیدگاه هوش افزایی سودمند واقع شود.»

کتاب دورهٔ کامل خودآموز هندسهٔ علوم تجربی باتوجه به نیاز فوق تألیف گردیده است تا بتواند پاسخگوی نیازهای دانش‌آموزان دبیرستان در یادگیری هرچه بهتر درس هندسه، و درضمن تقویت قوهٔ تفکر و استدلال آنان و ایجاد پیشرفتشان در دیگر دروس نیز باشد.

در این کتاب مطالب هندسه چهار سال دبیرستان همراه با مطالب تکمیلی در چهار بخش آمده است. حدود ۳۰۰ تست و مثال برای راهنمایی حل شده است و ۷۶۹ تست نیز برای حل وجود دارد. این تستها شامل تستهای هندسهٔ کنکورهای سراسری وزارت علوم و آموزش عالی در رشته علوم‌تجربی (از ۱۳۵۸ تا ۱۳۷۰) و کنکورهای رشتهٔ پزشکی دانشگاه آزاد اسلامی ایران (از ۱۳۶۴ تا ۱۳۷۰) نیز می‌باشد.

تستها براساس بخشهای چهارگانه کتاب و فصلهای هربخش تنظیم شده‌است تا هر دانش‌آموزی پس از یادگیری درس مربوط به هر فصل، تستهای در ارتباط با آن درس را حل نماید.

مسائل و تستهای ارائه شده در این کتاب در بسیاری از موارد به مراتب بیش از یک مسئله معمولی هندسه ذهن را به تلاش و تفکر وامی‌دارد. مثلاً دربخشی از این کتاب تستهایی وجود دارد که باید امکان حل مسئله، با داشتن دو فرض، مورد بررسی قرارگیرد، و یکی از حالتهای پنجگانه‌ای که می‌توند جواب مسئله باشد، مشخص گردد.

این کتاب علاوه برتأمین نیازهای دانش‌آموزان رشتهٔ علوم تجربی در زمینهٔ هندسه، برای دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی فیزیک نیز مفید است.

مسائل پیکار جوی ریاضی، ای. ام. یاگلوم،
جلد اول: آنالیز ترکیبی و نظریهٔ احتمال

جلد دوم: مسائلی از شاخه‌های گوناگون ریاضیات

ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور، نشر علوم پایه

یاگلوم نویسندهٔ نامدار روسی فردی ناشناخته در جامعهٔ ریاضی ما نیست. پیش از این کتابهای گزیده‌ای از مهمترین مسأله‌ها و قضیه‌های ریاضی.و تبدیلهای هندسی او به فارسی ترجمه شده‌اند و اکنون با این دو کتاب دو اثر مهم دیگر از این ریاضیدان نامی به فارسی زبانان معرفی می‌شود.

جلد اول کتاب درمورد **آنالیز ترکیبی و نظریهٔ احتمال** است و صد مسأله دارد. مسائل در هشت فصل به ترتیب زیر تنظیم شده‌اند:

مسائل مقدماتی، نمایش اعداد صحیح به صورت مجموعها و حاصل ضربها، مسائل ترکیبی مربوط به صفحهٔ شطرنج، مسائل هندسی شامل آنالیز ترکیبی، مسائل مربوط به ضرایب دوجمله‌ای، مسائل مربوط به محاسبات احتمالات، آزمایشهایی با بی‌نهایت نتیجهٔ ممکن، آزمایشهایی با پیوستاری از نتایج ممکن.

جلد دوم در مورد مسائلی ازشاخه‌های گوناگون ریاضیات است و هفتاد و چهار مسأله دارد. فصول این مجلد عبارتند از:

نقاط و خطوط، شبکه‌های نقاط واقع درصفحه، توپولوژی، خاصیتی از معکوسات اعداد صحیح، چند ضلعیهای محدب، بعضی از خواص دنباله‌های اعداد صحیح، توزیع اشیا، شمارش غیراعشاری، چندجمله‌ایهای باکمترین انحراف از صفر (چند جمله‌ایهای چبیشف)، چهار فورمول برای π، محاسبهٔ سطوح نواحی محصور با منحنیها،بعضی از حدود قابل توجه، نظریهٔ اعداد اول.

حل کامل مسائل و راهنماییها و پاسخها نیز در پایان هردو جلد آمده است.

کتاب شامل مسائل متعارف، مشکل، مشکلتر و مشکلترین است. سه مورد اخیر به‌ترتیب با یک، دو، یا سه ستاره مشخص شده‌اند. این مسائل غالباً دستاوردهای ارزشمند ریاضیدانهای برجسته‌اند. کتاب را می‌توان نه تنها به صورت کتاب مسأله، بلکه به عنوان مجموعه‌ای از قضایای ریاضی درنظر گرفت.

تبدیلهای هندسی، ای. ام. یاگلوم

جلد اول ، ترجمهٔ اسدالله کارشناس، عمید رسولیان.
جلد دوم، ترجمهٔ محمد باقری،
جلد سوم، ترجمهٔ محمد هادی شفیعیها،
ناشر: مرکز نشر دانشگاهی

نویسندهٔ کتاب یاگلوم مؤلف نامدار روسی است. جلد اول آن یک مقدمه و دو فصل دارد. مقدمه به هندسه چیست؟ پرداخته و فصل اول به تغییر مکانها و فصل دوم به تقارن اشتغال یافته، حل مسائل فصل اول و دوم نیز در پایان کتاب آمده است.

مؤلف خود در مقدمهٔ کتاب بر این است که:

کتاب به هندسهٔ مقدماتی اختصاص دارد، و وظیفهٔ آن، آشنا ساختن خواننده با یک رشته قضایایی که برای وی جدیدند نیست، چرا که بیشتر قضایای هندسهٔ مقدماتی، که فراتر از محدودهٔ درسهای دبیرستانیند، صرفاً مطالب نادری هستند که مورد استعمال خاصی ندارند و بیرون از مسیر پیشرفت ریاضی قرار دارند. در حالی که هندسهٔ مقدماتی، علاوه بر قضایای واقعی، شامل دو اندیشهٔ کلی مهم است که پایهٔ تمامی پیشرفتهای بعدی هندسه‌اند، و اهمیت آنها از این محدودهٔ کلی فراتر می‌رود. از یک سو در ذهن خود روش قیاسی و پایهٔ اصل موضوعی هندسه را داریم و از سوی دیگر تبدیلات هندسی و مبنای نظریهٔ گروهی هندسه را. این اندیشه‌ها بسیار بارور بوده‌اند؛ تکامل هر یک به هندسهٔ نااقلیدسی منجر شده است، وظیفهٔ اصلی این کتاب شرح اندیشهٔ دوم، یعنی فکر مبنای نظریهٔ گروهی هندسه است.

جلد دوم نیز شامل یک مقدمه و دو فصل است. مقدمه به این که هندسه چیست؟ پرداخته است و فصلها به ترتیب درمورد رده‌بندی تبدیلهای تشابهی و کاربردهای دیگر طولپاییها و تشابه‌ها سخن گفته‌اند.

در مقدمهٔ کتاب پس از این که به این مطلب اشاره شده که، مفهوم فاصلهٔ بین نقاط که طبق تعریف ما از هندسه باید نقشی اساسی داشته باشد، عملاً به‌طور مستقیم در قضیه‌ها ظاهر نمی‌شود، تعریف ف. کلاین، نخستین فردی که تعریف دقیقی برای هندسه داده، آورده شده است: هندسه علمی است که به مطالعهٔ خواصی از شکلهای هندسی می‌پردازد که بر اثر تبدیلهای تشابهی تغییر نمی‌کنند. تبدیلهای تشابهی را می‌توان به عنوان تبدیلهایی تعریف کرد که نسبت فواصل بین زوجهای نقاط را تغییر نمی‌دهند.

جلد سوم کتاب که مفصلتر از دو جلد دیگر است یک مقدمه و یک فصل و یک پیوست دارد. مقدمه به بررسی نهایی هندسه چیست؟ پرداخته و فصل اول تبدیلهای آفین و تصویری را مورد بررسی قرار داده و پیوست از هندسهٔ نااقلیدسی لباچفسکی - بویوئی یا هندسهٔ هذلولوی سخن به میان آورده. حل مسائل کتاب نیز در پایان آن آمده است.

مسائل مسابقه‌ای

• حمیدرضا امیری

۱ـ بدون بسط و با استفاده از خواص دترمینان ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix} = x^2z^2$$

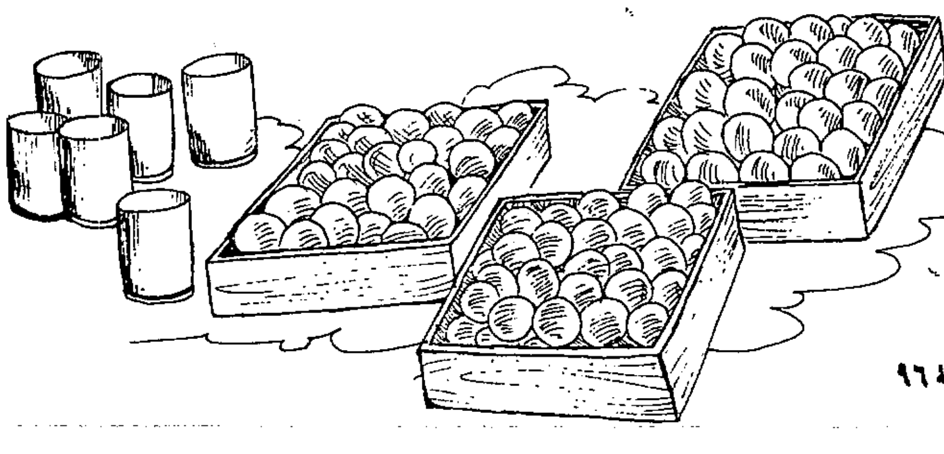
۲ـ تابعی با چند ضابطه چنان تعریف کنید که نمودار حاصل از آن کلمهٔ «برهان» را در ناحیهٔ اول مشخص کند. (دو نقطهٔ موجود دراین کلمه می‌توانند توخالی یا توپر باشند.)

مسئله‌ای از المپیادهای ریاضی

عدد$(5^{1985}-1)$را به حاصل‌ضرب سه عدد صحیح، که هریک از آنها از 5^{100} بزرگتر باشند، تجزیه کنید.

تفریح اندیشهٔ ۵

سه جعبه را با تعداد یکسانی مهره پرکرده‌ایم. به هریک از شش قوطی خالی یک دوازدهم مهره‌های واقع در هرجعبه را انتقال داده‌ایم. در این صورت هرجعبه دوازده مهره بیش‌از هرقوطی دارد. هرجعبه در آغاز چند مهره داشته است؟



جواب در صفحهٔ ۹٦

حل مسائل مسابقه‌ای

سید حسین سید موسوی

بعد از طرح این مسئله بـه عنوان مسئله مسابقه‌ای ، راه حل‌های بسیاری ازطرف‌خوانندگان به دفتر مجله رسید که در این میان یکی‌از زیباترین راه‌حل‌ها که متعلق‌به آقای سید رضا موسوی دانشجوی‌کارشناسی‌ارشد ریاضی محض دانشکده‌علوم دانشگاه‌فردوسی مشهد است در زیر آورده شده است.

حل ۱- اگر $[a,b,c,d,e]$ شامل پنج عددطبیعی‌متوالی باشدلااقل‌دوعدد فرد متوالی دراین مجموعه وجوددارد، فرض کنیم آنها a و b باشند، حداکثر یکی‌از آنها بر ۳ بخش‌پذیر است ، زیرا اگر $۳|a$ و $۳|b$ در این صورت $۳|a-b$ ، در نتیجه $۳|۲+$ یا $۳|-۲$ که‌این تناقض‌است، بنابراین‌می‌توان فرض‌کرد $۳\nmid a$ وچون a فرداست، $۲\nmid a$ ، ادعا می‌کنیم همین a نسبت‌به چهارعدد دیگراین مجموعه‌اول است. برای این‌کار فرض‌کنید x عضو دلخواه از این مجموعه‌باشدکه متمایزاز a است، فرض می‌کنیم $(a,x)=t$ ، واضح است t حداکثر ۴ است‌بنابراین $t=۱$ یا $t=۲$ یا $t=۳$ یا $t=۴$ است. چون a فرد است پس $t=۲$ و $t=۴$ قابل‌قبول نیست، $t=۳$ نیز جواب‌نیست‌به دلیل‌اینکه $۳\nmid a$ ، بنابراین $t=۱$ پس a نسبت به چهار عدد دیگر اول است. □

حل ۲- ابتدا به بیان‌لم‌های زیر می‌پردازیم. اثبات این لم‌ها برعهدهٔ خواننده است.

لم ۱ . مجموع و تفاضل دو ماتریس بالا مثلثی هم‌مرتبه ، ماتریسی بالا مثلثی است.

لم ۲ . حاصل‌ضرب دوماتریس بالا مثلثی‌هم مرتبه ماتریسی بالا مثلثی است.

نتیجه: اگر A ماتریسی‌بالا مثلثی‌باشد، به ازای هرعدد صحیح‌نامنفی n ، A^n بالا مثلثی‌است.

لم ۳ . هرماتریس مربع در معادلهٔ سرشت‌نمایی‌خودصدق می‌کند، یعنی، در صورتی‌که معادله سرشت نمایی یك ماتریس $n\times n$ مانند A به شکل

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+a_1\lambda+a_0=0$$

باشد، آنگاه

$$A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\dots+a_1A+a_0I=\bar{0}$$

اکنون، نشان می‌دهیم، وارون‌یك ماتریس‌بالا مثلثی وارون‌پذیر ماتریسی‌بالا مثلثی‌است. برای‌این‌کار،فرض‌کنید A یك‌ماتریس بالا مثلثی‌باشدکه معادلهٔ سرشت‌نمایی آن‌به صورت

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+a_0=0$$

است بنابر لم ۳ ، داریم

$$A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\dots+a_1A+a_0I=\bar{0}$$

چون A وارون‌پذیراست، پس $a_0\neq 0$ ، درنتیجه:

$$A(A^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\dots+a_1I)=-a_0I$$

پس

$$A\left(-\frac{1}{a_0}A^{n-1}-\frac{a_{n-1}}{a_0}A^{n-2}-\dots-\frac{a_1}{a_0}I\right)=I$$

در نتیجه

$$A^{-1}=-\frac{1}{a_0}A^{n-1}-\frac{a_{n-1}}{a_0}A^{n-2}-\dots-\frac{a_1}{a_0}I$$

از سوی دیگر بنابر لم ۲، A^{n-1} ، A^{n-2} ، ... ، A و I بالا-مثلثی‌اند و بنابر لم ۱ ،

$$-\frac{1}{a_0}A^{n-1}-\frac{a_{n-1}}{a_0}A^{n-2}-\dots-\frac{a_1}{a_0}I$$

یعنی A^{-1} بالا مثلثی است.

مسائل و تست برای حل

(مورد استفادهٔ دانش آموزان سالهای اول تا چهارم دبیرستان)

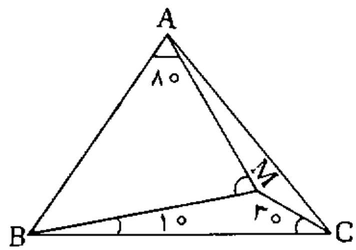
● هندسه: محمد هاشم رستمی ● ریاضیات جدید : حمید رضا امیری
● جبر و مثلثات: احمد قندهاری و محمد رضا هاشمی

مسائل ریاضیات سال اول

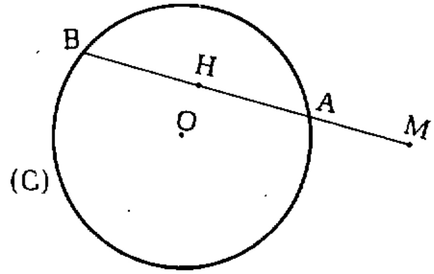
۱ــ مثلث متساوی الساقین ABC $(AB=AC)$ بـا زاویهٔ رأس $B\hat{A}C=80°$ مفروض است . نقطهٔ M را درون این مثلث چنان در نظر می گیریم که :

$$M\hat{B}C=10° \quad \text{و} \quad M\hat{C}B=30°$$

باشد. اندازهٔ زاویهٔ AMB را تعیین کنید.



۲ــ دایرهٔ (C) بـه مرکز O و نقطهٔ M مفروض‌اند . از نقطهٔ M خطی‌رسم می‌کنیم که دایرهٔ (C) را در دونقطهٔ A و B قطع کند . مکان هندسی نقطهٔ H وسط وتر AB را وقتی قاطع MAB ، حول نقطهٔ M دوران می کند ؛ تعیین کنید . (بحث کنید.)



۳ــ اگر ارزش گزارهٔ :

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (r \Rightarrow \sim s)$$

نادرست‌وارزش گزارهٔ $(\sim r \wedge p)$ درست باشد، ارزش گزارهٔ

$$(r \vee p) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \sim q)$$

را تعیین کنید.

۴ــ ثابت کنید $A' \cup B = M$ اگر و فقط اگر $A \cap B' = \varnothing$

(معصومه مشهدی فراهانی، سال اول)

۵ــ اگر :

$$A = 8^3 \times 6^2 (x^3 - y^3)(x+y)^2$$

$$B = 6^3 \times 4^2 (x^3 + y^3)(x-y)^2$$

کوچکترین مضرب مشترک و بزرگترین مقسوم علیه‌مشترک A و B را بیابید.

۶ــ کسر $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$ را گویا کنید.

تستهای سال اول

۱ــ پاره‌خط AB به‌طول ۸سانتیمتر دریك‌صفحه‌مفروض است. چندنقطه دراین‌صفحه وجود داردکه از دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۳ سانتیمتر واقع باشند؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲ـ مجموع اضلاع و اقطار یك n ضلعی محدب برابر ۳۶ است. مجموع زوایای داخلی این n ضلعی چند قائمه است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۳ـ تفاضل فاصله‌های هر نقطه واقع بر امتداد قاعدهٔ یك مثلث متساوی‌الساقین از دوساق آن مثلث همواره برابر است با اندازهٔ:

۱) ارتفاع وارد برقاعده ۲) ساق مثلث

۳) قاعدهٔ مثلث ۴) ارتفاع وارد بر ساق

۴ـ گزارهٔ $[(q\wedge p)\vee(\sim q\vee p)]$ هم‌ارز کدام گزاره است؟

۱) $\sim p\vee q$ ۲) $\sim q\vee p$

۳) $p\wedge\sim q$ ۴) $\sim p\wedge q$

۵ـ عکس نقیض گزارهٔ شرطی «اول بودن عدد p شرط کافی است برای طبیعی بودن آن» کدام است؟

۱) طبیعی نبودن عدد p شرط کافی است برای اول نبودن آن.

۲) اول نبودن عدد p شرط لازم است برای طبیعی بودن آن.

۳) اول نبودن عدد p شرط لازم است برای طبیعی نبودن آن.

۴) موارد ۱) و ۳) صحیح است.

۶ـ هرگاه داشته باشیم:

$$(A\cap B')=\varnothing \text{ و } (A\cup B')=M$$

در این صورت:

۱) $B'=A$ ۲) $A'=B$

۳) $A=B$ ۴) $A\neq B$

۷ـ حاصل عبارت $\sqrt[21]{\dfrac{a}{\sqrt[22]{a}}}$ با شرط $a>0$ برابر کدام است:

۱) $\sqrt[21]{a^{22}}$ ۲) $\sqrt[21]{a}$

۳) $\sqrt[22]{a^{21}}$ ۴) $\sqrt[22]{a}$

۸ـ به ازای کدام مقدار m ریشهٔ معادله:

$$m^2(x-1)=mx-1$$

برابر صفر است:

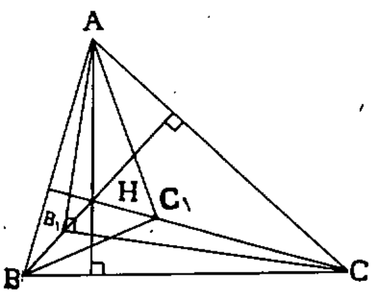
۱) $m=0$ ۲) $m=1$

۳) $m=2$ ۴) $m=-1$

مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱ـ مثلث ABC با زوایای حاده مفروض است. نقطهٔ تقاطع ارتفاعهای این مثلث را H می‌نامیم. روی پاره خطهای راست HB و HC نقطه‌های B_1 و C_1 را چنان انتخاب می‌کنیم که $A\hat{B}_1C=A\hat{C}_1B=90°$ باشد. ثابت کنید:

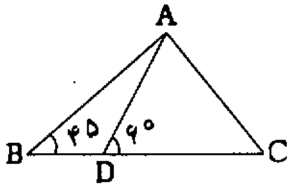
$$AB_1=AC_1$$



۲ـ مثلث ABC مفروض است. نقطه D را روی ضلع BC چنان اختیار می‌کنیم که $\frac{DB}{DC}=\frac{1}{2}$ باشد. در صورتی‌که

$$A\hat{B}C=45^\circ \quad و \quad A\hat{D}C=60^\circ$$

باشند، اندازهٔ زاویهٔ ACB را تعیین کنید.



۳ـ هرگاه R_1 و R_2 دو رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ A باشند ثابت کنید $(R_1 \cap R_2)$ نیز یک رابطهٔ هم‌ارزی روی A است. آیا $(R_1 \cup R_2)$ در حالت کلی می‌تواند یک رابطهٔ هم‌ارزی روی A باشد؟ چرا؟

۴ـ رابطهٔ R روی IN به صورت زیر تعریف می‌شود، آیا این رابطه، یک رابطهٔ هم‌ارزی است؟ (تحقیق کنید.)

$$\forall a,b \in N\,;\, aRb \iff a+b-ab \leqslant 1$$

۵ـ ثابت کنید که تابع با ضابطهٔ $f: Z \to N$ یک به یک و پوششی است.

$$f(x)=\begin{cases} 2x & x>0 \\ -2x+1 & x\leqslant 0 \end{cases}$$

۶ـ نقاط $A\left|\begin{matrix} 2\alpha-4 \\ 0 \end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix} 0 \\ 4\alpha-2 \end{matrix}\right.$ در صفحهٔ محورهای مختصات مفروضند. اگر فاصلهٔ مبدأ مختصات از نقطه C وسط AB برابر $\sqrt{2}$ باشد مقدار α را بیابید.

۷ـ معادله $x^2-3x+1=0$ مفروض است، اگر x' و x'' ریشه‌های این معادله باشد. معادله درجه‌دوم جدیدی بسازید که ریشه‌های آن $x'+x''^2$ و $x''+x'^2$ باشد.

۸ـ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$81^{\sin^2 x}+81^{\cos^2 x}=30$$

(بهرام فرجی چهارم)

۹ـ بین دو رابطهٔ زیر θ را حذف کنید و نشان دهید که

$$x^2+y^2=1$$

$$\begin{cases} 2x=y\,tg\theta+\sin\theta \\ 2y=x\,cotg\theta+\cos\theta \end{cases}$$

(داود خجسته دانشجو)

تستهای سال دوم ریاضی

۱ـ از نقطهٔ D واقع برضلع BC از مثلث ABC خطی موازی با میانه AA' رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AC یا امتدادآنها را به ترتیب در نقاط E و F قطع کند. نسبت $\frac{AE}{AF}$ همواره برابر کدام نسبت است؟

۱) $\frac{AC}{AB}$ ۲) $\frac{AC}{BC}$

۳) $\frac{AB}{BC}$ ۴) $\frac{AB}{AC}$

۲ـ محیط مثلثی برابر ۴۰ سانتیمتر و اندازهٔ پاره‌خطهای ایجادشده به وسیلهٔ نیمساز زاویهٔ B روی ضلع C ت برابر ۴ سانتیمتر و ۶ سانتیمتراست. دراین‌صورت اندازه‌ضلع a کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۳ـ اقطار یك ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه برهم عمودند. در صورتی که h ارتفاع و a و b قاعده‌های این ذوزنقه باشند، کدام رابطه همواره درست‌است؟

۱) $a^2=b.h$ ۲) $b^2=a.h$

۳) $h^2=a.b$ ۴) $4h^2=a.b$

۴ـ مجموعهٔ $[A\times(B\cup C)]-(A\times C')$ با کدام مجموعه برابر است:

۱) $A\times B$ ۲) $A\times C$

۳) $B\times C$ ۴) $A\times(B-C)$

۵ـ هرگاه R یك رابطهٔ هم‌ارزی روی A باشد و [a] نشان‌دهندهٔ کلاس هم‌ارزی a باشد و داشته‌باشیم:

$$\forall\, b\in A\ ;\ b\in[a]$$

دراین صورت:

۱) R رابطهٔ ترتیب‌نیزهست ۲) $R=\varnothing$

۳) $R=A\times A$ ۴) هیچ‌کدام

۶ـ کدامیك از توابع زیر یك به یك است (توابع حقیقی‌هستند)؟

۱) $f(x)=|x|$ ۲) $f(x)=x^2+1$

۳) $f(x)=x^4+1$ ۴) $f(x)=x^3|x|$

۷ـ کدامیك‌ازتوابع‌زیر (از IR^2 به IR^2) نه‌یك‌به‌یك و نه‌پوششی است ؟

۱) $f(x,y)=(x-y\ ,\ y-x)$

۲) $f(x,y)=(x+1\ ,\ y-2)$

۳) $f(x,y)=(x-y, 3x-3y)$

۴) $f(x,y)=(2x-1, 4y-5)$

۸ـ معادله درجه دومی با ضرایب گویا که یك ریشهٔ آن $2-\sqrt{5}$ باشد،کدام است؟

۱) $x^2-4x+1=0$

۲) $x^2+4x+1=0$

۳) $x^2-4x-1=0$

۴) $x^2+4x-1=0$

۹ـ اگر :

$$\begin{cases}2x+\frac{3}{2}y+3z=1/75\\ 3x+2y+5z=1/25\end{cases}$$

آنگاه $x+y+z=?$:

۱) (۲) ۲) (۲/۱۵)

۳) (۲/۲۵) ۴) (۲/۴۵)

۱۰ـ از تساوی :

$$\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}\right)^{2n-1}+3\left(\frac{1+\cos x}{\sin x}\right)^{2n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3}$$

مقدار $\cos x$ برابراست با:

۱) $-\frac{3}{5}$ یا ۱ ۲) ۱− یا ۱

۳) فقط $\frac{-3}{5}$ ۴) فقط ۱

مسائل ریاضیات سوم ریاضی

۲

۱ـ مثلث ABC مفروض است. نقاط A_1وB_1وC_1 را به ترتیب روی ارتفاعات AA' و BB' و CC' از این مثلث چنان اختیار می‌کنیم که :

$$A_1A'=\frac{1}{3}AA'$$

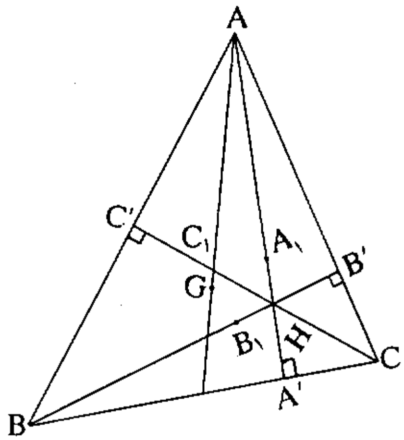
$$C_1C'=\frac{1}{3}CC' \quad \text{و} \quad B_1B'=\frac{1}{3}BB'$$

باشد. ثابت کنید که :

اولاً ـ نقاط A_1 و B_1 و C_1 و نقطهٔ H محل تلاقی ارتفاعات مثلث ABC و نقطهٔ G محل برخورد سه‌میانه‌این‌مثلث

روی یك دایره واقع‌اند.

ثانیاً ـ ثابت کنید که مثلث $A_1B_1C_1$ با مثلث ABC متشابه است.



۲ـ ثابت کنید که در هر چهار ضلعی، مجموع مربعات اندازه‌های دوضلع روبرو، منهای مجموع مربعات اندازه‌های دوضلع دیگر، برابر است با، دوبرابر حاصلضرب اندازهٔ یك قطر در تصویر قطر دیگر برروی همان قطر.

۳ـ درفضای برداری چندجمله‌ایهای از درجهٔ کوچکتر یا مساوی با ۲، همراه با ضرایب حقیقی ثابت کنید بردارهای ۵ و $x+1$ و x^2+x+1 و x^3+x^2+x+1 مستقل خطی‌اند.

۴ـ درفضای برداری V، هرگاه دربین بردارهای:

$V_1 , V_2 , \cdots ; V_n$

یکی از بردارها مضرب ناصفری از بردار دیگری باشد، ثابت کنید این n بردار وابستهٔ خطی‌اند.

۵ـ هرگاه V یك فضای برداری روی IR باشد و u برداری ثابت در V، دراین صورت ثابت کنید:

$S=\{ ru / r \in IR \}$

یك زیرفضای V است.

۶ـ نمودار $|x-1|-|y-2|=2$ را رسم کنید.

۷ـ مطلوب است محاسبهٔ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin 2x+\dots+\sin nx}{\sin 2x+\sin 4x+\dots+\sin 2nx}$$

۸ـ عبارت زیررا قابل محاسبهٔ لگاریتمی کنید:

$S=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos x}$

۹ـ معادلهٔ زیر را حل کنید.

$(\sin x+\cos x)\sqrt{2}=tg x+cotg x$

تستهای سوم ریاضی

۱ـ دورترین و نزدیکترین فاصلهٔ یك نقطه واقع در داخل یك دایره از آن دایره برابر ۸ و ۲ است. اندازهٔ وتر به طول مینیممی که از این نقطه در دایره رسم می‌شود کدام است؟

۱) ۲　۲) ۴　۳) ۸　۴) ۱۶

۲ـ اندازه‌های سه‌ضلع مثلثی ۵ و ۱۲ و ۱۳ است. اندازهٔ کوچکترین میانهٔ مثلث کدام است؟

۱) ۳/۵　۲) ۴/۵　۳) ۵/۵　۴) ۶/۵

۳ـ نتیجه‌ترکیب سه تقارن مرکزی کدام تبدیل است؟

۱) انتقال　۲) تقارن مرکزی

۳) تقارن محوری　۴) تجانس

۴ـ سطح کل یك چهار وجهی منتظم $9\sqrt{3}$ است. اندازهٔ حجم این چهار وجهی کدام است؟

۱) $9\sqrt{2}$　۲) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$

۳) $\frac{9\sqrt{2}}{6}$　۴) $\frac{9\sqrt{2}}{4}$

۵– کدامیک از مجموعه‌های زیر، زیرفضای $IR^۳$ نمی‌باشد؟

۱) $\{(x,y,z) \mid x=y=z\}$

۲) $\{(x,y,z) \mid x+y<z\}$

۳) $\{(x,y,z) \mid x-۲y=۳z\}$

۴) $\{(x,y,z) \mid ۲x-y+۱=z+۱\}$

۶– کدام مجموعه از بردارها، وابسته خطی هستند (در فضای برداری $IR^۲$)؟

۱) $\{(۲,۱)(۱,۰)(۲,۱)\}$

۲) $\{(۲,۱)(۱,۲)\}$

۳) $\{(۱,۰),(۰,۱)\}$

۴) $\{(۱,۱),(۰,۱)\}$

۷– هرگاه بردارهای $(a,۵)$ و $(۶,b)$ مستقل خطی باشند در این صورت:

۱) $ab=۳۰$ ۲) $a=mb$

۳) $b=ma$ ۴) $ab\neq۳۰$

۸– کدام گزینه درست است؟

۱) هر زیرمجموعه از یک مجموعه بردارهای وابستهٔ خطی، وابستهٔ خطی است.

۲) هر مجموعه که شامل چند بردار مستقل خطی باشد، مستقل خطی است.

۳) هرگاه در یک مجموعه از بردارهای فضای برداری، برداری مضربی از بردار دیگر باشد آن مجموعه بردار وابستهٔ خطی‌اند.

۴) هر بردار ناصفر، وابستهٔ خطی است.

۹– سادهٔ شدهٔ عبارت بولی:

$$a+[(b'+a')\cdot a']+a$$

کدام است؟

۱) a ۲) ۱ ۳) a' ۴) b'

۱۰– عدد $(۱/۰۰۲)^۵$ به کدامیک از اعداد زیر نزدیکتر است:

۱) $(۱/۰۱)$ ۲) $(۱/۰۲)$

۳) $(۱/۰۳)$ ۴) $(۱/۰۴)$

۱۱– برد تابع:

$$y=\sin\frac{\pi}{۲}x+\sqrt{-\sin^۲\pi x}$$

کدام است؟

۱) $[-۱,۱]$ ۲) $(-۱,۱)$

۳) $\{-۱,۱\}$ ۴) $\{-۱,۰,۱\}$

۱۲– جوابهای معادله:

$$۶\cos^۲x+۶\sin x\cos x-۳=۰$$

کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴}$

۳) $\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۶}$ ۴) $\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۸}$

۱۳– بیشترین مقدار عبارت $|۶\cos x-۳\cos^۲x|$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۱۴– اگر $۳\sin x\cos x=۱+\sin^۲x$ فرض شود مقدار tgx کدام است؟

۱) ۲ یا ۱ ۲) -۱ یا -۲

۳) $\frac{۱}{۲}$ یا ۱ ۴) -۱ یا $-\frac{۱}{۲}$

مسائل سال چهارم ریاضی

۱ــ بردار $\vec{v_۱}$ موازی با بردار $\vec{v}=۲\vec{i}-۲\vec{j}+\vec{k}$ را چنان بیابید که $|\vec{v_۱}|=۱۲$ باشد.

۲ــ بردارهای $\vec{v_۱}=\vec{i}+۲\vec{k}$ و $\vec{v_۲}=۳\vec{j}+\vec{k}$ و $\vec{v_۳}=۳\vec{i}+\vec{j}$ مفروض‌اند. تصویر بردار $\vec{v_۱}+\vec{v_۲}$ روی بردار $\vec{v_۳}$ را تعیین کنید.

۳ــ ثابت کنید:

$$|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}| \leqslant |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\vec{c}|$$

۴ــ نشان دهید که صفحهٔ:

$$P:\ ۲x+y-۲z+۳=۰$$

پاره‌خط واصل بین دو نقطهٔ $A(۱,۰,۲)$ و $B(-۱,۲,۲)$ را قطع می‌کند.

۵ــ معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $M(+۲,۱,۳)$ می‌گذرد و بر محور xها عمود است و آن‌را قطع می‌کند.

۶ــ ثابت کنید که تفاضل مربعات فاصله‌های مرکز یك بیضی از یك خط مماس بر بیضی و خطی که از یك کانون به‌موازات خط مماس رسم می‌شود مقداری‌است ثابت برابر $b^۲$.

۷ــ درستی استنتاج زیر را بررسی کنید (با ذکر قوانین):

$$\begin{array}{ll} (p \Longrightarrow q) \Longrightarrow r & \wedge \\ (r\wedge u) \Longrightarrow t & \wedge \\ \sim p & \\ \hline \therefore\ \ \sim u \vee t & \end{array}$$

۸ــ ثابت کنید گزارهٔ:

$$\exists x\,;[p(x)\wedge q(x)] \Longrightarrow [\exists x\,;p(x)\wedge \exists x;q(x)]$$

درست است.

۹ــ هر گاه $(R,+,X)$ یك ساختمان جبری بوده و در همهٔ شرایط یك حلقهٔ یکدار صدق کند بجز جابجایی بودن نسبت به $+$ ، ثابت کنید که جابجایی بودن جمع‌را نیز می‌توان از اصول دیگر نتیجه گرفت.

۱۰ــ با استفاده از تعریف‌حد ثابت کنید:

$$\lim_{x\to\infty}(x^۲+۴x)=+\infty$$

۱۱ــ مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\sin\sqrt{x}$ را در نقطهٔ $x_۰=۲$ بررسی کنید.

تستهای چهارم ریاضی

۱ــ نقاط $A(۴\,,\frac{-\pi}{۶})$ و $B(۶\,,\frac{۵\pi}{۶})$ مفروض‌اند.
مختصات نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB کدام است؟

۱) $(۵\,,\frac{-\pi}{۶})$ ۲) $(۵\,,\frac{۵\pi}{۶})$

۳) $(۱\,,\frac{-\pi}{۶})$ ۴) $(۱\,,\frac{۵\pi}{۶})$

۲ــ اگر:

$$\vec{a}=\vec{i}+۲\vec{j}+\vec{k} \quad \text{و} \quad \vec{b}=۲\vec{i}+\vec{j}-۲\vec{k}$$

باشد، تصاویر بردار یکه روی بردار $\vec{a}\wedge\vec{b}$ کدام است؟

۱) $(\frac{-\sqrt{۲}}{۲}\,,\frac{۲\sqrt{۲}}{۵}\,,\frac{-۳\sqrt{۲}}{۱۰})$

۲) $(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\,,\frac{\sqrt{۲}}{۵}\,,\frac{-\sqrt{۲}}{۱۰})$

۳) $(\sqrt{۲}\,,\frac{۲\sqrt{۲}}{۵}\,,\frac{-۳\sqrt{۲}}{۱۰})$

۴) $(\frac{-\sqrt{۲}}{۲}\,,\frac{\sqrt{۲}}{۵}\,,\frac{\sqrt{۲}}{۱۰})$

۳ـ درصورتی‌که $x+6y+12z=136$ باشد، کمترین مقدارعبارت $x^2+4y^2+9z^2$ کدام است؟

۱) ۲۶ ۲) ۱۳ ۳) $\frac{13}{2}$ ۴) $\frac{13}{4}$

۴ ـ اگر خط :

$$D: \frac{x-1}{a+1}=\frac{y}{3b-2}=\frac{z}{2}$$

برصفحهٔ $P: 2x+y-z+4=0$ عمود باشد $a+3b$ چقدر است؟

۱) $+4$ ۲) -4

۳) $+5$ ۴) -5

۵ـ اگر $(ABCD)$ یک تقسیم توافقی ، نقطهٔ O وسط پاره خط AB و نقطهٔ O' وسط پاره خط CD باشد اندازهٔ (AB^2+CD^2) برابراست با:

۱) OO'^2 ۲) $2OO'^2$

۳) $3OO'^2$ ۴) $4OO'^2$

۶ـ کدامیک از گزاره‌های زیر نادرست است:

۱) $\forall x\in Q\exists y\in Q\,;\, x+y=0$

۲) $\exists x\in Q\forall y\in Q\,;\, x+y=0$

۳) $\exists x\in N\forall y\in R\,;\, xy=y$

۴) $\exists x\in N\forall y\in N\,،\, x+y=y$

۷ـ دربحث مقابل به جای ؟ کدام گزاره را قرار دهیم تا بحث معتبر گردد ؟

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow (\sim q \Rightarrow r)\ \wedge \\ \sim r \\ \hline \therefore\ \ ? \end{array}$$

۱) $(p \vee q)$ ۲) $(p \vee \sim q)$

۳) $(p \Rightarrow q)$ ۴) $(p \wedge \sim q)$

۸ـ کدام گزینه نادرست است؟

۱) هرمیدان، حوزهٔ صحیح است.

۲) هرایده‌آل زیرحلقه است.

۳) درحلقهٔ یکدار وجابجایی R اگر a مقسوم‌علیه‌صفر باشد وارون‌پذیر نیست.

۴) اگر a مقسوم علیه صفر نباشد آنگاه وارون‌پذیر است .

۹ـ هرگاه I ایده‌آل حلقهٔ Q (اعداد گویا) و $6\in I$ در این صورت :

۱) $I=Q^+$ ۲) $I=Z$

۳) $I=Z^+$ ۴) $I=Q$

۱۰ـ هرگاه n و p دو عدد صحیح و مثبت باشند برای آن‌که n^p فردباشد، شرط فرد بودن n

۱) لازم و کافی است.

۲) کافی است ولی لازم‌نیست.

۳) نه‌لازم و نه‌کافی است.

۴) لازم است ولی کافی نیست.

۱۱ـ کدامیک از مجموعهای زیرهمواره‌بر ۴ بخش‌پذیر است ؟

۱) مجموع دو عدد فرد متوالی

۲) مجموع دو عدد زوج

۳) مجموع دو عدد زوج متوالی

۴) مجموع دو عدد فرد

۱۲ـ تابع به معادلهٔ $f(x)=||x|-1|$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست .

۱) یک‌نقطه ۲) دو نقطه

۳) سه‌نقطه ۴) صفر نقطه

۱۳- در نقطهٔ A واقع بر منحنی تابع به معادلهٔ

$$f(x)=x^3+x$$

مماسی برمنحنی رسم کردیم؛ نقطهٔ A' متناظر نقطهٔ A روی منحنی تابع معکوس است. اگر خطوط مماس در نقاط A و A' موازی باشند مختصات نقطهٔ A کدام است؟

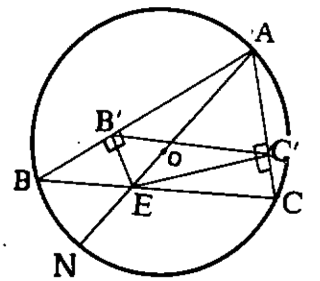
۱) $A\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ ۲) $A\left|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right.$

۳) $A\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.$ ۴) $A\left|\begin{matrix}2\\10\end{matrix}\right.$

مسائل دوم تجربی

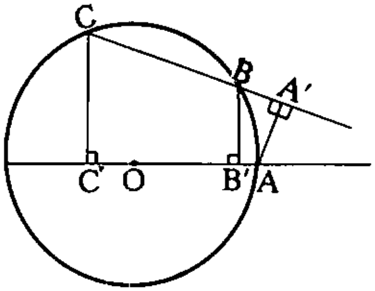
۱- قطر AN از دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم و نقطهٔ تقاطع آن با ضلع BC را E می‌نامیم. از نقطهٔ E عمودهای EB' و EC' را به‌ترتیب بر اضلاع AB و AC فرود می‌آوریم. ثابت کنید:

$$B'C' \parallel BC$$



۲- سه نقطهٔ A و B و C روی یك دایره مفروض‌اند. تصویر نقطهٔ A روی خط BC را نقطهٔ A' و تصاویر نقاط B و C روی قطری از دایره را که از نقطهٔ A می‌گذرد به ترتیب B' و C' می‌نامیم. ثابت کنید:

$$AA'^2 = AB' \cdot AC'$$



۳- چند جمله‌ایهای زیر را به حاصلضرب عاملها تجزیه کنید:

الف) $8ax-bx+8ay-by$

ب) $a^4+a^2-a^3-a$

ج) $4a^4+b^4$

د) a^2+a-10

(معصومه فراهانی دبیرستان فرزانگان)

۴- دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases}\dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{8}{3}\\[2mm] \dfrac{yz}{y+z}=\dfrac{8}{5}\\[2mm] \dfrac{x+z}{xz}=\dfrac{3}{4}\end{cases}$$

(معصومه فراهانی دبیرستان فرزانگان)

۵- اگر نسبت دو ریشهٔ معادلهٔ:

$$px^2+qx+r=0 \quad \text{و} \quad ax^2+bx+c=0$$

برابر k باشد، ثابت کنید:

$$\frac{b^2}{ac}=\frac{q^2}{pr}$$

(علی عمیدی دوم ریاضی)

۶ـ درصورتی‌که داشته باشیم :

$$\sin x = \frac{m^{2}-1}{m^{2}+1}$$

اولاً ـ $\cos x$ را برحسب m محاسبه کنید .

ثانیاً ـ به ازای $m=-2$ مقدار $tg x + cotg x$ را محاسبه کنید.

تستهای دوم تجربی

۱ـ در ذوزنقه قائم‌الزاویهٔ ABCD ، $\hat{A}=90^{\circ}$ و $AB=13$ و $CD=10$ و ساق $BC=5$ است . اندازهٔ مساحت این ذوزنقه چقدر است ؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۶ ۳) ۳۶ ۴) ۴۶

۲ـ در مثلثی به اضلاع $a=2\sqrt{3}$ و $b=4$ و $c=2$ کدام گزاره درست است؟

۱) $\hat{B}=2\hat{C}$ ۲) $\hat{A}=90^{\circ}$

۳) $\hat{A}<90^{\circ}$ ۴) $\hat{A}>90^{\circ}$

۳ـ در مثلثی قائم‌الزاویه، تصویر میانهٔ وارد بر وتر روی وتر، $2\sqrt{3}$ و یك زاویهٔ حادهٔ مثلث 15° است . اندازهٔ وتر مثلث کدام است ؟

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $4\sqrt{3}$

۳) ۶ ۴) ۸

۴ـ اگر x' و x'' ریشه‌های معادلهٔ :

$$mx^{2}+x-1=0$$

باشند و داشته باشیم :

$$x'^{2}x''+x'x''^{2}=4$$

مقدار m برابر است با:

۱) $\pm\frac{1}{4}$ ۲) ± 2

۳) $\pm\frac{1}{2}$ ۴) ± 4

۵ـ مجموعهٔ جوابهای نامعادلهٔ :

$$(x^{16}-1)(x^{8}-1)\leqslant 0$$

کدام است ؟

۱) $\{-1, 1\}$ ۲) $[-1, 1]$

۳) $\{-1\}$ ۴) $\{1\}$

۶ـ مجموعه جوابهای مشترك دونامعادلهٔ:

$$-x^{2}+3x<0 \quad \text{و} \quad -3x^{2}-4x<1$$

درفاصلهٔ $]-1$ و $3[$ برابراست با:

۱) $]-1, 0[$ ۲) $]\frac{-1}{3}, 0[$

۳) $]0, 3[$ ۴) $]-1, \frac{-1}{3}[$

مسائل سوم تجربی

۱ـ دونقطهٔ A و B در دوطرف خط d واقع‌اند. نقطه‌ای روی خط d پیدا کنید که تفاضل فاصله‌های آن از نقاط A و B بیشترین مقدار ممکن باشد.

حذف ۲ـ اگر $|\vec{a}|=2$ و $|\vec{b}|=3$ و $(\vec{a}, \vec{b})=60^{\circ}$ باشد، اندازهٔ بردارهای زیر را به دست آورید:

الف) $3\vec{a}-\vec{b}$ ب) $\vec{a}+2\vec{b}$

۳ـ ثابت کنید اگر صفحه‌ای دو وجه مقابل از یك متوازی‌السطوح را قطع کند، چهارضلعی حاصل متوازی‌الاضلاع است.

۴ـ معادلهٔ زیرمفروض است:

$$a(\sin x+\cos x)=(\cos x-\sin x)^{2}$$

مقدار a را چنان تعیین کنید که رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos x-\sin x$$

(بهرام فرجی چهارم)

۵ـ عبارت زیر را با فرض این‌که انتهای x در ناحیهٔ اول دایرهٔ مثلثاتی باشد به‌حاصلضرب عاملها تبدیل کنید:

$$\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}-2\sin\frac{x}{2}$$

۶ـ نقاط A وB وM به ترتیب به طولهای ۱و۲− وK روی محور $x'ox$ مفروض‌اند.

الف) K را چنان تعیین کنید که M وسط‌پاره‌خط AB باشد.

ب) به ازای چه مقداری از K داریم:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}=\frac{1}{K}$$

ج) آیا نقطه‌ای مانند N به طول 2K را می‌توان یافت که داشته باشیم:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}+\frac{\overline{AN}}{\overline{BN}}=0$$

۲ ۷ـ نقاط $A(0,-1)$ و $B(-1,0)$ و $C(1,1)$ مفروض‌اند.

الف) مثلث را مشخص کنید.

ب) معادلات ارتفاع ومیانه ونیمساز نظیر یك رأس از مثلث را بنویسید.

ج) مساحت مثلث را محاسبه کنید.

تستهای سوم تجربی

۱ـ بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ به ترتیب به‌طولهای ۸و۴و۶ بامحوری، به‌ترتیب‌زوایای ۶۰° و ۶۰°− و ۱۲۰° می‌سازند. اندازهٔ جبری تصویر مجموع‌هندسی این بردارها روی‌این محور کدام است؟

۱) ۳+ ۲) ۳− ۳) ۶+ ۴) ۱۸+

۲ـ ازیك نقطه چندصفحه موازی دوخط متنافر می‌توان رسم کرد؟

۱) هیچ ۲) یك ۳) دو ۴) بیشمار

۳ـ حجم منشور مایل مثلث‌القاعده‌ای که قاعدهٔ آن مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع $a=4$ سانتیمتر و یال منشور برابر ضلع قاعده است و با صفحهٔ قاعدهٔ زاویهٔ ۶۰° می‌سازد کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۲ ۳) ۶ ۴) ۳

۴ـ فاصلهٔ نقطهٔ $M\begin{vmatrix}-1\\1\end{vmatrix}$ از خط $y=f(x)$ با فرض $f(2x-3)=x-1$ برابراست با:

۱) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ۲) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

۳) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ۴) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

۵ـ دامنهٔ تابع $f(x)$ با فرض $f(\sqrt[3]{x})=\frac{1}{\sqrt[6]{x}}$ برابر است با:

۱) $IR-\{0\}$ ۲) $[0,+\infty[$

۲) $]-\infty,0[$ ۴) $]0,+\infty[$

مسائل ریاضیات چهارم تجربی

عمومی

۱ـ فاصلهٔ مرکز تقارن منحنی نمایش تابع درجهٔ سوم با ضابطهٔ:

$$y=x^{3}-6x^{2}$$

را از خط قائم بر منحنی‌فوق درنقطه‌ای‌به طول ۱ — را حساب کنید.

عمومی

۲ـ مقدار مشتق‌تابع با ضابطهٔ:

$$f(x)=\sin^{3}(x^{4}-1)^{2}+\cos^{2}(x^{2}-1)\sin(x-1)$$

رابه ازای‌طول مرکزتقارن تابع ضمنی با ضابطهٔ:

$$2xy-2y-x+3=0$$

را به دست آورید.

۳ـ معادلهٔ زیر مفروض است:

$$m(\sin x+\cos x)=1+\sin x\cos x$$

الف) ثابت کنید معادله‌به‌ازای‌هر $m\in]-1,1[$ جواب ندارد.

ب) معادله رابه ازای $m=\pm 1$ حل کنید.

تستهای چهارم تجربی

۱ـ فاصلهٔ مرکزتقارن تابع با ضابطهٔ:

$$f(x)=2x^{3}-6x^{2}$$

از مرکز تقارن تابع با ضابطهٔ $g(x)=\dfrac{6x-2}{3x-3}$ برابر است با:

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲ـ اگر داشته باشیم:

$$2f(x^{3})+3f(-x^{3})=x$$

مقدار $f'(-1)$ برابراست با:

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{-1}{3}$ ۳) ۱ ۴) صفر

۳ـ اگر تابع $f(x)=\begin{cases}x^{3} & x\geqslant -1\\ ax+1 & x<-1\end{cases}$ درنقطه‌ای به طول $x_{0}=-1$ پیوسته باشد مقدار عبارت $\dfrac{f'(-2)+f'(2)}{f(-2)+f(2)}$ برابر است با:

۱) ۲/۴ ۲) ۲/۸

۳) ۴/۴ ۴) ۴/۸

۴ـ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ:

$$y=\frac{1}{x-1}+\sqrt{1-x^{2}}+\sqrt{x^{2}-1}$$

برابراست:

۱) $\varnothing$ ۲) $\mathbb{R}-\{-1\}$

۳) $\mathbb{R}-\{1\}$ ۴) $\{-1\}$

۵ـ درصورتی‌که مرکزدایره‌ای روی نیمساز ربع دوم وچهارم قرار داشته‌باشد و از مبدأ مختصات نیز بگذرد معادلهٔ آن چنین است:

۱) $(x-\alpha)^{2}+(y+\alpha)^{2}=\alpha\sqrt{2}$

۲) $(x+\alpha)^{2}+(y-\alpha)^{2}=2\alpha^{2}$

۳) $(x-\alpha)^{2}+(y+\alpha)^{2}=2\alpha^{2}$

۴) $(x+\alpha)^{2}+(y-\alpha)^{2}=2\sqrt{\alpha}$

حل مسائل برهان، شمارهٔ ۴

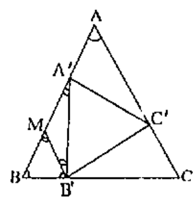
حل مسائل ریاضیات سال اول

۱- ۱) سه مثلث $AA'C'$ و $BA'B'$ و $CB'C'$ به حالت تساوی دوضلع و زاویهٔ بین باهم برابرند، زیرا:

$$AA'=BB'=CC'=\frac{۱}{۳}AB \Longrightarrow$$

$$AC'=BA'=CB'=\frac{۲}{۳}AB$$

$$\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=۶۰^\circ$$



پس ، $A'B'=A'C'=B'C'$ ؛ یعنی مثلث $A'B'C'$ متساوی‌الاضلاع است.

۲) میانهٔ $B'M$ از مثلث $BA'B'$ را رسم می‌کنیم . مثلث $BB'M$ متساوی الاضلاع و مثلث $MB'A'$ متساوی‌الساقین است.

$$MB=BB'=\frac{۱}{۲}AB \text{ و } \hat{B}=۶۰^\circ \Longrightarrow$$

$$BB'=MB'=MB \Longrightarrow \hat{B}'_۱=۶۰^\circ$$

$$MB'=MA'=\frac{۱}{۲}AB$$

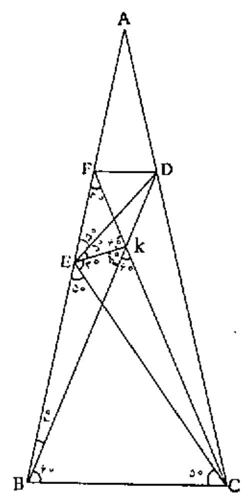
و $$B\hat{M}B'=۶۰^\circ \Longrightarrow \hat{B}'_۲=۳۰^\circ \Longrightarrow$$

$$A'\hat{B}'B=A'\hat{B}'M+M\hat{B}'B=۳۰^\circ+۶۰^\circ=۹۰^\circ$$

یعنی $A'B'$ عمود بر BC است . به همین ترتیب ثابت می‌شود که ، $A'C'\perp AB$ و $B'C'\perp AC$ می‌باشد . پس اضلاع دومثلث ABC و $A'B'C'$ برهم عمودند .

۲- از نقطهٔ D خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم تا ساق AB را درنقطهٔ F قطع کند. از F به C وصل می‌کنیم و نقطهٔ تقاطع FC با DB را K می‌نامیم واز E به K نیز وصل می‌کنیم . زاویهٔ $B\hat{F}C=۴۰^\circ$ و مثلثهای KBC و KFD متساوی‌الاضلاع‌اند. پس $BK=BC$ و $DF=DK$ است . مثلث BCE نیز متساوی‌الساقین است زیرا:

$$B\hat{E}C=B\hat{C}E=۵۰^\circ$$



پس $BE=BC$ است. درنتیجه $BK=BE$ یعنی مثلث BEK نیز متساوی‌الساقین می‌باشد و چون زاویهٔ رأس آن ۲۰° است پس $B\hat{E}K=E\hat{K}B=۸۰^\circ$ است و از آنجا $K\hat{E}C=۳۰^\circ$ و $E\hat{E}K=۱۰۰^\circ$. از طرفی $E\hat{F}K=E\hat{K}F=۴۰^\circ$ است ، پس مثلث EFK نیز متساوی‌الساقین و $EF=EK$ است.

بنابراین دو مثلث EFD و EKD به حالت برابری سه ضلع متساوی‌اند. درنتیجه DE ، نیمساز زاویهٔ $F\hat{E}K$ می‌باشد یعنی $D\hat{E}K=۵۰^\circ$ است . پس:

$$D\hat{E}C=۵۰^\circ+۳۰^\circ=۸۰^\circ$$

خواهد بود .

۳- روش اول: فرض کنیم $p \Longrightarrow q$ یك‌ترکیب شرطی و $q\equiv T$، دراین‌صورت‌اگر $p\equiv T$ ، گزاره‌شرطی $p\Longrightarrow q$ دارای مقدم وتالی درست‌بوده و دارای ارزش درست است و اگر $p\equiv F$ ، گزارهٔ شرطی $p \Longrightarrow q$ به انتفای مقدم درست است. پس درهرحالت دارای‌ارزش درست است.

روش دوم: باتوجه‌به این‌که $(p\Longrightarrow q)\equiv(\sim p\vee q)$، اگر $q\equiv T$ ارزش گزارهٔ فصلی $(\sim p\vee q)$ همواره درست است .

۴- با توجه به این‌که $(A-B)=(A\cap B')$ ثابت می‌کنیم اگر $A\subseteq B$ آنگاه ، $(A\cap B')=\varnothing$. برای این‌کار کافی‌است ثابت‌کنیم دومجموعهٔ A و B' مجموعه‌هایی جدا از هم هستند. بنابراین عضوی‌دلخواه از A مانند x در نظرگرفته وثابت می‌کنیم این عضودلخواه در B' نیست:

$$\overset{A\subseteq B}{(x\in A \Longrightarrow x\in B} \xRightarrow{\text{طبق تعریف متمم}} x\notin B')$$

$$\Longrightarrow A\cap B'=\varnothing$$

۵- درحالت کلی و برای هر چهار مجموعهٔ دلخواه مانند A وB وC وD داریم:

$$\left.\begin{matrix}A\subseteq B\\ C\subseteq D\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix}(A\cap C)\subseteq(B\cap D)\\ (A\cup C)\subseteq(B\cup D)\end{matrix}$$

(اثبات مطلب فوق به‌روش عضوگیری دلخواه بوده و آسان است)

حال با توجه به مسألهٔ فوق خواهیم داشت:

$$\left.\begin{matrix}A\subseteq B\\ A'\subseteq B\end{matrix}\right\} \Rightarrow (A\cup A')\subseteq(B\cup B)$$

$$\Rightarrow M\subseteq B \qquad (1)$$

و نیز واضح است که $B\subseteq M$ (۲) و با توجه به رابطه‌های (۱) و(۲) و تعریف تساوی بین دو مجموعه نتیجه می‌گیریم که: $B=M$ است.

۶- داریم:

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$

به‌توان ۳ می‌رسانیم:

$$\left.\begin{matrix}a=\sqrt[3]{5+2\sqrt{6}}\\ b=\sqrt[3]{5-2\sqrt{6}}\end{matrix}\right. \Rightarrow$$

$$x=\underbrace{\sqrt[3]{5+2\sqrt{6}}}_{a}+\underbrace{\sqrt[3]{5-2\sqrt{6}}}_{b}$$

$$x=a+b$$

$$x^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$

$$x^3=5+2\sqrt{6}+5-2\sqrt{6}+3\sqrt[3]{(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})}(x)$$

$$x^3=10+3\sqrt[3]{25-24}\,x$$

$$x^3=10+3x \Rightarrow x^3-3x=10$$

۷- حاصل کسر عددی است مثبت آن را مساوی x فرض می‌کنیم، آن را به توان (۲) می‌رسانیم پس از ساده کردن جذر می‌گیریم.

به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x=\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}$$

$$x^2=\frac{\sqrt{5}+2+\sqrt{5}-2+2\sqrt{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}}{\sqrt{5}+1}$$

$$x^2=\frac{2\sqrt{5}+2\sqrt{5-4}}{\sqrt{5}+1}=\frac{2\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+1}$$

$$=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{5}+1}=2$$

$$x^2=2 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{2}}$$

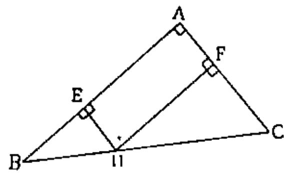
حل مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱- چهار ضلعی AEHF مستطیل است.

بنابراین: $AE=HF$ (۱) و $AF=EH$ است. در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ HBE و HFC می‌توان نوشت:

$$HB^2=AF^2+BE^2 \text{ یا } HB^2=HE^2+BE^2$$

$$HC^2=AE^2+CF^2 \text{ یا } HC^2=HF^2+CF^2 \qquad (2)$$



از طرفی درمثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ داریم:

$$BC^2=AB^2+AC^2 \Rightarrow (BH+HC)^2$$

$$=(AE+EB)^2+(AF+FC)^2 \Rightarrow$$

$$BH^2+HC^2+2HB\cdot HC$$

$$=AE^2+EB^2+2AE\cdot EB+AF^2+FC^2+2AF\cdot FC \qquad (3)$$

با توجه به روابط (۱)و(۲) از رابطهٔ(۳) نتیجه‌می‌شود:

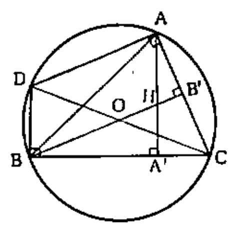
$$2HB\cdot HC=2AE\cdot EB+2AF\cdot FC$$

$$\Rightarrow HB\cdot HC=EA\cdot EB+FA\cdot FC$$

۲- اگر قطر CD از دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم کنیم و از D به A و B وصل نمائیم، چهار ضلعی AHBD متوازی‌الاضلاع است زیرا:

$$A\hat{A'}B=D\hat{B}C=90^\circ \text{ و } B\hat{B'}A=D\hat{A}C=90^\circ$$

پس $AH=BD$ است. اما در مثلث قائم‌الزاویهٔ BDC $(D\hat{B}C=90^\circ)$ می‌توان نوشت :



$$BC^2+BD^2=CD^2=4R^2 \Rightarrow$$

$$BC^2+AH^2=4R^2$$

و به همین‌ترتیب ثابت می‌شود که:

$$BC^2+AH^2=AC^2+BH^2$$

$$=AB^2+CH^2=4R^2$$

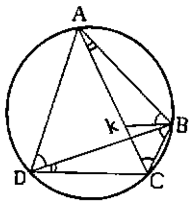
۳- قضیهٔ بطلمیوس - چهار ضلعی محاطی ABCD را درنظر می‌گیریم و از رأس B زاویهٔ ABK را مساوی با زاویهٔ CBD جدا می‌کنیم. داریم:

$$A\hat{B}K\sim D\hat{B}C \Rightarrow \frac{AB}{KA}=\frac{BD}{CD}$$

$$\Rightarrow AB\cdot CD=AK\cdot BD \qquad (1)$$

$$A\hat{B}D\sim B\hat{C}K \Rightarrow \frac{BC}{KC}=\frac{BD}{AD}$$

$$\Rightarrow AD\cdot BC=KC\cdot BD \qquad (2)$$



از جمع روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AK\cdot BD+KC\cdot BD$$

$$=(AK+KC)\cdot BD=AC\cdot BD$$

$$\Rightarrow \boxed{AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD}$$

۴- هرگاه R یک‌رابطه روی A باشد و داشته باشیم:

$$R=\{(a,b)\}$$

دراین‌صورت باتوجه‌به تعریفهای خواص، یادتقارن و تعدی که هردو تعریف از گزاره‌هایی‌شرطی با مقدم عطفی‌تشکیل شده‌اند، و با توجه‌به این که؛ اگرمقدم یک‌ترکیب شرطی نادرست باشد آن گزارهٔ شرطی دارای ارزش درست‌است، هردو تعریف بنابر انتفای مقدم درست‌بوده و خواص برقرارند.

$$[(\underbrace{aRb\wedge bRa}_{F}) \Rightarrow a=b]\equiv T$$

$$[(\underbrace{aRb\wedge bRc}_{F}) \Rightarrow aRc]\equiv T$$

۵- می‌دانیم «اگر تابعی چندضابطه‌ای یک‌به‌یک باشد آن گاه در تمام ضابطه‌هایش یک‌به‌یک است». پس تا اینجا یک‌به‌یک بودن همهٔ ضابطه‌ها شرط لازم برای یک‌به‌یک بودن آن است. اما این شرط کافی نیست، زیرا مثلاً تابع:

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

در هر ضابطه یک‌به‌یک است اما در کل یک‌به‌یک نیست:

$$(f(-2)=f(2)=2)$$

پس نیاز به شرط دیگری نیز می‌باشد که آن جدا از هم بودن بردهای ضابطه‌ها می‌باشد!

۶- اگر دو ماتریس ۲ × ۲ دلخواه درنظر بگیریم و در یکدیگر از چپ و راست ضرب کنیم و نتیجه‌ها را مساوی هم قرار دهیم؛ شرط جابه‌جایی بودن دو ماتریس به صورت زیر درمی‌آید.

«درصورتی که درایه‌های روی قطر اصلی و فرعی هردو ماتریس به طور مجزا باهم برابر باشند جابه‌جاپذیر خواهند بود. وهمچنین اگر درایه‌های روی قطر اصلی برابر و درایه‌های روی قطر فرعی هریک قرینه هم باشند جابه‌جاپذیر می‌باشند.»

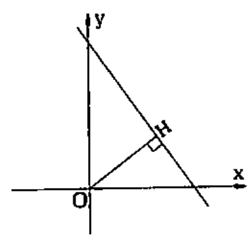
$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

۷- فاصله OH را پیدا می‌کنیم:

$$OH=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|-5|}{\sqrt{4+1}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

حال نقطه $H\left|\begin{matrix} x \\ 5-2x \end{matrix}\right.$ را روی خط درنظر می‌گیریم.



$$OH=\sqrt{x_H^2+y_H^2}=\sqrt{5} \Longrightarrow x_H^2+y_H^2=5$$

$$\Longrightarrow x^2+(5-2x)^2=5 \Longrightarrow$$

$$5x^2-20x+20=0 \Longrightarrow x^2-4x+4=0$$

$$\Longrightarrow (x-2)^2=0 \Longrightarrow \boxed{x_H=2}$$

۸- $A\left|\begin{matrix} -3 \\ 3 \end{matrix}\right.$ زیرا روی $y=-x$ است. زیرا موازی $y=x$ است.

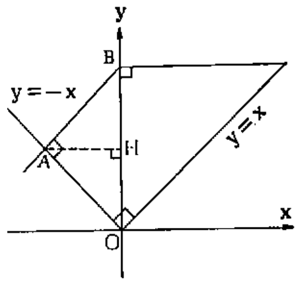
$$m_{AB}=1$$

معادله AB $\quad y-y_A=m(x-x_A)$

$$y-3=1(x+3)$$

$$\boxed{y=x+6}$$

$$x=0 \Longrightarrow \boxed{y_B=6}$$



۹- سمت‌چپ تساوی‌را تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x-1}=\frac{\sin x\cos x(\sin x+\cos x+1)}{(\sin x+\cos x)^2-1}$$

$$=\frac{\sin x\cos x(\sin x+\cos x+1)}{2\sin x\cos x}$$

پس از اختصار لازم داریم:

(با فرض $\sin x\cos x\neq 0$)

$$=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\equiv A\sin x+B\cos x+C$$

از مقایسهٔ طرفین نتیجه می‌شود:

$$\Longrightarrow A=B=C=\frac{1}{2}$$

۱۰- اگر طرفین فرض‌را در $(a+b)$ ضرب کنیم‌داریم:

$$\frac{a+b}{a}\sin^4x+\frac{a+b}{b}\cos^4x=1 \Longrightarrow$$

$$\sin^4x+\frac{b}{a}\sin^4x+\frac{a}{b}\cos^4x+\cos^4x=1$$

$$\sin^4x+\frac{b}{a}\sin^4x+\frac{a}{b}\cos^4x+\cos^4x=$$

$$(\sin^2x+\cos^2x)^2=\sin^4x+\cos^4x+2\sin^2x\cos^2x$$

$$\Longrightarrow \frac{b}{a}\sin^4x+\frac{a}{b}\cos^4x-2\sin^2x\cos^2x=0$$

$$\Longrightarrow \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\sin^2x-\sqrt{\frac{a}{b}}\cos^2x\right)^2=0 \xRightarrow{(\text{با فرض } ab>0)}$$

$$\sqrt{\frac{b}{a}}\sin^2x=\sqrt{\frac{a}{b}}\cos^2x \Longrightarrow$$

$$\sin^2x=\frac{a}{a+b} \quad \text{و} \quad \cos^2x=\frac{b}{a+b}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \sin^{2n}x=\dfrac{a^n}{(a+b)^n} \\ \cos^{2n}x=\dfrac{b^n}{(a+b)^n} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sin^{2n}x}{a^{n-1}}=\dfrac{a}{(a+b)^n} \\ \dfrac{\cos^{2n}x}{b^{n-1}}=\dfrac{b}{(a+b)^n} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{\sin^{2n}x}{a^{n-1}}+\frac{\cos^{2n}x}{b^{n-1}}=\frac{a}{(a+b)^n}+\frac{b}{(a+b)^n}$$

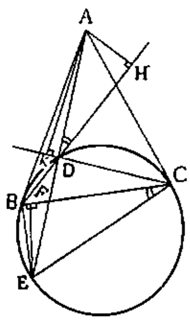
$$=\frac{(a+b)}{(a+b)^n}=\frac{1}{(a+b)^{n-1}}=\left(\frac{\sin^4x}{a}+\frac{\cos^4x}{b}\right)^{n-1}$$

حل مسائل ریاضیات سال سوم ریاضی

۱- از E به B و C وصل می‌کنیم واز E عمود EF را بر BC فرود می‌آوریم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ADK و EBF متشابه‌اند، زیرا:

$$\hat{F}=\hat{K}=90^\circ \quad \text{و} \quad A\hat{D}K=E\hat{D}C=E\hat{B}C$$

$$=\frac{\widehat{EC}}{2} \Longrightarrow \frac{AK}{EF}=\frac{AD}{EB} \qquad (1)$$



همچنین مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ADH و EFC متشابه‌اند:

$$(A\hat{D}H=B\hat{C}E \quad \text{و} \quad \hat{H}=\hat{F}=90^\circ)$$

پس:

$$\frac{AH}{EF}=\frac{AD}{EC} \qquad (2)$$

از تقسیم روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{AK}{AH}=\frac{EC}{EB} \qquad (3)$$

از طرفی داریم:

$$\overset{\Delta}{ADC} \sim \overset{\Delta}{AEC} \Longrightarrow \frac{EC}{DC} = \frac{AE}{AC} \qquad (۴)$$

$$\overset{\Delta}{ADB} \sim \overset{\Delta}{ABE} \Longrightarrow \frac{EB}{DB} = \frac{AE}{AB=AC} \qquad (۵)$$

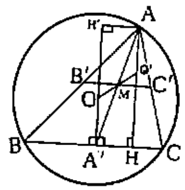
از روابط (۴) و (۵) نتیجه می‌شود:

$$\frac{EC}{DC} = \frac{EB}{DB} \Longrightarrow \frac{EC}{EB} = \frac{DC}{DB} \qquad (۶)$$

از مقایسهٔ روابط (۳) و (۶) نتیجه می‌شود:

$$\frac{AK}{AH} = \frac{DC}{DB}$$

۲ـ پاره‌خط $B'C'$ که وسطهای ضلعهای AB و AC از مثلث ABC را به هم وصل می‌کند با ضلع BC موازی و مساوی نصف BC است.



میانه AA' از مثلث ABC را رسم می‌کنیم. این میانه ازنقطهٔ M وسط پاره‌خط $B'C'$ می‌گذرد. (خطوط متقارب AC و AA' و AB روی دو خط متوازی BC و $B'C'$ قطعه‌های متناظرمتناسب ایجاد می‌کنند) ودراین نقطه‌نصف‌می‌شود یعنی‌نقطهٔ M وسط AA' نیزهست. از A' به O وصل‌می‌کنیم می‌دانیم‌که $A'O$ عمـود منصف‌ضلع BC است. از A عمود AH' رابرخط OA' فرود می‌آوریم.چهارضلعی $AHA'H'$ مستطیلی است که AA' یك‌قطر آن و نقطهٔ M وسط ایـن قطر مرکز تقارن آن است. پس قرینهٔ نقطهٔ O (مرکز دایرهٔ محیطی مثلث) نسبت به نقطهٔ M (وسط پاره‌خط واصل بین‌دوضلع مثلث) روی‌ارتفاع AH (ارتفاع مرسوم برضلع‌سوم) واقع‌است.

۳ـ فرض کنیم v یك‌فضای‌برداری و بردارهای: u_1 ، u_2 ، … ، u_n

n بردار دراین فضا باشند به قسمی‌که مثلا بتوان بردار u_i را برحسب‌ترکیب خطی $n-1$ بردار دیگر نوشت:

$$u_i = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_{n-1} u_n \Longrightarrow$$

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + (-1)u_i + \cdots + \alpha_{n-1} u_n = \vec{0}$$

دراین‌حال ما به یك ترکیب‌خطی از این n بردار دست یافتیم‌که به طورحتم یك‌ضریب مخالف‌صفردرآن یافت می‌شود وحاصل این ترکیب خطی مساوی بابردار صفراست وبنا براین طبق‌تعریف وابستگی‌خطی، این‌بردارها وابسته خطی‌اند.

۴ـ (مسأله درحالتی‌که تکرار ارقام مجازنیست‌بررسی می‌شود.)

الف) مضارب ۵ وبزرگتراز ۴۰۰۰ راکه با ارقام فوق می‌توان ساخت‌به دوقسمت تقسیم می‌کنیم:

(الف) آنهایی‌که‌رقم یکانشان صفراست.

(ب) آنهایی‌که رقم‌یکانشان ۵ است (رقم‌هزارگان باید یا ۴ یا ۵ یا ۶ باشد):

رقم یکان صفر ۴ یا ۵ یا ۶

۳	۵	۴	۱

$= 3 \times 5 \times 4 \times 1 = 60$

رقم یکان پنج ۴ یا ۶

۲	۵	۴	۱

$= 2 \times 5 \times 4 \times 1 = 40$

۱۰۰ = ۴۰+۶۰ = مضارب پنج وبزرگتر از ۴۰۰۰

ب) دراین‌قسمت نیز اعداد زوج را بـه دو دسته تقسیم می‌کنیم.

دستهٔ‌اول اعداد زوج بارقم یکان‌صفر.

دستهٔ‌دوم اعداد زوج بارقم یکان ۲ یا ۴ یا ۶.

رقم یکان‌صفر رقم ۱

۱	۵	۴	۱

$= 5 \times 4 = 20$

رقم یکان غیرصفر رقم ۱

۱	۵	۴	۳

$= 5 \times 4 \times 3 = 60$

۸۰ = ۶۰ + ۲۰ = اعداد زوج که‌بارقم ۱ شروع می‌شوند

۵ـ داریم:

$$f(1)=6 \ ,\ f(2)=11 \ ,\ f(-1)=2$$

$$f(x)=(x^2-1)(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$$

$$x=1 \Longrightarrow f(1)=a+b+c=6$$

$$x=2 \Longrightarrow f(2)=4a+2b+c=11$$

$$x=-1 \Longrightarrow f(-1)=a-b+c=2$$

$$\begin{cases} a+b+c=6 \\ -a+b-c=-2 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{b=2}$$

$$b=2 \Longrightarrow \begin{cases} a+b+c=6 \\ 4a+2b+c=11 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{matrix} a+c=4 \\ 4a+c=7 \end{matrix}\Bigg\} \Longrightarrow \boxed{\begin{matrix} a=1 \\ c=3 \end{matrix}}$$

$\Longrightarrow$ باقیمانده $= x^2+2x+3$

ـ۶

$$tg x + cotg x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\sin 2x = 0 \Longrightarrow 2x = k\pi \Longrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

$$\Longrightarrow D_f = R - \left\{ x \,\middle|\, x = \frac{k\pi}{2} \right\}$$

می‌دانیم اگـر: $a>0$ ، آنگاه $a+\frac{1}{a} \geqslant 2$

و اگـر: $a<0$ ، آنگـاه $a+\frac{1}{a} \leqslant -2$

$\Longrightarrow$ اگر انتهای‌کمان x در ربع‌اول یا سوم‌باشد

$tg x > 0 \Longrightarrow tg x + cotg x \geqslant 2$

$\Longrightarrow$ اگر انتهای‌کمان x در ربع‌دوم یا چهارم باشد

$tg x < 0 \Longrightarrow tg x + cotg x \leqslant -2$

اگر $tg x > 0 \Longrightarrow [tg x + cotg x] = 2, 3, 4, \ldots$

اگر $tg x < 0 \Longrightarrow [tg x + cotg x]$

$= -2, -3, -4, \ldots$

$\Longrightarrow$ برد تابع $= Z - \{-1, 0, 1\}$

ـ۷ اگر $a \to b \Longrightarrow$ حدکسر $= \frac{0}{0}$

$$\frac{\sin a - \sin b + \sin(a-b)}{\cos a - \cos b} =$$

$$\frac{2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} + 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}}$$

$$\Longrightarrow \lim_{a\to b} \frac{2\sin\frac{a-b}{2}\left(\cos\frac{a+b}{2}+\cos\frac{a-b}{2}\right)}{-2\sin\frac{a-b}{2}\cdot\sin\frac{a+b}{2}}$$

$$= \frac{\cos b + 1}{-\sin b} = \frac{2\cos^2\frac{b}{2}}{-2\sin\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2}} = \boxed{-cotg\frac{b}{2}}$$

۸ـ با توجه به رابطهٔ:

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

داریم:

$$\cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ =$$
$$(\sin 47^\circ + \sin 61^\circ) - (\sin 11^\circ + \sin 25^\circ) =$$
$$2\sin 54^\circ \cos 7^\circ - 2\sin 18^\circ \cos 7^\circ =$$
$$2\cos 7^\circ(\sin 54^\circ - \sin 18^\circ) = 4\cos 7^\circ \sin 18^\circ \cos 36^\circ =$$
$$4\cos 7^\circ \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \cos 7^\circ$$

۹ـ ابتدا طرفین هر یک‌از معادله‌های دستگاه را مجذور ساخته وسپس یک‌بار باهم‌جمع وبار دیگر در هم‌ضرب می‌کنیم که دراین‌صورت خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y + 2\sin x \sin y = \sin^2 a \\ \cos^2 x + \cos^2 y + 2\cos x \cos y = \cos^2 a \end{cases}$$

جمع دو رابطه: $1 + 2(\cos x \cos y + \sin x \sin y) = 0$

ضرب دو رابطه: $\sin 2x + \sin 2y + 2\sin(x+y) = \sin 2a$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(x-y) = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \\ x - y = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (1) \\ 2\sin(x+y)[1+\cos(x-y)] = \sin 2a \\ \Rightarrow 2\sin(x+y)(1-\frac{1}{2}) = \sin 2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \\ \sin(x+y) = \sin 2a \Rightarrow \\ \left| \begin{array}{l} x+y = 2k\pi + 2a \\ x+y = 2k\pi + \pi - 2a \end{array} \right. \quad (2) \end{cases}$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) دستگاههای سادهٔ دومجهولی به دست خواهدآمد که یکی‌از دستگاهها چنین است:

$$\begin{cases} x+y = 2k\pi + 2a \\ x-y = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} + a \\ y = a + \frac{\pi}{3} \end{array} \right. \quad \text{(یک دسته جواب)}$$

دسته‌جوابهای دیگر را به طور مشابه به دست آورید.

حل مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱ـ الف) زاویهٔ $(\vec{v}_1 , \vec{v}_2)$ را محاسبه می‌کنیم. زاویه $(-2\vec{v}_1 , 3\vec{v}_2)$ مکمل زاویهٔ $(\vec{v}_1 , \vec{v}_2)$ است.

$$\vec{v}_1(2,3,-1) \ , \ \vec{v}_2(1,-2,1) \Rightarrow$$
$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 =$$
$$2 - 6 - 1 = -5 \ ,$$
$$|\vec{v}_1| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$$
$$|\vec{v}_2| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$
$$\cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|} =$$
$$\frac{-5}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}} = \frac{-5}{2\sqrt{21}} \Rightarrow$$
$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \mathrm{Arc}\cos\left(\frac{-5}{2\sqrt{21}}\right) = \alpha$$
$$\Rightarrow (-2\vec{v}_1, 3\vec{v}_2) = \pi - \alpha$$
$$\Rightarrow (-2\vec{v}_1, 3\vec{v}_2) = \pi - \mathrm{Arc}\cos\left(\frac{-5}{2\sqrt{21}}\right)$$

نکته: به طور کلی برای دو بردار $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ و دو عدد جبری مخالف‌صفر a و b داریم:

$(a<0 \ , \ a<0)$ یا $(a>0 \ , \ b>0) \Rightarrow$

$$(a\vec{v}_1, b\vec{v}_2) = (b\vec{v}_1, a\vec{v}_2) = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

$(a>0 \ , \ b<0)$ یا $(a<0 \ , \ b>0) \Rightarrow$

$$(a\vec{v}_1, b\vec{v}_2) = (b\vec{v}_1, a\vec{v}_2) = \pi - (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

یعنی اگر a و b متحدالعلامه باشند:

$(a\vec{v}_1, b\vec{v}_2)$ یا $(b\vec{v}_1, a\vec{v}_2)$ با $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ برابر است.

ودرصورتی‌که a و b مختلف‌العلامه باشند

$(b\vec{v}_1, a\vec{v}_2)$ یـا $(a\vec{v}_1, b\vec{v}_2)$

مکمل $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ می‌باشد.

ب) راه اول:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \left| \begin{array}{l} 2+1=3 \\ 3-2=1 \\ -1+1=0 \end{array} \right. \quad \text{و} \quad \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \left| \begin{array}{l} 2-1=1 \\ 3+2=5 \\ -1-1=-2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \wedge (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \left| \begin{array}{l} -2 \\ 6 \\ 14 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$|(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \wedge (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)| = \sqrt{4+36+196}$$
$$= \sqrt{236} = 2\sqrt{59}$$

راه دوم: با توجه به توزیع‌پذیری ضرب برونی نسبت به جمع بردارها می‌توان‌نوشت:

$$(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \wedge (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) =$$
$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_1 - (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) + (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1) - (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_2)$$

اما:

$$-(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) = (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)$$
$$\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_2 = 0 \ \text{و} \ \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_1 = 0$$

پس داریم:

$$|(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \wedge (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)| =$$
$$|2(\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)| = 2|\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1|$$

اما:

$$\vec{v}_1(2,3,-1) \ , \ \vec{v}_2(1,-2,1) \Rightarrow$$
$$\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1(-1,3,7) \Rightarrow$$
$$|\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1| = \sqrt{1+9+49} = \sqrt{59}$$

در نتیجه:

$$|(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \wedge (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)| =$$
$$2|\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1| = 2\sqrt{59}$$

ج) با توجه به رابطهٔ:

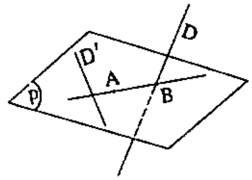
$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| \times \mathrm{Pr}_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2}$$

می‌توان نوشت.

$$\mathrm{Pr}_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1|} = \frac{-5}{\sqrt{14}} = \frac{-5\sqrt{14}}{14}$$

۲ـ معادلهٔ صفحه‌ای‌راکه برخط D' (یا D) و نقطهٔ A می‌گذرد می‌نویسیم (صفحهٔ P) و نقطهٔ برخورد این صفحه بـا

خط D (یا خط D′) را به دست می‌آوریم (درصورت وجود). اگر این نقطهٔ تقاطع را B بنامیم، معادلهٔ خط AB جواب مسأله است.



$$D': \frac{x}{۳}=\frac{y+۱}{-۱}=\frac{z}{۲} \Longrightarrow$$

$$x+۳y+۳=۰ \text{ و } ۲x-۳z=۰$$

دو صفحهٔ مصور خط D′

$$\alpha(x+۳y+۳)+\beta(۲x-۳z)=۰$$

دستهٔ صفحهٔ گذرنده بر خط D′

$$A(۲,-۱,۰) \xrightarrow{\text{درمعادلهٔ دسته صفحه}} \alpha(۲-۳+۳)+\beta(۴)=۰$$

$$\Longrightarrow ۲\alpha+۴\beta=۰ \Longrightarrow \alpha=-۲\beta \Longrightarrow$$

$$-۲\beta(x+۳y+۳)+\beta(۲x-۳z)=۰ \Longrightarrow$$

$$-۲x-۶y-۶+۲x-۳z=۰ \Longrightarrow$$

$$-۶y-۳z-۶=۰ \Longrightarrow ۲y+z+۲=۰$$

معادلهٔ صفحهٔ P

$$\begin{cases} P: ۲y+z+۲=۰ \\ D: \begin{cases} x=۲t-۱ \\ y=-t+۲ \\ z=۴t \end{cases} \Longrightarrow -۲t+۴+۴t+۲=۰ \end{cases}$$

$$\Longrightarrow t=-۳ \Longrightarrow B(-۷,۵,-۱۲)$$

$$A(۲,-۱,۰) \text{ و } B(-۷,۵,-۱۲) \Longrightarrow$$

$$AB/\ \frac{x-۲}{-۷-۲}=\frac{y+۱}{۵+۱}=\frac{z-۰}{-۱۲-۰} \Longrightarrow$$

$$AB/\ \frac{x-۲}{-۹}=\frac{y+۱}{۶}=\frac{z}{-۱۲}$$

۳ـ می‌دانیم مکان هندسی نقاطی از فضا که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله می‌باشند صفحهٔ عمود منصف پاره‌خط AB است. بنابراین معادلهٔ صفحهٔ عمود منصف پاره خط AB را می‌نویسیم و نقطهٔ تقاطع این صفحه با خط D را به دست می‌آوریم، (درصورت وجود زیرا اگر صفحهٔ عمود منصف پاره خط AB موازی خط D باشد مسأله جواب ندارد.)

$$A(-۱,۲,۴) \text{ و } B(۳,۲,۰) \Longrightarrow$$

وسط پاره خط AB $M(۱,۲,۲)$ و $\overrightarrow{AB}(۴,۰,-۴) \Longrightarrow$

$$a(x-x_۱)+b(y-y_۱)+c(z-z_۱)=۰$$

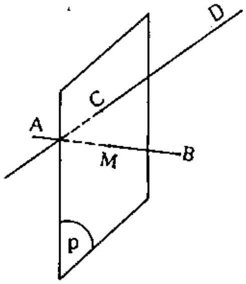
$$\Longrightarrow ۴(x-۱)+۰(y-۲)-۴(z-۲)=۰$$

$$\Longrightarrow \boxed{x-z+۱=۰}$$

معادلهٔ صفحهٔ عمود منصف پاره‌خط AB

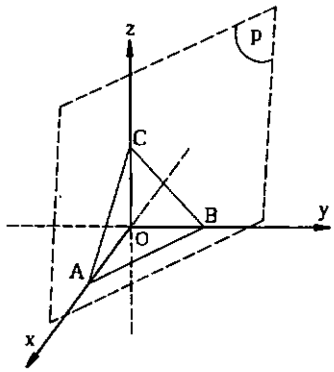
$$\begin{cases} x-z+۱=۰ \\ ۲x-۱=y+۲=۴z \end{cases} \Longrightarrow$$

نقطهٔ موردنظر $C(-۵,-۱۸,-۲)$



۴ـ اگر از برخورد یک صفحه با محورهای مختصات دستگاه مختصات قائم در فضا، مثلثی متساوی‌الاضلاع به وجود آید، قدرمطلق طول از مبدأ وعرض ازمبدأ و ارتفاع از مبدأ آن صفحه با هم برابر می‌باشند، یعنی:

$$|p|=|q|=|r|$$



زیرا مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین OAB و OBC و OAC که وترهای متساوی دارند، باهم برابرند. لذا:

$$OA=OB=OC$$

یعنی: $|p|=|q|=|r|$

حال اگر مثلث متساوی‌الاضلاع حاصل دراین مسأله، در همان ناحیه‌ای از دستگاه مختصات، محورهای مختصات را قطع کند که نقطهٔ $M(۳,-۲,۲)$ واقع است، وطول از مبدأ این صفحه را p بنامیم داریم:

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{-p}+\frac{z}{p}=۱$$

$$M(۳,-۲,۲) \xrightarrow{\text{در معادلهٔ صفحه}} \frac{۳}{p}+\frac{-۲}{-p}+\frac{۲}{p}=۱ \Longrightarrow$$

$$\frac{۷}{p}=۱ \Longrightarrow p=۷ \Longrightarrow \frac{x}{۷}+\frac{y}{-۷}+\frac{z}{۷}=۱$$

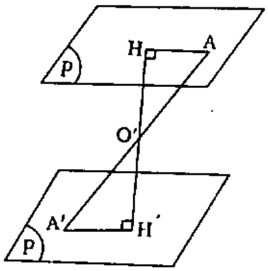
$$\Longrightarrow x-y+z-۷=۰$$ معادلهٔ صفحهٔ مطلوب

آیا مسأله جواب یا جوابهای دیگری نیز دارد؟ پاسخ خود را به نشانی مجلهٔ برهان ارسال دارید. کاملترین پاسخ و نام فرستندهٔ آن، در مجله درج خواهد شد.

۵ـ صفحهٔ مطلوب، صفحه‌ای است موازی صفحهٔ P، لذا بردار نرمال آن را همان بردار نرمال صفحهٔ P یعنی بردار:

$$\vec{v}(۲,-۱,۲)$$

می‌توان درنظر گرفت. بنابراین کافی است مختصات یک نقطه از صفحهٔ P′ را به دست آوریم،



اگر A نقطه‌ای از صفحهٔ P و A′ قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ O′ باشد داریم:

$A(۰,-۱,۰)$ ، $A\in P$

$$\begin{cases} x_{O'}=\dfrac{x_A+x_{A'}}{۲} \\ y_{O'}=\dfrac{y_A+y_{A'}}{۲} \\ z_{O'}=\dfrac{z_A+z_{A'}}{۲} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -۲=\dfrac{۰+x_{A'}}{۲} \\ ۱=\dfrac{-۱+y_{A'}}{۲} \\ ۳=\dfrac{۰+z_{A'}}{۲} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_{A'}=-۴ \\ y_{A'}=۳ \\ z_{A'}=۶ \end{cases} \Longrightarrow A' \left| \begin{matrix} -۴ \\ ۳ \\ ۶ \end{matrix} \right.$$

$$P': a(x-x_۱)+b(y-y_۱)+c(z-z_۱)=۰ \Longrightarrow$$

$$۲(x+۴)-(y-۳)+۲(z-۶)=۰ \Longrightarrow$$

$$\boxed{۲x-y+۲z+۳=۰}$$ معادلهٔ صفحهٔ P

راه دوم: اگر صفحهٔ جواب مسأله را P′ بنامیم، چون $P' \parallel P$ است پس $P': ۲x-y+۲z+d=۰$ است. حال باید d را چنان تعیین کنیم که نقطهٔ O′ از دو صفحهٔ P و P′ به یک فاصله باشد. دراین صورت:

$$\frac{3(-2)-(1)+2(3)-1}{\sqrt{9+1+4}}=-\frac{3(-2)-(1)+2(3)+d}{\sqrt{9+1+4}}\Rightarrow -2=-d+1$$

$$\Rightarrow d=3\Rightarrow P':\ \boxed{3x-y+2z+3=0}$$

-۶

$$[(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)]\Rightarrow[(p\vee q)\Rightarrow r]$$

$$\overset{\text{عکس نقیض}}{\equiv}[(\sim r\Rightarrow\sim p)\wedge(\sim r\Rightarrow\sim q)]$$

$$\Rightarrow[\sim r\Rightarrow(\sim p\wedge\sim q)]$$

$$\equiv(\overbrace{[\sim r\Rightarrow(\sim p\wedge\sim q)]}^{Q}\Rightarrow$$

$$\overbrace{[\sim r\Rightarrow(\sim p\wedge\sim q)]}^{Q})\equiv T$$

دراثبات مسألهٔ فوق از عکس خاصیت پخشی شرطی در عطفی استفاده‌شده است.

-۷ هرگاه R یک‌حلقهٔ جابجایی باشد داریم:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2$$

$$\overset{ab=ba}{=}a^2+2ab+b^2$$

حال اگر برای‌هر $a,b\in R$ داشته‌باشیم:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

دراین‌صورت ثابت می‌کنیم حلقهٔ R جابه‌جایی است.

$$\forall a,b\in R,\ (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$\Rightarrow(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2$$

$$\Rightarrow a^2+ab+ba+b^2=a^2+ab+ab+b^2$$

$$\xrightarrow{\text{قانون حذف درگروه }(R,+)}ab=ba$$

پس حلقهٔ R جابجایی است.

-۸ فرض کنیم: I_1 و I_2 هردوایده‌آل حلقهٔ R باشند، ثابت می‌کنیم: $(I_1\cap I_2)$ نیز ایده‌آل حلقهٔ R است.

الف):

فرض کنیم $x,y\in(I_1\cap I_2)\xrightarrow{\text{تعریف اشتراک}}$ $x,y\in I_1$ ، $x,y\in I_2$

$\xrightarrow{\text{تعریف ایده‌آل}}$ $\xrightarrow{I_1\text{ ایده‌آل}} x-y\in I_1$ ، $\xrightarrow{I_2\text{ ایده‌آل}} x-y\in I_2$

$$\xrightarrow{\text{تعریف اشتراک}}(x-y)\in(I_1\cap I_2)$$

ب):

فرض کنیم $r\in R$ و $x\in(I_1\cap I_2)\xrightarrow{\text{تعریف اشتراک}}x\in I_1\wedge x\in I_2$

$$\xrightarrow{I_1\text{ و }I_2\text{ ایده‌آل}}rx\in I_1\wedge rx\in I_2$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف اشتراک}}rx\in(I_1\cap I_2)$$

و به همین قیاس ثابت می‌شود، xr نیزمتعلق به $(I_1\cap I_2)$ است بنابراین طبق تعریف ایده‌آل $(I_1\cap I_2)$ یک ایده‌آل حلقهٔ R است.

-۹

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to1}\frac{\cos\sqrt{x^2+3x}-\cos2}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-2\sin\frac{\sqrt{x^2+3x}+2}{2}\sin\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{2}}{x-1}$$

اگر $x\to1\Rightarrow\begin{cases}\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{2}\to0\\ \frac{\sqrt{x^2+3x}+2}{2}\to2\end{cases}$

$$\Rightarrow\sin\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{2}\underset{x\to1}{\sim}\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{2}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-2\sin2\left(\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{2}\right)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}(-\sin2)\times\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}(-\sin2)\times\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x-1}\times\frac{\sqrt{x^2+3x}+2}{\sqrt{x^2+3x}+2}$$

$$=\lim_{x\to1}(-\sin2)\times\frac{x^2+3x-4}{(x-1)(2+2)}$$

$$=\lim_{x\to1}(-\sin2)\times\frac{(x-1)(x+4)}{4(x-1)}$$

$$=(-\sin2)\times\frac54=-\frac54\sin2\Rightarrow$$

تابع در $x=1$ مشتق‌پذیر است.

-۱۰

$$y'=\frac{-2x^2+0x+m}{v^2}$$

$$y'=0\Rightarrow-2x^2+0x+m=0\Rightarrow$$

$$\boxed{x'\cdot x''=\frac{c}{a}=-\frac{m}{2}}$$

$$y=\frac{x}{2x^2-5x+m}\Rightarrow$$

$$2yx^2-5yx+my=x$$

$$2yx^2-(5y+1)x+my=0\Rightarrow$$

$$\Delta=(5y+1)^2-8my^2=0$$

$$(25-8m)y^2+10y+1=0$$

$$\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}=\frac{y_2+y_1}{y_1y_2}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{b}{c}=-10$$

$$\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}=10x'x''\Rightarrow$$

$$-10=10\left(-\frac{m}{2}\right)\Rightarrow\boxed{m=2}$$

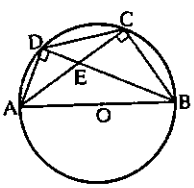
حل مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

-۱ راه اول: دایره‌ای به قطر AB از نقاط C و D می‌گذرد، زیرا:

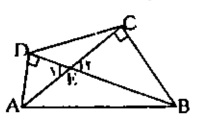
$$A\hat{C}B=A\hat{D}B=90^\circ$$

است. پس چهار ضلعی ABCD محاطی است. بنابراین بنابه روابط طولی در دایره داریم:

$$EA\cdot EC=EB\cdot ED$$



راه دوم: دومثلث قائم‌الزاویه EAD و EBC متشابه‌اند

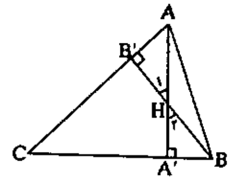


زیرا:

$$\hat{E}_1=\hat{E}_2,\ \hat{D}=\hat{C}=90^\circ\Rightarrow\frac{EA}{EB}=\frac{ED}{EC}\Rightarrow$$

$$EA\cdot EC=EB\cdot ED$$

۲ـ اگر مثلث ABC در رأس C متساوی‌الساقین و H نقطهٔ برخورد ارتفاعات AA' و BB' باشد، $HA=HB$ است. پس $HA^2-HB^2=0$ می‌باشد.



از طرفی دو مثلث قائم‌الزاویهٔ HAB' و $HA'B$ متشابه‌اند، زیرا:

$$\hat{A'}=\hat{B'}=90^\circ \quad \text{و} \quad \hat{H}_1=\hat{H}_2$$

پس می‌توان نوشت:

$$\frac{HA}{HB}=\frac{HB'}{HA'}$$

و از آنجا:

$$HA \cdot HA'=HB \cdot HB'$$

یا

$$HA \cdot HA'-HB \cdot HB'=0$$

در نتیجه:

$$HA^2-HB^2=HB \cdot HB'-HA \cdot HA'$$

نکته: اگر H نقطهٔ تقاطع ارتفاعات AA' و BB' و CC' از مثلث ABC باشد همواره داریم:

$$HA \cdot HA'=HB \cdot HB'=HC \cdot HC'$$

۳ـ

$$k^3(x-k^2)=s^3(x-s^2)$$

$$k^3x-k^5=s^3x-s^5 \Longrightarrow (k^3-s^3)x=k^5-s^5$$

$$x=\frac{k^5-s^5}{k^3-s^3}=\frac{(k-s)(k^4+k^3s+k^2s^2+ks^3+s^4)}{(k-s)(k^2+ks+s^2)}$$

با فرض $k-s\neq 0$ و یا $k\neq s$ داریم:

$$x=\frac{k^4+k^3s+k^2s^2+ks^3+s^4}{k^2+ks+s^2}$$

بنابراین معادله درحالت $s=k$ مبهم است و به ازای هرمقدار حقیقی k و s باشرط $s\neq k$ دارای یک ریشهٔ حقیقی است.

۴ـ ابتدا مبین معادله‌را تشکیل می‌دهیم:

$$x^2-m^2x+4=0 \Longrightarrow \Delta=m^4-16$$

الف) باشرط $\Delta>0$ معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی است یعنی:

$$\Delta=m^4-16>0$$

$$m^4-16>0 \Longrightarrow (m^2-4)(m^2+4)>0$$

$$m^2-4=0 \Longrightarrow m^2=4 \Longrightarrow m=\pm 2$$

m	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
m^2-4		+	0	−	0	+	
Δ		+		−		+	

بنابراین اگر $m>2$ و یا $m<-2$ معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

ب) شرط ریشهٔ مضاعف:

$$\Delta=m^4-16=0 \Longrightarrow m^4=16$$

(بنابراین به‌ازای $m=2$ و یا $m=-2$ معادله ریشه مضاعف دارد)

$$\Longrightarrow m=\pm 2$$

ج) با جایگزین کردن $x=2$ درمعادله‌مقدار m محاسبه می‌شود، یعنی:

$$x=2:\ 2^2-2m^2+4=0 \Longrightarrow 2m^2=8$$

$$\Longrightarrow m^2=4 \Longrightarrow m=\pm 2$$

۵ـ از معادلهٔ $3\cos x+2=0$ مقدار $\cos x$ راحساب کرده و سپس از رابطهٔ:

$$\sin x=\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$$

مقدار سینوس را حساب می‌کنیم:

$$3\cos x+2=0 \Longrightarrow 3\cos x=-2 \Longrightarrow$$

$$\cos x=\frac{-2}{3}\left(\pi<x<\frac{3\pi}{2}\right)$$

با توجه به حدود x که در ربع سوم‌است داریم:

$$\sin x=-\sqrt{1-\left(\frac{-2}{3}\right)^2}$$

$$\sin x=-\frac{\sqrt{5}}{3}$$

و

$$tg x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\frac{-\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$cotg x=\frac{1}{tg x}=\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

۶ـ ابتدا هریک‌از پرانتزها را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}-\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=$$

$$\sqrt{\frac{(1+\cos x)^2}{1-\cos^2 x}}-\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{1-\cos^2 x}}=$$

$$\sqrt{\frac{(1+\cos x)^2}{\sin^2 x}}-\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}}$$

با توجه به شرط $0<x<\frac{\pi}{2}$ داریم:

$$=\frac{|1+\cos x|}{|\sin x|}-\frac{|1-\cos x|}{|\sin x|}=\frac{1+\cos x-1+\cos x}{\sin x}$$

$$=\frac{2\cos x}{\sin x}=2 cotg x$$

$$\frac{1+\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{(1+\sin x)^2+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$

$$=\frac{1+\sin^2 x+2\sin x+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{2(1+\cos x)}{\cos x(1+\sin x)}$$

و ازضرب حاصل دوپرانتز داریم:

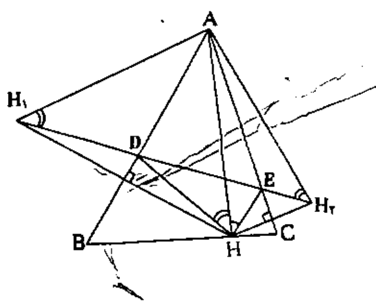
$$=\frac{2}{\cos x} \Longrightarrow (2 cotg x)\left(\frac{2}{\cos x}\right)=\frac{4}{\sin x}$$

حل‌مسائل ریاضیات سال سوم تجربی

۱ـ از رأس A به نقاط H_1 و H_2 وصل می‌کنیم. دو مثلث AH_1D و AHD باهم برابرند زیرا:

$$AH=AH_1,\ DH=DH_1,\ AD=AD$$

پس: (۱) $\hat{AH_1D}=\hat{AHD}$.



همچنین دو مثلث AEH و AEH_2 باهم‌برابرند زیرا:

$$AH=AH_2 \text{ و } EH=EH_2 \text{ و } AE=AE$$

پس (۲) $A\hat{H}_2E=A\hat{H}E$

اما مثلث AH_1H_2 متساوی‌الساقین می‌باشد، چون:

$$AH_1=AH_2=AH$$

است. بنابراین:

$$A\hat{H}_1D=A\hat{H}_2E \qquad (۳)$$

از روابط (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که:

$$A\hat{H}D=A\hat{H}E$$

یعنی AH نیمساز زاویهٔ DHE است.

-۲

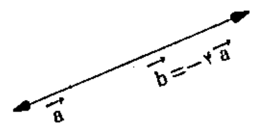
$|\vec{a}|=۳\ ,\ \vec{b}=-۴\vec{a} \Longrightarrow |\vec{b}|=۱۲\ ,$

$(\vec{a}\ ,\ \vec{b})=۱۸۰^\circ$

الف) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-۴\vec{a}|=|-۳\vec{a}|=۹$

$|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}+۴\vec{a}|=|۵\vec{a}|=۱۵$

$|\vec{a}+\vec{b}|\cdot|\vec{a}-\vec{b}|=۹\times ۱۵=۱۳۵$



ب) $(\vec{a}+۴\vec{b})\cdot(\vec{b}+۴\vec{a})=$

$(\vec{a}+۴\vec{b})\cdot(-۴\vec{a}+۴\vec{a})=۰$

$(\vec{a}+۴\vec{b})\cdot(\vec{۰})=۰$

ج) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a}\ ,\ \vec{b})=$

$۳\times ۱۲\times\cos ۱۸۰^\circ=-۳۶$

۳- با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\frac{\overline{AK_m}}{\overline{AB}}=\frac{m}{n} \Longrightarrow \frac{x_m-x_A}{x_B-x_A}=\frac{m}{n}$$

$$\Longrightarrow \frac{x_m-a}{b-a}=\frac{m}{n}$$

$$x_m-a=\frac{m}{n}(b-a) \Longrightarrow x_m=a+\frac{m}{n}(b-a)$$

-۴

$(gof)(x)=f(x)-x^۲$ و $g(x)=x^۲-x$

$g(f(x))=f(x)-x^۲$ و $g(f(x))=f^۲(x)-f(x)$

از تساوی رابطه‌های اخیر داریم:

$f^۲(x)-f(x)=f(x)-x^۲$

$f^۲(x)-۲f(x)+x^۲=۰ \Longrightarrow$

$f(x)=۱\pm\sqrt{۱-x^۲}$

$۱-x^۲\geqslant ۰ \Longrightarrow x^۲\leqslant ۱ \Longrightarrow -۱\leqslant x\leqslant ۱$

بنابراین داریم:

$D_f=[-۱\ ,\ ۱]$

$f(\cos\alpha)=۱\pm\sqrt{۱-\cos^۲\alpha}=۱\pm\sqrt{\sin^۲\alpha}=۱\pm\sin\alpha$

$=۱\pm ۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}=\sin^۲\frac{\alpha}{۲}+\cos^۲\frac{\alpha}{۲}$

$\pm ۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲} \Longrightarrow f(\cos\alpha)=(\sin\frac{\alpha}{۲}\pm\cos\frac{\alpha}{۲})^۲$

۵- الف) به ترتیب داریم:

$$\cos(\alpha+\frac{۲\pi}{۳})=\cos\alpha\cos\frac{۲\pi}{۳}\pm\sin\alpha\sin\frac{۲\pi}{۳}$$

$$=-\frac{۱}{۲}\cos\alpha-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin\alpha$$

$$\cos(\alpha+\frac{۴\pi}{۳})=\cos\alpha\cos\frac{۴\pi}{۳}-\sin\alpha\sin\frac{۴\pi}{۳}$$

$$=-\frac{۱}{۲}\cos\alpha+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin\alpha$$

بنابراین داریم:

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+\frac{۲\pi}{۳})+\cos(\alpha+\frac{۴\pi}{۳})=۰$$

ب) داریم:

$$\frac{۱}{\sin ۱۰^\circ}-\frac{\sqrt{۳}}{\cos ۱۰^\circ}=\frac{\cos ۱۰^\circ-\sqrt{۳}\sin ۱۰^\circ}{\sin ۱۰^\circ\cos ۱۰^\circ}=$$

$$\frac{\cos ۱۰^\circ-tg ۶۰^\circ\sin ۱۰^\circ}{\frac{۱}{۲}\sin ۲۰^\circ}=$$

$$\frac{۲(\cos ۱۰^\circ\cos ۶۰^\circ-\sin ۱۰^\circ\sin ۶۰^\circ)}{\sin ۲۰^\circ\cos ۶۰^\circ}=$$

$$\frac{۴\cos(۶۰^\circ+۱۰^\circ)}{\sin ۲۰^\circ}=\frac{۴\cos ۷۰^\circ}{\sin ۲۰^\circ}=\frac{۴\sin ۲۰^\circ}{\sin ۲۰^\circ}=۴$$

-۶

$$\frac{۱+\cos ۲x}{۲}+\frac{۱+\cos ۴x}{۲}+\frac{۱+\cos ۶x}{۲}$$

$$+\frac{۱+\cos ۸x}{۲}=۲$$

که پس از ساده کردن واختصار لازم داریم:

$(\cos ۸x+\cos ۶x)+(\cos ۴x+\cos ۲x)=۰$

$۲\cos ۷x\cos x+۲\cos ۳x\cos x=۰$

$۲\cos x(\cos ۷x+\cos ۳x)=۰ \Longrightarrow$

$۴\cos x\cos ۲x\cos ۵x=۰$

وبنابراین جوابهای کلی معادله چنین نتیجه می‌شود:

$$x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\ ,\ \frac{۱}{۲}k_۱\pi+\frac{\pi}{۴}\ ,\ \frac{۱}{۵}k_۲\pi+\frac{\pi}{۱۰}$$

حل مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

-۱

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲}$$

$$=\sqrt{(-۱-m)^۲+(۲+۲)^۲}=۵$$

$$(m+۱)^۲+۴^۲=۵^۲ \Longrightarrow (m+۱)^۲=۹ \Longrightarrow$$

$m=-۱\pm ۳$ و $m\in R^+ \Longrightarrow \boxed{m=۲}$

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{m-۱}{۲}=\frac{۲-۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{-۲+۲}{۲}=۰ \Longrightarrow$$

$M\left|\begin{matrix}\frac{۱}{۲}\\ ۰\end{matrix}\right.$ (مختصات وسط پاره‌خط AB)

$$d=\frac{|۴(\frac{۱}{۲})-۳(۰)+۱|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{۳}{۵} \Longrightarrow \boxed{d=\frac{۳}{۵}}$$

$$m_D=\frac{۴}{۳}$$

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۲+۲}{-۱-۲}=\frac{-۴}{۳}$$

$$tg\alpha=\left|\frac{m_D-m_{AB}}{۱+m_Dm_{AB}}\right|=\left|\frac{\frac{۴}{۳}-(-\frac{۴}{۳})}{۱+(\frac{۴}{۳})(\frac{-۴}{۳})}\right|$$

$$=\left|\frac{\frac{۸}{۳}}{\frac{-۷}{۹}}\right|=\frac{۲۴}{۷} \Longrightarrow \boxed{\alpha=Arctg(\frac{۲۴}{۷})}$$

۲- چون خطوط مماس وقائم بر روی محور عرضها تلاقی می‌کنند، بنابراین طول نقطهٔ تماس $x=۰$ است. در نتیجه مختصات نقطهٔ تلاقی خطوط مماس وقائم چنین خواهد بود:

$M\left|\begin{matrix}۰\\ ۱\end{matrix}\right.$

(با جایگزین کردن $x=۰$ درمعادلهٔ منحنی عرض نقطهٔ تماس به دست می‌آید، یعنی: $y=۱$).

اینک ضریب زاویهٔ خط مماس را با استفاده از مختصات نقطهٔ تماس و مشتق ضمنی به دست می‌آوریم، یعنی:

$$y'=\frac{-f'_x}{f'_y}$$

$$y'=-\frac{۲xy+\sqrt[۳]{y}}{x^۲+\frac{x}{۳\sqrt[۳]{y^۲}}-۳y^۲}$$

$$(f(x,y)=x^۲y+x\sqrt[۳]{y}-y^۳+۱)$$

$$m=y'\binom{x=۰}{y=۱}=\frac{-۱}{۳} \Longrightarrow \boxed{m=\frac{-۱}{۳}}$$

در اینجا معادله‌های خطوط مماس وقائم را می‌توان نوشت:

$$y-y_M=m(x-x_M) \Longrightarrow y-۱=\frac{-۱}{۳}(x-۰)$$

معادلهٔ خط مماس $\boxed{y=\frac{-1}{3}x+1}$

$$m'=\frac{-1}{m}=3 \Rightarrow y-y_M=m'(x-x_M)$$

$$y-1=3(x-0) \Rightarrow \boxed{y=3x+1}$$

معادلهٔ خط قائم

۳ـ الف) با جایگزین کردن $x=\frac{\pi}{4}$ درمعادلهٔ مفروض m محاسبه خواهدشد، یعنی:

$$\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right)+m\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}=1$$

$$\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+m\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1$$

$$2+\frac{m}{2}=1 \Rightarrow \boxed{m=-2}$$

ب) با روشی بسیار ساده، معادلهٔ کلاسیک نوع چهارم را درحالت کلی حل می‌کنیم.

حالت کلی معادلهٔ کلاسیک نوع چهارم:

$$a(\sin x\pm\cos x)+b\sin x\cos x=c$$

$$a(\sin x\pm\cos x)=c-b\sin x\cos x$$

پس از به‌توان ۲ رساندن‌طرفین داریم:

$$a^2(1\pm\sin 2x)=\left(c-\frac{b}{2}\sin 2x\right)^2$$

$$a^2\pm a^2\sin 2x=c^2-bc\sin 2x+\frac{b^2}{4}\sin^2 2x$$

$$\frac{b^2}{4}\sin^2 2x-(bc\pm a^2)\sin 2x+(c^2-a^2)=0$$

$$\sin 2x=\frac{(bc\pm a^2)\pm a\sqrt{a^2\pm 2bc+b^2}}{\frac{b^2}{2}}$$

$$\Delta=a^2\pm 2bc+b^2$$
$$\Delta_1=a^2+2bc+b^2$$
$$\Delta_2=a^2-2bc+b^2$$

پس‌از بررسی وتحقیق داریم:

$$\sin 2x=\frac{(bc+a^2)-a\sqrt{\Delta_1}}{\frac{b^2}{2}}$$

$$\sin 2x=\frac{(bc-a^2)+a\sqrt{\Delta_2}}{\frac{b^2}{2}} \quad (b\neq 0)$$

بنابراین نتیجه می‌شود:

$$\Delta_1=a^2+2bc+b^2=(\sqrt{2})^2+2m+m^2\geq 0$$

$$\Delta_1=2+2m+m^2\geq 0 \Rightarrow$$

$$\Delta_1=(m+1)^2+1\geq 0$$

Δ_1 همواره مثبت است، و درنتیجه معادله همواره دارای ریشهٔ حقیقی است.

ج) در رابطهٔ:

$$\sin 2x=\frac{(bc+a^2)-\sqrt{\Delta_1}}{\frac{b^2}{2}}$$

مقادیر a و b و c را جایگزین می‌کنیم. و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\sin 2x=\frac{(-2+2)-\sqrt{2}\sqrt{2+2(-2)+4}}{\frac{4}{2}}$$

$$=\frac{-2}{2}=-1=\sin\frac{3\pi}{2}$$

$$\sin 2x=\sin\frac{3\pi}{2} \Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x=k\pi+\frac{3\pi}{4}}$$

$$2x=2k\pi+\pi-\frac{3\pi}{2} \Rightarrow 2x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{x=k\pi-\frac{\pi}{4}}$$ (جوابهای معادله)

۴ـ الف) داریم:

$$S=(1+\sin x)(1+\cos x)$$

$$S=\left(1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\left(1+2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)$$

$$=\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\left(2\cos^2\frac{x}{2}\right)$$

$$S=2\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2\cos^2\frac{x}{2}$$

$$=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)+\cos\frac{x}{2}\right]^2\cos^2\frac{x}{2}$$

$$=4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos^2\frac{x}{2}$$

$$=\left[2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2}\right]^2$$ (مربع کامل)

ب) داریم:

$$S=\left[2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2}\right]^2$$

ابتدا مقدار داخل کروشه را به صورت مجموع تبدیل می‌کنیم:

$$S=\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\cos\frac{\pi}{4}\right]^2$$

$$=\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^2$$

حداکثر S وقتی است که $\cos(\frac{\pi}{4}-x)$ حداکثر باشد یعنی:

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$$

وور این صورت خواهیم داشت:

$$\boxed{S_{max}=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}}$$

حداقل S وقتی است که $\cos(\frac{\pi}{4}-x)$ حداقل باشد. یعنی:

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1 \Rightarrow x=\frac{5\pi}{4}$$

و در این‌صورت خواهیم داشت:

$$\boxed{S_{min}=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}}$$

اسامی تعدادی از عزیزانی که حل مسائل مسابقه‌ای و مسائلی برای حل را در زمان تعیین‌شده برای ما فرستاده‌اند.

۱ـ انسیه‌بخشایی‌پور (تهران)
۲ـ مینا ذوالقدر (تهران)
۳ـ شهرام بیگلری (کرمانشاه)
۴ـ محمدصالح نائیان (مشهد)
۵ـ محمدرضا جعفری (تهران)
۶ـ محمدعلی‌میرزاآقاتبار (آمل)
۷ـ بامداد فلاحتی (تهران)
۸ـ رضا معنوی (گرگان)
۹ـ عطاالله صادقی (تهران)
۱۰ـ سیدمحسن‌احمدی (شیراز)
۱۱ـ حسین‌حیدری‌دلوئی (گناباد)

جوابهای تفریح اندیشه

جواب ۱

۴۱ ۳۲۵. با هریک از ارقام ۱، ۲، ۳ ی مزبور ۲۴ عدد حاصل می‌شود که (۲۴ × ۳) = ۷۲ عدد اول ترتیب فوق را می‌دهند. عدد ۷۵ امین باید سومین عدد آغاز شونده با ۴ باشد:

۴۱ ۲۳۵، ۴۱ ۲۵۳، ۴۱ ۳۲۵

جواب ۲

A: ۸۰ m/s؛ B: ۴۰ m/s. قطار A در ۱۵ ثانیه ۶۰۰ متر از قطار B جلو می‌زند. بنابراین، A، ۴۰ m/s تندتر از B حرکت می‌کند. A و B فاصلهٔ مرکب ۶۰۰ متر را در ۵ ثانیه طی می‌کنند. سرعتهای مرکبشان $\frac{۶۰۰}{۵} =$ ۱۲۰ m/s است. بنابراین A با ۸۰m/s و B با ۴۰ m/s حرکت می‌کند.

$\underset{\rightarrow}{A}\quad\underset{\rightarrow}{B}\quad ; \quad\underset{\rightarrow}{B}\quad\underset{\rightarrow}{A}$

$\underset{\rightarrow}{A}\quad\underset{\leftarrow}{B}\quad ; \quad\underset{\leftarrow}{B}\quad\underset{\rightarrow}{A}$

جواب ۳

۱۸۰. زیرا ۱۲ دقیقه طول می‌کشد تا A، C را بگیرد (یعنی ۴۰۰ متر را بپیماید)، و در ۶ دقیقه‌ای که طول می‌کشد که B را بگیرد در نیمه راه (یعنی ۲۰۰ متری) است. بنابراین، B صدمتر به طرف C را در ۶ دقیقه طی کرده است. به این ترتیب ۶×۳، یا ۱۸، دقیقه طول می‌کشد تا B مسافت ۳۰۰ متر را طی کند.

جواب ۴

۱۰۸۹. اگر حاصل ضرب یک عدد چهار رقمی در ۹، یک عدد چهاررقمی باشد، رقم هزارگان آن باید ۱ باشد. رقم صدگان عدد مزبور باید ۰ باشد، زیرا چیزی به مرتبهٔ هزارگان اضافه نمی‌کند، و تنها مقدار یک رقمی x ی که به ازای آن ۸ + ۹x برابر مضربی از ۱۰ است x = ۸ است.

۱ □ □ ۹	۱ ۰ x ۹	۱ ۰ ۸ ۹
۹	۹	۹
۹ ۱	۹ x ۰ ۱	۹ ۸ ۰ ۱

جواب ۵

چهل و هشت. به هرقوطی ۳ × ۱/۱۲ = ۱/۴ یک جعبهٔ پراز مهره می‌رسد. هر جعبه ۶ × ۱/۱۲ = ۱/۲ یک جعبهٔ پر را از دست می‌دهد. هر جعبه ۱/۲ − ۱/۴ = ۱/۴ یک جعبهٔ پر بیش از هر قوطی دارد. بنابراین دوازده مهره یک چهارم یک جعبهٔ پر را ارائه می‌دهد.

In the name of God

Borhān

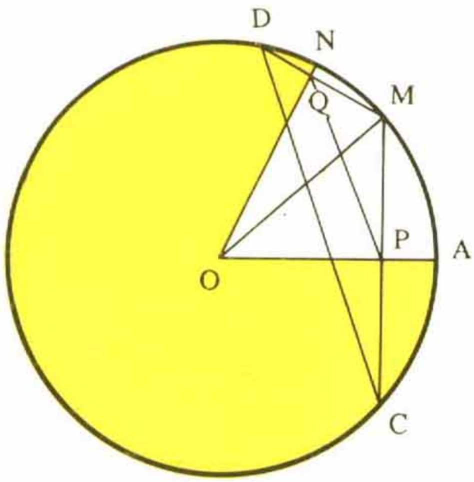
VOL.2. No.1
Serial numbers; 5
Februery 1993

Borhān is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:
Madrasse Publication- No. 268, Iranshahr-e-Shomali Ave. Tehran Iran Post code: 15875

Contents:

اثبات ابوالوفابوزجانی از رابطهٔ بسط سینوس مجموع



درشکل فرض می‌کنیم $\overset{\frown}{AM} = \alpha$ و $\overset{\frown}{MN} = \beta$. اگر عمودهای MP و MQ را به ترتیب بر OA و ON فرود آوریم و امتداد دهیم تا دایره را در C و D قطع کنند، داریم: $\overset{\frown}{CD} = ۲(\alpha + \beta)$، یعنی $\sin(\alpha + \beta) = \frac{|CD|}{۲}$ (سینوس هرکمان برابر است با طول نصف وتر دو برابر آن کمان)؛ در ضمن $|PM| = \sin \alpha$ ، $|OP| = \cos \alpha$ ، $|MQ| = \sin\beta$ و $|OQ| = \cos\beta$. چون پاره‌خط راست PQ، وسط دو ضلع مثلث MCD را به‌هم وصل کرده‌است، بنابراین $|PQ| = \frac{|CD|}{۲}$ ، یعنی $|PQ| = \sin(\alpha+\beta)$. قضیهٔ بطلمیوس درچهار ضلعی OPMQ می‌گوید:

$$|OM| \,.\, |PQ| = |PM| \,.\, |OQ| + |OP| \,.\, |MQ|$$

که اگر شعاع دایره را برابر واحد بگیریم و، در رابطهٔ بطلمیوس، به جای پاره‌خط‌های راست، مقدار آنها را قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha . \cos \beta + \cos \alpha . \sin \beta$$