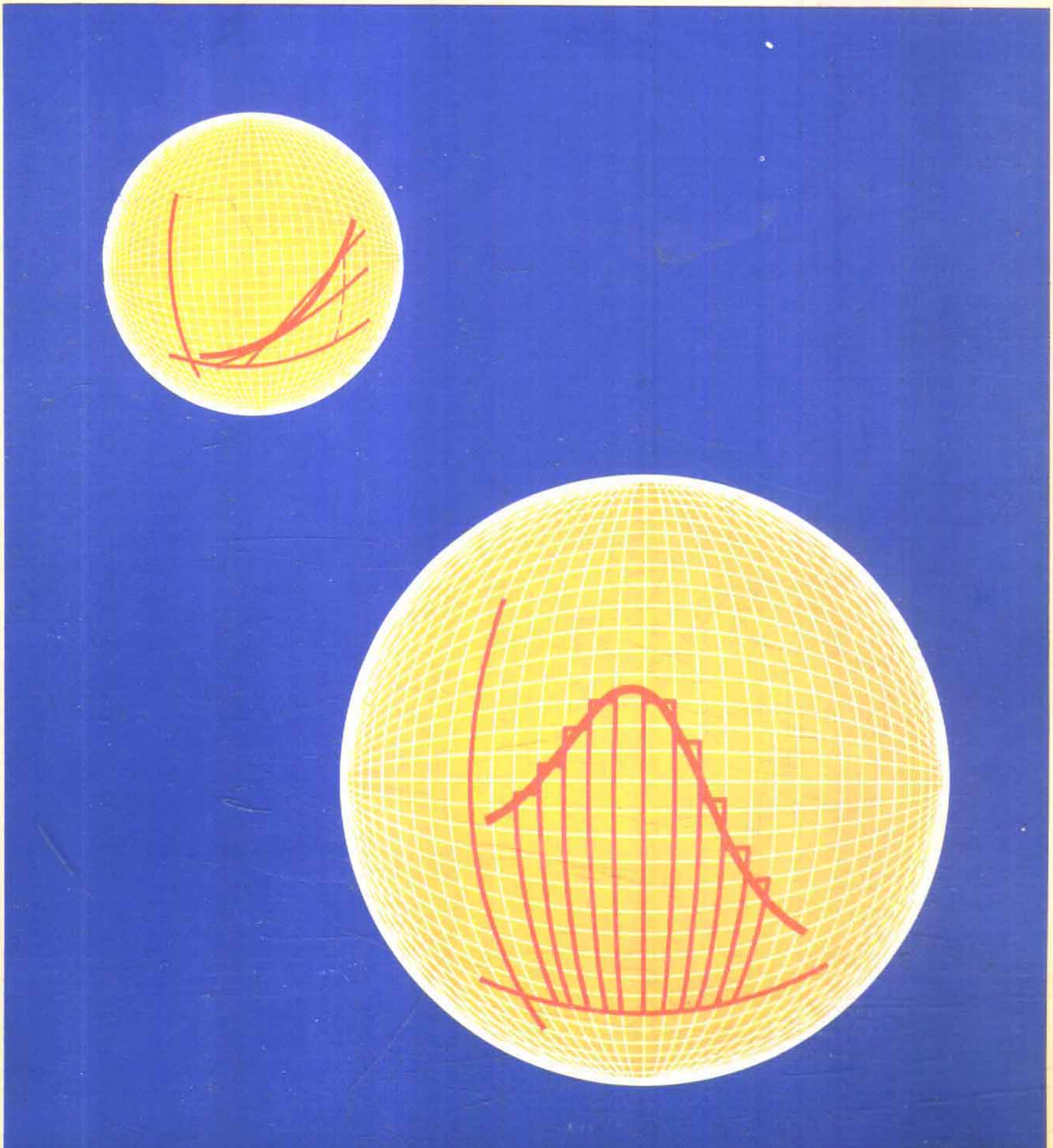
مجله ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۴

سال اول، پاییز ۱۳۷۱ بهاء ۵۰۰ ریال



چاپ سوم

بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه

● صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه

● مدیر مسئول: عبدالعظیم فریدون

● سردبیر: حمیدرضا امیری

اعضای هیئت تحریریه:

آقایان: ● حمیدرضا امیری

● محمد هاشم رستمی

● احمد قندهاری

● سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

● غلامرضا یاسی‌پور

(با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقایان پرویز شهریاری و محمد عابدی)

● مسئول فنی: هوشنگ آشتیانی

● صفحه آرا و رسام: محسن کریمخانی

● حروفچینی: یگانه

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱ ـ نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث درسی کتب ریاضی دبیرستان)

۲ ـ طرح مسائل کلیدی (برای دانش آموزان) به همراه حل آن

۳ ـ طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان)به همراه حل آن

۴ ـ طرح معماهای ریاضی

۵ ـ نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه ولطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

● مقالات وارده باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.
● هیئت تحریریه درحکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقالات آزاداست.
● مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

□ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهرشمالی، پلاک ۲۶۸، ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش وپرورش تلفن: ۸۸۲۶۰۰۷

مطالب این شماره

سخن سردبیر

«قدرو قیمت لحظات شیرین زندگی خود را بدانید و خودتان را برای یک مبارزهٔ علمی و عملی بزرگ تا رسیدن به اهداف انقلاب اسلامی آماده کنید.»

امام خمینی(ره)

چهار فصل از چاپ اولین شمارهٔ مجله ریاضی«برهان» گذشت و ما اکنون چهارمین شمارهٔ این مجله را در پیش رو داریم.

در این چهار شماره ما همواره از نظرات، پیشنهادات، مقالات و مسائلی که شما خوانندگانِ عزیز برای ما فرستاده‌اید کمالِ استفاده را برده و اِن شاءا... سعی خواهیم کرد که از این شماره مقالات و مسائل شما عزیزان را در مجله بیشتر منعکس کنیم.

از این شماره به‌بعد در بخش «مسائل برای حل» مسائل فرستاده شده را با ذکر نام فرستنده درج خواهیم‌کرد. قسمتهای متنوع دیگری نیز به مجله اضافه کرده‌ایم که امیدواریم مورد توجه و عنایت خوانندگان گرامی قرارگیرد.

در این شماره با یکی از معلمین خوب و دلسوز ریاضی مصاحبه‌ای انجام شده که محتوای آن حتماً مورد استفاده شما قرار خواهد گرفت و ما نیز امیدواریم بتوانیم این مصاحبه‌ها را ادامه داده تا از تجربیات این عزیزان بیشتر استفاده شود.

ـ به خواست خدا ـ از شماره آینده قصد داریم صفحه‌ای از مجله را به‌کار ترجمهٔ متونِ ریاضی از زبانِ انگلیسی اختصاص دهیم و در هر شماره مطلبی یا مسأله‌ای مفید را به زبان انگلیسی چاپ کرده و لغات آن را معنی کنیم و در نهایت ترجمه شدهٔ آن متن را در مقابلِ آن قرار دهیم تا هم عده‌ای که علاقه‌مند به فنّ ترجمه هستند بهره‌مندشوند و هم از آن مطلب یا مسأله ـ که در سطح دبیرستان خواهد بود ـ استفاده کنند.

دراین‌جا از عزیزانی که برای ما مطالبی را ترجمه کرده و می‌فرستند تقاضا داریم که فتوکپی متن انگلیسی را نیز به‌همراه آن بفرستند و نیز اگر «مسائل برای حل» را از منابعی انتخاب می‌کنید، منبع مورد استفاده را قید کرده تا بررسی آنها دقیقتر انجام شود.

عده‌ای از دانش‌آموزان درخواست کرده‌اند که مهلت جواب به مسائل مسابقه‌ای را افزایش‌دهیم لذا تصمیم‌گرفتیم جوابهای مسائل مسابقه‌ایِ هر شماره را در دو شمارهٔ بعد چاپ کنیم و مهلت ارسال جوابها را از یک‌ماه به سه ماه افزایش دهیم. از شمارهٔ بعد ـ باتوجه به درخواست خوانندگان ـ درنظرداریم دربخش «مسائل برای حل» مانندآنچه درشمارهٔ ۲ ملاحظه‌کردید، درکنارمسائل‌تست نیز قرار دهیم.

اِن شاءا... تصمیم داریم درصورت امکان، همراه شمارهٔ ۵ «ویژه‌نامه کنکور» شاملِ صورت و حل تشریحی تستهای کنکورِ ۲ـ۳ سال اخیر را به چاپ برِسانیم.

ضمناً درصدد هستیم درصورت امکان چهار شمارهٔ این مجله را به شکل یک دورهٔ تک‌جلدی منتشر کرده و در اختیار علاقه‌مندان قرار دهیم.

به هر حال توانایی و استمرار ما در چاپ مجلهٔ خودتان، توجه و عنایات شما را می‌طلبد که اِن شاءا... همواره برقرار خواهد بود.

والسلام

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۴)

پرویز شهریاری

دربارهٔ «واژه‌نامهٔ ریاضی» صحبت می‌کردیم که بحث به جاهای دیگری کشیده شد.

اگر «واژه‌نامهٔ ریاضی» را در کنار «دفتر خاطره‌های علمی» خود داشته باشید و اگر هردوی آنها را با پی‌گیری و دقت ادامه دهید، نه تنها به درس روزانهٔ شما کمک می‌کنند و شما را وامی‌دارند تا درمورد هرمطلب تازه یاکهنه دقیق شوید، در عمق مفهومهای علمی و ریاضی فرورویدو، به جای استفاده از حافظه و به خاطر سپردن فرمولها و قاعده‌ها، خود را به‌ریشه‌های موضوع موردنظرتان برسانید، بلکه مهمتر از همه، موجب می‌شوند تا ذهن و اندیشهٔ شما سمت پیدا کند؛ آن وقت، باتوجه به‌هدفی که دارید، تمامی ساعتهای زندگی شما، به صورتی دلپذیرو برنامه‌ریزی شده و در جهت علاقه‌های علمی پر می‌شود، به نحوی که گاه، برای دست یافتن به چیزی که به دنبال آن هستید، چنان شور وشوقی پیدا می‌کنید که سراسر زندگی فرهنگی و معنوی شما را، لبریز از شادی و نشاط می‌کند، زندگی از حالت یکنواختی و ملال‌آور خود خارج می‌شود و احساس می‌کنید، شما هم برای ساختن بنای پرشکوه تمدن بشری سهمی دارید و برای آزاد کردن انسان از قید ناشناخته‌ها و ابهامها، گامی برداشته‌اید. هدف موفق شدن در امتحانها و تلاش برای پیش‌افتادن از دیگران در کنکورها و مسابقه‌ها، هدف نادرستی نیست، ولی زودگذر است و به همین مناسبت، آینده‌ساز نیست؛ چراکه بعداز رسیدن به آن، آدمی را دچار رخوت و بی‌هدفی می‌کند. انسان وقتی می‌تواند در تمامی زندگی خود موفق باشد که، در کنار هدفهای فرعی و موضعی و کوتاه مدت، هدفی دراز مدت هم داشته‌باشد که به سراسر زندگی او معنا ببخشد؛ بداند در چه جهتی حرکت می‌کند و از تلاش خود چه انتظاری دارد!

«دفتر خاطره‌های علمی» و «واژه‌نامهٔ ریاضی»، وسیله‌های نیرومندی برای دستیابی به‌این هدف دراز مدت و شکل دادن به آن هستند. ولی برای این‌که از این «اهرم پرقدرت» استفاده کنید، برای این که «واژه‌نامهٔ» شما، به واقع سودمند باشد و در جهت دادن به اندیشهٔ علمی شما، نقش واقعی خود را ایفا کند، باید پیش خود، شرایطی را برای تنظیم آن درنظربگیرید. برخی‌از این شرایط را خواهیم آورد، ولی قبل‌از آن، به پرسشی که به‌طور طبیعی پیش‌می‌آید، پاسخ بدهیم، می‌پرسند: «اگر ما نخواهیم ریاضی‌دان بشویم و به چیز دیگری و مثلاً موسیقی علاقه‌مند باشیم، از صرف وقت خود در تنظیم این «واژه‌نامه» چه بهره‌ای می‌بریم؟» در پاسخ به این پرسش، باید گفت: اولاً شما به هر شاخه‌ای از دانش، هنر یا صنعت علاقه‌مند باشید، بی‌نیاز از ریاضیات نیستید و برای این که در رشتهٔ مورد علاقهٔ خود موفق شوید، باید ذهنی منظم و اندیشه‌ای هدفمند داشته باشید و ریاضیات، علاوه برآن که به این امر خدمت می‌کند، در رشتهٔ اختصاصی مورد علاقهٔ شما هم (هرقدر که گمان می‌کنید دور از ریاضیات است) به کارتان می‌آید. ثانیاً مگر کسی مانع شما شده‌است که، درکنار «واژه‌نامهٔ ریاضی»، به واژه‌نامه‌های دیگری هم، که با ذوق و علاقهٔ شما سازگاری بیشتری دارد، بپردازید: «واژه‌نامهٔ فیزیک»، «واژه‌نامهٔ موسیقی»، «واژه‌نامهٔ سیاسی»، «واژه‌نامهٔ اصطلاح‌های تجاری»، ...؟ گمان نکنید، در این صورت، کار شما متفرق می‌شود و یا وقت کم می‌آورید! آزمایش کنید، خیلی زود قانع

می‌شوید که هر «واژه‌نامه‌ای» می‌تواند برای شما مفید باشد، به خصوص که با تلاش در جهتهای مختلف، سرانجام خواهید توانست ذوق و علاقهٔ واقعی خود را بازیابید و با اطمینان بیشتری، آن را دنبال کنید. دربارهٔ کمبود وقت صحبتی نمی‌کنم، همین‌قدر می‌گویم که توان واقعی شما، آن قدر زیاد است که، با همین وقت محدود خود، و بدون این که به کار رسمی درسی شما لطمه‌ای وارد آید، قادرید خیلی بیش از این‌ها تلاش کنید ... به آزمایشش می‌ارزد.

برگردیم به نکته‌هایی که توجه به آنها، برای تنظیم «واژه‌نامهٔ ریاضی» ضروری است.

۱) سعی نکنید، یکبار و برای همیشه، کار مربوط به یک واژه را تمام کنید. آن چه را که امروز به نظرتان می‌رسد، یا درکتابی دیده‌اید یا از زبان کسی شنیده‌اید، یادداشت کنید، ولی کار را تمام شده نپندارید. چند صفحه از دفتر خود را، برای بحثها و یافته‌های بعدی خود، آزاد بگذارید. آگاهی شما دربارهٔ این واژه، در روزها، ماهها و سالهای آینده، بیشتر می‌شود که باید همهٔ آنها را در دفتر خود جا بدهید. ممکن است دربارهٔ واژه‌ای یا مفهومی، پرسشی به‌نظرتان برسد که، پاسخ آن، برای شما روشن نباشد، این پرسش را یادداشت کنید و با پی‌گیری به دنبال پاسخ آن باشید. هروقت فرصتی دست داد، به سراغ کتابها بروید، با دانش‌آموزان کلاس خود مشورت کنید، از معلم خود راهنمایی بگیرید. با وجود این، هیچ پاسخی را قطعی به‌حساب نیاورید. آن را در دفتر خود، همراه با نظر مثبت یا منفی خودتان بنویسید و باز هم جست و جو را ادامه دهید.

به عنوان مثال، واژهٔ «حد» را درنظر می‌گیریم، اول باید برای خودتان روشن کنید، واژهٔ «حد» در زبان فارسی چه معنا یا معناهایی دارد و در کجا به کار می‌رود؟ بعد، به سراغ تعریف ریاضی آن بروید. در کتابهای درسی، تعریفی برای مفهوم «حد» داده‌اند؟ آیا برای شما قابل فهم است؟ آیا قانع کننده است؟ آیا می‌توان از تعریف دیگری، که احتمالاً ساده‌تر و ملموستر باشد، استفاده کرد؟ ... به‌دنبال کتابهای دیگری بروید. آنها دربارهٔ «حد» چه نوشته‌اند؟ آیا کتاب مستقلی دربارهٔ «حد»، در زبان فارسی وجود دارد؟ ... در جایی می‌خوانید که «مفهوم حد» را می‌توان به یاری مفهوم «دنباله» تعریف کرد. «دنباله» یعنی چه؟ چند جور «دنباله» داریم؟ به چگونه دنباله‌ای، «دنبالهٔ عددی» می‌گویند؟ «حد دنباله» یعنی چه؟ آیا جمله‌های پیاپی یک تصاعد نامتناهی (حسابی یا هندسی) تشکیل یک دنباله می‌دهند؟ واژهٔ دیگری مطرح شد: «نامتناهی» یعنی چه؟ فرق «دنبالهٔ متناهی» با «دنبالهٔ نامتناهی» چیست؟ آیا داشتن «حد»، به نامتناهی بودن دنباله ربط دارد؟ «حد یک دنباله» با «حد مجموع جمله‌های یک دنباله» چه تفاوتی دارند؟ آیا بجز تصاعدها، می‌توانید دنباله‌ای عددی یا دنباله‌ای شامل چند جمله‌ایها بنویسید؟ بین این دنباله‌ها و مفهوم حد، چه رابطه‌ای وجود دارد؟...

در یک نشریهٔ ریاضی، زیر تیتر «عددگنگ $\sqrt{2}$ به عنوان حد یک کسر مسلسل نامتناهی» نوشته بود:

$$\sqrt{2}=1+(\sqrt{2}-1)=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=1+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}=$$

$$1+\frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}}$$

$$=\cdots=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\dots}}}$$

چقدر جالب! عدد گنگ $\sqrt{2}$، به وسیلهٔ عملهای روی عددهای درست ۱ و ۲ نشان داده شده است. ولی «کسر مسلسل نامتناهی» چه تعریفی دارد؟ آیا عدد گنگ π را هم می‌توان به کمک کسر مسلسل نشان داد؟ اصلاً عدد گنگ یعنی چه؟ چند جور عدد گنگ داریم؟ عدد گنگ $\sqrt{2}$، ریشهٔ معادلهٔ $x^2-2=0$ است. چرا نمی‌توان معادله‌ای با ضریبهای درست نوشت که، یکی از ریشه‌های آن، برابر π باشد؟ راستی، چگونه می‌توان معادله‌ای با ضریبهای درست را پیداکرد، به نحوی که $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ یکی از ریشه‌های آن باشد. اگر داشته باشیم $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$، آن وقت $x^2=5+2\sqrt{6}$ و $x^2-5=2\sqrt{6}$، یعنی $(x^2-5)^2=24$ یا $x^4-10x^2+1=0$، چه خوب! معادله‌ای

دو مجذوری با ضریبهای درست به دست آمد که، یکی از ریشه‌های آن، برای $\sqrt{۲} + \sqrt{۳}$ است. ولی این معادله چهار ریشه دارد. سه ریشهٔ دیگر آن، چه خویشاوندی با عدد $\sqrt{۲} + \sqrt{۳}$ دارند؟ آیا بدون حل معادله، می‌توان آنها را نوشت؟...

می‌بینید تا کجاها می‌توان پیش‌رفت. اگر رشتهٔ اندیشه‌های خود را پاره نکنیم، می‌توان به‌جاهای دورتری رفت و پرسشهای باز هم جالبتری را برای خود طرح کرد: این عدد π از کجا سر درآورده است؟ وجود آن، تنها مربوط به ریاضیات است یا ساختار طبیعت چنان است که، یکی از مصالح آن، همین عدد π است؟ آیا می‌توانیم ریاضیات را به‌گونه‌ای بسازیم که بی‌نیاز از عدد π باشد؟...

رشتهٔ خیال را می‌توان همچنان ادامه داد و البته، اینها، تنها خیال نیستند؛ این پرسشها و جست و جوی پاسخ آنها (ولو این که به سادگی به آنها نرسیم)، نشانه‌ای از «حقیقت‌جویی» ماست و نشانهٔ آن است که ما در راه دانش گام نهاده‌ایم ... همین پرسشها و همین جست وجوهاست که می‌تواند از شما یک دانشمند بسازد. دانشمند شدن نعمتی نیست که تنها نصیب افرادخاص و «برگزیده» بشود. هرکسی می‌تواند بـه ایـن نعمت برسد. فقط باید آن‌رابخواهد و با حوصله و پی‌گیر به دنبالش برود. ولی این پی‌گیری باید باسرسختی و حتی «لجاجت» همراه باشد. سفر به نقطه‌های دور و نزدیک، خیلی چیزها به مامی‌آموزد، ولی کسی که می‌خواهد دانشمند بشود، باید در اندیشه، خود هم سفرکند، همین سفرهای گاه پرمخاطرهٔ ذهنی است‌که زندگی ما را مملو از عشق و شور و شیفتگی می‌کند و، اگر بابرنامه‌ای درست همراه باشد، ما را به‌مقصود می‌رساند.

کوتاه سخن: حتی یک واژه می‌تواند وسیله‌ای برای گسترش دامنه خیال باشد و با پرسشهایی که از خود می‌کنید، در همهٔ سرزمینهای زیبا و رؤیایی ریاضیات، به گشت و گذار مشغول شوید. از وسعت گرفتن پرسشهایی که به دنبال هم پیش‌می‌آید و مثل درختی تنومند، به سمت ساقه‌ها و شاخه‌های تازه و تازه‌تری رشد می‌کند، نهراسید، همهٔ آنها را یادداشت کنید و در جست و جوی پاسخ آنها، علاوه بر آن که در درون خود می‌اندیشید، به هرجایی سربزنید و از هرامکانی استفاده کنید.

۲) پی‌گیری و استمرار در کار، شرط اصلی موفقیتهای آینده است. با کار تفننی و گاه به گاه، نمی‌توان در ریاضیات موفق شد. تنها، شب‌زنده‌داریهای نزدیکیهای امتحان، برای تسلط بر دانش (و از آن جمله، ریاضیات) کافی نیست. برعکس، ریاضیات را باید با آرامش خاطر، در سرکلاس، در خلوت تنهایی، در بحث با دوستان و یا مراجعه به کتابهای مختلف یادگرفت و شب امتحان را، آسوده و بی‌خیال استراحت کرد. در ساعتهایی که هیجان و اضطراب نزدیک شدن امتحان، شما را می‌آزارد، مثلاً می‌توان باگوش دادن به یک موسیقی ملایم، تماشای نقاشیهای نقاشان بزرگ، وَر رفتن به گل و گیاه و یا خواندن شعر و رمان خوب، آرامش خود را بازیافت. کار علمی با تشویش ونگرانی سازگار نیست و باید به موقع خود بیرون از اضطرابهای مربوط به «امتحان» و «کنکور»، یعنی در تمامی طول سال انجام گیرد، نه در ساعتهای زودگذر و پرشتاب نزدیک شدن «لحظهٔ سرنوشت». اگر شما در طول سال، در اندیشهٔ درک عمیق و درست موضوعهای درسی خود باشید، بدون این که به شیوه‌های نادرست «روش امتحان دادن» و «راه تست‌زدن» متوسل شوید، می‌توانید از عهدهٔ هر «آزمایشی» برآیید... درست است که برخی کوشیده‌اند «دکانهایی» برای «تضمین» گذشتن شما از سدهای «امتحان» و «کنکور» بازکنند و «نسخه‌هایی» را آماده کرده‌اند که «اگر با پرسشی این‌گونه روبه‌رو شدید، این طور عمل کنید» ؛ ولی به یاد داشته باشید که از این راه (حتی اگر به تصادف از سد امتحان هم عبور کنید) به دانشی دست نیافته‌اید و تمامی زندگی علمی آیندهٔ خود را به مخاطره انداخته‌اید.

کار علمی، استمرار در کار، حوصله و پی‌گیری می‌خواهد و هر راه دیگری، ذهن و اندیشه را تباه می‌کند و شما را به صورت آدمی سطحی بار می‌آورد و روزبه‌روز از دانش واقعی دورتر می‌کند. به این توصیهٔ **نوربرت**، یکی از بزرگترین ریاضی‌دانان زمان ما در زندگی‌نامهٔ خود به نام «من ریاضی‌دانم» گوش کنید:

... این، نمایش غم‌انگیزی از زندگی آدمی است که، درآن، درخشش و شکفتگی کوتاه نخستین، جای خود را به رشتهٔ بی‌پایانی از روزهای یکنواخت و ملال‌آور می‌دهد. اگر

ریاضی‌دان می‌خواهد به چنین سرنوشتی دچار نشود، اگر می‌خواهد اعتبار علمی او روزبه روز پایین نیاید، باید با استفاده از همهٔ لحظه‌های شکفتگی نیروهای خلاق خود، به‌کاوش در چنان زمینهٔ ناشناخته‌ای از دانش و یا بررسی چنان مسأله‌های تازه‌ای بپردازد که هم محتوای درونی آنها غنی باشد و هم دارای این ارزش واقعی باشد که امکان کار ثمربخش او را، در طول تمامی زندگیش، فراهم کند. من بخت بلندی داشتم. موضوعهایی که جوانی مرا دچار تشویش کرده بود، چنان بزرگ و غنی بود که از آغاز فعالیت علمی خود تاکنون، هنوز حرارت خود را از دست نداده‌ام و حالا، در شصت سالگی، باید تمامی نیروهای باقی‌ماندهٔ خود را جمع کنم تا بتوانم از عهدهٔ آنچه به‌صورت برنامهٔ روزانه برای خودم چیده‌ام، برآیم...

۳) همان‌طوربنویسید که می‌اندیشید. اگر چندی بعد، نوشتهٔ خود را نارسا یا اشتباه دیدید، آن‌را حذف نکنید و از بین نبرید. نوشتهٔ گذشته را تکرار کنید و به تجزیه و تحلیل نارساییها و نقطه ضعفهای آن بپردازید. مسیر پیشرفت اندیشهٔ علمی خود را حفظ کنید، حتی درصورت لزوم (مثلاً اگر زمانی تصمیم به نوشتن زندگی نامهٔ علمی خود گرفتید) از بیان این اشتباهها نهراسید. به یادداشته باشید، تنها کسی اشتباه نمی‌کند که دست به هیچ‌گونه کار علمی و عملی نمی‌زند. ذهن و اندیشهٔ آدمی، ضمن کار و برخورد با واقعیتها و یا آگاهیهای تازه، رشد می‌کند و به او دیدی عمیق‌تر و منطقی‌تر می‌دهد. هراس از اشتباه و یا، بدتر از آن، هراس از برملاشدن اشتباه، مانعی جدی در راه پیشرفت است.

سعی کنید نوشتهٔ شما روشن و خالی از هرگونه رمز و استعاره باشد، پیچیده ننویسید، تلاش نکنید نوشتهٔ شما به اصطلاح «آراسته» و «ادبی» باشد، از «پرده‌پوشی» و «معمانویسی» ـ که هم خودتان را از مسیر اصلی منحرف می‌کند و هم درک نوشته‌های شما برای دیگران دشوار می‌شود ـ پرهیز کنید. تنها شرطی را که باید رعایت کنید، این است که نوشته‌هایتان، درست و قابل فهم باشد. دنبال هیچ «پیرایه‌ای» نروید و تنها به درستی و روانی مطلب توجه داشته باشید.

نوشته‌های پیچیده، غیرقابل فهم و رازگونه، مربوط به زمانهایی بوده است که، صاحبان فرهنگ و ادب، جرأت ابراز عقیدهٔ درونی خود را، حتی در زمینهٔ دانش، نداشته‌اند و از فاش شدن دیدگاههای خود وحشت می‌کرده‌اند. امام‌محمدغزالی که مشهورتر از آن است که نیازی به معرفی او داشته باشیم، مردی هوشمند، متفکر و با ایمان بود، برای ایمان و اعتقادهای دینی، اولویت قایل بود و به همین جهت، با فیلسوفان و آموزشهای فلسفی موافق نبود، باوجود این با روشن‌بینی، دانش را نفی نمی‌کرد و مطالعهٔ حساب و هندسه و اخترشناسی را، نه از جهت نفی و نه از جهت اثبات، به امور ایمانی مربوط نمی‌دانست ولی همین تأیید نسبی او از دانش، متعصبان را خوش نیامد، در بسیاری جاها او را تکفیر کردند و حتی نوشته‌های او را به آتش سپردند. به این سخنان پردرد خیام، هم عصر امام محمد غزالی، که در مقدمهٔ کتاب جبر خود آورده، توجه کنید:

... دچار زمانه‌ای شده‌ایم که اهل علم از کارافتاده و جز عدهٔ کمی باقی‌نمانده که از فرصت برای بحث و تحقیقات علمی استفاده کنند. برعکس، حکیم‌نمایان دورهٔ ما، همه دست‌اندرکارند که حق را با باطل بیامیزند؛ جز ریا و تدلیس کاری ندارند؛ اگر دانش و معرفتی نیز دارند، صرف اغراض پست جسمی می‌کنند. اگر با انسانی مواجه شدند که در جست و جوی حقیقت راسخ و صادق است و روی از باطل و زورمی‌گرداند و گرد تدلیس و مردم فریبی نمی‌گردد، او را استهزا و تحقیر می‌کنند...

و به همین دلیل است که در رباعیهای خود می‌نالد:

نا آمدگان، اگر بدانند که ما

از دهر چه می‌کشیم، نایند دگر

و به احتمالی، از ترس «استهزا و تحقیر» همین «حکیم نمایان» است که، باگوشه‌نشینی و فرار از بحث در اجتماع، به نوعی محافظه‌کاری تن داده بود. خود او می‌گوید:

خورشید به‌گل نهفت، می‌نتوانم

و اسرار زمانه گفت، می‌نتوانم

نه می‌توانم منکر حقیقت بشوم و نه امکان و جرأت بیان آن‌را دارم. ابن‌سینا، مطلب را روشنتر بیان‌می‌کند. او در «حکمة‌المشرقین» نوشته است:

... بسیاری از اغلاط را با پردهٔ تغافل پوشیدم. علت این تغافل و پرده‌پوشی، این بود که نخواستم با چیزهایی مخالفت نموده باشم که از فرط شهرت، برای جهّال بدیهی شده و به مقامی رسیده که ممکن است در روشنایی روز شک کنند، ولی در صحت آن مسائل، شکی ندارند...

مطلب روشن است. ابن سینا، به خاطر مخالفت مردم جاهل و نادان، از کنار بعضی اشتباهها می‌گذرد و به آنها نمی‌پردازد. البته همین ابن‌سینا، در جای دیگری توصیه می‌کند: «چنان که وضع اسرار به نزدیک جاهل خطاست، منع معانی از عاقل ناستوده است».

با همهٔ اینها، واقع این است که، زمینهٔ رشد علم، در کشورهایی همچون ایران، بسیار مساعدتر از دوران مشابه خود در اروپای غربی بود؛ چرا که مثلاً آمبروز (Ambrose) اسقف میلان در سدهٔ چهارم میلادی، معتقد بود: «کسانی که به اخترشناسی و هندسه مشغول‌اند، به معنای آن است که راه نجات را رها کرده‌اند و راه تباهی و گناه را پذیرفته‌اند». و اوگوستین شاگرد او (سدهٔ چهارم و پنجم میلادی)، از این هم جلوتر رفته و معتقد است که «ریاضیات، آدمی را از خدا دور می‌کند» و...

به استناد همین سخنان بود که «پائولولولمس»، ریاضی‌دان اسپانیایی را، به دستور محکمهٔ تفتیش عقاید و به جرم کشف راه حل جبری معادلهٔ درجهٔ چهارم و در سدهٔ پانزدهم سوزاندند و «پیرراموس» ریاضی‌دان فرانسوی و هوادار نظریهٔ خورشید مرکزی کوپرنیک را، در کشتار معروف «بارتلمی» پاریس، در سال ۱۵۷۲ کشتند.

ولی همهٔ اینها مربوط به گذشته است. شما در زمانی زندگی می‌کنید که کسی، ارزش کار علمی را نفی نمی‌کند، روزبه روز به تعداد کتابها و مجله‌های ریاضی به زبان فارسی، افزوده می‌شود، دوستان شما در المپیادهای جهانی ریاضی شرکت می‌کنند و در میان همسالان خود در دیگر کشورها، هماورد می‌طلبند. در چنین شرایطی، معمانویسی و پناه گرفتن در زیر پردهٔ رمزها و استعاره‌ها کاری مصنوعی است و اگر زمانی، برای بیان «اسرار» به «عاقل» و دورنگه‌داشتن «معانی» از «جاهل» ضرورت داشت و نوعی حرکت علمی بود، امروز حتی می‌تواند به مفهومی، حرکتی ضد دانش باشد.

ساده و قابل فهم بنویسید، درست‌بنویسید،از پیرایه و استعاره پرهیز کنید و سخن خود را، به همان گونه که می‌اندیشید، به روی کاغذ بیاورید.

تابعد

ادب ریاضی

هیچ چیز برای مرد علم ضروریتر از تاریخ آن و منطق اکتشاف نیست ... راه کشف کردن خطا، به کاربردن فرضیّه و تخیّل و روش آزمودن.

لرد آکتن
منطق اکتشاف علمی
کارل ریموند پوپر، ترجمهٔ احمد آرام

هندسه تحلیلی

(قسمت دوم)

محمد عابدی

مورد استفاده دانش‌آموزان چهارم ریاضی

۱۰ـ دترمینان

بخش مختصری از دترمینانها که درهندسه تحلیلی کاربرد دارند بررسی می‌کنیم. جدول ۲ × ۲ به صورت

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

راکه شامل دوسطر و دوستون می‌باشد دترمینان ۲ × ۲ می‌نامیم و مقدار آن را $ab'-a'b$ تعریف می‌کنیم، داریم:

$$\det A=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b$$

خواص دترمینان

۱: اگریك سطر و یا یك ستون دترمینان‌را درعددی‌ضرب کنیم مقدار دترمینان در آن عددضرب می‌شود مثلاً سطراول را در k ضرب‌نموده داریم:

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ a' & b' \end{vmatrix}=kab'-kba'=k(ab'-a'b)$$

$$=k\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

۲: اگرجای دو سطر یا دوستون دترمینان را عوض کنیم مقدار دترمینان درمنها ضرب می‌شود مثلاً جای‌ستون اول ودوم را عوض‌نموده داریم:

$$\begin{vmatrix} b & a \\ b' & a' \end{vmatrix}=a'b-ab'=-(ab'-a'b)$$

$$=-\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

۳: اگر دوسطر یا دوستون دترمینان مساوی باشند مقدار دترمینان‌صفر است. مثلاً اگر دوسطر دترمینان‌برابر باشندداریم:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}=ab-ab=\boxed{0}$$

۴: اگریك سطر دترمینان‌را در عددی ضرب کرده آن‌را با سطردیگر جمع‌کنیم و یا یك ستون‌را در عددی ضرب‌کنیم و آن‌را با ستون دیگرجمع‌کنیم درمقدار دترمینان تغییری‌حاصل نمی‌شود. مثلاً سطردوم‌دترمینان‌را در k ضرب‌نموده باسطراول آن جمع می‌کنیم داریم:

$$\begin{vmatrix} a+a'k & b+b'k \\ a' & b' \end{vmatrix}=$$

$$b'(a+a'k)-a'(b+b'k)=ab'-a'b=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

۵: اگرجای‌تمامی سطرهارا با ستونها عوض‌کنیم مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند داریم:

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

جدول ۳×۳ به صورت

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

را دترمینان ۳×۳ نامند و ثابت می‌کنند این‌دترمینان‌را می‌توان برحسب هرسطر ویا هرستون‌به صورت زیر بسط داد مثلاً بسط دترمینان‌فوق برحسب سطر اول به شکل زیر می‌باشد:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}=$$

$$a\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}=$$

$$a(b'c''-b''c')-b(a'c''-a''c')+$$
$$c(a'b''-b''a')$$

اگر i را نماینده سطر و j را نماینده ستون هـریك از اعضای دترمینان‌بگیریم دراین‌صورت هرعضودترمینان‌رابه صورت a_{ij} نمایش می‌دهند مثلاً عضو a_{23} یعنی عضوی کـه در سطر دوم و ستون‌سوم قرار گرفته‌است وعلامت‌ضریب این‌عضو $(-1)^{2+3}$ یعنی‌منها می‌باشد وعلامت‌ضریب‌عضو a_{ij} به‌صورت $(-1)^{i+j}$ است و دترمینان‌ضریب a_{ij} برابراست با دترمینانی که‌ازحذف سطر iام وستون jام بـه دست می‌آید مثلاً عضو b را کـه در سطر اول و ستون دوم قرار گرفته است درنظر گرفته دترمینان ضریب این عضو به صورت

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

یعنی $\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix}$ می‌باشد. توجه داشته باشید خواصی‌که بیان گردید برای هردترمینان $n\times n$ برقرار می‌باشد حال دترمینان بالارا برحسب ستون‌سوم بسط می‌دهیم حاصل این‌بسط با بسط قبلی برابرمی‌باشد داریم:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}=(-1)^{1+3}c\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{2+3}c'\begin{vmatrix} a & b \\ a'' & b'' \end{vmatrix}+(-1)^{3+3}c''\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

$$=c(a'b''-a''b')-c'(ab''-a''b)$$
$$+c''(ab'-a'b)$$

توجه‌به این‌نکته حائزاهمیت است‌که علامتها یك درمیان تغییر می‌کنند.

۱۱ـ حل دستگاه مبادلات‌به‌کمك دترمینان

۱: حل دستگاه دومعادله دو مجهولی

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}=\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b},$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$$

مخرج کسرهای بالا دترمینان‌ضرایب مجهولات بوده و برای به دست آوردن صورت کسرها به‌جای‌ضرایب مجهول، اعدادمعلوم cوc' را قرارداده سپس‌دترمینان‌ضرایب مجهولات‌رادرصورت نظیرمجهول می‌نویسیم. این مطلب برای دستگاه سه معادله سه مجهولی‌نیز برقرار می‌باشد. داریم:

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}},$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}$$

تبصره ۱: شرط سازگار بودن دستگاه

$$\begin{cases} ax+by=c & (۱) \\ a'x+b'y=c' & (۲) \\ a''x+b''y=c'' & (۳) \end{cases}$$

را بنویسید.

حل : می‌خواهیم بررسی کنیم چه‌شرطی باید وجودداشته باشد تاجواب معادلات (۱) و (۲) درمعادله (۳) صدق نماید. دستگاه مزبور را به صورت

$$\begin{cases} ax+by+\circ\times z=c \\ a'x+b'y+\circ\times z=c' \\ a''x+b''y+\circ\times z=c'' \end{cases}$$

می‌نویسیم.

دراین دستگاه z هرعدد دلخواهی می‌تواند باشد

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & \circ \\ a' & b' & \circ \\ a'' & b'' & \circ \end{vmatrix}}$$

اگر دترمینان مخرج‌را برحسب ستون سوم‌که تمامی اعضای‌آن صفراست بسط دهیم حاصل‌صفر می‌شود چون مخرج کسرصفر می‌باشد و z نیزمقداری‌دلخواه‌است، پس‌باید صورت کسرصفر

شود تا z دلخواه باشد زیرا جواب $\frac{0}{0}$، مبهم، یعنی دلخواه است پس شرط سازگار بودن دستگاه آن می‌باشد دترمینان ضرایب مجهولات یعنی

$$\boxed{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0}$$

باشد.

تبصره ۲ : شرط آنکه دستگاه

$$\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \\ a''x+b''y+c''z=0 \end{cases}$$

جوابهایی غیراز $x=y=z=0$ داشته باشد چیست؟

حل :

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & b' & c' \\ 0 & b'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}$$

اگر دترمینان صورت کسر را برحسب ستون اول بسط دهیم حاصل صفر می‌شود و درصورتی که مخرج کسر عددی مخالف صفر باشد آن‌گاه $x=0$ است، اما چون می‌خواهیم معادله جوابی غیراز صفر داشته باشد باید مخرج کسر صفر شود تا جواب معادله به‌صورت $\frac{0}{0}$ یعنی عدد دلخواه درآید بنابراین شرط جواب غیرصفر دستگاه آن است که دترمینان ضرایب مجهولات یعنی

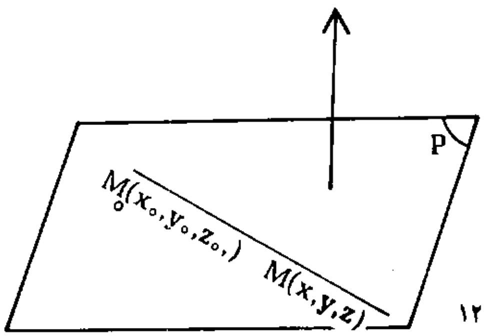
$$\boxed{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0}$$

باشد.

۱۲– معادله صفحه $N(A,B,C)$

بردار $\overrightarrow{N}(A,B,C)$ عمود برصفحه P را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم نقطه $M_0(x_0,y_0,z_0)$ در صفحه P باشد می‌دانیم شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه دلخواه $M(x,y,z)$ درصفحه P باشد آن است که بردار $\overrightarrow{M_0M}$ بر بردار $\overrightarrow{N}$ عمود باشد داریم (شکل ۱۲):

و



شکل ۱۲

$$\overrightarrow{N}(A,B,C) \quad , \quad \overrightarrow{M_0M}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$$

$$\overrightarrow{N} \circ \overrightarrow{M_0M}=0 \Longrightarrow P \overset{\text{به معادله}}{\equiv}$$

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$$

یا

$$Ax+By+Cz\underbrace{-(Ax_0+By_0+Cz_0)}_{-D}=0 \Longrightarrow$$

$$P \overset{\text{به معادله}}{\equiv} \boxed{Ax+By+Cz+D=0}$$

مثال ۱ : معادله صفحه‌ای را بنویسید که شامل خط (d) با پارامترهای هادی (a,b,c) و خط d' با پارامترهای هادی (a',b',c') بوده و ازنقطه $M_0(x_0,y_0,z_0)$ بگذرد.

حل : چون صفحه از نقطه $M_0(x_0,y_0,z_0)$ می‌گذرد و معادله آن به صورت

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

می‌باشد و چون بردار عمود برصفحه یعنی برداز

$$\vec{N}(A\ ;\ B\ ,\ C)$$

برخطوط d و d' عمود می‌باشد پس:

$$Aa+Bb+Cc=0 \quad و \quad Aa'+Bb'+Cc'=0$$

وشرط آنکه دستگاه سه‌معادله سه‌مجهولی

$$\begin{cases}(x-x_0)A+(y-y_0)B+(z-z_0)C=0\\ aA+bB+cC=0\\ a'A+b'B+c'C=0\end{cases}$$

با مجهولهای A و B و C جوابهایی غیرازصفرداشته‌باشد آن است که دترمینان ضرایب A و B و C صفرباشد یعنی

$$\boxed{P \overset{\text{صفحه P به معادله}}{\equiv} \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ a & b & c\\ a' & b' & c'\end{vmatrix}=0}$$

مثال ۲ : معادله صفحه‌ای‌را بنویسید که از سه‌نقطه

$$M(1,2,3) \quad و \quad N(2,3,4) \quad و \quad P(-1,0,0)$$

بگذرد.

حل :

$$\overrightarrow{MN}(2-1\ ,\ 3-2\ ,\ 4-3) \Longrightarrow$$

$$\overrightarrow{MN}(1,1,1) \quad و \quad \overrightarrow{PN}(2+1=3,3,4)$$

یعنی می‌خواهیم معادله‌صفحه‌ای‌را بنویسیم که ازنقطه

$$P(x_0=-1\ ,\ y_0=0\ ,\ z_0=0)$$

بگذرد وشامل دوخط با پارامترهای هادی

$(a=1\ ;\ b=1\ ,\ c=1)$ و

$$(a'=3\ ,\ b'=3\ ,\ c'=4)$$

باشد پس:

$$P \equiv \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ a & b & c\\ a' & b' & c'\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 3 & 4\end{vmatrix}=0$$

این دترمینان‌را برحسب سطراول بسط داده داریم:

$$(x+1)\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{vmatrix}=0$$

$$\Longrightarrow (x+1)(4-3)-y(4-3)+z(3-3)=0$$

$$\Longrightarrow x+1-y=0 \Longrightarrow$$

$$\boxed{P \equiv x-y+1=0}$$

مثال ۳ : معادله صفحه‌ای‌را بنویسید که طول وعرض و ارتفاع از مبدأ آن به ترتیب a و b و c باشد.

حل : صفحه مزبور از نقاط

$$Q(0,0,c) \quad و \quad N(0,b,0) \quad و \quad M(a,0,0)$$

می گذرد، داریم:

$$\overrightarrow{MN}(-a,b,0) \quad و \quad \overrightarrow{NQ}(0,-b,c)$$

صفحه از نقطه $M(x_0=a\ ,\ y_0=0\ ,\ z_0=0)$ گذشته و شامل دوخط با پارامترهای‌هادی $(-a,b,0)$ و $(0,-b,c)$ می‌باشد پس:

$$P \equiv \begin{vmatrix} x-a & y & z\\ -a & b & 0\\ 0 & -b & c\end{vmatrix}=0 \Longrightarrow$$

$$(x-a)bc-y(-ac)+z(ab)=0$$

طرفین رابطه اخیر را بر abc بخش می‌کنیم:

$$\frac{x-a}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0 \implies$$

$$\frac{x}{a}-\frac{a}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0 \implies$$

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}$$

مثال ۴ : معادلات صفحاتی را بنویسید که بر صفحات مختصات عمود باشند.

حل : صفحه‌ای که بر صفحه xoy عمود است موازی محور zها می‌باشد بنابراین بردار عمود بر صفحه، بر محور zها عمود می‌باشد و تصویر آن روی محور zها صفر است یعنی بردار $\vec{N}(A,B,0)$ وچون معادله صفحه به صورت

$$Ax+By+Cz+D=0$$

است. پس معادله صفحه عمود بر صفحه xoy به صورت

$$\boxed{Ax+By+D=0}$$

می‌باشد یا می‌توانیم بگوییم چون تصویر هر نقطه از صفحه عمود بر صفحه xoy خطی است که روی صفحه xoy می‌باشد و معادله این خط که در صفحه xoy است به صورت

$$Ax+By+D=0$$

می‌باشد و معادله صفحه عمود بر صفحه xoz به صورت

$$\boxed{Ax+Cz+D=0}$$

و معادله صفحه عمود بر صفحه yoz به صورت

$$\boxed{By+Cz+D=0}$$

می‌باشد.

مثال ۵ : معادلات صفحاتی را بنویسید که از محورهای مختصات بگذرند.

حل : چون صفحات از محورها می‌گذرند پس از مبدأ مختصات نیز می‌گذرند و معادله آنها به صورت:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \implies$$

$$A(x-0)+B(y-0)+C(z-0)=0 \implies$$

$$Ax+By+Cz=0$$

اگر صفحه بر محور oz بگذرد بردار عمود بر صفحه بر محور zها عمود بوده و تصویر آن روی محور zها صفر است یعنی

$$\vec{N}(A\ ,\ B\ ,\ 0)$$

و معادله صفحه به صورت $\boxed{Ax+By=0}$ و معادله صفحه‌ای که بر oy می‌گذرد به صورت $\boxed{Ax+Cz=0}$ و معادله صفحه‌ای که بر ox می‌گذرد به صورت

$$\boxed{By+Cz=0}$$

می‌باشد.

مثال ۶ : پارامترهای هادی خط (d) فصل مشترک دو صفحه

$$\begin{aligned} P &\equiv \begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases} \\ Q &\equiv \end{aligned}$$

را بیابید.

حل : بردار $\vec{v}(a,b,c)$ از خط (d) که فصل مشترک دو صفحه P و Q می‌باشد را در نظر گرفته، بردار

$$\vec{N}(A\ ,\ B\ ,\ C)$$

که بر صفحه P عمود می‌باشد بر کلیه خطوط صفحه P یعنی بر بردار $\vec{v}$ عمود است و نیز بردار $\vec{N'}(A',B',C')$ که بر صفحه

Q عموداست بربردار $\vec{v}$ از صفحه Q عمود بوده داریم:

$$\vec{N}\perp\vec{v} \Longrightarrow aA+bB+cC=0$$

$$\vec{N'}\perp\vec{v} \Longrightarrow aA'+bB'+cC'=0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} Aa+Bb=-cC \\ A'a+B'b=-cC' \end{cases} \Longrightarrow$$

$$a=\frac{\begin{vmatrix} -cC & B \\ -cC' & B' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}$$

$$b=\frac{\begin{vmatrix} A & -cC \\ A' & -cC' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}$$

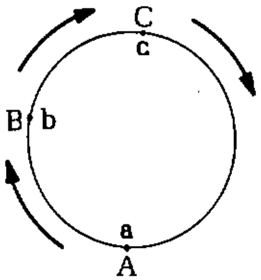
در دترمینانهای صورت جای دوستون‌را عوض نموده بنابراین دترمینان در منها ضرب می‌شود ونیز از هرستون از C فاکتور گرفته داریم:

$$a=\frac{C\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}} \quad \text{و} \quad b=\frac{C\begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}}=\dfrac{c}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}} & (1) \\[2ex] \dfrac{b}{\begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}}=\dfrac{c}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}} & (2) \end{cases}$$

از مقایسه روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\boxed{\frac{a}{\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}}=\frac{b}{\begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}}=\frac{c}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}}$$



برای یادگیری رابطه بالا تبدیلات‌دوری‌را روی حروف انجام می‌دهیم.

مثال ۷ : معادله صفحه‌ای‌را بنویسیدکه از نقاط

$M(2,3,4)$ و $N(-1,0,2)$

بگذرد و با دوصفحه

$$\begin{cases} R\equiv 2x+4y-z=1 \\ Q\equiv x+y+z=3 \end{cases}$$

موازی باشد.

حل:

$$\frac{a}{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{b}{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{c}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} \Longrightarrow$$

$$\frac{a}{5}=\frac{b}{-3}=\frac{c}{-2}$$

پارامترهای‌هادی‌فصل مشترک دوصفحه راکه متناسب با ۵، ۳−، ۲− می‌باشد می‌توان ۵، ۳−، ۲− فرض نمود:

$$\overrightarrow{NM}(2+1\ ,\ 3-0\ ,\ 4-2)\ \Longrightarrow$$

$$\overrightarrow{NM}(3\ ,\ 3\ ,\ 2)$$

از نقطه N خطی به موازات بردار $\overrightarrow{v}(5,-3,-2)$ رسم نموده این خط در صفحه مطلوب می‌باشد حال باید معادله صفحه‌ای را بنویسیم که از نقطه N بگذرد و شامل بردارهای $\overrightarrow{NM}$ و $\overrightarrow{v}$ باشد داریم:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-0 & z-2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$(x+1)(-6+6)-y(-6-10)+$$

$$(z-2)(-9-15)=0 \Longrightarrow$$

$$(x+1)(0)+16y+(z-2)(-24)=0 \Longrightarrow$$

$$16y-24z+48=0$$

$$\boxed{P \equiv 2y-3z+6=0}$$

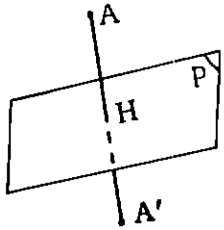
مثال ۸ : مختصات قرینه نقطه $A(-2\ ,\ 0\ ,\ 4)$ را نسبت به صفحه‌ای که طول و عرض و ارتفاع از مبدأ آن (۱) می‌باشد کدام است؟

حل :

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \Longrightarrow$$

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{1}=1 \Longrightarrow P \equiv x+y+z-1=0$$

از نقطهٔ A عمود AH را برصفحه P فرودآورده آن‌را به‌اندازه خود امتداد داده‌تا نقطهٔ A' قرینه‌نقطه A به‌دست آید (شکل ۱۳):



شکل ۱۳

پارامترهای‌هادی عمود AA' ضرایب‌صفحه P یعنی $(1,1,1)$ می‌باشد و چون خط از نقطه

$$A(x_0=-2\ ,\ y_0=0\ ,\ z_0=4)$$

می‌گذرد معادله آن به صورت:

$$AA' \equiv \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c} \Longrightarrow$$

$$\frac{x+2}{1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-4}{1}=t \Longrightarrow$$

$$x=t-2\ ,\ y=t\ ,\ z=t+4$$

این‌خط را با صفحه P قطع می‌دهیم یعنی به جای x و y و z معادلات بالا را در معادله‌صفحه P قرار می‌دهیم داریم:

$$(t-2)+t+(t+4)-1=0 \Longrightarrow 3t+1=0$$

$$\Longrightarrow t=-\frac{1}{3} \Longrightarrow x_H=-\frac{1}{3}-2=\boxed{-\frac{7}{3}}$$ و

$$y_H=\boxed{-\frac{1}{3}}$$ و $$z_H=-\frac{1}{3}+4=\boxed{\frac{11}{3}}$$ و

$$x_H=\frac{x_A+x_{A'}}{2} \Longrightarrow -\frac{7}{3}=\frac{-2+x_{A'}}{2} \Longrightarrow$$

$$-14=-6+3x_{A'} \Longrightarrow \boxed{x_{A'}=-\frac{8}{3}}$$

$$y_H=\frac{y_A+y_{A'}}{۲}\Longrightarrow-\frac{۱}{۳}=\frac{۰+y_{A'}}{۲}$$

$$\Longrightarrow\boxed{y_{A'}=-\frac{۲}{۳}}$$

$$z_H=\frac{z_A+z_{A'}}{۲}\Longrightarrow\frac{۱۱}{۳}=\frac{۴+z_{A'}}{۲}\Longrightarrow$$

$$۲۲=۱۲+۳z_{A'}\Longrightarrow\boxed{z_{A'}=\frac{۱۰}{۳}}\Longrightarrow$$

$$\boxed{A'\left(-\frac{۸}{۳},-\frac{۲}{۳},\frac{۱۰}{۳}\right)}$$

مثال ۹ : معادله صفحه‌ای راکه از نقاط

$M(x_۱,y_۱,z_۱)$ و $N(x_۲,y_۲,z_۲)$ و $Q(x_۳,y_۳,z_۳)$

می گذردبه صورت دترمینان بنویسید.

حل : چون‌صفحه ازنقاط M وN وQ می گذردمختصات این‌نقاط در معادله صفحه

$$Ax+By+Cz+D=۰$$

صدق می کند داریم:

$$\begin{cases}Ax+By+Cz+D=۰\\Ax_۱+By_۱+Cz_۱+D=۰\\Ax_۲+By_۲+Cz_۲+D=۰\\Ax_۳+By_۳+Cz_۳+D=۰\end{cases}$$

شرط آنکه دستگاه چهار معادلـه چهار مجهولی بـا مجهولات A وB وC وD جوابهایی‌غیرازصفرداشته‌باشد آن‌است که دترمینان ضرایب مجهولات صفر باشد یعنی:

$$P\equiv\begin{vmatrix}x & y & z & ۱\\x_۱ & y_۱ & z_۱ & ۱\\x_۲ & y_۲ & z_۲ & ۱\\x_۳ & y_۳ & z_۳ & ۱\end{vmatrix}=۰$$

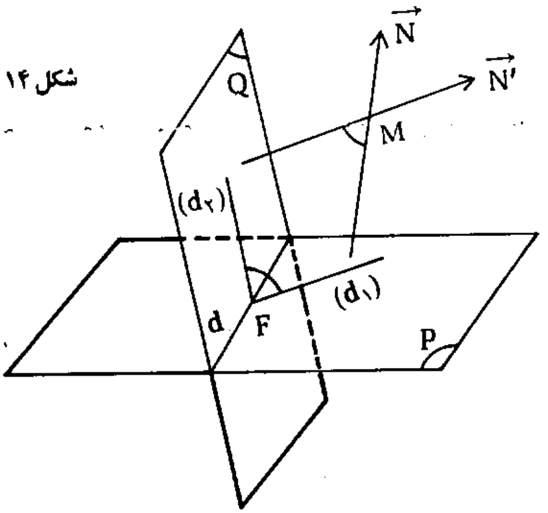
۱۳- زاویه بین دوصفحه و زاویه بین‌خط وصفحه

برای‌به دست‌آوردن زاویه بین دوصفحهٔ P وQ ازنقطه F روی خط (d) فصل مشترك‌دوصفحه عمودهای $d_۱$ و $d_۲$ را دردوصفحه P وQ رسم می‌کنیم. زاویه‌بین این دوعمود یعنی‌زاویه $\hat{F}$ زاویه بین دوصفحه می‌باشد اگر از نقطه M خارج دوصفحه دوعمود بردوصفحه P وQ فرود آوریم چون‌اضلاع این‌زاویه براضلاع زاویـه $\hat{F}$ عمودند لذا دو زاویه $\hat{F}$ و $\hat{M}$ یا مساوی‌اند و یـا مکمل‌اند. اگرمعادلات دوصفحه P و Q رابه صورت:

$$\begin{cases}P\equiv Ax+By+Cz+D=۰\\Q\equiv A'x+B'y+C'z+D'=۰\end{cases}$$

درنظربگیریم، چون بردار $\vec{N}(A,B,C)$ و بردار $\vec{N'}(A',B',C')$ می‌باشند (شکل ۱۴).

شکل ۱۴



بنا براین:

$$\boxed{\cos(\widehat{\vec{N},\vec{N'}})=\cos\hat{M}=\cos\hat{F}=}$$

$$\boxed{\frac{|AA'+BB'+CC'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}}$$

چون معمولاً زاویه حاده بین دوصفحه‌را درنظرمی گیریم لذا
$AA'+BB'+CC'$
را در داخل قدرمطلق نوشتیم. اگر دوصفحه برهم عمود باشند

$$\cos\hat{F}=\cos 90^\circ=0$$

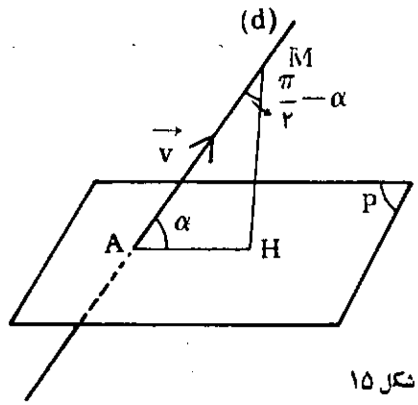
$$\boxed{AA'+BB'+CC'=0}$$

تبصره: اگردوصفحه P وQ موازی‌باشند بردارهای‌عمود براین دوصفحه، یعنی‌بردار $\vec{N}(A,B,C)$ با بردار

$\vec{N'}(A',B',C')$

موازی خواهدبود و داریم:

$$\boxed{\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}}$$



شکل ۱۵

مسلماً اگر دوصفحه برهم منطبق باشند

$$\boxed{\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{D}{D'}}$$

خواهد بود.

برای به دست آوردن زاویه بین خط d وصفحه

$$P\equiv Ax+By+Cz+D=0$$

فرض می کنیم خط d صفحه P را در نقطه A قطع کند از نقطه M روی خط (d) عمود MH را برصفحه P فرودمی آوریم. زاویه حاده $\widehat{HAM}=\alpha$ زاویه‌بین خط d وصفحه P می‌باشد (شکل ۱۵). اگر بردار $\vec{v}(a,b,c)$ باشد چون بردار عمود برصفحه که در امتداد HM می‌باشد به تصاویر (A,B,C) است بنا براین

$$\cos(\widehat{\vec{v},\vec{HM}})=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha=$$

$$\frac{|Aa+Bb+Cc|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

بخصوص اگرخط d باصفحه موازی‌باشد داریم:

$$\sin\alpha=0 \iff \boxed{Aa+Bb+Cc=0}$$

مثال ۱۰ : معادله صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه

$M(1\ ,\ 0\ ,\ 0)$

بگذرد و بردو صفحه

$$\begin{aligned} Q &\equiv \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+z=3 \end{cases} \\ R &\equiv \end{aligned}$$

عمود باشد.

حل : اگر از نقطه M دوعمود برصفحات Q وR فرود آوریم صفحه $P\equiv Ax+By+Cz+D=0$ که از این دوعمود می گذرد جواب مسأله است چون صفحه P برصفحات

Q و R عموداست پس داریم:

$$P\perp Q \Longrightarrow A(۱)+B(۱)+C(۱)=۰\ ,$$

$$P\perp R \Longrightarrow A(۲)+B(-۱)+C(۱)=۰$$

و چـون صفحه از نقطه $M(x_\circ=۱\ ,\ y_\circ=۰\ ,\ z_\circ=۰)$ می‌گذرد، معادله آن به صورت:

$$P\equiv A(x-x_\circ)+B(y-y_\circ)+C(z-z_\circ)=۰$$

$$\Longrightarrow A(x-۱)+By+Cz=۰$$

شرط آنکه دستگاه

$$\begin{cases}(x-۱)A+yB+zC=۰\\ A+B+C=۰\\ ۲A-B+C=۰\end{cases}$$

نسبت به مجهولات A وB وC جوابهایی غیرازصفر داشته باشد آن است که:

$$P\equiv\begin{vmatrix} x-۱ & y & z\\ ۱ & ۱ & ۱\\ ۲ & -۱ & ۱\end{vmatrix}=۰ \Longrightarrow$$

$$(x-۱)(۱+۱)-y(۱-۲)+z(-۱-۲)=۰$$

$$\Longrightarrow ۲x-۲+y-۳z=۰ \Longrightarrow$$

$$\boxed{P\equiv ۲x+y-۳z-۲=۰}$$

مثال ۱۱ : زاویهٔ خط (d) به معادله

$$\frac{x+۳}{۲}=\frac{y-۱}{۱}=\frac{z-۵}{-۲}$$

و صفحه P به معادله $x+y+۲=۰$ کدام است؟

حل :

$$a=۲\ ,\ b=۱\ ,\ c=-۲$$

$$A=۱\ ,\ B=۱\ ,\ C=۰$$

$$\sin\alpha=\frac{|Aa+Bb+Cc|}{\sqrt{A^۲+B^۲+C^۲}\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}$$

$$=\frac{|۲+۱+۰|}{\sqrt{۱+۱+۰}\sqrt{۴+۱+۴}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\alpha=\frac{\pi}{۴}}$$

مثال ۱۲ : معادله‌خطی‌را بنویسید که از نقطه $M(۱,۱,۱)$ بگذرد و با صفحه $x+y-z=۱$ موازی باشد و با محور yها زاویه ۶۰° بسازد.

حل : پارامترهای هـادی خط (d) را (a,b,c) گرفته چون این‌خط موازی‌صفحه $P\equiv Ax+By+Cz+D=۰$ است داریم:

$$Aa+Bb+Cc=۰ \Longrightarrow$$

$$۱\times a+۱\times b+(-۱)c=۰ \Longrightarrow$$

$$a+b-c=۰$$

$$\cos\beta'=\beta=\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{۱}{۲}=\frac{b}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}} \Longrightarrow$$

$$\frac{۱}{۴}=\frac{b^۲}{a^۲+b^۲+c^۲} \Longrightarrow a^۲+b^۲+c^۲=۴b^۲$$

$$\Longrightarrow a^۲+c^۲=۳b^۲ \text{ و } a+b-c=۰ \Longrightarrow$$

$$c=a+b \Longrightarrow a^۲(a+b)^۲=۳b^۲ \Longrightarrow$$

$$۲a^۲+۲ab+b^۲=۳b^۲ \Longrightarrow$$

$$۲a^۲+۲ab=۲b^۲ \Longrightarrow a^۲+ba-b^۲=۰$$

$$\Longrightarrow a=\frac{-b\pm\sqrt{۵}\,b}{۲}\ ,$$

$$c=b+a=b+\frac{-b\pm\sqrt{۵}b}{۲} \Longrightarrow$$

$$c=\frac{b\pm\sqrt{5}\,b}{2}$$

پارامترهای هادی $= b\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right)$

$$b\ ,\ b\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right) \text{ یا } \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\ ,\ 1\ ,\ \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$d\equiv\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}\implies$$

$$d\equiv\frac{x-1}{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}}\implies$$

$$d\equiv\boxed{\frac{x-1}{-1\pm\sqrt{5}}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{1\pm\sqrt{5}}}$$

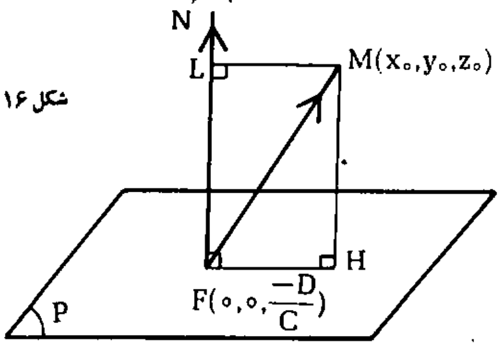
۱۴ـ فاصله نقطه $M(x_0\ ,\ y_0\ ,\ z_0)$ از صفحه

$$P\equiv Ax+By+Cz+D=0$$

در معادله صفحه به جای x و y صفر قرارداده

$$z=\frac{-D}{C}$$

به دست می‌آید. نقطه $F\left(0\ ,\ 0,\frac{-D}{C}\right)$ نقطه‌ای از صفحه می‌باشد. از نقطه F عمودی بر صفحه P اخراج نموده بردار $\vec{N}(A\ ,\ B\ ,\ C)$ را روی این عمود درنظر گرفته داریم:



شکل ۱۶

$$\overrightarrow{FM}\left(x_0,y_0,z_0+\frac{D}{C}\right)\ ,\ \vec{N}(A,B,C)$$

$$\overrightarrow{FM}\cdot\vec{N}=Ax_0+By_0+C\left(z_0+\frac{D}{C}\right)$$

$$=Ax_0+By_0+Cz_0+D=|\vec{N}|\times$$

$=$ (تصویر بردار $\overrightarrow{FM}$ روی بردار $\vec{N}$)

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2}\times\overline{FL}=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\times\overline{HM}$$

$$\implies\boxed{HM=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

مثال ۱۳ : معادله‌صفحه نیمسازهای صفحات

$$\begin{cases}Q\equiv Ax+By+Cz+D=0\\ R\equiv A'x+B'y+C'z+D'=0\end{cases}$$

را بنویسید.

حل : اگر نقطه $M(x,y,z)$ فاصله‌اش از دو صفحه Q و R به یک‌اندازه‌باشد آنگاه‌نقطه M روی‌صفحه‌نیمساز Q و R می‌باشد و برعکس اگر نقطه M روی صفحه نیمساز باشد فاصله‌اش از دوصفحه R و Q به‌یک اندازه خواهدبود پس:

فاصله M از صفحه Q $=MH=$

$$\frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

فاصله M از صفحه R $=MH'=$

$$\frac{|A'x+B'y+C'z+D'|}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

$$MH=MH'\implies\frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$=\frac{|A'x+B'y+C'z+D'|}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}} \Longrightarrow$$

$$\boxed{P\equiv\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}} \boxed{=\pm\frac{A'x+B'y+C'z+D'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}}$$

مثال ۱۴ : معادله کره‌ای را بنویسید که مرکزش نقطه

$C(1\ ,\ 1\ ,\ 1)$

بوده و برصفحه $x+2y+2z=-4$ مماس باشد.

حل : اگر از مرکز کره به نقطه تماس وصل کنیم برصفحه مماس عمود است بنابراین فاصله مرکز کره تاصفحه مماس شعاع کره می‌باشد داریم:

$$P\equiv x+2y+2z+4=0$$

$$CH=R=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=$$

$$\frac{|1+2(1)+2(1)+4|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{9}{3}=3 \Longrightarrow R=3$$

معادله کره : $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=9$

$$\Longrightarrow \boxed{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9}$$

مثال ۱۵ : مطلوب است فاصله دوصفحه

$$\begin{cases} P\equiv x+y+z-2=0 \\ Q\equiv 2x+2y+2z+4=0 \end{cases}$$

حل : چون $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{1}{2}$ می‌باشد دوصفحه موازی‌اند. درصفحه P نقطه M به طول وعرض صفررا درنظر گرفته درنتیجه $z=2$ می‌شود پس نقطه $M(0,0,2)$ در صفحه P می‌باشد از این نقطه عمود MH را برصفحه Q فرود آورده طول این عمود فاصله دوصفحه می‌باشد.

$$MH=\frac{|2\times 0+2\times 0+2\times 2+4|}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}}$$

$$=\frac{8}{\sqrt{12}}=\frac{8}{2\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}=\boxed{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$$

و به طور کلی اگر دوصفحه

$$\begin{cases} P\equiv Ax+By+Cz+D=0 \\ Q\equiv A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$$

موازی باشند یعنی

$$\frac{A'}{A}=\frac{B'}{B}=\frac{C'}{C}=K$$

$$A'=AK\ ,\ B'=BK\ ,\ C'=CK \Longrightarrow$$

$$AKx+BKy+CKz+D'=0 \Longrightarrow$$

$$Ax+By+Cz+\frac{D'}{K}=0\ ,\ \frac{D'}{K}=L \Longrightarrow$$

$$Q\equiv Ax+By+Cz+L=0$$

نقطه مانند $M\left(0\ ,\ 0\ ,\ -\frac{D}{C}\right)$ در روی صفحه P در نظر گرفته فاصله نقطه M ازصفحه Q فاصله بین دوصفحه می‌باشد:

$$MH=\frac{|A(0)\ 8\ B(0)+C\left(-\frac{D}{C}\right)+L|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$=\boxed{\frac{|L-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

مثلاً* برای به دست آوردن فاصله دوصفحه فوق طرفین معادله صفحه Q را بر (۲) تقسیم کرده داریم:

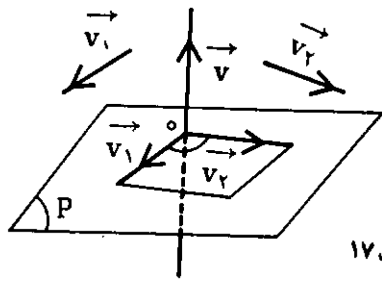
$$\begin{cases} P \equiv x+y+z-2=0 \\ Q \equiv x+y+z+2=0 \end{cases}$$

$$MH=\frac{|2-(-2)|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{3}}=\boxed{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$$

۱۵- حاصلضرب خارجی دو بردار برحسب تصاویر آنها

می‌دانیم که اگر $\vec{v_1}(a,b,c)$ و $\vec{v_2}(a',b',c')$ باشند، حاصلضرب خارجی آنها $\vec{v_1}\times\vec{v_2}$ برابر است با:

$$\vec{v_1}\times\vec{v_2}=\vec{i}(bc'-cb')-\vec{j}(ac'-ca')+\vec{k}(ab'-ba')=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$$



شکل ۱۷

حاصلضرب خارجی دو بردار

$\vec{v_1}(a\ ,\ b\ ,\ c)$ و $\vec{v_2}(a'\ ,\ b'\ ,\ c')$

برداری می‌باشد که از بسط دترمینانی که سطر اول آن

$(\vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k})$

و سطر دوم آن (a,b,c) و سطر سومش (a',b',c') می‌باشد به دست می‌آید.

مثال ۱ : بردار یکانی حاصلضرب خارجی بردارهای

$\vec{v_1}(1\ ,\ 2\ ,\ 3)$ و $\vec{v_2}(0\ ,\ -1\ ,\ -2)$

کدام است ؟

$$v=\vec{v_1}\times\vec{v_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=\vec{i}(-4+3)-\vec{j}(-2-0)+\vec{k}(-1-0)$$

$= -\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{u}=(\vec{v})$ بردار واحد $=$

$$\frac{-\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{(-1)^2+(2)^2+(-1)^2}}=\frac{-\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{6}}$$

$$=\boxed{-\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i}+\frac{2}{\sqrt{6}}\vec{j}-\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{k}}$$

مثال ۲ : حجم هرم OABC را که در آن O مبدأ مختصات و $A(1,0,0)$ و $B(0,2,0)$ و $C(0,0,3)$ می‌باشد کدام است؟

حل :

$$\vec{AB}(a=-1\ ,\ b=2\ ,\ c=0)$$

$$\vec{AC}(a'=-1\ ,\ b'=0\ ,\ c'=3)$$

معادله صفحه ABC که از نقطه $C(x_0=0,y_0=0,z_0=3)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$P_{ABC}=\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z-3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}=$$

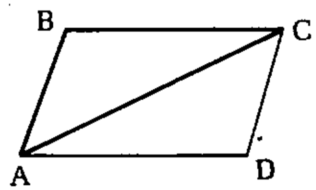
$$x(6-0)-y(-3-0)+(z-3)(0+2)=0$$

$$\Longrightarrow 6x+3y+2z-6=0$$

برای به دست آوردن ارتفاع هرم باید فاصلهٔ رأس O را از صفحه بالا به دست آوریم:

$$OH=\frac{|6(0)+3(0)+2(0)-6|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\boxed{\frac{6}{7}}$$

اگر روی مثلث ABC متوازی‌الاضلاع ABCD را بسازیم مساحت مثلث ABC (شکل ۱۸) $\frac{1}{2}$ مساحت متوازی‌الاضلاع می‌باشد و می‌دانیم اندازه این مساحت برابر است با اندازه حاصلضرب‌خارجی دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.



شکل ۱۸

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=6\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$$

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{6^2+3^2+2^2}=7$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\times 7=\frac{7}{2}$$

چون حجم هرم برابر است با سطح قاعده ضرب در ثلث ارتفاع داریم:

$$V_{\text{هرم}}=S_{ABC}\times\frac{OH}{3}=\frac{7}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{6}{7}$$

$$=\frac{7}{2}\times\frac{2}{7}=\boxed{1}$$

مثال ۳ : معادله پارامتری خط (d) فصل مشترک صفحات

$$\begin{cases} P\equiv x+y+z-2=0 \\ Q\equiv 2x-y+3z-1=0 \end{cases}$$

کدام است؟

حل : به جای z صفر قرار داده x و y را به‌دست‌می‌آوریم:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Longrightarrow 3x=3 \Longrightarrow x=1$$

$$\Longrightarrow y=1 \Longrightarrow M_0(1,1,0)$$

فصل مشترک دوصفحه یعنی خط (d) بر بردارهای عمود برصفحه یعنی بردارهایی که تصاویرشان ضرایب صفحه می‌باشند عمود می‌باشد. اگر $\vec{v}$ را برداری از خط d بگیریم چون بردار $\vec{v}$ بر بردارهای:

$$\vec{v_2}(2,-1,3) \text{ و } \vec{v_1}(1,1,1)$$

عمود است پس:

$$\vec{v}=\vec{v_1}\times\vec{v_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=\vec{i}(3+1)-\vec{j}(3-2)+\vec{k}(-1-2)$$

$$= ۴\vec{i} - \vec{j} - ۳\vec{k} \quad و \quad d \equiv \begin{cases} x = x_\circ + at \\ y = y_\circ + bt \\ z = z_\circ + ct \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{cases} x = ۱ + ۴t \\ y = ۱ - t \\ z = ۰ - ۳t = -۳t \end{cases}}$$

معادلات پارامتری خط (d)

مثال ۴ : درستی رابطه

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \circ \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \circ \vec{C})\vec{A}$$

را برای بردارهای

$$\vec{A}(۱,۲,۳) \text{ و } \vec{B}(۰,۱,۱) \text{ و } \vec{C}(-۲,۰,۰)$$

بررسی نمایید.

حل :

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$= -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \ , \ \vec{A} \times \vec{B}(-۱,-۱,۱)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -۱ & -۱ & ۱ \\ -۲ & ۰ & ۰ \end{vmatrix}$$

$$= -۲\vec{j} - ۲\vec{k} \Longrightarrow$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = -۲\vec{j} - ۲\vec{k} \qquad (۱)$$

$$\vec{A} \circ \vec{C} = (۱)(-۲) + ۲(۰) + ۳(۰) = -۲ \Longrightarrow$$

$$(\vec{A} \circ \vec{C})\vec{B} = -۲(\vec{j} + \vec{k}) = -۲\vec{j} - ۲\vec{k}$$

$$\vec{B} \circ \vec{C} = (۰)(-۲) + (۱)(۰) + (۱)(۰) = ۰$$

$$(\vec{B} \circ \vec{C})\vec{A} = \vec{۰}$$

$$(\vec{A} \circ \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \circ \vec{C})\vec{A} = -۲\vec{j} - ۲\vec{k} \qquad (۲)$$

با مقایسهٔ روابط (۱) و (۲) داریم:

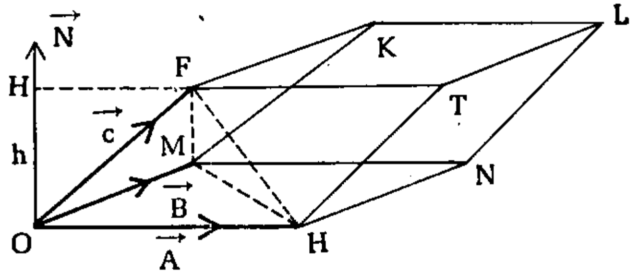
$$\boxed{(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \circ \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \circ \vec{C})\vec{A}}$$

رابطه بالا به‌نام رابطه‌ضرب برداری سه‌گانه معروف بوده و ثابت می‌کنند این‌رابطه همواره‌بین سه‌بردار برقرار می‌باشد.

۱۶ـ ضرب عددی سه‌گانه سه‌بردار

ضرب عددی سه‌گانه‌بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ به صورت $(\vec{A} \times \vec{B}) \circ \vec{C}$ که برابر یك‌عدد می‌باشد تعریف می‌شود. روی سه بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ متوازی السطوحی می‌سازیم و بـردار $\vec{N} = \vec{A} \times \vec{B}$ برداری عمود برصفحه OMNH است واندازه آن برابر است با عدد مساحت متوازی‌الاضلاع OMNH از طرفی داریم:

شکل۱۹



$$\vec{N} \circ \vec{C} = |\vec{N}| \times \text{تصویر بردار } \vec{C} \text{ روی بردار } \vec{N}$$

$$= S_{OMNH} \times \overline{OH} \qquad (\text{شکل ۱۹})$$

چون S_{OMNH} سطح قاعده متوازی‌السطوح و قدر مطلق $\overline{OH}$ ارتفاع متوازی‌السطوح می‌باشد لذا قدرمطلق

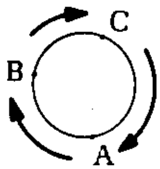
$$\vec{N}\circ\vec{C}=(\vec{A}\times\vec{B})\circ\vec{C}$$

حجم متوازی‌السطوحی است که روی یالهای بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ ساخته می‌شود. ازطرفی با استفاده از تبدیل دوری (A به B) و (B به C) و (C به A) می‌توان ثابت کرد:

$$(\vec{A}\times\vec{B})\circ\vec{C}=(\vec{B}\times\vec{C})\circ\vec{A}=(\vec{C}\times\vec{A})\circ\vec{B} \Longrightarrow$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\circ\vec{C}=(\vec{B}\times\vec{C})\circ\vec{A}=\vec{A}\circ(\vec{B}\times\vec{C}) \Longrightarrow$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\circ\vec{C}=\vec{A}\circ(\vec{B}\times\vec{C})$$



اگر $\vec{A}(a,b,c)$ و $\vec{B}(a',b',c')$ و $\vec{C}(a'',b'',c'')$ داریم:

$$\vec{B}\times\vec{C}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

$$=(b'c''-c'b'')\vec{i}-(a'c''-a''c')\vec{j}$$

$$+(a'b''-a''b')\vec{k} : \vec{A}(a,b,c)$$

$$\vec{B}\times\vec{C}(b'c''-c'b'', -(a'c''-a''c'), a'b''-a''b')$$

$$\Longrightarrow \vec{A}\circ(\vec{B}\times\vec{C})=a(b'c''-c'b'')$$

$$-b(a'c''-a''c')+c(a'b''-a''B')=$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

یعنی $(\vec{A}\times\vec{B})\circ\vec{C}$ برابر است با دترمینان ۳×۳ که سطرهای آن به ترتیب تصاویر بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ می‌باشد و قدرمطلق این دترمینان برابر است با حجم متوازی‌السطوحی که روی بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ ساخته می‌شود.

تبصره مهم: اگر درشکل (۲۰) ازنقطه F به‌نقاط O و M و H وصل کنیم حجم‌هرم FOMH که رأس آن F و قاعده‌اش مثلث OMH می‌باشد برابر است با سطح قاعده مثلث OMH ضرب در ثلث ارتفاع OH. از طرفی

$$S_{OMH}=\frac{1}{2}S_{OMNH}$$

می‌باشد پس:

$$V_{\text{هرم}}=S_{OMH}\times\frac{h}{3}=\frac{1}{2}S_{OMNH}\times\frac{h}{3}$$

$$=\frac{1}{6}\times S_{OMNH}\times h=\frac{1}{6}\text{حجم متوازی‌السطوح}$$

بنابراین اگر بردارهای

$$\vec{A}(a,b,c) \text{ و } \vec{B}(a',b',c') \text{ و } \vec{C}(a'',b'',c'')$$

یالهای همرس (متقارب) درنقطه O باشند قدرمطلق حجم هرم برابر است با:

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & b'' \end{vmatrix}$$

مثال ۱: حجم متوازی‌السطوح OMNHFKLT که در آن $O(0,0,0)$ و $M(2,3,4)$ و $H(-2,-1,2)$ و

(۲− ,۰ ,۱−)F می‌باشد کدام است (شکل ۱۹)؟

حل :

$\overrightarrow{OH}(-۲,-۱,۴)$ و $\overrightarrow{OM}(۲,۳,۴)$ و

$\overrightarrow{OF}(-۱,۰,-۲)$

$$V_{حجم} = \left| \begin{vmatrix} -۲ & -۱ & ۴ \\ ۲ & ۳ & ۴ \\ -۱ & ۰ & -۲ \end{vmatrix} \right| =$$

$$|-۲(-۶-۰)+۱(-۴+۴)+۴(۰+۳)|$$

$$= |۱۲+۱۲| \Rightarrow \boxed{V=۲۴}$$ واحد حجم

مثال ۲ : حجم هرم OABC را که در آن O مبدأ مختصات

$C(-۲,۱,-۳)$ و $B(-۱,-۲,-۴)$ و $A(۱,۲,۳)$

می‌باشد کدام است؟

حل :

$\overrightarrow{OA}(۱,۲,۳)$ و $\overrightarrow{OB}(-۱,-۲,-۴)$ و

$\overrightarrow{OC}(-۲,۱,-۳)$

$$V = \left| \frac{۱}{۶} \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ & -۴ \\ -۲ & ۱ & -۳ \end{vmatrix} \right|$$

$$= \frac{۱}{۶} |۱(۶+۴)-۲(۳-۸)+۳(-۱-۴)|$$

$$= \frac{۱}{۶} |۱۰+۱۰-۱۵| = \frac{۱}{۶} \times ۵ = \boxed{\frac{۵}{۶}}$$ واحد حجم

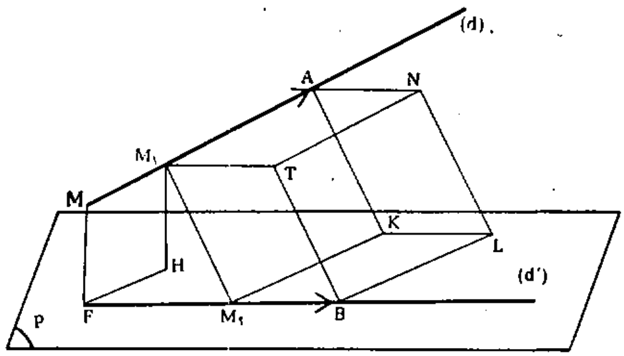
۱۷ــ محاسبه فاصله عمود مشترک دوخط متنافر

فرض می‌کنیم دو خط

$$d : \frac{x-x_۰}{a} = \frac{y-y_۰}{b} = \frac{z-z_۰}{c}$$

$$d' : \frac{x-x'_۰}{a'} = \frac{y-y'_۰}{b'} = \frac{z-c'}{c'}$$

متنافر باشند. می‌خواهیم طول پاره‌خطی را که متکی به‌دو خط‌مزبور بوده و بر این دوخط عمود می‌باشد محاسبه‌کنیم:



شکل ۲۰

فرض می‌کنیم نقطه $M_۱(x_۰,y_۰,z_۰)$ و $\overrightarrow{M_۱A}(a,b,c)$ و نقطه $M_۲(x'_۰,y'_۰,z'_۰)$ و $\overrightarrow{M_۲B}(a',b',c')$ باشد روی بردارهای $\overrightarrow{M_۲B}$ و $\overrightarrow{M_۲M_۱}$ و $\overrightarrow{M_۱A}$ متوازی‌السطوحی می‌سازیم. از نقطه $M_۱$ عمود $M_۱H$ را برصفحه قاعده متوازی السطوح فرود می‌آوریم. از نقطه H خطی موازی d رسم می‌کنیم تا خط d' را در نقطه F قطع کند. از نقطه F عمودی برصفحه (P) اخراج می‌کنیم تا خط d را در نقطه M قطع نماید FM عمود مشترک دوخط d و d' است زیرا چون FM برصفحه (P) عمود است بر کلیه خطوط صفحه P من‌جمله برخط d' و FH عمود است و چون‌خط d با خط FH موازی می‌باشد پس FM برخط d هم عمود است بنابراین $FM = HM_۱$ که بر دو خط d و d' متکی و بر آنها عمود است عمود مشترک دوخط d و d' است وسطح قاعده

متوازی‌السطوح برابر است با:

$$S=|\overrightarrow{M_2K}\times\overrightarrow{M_2B}|=|\overrightarrow{M_1A}\times\overrightarrow{M_2B}|$$

وحجم متوازی‌السطوح بالا (شکل ۲۰) برابر است با:

$$v=S_{\text{قاعده}}\times HM_1=|\overrightarrow{M_1A}\times\overrightarrow{M_2B}|\times FM$$

$$=|(\overrightarrow{M_1A}\times\overrightarrow{M_2B})\circ\overrightarrow{M_1M_2}|$$

$$\Longrightarrow \boxed{FM=\frac{|(\overrightarrow{M_1A}\times\overrightarrow{M_2B})\circ\overrightarrow{M_1M_2}|}{|\overrightarrow{M_1A}\times\overrightarrow{M_2B}|}}$$

که صورت کسر قدرمطلق دترمینانی می‌باشد که سطرهای آن به ترتیب تصاویر بردارهای

$$\overrightarrow{M_2B}(a',b',c') \text{ و } \overrightarrow{M_1A}(a,b,c)$$

$$\overrightarrow{M_1M_2}(x'_0-x_0\,,\ y'_0-y_0\,,\ z'_0-z_0)$$

است.

مثال: مطلوب است طول عمود مشترک دو خط متنافر

$$d: x=2t+2\ ,\ y=4t+1\ ,\ z=-t-1$$

$$d': x=3t'-31\ ,\ y=2t'+6\ ,\ z=6t'+3$$

حل:

$$d: \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+1}{-1}$$

$$d': \frac{x+31}{3}=\frac{y-6}{2}=\frac{z-3}{6}$$

$$M_1(2,1,-1) \text{ و } M_2(-31,6,3) \Longrightarrow$$

$$\overrightarrow{M_1M_2}(-33,5,4)$$

$$\overrightarrow{M_1A}(2,4,-1) \text{ و } \overrightarrow{M_2B}(3,2,6)$$

$$\overrightarrow{M_1A}\times\overrightarrow{M_2B}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$=26\vec{i}-15\vec{j}-8\vec{k}\ ,\ |\overrightarrow{M_1A}\times\overrightarrow{M_2B}|$$

$$=\sqrt{26^2+(-15)^2+(-8)^2}$$

$$=\sqrt{676+225+64}=\sqrt{965}$$

$$(\overrightarrow{M_1A}\times\overrightarrow{M_2B})\circ\overrightarrow{M_1M_2}$$

$$=\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \\ -33 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=2(8-30)-4(12+198)$$

$$-1(15+66)=-44-840-81$$

$$=-965\ ,\ FM=\frac{|-965|}{\sqrt{965}}$$

$$=\frac{965}{\sqrt{965}}=\boxed{\sqrt{965}}$$

ادب و ریاضی

در سن یازده سالگی، اقلیدس را آغاز کردم ... این یکی از مهمترین حادثه‌های زندگیم، به خیره‌کنندگی مهر نخستین بود. تصور نمی‌کردم که در دنیا چیزی این همه لذت بخش وجود داشته باشد.

برتراندراسل، اتوبیوگرافی

تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران ۳

بررسی مجلهٔ ریاضیات دکتر مصاحب ناتمام ماند و ادامهٔ آن به این شماره موکول گردید. در شمارهٔ قبل به موضوعی به نام عشق به حساب رسیدیم و ذکر چند مسأله که در آن آورده شده بود.

مسأله: عبارت

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$$

را به حاصل ضرب عوامل تجزیه کنید.

حل: برای حل این مسأله قبلاً به ذکر قضیهٔ ذیل که در بعضی موارد دانستن آن خالی از اهمیت نیست می‌پردازیم.

قضیه: هرگاه مجموع سه عدد جبری a و b و c صفر باشد، مجموع مکعباتشان مساوی است با سه برابر حاصل ضربشان، زیرا:

$$(a+b+c)^3\equiv a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$$

اما از شرط $a+b+c=0$ نتیجه می‌شود:

$$c+a=-b \quad \text{و} \quad b+c=-a \quad \text{و} \quad a+b=-c$$

۱ـحال اگر این مقادیر را در اتحاد فوق قرار دهیم، چنین نتیجه می‌شود:

$$a^3+b^3+c^3=3abc$$

پس از ایراد این مقدمه گوییم چون مجموع سه مقدار $x-y$ و $y-z$ و $z-x$ صفر است مجموع مکعبات آنها مساوی است با سه برابر حاصل ضربشان، یعنی:

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3\equiv 3(x-y)(y-z)(z-x)$$

طریق دیگر: عبارت مفروض را پس از بسط پرانتزها و مرتب کردن به حسب قوای یکی از حروف، مثلاً x، می‌توان مرتباً چنین نوشت:

$$3[x^2(z-x)-(z^2-y^2)x+yz(z-y)]$$

$$=3(z-y)[x^2-x(z+y)+yz]$$

$$=3(z-y)[x(x-z)-y(x-z)]=3(z-y)(x-z)(x-y)$$

مسأله: معادلهٔ $x^4+4b^3x+3b^4=0$ را حل کنید.

حل: دو جملهٔ اول طرف اول معادلهٔ فوق متعلق است به بسط $(a+b)^4$ زیرا:

$$(x+b)^4=x^4+4b^3x+6b^2x^2+4bx^3+b^4$$

با این ملاحظه، معادلهٔ مفروض چنین می‌شود:

$$(x+b)^۴ - ۶b^۲x^۲ - ۴bx^۳ + ۲b^۴ = ۰ \qquad (۱)$$

فرض کنیم $x+b=y$، معادلهٔ (۱) به این صورت بیرون می‌آید:

$$y^۴ - ۴by^۳ + ۶b^۲y^۲ = ۰$$

از آنجا $y^۲ = ۰$، یعنی، $x=-b$ و یا $y^۲ - ۴by + ۶b^۲ = ۰$، از آنجا

$$y = b(۲ \pm \sqrt{-۲})$$

پس

$$x = b(۱ \pm \sqrt{-۲})$$

مسأله: مکعب کاملی به صورت aab۰۰daaa چنان بیابید که $b+d=a$ (مصاحب).

حل: فرض می‌کنیم $N=aab۰۰daaa$، باقیماندهٔ تقسیم N بر ۳ مساوی است با باقیماندهٔ: $۵a+b+d=۶a$، پس N به ۲۷ قابل قسمت است، خلاصه:

$$N=۱۱۰۰۰۱۱۱۱a+۹۹۹۰۰۰b \qquad (۱)$$
$$=۴۰۷۴۱۱۵\times ۲۷a+۶a+۲۷\times ۳۷۰۰۰b=$$
$$۶a+\text{مضرب } ۲۷$$

پس باید ۶a مضرب ۲۷ باشد و چون $a\le ۹$ ناچار $a=۹$، اینک تساوی (۱) را می‌توان چنین نوشت:

$$N = ۳^۳(۳۶۶۶۷۰۳۷ + ۳۷۰۰۰b)$$

اما، $۳۶۶۶۷۰۳۷ = ۳۷\times ۹۹۱۰۰۱$، پس:

$$N = ۳^۳ \times ۳۷(۹۹۱۰۰۱ + ۱۰۰۰b)$$

بنابراین مقدار داخل پرانتز باید به صورت $۳۷^۲k^۳$ باشد. اما منتها حد داخل پرانتز ۱۰۰۰۰۰۱ است، پس $۳۷^۲k^۳ \le ۱۰۰۰۰۰۱$، یعنی $k^۳ \le ۷۳۰$ بنابراین $k\le ۹$. از طرف دیگر $۳۷^۲\times k^۳$ باید به یک ختم شود و چون $۳۷^۲$ به ۹ ختم می‌گردد ناچار باید $k^۳$ به ۹ مختوم باشد و چون $k^۳$ سه رقمی است، مساوی ۷۲۹ یعنی $k=۹$ خواهد بود به قسمی که

$$۹۹۱۰۰۱+۱۰۰۰b=۹^۳\times ۳۷^۲$$

از حل این معادله معلوم می‌شود که $b = ۷$، به قسمی که عدد مطلوب عبارت است از

$$۹۹۷۰۰۹۹۹۹ = ۳^۳ \times ۹^۳ \times ۳۷^۳$$

و کعب آن ۹۹۹ است.

مسأله: تحصیل یکی از دستورات ریاضیات عالی به طریق مقدماتی

۱ - اعدادی مانند $a_۰$، $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، ... چنان بیابید که اتحاد ذیل محقق شود:

$$\log(۱+x) \equiv a_۰ + a_۱x + a_۲x^۲ + a_۳x^۳ + a_۴x^۴ + \cdots$$

حل: اگر در طرفین رابطهٔ فوق به جای x صفر قرار دهیم نتیجه می‌شود:

$$a_۰ = ۱$$

پس

$$\log(۱+x) = a_۱x + a_۲x^۲ + a_۳x^۳ + \cdots$$

اگر در طرفین این رابطه به جای x، $۲x + x^۲$ قرار دهیم طرف اول آن معادل:

$$\log(۱+۲x+x^۲) = ۲\log(۱+x) = ۲(a_۱x+a_۲x^۲+a_۳x^۳+\cdots)$$

و طرف ثانی مساوی[۱]:

$$a_۱(۲x+x^۲)+a_۲(۲x+x^۲)^۲+a_۳(۲x+x^۲)^۳+$$

$$\equiv ۲a_۱x + x^۲(a_۱ + ۴a_۲) + x^۳(۴a_۲ + ۸a_۳) + x^۴(a_۲ + ۱۲a_۳ + ۱۶a_۴) + \cdots$$

می‌شود و برای این که این دو مقدار عین یکدیگر باشند لازم است که ضرایب قوای متساویهٔ x مساوی باشند، یعنی:

$$۲a_۲=۴a_۲+a_۱, ۲a_۳=۴a_۲+۸a_۳, ۲a_۴=a_۲+۱۲a_۳+۱۶a_۴,\ldots$$

و هکذا. از این معادلات نتیجه می‌شود:

$$a_۲ = -\frac{a_۱}{۲}, a_۳ = \frac{a_۱}{۳}, a_۴ = -\frac{a_۱}{۴},\ldots$$

پس

$$\log(۱+x)= a_۱\left(x - \frac{x^۲}{۲} + \frac{x^۳}{۳} - \frac{x^۴}{۴} + \cdots\right) \qquad (۱)$$

۲ - ضریب $a_۱$ که در دستور فوق مشاهده می‌شود مربوط است به مبنای لگاریتم و آن را اساس دستگاه مفروض خوانند و در حالتی که $a_۱ = ۱$ باشد، لگاریتم را طبیعی نامند و مبنای آن به e نموده می‌شود. لگاریتم طبیعی اعداد را به علامت L_x می‌نماییم، پس:

$$L(۱+x) = x - \frac{x^۲}{۲} + \frac{x^۳}{۳} - \frac{x^۴}{۴} + \cdots \qquad (۲)$$

اگر a مبنای دیگری باشد بنابر (I - قسمت ۴)[۲]:

$$\log_a(۱+x) = a_۱ L(۱+x) \qquad (۳)$$

بنا براین برای به‌دست آوردن لگاریتم عددی در مبنای a کافی است لگاریتم طبیعی آن را در اساس دستگاه ضرب کنیم.

۳ - اگر در دستور (۳) به جای $x+۱$ عدد e را قرار دهیم حاصل می‌شود:

$$a_۱ = \log_a e \qquad (۴)$$

بنابراین اساس هر دستگاه لگاریتم مساوی است با لگاریتم عدد e در آن دستگاه.

۴ - ظاهراً به نظر می‌آید که به مدد دستور (۲) می‌توان لگاریتم طبیعی تمام اعداد را تا هر حدی از تقریب که خواسته باشیم حساب کرد، ولی در عمل چنین نیست مثلاً برای اینکه از روی این دستور لگاریتم عدد ۲ را تا ۳ رقم اعشار به دست آوریم محاسبهٔ هزار جمله از رشتهٔ فوق لازم است و چنین محاسبه‌ای عملی نیست، لهذا دستورات دیگری به کار می‌برندکه جمع آنها خیلی سریع تنزل کند و ما ذیلاً راه به دست آوردن این دستورات را متذکر می‌شویم:

اگر در دستور (۲)، x را به $-x$ تبدیل کنیم حاصل می‌شود:

$$L(۱-x) = -x - \frac{x^۲}{۲} - \frac{x^۳}{۳} - \frac{x^۴}{۴} - \cdots \qquad (۵)$$

(اگر طرفین (۳) و (۵) را)[۳] از هم کم کنیم حاصل می‌شود:

$$L\left(\frac{۱+x}{۱-x}\right) = ۲\left(x + \frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۵}{۵} + \cdots\right) \qquad (۶)$$

فرض می‌کنیم $\frac{z+۱}{z} = \frac{x+۱}{۱-x}$ از آنجا: $x=\frac{۱}{۲z+۱}$ و چون این مقادیر را در دستور (۶) قرار دهیم این دستور به دست می‌آید:

$$L(z+۱) = L z + ۲\left(\frac{۱}{۲z+۱} + \frac{۱}{۳(۲z+۱)^۳} + \frac{۱}{۵(۲z+۱)^۵} + \cdots\right) \qquad (۷)$$

چنانکه دیده می‌شود جمل رشتهٔ داخل پرانتز خیلی به سرعت کوچک می‌شوند و دستور (۷) را می‌توان برای محاسبهٔ لگاریتم طبیعی اعداد استعمال کرد.

در دستگاهی که اساسش $a_۱$ باشد، دو دستور (۶) و (۷) چنین می‌شود:

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2a_1\left(x+\frac{x^3}{3}+\cdots\right) \qquad (6')$$

$$\log(1+z)=\log z + 2a_1\left(\frac{1}{2z+1}+\frac{1}{5(2z+1)^3}+\cdots\right)$$

$$(7')$$

۵ - برای مثال اساس دستگاه اعشاری و لگاریتم عدد ۲ را در آن دستگاه حساب می‌کنیم:

برای این مقصود در دستور ($6'$) به جای x مرتباً $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{9}$ قرار می‌دهیم حاصل می‌شود:

$$\log_{10} 2 = 2a_1\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\cdots\right)$$

$$1-3\log_{10} 2 = 2a_1\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3\cdot 9^3}+\frac{1}{5\cdot 9^5}+\cdots\right)$$

مقدار داخل پرانتز اول مساوی است با: ۰/۳۴۶۵۷۳۵۹۰۳... و مقدار داخل پرانتز ثانی معادل است با: ۰/۱۱۱۵۷۱۷۷۵۷... و از حل دو معادلهٔ دو مجهولی فوق نتیجه می‌شود:

$$a_1 = 0/434229448\cdots \qquad \log_{10} 2 = 0/30103\cdots$$

برای محاسبهٔ عدد e گوییم مطابق دستور (۴) [۴]:

$$\log_{10} e = 0/43429448\cdots$$

از آنجا: $e = 2/718281828\cdots$

مجله مقالات مسلسلی تحت عنوان ریاضیّون ایرانی به قلم آقای مشیری[۵] دارد که در این جا برای مزید فایده، مقالهٔ مربوط به **ابوالوفای بوزجانی** آن را - گرچه به اختصار - می‌آوریم:

اسمش محمدبن‌محمد بن یحیی بن اسمعیل بن العباس از اهل بوزجان خراسان (در چهار منزلی نیشابور و شش منزلی هرات) و تولدش در بوزجان در سال ۳۲۸ روز چهارشنبهٔ اول رمضان بوده و ابتدا نزد **ابی‌عمرالمغازلی و ابی عبدالله محمد بن عنبسه** که عمو و دایی او بودند حساب و هندسه و علوم مربوط به آن را خواند و در سنهٔ ۳۴۸ عزم مسافرت عراق را نمود و در دربار عضدالدوله [۳۳۷ - ۳۷۲] و خلفا به عزّت می‌زیست. ابوالوفا یکی از جمله اشخاصی است که بر صحت عملیات و یجن‌بن رستم[۶] به معیت عدهٔ دیگر تصدیق نوشته است. **ابوالوفا و امیرابونصرعراق و ابومحمدخجندی** از واضعین علم مثلثاتند. ابوالوفا یکی از بزرگترین مخترعین هندسه است، و شکل ظلّی[۷] که در مثلثات کروی قدما عمل می‌شود بدو منسوب است، در تعدیلات اهلّهٔ قمر[۸] زحماتی کشیده. خواجه نصیرالدین طوسی و امیرابونصر عراق در اغلب از مصنفات خود ابوالوفا را استاد دانسته و به بزرگی ذکرش را آورده‌اند.

(بعضی از) مصنفات (او):

۱ - شرح بر کتاب جبر و مقابلهٔ خوارزمی

۲ - تفسیر مجسطی ذینوفنطس یونانی اسکندرانی (جبر و مقابله)

۳ - کتاب تفسیر کتاب ابرخس (هیپارک) در جبر و مقاله

۴ - کتاب المدخل الی‌الارثما طیقی و غیره.

***

عنوان بعضی از مقالات و مطالب مهم و جالب مجله عبارت است از:

۱ - **«نظریهٔ نسبی بودن خصوصی و عمومی»** به قلم آلبرت اینشتین

۲ - **چند مسأله از حساب عالی**

۳ - **ارزش ناپلئون**

۴ - **مسائل راجع به اسب شطرنج،** با این قطعهٔ منسوب به سعدی:

زمانی درس علم و بحث تنزیل[۹]
که باشد نفس انسان را کمالی
زمانی شعر و شطرنج و حکایات
که خاطر را بود دفع ملالی

۵ - معمّا، با این قطعه:

مـن از اعـداد دانـم یک عـدد را
کز او یک کم نمودم می‌نشد کم
ورآن یک برسرش هم می‌فزودم
از آن، افزوده بر خود می‌نشد هم
از آن دشـوارتـر چـیزی نباشد
برون آور به عـلم جـبر، مـحکم

۶ - پیردوفرما، که در آن از قول پاسکال آمده که: «من در مسائل حساب فرما را اول شخص دنیا می‌دانم»، و در مورد آخرین قضیهٔ فرما آورده شده که:

پس از مرگ فرما در کتابخانهٔ او نیز چند کتاب که شامل حواشی و یادداشتهای فرما بود یافتند. در حاشیهٔ یکی از این کتب، مطلب ذیـل یادداشت شده بود:

«ممکن نیست مکعب کاملی را به مجموع دو مکعب کامل تجزیه کرد و یا قوهٔ چهارم کاملی را به مجموع دو قوهٔ چهارم کامل تجزیه نمود و هکذا... من این قضیه را به وجه تعجب آوری ثابت کرده‌ام، اثبات آن در این حاشیه نمی‌گنجد[۱۰]».

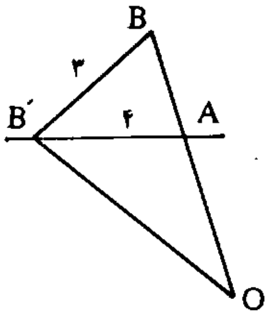
لازم است متذکر شویم که قبل از اینکه فرما این قـضیه را طـرح کند مسلمین آن را می‌دانستند و آن را جزو معضلات علوم ریـاضی می‌شمردند چنانکه **شیخ بهاءالدین عاملی** علیه‌الرحـمه (۱۰۳۰ هـ) در کتاب خلاصة الحساب خود می‌فرماید:

قَد وقَع لِلحُکَماءِ الرّاسِخین فی هذَا الفّن مسائِلُ صَرفوا فـی حَـلّها اَفکارهم وَ وجَّهوا اِلیٰ اِسْتِخْراجِها انظارهم و تَوَصَّلوا اِلیٰ کشفِ نِقابِها بکلِّ حیلَةٍ و تَوَسّلوا اِلیٰ رفعِ حجابِها بکلِّ وَسیلَةٍ فَمـا اسْتَطـاعوا اِلَـیها سَبیلاً و لا وجَدوا عَلَیها مُرشِداً و دَلیلاً فَهِیَ باقیَةٌ علیٰ عَدَمِ الاِنْحلالِ مِنْ قَدیم الزَّمانِ اِلیٰ هذَا الآنِ... و اَنا اوردتُ فی هٰذِهِ الرِّسالَةِ سَبْعَة مِنها عَلی سبیلِ الاُ نموذِجِ اِقْتِداءً بِمنارِهِمْ وَ اِقْتِفاءً لِاٰثـارِهم و هِـیَ هـٰذِه: الاولی... الرّابعَة عَدَد مُکَعّب قُسِّمُ بِقسمَین مُکعَّبین[۱۱].

۷ - **دو مسأله از مفتاح الحساب**[۱۲]

— چند نفر داخل باغی شدند، اولی یک انار چید، دومی دو انـار، سومی سه انار، و هکذا. بعد کلّیهٔ انارها را بالسّویه[۱۳] بین خود تـقسیم کردند و به هر یک ۶ انار رسید. مطلوب است عدهٔ آنان.

تیری مایلاً درآب قـرار دارد و سه ذرعش از آب خـارج است ($AB=3$). در اثر وزش باد رأس تیر بر سطح آب فرود آمد (وضع OB'). بنابر آنکه فاصلهٔ دو وضع رأس تیر ۳ ذرع ($BB'=3$) و فاصلهٔ دو مطلع آن از آب ۴ ذرع ($AB'=4$) باشد، طول آن را معلوم کنید.



۸ - **نظریهٔ اضافیت خصوصی و عمومی**، که ادامهٔ نظریهٔ نسبی بودن خصوصی و عمومی است که در آن پس از این که مذکور افتاده که به کلی از جنبهٔ ادبی عاری است از قول اینشتین در مقدمهٔ آن چنین آمده:

«برای وضوح غالباً تکرار مطلب را لازم دیدم بدون اینکه تـوجه به جنبهٔ ادبی داشته باشم، در این باب نصیحت عالم نظری معروف[۱۴] را پیروی کردم که می‌گوید: آن به که اندیشه‌های ظرافت و لطافت را به خیاطها و کفشدوزها واگذاریم.»

۹ - **تنوری آنسامبل**[۱۵]، که در آن غیر از مطالب جـالب مـعمول چند مطلب جالبتر زیر را می‌خوانیم:

امروز نیز، بسیاری از علمای ریاضی این نظریه را مـورد مطـالعه قرار داده و نه فقط از این جهت که در بحث خواص توابع اهمیت و موارد استعمال عدیده دارد در آن کار می‌کنند، بلکه از این لحاظ که خود فی حد ذاته یک مـبحث و نـظریهٔ عـلمی است در آن مطـالعه

می‌نمایند. منتهی چون اصول اولیهٔ آن در سر حد ریاضیات و فلسفه قرار دارند آرای علما دربارهٔ آنها متفاوت است.

تعریفات. در اصطلاح منطق چیزی را که تعریف می‌کنیم مُعَرَّف (به فتح راء) و آنچه را مُعَرَّف به وسیلهٔ آن تعریف می‌شود مُعَرِّف (به کسر راء) خوانند. بدیهی است که مُعَرِّف باید از مُعَرَّف واضح‌تر باشد والا تعریف فایده‌ای نخواهد داشت. منطقیون این مطلب را به این شکل بیان می‌کنند که می‌گویند در تعریف باید معرِّف اجلیٰ از مُعَرَّف باشد.

از این جهت است که بسیاری از مبادی علوم را نمی‌توان تعریف کرد. مثلاً در علم ماوراءالطبیعه که از وجود بحث می‌کنند آن را تعریف نمی‌نمایند زیرا مقصود از تعریف وجود آن است که به کسی که مفهوم وجود را نمی‌داند به وسیلهٔ مفاهیم ساده‌تری معنی وجود را بفهمانیم و این ممکن نمی‌باشد، زیرا مفهومی از مفهوم وجود واضح‌تر نیست. هم چنین عدد و زمان و فضا و امثال آنها را نمی‌توان تعریف کرد.

«آنسامبل» نیز که در لغت به معنی مجموعه است از این قبیل می‌باشد. مفاهیم: مجموعهٔ اعداد صحیح واقعه بین ۱۰ و ۱۰۰، مجموعهٔ اعداد صحیح، مجموعهٔ مثلثهای متساوی الأضلاع، مجموعهٔ قوسهایی که جیب آنها اصم است و امثال اینها به قدری واضح است که ذکر تعریفی برای آنها ممکن نیست.

مجله گرچه گاه‌گاه غلطهای معدود خود را تصحیح می‌کند، از غلطهای البته سهوی خالی نیست و مثلاً در مسألهٔ ۱۰۳ از شمارهٔ ۵ سال اولش در حل مسألهٔ مربوط به اثبات

$$\mathrm{tg}\, k\alpha + \mathrm{tg}\, k\beta + \mathrm{tg}\, k\gamma = \mathrm{tg}\, k\alpha\, \mathrm{tg} k\beta\, \mathrm{tg} k\gamma$$

هم از فرض $\alpha + \beta + \gamma = \pi$، هم از شرط $k \in Z$ استفاده کرده است در حالی که هیچ‌یک از این دو در صورت مسأله نیست.

***

مجلهٔ ریاضیات در نوع خود بی‌نظیر است و شخصیت دقیق و جامع دکتر مصاحب - رحمةالله علیه - در سراسر شماره‌های آن آشکار است.

در اینجا از خوانندگان محترم به خصوص اعضای خانوادهٔ دکتر مصاحب و همکاران و شاگردان آن استاد کامل تقاضا می‌کنیم که علاوه بر شرح حال ایشان خاطرات خود را از این مرد عالم و کوشا در اختیار نویسندهٔ این مقالات قرار دهند تا در نوشتن تاریخ ریاضیات و ریاضیدانهای معاصر ایران از آن استفاده شود. **وَاللّٰهُ أَعْلَمُ بِالصَّواب**

++++

یادداشتها

۱ - مساوی و معادل به یک مفهوم به کار رفته‌اند که ظاهراً چنین نیست.

۲ - در (I - قسمت ۴) فرمول تغییر مبنای لگاریتم یعنی $\mathrm{Log}_b N = \mathrm{Log}_b a . \mathrm{Log}_a N$ آمده است. «قسمت» را به جای علامت دست نوشته‌ای که ندانستم چیست، به حدس آورده‌ام.

۳ - قسمت داخل پرانتز در متن اصلی در انتهای صفحه بوده و به تیغ صحاف از صفحه کاغذ معدوم شده است و ما آن را به قیاس آورده‌ایم.

۴ - یعنی دستور تغییر مبنا در لگاریتم، به ۲ رجوع کنید.

۵ - از این شخص اطلاعی نداریم، اگر خوانندگان دارند ما را هم بی‌نصیب نگذارند.

۶ - راجع به رصد کواکب سبعه

۷ و ۸ - این دو را ندانستیم که چیستند. از خوانندگان آگاه تقاضامندیم که توضیح مختصری در این دوباب بیاورند.

۹ - تفسیر قرآن.

۱۰- صورت امروزی این قضیه چنین است: هرسه جواب x و y و z معادلهٔ $x^n+y^n=z^n$، با $n \geq 3$ و $n \in N$، نمی‌توانند صحیح باشند.

۱۱- ترجمهٔ آن چنین است:

همانا که برای حکیمان متخصص این فن (یعنی فن حساب) مسائلی پیش آمد که اندیشه‌شان را صرف حل آنها کردند و نظرشان را معطوف به استخراج آنها آوردند و برای برداشتن روپوشان به هر حیله‌ای دست زدند و در رفع حجابشان به هر وسیله‌ای متوسل شدند، اما راهی به سوی آنها نتوانستند و دلیلی به جانب آنها ندانستند، و این مسائل از ازمنهٔ قدیم تا به امروز همچنان حل ناشده باقی است... و من با رهروی به انوارشان و پیروی از آثارشان هفت مسأله از مسائل مزبور را ذکر می‌کنم و آن مسائل عبارتند از: مسألهٔ اول ... مسألهٔ چهارم: عدد مکعبی که به دو عدد مکعب تقسیم شود.

۱۲ - اثر غیاث الدین جمشید کاشانی

۱۳ - به طور مساوی

۱۴- این عالم معروف از نظر اینشتین را نشناختیم.

۱۵- Ensemble فرانسوی و به معنی مجموعه.

اتحادهای مهم جبری

احمد قندهاری

(۱) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

(۲) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

(۳) $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

(۴) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$

(۵) $(a+b)^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$

یا

$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

(۶) $(a-b)^3=a^3-b^3-3a^2b+3ab^2$

یا

$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

(۷) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

(۸) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

(۹) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

اتحادهای کمکی:

۱ $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

۲ $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

۳ $(a+b)^2-4ab=(a-b)^2$

۴ $(a-b)^2+4ab=(a+b)^2$

۵ $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

۶ $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

۷ $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

نتیجه اتحاد (۵)

۸ $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

نتیجه اتحاد (۶)

۹ $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

۱۰ $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

۱۱ اگر $\begin{cases} a+b+c=0 \\ \text{یا} \\ a=b=c \end{cases} \Longleftrightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

توجه: شماره‌های ۱۰ و ۱۱ به اتحاد اولر- لاگرانژ معروف است.

مثال ۱: $\left(2x^2+\frac{3}{4}y^3\right)^2=?$

$$\left(2x^2+\frac{3}{4}y^3\right)^2=(2x^2)^2+\left(\frac{3}{4}y^3\right)^2$$
$$+2(2x^2)\left(\frac{3}{4}y^3\right)$$
$$\left(2x^2+\frac{3}{4}y^3\right)^2=4x^4+\frac{9}{16}y^6+3x^2y^3$$

مثال ۲ : ، $a,b>0$

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=?$$
$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$$

بنا به اتحاد سوم

مثال ۳ : $a.b>0$

$$(\sqrt[4]{ab}-1)(\sqrt[4]{ab}+1)(\sqrt{ab}+1)=?$$
$$(\sqrt[4]{ab}-1)(\sqrt[4]{ab}+1)=\sqrt{ab}-1 \Longrightarrow$$
$$(\sqrt[4]{ab}-1)(\sqrt[4]{ab}+1)(\sqrt{ab}+1)=$$
$$(\sqrt{ab}-1)(\sqrt{ab}+1)=ab-1$$

مثال ۴ : اگر

$A=ab+ac+bc$ و $a+b+c=0$

آنگاه A چگونه عددیست؟

داریم:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$$

از طرفی می‌دانیم هر جمله که توانش زوج باشد مثبت یا صفر است
پس $(a^2+b^2+c^2)$ عددیست مثبت یا صفر

$$\Longrightarrow \underbrace{(a+b+c)^2}_{\text{صفر است}}=\underbrace{a^2+b^2+c^2}_{\text{مثبت یا صفر}}+2A$$

نتیجه می گیریم عدد A باید منفی یا صفر باشد تا تساوی فوق برقرار باشد.

مثال ۵ : اگر

$$x=\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$$

آنگاه (x^3-3x) مساوی چه عددی است؟

$$x=\underbrace{\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}}_{a}+\underbrace{\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}}_{b}$$
$$x=a+b$$

طرفین را به توان ۳ می‌رسانیم

$$x^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$
$$x^3=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}+$$
$$3\sqrt[3]{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}\quad(x)$$
$$x^3=4+3\sqrt[3]{4-3}(x)\Longrightarrow$$
$$x^3=4+3x \Longrightarrow x^3-3x=4$$

مثال ۶ : اگر $x+\frac{1}{x}=3$ مطلوب است محاسبه:

$$x^2+\frac{1}{x^2}\ ,\ x^3+\frac{1}{x^3}\ ,\ x^6+\frac{1}{x^6}\ ,\ x^9+\frac{1}{x^9}$$

حل : طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x+\frac{1}{x}=3$$
$$x^2+\frac{1}{x^2}+2x\cdot\frac{1}{x}=9 \Longrightarrow$$
$$x^2+\frac{1}{x^2}+2=9 \Longrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=7$$

طرفین را به توان ۳ می‌رسانیم $x+\frac{1}{x}=3$

$$x^3+\frac{1}{x^3}+3(x)\left(\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=27$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}+3\times1\times3=27 \Rightarrow$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=18$$

طرفین را به توان ۳ می‌رسانیم

$$x^2+\frac{1}{x^2}=7$$

داریم:

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$

$$x^6+\frac{1}{x^6}+3(x^2)\left(\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=343$$

$$x^6+\frac{1}{x^6}+3(7)=343 \Rightarrow x^6+\frac{1}{x^6}=322$$

طرفین را به توان ۳ می‌رسانیم

$$x^3+\frac{1}{x^3}=18$$

داریم: $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

$$x^9+\frac{1}{x^9}+3(x^3)\left(\frac{1}{x^3}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=5832$$

$$x^9+\frac{1}{x^9}+3(18)=5832 \Rightarrow$$

$$x^9+\frac{1}{x^9}=5778$$

مثال ۷: اگر

$$a^2+b^2+c^2+3=2(a+b+c)$$

آنگاه؟ $a+b+c=?$

حل:

$$a^2+b^2+c^2+1+1+1-2a-2b-2c=0$$

$$(a^2+1-2a)+(b^2+1-2b)+$$

$$(c^2+1-2c)=0$$

$$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=0$$

قبلاً گفته‌شد که اگر جمله‌ای توان زوج داشته باشد مثبت یا صفر است. این تساوی وقتی می‌تواند برقرار باشد که داخل هر پرانتز صفر باشد بنابراین:

$$\begin{aligned} a-1&=0\\ b-1&=0 \Rightarrow a=b=c=1 \Rightarrow\\ c-1&=0 \end{aligned}$$

$$a+b+c=3$$

مثال ۸: حاصل کسر مقابل‌را بیابید.

$$\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$$

با شرط اینکه a و b و c مساوی نباشند.

حل:

$$\text{عبارت مخرج}=a^2+b^2-2ab+b^2+c^2-2bc+c^2+a^2-2ac$$

$$\text{عبارت مخرج}=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc$$

$$\text{عبارت مخرج}=2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

عبارت‌صورت: بنا به اتحادهای کمکی‌شمادهٔ (۱۰) مساویش‌را می‌نویسیم.

$$\text{کسر}=\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)}{2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)}$$

$$= \frac{a+b+c}{۲}$$

مثال ۹: اگر $a+b-c=۱$ ، آنگاه

$$a^۲+b^۲-c^۲=?$$

حل: طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم

$$a+b=c+۱$$

$$a^۲+b^۲+۲ab=c^۲+۱+۲c$$

$$a^۲+b^۲-c^۲=۱+۲c-۲ab$$

$$a^۲+b^۲-c^۲=۲\left(\frac{۱}{۲}+c-ab\right)$$

مثال ۱۰: ثابت کنید:

$$(a-b)^۳+(b-c)^۳+(c-a)^۳=$$

$$۳(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$a-b=x \qquad b-c=y \qquad c-a=z$$

حل:

$$a-b+b-c+c-a=۰$$

$$\Longrightarrow x+y+z=۰ \Longrightarrow$$

$x^۳+y^۳+z^۳=۳xyz$ بنا به اتحاد کمکی شماره (۱۱)

$$\Longrightarrow (a-b)^۳+(b-c)^۳+(c-a)^۳$$

$$=۳(a-b)(b-c)(c-a)$$

تفریح اندیشه ۱

مردی در حال کندن چاهی، در حالی که در آن ایستاده، می‌باشد. بلندی مرد ۵ فوت و ۱۰ اینچ است. زمانی که به سروقت او می‌رویم می‌گوید که: یک چهارم کار را انجام داده و هنگامی که کار را تمام کند فرق سرش سه برابر مقداری که اکنون بالای زمین است زیر زمین خواهد بود. عمق چاه در پایان کار چقدراست؟

جواب در صفحهٔ ۹۶

در باغ تجربه‌ها

مصاحبه با معلمین شما

آقای موسی آذرنوش
معلم موفق و باتجربهٔ ریاضی

اگر خدا یاری کند قصد داریم هر از چندگاهی به‌زیارت برخی از حق‌داران بر فرهنگ میهن اسلامیمان (در زمینه تدریس ریاضی) برویم و از آب جاری و زلال تجربیاتِ زیبایشان جرعه‌هایی برگیریم و به شما عرضه کنیم.
باشد که این مصاحبه‌ها، هم یادی سپاس‌گونه از این عزیزان شود و هم پلی برای انتقال برخی تجربیات گرانبها که در طول سالیان پرزحمت عمر به‌دست آمده‌است.
بعضی از قسمتهای این مصاحبه به‌صورت شفاهی انجام گرفته که از نوار پیاده شده و قسمتهایی را نیز ایشان کتباً جواب داده‌اند که ما همه را تلفیق و یکدست کرده‌ایم. البته سعی ما در تلخیص این مصاحبه بوده اما هیچ نکته لازمی از قلم نیفتاده‌است. به‌هرحال امیدواریم مورد استفادهٔ معلمین و دانش‌آموزان عزیز واقع شود.

■ **لطفاً ضمن معرفی، بفرمایید کودکی و نوجوانی و دوران جوانی خود را چگونه گذراندید؟**

بنده موسی آذرنوش، فرزند عیسی آذرنوش هستم. در سال ۱۲۹۵ هجری شمسی در شهرستان رشت متولد شدم، در سال ۱۳۱۵ ازدواج کردم، همسرم متأسفانه در سال ۱۳۵۰ در اثر ابتلاء به سرطان ریه درگذشت و در سال ۱۳۵۲ مجدداً ازدواج کردم و فرزند ندارم.
نزدیک منزل ما در رشت مکتب‌خانه‌ای در گوشه‌ای از مسجد محلّه دایر بود. پدرم مرا در سن چهارسالگی به آنجا برد و به مکتب‌دار سپرد و هنگام خداحافظی به او گفت: «آقامیرزا. فقط پوست و استخوانش مال ما» کنایه از این‌که اگر از دستورات شما کوتاهی کرد از هیچ‌گونه تنبیهی دریغ نورزید. یکسال در مکتب‌خانه بودم و علاوه بر قرآن چیزهایی آموختم و از ترس چوب و فلک سعی می‌کردم دستورات درسی و آموزشی را طبق دستور و به‌نحواحسن انجام دهم. سال بعد در جوار مکتب، دبستان ملی دایر شد که پدرم مرا به دبستان سپرد. رئیس دبستان که به آقامیرزا معروف بود وِردزبانش این بود: «شما را بستنی هستم» منظور این بود که اگر درس نخوانید و یا بازیگوشی پیشه کنید شما را به فلک می‌بندم و فلک هم هرروز دایر بود، گرچه نه‌تنها من فلک نشدم (از بیم تنبیه در کار خود جدی بودم)، بلکه یک کتاب اخلاق کوچک جیبی از آن دوران برایم باقی مانده که در گوشه صفحه‌اول آن نوشته‌شده: «چون موسیٰ خان شاگرد اول شده این کتاب به‌عنوان جایزه به‌ایشان اهدا می‌گردد.»
درزمان نوجوانی و جوانی ما این برنامه‌های گوناگون و سرگرمیهای مختلف برای نوجوانان و جوانان وجود نداشت. در محیط خانه هم مرد سالاری برقرار بود و کسی در منزل از اوامر پدر سرپیچی نمی‌کرد لذا از عصر پنجشنبه تا شب شنبه سرگرم آماده‌ساختن و آموختن مطالب درسی بودم تا آنچه از برنامه هفتگی هفته آینده را می‌توانستم کم‌کم مطالعه می‌کردم، تکالیف را انجام می‌دادم و از انجام آنها نیز لذت می‌بردم. و چون سرگرمی دیگری

وجودنداشت ارضاء می‌شدم.

در اوایل سال سوم متوسطه مرحوم پدرم برای معالجه عازم پاریس بود (البته از راه خشکی، از طریق بندرانزلی و بادکوبه، زیرا هواپیما وجودنداشت) شبی ازمن که فرزند ارشد خانواده بودم سؤال کردند از پاریس چه‌می‌خواهی برایت بیاورم؟ گفتم اگر امکان داشته‌باشد چند جلد حل‌المسائل ریاضی و فیزیک F.G.M (که در آن زمان معروف و گران قیمت بود)، پدرم باتعجب اظهار کردند: کتاب؟!! البته ایشان در مراجعت این کتابها را که قیمتشان سنگین هم بود آوردند. تا آخر سال ششم علمی این چند جلد کتاب فوق‌العاده به من کمک کرد و باعث شد که بتوانم جزو شاگردان ممتاز کلاس شوم. البته شرح استفاده از حل‌المسائل برای دانش‌آموزان را جداگانه به‌عرض می‌رسانم که با چه شرایطی مفید است و در غیر این‌صورت علاوه براینکه مفید نیست ضرر نیز دارد.

خاطرهٔ دیگر این‌که تازه دوماه بود که سال اول متوسطه آن‌زمان شروع شده بود و من درمدت این دو ماه به آموزش زبان فرانسه که جزو برنامهٔ تحصیلی ما بود مشغول بودم. روزی به‌اتفاق پدرم به داروخانه‌ای مراجعه کردیم که پدرم الکل می‌خواست بخرد، داروفروش در شیشه‌ای کوچک الکل پرکرد و روی برچسب شیشه نوشت «Alcoole» و شیشه را به‌دست من داد، در بین راه به پدرم گفتم داروفروش این کلمهٔ فرانسه را غلط نوشته‌است(چه یک O زیادی است). بعد از یک هفته مجدداً با پدرم به همان داروخانه مراجعه کردیم، پدرم به داروساز گفت به ایراد پسرم توجه کنید که چه می‌گوید، من ایراد خود را بیان کردم، داروفروش گفت حق با پسر شمااست و من غلط نوشتم، بعدها که به کلاس ششم متوسطه آمدم و کتاب شیمی را خواندیم دیدم الکل را با دوتا"O" نوشته، آن‌وقت به حقارت خود و بزرگواری داروفروش که نخواست غرورم را نزد پدرم بشکند پی بردم و به او آفرین گفتم.

سه سال اوّل متوسطه را در دبیرستان شاهپور رشت گذراندم اغلب دبیران ما دیپلمه و یا حتیٰ پایین دیپلم بودند که از تهران می‌آمدند. حتیٰ گاهی در کلاس‌ریاضی و یا فیزیک بین دانش‌آموزان و دبیر جروبحثهایی درمی‌گرفت که با سکوت دانش‌آموز تمام می‌شد. کلاسهای چهارم و پنجم متوسطه (علمی) را در دبیرستان دارالفنون تهران گذراندم. اغلب دبیران فرانسوی و کتب ما نیز به‌زبان فرانسه بود، تمام وقت ما صرف درک مطالب علمی به زبان فرانسه بود و به‌دلیل عدم تسلّط به‌زبان فرانسه هیچ دانش‌آموزی سؤالی از دبیر نمی‌کرد. از دبیران برجستهٔ ایرانی آن‌زمان، مرحوم فروزانفر دبیر ادبیات ما بود که کلاسش خیلی قابل استفاده بود. متأسفانه سابقاً به درس ادبیات فارسی اهمیت چندانی نمی‌دادند. از خاطرات دبیرستانی من این است که آقای مرتضیٰ قلی اسفندیاری که لیسانسیه فیزیک از فرانسه و تازه به استخدام وزارت فرهنگ درآمده بود و دبیر رسم‌فنی ما بود، من درتمام ساعات تفریح برای پرسش معنی لغات فرانسه مزاحم ایشان می‌شدم. و گاهی که احساس می‌کردم ایشان خسته‌شده‌اندو جوابهای کوتاه و سرسری می‌دهند، به‌روی خودم نمی‌آوردم و از ایشان باز سؤال می‌کردم.

خاطره‌ای دیگر: به‌محض خاتمه ساعات درس قبل از ظهر بلافاصله سریعاً به‌طرف دبیرستان شرف تهران که سابقاً در خیابان سعدی جنوبی بود می‌رفتم تا از شاگردانی که خارج می‌شدند و از شاگردان چهارم و پنجم چنانچه درس علمی داشتند و دبیر مربوطه مسأله‌ای برای تکلیف داده‌بود خواهش می‌کردم و صورت مسئله را ضمن راه رفتن، یادداشت می‌کردم و شب خود برای حل آنها تلاش می‌کردم تا موقعیت تحصیلی خود را با دبیرستان و شاگردان دیگر مقایسه کنم.

سال ششم دبیرستان، چون در رشت همان سال (۱۳۱۰ - ۱۳۱۱ هـ. ش) کلاس ششم علمی دایر شده‌بود به رشت آمدم و در دبیرستان شاهپور رشت ثبت نام کردم. چون تمام دبیران ما دراین کلاس دیپلمه بودند من از کتابهای فرانسهٔ کلاس ششم که از تهران آورده بودم و از حل المسائلی که پدرم سوغات آورده بودند استفاده می کردم، و احتیاجات درسی خود را رفع و تأمین می‌نمودم.

در امتحانات نهایی آخر سال که سؤالات از تهران می‌آمد و در ادارهٔ فرهنگ از ما دانش‌آموزان که جمعاً ۱۲ نفر بودیم امتحان به‌عمل آمد، پنج نفر قبول شدیم که من شاگرد اول شدم. مدیرکل فرهنگ گیلان من را تشویق کرد و در جشن پایان تحصیلی، فوق‌العاده از من تجلیل کرد و دو جلد فرهنگ به‌عنوان جایزه به‌من داد و در روزنامه اطلاعات نیز اسمم را نوشتند.

خاطرات دانشگاه: اواخر تابستان ۱۳۱۱ برای ادامهٔ تحصیلات عالیه به‌تهران آمدم و قصد داشتم در دانشکدهٔ فنی به‌تحصیل ادامه دهم. درهمان سال، دانشکده فنی به‌دلیل نداشتن داوطلب کافی تعطیل اعلام شد و بنده به‌ناچار در دانشکده علوم در رشتهٔ ریاضیات دانشسرای عالی ثبت نام کردم.

در شروع سال دوم، روال دانشکده چنین بود که بعدازظهرهای روز دوشنبه تمام دانشکده در آمفی‌تئاتر جمع می‌شدیم و آقای دکترصدیق (صدیق اعلم) رئیس دانشکده سخنرانی می‌کرد.

در آن‌روز او بایک پوشه وارد سالن شد و بعد از تشریفات، پشت تریبون قرارگرفت و چنین گفت: شاگرد اول سال اول رشته ریاضیات آقای موسیٰ آذرنوش.

هیچ‌وقت تصورش را نمی‌کردم که میان یکصدوبیست‌وچندنفر شاگرد اول شده‌باشم.

در امتحانات سال سوم (سال آخر لیسانس) نیز شاگرد اول شدم و یک دوره شاهنامه فردوسی از طرف دانشکده علوم و یک مدال درجه دوم علمی از طرف وزارت معارف جایزه گرفتم.

■ کدام‌یک از معلمین بیشتر روی شما تأثیر گذاشته‌اند و چرا؟

همانطور که قبلاً عرض کردم معلمین متوسطه ما غیر از فرانسویها که لیسانسیه بودند، همه دیپلمه بودند و کاملاً از عهده تدریس برنمی‌آمدند، به‌زحمت می‌توانستند مطالب کتاب را تفهیم کنند، حتی گاهی به‌کمک دانش‌آموزان نیاز داشتند و درمورد معلمین فرانسوی به‌دلیل اشکال زبان و یادداشت مطالب گفته‌شده که با سرعت انجام می‌گرفت فرصت تحت تأثیر قرارگرفتن برای ما نبود.

■ درمورد سابقه تدریستان بفرمایید.

مدت ۴۴ سال متوالی از مهرماه ۱۳۱۵ ـ بعد از اخذ لیسانس ریاضیات و علوم تربیتی و انجام خدمت وظیفه ـ تا خرداد ۱۳۵۹ به‌تدریس اشتغال داشتم و در سال ۱۳۴۳ به‌تقاضای خود با سابقه ۲۹ سال و یک ماه تدریس دولتی بازنشسته شدم و سپس در مدارس ملّی و مدارس گروه فرهنگی آذر که خود یکی از مؤسسین آن بودم به‌تدریس اشتغال داشتم.

اولین ابلاغم از طرف رئیس ستاد ارتش آن‌زمان (سرلشگر ضرغامی) بود و در دبیرستان نظام کرمانشاه به‌تدریس پرداختم که به‌زور دژبان فرستاده شدم. چون میل نداشتم در کرمانشاه باشم. وقتی‌که برای گرفتن خرج سفر به افسر مربوطه مراجعه کردم و متوجه شد که برای شغل دبیری می‌روم با تعجب نگاهی به‌من کرد و گفت: «پسر نرو می‌خورنت.» گفتم من نمی‌خواهم بروم، دژبان پشت دَر است و به‌اجبار می‌روم. علت ایراد افسر مربوطه این بود که خیلی جوان بودم(درسن ۲۰ یا ۲۱ سالگی به دبیری می‌رفتم) گرچه بعد از اقدامات زیادی برای انصراف از رفتن به‌کرمانشاه، قرارشد برای یکسال در آنجا خدمت کنم، ولی برای بازگشت هرسال با مخالفت رئیس دبیرستان نظام و ستاد ارتش مواجه‌می‌شدم، بالنتیجه مدت ۵ سال در دبیرستان نظام کرمانشاه خدمت کردم. سپس مدت ۲ سال در دبیرستان فردوسی بندرانزلی و مدت ۲ سال در دبیرستانهای رشت به‌تدریس اشتغال داشتم و در سال ۱۳۲۴ به‌تقاضای خود به‌تهران منتقل شدم و تا سال ۱۳۵۹ در تهران مشغول تدریس بودم.

اولین محل تدریسم در دبیرستان البرز تهران بود که مدت ۱۶ سال دراین دبیرستان بودم. در خلال همین ۱۶ سال ساعات موظفم را در دبیرستان دارالفنون و بقیه را به‌صورت حق‌التدریس در دبیرستان البرز مشغول بودم.

در دانشگاه تدریس نکردم. امایک‌روز صبح که با ماشین به‌دبیرستان دارالفنون می‌رفتم از رادیوی ماشینی که سوار بودم شنیدم که شورای دانشگاه صلاحیت تدریس من و چند نفر از همکاران در دانشگاه تهران را تصویب کرده، ولی چون شخصاً مایل به‌تدریس در دانشگاه نبودم نپذیرفتم.

■ کدام‌یک از دبیرستانها محل مناسبتری برای تدریس بوده‌اند و چرا؟

اگر بگویم در اداره کلاس و تدریس هیچگونه زحمتی نداشتم شاید مورد قبول نباشد، نمی‌دانم از شانس خودم بوده یا در رفتار و گفتار من رازی بود، هیچ‌وقت در هیچ کلاسی ناراضی و ناراحت نبودم، شاید به‌دلیل رعایت انضباط و مقررات شدید کلاسها و

دبیرستانها بوده‌باشد. در تمام مدت ۴۴ سال تدریس به‌یاد ندارم یك‌دقیقه (باصراحت می‌گویم) یك‌دقیقه تأخیر ورود به‌کلاس داشته‌باشم و هیچ‌وقت شاگردان را در زنگ تفریح به‌دلیل کمبود وقت در کلاس نگه نمی‌داشتم، همواره مطالب را طوری شروع می‌کردم که در اواخر وقت کلاس مطالب درسی نیز پایان می‌یافت و این موضوع مورد تأیید همکاران من نیز بود. به‌محض اینکه زنگ کلاس نواخته می‌شد اولین نفری بودم که به‌کلاس می‌رفتم. همیشه در اولین جلسه شروع سال تحصیلی وضع توقع و طرزکار خود را با دانش‌آموزان درمیان می‌گذاشتم و انتظارات خود را به آنها می‌گفتم و متذکر می‌شدم که وقت کلاس به دانش‌آموزان تعلق دارد، هروقت مطلبی که بیان کردم درست و خوب متوجه نشدید سؤال کنید، آن‌قدر سؤال کنید تا کاملاً مطلب را درك کنید. از اینکه چندبار سؤال کنید شرمنده نباشید، از نظر سؤال کردن در کلاس آزادی عمل دارید.

در شروع تدریس ذهن شاگردانم را با موضوع درس با مثالهای ملموس روزمره تطبیق می‌دادم طوری آنها را آماده‌می‌کردم که مطالب درسی برایشان روشن باشد. با این همه پذیرفتن این روش از طرف دانش‌آموزان شدت و ضعف داشت.

■ از شاگردان بازیگوش خود چه خاطره‌ای دارید و بفرمایید باآنها چگونه برخورد می‌کردید؟

همان‌طور که قبلاً عرض‌کردم به شاگردان بازیگوش کمتر برخورده‌ام، چون بیشتر ساعات تدریسم در کلاس ششم بود. دانش‌آموزان سال ششم دبیرستان اگر از نظر تدریس ارضاء می‌شدند دیگر بازیگوشی دربین نبود.

با این وجود ممکن بود گاهی بابعضی‌ها برخوردی کنم که در این‌صورت سعی می‌کردم نکته و یا نکات مثبتی در آنها پیداکنم و در مورد آن کار آنها را مورد تشویق قرار دهم، به این ترتیب آنها را در رودربایستی قرار می‌دادم.

■ از شاگردان باهوش خود چه خاطراتی دارید؟

همواره شاگردان باهوش مورد تشویق و احترامم بودند، معمولاً شاگردان باهوش منضبط نیز هستند. اگر به سؤالی برمی‌خوردم که جوابش را نمی‌دانستم، متوسل به حیله نمی‌شدم، صراحتاً می‌گفتم: نمی‌دانم بعد از مطالعه جوابش را خواهم گفت.

■ آیا اکنون نیز بعضی از شاگردان خود را می‌شناسید یا می‌بینید؟

روزی برای معاینه و معالجه نزد آقای دکتر سید محمد سنادیزاده، پزشك و جرّاح مجاری کلیه مراجعه کردم، درحالی‌که با موهای سفید و حالتی متین مرا پذیرفت مرا شناخت و اظهار داشت که در دبیرستان دارالفنون شاگرد من بوده‌است. مراتب علمی ایشان تقریباً عالمگیر شده به‌طوری‌که ایشان در آمریکا به حذاقت در کارخود معروفند. دیگر از شاگردان آقای پروفسور اکبرزاده محقق علوم ریاضی است که در پاریس مشغولند، هروقت به ایران می‌آیند احوالی از بنده می‌پرسند و لطف خاصی نسبت به بنده دارند. آقای دکتر نوّاب متخصص بیهوشی، آقای دکتر پزشك جراح و متخصص چشم، اگر بخواهم نام ببرم مسلماً در مدت ۴۴ سال تدریس با آن ساعات فشرده به تعداد زیادی از شخصیّت‌های علمی برخواهم خورد، آقای دکتر ایرج صادقیان متخصص امراض قلبی که در آمریکا معروفند.

از اشخاص معروف دیگر شهید دکتر چمران و شهید رجایی که اولی در دارالفنون و دومی در آذر شاگرد من بودند. آقای مهندس فروزش مهندس راه‌و ساختمان که فعلاً در آمریکا هستند و ...

■ وضع تدریس ریاضیات در قدیم چگونه بوده آیاخودتان آن را می‌پسندیده‌اید؟

مطابق برنامهٔ تدریس دروس به‌زبان فرانسه در همان موقع (قدیم) خوب بود، درمورد اینکه آنرا می‌پسندیده‌ایم یا خیر؟

به‌ذکر خاطره‌ای می‌پردازم. سالی از طرف یونسکو به‌اتفاق پنج یا شش نفر از همکاران برای مدت ۲۰ روز در ایام فروردین به پاریس دعوت شدیم. در پاریس راهنمایی فرانسوی داشتیم، که من از ایشان خواهش کردم که خیلی میل دارم وضع تدریس کلاسهای چهارم وپنجم و ششم ریاضی یکی از مدارس معروف پاریس را از نزدیك ببینم و با ایران مقایسه کنم، ایشان پذیرفتند و مرا به‌مدرسه متوسطهٔ

وُلْتِر معرفی کردند و من یک روز تمام وقت با معرفی رئیس دبیرستان ولتـر بـه کلاسهـای چهـارم و پـنجم و ششـم و کلاسهـای کـنکور(Pereparatoiz) رفـتم و نـاظر عـمل یک سـاعت دبـیر و دانش‌آموز بودم. برنامه کلاسهای متوسطه آنها عیناً مثل کلاسهای ما بود البته با تفاوت بسیار در محتوا؛ هر دانش‌آموزی کـه وارد کـلاس می‌شد تکلیف خود را روی ورقه‌ای تمیز و حاشیه‌دار- برای نـظرات دبیر- روی میز دبیر می‌گذاشت. سپس درجای خود می‌نشست. و دبیر در تمام ساعات روز در همان دبیرستان وقت صـرف مـی‌کرد و در ساعات غیردرسی تکالیف شاگردان را مورد مطالعه قرار می‌داد و در حواشی دفترشان نـظرش را مـی‌نوشت و نـمره مـی‌داد. بـعدازایـنکه دانش‌آموز دیپلمه شد،یک‌سال کلاس کنکور را درهمان دبیرستان زیر نظر دبیران طی می‌کرد و آخر سال اگر در امتحانی‌که دبیرستـان از شاگردان کنکوری خـود بـه‌عمل مـی‌آورد قـبول مـی‌شد، دانشگـاه مربوطه آن دانش‌آموز را می‌پذیرفت، چون به کادر علمی دبیرستـان اعتماد داشت و نمرهٔ آنها مورد تأئید مقامات دانشگاهی بود. بـه‌ایـن ترتیب هم دبیرستان و هم دانش‌آموز و هم وزارت فرهنگ راحت و با آسایش کارشان رامی‌گذراندند.

البته درحال حـاضر از وضـع تـحصیلی فـرانسـه اطـلاع نـدارم، نمی‌دانم باز همین روال ادامه دارد یاخیر. در ایران یک دبیر روزانه به چند دبیرستان و در چند کلاس، دو یا سه و یا کـمتر، سـر مـی‌کشد، تدریس می‌کند و بلافاصله وقت او در جای دیگر و در دبیرستان دیگر و در کلاس دیگر پرمی‌شود. دبیر فرصت بررسی اوضاع تـحصیلی، هوشی و اجتماعی شاگردان خود را ندارد و فقط بـه مـواد درسـی و تعداد قبولی شاگردان خود توجه دارد، حتیٰ تکـالیف شـاگـردان را نمی‌تواند مطالعه کند. حتیٰ دبیران با قیافه شاگردان خود آشنا نیستند، فقط چند نفرشان را به‌دلایلی می‌شناسند.

■ بفرمایید وضع تألیف کتابهای ریاضی قدیم چگونه بوده‌است؟

تصور می‌کنم منظورتان وضـع تألیـف کـتب ریـاضی درسـی و کلاسیک باشد. به‌اختصار جواب این قسمت را عرض می‌کنم. باعرض معذرت از همکاران مؤلف کتب درسی، باید بگـویم وضـع تألیـف کتب کلاسیک به‌صورت رقابت تجاری درآمـده بـود، هـردسته از مؤلفین با «من بمیرم و تو بمیری» و دوست و رفیق بازی سعی داشتند به‌وسیله چند نفر از ایادی خود تعداد فروش کتب تألیفی خود را بـه شاگردان تحمیل نمایند و سطح فروش کتابهای خود را بالا ببرند و در نتیجه حق‌التألیف بیشتری نصیب خود نمایند. وقـتی هـم کـه وزارت فرهنگ خواست جلوی این کار رابگیرد هیئتی را برای انتخاب بهترین کتاب درسی موجود مأمور نمود تا آنها را برای انحصاری کردن در سطح کشورتوصیه نمایند. متأسفانه این عده سعی کردند هر دسـته از مؤلفین را راضی نگهدارند، گاهی بـهترین کتـاب مـورد قـبول قـرار نمی‌گرفت و گاهی برعکس.

■ نام بعضی از مدرسین و مؤلفین مورد توجه خود را با ذکر دلیل توجه به آنها بیاورید؟

از مؤلفین، آقای دکتر محمود بهزاد که ترجمه‌های مفید ایشـان و تدریس قابل استفاده‌شان زبان‌زد شاگردان ایشان بوده و هست.

آقای احمد بیرشک که ایشان نیز با پشتکار و جدّیت خود تحسین

همگان را برانگیخته‌اند. نه تنها در قسمت ریاضیات بلکه در قسمت دایرةالمعارف نیز فعالیت دارند.

به‌دوست و همکار قدیم خود آقای پرویز شهریاری اعتقاد دارم، چه ایشان در تمام موارد و باتمام مشکلات خود را از ترجمه و تألیف برکنار نداشته و با پشتکار قابل ملاحظه‌ای به ترجمه و تألیف پرداخته‌اند.

از مدرسین نیز دوست و همکار ارجمند و باارزش خود آقای پیله‌رودی دبیر لیسانسیه نامی فیزیک و آقای کاظم مهین بخت دبیر ارزشمند شیمی که بعد از چند سال بازنشستگی هنوز فعالیت تدریس را رها نکرده‌اند، مورد علاقهٔ من هستند. هرچند خود را کوچکتر از آن می‌دانم که در مورد این عزیزان اظهار نظر و عقیده نمایم.

■ **آیا خودتان در زمینهٔ ریاضی تألیف یا ترجمه‌ای دارید؟**

بله، تعداد ۳۲ جلد کتاب ریاضیات کلاسیک به‌کمک بعضی از دوستان و همکاران خود تألیف کردیم که مدت چند سال در مدارس تهران و شهرستانها تدریس می‌شد.

پس از چند سال، وزارت فرهنگ چندین جلد از آنها را انحصاراً برای تدریس در کلاسهای دبیرستانی در سطح کشور انتخاب کرد که تدریس می‌شد.

■ **وضعیت کتابهای درسی کنونی چگونه است؟**

آن‌طور که می‌دانم کتابهای درسی با نظر چند تن از دبیران متخصص و باتجربه تألیف و تدوین گردیده و به‌نظر من خوب است ولی باید دید این مطالب چگونه به دانش‌آموزان آموخته و تفهیم می‌شود. خوشبختانه اخیراً به‌وضع روحی و پرورشی دانش‌آموزان خوب رسیدگی می‌شود. ای‌کاش به‌وضع آموزش بچه‌ها نیز بهمین طریق رسیدگی شود.

■ **برای اینکه شاگردی در ریاضیات موفق باشد باید چه کار کند؟**

به‌تصور من جواب این سؤال تنها مربوط به ریاضیات نیست، هرکه بخواهد در تحصیل هر علمی چه ریاضیات و چه غیر آن موفق باشد باید در جریان مطالب روز و دیروز باشد، چه مطالب هر علمی مانند زنجیر به‌هم مربوط است. اگر دانه‌ای از آن پاره شود و یا از قلم بیفتد، این زنجیر پاره خواهدشد. شخص باید از مطالب گذشته اطلاع داشته باشد و آن‌را نزد خود نگه دارد تا به مطلب دیگری که خواهد آمد برسد. و برای این پیوستگی، پشتکار لازم و ضروری است. هر چیزی‌که شخص آموخت باید دنبالش را بگیرد و در غیر این‌صورت در مدت کوتاهی از ذهن خارج می‌شود ولی پشتکار در آن باعث حفظ آن می‌گردد. خوشبختانه علوم ریاضی فرمولی است و قالب دارد خیلی زود می‌شود آن‌را یادگرفت به‌شرط آنکه تعقیب آن به‌وسیله تمرینهای زیاد باعث تقویت ذهن و فراگیری آن گردد.

■ **یک کتاب درسی خوب چگونه باید باشد؟**

معمولاً کتب درسی باید مطابق فهم و درک دانش‌آموز و خالی از کلمات و عبارات ثقیل باشد، چه روانی مطالب و تلفیق آن با ذوق و

> ***هر چیزی‌که شخص آموخت باید دنبالش را بگیرد و در غیر این‌صورت در مدت کوتاهی از ذهن خارج می‌شود ولی پشتکار در آن باعث حفظ آن می‌گردد.***

درک دانش‌آموز باعث می‌شود که دانش‌آموز آن‌را زمین نگذارد و از آن خسته نشود.

کتاب درسی باید مانند گفتار دبیر در کلاس ساده و قابل فهم باشد.

■ **آیا وجود کتابهای کمک درسی را لازم می‌دانید و اگر لازم‌اند چه مشخصاتی باید داشته باشد؟**

منظور از کتاب کمک درسی چیست؟ اگر کتابی است که برای مدرسین تدوین شده باشد، شاید کمکی به آنها کند و اگر کتابهایی است برای دانش‌آموزان با شرح و بسط بیشتر، که این کار به‌وسیله مدرسین انجام می‌گیرد. و چنانچه حل‌المسائل کتابهای درسی است، در این مورد نظراتی دارم که عرض می‌کنم.

مقدمتاً باید بگویم هنگامی‌که وزارت فرهنگ کتاب جبر سال ششم ریاضی (از تألیفات ما را) منحصراً برای تدریس در سطح کشور انتخاب کرد، بنده در زمان تدوین این کتاب کلیه مسائل آنرا حل نموده و در دفتری برای خودم نگه داشتم، دوستانم در زمان تدریس انحصاری آن در سطح کشور اصرار داشتند این کتاب حل‌المسائل را چاپ و منتشر نماییم به این دلیل که فروش خوبی خواهد داشت، من نمی‌پذیرفتم، چون سوابق بدی از انتشار حل‌المسائل کتب درسی داشتم، به دفعات شاگردانی را پای تخته سیاه احضار کرده و حل مسأله‌ای را از آنها خواستم که در کتاب بود و به‌عنوان تکلیف شب معین کرده‌بودم درحالی‌که در جزوهٔ خودش به‌درستی حل کرده و

کتاب درسی باید مانند گفتار دبیر در کلاس ساده و قابل فهم باشد.

نوشته بود ولی از حل آن در پای تخته عاجز بود البته من می‌فهمیدم که از حل‌المسائل آن‌را بدون زحمت فهم و یادگرفتن رونویسی کرده. ممکن است این سؤال پیش آید که پس خودت چگونه از حل‌المسائل ریاضیات استفاده می‌کردی؟ اینک جوابش:

اولاً تذکر این نکته ضروری است که حل‌المسائل آن زمان (شامل مسأله‌ها و حل آنها) مجموعه‌ای علمی از مسائل خارج از کتب درسی و متنوع بود ولی حل‌المسائل حالا تنبل خانهٔ شاه‌عباسی است.

بلی آن مسائل جزو تکلیف درسی نبودند، من هروقت از مطالعه و یادگیری درسی(هرچه بود) خسته می‌شدم از حل‌المسائل ریاضی و یا فیزیک صورت یک مسئله را انتخاب می‌نمودم و روی آن فکر می‌کردم، همین تغییر فکر از درسی به درس دیگر باعث رفع خستگی‌ام می‌شد، اگر قادر به حل مسئله بودم از نظر تطبیق بعد از حل به حل‌المسائل مراجعه می‌کردم و اگر موفق نمی‌شدم آن را حل کنم، آن را رها نموده و دنبالهٔ درس قبلی را می‌گرفتم، بعد از خاتمه کار و انجام تکالیف شبانه، حل مسأله را دنبال می‌کردم، اگر آن شب قادر به حل آن نبودم، حل آن‌را به فردا یا شب بعد موکول می‌نمودم بعد از یکی دو روز که به عجز خود در حل آن پی می‌بردم به حل‌المسائل مراجعه می‌کردم، در این حال چون یکی دو روز یا کمتر یا بیشتر در

اغلب دانش‌آموزان به‌محض دیدن صورت مسئله به حل آن نیز مراجعه و آن رارونویسی می‌کنند، نمی‌گذارند در اثر ممارست و فکر کردن در موارد مختلف مسأله فکر به جریان بیفتد و کم‌کم آمادهٔ حل مسائل شود. این عمل باعث رکود فکری دانش‌آموزان می‌شود.

فکر آن بودم بعد که حلّش را در حل‌المسائل می‌دیدم، آن راه حل دیگر هیچ وقت از یادم نمی‌رفت چون روی آن خیلی زحمت کشیده بودم. درحالی که اغلب دانش‌آموزان به محض دیدن صورت مسئله به حل آن نیز مراجعه و آن را رونویسی می‌کنند، نمی‌گذارند در اثر ممارست و فکرکردن در موارد مختلف مسأله فکر به جریان بیفتد و کم‌کم آمادهٔ حل مسائل شود. این عمل باعث رکود فکری دانش‌آموزان می‌شود.

■ یک ریاضیدان غیر از ریاضیات باید از چه علومی آگاهی داشته باشد؟ مثلاً آیا دانستن ادبیات برای ریاضیدان لازم است؟

تصور می‌کنم یک ریاضیدان قبل از تبحر در ریاضیات قطعاً با منطق و فلسفه و ادبیات خود را آمادهٔ درک مطالب ریاضی

نموده‌است. برای یک ریاضیدان دانستن ادبیات برای بیان و تفهیم مطالب ریاضی حتماً ضروری است. مثلاً آقای دکتر مصاحب که ریاضیدان بود، به دلیل اینکه در ادبیات نیز دستی قوی داشت بیان و قلمش خیلی نافذ بود و همچنین آقای دکتر هشترودی نیز همین وضع را داشت.

■ آقای آذرنوش با تشکر از شما اگر مطلب دیگری به نظرتان می‌رسد بفرمایید.

باید اقرار کنم که در ریاضی تبحر ندارم، فقط روش تدریسی که بعد از چندین سال تجربه به آن عادت کرده بودم و آن را برای تفهیم به دانش‌آموزان مفید تشخیص می‌دادم دنبال می‌کردم و دانش‌آموزان از آن روش راضی به نظر می‌رسیدند و گذشته از آن چون به شغل و کارم عشق می‌ورزیدم و آنرا قلباً دوست داشتم، با جان و دل برای دانش‌آموزان زحمت می‌کشیدم، به طوری که بعدها شنیدم روش تدریس و طرز رفتار و کردارم روی دانش‌آموزان اثر مطلوب بجا می‌گذاشت. به هرحال از همهٔ شما متشکرم و ازخداوند برایتان توفیق طلب می‌کنم.

> ***چون به شغل و کارم عشق می‌ورزیدم و آنرا قلباً دوست داشتم، با جان ودل برای دانش‌آموزان زحمت می‌کشیدم.***

ادب ریاضی

هاردی، ریاضیدان بزرگ انگلیسی، در اثرش به نام اعتذار یک ریاضیدان می‌نویسد که به خاطر زیبایی ریاضیات به آن پرداخته است، نه به خاطر ارزش عملیش. او با بی‌پروایی بیان می‌کند که هیچگونه کاربردی برای نظریهٔ اعداد یا نسبیت نیافته است. از آن زمان تنها چهل سال گذشته است که پیامدهای نظریهٔ تجریدی اعداد به آنجا کشیده شده که برای امنیت ملی مفید واقع می‌شود.

آرتور جفی ـ ترجمهٔ سیدمرادعلی هاشمی
مجلهٔ ریاضی ش ۲

حدود چهل سال قبل، اعضای یک محفل ریاضی در کمبریج، از لزوم به‌کاربردن کلمات در کتابهای درسی فیزیک ـ ریاضی مرتباً اظهار تأسف می‌کردند. ایده‌آل آنها دنیایی بود عاری از هر چیز به جز فرمول، که گرچه نمی‌توان به آن دست یافت ولی می‌توان بسیار به آن نزدیک شد. اما آدم در طی چهل سال چیزهایی یاد می‌گیرد، و از این رو امروز افراد باقیماندهٔ آن محفل برداشت کاملاً متفاوتی از موضوع پیدا کرده‌اند. آنها بر حسب تجربه آموخته‌اند که ریاضیات را، دست کم تا آنجایی که در تحقیقات فیزیکی مطرح می‌شود، صرفاً ابزاری کمکی برای تفکر بدانند، این یکی از بزرگترین حقایقی بود که دستاوردهای **فارادی** در طول زندگی علمیش، آن را به کرسی نشاند.

پی. جی. تیت
ترجمهٔ امیر اکبری مجدآبادنو
نشر ریاضی سال ۴ ش ۱ و ۲

تابع و بررسی خاصیت یك به یکی در انواع توابع

حمیدرضا امیری

(برای دانش‌آموزان سال‌های دوم و سوم و چهارم دبیرستان)

صحبت از تابع است، مفهومی ریاضی که ریاضیات بدون آن هیچ است؛ مفهومی که حد و پیوستگی آن، مشتق و انتگرال گیری از آن کتابهای ما را اشباع کرده و ریاضیدانان بسیاری را به خود مشغول داشته است؛ مفهومی که توانسته در علوم دیگر همچون فیزیك، مکانیك و کلیه رشته‌های فنی نقشهای مهم ایفا کند. پس جا دارد که خواص چنین مفهوم یا مفاهیمی را بیشتر مورد بررسی و تفحص قرار دهیم که فعلاً به بررسی یکی از این خواص یعنی خاصیت یك به یکی می‌پردازیم:

می‌دانیم هرگاه A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند خواهیم داشت:

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A\wedge y\in B\}$$

که هر (x,y) را یك زوج مرتب نامیده و از دو شیئی مانند x و y که برای آنها ترتیب قائل هستیم تشکیل شده است، و اگر:

$$(x\ ,\ y)=(z\ ,\ t)$$

خواهیم داشت:

$$x=z\wedge y=t$$

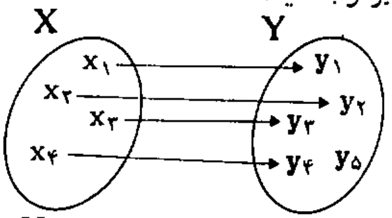
از طرفی هر زیرمجموعه از یك حاصلضرب دکارتی مانند $A\times B$ را یك رابطه می‌نامیم پس اگر رابطهٔ R از A در B تعریف شده باشد داریم:

$$R\subset A\times B$$

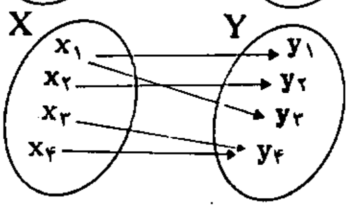
اینکه انواع رابطه‌ها چگونه‌اند و چه خواصی دارند از بحث ما خارج است و فقط ما نوع خاصی از این رابطه‌ها را که به آنها تابع می‌گوییم بررسی می‌کنیم که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

هرگاه رابطهٔ R از A در B تعریف شده باشد آن را **تابع** می‌نامیم درصورتی که هیچ دو زوج مرتبی با مؤلفه‌های اول برابر در آن یافت نشود، به عبارت دیگر، اگر مجموعهٔ مؤلفه‌های اول زوجهای مرتب موجود در یك رابطه را **دامنه** و مجموعهٔ مؤلفه‌های دوم آن رابطه را **برد** بنامیم، «رابطه‌ای تابع نام دارد که به‌ازای هر عضو از دامنه‌اش یکی و فقط یك عضو از بردش وجود داشته باشد.»

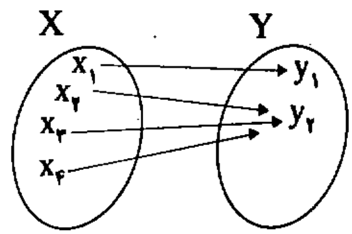
درحقیقت هرگاه نمودار پیکانی یك تابع را رسم کنیم نباید از هیچ یك از اعضای دامنه بیش از یك پیکان خارج شود. به نمودارهای زیر توجه کنید:



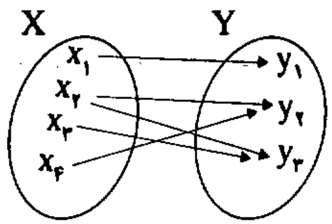
تابع است



تابع نیست



تابع است



تابع نیست

این مفهوم (تعریف تابع) را می‌توان با زبان ریاضی به صورت زیر بیان کرد:

رابطهٔ f تابع است $\Longleftrightarrow$

$$\big([(x_1,y_1)\in f\wedge(x_1,y_2)\in f] \Longrightarrow y_1=y_2\big)$$

(برای اثبات تابع بودن یك رابطه خودمان فرض می‌کنیم دو زوج مرتب با مؤلفه‌های اول برابر در رابطه وجود داشته‌باشد و اگر با این فرض بتوانیم ثابت کنیم مؤلفه‌های دوم این‌دو زوج باهم برابرند درحقیقت دو زوج باهم برابر شده و ثابت کرده‌ایم که هیچگاه چنین زوجهای مرتب متمایزی با مؤلفه‌های اول برابر در رابطه نمی‌توان یافت.)

قرارداد: اگر $R \subset A \times A$ ، دراین‌صورت اصطلاحاً می‌گوییم رابطه R روی A تعریف‌شده است.

مثال ۱ - رابطهٔ f روی IR (مجموعهٔ اعداد حقیقی) به صورت زیر تعریف شده‌است آیا این‌رابطه تابع است؟

$$\forall x,y \in \mathrm{IR} \text{ ، } (x,y)\in f \Longleftrightarrow x^2=y$$

فرض کنیم:

$$[(x_1,y_1)\in f \wedge (x_1,y_2)\in f] \Longrightarrow$$
$$x_1^2=y_1 \wedge x_1^2=y_2 \Longrightarrow y_1=y_2$$

پس طبق تعریف تابع، رابطهٔ فوق تابع می‌باشد.

مثال ۲ - رابطهٔ f را روی IR به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم آیا این رابطه تابع است؟

$$\forall x,y \in \mathrm{IR} \text{ ، } (x,y)\in f \Longleftrightarrow x=y^2$$

فرض کنیم:

$$(x_1,y_1)\in f \wedge (x_1,y_2)\in f \Longrightarrow$$
$$x_1=y_1^2 \wedge x_1=y_2^2$$
$$\Longrightarrow y_1^2=y_2^2 \Longrightarrow y_1=\pm y_2 \quad (1)$$

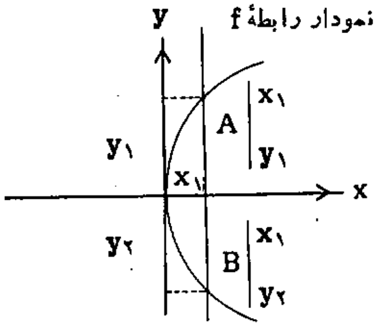
حال با یك مثال نقض نشان می‌دهیم که رابطهٔ f تابع نیست. برای به دست آوردن مثال نقض از رابطهٔ (۱) استفاده می‌کنیم.

$$4=(-2)^2 \wedge 4=(2)^2 \Longrightarrow$$
$$(4,-2)\in f \wedge (4,2)\in f$$

یعنی دو زوج مرتب در f یافتیم که مؤلفه‌های اول برابردارند لذا f تابع نیست.

لازم به تذکر است که هر زوج مرتب با مؤلفه‌های حقیقی را می‌توان متناظر با یك نقطه درصفحهٔ مختصات دکارتی فرض کرد که مؤلفهٔ اول آن مشخص کننده طول آن نقطه و مؤلفه دوم آن معین کنندهٔ عرض آن نقطه‌است. حال اگر دو زوج مرتب دارای مؤلفه‌های اول یکسان باشند درحقیقت دارای طولهای برابرند و لذا روی خطی موازی با محور yها واقع‌اند پس هر گاه نمودار یك رابطه را رسم کنیم و خطوطی موازی محور yها بکشیم اگر یکی از این خطوط نمودار رابطه را در بیش از یك نقطه قطع کند آن رابطه تابع نیست.

نمودار رابطهٔ f



قرارداد: اگر تابع f از A در B تعریف شده باشد این مطلب را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$f: A \longrightarrow B$$
$$x \longrightarrow f(x)$$

یعنی تابع f روی xهای مجموعهٔ A اثر کرده و آنها را تحت قانون خاصی به اعضایی یا yهایی در مجموعهٔ B منتقل می‌کند پس f(x) یعنی تأثیر f روی x که همان $y \in B$ است. اینکه f به چه‌صورتی روی xهای مجموعهٔ A اثر می‌کند، همان ضابطهٔ تعریف f است که با f(x) نمایش می‌دهیم.

مثلاً وقتی می‌نویسیم $f: Z \to Z$ ضابطهٔ تعریف f به

$$f(x) = x^2 + 1$$

صورت $f(x) = x^2 + 1$ بیان‌شده‌است و این‌همان‌تغییری‌است که تابع f روی‌اعضای Z می‌دهد!

یعنی هرعدد صحیح که f بر آن اثر کند به‌توان ۲ می‌رسد و با عدد یك جمع می‌شود، پس اگر تابع باضابطهٔ‌فوق‌را درنظر بگیریم خواهیم‌داشت:

$$f(۴) = (۴)^۲ + ۱ = ۱۷$$

یا

$$f(-۴) = (-۴)^۲ + ۱ = ۱۷$$
$$f(k) = k^۲ + ۱$$

یا

$$f(a+۵) = (a+۵)^۲ + ۱ = a^۲ + ۱۰a + ۲۶$$

اگر دامنهٔ تعریف یك تابع را به چندزیرمجموعه تقسیم کنیم می‌توان روی‌هرکدام از این زیرمجموعه‌های دامنهٔ تعریف، یك ضابطهٔ مجزا برای تابع تعریف کرد که به‌چنین توابعی، توابع چندضابطه‌ای می‌گوییم.

مثال ۳ - تابع زیر یك تابع ۳ ضابطه‌ای است، مطلوب است محاسبهٔ:

$$f(|a|)\ ,\ f(a+۳)\ ,\ f(۲)\ ,\ f(۴)\ ,\ f(-۲)$$

$$f: IR \to IR$$

$$f(x) = \begin{cases} ۲x - ۵ & x > ۲ \\ ۰ & x = ۲ \\ ۳ - ۴x & x < ۲ \end{cases}$$

چون $-۲ < ۲$ پس:

$$f(-۲) = ۳ - ۴(-۲) = ۳ + ۸ = ۱۱$$

چون $۴ > ۲$ پس:

$$f(۴) = ۲(۴) - ۵ = ۸ - ۵ = ۳$$

چون $۲ = ۲$ پس:

$$f(۲) = ۰$$

حال $f(a+۳)$ را محاسبه می‌کنیم

$$f(a+۳) = \begin{cases} ۲(a+۳) - ۵ & a+۳ < ۲ \\ ۰ & a+۳ = ۲ \\ ۳ - ۴(a+۳) & a+۳ < ۲ \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f(a+۳) = \begin{cases} ۲a + ۱ & a > -۱ \\ ۰ & a = -۱ \\ -۹ - ۴a & a < -۱ \end{cases}$$

ودر نهایت‌به بررسی $f(|a|)$ می‌پردازیم:

می‌دانیم برای‌هر $a \in IR$ همواره $|a| \geqslant ۰$ بنابراین

$$f(|a|) = \begin{cases} ۲|a| - ۵ & |a| > ۲ \\ ۰ & |a| = ۲ \\ ۳ - ۴|a| & |a| < ۲ \end{cases}$$

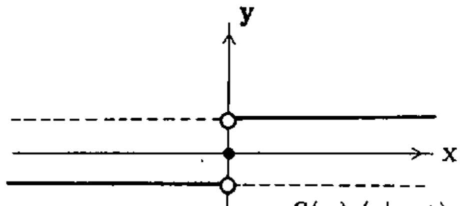
$$\Longrightarrow f(|a|) = \begin{cases} ۲|a| - ۵ & a > ۲ \text{ یا } a < -۲ \\ ۰ & a = \pm ۲ \\ ۳ - ۴|a| & -۲ < a < ۲ \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f(|a|)=\begin{cases} 2a-5 & a>2 \\ -2a-5 & a<-2 \\ 0 & a=\pm 2 \\ 3-4a & 0\leqslant a<2 \\ 3+4a & -2<a<0 \end{cases}$$

مثال ۴ - تابع زیر را که به تابع علامت معروف است در نظر می‌گیریم:

$$S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$S(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$



(نمودار $S(x)$)

مطلوب است محاسبهٔ

$S(x^2)-S(x)$ و $S(6)$ و $S(-5)$

$$-5<0 \Longrightarrow S(-5)=-1$$

$$6>0 \Longrightarrow S(6)=1$$

اگر $\rightarrow x>0 \Longrightarrow (S(x)=1$ و $S(x^2)=1)$

$$\Longrightarrow S(x^2)-S(x)=1-1=0$$

اگر $\rightarrow x<0 \overset{x^2>0}{\Longrightarrow} (S(x)=-1$ و $S(x^2)=1)$

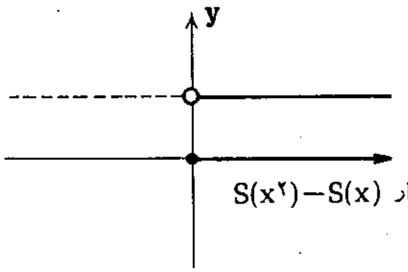
$$\Longrightarrow S(x^2)-S(x)=1-(-1)=2$$

اگر $\rightarrow x=0 \Longrightarrow (S(x)=0$ و $S(x^2)=0)$

$$\Longrightarrow S(x^2)-S(x)=0-0=0$$

بنا براین خواهیم داشت:

$$S(x^2)-S(x)=\begin{cases} 0 & x\geqslant 0 \\ 2 & x<0 \end{cases}$$



(نمودار $S(x^2)-S(x)$)

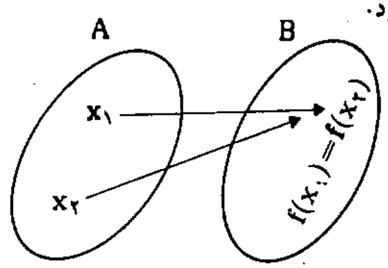
قرارداد: اگر f تابعی از مجموعهٔ A درمجموعهٔ B باشد یعنی $f: A \rightarrow B$, $x \rightarrow f(x)$ و اگرداشته باشیم $(x_1,y_1)\in f$ می‌نویسیم:

$$f(x_1)=y_1$$

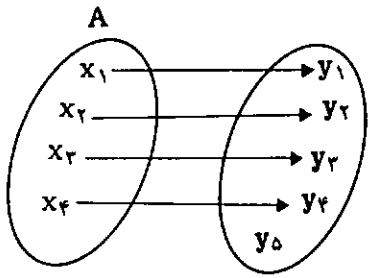
حال آمادگی داریم تا به بررسی یك خاصیت مهم بـرای بعضی از توابع یعنی خاصیت یك به یکی بپردازیم. توابعی کـه دارای این خاصیت می‌باشند در ریاضیات از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند ودر نظریه‌مجموعه‌ها نیز برای اثبات برقراری تناظر یك به یك بین دومجموعه می‌توان از تابع استفاده کرد و تابعی بین آن دومجموعه تعریف کرد که ازجمله خواصی که آن تابع باید دارا باشد همین خاصیت یك به یکی است.

تعریف: تابع $f: A \longrightarrow B$, $x \rightarrow f(x)$ مفروض است می گوییم این تابع یك به یك است هر گاه هیچ دو زوج مرتب متمایز با مؤلفه‌های دوم برابر در آن یافت نشود به بیان دیگر تابعی را یك به یك می‌نامیم هر گاه به ازای هر عضو از بردش یکی و فقط یك عضو از دامنه‌اش وجود داشته باشد.

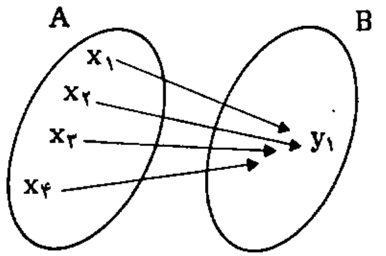
تذکر: لفظ یک‌به‌یک همان‌طور که از تعریف برمی‌آید کاملاً با نوع و نحوهٔ عملکرد تابع مطابقت‌دارد یعنی واقعاً تابع هریکی را به یکی می‌برد اگر تابعی چنین‌نباشد، به صورت زیر خواهد بود.



و همان طور که مشاهده می‌شود این تابع **دو به یک** است!



تابع یک‌به‌یک است



تابع یک‌به یک نیست (تابع ثابت)

تعریف ریاضی تابع یک‌به‌یک

تابع $f : A \longrightarrow B$ یک‌تابع یک‌به‌یک است هر گاه:
$x \longrightarrow f(x)$

$$\forall x_1 , x_2 \in D_f \text{ ، } x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

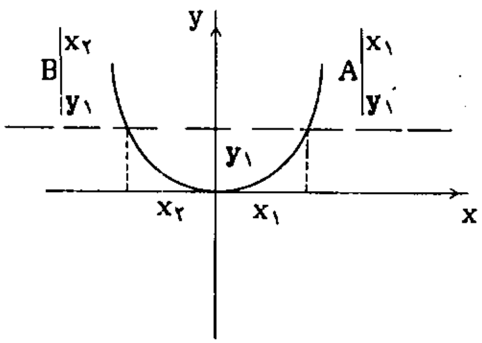
حال با توجه‌به اینکه هر گزارهٔ شرطی‌چون $p \Longrightarrow q$ با عکس نقیض خودش‌یعنی $\sim q \Longrightarrow \sim p$ هم‌ارز است پس تعریف ریاضی تابع یک‌به‌یک را به صورت زیر نیز می‌توان بیان کرد.

$$\text{تابع } f \text{ یک‌به‌یک است} \iff \forall x_1 , x_2 \in D_f$$

$$f(x_1)=f(x_2) \Longrightarrow x_1=x_2$$

با توجه به اینکه تابع f ، x_1 را به $f(x_1)$ و x_2 را به $f(x_2)$ تبدیل می‌کند واضح است که $f(x_1)$ و $f(x_2)$ هردو مؤلفه‌های دوم دو زوج مرتب در تابع f می‌باشندکه ما فرض‌کرده‌ایم با هم مساوی‌اند وثابت می‌کنیم $x_1=x_2$ یعنی باید مؤلفه‌های اول‌چنین زوجهای مرتبی‌نیز باهم‌برابر باشند درحقیقت دوزوج به یک‌زوج تبدیل می‌شوند پس‌تابع یک‌به‌یک خواهد شد.

اگرتابعی یک‌به‌یک نباشد پس حداقل دو زوج مرتب با مؤلفه‌های‌دوم برابردر آن یافت می‌شود که اگراین دو زوج را دونقطه روی‌نمودار تابع‌بدانیم، چون‌عرضهای‌این‌دو نقطه‌برابر است پس‌هردو روی‌خطی موازی‌با محورxها واقع‌می‌شوندحال برای نشان دادن اینکه تابعی یک‌به‌یک نیست اگر نمودار تابع مفروض‌باشد می‌توان‌از عکس مطلب بالا استفاده‌کرد. یعنی اگر خطوطی موازی‌با محورxها رسم‌کنیم ویکی‌ازاین‌خطوط‌نمودار تابع‌را در بیش از یک نقطه‌قطع‌کندآن نمودارنمی‌تواند به یک تابع یک‌به‌یک تعلق داشته‌باشد، به‌شکل زیر توجه‌کنید.



مثال ۵ - خاصیت یک‌به‌یکی‌را برای‌تابع باضابطهٔ

$$f(x)=\frac{x+4}{2x-3}$$

بررسی‌کنید.

فرض کنیم $f(x_1)=f(x_1)$ پس خواهیم داشت:

$$\frac{x_1+4}{2x_1-3}=\frac{x_2+4}{2x_2-3} \Rightarrow$$

$$2x_2x_2-3x_1+8x_2-12=2x_1x_2+$$

$$8x_1-3x_2-12 \Rightarrow 11x_2=11x_1 \Rightarrow$$

$x_1=x_2$ پس طبق تعریف تابع یک‌به‌یک است

مثال ۶ - آیا تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2+4$ با دامنهٔ تعریف IR یک‌به‌یک است؟

فرض کنیم $f(x_1)=f(x_2)$ پس‌خواهیم داشت:

$$x_1^2+4=x_2^2+4 \Rightarrow x_1^2=x_2^2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{x_1^2}=\sqrt{x_2^2} \Rightarrow |x_1|=|x_2|$$

$$\Rightarrow x_1=\pm x_2$$

در این نوع مسائل توجه داریم که اگر نتوانستیم ثابت کنیم که دقیقاً $x_1=x_2$ دلیل بر یک به یک نبودن تابع نمی‌باشد و برای ردخاصیت یک‌به‌یکی تابع باید حتماً با یک مثال نقض این عمل انجام شود، که البته آخرین رابطه‌ای که برحسب x_1 و x_2 به دست می‌آوریم به اینکه چگونه مثال نقض را بیابیم کمک می‌کند در مثال بالا چون‌داریم $x_1=\pm x_2$ لذا اگر قرار دهیم

$x_2=-2$ و $x_1=2$

خواهیم داشت:

$f(x_1)=f(2)=2^2+4=8$

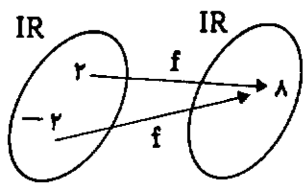
و

$f(x_2)=f(-2)=(-2)^2+4=8$

یعنی x_1 و x_2 ای در D_f یافتیم که $x_1\neq x_2$ ولی

$f(x_1)=f(x_2)$

ولذا تابع یک‌به‌یک نیست.



مثال ۷ - آیا تابع با ضابطهٔ $f: IR \to IR$ یک‌به‌یک

$f(x)=|x|$

است؟

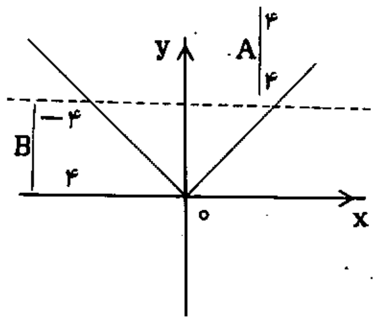
فرض کنیم $f(x_1)=f(x_2)$ پس‌خواهیم داشت:

$$|x_1|=|x_2| \Rightarrow x_1=\pm x_2$$

مثال نقض: $x_1=4$ و $x_2=-4 \Rightarrow$

$$|x_1|=|4|=4 \quad \text{و} \quad |x_2|=|-4|=4$$

نمودار تابع $f(x)=|x|$ به‌شکل زیر است و همان‌طور که مشاهده می‌شود تابع یک به یک نیست.



مثال ۸ - آیا تابع باضابطهٔ $f: IR \to IR$ $(a\in IR)$

$f(x)=|x+a|$

یک‌به‌یک است؟

فرض کنیم $f(x_1)=f(x_2)$ پس‌خواهیم داشت:

$$|x_1+a|=|x_2+a| \Rightarrow$$

$$(x_1+a)=\pm(x_2+a) \Rightarrow$$

$$(x_1+a)=(x_2+a) \Rightarrow \boxed{x_1=x_2} \quad \text{I}$$

$$(x_1+a)=-x_2-a \Rightarrow \boxed{x_1=-x_2-2a} \quad \text{II}$$

پس‌دقیقاً نتوانستیم ثابت کنیم درهرحالت $x_1=x_2$ حال‌به‌دنبال مثال نقض می‌باشیم که از رابطهٔ II کمک‌می‌گیریم اگرقراردهیم

$x_2=2$ داریم، $x_1=-2-2a$

$$f(x_1)=f(-2-2a)=|-2-2a+a|$$
$$=|-2-a|=|-(2+a)|=|2+a|$$
$$f(x_2)=f(2)=|2+a|$$

و همان طور که مشاهده می‌شود $x_1\neq x_2$ ولی

$$f(x_1)=f(x_2)$$

پس تابع یك‌به‌یك نمی‌باشد.

مثال ۹- آیا تابع باضابطهٔ $f:\mathbb{IR}\to\mathbb{IR}$ یك‌به یك است؟

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x}-4}{3+\sqrt{x}}$$

(قابل توجه است که دامنهٔ تعریف تابع فوق زیر مجموعهٔ $\mathbb{IR}^+$ می‌باشد درحقیقت $D_f=\mathbb{IR}^+$ زیرا در غیراین صورت $\sqrt{x}$ تعریف نمی‌شود) حال فرض کنیم

$$f(x_1)=f(x_2)$$

پس خواهیم داشت:

$$\frac{\sqrt{2x_1}-4}{3+\sqrt{x_1}}=\frac{\sqrt{2x_2}-4}{3+\sqrt{x_2}}\implies$$
$$3\sqrt{2x_1}-12+\sqrt{2x_1x_2}-4\sqrt{x_2}=$$
$$3\sqrt{2x_2}-12+\sqrt{2x_1x_2}-4\sqrt{x_1}$$
$$\implies 3\sqrt{2}\sqrt{x_2}+4\sqrt{x_1}=3\sqrt{2}\sqrt{x_2}+4\sqrt{x_2}$$
$$\implies (3\sqrt{2}+4)\sqrt{x_1}=(3\sqrt{2}+4)\sqrt{x_2}$$
$$\implies \sqrt{x_1}=\sqrt{x_2}\implies (\sqrt{x_1})^2=(\sqrt{x_2})^2$$
$$\implies \sqrt{x_1^2}=\sqrt{x_2^2}\implies |x_1|=|x_2|$$
$$\xRightarrow{\text{چون } x_2,x_1>0} x_1=x_2$$

پس تابع یك‌به‌یك است.

بررسی خاصیت یك‌به‌یکی برای توابع از $\mathbb{IR}^2$ به $\mathbb{IR}^2$ و از $\mathbb{IR}^2$ به $\mathbb{IR}$ و از $\mathbb{IR}$ به $\mathbb{IR}^2$

اگر تابعی چون f از $\mathbb{IR}^2$ به $\mathbb{IR}^2$ مفروض باشد در این صورت چون، $D_f\subset\mathbb{IR}^2$ بنابراین تابع f روی زوج مرتبهایی از $\mathbb{IR}^2$ اثر کرده وحاصل عمل نیز زوج مرتبی منحصر به فرد از $\mathbb{IR}^2$ خواهد بود ولی تعریف یك‌به‌یکی ثابت است و برای اینگونه توابع نیز به همان ترتیب عمل می‌کنیم یعنی فرض می‌کنیم تأثیر تابع f روی دو زوج مرتب از $\mathbb{IR}^2$ باهم مساوی باشد و ثابت می‌کنیم خود آن دو زوج مرتب باید باهم برابر باشند یعنی:

فرض می‌کنیم $f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$ و ثابت می‌کنیم

$$(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$$

مثال ۱۰- تابع f با ضابطهٔ $f:\mathbb{IR}^2\to\mathbb{IR}^2$ مفروض

$$f(x,y)=(x-6,y+4)$$

است، آیا این تابع یك‌به‌یك است؟

$$\text{فرض کنیم}\to f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)\implies$$
$$(x_1-6\ ,\ y_1+4)=(x_2-6\ ,\ y_2+4)$$
$$\implies\begin{cases}x_1-6=x_2-6\\ y_1+4=y_2+4\end{cases}\implies$$
$$\begin{cases}x_1=x_2\\ y_1=y_2\end{cases}\implies(x_1,y_1)=(x_2,y_1)$$

پس تابع یك‌به‌یك است.

مثال ۱۱- تابع f با ضابطهٔ

$$f:\mathbb{IR}^2\to\mathbb{IR}^2$$
$$f(x,y)=(x-3y,2x+y)$$

مفروض است آیا این تابع یك‌به‌یك است؟

فرض کنیم $\leftarrow f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$ پس باتوجه به ضابطه تابع خواهیم داشت:

$$(x_1-3y_1,2x_1+y_1)=(x_2-3y_2,2x_2+y_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1-3y_1=x_2-3y_2 \\ 3\times\quad 2x_1+y_1=2x_2+y_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1-3y_1=x_2-3y_2 \\ 6x_1+3y_1=6x_2+3y_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 7x_1=7x_2 \Rightarrow \boxed{x_1=x_2} \qquad (1)$$

حال مقدار $x_1=x_2$ را در یکی از معادلات دستگاه قرار می‌دهیم که خواهیم داشت،

$$x_1-3y_1=x_1-3y_2 \Rightarrow -3y_1=-3y_2$$

$$\Rightarrow \boxed{y_1=y_2} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow (x_1,y_1)=(x_2,y_2)$$

پس تابع یک‌به‌یک است.

مثال ۱۲- تابع f با ضابطهٔ

$$f: IR^2 \to IR^2$$
$$f(x,y)=(x^2+1,y-4)$$

مفروض است. آیا این تابع یک‌به‌یک است؟

فرض کنیم :

$$f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$$

پس با توجه به ضابطهٔ تابع خواهیم داشت،

$$(x_1^2+1,y_1-4)=(x_2^2+1,y_2-4) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1^2+1=x_2^2+1 \Rightarrow x_1^2=x_2^2 \Rightarrow x_1=\pm x_2 \\ y_1-4=y_2-4 \Rightarrow y_1=y_2 \end{cases}$$

بنا براین نمی‌توان نتیجه گرفت تابع یک‌به‌یک است پس به دنبال مثال نقض هستیم که اگر قرار دهیم: $x_1=2$ و $x_2=-2$ و مثلاً $y_1=y_2=5$ خواهیم داشت:

$$(x_1,y_1)=(2,5) \Rightarrow$$
$$f(2,5)=(2^2+1,5-4)=(5,1)$$
$$(x_2,y_2)=(-2,5) \Rightarrow$$
$$f(-2,5)=((-2)^2+1,5-4)=(5,1)$$

یعنی ثابت شد

$$f(2,5)=f(-2,5)=(5,1)$$

درحالی‌که $(2,5)\neq(-2,5)$ پس تابع یک‌به‌یک نمی‌باشد.

مثال ۱۳- اگر c_1 و c_2 اعداد حقیقی ثابتی باشند تابع با ضابطهٔ زیر یک‌به‌یک نمی‌باشد

$$f: IR^2 \to IR^2$$
$$f(x,y)=(c_1,c_2)$$

تابع یک‌به‌یک نیست، زیرا مثلاً خواهیم داشت:

$$\begin{cases} f(\sqrt{2},\frac{3}{5})=(c_1,c_2) \\ f(2,3)=(c_1,c_2) \end{cases}$$

در صورتی‌که $(2,3)\neq\left(\sqrt{2},\frac{3}{5}\right)$

مثال ۱۴ - ثابت کنید تابع با ضابطهٔ

$$f: IR^2 \to IR^2$$
$$f(x,y)=(x-2y,2x-4y)$$

نه یک‌به‌یک و نه پوششی است. فرض کنیم :

$$f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$$

و با توجه به ضابطهٔ تابع خواهیم داشت:

$$(x_1-2y_1,2x_1-4y_1)=(x_2-2y_2,2x_2-4y_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1-2y_1=x_2-2y_2 \\ 2x_1-4y_1=2x_2-4y_2 \end{cases}$$

وهمان‌طور که ملاحظه می‌شود دستگاه بالا فاقد جواب است. (در حقیقت دو معادلهٔ $x-2y=0$ و $2x-4y=0$ یک معادله‌اند وخطی را مشخص می‌کنند که از مبدأ مختصات عبور می‌کند) پس برای یافتن مثال نقض کافی است نقاطی را بیابیم که در این خط صدق می‌کنند.

$$x-2y=0\;\begin{matrix}\nearrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}\\[2ex]\searrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}\end{matrix}$$

$$f(0,0)=(0-2\times0,\,2\times0-4\times0)=(0,0)$$

$$f(2,1)=(2-2\times1,\,2\times2-4\times1)=(0,0)$$

یعنی ثابت شد

$$f(0\;,\;0)=f(2\;,\;1)=(0\;,\;0)$$

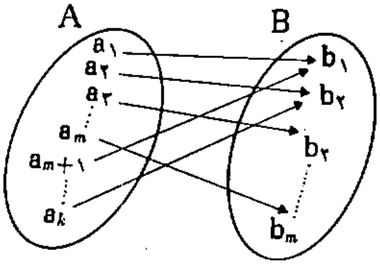
ولی $(2,1)\neq(0,0)$ پس تابع یک به یک نمی‌باشد.

حال پس‌از بررسی خاصیت یک‌به یکی برای توابع از IR^2 به IR^2 درحالتهای مختلف به سراغ بررسی این خاصیت برای توابع از IR^2 به IR می‌رویم اما قبل‌از آن‌مطلبی‌را تحت عنوان یک قضیه‌ثابت کرده که پس‌از اثبات آن فهم مطالب بعدی آسانتر می‌نماید.

قضیه: هرگاه $n(A)=k$ و $n(B)=m$ و $k>m$ (تعداد اعضای مجموعهٔ A بیشتر از تعداد اعضای مجموعهٔ B باشد).

دراین‌صورت هیچ تابع یک‌به‌یک از A به B نمی‌توان تعریف کرد.

برهان: فرض کنیم $f : A \to B$ تابعی یک به یک باشد و $D_f=A$ بنابراین f روی هرعضو A اثر می‌کند وچون مجموعهٔ A دارای $(k-m)$ عضو بیشتر از مجموعهٔ B است لذا ناچاراً تابع f علاوه براینکه با m عضو A اعضای B را می‌پوشاند باید روی $(k-m)$ عضو از اعضای B دوبار اثر کند واین با یک‌به‌یک بودن f تناقض‌دارد. لذاهیچ تابع یک‌به‌یک‌از A به B نمی‌توان تعریف کرد.



مثال ۱۵- تابع با ضابطهٔ $f : IR^2 \to IR$ ، مفروض

$$f(x,y)=x+y$$

است. خاصیت یک‌به‌یکی‌را برای آن بررسی کنید.

فرض‌کنیم $f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$ پس با توجه به‌ضابطهٔ تعریف‌تابع داریم:

$$x_1+y_1=x_2+y_2 \qquad (1)$$

لذا نتوانستیم ثابت‌کنیم $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$ پس با توجه‌به رابطهٔ (۱) به دنبال مثال‌نقض هستیم.

اگر قرار دهیم:

$$(x_1,y_1)=(5,-2)\quad,\quad(x_2,y_2)=(1,2)$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}f(5,-2)=5+(-2)=3\\f(1,2)=1+2=3\end{cases}$$

پس ثابت شد $f(5,-2)=f(1,2)$ ولی

$$(5\;,-2)\neq(1\;,\;2)$$

پس‌تابع یک‌به‌یک نیست.

مثال ۱۶- تابع با ضابطهٔ $f : IR^3 \to R^2$ مفروض

$$f(x,y,z)=(x+y,z)$$

است. ثابت‌کنید این تابع یک به یک نیست. (اثبات به عهدهٔ خواننده) .

مثال ۱۷- تابع با ضابطهٔ $f:\mathrm{IR}\to\mathrm{IR}^2$ مفروض

$$f(x)=(x,x+1)$$

است. خاصیت یك‌به‌یکی‌را برای این تابع بررسی کنید.

فرض کنیم $f(x_1)=f(x_2)$ پس با توجه به‌ضابطهٔ تعریف تابع داریم:

$$(x_1,x_1+1)=(x_2,x_2+1)\Longrightarrow\begin{cases}\boxed{x_1=x_2}\\ x_1+1=x_2+1\Longrightarrow\boxed{x_1=x_2}\end{cases}$$

ودر هردوصورت ثابت‌شد $x_1=x_2$ لذا تابع یك‌به‌یك است.

مثال ۱۸- تابع با ضابطهٔ $f:\mathrm{IR}^2\to\mathrm{IR}^3$ مفروض

$$f(x,y)=(x^2,x,y)$$

است. آیا این تابع یك‌به‌یك است؟

فرض کنیم $f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$ پس‌خواهیم‌داشت:

$$(x_1^2,x_1,y_1)=(x_2^2,x_2,y_2)\Longrightarrow\begin{cases}x_1^2=x_2^2\\ x_1=x_2\\ y_1=y_2\end{cases}$$

ازاینکه $x_1^2=x_2^2$ نتیجه می‌شود که $x_1=\pm x_2$ ولی با توجه‌به اینکه داریم $x_1=x_2$ لذا همواره، $x_1=x_2$ می‌باشد پس، $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$ بنابراین تابع یك‌به‌یك است.

مثال ۱۹- تابع با ضابطهٔ $f:\mathrm{IR}^2\to\mathrm{IR}^3$ مفروض

$$f(x,y)=(x^2,y,6)$$

است. آیا این تابع یك‌به‌یك است؟

فرض کنیم $f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$ بنابراین باتوجه‌به ضابطهٔ تعریف‌تابع داریم:

$$(x_1^2,y_1,6)=(x_2^2,y_2,6)\Longrightarrow\begin{cases}x_1^2=x_2^2\\ y_1=y_2\end{cases}$$

تساوی $x_1^2=x_2^2$ نتیجه می‌دهد $x_1=\pm x_2$ بنابراین به دنبال مثال نقض هستیم مثلاً اگر قرار دهیم

$$(y_1=y_2=4 \text{ و } x_2=-2 \text{ و } x_1=2)$$

خواهیم داشت:

$$(x_1,y_1)=(2,4) \text{ و } (x_2,y_2)=(-2,4)$$

$$\Longrightarrow f(2,4)=(2^2,4,6) \text{ و }$$

$$f(-2,4)=((-2)^2,4,6)$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}f(2,4)=(4,4,6)\\ f(-2,5)=(4,4,6)\end{cases}$$

یعنی ثابت‌کردیم $f(2,4)=f(-2,4)$ ولی

$$(2,4)\neq(-2,4)$$

پس تابع یك‌به‌یك نیست.

* * *

در آخرین بحث این مقاله به بررسی خاصیت یك‌به یکی برای‌توابع چندضابطه‌ای می‌پردازیم درحقیقت به دنبال این مطلب‌هستیم که یك‌تابع چندضابطه‌ای باچه شرط یا شرطهایی دارای خاصیت یك‌به‌یکی است و آیا برقراری خاصیت یك به یکی در توابع چند ضابطه‌ای نیاز به تحمیل شرط جدیدی دارد یا خیر؟

شاید در وهلهٔ‌اول تصور کنیم یك‌تابع‌چندضابطه‌ای اگر در‌تمام ضابطه‌هایش یك‌به یك باشد می‌توان نتیجه گرفت‌که در کل‌نیز یك‌به‌یك است،که تصوری‌غلط است!

این‌تصور را بایك مثال بسیار ساده می‌توان باطل‌کرد.

دیدیم تابع $f:\mathrm{IR}\to\mathrm{IR}$ یك‌تابع دوضابطه‌ای بود

$$f(x)=|x|$$

که فاقدخاصیت‌یك‌به‌یکی می‌باشد زیرا مثلاً:

$$f(-2)=f(2)=2$$

ولی اگر قرار دهیم:

$$f(x)=\begin{cases} x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$$

وخاصیت یك به یکی را در هرضابطه به طور مجزا بررسی کنیم خواهیم داشت:

اگر ۱ $\to x_1\ ,\ x_2\geqslant 0\ ,\ f(x_1)=f(x_2)\Longrightarrow x_1=x_2$

اگر ۱ $\to x_1\ ,\ x_2<0\ ,\ f(x_1)=f(x_2)$

$$\Longrightarrow -x_1=-x_2\Longrightarrow x_1=x_2$$

یعنی تابع $f(x)=|x|$ درهریك ازضابطه‌هایش یك به یك است ولی در کل یك به یك نیست.

بنا براین ماعلاوه براینکه خاصیت یك به یکی رادرهرضابطهٔ یك تابع چندضابطه‌ای باید بررسی کنیم نیاز بـه بررسی شرط دیگری نیز داریم یعنی یك به یکی تمام ضابطه‌های یك تابع چند ضابطه‌ای برای یك به یك بودن تابع لازم است اما کافی نیست!

حال به همان تابع $f(x)=|x|$ برمی گردیم، دیدیم که مثلاً:

$$f(-2)=f(2)=2$$

یعنی عدد حقیقی ۲ هم در برد ضابطهٔ بالایی وهم در برد ضابطهٔ پایینی تابع قرارداشت لذا اگرهرضابطهٔ تابع را به عنوان تابعی مجزا فرض کنیم بردهای این دو تابع نقطه مشترك داشت.

این همان شرط اضافی است که به دنبالش بودیم.

یعنی اگردریك تابع چندضابطه‌ای حتی بردهای دوضابطهٔ تابع باهم اشتراك داشته باشند این مسأله را ایجاب می کند کـه تابع چندضابطه‌ای باید دوعضو متمایز از دامنه را تحت دوضابطهٔ مختلف به یك عضو مشترك از بردش منتقل کند واین یك به یك بودن را نقض می کند لذا تعریف یك به یکی برای توابع چند ضابطه‌ای را به شکل زیر بیان می کنیم:

تابع $y=f(x)$ اگرتابعی باچندضابطه باشد درصورتی یك به یك است که «اولاً در هرضابطه‌اش یك به یك باشد و ثانیاً بردهای هیچ دوضابطه‌ای از ضابطه‌های آن نقطهٔ مشترك نداشته باشند.»

مثال ۲۰- تابع f بـا ضابطهٔ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ مفروض

$$f(x)=\frac{x}{2+3|x|}$$

است. خاصیت یك به یکی را برای این تابع بررسی کنید.

ابتدا تابع را باتوجه به تعریف قدرمطلق به صورت یك تابع دوضابطه‌ای می نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2+3x}=f_1 & x\geqslant 0\\[2ex] \dfrac{x}{2-3x}=f_2 & x<0\end{cases}$$

حال خاصیت یك به یکی را برای هردوضابطه به طور مجزا بررسی می کنیم.

اگر ۱ $\to x_1\ ,\ x_2\geqslant 0\ ,\ f(x_1)=f(x_2)$

$$\Longrightarrow \frac{x_1}{2+3x_1}=\frac{x_2}{2+3x_2}$$

$$\Longrightarrow 2x_1+3x_1x_2=2x_2+3x_1x_2$$

$$\Longrightarrow x_1=x_2$$

پس تابع $f_1(x)=\dfrac{x}{2+3x}$ برای xهای بزرگتریا مساوی صفر یك به یك است.

اگر ۲ $\to x_1\ ,\ x_2<0\ ,\ f(x_1)=f(x_2)$

$$\Longrightarrow \frac{x_1}{2-3x_1}=\frac{x_2}{2-3x_2}$$

$$\Longrightarrow 2x_1-3x_1x_2=2x_2-3x_1x_1$$

$$\Longrightarrow x_1=x_2$$

یعنی تابع $f_2(x)=\dfrac{x}{2-3x}$ برای $x<0$ نیزیك به یك است.

لذا تابع $y=f(x)$ در هردو ضابطه یك به یك است از طرفی واضح است که:

و f_1 برد $= R_{f_1} \subseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

f_2 برد $= R_{f_2} \subseteq \mathbb{R}^-$

زیرا اگر $x \geqslant 0$ در این صورت

$$f_1(x)=\frac{x}{2+3x}\geqslant 0$$

و اگر $x<0$

$$f_2(x)=\frac{x}{2-3x}<0$$

وچون $R_{f_1}\cap R_{f_2}=\varnothing$ لذا تابع طبق تعریف یك به یك است.

مثال ۲۱- تابع f باضابطه $f: R \to R$ مفروض است

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x>2 \\ x-1 & 0<x\leqslant 2 \\ x+1 & x\leqslant 0 \end{cases}$$

آیا این تابع یك به یك است.

اگر سه ضابطه این تابع را از بالا به پائین به ترتیب f_1، f_2 و f_3 بنامیم دراین صورت باتوجه به دامنهٔ هریك از این توابع خواهیم داشت:

$$R_{f_1}=\{x\in \mathbb{R} \mid x>5\}$$
$$R_{f_2}=\{x\in \mathbb{R} \mid -1<x\leqslant +1\}$$
$$R_{f_3}=\{x\in \mathbb{R} \mid x\leqslant 1\}$$

و همانطور که مشاهده می‌شود:

$$R_{f_2}\cap R_{f_3}=\{1\}$$

لذا طبق تعریف تابع یك به یك نمی‌باشد. در حقیقت می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} f(0)=0+1=1 \\ f(2)=2-1=1 \end{cases} \Longrightarrow f(0)=f(2) \quad \text{و} \quad 0\neq 2$$

مثال ۲۲- تابع باضابطهٔ $f:[0,\frac{\pi}{2}[\longrightarrow]-\infty,0]$

$$f(x)=\log\cos x$$

مفروض است. آیا این تابع یك به یك است؟

فرض کنیم $f(x_1)=f(x_2)$ لذا با توجه به ضابطهٔ تعریف تابع داریم:

$$\log\cos x_1=\log\cos x_2 \Longrightarrow \cos x_1=\cos x_2$$
$$\Longleftarrow x_1=2k\pi\pm x_2$$

و چون $x_1, x_2\in[0,\frac{\pi}{2}[$ پس $x_1=x_2$ درنتیجه تابع یك به یك است.

مثال ۲۳- تابع با ضابطهٔ $f:\mathbb{N}\to \mathbb{Z}$ مفروض است.

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{زوج } n \\ \frac{n-1}{2} & \text{فرد } n \end{cases}$$

آیا این تابع یك به یك است؟

یك به یك بودن هرضابطه در دامنه خودش بدیهی است و بررسی آن به عهده‌خواننده! حال به تعیین برد دوضابطه می‌پردازیم اگرضابطهٔ بالایی را f_1 و پایینی را f_2 بنامیم.

$$\text{زوج و } n\in \mathbb{N} \Longrightarrow n>0 \Longrightarrow$$
$$f(n)=\frac{-n}{2}<0 \Longrightarrow R_{f_1}=\mathbb{Z}^-$$
$$\text{فرد و } n\in \mathbb{N} \Longrightarrow n\geqslant 1 \Longrightarrow \frac{n-1}{2}\geqslant 0$$
$$\Longrightarrow f(n)=\frac{n-1}{2}\geqslant 0 \Longrightarrow R_{f_2}=\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$$
$$\Longrightarrow R_{f_1}\cap R_{f_2}=\varnothing$$

پس تابع یك به یك است

مثال ۲۴- فرض کنیم توابع f و g به ترتیب با ضابطه‌های

$$f: A_1 \to B_1 \quad \text{و} \quad g: A_2 \to B_2$$
$$f(a_1)=b_1 \qquad g(a_2)=b_2$$

هر دو توابعی یك به یك باشند ثابت کنید که تابع h با ضابطهٔ زیر یك به یك است

$$h: A_1 \times A_2 \to B_1 \times B_2$$
$$h(a_1,a_2)=(f(a_1),g(a_2))$$

فرض کنیم $h(a_1,a_2)=h(a'_1\,,\,a'_2)$ ثابت می‌کنیم

$$(a_1\,,\,a_2)=(a'_1\,,\,a'_2)$$

$$h(a_1\,,\,a_2)=h(a'_1\,,\,a'_2) \Longrightarrow$$

$$(f(a_1)\,,\,g(a_2))=(f(a'_1)\,,\,g(a'_2)) \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} f(a_1)=f(a'_1) \xrightarrow{\text{f یك به یك است}} a_1=a'_1 \\ g(a_2)=g(a'_2) \xrightarrow{\text{g یك به یك است}} a_2=a'_2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow (a_1\,,\,a_2)=(a'_1\,,\,a'_2)$$

پس تابع یك به یك است.

مثال ۲۵- تابع با ضابطهٔ $f: IR \to IR$ مفروض است.

$$f(x)=x^3|x|$$

آیا این تابع یك به یك است؟

ابتدا تابع f را به‌صورت یك تابع دو ضابطه‌ای می‌نویسیم.

$$f(x)=\begin{cases} x^3 \cdot x = x^4 & x \geqslant 0 \\ x^3 \cdot (-x) = -x^4 & x < 0 \end{cases}$$

حال در هر ضابطه خاصیت یك به یکی را بررسی می‌کنیم.

۱ ← اگر $x_1\,,\,x_2 \geqslant 0 \;,\; f(x_1)=f(x_2) \Longrightarrow$

$$x_1^4 = x_2^4 \xrightarrow{x_1,x_2 \geqslant 0} x_1 = x_2$$

۲ ← اگر $x_1\,,\,x_2 < 0 \;,\; f(x_1)=f(x_2) \Longrightarrow$

$$-x_1^4 = -x_2^4 \Longrightarrow x_1^4 = x_2^4 \xrightarrow{x_1,x_2<0}$$
$$-x_1 = -x_2 \Longrightarrow x_1 = x_2$$

بنابراین تابع در هر دو ضابطه‌اش یك به یك است.

از طرفی اگر ضابطهٔ بالایی را f_1 و ضابطهٔ پایینی را f_2 بنامیم در این صورت خواهیم داشت:

$$R_{f_1} = IR^+ \cup \{0\} \;,\; R_{f_2} = IR^-$$

وچون $R_{f_1} \cap R_{f_2} = \varnothing$ پس در کل یك به یك است.

مثال ۲۶- با یك مثال نقض نشان دهید که تابع با ضابطهٔ

$$f: IR \to IR^2$$
$$f(x,y)=(x+y,xy)$$

یك به یك نیست.

$$f(1,-1)=(1+(-1),1\times(-1)) \Longrightarrow$$
$$f(1,-1)=(0,-1)$$
$$f(-1,1)=((-1)+1,(-1)\times 1) \Longrightarrow$$
$$f(-1,1)=(0,-1)$$

یعنی ثابت کردیم $f(1,-1)=f(-1,1)$ ولی

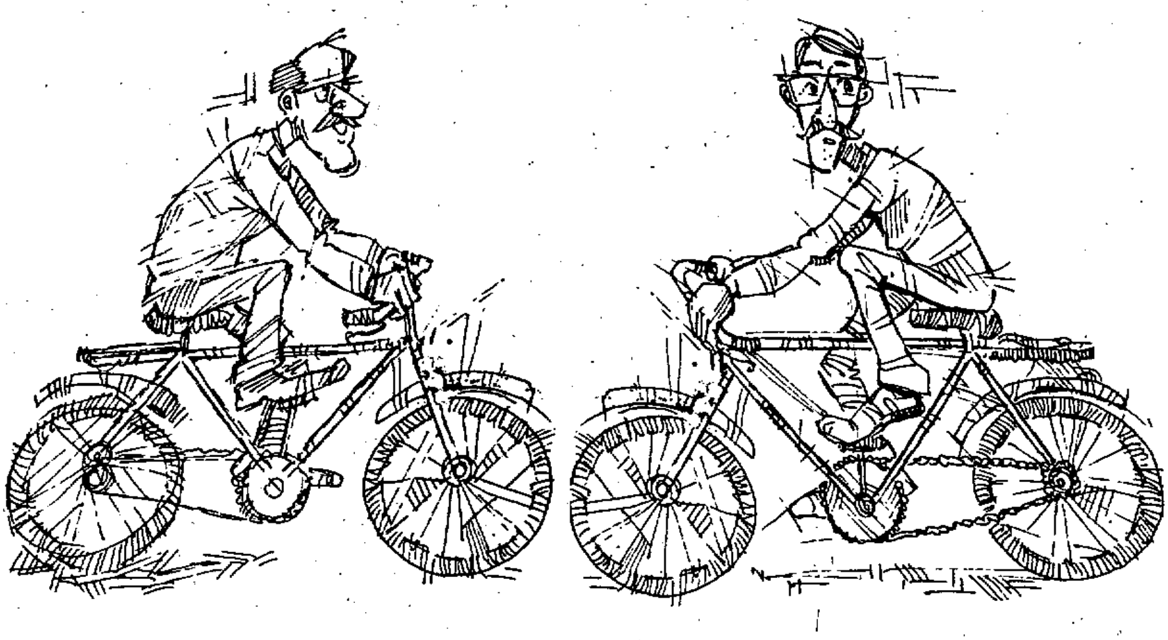
$$(1,-1) \neq (-1,1)$$

بنابراین تابع دو به یك است!

در خاتمهٔ این مقاله متذکر می‌شوم که با توجه به محدودیت‌های موجود حتی‌الامکان سعی شده حالتهایی که احیاناً دانش‌آموزان عزیز دچار ابهاماتی هستند بررسی شود و انشاءالله در شماره‌های بعدی به بررسی خاصیت پوشایی توابع نیز پرداخته خواهد شد.

تفریح اندیشه ۲

A و B، دو دوچرخه سوار، به‌طور همزمان، اولی از نقطهٔ A' و دومی از نقطهٔ B'، آغاز به حرکت می‌کنند. آنها با سرعت ثابت به سوی هم طی طریق می‌نمایند. در ۳۰ دقیقهٔ بعداز یکدیگر می‌گذرند، و A، به سوی نقطهٔ B'، ۲۰ دقیقهٔ بعد به آنجا می‌رسد. B، چند دقیقه بعداز آن که A به نقطهٔ B' می‌رسد، به نقطهٔ A' می‌رسد؟



جواب در صفحهٔ ۹۶

۲ مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان

بهترین شکل یك قوطی حلبی

پی . ال . رو (P.L.Roe)

چندی پیش به کتابی برخوردم که هدفش عام کردن ریاضیات بود، و فصل آخرش با حساب دیفرانسیل و انتگرال سروکار داشت. بخش آخر کتاب که آشکارا نقطهٔ اوج کل اثر بود به حل مسألهٔ تعیین ابعاد یك قوطی حلبی به حجم ماکزیمم، از ماده‌ای به مقدار مفروض، پرداخته بود. البته راه‌حل معروف مسألهٔ مورد بحث این است که مادهٔ به‌کاررفته متناسب با

$$M = ۲\pi r^۲ + ۲\pi rh \qquad (۱)$$

باشد. در این‌صورت نظر به این که $v = \pi r^۲ h$، بنابراین

$$h = \frac{v}{\pi r^۲} \qquad (۲)$$

درج (۲) در (۱) و قراردادن $dM/dr = ۰$ می‌دهد

$$۴\pi r - \frac{۲v}{r^۲} = ۰$$

یا ، بنابه (۲)

$$h = ۲r$$

به عبارت‌دیگر، اقتصادی‌ترین شکل ارتفاعی برابر قطر قاعده‌دارد. سپس نویسندگان کتاب توجه‌خواننده‌را به این‌واقعیت جلب‌کرده بودندکه غالب قوطیها «مربع» نیستند و آن‌گاه به جستجوی توضیح اختلاف مزبور پرداخته، و نتیجه‌گرفته بودند که در دنیای تجارت باید به رسم و رسومات بیش‌از تفکر منطقی بها داد، و آخرین پیام‌شان به خواننده این اثر را داشت که زیبایی ذهنی‌خود پاداش خود است.

این روزها، یك چنین نظرگاههای اشراف منشانه‌ای در مورد ریاضیات، تجملی‌است که تعداد اندکی توان آن‌را دارند. نکتهٔ ظریف در این‌جاست که مثال اختیارشدهٔ فوق، و اختلاف بین مدل‌ریاضی و دنیای‌واقعی، عملاً به‌گونه‌ای نسبتاً دقیق منش داستین و ارزش‌ریاضیات کاربسته‌را مطرح می‌کند.

ابتدا درنظر می‌گیریم که‌چون‌در و قاعدهٔ قوطی‌مورد بحث از ورقه‌ای بریده‌شوند، ضایعاتی‌به وجود می‌آیند، که احتمالاً برای‌تولید، مجدداً بازپس فرستاده می‌شوند، اما ارزش‌اندکی برای قوطی‌ساز دارند. اگرفرض‌کنیم‌که ورقهٔ موردبحث ابتدا به مربعهایی به‌ضلع $۲r$ تقسیم‌می‌شوند، و بعدازهرمربع دایره‌ای بریده می‌شود، بایدبه جای معادلهٔ (۱)

$$M = ۸r^۲ + ۲\pi rh \qquad (۳)$$

قرار داد، که به

$$\frac{h}{r} = \frac{۸}{\pi} \simeq ۲.۵۵ \qquad (۴)$$

منجر می‌شود.

اما تدبیر بهتر (حداقل، ازنظرگاه ریاضی) تقسیم صفحهٔ فلزی‌به شانهٔ عسل مانندی ازشش‌ضلعیهاست. با چشم پوشی از

ضابعات واقع در لبهٔ صفحهٔ مورد بحث، درمی‌یابیم که

$$\frac{h}{r}=\frac{4\sqrt{3}}{\pi}\simeq 2.21 \qquad (5)$$

گرچه این موضوع ممکن است جالب باشد، نه (۴) نه (۵) ابعاد یك قوطی را به خوبی توصیف نمی‌کنند. هنوز بعضی چیزها را فراموش کرده‌ایم. به‌عنوان‌مثال، بررسی یك قوطی حلبی واقعی نشان می‌دهد که سر و ته آن از قرصهایی به شعاع تا اندازه‌ای بزرگتر از r تشکیل شده‌اند، که در این‌صورت در دو انتهای آن قالب می‌شوند. تصویب این مطلب به افزایش (h/r) می‌انجامد، همچنان که هر هزینهٔ فوق‌العاده‌ای در رابطه با شکل‌دادن در قوطی، یا ساختن آن از ماده‌ای ضخیم‌تر چنین می‌کند. مهم و ضروری است که درمورد هزینهٔ قوطی، علاوه بر قیمت مواد آن، مخارج ساخت آن در کارخانه را نیز به حساب آوریم. درصورتی که برخرج‌ترین، عمل وصل کردن پهلو و لبه‌های قوطی باشد، هزینهٔ کل آن، در اقتصادی‌ترین مقطع، متناسب است با

$$c=4\sqrt{3}r^2+2\pi rh+k(4\pi r+h)$$

که در آن k طولی است که می‌تواند به‌ازای قیمت خرید واحد سطح ماده (با این تعریف که معادلهٔ مزبور از لحاظ ابعاد سازگار است) وصل‌شود. در این‌صورت تکرار تدبیرهای پیشین به

$$4\sqrt{3}r-\frac{v}{r^2}+2\pi k-\frac{kv}{\pi r^3}=0 \qquad (6)$$

به عنوان شرطی که باید توسط طرحی بهینه، البته همراه با (۲)، برآورده‌شود، می‌انجامد.

استخراج اطلاعات از (۶) به ابتکار نیاز دارد. تحلیل ابعادی وجود رابطه‌ای را بین (h/r) و (v/k^3) مطرح می‌کند، و در واقع (۶) آن را به دست می‌دهد. بعداز تقسیم طرفین (۶) بر r، جمله‌های آن را به صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم.

$$4\sqrt{3}-\frac{v}{r}\left(\frac{1}{r}\right)^2+$$

$$\frac{2\pi k}{r^{1/3}}\left(\frac{1}{r}\right)^{2/3}-\frac{kv}{\pi^{4/3}}\left(\frac{1}{r}\right)^{8/3}=0$$

و به جای جمله‌های $\left(\frac{1}{r}\right)$ می‌توانیم $(\pi h/v)^{1/2}$ قرارداده مورد زیر را به دست آوریم

$$4\sqrt{3}-\frac{v}{r}\cdot\left(\frac{\pi h}{v}\right)+$$

$$\frac{2\pi k}{r^{1/3}}\left(\frac{\pi h}{v}\right)^{1/3}-\frac{kv}{\pi r^{4/3}}\left(\frac{\pi h}{v}\right)^{4/3}=0$$

و سرانجام، از آن

$$\left(4\sqrt{3}-\frac{\pi h}{v}\right)+$$

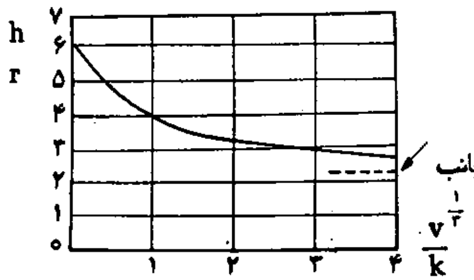
$$\left(\frac{\pi k^3}{v}\right)\left(\frac{h}{r}\right)^{1/3}\left(2\pi-\frac{h}{r}\right)=0 \qquad (7)$$

معادلهٔ اخیر را می‌توان به عنوان معادله‌ای درجه چهارم برحسب $(h/r)^{1/3}$، با k^3/v به‌عنوان پارامتر، درنظر گرفت، اما در این مورد چندین مطلب بلافاصله آشکار می‌شود. ابتدا، اگر وصل کردن ارزان (k) یا قوطی بزرگ (V) باشد، در این صورت طرح اولیه $(h/r=4\sqrt{3}/\pi)$ را داریم. درحالات مقابلی که در آنها وصل کردن گران، یا قوطی کوچك است، $h/r=2\pi$ را به‌دست می‌آوریم. این رابطه، هزینه‌های بسیار زیاد مربوط به ماده را باهزینه‌های کارخانه متناظر می‌کند، نیز، به ازای هر وضعیت دیگری، بنا به قضیهٔ p، مقداری از (h/r) بین این دوحد موجود است که در (۷) صدق می‌کند.

رسم نمودار رابطهٔ کامل (۷)، به سادگی، با تبدیل آن به صورت

$$\frac{v}{k^3}=\pi\left(\frac{h}{r}\right)\left[\frac{2\pi-h/r}{\pi h/r-4\sqrt{3}}\right]^3$$

که اجازهٔ طرح این تصویر را می‌دهد، انجام می‌گیرد.



خط سیر پیشگویی‌شدهٔ مزبور را، که قوطیهای بزرگ باید تقریباً مربع باشند، درحالی که قوطیهای کوچک باید بلند و باریک باشند، می‌توان در سوپر مارکتی تحقیق کرد. به عنوان مثال، قوطیهای مارمالاد پرتقالی را با قوطیهای روغن زیتون مقایسه کنید. با این‌همه قوطیهایی موجودند که با خط‌سیر مزبور جور درنمی‌آیند. گاهی توضیحی مستخرج از طبیعت محصول موجود است (فی‌المثل، حلقه‌های آناناس). قوطیهای بسیار کوچک غالباً از آن چه انتظار می‌رود، شاید برای راحت به‌کار بردن در بازکن، کوتاه و عریض‌ترند. راحت‌بودن نیز می‌تواند درمورد قوطیهایی که از آنها می‌نوشند رعایت شود.

به طورخلاصه، شکست مدل اولیه در پیشگویی شکل واقعی یک قوطی‌حلبی، از مدلی بسیار ساده‌بودن آن ناشی می‌شود. مدلهای کاملتری که در حوزهٔ ریاضیات دبیرستانی قرار دارند، شروع به آشکار کردن تابع واقعی می‌کنند. می‌توان بدون پیچیده کردن تحلیل به جست‌وجوی بسیاری از سؤالات دیگر پرداخت. مثلاً، آیا در صورتی که ورقه‌های فلزی، تنها در اندازه‌های استاندارد در دسترس باشند، در استدلال فوق تأثیر می‌کنند؟ یا اگر بدانیم که ماشینهای قوطی‌سازی عملاً چگونه کار می‌کنند؟ آیا طرحمان در موردحجم مفروضی‌است؟ یا وزن مفروضی از محتویات قوطی؟ چگونه قوطیها برای حمل و نقل بسته‌بندی می‌شوند؟ اندکی منفک‌شدن از ابعادبهینه چقدرهزینه‌برمی‌دارد؟ آیا این‌هزینه با ذخیرهٔ دیگری‌جبران می‌شود؟

به این‌ترتیب مجال فراوانی برای گسترش‌درکی‌راستین از چگونگی سهم ریاضیات در تکنولوژی موجود می‌شود.

تفریح اندیشه ۳

خانم B، قطار به مقصد خانه‌اش را در ساعت ۴ سوار می‌شود و در ساعت ۶ به ایستگاه مقصد می‌رسد. همه روزه، شوهرش که با سرعتی ثابت رانندگی می‌کند، او را در ایستگاه مورد بحث ملاقات می‌کند. یک روز B، قطار را یک ساعت زودتر می‌گیرد و در ساعت ۵ وارد می‌شود. شوهرش برای ملاقات با او منزل را در ساعت همیشگی ترک می‌کند. بنابراین B پیاده به سمت خانه حرکت می‌کند. شوهر B او را در راه می‌بیند و آنها ۲۰ دقیقه زودتر از وقت معمول به خانه می‌رسند. B چند دقیقه پیاده حرکت کرده است؟

جواب در صفحهٔ ۹۶

ادب ریاضی

زیبایی ریاضیات

(The Beauty of Doing Mathematics , Serge Lang)

آنچه را که شخصی واقعی می‌یابد، شخص دیگر مجرد تشخیص می‌دهد. این موضوع نسبت به ذهنتان، دانسته‌هاتان، استعداد ریاضیتان، هوشتان، ذوقتان، و احساستان کاملاً نسبی است. مفهوم مطلقی از اینکه واقعی چیست و مجرد کدام است وجود ندارد. فی‌المثل، ممکن است چیزی که دیروز یا امروز بس مجردش یافته‌اید، فردا در نظرتان واقعی بیاید... این موضوع، تا اندازه‌ای، مسألهٔ عادت است، و به اوضاع و احوال بستگی دارد. در این مورد پاسخ مطلقی موجود نیست. البته، ریاضی‌دان می‌تواند کاری را که دیگران درک نمی‌کنند انجام دهد. و این دیگران می‌توانند در بس مجرد یافتن آن، واکنش روانی داشته باشند، و آن را به جای «درک نمی‌کنم» بگویند.

پوانکاره ادعا کرد که عنصر غالب در آفرینش ریاضی، ره یافت زیبایی شناسانه است نه دیدگاه منطقی. هاردی در جایی نوشت که الگوهای ریاضیدان، همچون الگوهای نقاش یا شاعر، باید زیبا باشند. دیراک، فیزیکدان بزرگ نظری، نوشت که زیبایی نهفته در معادلات یک فیزیکدان خیلی مهمتر از سازگاری این معادلات با واقعیات تجربی است... قضاوت زیبایی شناسانه در ریاضیات وجود دارد، اهمیت دارد، می‌تواند تعلیم داده شود، می‌تواند از نسلی به نسل دیگر، از معلم به شاگرد و از نویسنده به خواننده، منتقل شود. اما در این باره که این ره یافت چیست و چگونه عمل می‌کند، توصیف رسمی چندانی دردست نیست.

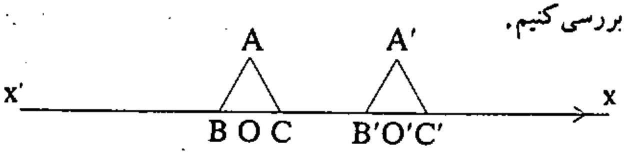
از «تجربهٔ ریاضی» اثر فیلیپ دیویس و روبن هرش
جُنگ ریاضی

مثالهای هندسی برای تابعهای گسسته

دکتر احمد شرف‌الدین

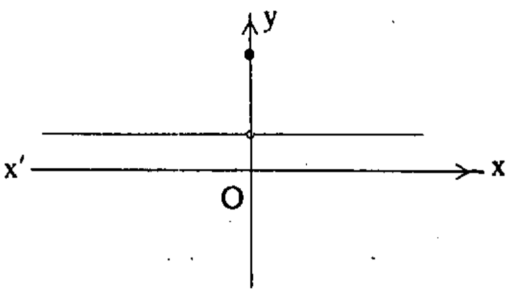
مثالهای هندسی در بعضی موارد احکام ریاضی را ملموس و فهم آنها را آسان می‌کنند. در سطور زیر چند مثال هندسی برای تابعهای گسسته طرح می‌کنیم.

مثال (۱). در صفحه P دو مثلث متساوی‌الاضلاع مساوی ABC و $A'B'C'$ را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که دو ضلع BC و $B'C'$ آنها بر روی محور $x'ox$ واقع‌اند و هر دو مثلث در یک طرف آن محور قرار دارند. وسطهای دو پاره‌خط BC و $B'C'$ را به ترتیب O و O' می‌نامیم. طول نقطه O' بر محور $x'ox$ را با x نشان می‌دهیم. شکل حاصل از اجتماع دو مثلث مذکور را φ می‌نامیم. مثلث ABC را ثابت نگاه می‌داریم و مثلث $A'B'C'$ را روی محور $x'x$ می‌لغزانیم. می‌خواهیم تغییرات تعداد محورهای تقارن شکل φ را برحسب x بررسی کنیم.

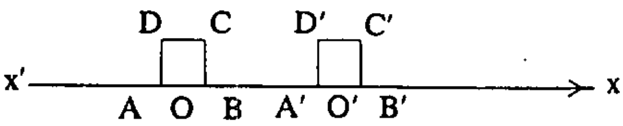


تعداد محورهای تقارن شکل φ را y می‌نامیم. y تابع x است. این تابع را به‌صورت $y = f(x)$ می‌نویسیم.

هنگامی که نقطه O' در سمت راست O قرار دارد تعداد محورهای تقارن شکل φ مساوی یک است. اما هنگامی که مثلث $A'B'C'$ بر مثلث ABC منطبق شود یعنی $x = 0$ شود شکل φ یکمرتبه دارای سه محور تقارن می‌شود. وقتی نقطه O' در سمت چپ O قرارگیرد شکل φ دارای یک محور تقارن است. پس تابع $y=f(x)$ به ازای $x \neq 0$ دارای یک محور تقارن و به ازای $x = 0$ دارای سه محور تقارن است. این تابع در $x = 0$ گسسته است. نمودار تابع مورد نظر چنین است.



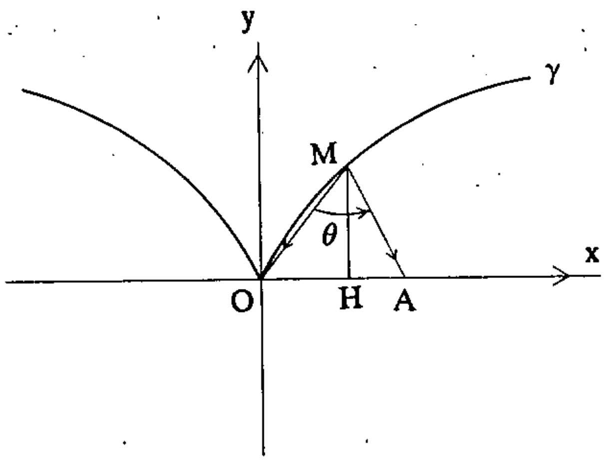
مثال (۲). در صفحه P دو مربع مساوی $ABCD$ و $A'B'C'D'$ را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که دو ضلع AB و $A'B'$ آنها بر روی محور $x'ox$ واقع‌اند و هر دو مربع در یک طرف آن محور قرار دارند. وسطهای پاره‌خطهای AB و $A'B'$ را به ترتیب O و O' می‌نامیم. طول نقطه O' بر محور $x'x$ را با x نشان می‌دهیم. شکل حاصل از اجتماع دو مربع مذکور را φ می‌نامیم. مربع $ABCD$ را ثابت نگاه می‌داریم و مربع $A'B'C'D'$ را روی محور $x'x$ می‌لغزانیم. می‌خواهیم تغییرات تعداد محورهای تقارن شکل φ را برحسب x بررسی کنیم.



تعداد محورهای تقارن شکل φ را y می‌نامیم. y تابع x است. این تابع را به‌صورت $y=f(x)$ می‌نویسیم. به ازای تمام مقادیر $x \neq \circ$ شکل φ دارای دو محور تقارن است. به ازای $x = \circ$ شکل دارای چهار محور تقارن است. تابع $y = f(x)$ به ازای $x = \circ$ گسسته است.

مثال (۳). دو مثال بالا را در مورد دو چند ضلعی منتظم و همچنین دو چند وجهی منتظم بررسی کنید.

مثال (۴). در دستگاه مختصات دکارتی xoy، منحنی γ نمودار معادله $y = x^{\frac{۲}{۳}}$ و نقطه $A(۱,\circ)$ را درنظر می‌گیریم. نقطه H را روی محور $x'x$ درنظر می‌گیریم و طول آن را x می‌نامیم. از نقطه H عمودی بر خط $x'x$ رسم می‌کنیم و نقطه تلاقی آن خط عمود را با منحنی γ، نقطه M می‌نامیم. اندازه زاویه $(\vec{MO}\,,\,\vec{MA})$ را θ می‌نامیم. θ تابع x است زیرا به ازای هر نقطه H از محور $x'x$ فقط یک نقطه M از منحنی γ حاصل می‌شود و به ازای هر نقطه $M \neq O$ از منحنی γ یک، فقط یک زاویه θ به‌دست می‌آید. این تابع را به‌صورت $\theta = f(x)$ می‌نویسیم.



هنگامی که نقطه H بر نقطه O قرار گیرد نقطه M بر نقطه O قرار خواهد گرفت. در این صورت بردار $\vec{MA}$ بر بردار $\vec{OA}$ منطبق می‌شود اما امتداد بردار MO نامعین خواهد بود. لذا تابع $\theta = F(x)$ به ازای $x = \circ$ تعریف نشده است. تابع مذکور به ازای $x = \circ$ گسسته است.

ادب ریاضی

مدل‌سازی ریاضی چیست؟

مدل سازی ریاضی[۱] عبارت از کاربرد مهارتهای ریاضی[۲] در به دست آوردن پاسخهای مفید به مسائل واقعی است.

یادگیری به کار بردن مهارتهای ریاضی بسی مشکلتر از یادگیری خود ریاضیات است.

مدلها در حوزهٔ بسیار وسیعی از کاربردها به کار می‌روند، به طوری که بعضی از آنها در ابتدا نشان نمی‌دهند که طبیعتی ریاضی دارند.

مدلها غالباً سنجش سریع و آسان موارد مختلف را میسر کرده، منجر به جوابهای بهینه‌ای[۳] می‌شوند که در غیر این صورت واضح نیستند.

در مورد مدل سازی ریاضی نه قواعد دقیق[۴] نه پاسخهای صحیح[۵] موجود نیست.

مدل سازی را تنها از راه انجام دادن می‌توان آموخت.

از:

Guide To Mathematical Modelling Dilwyn Edwards & Mike Hamson

ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور

1. Mathematical Modelling
2. Mathematical Skills
3. Optimal Solutions
4. Precise Rules
5. Correct Answers

اثبات نادرستی و ناتمامی قواعد استنتاج

غلامرضا یاسی‌پور

حقیقت را چو ما صد پاره کردیم
تمیز ثابت و سیاره کردیم
در آن عالم که جزو از کل فزون است
قیاس رازی و طوسی جنون است[1]
«اقبال لاهوری»

اثبات نادرستی[2]

درصورتی که بتوانیم نشان دهیم که تخصیصی از ارزشهای راستی[3] چنان موجود است که به ازای آن جمیع مقدمات[4] استدلالی[5] راست و نتیجهٔ[6] آن دروغ است ثابت کرده‌ایم که استدلال مورد بحث نادرست است. این کار را در حالت کلی با استفاده از رسم جدول ارزش[7] انجام می‌دهیم، اما این طریق به خصوص در مواردی که تعداد متغیرهای گزاره‌ای[8] موجود در استدلال زیاد باشد، طریقی طولانی و پرزحمت است. در این صورت اولی چنان است که طریق زیر را،که بسیار ساده‌تر است، اما به اندکی تمرکز حواس نیاز دارد، انتخاب کنیم.

در این طریق ابتدا از نتیجه آغاز می‌کنیم و به متغیرهای گزاره‌ای واقع در آن ارزشهایی چنان تخصیص می‌دهیم که آن را دروغ کنند. سپس به سراغ مقدمات می‌رویم و با رعایت ارزشهای قبلاً داده شده ارزشهایی به متغیرهای گزاره‌ای باقیمانده چنان تخصیص می‌دهیم که مقدمات را راست کنند. اگر چنین عملی امکان‌پذیر باشد استدلال‌مان نادرست است والاّ درست می‌باشد.

مثال ۱. نادرستی استدلال زیر را اثبات کنید:

اگر باران می‌بارد یا بهار است یا پاییز.
اگر پاییز باشد هوا سرد و ناخوشایند است.
هوا سرد نیست.
درنتیجه، اگر باران می‌بارد هوا ناخوشایند است.

فرض می‌کنیم:

A:	باران می‌بارد
B:	بهار است
C:	پاییز است
D:	هوا سرد است
E:	هوا ناخوشایند است

و به این ترتیب استدلال فوق را به صورت زیر علامتی می‌کنیم:

$A \Rightarrow (B \vee C)$

$C \Rightarrow (D \vee E)$

$\sim D$

$\therefore\ A \Rightarrow E$

اکنون کاری می‌کنیم که نتیجهٔ استدلال یعنی $A \Rightarrow E$ دروغ شود و برای این کار به A و E به‌ترتیب T و F را تخصیص می‌دهیم. برای این‌که مقدمهٔ سوم یعنی $D\sim$ راست باشد باید D دروغ باشد، در این صورت باتوجه به این‌که E هم دروغ بوده برای راست شدن مقدمهٔ دوم $(C \Rightarrow (D \vee E))$ ناچاریم که به C ارزش F را تخصیص دهیم. اکنون به سراغ مقدمهٔ اول می‌رویم. به مقدم[۹] آن یعنی A قبلاً ارزش T داده‌ایم، بنابراین برای این که مقدمه راست شود باید تالی[۱۰] آن راست باشد. اما تالی آن ترکیبی فصلی[۱۱] است که یک مؤلفهٔ[۱۲] آن (C) قبلاً F گرفته، بنابراین باید به مؤلفهٔ دیگر آن (B)، T بدهیم. به این ترتیب توانستیم به متغیرهای گزاره‌ای واقع در صورت استدلالی‌مان ارزشهای راستی‌ای چنان تخصیص بدهیم که مقدمات استدلال را راست ونتیجهٔ آن‌را دروغ کنند، و دراین‌صورت استدلال نادرست است.

برای سادگی کارمی‌توان مراحل فوق را به‌ترتیب و با آغاز ازنتیجه و بعد مقدمات و سپس متغیرهای گزاره‌ای درسطری مطابق سطر زیر نوشت:

$A \Rightarrow E$	$\sim D$	$C \Rightarrow (D \vee E)$	$A \Rightarrow (B \vee C)$	A	B	C	D	E
F	T	T	T	T	T	F	F	F

مثال ۲. نادرستی استدلال زیر را اثبات کنید:

$T \equiv U$

$U \equiv (V \wedge W)$

$V \equiv (T \vee X)$

$T \vee X$

$\therefore\ T \wedge X$

چون به T یا X ارزش F دهیم نتیجه دروغ می‌شود، در این صورت دو حالت داریم:

۱) ارزش T دروغ و ارزش X راست است. آنگاه $T \vee X$ راست می‌شود، پس مقدمهٔ ۴ راست است و برای راست شدن مقدمهٔ ۳ باید V راست باشد. چون T دروغ است باید U دروغ باشد تا مقدمهٔ ۱ راست شود و به این ترتیب برای راستی مقدمهٔ ۲ باید مؤلفهٔ دوم آن $(V \wedge W)$ دروغ باشد و چون V راست است ناچار باید W دروغ باشد. به این ترتیب سطر زیر را داریم:

T	U	V	W	X
F	F	T	F	T

۲) ارزش T راست و ارزش X دروغ است. با استدلالی مشابه استدلال فوق سطر زیر را خواهیم داشت:

T	U	V	W	X
T	T	T	T	F

تبصره. در اینجا حالتی که در آن T و X هر دو دروغ باشند به کار نمی‌آید زیرا به ازای این حالت، مقدمهٔ ۴ $(T \vee X)$ دروغ می‌شود.

اکنون به اثبات ناتمام بودن قواعد استنتاج[۱۳]مان می‌پردازیم. نوزده قاعده‌ای که تاکنون معرفی شده‌اند ناتمام[۱۴]اند، به عبارت دیگر استدلال‌های درست تابع ارزشی[۱۵] وجود دارند که درستی‌شان را نمی‌توان با استفاده از این نوزده قانون اثبات کرد. در مورد بحث و تعیین این ناتمامی[۱۶] لازم است که تصور خاصیت ویژه‌ای را که «نسبت به یک مجموعهٔ قوانین استنتاج[۱۷] موروثی» است معرفی کنیم، و برای این منظور تعریف زیر را مطرح می‌کنیم:

خاصیت ویژهٔ $\varnothing$ نسبت به یک مجموعهٔ قوانین استنتاج موروثی است اگر و تنها اگر وقتی که $\varnothing$ به یک یا بیشتر از یک گزاره تعلق داشته باشد به هر گزاره که به کمک آن قوانین استنتاج از آنها استنتاج می‌شود نیز متعلق باشد.

به عنوان مثال، راستی خاصیت ویژه‌ای است که نسبت به قوانین نوزده‌گانهٔ استنتاجی که قبلاً معرفی شدند موروثی است. همان طور که قبلاً نیز خاطرنشان شده، هر نتیجه، درصورتی که بتواند به کمک نوزده قانون استنتاجمان از مقدمات راست استنتاج شود، راست است، و در حقیقت، نباید هیچ یک از قوانین استنتاجی را که راستی نسبت به آنها موروثی نیست به کار بریم.

اکنون برای اینکه ثابت کنیم که یک مجموعهٔ قوانین استنتاج ناتمام است باید خاصیت ویژهٔ $\varnothing$ و استدلال درست α را طوری پیدا کنیم که

(۱) $\varnothing$ نسبت به آن مجموعهٔ قوانین استنتاج موروثی باشد، و

(۲) $\varnothing$ به مقدمات α متعلق باشد اما به نتیجهٔ آن تعلق نداشته باشد.

خاصیت ویژهٔ راستی نسبت به هر مجموعه از قوانین استنتاج که ممکن است به آن به طوری جدی علاقه‌مند باشیم موروثی است، و بنابراین در شرط (۱) صدق می‌کند. اما از آنجا که α یک استدلال درست است، از تعریفمان از درستی بلافاصله نتیجه می‌شود که راستی هیچ گاه نمی‌تواند در شرط (۲) صدق کند. درنتیجه برای اثبات ناتمامی قوانین نوزده‌گانه‌مان، باید خاصیت ویژهٔ دیگری غیر از راستی، که نسبت به نوزده قانونمان موروثی باشد، و بتواند به مقدمات استدلال درستی مانند α متعلق باشد اما به نتیجهٔ آن تعلق نداشته باشد بیابیم.

برای به دست آوردن چنین خاصیت ویژه‌ای، نمونهٔ سه عضوی‌ای را، که علامات واقع در قوانین نوزده‌گانه‌مان بتوانند برحسب آن تفسیر شوند، معرفی می‌کنیم. این سه عضو اعداد ۰، ۱ و ۲ اند که نقشهایی مشابه نقشهای ارزشهای راستی راست (T) و دروغ (F) قبلاً معرفی شده ایفا می‌کنند. هر گزاره یکی از این سه عضو نمونه را به خود تخصیص می‌دهد، و گفته می‌شود که یکی از سه مقدار ۰، ۱، یا ۲ را به‌خود می‌گیرد، قبول می‌کند یا دارد. درست چون در موارد قبل که متغیرهای گزاره‌ای p، q، r، ... مجاز بودند که دو ارزش راستی T و F را بگیرند در اینجا نیز مجاز می‌کنیم که متغیرهای گزاره‌ای p، q، r، ... سه ارزش ۰، ۱ و ۲ را بگیرند.

پنج علامت «~»، «∧»، «∨»، «⇒» و «≡» را، که در نوزده قانونمان ظاهر می‌شوند، می‌توان بار دیگر برای (یا برحسب) نمونهٔ سه عضوی‌مان بااستفاده از جداول سه ارزشی زیر تعریف کرد:

p	~p
۰	۲
۱	۱
۲	۰

p	q	p ∧ q	p ∨ q	p ⇒ q	p ≡ q
۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۱	۱
۰	۲	۲	۰	۲	۲
۱	۰	۱	۰	۰	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۲	۲	۱	۱	۱
۲	۰	۲	۰	۰	۲
۲	۱	۲	۱	۰	۱
۲	۲	۲	۲	۰	۰

در مورد این تعاریف می‌توان تعاریف تحلیلی (اما معادل) به گونه‌ای دیگری را که در آنها «min (x,y)» نمایشگر حداقل اعداد x و y و «max (x,y)» نمایشگر حداکثر اعداد x و y است، به ترتیب زیر، به دست داد.

$$\sim p = ۲ - p$$
$$p \wedge q = \max(p, q)$$
$$p \vee q = \min(p, q)$$
$$p \Rightarrow q = \min(۲ - p, q)$$
$$p \equiv q = \max(\min(۲ - p, q), \min(۲ - q, p))$$

خاصیت ویژهٔ مطلوب $\varnothing$ که نسبت به نوزده قانون استنتاجمان

موروثی است،خاصیت ویژهٔ دارا بودن ارزش صفر است. برای اینکه ثابت کنیم که این خاصیت نسبت به قوانین نوزده‌گانهٔ مورد بحث موروثی است کافی است که نشان دهیم که نسبت به هر یک از آنها موروثی است، این مطلب را می‌توان درمورد هریک از این قوانین به کمک جدولی سه ارزشی نشان داد. به عنوان مثال، این مطلب را که داشتن ارزش ۰ نسبت به قانون انفصال موروثی است، می‌توان با استفاده از بررسی جدول فوق که ارزش «$p \Rightarrow q$» را به‌عنوان تابعی از ارزشهای «p» و «q» تعریف می‌کند ملاحظه کرد. در این جدول مقدمات «p» و «$p \Rightarrow q$» تنها در سطر اول ارزش ۰ دارند، و در این سطر نتیجهٔ «q» نیز ارزش ۰ دارد. بررسی همین جدول نشان می‌دهد که داشتن ارزش ۰ برای تسهیل، ترکیب عطفی، و جمع نیز موروثی است. قرار دادن «$\sim p$» و «$\sim q$» در ستونهای اضافی نشان می‌دهد که داشتن ارزش ۰ نسبت به انفصال نقیض و قیاس فاصل نیز موروثی است. این مطلب که ارزش مورد بحث نسبت به قیاس فرضی نیز موروثی است را می‌توان با استفاده از جدول روبرو نشان داد:

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$
۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۰	۱	۱
۰	۰	۲	۰	۲	۲
۰	۱	۰	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۲	۱	۱	۲
۰	۲	۰	۲	۰	۰
۰	۲	۱	۲	۰	۱
۰	۲	۲	۲	۰	۲
۱	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۰	۱	۱
۱	۰	۲	۰	۲	۱
۱	۱	۰	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۲	۱	۱	۱
۱	۲	۰	۱	۰	۰
۱	۲	۱	۱	۰	۱
۱	۲	۲	۱	۰	۱
۲	۰	۰	۰	۰	۰
۲	۰	۱	۰	۱	۰
۲	۰	۲	۰	۲	۰
۲	۱	۰	۰	۰	۰
۲	۱	۱	۰	۱	۰
۲	۱	۲	۰	۱	۰
۲	۲	۰	۰	۰	۰
۲	۲	۱	۰	۰	۰
۲	۲	۲	۰	۰	۰

در این جدول تنها سطرهای اول، دهم، نوزدهم، بیست و دوم، بیست و پنجم، بیست و ششم، و بیست و هفتم‌اند که مقدمات «$p \Rightarrow q$» و «$r \Rightarrow q$» در آنها ارزش ۰ دارند، و در هر یک از اینها نتیجهٔ «$p \Rightarrow r$» نیز دارای ارزش ۰ است، گرچه برای نشان دادن اینکه ارزش ۰ داشتن نسبت به برهان قاطع ذوحدین بانی و برهان قاطع دو حدین مخرب نیز موروثی است به جدولهایی بزرگتر از این جدول نیاز است، اما این جداول به سادگی رسم می‌شوند. (هر چند که ابداً به رسم آنها نیاز نیست، چه تعاریف تحلیلی سابق‌الذکر می‌توانند برای نشان دادن اینکه ارزش ۰ نسبت به برهانهای ذوحدین، آن چنان که بعداً نشان می‌دهیم، موروثی است، به کار روند.)

هنگامی که جداول سه ارزشی را، برای اثبات اینکه داشتن ارزش ۰ نسبت به این عمل که به جای گزاره‌ها معادلهای منطقی‌شان را قرار دهیم موروثی است، رسم می‌کنیم، به این موضوع نیز توجه می‌کنیم که هر چند که لازم نیست که خود دو شرطیها ارزش ۰ داشته باشند، عباراتی که در طرفین علامت تعادل واقع شده‌اند لزوماً دارای یک ارزشند. به عنوان مثال،در جدول مربوط به قانون اول دومورگان، (صفحه‌بعد) عبارات معادل «$\sim(p \wedge q)$» و «$\sim p \vee \sim q$» در هر سطر دارای یک ارزشند حتی اگر گزارهٔ تعادلشان از داشتن ارزش ۰ در سطرهای دو، چهار، و پنج خودداری کند. اما باید واضح باشد که داشتن ارزش ۰ نسبت به قرار دادن هر گزارهٔ معادل به جای هر گزاره یا قسمتی از آن، موروثی است. می‌توان دراثبات دیگری از این موضوع که داشتن ارزش

۰ نسبت به این نوزده قانون موروثی است از تعاریف تحلیلی علایم منطقی‌مان استفاده به‌عمل آورد، و به‌عنوان مثال، این مطلب را که داشتن ارزش ۰ نسبت به برهان قاطع ذوحدین بانی موروثی است، می‌توان توسط استدلال زیر نشان داد. بنا به فرض، «$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)$» و «$p \vee r$» هردو دارای ارزش ۰ اند. درنتیجه، هم «$p \Rightarrow q$» هم «$r \Rightarrow s$» ارزش ۰ دارند، بنابراین یا $p = ۲$ یا $q = ۰$ و، یا $r = ۲$ یا $s = ۰$ است. از آنجاکه «$p \vee r$» دارای ارزش ۰ است، یا $p = ۰$ یا $r = ۰$ می‌باشد. اگر $p = ۰$، دراین صورت $p \neq ۲$ و از آن $q = ۰$، و اگر $r = ۰$ در این صورت $r \neq ۲$ و از آن $s = ۰$، بنابراین یا $q = ۰$ یا $s = ۰$، که از آن همان‌طور که می‌خواستیم نشان دهیم «$q \vee s$» ارزش ۰ دارد.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$
۰	۰	۲	۲	۰	۲	۲	۰
۰	۱	۲	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۲	۲	۱	۲	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۲	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۰	۱	۱	۱	۱
۱	۲	۱	۱	۲	۰	۰	۰
۲	۰	۰	۲	۲	۰	۰	۰
۲	۱	۰	۰	۲	۰	۰	۰
۲	۲	۰	۱	۲	۰	۰	۰

اکنون که نشان دادیم که خاصیت ویژهٔ داشتن ارزش ۰ نسبت به قوانین نوزده‌گانه‌مان موروثی است، برای اثبات ناتمامی این قوانین تنها به این نیاز است که استدلال درستی را ارائه دهیم که مقدماتش ارزش ۰ دارند و نتیجه اش‌ارزش ۰ ندارد. چنین استدلالی

$$A \Rightarrow B$$
$$\therefore A \Rightarrow (A \wedge B)$$

است که درستی‌اش به سادگی با استفاده از جدول ارزش مشخص می‌شود. در این استدلال، درحالتی که «A» ارزش ۱ و «B» ارزش ۰ دارد، مقدمهٔ «$A \Rightarrow B$» دارای ارزش ۰ است، درحالی‌که نتیجهٔ «$A \Rightarrow (A \wedge B)$» ارزش ۱ دارد. به این ترتیب نوزده قانونی که تاکنون معرفی شده‌اند ناتمامند.

\+ \+ \+

مراجع:

Irving M.Copi , Symbolic Logic

یادداشتها

۱. از کتاب گلشن راز جدید که اقبال لاهوری آن را در مقابل گلشن راز شیخ محمود شبستری سروده است. در این بیت مقصود از رازی «امام فخر رازی» و منظور از طوسی «خواجه نصیر طوسی» است.

2 - Proving Invalidity
3 - Truth Values
4 - Premisses
5 - Argument
6 - Conclusion
7 - Truth Table
8 - Statement Variable
9 - Antecedent
10 - Consequent
11 - Disjunction
12 - Component

۱۳. به مقالهٔ قواعد استنتاج مجلهٔ برهان شمارهٔ ۳ سال اول رجوع شود.

14 - Incomplete

۱۵. Truth Functionally Valid Arguments، استدلالاتی که مقدمات و نتیجه‌شان از گزاره‌های ساده یا مرکب تابع ارزش تشکیل شده باشند، و گزاره‌های مرکب تابع ارزش گزاره‌های مرکبی هستند که ارزش‌شان از ارزشهای مؤلفه‌هاشان تبعیت می‌کند، به‌عنوان مثال $p \wedge q$ یک گزارهٔ مرکب تابع ارزش است، زیرا ارزشش به ارزشهای مؤلفه‌های آن یعنی p و q وابسته است، و از آنها پیروی می‌کند.

۱۶. این اثبات از Professor Leo Simons از دانشگاه سین سیناتی است.

17- Set of Rules of Inference

ادب ریاضی

شرح حال اقلیدس

دربارهٔ اقلیدس حتی کمتر از فیثاغورس می‌دانیم. تنها این را می‌دانیم که حدود ۳۰۰ ق.م. رشد کرد و در اسکندریه، شهر یونانی واقع در مصری که در ۳۲۲ ق.م. توسط اسکندر بنا شد، آموزش دید. دو داستان در مورد او گفته‌اند. در اولی ـ همانند داستانی که در مورد منایخموس و اسکندر گفته شده ـ اقلیدس به سلطان بطلمیوس چنین می‌گوید که «در هندسه راه شاهانه وجود ندارد»، و دومی دربارهٔ دانشجویی است که سؤال تکراری «فایدهٔ آموختن ریاضیات چیست؟» را مطرح کرده است. طبق روایت داستان، اقلیدس غلام خود را می‌خواند و می‌گوید: «سکه‌ای به او بده چه او می‌خواهد از آنچه می‌آموزد فایده برد.»

مهمترین واقعیت زندگی اقلیدس بدون شک نوشتن کتاب مقدمات[1] است، گرچه نمی‌دانیم چه مقدار از ریاضیات واقع در آن عملاً کار خود او بوده است.

محقق است که هندسهٔ مقدماتی مثلثها و دوایر، پیش از روزگار اقلیدس شناخته شده بود. بعضی از جالبترین قسمتهای مقدمات نیز از ریاضیدانهای پیشین‌اند. نظریهٔ کنگها در کتاب V، هم چنان که «روش افناء» در کتاب XII مقدمات، منسوب به اودوکسوس[2] (حدود ۴۰۰-۳۴۷ ق.م.) است. نظریهٔ چند وجهی‌های منتظم در کتاب XIII، (حداقل جزئاً)، منسوب به تئتتوس[3] (حدود ۴۱۵-۳۶۹ ق.م.) است. اما شرکت اقلیدس در تنظیم و نشر معرفت ریاضی، باعث شد که سهم تحقیق او، هر چه که بوده، از رشد باز ایستد. مدت ۲۰۰۰ سال مقدمات اقلیدس نه تنها هستهٔ مرکزی تعلیم ریاضی بلکه قلب فرهنگ غربی بود. در واقع بیشتر ستایشهای حرارت‌آمیز از مقدمات نه از جانب ریاضیدانها که از طرف فیلسوفان، سیاستمداران، و دیگران بود.

1. Elements
2. Eudoxus
3. Theaetetus

روح واقعی لذت، اعتلا و ماورای انسان بودن، که سنگ محک برترین فضیلتهاست، به همان قطعیت شعر، در ریاضیات نیز پیدا می‌شود.

برتراندراسل ـ ترجمهٔ محمد هادی فراهی
پیک ریاضی ج ۳ ش ۴

طرح و حلّ مسائل اساسی ریاضی (۲)

به روشهای مقدماتی

مساله فرعی

چند جواب درست و مثبت معادلهٔ :

$$x+y+z=n$$

در نامساویهای $x \le y+z$ ، $y \le x+z$ ، $z \le x+y$ صدق می‌کنند؟ در این مورد باید جوابهائی که تنها در ترتیب جملات متفاوتند، متفاوت در نظر گرفته شوند.

حل. از آنجا که $z=n-x-y$ ، جواب مسأله به مجرد این‌که x و y مشخص شوند به‌طور کامل معین می‌شود. اکنون به بررسی شرایطی که باید x و y، به خاطر این‌که x، y و $z=n-x-y$ در نامساویهای داده شده صدق کنند، برقرار نمایند می‌پردازیم.

۱. نامساوی $z \le x+y$ ، $n-x-y \le x+y$ را، که معادل $x+y \ge \frac{n}{2}$ است، به‌دست می‌دهد.

۲. نامساوی $y \le x+z$ ، $y \le x+n-x-y$ را، که معادل $y \le \frac{n}{2}$ است، به‌دست می‌دهد.

۳. نامساوی $x \le y+z$ ، $x \le y+n-x-y$ ، یا $x \le \frac{n}{2}$ را به‌دست می‌دهد.

۴. نامساویهای $x>0$ ، $y>0$ ، $z>0$ اینک به $x>0$ ، $y>0$ ، $x+y<n$ تبدیل می‌شوند.

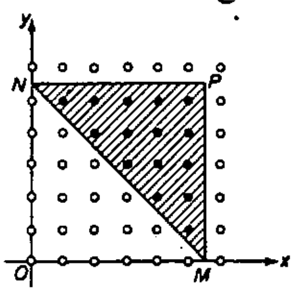
نتیجهٔ مسأله‌مان تعیین تعداد ازواج اعداد صحیح (x,y) با

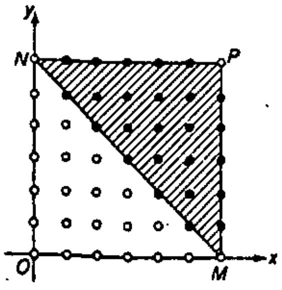
$$0<x \le \frac{n}{2}, \quad 0<y \le \frac{n}{2}, \quad \frac{n}{2} \le x+y<n$$

است. شرایط فوق را می‌توان به‌طور هندسی به‌طریق زیر تعبیر کرد. دستگاه مختصات قائمی در صفحه، چون در شکل زیر، رسم کرده، فرض می‌کنیم که (x,y) مختصات نقطه‌ای در این دستگاه باشد. سه خطی که معادلاتشان :

$$x=\frac{n}{2} \text{،} \quad y=\frac{n}{2} \text{ و } \quad x+y=\frac{n}{2}$$

هستند مثلث سایه‌خورده را تشکیل می‌دهند، و نامساویهامان به این خواسته منجر می‌شوند که (x,y) باید داخل این مثلث یا برمرز آن، اما نه بریکی از رئوس M ، N ، P ی آن، باشد. بنابراین باید تعداد نقاط با مختصات صحیح واقع در این ناحیه را (که در شکلها با نقاط سیاه مشخص شده‌اند) معین کنیم. اکنون لازم است که مطابق با این که n زوج یا فرد باشد، دو حالت تمیز دهیم.





حالت ۱: n زوج. در این حالت $\frac{n}{۲}$ صحیح است، و وضعیت نشان داده شده در شکل الف.(با $n = ۱۲$) را داریم. بر قطعهٔ OM ، $\frac{n}{۲} + ۱$ نقطه موجودند. در نتیجه تعداد کل نقاط واقع در مربع OMPN برابر $(\frac{n}{۲} + ۱)^۲$ است. $\frac{n}{۲} + ۱$ نقطه از این نقاط بر قطر مربع واقع‌اند، وبنابراین تعداد نقاط واقع در سمت راست این قطر

$$\frac{۱}{۲}\{(\frac{n}{۲}+۱)^۲-(\frac{n}{۲}+۱)\} = \frac{n(n+۲)}{۸}$$

است. دراین‌صورت تعدادنقاط داخل مثلث MNP(من جمله رئوس آن)

$$\frac{n}{۲}+۱+\frac{n(n+۲)}{۸}$$

است. با تفریق ۳ رأس مثلث ازآن

$$\frac{n}{۲}-۲+\frac{n(n+۲)}{۸} = \frac{(n-۲)(n+۸)}{۸}$$

رابه‌عنوان جواب به دست می‌آوریم.

حالت ۲: n فرد. در این حالت $\frac{n}{۲}$ صحیح نیست، بنابراین وضعیت واقع در شکل ب. (با $n = ۱۱$) را داریم. در این مرحله نقاط داخل مربع OMPN مربع کوچکتر S ی را تشکیل می‌دهند، و ما تعداد نقاط واقع در سمت راست قطر S را می‌خواهیم.

تعداد نقاط واقع بر OM عبارت است از:

$$۱+\frac{(n-۱)}{۲} = \frac{(n+۱)}{۲}$$

بنابراین S شامل $[\frac{(n+۱)}{۲}]^۲$ نقطه است. $\frac{(n+۱)}{۲}$ نقطه از این نقاط بر قطر مربع قرار دارند، و بنابراین

$$\frac{۱}{۲}\{(\frac{n+۱}{۲})^۲-(\frac{n+۱}{۲})\} = \frac{n^۲-۱}{۸}$$

نقطه در سمت راست این قطر واقع‌اند. (توجه داشته باشید که رئوس M، N، P، از آنجا که مختصات صحیحی ندارند مشکلی ایجاد نمی‌کنند.)

مسألهٔ اصلی

چند مثلث ناهمنهشت به محیط n ، درصورتی که طولهای اضلاعشان صحیح باشد، موجود است؟

حل. طولهای اضلاع مثلث موردنظر را با x، y، و z نمایش می‌دهیم. در این صورت باید $x + y + z = n$ را داشته باشیم. گذشته از این، x، y، z، باید در نامساویهای

$$x < y + z,\ y < x + z,\ z < x + y$$

صدق کنند، زیرا طول ضلع یک مثلث باید کمتر از مجموع طولهای دو ضلع دیگر آن باشد. برعکس، هر مقادیر x، y، z ی که در شرایط فوق صدق کنند اضلاع مثلثی به محیط n خواهند بود. به این ترتیب مسأله مشابه مسألهٔ قبل است (مسألهٔ فرعی)،اما از دو جنبه با آن تفاوت دارد. جنبهٔ اول این است که نامساویهای مطلوب شامل > در جایی که قبلاً علامت ≤ بوده، می‌باشند و جنبهٔ دوم این که جوابهای تنها متفاوت در ترتیب جملات را، اکنون باید یکسان درنظر گرفت، زیرا مثلثهای همنهشت به دست می‌دهند. در این مرحله از شرط دوم تغافل کرده، N، تعداد سه‌تایی‌های مرتب x، y، z با

$$x + y + z = n,\ x < y + z,\ y < x + z,\ z < x + y$$

را معین می‌کنیم. z ، چون در مسألهٔ ۲۹، از x و y ، با استفاده از این حقیقت که $z = n - x - y$ برقرار است، مشخص می‌شود. شرایط مربوط به x و y اینک به $۰ < x < n/۲,\ ۰ < y < n/۲,\ n/۲ < x + y < n$ منجر می‌شوند. این بدان معنی است که در شکل ۲۵، نقطهٔ (x,y) باید داخل مثلث MNP واقع باشد. بنابراین، برای یافتن N صرفاً به این نیاز داریم که از جواب مسألهٔ ۲۹، تعداد نقاط واقع بر مرز MNP را، که در آنجا به حساب آمده‌اند، کم کنیم. (به‌خاطر بیاورید که رئوس مثلث در مسألهٔ ۲۹ محاسبه نشده‌اند.) درمورد n فرد نقطه‌ای بر مرز مثلث مورد بحث موجود نیست، بنابراین $N = (n^۲ - ۲)/۸$. در مورد n زوج، هر ضلع مثلث، رئوس به کنار، شامل $n/۲ - ۱$ نقطه است. درنتیجه در این حالت،

$$N=\frac{(n+8)(n-2)}{8}-3\left(\frac{n}{2}-1\right)=(n-2)\frac{n+8-12}{8}$$

$$=\frac{(n-2)(n-4)}{8}=\frac{n^2-6n+8}{8}$$

در محاسبهٔ فوق هر مثلث مختلف‌الاضلاع Δ شش بار به حساب آمده است، زیرا اگر اضلاع Δ، p، q، r باشند، در این صورت جوابهای

۱. $x = p\,, y = q\,, z = r$

۲. $x = p\,, y = r\,, z = q$

۳. $x = q\,, y = p\,, z = r$

۴. $x = q\,, y = r\,, z = p$

۵. $x = q\,, y = r\,, z = p$

۶. $x = r\,, y = q\,, z = p$

همه متناظر با Δ می‌باشند.

هر مثلث متساوی‌الساقین سره (که دو ضلع آن طول p دارند، در حالی‌که ضلع سوم طول q، با $q \neq p$، را داراست) سه بار به حساب آمده، زیرا جوابهای

۱. $x = p\,, y = p\,, z = q$

۲. $x = p\,, y = q\,, z = p$

۳. $x = q\,, y = p\,, z = p$

همه متناظر با این مثلث‌اند.

سرانجام، هر مثلث متساوی‌الاضلاع (درصورت وجود) تنها یک بار به‌حساب آمده‌است. بنابراین $N = 6S + 3P + E$، که در آن S تعداد مثلثهای مختلف‌الاضلاع، P تعداد مثلثهای متساوی‌الساقین سره، و E تعداد مثلثهای متساوی‌الاضلاع می‌باشد. مسألهٔ‌مان محاسبهٔ $S+P+E=T$، تعداد کل مثلثهاست. از فورمول $N=6S+3P+E$ ملاحظه می‌کنیم که $S=(N-3P-E)/6$؛ بنابراین

$$T=\frac{N-3P-E}{6}+P+E=\frac{N+3P+5E}{6}=\frac{N+3I+2E}{6}$$

که در آن $I = P + E$ تعداد کل مثلثهای متساوی‌الساقین (سره یا متساوی‌الاضلاع) است. در این صورت، از آنجاکه قبلاً عبارتی برای N به دست آورده‌ایم، تنها محاسبهٔ E و I می‌ماند. اما E مساوی ۱ است اگر n مضربی از ۳ باشد و در غیر این صورت مساوی ۰ است (زیرا مثلث متساوی‌الاضلاع به محیط n، طول ضلع $n/3$ دارد). برای پیدا کردن I باید تعداد جوابهایی از معادلهٔ $2x + y = n$ را، که در شرایط $x > 0$، $y > 0$، $2x > y$ صادق‌اند، معین کنیم. این شرایط، با قرار دادن $y = n - 2x$ به صورت

$$x > 0\,,\ n - 2x > 0\,,\ 2x > n - 2x$$

یا معادلاً $n/4 < x < n/2$ در می‌آیند.

نامساویهای اخیر، از آنجاکه n و x اعدادی صحیح‌اند، معادل

$$n/4 < x \leq (n-1)/2$$

می‌باشند. در این صورت $[(n-1)/2] - [n/4]$ از چنین مقادیر x ی، یعنی

$$x = [n/4]+1\,, [n/4]+2\,, \ldots, [(n-1)/2]$$

موجودند. درنتیجه

$$I = \left[\frac{n-1}{2}\right] - \left[\frac{n}{4}\right]$$

اکنون می‌توانیم برای به دست آوردن فورمولی برای T، به جمع‌آوری نتایج فوق بپردازیم. مناسب‌تر است که n را مساوی $12q+r$، که در آن $q = [n/12]$ خارج قسمت حاصل از تقسیم n بر ۱۲ است، و باقیماندهٔ r در $0 \leq r \leq 11$ صدق می‌کند، بنویسیم. فورمول مربوط به T به ترتیب زیر وابسته به r است.

(۱) اگر $r=0$، در این صورت

$$N = \frac{n^2-6n+8}{8}$$

$$I = \frac{n}{2} - 1 - \frac{n}{4} = \frac{n-4}{4}$$

$$E = 1$$

$$T=\frac{N}{6}+\frac{I}{2}+\frac{E}{3}=\frac{n^2-6n+8}{48}+\frac{n-4}{8}+\frac{1}{3}=\frac{n^2}{48}$$

(۲) اگر $r=1$، در این صورت

$$N=\frac{n^2-1}{8}$$

$$I=\frac{n-1}{2}-\frac{n-1}{4}=\frac{n-1}{4}$$

$$E=0$$

$$T=\frac{n^2-1}{48}+\frac{n-1}{8}=\frac{n^2+6n-7}{48}$$

(۳) اگر $r=2$، در این صورت

$$N=\frac{n^2-6n+8}{8}$$

$$I=\frac{n}{2}-1-\frac{n-2}{4}=\frac{n-2}{4}$$

$$E=0$$

$$T=\frac{n^2-6n+8}{48}+\frac{n-2}{8}=\frac{n^2-4}{48}$$

(۴) اگر $r=3$، در این صورت

$$N=\frac{n^2-1}{8}$$

$$I=\frac{n-1}{2}-\frac{n-3}{4}=\frac{n+1}{4}$$

$$E=I$$

$$T=\frac{n^2-1}{48}+\frac{n+1}{8}+\frac{1}{3}=\frac{n^2+6n+21}{48}$$

به همین طریق به دست می‌آوریم:

(۵) اگر $r=4$ ، در این صورت $T=\dfrac{n^2-16}{48}$

(۶) اگر $r=5$ ، در این صورت $T=\dfrac{n^2+6n-7}{48}$

(۷) اگر $r=6$ ، در این صورت $T=\dfrac{n^2+12}{48}$

(۸) اگر $r=7$ ، در این صورت $T=\dfrac{n^2+6n+5}{48}$

(۹) اگر $r=8$ ، در این صورت $T=\dfrac{n^2-16}{48}$

(۱۰) اگر $r=9$ ، در این صورت $T=\dfrac{n^2+6n+9}{48}$

(۱۱) اگر $r=10$ ، در این صورت $T=\dfrac{n^2-4}{48}$

(۱۲) اگر $r=11$ ، در این صورت $T=\dfrac{n^2+6n+5}{48}$

توجه داشته باشید که در جمیع این حالات جملهٔ ثابت چندجمله‌ای صورت، کمتر از نصف مخرج است. بنابراین می‌توانیم نتایج فوق را به صورت زیر مختصر کنیم:

اگر n فرد باشد $T=N(n^2+6n)/48$ ، اگر n زوج باشد، $T=N(n^2/48)$

معرفی کتابهای ریاضی

هنر ریاضی ورزیدن (سه گفتگوی عام) سرژلانگ

ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور ناشر: علوم پایه

«خواننده محترم، اگر سرژلانگ را تا قبل از برخورد با این کتاب نمی‌شناخته پس از مطالعهٔ آن می‌شناسد. او را مردی مردانه می‌یابد که علاوه بر هنرهای دیگر هنر ریاضی ورزیدن دارد، و از همه مهمتر درمی‌یابد که این هنر موجب حرمان او نشده است. درمی‌یابد که نه ریاضی که عشق می‌ورزد و نه تنها عشق به یادگرفتن که به یاد دادن. عشق به انفاق آنچه که دوست دارد، تا مصداق آیهٔ شریفهٔ ولن تنالواالبرحتی تنفقوا مماتحبون، شود» (قسمتی از مقدمهٔ مترجم)

کتاب حاوی مطالب و مباحثی است که سرژلانگ تحت سه کنفرانس در پاریس داشته، گفتگوهایی که هر خوانندهٔ حتی غیر مطلع از مطالب ریاضی را، به سوی خود جلب می‌کند و واقعاً گویای این مطلب است که ریاضیات زیباست و می‌توان آن را به هر کسی آموخت. مطالعه کتاب بخصوص برای هر دانش‌آموز، دانشجو و معلم مفید و آموزنده است.

این کتاب ترجمهٔ دقیقی از این سه گفتگوی ریاضی است. قصد سرژلانگ از این کار این بوده است که چیزی از طبیعت راستین و جمیل تفکر ریاضی را مطرح کند و چنانچه از شور و هیجان شنوندگان برمی‌آید، در این کار توفیقی جدی یافته است، سه موضوع مورد طرح (اعداد اول، معادلات دیوفانتی، و مسائل مهم هندسه و فضا) با شیوه‌ای شاد و خودمانی همراهند.

جبر پایه

تألیف محمد هاشم رستمی

ناشر: انتشارات مدرسه

جبر پایه (این مجلد برای دانش‌آموزان سالهای سوم رشتهٔ علوم تجربی و ریاضی فیزیک و داوطلبان کنکور) کتابی است کمک آموزشی که به‌صورت خودآموز تهیه گردیده است تا هر دانش‌آموزی در هر نقطه‌ای از کشور بتواند با مطالعهٔ آن درس جبر را به خوبی فراگیرد و برهمهٔ نکات و ظرایف در ارتباط با هرمطلب درسی احاطه کامل پیدا نماید.

در این کتاب پس‌از ارائه هرقسمت از جبر، مطالب تکمیلی مربوط به آن قسمت، و نمونه‌هایی از مسائل امتحان نهایی و تستهای کنکور در ارتباط با آن مطلب، آورده شده است و پس از آن نیز تمرینهایی وجود دارد، که با حل آنها، درس به‌صورت کامل فراگرفته می‌شود و در ذهن تثبیت می‌گردد.

در پایان کتاب نیز تستهایی وجود دارد که شامل تستهای جبر کنکورهای سراسری وزارت علوم و آموزش عالی (از ۱۳۵۸ تا ۱۳۷۰) و کنکورهای رشته پزشکی دانشگاه آزاداسلامی ایران (از ۱۳۶۴ تا ۱۳۷۰) نیز می‌باشد. این تستها به‌ترتیب فصلهای کتاب تنظیم شده‌است تا دانش‌آموزان پس از یادگیری دروس مربوط به هرفصل، تستهای در ارتباط با آن فصل را حل نمایند و آمادگی لازم برای موفقیت در کنکور دانشگاهها را نیز پیدانمایند.

مثلثات

تألیف: علی حسن زاده ماکویی
ناشر: منظومه

کتاب شاملِ مباحث و فصول نسبتاً جامعی است، که کلیه سرفصلهای کتابهای درسی از مقطع دوّم تا چهارم دبیرستان را می‌پوشاند. مؤلف توانسته بسیاری از مشکلات و احیاناً خلاءهای موجود در کتب درسی را مورد بحث قرار دهد و آنها را با توضیح و طرح و حل مسائل جالب برطرف نماید. در این کتاب در فصل دوّم و سوّم راجع به کمان اصلی (Arc) و توابع معکوس بحث شده است که معمولاً در کتابهای درسی و دیگر کتابهای جنب درسی به آن توجه زیادی نشده و تا حدودی برای دانش‌آموزان و معلمین مشکل‌ساز است.

همچنین مباحثِ سریهای مثلثاتی ـ اعداد مختلط ـ نسبتهای مثلثاتیِ (nx) و تابعهایِ هذلولی‌گونه، جزء قسمتهای جالب کتاب می‌باشد که به‌طور حتم برای علاقه‌مندان قابل توجه خواهد بود. همچنین درانتهای کتاب به راهنمایی حل مسائل طرح شده در داخلِ کتاب و نیز طرح تستهای متنوع و راهنمایی حل آنها برخورد می‌کنیم.

در کل کتاب، می‌تواند یک منبع جامع و راه‌گشا تصور شود که از هر لحاظ قابل استفاده برای دانش‌آموزان و دبیران محترم خواهد بود.

بحث ریاضی با دانش آموز

سرژلانگ

ترجمهٔ نعمت عبادیان
ناشر: انتشارات مدرسه

کتاب که متشکل از حدود ۸ جلسه کلاسی می‌باشد. مجموعه‌ای است از مکالمات و مباحثات داخل کلاسی توسط یک معلم واقعی ریاضیات یعنی سرژلانگ و دانش‌آموزان دبیرستانی. مطالعه این کتاب برای هر دانش‌آموز و معلم مفید و مناسب است و علاوه بر مباحثی شیرین که یادگیری آنها جالب است چگونگی پرسشِ سؤال و نیز جوابگویی و برخورد معلم به آنها القا می‌شود. مؤلف در حقیقت با دانش‌آموزان بحث می‌کند و آنها را از طریق بحث و گاهی اوقات شوخی و کنایه به حقایقی که تاکنون بدان دست نیافته بودند می‌رساند و در این راه نکات جالب و آموزندهٔ بسیاری مطرح می‌شود. کتاب علاوه بر مباحثِ مطرح شده در کلاس در پایان هر کلاس دارای تجزیه و تحلیل‌های بسیار مفیدی است و در بخش ضمیمه نیز این تجزیه و تحلیل‌ها توسط خودِ مؤلف و کارشناسان و معلمان دیگر آن کلاسها کامل می‌شود.

ادب ریاضی

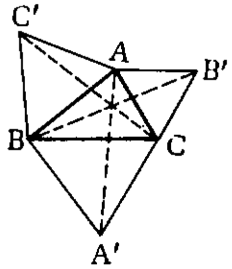
ریاضیدان دقیق و با وجدان که می‌خواهد خود را به درست بودن آنچه گفته و ثابت کرده است متقاعد سازد، در آن می‌کوشد که به شکل شهودی به آن نظر کند و یک برهان صوری برای آن بیاورد. **آیا به اطمینان می‌توانید درستی آن را مشاهده کنید؟ آیا می‌توانید صحت آن را به ثبوت برسانید؟** ریاضیدان با وجدان در این مورد همچون کدبانویی است که با شرافت و درستکاری برای خرید به بازار می‌رود. برای این که از کیفیت چیزی که می‌خواهد بخرد آگاه شود، دوست دارد که آن را ببیند و لمس کند. بینش شهودی و برهان صوری دو راه مختلف ادراک حقیقت است همان طور که احساس کردن اشیای مادی از طریق دو حس دیدن و لمس کردن است.

جورج پولیا
چگونه مسأله را حل کنیم؟
ترجمهٔ احمد آرام

مسائل مسابقه‌ای

محمد هاشم رستمی

۱ــ روی اضلاع مثلث ABC و در خارج آن سه مثلث متساوی الاضلاع می‌سازیم و رأس غیر مشترک هریك از این مثلثها رابه رأس مقابل آن از مثلث ABC وصل می‌کنیم. ثابت کنید سه‌خط حاصل متقارب‌اند.



۲ــ دو صفحهٔ

$$P: x+۲y-z+۱=۰$$

$$P': ۲x-۳y-۲z+۳=۰$$

و نقطهٔ $A(۱,-۲,۳)$ مفروض‌اند. تعیین کنید که نقطهٔ A داخل فرجه‌ای از این دو صفحه واقع است که زاویهٔ مسطحه‌اش حاده است؟ یا داخل فرجه‌ای قرار داردکه زاویهٔ مسطحه‌اش منفرجه می‌باشد؟

مسئله‌را درمورد دوصفحهٔ

$$P: ax+by+cz+d=۰$$

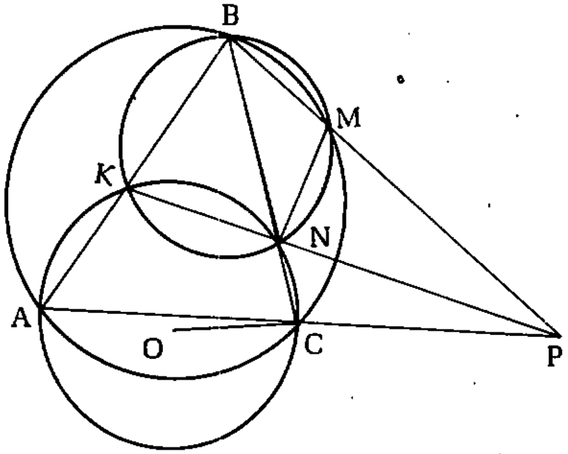
$$P': a'x+b'y+c'z+d'=۰$$

و نقطهٔ $A(x_۱,y_۱,z_۱)$ حل کنید.

مسئله‌ای از المپیادهای ریاضی

دایره‌ای به مرکز O از رئوس A و C ی مثلث ABC می‌گذرد وقطعات AB و AC را بار دیگربه ترتیب درنقاط متمایز K و N قطع مــی‌کند. دوایر محیطی مثلثهای ABC و KBN دقیقاً در دونقطهٔ متمایز B و M متقاطع‌اند. ثابت‌کنید که زاویهٔ OMB زاویه‌ای‌قائمه است.

بیست وششمین المپیاد بین‌المللی ریاضی ۱۹۸۵



ادب ریاضی

فون نویمان تنها شاگردی است که تا به حال مرا تهدید کرده است. او آدم بسیار سریع‌الانتقالی بود. زمانی در زوریخ برای شاگردان زبده سمیناری برپا شده بود که من در آن درس می‌دادم، و فون نویمان هم در آن شرکت می‌کرد. من قضیهٔ خاصی را بیان کردم و بعد گفتم که این قضیه تا به حال ثابت نشده و ممکن است اثباتش خیلی مشکل باشد. فون نویمان چیزی نگفت اما پنج دقیقه بعد دستش را بالا برد. وقتی به او اجازهٔ صحبت دادم پای تختهٔ سیاه آمد و اثبات قضیه را نوشت. از آن موقع به بعد من از فون نویمان می‌ترسیدم.

ژرژ پولیا

جُنگ ریاضی دانشجو، ج ٦

مسائل برای حل

(مورد استفادهٔ دانش آموزان سالهای اول تا چهارم دبیرستان)

● هندسه: محمد هاشم رستمی ● ریاضیات جدید: حمید رضا امیری
● جبر و مثلثات: احمد قندهاری و محمد رضا هاشمی

مسائل ریاضیات سال اول

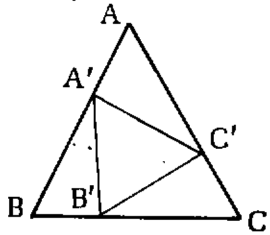
۱ـ نقاط A' و B' و C' را روی اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC در یك جهت چنان اختیار می کنیم که

$$AA' = BB' = CC' = \frac{۱}{۳} AB$$

باشد. ثابت کنید:

۱) مثلث $A'B'C'$ متساوی‌الاضلاع است.

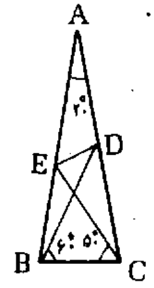
۲) اضلاع دومثلث ABC و $A'B'C'$ برهم عمودند.



۲ـ مثلث متساوی الساقین ABC به زاویهٔ رأس

$$\hat{A} = ۲۰^\circ$$

مفروض است. از رأس B خطی‌چنان‌رسم می کنیم که ساق AC را در نقطهٔ D قطع کند و زاویهٔ $D\hat{B}C = ۶۰^\circ$ باشد و از C نیز خطی‌چنان‌رسم می کنیم که ساق AB را درنقطهٔ E قطع کند و زاویهٔ $E\hat{C}B = ۵۰^\circ$ باشد. از D به E وصل‌می کنیم. اندازهٔ زاویهٔ DEC را تعیین کنید.



۳ـ ثابت‌کنید دریك ترکیب شرطی‌هرگاه تالی دارای ارزش‌درست‌باشد دراین‌صورت ارزش آن‌گزارهٔ‌شرطی‌همواره درست است و به ارزش مقدم‌بستگی ندارد.

۴ـ برای هر دو مجموعهٔ دلخواه مانند A و B، ثابت کنید: اگر $A \subseteq B$ آنگاه خواهیم داشت:

$$(A - B) = \varnothing$$

۵ـ ثابت‌کنید برای هردومجموعهٔ دلخواه‌مانند A و B اگر $A \subseteq B$ و $A' \subseteq B$ آنگـاه $B = M$ (M مجموعهٔ مرجع است).

۶ـ اگر

$$x = \sqrt[۳]{۵+۲\sqrt{۶}} + \sqrt[۳]{۵-۲\sqrt{۶}}$$

مطلوب است محاسبهٔ $(x^۳ - ۳x)$.

۷ـ حاصل کسر

$$\frac{\sqrt{\sqrt{۵}+۲} + \sqrt{\sqrt{۵}-۲}}{\sqrt{\sqrt{۵}+۱}}$$

را بیابید.

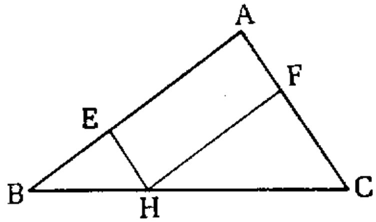
مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱ـ مثلث قائم الزاویهٔ ABC مفروض است. تصاویـر نقطه H از وتر BC روی الاضلاع AB و AC را به ترتیب

E و F می‌نامیم. ثابت کنید

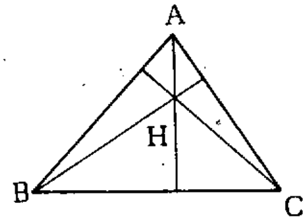
$$HB\cdot HC = EA\cdot EB + FA\cdot FC$$

فرستنده: محمدرضا ضرابی دانش‌آموز دوم ریاضی

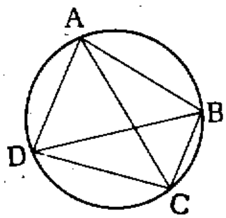


۲- اگر H نقطهٔ برخورد ارتفاعات مثلث ABC باشد، ثابت کنید رابطهٔ زیرهمواره برقرار است:

$$BC^{2}+HA^{2}=AC^{2}+HB^{2}=AB^{2}+HC^{2}$$



۳- ثابت کنید که درهرچهار ضلعی محاطی حاصل‌ضرب اندازه‌های دوقطر برابر است با مجموع حاصل‌ضربهای اندازه‌های اضلاع مقابل (قضیهٔ بطلیموس).



۴- ثابت کنید هرگاه رابطهٔ R از A در B یك رابطهٔ تك عضوی باشد همواره دارای خواص تراگذری و پادتقارن می‌باشد.

۵- تحقیق کنید دریك تابع چندضابطه‌ای، یك به‌یك بودن همهٔ ضابطه‌ها چه‌شرطی برای یك به‌یك بودن تابع است؟ (لازم- کافی ویا لازم وکافی) چرا؟

۶- می‌دانیم در حالت کلی ضرب ماتریسها، خاصیت جابه جایی ندارد، آیا می‌توانید شرطی برای‌جابه جایی بودن ماتریسهای ۲ × ۲ نسبت‌به عمل‌ضرب بیابید؟

۷- از مبدأ مختصات عمود OH را بر خط

$$2x+y=5$$

رسم می‌کنیم. مطلوب است، تعیین طول نقطهٔ H .

۸- نقطهٔ A به طول ۳ - روی‌نیمساز ناحیهٔ دوم قرار دارد. از این‌نقطه‌خطی براین‌نیمساز عمود می‌کنیم‌تا محور yها را درنقطهٔ B قطع‌کند. ازنقطهٔ B خطی موازی محور xها رسم می‌کنیم تانیمساز ربع‌اول‌را درنقطهٔ C قطع‌کند. مطلوب است تعیین‌طول نقطهٔ C و تعیین اندازهٔ مساحت‌ذوزنقهٔ ABCO.

۹- A و B و C را چنان تعیین کنید‌که اتحاد زیر برقرار باشد:

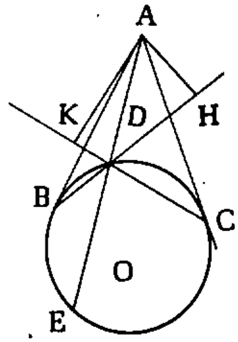
$$\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x-1}=A\sin x+B\cos x+C$$

۱۰- با فرض: $\frac{\sin^{4}x}{a}+\frac{\cos^{4}x}{b}=\frac{1}{a+b}$ اتحاد زیر را ثابت‌کنید:

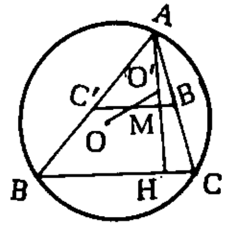
$$\left(\frac{\sin^{4}x}{a}+\frac{\cos^{4}x}{b}\right)^{n-1}=\frac{\sin^{2n}x}{a^{n-1}}+\frac{\cos^{2n}x}{b^{n-1}}$$

مسائل ریاضیات سال سوم ریاضی

۱- دایرهٔ C(O,R) مفروض‌است. ازنقطهٔ A دومماس AB و AC وقاطع ADE را نسبت‌به این‌دایره رسم می‌کنیم. ثابت‌کنید‌که فاصله‌های‌نقطهٔA ازخطوط DB و DC متناسب‌با طول وترهای DB و DC می‌باشند.



۲ـ ثابت‌کنید قرینهٔ مرکزدایرهٔ محیطی هرمثلث نسبت‌به وسط‌خطی‌که اوساط دو ضلع مثلث را به هم‌وصل می‌کند روی ارتفاع مرسوم برضلع سوم واقع است.



۳ـ ثابت‌کنید هرگاه‌بتوان دریك‌فضای‌برداری‌مانند V، یك‌بردار را برحسب ترکیب‌خطی چند بردار دیگر نوشت، در این‌صورت آن بردارها وابسته خطی‌اند.

۴ـ معین‌کنید با ارقام ۰و۱و۲و۳و۴و۵و۶ چند عدد ۴ رقمی می‌توان‌نوشت به قسمی که:

الف) مضرب ۵ و بزرگتراز ۴۰۰۰ باشند.

ب) زوج وبا رقم ۱ شروع شوند.

۵ـ اگر باقیمانده‌تقسیم $f(x)$ بر $(x-1)$ مساوی ۶ و بر $(x-2)$ مساوی ۱۱ و بر $(x+1)$ مساوی ۲ باشد مطلوب است تعیین باقیماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $(x-2)(x^2-1)$.

۶ـ دامنه و برد تابع حقیقی با ضابطهٔ

$$f(x)=[tg\,x+cotg\,x]$$

را بیابید.

۷ـ مطلوب است محاسبهٔ

$$\lim_{a\to b}\frac{\sin a-\sin b+\sin(a+b)}{\cos a-\cos b}$$

۸ـ ثابت‌کنید:

$$\sin 47^\circ+\sin 61^\circ-\sin 11^\circ-\sin 25^\circ=\cos 7^\circ$$

$$\left(\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$$

۹ـ دستگاه زیررا حل‌کنید (a پارامتراست):

$$\begin{cases}\sin x+\sin y=\sin a\\ \cos x+\cos y=\cos a\end{cases}$$

مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱ـ اگر

$\vec{v}_1=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{v}_2=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$

باشد، مطلوب است محاسبهٔ:

الف) $(-2\vec{v}_1$ و $3\vec{v}_2)$

ب) $|(\vec{v}_1+\vec{v}_2)\wedge(\vec{v}_1-\vec{v}_2)|$

ج) اندازهٔ‌جبری تصویربردار $\vec{v}_2$ روی بردار $\vec{v}_1$.

۲ـ معادلهٔ خطی‌را بنویسیدکه از نقطهٔ

$$A(2\,,\,-1\,,\,0)$$

می‌گذرد و دو خط

$$D:\begin{cases}x=2t-1\\ y=-t+2\\ z=4t\end{cases}$$

$$D' : \frac{x}{۳}=\frac{y+۱}{-۱}=\frac{z}{۲}$$

را قطع می‌کند.

۳- نقطه‌ای روی خط $D : ۳x-۱=y+۲=۴z$ تعیین کنید که از دو نقطهٔ $A(-۱,۲,۴)$ و $B(۳,۲,۰)$ به یک فاصله باشد.

۴- معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از نقطهٔ

$M(۳ , -۲ , ۲)$

می‌گذرد و فصل مشترکهایش باصفحات مختصات مثلثی‌متساوی‌الاضلاع به وجود می‌آورند.

۵- معادلهٔ صفحه‌ای را که قرینهٔ صفحه

$P : ۳x-y+۲z-۱=۰$

نسبت به نقطهٔ $O'(-۲,۱,۳)$ می‌باشد به دست آورید.

۶- ثابت کنید گزارهٔ زیرهمیشه درست است.

$$[(p \Longrightarrow r) \wedge (q \Longrightarrow r)] \Longrightarrow [(p \vee q) \Longrightarrow r]$$

۷- ثابت کنید حلقهٔ R جابه جایی‌است اگر وفقط اگر داشته باشیم:

$$\forall a,b \in R \; ; (a+b)^۲=a^۲+b^۲+۲ab$$

۸- ثابت کنید اشتراک دو ایده‌ال حلقهٔ R ، ایده‌الی از حلقهٔ R است.

۹- مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\cos\sqrt{x^۲+۳x}$ را در نقطهٔ $x_۰=۱$ بررسی کنید.

۱۰- تابع با ضابطهٔ $y=\dfrac{x}{۲x^۲-۵x+m}$ مفروض است.

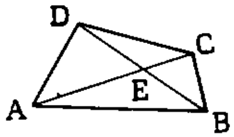
اگر x' و x'' طولهای‌نقاط اکسترمم منحنی‌تابع و $y_۱$ و $y_۲$ مقادیرعرضهای نقاط اکسترمم منحنی تابع‌باشد m را چنان بیابید تا داشته‌باشیم:

$$\frac{۱}{y_۱}+\frac{۱}{y_۲}=۱۰x'x''$$

مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

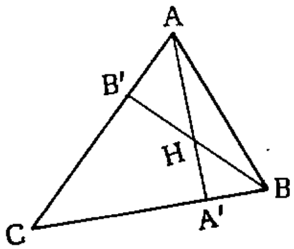
۱- در چهار ضلعی ABCD قطر AC عمود برضلع BC و قطر BD عمود برضلع AD است اگر E نقطهٔ تقاطع اقطار چهارضلعی باشد ثابت کنید:

$$EA \cdot EC=EB \cdot ED$$



۲- اگر H نقطهٔ تقاطع ارتفاعهای AA' و BB' از مثلث $ABC(\hat{B}=\hat{A})$ باشد، ثابت کنید که‌رابطه زیر برقرار است.

$$HA^۲-HB^۲=HB \cdot HB'-HA \cdot HA'$$



۳- معادلهٔ‌زیر را حل و بحث کنید (k وs پارامترمی باشند):

$$k^۳(x-k^۲)=s^۳(x-s^۲)$$

۴- معادلهٔ درجه دوم $x^۲-m^۲x+۴=۰$ مفروض است.

الف) به‌ازای چه مقادیری‌از m معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز است؟

ب) به ازای چه مقادیری از m معادلـه ریشهٔ مضاعف دارد ؟

ج) به‌ازای چه مقادیری‌از m یك ریشهٔ معادله برابر ۲ می‌باشد ؟

۵- اگر داشته باشیم: $۳\cos x+۲=۰$

و انتهای کمان x در ناحیهٔ سوم باشد. نسبتهای مثلثاتی x را حساب کنید.

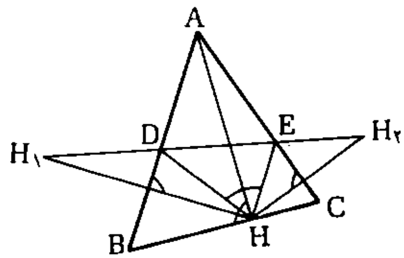
۶ـ با شرط: $0<x<\frac{\pi}{2}$

صحت تساوی زیر را تحقیق کنید:

$$\left(\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}-\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)\times\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)=\frac{4}{\sin x}$$

مسائل ریاضیات سال سوم تجربی

۱ـ ارتفاع AH از مثلث ABC را رسم می‌کنیم و قرینه‌های نقطهٔ H نسبت به اضلاع AB و AC را به ترتیب H_1 و H_2 می‌نامیم. اگر نقاط تقاطع خط H_1H_2 با اضلاع AB و AC به ترتیب نقاط D و E باشند ثابت کنید که AH نیمساز زاویهٔ DHE است.



۲ـ اگر $|\vec{a}|=3$ و $\vec{b}=-4\vec{a}$ باشد، مطلوب است محاسبهٔ:

الف) $|\vec{a}+\vec{b}|\cdot|\vec{a}-\vec{b}|$

ب) $(\vec{a}+4\vec{b})\cdot(\vec{b}+4\vec{a})$

ج) $\vec{a}\cdot\vec{b}$

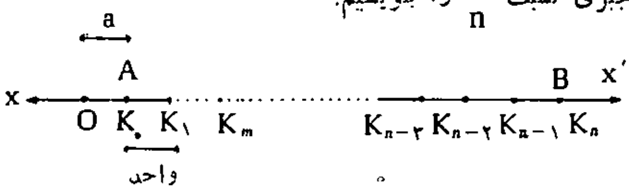
۳ـ روی محور $x'ox$ دو نقطهٔ A و B را به طولهای

$\overline{OA}=a$ و $\overline{OB}=b$

اختیار کرده، ثابت کنید طول هریك از نقاطی که پاره‌خط AB را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنند از رابطهٔ زیر به‌دست‌می‌آید. در رابطهٔ زیر m طول نقطهٔ مفروض است.

$$x_m=a+\frac{m}{n}(b-a)$$

(راهنمایی: با توجه به شکل زیر کافی است از طریق اندازهٔ جبری نسبت $\frac{m}{n}$ را بنویسیم.



۴ـ اگر:

$$(gof)(x)=f(x)-x^2 \quad و \quad g(x)=x^2-x$$

دامنهٔ f(x) را تعیین کنید. سپس ثابت کنید $f(\cos\alpha)$ مربع کامل است.

۵ـ صحت روابط زیر را تحقیق کنید:

الف)

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+\frac{2\pi}{3})+\cos(\alpha+\frac{4\pi}{3})=0$$

ب)

$$\frac{1}{\sin 10^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}=4$$

۶ـ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x=2$$

مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱ــ درصورتی که اندازهٔ فاصلهٔ دونقطهٔ

$$B(-1\ ,\ 2) \quad \text{و} \quad A(m\ ,\ -2)$$

برابر ۵ و $m \in R^+$ باشد، فاصلهٔ وسط پاره خط AB را از خط D به معادلهٔ:

$$D:\ 4x-3y+1=0$$

حساب کنید. همچنین زاویهٔ بین‌خط D وخطی که از دونقطهٔ B و A می‌گذرد را محاسبه کنید.

۲ــ خطوط مماس وقائم برمنحنی به معادلهٔ:

$$x^2y+x\sqrt{y}=y^3-1$$

را برروی محور عرضها به دست آورید.

۳ــ معادلهٔ مثلثاتی :

$$\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+m\sin x\cos x=1$$

مفروض است.

الف) مقدار m را چنان تعیین کنید که یکی ازجوابهای معادله $\frac{\pi}{4}$ باشد.

ب) تعیین کنید که معادله به‌ازای‌چه مقادیری‌از m ریشهٔ حقیقی ندارد.

ج) معادله رابه ازای $m=-2$ حل کنید.

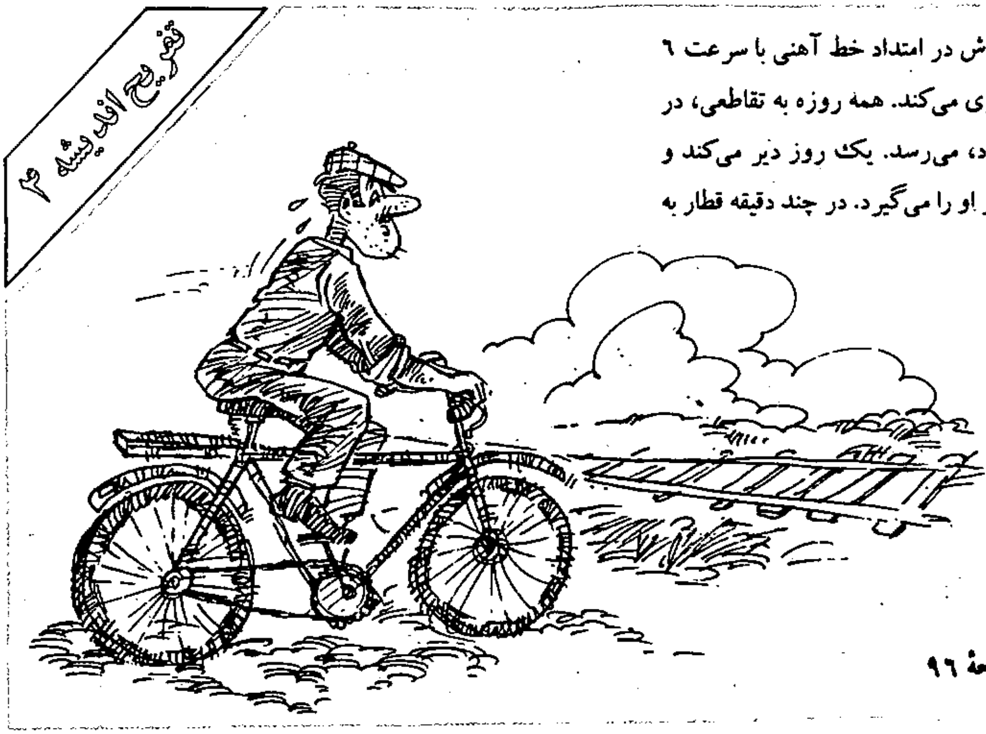
۴ــ عبارت:

$$S=1+\sin x+\cos x+\sin x\cos x$$

مفروض است.

الف) ثابت کنید که مقدار S مربع کامل است.

ب) حداکثر وحداقل S را پیدا کنید.



کارگری برای رفتن به سرکارش در امتداد خط آهنی با سرعت ۶ کیلومتر در ساعت دوچرخه سواری می‌کند. همه روزه به تقاطعی، در همان زمانی که قطار وارد می‌شود، می‌رسد. یک روز دیر می‌کند و قطار در ۶ کیلومتری تقاطع مزبور او را می‌گیرد. در چند دقیقه قطار به تقاطع مورد بحث می‌رسد؟

جواب در صفحهٔ ۹۶

حل مسائل برهان، شمارهٔ ۳

حل مسائل ریاضیات سال اول

۱ـ مثلث O_1DB متساوی‌الساقین است. زیرا:

$$\hat{B}_1=\hat{B}_2 \text{ و } DE\|BC \Longrightarrow \hat{O}_1=\hat{B}_2 \Longrightarrow$$

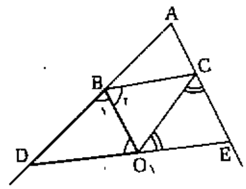
$$\hat{O}_1=\hat{B}_1 \Longrightarrow DB=O_1D \quad (1)$$

به دلیل مشابه، مثلث O_1CE نیز متساوی‌الساقین است پس:

$$CE=O_1E \qquad (2)$$

از جمع روابط (۱) و (۲) داریم:

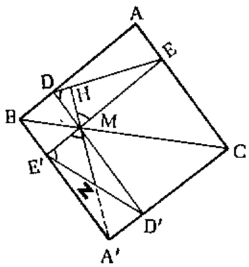
$$DB+CE=O_1D+O_1E=DE$$



۲ـ مربع $ABA'C$ را می‌سازیم و نقاط برخورد ME و MD با BA' و CA' را به ترتیب E' و D' می‌نامیم. HM را امتداد می‌دهیم تا $D'E'$ را در نقطهٔ N قطع کند. MN میانهٔ مثلث قائم‌الزاویهٔ $ME'D'$ است. زیرا، چهار ضلعیهای $MDBE'$ و $MECD'$ مربع‌اند، از آنجا:

$$ME=MD' \quad \text{و} \quad MD=ME'$$

پس دو مثلث قائم‌الزاویهٔ MDE و $MD'E'$ متساوی‌اند. در نتیجهٔ $\hat{D}'_1=\hat{M}_1=\hat{M}_2$ است اما $\hat{E}'_1=\hat{D}_1$، پس: $\hat{E}'_1=\hat{M}_2$ است یعنی: $MN=NE'$ و به همین‌روش ثابت می‌شود که $MN=ND'$. بنابراین MN میانهٔ نظیر وتر در مثلث قائم‌الزاویهٔ $MD'E'$ می‌باشد. از طرفی، چهار ضلعی



$ME'A'D'$ مستطیلی است که $D'E'$ یک قطر آن می‌باشد. بنابراین MN قسمتی از قطر دیگر آن است و لذا MN که ادامهٔ MH می‌باشد همواره از نقطهٔ ثابت A' می‌گذرد.

۳ـ می‌دانیم هر گزارهٔ شرطی را می‌توان با توجه به هم‌ارزی زیر به یک گزارهٔ فصلی تبدیل کرد و برعکس:

$$(p \Longrightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$$

بنابراین می‌توان از فرضیات مسأله که البته انحرافی طرح شده‌اند صرف‌نظر کرد و به صورت زیر عمل کرد:

$$(r \Longrightarrow \sim s) \equiv (\sim r \vee \sim s) \equiv \sim (r \wedge s)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$[(r \Longrightarrow \sim s) \Longleftrightarrow (r\wedge s)] \equiv$$

$$[\sim (r\wedge s) \Longleftrightarrow (r\wedge s)]$$

و چون دو گزارهٔ $(r\wedge s)$ و $\sim(r\wedge s)$ همواره نقیض یکدیگرند و نمی‌توانند هم‌ارز باشند، ترکیب دو شرطی آنها همواره نادرست است.

۴ـ $\underline{A\Delta B}=(A-B)\cup(B-A)$

$$\overset{\text{جابه‌جایی اجتماع}}{=} (B-A)\cup(A-B)=\underline{B\Delta A}$$

$$\overset{\text{ثابت شد}}{\Longrightarrow} A\Delta B=B\Delta A$$

الف) $A\Delta M=\overbrace{(A-M)}^{\varnothing}\cup\overbrace{(M-A)}^{A'}$

$$=\varnothing\cup A'=A'$$

ب) $A\Delta A'=\overbrace{(A-A')}^{A}\cup\overbrace{(A'-A)}^{A'}$

$$=A\cup A'=M$$

ج) $A\Delta A=\overbrace{(A-A)}^{\varnothing}\cup\overbrace{(A-A)}^{\varnothing}=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$

د) درصفحهٔ ۹۳ مثال ۴ کتاب‌درسی ثابت‌شد که:

$$\underline{(A-B)\cup(B-A)}=(A\cup B)\cap(A'\cup B')$$

$$=(A\cup B)-(A'\cup B')'=(A\cup B)-(A\cap B)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$(A\Delta B)\cap B'=[(A-B)\cup(B-A)]\cap B'$$

$$=[(A\cup B)-(A\cap B)]\cap B'$$

$$=[(A\cup B)\cap(A'\cup B')]\cap B'$$

$$\overset{\text{شرکت‌پذیری}}{=} (A\cup B)\cap\underbrace{[(A'\cup B')\cap B']}_{\text{قانون جذب}}$$

$$=(A\cup B)\cap B' \overset{\text{پخش}}{=} (A\cap B')\cup(B\cap B')$$

$$=(A\cap B')\cup\varnothing$$

$$=(A\cap B')=(A-B)$$

۵ـ داریم:

$$\frac{\sqrt[5]{4}+1}{\sqrt[5]{16}+\sqrt[5]{4}+1}\times\frac{\sqrt[5]{4}-1}{\sqrt[5]{4}-1}=\frac{\sqrt[5]{16}-1}{\sqrt[5]{64}-1}$$

$$\frac{\sqrt[5]{4}+\sqrt[5]{2}+1}{\sqrt[5]{2}+1}\times\frac{\sqrt[5]{2}-1}{\sqrt[5]{2}-1}=\frac{\sqrt[5]{8}-1}{\sqrt[5]{4}-1}$$

بنابراین عبارت فوق چنین می‌شود:

$$\frac{\sqrt[5]{8}+1}{\sqrt[5]{16}-1}\times\frac{\sqrt[5]{16}-1}{\sqrt[5]{64}-1}\times\frac{\sqrt[5]{8}-1}{\sqrt[5]{4}-1}$$

پس از اختصار لازم نتیجه می‌شود:

$$=\frac{(\sqrt[5]{8}-1)(\sqrt[5]{8}+1)}{(\sqrt[5]{4}-1)(\sqrt[5]{64}-1)}=\frac{\sqrt[5]{64}-1}{(\sqrt[5]{4}-1)(\sqrt[5]{64}-1)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[5]{4}-1}\times\frac{[(\sqrt[5]{4})^4+(\sqrt[5]{4})^3+(\sqrt[5]{4})^2+\sqrt[5]{4}+1]}{[(\sqrt[5]{4})^4+(\sqrt[5]{4})^3+(\sqrt[5]{4})^2+\sqrt[5]{4}+1]}$$

$$=\frac{1}{3}[(\sqrt[5]{4})^4+(\sqrt[5]{4})^3+(\sqrt[5]{4})^2+\sqrt[5]{4}+1]$$

۶ـ در دستگاه:

$$\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$$

اگر داشته باشیم:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$$

دستگاه جواب ندارد. بنابراین داریم:

$$\begin{cases}m^2x-y=2\\ mx+2y=1\end{cases}\Rightarrow\frac{m^2}{m}=\frac{-1}{2}\Rightarrow$$

$$2m^2=-m\Rightarrow 2m^2+m=0\Rightarrow$$

$$m(2m+1)=0\Rightarrow\left|\begin{array}{l}m=0\\ 2m+1=0\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\boxed{m=0}\\ \boxed{m=-\frac{1}{2}}\end{cases}$$

پس به ازای $m=0$ و $m=\frac{-1}{2}$ دستگاه جواب ندارد.

$$m=1:\quad 2\begin{cases}x-y=2\\ x+2y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-2y=4\\ x+2y=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow 3x=5\Rightarrow\boxed{x=\frac{5}{3}}$$

$$x-y=2\Rightarrow y=x-2=\frac{5}{3}-2=\frac{5-6}{3}=\frac{-1}{3}$$

$$\Rightarrow\boxed{y=-\frac{1}{3}}$$

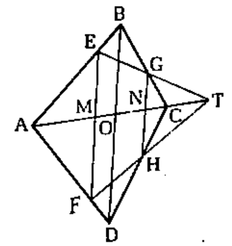
حل مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱ـ نقاط تقاطع EF و GH با قطر AC را به ترتیب M و N ونقطه تلاقی قطرهای چهارضلعی را O می‌نامیم. خطوط متقارب درنقطهٔ C روی پاره خطهای موازی GH و BD ؛ و خطوط متقارب درنقطهٔ A روی پاره خطهای موازی EF وBD ؛ قطعات متناظرمتناسب ایجاد می‌کنند یعنی داریم:

$$\frac{GN}{NH}=\frac{BO}{OD}\qquad(1)$$

و

$$\frac{EM}{MF}=\frac{BO}{OD}\qquad(2)$$



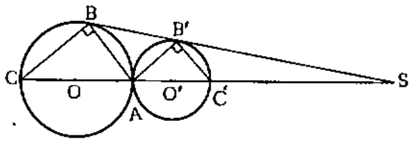
از مقایسهٔ روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{GN}{NH}=\frac{EM}{MF}$$

از رابطهٔ اخیر با توجه بداینکه EF||GH است مشخص می‌شود که خطوط EG و MN و FH از یك نقطه مانند T می‌گذرند یعنی نقطهٔ تقاطع EG و FH روی قطر AC است.

۲ـ خط المرکزین دو دایره را رسم می‌کنیم و نقاط دیگر تقاطع آن بادوایر O و O' رابه ترتیب C و C' می‌نامیم. از B به C واز B' به C' وصل می‌کنیم و نقطهٔ برخورد BB' و OO' را S می‌نامیم. خطوط AB' و BC ، همچنین B'C' و AB باهم موازی‌اند. بنابراین داریم:

$$\frac{SA}{SC}=\frac{AB'}{BC}=\frac{SB'}{SB}\qquad(1)$$



ازطرفی دومثلث ABC و AB'C' متشابه‌اند پس:

$$\frac{AB'}{BC}=\frac{AC'}{AC}=\frac{2R'}{2R}=\frac{R'}{R}\qquad(2)$$

از مقایسه روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{SB'}{SB}=\frac{SA}{SC}=\frac{R'}{R}=cte$$

این رابطه نشان می‌دهدکه S نقطهٔ ثابتی روی خط المرکزین دو دایره است که BB' همواره از آن نقطه می‌گذرد.

۳ـ می‌دانیم هرگاه $(x,y)\in(A\times B)$ فقط یك حالت امکان‌پذیراست که $x\in A$ و $y\in B$

اما اگر $(x,y)\notin(A\times B)$ ، سه حالت ممکن است، به شکل زیر:

$$(x,y)\notin(A\times B)\Longrightarrow\begin{cases}x\in A\wedge y\notin B\\ x\notin A\wedge y\in B\\ x\notin A\wedge y\notin B\end{cases}$$

باتوجه به مطلب فوق به اثبات تساوی می‌پردازیم:

$$[(x,y)\in(A\times B)'\Longleftrightarrow(x,y)\notin(A\times B)$$

$$\Longleftrightarrow(x\in A\wedge y\notin B)\vee(x\notin A\wedge y\in B)\vee(x\notin A\wedge y\notin B)$$

$$\overset{\text{تعریف متمم}}{\Longleftrightarrow}(x\in A\wedge y\in B')\vee(x\in A'\wedge y\in B)\vee(x\in A'\wedge y\in B')$$

$$\overset{\text{تعریف ضرب}}{\Longleftrightarrow}(x,y)\in(A\times B')\vee(x,y)\in(A'\times B)\vee(x,y)\in(A'\times B')$$

$$\overset{\text{تعریف اجتماع}}{\Longleftrightarrow}(x,y)\in(A\times B')\cup(A'\times B)\cup(A'\times B')]$$

$\Longrightarrow$ تساوی برقرار است

۴ـ با توجه به شکل واینکه نقطهٔ M وسط دو پاره خط AC و BD است ونیز باتوجه اینکه:

$$\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{CM}\qquad(1)$$

و

$$\overrightarrow{DM}=-\overrightarrow{BM}\qquad(2)$$

خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{OM}$$

ازجمع چهارتساوی فوق و روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB})+\underbrace{(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CM})}_{0}+\underbrace{(\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{BM})}_{0}=4\overrightarrow{OM}$$

$$\Longrightarrow(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB})=4\overrightarrow{OM}$$

۵ـ طبق فرض برای هر x و y در G داریم:

$$(xy)^2=x^2y^2$$

حال اگر x و y دوعضو دلخواه گروه G باشند داریم:

(می‌دانیم در گروهها قوانین حذف از چپ و راست برقرار است)

$$(xy)^2=x^2y^2 \Rightarrow (xy)(xy)=(xx)(yy)$$
$$\Rightarrow \cancel{x}[y(xy)]=\cancel{x}[x(yy)]$$
$$\xRightarrow{\text{قانون حذف}} [y(xy)]=[x(yy)]$$
$$\Rightarrow (yx)\cancel{y}=(xy)\cancel{y}$$
$$\xRightarrow{\text{قانون حذف}} yx=xy$$

لذا ثابت شد برای هر دوعضو گروه مانند x و y و با توجه به فرض مسأله خواهیم داشت:

$$xy=yx$$

یعنی G یك گروه آبلی یا جابجایی است.

۶-

$$A+B+C=0 \Rightarrow A+B=-C$$
$$\Rightarrow (A+B)^3=-C^3$$
$$A^3+B^3+3AB(A+B)=-C^3 \Rightarrow$$
$$A^3+B^3+3AB(-C)=-C^3$$
$$\Rightarrow A^3+B^3+C^3=3ABC$$

معادلهٔ فوق‌را چنین می‌نویسیم:

$$(x^2+3x+2)^3+(x^2-3x+1)^3+(-2x^2-3)^3=0$$

$$\begin{cases} A=x^2+3x+2 \\ B=x^2-3x+1 \\ C=-2x^2-3 \end{cases} \rightarrow A+B+C=$$

$$x^2+3x+2+x^2-3x+1-2x^2-3=0$$

بنابراین داریم: $A^3+B^3+C^3=3ABC$

$$\Rightarrow A^3+B^3+C^3=0 \Rightarrow 3ABC=0$$

$$\Rightarrow ABC=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} A=0 \\ B=0 \\ C=0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x^2+3x+2=0 \\ x^2-3x+1=0 \\ -2x^2-3=0 \end{vmatrix} \Rightarrow x^2+3x+2=0 \Rightarrow$$

$$(x+1)(x+2)=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x+1=0 \\ x+2=0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x=-1 \\ x=-2 \end{matrix}}$$

و $x^2-3x+1=0$

$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$$

$$-2x^2-3=0 \Rightarrow x^2=\frac{-3}{2}$$

$\Rightarrow$ ریشهٔ حقیقی ندارد.

بنابراین مجموعهٔ جواب معادله چنین است:

$$R=\left\{-2,-1,\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$$

۷- اگر $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ جملاتی از یك تصاعد حسابی فرض‌شوند داریم:

$$\begin{cases} \sqrt{3}-\sqrt{2}=Kd & \text{(d قدرنسبت تصاعد فرض می‌شود)} \\ \sqrt{5}-\sqrt{3}=Sd & (K, S \in Z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3}-\sqrt{2})S=K(\sqrt{5}-\sqrt{3}) \Rightarrow$$
$$K\sqrt{5}-S\sqrt{3}=(K-S)\sqrt{2}$$

طرفین تساوی فوق‌را مجذور می‌کنیم و به دست می‌آید:

$$5K^2+3S^2-2KS\sqrt{15}=2(K-S)^2$$
$$\Rightarrow \sqrt{15}=\frac{5K^2+3S^2-2(K-S)^2}{2KS}$$

تساوی اخیرغیر ممکن‌است زیرا $\sqrt{15}$ عددی است گنگ و برابر یك عددگویا نمی‌تواند باشد. بنابراین تناقض فوق مطلب را ثابت می‌کند.

۸- با به توان ۲ رسانیدن هریك از معادلات دستگاه و جمع‌آنها باهم خواهیم داشت:

$$x^2=r^2\sin^2\alpha\cos^2\theta$$
$$y^2=r^2\sin^2\alpha\sin^2\theta$$
$$z^2=r^2\cos^2\alpha$$
$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2=$$
$$r^2[\sin^2\alpha\overbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}^{1}+\cos^2\alpha]$$
$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2=r^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$$
$$\Rightarrow \boxed{x^2+y^2+z^2=r^2}$$

رابطهٔ مستقل‌از α و θ

۹- حل (۱)

$$\frac{1}{\cos^2\theta}=\sec^2\theta$$
$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta \Rightarrow$$
$$\frac{\sec^2\theta+2tg\theta}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}=\frac{\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}}{1+2\sin\theta\cos\theta}$$
$$=\frac{\frac{1+2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta}}{1+2\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}=\sec^2\theta$$

حل (۲)

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\sin(\beta-\theta)}{\cos\beta\cos\theta}+\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\theta\cos\alpha}$$
$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\sin\beta\cos\theta-\cos\beta\sin\theta}{\cos\beta\cos\theta}+$$
$$\frac{\sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha}{\cos\theta\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+$$
$$\frac{\sin\beta\cos\theta}{\cos\beta\cos\theta}-\frac{\cos\beta\sin\theta}{\cos\beta\cos\theta}+\frac{\sin\theta\cos\alpha}{\cos\theta\cos\alpha}-\frac{\cos\theta\sin\alpha}{\cos\theta\cos\alpha}$$
$$=tg\alpha-tg\beta+tg\beta-tg\theta+tg\theta-tg\alpha=0$$

حل (۳) اگر قرار دهیم:

$$tg\frac{\theta}{2}=t$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ و } \sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\theta+\sin\theta-1}{\cos\theta-\sin\theta+1}=\frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}-1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{2t}{1+t^2}+1}$$

$$=\frac{1-t^2+2t-(1+t^2)}{1-t^2-2t+(1+t^2)}=\frac{2t-2t^2}{2-2t}=t=tg\frac{\theta}{2}$$

حل مسائل ریاضیات سال سوم ریاضی

۱- از D' به C' وصل می‌کنیم داریم:

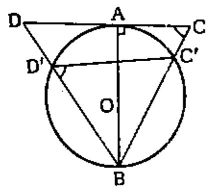
$$B\hat{D'}C'=\frac{\widehat{BC'}}{2}$$

$$D\hat{C}C'=\frac{\widehat{AD'B}-\widehat{AC'}}{2}=\frac{\widehat{AC'B}-\widehat{AC'}}{2}=\frac{\widehat{BC'}}{2}$$

و

$$\Rightarrow B\hat{D'}C'=D\hat{C}C'$$

لذا چهارضلعی DCC'D' محاطی است.



۲- پای ارتفاعات مثلث ABC را A' و B' و C' می‌نامیم داریم:

$$S_{HBC}+S_{HAC}+S_{HAB}=S_{ABC} \Rightarrow$$
$$\frac{1}{2}(a\cdot HA'+b\cdot HB'+c\cdot HC')=S \Rightarrow$$

$$a \cdot HA' + b \cdot HB' + c \cdot HC' = 2S$$

اما :

$$HA' = h_a - a' \text{ و } HB' = h_b - b' \text{ و } HC' = h_c - c'$$

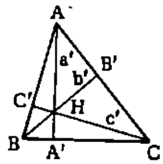
بنابراین خواهیم داشت:

$$a(h_a - a') + b(h_b - b') + c(h_c - c') = 2S \Longrightarrow$$
$$a \cdot h_a + b \cdot h_b + c \cdot h_c - (aa' + bb' + cc') = 2S$$
$$\Longrightarrow 6S - (aa' + bb' + cc') = 2S \Longrightarrow$$

$$a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c' = 4S = \frac{abc}{R} \Longrightarrow$$

$$\frac{aa' + bb' + cc'}{abc} = \frac{1}{R} \Longrightarrow$$

$$\frac{a'}{bc} + \frac{b'}{ac} + \frac{c'}{ab} = \frac{1}{R}$$



۳- فرض‌کنیم U یك زیرفضای ، فضای برداری IR روی خودش باشد و فرض کنیم :

$$U \neq \{0\}$$

ثابت می‌کنیم $U = IR$.

(می‌دانیم اگر U زیر فضای IR باشد، اولاً $U \subset IR$ وثانیاً U نسبت به هردوعمل جمع وضرب اسکالرکه دراین فضا همان جمع وضرب معمولی‌است، بسته می‌باشد.)

$$U \neq \{0\} \Longrightarrow \exists u \in U \Longrightarrow u \in IR$$

$$\overset{u \neq 0}{\Longrightarrow} u^{-1} \in IR$$

$$\xRightarrow{\text{نسبت بضرب بسته}} u^{-1} u \in U \Longrightarrow 1 \in U$$

حال ثابت می‌کنیم $IR \subset U$ که دراین‌صورت چون همواره $U \subset IR$ ثابت‌شده است که $U = IR$.

$$[\text{اگر } 1 : x \in IR \Longrightarrow x \cdot 1 \in U \Longrightarrow x \in U]$$

$$\Longrightarrow R \subset U$$

و حکم به اثبات می‌رسد.

۴- این مسألهٔ نوعی مسألهٔ ترکیب‌با تبدیل است به این معناکه در وهلهٔاول برای انتخاب ۲ رقم ازجعبه A و ۳ رقم ازجعبه B ، ازترکیب استفاده‌کرده و پس از انتخاب و قرار گرفتن این پنج‌رقم درکنارهم تعدادتبدیلات‌آنهارا بایدحساب کنیم. بنابراین خواهیم داشت(تکرار ارقام انتخاب شده مجاز نیست .)

الف) $\binom{4}{2} \times \binom{5}{3} \times 5!$

ب) $\binom{4}{2} \times \overbrace{\left[\binom{1}{1} \times \binom{4}{2}\right]}^{\text{انتخاب رقم ۷}} \times 5!$

(شامل رقم ۷ است یعنی‌رقم ۷ را از جعبهٔ B باید حتماً انتخاب کنیم.)

ج) $\overbrace{\left[\binom{1}{1} \times \binom{3}{1}\right]}^{\text{انتخاب رقم ۲}} \times \overbrace{\left[\binom{1}{1} \times \binom{4}{2}\right]}^{\text{انتخاب رقم ۵}} \times 3!$

$$3! = \boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{3} \quad \boxed{1}$$

رقم ۵   رقم ۲

۵-

الف) $\binom{24}{6} \times \binom{18}{6} \times \binom{12}{6} \times \binom{6}{6}$

ب) $\binom{24}{6} \times \binom{18}{6} \times \binom{12}{6} \times \binom{6}{6} \times \frac{1}{4!}$

(در حقیقت در قسمت ب هر ۴ تیم ۶ نفره یك حالت تولید می‌کنند.)

۶- (g(x) را در(۱ - x) ضرب‌وبرآن تقسیم‌می‌کنیم)

$$g(x) = 0 \Longrightarrow x^9 + x^8 + \dots + x + 1 = 0$$

$$g(x) = \frac{x^{10} - 1}{x - 1} = 0 \Longrightarrow$$

$$x^{10} - 1 = 0 \Longrightarrow \boxed{x^{10} = 1}$$

$$f(x) = x^{990+9} + x^{880+8} + \dots + x^{110+1} + 1 =$$
$$(x^{10})^{99} \cdot x^9 + (x^{10})^{88} \cdot x^8 + \dots +$$
$$(x^{10})^{11} \cdot x + 1$$

$$\overset{x^{10} = 1}{\Longrightarrow} R(x) = x^9 + x^8 + \dots + x + 1 = g(x)$$

$$\Longrightarrow R = 0 \quad \text{باقی‌مانده‌صفر است}$$

توضیح: هرگاه باقی‌مانده برابرمقسوم علیه‌شود ازتقسیم مجدد نتیجه می‌شود: $R = 0$.

۷- جملهٔ عمومی بسط دوجمله‌ای $(a+b)^n$ چنین‌است:

$$\text{جملهٔ عمومی} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

بنابراین برای دوجمله‌ای $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\right)^{n^2}$ داریم:

$$\Longrightarrow \binom{n^2}{k} (\sqrt[3]{x})^{n^2 - k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\right)^k$$

$$= \binom{n^2}{k} x^{\frac{n^2 - k}{3}} \cdot x^{\frac{-2k}{5}} = \binom{n^2}{k} x^{\frac{5n^2 - 11k}{15}}$$

$$\xRightarrow[\text{از } x]{\text{جمله‌مستقل}} 5n^2 - 11k = 0 \Longrightarrow n^2 = \frac{11k}{5}$$

$$\xRightarrow{k \text{ مضرب پنج است}} k = 5s \Longrightarrow n^2 = \frac{11}{5}(5s) = 11s$$

$$\Longrightarrow n^2 = 11s \Longrightarrow n = \sqrt{11s}$$

$$\xRightarrow[\text{S مضربی از یازده ومربع یك عدد است}]{\text{چون N n می‌باشد پس}} s = 11m^2 \Longrightarrow$$

$$\boxed{n = 11m} \xRightarrow[n \in N]{n < 120} n \in \{11, 22, 33, \dots, 110\}$$

بنابراین مسئله با شرط $n < 120$ و $n \in N$ دارای ده جواب می‌باشد.

۸- می‌دانیم اگر $x \to 0$ خواهیم داشت:

$$tg x \approx x \quad \text{و} \quad \sin x \approx x$$

درحد فوق نیز داریم:

$$\frac{1}{x^2 + x + 1} \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0 \; , \; \frac{1}{x^3 + x + 1} \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$$

بنابراین از هم‌ارزی خواهیم‌داشت:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{tg\left(\sin\left(\frac{1}{x^3 + x + 1}\right)\right)}{\sin\left(tg\left(\frac{1}{x^2 + x + 1}\right)\right)} \xRightarrow{\text{هم ارزی}}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{tg\left(\frac{1}{x^3 + x + 1}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x^2 + x + 1}\right)} \xRightarrow{\text{هم ارزی}}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{x^3 + x + 1}}{\frac{1}{x^2 + x + 1}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + x + 1} = 0$$

۹- از رابطهٔ :

$$a \sin\alpha \sin\beta + b \cos\alpha \cos\beta = 0$$

$tg\alpha$ را برحسب $tg\beta$ محاسبه می‌کنیم:

$$a \sin\alpha \sin\beta + b \cos\alpha \cos\beta = 0 \Longrightarrow$$

$$tg\alpha \, tg\beta = \frac{-b}{a} \Longrightarrow tg\alpha = \frac{-b}{a \, tg\beta}$$

ازطرفی اگر در عبارت A به جای $\sin^2\alpha$ و $\cos^2\alpha$ برحسب $tg\alpha$ و به جای $\sin^2\beta$ و $\cos^2\beta$ برحسب $tg\beta$ مقدار قرار دهیم خواهیم داشت:

$$A = \frac{1 + tg^2\alpha}{a\,tg^2\alpha + b} + \frac{1 + tg^2\beta}{a\,tg^2\beta + b}$$

حال اگر دراین‌رابطه‌به جای $tg\alpha$ برحسب $tg\beta$ مقدار بگذاریم

خواهیم داشت:

$$A=\frac{1+\left(\frac{-b}{a\,tg\beta}\right)^2}{a\left(\frac{-b}{a\,tg\beta}\right)^2+b}+\frac{1+tg^2\beta}{a\,tg^2\beta+b}$$

$$=\frac{b^2+a^2tg^2\beta}{ab^2+a^2b\,tg^2\beta}+\frac{1+tg^2\beta}{a\,tg^2\beta+b}$$

$$\Rightarrow A=\frac{(a+b)(a\,tg^2\beta+b)}{ab(a\,tg^2\beta+b)}=\frac{a+b}{ab}=cte$$

ـ۱۰

طرف اول اتحاد $=\frac{1}{\sin4\alpha}+\frac{\cos4\alpha}{\sin4\alpha}=\frac{1+\cos4\alpha}{\sin4\alpha}=$

$$\frac{2\cos^2 2\alpha}{2\sin2\alpha\cos2\alpha}=cotg2\alpha$$

طرف دوم اتحاد $=\frac12\left(\frac{1}{tg\alpha}-tg\alpha\right)=\frac12\left(\frac{1-tg^2\alpha}{tg\alpha}\right)=$

$$\frac{1-tg^2\alpha}{2tg\alpha}=\frac{1}{tg2\alpha}=cotg2\alpha$$

پس اتحاد برقرار است.

ـ۱۱

$$\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}-\sin5x=\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}\Rightarrow$$

$$\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}=\sin5x$$

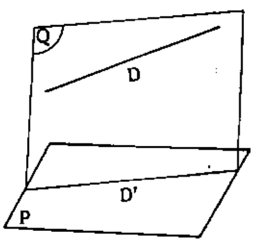
$$\Rightarrow\sin x=\sin5x\Rightarrow$$

$$5x=2k\pi+x\Rightarrow\boxed{x=\frac{k\pi}{2}}$$

$$5x=2k\pi+\pi-x\Rightarrow\boxed{x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}}$$

حل مسائل ریاضیات چهارم ریاضی

۱ـ راه اول: معادلهٔ دستهٔ صفحهٔ گذرنده بر خط D را می‌نویسیم و از بین صفحات این دسته‌صفحه، معادلهٔ صفحه‌ای را تعیین می‌کنیم که بر صفحهٔ P عمود است. فصل مشترک این صفحه (Q) باصفحهٔ P ، خط 'D جواب مسئلهٔ است.



$$D:\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-3}\Rightarrow$$

$x-2y+5=0$,

$3y+z-6=0$ دوصفحهٔ مصور خط D:

$$\alpha(x-2y+5)+\beta(3y+z-6)=0\Rightarrow$$

$$\alpha x+(-2\alpha+3\beta)y+\beta z+5\alpha-6\beta=0$$

دسته صفحهٔ گذرنده برخط D.

$$P:x+2y+z-1=0$$

$aa'+bb'+cc'=0$ شرط عمود بودن دوصفحه و

$$\Rightarrow\alpha-4\alpha+6\beta+\beta=0\Rightarrow\alpha=\frac{7}{3}\beta\Rightarrow$$

$$\frac{7}{3}\beta x+\left(\frac{-14}{3}+3\right)\beta y+\beta z+\frac{35}{3}\beta-6\beta=0$$

$\Rightarrow 7x-5y+3z+17=0$ معادلهٔصفحهٔ Q

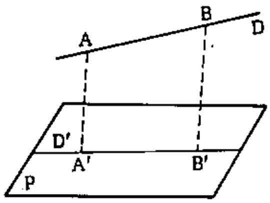
بنابراین معادلهٔ خط 'D عبارت‌است از:

$$D':\begin{cases}7x-5y+3z+17=0\\x+2y+z-1=0\end{cases}$$

درصورتی‌که بخواهیم معادلهٔ کانونیک‌خط 'D را پیدا کنیم کافی است معادلهٔ دو صفحهٔ مصور 'D را بیابیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$D':\ \frac{x+5}{11}=\frac{y}{4}=\frac{z-6}{-19}$$

راه دوم: دونقطهٔ A و B را روی‌خط D اختیار می‌کنیم و تصاویر این دو نقطه روی‌صفحهٔ P را 'A و'B می‌نامیم. معادلهٔ 'A'B ، معادلهٔ خط 'D تصویر خط D روی‌صفحهٔ P است.



$$t=0\Rightarrow A(x=-1,y=2,z=0)$$

$$t=1\Rightarrow B(x=1\ ,\ y=3\ ,\ z=-3)$$

$\vec{v}\,(1,2,1)$ P بردار عمود برصفحهٔ $\Rightarrow$

$$AA'/\ \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{1}$$

$$BB'/\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+3}{1}$$

$$\begin{cases}AA':\ x+1=\frac{y-2}{2}=z=t\Rightarrow\\P:\ x+2y+z-1=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=t-1\\y=2t+2\\z=t\end{cases}\Rightarrow t-1+4t+4+t-1=0$$

$$\Rightarrow t=-\frac{1}{3}\Rightarrow A'\left(-\frac{4}{3},\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

$$\begin{cases}BB':\ x-1=\frac{y-3}{2}=z+3=t\Rightarrow\\P:\ x+2y+z-1=0\end{cases}$$

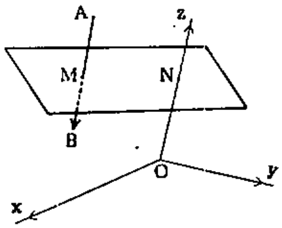
$$\begin{cases}x=t+1\\y=2t+3\\z=t-3\end{cases}\Rightarrow t+1+4t+6+t-3-1=0$$

$$\Rightarrow t=-\frac{1}{2}\Rightarrow B'\left(\frac{1}{2}\ ,\ 2\ ,\ \frac{-7}{2}\right)$$

$$D'=A'B'/\ \frac{x-\frac12}{\frac12+\frac43}=\frac{y-2}{2-\frac43}=\frac{z+\frac72}{-\frac72+\frac13}$$

$$\Rightarrow D':\frac{x-\frac12}{11}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+\frac72}{-19}$$

۲ـ معادلهٔصفحهٔ عمودمنصف‌پاره‌خط AB را می‌نویسیم ونقطهٔ تقاطع‌آن با محورzها رابه دست می‌آوریم.



$$AB\ \text{وسط}\ M\begin{vmatrix}x=1\\y=1\\z=3\end{vmatrix}\ ,\ \vec{AB}\begin{vmatrix}2\\-4\\-4\end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$\vec{v}\begin{vmatrix}-1=a\\2=b\\2=c\end{vmatrix}$$ بردار در راستای $\vec{AB}$

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0\Rightarrow$$

$$-1(x-1)+2(y-1)+2(z-3)=0\Rightarrow$$

$$-x+2y+2z-7=0$$

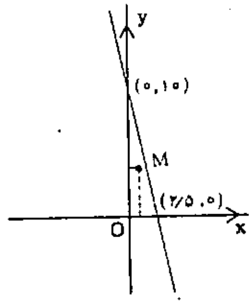
صفحهٔ عمود منصف پاره خط AB

$$\begin{cases}-x+2y+2z-7=0\\x=0\\y=0\end{cases}\Rightarrow N\left(0,0,\frac{7}{2}\right)$$

نقطهٔ مطلوب

۳ـ مرکز بیضی منطبق برمبدأ مختصات و با شرایط داده شده محور کانونی بیضی منطبق برمحور عرضها است پس معادلهٔ آن

به صورت $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ یا :



$$a^2x^2+b^2y^2-a^2b^2=0$$

است که چون ازنقطهٔ $M(1,4)$ باید بگذرد داریم:

$$M(1,4)\xrightarrow{\text{در معادلهٔ بیضی}}$$

$$a^2+16b^2-a^2b^2=0 \qquad (1)$$

ازطرفی خط $y+4x=10$ بر بیضی مماس است پس:

$$\begin{cases}a^2x^2+b^2y^2-a^2b^2=0\\ y=-4x+10\end{cases}\Longrightarrow$$

$$(a^2+16b^2)x^2-80b^2x+b^2(100-a^2)=0$$

معادلهٔ طولهای نقاط تلاقی خط و بیضی

$$\Delta'=0 \Longrightarrow 1600b^4-b^2(a^2+16b^2)\times$$

$$(100-a^2)=0 \Longrightarrow -100+a^2+16b^2=0$$

$$\Longrightarrow a^2+16b^2=100 \qquad (2)$$

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}a^2+16b^2-a^2b^2=0\\ a^2+16b^2=100\end{cases}\Longrightarrow$$

$$16b^4-100b^2+100=0 \Longrightarrow$$

$$4b^4-25b^2+25=0 \Longrightarrow b^2=5 \text{ و } b^2=\frac{5}{4}$$

$$b^2=5 \Longrightarrow a^2=20 \Longrightarrow \frac{y^2}{20}+\frac{x^2}{5}=1$$

معادلهٔ بیضی (یك جواب)

$$b^2=\frac{5}{4} \Longrightarrow a^2=80 \Longrightarrow \frac{y^2}{80}+\frac{x^2}{\frac{5}{4}}=1$$

معادلهٔ بیضی (جواب دیگر)

همان‌طوری که دیده می‌شود مسئله دوجواب دارد.

تبصره : اگر معادلهٔ بیضی را به صورت:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

در نظر بگیریم یعنی محور کانونی بیضی را منطبق بـر محور xها فرض کنیم جوابهای $a^2=5$ و $b^2=20$ همچنین

$$a^2=\frac{5}{4} \text{ و } b^2=80$$

به دست می‌آید که قابل قبول نیستند.

۴ـ

$$(p \Longleftrightarrow q)\equiv(p\Longrightarrow q)\wedge(q\Longrightarrow p)$$

$$\equiv(\sim p\vee q)\wedge(\sim q\vee p)$$

$$\equiv[(\sim p\vee q)\wedge\sim q]\vee[(\sim p\vee q)\wedge p]$$

$$\equiv(\sim p\wedge\sim q)\vee(p\wedge q)$$

$$\equiv\sim(\sim p\wedge\sim q)\Longrightarrow(p\wedge q)$$

$$\equiv(p\vee q)\Longrightarrow(p\wedge q)$$

بنابراین ثابت شد:

$$(p\Longleftrightarrow q)\equiv[(p\vee q)\Longrightarrow(p\wedge q)] \qquad (1)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\sim[(p\vee q)\Longrightarrow(p\wedge q)]\equiv\sim(q \qquad q)$$

$$\equiv(\sim p \Longleftrightarrow q)\overset{\text{بنابر}(1)}{\equiv}[(\sim p\vee q)$$

$$\Longrightarrow(\sim p\wedge q)]$$

۵ـ فرض کنیم R حلقه‌ای یکدار و $a\in R$ یك مقسوم علیه صفر باشد. ثابت می‌کنیم a عضوی وارون‌پذیر نیست.

اثبات به برهان خلف: فرض کنیم a وارون‌پذیر باشد پس:

$$\exists\, a^{-1}\in R \quad ، \quad aa^{-1}=1$$

ازطرفی چون a یك مقسوم علیه صفر است پس $b\neq 0$ ای در حلقهٔ R هست به قسمی که: $a\neq 0$

$$ab=0\Longrightarrow a^{-1}(ab)=a^{-1}\cdot 0\Longrightarrow$$

$$(a^{-1}a)b=a^{-1}\cdot 0\Longrightarrow 1\cdot b=a^{-1}\cdot 0$$

$$\Longrightarrow b=0$$

که با مخالف صفر بودن b در تناقض است لذا فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

عکس مطلب بالا درحالت کلی برقرار نیست مثلاً درحلقهٔ $(Z,+,\circ)$ عدد ۲ وارون‌پذیر نیست ولی مقسوم علیه صفر نیز نمی‌باشد.

۶ـ طبق قضیهٔ فرما می‌دانیم هرگاه p عددی اول باشد و a عددی نسبت به p اول (به‌عبارت دیگر $p\nmid a$) در این صورت

$$a^{p-1}\overset{p}{\equiv}1$$

ازطرفی واضح است که هردو عدد اول مانند p و q نسبت به هم اولند بنابراین باتوجه به مطالب بالا واینکه هرعدد صحیح کلیه توانهای صحیح و مثبت خودرا می‌شمارد خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l}(p,q)=1\overset{\text{قضیهٔ فرما}}{\Longrightarrow} p^{q-1}\overset{q}{\equiv}1\\ q \Longrightarrow q^{p-1}\overset{q}{\equiv}0 \text{ توانهای مثبت خود را می‌شمارد}\end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$$p^{q-1}+q^{p-1}\overset{q}{\equiv}1 \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}(p,q)=1\overset{\text{قضیهٔ فرما}}{\Longrightarrow} q^{p-1}\overset{p}{\equiv}1\\ p \Longrightarrow p^{q-1}\overset{p}{\equiv}0 \text{ توانهای مثبت خود را می‌شمارد}\end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$$p^{q-1}+q^{p-1}\overset{p}{\equiv}1 \qquad (2)$$

ازطرفی طبق قضیه‌ای داریم، اگر

$$(m,n)=1 \text{ و } a\overset{n}{\equiv}b \text{ و } a\overset{m}{\equiv}b$$

دراین صورت $a\overset{mn}{\equiv}b$. لذا باتوجه به (۱) و (۲) واینکه

$$(p,q)=1$$

خواهیم داشت:

$$p^{q-1}+q^{p-1}\overset{pq}{\equiv}1$$

۷ـ الف)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[2n]{x^{2n}+4nx^{2n-1}+m}+x\right)\overset{\text{(هم‌ارزی)}}{\Longrightarrow}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[2n]{\left(x+\frac{4n}{2n}\right)^{2n}}+x\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(|x+2|+x\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-x-2+x\right)=-2$$

ب) باتوجه به اینکه اگر $x\to 0$ داریم:

$$tg\,x^n\approx tg^n x\approx x^n \text{ و } \sin x^n\approx\sin^n x\approx x^n$$

خواهیم داشت:

$$\left(x\to\pm\infty\Longrightarrow\frac{1}{x^4+x^2+5}\to 0 \text{ و } \frac{1}{x^4+x^2+1}\to 0\right)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin^n\left(tg^n\left(\sin\left(\frac{1}{x^4+x^2+5}\right)^n\right)\right)}{tg^n\left(\sin^n\left(tg\left(\frac{1}{x^4+x^2+1}\right)^n\right)\right)}\overset{\text{(هم‌ارزی)}}{\Longrightarrow}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin^n\left(tg^n\left(\frac{1}{x^4+x^2+5}\right)^n\right)}{tg^n\left(\sin^n\left(\frac{1}{x^4+x^2+1}\right)^n\right)}$$

$$\overset{\text{(هم‌ارزی)}}{\Longrightarrow}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin^n\left(\frac{1}{x^4+x^2+5}\right)^{n^2}}{tg^n\left(\frac{1}{x^4+x^2+1}\right)^{n^2}}$$

$$\overset{\text{(هم‌ارزی)}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{(x^4+x^2+5)^{n^2}}}{\frac{1}{(x^3+x^2+1)^{n^2}}}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x^3+x^2+1)^{n^2}}{(x^4+x^2+5)^{n^2}}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3+x^2+1}{x^4+x^2+5}\right)^{n^2}$$

$$\overset{\text{(هم‌ارزی)}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^4}\right)^{n^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{n^2} = 0$$

۸- می‌دانیم اگر تابعی در یک نقطه مشتق‌پذیر باشد در آن نقطه پیوسته است. بنابراین شرایط پیوستگی و مشتق‌پذیری را برای تابع برقرار می‌کنیم. یعنی:

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^-} f(x) = f(-1)$$

$$\lim_{x\to-1^+} (Ax^2+B) = \lim_{x\to-1^-} (2x^3) = 2(-1)^3$$

$$\Rightarrow \boxed{A+B=-2}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 6x^2 & x<-1 \\ 2Ax & x>-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\underset{\text{(مشتق راست)}}{f'_+(-1)} = \underset{\text{(مشتق چپ)}}{f'_-(-1)} \Rightarrow 2A(-1) = 6(-1)^2$$

$$\Rightarrow -2A = 6 \Rightarrow \boxed{A=-3} \Rightarrow$$

$$A+B = -3+B = -2 \Rightarrow \boxed{B=1}$$

با توجه به پارامترهای به دست آمده تابع چنین می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 & x\leqslant -1 \\ -3x^2+1 & x>-1 \end{cases}$$

حل مسائل سال دوم تجربی

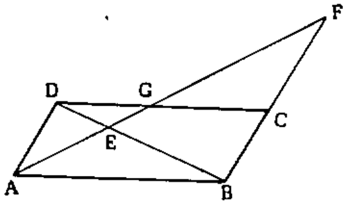
۱- با استفاده از قضیهٔ تالس داریم:

$$AD \| BF \Rightarrow \frac{EA}{EF} = \frac{ED}{EB} \qquad (1)$$

$$DG \| AB \Rightarrow \frac{EG}{EA} = \frac{ED}{EB} \qquad (2)$$

از مقایسهٔ روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{EA}{EF} = \frac{EG}{EA} \Rightarrow EA^2 = EF\cdot EG$$



۲- مثلث OEF قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. زیرا:

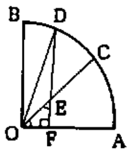
$$\hat O_1 = 45^\circ \quad \text{و} \quad \hat F = 90^\circ$$

است، پس $\hat E = 45^\circ$ و در نتیجه $EF = OF$ است. از O به D وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ODF می‌توان نوشت:

$$OD^2 = OF^2 + DF^2$$

اما $OD = OA$ و $OF = EF$ است. پس:

$$OA^2 = EF^2 + DF^2$$



۳- (داریم: $x-1>0 \Rightarrow x>1$)

$$\log_2(x-1) + \log_2 x + \log_2(x+1) = 2\log_2 x - 1$$

$$\log_2 x(x-1)(x+1) = \log_2 x^2 - \log_2 2 \Rightarrow$$

$$\log_2 x(x-1)(x+1) = \log_2 \frac{x^2}{2}$$

$$x(x^2-1) = \frac{x^3}{2} \Rightarrow x^3 - x - \frac{x^3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x^3 - x = 0 \Rightarrow x\left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ \frac{1}{2}x^2 - 1 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

بنابراین جواب مورد قبول معادلهٔ $x=\sqrt{2}$ می‌باشد.

۴- جملهٔ عمومی تصاعد حسابی چنین است:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow$$

$$a_5 = a_1 + (5-1)d = 23 \Rightarrow$$

$$a_1 + 4d = 23 \qquad (1)$$

مجموع n جملهٔ تصاعد حسابی چنین است:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$\Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2}[2a_1 + (10-1)d] = 255$$

$$\Rightarrow 5(2a_1 + 9d) = 255$$

$$2a_1 + 9d = 51 \quad (2) \xrightarrow{\text{از روابط (۱) و (۲)}}$$

$$\begin{cases} a_1 + 4d = 23 \\ 2a_1 + 9d = 51 \end{cases}$$

از حل دستگاه فوق داریم:

$$\underset{\text{(جملهٔ اول)}}{a_1 = 3} \quad \text{و} \quad \underset{\text{(قدر نسبت)}}{d = 5}$$

اینک با در دست داشتن جملهٔ اول تصاعد و قدر نسبت آن جملهٔ بیستم چنین است:

$$a_{20} = a_1 + (20-1)d = 3 + 19\times 5 = 98 \Rightarrow$$

جملهٔ بیستم: $\boxed{a_{20} = 98}$

۵-

$$\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \pi < x < \frac{3\pi}{2}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow$$

$$tg\frac{x}{4} = tg\frac{4\pi}{12} = tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

حل مسائل سال سوم تجربی

۱- الف: با توجه به خاصیت تقارن محوری می‌توان نوشت:

$$D\hat{A}H = 2\hat{A}_1 \qquad (1)$$

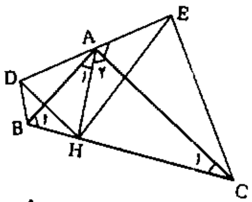
$$E\hat{A}H = 2\hat{A}_2 \qquad (2)$$

از جمع این دو رابطه نتیجه می‌شود:

$$D\hat{A}H + E\hat{A}H = 2(\hat{A}_1 + \hat{A}_2)$$

$$= 2(\hat{A}) = 2\times 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow D\hat{A}E = 180^\circ$$

پس نتیجه می‌شود که نقاط D و A و E روی یک خط راست واقع‌اند.



ب) در مثلث ABC ، $\hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 90^\circ$ است. از طرفی:

$$\begin{cases} D\hat{B}H = 2\hat{B}_1 \\ E\hat{C}H = 2\hat{C}_1 \end{cases} \Rightarrow D\hat{B}H + E\hat{C}H =$$

$=2(\hat{B}_1+\hat{C}_1)=2\times 90^\circ=180^\circ \Longrightarrow DB\parallel EC$

لذا DBCE ذوزنقه است.

۲ـ نقاط تقاطع خط Δ با محورهای مختصات را تعیین می‌کنیم.

$$\Delta:\ 3x-2y+6=0 \Longrightarrow$$

$$A(0,3)\qquad B(-2,0)$$

پس مختصات رئوس مثلث OAB عبارت‌اند از:

$O(0,0)$ و $A(0,3)$ و $B(-2,0)$

از آنجا:

مرکز ثقل مثلث

$$G\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_O}{3}=\dfrac{0-2+0}{3}=-\dfrac{2}{3}\\[2mm] y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_O}{3}=\dfrac{3+0+0}{3}=1\end{cases}$$

$$\Longrightarrow G\left(-\frac{2}{3},1\right) \Longrightarrow$$

$$OG=\sqrt{\frac{4}{9}+1}=\frac{\sqrt{13}}{3}$$

اندازهٔ بردار مکان نقطهٔ G .

۳ـ ابتدا از روابط:

$$g(x)=\sqrt{x} \quad \text{و} \quad fog(x)=\frac{1}{x-1}$$

تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم و سپس دامنه و برد آن را تعیین می‌کنیم.

$$fog(x)=\frac{1}{x-1} \Longrightarrow f(g(x))=\frac{1}{x-1}$$

$$\Longrightarrow f(\sqrt{x})=\frac{1}{x-1}$$

$$\sqrt{x}=t \Longrightarrow x=t^2 \Longrightarrow f(t)=\frac{1}{t^2-1}$$

$$\xrightarrow{t\ \text{متغیر ظاهری است}} f(x)=\frac{1}{x^2-1}$$

بنابراین D_f چنین است:

$$x^2-1=0 \Longrightarrow x^2=1 \Longrightarrow x=\pm 1$$

$$\Longrightarrow D_f=R-\{-1\ ,\ 1\}$$

برای تعیین برد تابع $f(x)$ ابتدا x را برحسب y محاسبه می‌کنیم و سپس yهای موردقبول را معین می‌کنیم یعنی:

$$y=f(x)=\frac{1}{x^2-1} \Longrightarrow x^2-1=\frac{1}{y}$$

$$\Longrightarrow x^2=\frac{1}{y}+1$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{y+1}{y}} \Longrightarrow \frac{y+1}{y}\geqslant 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y+1=0 \Longrightarrow y=-1\\ y=0\end{cases}$$

y	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$y+1$		$-$	0	$+$		$+$	
y		$-$		$-$	0	$+$	
برد تابع		$+$		$-$	∞	$+$	

ازجدول فوق نتیجه می‌شود که yهای مورد قبول از این قرار است:

برد تابع $f(x)$: $R_f=\{y \mid y\leqslant -1\ ,\ y>0\}$

و یا

$$R_f=(-\infty,-1]\cup(0\ ,\ +\infty)$$

۴ـ می‌دانیم ضریب زاویهٔ خط قائم چنین است:

$$m'=\frac{-1}{f'(x_0)} \Longrightarrow y'=f'(x)$$

$$=71(6x^2)(2x^3-1)^{70}\sin^3 2x^2$$

$$+3(4x)\sin^2 2x^2\cos 2x^2(2x^3-1)^{71}$$

$$+\frac{3x^2}{5\sqrt[5]{(x^3+1)^4}} \Longrightarrow$$

$m=f'(0)=0$:ضریب زاویهٔ خط مماس

$(x_0=0 \Longrightarrow y_0=1$:عرض نقطه تماس$)$

$$y-y_0=m(x-x_0) \Longrightarrow y-1=0$$

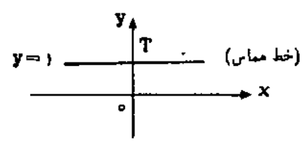
$\Longrightarrow y=1$:معادلهٔ خط مماس

بدیهی است خطی که در نقطهٔ تماس یعنی:

$$T\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}$$

برخط مماس عمود است خطی است به معادلهٔ $x=0$ (یعنی معادلهٔ محور yها). بنابراین معادلهٔ خط قائم برمنحنی در نقطه‌ای به طول صفر چنین است:

$\boxed{x=0}$ معادلهٔ خط قائم



(باتوجه به شکل بدیهی است که محور yها برخط مماس عمود است.)

۵ـ می‌دانیم شرط اینکه تابع $f(x)$ درنقطه‌ای به‌طول x_0 حد داشته باشد این است که

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

بنابراین با برقراری شرط فوق m به دست خواهد آمد، یعنی:

$$\lim_{x\to -1^+}(mx^2-1)=\lim_{x\to -1^-}\left(\frac{3x+3}{x^3+1}\right) \Longrightarrow$$

$$m-1=\lim_{x\to -1^-}\left(\frac{3(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}\right)=\frac{0}{0}\quad \text{(مبهم)}$$

$$\xRightarrow{\text{رفع ابهام}} m-1=\lim_{x\to -1^-}\left(\frac{3}{x^2-x+1}\right)=\frac{3}{3}=1$$

$$\Longrightarrow m-1=1 \Longrightarrow \boxed{m=2}$$

پس به‌ازای $m=2$ تابع در نقطهٔ موردنظر (به‌طول $x=-1$) دارای حد است. یعنی حد راست و حد چپ تابع در این نقطه برابر می‌شود.

$$\Longrightarrow f(x)=\begin{cases}2x^2-1 & x\geqslant -1\\[2mm] \dfrac{3x+3}{x^3+1} & x<-1\end{cases}$$

همانطور که می‌دانیم شرایط پیوستگی در شرط زیر خلاصه می‌شوند، یعنی اگر شرط زیر برقرار باشد تابع پیوسته است.

$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$:شرط پیوستگی دریک نقطه

با برقراری شرط فوق برای تابع موردنظر داریم:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to -1^+}(2x^2-1)=\lim_{x\to -1^-}\left(\frac{3x+3}{x^3+1}\right)$$

$$=f(-1)=2(-1)^2-1=2-1=1$$

$$\lim_{x\to -1^+}(2x^2-1)=1$$

و

$$\lim_{x\to -1^-}\left(\frac{3(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}\right)=1$$

بنابراین تابع درنقطهٔ موردنظر پیوسته است. زیرا شرط پیوستگی درنقطهٔ فوق برقرار است.

ـ۶

$$\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{4}+\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{5}+\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{8}+\mathrm{Arctg}\,\frac{2}{9}=\frac{\pi}{4}$$

$$\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{4}=\alpha \Longrightarrow tg\alpha=\frac{1}{4}$$

$$\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{5}=\beta \Rightarrow tg\beta=\frac{1}{5}$$

$$\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{8}=\gamma \Rightarrow tg\gamma=\frac{1}{8}$$

$$\mathrm{Arctg}\,\frac{2}{9}=\delta \Rightarrow tg\delta=\frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow \alpha+\beta+\gamma+\delta=\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow tg(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=1 \Rightarrow$$

$$tg[(\alpha+\delta)+(\beta+\gamma)]=1$$

$$\Rightarrow \frac{tg(\alpha+\delta)+tg(\beta+\gamma)}{1-tg(\alpha+\delta)tg(\beta+\gamma)}=1$$

اما:

$$tg(\alpha+\delta)=\frac{\frac{1}{4}+\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{18}}=\frac{1}{2}$$

و

$$tg(\beta+\gamma)=\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{40}}=\frac{1}{3}$$

است پس داریم:

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=1 \Rightarrow 1=1$$

۷−

$$\mathrm{Arcsin}\left(-\frac{1}{2}\right)+\mathrm{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$+\mathrm{Arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)+\mathrm{Arccotg}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

می‌دانیم که:

$$\mathrm{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3} \text{ و } \mathrm{Arcsin}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$$

و

$$\mathrm{Arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)+\mathrm{Arccotg}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

می‌باشد. پس حاصل عبارت فوق برابر است با:

$$-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

نکته: به طور کلی $(|m|\leqslant 1)$

$$\mathrm{Arcsin}\,m+\mathrm{Arccos}\,m=\frac{\pi}{2}$$

و

$$\mathrm{Arctg}\,m+\mathrm{Arccotg}\,m=\frac{\pi}{2}$$

است. پس حاصل عبارت بالا $\pi=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}$ می‌باشد.

حل مسائل ریاضیات چهارم تجربی

۱− می‌دانیم مرکز تقارن توابع هموگرافیک (هذلولی) محل تلاقی مجانبهای قائم و افقی است. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} y=\frac{a}{c} \\ x\to\pm\infty \end{cases} \text{مجانب افقی} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x=\frac{-d}{c} \\ y\to\pm\infty \end{cases} \text{مجانب قائم}$$

$$\Rightarrow \omega\left(\frac{-d}{c},\frac{a}{c}\right) \text{ مرکز تقارن}$$

$$\omega(-1,3) \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \frac{-d}{c}=-1 \\ \frac{a}{c}=3 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{ll} d=c & (1) \\ a=3c & (2) \end{array}\right.$$

منحنی از نقطهٔ تقاطع دو خط:

$$\left|\begin{array}{l} y=4x-3 \\ y=2x-1 \end{array}\right.$$

عبور می‌کند. بنابراین نقطهٔ تلاقی خطوط فوق در معادلهٔ منحنی صدق می‌کند.

$$4x-3=2x-1 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow$$

$$x=1 \quad \text{و} \quad y=1$$

بنابراین نقطهٔ $M\left|\begin{array}{l}1\\1\end{array}\right.$ متعلق به منحنی نمایش تابع:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

است و درنتیجه خواهیم داشت:

$$1=\frac{a(1)+b}{c(1)+d} \Rightarrow a+b=c+d \qquad (3)$$

با جایگزینی روابط (۱) و (۲) در رابطهٔ (۳) داریم:

$$3c+b=c+c$$

$$\Rightarrow b=2c-3c \Rightarrow b=-c \qquad (4)$$

اینک با قراردادن روابط (۱) و (۲) و (۴) در معادلهٔ تابع موردنظر داریم:

$$y=\frac{3cx+(-c)}{cx+c}=\frac{3x-1}{x+1} \Rightarrow$$

$$y=\frac{3x-1}{x+1} \quad \text{(تابع مطلوب)}$$

اکنون معادلهٔ خط قائم و زاویهٔ بین منحنی فوق، در محل تلاقی با منحنی نمایش تابع $y=\frac{1}{x}$ را بـه دست می‌آوریم. برای این منظور محل تلاقی دومنحنی را به دست می‌آوریم. یعنی:

$$\begin{cases} y=\frac{3x-1}{x+1} \\ y=\frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \frac{3x-1}{x+1}=\frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$3x^2-2x-1=0 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{-1}{3} \end{array}\right.$$

$$x=1:\ y=\frac{1}{1}=1 \Rightarrow A\left|\begin{array}{l}1\\1\end{array}\right.$$

$$x=\frac{-1}{3}:\ y=\frac{1}{\frac{-1}{3}}=-3$$

$$\Rightarrow B\left|\begin{array}{l}-\frac{1}{3}\\-3\end{array}\right.$$

A و B نقاط تلاقی دومنحنی فوق می‌باشند. بنابراین در یکی از نقاط مثلاً نقطهٔ A معادلهٔ خط قائم و زاویـهٔ بین دومنحنی را به‌دست می‌آوریم. بدیهی‌است برای نقطهٔ B نیز عملیات به‌طور مشابه است.

می‌دانیم مشتق تابع به‌ازای طول نقطهٔ تماس ضریب زاویهٔ خط مماس را به دست می‌دهد. بنابراین با در دست داشتن ضریب زاویهٔ خط مماس، ضریب زاویهٔ خط قائم نیز مشخص می‌شود. یعنی:

$$f'(x)=\frac{4}{(x+1)^2} \Rightarrow$$

$$m=f'(1)=\frac{4}{(1+1)^2}=1 \Rightarrow$$

$m=1$ ضریب زاویهٔ خط مماس

$m'=-\frac{1}{m}=-1$ ضریب زاویهٔ خط قائم

$$\Rightarrow y-y_A=m'(x-x_A) \Rightarrow$$

$$y-1=-(x-1)$$

$\boxed{y=-x+2}$ معادلهٔ خط قائم در نقطهٔ A

حال برای به دست آوردن زاویهٔ بین دومنحنی در نقطهٔ A ابتدا باید ضریب زاویه‌های خطوط مماس در نقطهٔ A را برای دومنحنی محاسبه نمود. زیرا زاویهٔ بین دومنحنی در نقطهٔ تلاقی زاویهٔ بین خطوط مماس در آن نقطه است. ضریب زاویهٔ خط مماس در نقطهٔ A برای منحنی نمایش تابع:

$$y=\frac{3x-1}{x+1}$$

برابر $m_1=1$ به دست آمد. بنابراین کافی است ضریب زاویهٔ خط مماس برمنحنی $y=\frac{1}{x}$ را محاسبه کنیم. یعنی:

$$y=g(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow g'(x)=\frac{-1}{x^2} \Rightarrow$$

$$m=g'(1)=\frac{-1}{1}=-1 \Rightarrow$$

$m_2=-1$ (ضریب زاویهٔ خط مماس)

دراینجا بادر دست داشتن ضریب زاویه‌های خطوط مماس درنقطهٔ تلاقی زاویهٔ بین دومنحنی به دست خواهد آمد:

$$tg\alpha=\pm\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\pm\frac{1-(-1)}{1+1(-1)}=\frac{2}{0}=\infty$$

$$\alpha=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha=90^\circ}$$

بنابراین دومنحنی درنقطهٔ A برهم عمودند.

۲ـ طولهای اکسترمم تابع درجهٔ سوم:

$$y=ax^3+bx^2+cx+d$$

رابه x_1 و x_2 نشان می‌دهیم. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{-10}{3} \\ x_1x_2=1 \end{cases} \Rightarrow X^2+\frac{10}{3}X+1=0$$

$$3X^2+10X+3=0 \Rightarrow X=\frac{-5\pm\sqrt{25-9}}{3}$$

$$=\frac{-5\pm4}{3} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-3 \\ x_2=\frac{-1}{3} \end{cases}$$

بنابراین طولهای اکسترمم تابع مفروض:

$$x_2=\frac{-1}{3} \text{ و } x_1=-3$$

است. از طرفی دیگر می‌دانیم ریشه‌های مشتق تابـع طولهای اکسترمم رابه دست می‌دهد، درنتیجه خواهیم داشت:

$$y'=3ax^2+2bx+c$$

$$y'=0 \Rightarrow 3ax^2+2bx+c=0 \Rightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} x_1=-3: 3a(-3)^2+2b(-3)+c=0 \\ x_2=-\frac{1}{3}: 3a(\frac{-1}{3})^2+2b(\frac{-1}{3})+c=0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{ll} 27a-6b+c=0 & (1) \\ a-2b+3c=0 & (2) \end{array}\right.$$

همچنین ثابت می‌شودکـه طول نقطهٔ عطف توابع درجهٔ سوم واسطهٔ حسابی، بین طولهای اکسترمم است. بنابراین داریم:

$$x_p=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\frac{-10}{3}}{2}=\frac{-5}{3} \Rightarrow x_p=\frac{-5}{3}$$

(طول نقطهٔ عطف)

از آنجا که نقطهٔ عطف هر تابع متعلق به منحنی نمایش آن تابع است، نتیجه می‌شود که مختصات نقطهٔ عطف در معادلهٔ تابع صدق می‌کند و خواهیم داشت:

$$P\left|\begin{array}{l}\frac{-5}{3}\\ \frac{250}{27}\end{array}\right. \Rightarrow \frac{250}{27}=a(\frac{-5}{3})^3+b(\frac{-5}{3})^2$$

$$+c(\frac{-5}{3})+d$$

$$-125a+75b-45c+27d=250 \qquad (3)$$

وهمچنین می‌دانیم ریشهٔ مشتق ثانی تابع طول نقطهٔ عطف را به دست می‌دهد. درنتیجه داریم:

$$y''=6ax+2a \Rightarrow y''=0$$

$$\Rightarrow 6a(\frac{-5}{3})+2b=0 \Rightarrow -10a+2b=0$$

$$\Rightarrow 5a-b=0 \Rightarrow b=5a \qquad (4)$$

منحنی‌نمایش تـابع ، محور عرض را در $y=5$ قطع می‌کند. بنابراین نقطهٔ $A\left|\begin{array}{l}0\\5\end{array}\right.$ درتابع صدق می‌کند. پس داریم:

$$5=a(0)^3+b(0)^2+c(0)+d \Rightarrow \boxed{d=5}$$

(5)

از روابط (1) و (2) و (3) و (4) و (5) دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} 27a-6b+c=0 \\ a-2b+3c=0 \\ -125a+75b-45c+27d=250 \\ b=5a \\ d=5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 27a-30a+c=0 \\ a-10a+3c=0 \\ -125a+375a-45c+135=250 \end{cases}$$

پس‌از اختصار لازم، دستگاه اخیر چنین می‌شود:

$$\begin{cases} c=3a \\ 250a-45c=115 \end{cases} \Rightarrow$$

$$250a-135a=115 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

$$b=5a=5\times1=5 \Rightarrow \boxed{b=5}$$

$$c=3a=3\times1=3 \Rightarrow \boxed{c=3}$$

بنابراین تابع مطلوب چنین است:

$$y=x^3+5x^2+3x+5$$

۳ـ می‌دانیم معادلات خطوط مجانبهای هذلولی به معادلهٔ:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

چنین می‌باشند:

$$\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$$

یـا

$$y=\pm\frac{b}{a}x \qquad (1)$$

با مقایسهٔ معادلات خطوط مجانب هذلولی فوق یعنی:

$$y=\pm\sqrt{2}x$$

با رابطهٔ (1) داریم:

$$\pm\frac{b}{a}=\pm\sqrt{2} \Rightarrow b=a\sqrt{2} \qquad (2)$$

با توجه‌به رابطهٔ (2) خواهیم داشت:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{2a^2}=1 \qquad (3)$$

از آنجاکـه هذلولی فوق محور طول را در $x=-3$ قطع می‌کند، نتیجه می‌شودکه هذلولی موردنظر از نقطهٔ $A\left|\begin{array}{l}-3\\0\end{array}\right.$ عبور می‌کند. بنابراین بـا جایگزینی نقطهٔ A در رابطهٔ (3) داریم:

$$\frac{(-3)^2}{a^2}=1 \Rightarrow a^2=9 \Rightarrow \boxed{a=\pm3}$$

(نقطهٔ A یك رأس هذلولی است)

$$\Rightarrow \boxed{b=\pm3\sqrt{2}} \Rightarrow$$

هذلولی مطلوب: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{18}=1$

۴ـ حجم حادث از دوران سطح محصور چنین است:

$$v=\pi\int_a^b y^2dx$$

ابتدا نقاط برخورد منحنی را با محور طول به دست می‌آوریم. برای این‌منظور درتابع $y=0$ راجایگزین می‌کنیم و درنتیجه داریم:

$$y=0 \Rightarrow x^2-\sqrt[3]{x^2}=0 \Rightarrow$$

$$x^2=\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow x^6=x^2$$

$$x^6-x^2=0 \Rightarrow x^2(x^4-1)=0 \Rightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} x^2=0 \Rightarrow \boxed{x=0} \\ x^4-1=0 \Rightarrow x^4=1 \Rightarrow \boxed{x=\pm1} \end{array}\right.$$

(نقاط برخورد منحنی با محورxها)

بنابراین حجم حادث چنین نتیجه می‌شود:

$$v=\pi\int_{-1}^{1}(x^{2}-\sqrt[3]{x^{2}})^{2}dx$$

$$v=\pi\int_{-1}^{1}(x^{6}-2x^{3}\sqrt[3]{x^{2}}+\sqrt[3]{x^{4}})dx$$

$$v=\pi\int_{-1}^{1}(x^{6}-2x^{\frac{11}{3}}+x^{\frac{4}{3}})dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{7}x^{7}-\frac{6}{14}x^{\frac{14}{3}}+\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}\right]_{-1}^{1}$$

$$v=\pi\left[\left(\frac{1}{7}-\frac{6}{14}+\frac{3}{7}\right)-\left(\frac{-1}{7}-\frac{6}{14}-\frac{3}{7}\right)\right]$$

$$v=\pi\left[\frac{2}{7}+\frac{6}{7}\right]=\frac{8}{7}\pi \Longrightarrow$$

$\boxed{v=\frac{8\pi}{7}}$ واحد حجم

۵ـ با توجه به شرط داده‌شده علامت

$\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}$ و $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}$

را باید مشخص کنیم. داریم:

$$\frac{5\pi}{16}<\frac{x}{8}<\frac{3\pi}{8} \Longrightarrow \frac{5\pi}{4}<\frac{x}{2}<\frac{3\pi}{2}$$

$\Longrightarrow \sin\frac{x}{2}<0$ و $\cos\frac{x}{2}<0$ و

$$\sin\frac{x}{2}<\cos\frac{x}{2} \Longrightarrow \sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}<0$$

$$\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}<0$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{\left|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right|}{2}+\frac{\left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|}{2}=$$

$$\frac{-(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})-(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})}{2}=-\sin\frac{x}{2}$$

ـ۶

حل الف): $2\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos 2x$

$=\sin^{2}x+\cos^{2}x \Longrightarrow$

راه اول: $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=1 \Longrightarrow$

$$\sin 2x+\frac{1}{\sqrt{3}}\cos 2x=\frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow$$

$$\sin 2x+tg\frac{\pi}{6}\cos 2x=\frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow$$

$$\sin(2x+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \sin(2x+\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6} \Longrightarrow$$

$$2x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{6} \Longrightarrow \boxed{x=k\pi}$$

$$2x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \Longrightarrow \boxed{x=k\pi+\frac{\pi}{3}}$$

راه دوم: $(1+1)tg^{2}x-2\sqrt{3}tgx+1-1=0$

$$\Longrightarrow 2tgx(tgx-\sqrt{3})=0 \Longrightarrow$$

$$tgx=0 \Longrightarrow \boxed{x=k\pi}$$

$$tgx=\sqrt{3}=tg\frac{\pi}{3} \Longrightarrow \boxed{x=k\pi+\frac{\pi}{3}}$$

حل ب): $\sqrt{2}(\sin 2x-\cos 2x)+2\sin 2x\cos 2x=\sqrt{2}$

معادلهٔ کلاسیک نوع چهارم

$$\sin 2x-\cos 2x=z \Longrightarrow \sin 2x\cos 2x=\frac{1-z^{2}}{2} \Longrightarrow$$

$$\sqrt{2}z+2(\frac{1-z^{2}}{2})=\sqrt{2} \Longrightarrow$$

$$z^{2}-\sqrt{2}z+\sqrt{2}-1=0 \Longrightarrow$$

$z=1$ و $z=\sqrt{2}-1$

$$z=1 \Longrightarrow \sin 2x-\cos 2x=1 \Longrightarrow$$

$$\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})=1 \Longrightarrow$$

$$\sin(2x-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4} \Longrightarrow$$

$$2x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{4} \Longrightarrow \boxed{x=k\pi+\frac{\pi}{4}}$$

$$2x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4} \Longrightarrow \boxed{x=k\pi+\frac{\pi}{2}}$$

$$z=\sqrt{2}-1 \Longrightarrow \sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}-1$$

$$\Longrightarrow \sin(2x-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}=\sin\alpha$$

$$\Longrightarrow \left|\begin{array}{l} 2x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+Arc\sin(\frac{2-\sqrt{2}}{2}) \Longrightarrow \\ x=k\pi+\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}Arc\sin(\frac{2-\sqrt{2}}{2}) \\ 2x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi-Arc\sin(\frac{2-\sqrt{2}}{2}) \Longrightarrow \\ x=k\pi+\frac{5\pi}{8}-\frac{1}{2}Arc\sin(\frac{2-\sqrt{2}}{2}) \end{array}\right.$$

حل ج): $Arc\sin(2x-1+)\frac{\pi}{3}=2(-\frac{\pi}{4}) \Longrightarrow$

$$Arc\sin(2x-1)=\frac{-5\pi}{6}$$

$$2x-1=\sin(\frac{-5\pi}{6}) \Longrightarrow 2x-1=-\frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow x=\frac{1}{4}$$

ـ۷

$$(m-1)tgx+m\,cotgx=2(m-3)$$

حل اولاً: شرط جواب معادلهٔ کلاسیک نوع دوم:

$$c^{2}-4ab\geqslant 0$$

$$a=m-1 \quad , \quad b=m \quad , \quad c=2(m-3) \Longrightarrow$$

$$4(m-3)^{2}-4(m-1)m\geqslant 0 \Longrightarrow$$

$$(m-3)^{2}-m(m-1)\geqslant 0 \Longrightarrow$$

$$m^{2}-6m+9-m^{2}+m\geqslant 0 \Longrightarrow$$

$$-5m+9\geqslant 0 \Longrightarrow \boxed{m\leqslant\frac{9}{5}}$$

حل ثانیاً:

$$\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6} \Longrightarrow$$

جوابهای کلی:

$$\left|\begin{array}{l} \frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{6} \\ \frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \end{array}\right.$$

$\Longrightarrow x=\frac{2\pi}{3}$ جواب و $x=2\pi$ غیرقابل‌قبول

$$x=\frac{2\pi}{3}\xrightarrow{\text{درمعادله}}(m-1)tg\frac{2\pi}{3}+m\,cotg\frac{2\pi}{3}$$

$$=2(m-3) \Longrightarrow m=\frac{9\sqrt{3}-12}{2}$$

حل ثالثاً:

$$4tg2x=3 \Longrightarrow tg2x=\frac{3}{4} \Longrightarrow \frac{2tgx}{1-tg^{2}x}=\frac{3}{4}$$

$$\Longrightarrow 3tg^{2}x+8tgx-3=0 \Longrightarrow tgx=-3 \Longrightarrow$$

$cotg\,x=-\frac{1}{3}$ و $tgx=\frac{1}{3} \Longrightarrow cotgx=3$

$tgx=-3$ و $cotgx=-\frac{1}{3} \Longrightarrow$

$$(m-1)(-3)+m(-\frac{1}{3})=2m-6 \Longrightarrow$$

$$m=\frac{27}{16}$$

$tgx=\frac{1}{3}$ و $cotg\,x=3 \Longrightarrow$

$$(m-1)(\frac{1}{3})+m(3)=2m-6 \Longrightarrow m=-\frac{17}{4}$$

-۸

$$\sin\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}=\sin\frac{B}{2}\cos^2\frac{A}{2} \Longrightarrow$$

$$\frac{tg\frac{A}{2}}{tg\frac{B}{2}}=\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}} \Longrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}\div\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$=\frac{p(p-a)}{bc}\div\frac{p(p-b)}{ac} \Longrightarrow$$

$$\frac{p-a}{p-b}=\frac{a(p-a)}{b(p-b)} \Longrightarrow \frac{a}{b}=1 \Longrightarrow$$

$a=b \Longrightarrow$ مثلث متساوی‌الساقین است

تبصره- با استفاده از روابط کسینوسها در مثلث، سینوس وکسینوس واز آنجا تانژانت نصف زوایای مثلث برحسب اضلاع مثلث قابل محاسبه‌است. به عنوان مثال داریم:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \Longrightarrow$$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$tg\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

۹- A وB وC زوایای مثلث می‌باشند پس داریم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi$$

$$\sin 3\hat{A}+\sin 3\hat{B}+\sin 3\hat{C}=0 \Longrightarrow$$

$$\sin 3[\pi-(\hat{B}+\hat{C})]+\sin 3\hat{B}+\sin 3\hat{C}=0$$

$$\sin 3(\hat{B}+\hat{C})+2\sin\frac{3\hat{B}+3\hat{C}}{2}\cos\frac{3\hat{B}-3\hat{C}}{2}=0$$

و با توجه به اتحاد:

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

داریم:

$$2\sin\frac{3(\hat{B}+\hat{C})}{2}\cos\frac{3(\hat{B}+\hat{C})}{2}$$

$$+2\sin\frac{3(\hat{B}+\hat{C})}{2}\cos\frac{3(\hat{B}-\hat{C})}{2}=0$$

$$2\sin\frac{3(\hat{B}+\hat{C})}{2}\left[\cos\frac{3(\hat{B}+\hat{C})}{2}+\cos\frac{3(\hat{B}-\hat{C})}{2}\right]=0$$

$$2\sin\frac{3(\hat{B}+\hat{C})}{2}\left[2\cos\frac{3\hat{B}}{2}\cos\frac{3\hat{C}}{2}\right]=0$$

$$4\sin\frac{3(\hat{B}+\hat{C})}{2}\cos\frac{3\hat{B}}{2}\cos\frac{3\hat{C}}{2}=0$$

هریك از علامتهای تساوی اخیر می‌توانند صفر باشند. بنابراین داریم:

$$\sin\frac{3(\hat{B}+\hat{C})}{2}=0 \Longrightarrow \sin\frac{3(\hat{B}+\hat{C})}{2}=\sin\pi$$

$$\Longrightarrow \frac{3(\hat{B}+\hat{C})}{2}=\pi \Longrightarrow \hat{B}+\hat{C}=\frac{2\pi}{3}$$

$$\Longrightarrow \hat{A}=60^\circ$$

ویا:

$$\cos\frac{3\hat{B}}{2}=0 \Longrightarrow \cos\frac{3\hat{B}}{2}=\cos\frac{\pi}{2} \Longrightarrow$$

$$\hat{B}=\frac{\pi}{3}=60^\circ$$

ویا:

$$\cos\frac{3\hat{C}}{2}=0 \Longrightarrow \cos\frac{3\hat{C}}{2}=\cos\frac{\pi}{2} \Longrightarrow$$

$$\hat{C}=\frac{\pi}{3}=60^\circ$$

اسامی تعدادی از عزیزانی که حلّ مسائل مسابقه‌ای ومسائلی برای‌حل رادرزمان تعیین‌شده برای مافرستاده‌اند.

۱- سید عبدالله موسوی (اهواز)
۲- محمدعلی نیکسار (بندرانزلی)
۳- نوید ملکی (تهران)
۴- حسین افشارفتوحی (تهران)
۵- سیدروزبه مصطفوی‌پور (تهران)
۶- امیررضا فرزین (اصفهان)
۷- ویدا برفر (تهران)
۸- سید اسداللهی (خرم‌آباد)
۹- خلیل دولت‌یاری (نظرآباد)
۱۰- مهدی حاج‌اسماعیلی (اصفهان)
۱۱- سیامک جعفری (اهواز)
۱۲- حسین سبزرو (تهران)
۱۳- حامد شریف‌نژاد (خراسان)
۱۴- محمّد آریانی (قزوین)
۱۵- شهرام بیگلری (کرمانشاه)
۱۶- علی کاویانی (گرگان)
۱۷- فرزاد رضوی (قزوین)
۱۸- احسان رضایی (تهران)
۱۹- کیوان حاجی‌بیگ‌زاده (خوی)
۲۰- حسین نوروزی (تهران)
۲۱- ارشام برومندسعید (کرمان)

جوابهای تفریح اندیشه

جواب ۱

۱۶۰ اینچ، یا ۱۳ فوت و ۴ اینچ. فرض می‌کنیم عمق چاه در زمان حاضر x باشد؛ در این صورت عمق پایان کار ۴x است، و

$$۴x = ۷۰ + ۳\,(۷۰ - x)$$
$$۷x = ۷۰ + ۲۱۰ - ۳x$$
$$۷x = ۲۸۰\ ,\ x = ۴۰$$

بنابراین $۴ \times ۴۰ = ۱۶۰$ اینچ.

جواب ۲

۲۵. ۵۰ دقیقه = ۲۰ دقیقه + ۳۰ دقیقهٔ A

آنها در $\frac{۳}{۵}$ فاصلهٔ A تا B تلاقی می‌کنند. بنابراین، B برای پیمودن $\frac{۲}{۵}$ فاصلهٔ نقطهٔ 'B تا نقطهٔ 'A ۳۰ دقیقه وقت صرف می‌کند. در این‌صورت B برای پیمایش کل فاصلهٔ مورد بحث ($۳۰ \times \frac{۵}{۲}$) ۷۵ دقیقه لازم دارد. از آنجا که کل زمان A برابر ۵۰ دقیقه بوده، B به نقطهٔ 'A، ۲۵ دقیقه بعداز آنکه A به نقطهٔ 'B می‌رسد، وارد می‌شود.

یا، به طریق دیگر، B برای پیمودن همان فاصله‌ای که A در ۲۰ دقیقه طی می‌کند، به ۳۰ دقیقه نیاز دارد. بنابراین، B برای پیمودن فاصله‌ای که A در ۳۰ دقیقه می‌پیماید به ۴۵ دقیقه (۱/۵ برابر آن) صرف می‌کند.

جواب ۳

۵۰. ورود ۲۰ دقیقه زودتر از زمان معمولشان به خانه، به علت پیاده رفتن B است. (اگر در ایستگاه صبر کرده بود، درساعت تنظیم شده به خانه می‌رسید.) B، به ازای ۲۰ دقیقهٔ ذخیره شده، که تمام آن زمان رانندگی بوده، نیم زمان رانندگی، یا ۱۰ دقیقه، هنوز در حال پیاده حرکت کردن بوده است. (زمان «رفت» اتومبیل مساوی زمان «بازگشت» آن است) بنابراین ۵۰ دقیقه (۶۰ دقیقه منهای ۱۰ دقیقهٔ در اتومبیل) پیاده حرکت کرده است.

جواب ۴

۱۰. کارگر برای رسیدن به تقاطع ۶۰ دقیقه وقت صرف می‌کند (۶ کیلومتر فاصله دارد و سرعتش ۶ کیلومتر در ساعت است). از آنجا که ۵۰ دقیقه دیر کرده، قطار به‌طور معمول از آن نقطه به فاصلهٔ ۱۰ دقیقه از تقاطع است.

Borhān
VOL.I. No.4
December 1992

In the name of God

Borhān is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:
Madrasse Publication- No. 268, Iranshahr-e -Shomali Ave. Tehran Iran Post code: 15875

Contents:

نیریزی و قضیهٔ فیثاغورس
$(a^2 = b^2 + c^2)$

فضل نیریزی، اهل نیریز فارس که در ۳۱۰ هـ. ق. (۹۲۲ میلادی) درگذشته است و درزمان «معتضد» خلیفهٔ عباسی می‌زیسته و یکی از بزرگترین ریاضی‌دانان و اخترشناسان مسلمان ایرانی است، برای قضیهٔ فیثاغورس اثباتی دارد که در شکل می‌بینید: مربع ABCD را با ضلع برابر وتر مثلث قائم‌الزاویه می‌سازیم و خود مثلث را روی هریک از چهار ضلع مربع قرار می‌دهیم به‌نحوی که دوتا از مثلثها در درون و دوتای دیگر در بیرون مربع قرارگیرند. به‌سادگی از روی شکل دیده می‌شود که مساحت شش ضلعی AEFCGH، از یک طرف برابر مساحت مربع ABCD و از طرف دیگر، برابر مجموع مساحتهای دو مربع AEMH و MFCG است.