رشد برهان

مجله ریاضی

۴۹

www.roshdmag.org

آموزشی، تحلیلی، اطلاع‌رسانی

برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه

❖ دوره‌ی پانزدهم، شماره‌ی ۳

❖ بهار ۱۳۸۵ - بها: ۲۵۰۰ ریال

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

دفتر انتشارات کمک آموزشی

ویژه‌ی این شماره:
مسائل نمونه‌ی کتاب درسی
با حل تشریحی

ریاضیدان و منجم ایرانی

اقلیدسی
ابوالحسن احمدبن ابراهیم اقلیدسی

اقلیدسی یکی از ریاضیدانان دوره‌ی اسلامی تقریباً ناشناخته است. در هیچ یک از منابع مهم عربی و فارسی که درباره‌ی زندگینامه‌ی دانشمندان دوره‌ی اسلامی می‌شناسیم ترجمه‌ی احوال او نیامده است. اما تنها می‌دانیم که وی در حدود نیمه‌ی اول سده‌ی چهارم می‌زیسته و در سال ۳۴۱ هـ ق در دمشق کتاب حساب مهمی به زبان عربی تالیف کرده است. چون در قدیم عنوان «اقلیدسی» به کسانی داده می‌شده که کتاب اصول اقلیدس را برای فروش رونویس می‌کرده‌اند شاید ابوالحسن اقلیدسی زندگی خود را از این راه می‌گذارنده است. از محتویات کتاب حسابش چنین برمی‌آید که به تدریس ریاضی نیز می‌پرداخته است.

آثار ریاضی موجود وی

۱- الکتاب الحجری فی الحساب

نسخه‌ی خطی این کتاب به قول سزگین در مانیسا موجود است و احمد آتش آن را در مجله‌ی معهدالمخطوطات العربیه معرفی کرده است.

۲- الفصول فی الحساب الهندی

نسخه‌ی خطی منحصر به فرد این کتاب در کتابخانه‌ی ینی جامعه استانبول موجود است و دارای ۲۳۰ برگ است.

این کتاب را نخستین بار دکتر احمد سلیم سعیدان استاد دانشگاه اردن هاشمی در سال ۱۹۶۶ م در مجله‌ی ایزیس معرفی کرد و سپس در سال ۱۹۷۳م متن عربی آن را به ضمیمه‌ی مقدمه و تعلیقات مفصل و بسیار مفید به چاپ رسانید.

موضوع فصل‌های کتاب حساب اقلیدسی

اقلیدسی در مقدمه‌ی کتاب الفصول فی الحساب الهندی اظهار می‌دارد که همه‌ی کتاب‌های مهمی را پیش از او و یا در زمان او راجع به حساب هندی تألیف شده خوانده است و با کسانی که در علم حساب زبردست بوده و شهرت داشته‌اند ملاقات کرده و از آنان کسب اطلاع نموده است. ادعا می‌کند که کتاب او از همه‌ی کتاب‌های دیگری که درباره‌ی حساب هندی تألیف شده جامع‌تر است.

کتاب حساب اقلیدسی دارای چهار فصل است و هر فصل آن به باب‌های متعدد تقسیم شده است.

فصل اول درباره‌ی ارقام هندی و عددنویسی در دستگاه اعشاری و اعمال اصلی حساب (جمع و تفریق و ضرب و تقسیم اعداد صحیح و کسری) و استخراج جذر است. اقلیدسی برای هر یک از این اعمال مثال‌های مختلف درباره‌ی عددهای صحیح و کسری چه در دستگاه اعشاری و چه در دستگاه شصتگانی (ستّینی) آورده است.

در فصل دوم همان مطالب فصل اول در سطح بالاتری ذکر شده است. مؤلف در مقدمه‌ی کتاب می‌گوید که در فصل دوم روش‌هایی را که محاسبان زبردست در حساب هندی به کار برده‌اند گردآورده است. این فصل از جمله شامل همه‌ی روش‌های گوناگون عمل ضرب است که در کتاب‌های حسابی که بعد از اقلیدسی تألیف شده دیده می‌شود.

در فصل سوم بسیاری از مفاهیم و مراحل عملیات که در دو فصل اول آمده به صورت جواب به سؤالاتی که با چرا و چگونه شروع می‌شود مورد بررسی و تحقیق قرار گرفته است.

برای آنکه مطالب فصل چهارم را بهتر بتوانیم ارزیابی کنیم مقدمه‌ی کوتاهی لازم است:

مقصود از حساب هندی روش محاسبه با دستگاه شمار اعشاری است که در آن هر یک از ارقام که برای نوشتن عدد به کار می‌رود بر حسب جای خود دارای ارزش نسبی است. مثلا در عدد ۵۴ ارزش نسبی رقم ۴ (مرتبه‌ی یکان) ۴ واحد است اما ارزش نسبی رقم ۵ (مرتبه‌ی صدگان) ۵۰ واحد (پنج بار ده) است.

ادامه در صفحه‌ی ۳ جلد

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان متوسطه ۴۹

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی
www.roshdmag.org
آموزشی، تحلیلی، اطلاع رسانی

● دوره‌ی پانزدهم ● شماره‌ی ۳ ● بهار ۱۳۸۵ ● شمارگان: ۱۲۰۰۰ نسخه ● مجله ریاضی، برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه

❖ مدیر مسؤول: علیرضا حاجیان زاده ❖ سردبیر: حمیدرضا امیری ❖ مدیر داخلی: میرشهرام صدر ❖ طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی

❖ ویراستار ادبی: کبری محمودی ❖ اعضای هیأت تحریریه: حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی

سید محمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور و با تشکر از همکاری ارزنده‌ی استاد پرویز شهریاری ◆ چاپ و صحافی: شرکت‌افست (سهامی عام)

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می‌کند:

- نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

این شماره:

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می‌شود.

مجلّه در حکّ، اصلاح، حذف و اضافه‌ی مقاله‌ها آزاد است. مقاله‌های وارده، باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.

مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود. استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر با ذکر دقیق ماخذ بلامانع است.

نشانی دفتر مجلّه: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله: ۹ـ ۸۸۸۲۱۱۶۰ داخلی ۳۷۰
تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ ـ ۷۷۳۳۵۱۱۰

یادداشت سردبیر

اگر بخواهید به کتابفروشی هایی که کتاب های کمک درسی و کمک‌آموزشی می‌فروشند بروید و برای درس یا درس های ریاضی خود کتاب تهیّه کنید، چه ملاک هایی برای انتخاب دارید؟ به نظر شما یک کتاب کمک درسیِ خوب چه ویژگی هایی باید داشته باشد؟ آیا اگر تمام مسائل کتاب درسی را حل کرده باشد، برای استفاده مناسب است؟ و اگر مطالب خارج از کتاب درسی را نیز شامل شود، آیا آن را باید نشانه ی قدرت و توان نویسنده دانست یا نشانه ی ضعف او؟

واقعیت این است که شما وقتی می توانید یک کتاب کمک درسی خوب انتخاب و از آن استفاده کنید که:

۱ـ شناخت و تسلط کافی روی مطالب، اهداف و روش ارائه ی مطالب داشته باشید.

۲ـ از یک نفر کارشناس که کتاب درسی شما را خوب بشناسد و با اهداف آموزشی آن (برنامه ی درسی کتاب مورد نظر) آشنا باشد، کمک بگیرید.

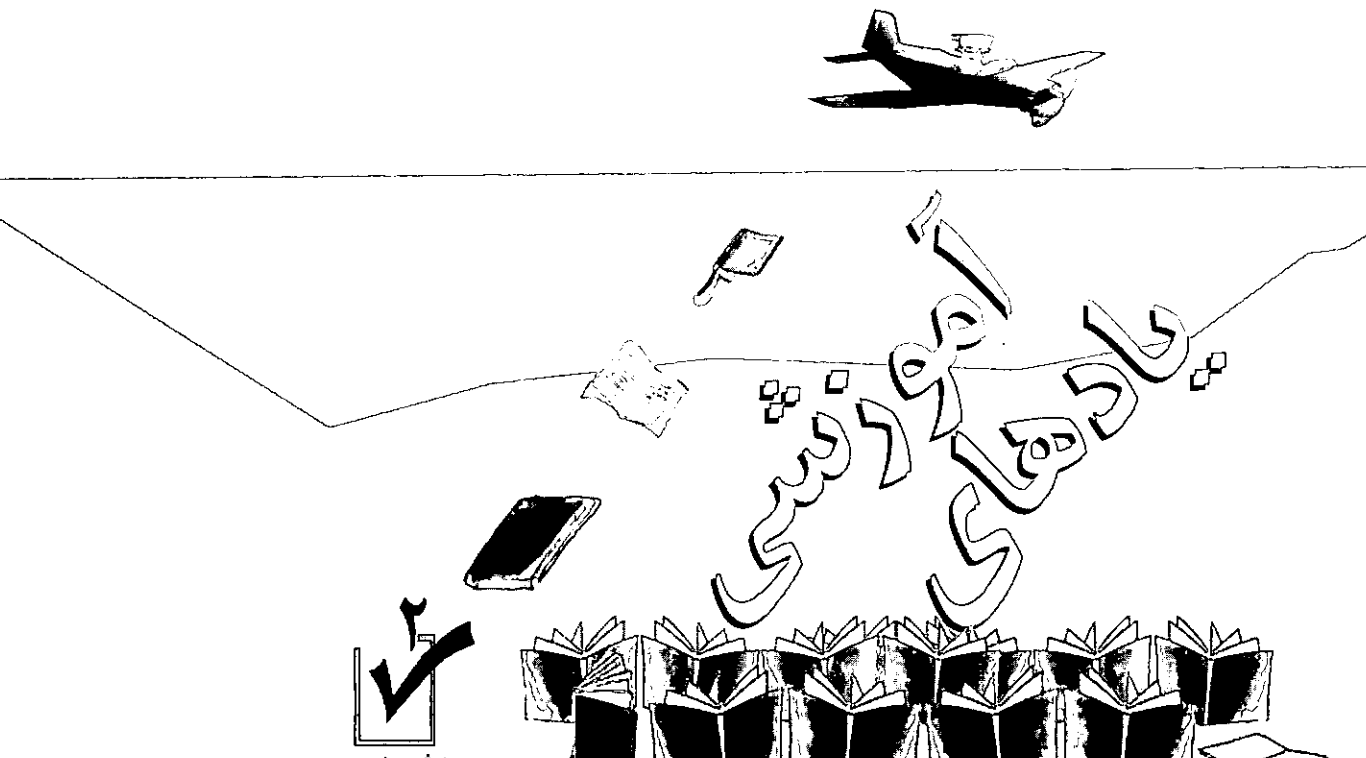
۳ـ یک مرکز معتبر که با همه ی موارد ذکر شده آشنایی دارد، اجازه ی نشر آن کتاب را صادر و یا آن را تأیید کرده باشد.

مورد (۱) عملاً برای شما آن هم در ابتدای سال تحصیلی امکان پذیر نیست؛ در مورد (۲) نیز شاید چنین کارشناسی در دسترس شما نباشد. پس فقط راه سوم باقی می ماند، راهی که تا ۱۵ سال پیش نیز به آن عمل می شد، ولی متأسفانه در حال حاضر و در حدود ۱۵ سال است که هیچ ارگانی از آموزش و پرورش مسؤولیت چنین امر مهم و سرنوشت سازی را به طور رسمی به عهده نگرفته است.

دانش‌آموز عزیز، خوب است بدانید که برای تألیف یک کتاب درسی، در مرحله ی اول جلسات بسیار زیادی در دفتر برنامه ریزی و تألیف سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی برگزار می شود و نیروهایی متخصص (اعضای شورای برنامه ریزی) روی آن کار می کنند و رئوس مطالب، شامل فهرستِ مباحث، فصل ها و بخش های کتاب را تهیه کرده و در اختیار مؤلف یا مؤلفان قرار می دهند. آنگاه مؤلفان با صرف وقت و انرژی فراوان اقدام به تألیف می نمایند. تازه بعد از تألیف، کتاب باید مرحله یا مراحل ویراستاری علمی و ادبی را بگذراند تا برای چاپ آماده شود. طی مراحل چاپ نیز مشکلات خاص خود را دارد که بماند!

در کتاب های درسی تمرین ها به گونه ای هدفمند و در جهت اهدافِ آموزشیِ آن کتاب تدوین شده است، لذا دبیران محترم شما نیز با همین تمرین ها، که شما حل می کنید، پی به میزان آموزش خود می برند. شما نیز از همین طریق میزان درک و یادگیری خود را درخواهید یافت. متأسفانه بسیاری از کتاب های کمک درسی موجود حل کاملِ این مسائل و تمرین ها را یک جا در اختیار دانش‌آموزان گذاشته (تازه، درست یا غلط این حل ها جای بحث دارد) و همه ی زحمات، هزینه ها و انرژی ها را دفعتاً بر باد می دهند! یا مطالبی را به عنوان مطالب اضافی و خارج از کتاب درسی و به بهانه ی یک تست در کنکور، ارائه می کنند که هیچ ربطی به درس ندارد و گاهی حتی در خلافِ جهتِ اهداف آموزشی کتاب درسی است.

به هر صورت، دانش‌آموز عزیز، سعی کنید در انتخاب کتاب کمک درسی خوب حتماً از دبیران خودتان و افراد آگاه به مسائل آموزشی و برنامه ی درسی کتاب مورد نظر کمک گرفته و از ناشران معتبر و حتی‌الامکان وابسته به آموزش و پرورش کتاب های مورد نیاز خود را تهیه نمایید تا خدای ناکرده از چاهی به چاهی دیگر نیفتید! در این زمینه می توانید با ما نیز مشورت کنید.



یادهای آموزشی ۲

پرویز شهریاری

آلبرت اینشتین (۱۹۵۵ـ ۱۸۷۹)، فیزیکدان مشهور آلمانی و برنده‌ی جایزه‌ی نوبل در فیزیک سال ۱۹۲۱، به همراه همکار خود اینفلد، عضو فرهنگستان علوم لهستان (از سال ۱۹۵۲)، کتابی دارد به نام «سرگذشت پیشرفت فیزیک» که در آن می‌نویسد: «خوانندگان داستان‌های پلیسی خوب می‌دانند که اگر نشانه‌ی نادرست و ساختگی، جای نشانه‌ی حقیقی را بگیرد، پی بردن به رازها، تا چه اندازه عقب می‌افتد. . . نتیجه‌گیری‌های الهامی که نتیجه‌ای بدون واسطه از مشاهده‌اند، همیشه با حقیقت سازگار نیستند؛ زیرا برخی وقت‌ها، برگه‌های دروغین و گمراه‌کننده‌ای را می‌سازند. . . در بهترین داستان‌ها نیز ممکن است، آشکارترین نشانه سبب پیدایش گمراه‌ترین احتمال شود. هنگام جست‌وجو برای درک قانون‌های طبیعت (و جامعه)، تغییرهایی که از روشن‌ترین حدس‌های الهامی نتیجه می‌شوند، اغلب نادرست‌ترین آن‌ها هستند.»

بازار کتاب خراب است و حتی می‌توان گفت بسیار خراب است. شمارگان کتاب تا ۵۰۰ و هزار نسخه پائین آمده است و همین شمارگان اندک هم، در قفسه‌های کتابخانه‌ها خاک می‌خورد.

می‌گویند مردم از کتاب خیری ندیده‌اند و به همین مناسبت، از آن فاصله گرفته‌اند. می‌گویند تنها کتاب‌های نفیس و پر نقش و نگار خریدار اندکی دارند، آن هم برای زینت دادن کتابخانه‌های شخصی نوکیسه‌هایی که ادای «اشراف» را درمی‌آورند و کتاب‌های پرقیمت را در قفسه‌های ساخت ایتالیای سالن پذیرایی خود جا می‌دهند؛ بی‌آن‌که آن‌ها را یک‌بار هم ورق‌زده باشند. و این، رسم تازه‌ای نیست. از زمانی که به یاد دارم، کتابخانه‌های شخصی و قفسه‌های سالن‌های پذیرایی خانه‌های اشرافی، وسیله‌ای برای خودنمایی و فضل‌فروشی بوده است.

بی‌تردید در سرگذشت‌ها خوانده‌اید که سرمایه‌داران و اشراف انگلیسی و فرانسوی سده‌ی نوزدهم (و شاید بازمانده‌های سنتی آن‌ها تا به امروز) به کتاب مانند «اشیای عتیقه» می‌نگریستند و به آنان، نه برای نوشته‌هایش، بلکه برای اعتباری که به صاحبش می‌بخشد و در ضمن وسیله‌ای برای اندوختن سرمایه می‌شود، علاقه داشتند...

سال‌ها پیش به سراغ زنده‌یاد احمدی در «کتاب‌فروشی اندیشه» رفته بودم. او از قاضی‌های شریف و درستکار بود و دوران بازنشستگی خود را به عنوان فروشنده‌ی کتاب می‌گذراند... همیشه می‌توانست شنونده را با یادهای تلخ و شیرین جالبی که از دادگستری داشت، مجذوب خود کند و باشرح گرفتاری‌های کسانی که ناخواسته به دام پرونده‌های «قانونی» افتاده بودند، در واقع گوشه‌ای از تاریخ مردم این سرزمین را باز گوید ...

اتومبیلی بانشانه‌ی «بنز» جلوی کتاب‌فروشی ترمز کرد. راننده پیاده شد، در عقب اتومبیل را باز کرد و مردی چهارشانه و بلند قامت، با سبیلی سپید و سیاه و کم‌پشت، ولی آویزان، با لباسی نیمه رسمی از آن پیاده شد.

عصای پاریسی در دست و «شاپوی» قهوه‌ای با لبه‌ای نه چندان بلند و اندکی به بالا برگشته بر سر داشت... با چهره‌ای اخم‌آلود (و شاید هم همراه با تفکر) وارد مغازه شد و بدون مقدمه گفت: «آقا من دو متر و نیم کتاب ۴۰ سانتی می‌خواهم، با جلد طلاکوب و کاغذ

اعلا. »

کارتی جلو زنده‌یاد احمدی گذاشت و همان‌طور که به آرامی برمی‌گشت تا بیرون برود، گفت: «قیمت کتاب‌ها را تلفنی به من اطلاع دهید. راننده‌ی من چک آن را برای شما می‌آورد و کتاب‌ها را تحویل می‌گیرد...»

من شگفت‌زده به این گفت‌وگوی غیرعادی گوش می‌دادم. زنده‌یاد احمدی که متوجه حیرت من شده بود، توضیح داد: «این آقا از کارچاق‌کن‌های بزرگ است... در واقع، کارش کلاه‌برداری یا به زبان ساده‌تر دزدی است. خانه‌ی تازه‌ای ساخته و بخشی از سالن پذیرایی را با قفسه‌هایی برای نمایش وسیله‌های قیمتی و عتیقه پر کرده است. دو سه طبقه را هم برای پر کردن کتاب در نظر گرفته است. این طبقه‌ها ارتفاعی به اندازه‌ی چهل سانتی‌متر و روی هم، طولی به اندازه‌ی دو مترونیم دارد...»

ـ خب، شما...

ـ من به انبار می‌روم و کتاب‌های خوش چاپ و خوش جلد را جدا می‌کنم و در جعبه‌ای جا می‌دهم تا راننده‌ی او آن‌ها را ببرد.

ـ چه کتاب‌هایی؟

ـ مهم نیست که کتاب مربوط به ریاضیات باشد یا فال‌بینی و کف‌بینی. تنها باید زیبا باشند و تا آن‌جا که ممکن است، همراه با عکس‌های رنگی. این آقا دکور می‌خواهد نه کتاب...

و هنوز این نمایش ادامه دارد، بازیگران عوض می‌شوند، ولی نمایش تغییر نمی‌کند.

با وجود این، مطلب به این سادگی نیست. خودنمایی آدم‌های پولدار، چه نوکیسه باشند و چه کهنه‌کیسه، همیشه بوده است وکسی آن‌ها را کتابخوان به شمار نیاورده است.

چه کسانی کتاب می‌خوانند؟ اگر از کتاب‌های درسی و کمک درسی و به ویژه کتاب‌های تستی که نیاز عبور از هفت خان «کنکور» را برآورده می‌کنند بگذریم، کتاب را باید نزد علاقه‌مند به آن پیدا کرد و این کسی است که صاحب فرهنگ است یا می‌خواهد با فرهنگ شود. چنین کسی زندگی را دوست دارد و در آرزوی اعتلای فرهنگ وتمدن سرزمین خود (و تنها سرزمین خود) می‌سوزد، غم ناراستی‌ها و زشتی‌های جهان امروز قلب او را می‌فشارد و... چنین انسانی، نه سرمایه‌ای دارد و نه می‌تواند راهی «میان‌بر» برای سرمایه‌اندوزی پیدا کند.

به‌ویژه در شرایط اقتصادی امروز ایران، کارمندان دولت، افسران و کارمندان سازمان‌های نظامی و انتظامی، معلمان و استادان دانشگاه و کارمندان علمی، پژوهشگران و مهندسان، دانش‌آموزان و دانشجویان و ... یعنی همه‌ی کسانی که به ناچار با درآمد ثابت و ناچیز خود زندگی می‌کنند، کتاب به نوعی کالای لوکس درجه‌ی دوم برای آن‌ها تبدیل شده است. خانواده ناچار است در آغاز به ضروری‌ترین هزینه‌هایی بپردازد که برای زنده ماندن لازم هستند و سپس، اگر چیزی باقی ماند (که به‌ندرت پیش می‌آید)، صرف پیشرفت دانش و فرهنگ اعضای خود کند.

اگر بخواهیم مسأله‌ی مربوط به عدم تعادل درآمد و هزینه‌ی خانواده‌های با فرهنگ و کتابخوان را بررسی کنیم، به نتیجه‌ای اندوه‌بار می‌رسیم که ریشه‌ی بیش‌تر درماندگی‌های اجتماعی ماست؛ ولی جای آن در این‌جا نیست و به نیروی تحلیل جامعه‌شناسان و اقتصاددانان نیاز دارد.

توسعه‌ی اقتصادی و پیشرفت اجتماعی، بدون گسترش فرهنگ ممکن نیست و به همین مناسبت در کشورهای توسعه یافته با شیوه‌های متفاوت به آن یاری می‌رسانند. سرزمین ما، نه تنها از نظر مواد اولیه و گوناگون آب و هوا، پرنعمت و کم‌نظیر است، که از نظر استعداد و تلاش مردم هم، برای توسعه‌ی تند اقتصادی، آمادگی کامل دارد. ولی باید از راهی رفت که این نعمت‌ها و این استعدادها ضایع نشوند و در مسیر درستی قرار گیرند. و این، بدون گسترش سریع فرهنگ و کتابخوانی ممکن نیست.

یکی از شرایط گسترش فرهنگ، وجود کتاب و نشریه و در کنار آن کتابخانه‌های عمومی است که دولت باید نقش شایسته‌ای در این زمینه به عهده بگیرد. دولت باید همراه با توسعه‌ی کتابخانه‌های عمومی و کتابخانه‌های مدرسه‌ها و دانشگاه‌ها، راهی جدی و عاجل برای

کمک به ناشران آزاد پیداکند و باحمایت از آن‌ها، سقوط فرهنگ را مانع شود. هنوز کتاب‌های چاپ شده در پیچ و خم‌های کارهای اداری گاه خیلی طولانی معطل می‌شوند. گرچه این مانع‌ها به خودی خود بسیار ترمزکننده‌اند و گاه به عاملی «ضد فرهنگی» تبدیل می‌شود، ولی تنها از میان برداشتن آن‌ها هم، دشواری را حل نمی‌کند. بدون هیچ اغراقی باید گفت که ناشران آزاد، اگر از استثناها بگذریم، با گذشت‌ترین صاحبان حرفه‌ها هستند، زیرا در شرایطی که با اندک «هوشیاری» می‌توان سرمایه و توان خود را در راه‌هایی به کار انداخت که سودهایی کلان و خرد صددرصد داشته باشد، مسیری را ادامه می‌دهند که یا ضرر دارند یا سوی بسیار اندک.

ناشران آزاد، مردمانی عاشقند؛ عاشق مردم و فرهنگ و دانش سرزمین خود. در راه توسعه‌ی اقتصادی، بدون یاری این دوستداران دانش و فرهنگ، در شرایط اجتماعی امروز، نمی‌توان موفق شد. باید راه و روش جدی برای یاری به آن‌ها و در نتیجه، یاری به خانواده‌های کتابخوان پیدا کرد. هر پولی در این راه هزینه شود، سرانجام چند ده برابر خود را به جامعه باز می‌گرداند. همیشه باید به یاد داشته باشیم، بدون کتاب و نشریه و کتابخوان، هیچ انتظاری در جهت توسعه‌ی فرهنگی و در نتیجه، توسعه‌ی اقتصادی نمی‌توان داشت.

در ابتدای مقاله، جمله‌ای به نقل از اینشتین و اینفلد آوردیم که به زبان ساده می‌گفت: «باید از نشانه‌ی نادرست و ساختگی به جای نشانه‌ی حقیقی پرهیز کرد تا آدمی را گمراه نکند». آنچه تا این جا آمد نادرست نبود، ولی نشانه‌هایی فرعی بود برای این که به نشانه‌ی درست و واقعی برسیم. باید درباره‌ی کتاب و کتابخوان، دست روی مسأله‌ی اساسی یعنی «کنکور» بگذاریم که سال‌هاست به ویران کردن دانش کشور ما مشغول است. اگر راهی عاجل برای آن پیدا نکنیم، به کتاب و کتابخوان هم نمی‌توانیم هیچ امیدی داشته باشیم.

ذات و اهمیت کنکور چنان است که حتی در بهترین شکل خود، نمی‌تواند بهترین‌ها را انتخاب کند. انسان موجودی پیچیده است و تجربه نشان داده است که نتیجه‌ی آزمایش نمی‌تواند استعدادها و توانایی‌ها را طبقه‌بندی کند؛ به ویژه «آزمایش تستی» به هیچ وجه قدرت منعکس کردن عمق سواد و درک دانش‌آموزان را ندارد. کم‌ترین عارضه‌ی جسمی یا روانی در روزها و ساعت‌های نزدیک به «مسابقه» می‌تواند، همه‌ی امیدها را بر باد دهد و سرنوشت‌ها را دگرگون کند.

دانش‌آموز علاقه‌مند از همان سال‌هایی که گام به دبیرستان و حتی دوره‌ی راهنمایی تحصیلی می‌گذارد، نگران عبور از «خوان کنکور» است و در سال‌هایی که باید بیش‌ترین کتاب را بخواند، به تست زدن مشغول می‌شود. خانواده‌ی او هم، به هر دری می‌زند که بتواند فرزندش را برای ورود به دانشگاه آماده کند.

هنوز بازار کار و فعالیت اجتماعی چنان نیست که بتواند جوان دیپلمه را به راه دیگری، جز ادامه‌ی تحصیل، تشویق کند و جوان دبیرستانی احساس می‌کند، اگر از تحصیل باز بماند، قافیه را می‌بازد، در صحنه‌ی زندگی از قافله عقب می‌ماند و درهای پیشرفت به روی او بسته می‌شوند. از این هم می‌گذریم که به فرض قبولی در یک رشته‌ی دانشگاهی، تنها سرگردانی او چند سال عقب‌تر می‌رود.

این وضع در کار معلم و دانش‌آموز در کلاس درس اثری عمیق، و به اعتقاد من، اثری مخرب گذاشته است. همین که دبیری، به ویژه در سال‌های آخر دبیرستان، بخواهد مطلبی را بشکافد و عمیق‌تر درباره‌ی آن صحبت کند، یا اگر معلمی بخواهد، برای نمونه، در درس ریاضیات به مفهوم‌ها و ریشه‌های اصلی بپردازد، دانش‌آموزان را با تاریخ و یا کاربرد ریاضیات یا ماهیت انسانی و قانونمند ریاضیات آشنا کند، تشویش و نگرانی سراپای دانش‌آموزان را فرا می‌گیرد که: «این‌ها چه کمکی به موقعیت من در کنکور می‌کنند؟»

دانش‌آموز در بازار کتاب در جست‌وجوی کتاب یا نشریه‌ی علمی نیست، «تست» می‌خواهد و «راهنمای کنکور». در کلاس هم از دبیر خود توقع «پلی‌کپی» و «تست» دارد، چرا که می‌خواهد راهی برای شکستن سد کنکور پیدا کند. ماهیت درس‌ها و درک عمیق آن‌ها ربطی به او ندارد.

... و همین نیاز مبرم دانش‌آموز است که «کلاس‌های کنکور و تقویتی» را رونق داده است، بازاری گرم برای «درس خصوصی» و «معلم خصوصی» پیدا شده است و حتی این جا و آن جا «دفتر»هایی باز شده‌اند که در برابر «حق‌الزحمه»، قبولی او را تضمین می‌کنند... و همه‌ی این‌ها، نه فراگیری عمیق ریاضیات، بلکه شیوه‌ی تست زدن را به دانش‌آموز می‌آموزند. مدرسه‌ها، از گونه‌های متفاوتی وجود دارند که تنها دانش‌آموزانی را می‌پذیرند که معدل نمره‌های آن‌ها بالای ۱۹ باشد و در جریان سال‌های تحصیلی، آن‌ها را با «پلی‌کپی» و «تست» بمباران می‌کنند تا درصد قبولی شاگردان خود رادر کنکور بالا ببرد و راهی برای تبلیغ و جلب دیگران و تأمین «سرمایه‌ی» آینده‌ی خود باز کنند.

این وضع می‌تواند تمام آینده‌ی دانش کشور ما را دچار تزلزل کند و به خطر بیندازد. از این راه، نه دانشمند بلکه جوانانی با روح مضطرب و جانی آشفته خواهیم داشت که تنها یاد گرفته‌اند، چگونه از رشته‌های در هم‌بافی که با کارتونک‌های تستی به هم بافته شده‌اند، خود رانجات دهند.

برای حل این مسأله باید، چاره‌ای اندیشید؛ مسأله‌ای خطرناک و در عین حال بغرنج و درهم تنیده. نباید دست روی دست گذاشت، چرا که به سرنوشت دانش کشور ما، پژوهشگران، و همه‌ی برنامه‌های زیربنایی سرزمین مربوط می‌شود...

اشاره:

در قسمت اول معادله‌ی درجه دوم، پس از بررسی حالت‌های ناقص معادله و اثبات فرمول‌های حل معادله، چند نکته‌ی مفید با ذکر مثال‌های متنوع مطرح شدند. اینک قسمت دوم معادله درجه‌ی دوم ارائه می‌شود.

۲

پرویز قندهاری

تجزیه و تعیین علامت سه‌جمله‌ای درجه دوم ax^2+bx+c

فرض می‌کنیم $f(x)=ax^2+bx+c$، ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ را صفرهای $f(x)$ می‌نامیم. همچنین، Δ یا مبیّن معادله‌ی درجه دوم را Δ یا مبیّن $f(x)$ می‌نامیم.

حالت اول: اگر Δ مثبت باشد، آن‌گاه معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ دو ریشه‌ی حقیقی متمایز x' و x'' دارد (فرض می‌کنیم: $x'<x''$). می‌نویسیم:

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]$$

$$f(x)=a\left[x^2-(-\frac{b}{a})x+\frac{c}{a}\right]$$

داشتیم: $x'+x''=-\frac{b}{a}$ و $x'.x''=\frac{c}{a}$. پس می‌توان نوشت:

$$f(x)=a\left[x^2-(x'+x'')x+x'x''\right]$$

یا $f(x)=a(x-x')(x-x'')$

این عمل را «تجزیه به حاصل‌ضرب دو عامل درجه اول» گوییم.

مثال: حدود m را چنان بیابید که سه‌جمله‌ای $mx^2-2(m-3)x+(m+2)$ را بتوان به صورت حاصل‌ضرب دو عامل درجه اول نوشت.

حل: باید $\Delta=b^2-4ac>0$ یا $\Delta'=b'^2-ac>0$

$$\Delta'=b'^2-ac>0\Rightarrow\Delta'=(m-3)^2-m(m+2)^2>0$$
$$\Rightarrow m^2-6m+9-m^2-2m>0\Rightarrow -8m+9>0$$
$$\Rightarrow -8m>-9\Rightarrow m<\frac{9}{8}$$

حالت دوم: اگر (Δ) برابر صفر باشد، می‌دانیم در این صورت معادله دو ریشه‌ی حقیقی مساوی یا یک ریشه‌ی حقیقی مضاعف دارد: $x'=x''=-\frac{b}{2a}$

در حالت اول که Δ مثبت بود، داشتیم:

$$f(x)=a(x-x')(x-x'')$$

اکنون $x'=x''=-\frac{b}{2a}$ پس:

$$f(x)=a(x-x')^2=a(x-x'')^2=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

اگر $a>0$ آن‌گاه عبارت بالا را مربع کامل گویند.

مثال: به ازای چه مقدارهای m، سه‌جمله‌ای $4x^2-2(m-4)x+(m-1)$ را می‌توان به صورت مربع کامل نوشت.

حل: باید Δ یا Δ' را مساوی صفر قرار داد.

$$\Delta'=b'^2-ac=0\Rightarrow (m-4)^2-4(m-1)=0$$

$$\Rightarrow m^2-8m+16-4m+4=0\Rightarrow m^2-12m+20=0$$

$$m=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{1}=6\pm\sqrt{16}=6\pm 4$$

$$\Rightarrow m=10 \text{ یا } 2$$

حالت سوم: اگر $\Delta<0$، آن‌گاه معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ ریشه‌های حقیقی ندارد. در این صورت می‌نویسیم:

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]$$

$$f(x)=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$$

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]$$

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]\quad ;\ (4ac-b^2>0)$$

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)^2\right]$$

عبارت داخل کروشه را مجموع مربعات دو عبارت گویند.

مثال: حدود m را چنان بیابید که بتوان سه‌جمله‌ای $2\sqrt{2}x^2-4x+(m-2)$ را به صورت مجموع مربعات دو عبارت نوشت.

حل: باید Δ یا Δ' منفی باشد.

$$\Delta'=b'^2-ac<0\Rightarrow 4-2\sqrt{2}(m-2)<0$$

$$4-2\sqrt{2}\,m+4\sqrt{2}<0\Rightarrow 2\sqrt{2}\,m>4\sqrt{2}+4$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2}\,m>4(\sqrt{2}+1)\Rightarrow \sqrt{2}\,m>2(\sqrt{2}+1)$$

$$\Rightarrow m>\frac{2(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}}\Rightarrow m>\frac{2(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\Rightarrow m>2+\sqrt{2}$$

تعیین علامت سه‌جمله‌ای درجه دوم ax^2+bx+c

حالت اول: اگر $\Delta>0$، آن‌گاه:

$$f(x)=a(x-x')(x-x'')$$

فرض می‌کنیم: $x'<x''$

$$a(x-x')(x-x'')=0\Rightarrow (ax-ax')(x-x'')=0$$

$$\begin{cases}x_1=x'\\ x_2=x''\end{cases}$$

x	$-\infty$ تا x'	x' تا x''	x'' تا $+\infty$
$ax-ax'$	مخالف علامت a	موافق علامت a	موافق علامت a
$x-x''$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	موافق علامت a	مخالف علامت a	موافق علامت a

نتیجه: اگر در سه‌جمله‌ای درجه دوم ax^2+bx+c، $\Delta>0$، آن‌گاه علامت آن بین دو ریشه‌ی مخالف علامت a و علامت آن در خارج دو ریشه موافق علامت a است.

تذکر: نامعادله‌ی درجه دوم در حالت کلی با تعیین علامت حل می‌شود.

مثال۱. اگر $n\in N$، آن‌گاه نامعادله‌ی $2n^2-27n+25<0$ چند جواب دارد؟

حل:

$$f(n)=2n^2-27n+25=0$$

$$\Rightarrow n=\frac{27\pm\sqrt{27^2-200}}{4}=\frac{27\pm 23}{4}=1\ ,\ \frac{25}{2}$$

n	$-\infty$ تا 1	1 تا $\frac{25}{2}$	$\frac{25}{2}$ تا $+\infty$
$f(n)$	$+$	$-$	$+$

$$f(x)<0\Rightarrow 1<n<\frac{25}{2} \text{ و } n\in N\Rightarrow n=2,3,4,\dots 12$$

تعداد جواب‌ها $=(12-2)+1=11$

مثال ۲. نامعادله‌ی $۰<\frac{۲x^۲+۷x+۵}{۴-x^۲}$ را حل کنید.

حل: باید صورت و مخرج کسر را تعیین علامت کرد:

$$۲x^۲+۷x+۵=۰\Rightarrow x=-۱\,,\,-\frac{۵}{۲}$$

$$۴-x^۲=۰\Rightarrow x=\pm۲$$

x	$-\infty$ تا $-\frac{۵}{۲}$	$-\frac{۵}{۲}$ تا -۲	-۲ تا -۱	-۱ تا ۲	۲ تا $+\infty$
$۲x^۲+۷x+۵$	+	−	−	+	+
$۴-x^۲$	−	−	+	+	−
$P(x)$	−	+	−	+	−

$$-\frac{۵}{۲}<x<-۲ \qquad -۱<x<۲$$

جواب این نامعادله $(-\frac{۵}{۲},-۲)\cup(-۱,۲)$ است. در ضمن، کسر $P(x)$ به ازای ریشه‌های مخرج یعنی $x=۲$ و $x=-۲$ تعریف نشده است.

حالت دوم: اگر $\Delta=۰$، آن‌گاه: $f(x)=a(x-x')^۲$

عبارت $(x-x')^۲$، به ازای $x=x'$ صفر است و در بقیه‌ی موارد مثبت است. پس $a(x-x')^۲$ به ازای $x=x'$ صفر است و در بقیه موارد موافق علامت a است.

x	$-\infty$ تا $x'=x''$	$x'=x''$ تا $+\infty$
$f(x)$	موافق علامت a	موافق علامت a

برای مثال، اگر $f(x)=۲(x-۷)^۲$، آن‌گاه $f(x)$ به ازای $x=۷$، صفر است و به ازای بقیه مقادیر حقیقی، $f(x)$ مثبت است. همچنین، اگر $g(x)=-۴(x-۱)^۲$، آن‌گاه $g(x)$ به ازای $x=۱$ صفر است و به ازای بقیه مقادیر حقیقی، $g(x)$ منفی است.

حالت سوم: اگر $\Delta<۰$ آن‌گاه داریم:

$$f(x)=a\left[(x+\frac{b}{۲a})^۲+(\frac{\sqrt{۴ac-b^۲}}{۲a})^۲\right]$$

عبارت داخل کروشه همواره مثبت است. پس علامت $f(x)$ همواره موافق علامت a است.

تذکر مهم: سه‌جمله‌ای درجه دوم $ax^۲+bx+c$ وقتی همواره مثبت است که $\Delta<۰$ و $a>۰$. و این سه‌جمله‌ای وقتی همواره منفی است که $\Delta<۰$ و $a<۰$.

مثال ۱. به ازای چه مقدارهای m، سه‌جمله‌ای $(m-۱)x^۲-۲mx+(m-۲)$ همواره منفی است؟

حل: باید Δ یا Δ' منفی و a هم منفی باشد.

$$\begin{cases}\Delta'=b'^۲-ac<۰\\ a<۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m^۲-(m-۱)(m-۲)<۰\\ m-۱<۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m^۲-m^۲+۳m-۲<۰\\ m-۱<۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۳m-۲<۰\\ m-۱<۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m<\frac{۲}{۳}\\ m<۱\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک جواب‌ها}}m<\frac{۲}{۳}$$

مثال ۲. به ازای چه مقدارهای m، سه‌جمله‌ای $(m+۲)x^۲-۲mx+(m+۴)$ همواره مثبت است؟

حل: باید Δ یا Δ' منفی و a مثبت باشد.

$$\begin{cases}\Delta'=b'^۲-ac<۰\\ a>۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m^۲-(m+۲)(m+۴)<۰\\ m+۲>۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m^۲-m^۲-۶m-۸<۰\\ m+۲>۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-۶m-۸<۰\\ m+۲>۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۶m+۸>۰\\ m+۲>۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m>-\frac{۴}{۳}\\ m>-۲\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک جواب‌ها}}m>-\frac{۴}{۳}$$

بحث در تعداد و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$

حالت اول: اگر (Δ) مثبت باشد، در این صورت معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.

۱) حاصل‌ضرب دو ریشه $=x'.x''=\frac{c}{a}>۰\Rightarrow$ هر دو ریشه‌ی معادله هم‌علامت هستند.

۲) حاصل‌ضرب دو ریشه $=x'.x''=\frac{c}{a}<۰\Rightarrow$ دو ریشه مختلف‌العلامه‌اند.

۳) حاصل ضرب دو ریشه $= x'.x'' = \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow$
یک ریشه صفر و ریشه‌ی دیگر $(-\frac{b}{a})$ است.

بنابراین داریم:

$$1)\ \frac{c}{a}>0 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a}>0 \Rightarrow 0<x'<x'' \\ -\frac{b}{a}<0 \Rightarrow x'<x''<0 \end{cases}$$

(اولی) هر دو ریشه مثبت هستند. (دومی) هر دو ریشه منفی هستند.

$$2)\ \frac{c}{a}<0 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a}>0 \Rightarrow \begin{cases} x'<0<x'' \\ |x''|>|x'| \end{cases} \\ -\frac{b}{a}<0 \Rightarrow \begin{cases} x'<0<x'' \\ |x'|>|x''| \end{cases} \\ -\frac{b}{a}=0 \Rightarrow x''=-x' \end{cases}$$

$$3)\ \frac{c}{a}=0 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a}>0 \Rightarrow x'=0<x'' \\ -\frac{b}{a}<0 \Rightarrow x'<0=x'' \end{cases}$$

حالت دوم: $\Delta'=0$ یا Δ درنتیجه $x'=x''=-\frac{b}{2a}$ که می‌گوییم، معادله‌ی دو ریشه‌ی حقیقی مساوی یا یک ریشه‌ی حقیقی مضاعف دارد. مقدار ریشه‌ی مضاعف برابر با $-\frac{b}{2a}$ است.

$$\begin{cases} -\frac{b}{a}>0 \Rightarrow -\frac{b}{2a}>0 \Rightarrow 0<x'=x'' \\ -\frac{b}{a}<0 \Rightarrow -\frac{b}{2a}<0 \Rightarrow x'=x''<0 \\ -\frac{b}{a}=0 \Rightarrow -\frac{b}{2a}=0 \Rightarrow x'=x''=0 \end{cases}$$

(به ترتیب) ریشه‌ی مضاعف مثبت است. ریشه مضاعف منفی است. ریشه مضاعف صفر است.

مسأله‌ی ۱. حدود m را چنان بیابید که هر دو ریشه‌ی معادله‌ی $2x^2-2mx+(m-4)=0$ مثبت باشند.

حل: براساس درس، برای این‌که هر دو ریشه‌ی این معادله مثبت باشند باید داشته باشیم:

$$\Delta'>0 \text{ ، } \frac{c}{a}>0 \text{ و } -\frac{b}{a}>0$$

$$\Delta'=b'^2-ac=m^2-2(m-4)>0 \Rightarrow m^2-2m+8>0$$

$\Delta'=m^2-2m+1+7=(m-1)^2+7>0$. Δ' همواره مثبت است.

$$\frac{c}{a}=\frac{m-4}{2}>0 \Rightarrow m-4>0 \Rightarrow m>4$$

$$-\frac{b}{a}>0 \Rightarrow \frac{2m}{2}>0 \Rightarrow m>0$$

$$\begin{cases} m>4 \\ m>0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک جواب‌ها}} m>4$$

مسأله‌ی ۲. حدود m را چنان بیابید که هر دو ریشه‌ی معادله‌ی $mx^2-2(m+1)x+(m-1)=0$ منفی باشند.

حل: باید $\Delta'>0$ و $\frac{c}{a}>0$ و $\frac{-b}{a}<0$

$$\Delta'=b'^2-ac>0 \Rightarrow (m+1)^2-m(m-1)>0 \Rightarrow$$

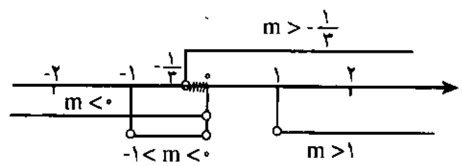
$$m^2+2m+1-m^2+m>0 \Rightarrow 3m+1>0 \Rightarrow m>-\frac{1}{3}$$

$\frac{c}{a}>0 \Rightarrow \frac{m-1}{m}>0 \Rightarrow m<0$ یا $m>1$

$$-\frac{b}{a}<0 \Rightarrow \frac{2(m+1)}{m}<0 \Rightarrow -1<m<0$$

$$\begin{cases} m>-\frac{1}{3} \\ m<0 \text{ یا } m>1 \xrightarrow{\text{اشتراک جواب‌ها}} -\frac{1}{3}<m<0 \\ -1<m<0 \end{cases}$$

در شکل زیر هم اشتراک جواب‌ها نشان داده شده است.



مسأله‌ی ۳. به ازای چه مقدارهای m، سه‌جمله‌ای $2x^2-2mx+(m+1)$ را می‌توان به صورت مجموع مربعات دو عبارت نوشت.

حل: باید $\Delta'<0$

$$\Delta'=b'^2-ac<0 \Rightarrow m^2-2(m+1)<0$$

$$\Rightarrow m^2-2m-2<0$$

این نامعادله با تعیین علامت حل می‌شود:

$$m^2-2m-2=0 \Rightarrow m=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{1+2}}{1}=1\pm\sqrt{3}$$

چون a در معادله‌ی $m^2-2m-2=0$ مثبت است، پس بین دو ریشه علامت منفی خواهد شد؛ یعنی:

$$1-\sqrt{3}<m<1+\sqrt{3}$$

منطق ریاضی ۴

حمیدرضا امیری

اشاره. در شماره‌ی قبل با قوانین بین گزاره‌ها و ترکیب‌های فصلی، عطفی، شرطی و دوشرطی آشنا شدیم، و با طرح و حل چند هم‌ارزی، کاربرد آن‌ها را در اثبات هم‌ارزی‌ها مشاهده کردیم. در این مقاله پس از اثبات چند هم‌ارزی مهم، به معرفی گزاره‌نماها و گزاره‌های سوری خواهیم پرداخت.

قرارداد: در منطق ریاضی، گزاره‌ی شرطیِ همیشه درست را «استلزام منطقی» می‌نامند.

مثال ۱. ثابت کنید، گزاره‌ی شرطی $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ یک استلزام منطقی است.

حل:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q \equiv [(\sim p \vee q) \wedge p] \Rightarrow q \equiv (q \wedge p) \Rightarrow q$$

$$\equiv (p \wedge q) \Rightarrow q \equiv \sim (p \wedge q) \vee q \equiv (\sim p \vee \sim q) \vee q$$

$$\equiv \sim p \vee (\sim q \vee q) \equiv \sim p \vee T \equiv T$$

مثال ۲. ثابت کنید:

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$$

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$$

$$\equiv [(\sim p \vee q) \wedge \sim q] \vee [(\sim p \vee q) \wedge p]$$

$$\equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge p) \equiv \sim (p \vee q) \vee (p \wedge q)$$

$$\equiv (p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$$

تمرین: ثابت کنید، ترکیب شرطی از چپ در تمام ترکیب‌ها توزیع‌پذیر است؛ یعنی:

I) $p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$

II) $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

III) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

IV) $p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$

مثال ۳. ثابت کنید: $(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

حل:

$$(p \vee q) \Rightarrow r \equiv \sim (p \vee q) \vee r \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee r$$

$$\equiv (\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee r) \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$$

تمرین: ثابت کنید:

$$(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$$

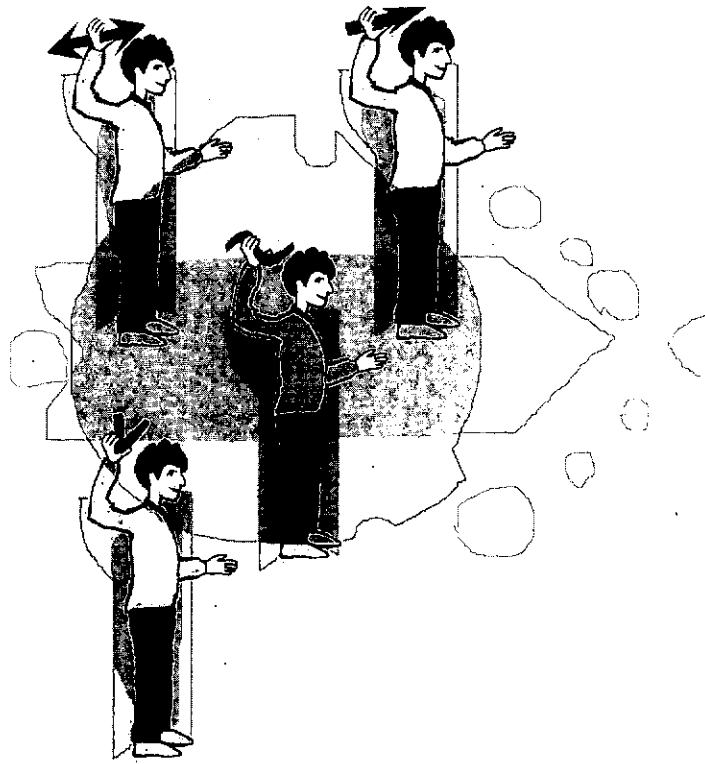
در این قسمت به تعریف گزاره‌نما و مطالب مربوط به دامنه‌ی متغیر و مجموعه‌ی جواب یک گزاره‌نما می‌پردازیم تا زمینه‌ای برای تعریف و معرفی سورها و گزاره‌های سوری فراهم شود.

تعریف گزاره‌نما: هر عبارت خبری که دارای یک یا چند متغیر باشد (به طوری که نتوانیم ارزش آن را تعیین کنیم)، گزاره‌نما نامیده می‌شود. مثلاً: «x عددی زوج است»، یا: «y عددی اول و z عددی منفی است»، هرکدام یک گزاره‌نما هستند.

سؤال: آیا عبارت $x^2 - 4 = 0$ گزاره‌نماست؟

جواب: بله، این عبارت گزاره‌نما است، زیرا عبارتی است خبری و دارای متغیر، و نمی‌توان ارزش آن را تعیین کرد. مثلاً اگر به جای x عدد ۲ یا (۲-) قرار دهیم، تساوی برقرار و گزاره‌نما به گزاره‌ی درست تبدیل می‌شود، ولی به ازای هر $x \neq \pm 2$ گزاره‌ای نادرست حاصل می‌شود.

تعریف دامنه‌ی متغیر گزاره‌نما: مجموعه‌ی مقادیری که مُجازند به جای متغیر یا متغیرهای گزاره‌نما قرار بگیرند و



گزاره‌نما را به گزاره (چه درست و چه نادرست) تبدیل کنند، دامنه‌ی متغیر گزاره‌نما نامیده می‌شوند.

مجموعه‌ی جواب گزاره‌نما: زیرمجموعه‌ای از دامنه متغیر که گزاره‌نما را به گزاره‌ی **درست** تبدیل می‌کند، مجموعه‌ی جواب گزاره‌نما نامیده می‌شود.

مثال: دامنه‌ی متغیر و مجموعه‌ی جواب را برای گزاره‌نماهای زیر به دست آورید:

I) x عددی فرد است.

II) z عددی طبیعی بین ۴ و ۷ است.

III) y عددی صحیح بین ۲ و ۳ است.

IV) k عددی بین ۱ و ۲ است.

V) $x^2 - 1 = 0$

VI) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

حل:

I) چون صفت زوج و فرد فقط برای اعداد صحیح قابل تعریف است، پس (حق نداریم یا مجاز نیستیم، به جای x عدد $\sqrt{2}$ و یا $\frac{1}{2}$ قرار دهیم):

Z = دامنه‌ی متغیر و $2Z+1$ = مجموعه جواب

II) وقتی به صراحت نوع متغیر بیان می‌شود، تعیین دامنه راحت است. در این قسمت چون قید شده، z عددی طبیعی است، پس:

$\mathbb{N}$ = دامنه‌ی متغیر و $\{5,6\}$ = مجموعه‌ی جواب

III) با توجه به توضیح قبل داریم:

Z = دامنه‌ی متغیر و $\varnothing$ = مجموعه‌ی جواب

IV) چون قیدی روی عدد k گذاشته نشده است، پس:

$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\} = (1,2)$ = مجموعه‌ی جواب و $\mathbb{R}$ = دامنه‌ی متغیر

V) در عبارت $x^2 - 1 = 0$، به جای x هر عدد حقیقی را می‌توان قرار داد؛ پس:

$\mathbb{R}$ = دامنه‌ی متغیر و $\{1,-1\}$ = مجموعه‌ی جواب

IV) باید عبارت $x^2 - 3x + 2$ را تعیین علامت کرد، پس:

$\mathbb{R}$ = دامنه متغیر و $(-\infty,1] \cup [2,+\infty)$ = مجموعه‌ی جواب

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$		$+$		$-$		$+$	

سورها

سورها نمادهایی هستند که برای بیان کمیت به کار می‌روند. اگر یک سور در ابتدای یک گزاره‌نما واقع شود، آن گزاره‌نما را به یک گزاره تبدیل می‌کند. به چنین گزاره‌ای «گزاره‌ی سوری» می‌گویند. سورها بر سه دسته‌اند:

سور عمومی: برای عمومیت و کلیت بخشیدن به کار

می‌رود. نماد آن به شکل $(\forall)$ است. گزاره‌ی سوری که با سور عمومی بیان شود، زمانی دارای ارزش درست است که دامنه‌ی متغیر و مجموعه‌ی جواب گزاره‌نمای آن با هم برابر باشند. این نماد را «به ازای هر»، «برای تمام مقادیر»، «همه‌ی» و «هر» می‌خوانیم.

سور وجودی: برای بیان وجود شیئی یا خاصیتی از این سور، از نماد $(\exists)$ استفاده می‌شود. گزاره‌ی سوری که با سور وجودی بیان شود، زمانی دارای ارزش درست است که مجموعه‌ی جواب گزاره‌نمای آن تهی نباشد. این نماد را «وجود دارد»، «به ازای بعضی مقادیر» و «عضوی هست» می‌خوانیم.

سور صفر: برای بیان نبود شیئی یا خاصیتی از این سور، از نماد $(\nexists)$ استفاده می‌شود. گزاره‌ی سوری که با سور صفر بیان شود، زمانی دارای ارزش درست است که مجموعه‌ی جواب گزاره‌نمای آن تهی باشد. این نماد را «وجود ندارد»، «به ازای هیچ مقدار» و «عضوی نیست» می‌خوانیم.

مثال: ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

الف) $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0$

ب) $\forall x \in \mathbb{N}; x + 1 > 1$

ج) $\exists x \in \mathbb{N}; x + 2 \le 3$

د) $\exists x \in \mathbb{R}; x^2 \le 0$

هـ) $\nexists x \in \mathbb{R}; x + 1 < 1$

و) $\nexists x \in \mathbb{Z}; x^2 - 2 = 0$

جواب:

الف) نادرست است، زیرا: $0 \in \mathbb{R}$ و $0^2 \not> 0$

ب) درست است، زیرا: $\mathbb{N}$ = دامنه و $\mathbb{N}$ = مجموعه‌ی جواب

ج) درست است، زیرا: $\{1\} \ne \varnothing$ = مجموعه‌ی جواب

د) درست است، زیرا: $\{0\} \ne \varnothing$ = مجموعه‌ی جواب

هـ) نادرست است، زیرا:

$\{x \in \mathbb{R} | x < 0\} \ne \varnothing$ = مجموعه‌ی جواب

و) درست است، زیرا: $\varnothing$ = مجموعه‌ی جواب

نقیض گزاره‌های سوری: گزاره‌های سوری $(\forall x, p(x))$ و $(\exists x, p(x))$ و $(\nexists x, p(x))$ را به ترتیب به صورت‌های (تمام xها خاصیت p دارند) و (xای است که خاصیت p دارد) و (وجود ندارد xای که خاصیت p داشته باشد) می‌خوانیم که برای نقیض کردن آن‌ها به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

الف) $\sim (\forall x; p(x)) \equiv (\exists x; \sim p(x))$

~ (تمام xها خاصیت p دارند) ≡ (xای هست که خاصیت p ندارد)

ب) $\sim (\exists x; p(x)) \equiv (\nexists x; p(x))$

~ (xای هست که خاصیت p دارد) ≡ (xای نیست که خاصیت p داشته باشد)

نکته: هر گزاره‌ی سوری عمومی را می‌توان با تغییراتی هم‌ارز با یک گزاره با سور صفر نوشت؛ به این صورت:

$(\forall x; p(x)) \equiv (\nexists x; \sim p(x))$

(تمام xها خاصیت p دارند) ≡ (xای نیست که خاصیت p نداشته باشد)

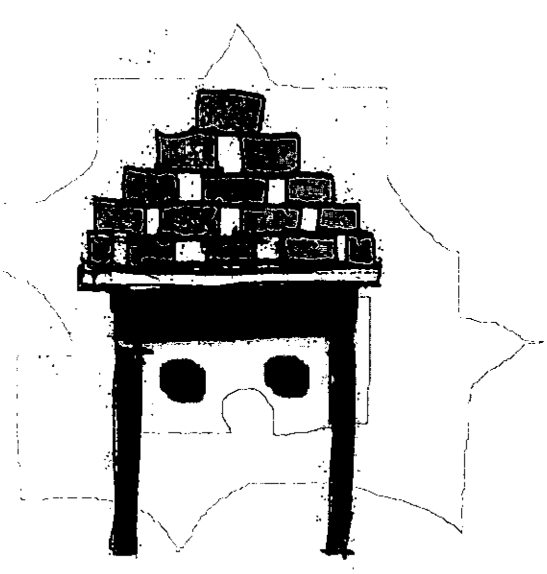
با توجه به نکته‌ی بالا و قسمت (ب) نتیجه می‌گیریم که:

$\sim (\exists x, p(x)) \equiv (\nexists x; p(x)) \equiv (\forall x; \sim p(x)) \Rightarrow$

$\sim (\exists x; p(x)) \equiv (\forall x; \sim p(x))$

ج) $\sim (\nexists x; p(x)) \equiv (\exists x; p(x))$

بنابراین، هرگاه بخواهیم برای نقیض کردن گزاره‌ی



سوری با سور عمومی از سور وجودی استفاده کنیم، یا برای نقیض کردن سور وجودی از سور عمومی استفاده کنیم، باید خاصیت بیان شده را نیز نقیض کنیم. ولی در تبدیل عمومی به صفر یا سور صفر به عمومی، با خاصیت بیان‌شده کاری نداریم.

نقیض گزاره‌های سوری با بیش از یک سور

الف) $\sim(\forall x \forall y; p(x,y)) \equiv (\exists x \exists y; \sim p(x,y))$

اثبات:

$$\sim[\forall x(\forall y; p(x,y))] \equiv \exists x \sim (\forall y; p(x,y)) \equiv (\exists x \exists y; \sim p(x,y))$$

ب) $\sim(\exists x \exists y; p(x,y)) \equiv (\forall x \forall y; \sim p(x,y))$

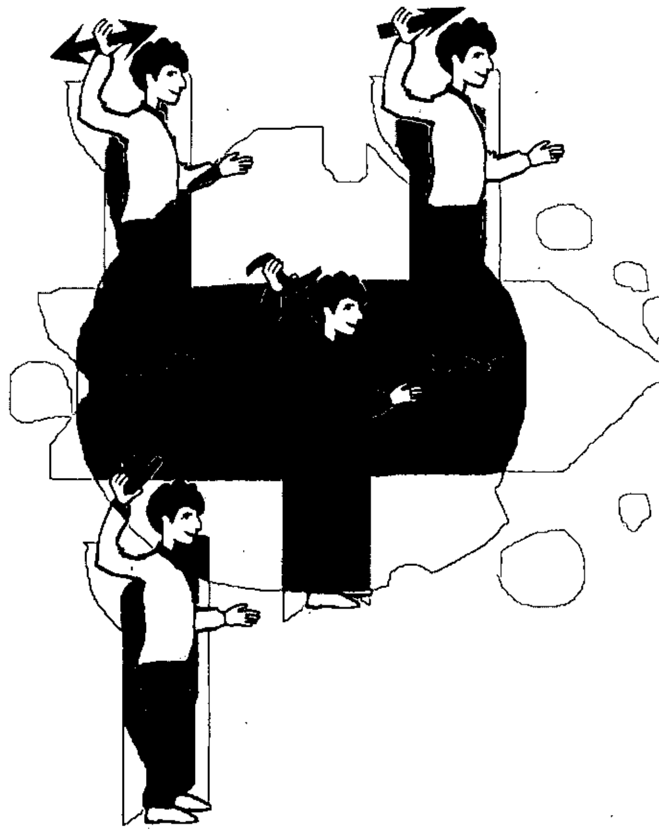
ج) $\sim(\forall x \exists y; p(x,y)) \equiv (\exists x \forall y; \sim p(x,y))$

د) $\sim(\exists x \forall y; p(x,y)) \equiv (\forall x \exists y; \sim p(x,y))$

مثال ۱. نقیض گزاره‌ی زیر کدام است؟

«$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R};\ x > y \Rightarrow y < x \le y+1$»

۱) $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R};\ x < y \Rightarrow y+1 < x \le y$



۲) $\forall x \in \mathbb{R},\ \nexists y \in \mathbb{R};\ (x > y) \vee x \le y \vee x > y+1$

۳) $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R};\ x > y+1$

۴) $\nexists x \in \mathbb{R};\ \exists y \in \mathbb{R},\ x > y \Rightarrow y < x \le y+1$

جواب: گزینه‌ی (۳) صحیح است، زیرا:

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

بنابراین:

$$\sim[x > y \Rightarrow y < x \le y+1] \equiv (x > y) \wedge [x \le y \vee x > y+1]$$

$$\equiv \underbrace{[(x > y \wedge x \le y)]}_{F} \vee [(x > y) \wedge x > y+1]$$

$$\equiv F \vee [x > y \wedge x > y+1] \equiv (x > y) \wedge (x > y+1) \equiv (x > y+1)$$

مثال ۲. نقیض گزاره‌ی زیر کدام است؟

«$\forall x \in \mathbb{R},\ \nexists y \in \mathbb{R};\ x = y \Rightarrow x^2 = y^2$»

۱) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R};\ x \ne y \Rightarrow x^2 \ne y^2$

۲) $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R};\ (x \ne y) \wedge (x^2 = y^2)$

۳) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R};\ (x = y) \wedge (x^2 \ne y^2)$

۴) $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R};\ x = y \Rightarrow x^2 = y^2$

جواب: گزینه‌ی (۴) صحیح است، زیرا:

$$\sim(\forall x \in \mathbb{R},\ \nexists y \in \mathbb{R}; x = y \Rightarrow x^2 = y^2)$$

$$\equiv \exists x \in \mathbb{R} \sim (\nexists y \in \mathbb{R},\ x = y \Rightarrow x^2 = y^2)$$

$$\equiv (\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R},\ x = y \Rightarrow x^2 = y^2)$$

دیدیم که برای نقیض کردن، سور وجودی را به سور صفر، و سور صفر را به وجودی می‌توان تبدیل کرد و خاصیت تغییر نمی‌کند.

استنتاج

استنتاج به معنی نتیجه‌گیری است. در منطق، هرگاه از یک سلسله گزاره‌های درست که آن‌ها را مقدمات استنتاج می‌نامیم، بتوانیم گزاره‌ای درست که آن را نتیجه‌ی استنتاج می‌نامیم، نتیجه بگیریم، به کل چنین اعمالی یک دستگاه استنتاجیِ معتبر گفته می‌شود.

تذکر: زیر هم نوشتن چند گزاره به معنی ترکیبِ عطفی آن‌ها است و در این صورت، از به کار بردنِ نماد «$\wedge$» خودداری می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ r \\ . \\ . \\ \underline{s} \\ \therefore Q \end{array}$$

اگر با فرض درست بودن گزاره‌های p و q و r و... و s بتوانیم ثابت کنیم که گزاره‌ی Q نیز درست است، به چنین شکلی یک دستگاه استنتاجی معتبر یا اصطلاحاً یک استنتاج معتبر گفته می‌شود.

معرفی چند استنتاج معتبر و معروف (قوانین استنتاج)

قانون انتزاع: استنتاج زیر همواره معتبر و به قانون انتزاع معروف است.

(همواره از هر ترکیب شرطی و مقدم آن می‌توان تالی‌اش را نتیجه گرفت.)

$$\boxed{\begin{array}{l} (p \Rightarrow q) \\ p \\ \therefore q \end{array}}$$

قانون نقیض انتزاع

(همواره از هر ترکیب شرطی و نقیض تالی‌اش می‌توان نقیض مقدمش را نتیجه گرفت.)

$$\begin{array}{c} (p \Rightarrow q) \\ \underline{p} \\ \therefore q \end{array} \equiv \boxed{\begin{array}{c} (\sim q \Rightarrow \sim p) \\ p \\ \therefore q \end{array}}$$

قانون رفع مؤلفه

$$\begin{array}{c} (p \Rightarrow q) \\ \underline{p} \\ \therefore q \end{array} \equiv \boxed{\begin{array}{c} (\sim p \vee q) \\ p \\ \therefore q \end{array}}$$

(از هر ترکیب فصلی و نقیض یکی از مؤلفه‌ها می‌توان مؤلفه‌ی دیگر را نتیجه گرفت.)

مثال:

$$\begin{array}{l} (p \vee r) \\ \underline{\sim p} \\ \therefore r \end{array}$$

قانون قیاس: استنتاج زیر همواره معتبر و به قانون قیاس معروف است.

$$\boxed{\begin{array}{l} (p \Rightarrow q) \\ (q \Rightarrow r) \\ \therefore (p \Rightarrow r) \end{array}}$$

قانون عطف مقدمات: هم‌ارزی زیر به قانون عطف مقدمات معروف است. از این قانون در اثبات هم‌ارزی و استنتاج‌ها استفاده می‌شود.

$$\boxed{p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r}$$

از طرفی: $(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv (q \wedge p) \Rightarrow r \equiv q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

بنابراین: $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

مثال ۱: به جای علامت ؟ کدام گزاره را قرار دهیم تا استنتاج زیر معتبر باشد؟

$$\begin{array}{c} (p \wedge \sim r) \Rightarrow q \\ \underline{\sim r} \\ \therefore\ ? \end{array}$$

۱) p ۲) $(r \vee p)$

۳) $(\sim p \vee q)$ ۴) $(q \Rightarrow r)$

جواب: گزینه‌ی (۳) صحیح است، زیرا:

$$\begin{array}{c} (p \wedge \sim r) \Rightarrow q \equiv \sim r \Rightarrow (p \Rightarrow q) \\ \underline{\sim r} \\ \therefore \quad (p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q) \end{array}$$ قانون انتزاع

مثال ۲: گزاره‌ی $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ در کدام حالت همیشه نادرست است؟

۱) p و q درست، r نادرست ۲) p و q نادرست، r درست

۳) p درست، q و r نادرست ۴) p نادرست، q و r درست

جواب: گزینه‌ی (۱) صحیح است، زیرا:

می‌دانیم که $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$ بنابراین برای

نادرست بودن ارزش گزاره‌ی $(p \wedge q) \Rightarrow r$ باید مقدم درست و تالی نادرست باشد؛ پس باید p و q هر دو درست باشند و r نادرست باشد.

مثال ۳: گزاره‌ی $\sim p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ هم‌ارز کدام گزاره است؟

۱) $(p \vee q) \wedge r$ ‏ ۲) $(p \vee q) \vee r$

۳) $(p \vee \sim q) \vee r$ ‏ ۴) $(p \wedge q) \wedge r$

جواب: گزینه‌ی (۲) صحیح است، زیرا:

$$\sim p \Rightarrow (\sim q \Rightarrow r) \equiv (\sim p \wedge \sim q) \Rightarrow r$$
$$\equiv \sim(\sim p \wedge \sim q) \vee r \equiv (p \vee q) \vee r$$

قانون ادخال فاصل: استنتاج زیر همواره معتبر، و به قانون ادخال فاصل معروف است.

$$\boxed{\begin{array}{c} p \\ \therefore p \vee q \end{array}}$$

(از هر گزاره‌ی درست می‌توان ترکیب فصلی آن گزاره با هر گزاره‌ی دلخواه دیگر را نتیجه گرفت.)

مثال ۴: به جای ؟ کدام گزاره را قرار دهیم تا بحث معتبر باشد؟

$$\begin{array}{l} q \Rightarrow \sim r \\ \underline{r \qquad} \\ \therefore\ ? \end{array}$$

۱) $q \Rightarrow p$ ‏ ۲) $\sim r \Rightarrow \sim q$

۳) $\sim s \Rightarrow \sim q$ ‏ ۴) هر سه گزینه‌ی قبل

جواب: گزینه‌ی (۴) صحیح است، زیرا طبق قانون نقیض انتزاع:

$$\begin{array}{l} q \Rightarrow \sim r \\ \underline{r \qquad} \\ \therefore\ \sim q \end{array}$$ طبق قانون نقیض انتزاع

از طرفی

$$\begin{array}{l} \sim q \\ \therefore \sim q \vee p \equiv q \Rightarrow p \end{array}$$ و $$\begin{array}{l} \sim q \\ \therefore \sim q \vee r \equiv \sim r \Rightarrow \sim q \end{array}$$

$$\frac{\sim q}{\therefore \sim q \vee s \equiv \sim s \Rightarrow \sim q}$$

قانون حذف عاطف: استنتاج زیر همواره معتبر و به قانون حذف عاطف معروف است.

$\frac{p \wedge q}{\therefore q}$ یا $\frac{p \wedge q}{\therefore p}$

(از هر ترکیب عطفی می‌توان هریک از مؤلفه‌هایش را نتیجه گرفت.)

مثال ۵: به جای ؟ کدام گزاره را قرار دهیم تا استنتاج معتبر باشد؟

$$\begin{array}{l} (p \wedge \sim q) \Rightarrow r \\ \underline{(p \wedge \sim r) \qquad} \\ \therefore\ ? \end{array}$$

۱) $\sim p$

۲) q

۳) $\sim q$

۴) r

جواب: گزینه‌ی (۲) صحیح است، زیرا:

۱) $(p \wedge \sim q) \Rightarrow r$

۲) $(p \wedge \sim r)$

۳) $p \Rightarrow (\sim q \Rightarrow r)$ از ۱ و عطف مقدمات

۴) p از ۲ و حذف عاطف

۵) $(\sim q \Rightarrow r)$ از ۳ و ۴ و انتزاع

۶) $\sim r$ از ۲ و حذف عاطف

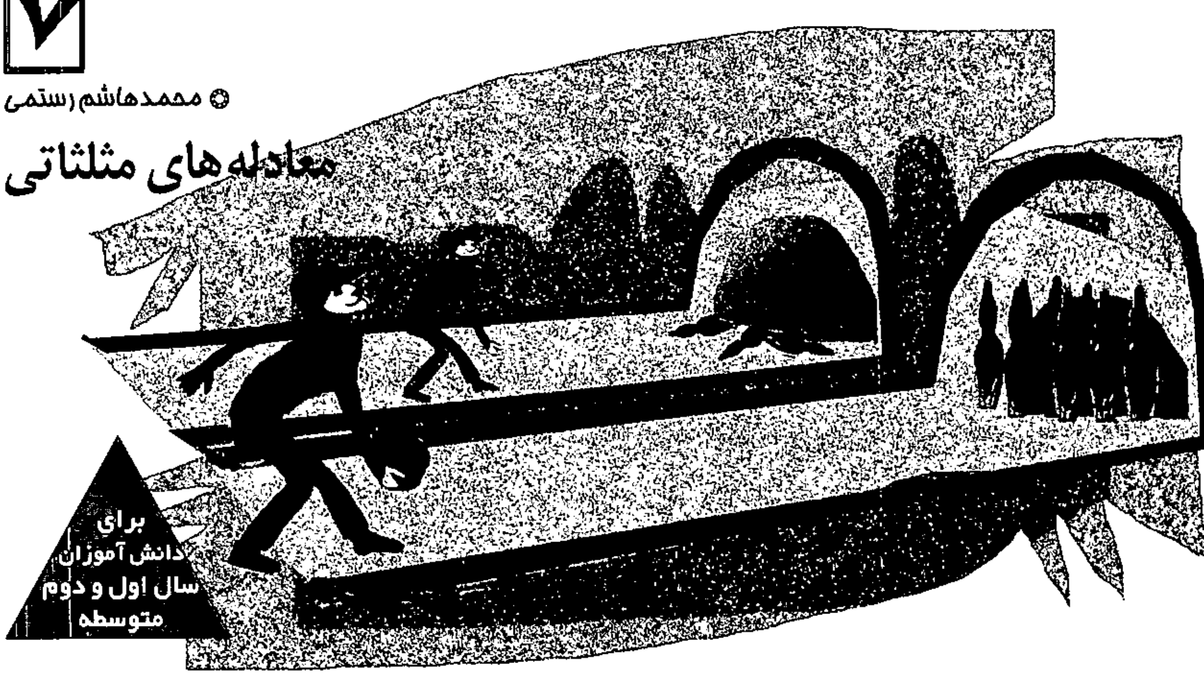
۷) $\therefore q$ از ۵ و ۶ و نقیض انتزاع

نکته: هرگاه نتیجه‌ی یک استنتاج، گزاره‌ای شرطی باشد، برای اثبات معتبر بودن استنتاج می‌توانیم مقدم نتیجه‌ی استنتاج را جزء مقدمات استنتاج فرض، و از آن به عنوان یک گزاره‌ی درست استفاده کنیم (زیرا اگر نادرست باشد، نتیجه‌ی استنتاج به انتفای مقدم درست است و چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند).

۱۱

⊙ محمدهاشم رستمی

معادله‌های مثلثاتی



حل معادله های کلاسیک مثلثاتی

اشاره

در شماره های قبل راجع به حل معادله های مثلثاتی بحث کردیم. اینک دومین دسته ی مهم از معادله های غیرساده ی مثلثاتی، را بررسی می کنیم که صورت (فرم) مشخصی دارند و راه حل آن ها نیز مشخص است. این معادله ها که معادله های کلاسیک نام دارند، بر چهار نوع هستند که در این مقاله نوع اول آن ها را مطالعه می کنیم.

معادله‌ی کلاسیک نوع اول

این معادله به صورت کلی $a\sin X+b\cos X=c$ است؛ یعنی معادله‌ای است درجه‌ی اول نسبت به سینوس و کسینوس یک زاویه؛ مانند معادله‌های:

$2\sin x+\cos x=-1$ ؛

$\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2$ ؛

$3\sin(x-\frac{\pi}{6})-\sqrt{3}\cos(x-\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}$ ؛

$\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3})-\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3})=\sqrt{2}$.

برای حل معادله‌ی کلاسیک نوع اول به یکی از راه‌های ذیل عمل می‌کنیم:

راه‌حل اول

۱ . طرفین معادله را بر a، یعنی بر ضریب $\sin X$، تقسیم می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$\frac{a\sin X}{a}+\frac{b\cos X}{a}=\frac{c}{a}\Rightarrow \sin X+\frac{b}{a}\cos X=\frac{c}{a}$$

۲ . فرض می‌کنیم $\frac{b}{a}=tg\alpha$ باشد ($\frac{b}{a}$ هر عددی باشد، همواره زاویه‌ای مانند α وجود دارد به قسمی که $\frac{b}{a}=tg\alpha$).

در این صورت خواهیم داشت:

$$\sin X+tg\alpha\cos X=\frac{c}{a}$$

۳ . در معادله‌ی بالا به جای $tg\alpha$ مقدار مساوی‌اش $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ را قرار می‌دهیم و خواهیم داشت:

$$\sin X + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos X = \frac{c}{a}$$

و یا:

$$\sin X\cos\alpha + \cos X\sin\alpha = \frac{c}{a}\cos\alpha$$

و از آن‌جا:

$$\sin(X+\alpha) = \frac{c}{a}\cos\alpha$$

۴. اگر $-1 \le \frac{c}{a}\cos\alpha \le +1$ باشد، فرض می‌کنیم $\frac{c}{a}\cos\alpha = \sin\varphi$. در این صورت خواهیم داشت:

$$\sin(X+\alpha) = \sin\varphi$$

و این معادله، یک معادله‌ی ساده‌ی مثلثاتی است که جواب‌های آن برابرند با:

$$\left|\begin{array}{l} X+\alpha = 2k\pi+\varphi \\ X+\alpha = 2k\pi+\pi-\varphi \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} X = 2k\pi+\varphi-\alpha \\ X = 2k\pi+\pi-\varphi-\alpha \end{array}\right.$$

نکته‌ی ۱. در روش بالا می‌توانیم طرفین معادله را بر b، یعنی بر ضریب cosX، تقسیم کنیم و سپس $\frac{a}{b} = tg\alpha$ یا $\frac{a}{b} = \cot g\beta$ اختیار نماییم. در این صورت، نیز یک معادله‌ی ساده‌ی مثلثاتی به دست خواهد آمد که با حل آن، جواب‌های معادله‌ی داده شده به دست می‌آید.

نکته‌ی ۲. در مرحله‌ی دوم راه‌حل اول، می‌توانیم $\frac{b}{a} = \cot g\alpha$ اختیار کنیم. در این صورت نیز یک معادله‌ی ساده‌ی مثلثاتی به دست خواهد آمد که با حل آن، جواب‌های معادله‌ی داده شده محاسبه می‌شوند.

شرط جواب معادله‌ی کلاسیک نوع اول: همان‌طوری که دیدیم معادله‌ی کلاسیک نوع اول در صورتی دارای جواب است که داشته باشیم:

$$-1 \le \frac{c}{a}\cos\alpha \le +1$$

یا:

$$\frac{c^2}{a^2}\cos^2\alpha \le 1$$

و یا:

$$\frac{c^2}{a^2} \le \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} \le 1+tg^2\alpha$$

اما، $tg\alpha = \frac{b}{a}$ است، پس باید داشته باشیم:

$$\frac{c^2}{a^2} \le 1+\frac{b^2}{a^2} \Rightarrow c^2 \le a^2+b^2 \text{ یا } a^2+b^2 \ge c^2$$

بنابراین، **شرط وجود جواب برای معادله‌ی کلاسیک نوع اول** آن است که داشته باشیم:

$$a^2+b^2 \ge c^2 \text{ یا } a^2+b^2-c^2 \ge 0$$

نکته: در صورتی که $a^2+b^2 > c^2$ باشد، معادله دو جواب متمایز دارد و در صورتی که $a^2+b^2 = c^2$ باشد، معادله دارای ریشه‌ی مضاعف است.

به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال ۱. معادله‌ی $3\sin x+\sqrt{3}\cos x = 3$ را حل کنید.

حل: در این معادله $a=3$، $b=\sqrt{3}$ و $c=3$ است و شرط $a^2+b^2>c^2$ برقرار است، زیرا $(3)^2+(\sqrt{3})^2>(3)^2$ یا $9+3>9$ یا $12>9$ است، پس این معادله دو جواب متمایز دارد. برای حل این معادله با روش ذکر شده، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱. دو طرف معادله را بر ۳، یعنی بر ضریب sinx تقسیم می‌کنیم. داریم:

$$\frac{3}{3}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{3}\cos x = \frac{3}{3} \Rightarrow \sin x+\frac{\sqrt{3}}{3}\cos x = 1$$

۲. به جای $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$، $tg\frac{\pi}{6}$ را قرار می‌دهیم، زیرا $tg\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ است. پس داریم:

$$\sin x + tg\frac{\pi}{6}\cos x = 1$$

۳. به جای $tg\frac{\pi}{6}$، مقدار $\dfrac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}$ را قرار می‌دهیم:

$$\sin x+\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}\cos x = 1 \Rightarrow \sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۴. می‌دانیم که $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$ است. پس خواهیم داشت:

$$\sin(x+\frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{6} = 2k\pi+\frac{\pi}{3} \\ x+\frac{\pi}{6} = 2k\pi+\pi-\frac{\pi}{3} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} x = 2k\pi+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi+\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6} \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x = 2k\pi+\frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi+\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

مثال ۲. معادله‌ی $\sqrt{3}\sin 4x-\cos 3x = 2$ را حل کنید.

حل: در این معادله $a=\sqrt{3}$ ، $b=-1$ و $c=2$ است و شرط $a^2+b^2=c^2$ برقرار است؛ زیرا داریم:

$$(\sqrt{3})^2+(-1)^2=(2)^2 \Rightarrow 3+1=4 \Rightarrow 4=4$$

بنابراین، معادله ریشه‌ی مضاعف دارد. برای حل این معادله به روش ارائه شده عمل می‌کنیم. داریم:

$$(1)\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\sin 4x-\frac{1}{\sqrt{3}}\cos 4x=\frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin 4x-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos 4x=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$(2)\ \frac{\sqrt{3}}{3}=tg\frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin 4x-tg\frac{\pi}{6}\cos 4x=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$(3)\ \sin 4x-\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}\cos 4x=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \sin 4x\cos\frac{\pi}{6}-\cos 4x\sin\frac{\pi}{6}=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\cos\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \sin(4x-\frac{\pi}{6})=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1$$

$$(4)\ 1=\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin(4x-\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} 4x-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2} \\ 4x-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow 4x=2k\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6} \Rightarrow 4x=2k\pi+\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$$

مثال ۳. معادله‌ی $\sin(x-\frac{\pi}{6})-\cos(x-\frac{\pi}{6})=1$ را حل کنید.

حل: در این معادله $a=1$ ، $b=-1$ ، $c=1$ و $a^2+b^2>c^2$ است؛ زیرا: $(1)^2+(-1)^2>(1)^2$ یا $2>1$ است.

پس معادله دو جواب متمایز دارد. برای حل این معادله با استفاده از روش ارائه شده داریم:

$$(1)\ \sin(x-\frac{\pi}{6})-1\cos(x-\frac{\pi}{6})=1$$

$$(2)\ 1=tg\frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin(x-\frac{\pi}{6})-tg\frac{\pi}{4}\cos(x-\frac{\pi}{6})=1$$

$$(3) \Rightarrow \sin(x-\frac{\pi}{6})-\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}\cos(x-\frac{\pi}{6})=1$$

$$\Rightarrow \sin(x-\frac{\pi}{6})\cos\frac{\pi}{4}-\cos(x-\frac{\pi}{6})\sin\frac{\pi}{4}=1\times\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \sin[(x-\frac{\pi}{6})-\frac{\pi}{4}]=1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin(x-\frac{5\pi}{12})=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(4)\ \frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin(x-\frac{5\pi}{12})=\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} x-\frac{5\pi}{12}=2k\pi+\frac{\pi}{4} \\ x-\frac{5\pi}{12}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x=2k\pi+\frac{2\pi}{3} \\ x=2k\pi+\frac{7\pi}{6} \end{array}\right.$$

مثال ۴. معادله‌ی $(m-1)\sin\frac{x}{2}+3\cos\frac{x}{2}=m+2$ داده شده است:

۱. حدود m را چنان تعیین کنید که این معادله جواب داشته باشد.

۲. مقدار m را چنان بیابید که یکی از جواب‌های این معادله $x=\frac{\pi}{3}$ باشد.

حل:

۱. شرط وجود جواب معادله‌ی کلاسیک نوع اول $a\sin x+b\cos x=c$ آن است که $a^2+b^2\ge c^2$ باشد، در این معادله داریم:

$$a=m-1,\ b=3,\ c=m+2$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$(m-1)^2+(3)^2\ge(m+2)^2 \Rightarrow m^2-2m+1+9\ge m^2+4m+4$$

$$\Rightarrow -6m+6\ge 0 \Rightarrow -6m\ge -6 \Rightarrow m\le 1$$

پس معادله‌ی داده شده در صورتی دارای جواب است که $m\le 1$ باشد.

۲. شرط آن‌که $x=\frac{\pi}{3}$ یکی از جواب‌های این معادله باشد، آن است که در این معادله صدق کند؛ یعنی داشته باشیم:

$$(m-1)\sin\frac{\frac{\pi}{3}}{2}+3\cos\frac{\frac{\pi}{3}}{2}=m+2$$

$$\Rightarrow (m-1)\sin\frac{\pi}{6}+3\cos\frac{\pi}{6}=m+2$$

$$\Rightarrow (m-1)\times\frac{1}{2}+3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=m+2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}m=\frac{5-3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m=3\sqrt{3}-5$$

مثال ۵. معادله‌ی $3m\sin x+(1-2m)\cos x=3m-1$ داده شده است.

۱. حدود m را چنان تعیین کنید که این معادله ریشه داشته باشد.

۲. مقدار m را چنان بیابید که ریشه‌های معادله‌ی $2\sin x = 1$ ، ریشه‌های معادله‌ی داده شده باشد.

۳. به ازای $m=1$ ، معادله را حل کنید.

حل:

۱. در این معادله، $a = 3m$ ، $b = 1-2m$ و $c = 3m-1$ است. شرط وجود جواب معادله‌ی کلاسیک نوع اول را می‌نویسیم. داریم:

$$a^2 + b^2 \ge c^2 \Rightarrow (3m)^2 + (1-2m)^2 \ge (3m-1)^2$$

$$\Rightarrow 9m^2 + 1 + 4m^2 - 4m \ge 9m^2 + 1 - 6m \Rightarrow 4m^2 + 2m \ge 0$$

پس باید $4m^2 + 2m$ را تعیین علامت کنیم. داریم:

$$4m^2 + 2m = 0 \Rightarrow 2m(2m+1) = 0 \Rightarrow 2m = 0$$

$$\Rightarrow m = 0 \text{ و } 2m+1 = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

m	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$4m^2+2m$		$+$	0	$-$	0	$+$	
		ریشه دارد	ریشه دارد	ریشه ندارد	ریشه دارد	ریشه دارد	

۲. جواب‌های کلی معادله‌ی $2\sin x = 1$ یا جواب‌های خصوصی موجود در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ از این معادله، باید در معادله‌ی داده شده صدق کند. پس نخست جواب‌های معادله‌ی $2\sin x = 1$ را به دست می‌آوریم. داریم:

$$2\sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$ جواب‌های کلی معادله

k	x
0	$x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}$
1	$2\pi + \frac{\pi}{6} > 2\pi, 2\pi + \frac{5\pi}{6} > 2\pi$

از آن‌جا داریم:

$$x = \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\text{در معادله‌ی داده شده}} 3m\sin\frac{\pi}{6} + (1-2m)\cos\frac{\pi}{3} = 3m - 1 \Rightarrow$$

$$\frac{3}{2}m + (1-2m)\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 3m - 1 \Rightarrow (\frac{3}{2} - \sqrt{3} - 3)m = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow (-\frac{3}{2} - \sqrt{3})m = (-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow$$

$$m = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3} = \frac{(2+\sqrt{3})(2\sqrt{3}-3)}{(2\sqrt{3}+3)(2\sqrt{3}-3)} \Rightarrow m = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} \xrightarrow{\text{در معادله‌ی داده شده}} 3m\sin\frac{5\pi}{6} + (1-2m)\cos\frac{5\pi}{6} = 3m - 1$$

$$\Rightarrow 3m\times\frac{1}{2} + (1-2m)(\frac{-\sqrt{3}}{2}) = 3m - 1$$

$$\Rightarrow (\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2})m = \frac{\sqrt{3}-2}{2} \Rightarrow m = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

۳. مقدار $m=1$ را در معادله قرار می‌دهیم. داریم:

$$m = 1 \xrightarrow{\text{در معادله}} 3\sin x - \cos x = 2 \Rightarrow \sin x - \frac{1}{3}\cos x = \frac{2}{3}$$

$$tg\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin x - tg\alpha\cos x = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin x - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos x = \frac{2}{3}$$

$$\sin x\cos\alpha - \cos x\sin\alpha = \frac{2}{3}\cos\alpha \Rightarrow \sin(x-\alpha) = \frac{2}{3}\cos\alpha,$$

$$\sin(x-\alpha) = \frac{2}{3}\cos\alpha = \sin\varphi \Rightarrow x - \alpha = 2k\pi + \varphi$$

$$\text{و } x - \alpha = 2k\pi + \pi - \varphi \Rightarrow x = 2k\pi + \varphi + \alpha \text{ و}$$

$$x = 2k\pi + \pi + \alpha - \varphi$$

نکته: چون $tg\alpha = \frac{1}{3}$ است، $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$ و در نتیجه داریم:

$$\frac{2}{3}\cos\alpha = \frac{2}{3}\times\frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5} < 1$$

بنابراین، زاویه‌ای مانند φ وجود دارد که $\frac{\sqrt{10}}{5} = \sin\varphi$ باشد.

به صورت دیگر می‌توان گفت، چون $|\cos\alpha| \le 1$ است، پس $\frac{2}{3}|\cos\alpha| \le \frac{2}{3}$ می‌باشد. بنابراین تساوی $\frac{2}{3}\cos\alpha = \sin\varphi$ درست است.

اعداد اول

• سید محمدرضا هاشمی موسوی *

در این جا می‌خواهیم اعدادی را معرفی کنیم که در واقع سنگ زیربنای همه‌ی اعداد هستند؛ یعنی اعدادی که توسط آن‌ها می‌توان، تمام اعداد طبیعی به جز یک را تولید کرد. این نوع اعداد را در فارسی «اول» و در لاتین «**Prime**» نام نهاده‌اند. Prime در دو معنای «ساده بودن» و «بنیادی بودن» به کار رفته است که اتفاقاً، اعداد اول این هر دو ویژگی را دارند. برای سهولت، اعداد اول را فقط برای اعداد صحیح مثبت تعریف می‌کنند.

این اعداد را شاید به این دلیل اول نامیده‌اند که هم ساده (از نظر تجزیه)، و هم زیربنایی (از نظر تجزیه‌ی اعداد طبیعی به جز یک، به حاصل ضرب آن‌ها) هستند. تعداد این نوع اعداد بی‌نهایت است. آن‌ها به طور بسیار نامنظم بین اعداد طبیعی ظهور می‌کنند و همین توزیع نامنظم، سبب به وجود آمدن بسیاری از مسائل حل نشدنی در این باب شده است. امروزه، پس از گذشت چند قرن، مسائل بی‌شماری از این اعداد شگفت‌انگیز، یا به صورت حدس (نه ردّ مسأله و نه اثبات آن) و یا به صورت مسأله‌ای حل نشدنی مطرح هستند که مورد توجه خاص بسیاری از ریاضیدانان حرفه‌ای و غیرحرفه‌ای قرار دارند.

از طرف دیگر، مسائلی در تئوری اعداد وجود دارند که به طور مستقیم و یا غیرمستقیم با این اعداد در ارتباط هستند و بدون آگاهی از ویژگی‌ها و قضیه‌های اعداد اول، به هیچ یک از آن‌ها نمی‌توان پاسخ گفت. به همین دلیل، هر محصل این شاخه از ریاضیات ابتدا باید سیری در اعداد اول داشته باشد و سپس در مورد مباحث دیگر مطالعه کند. همچنین، بحث مستدل در بعضی از این مسائل، موقوف به تسلط کامل بر بعضی دیگر از رشته‌های ریاضیات (مانند: آنالیز حقیقی و تئوری توابع تحلیلی و...) و موضوع شاخه‌های خاص و تخصصی از تئوری اعداد است که برخی از آن‌ها بسیار پهناور و سخت دشوارند. دو مسأله از این مسائل حل نشدنی که همیشه مورد توجه خاص و عام بوده‌اند، یکی «توزیع اعداد اول به توسط یک یا چند ضابطه‌ی معین»، و دیگری «تعداد اعداد اول، در هر فاصله‌ی دلخواه» است.

در این جا، ما فقط به تعریف و بررسی برخی از ویژگی‌های اعداد اول و بیان برخی از قضیه‌های مهم و اساسی می‌پردازیم و به دیگر جنبه‌های بحث‌انگیز و مسدود این نوع اعداد، تنها اشاره خواهیم کرد.

تعریف: هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از یک، مانند p را اول

می‌نامیم، هرگاه هیچ شمارنده یا مقسوم علیه مثبتی به جز یک و خودش نداشته باشد.

می‌دانیم، هر عدد صحیح مانند $a \neq \pm 1$، حداقل دارای چهار شمارنده‌ی ± 1 و $\pm a$ است. برای سهولت، بدون این که از عمومیت مطلب کاسته شود، اعداد اول را فقط برای اعداد صحیح مثبت تعریف می‌کنند. برای مثال، عددهای ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷ و ۱۹ را که جز یک و خودشان هیچ شمارنده‌ی دیگری ندارند، «اول» گوییم و عددهایی مثل ۹، ۱۲، ۱۵، ۲۴، ۲۷، ۳۴، ۹۹ را که جز یک و خودشان دارای عامل یا عامل‌هایی دیگر هستند، «مرکب» گوییم. بنابر تعریف، عددی که اول نباشد، مرکب است.

تذکر: با توجه به تعریف عدد اول، بدیهی است که عدد ۱ نه اول است و نه مرکب. خواهیم دید که پذیرفتن عدد ۱ در زمره‌ی اعداد اول، نه تنها مفید نیست، بلکه در یکتایی تجزیه‌ی هر عدد صحیح به عامل‌های اول، باعث اختلال می‌شود.

با توجه به تعریف عدد اول، اگر p عدد اولی به صورت $p=a.b$ $(a<b)$ باشد، در این صورت $a=1$ و $b=p$؛ زیرا:

$p=a.b \Rightarrow$ (a و b مقسوم علیه‌های p هستند) $a=1$ و $b=p$ (۱)

هر عددی مثل n، دارای یک تجزیه‌ی بدیهی $n\times 1$ است. برای مثال، تجزیه‌ی بدیهی عدد ۱۸ به صورت 1×18 (حاصلضرب دو عدد) و تجزیه‌های غیربدیهی و جدی آن به صورت‌های زیر است:

$$18=2\times 9=3\times 6\ (=2\times 3^2=9\times 2=6\times 3)$$

نتیجه‌ی ۱. گزاره‌ی (۱) نشان می‌دهد که عدد اول به جز تجزیه‌ی بدیهی $p\times 1$، تجزیه‌ی نابدیهی ندارد. این واقعیت، ساده و بسیط بودن اعداد اول را نشان می‌دهد.

نتیجه‌ی ۲. اگر p عددی اول و k عددی مثبت و $k|p$، آن‌گاه $k=1$ یا $k=p$.

نتیجه‌ی ۳. اگر p و q دو عدد اول و $p|q$ یا $q|p$، آن‌گاه $p=q$؛ زیرا:

$p|q \Rightarrow p=1$ یا $p=q \xrightarrow{(p\neq 1\ \text{و}\ q\ \text{اول})} p=q$

تعریف: هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از واحد را که اول نباشد (تجزیه‌ی نابدیهی هم داشته باشد)، عدد مرکب می‌نامیم.

مثال: همه‌ی عددهای طبیعی x و y را که در معادله‌ی زیر صدق می‌کنند، بیابید.

$$25y^2-16x^2=-31$$

حل: معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$16y^2-25x^2=31\ ;\ (4y-5x)(4y+5x)=31\times 1 \quad (2)$$

از برابری (۲) نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} 4y-5x=1 \\ 4y+5x=31 \end{cases}$$

تنها جواب این دستگاه در مجموعه‌ی اعداد طبیعی $x=3$ و $y=4$ است.

این نتیجه از تجزیه‌ی عدد اول ۳۱ به صورت 1×31 حاصل شده است، زیرا بنابر اول بودن عدد ۳۱، تجزیه‌ی غیربدیهی ندارد و تجزیه‌ی بدیهی آن هم منحصر به فرد است.

قضیه‌ی ۱: با فرض این که p عددی طبیعی و به جز یک باشد و a و b دو عدد طبیعی دلخواه باشند، در این صورت اگر p در گزاره‌ی شرطی زیر صدق کند، p اول است:

$\forall a,b \in \mathbb{N};\ p|ab \Rightarrow p|a$ یا $p|b$ (۳)

اثبات (برهان خلف): فرض می‌کنیم p در شرط (۳) صدق کند، ولی اول نباشد. پس p دارای تجزیه‌ی نابدیهی به دو عامل مثبت مثل $n=ab$ است (واضح است که $n>a$ و $n>b$). از طرف دیگر، برابری $n=ab$ رابطه‌ی $n|ab$ را در بردارد

که با توجه به گزاره‌ی شرطی (۳) باید $n|a$ یا $n|b$ که با $n>a$ و $n>b$ متناقض است. بنابراین، فرض خلف نادرست و حکم برقرار است.

۴: عدد اول زوجی به جز ۲ وجود ندارد؛ زیرا اگر $p>2$ عددی زوج باشد، بدیهی است که $2|p$ و این با اول بودن p در تناقض است (p عاملی جز ۱ و خودش ندارد).

۵: هیچ دو عدد اول و متوالی به جز ۲ و ۳ وجود ندارند؛ زیرا به ازای هر عدد اول p که بزرگ‌تر از ۳ باشد، $p+1$ زوج است و با توجه به نتیجه‌ی ۴، هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ مرکب است.

قضیه‌ی ۲: هر عدد صحیح به جز ± 1، لااقل یک مقسوم علیه اول دارد.

قضیه‌ی ۳: مجموعه‌ی اعداد اول، مجموعه‌ای نامتناهی است (بی‌نهایت عدد اول وجود دارد).

قضیه‌ی ۴: اگر n عددی مرکب باشد، آن‌گاه حداقل یک مقسوم علیه اول و کوچک‌تر یا برابر با $\sqrt{n}$ خواهد داشت.

۶: اگر عدد طبیعی n بزرگ‌تر از ۱ باشد و هیچ مقسوم علیه اول و کوچک‌تر یا برابر $\sqrt{n}$ نداشته باشد، آن‌گاه n عددی اول است.

نتیجه‌ی ۶، در واقع الگوریتمی برای تشخیص اول بودن اعداد طبیعی است. برای مثال، برای تشخیص عدد ۱۲۷، کافی است که این عدد را بر همه‌ی اعداد اول کوچک‌تر از $\sqrt{127}$ تقسیم کنیم. چون $\sqrt{127} \approx 11/27$ و $3 \nmid 127$، $5 \nmid 127$، $7 \nmid 127$ و $11 \nmid 127$، پس ۱۲۷ عددی اول است. می‌دانیم، هر عدد اول p نسبت به همه‌ی اعداد کوچک‌تر از خودش اول است و بنابراین، نسبت به حاصل‌ضربشان نیز اول است. از این‌رو، شرط کافی برای اول بودن p چنین است:

$$(p,\ (p-1)!) = 1 \quad (4)$$

برای سهولت می‌توان حاصل‌ضرب همه‌ی اعداد اول کوچک‌تر از $\sqrt{p}$ را در نظر گرفت. در صورتی که حاصل‌ضرب همه‌ی اعداد اول فرد کوچک‌تر از $\sqrt{p}$ را با نماد $\overline{\lfloor\sqrt{p}\rfloor !}$ نشان دهیم، شرط کافی برای اول بودن p چنین است:

$$\left(p,\ \overline{\lfloor\sqrt{p}\rfloor !}\right) = 1 \quad (5)$$

مثال: با توجه به رابطه‌ی (۵)، شرط کافی برای اول بودن عدد ۱۲۷ را بنویسید.

حل: با توجه به $\sqrt{127} \approx 11/27$ و $\lfloor 11/27 \rfloor = 11$ و رابطه‌ی (۵)، می‌توان نوشت:

$$\left(127,\ \overline{\lfloor\sqrt{127}\rfloor !}\right) = 1;\ (127,\ 3\times 5\times 7\times 11) = 1$$

نتیجه‌ی ۷: برای تشخیص اول بودن اعداد طبیعی، کافی است با استفاده از روش نردبانی برای محاسبه‌ی ب. م. م (الگوریتم اقلیدسی) عمل کنیم و $d = \left(p,\ \overline{\lfloor\sqrt{p}\rfloor !}\right)$ را محاسبه کنیم. در صورتی که d=1، آن‌گاه p عددی اول است.

مثال: با استفاده از الگوریتم اقلیدسی، مشخص کنید که عدد p=127، اول است.

حل: در واقع باید $d = \left(127,\ \underbrace{3\times 5\times 7\times 11}_{1155}\right)$ را تعیین کنیم:

چون d=1، پس عدد p=127، اول است.

(خارج قسمت‌ها)	۹	۱۰	۱	۱	۲	۲
۱۱۵۵	۱۲۷	۱۲	۷	۵	۲	۱=d
(باقی‌مانده)	۱۲	۷	۵	۲	۱	۰

نتیجه‌ی ۸: اگر a یک عدد طبیعی دلخواه و p عددی اول باشد، در این صورت دو حالت ممکن $(a,p)=1$ یا $(a,p)=p$ وجود دارد؛ زیرا با فرض $(a,p)=d$، خواهیم داشت:

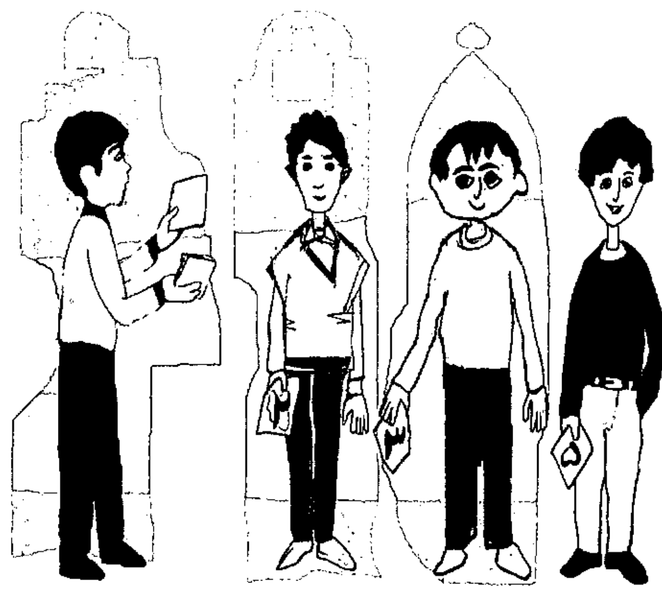
$$d|p \Rightarrow \begin{cases} d=1 \\ \text{یا} \\ d=p \end{cases}$$ (p اول است)

نتیجه‌ی ۹: اگر p عددی اول باشد، آن‌گاه:

$$p \nmid a \Leftrightarrow (p,a)=1$$

با توجه به نتایج اخیر، واضح است که برای یافتن ب. م. م عدد اول p و یک عدد صحیح دلخواه مانند a، فقط به یک‌بار تقسیم کردن نیاز است؛ زیرا اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر p برابر صفر شود، ب. م. م همان p است و اگر باقی‌مانده صفر نشود، ب. م. م برابر ۱ خواهد بود. برای مثال، می‌خواهیم (۲۹ و ۱۳۷۹) را تعیین کنیم. کافی است یک‌بار تقسیم کنیم:

$$1379 = 29\times 47 + 16$$



چون باقی‌مانده‌ی این تقسیم برابر صفر نشد، بنابراین ب. م. م برابر ۱ خواهد شد (زیرا p=۲۹ عدد اول است):

$$(29, 1379) = 1$$

نتیجه‌ی ۱۰: اگر p و q دو عدد اول متمایز باشند، در این صورت p و q نسبت به هم اولند.

قضیه‌ی ۵: اگر p عددی اول باشد، آن‌گاه:

$p|ab \Rightarrow p|a$ یا $p|b$

برهان: اگر $p|a$، حکم برقرار است. بنابراین، فرض می‌کنیم $p \nmid a$. با توجه به $(p,a)=1$ و لم اقلیدس:

$$p|ab\ ,\ (b,a)=1 \Rightarrow p|b$$

نتیجه‌ی ۱۱: اگر p عددی اول باشد، آن‌گاه:

$p|a_1a_2a_3\ldots a_k \Rightarrow p|a_1$ یا $p|a_2$ یا ... یا $p|a_k$

نتیجه‌ی ۱۲: اگر p عددی اول باشد، آن‌گاه:

(حالت خاص نتیجه‌ی ۱۱) : $p|a^n \Rightarrow p|a$

مسأله: اگر p عددی اول باشد و داشته باشیم $p|49^n$، نشان دهید: $p=7$.

حل:

$$p|49^n;\ p|7^{2n} \Rightarrow p|7$$
$\Rightarrow p=1$ یا $p=7$
$\overset{(\text{p عدد اول})}{\Rightarrow} p=7$

مسأله: اگر p و p_1، p_2، ... و p_k، اعداد اول باشند و داشته باشیم: $p|p_1p_2\ldots p_k$، ثابت کنید به ازای n طبیعی، خواهیم داشت: $p=p_n$.

حل: با توجه به فرض، یعنی $p|p_1p_2\ldots p_k$ و نتیجه‌ی (۱۱)، p حداقل یکی از p_iها مثل p_n را می‌شمارد. بنابراین:

$p|p_n \Rightarrow p=1$ یا $p=p_n \overset{(\text{p اول است})}{\Rightarrow} p=p_n$

قضیه‌ی بنیادی حساب

اکنون می‌خواهیم قضیه‌ای را بیان کنیم که یکی از اساسی‌ترین قضیه‌های تئوری اعداد است. این قضیه بیان می‌کند که هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از واحد را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب اعداد اول نمایش داد و نمایش هر عدد به صورت حاصل‌ضرب این چند عدد اول، بدون در نظر گرفتن ترتیب عوامل ضرب، منحصر به فرد است.

با توجه به این قضیه، نقش بنیادی اعداد اول آشکار می‌شود. یعنی همه‌ی اعداد در واقع از اعداد اول به‌وجود آمده‌اند. در اصطلاح ریاضیدانان، اعداد اول «بلوک‌های ساختمانی» اعداد هستند. پیش از بیان قضیه‌ی بنیادی حساب، لازم است به این تعریف و یک قضیه اشاره شود:

تعریف: با فرض این‌که اعداد اولی مثل p_1، p_2، ... و p_k یافت شوند به‌طوری که $p|p_1p_2\ldots p_k$ ، در این صورت گویند: n به عوامل اول تجزیه شده است. برای مثال، اعداد ۱۸، ۲۴، ۳۶ و ۹۹ را به صورت حاصل‌ضرب عوامل اول به شکل زیر نشان می‌دهیم:

$18=2\times3\times3=2\times3^2$ و $24=2\times2\times2\times3=2^3\times3$

$36=2\times2\times3\times3=2^2\times3^2$ و $99=3\times3\times11=3^2\times11$

تذکر ۱: هیچ‌یک از صورت‌های حاصل‌ضرب 3×8، 4×6، 2×12، و 1×24، یک تجزیه‌ی ۲۴ به عامل‌های اول محسوب نمی‌شود و تنها $2\times2\times2\times3$ و معادل آن $2^3\times3$، تجزیه‌ی ۲۴ به عوامل اول است.

تذکر ۲: صورت حاصل‌ضرب 7×1، یک تجزیه‌ی ۷ به عوامل اول نیست و چون ۷ عدد اول است و تنها یک شمارنده به جز ۱ دارد، پس ۷ در واقع یک تجزیه‌ی ۷ به عوامل اول است. بنابراین، اگر p اول باشد، خود p تجزیه‌ی آن به عوامل اول محسوب می‌شود.

قضیه‌ی ۶: هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از واحد ($n>1$)، حداقل دارای یک شمارنده‌ی اول است.

برهان: اگر مجموعه‌ی تمام شمارنده‌های بزرگ‌تر از واحد عدد طبیعی n را به D نشان دهیم:

$$D=\{k : k>1,\ k|n\}$$

بدیهی است که D تهی نیست ($n \in D$) و بنابر اصل خوش ترتیبی، دارای عضو ابتدایی مثل p است. کافی است ثابت کنیم، p اول است. می‌دانیم هر شمارنده‌ی p یک شمارنده‌ی

n نیز هست. پس اگر p اول نباشد، در این صورت D عضوی کوچک‌تر از p خواهد داشت که یک تناقض است. بنابراین p اول است.

قضیه‌ی بنیادی حساب: هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از واحد $(n>1)$ را می‌توان به عوامل اول تجزیه کرد و این تجزیه بدون در نظر گرفتن ترتیب قرار گرفتن عوامل، منحصر به فرد است.

برهان: واضح است که اگر n عددی اول باشد، تجزیه‌ی منحصر به فرد آن به عوامل اول n است. و اگر n مرکب باشد، بر طبق قضیه، دارای حداقل یک شمارنده‌ی اول مثل p_1 خواهد بود:

$$n = p_1q_1 \ ;\ 1 < q_1 < n$$

حال اگر q_1 اول باشد؛ p_1q_1 تجزیه‌ی n به عامل‌های اول است. در غیر این صورت، چون q_1 مرکب است، دارای حداقل یک شمارنده‌ی اول مثل p_2 خواهد بود:

$$q_1 = p_2q_2 \ ;\ 1 < q_2 < q_1$$

اکنون اگر q_2 اول باشد، تجزیه‌ی منحصر به فرد n به عامل‌های اول به صورت زیر خواهد بود:

$$n = p_1p_2q_2$$

اگر به همین ترتیب برای q_2، q_3، ... و q_k، عمل کنیم، خواهیم داشت:

$$n = p_1p_2p_3\cdots p_k\cdot q_k$$

با توجه به نابرابری‌های زیر:

$$n > q_1 > q_2 > q_3 > \ldots > q_k > 1$$

بدیهی است که این عمل نمی‌تواند بی‌نهایت بار تکرار شود، یعنی یکی از p_kها عدد اولی مثل p_k خواهد بود. بنابراین، تجزیه‌ی منحصر به فرد n به عوامل اول به این صورت خواهد بود:

$$n = p_1p_2p_3\cdots p_k$$

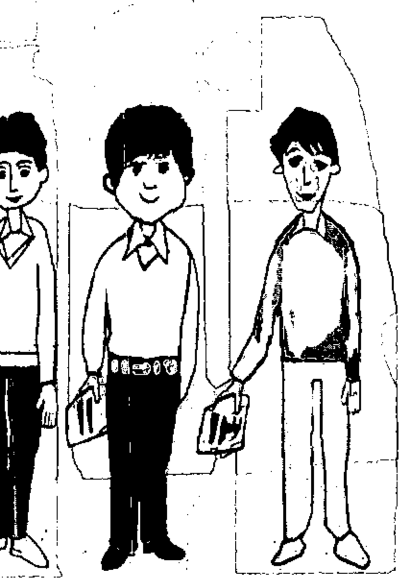
توجه: یکتایی این تجزیه را نیز می‌توان اثبات کرد.

تذکر: در صورتی که تعدادی از عامل‌های اول تجزیه با هم برابر باشند، می‌توان هر یک از عامل‌های تکراری را به صورت یک عدد تواندار نوشت که در این صورت، هر عدد طبیعی $n>1$ به صورت رابطه‌ی منحصر به فرد زیر تجزیه خواهد شد:

$$n = p_1^k\cdot p_2^s\cdots p_t^r \quad (6)$$

در رابطه‌ی (۶)، اعداد k، s، ... و r طبیعی و p_iها اعداد اول متمایزی هستند، با شرط زیر:

$$p_1 < p_2 < \ldots p_t$$



توجه: طریقه‌ی نمایش عدد n را به صورت رابطه‌ی منحصر به فرد (۶)، «تجزیه‌ی استاندارد» یا کانونیک عدد n گویند. برای مثال، تجزیه‌ی استاندارد عدد $n=18900$ به صورت زیر است:

$$18900 = 2^2\times 3^3\times 5^2\times 7$$

مسائل حل شده

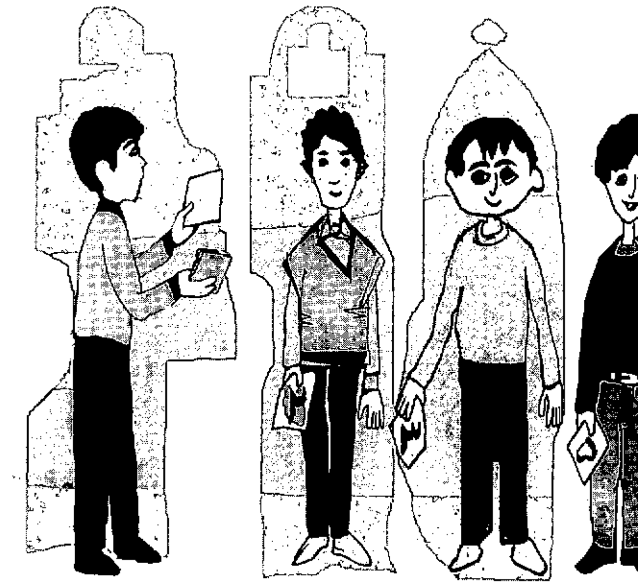
مسأله‌ی ۱: ثابت کنید، هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ به یکی از دو صورت $6t\pm1$ است.

اثبات: طبق الگوریتم تقسیم، هرعدد طبیعی دلخواه به یکی از شش صورت: $6n$، $6n+1$، $6n+2$، $6n+3$، $6n+4$ و $6n+5$ نوشته می‌شود. در صورتی که عدد مورد نظر اول و فرد باشد، به صورت $6n$، $6n+2$، $6n+3$ یا $6n+4$ نمی‌تواند باشد. بنابراین، فقط به یکی از دو صورت $6n+1$ و $6n+5$ می‌تواند ظاهر شود. بدیهی است که $6n+5$ را به صورت $6(n+1)-1$ می‌توان نوشت. پس، هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ به یکی از دو صورت $6t\pm1$ است.

مسأله‌ی ۲: ثابت کنید، هر عدد اول و فرد به یکی از دو صورت $4t\pm1$ است.

اثبات: طبق الگوریتم تقسیم، هر عدد طبیعی دلخواه به یکی از چهار صورت: $4k$، $4k+1$، $4k+2$ و $4k+3$ نوشته می‌شود. در صورتی که عدد مورد نظر اول و فرد باشد، به صورت‌های $4k$ و $4k+2$ نمی‌تواند باشد. از طرف دیگر، چون $4k+3$ را به صورت $4(k+1)-1$ می‌توان نوشت، پس هر عدد اول و فرد تنها به یکی از دو صورت $4t\pm1$ ظاهر می‌شود.

مسأله‌ی ۳: ثابت کنید، هر عدد طبیعی به صورت $6t-1$ یا $4t-1$، عامل اولی به همان صورت دارد.



اثبات: با فرض این‌که a عددی طبیعی و به صورت $a = ۶t - ۱$ باشد، بدیهی است که تجزیه‌ای به صورت عامل‌های اول به شکل $a = p_۱p_۲...p_n$ خواهد داشت. چون a عددی فرد است، واضح است که همه‌ی p_iها باید فرد باشند (یکی از p_iها زوج باشد، حاصل ضربشان زوج خواهد شد). چون p_iها همگی فرد و اول هستند، پس به یکی از دو صورت $۶k \pm ۱$ خواهند بود.

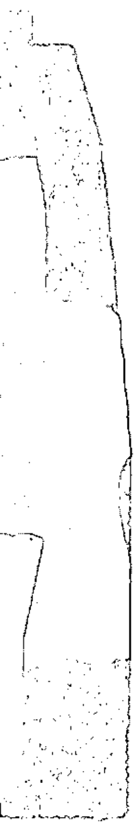
حال اگر همه‌ی عامل‌ها به صورت $۶k + ۱$ باشند، حاصل ضرب آن‌ها، یعنی a، باید به صورت $۶s+۱$ باشد که با فرض، یعنی $a = ۶t - ۱$، متناقض است. پس حداقل یکی از p_iها باید به صورت $۶k - ۱$ باشد. به همین ترتیب ثابت می‌شود که هر عدد طبیعی به صورت $۴t - ۱$، عامل اولی به شکل $۴n - ۱$ دارد.

مسأله‌ی ۴: ثابت کنید بی‌نهایت عدد اول به صورت $۴t - ۱$ یا $۶t - ۱$ وجود دارد.

اثبات: با فرض این‌که تنها n عدد اول $p_۱$، $p_۲$، ... و p_n به یکی از دو صورت فوق وجود دارد، به تناقض خواهیم رسید. زیرا اعداد $۴(p_۱p_۲...p_n) - ۱$ یا $۶(p_۱p_۲...p_n) - ۱$ اگر اول نباشند، مرکب هستند و هر یک عامل اولی به صورت خودشان دارند که جزو p_iها نیست؛ زیرا اگر این عامل اول که آن را به p نشان می‌دهیم، جزو p_iها باشد، در این صورت خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} p|۴(p_۱p_۲...p_n) \\ p|۴(p_۱p_۲...p_n)-۱\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(p تفاضل را می‌شمارد)}} p|۱$$

نتیجه‌ی $p|۱$، با فرض اول بودن p متناقض است. به همین ترتیب، برای عدد $۶t-۱$ نیز به همین نتیجه خواهیم رسید.



بنابراین p عدد اولی به جز p_iها خواهد بود. در این جا حکم ثابت است.

مسأله‌ی ۵: اگر p عددی اول و بزرگ‌تر از ۳ باشد؛ ثابت کنید: $p^۲-۱$ مضرب ۲۴ است.

اثبات: چون $۳\times۸=۲۴$، پس کافی است نشان دهیم: $p^۲-۱$ بر ۳ و ۸ بخش‌پذیر است. p فرد است و می‌دانیم مربع هر عدد فرد به صورت $p^۲=۸k+۱$ و یا $p^۲-۱=۸k$ است. از طرف دیگر، p عدد اول و غیر ۳ است، پس p به یکی از صورت‌های $p=۳t\pm۱$ نوشته می‌شود. بنابراین در هر صورت خواهیم داشت:

$$p = ۳t \pm ۱ \;;\; p^۲ = ۹t^۲ \pm ۶t + ۱$$
$$;\; p^۲ - ۱ = ۳(۳t^۲ \pm ۲t)$$
$$;\; p^۲ - ۱ = ۳s$$

در این جا ثابت شد که $p^۲-۱$ به ازای هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ مضربی از ۳ و ۸ و در نتیجه ۲۴ است.

مسأله‌ی ۶: اگر $(۲^p-۱)$ اول باشد، ثابت کنید p عددی اول است.

اثبات: اگر $۲^p-۱$ عددی اول و p مرکب باشد به تناقض خواهیم رسید. زیرا اگر p مرکب باشد، تجزیه‌ای نابدیهی به صورت $p=mn$ خواهد داشت که با فرض مسلم $۲ \le m < n < p$ خواهیم داشت:

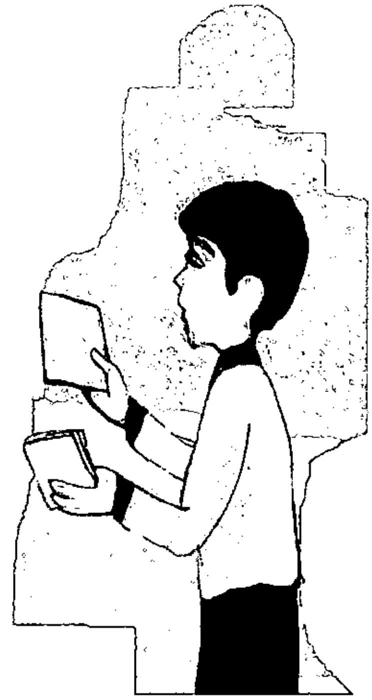
$$p = mn: ۲^p - ۱ = ۲^{mn} - ۱ = (۲^m)^n - ۱$$
$$= (۲^m - ۱)\left[(۲^m)^{n-۱} + (۲^m)^{n-۲} + ... + ۱\right] \quad (۷)$$

سمت راست برابری (۷)، حاصل ضرب دو عامل بزرگ‌تر از واحد و تجزیه‌ای نابدیهی برای $۲^p-۱$ است که با اول بودن آن در تناقض است. پس p اول است.

مسأله‌ی ۷: اگر p عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد، ثابت کنید: $p^۲+۲۳$ بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

اثبات: کافی است نشان دهیم، عدد $p^۲+۲۳$ بر ۳ و ۸ بخش‌پذیر است. از آن‌جا که p عددی اول و بزرگ‌تر از ۳ است، پس به صورت $p=۳k\pm۱$ می‌باشد. بنابراین:

$$p^۲ = ۹k^۲ \pm ۶k + ۱ = ۹k^۲ \pm ۶k + ۲۴ - ۲۳$$
$$= ۳(۳k^۲ \pm ۲k + ۸) - ۲۳$$
$$= ۳s - ۲۳ \;;\; p^۲ + ۲۳ = ۳s$$



همچنین، چون p عدد اول بزرگ‌تر از ۳ است، بنابراین فرد است و مربع آن به صورت زیر است:

$$p^{۲} = ۸t + ۱ \;;\; p^{۲} + ۲۳ = ۸t + ۲۴ = ۸(t + ۳) = ۸r$$

در این جا ثابت شد که $p^{۲}+۲۳$ برای هر p اول بزرگ‌تر از ۳، مضربی از ۳ و ۸ و در نتیجه مضربی از ۲۴ است.

مسأله‌ی ۸: ثابت کنید که تنها عدد اول به صورت $k^{۳}-۱$، عدد ۷ است.

اثبات: کافی است ثابت کنیم، عدد $k^{۳}-۱$ به ازای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۲ مرکب است. به این منظور عدد $k^{۳}-۱$ را تجزیه می‌کنیم:

$$k^{۳} - ۱ = (k - ۱)(k^{۲} + k + ۱)$$

واضح است که عدد $k^{۳}-۱$ فقط در حالت $k-۱=۱$ دارای تجزیه‌ی بدیهی است و در حالت $k-۱>۱$، دارای تجزیه‌ی نابدیهی است. یعنی به ازای $k=۲$ $(۲^{۳}-۱=۷)$، عدد $k^{۳}-۱$ اول و به ازای هر $k>۲$ مرکب است.

مسأله‌ی ۹: ثابت کنید بی‌نهایت عدد اول وجود دارد.

اثبات: ابتدا برای هر $n \ge ۱$، عدد طبیعی $k=n!+۱$ را در نظر می‌گیریم، چون $k>۱$، پس طبق قضیه، حداقل یک مقسوم‌علیه اول مثل p خواهد داشت. یعنی عدد اول p وجود دارد، به‌طوری که داشته باشیم:

$$p|k=n!+۱$$

از طرف دیگر باید: $p>n$. زیرا اگر $p \le n$، در این صورت خواهیم داشت:

$$p \le n: \begin{cases} p|n! \\ p|n!+۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{(p تفاضل را می‌شمارد)}} p|n!+۱-n! \Rightarrow p|۱ \quad (۸)$$

رابطه‌ی (۸) با اول بودن p متناقض است، پس باید: $p>n$.

در این جا، به ازای عدد دلخواه $n \ge ۱$، به یک عدد اول بزرگ‌تر از n دست یافته‌ایم. پس باید بی‌نهایت عدد اول وجود داشته باشد.

واضح است که به ازای هر $n \ge ۱$، به یک عدد اول جدید خواهیم رسید.

تمرین

۱. تعیین کنید کدام یک از اعداد زیر اول است:

الف) ۱۱۸۹ — ب) $۱۲!\pm۱$

ج) $۳\times۵\times۷\pm۲$ — د) $۲^{۱۳۳}\pm۱$

۲. نشان دهید، عدد $(۲^{pq}-۱)$ به ازای هر عدد اول p و q همیشه مرکب است و حداقل دارای یک عامل نابدیهی است.

۳. تابع با ضابطه‌ی $f(n) = n^{۲} - n + ۴۱$، به ازای $۱ \le n \le ۶۱$، چند عدد اول تولید می‌کند.

۴. ثابت کنید، اگر $(۲^{m}+۱)$ اول باشد، m باید به صورت توانی از ۲ باشد $(m = ۲^{n})$.

۵. اگر p عدد فرد و اول باشد و $p \ne ۵$، ثابت کنید: $(p^{۲}-۱)$ یا $(p^{۲}+۱)$، همیشه مضربی از ۱۰ است.

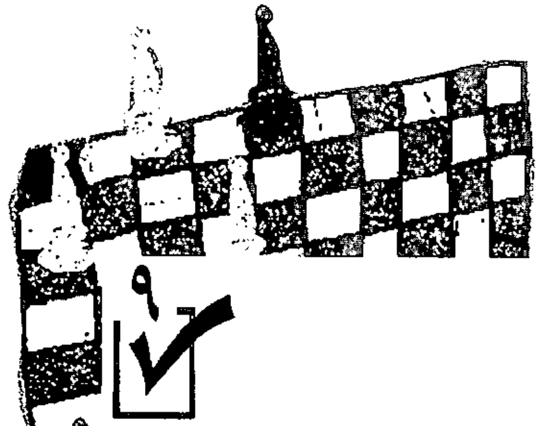
۶. ثابت کنید به ازای هر $n \ge ۲$، عدد $(n^{۴}+۴)$ مرکب است.

۷. حدس می‌زنند که بی‌نهایت عدد اول به صورت $n^{۲}+۱$ و $n^{۲}-۲$ وجود دارد. هفت نمونه از این عددها را بیابید.

۸. ثابت کنید، هر عدد به صورت $(۸^{n}+۱)$ مرکب است.

۹. با فرض $(a,b)=p$، حاصل $[a,b]$ و (a^{p},b^{p})، $(a^{p^{k}},b^{p})$ و $(a^{p!},b^{p-۱})$ را در صورتی که p عددی اول باشد، بیابید.

* www.primenumbersformula.com



پرویز شهریاری

اتحاد و معادله

برای حل معادله‌های قابل حل

عادت کنیم، معادله‌ی درجه دوم را، نه با استفاده از دستور، بلکه به طور مستقل حل کنیم. معادله‌ی درجه دوم در حالت کلی، به این صورت است:

$$ax^2+bx+c=0$$

مقدار a نمی‌تواند برابر صفر باشد، زیرا در این صورت به معادله‌ای از درجه‌ی اول می‌رسیم که حل آن دشوار نیست. پس، با فرض $a\neq 0$، می‌توانیم دو سمت معادله را بر a تقسیم کنیم:

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

$x^2+\frac{b}{a}x$ را به عبارتی که مجذور کامل باشد، تبدیل می‌کنیم. در سمت چپ برابری، $\frac{b}{a}x$، دو برابر x در جمله‌ی دوم است. یعنی جمله‌ی دوم $\frac{b}{2a}$ می‌شود. اگر $\frac{b^2}{4a^2}$، یعنی مجذور $\frac{b}{2a}$، را به دو سمت برابری اضافه کنیم، به دست می‌آید:

$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

اکنون، با جذر گرفتن از دو طرف، بعد بردن $\frac{b}{2a}$ به سمت راست برابری، مقدار x به دست می‌آید:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

این، همان دستور حل معادله‌ی درجه‌ی دوم است، ولی با این روش حل با همه‌ی مرحله‌ها آشنا می‌شوید و به حافظه برای به یاد سپردن دستور نیاز ندارید.

نمونه‌ی ۱. معادله‌ی $12x^2-17x+6=0$ را حل کنید.

حل: در آغاز دو سمت برابری را بر ۱۳ تقسیم می‌کنیم و عدد ۶ را هم به سمت راست برابری می‌بریم:

$$x^2-\frac{17}{12}x=-\frac{1}{2}$$

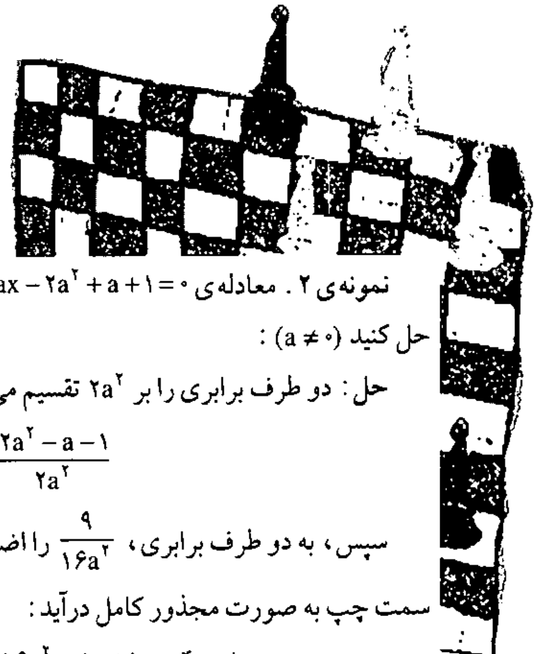
باید $x^2-\frac{17}{12}x$ را به مجذور کامل تبدیل کنیم. $\frac{17}{12}x$ دو برابر حاصل ضرب x در عدد دوم است. پس عدد دوم برابر $\frac{17}{24}$ می‌شود که باید مجذور آن را به دوطرف برابری اضافه کنیم.

$$(x-\frac{17}{24})^2=(\frac{17}{24})^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{576}$$

و اگر از دو سمت برابری جذر بگیریم:

$$x-\frac{17}{24}=\pm\frac{1}{24}\Rightarrow x=\frac{17}{24}\pm\frac{1}{24}$$

و از این جا دو جواب معادله به دست می‌آید: $x_1=\frac{3}{4}$ و $x_2=\frac{2}{3}$.



نمونه‌ی ۲ . معادله‌ی $2a^2x^2 - 3ax - 2a^2 + a + 1 = 0$ را حل کنید $(a \neq 0)$:

حل : دو طرف برابری را بر $2a^2$ تقسیم می‌کنیم :

$$x^2 - \frac{3}{2a}x = \frac{2a^2 - a - 1}{2a^2}$$

سپس، به دو طرف برابری، $\frac{9}{16a^2}$ را اضافه می‌کنیم تا سمت چپ به صورت مجذور کامل درآید :

$$(x - \frac{3}{4a})^2 = \frac{16a^2 - 8a + 1}{16a^2} = (\frac{4a-1}{4a})^2$$

از دو طرف برابری جذر می‌گیریم :

$$x - \frac{3}{4a} = \pm\frac{4a-1}{4a}$$

و از آن‌جا جواب‌های معادله به دست می‌آیند :

$$x_1 = \frac{1}{a} - 1 \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{1}{2a} + 1$$

تبدیل پارامتر به مجهول

برخی از معادله‌های پارامتری از درجه‌ی بالاتر از ۲ را می‌توان با تبدیل پارامتر به مجهول حل کرد. البته دو شرط دارد : ۱ . معادله نسبت به پارامتر از درجه‌ی دوم باشد؛ ۲ . معادله نسبت به پارامتر قابل حل باشد. به این مثال توجه کنید :

نمونه‌ی ۳. $2x^4 + x^3 - (3a+2)x^2 + 2x + a^2 - 1 = 0$ ، معادله‌ای است نسبت به x از درجه‌ی چهارم. ولی همین معادله نسبت به a از درجه‌ی دوم است و اگر شرط دوم را داشته باشد، قابل حل است. معادله را نسبت به a منظم می‌کنیم.

$$a^2 - 3x^2.a + (2x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1) = 0$$

که اگر آن را حل کنیم، به دو جواب می‌رسیم.

$$a = x^2 + x - 1 \quad \text{و} \quad a = 2x^2 - x + 1$$

اکنون هریک از این معادله‌ها را که از درجه‌ی دوم نسبت به x هستند، منظم می‌کنیم :

$$x^2 + x - (a+1) = 0 \quad \text{و} \quad 2x^2 - x + 1 - a = 0$$

و از این دو معادله، جواب‌های x به دست می‌آیند :

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{4a+5}) \quad \text{و} \quad x_{3,4} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{4a-3})$$

درباره‌ی این جواب‌ها، باید بحثی داشته باشیم تا ببینیم، در چه حالت‌هایی به جواب حقیقی می‌رسند.

۱ . اگر $a > \frac{3}{4}$ ، آن‌گاه ۴ ریشه‌ی حقیقی داریم.

۲ . اگر $-\frac{5}{3} < a < \frac{3}{4}$ ، آن‌گاه معادله دو ریشه‌ی حقیقی و دو ریشه‌ی موهومی دارد.

۳ . اگر $a < -\frac{5}{3}$ ، آن‌گاه چهار ریشه‌ی معادله موهومی است.

۴ . در حالت $a = \frac{3}{4}$ ، معادله دو ریشه برابر و دو ریشه‌ی ساده‌ی حقیقی دارد.

۵ . در حالت $a = -\frac{5}{4}$ ، معادله دارای دو ریشه‌ی برابر حقیقی و دو ریشه‌ی موهومی است.

مواظب باشید، بحث درباره‌ی تعداد جواب‌های حقیقی و موهومی را فراموش نکنید.

نمونه‌ی ۴. $x^3 - (3+\sqrt{3})x + 3 = 0$

حل : این معادله را می‌توان با تجزیه‌ی عبارت سمت چپ برابری حل کرد، ولی بهتر است با در نظر گرفتن $a = \sqrt{3}$ ، آن را به یک معادله‌ی پارامتری تبدیل کنیم :

$$x^3 - (a^2 + a)x + a^2 = 0$$

اکنون معادله را نسبت به پارامتر a منظم می‌کنیم :

$$(1-x)a^2 - x.a + a^2 = 0$$

که چون معادله‌ای است درجه دوم نسبت به مجهول a ، می‌توان آن را حل کرد :

$$a = x \quad \text{و} \quad a = \frac{x^2}{1-x}$$

اگر به جای a مقدارش $\sqrt{3}$ را قرار دهیم :

$$x = \sqrt{3} \quad \text{و} \quad x^2 + \sqrt{3}x - \sqrt{3} = 0$$

بنابراین، جواب‌های معادله‌ی درجه سوم به این صورت است :

$$x_1 = \sqrt{3} \quad \text{و} \quad x_{2,3} = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{3 + 4\sqrt{3}}}{2}$$

نمونه ی ۵. $(x+a)^4+(x+b)^4=c$

حل: این معادله را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\left[(x+\frac{a+b}{2})+\frac{a-b}{2}\right]^4+\left[(x+\frac{a+b}{2})-\frac{a-b}{2}\right]^4=c$$

اگر فرض کنیم:

$$x+\frac{a+b}{2}=t \quad \text{و} \quad \frac{a-b}{2}=\alpha$$

به این معادله می‌رسیم:

$$(t+\alpha)^4+(t-\alpha)^4=c\Rightarrow$$
$$2t^4+12a^2t^2+(2\alpha^2-c)=0$$

که یک معادله ی دومجذوری است و با فرض $t^2=y$، به معادله‌ای درجه‌ی دوم تبدیل می‌شود.

برای مثال، فرض کنید، می‌خواهیم این معادله را حل کنیم:

$$(x+2)^4+(x+5)^4=17$$

واسطه‌ی حسابی $x+2$ و $x+5$، یعنی $x+\frac{7}{2}$ را برابر t می‌گیریم:

$$(t-\frac{3}{2})^4+(t+\frac{3}{2})^4=17\Rightarrow$$
$$2t^4+27t^2-\frac{55}{8}=0$$

که از آن‌جا جواب‌های $t^2=\frac{1}{4}$ و $t^2=-55$ و یا $t^2=\pm\frac{1}{2}$ به دست می‌آیند (دو جواب دیگر موهومی هستند).

درنتیجه، اگر به جای t، مقدارش را برحسب x قرار دهیم، برای x به دست می‌آید:

$$x=-4 \quad \text{و} \quad x=-3$$

نمونه‌ی ۶. اگر $a+b=c+d$ باشد، این معادله را حل کنید:

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m$$

حل: این معادله را روی یک مثال حل می‌کنیم. مطلوب است حل معادله‌ی:

$$(x-3)(x-5)(x+2)(x+4)=-72$$

داریم: $5-4=3-2$ و معادله را به این صورت می‌نویسیم:

$$\left[(x+2)(x-3)\right]\times\left[(x+4)(x-5)\right]=72$$

و: $(x^2-x-6)(x^2-x-20)=72$ که اگر فرض کنیم $x^2-x=y$، به یک معادله‌ی درجه دوم می‌رسیم:

$$y^2-26y+48=0\Rightarrow t=2,24$$

از آن‌جا، دو معادله‌ی درجه دوم برای تعیین مقدار x به دست می‌آید.

$$x^2-2x=2 \quad \text{و} \quad x^2-2x=24$$

که جواب‌های x را به ما می‌دهند:

$$x_1=-1 \quad \text{و} \quad x_2=2 \quad \text{و} \quad x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{97}}{9}$$

معادله های وارون

به معادله‌ای وارون می‌گوییم که با تبدیل x به $\frac{1}{x}$ و یا x به $-\frac{1}{x}$، تغییر نکند. در حالت اول آن را معادله‌ی وارون مثبت و در حالت دوم آن را معادله‌ی وارون منفی می‌گویند.

نمونه ی ۷. این معادله‌ی وارون را حل کنید:

$$2x^4-13x^3+24x^2-13x+2=0$$

دو طرف این معادله را بر x^2 تقسیم می‌کنیم ($x\neq 0$ است) و از ضریب برابر فاکتور می‌گیریم:

$$2(x^2+\frac{1}{x^2})-13(x+\frac{1}{x})+24=0$$

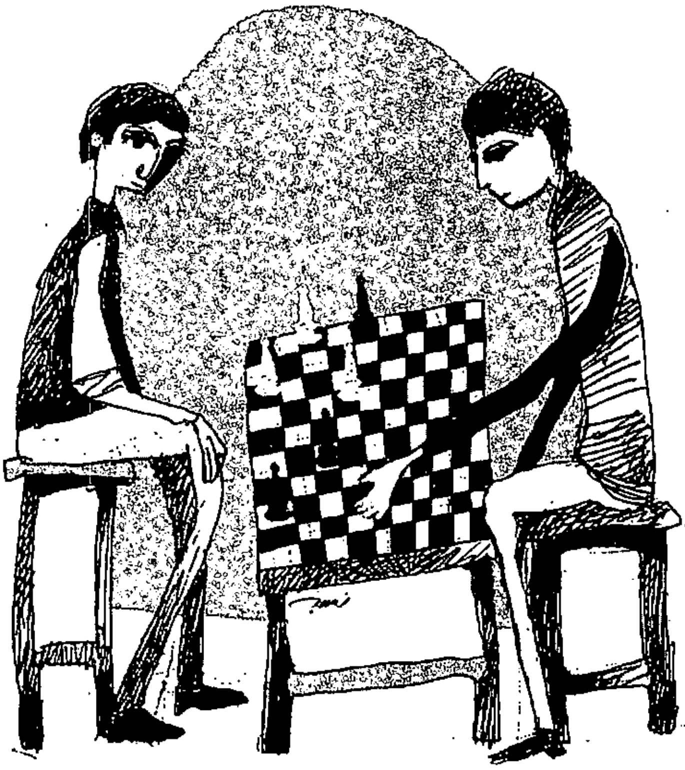
فرض می‌کنیم: $x+\frac{1}{x}=t$. با مجذور کردن دو طرف، به دست می‌آید:

$$x^2+\frac{1}{x^2}+2=t^2\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$$

بنابراین، معادله‌ی مفروض چنین می‌شود:

$$2(t^2-2)-13t+24=0$$

یعنی معادله‌ای درجه دوم به صورت $2t^2-13t+20=0$ به دست می‌آید که جواب آن و درنتیجه جواب‌های x را می‌توان پیدا کرد.



پاسخ: $x_۱ = ۲+\sqrt{۳}$ ، $x_۲ = ۲-\sqrt{۳}$ ، $x_۳ = ۲$ ، $x_۴ = \frac{۱}{۲}$.

نمونه ی ۸. این معادله را حل کنید.

$$۳۰x^۸ - ۷۳x^۷ + ۹۰x^۶ - ۲۹۲x^۵ + ۱۵۰x^۴ - ۲۹۲x^۳ + ۹۰x^۲ - ۷۳x + ۳۰ = ۰$$

حل: دو طرف معادله را بر $x^۴$ تقسیم می‌کنیم و از ضریب‌های برابر در معادله فاکتور می‌گیریم:

$$۳۰(x^۴ + \frac{۱}{x^۴}) - ۷۳(x^۳ + \frac{۱}{x^۳}) + ۹۰(x^۲ + \frac{۱}{x^۲}) - ۲۹۲(x + \frac{۱}{x}) + ۱۵۰ = ۰$$

اگر فرض کنیم: $x + \frac{۱}{x} = t$ خواهیم داشت:

$$x^۲ + \frac{۱}{x^۲} = t^۲ - ۲;\quad x^۳ + \frac{۱}{x^۳} = t^۳ - ۳t;$$

$$x^۴ + \frac{۱}{x^۴} = t^۴ - ۴t^۲ + ۲$$

و معادله به این صورت درمی‌آید:

$$۳۰t^۴ - ۷۳t^۳ - ۳۰t^۲ - ۷۳t + ۳۰ = ۰$$

که خود یک معادله ی وارون درجه ی ۳ است. دو سمت معادله را بر $t^۲$ تقسیم می‌کنیم: و سپس فرض می‌کنیم: $t + \frac{۱}{t} = y$. سرانجام به این معادله ی درجه دوم می‌رسیم:

$$۳۰y^۲ - ۷۳y - ۹۷ = ۰$$

از این جا مقدار y و بعد به کمک آن مقدار t و سپس به یاری آن، مقدار x به دست می‌آید:

پاسخ: معادله ی مفروض، دو ریشه ی حقیقی $x = \frac{۳ \pm \sqrt{۵}}{۲}$ و شش ریشه ی موهومی دارد.

نمونه ی ۹. مطلوب است حل این معادله:

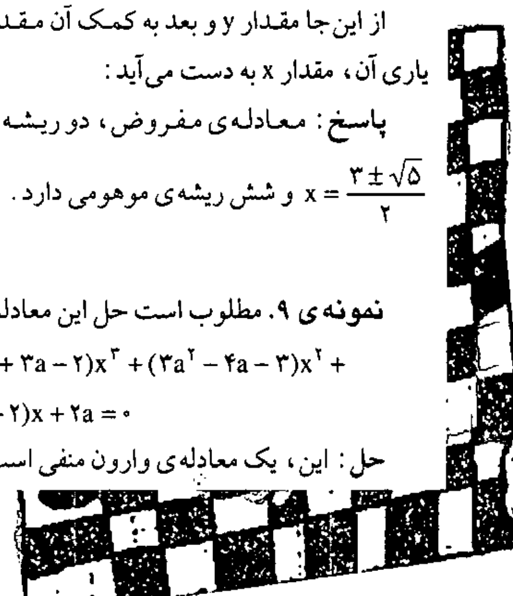
$$۳ax^۴ - (۲a^۲ + ۳a - ۲)x^۳ + (۳a^۲ - ۴a - ۳)x^۲ + (۲a^۲ + ۳a - ۲)x + ۲a = ۰$$

حل: این، یک معادله ی وارون منفی است و بنابراین، بعد از تقسیم دو سمت آن بر $x^۲$ ، باید $x - \frac{۱}{x}$ را مجهول تازه‌ای بگیریم. اگر فرض کنیم: $x - \frac{۱}{x} = t$ ، سرانجام به این معادله می‌رسیم:

$$۲at^۲ - (۲a^۲ + ۳a - ۲)t + ۳(a^۲ - ۱) = ۰$$

که برای t، دو جواب $\frac{۳}{۲}$ و $\frac{a^۲ - ۱}{a}$ را می‌دهد. درنتیجه با قراردادن این مقدارها در $x - \frac{۱}{x} = t$ ، مقدارهای x به دست می‌آیند.

پاسخ: $x_۱ = ۲$ ، $x_۲ = -\frac{۱}{۲}$ ، $x_۳ = a$ ، $x_۴ = -\frac{۱}{a}$.



حل چند معادله

نمونه ی ۱۰. معادله ی $x^۵ - ۵x^۳ + ۵x - ۱ = ۰$ را حل کنید.

حل: سمت چپ معادله ی مفروض را، به ترتیب این طور

می‌نویسیم:

$$x^5-5x^3+5x-1=(x^5-1)-5x(x^2-1)$$
$$=(x-1)(x^4+x^3-4x^2-4x+1)$$
$$=\frac{1}{4}(x-1)\left[(4x^4+4x^3+x^2)-6(2x^2+x)+9\right.$$
$$\left.-5(x^2+2x+1)\right]=\frac{1}{4}(x-1)\left[2(x^2+x-3)^2-5(x+1)^2\right]$$

پاسخ: $x_1=1$ و $x_{2,3}=\frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}\pm\sqrt{30+6\sqrt{5}})$

$$x_{4,5}=\frac{1}{4}(-1-\sqrt{5}\pm\sqrt{30-6\sqrt{5}})$$

نمونه‌ی ۱۱. $[x]=\left[\frac{x^3-2}{3}\right]$ ($[a]$، یعنی بزرگ‌ترین عدد درستی که از a تجاوز نکند.)

حل: روشن است، معادله برای مقدارهایی از x که در نابرابری‌های

$$\frac{x^3-2}{3}\ge x+1 \quad \text{و} \quad \frac{x^3-2}{3}\le x-1$$

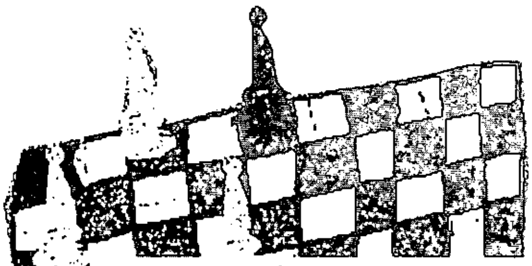
صدق کند، جواب ندارد. بین جواب‌های نامعادله‌ی اول $x\ge 3$ وجود دارد، زیرا داریم:

$$\frac{x^3-2}{3}\ge x+1\Rightarrow x^3\ge 3x+5\Rightarrow$$
$$x^2(x-3)\ge -3x^2+3x+5$$

وقتی $x\ge 3$ باشد، سمت چپ نابرابری غیرمنفی و سمت راست آن منفی است. بنابراین $x\ge 3$ جزو جواب‌های معادله نیست. ولی $x\le -2$ بین جواب‌های معادله‌ی دوم است، زیرا:

$$\frac{x^3-2}{3}\le x-1\Rightarrow x^3\le 3x-1$$
$$\Rightarrow x^2(x+2)\le 2x^2+2x-1$$

وقتی $x\le -2$ باشد، سمت راست نامعادله مثبت می‌شود، درحالی‌که سمت چپ آن مثبت نیست. بنابراین جواب‌های معادله‌ی مفروض را باید دربازه $-2<x<3$



جست‌وجو کرد. به این منظور باید این دستگاه‌ها را حل کرد:

$$1)\ \begin{cases}-2<\frac{x^3-2}{3}<-1\\ -2<x<-1\end{cases} \quad \text{و} \quad 2)\ \begin{cases}-1\le\frac{x^3-2}{3}<0\\ -1\le x<0\end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases}0\le\frac{x^3-2}{3}<1\\ 0\le x<1\end{cases} \quad \text{و} \quad 4)\ \begin{cases}1\le\frac{x^3-2}{3}<2\\ 1\le x<2\end{cases}$$

$$5)\ \begin{cases}2\le\frac{x^3-2}{3}<3\\ 2<x<3\end{cases}$$

دستگاه (۳) دارای جواب نیست و بقیه‌ی دستگاه‌ها، این جواب‌ها را دارند:

$$-\sqrt[3]{4}<x<-1 \quad \text{و} \quad -1\le x<0$$
$$\sqrt[3]{5}\le x<2 \quad \text{و} \quad 2\le x<\sqrt[3]{11}$$

پاسخ: $-\sqrt[3]{4}\le x<0$ و $\sqrt[3]{5}<x<\sqrt[3]{11}$.

نمونه‌ی ۱۲: $\frac{2x+3y}{2x}=\left[\frac{y^2}{x^2}\right]$

حل: $\frac{3y}{2x}$ باید عددی درست باشد. آن را k می‌نامیم و به این معادله می‌رسیم:

$$1+k=\left[\frac{y^2}{x^2}\right]=\left[\frac{4k^2}{9}\right]$$

و از آن‌جا:

$$1+k\le\frac{4k^2}{9}<2+k$$

به دو نامعادله می‌رسیم:

$$\begin{cases}4k^2-9k-9\ge 0\\ 4k^2-9k-18<0\end{cases}$$

درنتیجه: $3\le k<3/6$ ، چون k عددی درست است، پس: $k=3$. سرانجام داریم:

$$y=2x$$

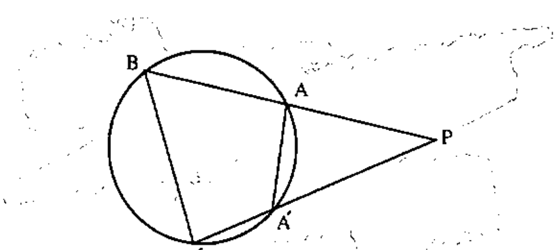
با راهیان المپیادهای ریاضی ۳

غلامرضا یاسی‌پور

قوت نقطه

نقطه‌ی P و دایره‌ای در یک صفحه را مشخص می‌کنیم. نقاط تقاطع خط دلخواه گذرنده از P را با این دایره، A و B می‌نامیم. حاصل ضرب $PA \cdot PB$ به قوت P نسبت به این دایره موسوم است. قوت مزبور مستقل از انتخاب خط AB است، زیرا اگر $A'B'$ خط گذرنده‌ی دیگری از P، با A' و B' بر دایره‌ی مورد بحث باشد، مثلث‌های PAA' و $PB'B$ متشابه‌اند (شکل ۱). درنتیجه:

$$PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$$



شکل ۱

مکان نقاط دارای قوت‌های برابر نسبت به دو دایره، عمود بر خط المرکزین آن دو دایره است. این خط به «**محور اصلی**»[1] موسوم است. فرض می‌کنیم O_1 و O_2 مراکز و R_1 و R_2

شعاع‌های دو دایره باشند. به ازای نقطه‌ی P، با درنظر گرفتن خط PO_1، ملاحظه می‌کنیم که قوت P نسبت به دایره‌ی اول عبارت است از:

$(PO_1 + R)(PO_1 - R)$

به همین ترتیب، قوت P نسبت به دایره‌ی دوم برابر است با:

$(PO_2 + R)(PO_2 - R)$

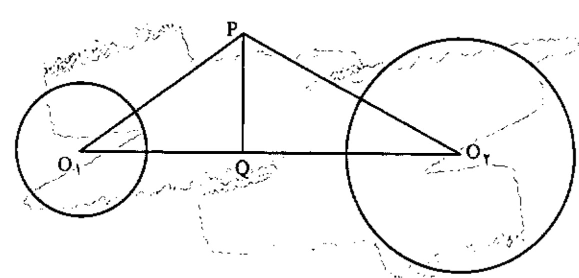
نتیجه می‌گیریم که:

$PO_1^2 - PO_2^2 = R_1^2 - R_2^2$

اگر Q را به عنوان تصویر P بر O_1O_2 اختیار کنیم (شکل ۲)، آن‌گاه کاربرد قضیه‌ی **فیثاغورس** در مورد مثلث‌های QPO_1 و PQO_2 مستلزم این است که:

$QO_1^2 = R_1^2 - R_2^2$

درنتیجه، مکان هندسی موردنظر خط عمود بر O_1O_2 و گذرنده از نقطه‌ی Q واقع بر O_1O_2 است که فواصلش از مراکز دوایر در رابطه‌ی فوق صدق می‌کند. اگر دایره‌های مزبور متقاطع باشند، واضح است که محور اصلی شامل نقاط تقاطعشان خواهد بود.



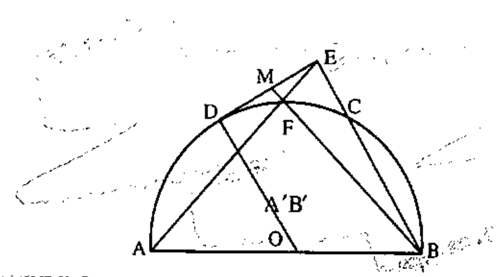
شکل ۲

در صورتی که سه دایره، با مراکز غیرواقع بر یک خط راست داشته باشیم، محور اصلی جفت اول با محور اصلی جفت دوم تقاطع می‌کند. در این صورت، نقطه تقاطعشان دارای قوت‌های برابر نسبت به سه دایره، و موسوم به «مرکز اصلی»[2] است. درنتیجه، محورهای اصلی سه جفت دایره‌ی مورد بحث «همرس» یا «متقارب» هستند.

مفهوم **قوت نقطه**، چنان‌که مثال بعد نشان می‌دهد، می‌تواند در حل مسائل مفید باشد.

فرض می‌کنیم C نقطه‌ای بر نیم‌دایره‌ای به قطر AB، و D نقطه‌ی وسط کمان AC باشد. تصویر نقطه‌ی D بر خط BC را با E، و تقاطع خط AE با نیم‌دایره را با F نمایش می‌دهیم. ثابت کنید BF پاره‌خط DE را نصف می‌کند.

اثبات را با توجه به این مطلب آغاز می‌کنم که DE مماس بر دایره است (شکل ۳). برای ملاحظه‌ی درستی این موضوع، فرض می‌کنیم O مرکز دایره باشد. از آن‌جا که D وسط کمان AC است، $OD \perp AC$. زاویه‌ی BCA قائمه است، در نتیجه DE موازی AC است. این مستلزم آن است که $DE \perp OD$. بنابراین DE بر دایره مماس می‌شود.



شکل ۳

تقاطع BF و DE را با M نمایش می‌دهیم. نیاز است نشان دهیم:

$EM = MD$

با استفاده از قوت نقطه‌ی M نسبت به دایره، خواهیم داشت:

$MD^2 = MF \cdot MB$

از آن‌جا که AB قطر است، زاویه‌ی AFB قائمه است. بنابراین، در مثلث قائم‌الزاویه‌ی EMB، EF ارتفاع است. درنتیجه:

$EM^2 = MF \cdot MB$

بنابراین، $EM^2 = MD^2$ که نشان می‌دهد، M وسط DE است.

در ادامه مسائلی را آورده‌ایم که با استفاده از قوت نقطه و ویژگی‌های محور اصلی حل می‌شوند.

۱. فرض می‌کنیم P نقطه‌ای درون یک دایره و چنان باشد که سه وتر گذرنده از P به طول‌های برابر باشند. ثابت کنید P مرکز دایره است.

۲. در مورد نقطه‌ی P واقع در درون زاویه‌ی xOy، $A \in Ox$ و $B \in Oy$ را چنان بیابید که $P \in AB$ و $AP \cdot BP$ مینی‌مال باشد.

۳. صفحه‌ی π و دو نقطه‌ی A و B در دو طرف متقابل آن مفروضند. کره‌ای رسم کنید که شامل A و B باشد و با صفحه‌ی π در دایره‌ای با کم‌ترین شعاع ممکن تلاقی کند.

۴. فرض می‌کنیم در مثلث ABC، O، I و H، به ترتیب، مرکز دایره‌ی محیطی، مرکز دایره‌ی محاطی داخلی، و محل برخورد ارتفاعات آن باشند. طول قطعات OI و OH را برحسب شعاع دایره‌ی محیطی، شعاع دایره‌ی محاطی داخلی، و زاویه‌های مثلث ABC محاسبه کنید.

۵. فرض می‌کنیم ABC یک مثلث، و A'، B' و C'، به ترتیب، نقاطی بر اضلاع BC، CA و AB باشند. نقطه‌ی تقاطع دوم دایره‌های ABA' و $A'B'C'$ را با M، و نقطه‌ی تقاطع دوم دایره‌های ABB' و $A'B'C'$ را با N نمایش می‌دهیم. به همین شیوه، نقاط P، Q، R و S را، به ترتیب، تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که:

الف) دست کم یکی از موارد زیر رخ می‌دهد:

۱. خط‌های سه‌گانه‌ی $(AB, A'M, B'N)$، $(BC, B'P, C'Q)$، $(CA, C'R, A'S)$، به ترتیب، در C''، A'' و B'' متقاربند.

۲. $A'M$ و $B'N$ موازی AB، یا $B'P$ و $C'Q$ موازی BC، یا $C'R$ و $A'S$ موازی CA هستند.

ب) وقتی که حالت (۱) رخ می‌دهد، نقاط A''، B'' و C'' بر یک استقامتند.

۶. در میان نقاط A، B، C و D هیچ سه نقطه‌ای بر یک استقامت نیستند. خطوط AB و CD در E، و BC و DA در F متقاطعند. ثابت کنید یا دوایر با اقطار AC، BD و EF از نقطه‌ای مشترک می‌گذرند، یا هیچ دو دایره‌ای از آن‌ها نقطه‌ی مشترکی ندارند.

۷. فرض می‌کنیم C_1 و C_2 دایره‌های هم‌مرکز باشند و C_2 درون C_1 قرار داشته باشد. از نقطه‌ی A بر C_1، مماس AB را بر C_2 رسم می‌کنیم $(B \in C_2)$. فرض می‌کنیم، C دومین نقطه‌ی تقاطع AB و C_1، و D وسط AB باشد. خط گذرنده از A دایره‌ی C_2 را در E و F چنان قطع می‌کند که عمودمنصف‌های DE و CF در نقطه‌ی M‌ی واقع بر AB متقاطع می‌شوند. نسبت $\frac{AM}{MC}$ را با دلیل به‌دست آورید.

۸. فرض می‌کنیم، ABC مثلثی حادالزّوایا باشد. نقاط M و N را به ترتیب بر اضلاع AB و AC درنظر می‌گیریم. دایره‌های به قطرهای BN و CM در نقاط P و Q تقاطع می‌کنند. ثابت کنید P، Q، و H، محل تلاقی ارتفاعات مثلث، واقع بر یک استقامت هستند.

۹. فرض می‌کنیم ABCD یک چهارضلعی محدب و محاط در نیم‌دایره‌ی s به قطر AB باشد. خطوط AC و BD در E، و خطوط AD و BC در F تقاطع می‌کنند. خط EF نیم‌دایره‌ی s را در G و خط AB را در H قطع می‌کند. ثابت کنید، E وسط پاره‌خط GH است، اگر و تنها اگر G وسط پاره‌خط FH باشد.

۱۰. فرض می‌کنیم، ABC یک مثلث و D و E، به ترتیب، بر اضلاع AB و AC چنان باشند که DE موازی BC باشد. و فرض می‌کنیم، P نقطه‌ای درون مثلث ADE و F و

G، به ترتیب تقاطعات DE با خطوط BP و CP باشند. نیز فرض می‌کنیم، Q تقاطع دوم دایره‌های محیطی مثلث‌های PDG و PFE باشد. ثابت کنید نقاط A، P، و Q بر یک خط مستقیم قرار دارند.

۱۱. فرض می‌کنیم A، B، C و D چهار نقطه‌ی متمایز واقع بر یک خط باشند. دایره‌های به قطرهای AC و BD در X و Y متقاطعند. خط XY با BC در Z تلاقی می‌کند. فرض می‌کنیم، P نقطه‌ای بر خط XY، غیر از Z، باشد. خط CP دایره‌ی به قطر AC را در C و M، و خط BP دایره‌ی به قطر BD را در B و N قطع می‌کند. ثابت کنید، خطوط AM، DN، و XY متقاربند.

۱۲. نیم‌دایره‌ای به مرکز O و قطر AB را درنظر می‌گیریم. خطی AB را در M و نیم‌دایره را در C و D چنان قطع می‌کند که $MB<MA$ و $MD<MC$. دوایر محیطی مثلث‌های AOC و DOB بار دیگر در نقطهٔ K متقاطع می‌شوند. نشان دهید MK و KO متعامدند.

حل مسائل قوت نقطه

۱. فرض می‌کنیم AB، CD، و DE سه وتر گذرنده از نقطه‌ی P باشند. اگر قرار دهیم:

$AP = a$ و $BP = b$ و $CP = c$

$DP = d$ و $EP = e$ و $FP = f$

آن‌گاه با نوشتن توان نقطه‌ی موردنظر نسبت به دایره، به‌دست می‌آوریم:

$$ab = cd = ef$$

از آن‌جا که وترها به طول‌های برابرند، و نیز داریم که:

$$a + b = c + d = e + f$$

درنتیجه:

$$\{a, b\} = \{c, d\} = \{e, f\}$$

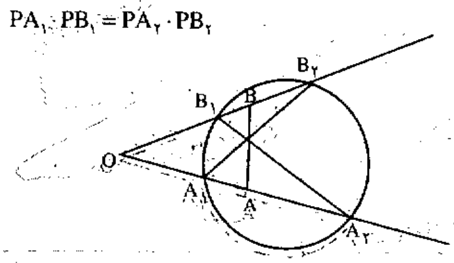
بدون از دست دادن عمومیت موضوع، می‌توان فرض کرد:

$$a = c = e$$

دایره‌ی اولیه و دایره‌ی به مرکز P و شعاع a، دارای نقاط مشترک A، C، و E هستند؛ درنتیجه باید منطبق شوند. در این صورت P مرکز آن دایره است.

۲. ادعا می‌کنیم، اگر A و B حاصل‌ضرب را مینی‌مم کنند، OAB مثلثی متساوی‌الساقین است. در واقع، اگر A_1 و B_1 دو نقطه‌ی دیگر بر Ox و Oy با $P \in A_1B_1$ باشند، $A_2 \in Ox$ و $B_2 \in Oy$ را چنان انتخاب می‌کنیم که: $P \in A_2B_2$ و $\angle B_2A_2O = \angle A_1B_1O$ (شکل۱). چهارضلعی $A_1A_2B_1B_2$ دوری است. درنتیجه با نوشتن قوت نقطه‌ی P نسبت به دایره‌ی محیطی آن رابطه‌ی زیر را حاصل می‌کنیم

$$PA_1 \cdot PB_1 = PA_2 \cdot PB_2$$



شکل ۴

از طرف دیگر، A و B بر وترهای A_1A_2 و B_1B_2 قرار دارند، درنتیجه داخل دایره‌اند. این مطلب مستلزم آن است که $PA \cdot PB < PA_1 \cdot PB_1$ که مینی‌مم بودن را به اثبات می‌رساند.
[Pimsner, M., Popa, S., Probleme de geometrie elementară (Problems in elementary geometry), Ed. Didactică si Pedagogică Bucharest, 1979.]

۳. فرض می‌کنیم، MN قطری از دایره‌ی تقاطع کره‌ی موردنظر با صفحه‌ی گذرنده از نقطه‌ی P باشد که بر تقاطع AB با صفحه قرار دارد. قرار می‌دهیم:

$AP = a$ و $BP = b$ و $MP = x$ و $NP = y$

با نوشتن قوت نقطه‌ی P نسبت به دایره‌ی عظیمه[3]ی مشخص شده با AB و MN، $xy = ab$ را به دست می‌آوریم. می‌خواهیم $x + y$ را هنگامی که حاصل ضرب xy مفروض است، مینی‌مم کنیم. با استفاده از نابرابری AM − GM نتیجه می‌گیریم که مینی‌مم $x + y$ برابر $2\sqrt{ab}$ است که به ازای $x = y = \sqrt{ab}$ به دست می‌آید. به این ترتیب، کره‌ی موردنظر از A و B می‌گذرد و شامل دایره‌ای به مرکز P و شعاع $\sqrt{ab}$ است [با همکاری S. Savchev].

۴. فرض می‌کنیم، A' تقاطع دوم خط IA با دایره‌ی محیطی مثلث باشد. قوت نقطه‌ی I نسبت به این دایره عبارت است از:

$$IA \cdot IA' = R^2 - OI^2$$

که R شعاع دایره‌ی محیطی مورد بحث است. AI نیمساز، و فاصله‌ی I تا AB برابر r، شعاع دایره‌ی محاطی داخلی است. بنابراین:

$$AI = r / \sin(A/2)$$

از طرف دیگر، در مثلث ATB داریم:

$$\angle IA'B = \angle AA'B = \angle ACB$$
$$\angle IBA' = \angle ICA' = \angle BAC/2 + \angle ABC/2$$

نتیجه می‌شود که ATB متساوی‌الساقین است، و از آن‌جا:

$$IA' = BA'$$

قانون سینوس‌ها در مثلث ABA' رابطه‌ی زیر را می‌دهد:

$$BA' = 2R\sin(A/2)$$

درنتیجه:

$$OI^2 = R^2 - IA \cdot BA' = R^2 - (r/\sin(A/2)) \cdot 2R\sin(A/2)$$
$$= R(R - 2r)$$

اکنون نشان می‌دهیم که:

$$OH^2 = R^2(1 - 8\cos A\cos B\cos C)$$

اثبات را وقتی زاویه‌ی A حادّه است انجام می‌دهیم. حالات قائمه یا منفرجه بودن مشابه است. فرض می‌کنیم، A'' تقاطع دوم خط AH با دایره‌ی محیطی باشد. با نوشتن قوت نقطه‌ی H نسبت به این دایره به دست می‌آوریم:

$$HA \cdot HA'' = R^2 - OH^2$$

توجه داشته باشید، از آن‌جا که:

$$\angle BHC = 180^\circ - \angle BAC$$

A'' قرینه‌ی A نسبت به ضلع BC است. بنابراین:

$$HA'' = 2HD$$

که در آن D تقاطع AH با BC است.

اکنون طول‌های AH و HD را محاسبه می‌کنیم. اگر تقاطع BH و AC را با E نمایش دهیم، آن‌گاه در مثلث ABE:

$$AE = AB\cos A = 2R\sin C\cos A$$

و در مثلث AHE:

$$AH = \frac{AE}{\sin C} = 2R\cos A$$

و

$$HD = AD - AH = 2R\sin B\sin C - 2R\cos A = 2R\sin B\sin C + 2R\cos(B+C) = 2R\cos B\cos C$$

در نتیجه:

$$OH^2 = R^2 - HA \cdot HA'' = R^2 - 2R\cos A \cdot 4R\cos B\cos C$$
$$= R^2(1 - 8\cos A\cos B\cos C)$$

حل مسائل ۵ الی ۱۲ را در شماره بعد ملاحظه بفرمایید.

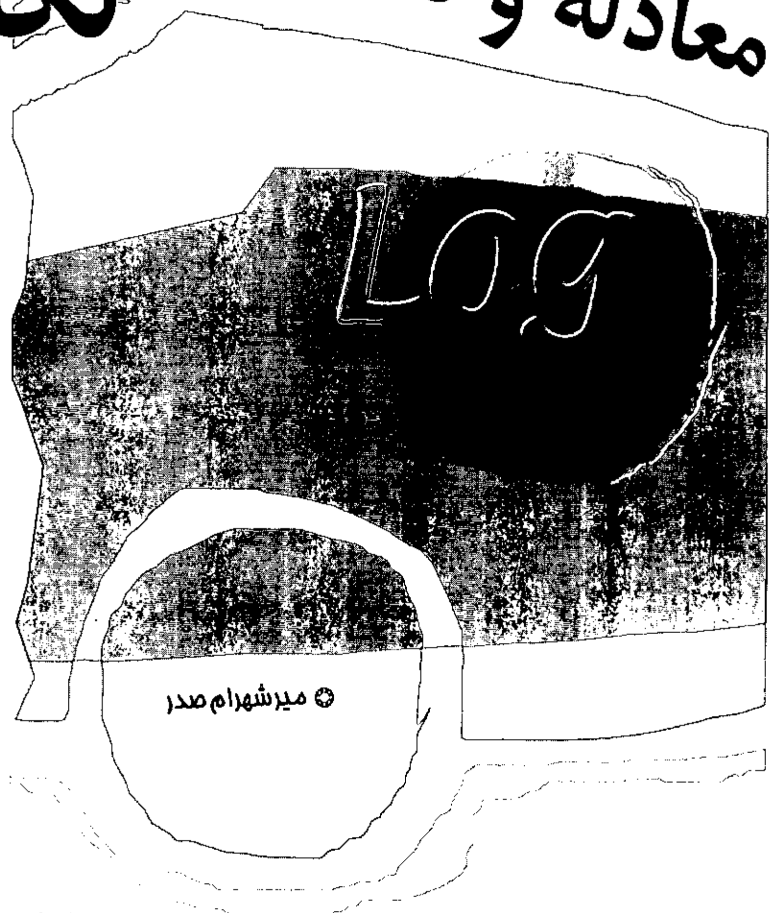
زیرنویس

1. radical aris
2. radical center
3. great circle
4. coaxial

معادله‌ها و نامعادله‌های لگاریتمی

اشاره:

با تعریف تابع لگاریتمی در سال دوم آشنا شده‌اید. برای مثال، می‌دانید که برای پیدا کردن دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{\log_2^{(x+1)}-3}$ باید نامعادله‌ی $\log_2^{(x+1)}-3\geq 0$ را حل کنید. اکنون هدف این مقاله کامل‌تر کردن اطلاعات شما درباره‌ی معادله‌ها و نامعادله‌های لگاریتمی است تا بتوانید این گونه مسائل را بهتر حل کنید.



میرشهرام صدر

الف. معادله‌های لگاریتمی

چنان‌که می‌دانید، عمل جمع، عمل معکوسِ تفریق و عمل ضرب، عمل معکوسِ تقسیم است. اکنون عمل لگاریتم را عمل معکوسِ توان درنظر می‌گیریم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف: فرض کنیم $0<a\neq 1$ یک عدد حقیقی مثبت و ثابت باشد. تابع لگاریتمی $y=\log_a x$ را تابع معکوسِ تابع نمایی $y=a^x$ می‌نامیم.

معادله‌ای را که در آن، مجهول در عبارتی لگاریتمی آمده باشد، معادله‌ی لگاریتمی می‌نامیم. برای حل این گونه معادله‌ها، از روش‌های ذیل استفاده می‌کنیم:

۱. به کمک تعریف لگاریتم

این روش برای حل معادله‌ای به کار می‌رود که در یک طرف آن یک عبارت لگاریتمی و در طرف دیگر، یک عدد وجود داشته باشد:

$$\log_a p(x)=b \Leftrightarrow p(x)=a^b$$

در معادله‌ی بالا، $p(x)$ عبارتی جبری بر حسب متغیر x است.

تذکر مهم

قبل از حل معادله‌ی لگاریتمی، ابتدا دامنه‌ی تعریف آن را به دست می‌آوریم و بعد از حل معادله، جواب‌هایی قابل قبول هستند که در دامنه‌ی تعریف صدق کنند.

مثال: معادله‌های زیر را حل کنید:

الف) $\log_۲(x+۱)=۳$ ب) $\log_۳(۳\log_۳^{(x-۱)})=۲$

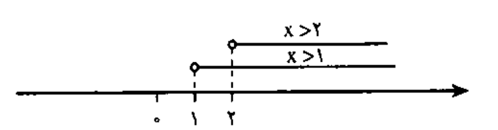
حل: الف) ابتدا دامنه را می‌یابیم، سپس معادله را حل می‌کنیم:

$x+۱>۰ \Rightarrow x>-۱ \Rightarrow D=(-۱,+\infty)$

$\log_۲^{x+۱}=۳ \Rightarrow x+۱=۲^۳ \Rightarrow x=۷\in D$ قابل قبول

ب) ابتدا دامنه‌ی تعریف را پیدا کرده، و سپس معادله را حل می‌کنیم. می‌دانیم که $\log_۳^۱=۰$، بنابراین داریم:

$$\begin{cases}\log_۳^{(x-۱)}>۰ \Rightarrow \log_۳^{(x-۱)}>\log_۳^۱ \Rightarrow x-۱>۱ \Rightarrow x>۲\\ x-۱>۰ \Rightarrow x>۱\end{cases}$$



$D=(۲\ ,\ +\infty)$

بنابر تعریف لگاریتم:

$$\log_۳(۳\log_۳^{(x-۱)})=۲ \Rightarrow ۳\log_۳(x-۱)=۳^۲$$
$$\Rightarrow \log_۳(x-۱)=۳$$
$$\Rightarrow x-۱=۳^۳ \Rightarrow x=۲۸\in D$$ قابل قبول

۲. به کمک خواص لگاریتم

از این روش برای حل معادله‌هایی استفاده می‌کنیم که در آن‌ها چند عبارت لگاریتمی وجود دارد. ابتدا عبارت‌های لگاریتمی را ساده می‌کنیم و سپس به معادله‌هایی مانند $\log_a p(x)=\log_a q(x)$ (۱) یا $\log_a p(x)=b$ (۲) می‌رسیم که برای حل هر کدام، به صورت‌های زیر عمل می‌کنیم ($p(x)$ و $q(x)$ عبارت‌هایی جبری برحسب متغیر x هستند):

$\log_a p(x)=\log_a q(x) \Rightarrow p(x)=q(x)$ (۱)

$\log_a p(x)=b \Rightarrow p(x)=a^b$ (۲)

قبل از حل چند مثال، خواص لگاریتم را جهت یادآوری در ذیل می‌آوریم.

۱. $(a>۰,a\neq ۱)\ \log_a^۱=۰$

۲. $(a>۰)\ \log_a^a=۱$

۳. $(a>۰,a\neq ۱)\ a^{\log_a^x}=x$

۴. $\log_a^{xy}=\log_a^x+\log_a^y$
$(x>۰,y>۰,a>۰,a\neq ۱)$

۵. $\log_a^{\frac{x}{y}}=\log_a^x-\log_a^y$
$(x>۰,y>۰,a>۰,a\neq ۱)$

۶. $\log_{a^n}^{x^m}=\frac{m}{n}\log_a^x$
$(x^m>۰,a^n>۰,a^n\neq ۱)$

۷. $\log_b^a=\frac{۱}{\log_a^b}$
$(a>۰,b>۰,a\neq ۱,b\neq ۱)$

۸. $\log_b^a=\frac{\log_x^a}{\log_x^b}$
$(a>۰,b>۰,b\neq ۱,x>۰,x\neq ۱)$

مثال: معادله‌های زیر را حل کنید:

الف) $\log(x+۲)+\log(x-۲)=\log x+\log ۳$

ب) $\log_۲(x+۱۴)+\log_۲(x+۲)=۶$

ج) $\log(x+۱)-\frac{۱}{۲}\log(x-۱)=\log ۳$

د) $\log_۲(۹-۲^x)=۱۰^{\log(۳-x)}$

حل:الف)

$$\begin{cases}x+۲>۰ \Rightarrow x>-۲\\ x-۲>۰ \Rightarrow x>۲ \Rightarrow D=(۲,+\infty)\\ x>۰ \Rightarrow x>۰\end{cases}$$

$$\log(x+2)+\log(x-2)=\log x+\log 3$$
$$\Rightarrow \log(x+2)(x-2)=\log x\times 3$$
$$\Rightarrow x^2-4=3x \Rightarrow x^2-3x-4=0$$
$$\Rightarrow (x-4)(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=4\in D & \text{قابل قبول} \\ x=-1\notin D & \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

ب)

$$\begin{cases} x+14>0 \Rightarrow x>-14 \\ x+2>0 \Rightarrow x>-2 \end{cases} \Rightarrow x>-2 \Rightarrow D=(-2,\infty)$$
$$\log_2^{(x+14)}+\log_2^{(x+2)}=6 \Rightarrow \log_2(x+14)(x+2)=6$$
بنابه تعریف لگاریتم: $\Rightarrow (x+14)(x+2)=2^6$
$$\Rightarrow x^2+16x-36=0 \Rightarrow (x+18)(x-2)=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=-18\notin D & \text{قابل قبول} \\ x=2\in D & \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

ج)

$$\begin{cases} x+1>0 \Rightarrow x>-1 \\ x-1>0 \Rightarrow x>1 \end{cases} \Rightarrow x>1 \Rightarrow D=(1,+\infty)$$
$$\log(x+1)-\frac{1}{2}\log(x-1)=\log 3$$
$$\Rightarrow \log(x+1)-\log(x-1)^{\frac{1}{2}}=\log 3$$
$$\Rightarrow \log\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}=\log 3$$
$$\Rightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}=3$$

معادله‌ی به‌دست آمده، معادله‌ای گنگ است که برای حل آن ابتدا دامنه‌اش را پیدا می‌کنیم:

$$x-1>0 \Rightarrow x>1$$
$$\left(\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}\right)^2=3^2 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{x-1}=9 \Rightarrow x^2+2x+1=9x-9$$
$$\Rightarrow x^2-7x+10=0 \Rightarrow (x-2)(x-5)=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=2\in D & \text{قابل قبول} \\ x=5\in D & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

د)

$$\begin{cases} 9-2^x>0 \Rightarrow 2^x<9 \Rightarrow \log 2^x<\log 9 \Rightarrow x\log 2<\log 9 \\ \Rightarrow x<\frac{\log 9}{\log 2} \Rightarrow x<3/17 \\ 3-x>0 \Rightarrow x<3 \end{cases}$$

چون

$$\frac{\log 9}{\log 2}=\frac{\log 3^2}{\log 2}=\frac{2\log 3}{\log 2}\simeq\frac{2\times 0/4771}{0/3010}\simeq 3/7$$

بنابراین: $D=(-\infty,3)$

$$\log_2^{(9-2^x)}=10^{\log(3-x)} \Rightarrow \log_2^{(9-2^x)}=(3-x)$$
$$\Rightarrow 2^{(3-x)}=9-2^x \Rightarrow \frac{2^3}{2^x}=9-2^x$$

دو طرف معادله را در 2^x ضرب می‌کنیم:

$$2^x\left(\frac{2^3}{2^x}\right)=2^x(9-2^x) \Rightarrow 2^3=9\times 2^x-(2^x)^2$$

با فرض این‌که $2^x=t$، خواهیم داشت:

$$t^2-9t+8=0 \Rightarrow (t-1)(t-8)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=8 \end{cases}$$
$$\begin{cases} t=1 \Rightarrow 2^x=1 \Rightarrow x=0 & \text{قابل قبول} \\ t=8 \Rightarrow 2^x=8 \Rightarrow x=3 & \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

۳. تغییر متغیر

در معادله‌های لگاریتمی که برای مثال، $\log_a p(x)$ در آن‌ها به کار رفته باشد، و علاوه بر آن، عبارت $(\log_a p(x))^n$ نیز موجود باشد، با فرض $t=\log_a p(x)$(۱)، معادله‌ی لگاریتمی را تغییر متغیر می‌دهیم تا به معادله‌ای غیرلگاریتمی برسیم. سپس با حل این معادله مقادیر t به دست می‌آیند که با

جایگزینی آن‌ها در رابطه‌ی (۱)، مقادیر مجهولات به‌دست می‌آیند.

مثال: معادله‌های زیر را حل کنید:

الف) $(\log x)^2 - \log x^3 + 2 = 0$

ب) $3\sqrt{\log_2^x} - \log_2^{8x} + 1 = 0$

حل:

الف) $x > 0 \Rightarrow D = (0,+\infty)$

$$(\log x)^2 - \log x^3 + 2 = 0 \Rightarrow (\log x)^2 - 3\log x + 2 = 0$$

با فرض t=logx خواهیم داشت:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow (t-1)(t-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 1 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = 10^1 \in D & \text{قابل قبول} \\ t = 2 \Rightarrow \log x = 2 \Rightarrow x = 10^2 = 100 \in D & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

ب)

$$\begin{cases} \log_2^x > 0 \Rightarrow \log_2^x > \log_2^1 \Rightarrow x > 1 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow D = (1,+\infty)$$

$$3\sqrt{\log_2^x} - \log_2^{8x} + 1 = 0 \Rightarrow 3\sqrt{\log_2^x} - (\log_2^8 + \log_2^x) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{\log_2^x} - \log_2^x - 2 = 0$$

با فرض این که $t = \log_2^x$ ، خواهیم داشت:

$$3\sqrt{t} - t - 2 = 0 \Rightarrow 3\sqrt{t} = t + 2 \Rightarrow (3\sqrt{t})^2 = (t+2)^2$$

$$\Rightarrow 9t = t^2 + 4t + 4 = 0 \Rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (t-4)(t-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 1 \Rightarrow \log_2^x = 1 \Rightarrow x = 2^1 \in D & \text{قابل قبول} \\ t = 4 \Rightarrow \log_2^x = 4 \Rightarrow x = 2^4 = 16 \in D & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

۴. لگاریتم گرفتن از دو طرف معادله

برای حل معادله‌هایی که در آن‌ها مجهول به صورت عبارت لگاریتمی و در توان باشد، از دو طرف معادله لگاریتم می‌گیریم و آن را حل می‌کنیم.

مثال: معادله‌های زیر را حل کنید:

الف) $x^{\log x} = 1000x^2$

ب) $(x+1)^{\log(x+1)} = 100(x+1)$

حل:

الف) $x > 0 \Rightarrow D = (0,+\infty)$

$$x^{\log x} = 1000x^2 \Rightarrow \log(x^{\log x}) = \log(1000x^2)$$

$$\Rightarrow \log x . \log x = \log 1000 + \log x^2$$

$$\Rightarrow (\log x)^2 = 3 + 2\log x$$

با فرض این که $t = \log x$ ، خواهیم داشت:

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow (t-3)(t+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = -1 \Rightarrow \log x = -1 \Rightarrow x = 10^{-1} = \frac{1}{10} \notin D & \text{غیرقابل قبول} \\ t = 3 \Rightarrow \log x = 3 \Rightarrow x = 10^3 = 1000 \in D & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

ب) $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow D = (-1,+\infty)$

$$(x+1)^{\log(x+1)} = 100(x+1)$$

$$\Rightarrow \log\left[(x+1)^{\log(x+1)}\right] = \log[100(x+1)]$$

$$\Rightarrow \log(x+1).\log(x+1) = \log 100 + \log(x+1)$$

$$\Rightarrow \left(\log(x+1)\right)^2 - \log(x+1) - 2 = 0$$

با فرض این‌که $t = \log(x+1)$ ، خواهیم داشت:

$$t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow (t-2)(t+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$t = -1 \Rightarrow \log(x+1) = -1 \Rightarrow x + 1 = 10^{-1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{10} - 1 = \frac{-9}{10} \in D \quad \text{قابل قبول}$$

$$t = 2 \Rightarrow \log(x+1) = 2 \Rightarrow x + 1 = 10^2 \Rightarrow x = 99 \in D \quad \text{قابل قبول}$$

۵. استفاده از مبنای جدید در لگاریتم

در معادله‌های لگاریتمی که مبناهای عبارت‌های لگاریتمی در آن‌ها با هم برابر نیستند، با استفاده از دستور $\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$ مبناها را یکسان و سپس معادله را حل می‌کنیم.

مثال: معادله‌های زیر را حل کنید:

الف) $\log_{\sqrt{5}}^{x}\cdot\sqrt{\log_x^{5\sqrt{5}}+\log_{\sqrt{5}}^{5\sqrt{5}}}=\sqrt{6}$

ب) $1+\log_2(x-1)=\log_{(x-1)}^{4}$

حل:

الف) $\begin{cases} x>0 \\ x>0, x\neq 1 \end{cases} \Rightarrow D=(0,1)\cup(1,+\infty)$

$$\log_{\sqrt{5}}^{x}\cdot\sqrt{\log_x^{5\sqrt{5}}+\log_{\sqrt{5}}^{5\sqrt{5}}}=\sqrt{6} \Rightarrow \log_{\sqrt{5}}^{x}\cdot\sqrt{\frac{\log_{\sqrt{5}}^{5\sqrt{5}}}{\log_x^{\sqrt{5}}}+3}=\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{5}}^{x}\cdot\sqrt{3\log_{\sqrt{5}}^{x}+3}=\sqrt{6}$$

با فرض این‌که $t=\log_{\sqrt{5}}^{x}$ ، خواهیم داشت:

$$t\sqrt{3t+3}=\sqrt{6} \Rightarrow t^2(3t+3)=6 \Rightarrow 3t^2(t+1)=6$$

$$\Rightarrow t^3+t^2-2=0 \Rightarrow (t^3-1)+(t^2-1)=0$$

$$\Rightarrow (t-1)(t^2+t+1)+(t-1)(t+1)=0$$

$$\Rightarrow (t-1)(t^2+t+1+t+1)=0$$

$$\Rightarrow (t-1)(t^2+2t+2)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t-1=0 \Rightarrow t=1 \\ t^2+2t+2=0, \quad \Delta=4-8=-4<0 \text{ این معادله ریشه ندارد} \end{cases}$$

$t=1 \Rightarrow \log_{\sqrt{5}}^{x}=1 \Rightarrow x=\sqrt{5}^{1} \Rightarrow x=\sqrt{5}\in D$ قابل قبول

ب)

$$\begin{cases} x-1>0 \Rightarrow x>1 \\ x-1\neq 1 \Rightarrow x>1 \Rightarrow x\neq 2 \end{cases} \Rightarrow D=(1,2)\cup(2,+\infty)$$

$$1+\log_2^{(x-1)}=\log_{(x-1)}^{4} \Rightarrow 1+\log_2^{(x-1)}=\frac{\log_2^4}{\log_2^{(x-1)}}$$

$$\Rightarrow 1+\log_2^{(x-1)}=2\log_2^{(x-1)}$$

با فرض $t=\log_2^{(x-1)}$ ، خواهیم داشت:

$$1+t=2t \Rightarrow t=1 \Rightarrow \log_2^{(x-1)}=1 \Rightarrow x-1=2^1$$

$$\Rightarrow x=3\in D \qquad \text{قابل قبول}$$

ب. نامعادله‌های لگاریتمی

نامعادله‌های لگاریتمی را به دو دسته‌ی کلی، تقسیم‌بندی و روش حل هر کدام را جداگانه بررسی می‌کنیم:

دسته‌ی اول. برای حل نامعادله‌ی زیر:

$$\log_{f(x)} p(x) > \log_{f(x)} q(x)$$

که در آن $p(x)$، $q(x)$ و $f(x)$، عبارت‌های جبری بر حسب متغیر x هستند، کافی است اجتماع مجموعه جواب‌های دو دستگاه زیر را به‌دست آوریم:

$$\begin{cases} f(x)>1 \\ p(x)>q(x) \\ q(x)>0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} 0<f(x)<1 \\ p(x)<q(x) \\ p(x)>0 \end{cases}$$

به طور مشابه، برای حل نامعادله‌ی زیر:

$$\log_{f(x)} p(x) \geq \log_{f(x)} q(x)$$

کافی است، اجتماع مجموعه جواب‌های دو دستگاه زیر را به دست آوریم:

$$\begin{cases} f(x)>1 \\ p(x)\geq q(x) \\ q(x)>0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} 0<f(x)<1 \\ p(x)\leq q(x) \\ p(x)>0 \end{cases}$$

دسته‌ی دوم. برای حل نامعادله‌ی زیر:

$$\log_{f(x)} p(x) < \log_{f(x)} q(x)$$

که در آن $p(x)$، $q(x)$ و $f(x)$، عبارت‌های جبری بر حسب متغیر x هستند، کافی است اجتماع مجموعه جواب‌های دو دستگاه زیر را به‌دست آوریم:

$$\begin{cases} f(x)>1 \\ p(x)<q(x) \\ p(x)>0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} 0<f(x)<1 \\ p(x)>q(x) \\ q(x)>0 \end{cases}$$

به طور مشابه، برای حل نامعادله‌ی زیر:

$$\log_{f(x)} p(x) \leq \log_{f(x)} q(x)$$

کافی است اجتماع مجموعه جواب‌های دو دستگاه زیر را

به دست آوریم :

$$\begin{cases}0<f(x)<1\\ p(x)\ge q(x)\\ q(x)>0\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases}f(x)>1\\ p(x)\le q(x)\\ p(x)>0\end{cases}$$

مثال: نامعادله‌های زیر را حل کنید :

۱) $\log(x^{2}-2x-3)\ge 0$

۲) $\log_7 \dfrac{x-2}{x-3}<0$

۳) $\log_2(2x-1)\ge -2$

۴) $\log_{\frac{1}{11}}(2x+21)<-2$

۵) $\log_x(x+1)\le \log_{\frac{1}{x}}(2-x)$

حل:

.۱

$$\log(x^2-2x-3)\ge 0 \Rightarrow \log_{10}(x^2-2x-3)\ge \log_{10}1$$

$$\Rightarrow \begin{cases}10>1\\ x^2-2x-3\ge 1\Rightarrow x^2-2x-4\ge 0\\ 1>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow D=\left(-\infty,1-\sqrt{5}\right]\cup\left[1+\sqrt{5},\infty\right)$$

.۲

$$\log_7\frac{x-2}{x-3}<0\Rightarrow \log_7\frac{x-2}{x-3}<\log_7 1\Rightarrow \begin{cases}7>1\\ \dfrac{x-2}{x-3}<1\\ \dfrac{x-2}{x-3}>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{x-3}<0\Rightarrow x<3\Rightarrow x\in(-\infty,3)\\ x\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)\end{cases}$$

$$\Rightarrow D=(-\infty,2)$$

.۳

$$\log_2(2x-1)\ge -2\Rightarrow \log_2(2x-1)\ge \log_2 2^{-2}\Rightarrow \begin{cases}2>1\\ (2x-1)\ge 2^{-2}\\ 2^{-2}=\dfrac{1}{4}>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow (2x-1)\ge \frac{1}{4}\Rightarrow x\ge\frac{5}{8}\Rightarrow D=\left[\frac{5}{8},\infty\right)$$

.۴

$$\log_{\frac{1}{11}}(2x+21)<-2\Rightarrow \log_{\frac{1}{11}}(2x+21)<\log_{\frac{1}{11}}\left(\frac{1}{11}\right)^{-2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}0<\dfrac{1}{11}<1\\ (2x+21)>\left(\dfrac{1}{11}\right)^{-2}\Rightarrow 2x+21>121\Rightarrow x>50\Rightarrow D=(50,\infty)\\ \left(\dfrac{1}{11}\right)^{-2}=121>0\end{cases}$$

.۵

$$\log_x(x+1)\le \log_{\frac{1}{x}}(2-x)\Rightarrow \log_x(x+1)\le -\log_x(2-x)$$

$$\log_x(x+1)\le \log_x(2-x)^{-1}\Rightarrow \log_x(x+1)\le \log_x\frac{1}{2-x}$$

برای یافتن مجموعه جواب نامعادله‌ی بالا، باید اجتماع مجموعه جواب‌های دو دستگاه را به دست آوریم :

$$\begin{cases}0<x<1\\ x+1\ge \dfrac{1}{2-x}\\ \dfrac{1}{2-x}>0\end{cases}(2) \quad \text{و} \quad \begin{cases}x>1\\ x+1\le \dfrac{1}{2-x}\\ x+1>0\end{cases}(1)$$

ابتدا دستگاه (۱) را حل می‌کنیم :

$$(1)\begin{cases}x+1-\dfrac{1}{2-x}<0\\ x>1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \le \frac{-1+\sqrt{5}}{-2} \text{ یا } \frac{1+\sqrt{5}}{2} \le x < 2 \\ x > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_1 = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right)$$

اکنون مجموعه جواب دستگاه (۲) را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x+1-\frac{1}{2-x} \ge 0 \\ x < 2 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{5}}{-2} \le x \le \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ یا } x > 2 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

(۲)

$$\Rightarrow D_2 = (0,1)$$

$$\Rightarrow D = D_1 \cup D_2 \Rightarrow D = (0,1) \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right)$$

تمرین:

نامعادله‌های زیر را حل کنید:

۱) $\log_{\frac{1}{3}}(5x-1) \ge 0$

۲) $\log_2(x^2-4x-5) \le 4$

۳) $\log_{\frac{1}{5}}(\sqrt{x^2-2}-x+1) < 0$

۴) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2}{6}-x+\frac{35}{24}\right) \ge 0$

۵) $\sqrt{4-x^2}\left(\log_3 \frac{x+1}{x}+2\right) \le 0$

۶) $\left|\log_2(x^2+x-4)\right| < 1$

۷) $\log_{3x+5}(9x^2+8x+8) > 2$

۸) $\log_{0/1}(x^2+x+2) > \log_{0/1}(x+3)$

۹) $5\log_x\left(\frac{8-12x}{x-6}\right) \ge 25$

۱۰) $\log_{(x-\frac{9}{2})} \frac{x+4}{2x-6} \le \log_{(x-\frac{9}{2})}(x-5)$

معادله‌های زیر را حل کنید.

۱. $4^{(\log_2(x-3)+\log_2^5)} = 50$

۲. $\log \frac{x+5}{2} = \frac{1}{2}\log(2x-1)$

۳. $\log_x^{\sqrt{5}} + \log_x^{5x} = \frac{9}{4} + (\log_x^{\sqrt{5}})^2$

۴. $2\log_2 \frac{x-7}{x-1} + \log_2 \frac{x-1}{x+1} = 1$

۵. $\log_2^{(x+4)} + \log_{\sqrt{2}}^{(x+4)} + \log_{\sqrt[3]{2}}^{(x+4)} = 7$

معماهای فکری و منطقی

چهار گاو سیاه و سه گاو قهوه‌ای در پنج روز به اندازه‌ی سه گاو سیاه و پنج گاو قهوه‌ای در چهار روز شیر می‌دهند.

کدام نوع گاو شیر بیش‌تری می‌دهد؛ سیاه یا قهوه‌ای؟

(مسابقه‌ی آزاد ریاضی کانادا - سال ۲۰۰۰)

مسابقه‌های ریاضی در کشورهای مختلف دنیا

هوشنگ شرقی

از این شماره، سلسله مطالبی درباره‌ی مسابقه‌های ریاضی کشورهای مختلف دنیا خواهیم داشت. مسابقه‌هایی موردنظر ماست که مسائل آن‌ها در حد متوسطی باشد، تا مورد استفاده‌ی اکثر دانش‌آموزان قرار گیرند. در عین حال، بین سؤالات آن‌ها، مسائل رقابتی و چالش‌برانگیز[1] هم باشد؛ به طوری که برای علاقه‌مندان رشته‌ی ریاضی هم جالب توجه باشند. نمونه‌های بسیاری از مسابقات ریاضی با این ویژگی‌ها وجود دارند که از این شماره به معرفی آن‌ها می‌پردازیم. پاسخ و حل تشریحی مسائل را نیز در همان شماره می‌آوریم. همچنین، سعی می‌کنیم شرایط مسابقه و اطلاعات جانبی آن را نیز به علاقه‌مندان ارائه دهیم. در این شماره، به مسابقه‌های آزاد ریاضی کانادا در سال ۲۰۰۰ میلادی می‌پردازیم.

سؤال‌ها در دو بخش الف و ب ارائه شده‌اند. در بخش الف، هشت سؤال وجود دارد و هر سؤال دارای ۵ امتیاز است. با ارائه‌ی جواب هر سؤال (بدون نیاز به محاسبه) می‌توانید امتیاز کامل را بگیرید. در بخش ب، چهار سؤال وجود دارد که هر سؤال آن دارای ۱۰ امتیاز است و باید راه‌حل کامل ارائه شود.

توجه به نکات زیر برای شرکت کنندگان الزامی است.

۱. استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

۲. مدت امتحان $\frac{1}{2}$ ۲ ساعت است.

قسمت الف

۱. عملگر «Δ» با رابطه‌ی $a\Delta b = 1-\frac{a}{b}, b\neq 0$ بیان شده است. مقدار $(1\Delta 2)\Delta(3\Delta 4)$ چیست؟

۲. دنباله‌ی عددی... و ۵۴ و ۴۵ و ۳۶ و ۲۷ و ۱۸ و ۹، شامل مضرب‌های متوالی ۹، داده شده است. از این دنباله، دنباله‌ی دیگری با ضرب جملات به صورت متوالی در ۱- به دست می‌آید: ... و ۵۴ و ۴۵- و ۳۶ و ۲۷- و ۱۸ و ۹- اگر مجموع نخستین n جمله‌ی این دنباله مساوی ۱۸۰ باشد، n را به دست آورید.

۳. نماد $n!$ برای معرفی حاصل ضرب زیر:

$$n(n-1)(n-2)\ldots(3)(2)(1)$$

به کار می‌رود. برای **مثال:** $4!=(4)(3)(2)(1)$

n را طوری به دست آورید که داشته باشیم:

$$n!=(2^{15})(3^{6})(5^{3})(7^{2})(11)(13)$$

۴. نماد $\lfloor x\rfloor$ به معنی بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی x است. برای مثال، $\lfloor 4\rfloor = 4, \lfloor\pi\rfloor = 3, \lfloor 5/7\rfloor = 5$

مقدار مجموع زیر را به دست آورید:

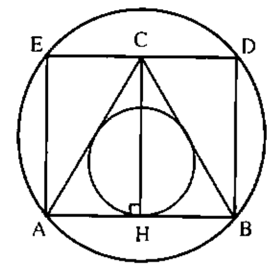
$$\lfloor\sqrt{1}\rfloor+\lfloor\sqrt{2}\rfloor+\lfloor\sqrt{3}\rfloor+\lfloor\sqrt{4}\rfloor+\cdots\lfloor\sqrt{48}\rfloor+\lfloor\sqrt{49}\rfloor+\lfloor\sqrt{50}\rfloor$$

۵. چند عدد طبیعی پنج رقمی می‌توان نوشت که حاصل ضرب ارقام آن‌ها مساوی ۲۰۰۰ باشد؟

۶. معادله‌ی $4(16^{\sin^2 x}) = 2^{6\sin x}$ را برای $0 \le x \le 2\pi$ حل کنید.

۷. دنباله‌ی عددهای $\ldots, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots$ و با رابطه‌ی $a_n-(n+1)a_{2-n}=(n+3)^2$ تعریف شده است. مقدار a_0 را محاسبه کنید.

۸. در شکل مقابل، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع و شعاع دایره‌ی محاطی آن مساوی ۱ است. دایره‌ی بزرگ‌تری نیز رسم شده است که از رئوس مستطیل ABDE می‌گذرد. طول قطر دایره‌ی بزرگ‌تر چه قدر است؟



قسمت ب

۱. مثلث ABC با رئوس $A(0, 0)$ و $B(0, 9)$ و $C(6, 0)$ داده شده است. نقاط P و Q روی ضلع AB قرار دارند، به طوری که: AP=PQ=QB. به طریق مشابه، نقاط R و S روی AC واقعند، به قسمی که: AR=RS=SC. رأس C را به نقاط P و Q همچنین، رأس B را به نقاط R و S وصل می‌کنیم.

الف) معادله‌ی خط راستی را که از نقاط R و B می‌گذرد، بنویسید.

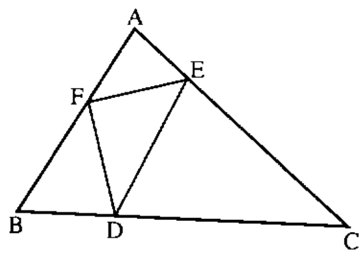
ب) معادله‌ی خط راستی که از نقاط P و C می‌گذرد را بنویسید.

ج) پاره‌خط‌های PC و RB در نقطه‌ی X و پاره‌خط‌های QC و SB در نقطه‌ی Y متقاطع هستند. ثابت کنید، نقاط A ، X و Y روی یک خط راست واقعند.

۲. در مثلث ABC، نقاط D، E و F به ترتیب روی اضلاع BC، CA و AB واقعند؛ به طوری که: $\angle AFE = \angle BFD$ ، $\angle BDF = \angle CDE$ و $\angle CED = \angle AEF$.

الف) ثابت کنید: $\angle BDF = \angle BAC$

ب) اگر AB=۵، BC=۸ و CA=۷ ، طول BD را بیابید.

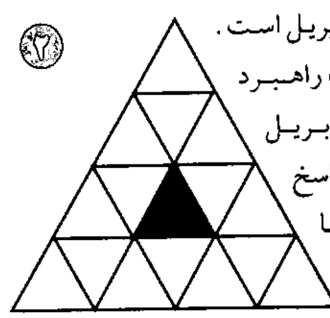


۳. الف) آلفونس و بریل بازی خود را از شکل هندسی مقابل شروع می‌کنند. آلفونس آغازگر بازی است و شکل اولیه را در امتداد یکی از خطوط راست برش می‌دهد. وی قطعه‌ای را که شامل مثلث سیاه‌رنگ است، به بریل می‌دهد و قطعه‌ی دیگر را دور می‌اندازد. سپس بریل همین کار را می‌کند و قطعه‌ی شامل مثلث سیاه‌رنگ را به آلفونس می‌دهد و قطعه‌ی دیگر را دور می‌اندازد. این عمل تا آن‌جا ادامه می‌یابد که مثلث سیاه به یک نفر برسد و او برنده‌ی مسابقه است.

۱

با استدلال، نشان دهید که همواره یک راهبرد پیروزی برای بریل وجود دارد. (بریل همواره می‌تواند برنده باشد. مترجم)

ب) آلفونس و بریل، اکنون بازی دیگری را با همان قاعده‌ی بازی الف و این بار با شکل ۲ انجام می‌دهند و آغازگر بازی بریل است.



۲

آیا باز هم یک راهبرد پیروزی برای بریل وجود دارد؟ (پاسخ خود را با استدلال دقیق ارائه دهید.)

۴. دنباله‌ی $t_1, t_2, t_3, \dots t_n$ با n جمله و با قانون‌های $t_1=1$ ، $t_2=4$ و $t_k = t_{k-1} + t_{k-2}$ و k=۳و۴و ... و n داده شده است. فرض کنید که T مجموعه‌ی جملات این دنباله باشد؛ یعنی $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$

الف) چند عدد صحیح مثبت وجود دارد که بتوان آن‌ها را به صورت مجموع دقیقاً دو جمله‌ی متمایز عضو T بیان کرد؟

ب) چند عدد صحیح مثبت وجود دارد که بتوان آن‌ها را به صورت مجموع دقیقاً سه جمله‌ی متمایز عضو T بیان کرد؟

حل مسائل مسابقه‌ی آزاد ریاضی کانادا (۲۰۰۰)

قسمت الف

۱.

$$a\Delta b = 1-\frac{a}{b} \Rightarrow 1\Delta 2 = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}, 3\Delta 4 = 1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$(1\Delta 2)\Delta(3\Delta 4) = (\frac{1}{2})\Delta(\frac{1}{4}) = 1-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 1-2 = -1$$

۲. با کمی دقت درمی‌یابید که مجموع هر دو جمله‌ی متوالی از دنباله‌ی جدید مساوی ۹ است:

$-9+18=9$ و $-27+36=9$ و $-45+54=9$ و ...

وقتی مجموع n جمله مساوی ۱۸۰ است، در نتیجه باید ۲۰ جفت از این دو جمله‌ها با هم جمع شده باشند؛ یعنی $n=40$

۳. روش اول:

$$(2^{15})(3^6)(5^3)(7^2)(11)(13) = 1\times 2\times 3\times 2^2\times 5\times(2\times 3)\times(7)(2^3)(3^2)\times$$
$$(2\times 5)\times(11)\times(2^2\times 3)\times(13)\times(2\times 7)\times(3\times 5)\times(2^4) = 16! \Rightarrow n=16$$

روش دوم: چون توان ۷ در $n!$، ۲ است، پس: $14 \le n < 21$. و چون عامل ۱۷ در $n!$ وجود ندارد، پس: $14 \le n \le 16$. و با توجه به توان ۵ که مساوی سه است، پس: $15 \le n \le 16$؛ یعنی ۱۶ یا $n=15$ و با توجه به توان ۲ درمی‌یابیم که: $n=16$.

۴.

$$\lfloor\sqrt{1}\rfloor+\lfloor\sqrt{2}\rfloor+\lfloor\sqrt{3}\rfloor+\lfloor\sqrt{4}\rfloor+\dots+\lfloor\sqrt{48}\rfloor+\lfloor\sqrt{49}\rfloor+\lfloor\sqrt{50}\rfloor$$
$$=(1+1+1)+(2+2+2+2+2)+(3+3+3+3+3+3+3)+\dots$$

یعنی سه عدد ۱، پنج عدد ۲، هفت عدد ۳، نه عدد ۴، یازده عدد ۵ و سیزده عدد ۶، تا $\lfloor\sqrt{48}\rfloor$ داریم. همچنین، $\lfloor\sqrt{50}\rfloor = \lfloor\sqrt{49}\rfloor = 7$ بنابراین، مجموع فوق برابر است با:

$$1\times 3+2\times 5+3\times 7+4\times 9+11\times 5+13\times 6+2\times 7=$$

$$3+10+21+36+55+78+14=217$$

□۵. این یک مسأله‌ی خوب از آنالیز ترکیبی است. عدد پنج رقمی $\overline{abcde}$ را می‌خواهیم بنویسیم به طوری که: $abcde=2000$ و $2000=2^4\times5^3$. بنابراین، باید سه رقم از ارقام a و b و c و d و e مساوی ۵ باشند. برای دو رقم دیگر نیز دو حالت داریم: یا هر دو مساوی ۴ هستند و یا یکی مساوی ۸ و دیگری مساوی ۲ است. پس باید تعداد عددهای پنج رقمی با سه رقم پنج و دو رقم چهار (مانند ۵۵۴۴۵)، و یا سه رقم ۵ و یک رقم ۸ و یک رقم ۲ (مانند ۵۸۵۲۵) را بشماریم.

می‌دانیم که تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز مساوی $n!$ است، ولی اگر تعدادی از این اشیا تکراری باشند، تعداد جایگشت‌های آن‌ها از تقسیم $n!$ بر فاکتوریل‌های تعداد اشیای تکراری به دست می‌آید. برای مثال، تعداد جایگشت‌های حروف کلمه‌ی «استدلال» برابر است با: $\frac{7!}{2!2!}$ (زیرا دو حرف الف و دو حرف ل تکراری هستند). بنابراین، تعداد عددهای با سه رقم ۵ و دو رقم ۴ برابر است با: $\frac{5!}{2!3!}=10$ و تعداد عددهای پنج رقمی با سه رقم ۵، یک رقم ۲ و یک رقم ۸ برابر است با: $\frac{5!}{3!}=20$. در نتیجه، تعداد کل عددهای پنج رقمی مساوی ۳۰=۲۰+۱۰ است.

□۶. $4(16^{\sin^2 x}) = 2^{6\sin x} \Rightarrow 2^{2+4\sin^2 x} = 2^{6\sin x} \Rightarrow$

$4\sin^2 x + 2 = 6\sin x \Rightarrow 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \Rightarrow$

$$\sin x = 1 \quad \text{یا} \quad \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \qquad x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$0 \le x \le 2\pi \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$$

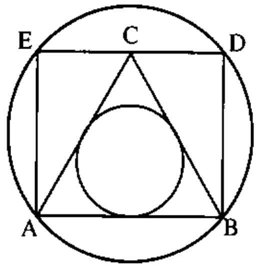
□۷. $a_n - (n+1)a_{2-n} = (n+3)^2$

$$\left.\begin{array}{l} n=0 \Rightarrow \quad a_0 - a_2 = 9 \\ n=2 \Rightarrow \quad a_2 - 3a_0 = 25 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$(a_0 - a_2) + (a_2 - 3a_0) = 9 + 25 \Rightarrow -2a_0 = 34 \Rightarrow a_0 = -17$$

سؤال: آیا می‌توانید مقدار a_2 را به دست آورید؟

□۸. می‌دانیم که شعاع دایره‌ی محاطی در هر مثلث از دستور $r=\frac{S}{P}$ به دست می‌آید که در این دستور، S مساحت و p نصف محیط مثلث است.



از طرف دیگر، در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ و $P=\frac{3a}{2}$ و در نتیجه: $r=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{3a}{2}}=\frac{\sqrt{3}a}{6}$

و چون: r=۱، پس: $\frac{\sqrt{3}a}{6}=1$ و در نتیجه: $a=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$؛ یعنی: $AB=AC=BC=2\sqrt{3}$

همچنین، ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع $\frac{\sqrt{3}}{2}$ برابر طول ضلع آن است. (چرا؟)

بنابراین: $DB=CH=AE=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2\sqrt{3}=3$ و طول قطر دایره‌ی بزرگ‌تر مساوی طول قطر مستطیل است. (چرا؟) در نتیجه: $R=\sqrt{AB^2+BD^2}=\sqrt{12+9}=\sqrt{21}$

حل مسائل قسمت ب را در شماره‌ی آینده ملاحظه بفرمایید.

1.Challenging Problems

مسائل برای حل

ریاضیات سال اول

○ حمیدرضا امیری

۱. عبارت $x^3 + 2xy^2 - 3y^3$ را بر $x + 2y$ تقسیم کرده و خارج قسمت و باقی‌مانده را به‌دست آورید؟

۲. حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها به‌دست آورید؟

الف) $(2x^2 - 3z)(2x^2 + 4z)$ ب) 999×1001

ج) $(x-1)^3(x+1)^3$ د) $(x-3)(x-2)(x^2+5x-6)$

هـ) $(x+2)^2(x-1)^2$

۳. اگر $\frac{x^2+1}{x} = 2$ حاصل $(x^3 + \frac{1}{x^3})$ را بیابید؟

۴. هریک از عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $a^2x + b^2y - b^2x - a^2y$ ب) $x^2y - x^2 - a^2y + a^2$

ج) $x^4 - 5x^2 + 6$ د) $z^4 - 2z^2 + 49$

۵. هریک از عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $\dfrac{2x^4 - 12x^2 - 2x^3}{x^3 + 2x^2} + \dfrac{-x^3 + 27}{x^3 + 3x^2 + 9x}$

ب) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \sqrt[5]{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^5} - |\sqrt{2}-\sqrt{3}|$

۶. مخرج کسر زیر را گویا کنید.

$$A = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}-5}$$

۷. نمودار هریک از معادله‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y^2 - 3y + xy = 0$ ب) $y = -|x| + 3$

۸. نقاط $A\begin{vmatrix}2\\-1\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}3\\-2\end{vmatrix}$ داده شده‌اند.

الف) معادله‌ی میانه‌ی وارد بر ضلع BC را بنویسید؟

ب) معادله‌ی ارتفاع وارد بر ضلع AB را بنویسید؟

۹. نقطه‌ی $A\begin{vmatrix}2\\1\end{vmatrix}$ یک رأس مربع و خط $2x + y = 4$ معادله‌ی یکی از قطرهای این مربع است، مساحت مربع را بیابید؟

۱۰. به ازای چه مقادیری برای m، معادله‌ی $2mx^2 + (m-1)x - \frac{1}{4} = 0$ دارای ریشه‌ی مضاعف است؟

۱۱. نامعادله‌ی زیر را حل کرده و مجموعه‌ی جواب آن را به‌دست آورید.

$x(x-4) > (x+3)^2 - 5$

۱۲. اگر θ در ناحیه چهارم مثلثاتی بوده و $\cos\theta = \frac{3}{5}$، سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را بیابید؟

۱۳. درستی هریک از اتحادهای مثلثاتی زیر را بررسی کنید.

الف) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$

ب) $(1 + tg^2\theta)(1 - \sin^2\theta) = 1$

۱. نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = |x|\lfloor x \rfloor$ را در فاصله‌ی $(-2, 2]$ رسم کنید.

۲. نامعادله‌ی $|2x+3| > |4x+1|$ را حل کنید.

۳. حاصل عبارت $\cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta)$ را تعیین کنید.

۴. ابتدا دامنه‌ی متغیر را در معادله‌ی $\sqrt{2x-1} - \sqrt{2x-6} = 1$ تعیین کنید و پس از حل معادله، مجموعه‌ی جواب را بنویسید.

۵. مقدار عددی عبارت $N = \frac{\sqrt{3}}{\sin 80^\circ} - \frac{1}{\sin 10^\circ}$ را معین کنید.

۶. در مجموعه‌ی اعداد حقیقی، اگر $f(x) = 2x^2 + \pi$ و $g(x) = \sin x + \cos x$، آن‌گاه حاصل $g(f(0)), f(g(x))$ را بیابید.

۷. جمله‌ی چهارم تصاعد حسابی زیر را پس از محاسبه‌ی n بیابید.

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \dots$$

۸. در یک تصاعد هندسی، مجموع سه جمله‌ی نخست ۳/۵ برابر جمله‌ی دوم است. جمله‌ی سوم و چهارم این تصاعد را در صورتی که جمله‌ی اول آن ۳ باشد، بیابید.

۹. زاویه‌ی بین بردارهای $\vec{a} = m\vec{i} - n\vec{j}$ و $\vec{b} = n\vec{i} + m\vec{j}$ را حساب کنید.

۱۰. حاصل عبارت $p(x) = \dfrac{\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \cdots}{\sqrt{\cos x\sqrt{\cos x\sqrt{\cos x\sqrt{\cdots}}}}}$ را بیابید.

۱۱. اگر $A = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix}m\\4\end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix}2\\12\end{bmatrix}$، سه رأس مثلث ABC باشند، m را چنان تعیین کنید که رأس $\hat{A}$ قائمه باشد.

۱۲. با فرض a و $b>0$، ثابت کنید، اگر $4a^2 + 9b^2 = 4ab$، آن‌گاه:

$$\log\frac{2a+3b}{4} = \frac{\log a + \log b}{2}$$

۱۳. از بین ۵ دانش‌آموز کلاس سوم و ۴ دانش‌آموز کلاس دوم، می‌خواهیم انجمنی را با ۳ دانش‌آموز کلاس سوم و ۲ دانش‌آموز کلاس دوم تشکیل دهیم. این عمل به چند طریق ممکن است؟

۱۴. در پرتاب دو تاس با هم، احتمال آن را بیابید که قدر مطلق تفاضل اعداد روی دو تاس برابر ۱ باشد.

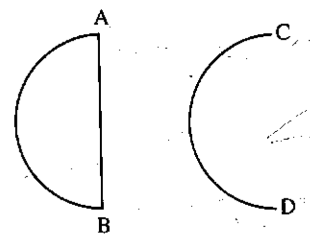
ریاضیات سال دوم

○ سید محمدرضا هاشمی موسوی

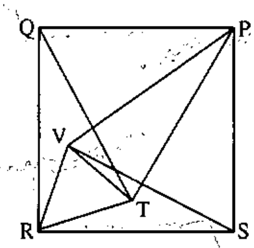
سؤال‌های هندسه‌ی ۱

محمد هاشم رستمی

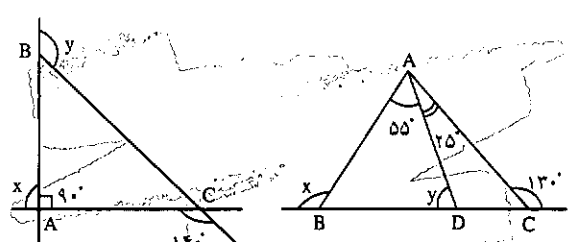
۱. در شکل روبه‌رو، کمان $\widehat{AB}$ بزرگ‌تر است یا کمان $\widehat{CD}$؟



۲. چهارضلعی PQRS مربع و مثلث‌های PQT و PSV متساوی‌الاضلاع هستند. نوع مثلث‌های PVT و RVT را تعیین کنید.



۳. اندازه‌ی x و y را در هریک از شکل‌های زیر تعیین کنید. علامت‌های یکسان، اجزای مساوی را نشان می‌دهند.



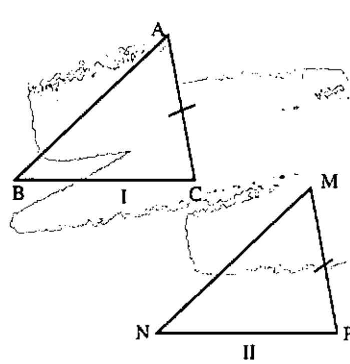
(ب) (الف)

۴. برای هم‌نهشت بودن دو مثلث I و II به حالت‌های تعیین شده، در هریک از موارد (الف)، (ب) و (پ)، تساوی چه جزءهایی لازم است؟

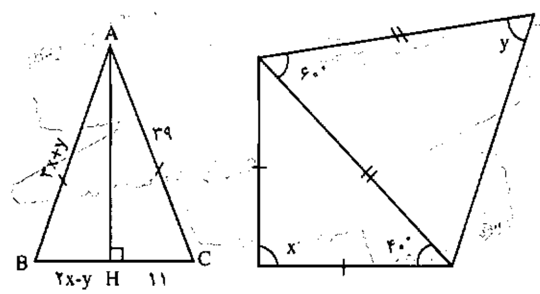
الف. (ض ض ض)

ب. (ض ز ض)

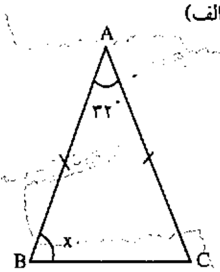
پ. (ز ض ز)



۵. در هر شکل، علامت‌های یکسان اجزای متناظر متساوی را نشان می‌دهند. اندازه‌ی x یا x و y را تعیین کنید.



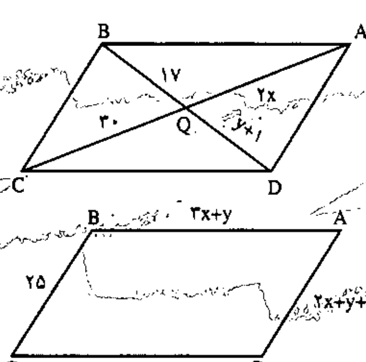
(ب) (الف)



(پ)

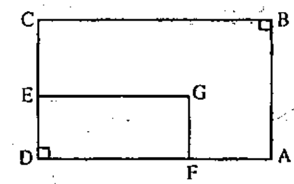
۶. چندضلعی را تعریف کنید.

۷. اندازه‌ی x و y را در هریک از متوازی‌الاضلاع‌های زیر تعیین کنید.



۸. مستطیل ABCD داده شده است. نقطه‌ی E را روی ضلع CD و نقطه‌ی F را روی ضلع AD چنان اختیار می‌کنیم که: $DE=\frac{۲}{۵}CD$ و $DF=\frac{۱۱}{۱۴}AD$، آن‌گاه مستطیل DEGF را می‌سازیم اندازه‌ی مساحت این مستطیل را برحسب

مساحت مستطیل ABCD تعیین کنید.

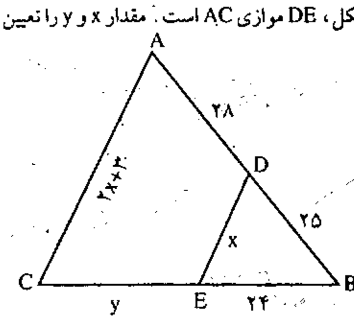


۹ . مساحت ذوزنقه‌ای ۴۸۰ سانتی‌متر مربع، ارتفاعش ۲۰ سانتی‌متر و قاعده‌ی بزرگش ۳ برابر قاعده‌ی کوچکش است. اندازه‌ی قاعده‌های این ذوزنقه را بیابید.

۱۰ . در ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه‌ی ABCD $(\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ)$، $AB = 24$، $BC = 13$ و $CD = 19$ سانتی‌متر است. اندازه‌ی محیط و مساحت این ذوزنقه را تعیین کنید.

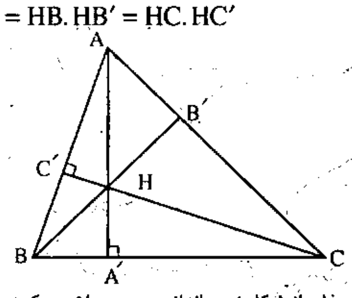
۱۱ . اندازه‌ی واسطه‌ی هندسی بین $2a$ و $8a$ را تعیین کنید.

۱۲ . در شکل، DE موازی AC است. مقدار x و y را تعیین کنید.

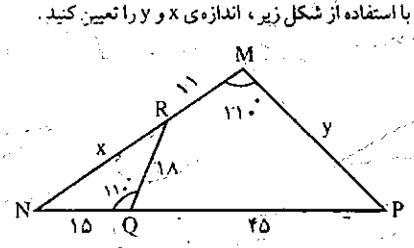


۱۳ . نقطه‌ی H محل برخورد ارتفاع‌های AA'، BB' و CC' از مثلث ABC است. ثابت کنید:

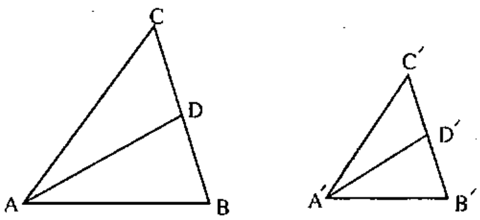
$$HA.HA' = HB.HB' = HC.HC'$$



۱۴ . با استفاده از شکل زیر، اندازه‌ی x و y را تعیین کنید.



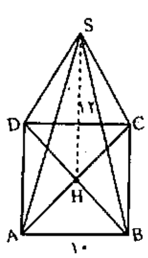
۱۵ . دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه و AD و $A'D'$ دو نیمساز نظیر از این دو مثلث هستند. اگر $5AD = 8A'D'$ و $AC = 40mm$، اندازه‌ی ضلع $A'C'$ را تعیین کنید.



۱۶ . دو مثلث ABC و MNP متشابه‌اند. اگر $AB = 7$، $AC = 8$، $BC = 9$ و محیط مثلث MNP مساوی ۱۲۰ باشد، نسبت مساحت‌های این دو مثلث را تعیین کنید.

۱۷ . قطر مکعبی به ضلع a، مساوی قطر مکعب مستطیلی به طول، عرض و ارتفاع ۹، ۵ و $\sqrt{41}$ است. حجم مکعب را تعیین کنید.

۱۸ . هرم مربع القاعده‌ی منتظمی به ارتفاع ۱۲ سانتی‌متر و ضلع قاعده‌ی ۱۰ سانتی‌متر داده شده است. مساحت کل این هرم را تعیین کنید.

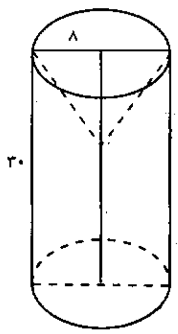


۱۹ . از یک استوانه‌ی قائم فلزی به شعاع قاعده‌ی ۸ سانتی‌متر و ارتفاع ۳۰ سانتی‌متر، مخروط قائمی که قاعده‌اش منطبق بر یک قاعده‌ی استوانه و ارتفاعش ۹ سانتی‌متر است، و نیم‌کره‌ای که قاعده‌اش منطبق بر قاعده‌ی دیگر استوانه است، تراشیده‌ایم. حساب کنید:

الف) حجم مخروط تراشیده شده را؛

ب) حجم نیم‌کره‌ی تراشیده شده را؟

پ) حجم ایجاد شده بین استوانه، مخروط و نیم‌کره را.



حسابان

○ احمد قندهاری

۱. مطلوب است محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt[3]{x^2+11}-3}$

۲. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x^3-4x^2+2x}$ در ۰ پیوسته است. $f(0)$ را بیابید.

۳. اگر $f(x)=\tan^4 4x+\cot^2 2x$، آن‌گاه $f'(\frac{\pi}{12})$ را بیابید.

۴. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=ax^3+bx^2+c$، اولاً اگر نقطه‌ی $F(1,1)$ نقطه‌ی عطف منحنی باشد و نمودار تابع، محور yها را در نقطه‌ای به عرض (-1) قطع کند، a، b و c را بیابید.

ثانیاً، مطلوب است رسم جدول و منحنی نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=-x^3+3x^2-1$

۵. تابع با ضابطه‌ی $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ مفروض است. اولاً، معادله‌ی تابع را چنان مشخّص کنید که نقطه‌ی $o'(1,1)$ مرکز تقارن منحنی و نمودار تابع محور yها را در نقطه‌ای به عرض $\frac{1}{2}$ قطع کند. ثانیاً، مطلوب است رسم جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع با ضابطه‌ی $y=\dfrac{2x-1}{2x-2}$.

۶. از نقطه‌ی $p(0,1)$، دو مماس بر منحنی تابع با ضابطه‌ی $y=-x^2+7x$ رسم کرده‌ایم. معادله‌های مماس‌ها را بیابید.

۷. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}ax^3+bx & ,x\ge 2\\ x^2-4x & ,x<2\end{cases}$ در $x_0=2$ مشتق‌پذیر است. a و b را بیابید.

۸. معادله‌ی $4\sin^2 x-2(\sqrt{2}+1)\sin x+\sqrt{2}=0$ را حل کنید و جواب‌های آن را در بازه $[0,2\pi]$ بیابید.

۹. مساحت مستطیلی ۲۲۵ متر مربع است. ابعاد آن را چنان بیابید که محیط مستطیل مینی‌مم باشد.

۱۰. مطلوب است محاسبه‌ی $\int_0^4|2x-3|dx$.

جبر و احتمال

○ هوشنگ شرقی

۱. به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی، درستی روابط زیر را برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید:

الف) $\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\dots+\dfrac{n}{2^n}=\dfrac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$

ب) $n\ge 2: \dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dots+\dfrac{1}{n+n}>\dfrac{13}{24}$

۲. کدام یک از احکام کلی زیر درست و کدام نادرست هستند؟ احکام درست را اثبات کنید و برای احکام نادرست مثال نقض بیاورید:

الف) حاصل ضرب هر دو عدد گویا، عددی است گویا.

ب) حاصل ضرب هر عدد گویای غیر صفر در هر عدد گنگ، عددی است گنگ.

ج) حاصل ضرب هر دو عدد گنگ عددی است گنگ.

۳. S یک مجموعه از اعداد طبیعی است. حداقل تعداد اعضای S را به‌دست آورید تا مطمئن شویم، اگر اعضای S را بر ۲۰ تقسیم کنیم، لااقل شش عضو دارای یک باقی‌مانده هستند.

۴. اگر $A=\{x|x\in\mathbb{R},\ x^3=4x\}$ و $B=\{x\in Z|x^2\le 3x\}$، تمام زیرمجموعه‌های محض مجموعه‌ی $A\cap B$ را مشخص کنید.

۵. به کمک قوانین جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

الف) $A\Delta(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)\cup[B\cap(C-A)]$

ب) $A\subseteq B\Rightarrow B'\subseteq A'$

۶. اگر $A=[-2,1]$ و $B=[0,2]$، مجموعه‌ی A^2-B^2 را در یک دستگاه مختصات هاشور بزنید.

۷. رابطه‌ی زیر روی مجموعه‌ی $\mathbb{R}^2$ تعریف شده است:

$$(x,y)R(z,t)\Leftrightarrow \frac{x^2-z^2}{2}=y^2-t^2$$

اولاً نشان دهید که R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است، ثانیاً کلاس هم‌ارزی $(0,0)$ را مشخص، و نمایش هندسی آن را رسم کنید.

۸. دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. الف) فضای نمونه را مشخص کنید.

ب) اگر A پیشامد آن باشد که مجموع شماره‌های روی دو تاس کم‌تر از ۷ باشد و B پیشامد آن باشد که شماره‌های روی دو تاس عددهای متوالی باشند، A و B و $A'\cap B'$ را مشخص کنید.

۹. می‌خواهیم یک انجمن دانش‌آموزی از بین ۵ دانش‌آموز سال اول و ۴ دانش‌آموز سال دوم، با سه عضو تشکیل دهیم. احتمال آن را به دست آورید که:

الف) هر سه عضو از کلاس اول باشند.

ب) اکثریت اعضا از کلاس دوم باشند.

۱۰. دو معلم قرار است رأس ساعت ۱۰ وارد کلاسی شوند. اگر حداکثر زمان تأخیر هریک از آن‌ها ۳۰ دقیقه باشد، مطلوب است تعیین احتمال آن‌که هیچ‌یک بیش‌تر از دو برابر دیگری تأخیر نکند.

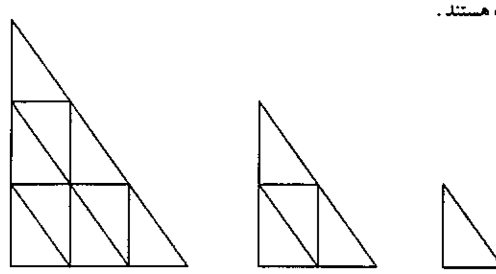
۱۱. چهار تیم فوتبال A و B و C و D در دو زمین جداگانه دو به‌دو مسابقه‌ی هم‌زمان دارند. در مسابقه‌ی A با B، شانس برد A، دو برابر شانس برد B و نصف شانس تساوی است. در مسابقه‌ی C با D نیز شانس برد C با شانس برد D مساوی و هر دو، دو برابر شانس تساوی است. احتمال آن‌که A بازنده شود و احتمال برد D را جداگانه به‌دست آورید.

۱۲. یک عدد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰ به تصادف انتخاب کرده‌ایم. مطلوب است احتمال آن‌که این عدد مضرب ۳ یا ۷ باشد ولی مضرب ۱۱ نباشد.

هندسه ی ۲

○ محمد هاشم رستمی

۱ . مثلث های شکل های ۱ ، ۲ و ۳ با هم متشابه و مثلث های کوچک همه هم‌نهشت هستند .



(۳) (۲) (۱)

الف) تعداد مثلث های کوچک هر شکل را تعیین و جدول زیر را کامل کنید .

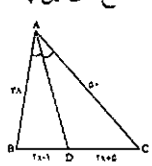
شماره شکل	۱	۲	۳
تعداد مثلث های کوچک			

ب) رسم مثلث های متشابه را تا پنجمین شکل ادامه دهید . در شکل پنجم چند مثلث کوچک ، جا می گیرد؟ جدول را تا شکل پنجم کامل کنید .

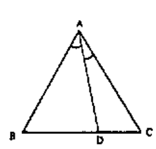
پ) اگر رسم شکل ها را به همین ترتیب ادامه دهید ، در شکل nام چند مثلث کوچک جا می گیرد؟

ت) اگر مثلث شکل ۱ قائم‌الزاویه و دو ضلع مجاور به زاویه ی قائمه اش ۲ سانتی متر و ۴ سانتی متر باشند ، مساحت شکل nام چند سانتی متر مربع است؟

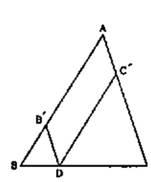
۲ . از هر رأس یک چند ضلعی ۶ قطر می گذرد . تعداد ضلع های این چند ضلعی و تعداد قطرهای آن را تعیین کنید .



۳ . در شکل روبه‌رو ، AD نیمساز زاویه ی درونی A از مثلث ABC است ، با توجه به مقدارهای داده شده در شکل ، مقدار x را تعیین کنید .



۴ . مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است . اگر D نقطه ای واقع بر ضلع BC و $B\hat{A}D < D\hat{A}C$ باشد ، ثابت کنید DB>DC است .

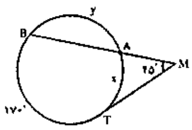


۵ . در مثلث ABC ، با فرض AB>AC ، از نقطه ی D واقع بر ضلع BC خط هایی موازی دو ضلع دیگر مثلث رسم می کنیم تا ضلع های AB و AC به ترتیب در نقطه های B' و C' قطع کنند . ثابت کنید :

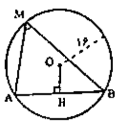
$$AC < DB' + DC' < AB$$

۶ . مکان هندسی مرکز دایره های به شعاع R' را به گونه ای تعیین کنید که درون دایره ی C(O,R) قرار داشته و بر این دایره مماس باشند ($R' < R$ است) .

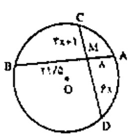
۷ . از مثلث ABC ، اندازه ی زاویه ی $\hat{A}=\alpha$ و طول دو ارتفاع $BH=h_b$ و $CH'=h_c$ داده شده است . این مثلث را رسم کنید .



۸ . با استفاده از شکل روبه‌رو ، اندازه ی x و y را تعیین کنید .



۹ . پاره‌خط AB به طول $16\sqrt{3}$ سانتی‌متر داده شده است . کمان در خور زاویه ی حاده ی α رو به رو به این پاره‌خط را رسم می کنیم . اگر شعاع دایره ای که این کمان در خور بخشی از آن است برابر ۱۶ سانتی‌متر باشد ، اندازه ی زاویه ی α و فاصله ی مرکز دایره تا وتر AB را تعیین کنید .



۱۰ . با استفاده از شکل روبه‌رو :

الف) اندازه ی x را تعیین کنید .

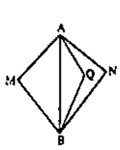
ب) طول کوچک‌ترین وتری را که از نقطه ی M در این دایره رسم می شود به دست آورید .

۱۱ . مختصات نقطه ای را بیابید که تصویر آن تحت تبدیل $T(x,y)=(a-y+1, 2x+y+3)$ ، نقطه ی (۷ و ۶-) باشد .

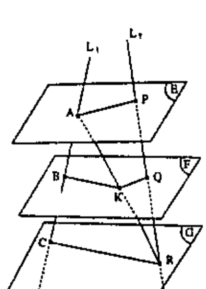
۱۲ . تحت یک بازتاب محوری ، تصویر خط $D=2x+y-13=0$ ، خط $D'=2x+y-5=0$ است . معادله ی محور این بازتاب را بیابید .

۱۳ . معادله ی تصویر خط $\Delta: 3x-4y-12=0$ ، تحت تبدیل $T(x,y)=(2x,2y)$ را تعیین کنید .

۱۴ . سه نقطه ی A ، B و C در صفحه ی P و نقطه ی S در خارج این صفحه داده شده‌اند . نقطه های M و N به ترتیب روی SA و SB چنان قرار دارند که $\frac{SM}{SA}=\frac{SN}{SB}$ است . ثابت کنید که فصل مشترک صفحه ی P با صفحه ی CMN موازی AB است .



۱۵ . در شکل روبه‌رو ، همه ی نقطه ها در یک صفحه قرار ندارند . اگر AM=MB ، AN=BN ، AQ=BQ باشد ، ثابت کنید که نقطه های M ، N و Q هم‌صفحه‌اند .



۱۶ . در شکل ، دو خط متناظر L_1 و L_2 صفحه های موازی E ، F و Q را قطع کرده‌اند و خط AR نیز صفحه ی F را در K قطع کرده است . اگر AB=BC باشد ، ثابت کنید :

$$BQ < \frac{1}{2}(AP+CR)$$

پاسخ تشریحی مسائل

ریاضیات سال اول

۱. خارج قسمت $x^2-2xy+6y^2$ و باقی مانده $-15y^3$.

۲.

الف) $(2x^2-3z)(2x^2+4z)=(2x^2)^2+(4z-3z)2x^2+(-3z)\times(4z)=4x^4+2x^2z-12z^2$

ب) $999\times1001=(1000-1)\times(1000+1)=(1000)^2-1=999999$

ج) $(x-1)^3(x+1)^3=[(x-1)(x+1)]^3=[(x^2-1)]^3=x^6-3x^4+3x^2-1$

د) $(x-3)(x-2)(x^2+5x-6)=(x^2-5x+6)(x^2+5x-6)$
$=[x^2+(-5x+6)][x^2-(-5x+6)]=x^4-(-5x+6)^2$
$=x^4-(25x^2-60x+36)=x^4-25x^2+60x-36$

هـ) $(x+2)^2(x-1)^2=[(x+2)(x-1)]^2=(x^2+x-2)^2$
$x^4+x^2+4+2x^3-4x^2-4x=x^4+2x^3-3x^2-4x+4$

۳. طبق فرض داریم: $\frac{x^2+1}{x}=2$ پس $\frac{x^2}{x}+\frac{1}{x}=2$ و درنتیجه: $x+\frac{1}{x}=2$.

$$(x+\frac{1}{x})^3=2^3\Rightarrow x^3+3x^2\times\frac{1}{x}+3\times\frac{1}{x^2}\times x+\frac{1}{x^3}=8$$

$$\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=8-3x-3\times\frac{1}{x}=8-3\underbrace{(x+\frac{1}{x})}_{2}=8-6=2$$

۴.

الف) $a^2x+b^2y-b^2x-a^2y=x(a^2-b^2)-y(a^2-b^2)$
$=(a^2-b^2)(x-y)=(a-b)(a+b)(x-y)$

ب) $x^2y-x^2-a^2y+a^2=x^2(y-1)-a^2(y-1)$
$=(y-1)(x^2-a^2)=(y-1)(x-a)(x+a)$

ج) $x^4-5x^2+6=(x^2)^2-5x^2+6=(x^2-2)(x^2-3)$

د) $z^4-2z^2+49=(z^2+7)^2-14z^2-2z^2=(z^2+7)^2-16z^2$
$=[(z^2+7)-4z][(z^2+7)+4z]$

۵.

الف) عبارت داده شده $\frac{2x^2(x^2-x-6)}{x^2(x+2)}+\frac{(3-x)(9+3x+x^2)}{x(x^2+3x+9)}$
$=\frac{2(x+2)(x-3)}{(x+2)}+\frac{3-x}{x}=2(x-3)\times\frac{x}{(3-x)}$
$=\frac{2x(x-3)}{(3-x)}=-2x$

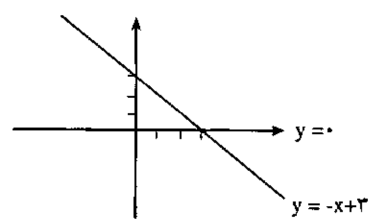
ب) عبارت داده شده $|2-\sqrt{5}|+(\sqrt{3}-\sqrt{5})-[-(\sqrt{2}-\sqrt{3})]$
$=(-2+\sqrt{5})+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3}=-2+\sqrt{2}$

۶.

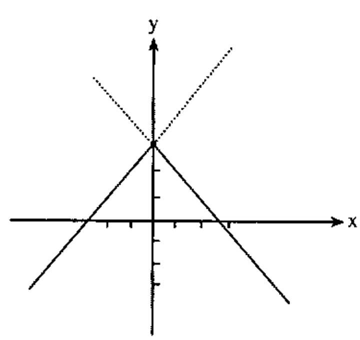
حل ۷:
$$\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}-5}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}-5}\times\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+5}=\frac{K}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2-25}$$
$$=\frac{K}{3-2\sqrt{6}+2-25}=\frac{K}{-2\sqrt{6}-20}=\frac{K}{-2\sqrt{6}-20}\times\frac{-2\sqrt{6}+20}{-2\sqrt{6}+20}=\frac{K'}{24-400}=\frac{K'}{-376}$$

۷.

$y^2-3y+xy=0\Rightarrow y(y+x-3)=0$
$\Rightarrow y=0$ یا $y+x-3=0\Rightarrow y=-x+3$



ب) $y=-|x|+3$
$x\geq0\Rightarrow y=-x+3$
$x<0\Rightarrow y=x+3$



۸. $A\left|\begin{matrix}3\\-1\end{matrix}\right.$ $B\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$ $C\left|\begin{matrix}3\\-2\end{matrix}\right.$

وسط BC $M\left|\begin{matrix}\frac{3+1}{2}\\ \frac{-2+2}{0}\end{matrix}\right.\Rightarrow M\left|\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right.\Rightarrow m_{AM}=\frac{-1-0}{3-2}=-1$

معادله‌ی میانه‌ی AM $\Rightarrow(y-0)=-1(x-2)\Rightarrow y=-x+2$

$m_{AB}=\frac{-1-2}{3-1}=-\frac{3}{2}\Rightarrow m_{CH}\times m_{AB}=-1$

$\Rightarrow m_{CH}=\frac{2}{3}$

معادله‌ی ارتفاع CH $\Rightarrow(y+2)=\frac{2}{3}(x-3)$ یا $y=\frac{2}{3}x-4$

۹. چون مختصات نقطه‌ی A در معادله‌ی قطر صدق نمی‌کند پس نقطه‌ی A روی قطر داده شده قرار ندارد و لذا فاصله‌ی آن تا قطر نصف طول قطر است و می‌دانیم اگر d طول قطر یک مربع باشد طول هر ضلع آن $a=\frac{d}{\sqrt{2}}$ می‌باشد و

مساحت مربع $S=a^2=\frac{1}{2}d^2$ است.

$$D=\frac{|ax_1+by_1-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Rightarrow D=\frac{|2\times2+1-4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow d=2\times\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}=\frac{2}{5}$$

۱۰. شرط داشتن ریشه‌ی مضاعف آن است که $\Delta=b^2-4ac=0$.

$$2mx^2+(m-1)x-\frac{1}{4}=0\Rightarrow\Delta=(m-1)^2-4\times2m\times\left(-\frac{1}{4}\right)=0$$

$$m^2-2m+1+2m=0\Rightarrow m^2+1=0$$

و معادله‌ی $m^2+1=0$ دارای ریشه‌ی حقیقی نبوده، لذا به ازای هیچ مقداری برای m معادله‌ی فوق ریشه‌ی مضاعف نمی‌تواند داشته باشد.

۱۱. $x(x-4)>(x+3)^2-5\Rightarrow x^2-4x>x^2+6x+9-5$

$$10x+4<0\Rightarrow 10x<-4\Rightarrow x<\frac{-4}{10}$$

مجموعه‌ی جواب $=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x<\frac{-4}{10}\right\}$

۱۲. $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$

$$\Rightarrow \sin\theta=-\frac{4}{5},\ \operatorname{tg}\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{-4}{3},$$

θ در ناحیه‌ی چهارم

$$\cot g\theta=\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}=-\frac{3}{4}$$

۱۳. الف) $(\sin^4 x-\cos^4 x)=(\sin^2 x-\cos^2 x)\underbrace{(\sin^2 x+\cos^2 x)}_{1}$

$$=\sin^2 x-\cos^2 x$$

ب) $(1+\operatorname{tg}^2\theta)(1-\sin^2\theta)=\left(1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)\times\cos^2\theta$

$$=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

حل مسأله‌ها (سال دوم)

۱. در فاصله [۲ ، ۲-) می‌توان نوشت: $-2<x<-1: y=(-x)(-2)=2x$

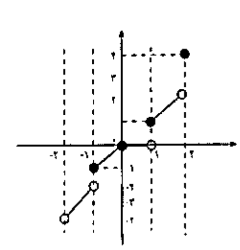
$A_1\left|\begin{matrix}-2\\-4\end{matrix}\right.,\ B_1\left|\begin{matrix}-1\\-2\end{matrix}\right.\quad y=|x|\lfloor x\rfloor$

$-1\le x<0: y=(-x)(-1)=x$

$A_2\left|\begin{matrix}-1\\-1\end{matrix}\right.,\ B_2\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.$

$0\le x<1: y=(x)(0)=0$

$A_3\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.,\ B_3\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$



$1\le x<2: y=(x)(1)=x \qquad ,x=2: y=(2)(2)=4$

$A_4\left|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right.,\ B_4\left|\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right.$

۲. $|2x+3|^2>|4x+1|^2;\ 4x^2+9+12x>16x^2+8x+1;$

$$12x^2-4x-8<0;\ 3x^2-x-2<0;\ (3x+2)(x-1)<0\Rightarrow$$

$$\boxed{-\frac{2}{3}<x<1}$$

۳. با توجه به بسط cos می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{cases}$$

از ضرب دو رابطه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)&=\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta\\&=\cos^2\alpha(1-\sin^2\beta)-(1-\cos^2\alpha)\sin^2\beta\\&=\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta\\&=\cos^2\alpha-\sin^2\beta\end{aligned}$$

۴. با توجه به دستگاه $\begin{cases}2x-1\ge0\\2x-6\ge0\end{cases}$ یا $\begin{cases}x\ge\frac{1}{2}\\x\ge3\end{cases}$، دامنه‌ی متغیر معادله $x\ge3$ است.

$$\sqrt{2x-1}-\sqrt{2x-6}=1$$

$$\sqrt{2x-1}=1+\sqrt{2x-6};\ 2x-1=(1+\sqrt{2x-6})^2;$$

$$2x-1=1+2x-6+2\sqrt{2x-6};\ \sqrt{2x-6}=2$$

$$2x-6=4;\ \boxed{x=5}$$

۵. با توجه به برابری $\sin80^\circ=\cos10^\circ$، خواهیم داشت:

$$N=\frac{\sqrt{3}}{\cos10^\circ}-\frac{1}{\sin10^\circ}=\frac{\sqrt{3}\sin10^\circ-\cos10^\circ}{\sin10^\circ\cos10^\circ}$$

$$=\frac{\tan60^\circ\sin10^\circ-\cos10^\circ}{\frac{1}{2}\sin20^\circ}=\frac{\sin60^\circ\sin10^\circ-\cos60^\circ\cos10^\circ}{\frac{1}{2}\cos60^\circ\sin20^\circ}$$

$$=\frac{-\cos(60^\circ+10^\circ)}{\frac{1}{4}\sin20^\circ}=\frac{-\cos70^\circ}{\frac{1}{4}\cos70^\circ}=-4$$

۶. با توجه به $f(0)=\pi$، می‌توان نوشت:

$$f(g(x))=2(\sin x+\cos x)^2+\pi=2(1+\sin2x)+\pi.$$

$$g(f(0))=\sin(\pi)+\cos(\pi)=-1$$

۷. در این تصاعد حسابی می‌توان نوشت:

$$2\binom{n}{2}=\binom{n}{1}+\binom{n}{3};\ 2\left(\frac{n!}{2!(n-2)!}\right)=\frac{n!}{1!(n-1)!}+\frac{n!}{3!(n-3)!}$$

$$n(n-1)=n+\frac{n(n-1)(n-2)}{6};\ n-1=1+\frac{(n-1)(n-2)}{6}$$

$$n^2-9n+14=0;\ (n-7)(n-2)=0;\ n=7,\ n=2$$

پاسخ n=2 مورد قبول نیست، زیرا n≥3. بنابراین:

$7,\ 21,\ 35,\ 49,\ldots$

۸. برای این تصاعد هندسی می‌توان نوشت:

$$S_3 = 3/5a_2; a_1\frac{q^3-1}{q-1} = 3/5a_1q; q^2+q+1 = 3/5q$$

$$2q^2+2q+2 = 7q; 2q^2-5q+2 = 0; (2q-1)(q-2) = 0;$$

$$q = 2,\ \frac{1}{2}$$

$$a_4 = a_1q^3; a_4 = 3(2)^3 = 3\times 8 = 24$$

یا $a_4 = 3(\frac{1}{2})^3 = \frac{3}{8}$ (جمله‌ی چهارم)

$$a_3 = a_1q^2; a_3 = 3(2)^2 = 12$$

یا $a_3 = 3(\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$ (جمله‌ی سوم)

۹. ضرب داخلی دو بردار صفر است. بنابراین، بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند و زاویه‌ی بین آن‌ها 90° است:

$$\vec{a}.\vec{b} = (m\vec{i}-n\vec{j}).(n\vec{i}+m\vec{j}) = mn-nm = 0;$$

$$(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\pi}{2}$$

۱۰. با فرض $u = \sin x+\sin^2 x+\sin^3 x+...$ و $v = \sqrt{\cos x\sqrt{\cos x\sqrt{\cos x\sqrt{...}}}}$ می‌توان نوشت:

$$u = \sin x+\sin x(\underbrace{\sin x+\sin^2 x+\sin^3 x+...}_{u}) = \sin x+u\sin x$$

$$u-u\sin x = \sin x; u(1-\sin x) = \sin x; u = \frac{\sin x}{1-\sin x}$$

$$v = \sqrt{\cos x}\sqrt[4]{\cos x}\sqrt[8]{\cos x}...\sqrt[2^n]{\cos x}...$$

$$= \cos x^{\frac{1}{2}}.\cos x^{\frac{1}{4}}.\cos x^{\frac{1}{8}}.... = \cos x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...} = \cos^k x$$

$$k = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+... = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...}_{k});$$

$$k = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}k; k-\frac{1}{2}k = \frac{1}{2}; \frac{1}{2}k = \frac{1}{2}; k = 1; v = \cos x$$

$$p(x) = \frac{u}{v} = \frac{\frac{\sin x}{1-\sin x}}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x(1-\sin x)}$$

روش دوم:

می‌دانیم که مجموع جملات دنباله‌ی هندسی نامحدود:

$\sin x, \sin^2 x, \sin^3 x, ...$

با توجه به جمله‌ی اول آن $a_1 = \sin x$ و قدر نسبت آن $q_1 = \sin x$ چنین است:

$$S_1 = \frac{a_1}{1-q_1} = \frac{\sin x}{1-\sin x}$$

همچنین، مجموع جملات دنباله‌ی هندسی نامحدود:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...$$

با توجه به جمله‌ی اول آن $a_2 = \frac{1}{2}$ و قدر نسبت آن $q_2 = \frac{1}{2}$ چنین است:

$$S_2 = \frac{a_2}{1-q_2} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

۱۱.

$$\vec{AB} = \begin{bmatrix} m+1 \\ 4-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+1 \\ 3 \end{bmatrix},\ \vec{AC} = \begin{bmatrix} 2+1 \\ 12-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix}$$

چون مثلث در رأس A قائمه است، بنابراین ضرب داخلی $\vec{AB}.\vec{AC}$ برابر صفر است:

$$\vec{AB}.\vec{AC} = \begin{bmatrix} m+1 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix} = [m+1\ \ 3]\begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$= 3(m+1)+3\times 11 = 0; \boxed{m=-12}$$

۱۲. با فرض $b>0$ و a و $4a^2+9b^2 = 4ab$ می‌توان نوشت:

$$4a^2+9b^2 = (2a+3b)^2-12ab = 4ab; (2a+3b)^2 = 16ab;$$

$$(\frac{2a+3b}{4})^2 = ab; \log(\frac{2a+3b}{4})^2 = \log ab;$$

$$2\log\frac{2a+3b}{4} = \log a+\log b; \log\frac{2a+3b}{4} = \frac{\log a+\log b}{2}$$

۱۳. دانش‌آموزان کلاس سوم را به $\binom{5}{3}$ طریق و دانش‌آموزان کلاس دوم را به $\binom{4}{2}$ طریق می‌توان انتخاب کرد. با توجه به اصل ضرب، تعداد راه‌هایی که ممکن هستند، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\binom{5}{3}\times\binom{4}{2} = \frac{5!}{3!2!}\times\frac{4!}{2!2!} = 10\times 6 = 60$$

۱۴. فضای نمونه ۳۶ عضو دارد و پیشامد تصادفی مطلوب مجموعه‌ی A است:

$$A = \{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(4,3),(3,4),(4,5),(5,4),(6,5),(5,6)\}$$

بنابراین:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

هندسه‌ی ۱

۱. به نظر می‌رسد که کمان $\widehat{CD}$، از کمان $\widehat{AB}$ بزرگ‌تر است، اما چنین نیست و این دو کمان با هم برابرند؛ یعنی: $\widehat{AB}=\widehat{CD}$.

۲. مثلث PVT متساوی‌الساقین است، زیرا: $PV = PS = PQ = PT$. مثلث RTV متساوی‌الاضلاع است، زیرا اگر از T به S و از V به Q وصل کنیم، داریم:

$$P\hat{T}V = P\hat{V}T = P\hat{T}S = P\hat{V}Q = 75^\circ ،\ T\hat{R}S = V\hat{R}Q = 15^\circ ،$$

$$R\hat{T}S = R\hat{V}Q = 150^\circ ،\ V\hat{P}T = 30^\circ$$

$\Rightarrow R\hat{T}V = R\hat{V}T = T\hat{R}V = 60^\circ \Rightarrow RT = TV = VR$

۳. الف) $x = 120^\circ$ و $y = 75^\circ$

ب) $x = 90^\circ$ و $y = 120^\circ$

۴. الف) برای این که این دو مثلث به حالت (ض ض ض) هم‌نهشت باشند، باید: $AB = MN$ و $BC = NP$.

ب) برای هم‌نهشت بودن این دو مثلث به حالت (ض ز ض) باید:

$\hat{A} = \hat{M}$ و $AB = MN$ یا $\hat{C} = \hat{P}$ و $BC = NP$

پ) برای هم‌نهشت بودن دو مثلث به حالت (ز ض ز) کافی است، دو زاویه‌ی متناظر این دو مثلث مساوی باشند؛ برای مثال، $\hat{C} = \hat{P}$ و $\hat{A} = \hat{M}$ باشد. بدیهی است که وقتی دو زاویه از یک مثلث با دو زاویه‌ی نظیرشان از مثلث دیگری مساوی باشند، آن‌گاه زاویه‌ی سوم آن‌ها نیز مساوی خواهند بود.

۵. الف)

$$x = 180^\circ - 2\times 40^\circ = 100^\circ \quad y = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$$

ب)
$$\begin{cases} 3x + y = 39 \\ 2x - y = 11 \end{cases} \Rightarrow x = 10 \ , \ y = 9$$

پ)
$$x = \frac{180^\circ - 32^\circ}{2} = 74^\circ$$

۶. به کتاب درسی مراجعه کنید.

۷. الف)
$$\begin{cases} 2x = 30 \\ y + 1 = 17 \end{cases} \Rightarrow x = 15 \ , \ y = 16$$

ب)
$$\begin{cases} 3x + y = 33 \\ 2x + y + 2 = 25 \end{cases} \Rightarrow x = 10 \ , \ y = 3$$

۸. با توجه به این که: $S_{ABCD} = AD \times DC$ و $S_{DEGF} = DE.DF$، داریم:

$$DE \times DF = \frac{2}{5} CD \times \frac{11}{14} AD \Rightarrow DE \times DF = \frac{11}{35} CD \times AD$$

$$\Rightarrow S_{DEGF} = \frac{11}{35} . S_{ABCD}$$

۹. مساحت ذوزنقه را S، ارتفاع آن را h و دو قاعده‌اش را a و 3a می‌گیریم. داریم:

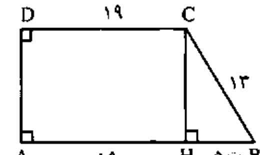
$S_{\text{ذوزنقه}} = 480 \ , \ h = 20 \ , \ S = \frac{1}{2}(a+b) \times h$

$$480 = \frac{1}{2}(a + 3a) \times 20 \Rightarrow 4a = 48 \Rightarrow a = 12cm$$

$$\Rightarrow 3a = 3 \times 12 = 36cm$$

۱۰. ارتفاع CH را رسم می‌کنیم. AHCD مستطیل است، پس: $AH = CD = 19$. از آن‌جا داریم:

$$BH = AB - AH = AB - CD = 24 - 19 = 5$$



در مثلث قائم‌الزاویه‌ی BCH داریم:

$$CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12cm = AD$$

از آن‌جا: محیط ذوزنقه $= 24 + 13 + 19 + 12 = 68cm$

$$S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{1}{2}(AB + CD)CH = \frac{1}{2}(24 + 19) \times 12 = 258cm^2$$

۱۱. اگر m واسطه‌ی هندسی بین b و c باشد، داریم: $m^2 = bc$. پس:

$$m^2 = 8a \times 2a \Rightarrow m^2 = 16a^2 \Rightarrow m = +4a \ , \ m = -4a$$

۱۲. بنابه قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}$$

اما با توجه به شکل داریم:

$BA = BD + DA = 25 + 28 = 53 \ , \ BC = BE + EC = 24 + y \ ,$

$DE = x \ , \ AC = 2x + 3$

از آن‌جا خواهیم داشت:

$$\frac{25}{53} = \frac{24}{24+y} = \frac{x}{2x+3} \Rightarrow \frac{25}{53} = \frac{24}{24+y}$$
$$\Rightarrow 600 + 25y = 1272$$

$$\Rightarrow 25y = 672 \Rightarrow y = 26/88 \ , \ \frac{25}{53} = \frac{x}{2x+3}$$
$$\Rightarrow 53x = 50x + 75 \Rightarrow 3x = 75 \Rightarrow x = 25$$

۱۳. مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی HAB' و HBA' متشابهند، زیرا: $\hat{A'} = \hat{B'} = 90^\circ$ و $A\hat{H}B' = B\hat{H}A'$. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\boxed{\frac{HA}{HB} = \frac{HB'}{HA'}} = \frac{AB'}{BA'} \Rightarrow HA.HA' = HB.HB' \quad (1)$$

همچنین، مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی HCB' و HBC' متشابه هستند، زیرا: $\hat{B'} = \hat{C'} = 90^\circ$ و $C\hat{H}B' = B\hat{H}C'$. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\boxed{\frac{HC}{HB} = \frac{HB'}{HC'}} = \frac{CB'}{BC'} \Rightarrow HB.HB' = HC.HC' \quad (2)$$

از مقایسه‌ی رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$HA.HA' = HB.HB' = HC.HC'$$

پس حکم مسأله ثابت شد.

۱۴. دو مثلث MNP و NQR متشابهند، زیرا زاویه‌ی N در هر دو مثلث مشترک است و: $\hat{M} = \hat{Q} = 110^\circ$. بنابراین داریم:

$$\frac{NP}{NR} = \frac{MP}{QR} = \frac{MN}{NQ}$$

اما:

$NP = NQ + QP = 15 + 45 = 60$ و $NR = x$ و $MP = y$

$QR = 18$ و $MN = MR + RN = 11 + x$ و $NQ = 15$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{60}{x} = \frac{y}{18} = \frac{11+x}{15} \Rightarrow \frac{60}{x} = \frac{11+x}{15} \Rightarrow 11x + x^2 = 900$$

ج) $\Rightarrow x^2+11x-900=0 \Rightarrow x=-36<0\ ,\ x=25$

$$\Rightarrow \frac{60}{25}=\frac{y}{18} \Rightarrow \frac{12}{5}=\frac{y}{18} \Rightarrow y=\frac{12\times 18}{5}=\frac{216}{5}=43/2$$

۱۵. در دو مثلث متشابه، نسبت پاره‌خط‌های متناظر، مساوی نسبت تشابه دو مثلث است، بنابراین داریم:

$$\frac{AC}{A'C'}=\frac{AD}{A'D'}$$

اما بنابه فرض:

$5AD=8A'D' \Rightarrow \frac{AD}{A'D'}=\frac{8}{5}$ و $AC=40mm$

پس داریم:

$$\frac{40}{A'C'}=\frac{8}{5} \Rightarrow 8A'C'=200 \Rightarrow A'C'=25mm$$

۱۶. می‌دانیم که نسبت محیط‌های دو مثلث متشابه، مساوی نسبت تشابه آن دو مثلث است. بنابراین اگر نسبت تشابه این دو مثلث را k بگیریم، $K=\frac{\text{محیط مثلث } ABC}{\text{محیط مثلث } MNP}$ است.

اما:

محیط مثلث ABC $= AB+AC+BC=7+8+9=24$

محیط مثلث MNP $=120$

$$\Rightarrow K=\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$$

از طرف دیگر، نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه، مساوی مجذور نسبت تشابه آن دو مثلث است. بنابراین داریم:

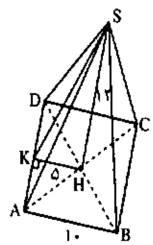
$$\frac{\text{مساحت مثلث } ABC}{\text{مساحت مثلث } MNP}=K^2=\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{1}{25}$$

۱۷. ضلع مکعب را a و قطر مکعب مستطیل را d می‌نامیم. داریم:

$d=\sqrt{9^2+5^2+(\sqrt{41})^2}=\sqrt{147}=7\sqrt{3}$ و قطر مکعب $=a\sqrt{3}$

$\Rightarrow a\sqrt{3}=7\sqrt{3} \Rightarrow a=7$ = اندازه‌ی ضلع مکعب

حجم مکعب $=a^3 \Rightarrow$ حجم مکعب $=(7)^3=343$



۱۸. طول سهم هرم را به دست می‌آوریم. برای این کار از نقطه‌ی H، مرکز مربع ABCD، به نقطه‌ی K وسط یک ضلع مربع، مثلاً به وسط ضلع AD، وصل می‌کنیم. بدیهی است که HK عمود منصف AD و AK سهم هرم است. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی SHK داریم:

$SH=12cm$ و $HK=\frac{AB}{2}=\frac{10}{2}=5cm$ و $SK^2=SH^2+HK^2$

$\Rightarrow SK^2=12^2+5^2=169 \Rightarrow SK=13cm$ اندازه‌ی سهم هرم

از آن‌جا:

سطح جانبی هرم $=\frac{1}{2}\times$ محیط قاعده × سهم هرم $=\frac{1}{2}(4\times 10)\times 13=260cm^2$

سطح قاعده‌ی هرم $=AB^2=10^2=100cm^2$

سطح کل هرم = سطح جانبی هرم + مساحت قاعده $=260+100=360cm^2$

۱۹. شعاع قاعده‌ی استوانه $r=8cm$ و ارتفاع آن $h=30cm$ است.

الف) شعاع قاعده‌ی مخروط با شعاع قاعده‌ی استوانه برابر است؛ یعنی: $r=8cm$. ارتفاع مخروط نیز $h'=9cm$ است. پس داریم:

حجم مخروط $=\frac{1}{3}\pi r^2h'=\frac{1}{3}\pi(8)^2\times 9=192\pi cm^3$

ب) شعاع قاعده‌ی نیم‌کره مساوی شعاع قاعده‌ی استوانه است؛ یعنی: $r=8cm$. پس داریم:

حجم نیم‌کره $=\frac{2}{3}\pi r^3=\frac{2}{3}\pi(8)^3=\frac{1024\pi}{3}cm^3$

پ) داریم:

حجم موردنظر = حجم استوانه − (حجم نیم‌کره + حجم مخروط)

اما، حجم استوانه $=\pi r^2h=\pi(8)^2\times 30=1920\pi cm$

پس:

حجم موردنظر $=1920\pi-\left(192\pi+\frac{1024\pi}{3}\right)=1920\pi-\frac{1600\pi}{3}$

$\Rightarrow$ حجم موردنظر $=\frac{4160\pi}{3}cm^3$

حل مسائل حسابان

حل ۱.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt[3]{x^2+11}-3}=\frac{0}{0}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt[3]{x^2+11}-3}\times\frac{\sqrt{2x+1}+3}{\sqrt{2x+1}+3}$$

$$\times\frac{\sqrt[3]{(x^2+11)^2}+3\sqrt[3]{x^2+11}+9}{\sqrt[3]{(x^2+11)^2}+3\sqrt[3]{x^2+11}+9}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(2x+1-9)(\sqrt[3]{(x^2+11)^2}+3\sqrt[3]{x^2+11}+9)}{(x^2+11-27)(\sqrt{2x+1}+3)}$$

$$=\frac{2(x-4)(27)}{(x-4)(x+4)(6)}=\frac{9}{8}$$

حل۲. چون تابع در صفر پیوسته است، پس حد تابع برابر $f(0)$ است:

$$f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x^3-4x^2+2x}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x^3-4x^2+2x}\times\frac{\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{(x+8)}+4}{\sqrt[3]{(x^3+8)^2}+2\sqrt[3]{(x+8)}+4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+8-8}{x(x^2-4x+2)(\sqrt[3]{(x^3+8)^2}+2\sqrt[3]{(x^3+8)}+4)}$$

$$=\frac{1}{2(4+4+4)}=\frac{1}{24}$$

حل ۳.

$$f'(x)=16(1+\tan^2 4x)\tan^3 4x-4(1+\cot^2 2x).\cot 2x$$

$$f'(\frac{\pi}{12})=16(1+\tan^2\frac{\pi}{3})\tan^3\frac{\pi}{3}-4(1+\cot^2\frac{\pi}{6}).\cot\frac{\pi}{6}$$

$$f'(\frac{\pi}{12})=16(1+3)(3\sqrt{3})-4(1+3)\sqrt{3}=176\sqrt{3}$$

حل ۴.

$$f(x)=ax^3+bx^2+c\Rightarrow$$

$$f'(x)=3ax^2+2bx\Rightarrow f''(x)=6ax+2b$$

اولاً

$$6a+2b=0$$

$$(1,1)\in f\Rightarrow a+b+c=1$$

$$(0,-1)\in f\Rightarrow 0+0+c=-1\Rightarrow \boxed{c=-1}$$

$$a+b-1=1\Rightarrow a+b=2\ ,\quad -1\begin{cases}3a+b=0\\ a+b=2\end{cases}$$

$$2a=-2\Rightarrow\boxed{a=-1}\ ;\ -1+b=2\ \Rightarrow\boxed{b=3}$$

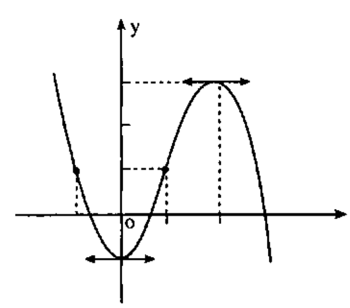
ثانیاً

$$f(x)=-x^3+3x^2-1\Rightarrow f'(x)=-3x^2+6x=0$$

طول‌های اکسترمم نسبی

$$-3x(x-2)=0\Rightarrow x=0,2$$

x	$-\infty$		-1		0		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↘	-1	↗	1	↗		↘	-1	↘	$-\infty$



حل ۵.

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}\qquad O'\begin{vmatrix}1 & \text{مجانب قائم}\\ 1 & \text{مجانب افقی}\end{vmatrix}\qquad A\begin{vmatrix}0\\ \frac{1}{4}\end{vmatrix}$$

اولاً:

مجانب قائم $cx+d=0\quad c+d=0\Rightarrow\boxed{d=-c}$

مجانب افقی $y=\frac{a}{c}\Rightarrow 1=\frac{a}{c}\Rightarrow\boxed{d=c}$

$$(0,\frac{1}{2})\in y\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{b}{d}\Rightarrow d=2b\Rightarrow -c=2b\Rightarrow\boxed{b=-\frac{c}{2}}$$

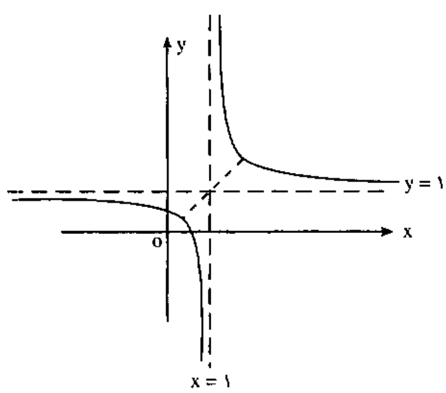
$$y=\frac{ax+b}{cx+d}\ \Rightarrow y=\frac{cx-\frac{c}{2}}{cx-c}=\frac{2cx-c}{2cx-2c}=\frac{c(2x-1)}{c(2x-2)}\ ,\ c\neq 0$$

ثانیاً:

$$y=\frac{2x-1}{2x-2}\qquad\begin{cases}x=1: \text{مجانب قائم}\\ y=1: \text{مجانب افقی}\end{cases}$$

$$y'=\frac{-2}{(2)(-2)^2}<0\ ,\ x=0\Rightarrow y=\frac{1}{2}\ ,\ y=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$	‖	$-$	
y	1	↘	$\frac{1}{2}$	↘	5	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1



حل ۶.

$$y=-x^2+7x\Rightarrow y'_x=-2x+7\quad A\begin{vmatrix}\alpha\\ -\alpha^2+7\alpha\end{vmatrix}\quad m=-2\alpha+7$$

$$y-y_A=m(x-x_A)\Rightarrow y+\alpha^2-7\alpha=(-2\alpha+7)(x-\alpha)$$

$$p(0,1)\ ;\ 1+\alpha^2-7\alpha=(-2\alpha+7)(-\alpha)$$

$$\Rightarrow 1+\alpha^2-7\alpha=2\alpha^2-7\alpha$$

$\Rightarrow 1+\alpha^2=2\alpha^2\Rightarrow\alpha^2=1\Rightarrow\alpha=\pm 1$ طول‌های نقاط تماس

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=1\ ;\ y-6=5(x-1)\Rightarrow y=5x+1\\ \alpha=-1\ ;\ y+8=9(x+1)\Rightarrow y=9x+1\end{array}\right\}\text{معادله‌های مماس‌ها}$$

حل ۷.

$$f(x)=\begin{cases}ax^3+bx & ,\ x\geq 2\\ x^2-4x & ,\ x<2\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}3ax^2+b & ,\ x\geq 2\\ 2x-4 & ,\ x<2\end{cases}$$

$$f'_+(2)=f'_-(2)\Rightarrow 12a+b=4-4\Rightarrow 12a+b=0$$

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^-}f(x)\Rightarrow 8a+2b=4-8\Rightarrow 8a+2b=-4$$

$$\begin{cases}12a+b=0\\ -4a-b=2\end{cases}\Rightarrow 8a=2\Rightarrow$$

$$\boxed{a=\frac{1}{4}}\ ,\ 3+b=0\Rightarrow\boxed{b=-3}$$

حل ۸.

$$4\sin^2 x - 2(\sqrt{2}+1)\sin x + \sqrt{2} = 0$$

$$\Delta' = b'^2 - ac = (\sqrt{2}+1)^2 - 4\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)^2$$

$$\sin x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{\sqrt{2}+1 \pm \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+1 \pm (\sqrt{2}-1)}{4}$$

الف) $\sin x = \frac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}}$$

ب) $\sin x = \frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{4} = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}}$$

حل ۹. فرض می‌کنیم x و y ابعاد مستطیل باشند و S مساحت و P محیط آن باشد.

$$S = x.y = 225 \Rightarrow y = \frac{225}{x} \quad , \quad x, y > 0$$

محیط مستطیل $P = 2(x+y) \Rightarrow P = 2(x + \frac{225}{x})$

$$P(x) = 2(\frac{x^2+225}{x}) \Rightarrow P'(x) = 2 \times \frac{x^2-225}{x^2} = 0$$

$$x^2 = 225 \Rightarrow x = 15 \qquad x > 0$$

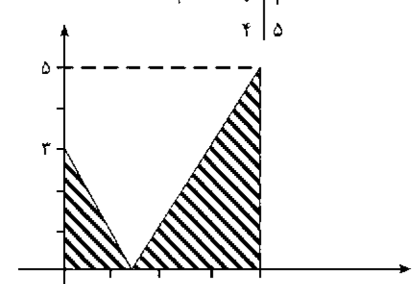
به کمک جدول یا $P''(x)$ مشخص می‌شود که $x = 15$ طول می‌نیمم نسبی تابع p است.

$\mathrm{Min}P = 2(\frac{225+225}{15}) = 2(\frac{450}{15}) = 2(30) = 60$ متر

حل ۱۰.

$y = |2x-3| \quad 2x-3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

x	y
$\frac{3}{2}$	۰
۰	۳
۴	۵



$$\int_0^4 |2x-3|dx = \int_0^{\frac{3}{2}} |2x-3|dx + \int_{\frac{3}{2}}^4 |2x-3|dx$$

$$= \frac{3 \times \frac{3}{2}}{2} + \frac{\frac{5}{2} \times 5}{2} = \frac{9}{4} + \frac{25}{4} = \frac{34}{4} = \frac{17}{2}$$ واحد مربع

حل سؤالات جبر و احتمال

۱. الف)

$$x=1:\ \frac{1}{2^1}=\frac{2^2-1-2}{2^1}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\text{فرض استقرا}:\ n=k:\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\dots+\frac{k}{2^k}=\frac{2^{k+1}-k-2}{2^k}$$

$$\text{حکم استقرا}:\ n=k+1:\underbrace{\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\dots+\frac{k}{2^k}}_{\text{طبق فرض}:\ \frac{2^{k+1}-k-2}{2^k}}+\frac{k+1}{2^{k+1}}=\frac{2^{k+2}-(k+1)-2}{2^{k+1}}$$

$$=\frac{2^{k+1}-k-2}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}}=\frac{2^{k+2}-2k-4+k+1}{2^{k+1}}$$

$$=\frac{2^{k+2}-(k+1)-2}{2^{k+1}}$$

ب)

$$n=2:\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2+2}>\frac{13}{24}\Rightarrow\frac{7}{12}>\frac{13}{24}\Rightarrow\frac{14}{24}>\frac{13}{24}$$

$$\text{فرض استقرا}:\ n=k:\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\dots+\frac{1}{k+k}>\frac{13}{24}$$

$$\text{حکم استقرا}:\ n=k+1:\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\dots+\frac{1}{k+1+k-1}+\frac{1}{k+1+k}+\frac{1}{k+1+k+1}>\frac{13}{24}$$

به عبارت سمت چپ حکم، $\frac{1}{k+1}$ را اضافه و کم می‌کنیم:

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\dots+\frac{1}{k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}>\frac{13}{24}$$

اکنون با توجه به فرض، مجموع همه‌ی جملات رشته‌ی بالا به‌جز سه جمله‌ی آخر، از $\frac{13}{24}$ بزرگ‌تر است. سپس کافی است نشان دهیم، مجموع این سه جمله عددی مثبت است؛ یعنی نشان دهیم:

$$\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}>0$$

و این موضوع را با استدلال برگشتی نشان می‌دهیم:

$$\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}>\frac{1}{k+1}\Leftrightarrow\frac{2k+2+2k+1}{2(k+1)(2k+1)}>\frac{1}{k+1}\Leftrightarrow$$

$$\frac{4k+3}{2(2k+1)}>1\Leftrightarrow 4k+3>k+2\Leftrightarrow 1>0$$

همه‌ی مراحل بالا برگشت‌پذیرند و از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}>0$$

با افزودن این نابرابری به نابرابری فرض، حکم نتیجه می‌شود.

۲. الف) صحیح است. با استدلال استنتاجی اثبات می‌کنیم:

$$a=\frac{p}{q},p,q\in z,\ q\neq 0\ \ b=\frac{p'}{q'},p',q'\in z,q'\neq 0\Rightarrow$$

$$ab=\frac{pp'}{qq'}=\frac{p''}{q''},p'',q''\in z,q''=qq'\neq 0\Rightarrow ab\in Q$$

ب) صحیح است و با برهان خلف آن را اثبات می‌کنیم. فرض کنیم:

$a \in Q$ و $a \neq 0$ و $b \notin Q$. و نیز فرض کنیم: $ab \in Q$. در این صورت می‌توان نوشت:

$$a = \frac{p}{q}, p, q \in z, \ \ p, q \neq 0, \ \ ab = \frac{p'}{q'}, p', q' \in z, q' \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{p'}{q'} = \frac{p}{q} . b \Rightarrow b = \frac{\frac{p'}{q'}}{\frac{p}{q}} = \frac{p'q}{q'p} = \frac{p''}{q''}, p'', q'' \in z,$$

$q'' \neq 0 \Rightarrow \ b \in Q$ (تناقض، زیرا: $b \notin Q$)

ج) نادرست است . مثال نقض:

$$\sqrt{2} \notin Q, \ \sqrt{8} \notin Q, \ \sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4 \in Q$$

۳ . باقی‌مانده‌های عددهای طبیعی بر ۲۰ ، عبارتند از : ۱۹ و ... و ۲ و ۱ و ۰ یعنی ۲۰ نوع باقی‌مانده داریم . سپس برای آن‌که لااقل ۶ عضو دارای یک باقی‌مانده باشند، باید لااقل ۱+۲۰×۵ ، یعنی ۱۰۱ عضو داشته باشیم تا طبق اصل لانه‌ی کبوتری به حکم برسیم .

۴ . $x^3 = 4x \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0$ یا $x = \pm 2$

$$\Rightarrow A = \{0, 2, -2\}, \ \ x^2 \leq 3x \Rightarrow x^2 - 3x \leq 0 \Rightarrow$$

$$x(x-3) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 3 \Rightarrow B = \{0, 1, 2, 3\}$$

زیرمجموعه‌های خالص $A \cap B$: $\quad A \cap B = \{0, 2\} \Rightarrow \{0\}, \{2\}, \varnothing$

۵ . الف) $A \Delta (B \cap C) = [(A - (B \cap C)] \cup [(B \cap C) - A)]$

$$= [A \cap (B \cap C)'] \cup [(B \cap C) \cap A']$$

$$= [A \cap (B' \cup C')] \cup [B \cap (C \cap A')]$$

$$= [(A \cap B') \cup (A \cap C')] \cup [B \cap (C \cap A')]$$

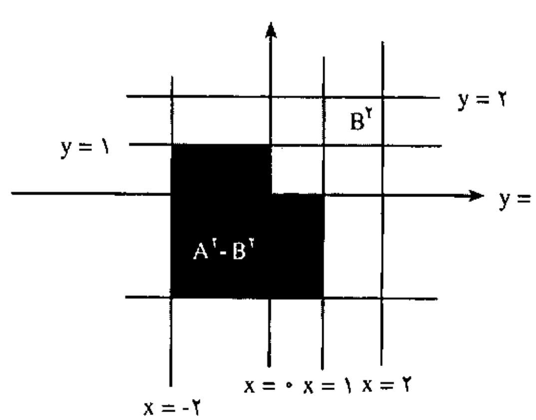
$$= (A - B) \cup (A - C) \cup (B \cap (C - A))$$

ب) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A \Rightarrow (A \cap B)' = A' \Rightarrow$

$$A' \cup B' = A' \Rightarrow B' \subseteq A'$$

$$A^2 = \{(x, y) | x \in A, y \in A\} = \{(x, y) | -2 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 1\}$$

$$B^2 = \{(x, y) | x \in B, y \in B\} = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$$



۷ . اولاً:

خاصیت انعکاسی : $(x, y)R(x, y): \frac{x^2 - x^2}{2} = y^2 - y^2 \Rightarrow 0 = 0$

خاصیت تقارنی : $(x, y)R(z, t) \Rightarrow \frac{x^2 - z^2}{2} = y^2 - t^2 \Rightarrow \frac{z^2 - x^2}{2} = t^2 - y^2$

$$\Rightarrow (z, t)R(x, y)$$

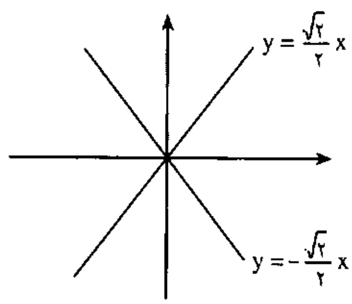
خاصیت ترایایی (تعدی) : $(x, y)R(z, t), (z, t)R(r, s) \Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{x^2 - z^2}{2} = y^2 - t^2 \\ \frac{z^2 - r^2}{2} = t^2 - s^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2 - z^2}{2} + \frac{z^2 - r^2}{2} = y^2 - t^2 + t^2 - s^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - r^2}{2} = y^2 - s^2 \Rightarrow (x, y)R(r, s)$$

ثانیاً: $(0, 0)R(x, y) \Rightarrow \frac{0 - x^2}{2} = 0 - y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{2}$

$$\Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} x$$



کلیه‌ی نقاط روی خطوط $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} x$ با $(0, 0)$ در رابطه هستند .

۸ . الف) $S = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}, \ \ x, y \leq 6\}$

ب)

$$A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (5,1)\}$$

$$B = \{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,3), (4,5), (5,4), (5,6), (6,5)\}$$

$$A' \cap B' = (A \cup B)' = \{(1,6), (2,5), (2,6), (3,5), (3,6), (4,4), (4,6), (5,3), (5,2), (5,5), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,6)\}$$

۹ . الف) $P(A) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{\frac{5!}{3!2!}}{\frac{9!}{3!6!}} = \frac{5 \times 2}{3 \times 4 \times 7} = \frac{5}{42}$

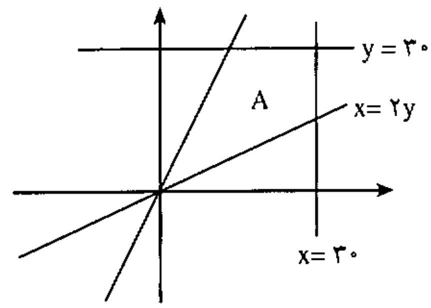
ب) $\frac{\binom{4}{3} + \binom{4}{2}\binom{5}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{4 + 6 \times 5}{3 \times 4 \times 7} = \frac{17}{42}$

۱۰ .

$$S = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, \ 0 \leq x, y \leq 30\},$$

$$A = \{(x, y) | (x, y) \in S, x \leq 2y, y \leq 2x\}$$

$$P(A) = \frac{S_A}{S_S} = \frac{900 - 2 \times 225}{900} = \frac{450}{900} = \frac{1}{2}$$



۱۱.
$$\begin{cases} P(A)=2P(B)=\frac{1}{2}P(M_1)\Rightarrow \\ P(A)+P(B)+P(M_1)=P(A)+\frac{P(A)}{2}+2P(A)=1 \\ P(C)=P(D)=2P(M_2)\Rightarrow \\ P(C)+P(D)+P(M_2)=P(D)+P(D)+\frac{P(D)}{2}=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{2}{7},\ P(A')=\frac{5}{7},\ P(D)=\frac{2}{5}$$

۱۲. پیشامد مضرب ۳ بودن را با A، پیشامد مضرب ۷ بودن را با B و پیشامد مضرب ۱۱ بودن را با C نمایش می‌دهیم و می‌نویسیم:

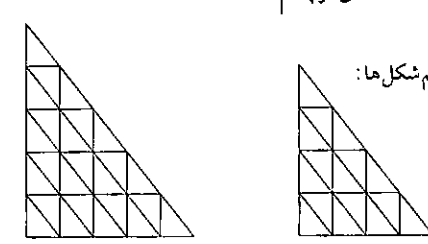
$$P[(A\cup B)\cap C']=P[(A\cap C')\cup(B\cap C')]$$
$$=P[(A-C)\cup(B-C)]$$
$$=P(A-C)+P(B-C)-P(A\cap C'\cap B\cap C')$$
$$=P(A-C)+P(B-C)-P((A\cap B)-C)$$
$$=P(A)-P(A\cap C)+P(B)-P(B\cap C)-$$
$$P(A\cap B)+P(A\cap B\cap C)=$$
$$\frac{\left[\frac{100}{3}\right]}{100}-\frac{\left[\frac{100}{33}\right]}{100}+\frac{\left[\frac{100}{7}\right]}{100}-\frac{\left[\frac{100}{77}\right]}{100}-\frac{\left[\frac{100}{21}\right]}{100}$$
$$+\frac{\left[\frac{100}{3\times7\times11}\right]}{100}=0/39$$

هندسه‌ی ۲

۱. داریم:

الف) شماره شکل	۱	۲	۳
تعداد مثلث‌های کوچک	$1^2=1$	$2^2=4$	$3^2=9$

ب) رسم شکل‌ها:



شماره شکل	۳	۴	۵
تعداد مثلث‌های کوچک	$3^2=9$	$4^2=16$	$5^2=25$

پ) در شکل nام، تعداد مثلث‌های کوچک مساوی n^2 است.

ت) $4cm^2=(2\times4)\frac{1}{2}=$ مساحت مثلث شکل ۱

$\Rightarrow$ مساحت شکل nام $=n^2\times4=4n^2cm^2$

۲. می‌دانیم که از هر رأس یک n ضلعی، n-۳ قطر می‌گذرد. پس داریم:

تعداد ضلع‌های چند ضلعی داده شده ۹ = $n-3=6\Rightarrow n=9$

تعداد قطرهای n ضلعی $=\frac{n(n-3)}{2}=\frac{9(9-3)}{2}=27$

۳. بنا به ویژگی نیمساز زاویه‌های مثلث داریم:

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}$$

اما DB=۲x-۱ و AB=۳۸,DC=۲x+۵ پس داریم:

$$\frac{2x-1}{2x+5}=\frac{38}{50}\Rightarrow100x-50=76x+190\Rightarrow$$
$$100x-76x=190+50\Rightarrow24x=240\Rightarrow x=10$$

۴. در دو مثلث ABC و ACD داریم:

$$\begin{cases} AB=AC \\ AD=AD \\ B\hat{A}D>C\hat{A}D \end{cases}$$

پس بنا به قضیه‌ی لولا نتیجه می‌شود: BD>DC.

۵. چهارضلعی $AB'DC'$ متوازی‌الاضلاع است، زیرا ضلع‌های آن دو به دو با هم موازی‌اند. بنابراین: $DB'=AC'$ و $DC'=AB'$. از طرف دیگر، بنا به فرض AB>AC، پس: $\hat{C}>\hat{B}$. در مثلث DBB'، $B\hat{D}B'=\hat{C}>\hat{B}$، پس: $BB'>DB'$ (۱).

از طرف دیگر، $AB'=DC'$(۲). از جمع کردن طرف‌های نظیر رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$BB'+AB'>DB'+DC'\Rightarrow AB>DB'+DC'$$ یا
$$DB'+DC'<AB \ (I)$$

همچنین، در مثلث DCC'، $C\hat{D}C'=\hat{B}<\hat{C}$، پس: $DC'>CC'$ (۳).

از طرف دیگر، $DB'=AC'$ (۴). از جمع کردن طرف‌های نظیر رابطه‌ی (۳) و (۴) داریم:

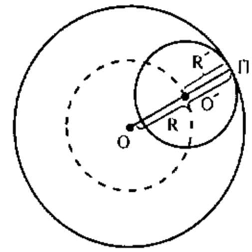
$$DC'+DB'>AC'+CC'\Rightarrow DC'+DB'>AC \ (II)$$

از رابطه‌های (I) و (II) نتیجه می‌شود:

$$AC<DB'+DC'<AB$$

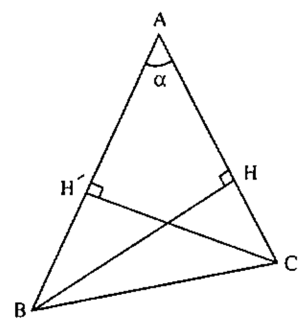
۶. فرض می‌کنیم، دایره‌ی $C'(O',R')$ یکی از دایره‌های موردنظر، یعنی دایره‌ای باشد به شعاع R' که بر دایره‌ی C(O و R) مماس درون است. از O به O' وصل می‌کنیم. می‌دانیم که:

مقدار ثابت $OO' = R - R' =$



یعنی نقطه‌ی O' از نقطه‌ی ثابت O به فاصله‌ی ثابتی قرار دارد، پس مکان هندسی نقطه‌ی O'، دایره‌ای به مرکز O به شعاع $R - R'$ است.

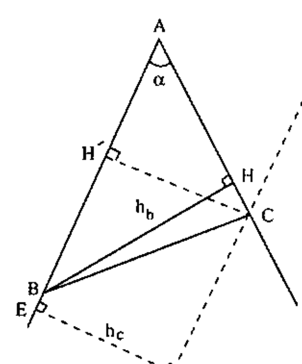
۷. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مثلث ABC جواب مسأله باشد.



ارتفاع‌های BH و CH' را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که $\hat{A} = \alpha$، $BH = h_b$ و $CH' = h_c$ مقدارهای معلومی هستند، بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی ABH و ACH' به دلیل معلوم بودن یک زاویه‌ی حاده ($\hat{A} = \alpha$) و ضلع‌های روبه‌روی آن (BH و CH') قابل رسم هستند.

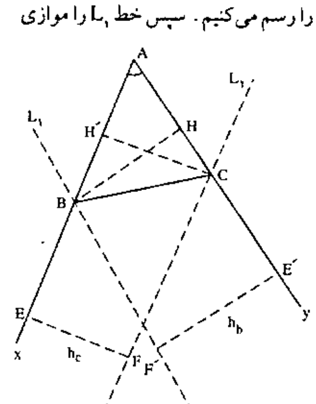
همچنین می‌توان گفت که رأس B از ضلع AC به فاصله‌ی ثابت h_b و نقطه‌ی C از ضلع AB به فاصله‌ی ثابت $CH = h_c$ قرار دارد. پس برای رسم مثلث ABC به یکی از راه‌های زیر می‌توان عمل کرد:

راه اول: مثلث قائم‌الزاویه ABH ($\hat{H} = 90°$) را با معلوم بودن $\hat{A} = \alpha$ و ضلع $BH = h_b$ رسم می‌کنیم. آن‌گاه



خطی موازی ضلع AB و به فاصله‌ی h_c از آن می‌کشیم. برای این کار از نقطه‌ی دلخواهی مانند E واقع بر خط AB، عمود EF را به طول $EF = h_c$ اخراج می‌کنیم و از F خطی موازی ضلع AB می‌کشیم. نقطه‌ی برخورد این خط با خط AH، نقطه‌ی C، رأس سوم مثلث است. از C به B وصل می‌کنیم تا مثلث ABC جواب مسأله به دست آید.

راه دوم: زاویه‌ی $x\hat{A}y = \alpha$ را رسم می‌کنیم. سپس خط L_1 را موازی Ay و به فاصله‌ی h_b از آن، و خط L_2 را موازی Ax و به فاصله‌ی h_c از آن می‌کشیم تا به ترتیب Ax و Ay را در نقطه‌های B و C قطع کنند. از B به C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.



سؤال: آیا روش دیگری برای رسم مثلث ABC وجود دارد؟ اگر راه‌حل دیگری دارد، بنویسید و به نشانی مجله‌ی برهان دبیرستان بفرستید.

۸. نقطه‌ی M رأس زاویه‌ای برونی نسبت به دایره است، زیرا رأس زاویه‌ای است که از برخورد قاطع BA و مماس TM به وجود آمده است. پس داریم:

$$\hat{M} = \frac{\widehat{BT} - \widehat{AT}}{2} \Rightarrow 45° = \frac{170° - x}{2} \Rightarrow 90° = 170° - x$$

$$\Rightarrow x = 170° - 90° = 80° \Rightarrow x = \widehat{AT} = 80°$$

از طرف دیگر داریم:

$$\widehat{AB} + \widehat{BT} + \widehat{TA} = 360° \Rightarrow y + 170° + 80° = 360° \Rightarrow$$

$$y = 360° - 250° = 110° \Rightarrow y = 110°$$

۹. شعاع دایره را R می‌نامیم. داریم:

$$AB = 16\sqrt{3}cm, R = 16cm, \alpha < 90°, \sin\alpha = \frac{AB}{2R}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{16\sqrt{3}}{2\times 16} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60° \Rightarrow \alpha = 60°$$

$$OH = R cin\alpha = 16\times\cos 60° = 16\times\frac{1}{2} = 8 \Rightarrow OH = 8cm$$

۱۰. الف) بنابر رابطه‌ی طولی در دایره داریم:

$$MA.MB = MC.MD \Rightarrow 8\times 22/5 = (3x+1)(6x) \Rightarrow$$

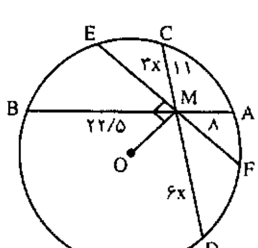
$$18x^2 + 6x - 180 = 0 \Rightarrow 3x^2 + x - 30 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1+360}}{6}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1\pm 19}{3} \Rightarrow x = \frac{-20}{3} < 0, \quad x = 6$$

ب) کوچک‌ترین وتری که از نقطه‌ی M در دایره رسم می‌شود، وتری است که در نقطه‌ی M بر OM عمود است. این وتر را رسم می‌کنیم و EF می‌نامیم. می‌دانیم که $ME = MF$ و داریم:

$$ME.MF = MA.MB \Rightarrow ME^2 = 8\times 22/5 \Rightarrow ME^2 = 180$$

$$\Rightarrow ME = \sqrt{180} = 6\sqrt{5} \Rightarrow EF = 2ME = 12\sqrt{5}$$



۱۱. باید داشته باشیم:

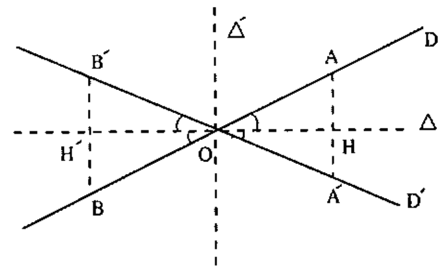
$$\begin{cases} x - y + 1 = -6 \\ 2x + y + 3 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = -7 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 6 \end{cases}$$

پس نقطه‌ی خواسته شده (۶ و ۱-) است.

۱۲. اگر خط $D: ax + by + c = 0$ تصویر خط $D: ax' + b'y + c' = 0$ تحت یک بازتاب محوری باشد، معادله‌ی محورهای بازتاب که در واقع همان

نیمسازهای زاویه‌های بین دوخط D و D' هستند، به صورت زیر است:

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$



در این مسأله داریم:

$$\frac{2x+y-13}{\sqrt{4+1}=\sqrt{5}}=\pm\frac{2x+y-5}{\sqrt{4+1}=\sqrt{5}}\Rightarrow 2x+y-13=\pm(2x+y-5)$$

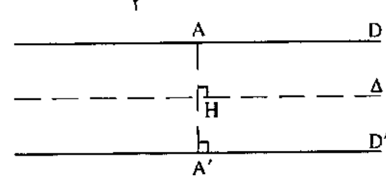
$$\Rightarrow 2x+y-13=2x+y-5\Rightarrow -13\neq -5$$

$$2x+y-13=-2x-y+5\Rightarrow 4x+2y-18=0$$

معادله‌ی محور بازتاب $\Rightarrow 2x+y-9=0$

نکته: اگر دو خط D و D' موازی باشند و معادله آن‌ها به صورت $D:ax+by+c=0,\ D':ax+by+c'=0$ باشد، محور بازتاب آن‌ها نیز با آن‌ها موازی است و معادله‌اش به صورت زیر است:

$$\Delta: ax+by+\frac{c+c'}{2}=0$$



در این مسأله داریم:

$$2x+y+\frac{-13-5}{2}=0\Rightarrow 2x+y-9=0$$

۱۳. روش کلی: دو نقطه‌ی دلخواه A و B از خط Δ را انتخاب می‌کنیم، تصویرهای آن‌ها تحت تبدیل داده شده را، A' و B' می‌نامیم و آن‌گاه معادله‌ی خطی را که از دو نقطه‌ی A' و B' می‌گذرد، می‌نویسیم. داریم:

$$\Delta: 3x-4y-12=0 \quad x=0\xrightarrow{\text{در معادله‌ی }\Delta} 0-4y-12=0$$

$$\Rightarrow y=-3\Rightarrow A=(0,-3)\in\Delta$$

$$y=0\xrightarrow{\text{در معادله‌ی }\Delta} 3x-12=0$$

$$\Rightarrow x=4\Rightarrow B=(4,0)\in\Delta$$

$$T(x,y)=(2x,2y)$$

$$\Rightarrow A'=(0,-6)\ ,\ B'=(8,0)\Rightarrow A'B': y+6=\frac{0+6}{8-0}(x-0)$$

$$\Rightarrow A'B': y+6=\frac{3}{4}x \qquad A'B': 3x-4y-24=0$$

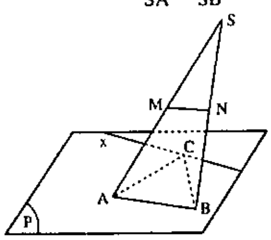
روش خاص: تبدیل داده شده تجانس است و مجانس خط راست، خط راستی موازی آن است. پس کافی است، تصویر یک نقطه از خط Δ را به دست آوریم و آن‌گاه معادله‌ی خطی را که از این نقطه موازی Δ رسم می‌شود، بنویسیم. داریم:

$$A=(0,-3)\in\Delta\Rightarrow A'=(0,-6),\ m_{\Delta}=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}$$

$$y-y_1=m(x-x_1)\Rightarrow \Delta': y+6=\frac{3}{4}(x-0)\Rightarrow 4y+24=3x$$

معادله‌ی تصویر خط داده شده $\quad \Delta': 3x-4y-24=0$

۱۴. در صفحه‌ی SAB، از رابطه‌ی $\frac{SM}{SA}=\frac{SN}{SB}$ نتیجه می‌شود که MN موازی AB است و چون AB در صفحه‌ی P قرار دارد، پس MN با صفحه‌ی P موازی است. در نتیجه، بنا به قضیه‌ی ۱ صفحه‌ی ۱۳۸ کتاب هندسه‌ی ۲، هر صفحه‌ای که بر MN بگذرد، صفه‌ی P را در خطی موازی MN قطع می‌کند. پس صفحه‌ی MNC که بر خط MN گذشته است، صفحه‌ی P را در خطی موازی MN قطع می‌کند. این خط از نقطه‌ی C که به هر دو صفحه‌ی P و CMN تعلق دارد، می‌گذرد.



۱۵. از رابطه‌های AM=BM، AN=BN و AQ=BQ نتیجه می‌شود که نقطه‌های M، N و Q روی صفحه‌ی عمود منصف پاره‌خط AB قرار دارند؛ پس در یک صفحه‌اند.

۱۶. بنا به قضیه‌ی تالس در فضا داریم:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AK}{KR}=\frac{PQ}{QR}$$

اما بنا به فرض AB=BC، پس $\frac{AB}{BC}=1$ و در نتیجه $\frac{AK}{KR}=\frac{PQ}{QR}=1$؛ یعنی: AK=KR و PQ=QR. به عبارت دیگر، K وسط AR و Q وسط PR است. بنابراین، در مثلث ACR داریم:

$BK=\frac{1}{2}CR$ (۱) (پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع مثلثی را به هم وصل می‌کند، موازی ضلع سوم و مساوی نصف آن است). همچنین، در مثلث APR داریم:

$KQ=\frac{1}{2}AP$ (۲).

از جمع کردن طرف‌های نظیر رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$BK+KQ=\frac{1}{2}(CR+AP) \quad (3)$$

از طرف دیگر، در مثلث BKR داریم:

$$BQ<BK+KQ \quad (4)$$

از رابطه‌های (۳) و (۴) نتیجه می‌شود:

$BQ<\frac{1}{2}(CR+AP)$ یا $BQ<\frac{1}{2}(AP+CR)$

و حکم مسأله ثابت شد.

حساب هندی در قدیم با تخت و تراب (خاک) انجام می‌یافته است. به این معنی که برای انجام دادن اعمال حساب مقداری خاک یا شن نرم روی تخته یا لوح مسطحی می‌گستردند و ارقام را به وسیله‌ی نوک میله‌ای روی آن می‌نوشتند. و اعمال فرعی را در ذهن انجام داده هر وقت لازم می‌شد رقمی را محو و رقم دیگری را به جای آن اثبات می‌کردند. یعنی به جای رقم محو شده از نو رقم دیگری می‌نوشتند. به کار بردن این روش به جهات واضحی مورد پسند نبوده است.

ریاضیدانان دوره‌ی اسلامی کوشیدند که به جای محاسبه با تخت و تراب محاسبه به وسیله‌ی کاغذ و قلم را به کار برند. از جمله‌ی این ریاضیدانان یکی از همین ابوالحسن اقلیدسی است که در مقدمه‌ی کتاب خود نوشته است: «در فصل چهارم اعمال حساب هندی را که با تخت انجام می‌شود با روشی شرح داده‌ام ک در آن احتیاج به تخت و تراب یا محو کردن و اثبات کردن ارقام نباشد و همه‌ی این اعمال روی صفحه‌ی کاغذ انجام گیرد.»

اقلیدسی برای اینک در انجام دادن عملیات حساب احتیاج به محو و اثبات ارقام نباشد و بتوان آن اعمال را با کاغذ و قلم انجام داد تغییراتی در قاعده‌های اعمال داده است و می‌توان گفت که این تغییرات نخستین قدم‌هایی است که در این راه برداشته شده است.

اقلیدسی در باب سی و دوم از فصل چهارم که آخرین باب کتاب است به محاسبه‌ی

$$\sum_{۰}^{۶۳} ۲^{i} = ۱ + ۲ + \cdots + ۲^{۶۳}$$

پرداخته. عنوان این باب در کتاب وی چنین است: «فی اضعاف الواحد رابعاً و ستین مره».

اهمیت کتاب حساب اقلیدسی

کتاب الفصول فی الحساب الهندی تألیف اقلیدسی از چند جهت دارای اهمیت است:

اول اینکه این کتاب قدیمی‌ترین کتاب حساب دوره‌ی اسلامی است که متن اصلی آن به دست ما رسیده است. البته در حدود صد سال پیش از اقلیدسی کتابی در حساب توسط خوارزمی (ابوعبدالله محمدبن موسی) نوشته شده بود که اگر چه ترجمه‌ی لاتینی آن باقی مانده اما متن عربی آن از بین رفته است. بعد از اقلیدسی هم چندین کتاب درباره‌ی حساب هندی توسط ریاضیدانان دوره‌ی اسلامی تألیف شد که از آن جمله است کتاب عیون الاصول فی الحساب الهندی به عربی تألیف کوشیاربن لبان جیلی متوفی به سال ۳۹۱ و کتاب المقنع فی الحساب الهندی به عربی توسط علی بن احمد نسوی متوفی به سال ۴۷۳ و کتاب جوامع الحساب بالتخت و التراب به عربی توسط نصیرالدین طوسی متوفی به سال ۶۷۲ و کتاب شمارنامه به فارسی تألیف محمدبن ایوب طبریدر نیمه‌ی دوم سده‌ی پنجم و جز اینها. اما کتاب اقلیدسی از همه‌ی اینها مفصل‌تر و جامع‌تر و حاوی مطالبی است که در کتاب‌های دیگر دیده نمی‌شود.

اهمیت دوم حساب اقلیدسی این است که ظاهراً وی چنان که خود ادعا کرده است نخستین ریاضیدانی است که استخراج کعب از اعداد منطق و اصم را به طور واضح ذکر و روش آن را بیان کرده است. تا پیش از اینکه کتاب حساب اقلیدسی در دسترس مورخان ریاضی قرار گیرد آنان گمان می‌کردند که نخستین کسی که در دوره‌ی اسلامی روش استخراج کعب را بیان کرده و شرح داده کوشیاربن لبان جیلی بوده است که در حدود نیم قرن بعد از اقلیدسی می‌زیسته است.

اقلیدسی و کسرهای اعشاری

مهم‌ترین امتیاز و اهمیت کتاب حساب اقلیدسی در این است که وی در حدود پانصد سال پیش از غیاث‌الدین جمشید کاشانی کسرهای اعشاری را به کار برده است.

ابوالحسن اقلیدسی اگر چه درباره‌ی اختراع کسرهای اعشاری ادعایی نکرده اما در چند مورد، به شرح زیر، کسرهای اعشاری را به کار بسته و برای متمایز ساختن قسمت صحیح عدد از قسمت اعشاری آن یک خط کوچک (به جای ممیز) در بالای رقم یکان قسمت صحیح عدد قرار داده است:

اولاً در مورد تقسیمات متوالی عدد ۱۳ بر عدد ۲ نتایج زیرا را متوالیاً به دست آورده است: ۶/۵ و ۳/۲۵ و ۱/۶۲۵ و ۰/۸۱۲۵ سپس برای از نو به دست آوردن عدد ۱۳ نتایج فوق را متوالیاً در ۲ ضرب کرده است.

ثانیاً در جای دیگری از کتاب خود برای آنک به عدد ۱۳۵ متوالیاً یک دهم آن را بیفزاید چنین عمل کرده است:

۱۶۳/۳۵	۱۴۸/۵	۱۳۵
۱۶/۳۳۵	۱۴/۸۵	۱۳/۵
۱۷۹/۶۸۵	۱۶۳/۳۵	۱۴۸/۵

ثالثاً در محل دیگری برای استخراج جذر یا کعب تقریبی از عدد a قاعده‌های زیر را به کار بسته است:

$$\sqrt[۳]{a} = \frac{\sqrt{a \times ۱۰^{۲}}}{۱۰} \quad , \quad \sqrt[۳]{a} = \frac{\sqrt[۳]{a \times ۱۰^{۳}}}{۱۰}$$

البته ریاضیدانان دیگری نیز این قاعده را به کار برده‌اند و آن را استخراج جذر یا کعب به اصفار نامیده‌اند. اما همه‌ی آنها کسر اعشاری حاصل را به دستگاه شمار شصتگانی تبدیل کرده‌اند. تنها اقلیدسی است که در چند مورد حاصل را در دستگاه شمار اعشاری ثبت کرده است.

خلاصه. از آنچه گذشت می‌توان نتیجه گرفت که البته اقلیدسی در حدود پنج قرن پیش از کاشانی کسرهای اعشاری را در کتاب خود به کار برده و اعمال اصلی را درباره‌ی آنها انجام داده است. با این حال مثل اینکه این کسرها را از پیشینیان خود اخذ کرده باشد به آنها توجهی خاص نداشته و به اهمیت آنها پی نبرده بلکه آنها را در ردیف کسرهای متعارفی و شصتگانی به کار بسته است و پس وی در حدود پنج قرن کسی از کار او اطلاع پیدا نکرده و بنابراین کتاب او در استعمال این کسرها توسط دیگران تأثیری نداشته است. اما کاشانی به قول خود کسرهای اعشاری را به قیاس با کسرهای شصتگان اختراع کرده و نام کسر اعشاری را او بر این کسرها نهاده و آگاهانه و به طور اصولی قاعده‌های عمل با آنها را شرح داده است و آنها را به وجهی پیگیر در محاسبات به کار برده و استعمال آنها را به دیگران توصیه کرده و کتاب مفتاح الحساب او در بسط این کسرها بعد از خود او مؤثر بوده است.

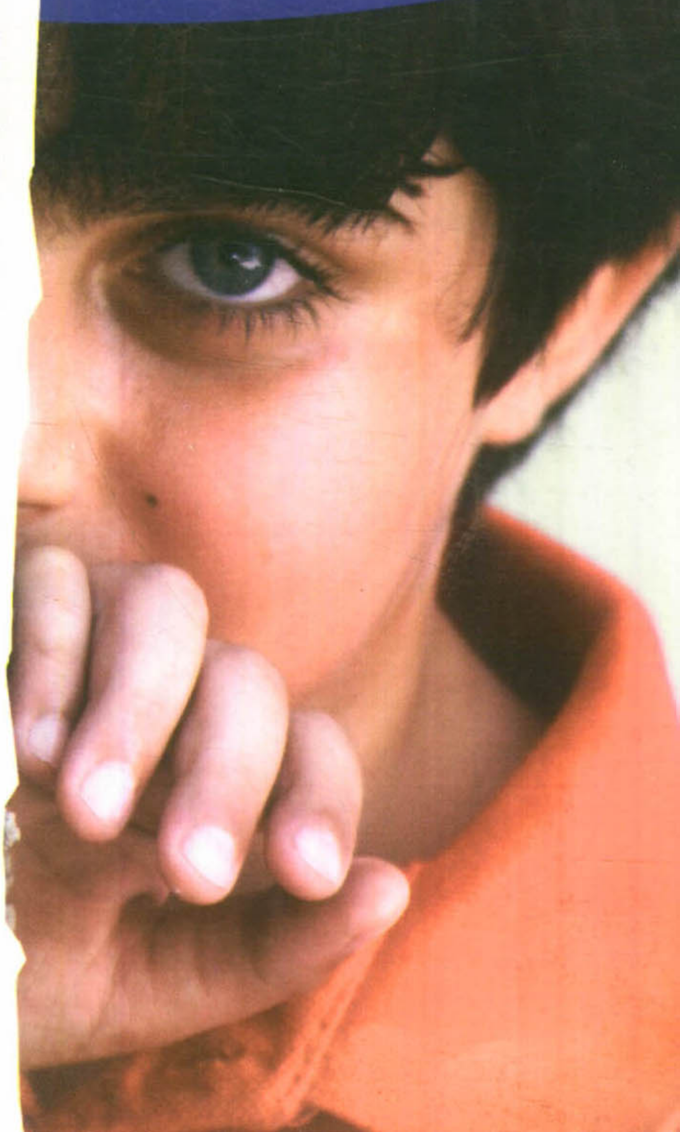
منابع

* برگرفته از کتاب زندگی‌نامه ریاضیدان دوره‌ی اسلامی ابوالقاسم قربانی با تلخیص

دفتر انتشارات
کمک آموزشی
برگزار می کند

سومین دوره‌ی جشنواره‌ی

عکس رشد



به یاری آفریننده‌ی نقش‌ها

مجلات رشد، وابسته به دفتر انتشارات کمک آموزشی، سومین دوره‌ی «جشنواره‌ی عکس رشد» را برگزار می کنند.

عکاسان بزرگسال و دانش‌آموز هر کدام می توانند در دو گرایش:
۱. آموزش و پرورش از نگاه دوربین. ۲. آزاد.
در این جشنواره شرکت کنند.

جوایز

۱. جایزه نفر اول هر گرایش، علاوه بر دیپلم افتخار، تندیس و چهار سکه‌ی بهار آزادی است.
۲. به کسانی که رتبه‌ی دوم و سوم هر گرایش را به‌دست آورند، علاوه بر اهدای لوح تقدیر وتندیس، به ترتیب به هر کدام سه و دو سکه‌ی بهار آزادی اهدا خواهد شد.
۳. در هر گرایش بنا به نظر گروه داوری، حداکثر از یک نفر تقدیر می‌شود که هریک از آنان، علاوه بر لوح تقدیر، یک سکه‌ی بهار آزادی دریافت خواهند کرد.
۴. به همه‌ی کسانی که عکسشان به نمایشگاه راه پیدا! کند، لوح یادبود، پنج حلقه فیلم عکاسی و برخی از تولیدات دفتر انتشارات کمک آموزشی اهدا می‌شود.
۵. نمایشگاه آثار برگزیده و مراسم اهدای جوایز نفرات برتر، شهریورماه ۱۳۸۵ در تهران برگزار خواهد شد که مکان و زمان دقیق برگزاری مراسم، به موقع به اطلاع شرکت کنندگان و علاقه‌مندان خواهد رسید.

مقررات

۱. مهلت ارسال آثار تا ۱۵ اردیبهشت ۱۳۸۵ است.
۲. هر نفر می تواند، حداکثر با پنج قطعه عکس در هر گرایش شرکت کند. (شرکت یک عکاس در هر دو گرایش آزاد است).
۳. ابعاد عکس‌ها باید حداقل ۱۸ × ۱۳ و حداکثر ۳۰ × ۲۰ سانتی‌متر باشد.
۴. عکاسانی که سن آن‌ها کم‌تر از ۱۸ سال است، می توانند در گروه دانش‌آموزی، و عکاسانی که سنشان بیش‌تر از ۱۸ سال است، در گروه بزرگسال شرکت کنند.
۵. عکس‌های ارسالی نباید قبلاً در نشریه و یا کتابی به چاپ رسیده باشند.
۶. مسؤولیت درستی اطلاعات مربوط به هر عکس وعکاس آن، بر عهده‌ی شرکت کننده خواهد بود.
۷. شرکت کنندگان باید برگه‌ای شامل گرایش، شماره، تاریخ و مکان عکاسی و نام عکاس را پشت هریک از عکس‌ها بچسبانند.
۸. در برگه‌ای جداگانه، مشخصات کامل خود را با شماره تلفن تماس و نشانی کامل پستی یادداشت کنید و همراه عکس‌ها به نشانی دبیرخانه‌ی جشنواره بفرستید.
۹. دفتر انتشارات کمک آموزشی اجازه دارد، عکس‌های دریافتی را به صورت مجموعه عکس و یا به صورت‌های دیگر، از قبیل چاپ در نشریات یا کتاب‌ها و... لزوماً با ذکر نام عکاس، منتشر کند.

عکس‌هایی که به نمایشگاه راه پیدا می کنند، بازگردانده نخواهند شد و بقیه‌ی عکس‌ها حداکثر تا پایان آبان ۱۳۸۵ به نشانی فرستندگان، ارسال می‌شوند.

نشانی دبیرخانه‌ی جشنواره‌ی عکس رشد: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۳۳۳۱
تلفن: ۸۸۳۰۵۲۷۹