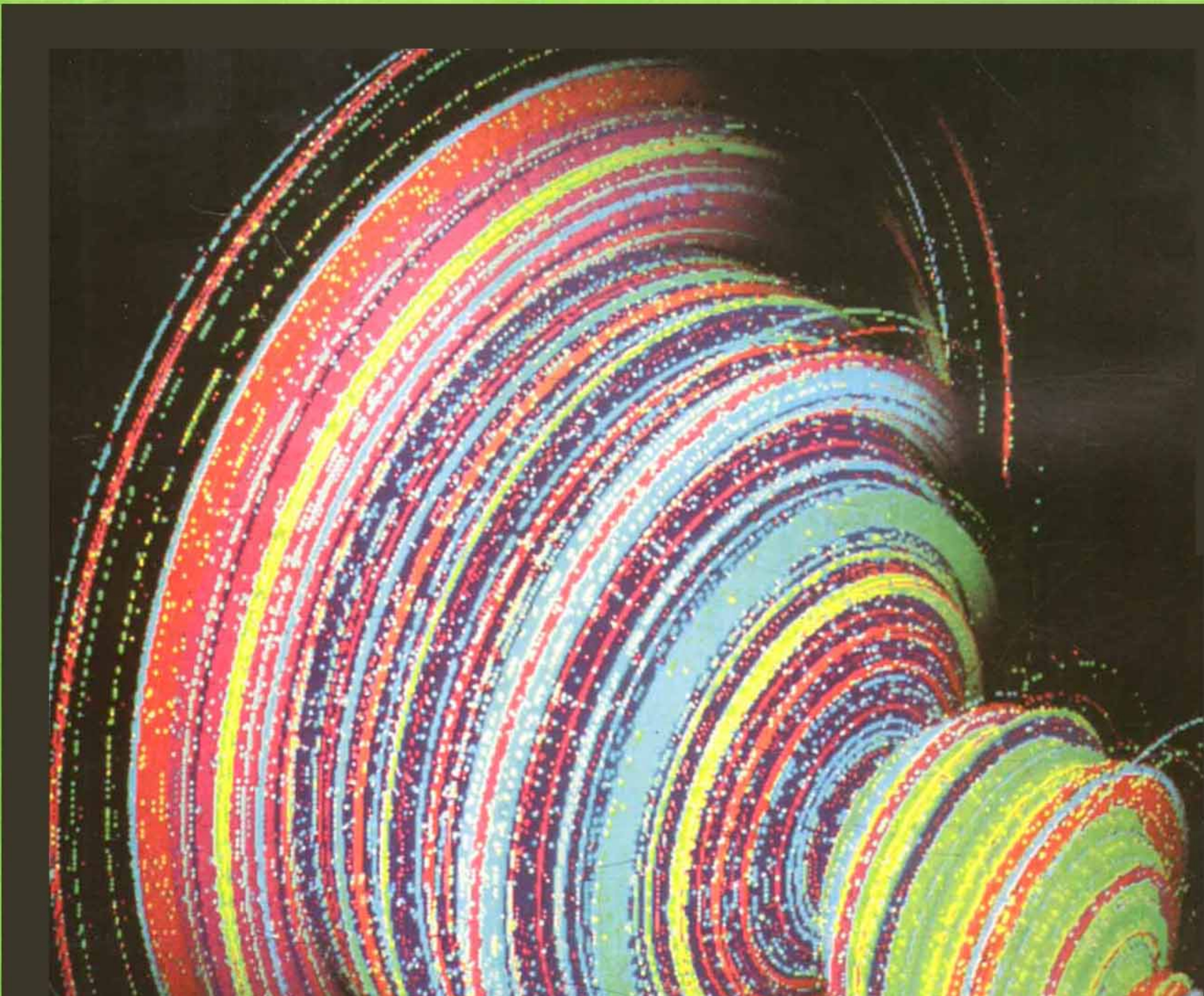
مجله ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۸



سال سوم، پاییز ۱۳۷۲، شمارهٔ اول، بهاء ۱۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم

• صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه

• مدیر مسئول: محمود ابراهیمی • سردبیر: حمیدرضا امیری

سال سوّم، پاییز ۱۳۷۲، شمارهٔ اول

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱ـ نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی دبیرستان)

۲ـ طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن

۳ـ طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن

۴ـ طرح معماهای ریاضی

۵ـ نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

• هیئت تحریریه در حکّ واصلاح وحذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.

• مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.

• مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

مطالب این شماره

□ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهرشمالی، کوچه بهرام چوبینی، پلاک ۱۷ تلفن: ۸۸۲۶۰۰۷ ، ۸۸۲۵۹۶۴ ، ۸۸۲۳۱۴۹ ، فاکس ۸۸۲۰۵۹۹

حرف اول

عزیزان دانش‌آموز، آیا تاکنون فکر کرده‌اید وظیفه چیست؟

آیا شما هم وظیفه‌ای را بردوش خود احساس می‌کنید؟ اگر جواب مثبت است، وظیفهٔ اصلی شما چیست؟ چگونه و تا چه‌حدّ به وظیفهٔ خود عمل می‌کنید؟ آیا تاکنون وظیفهٔ خود را باوظایف دیگران مقایسه کرده‌اید؟ کدام راحت‌تر است؟

یقین دارم با من هم‌عقیده‌اید که شما هم مانند دیگر اقشار جامعه وظیفه‌ای بر دوش دارید که به نحواحسن باید آن را انجام دهید، خوشبختانه وظیفه شما شاید راحت‌ترین و دلچسب‌ترین وظایف موجود در جامعه است؛ درس‌خواندن و فراگیری علم.

البته هستند عزیزانی که به دلایل مختلف در کنار تحصیل کار هم می‌کنند. اما شما دوست عزیز که تنها وظیفه‌ات درس‌خواندن است، آیا به این وظیفه بخوبی عمل می‌کنی؟ چه کاری و چه وظیفه‌ای راحت‌تر از درس‌خواندن، آن هم برای خودت و آیندهٔ خودت. کاری که تمام بزرگان دین ما نیز در این زمینه مشوق شما هستند، جامعه نیز ارزش والایی برای آن قائل است و تو در انجام این وظیفه از تمامی امکانات جامعه و بیت‌المال از جمله وجود باارزش معلم، محیط آموزشی و زحمات پدر و مادر، برخوردار هستی. پس اگر به وظیفه‌ات عمل نکنی به همهٔ مردم خیانت کرده‌ای و این خیانتی است نابخشودنی.

اگر هر شخص در هرمقام و جایی که واقع است، وظیفه‌ای را که بر عهده دارد به نحواحسن به انجام برساند جامعه هیچ‌وقت دچار کمبود و مشکل نخواهد شد، شما هم یکی از اجزاء و ارکان بسیار مهمّ این جامعه هستید و آیندهٔ امّت اسلامی با آیندهٔ شما گره خورده است.

قبلاً گفتیم (در شمارهٔ قبل) که انجام وظیفه، باید به سمت رضای خدا میل کند و اگر چنین باشد اثرات آن دلپذیرتر و ماندنی‌تر است.

امّا چه کنیم که به وظیفه‌مان کاملاً عمل کنیم و چگونه برنامه‌ریزی کنیم تا دانش‌آموزی موفق باشیم. این بحثی است که ـ ان‌شاءا... ـ در شماره‌های بعد به آن خواهیم پرداخت.

در این‌جا از شما عزیزان تقاضا دارم نظرات و پیشنهادات خود را برای ما نوشته و ارسال کنید تا بهتر بتوانیم وظیفه مهم دانش‌آموزی را شناسایی کرده و راه رسیدن به هدف که همانا انجام این وظیفه است را هموار کنیم تا رهروان این راه بهتر بتوانند در آن قدم بزنند.

سردبیر

شما هم مـــی‌توانـــید در درس ریاضی خود موفق باشید(۸)

پرویز شهریاری

روش یادگیری در کلاس درس

راست بایستید و سعی کنید هر دو دست خود را چندبار و با هم، حرکت دهید، ولی یکی از دستها را بالا و پایین و دیگری را به راست و چپ ببرید ... حق با شماست. کار دشواری است. دستها تسلیم ارادهٔ شما نمی‌شوند؛ حرکتها مخلوط می‌شوند: یا هر دو دست بالا و پایین می‌روند و یا هر دو به راست و چپ حرکت می‌کنند... اگر کسی بخواهد؛ مثلاً" بیست بار پشت سرهم، این حرکت دستها را، درست و بدون اشتباه، انجام دهد، باید ساعتها و روزها تمرین کند و تازه من تردید دارم به نتیجهٔ مطلوب برسد. چرا؟ به ظاهر دشواری از این جا ناشی می‌شود که مغز آدمی نمی‌تواند یا عادت نکرده است، به طور هم زمان، به دو موضوع متفاوت بیندیشد: وقتی به نوع حرکت دست راست می‌اندیشید؛ دست چپ هم از همان اندیشه یا اراده پیروی می‌کند و برعکس.

وقتی در کلاس، جذب سخنان دبیر خود شده‌اید و همهٔ «هوش و حواس» شما متوجه حرفهای اوست، تقریباً" هیچ صدای دیگری را نمی‌شنوید، در حالی که سر و صدای کم و بیش یکنواخت بازی بچه‌ها در حیاط مدرسه و یا عبور اتومبیلها درخیابان، به طور دائم وجود دارد. ولی اگر به سخنان دبیر خود بی‌علاقه باشید، با آن که موجهای حاصل از صدای او به گوش شما می‌رسد، آنها را نمی‌شنوید...

فیلم مورد علاقهٔ خود را تماشا می‌کنید. تلفن زنگ می‌زند و ناچار می‌شوید؛ گوشی را بردارید و با دوست خود صحبت کنید. ضمن مکالمهٔ تلفنی به تلویزیون نگاه می‌کنید. ولی شما که حواستان متوجهٔ سخنان آن طرف سیم تلفن می‌باشد؛ دیگر گفت و شنودهای فیلم تلویزیونی را نمی‌شنوید؛ و اگر، ضمن تلفن، به فیلم توجه کنید، آن وقت جمله‌هایی از حرفهای دوستان را از دست می‌دهید...

در زبان فارسی ضرب‌المثل جالبی وجود دارد که
«بایک دست نمی‌توان دو هندوانه برداشت»

به گمان من ، این ضرب‌المثل، اشاره‌ای به همین حقیقت دارد که: «به طور همزمان و با هم، نمی‌توان دو کار را انجام داد». ذهن آدمی، دریک لحظه تنها به یک چیز و یک نقطه توجه دارد و ـ جز در مورد برخی آدمهای استثنایی (که بسیار نادرند) ـ نمی‌تواند در عین حال به دو کار متفاوت بپردازد. مغز ما نمی‌تواند دو فرمان مختلف را، همزمان صادر کند که مثلاً"، هم درست بنویسیم و هم درست بشنویم. البته، این موضوع، شامل کارهایی نمی‌شود که غریزی‌اند ویا به صورت عادت درآمده‌اند، مثل نفس کشیدن و یا راه رفتن. شما می‌توانید، ضمن راه رفتن صحبت بکنید، ولی اگر بخواهید از عرض یک خیابان شلوغ بگذرید، اغلب ناچار می‌شوید حرف خود را قطع کنید، چراکه، ضمن عبور ازعرض خیابان، دیگر از عادت خود پیروی نمی‌کنید و باید حواستان جمع باشد تا با اتومبیلی برخورد نکنید. توصیه می‌کنند، اگر فکر ناراحت کننده‌ای شما را آزار می‌دهد و مانع خواب شما می‌شود، به طور مثال، از ده هزار آغاز کنید و عددها را از بالا به پایین، شمرده و روشن نام ببرید: ده هزار، نه هزارو نه صدو نود ونه، نه هزارو نه صدو نودو هشت،... و به شما اطمینان می‌دهند که، در میانه‌های شمارش، خواب به سراغ شما می‌آید. می‌دانید چرا؟ شما در نام بردن عددها، از پایین به بالا، عادت کرده‌اید و اغلب نیازی به تمرکز اندیشهٔ خود ندارید، ولی وقتی از بالا به پایین می‌شمارید، باید حواس و فکر خود را

متمرکز کنید تا دچار اشتباه نشوید: این جا عادت کمک زیادی به شما نمی‌کند. چون فکر نمی‌تواند در دو جای مختلف متمرکز شود، به ناچار از فکر آزار دهنده‌ای که موجب بی‌خوابی شما شده بود، دور می‌شوید و آرام آرام، خواب به سراغ شما می‌آید.

کسانی که به اندازهٔ کافی کار می‌کنند، دائم در اندیشهٔ کار خود هستند و وقتی را به بطالت نمی‌گذرانند، خیلی کمتر از آدمهای بی‌کار، به پزشک مراجعه می‌کنند. بدن آدمی زنده است و هر جزء و هر اندام بدن ـ هر چند کوچک باشد ـ باز هم مجموعه‌ای از سلولهای زنده راتشکیل می‌دهد. هر مجموعهٔ زنده، ضمن تلاش و تکاپو، منجر به برخوردهایی در عنصرهای خود می‌شود و آثار ناشی از این تماسها و برخوردها، به نحوی خود را نشان می‌دهند. یکی از آثار تماس سلولهای بدن آدمی با یکدیگر و با دنیای خارج، احساس درد یا احساس سوزش وخارش است. شما هم اکنون که این مقاله را می‌خوانید، نوشته را کنار بگذارید و تمام حواس خود را به این نکته متوجه کنید که، مثلاً «نوک دماغ شما می‌خارده. اگر اندک زمانی، با تمام حواس خود، به آن بیندیشید، متوجه می‌شوید که، در واقع هم، نوک دماغ شما می‌خارد. «بیماران خیالی» بسیارند و گونه‌های متفاوت دارند، ولی یکی از این گونه‌ها بی‌کارانی هستند که به طور دائم، به سلامتی خود می‌اندیشند و «درد» ها و «سوزش» های مختلفی را در اندامهای بدن خود «کشف» می‌کنند.

همین اصل روان شناسی است که باید، ضمن یادگیری، مورد توجه قرار گیرد. به چه منظور به مدرسه می‌روید؟ چرا در کلاس درس حاضر می‌شوید؟ مگر نمی‌شود، آنچه را که می‌خواهید و علاقه‌مندید، ضمن مطالعه و پیش خود به دست آورید؟ کتابها، جزوه‌ها و رساله‌های راهنما در اختیار شماست... پس مدرسه و کلاس چه نقشی دارد؟

۱ ـ حقیقت این است که همه چیز رانمی‌توان در کتاب درسی و یا کتابهای دیگر پیدا کرد. گذشته از این، ضمن پرسشهای دانش‌آموزان ویا بیانهای درست و نادرستی که از زبان دانش‌آموزان مختلف جاری می‌شود، خیلی چیزها می‌توان آموخت.

۲ ـ هنوز عادت نشده‌است که معلمان و نویسندگان کتابهای درسی یا کمک درسی، سعی کنند همهٔ تجربه‌های دوران طولانی کار خود را به روی کاغذ بیاورند و در اختیار ما بگذارند.

تازه این خاطره‌نویسی هم، تمامی مشکل را حل نمی‌کند. هرمعلم آزموده، سر کلاس درس، به مناسبت بحثی که پیش می‌آید یا به مناسبت اشتباهی که یک دانش‌آموز در حل مسأله‌ای مرتکب می‌شود، می‌تواند با یک جمله یا یک اشاره و یا یک خاطره کوتاه، دشواریهای زیادی را از ذهن شما دور کند و مسیر روشنی را دربرابر شما بگذارد که با خواندن چند کتاب، به آن نرسید.

همین اشاره‌ها و نکته‌های کوتاه معلم است که وجود مدرسه و کلاس را مفید و لازم می‌سازد. وگرنه، برای حل یک مسأله، یا درک مضمون یک درس، یا به دست آوردن مجموعه‌ای از پرسشها و مسأله‌ها، می‌توانید به کتاب و جزوه‌ها مراجعه کنید و، در واقع، نیازی به معلم و کلاس نداشته باشید.

اگر چنین است، باید تمام توجه شما در کلاس درس، متوجه شکار همین نکته‌ها و اشاره‌ها باشد و این، البته، با یادداشت کردن آنچه معلم روی تخته می‌نویسد، منافات دارد. و باید گفت که رونویسی از نوشته‌های روی تخته، به صورت عادتی برای بیشتر دانش‌آموزان درآمده است.

وقتی شما به تخته نگاه می‌کنید و آنچه را که بر آن نقش بسته است، در دفتر خود وارد می‌کنید، به خصوص که همیشه در نگرانی پاک شدن نوشته‌های تختهٔ سیاه به سر می‌برید، نمی‌توانید دربارهٔ آنچه می‌نویسید بیندیشید و، بدتر از آن، نمی‌توانید سخنان معلم را بشنوید و درک کنید.

اگر به نوشته یا خط معلم علاقه دارید، می‌توانید دوربینی با خود داشته باشید و هر بار که تخته پراز نوشته شد، عکسی از آن بگیرید! ولی در واقع، این نوشته‌ها یا عکسها، تنها می‌توانند جنبهٔ یادگاری داشته باشند، ولی به یادگیری ریاضیات هیچ ربطی ندارند.

۳ ـ اگر عادت کرده‌اید: وقتی معلم درس می‌دهد، با عجله (و به طور طبیعی، بدون فکر)، همهٔ گفته‌ها و نوشته‌های او را در دفتر خود وارد کنید، باید مطمئن باشید که از درس معلم، اگر نگوییم هیچ بهره‌ای نبرده‌اید، بهرهٔ بسیار کمی برده‌اید.

ذهن و اندیشهٔ شمانمی‌تواند، در عین حال، هم متوجهٔ تختهٔ سیاه و نوشتن سریع نقش و نگارهای روی آن، در دفترچه باشد و هم

اشاره‌های پر ارزش معلم را بشنود و درک کند. و چنین است که با ارزشترین چیز را، چیزی راکه فلسفهٔ وجودی مدرسه و کلاس بر اساس آن نهاده شده است، از دست می‌دهد.

سرکلاس فقط گوش کنید. با تمام وجود خود گوش کنید. سعی کنید هر واژه‌ای راکه از زبان معلم بیرون می‌آید، درک و هضم کنید. تنها در این صورت است که می‌توانید درس را یاد بگیرید، با دشواریهای ذهنی‌ؤ استدلالی خود آشنا شوید، نقص روشهای کار خود را پیداکنید... و، در ضمن، به موقع بپرسید، به موقع اعتراض کنید و، در نتیجه، به اشاره‌ها و نکته‌های گرانبهای معلم دست یابید.

البته می‌توانید (حتی باید) دفترچه‌ای جلوی روی خود داشته باشید، ولی در آن تنها برخی واژه‌ها را بنویسید همین قدر که به کمک آنها بتوانید، در منزل، سخنان معلم را به یاد آورید. تنها صورت مسأله‌هایی راکه معلم، به عنوان نمونه، درکلاس حل می‌کند، در دفتر خود بنویسید و بعد، با تمام وجود خود، به راه حلی که معلم ارائه می‌دهد توجه کنید و حل دوبارهٔ این مسأله‌ها را به زمانی واگذارید که به منزل رسیده‌اید.

به عنوان نمونه بحث کلاس مربوط به لگاریتم است. مطلب برای شما تازگی دارد. شما، بدون این که چشم از دبیر خود بردارید، با دقت به سخنان او گوش می‌دهید. در پایان درس، این چند واژه یا رابطهٔ پراکنده را بر دفتر خود نوشته‌اید:

لگاریتم = عکس عمل توان؛ مبناهای مختلف؛ عدد غیر مثبت و لگاریتم

مبنای بین صفر و یک، مبنای بزرگتر از واحد

$a^{\log_a x} = X$، $(a$ و $x > 0)$

لگاریتم حاصل ضرب؛ ... تمرین در صفحهٔ ... از شمارهٔ ...

و یا وقتی سر کلاس مثلثات نشسته‌اید:

سینوس و تانژانت مجموع سه‌کمان، $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ (یا π)،

3α و 5α و 7α، ...

تمرین در صفحهٔ ... از شمارهٔ...

شاید کسی، جز خود شما، از این اشاره‌ها چیزی سر در نیاورد، ولی این مهم نیست، مهم این است که با این اشاره‌های کوتاه بتوانید تمامی درسی راکه معلم داده است، به یاد آورید. این که با این اشاره‌ها چه کنید، می‌ماند برای کار در منزل که دربارهٔ آن صحبت خواهیم کرد.

در کلاس درس ریاضی (و البته، نه تنها ریاضی)، سراپا گوش باشید. سعی کنید حتی یک جمله یا یک واژهٔ درس را از دست ندهید. به موقع بپرسید. تنها برخی اشاره‌ها را یادداشت کنید (و صورت مسأله‌های نمونه را). ترتیبی بدهید وقتی از کلاس بیرون می‌آیید، درس تازه را به طور کامل فهمیده باشید.

سر کلاس و موقع درس معلم، خود را به صورت منشی و تندنویس در یک مجلس سخنرانی، در نیاورید. با دقت گوش کنید تا با ظرایف کار و نکته‌های گرهی و آموزنده آشنا شوید. انتقال نوشته‌های روی تختهٔ سیاه به دفترچهٔ شما، هیچ سودی ندارد، حتی به بهتر شدن خط شما هم کمک نمی‌کند، چراکه همه چیز را با عجله و همراه با دل واپسی می‌نویسید.

تا بعد

ادب ریاضی

اینشتاین نشان داده است که هندسهٔ اقلیدسی باید کنار گذاشته شود، او بر اساس نظریهٔ جاذبی خویش، با پرسشهای کیهان شناسانه‌ای سروکار دارد و نشان می‌دهد که وجود یک عالم متناهی ممکن است. به علاوه، تمام نتایجی که از اخترشناسی حاصل آمده است، با این اصل که عالم بیضوی است، کاملاً" سازگار است. تأسیس ما دایر بر آن که عالم متناهی است به دو جهت است یعنی راجع است به بی‌نهایت کوچک و بی‌نهایت بزرگ.

اما احتمالاً" هنوز مسألهٔ عمده این است که نامتناهی جای برحقی را در تفکرات ما اشغال کرده است و نقش یک مفهوم ضروری را ایفا می‌کند.

دیوید هیلبرت

فلسفهٔ ریاضی، حسین ضیائی و دیگران

مشتق‌پذیری

● احمد قندهاری

اگر تابع به‌معادلهٔ $y = f(x)$ در $x = x_0$ پیوسته و $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ موجود و متناهی باشد، این حدّ را مشتق تابع به معادلهٔ $y = f(x)$ در x_0 گویند و آن رابا نماد $f'(x_0)$ نشان می‌دهند. دراین‌صورت‌می‌گویند این‌تابع در $x = x_0$ مشتق‌پذیر است.

می‌دانیم: $f'(x_0)$ برابر ضریب زاویهٔ خط مماس بر منحنی تابع به معادلهٔ $y = f(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ است.(۱)

اگر $x - x_0$ را h فرض کنیم و تابع f در x_0 مشتق‌پذیر باشد می‌توان نوشت:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

مشتق چپ و مشتق راست

$\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ به‌شرطی‌که موجودباشد رامشتق راست تابع به معادلهٔ $y = f(x)$ درنقطهٔ x_0 گویند و آن را به‌صورت $f'_+(x_0)$ نشان می‌دهند:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$f'_+(x_0)$ راضریب زاویهٔ خط مماس برمنحنی‌تابع به معادلهٔ $y = f(x)$ در طرف راست نقطه x_0 گویند.

و $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ به‌شرطی که‌موجودباشد را مشتق چپ تابع به معادله $y = f(x)$ در نقطهٔ x_0 گویند و آن‌را به‌صورت $f'_-(x_0)$ نشان می‌دهند.

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$f'_-(x_0)$ را ضریب زاویهٔ خط مماس بر منحنی تابع به معادلهٔ $y = f(x)$ در طرف چپ نقطهٔ x_0 گویند.

تعریف: اگر تابع $y = f(x)$ در $x = x_0$ پیوسته باشد و مشتق راست در این نقطه با مشتق چپ در این نقطه برابر و متناهی باشد، آنگاه می‌گویند، تابع به معادلهٔ $y = f(x)$ در $x = x_0$ مشتق‌پذیر است.

مسأله ۱: مشتق‌تابع‌به‌معادلهٔ $f(x) = x^2 - x$ را درنقطهٔ $x_0 = 1$ به کمک تعریف بیابید.

حل: اولاً: این تابع در $x_0 = 1$ پیوسته است زیرا:

$$f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$$

ثانیاً:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x - 0}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} x = 1 = f'(1)$$

پس این تابع در $x_0 = 1$ مشتق‌پذیر است.

مسأله ۲: مشتق پذیری تابع به معادلهٔ $f(x) = |x^2 - 2x|$ را در نقاط $x_0 = 0$ و $x_0 = 2$ بررسی کنید و نمودار تابع و خطوط مماس در نقاط $x_0 = 2$ و $x_0 = 0$ را رسم کنید همچنین نمودار تابع مشتق را رسم کنید.

حل: اولاً: این تابع در نقاط $x_0 = 0$ و $x_0 = 2$ پیوسته است زیرا:

$$f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

$$f(2) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = 0$$

ثانیاً: مشتق‌پذیری تابع فوق را در نقطهٔ $x_0 = 0$ بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x^2 - 2x| - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{|x| \times |x - 2|}{x}$$

مشتق راست:

$$\text{(الف} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| \times |x-2|}{x} = \lim_{x \to 0^+} |x - 2| = 2 = f'_+(0)$$

مشتق چپ:

$$\text{(ب} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{|x| \times |x-2|}{x} = \lim_{x \to 0^-} -|x-2| = -2 = f'_-(0)$$

پس این تابع در $x_0 = 0$ مشتق‌پذیر نیست.

حال مشتق‌پذیری تابع فوق را در نقطهٔ $x_0 = 2$ بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{|x^2 - 2x| - 0}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{|x - 2| \times |x|}{x - 2}$$

مشتق راست:

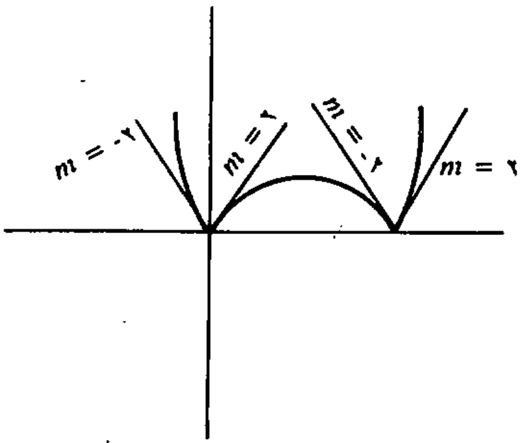
$$\text{(الف} \quad \lim_{x \to 2^+} \frac{|x - 2| \times |x|}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} |x| = 2 = f'_+(2)$$

مشتق چپ:

$$\text{(ب} \quad \lim_{x \to 2^-} \frac{|x - 2| \times |x|}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} -|x| = -2 = f'_-(2)$$

پس این تابع در $x_0 = 2$ مشتق‌پذیر نیست.

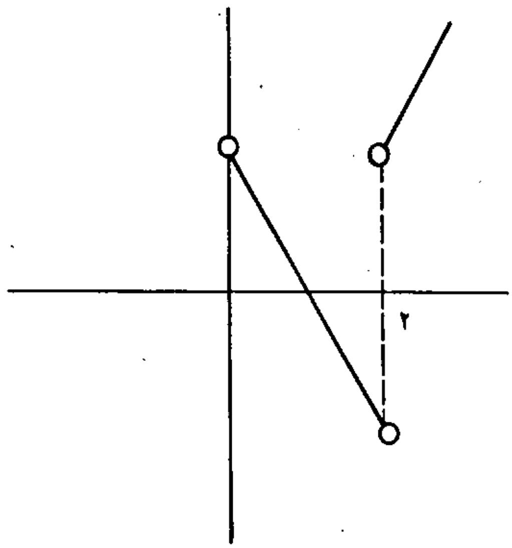
نمودار تابع به معادلهٔ: $y = |x^2 - 2x|$ چنین است.



$$y = f(x) = |x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 2 \text{ یا } x \leq 0 \\ -x^2 + 2x & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' = f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x > 2 \text{ یا } x < 0 \\ -2x + 2 & 0 < x < 2 \end{cases}$$

نمودار تابع مشتق چنین است:



مسأله ۳: مشتق‌پذیری تابع به‌معادلهٔ $f(x)=\begin{cases}x^2-x & x\geq 1\\ 2x^2-2 & 0\leq x\leq 1\end{cases}$

را در $x_0=1$ بررسی کنید. و نمودار تابع و نمودار تابع مشتق را رسم کنید.

حل: اولاً: این تابع در $x_0=1$ پیوسته است، زیرا:

$$f(1)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=0$$

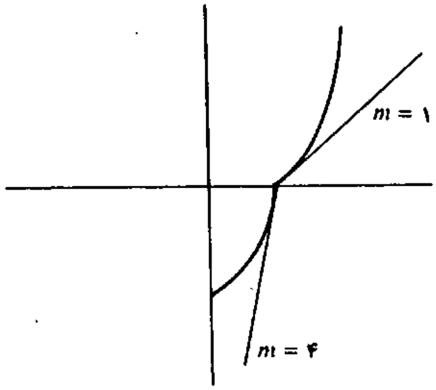
ثانیاً: مشتق‌پذیری این تابع را در $x_0=1$ بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-x}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x(x-1)}{x-1}=1=f'_+(1)$$

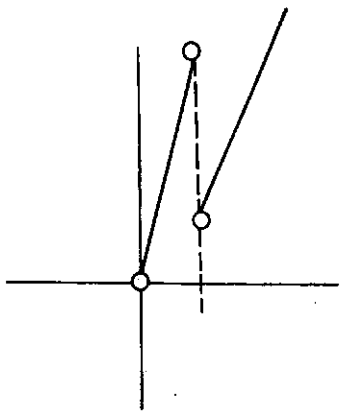
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2(x-1)(x+1)}{x-1}=4=f'_-(1)$$

پس این تابع در $x_0=1$ مشتق‌پذیر نیست.

نمودار تابع فوق چنین است:



نمودار تابع مشتق: $f'(x)=\begin{cases}2x-1 & x>1\\ 4x & 0<x<1\end{cases}$ چنین است:



مسأله ۴: مشتق‌پذیری تابع به معادلهٔ $f(x)=x^3+x$ را در نقطهٔ $x_0=1$ بررسی کنید و خط مماس را دقیقاً رسم کنید.

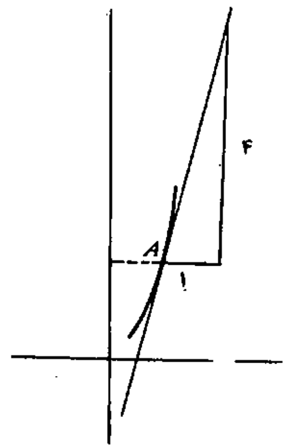
حل: اولاً: این تابع در $x_0=1$ پیوسته است، زیرا:

$$f(1)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=2$$

ثانیاً:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+2)}{x-1}$$

$$=4=f'(1)=m\ :\ A$$ مماس در



مسأله ۵ : مشتق‌پذیری تابع به معادلهٔ $f(x) = \sqrt{x^۲ + ۲x}$ را در نقطهٔ $x_۰ = ۱$ بررسی کنید و خط مماس را دقیقاً رسم کنید.

حل: اولاً: این تابع در $x_۰ = ۱$ پیوسته است، زیرا:

$$f(۱) = \lim_{x \to ۱^+} f(x) = \lim_{x \to ۱^-} f(x) = \sqrt{۳}$$

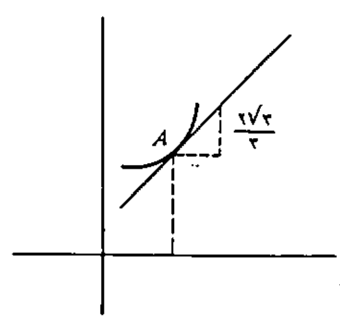
ثانیاً:

$$\lim_{x \to ۱} \frac{f(x) - f(۱)}{x - ۱} = \lim_{x \to ۱} \frac{\sqrt{x^۲ + ۲x} - \sqrt{۳}}{x - ۱} \times \frac{\sqrt{x^۲ + ۲x} + \sqrt{۳}}{\sqrt{x^۲ + ۲x} + \sqrt{۳}}$$

$$= \lim_{x \to ۱} \frac{x^۲ + ۲x - ۳}{(x - ۱)(\sqrt{x^۲ + ۲x} + \sqrt{۳})} = \lim_{x \to ۱} \frac{(x - ۱)(x + ۳)}{(x - ۱)(\sqrt{x^۲ + ۲x} + \sqrt{۳})}$$

$$= \lim_{x \to ۱} \frac{x + ۳}{\sqrt{x^۲ + ۲x} + \sqrt{۳}} = \frac{۴}{۲\sqrt{۳}} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳} = f'(۱) = m$$

مماس در A:



مسأله ۶ : مشتق‌پذیری تابع به معادلهٔ $f(x) = \frac{۲x}{x^۲ - x + ۲}$ را درنقطهٔ $x_۰ = ۲$ بررسی کنید و خط مماس را دقیقاً رسم کنید.

حل: اولاً: این تابع در $x_۰ = ۲$ پیوسته است، زیرا:

$$f(۲) = \lim_{x \to ۲^+} f(x) = \lim_{x \to ۲^-} f(x) = ۱$$

ثانیاً:

$$\lim_{x \to ۲} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲} \frac{\frac{۲x}{x^۲ - x + ۲} - ۱}{x - ۲} =$$

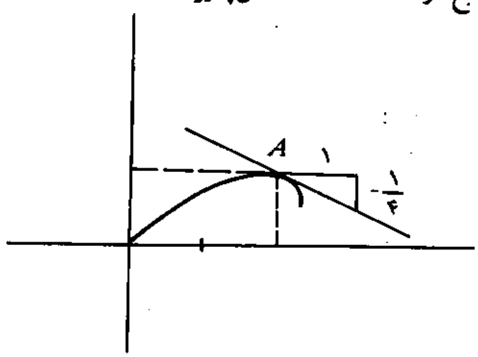
$$\lim_{x \to ۲} \frac{-x^۲ + ۳x - ۲}{(x - ۲)(x^۲ - x + ۲)}$$

$$= \lim_{x \to ۲} \frac{-(x - ۱)(x - ۲)}{(x - ۲)(x^۲ - x + ۲)} = \lim_{x \to ۲} \frac{-(x - ۱)}{x^۲ - x + ۲} = -\frac{۱}{۴}$$

مماس در A: $= f'(۲) = m$

پس این تابع در نقطهٔ $x_۰ = ۲$ مشتق‌پذیر است.

$A \left| \begin{matrix} ۲ \\ ۱ \end{matrix} \right.$



مسأله ۷ : مشتق‌پذیری تابع به معادلهٔ $f(x) = \cos \sqrt[۳]{x^۲}$ را در نقطهٔ $x_۰ = ۲$ بررسی کنید.

حل: اولاً این تابع در $x_۰ = ۲$ پیوسته است، زیرا:

$$f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \cos\sqrt[3]{4}$$

ثانیاً:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\cos\sqrt[3]{x^2}-\cos\sqrt[3]{4}}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{-2\sin\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{4}}{2}\sin\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{4}}{2}}{x-2}$$

توجه :

$$x\to 2 \Rightarrow \sin\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{4}}{2} \sim \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{4}}{2}$$

$$= \lim_{x\to 2}(-\sin\sqrt[3]{4})\times\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{4}}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2}(-\sin\sqrt[3]{4})\times\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{4}}{x-2}\times\frac{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4x^2}}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 2}(-\sin\sqrt[3]{4})\times\frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4x^2})}$$

$$= \lim_{x\to 2}(-\sin\sqrt[3]{4})\times\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(3\sqrt[3]{4})} =$$

$$= \lim_{x\to 2}(-\sin\sqrt[3]{4})\times\frac{x+2}{3\sqrt[3]{4}} = \frac{-4\sin\sqrt[3]{4}}{3\sqrt[3]{4}} = f'(2)$$

پس این تابع در $x_0 = 2$ مشتق‌پذیر است.

مسأله ۸ : مشتق‌پذیری تابع به معادلهٔ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را در نقطهٔ $x_0 = 0$ بررسی کنید.

حل: اولاً این تابع در $x_0 = 0$ پیوسته است، زیرا:

$$f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$

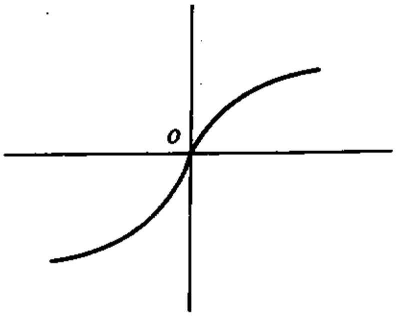
ثانیاً:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x} = \lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{x}{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{(0^\pm)^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{0^+}} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty = f'(0)$$

چون $f'(0) = +\infty$، می‌گوییم این تابع در $x_0 = 0$ مشتق‌پذیر نیست.

شکل منحنی و خط مماس در $x_0 = 0$ چنین است:



تعریف: هرگاه تابع f در نقطه x_0 پیوسته باشد و مشتقهای راست و چپ در نقطهٔ x_0 نامتناهی و هم‌علامت باشند، نقطهٔ x_0 را نقطهٔ عطف منحنی می‌گوییم.

مسأله ۹ : مشتق‌پذیری تابع به معادلهٔ $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ را در نقطهٔ $x_0 = 0$ بررسی کنید.

حل: اولاً این تابع در نقطهٔ $x_0 = 0$ پیوسته است، زیرا:

$$f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$

ثانیاً:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x} = \lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}} = \lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$$

مشتق راست:

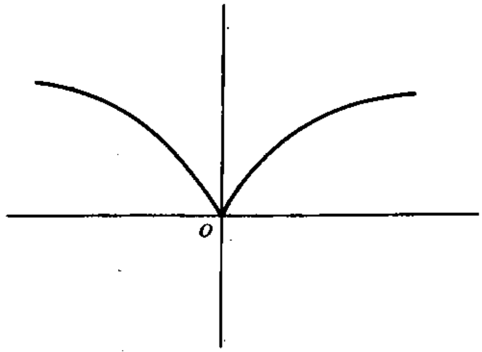
الف) $x\to 0^+ \Rightarrow \lim\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = \sqrt[3]{\frac{1}{0^+}} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty = f'_+(0)$

مشتق چپ:

ب) $x \to 0^- \Rightarrow \lim \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = \sqrt[3]{\frac{1}{0^-}} = \sqrt[3]{-\infty} = -\infty = f'_-(0)$

بنابراین، این تابع در $x_0 = 0$ مشتق‌پذیر نیست.

نمودار تابع و خطوط مماس چنین است:



توجه: دو نیم مماس چپ و راست در نقطهٔ $x_0 = 0$ برهم منطبقند.

تعریف: هرگاه تابع f در نقطهٔ x_0 پیوسته باشد ومشتقهای راست وچپ در نقطهٔ x_0 نامتناهی و مختلف‌العلامه باشند، نقطهٔ x_0 را نقطهٔ بازگشت منحنی تابع گوییم. البته نقطهٔ بازگشت نقطهٔ ماکزیمم یا مینیمم نسبی منحنی است (ثابت می‌شود).

مسأله ۱۰ : مشتق‌پذیری تابع

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

را در $x_0 = 0$ بررسی کنید.

حل: اولاً این تابع در $x_0 = 0$ پیوسته است، زیرا:

$$f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

ثانیاً: $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x\cos\frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \cos\frac{1}{x}$

$\Rightarrow$ عددهای نامشخص در فاصلهٔ [۱ و ۱-] =

پس $f'(0)$ دراین تابع برابر عددی نامشخص درفاصلهٔ [۱ و ۱-] است بنابراین تابع فوق در $x_0 = 0$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

مسأله ۱۱ : در تابع $f(x) = \begin{cases} ax^3 & x \geq 2 \\ bx^2 + 2 & x \leq 2 \end{cases}$، a و b را چنان‌بیابید تا تابع در $x_0 = 2$ مشتق‌پذیر باشد.

حل: اولاً تابع فوق باید در $x_0 = 2$ پیوسته باشد پس باید در $x_0 = 2$، حد داشته باشد.

$$\left\{\begin{array}{l} \lim_{x \to 2^+} f(x) = 8a \\ \lim_{x \to 2^-} f(x) = 4b + 2 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{8a = 4b + 2} \qquad (1)$$

ثانیاً: تابع فوق در $x_0 = 2$ مشتق‌پذیر است پس مشتقات راست و چپ باید مساوی باشند:

$$\left\{ \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{ax^3 - 8a}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{a(x^3 - 8)}{x - 2} = \right.$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{a(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} a(x^2 + 2x + 4) =$$

$$\boxed{12a = f'_+(2)}$$

$$\left\{ \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{bx^2 + 2 - 4b - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{b(x^2 - 4)}{x - 2} \right.$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{b(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} b(x + 2) = \boxed{4b = f'_-(2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{12a = 4b} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} 8a = 4b + 2 \\ 12a = 4b \end{cases} \Rightarrow -4a = 2 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{b = -\frac{3}{2}}$$

پس تابع f به‌صورت:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^3 & x \geq 2 \\ -\frac{3}{2}x^2 + 2 & x \leq 2 \end{cases}$$

می‌باشد.

مسأله ۱۲ : تابع به معادلهٔ

$$f(x) = \begin{cases} x^4 - 2x^2 + a & x \geq 0 \\ bx^2 + cx - 1 & x < 0 \end{cases}$$

مفروض است. اگر $f''(0)$ وجود داشته باشد (یعنی تابع: $f'(x)$ در $x_0 = 0$ مشتق‌پذیر باشد) a و b و c را بیابید.

حل: اولاً تابع f و تابع f' باید در $x_0 = 0$ پیوسته باشند، پس باید در $x_0 = 0$ حدّ داشته باشند.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = a \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 - 4x & x \geq 0 \\ 2bx + c & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = c \end{cases} \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

ثانیاً: تابع $f'(x)$ باید در $x_0 = 0$ مشتق‌پذیر باشد.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{4x^3 - 4x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} (4x^2 - 4) = -4 = f''_+(0) \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{2bx + c - c}{x} = 2b = f''_-(0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2b = -4 \Rightarrow \boxed{b = -2}$$

نقطهٔ زاویه‌دار

تعریف: اگر تابع f در فاصلهٔ (a,b) پیوسته باشد و $a < x_0 < b$. اگر مشتقهای راست و چپ در نقطهٔ x_0 موجود، غیرمساوی و متناهی باشد یا حداکثر یکی از مشتقهای راست یا چپ نامتناهی باشد، در این صورت نقطهٔ به طول x_0 را نقطه زاویه‌دار منحنی گوییم.

مسأله ۱۳ : مشتق‌پذیری تابع به معادلهٔ

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & x \geq 0 \\ -x^2 - x & x < 0 \end{cases}$$

را در $x_0 = 0$ بررسی کنید.

آیا در این تابع نقطهٔ $x_0 = 0$ یک نقطهٔ زاویه‌دار است؟

حل: اولاً: این تابع در $x_0 = 0$ پیوسته است، زیرا:

$$f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

ثانیاً:

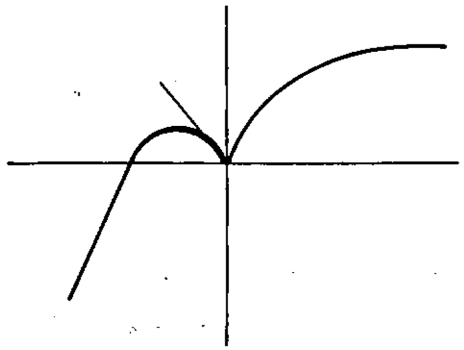
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty = f'_+(0)$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x^2 - x}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-x - 1) = -1 = f'_-(0)$$

نتیجه: این تابع در $x_0 = 0$ مشتق‌پذیر نیست و بنا به تعریف فوق

نقطهٔ $x_0 = 0$ نقطهٔ زاویه‌دار است.

نمودار تابع و نیم‌خطهای مماس چنین است:



چند نکته

۱ـ تابع به معادلهٔ $f(x) = [x]$ در نقاط $x_0 \in Z$، حدّ ندارد، پیوسته نیست و مشتق‌پذیر هم نمی‌باشد.

۲ـ تابع به معادلهٔ $f(x) = [x]$ در نقاط $x_0 \in (R - Z)$، حدّ دارد، پیوسته است و مشتق‌پذیر هم می‌باشد ولی مشتق آن صفر است.

۳ـ تابع $f(x) = |x - a|$، در $x = a$ مشتق‌پذیر نیست.

۴ـ تابع به‌معادلهٔ $f(x) = |(x - a)^{n+1}(x - b)^{2n}|$، $n \in N$ در $x = a$ و در $x = b$ مشتق‌پذیر است.

۵ـ تابع به معادلهٔ $f(x) = \sqrt[2n+1]{(x - a)}$، $n \in N$ در $x = a$ مشتق‌پذیر نیست.

۶ـ تابع به‌معادلهٔ $f(x) = (x - a)^{n+1}\sqrt[2n+1]{x - a}$، $n \in N$، در $x = a$ مشتق‌پذیر است.

۷ـ تابع به معادلهٔ $f(x) = \sqrt[2n]{x - a}$، $n \in N$ در $x = a$ مشتق‌پذیر نیست.

۸ـ تابع به معادلهٔ $f(x) = (x - a)^{n+1}(\sqrt[2n]{x - a})$، $n \in N$، در $x = a$ مشتق‌پذیر نیست.

۹ـ در نمودارها در هر نقطهٔ که خط مماس بر منحنی موازی محور yها باشد، تابع آن نمودار در آن نقطه مشتق‌پذیر نیست.

۱۰ـ در نمودارهایی که زاویه‌دار باشد، تابع آن نمودار در نقطهٔ زاویه‌دار مشتق‌پذیر نیست.

۱ـ در فصل (٦) کتاب جبر سال سوم ریاضی (تحت عنوان تعبیر هندسی مشتق) اثبات شده است.

تفریح اندیشه ۱

با در دست داشتن چهار گزارهٔ زیر، نتیجه‌ای چنان بگیرید که اولاً: استدلالتان درست باشد، ثانیاً: هر چهارگزاره برای آن نتیجه لازم باشند.

تمام وکلای دادگستری ثروتمندند.

شعرا حساس‌اند.

مسعود وکیل دادگستری است.

هیچ آدم حساسی ثروتمند نیست.

در نتیجه: ...

جواب در صفحهٔ ٩٦

آموزش ترجمه متون ریاضی (۴)

ترجمه: حمید رضاامیری

Surds

Certain numbers of the set of numbers defined by $\sqrt{x}$, for $x \in \mathbb{Z}^+$, have exact numerical values, e.g. $\sqrt{1}, \sqrt{4}, \sqrt{9}, \sqrt{16}, \sqrt{25}, \ldots$. Other numbers of the set, e.g. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$, cannot be written as numerically exact quantities, and it is frequently more convenient to leave them in their basic $\sqrt{x}$ form. As such, these numbers are called *surds*, and expressions involving them are called *surd expressions*. It is desirable to write such expressions in their simplest form. The examples below indicate how one should proceed. Two basic rules, derived from the rules of indices, are employed:

$$(\sqrt{x}) \times (\sqrt{y}) = \sqrt{(xy)} \quad [\text{from } x^{1/2}y^{1/2} = (xy)^{1/2}],$$

and

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)} \quad \left[\text{from } \frac{x^{1/2}}{y^{1/2}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{1/2}\right]$$

اعداد گنگ

تنها اعداد مشخصی از مجموعهٔ اعداد تعریف شده توسط $\sqrt{x}$ برای هر $x \in Z^+$، دارای مقادیر عددی درست می‌باشند، مانند $\sqrt{۱}$، $\sqrt{۴}$، $\sqrt{۹}$، $\sqrt{۱۶}$، $\sqrt{۲۵}$ و ..... تعداد دیگری از اعداد این مجموعه مانند $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۳}$، $\sqrt{۵}$ به‌صورت کمیتهای درستِ عددی نوشته نمی‌شوند، و غالباً مناسبتر است آنها را به شکل اصلی خودشان یعنی $\sqrt{x}$ نمایش دهیم. چنین اعدادی را گنگ می‌نامیم، و عبارات شامل آنها را عبارات **گنگ** می‌نامند. شایسته است که چنین عباراتی به شکل ساده شدهٔ خودشان نوشته شوند. مثالهایی که در زیر آمده است چگونگی این روش را نشان می‌دهند. دو قاعدهٔ اساسیِ حاصل‌از دستورات مربوط به نماها (دراین دومثال) به کار رفته‌اند:

$$(\sqrt{x}) \times (\sqrt{y}) = \sqrt{xy} \quad [\text{ازدستور } x^{۱/۲}y^{۱/۲} = (xy)^{۱/۲}] \text{ و}$$

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}} \quad \left[\text{از دستور } \frac{x^{۱/۲}}{y^{۱/۲}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{۱/۲}\right]$$

Example 7 Reduce the following surd expressions to their simplest form:
(a) $\frac{1}{3}\sqrt{18}$, (b) $2\sqrt{2}(\sqrt{32} + \sqrt{2})$, (c) $(2\sqrt{5} + 1)(3\sqrt{5} + 2)$,
(d) $\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{80} + \sqrt{5}$.

(a) $\frac{1}{3}\sqrt{18} = \frac{1}{3}\sqrt{(9 \times 2)} = \frac{1}{3}3\sqrt{2} = \sqrt{2}$.
(b) $2\sqrt{2}(\sqrt{32} + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}(4\sqrt{2} + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}(5\sqrt{2}) = 20$.
(c) $(2\sqrt{5} + 1)(3\sqrt{5} + 2) = 6 \times 5 + 7\sqrt{5} + 2 = 32 + 7\sqrt{5}$.
(d) $\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{80} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.

مثال ۷

عباراتِ گنگ زیر را به‌ساده‌ترین شکل خود بیان کنید:

(الف) $\frac{۱}{۳}\sqrt{۱۸}$ ، (ب) $۲\sqrt{۲}(\sqrt{۳۲}+\sqrt{۲})$

(پ) $(۲\sqrt{۵}+۱)(۳\sqrt{۵}+۲)$

(ت) $\sqrt{۲۰}+\sqrt{۴۵}-\sqrt{۸۰}+\sqrt{۵}$

(الف) $\frac{۱}{۳}\sqrt{۱۸} = \frac{۱}{۳}\sqrt{(۹\times۲)} = \frac{۱}{۳}۳\sqrt{۲} = \sqrt{۲}$

(ب) $۲\sqrt{۲}(\sqrt{۳۲}+\sqrt{۲}) = ۲\sqrt{۲}(۴\sqrt{۲}+\sqrt{۲}) = ۲\sqrt{۲}(۵\sqrt{۲}) = ۲۰$

(پ) $(۲\sqrt{۵}+۱)(۳\sqrt{۵}+۲) = ۶\times۵+۷\sqrt{۵}+۲ = ۳۲+۷\sqrt{۵}$

(ت) $\sqrt{۲۰}+\sqrt{۴۵}-\sqrt{۸۰}+\sqrt{۵} = ۲\sqrt{۵}+۳\sqrt{۵}-۴\sqrt{۵}+\sqrt{۵} = ۲\sqrt{۵}$

Example 8 We remove the surds from the denominator in the following surd expressions (this process is called rationalising the denominator):

(a) $\frac{2}{\sqrt{18}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3.2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

(b) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

We make use here of the identity

$$(x-y)(x+y) \equiv x^2 - y^2.$$

Multiplying numerator and denominator by $\sqrt{2}+1$, we obtain

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}.\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1.$$

(c) $\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-\sqrt{3}}.\frac{(2\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(2\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{4\sqrt{15}+2.3}{20-3}$
$= \frac{4\sqrt{15}+6}{17}$

(d) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$.

Rationalising each term, we obtain

$$\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{3+\sqrt{3}}{2} + \frac{3-\sqrt{3}}{2} = 3.$$

مثال ۸

در عبارات گنگ زیر اعداد گنگ را از مخرج کسر حذف می‌کنیم (این روش گویا کردن مخرج کسر نام دارد):

(الف) $\frac{۲}{\sqrt{۱۸}} = \frac{۲}{۳\sqrt{۲}} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳\times۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۳}$

(ب) $\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}$

در این‌جا می‌توانیم ازاتحاد $(x-y)(x+y) \equiv x^{۲} - y^{۲}$ استفاده کنیم. صورت و مخرج کسر را در $(۱ + \sqrt{۲})$ ضرب کرده، عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}.\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}+۱} = \frac{\sqrt{۲}+۱}{۲-۱} = \sqrt{۲}+۱$$

(پ) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۵}-\sqrt{۳}} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۵}-\sqrt{۳}}.\frac{۲\sqrt{۵}+\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۵}+\sqrt{۳}} =$

$\frac{۴\sqrt{۱۵}+۲\times۳}{۲۰-۳} = \frac{۴\sqrt{۱۵}+۶}{۱۷}$

(ت) $\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}-۱} + \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}+۱}$

هر دو کسر را با هم گویا می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$\frac{\sqrt{۳}(\sqrt{۳}+۱)}{(\sqrt{۳}-۱)(\sqrt{۳}+۱)} + \frac{\sqrt{۳}(\sqrt{۳}-۱)}{(\sqrt{۳}+۱)(\sqrt{۳}-۱)} =$$

$$\frac{۳+\sqrt{۳}}{۲} + \frac{۳-\sqrt{۳}}{۲} = ۳$$

Logarithms

The term 'logarithm' is an alternative word for an index or power of a given positive number base. For example, since $2^3 = 8$, we define the index 3 to be the logarithm of 8 to the base 2 and write

$$3 = \log_2 8.$$

Further, using the rule of negative indices, $(\frac{1}{3})^{-2} = 9$ and we may write

$$\log_{1/3} 9 = -2.$$

The base of a logarithm may be any positive number. The tables of common logarithms, which are sometimes used for calculations, have base 10. It is usual, when using common logarithms, to omit the base 10, and write log or lg. In general,

$$a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y.$$

لگاریتمها

کلمهٔ «لگاریتم» مفهوم دیگری است برای نمایش نما یا توان یک مبنای مثبت. برای مثال، نظر به این‌که $۸ = ۲^{۳}$، ما نمای ۳ را لگاریتم ۸ در مبنای ۲ تعریف می‌کنیم و می‌نویسیم: $\log_{۲}^{۸} = ۳$

به‌علاوه، می‌توانیم از دستور نماهای منفی نیز استفاده کرده و مثلاً برای $۹ = (\frac{۱}{۳})^{-۲}$ می‌نویسیم: $\log_{\frac{۱}{۳}}^{۹} = -۲$

مبنای یک لگاریتم می‌تواند هر عدد مثبتی باشد. جداول لگاریتمهای اعشاری، که معمولاً برای محاسبات مورداستفاده قرار می‌گیرند، دارای مبنای ۱۰ هستند. معمولاً، برای استفاده از لگاریتم اعشاری، مبنای ۱۰ را حذف کرده، و آن را به‌صورت *log* یا *lg* می‌نویسیم. در حالت کلّی:

$$\boxed{a^x = y \Leftrightarrow \log_a^y = x}$$

Example 9 Express in logarithmic form (a) $5^2 = 25$, (b) $2^5 = 32$, (c) $6^0 = 1$, (d) $(\frac{1}{5})^{-3} = 125$, (e) $10^{-2} = 0{\cdot}01$.

(a) $5^2 = 25 \Rightarrow 2 = \log_5 25$.
(b) $2^5 = 32 \Rightarrow 5 = \log_2 32$.
(c) $6^0 = 1 \Rightarrow 0 = \log_6 1$.
(d) $(\frac{1}{5})^{-3} = 125 \Rightarrow -3 = \log_{1/5} 125$.
(e) $10^{-2} = 0{\cdot}01 \Rightarrow -2 = \log_{10} 0{\cdot}01$.

مثال ۹

(تساویها را) به شکل لگاریتمی نشان دهید:

(الف) $۵^۲ = ۲۵$، (ب) $۲^۵ = ۳۲$، (پ) $۶^۰ = ۱$، (ت) $(\frac{۱}{۵})^{-۳} = ۱۲۵$،
(ث) $۱۰^{-۲} = ۰/۰۱$

(الف) $۵^۲ = ۲۵ \Rightarrow \log_۵ ۲۵ = ۲$

(ب) $۲^۵ = ۳۲ \Rightarrow \log_۲ ۳۲ = ۵$

(پ) $۶^۰ = ۱ \Rightarrow \log_۶ ۱ = ۰$

(ت) $(\frac{۱}{۵})^{-۳} = ۱۲۵ \Rightarrow \log_{\frac{۱}{۵}} ۱۲۵ = -۳$

(ث) $۱۰^{-۲} = ۰/۰۱ \Rightarrow \log_{۱۰} ۰/۰۱ = -۲$

Example 10 Evaluate (a) $\log_4 64$, (b) $\log_{10} 0{\cdot}001$, (c) $\log_{1/2} 4$.

(a) Let $x = \log_4 64 \Rightarrow 4^x = 64 = 4^3$.
Comparing indices gives $x = 3$.
(b) Let $y = \log_{10} 0{\cdot}001, \Rightarrow 10^y = 0{\cdot}001 = 10^{-3}$.
Therefore,

$$y = -3.$$

(c) Let $z = \log_{1/2} 4 \Rightarrow (\frac{1}{2})^z = 4 = 2^2 = (\frac{1}{2})^{-2}$.
Therefore,

$$z = -2.$$

مثال ۱۰

محاسبه کنید:

(الف) $\log_۴ ۶۴$ (ب) $\log_{۱۰} ۰/۰۰۱$ (پ) $\log_{\frac{۱}{۲}} ۴$

(الف) فرض کنیم: $\log_۴ ۶۴ = x \Rightarrow ۴^x = ۶۴ = ۴^۳$

بامقایسهٔ نماها خواهیم داشت $x = ۳$.

(ب) فرض کنیم: $\log_{۱۰} ۰/۰۰۱ = y \Rightarrow ۱۰^y = ۰/۰۰۱ = ۱۰^{-۳}$

بنابراین $y = -۳$.

(پ) فرض کنیم: $\log_{\frac{۱}{۲}} ۴ = z \Rightarrow (\frac{۱}{۲})^z = ۴ = ۲^۲ = (\frac{۱}{۲})^{-۲}$

بنابراین $z = -۲$.

Example 11 Express in index form (a) $\log_5 125 = 3$, (b) $\log_{10} 100 = 2$, (c) $\log_{36} 6 = \frac{1}{2}$, (d) $\log_a 1 = 0$, (e) $\log_x y = z$.

(a) $\log_5 125 = 3 \Rightarrow 5^3 = 125$.
(b) $\log_{10} 100 = 2 \Rightarrow 10^2 = 100$.
(c) $\log_{36} 6 = \frac{1}{2} \Rightarrow 36^{1/2} = 6$.
(d) $\log_a 1 = 0 \Rightarrow a^0 = 1$.
(e) $\log_x y = z \Rightarrow x^z = y$.

مثال ۱۱

(تساویها را) به شکل نمایی نشان دهید:

(الف) $\log_۵ ۱۲۵ = ۳$ (ب) $\log_{۱۰} ۱۰۰ = ۲$ (پ) $\log_{۳۶} ۶ = \frac{۱}{۲}$
(ت) $\log_a ۱ = ۰$ (ث) $\log_x y = z$

(الف) $\log_۵ ۱۲۵ = ۳ \Rightarrow ۵^۳ = ۱۲۵$

(ب) $\log_{۱۰} ۱۰۰ = ۲ \Rightarrow ۱۰^۲ = ۱۰۰$

(پ) $\log_{۳۶} ۶ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow (۳۶)^{۱/۲} = ۶$

(ت) $\log_a ۱ = ۰ \Rightarrow a^۰ = ۱$

(ث) $\log_x y = z \Rightarrow x^z = y$

Rules of logarithms

(1) Addition of logarithms
If $\log_a x = m$ and $\log_a y = n$, then $x = a^m$, $y = a^n$ and

$$xy = a^m \times a^n = a^{m+n}$$
$$\Rightarrow \log_a(xy) = m + n.$$

Therefore,

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

(2) Subtraction of logarithms
Similarly,

$$\frac{x}{y} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Hence,

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y.$$

(3) Logarithm of powers of numbers

$$x^p = (a^m)^p = a^{mp}.$$

Hence,

$$\log_a x^p = mp = p \log_a x.$$

Therefore,

$$\log_a x^p = p \log_a x.$$

(4) Change of base of a logarithm

$$\log_a x = m \Rightarrow a^m = x.$$
$$\log_b x = \log_b(a^m) = m \log_b a$$
$$\Rightarrow \log_b x = (\log_a x) \times (\log_b a),$$

قواعد لگاریتمها

(۱) جمع لگاریتمها

اگرقراردهیم $\log_a^x = m$ و $\log_a^y = n$ دراین‌صورت $x = a^m$، $y = a^n$ و

$$xy = a^m \times a^n = a^{m+n} \Rightarrow \log_a^{(xy)} = m + n$$

بنابراین

$$\boxed{\log_a^{(xy)} \equiv \log_a^x + \log_a^y}$$

(۲) تفریق لگاریتمها

(باتوجه به قرارداد بالا) به‌طور مشابه خواهیم داشت :

$$\frac{x}{y} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

بنابراین :

$$\boxed{\log_a(\frac{x}{y}) \equiv \log_a^x - \log_a^y}$$

(۳) لگاریتم از اعداد توانی

$$x^p \equiv (a^m)^p = a^{mp}$$

بنابراین :

$$\log_a^{x^p} = mp = p \log_a^x$$

پس :

$$\boxed{\log_a^{x^p} = p \log_a^x}$$

(۴) تغییر مبنای یک لگاریتم

$$\log_a^x \equiv m \Rightarrow a^m = x$$

$$\log_b^x \equiv \log_b(a^m) = m \log_b^a$$

$$\Rightarrow \boxed{\log_b^x \equiv (\log_a^x) \times (\log_b^a)}$$

i.e. to change the base of a logarithm of x from a to b we multiply by $\log_b a$.
If in this result we replace x by a, we get

$$\log_b a = (\log_a a) \times (\log_b a).$$

Dividing by $\log_b a$, given that this is non-zero,

$$\Rightarrow 1 = \log_a a,$$

and, if $x = b$,

$$\log_b b = 1 = (\log_a b) \times (\log_b a).$$

یعنی، برای تغییر مبنای لگاریتم x از مبنای a به b آن را در $\log_b^a$ ضرب می‌کنیم.

هرگاه در این نتیجه‌گیری جای x را با a تعویض کنیم، خواهیم داشت:

$$\log_b^a \equiv \log_a^a \times \log_b^a$$

باتقسیم طرفین بر $\log_b^a$، که مخالف صفر است :

$$\Rightarrow \log_a^a = ۱$$

و ، اگر $x = b$:

$$\log_b^b \equiv ۱ \equiv (\log_a^b) \times (\log_b^a)$$

Example 12 Simplify
(a) $4 \log_a 2 + 2 \log_a 3$,
(b) $\log_{10}\left(\frac{15}{64}\right) - 2 \log_{10}\left(\frac{5}{3}\right) + \log_{10}\left(\frac{16}{9}\right)$,
(c) $3 \log_a x + 2 \log_a y - \log_a z$.

(a) $4 \log_a 2 + 2 \log_a 3 = \log_a 2^4 + \log_a 3^2$ by rule (3),
$= \log_a 16 + \log_a 9 = \log_a 144$ by rule (1).

(b) $\log_{10}\left(\frac{15}{64}\right) - 2 \log_{10}\left(\frac{5}{3}\right) + \log_{10}\left(\frac{16}{9}\right)$
$= \log_{10}\left(\frac{15}{64}\right) - \log_{10}\left(\frac{5^2}{3^2}\right) + \log_{10}\left(\frac{16}{9}\right)$ by rule (3),
$= \log_{10}\left(\frac{15}{64} \times \frac{9}{25} \times \frac{16}{9}\right)$ by rules (1) and (2),
$= \log_{10}\left(\frac{3}{20}\right)$.

(c) $3 \log_a x + 2 \log_a y - \log_a z$
$= \log_a x^3 + \log_a y^2 - \log_a z$ by rule (3),
$= \log_a\left(\frac{x^3 y^3}{z}\right)$ by rules (1) and (2).

مثال ۱۲

(عبارات زیر را) ساده کنید :

(الف) $۴\log_a ۲ + ۲\log_a ۳$

(ب) $\log_{۱۰}(\frac{۱۵}{۶۴}) - ۲\log_{۱۰}(\frac{۳}{۵}) + \log_{۱۰}(\frac{۱۶}{۹})$

(پ) $۳\log_a x + ۲\log_a y - \log_a z$

(الف) $۴\log_a ۲ + ۲\log_a ۳ = \log_a ۲^۴ + \log_a ۳^۲ \underset{\text{با توجه به قاعده (۳)}}{=}$
$\log_a ۱۶ + \log_a ۹ = \log_a ۱۴۴$

(ب) $\log_{۱۰}(\frac{۱۵}{۶۴}) - ۲\log_{۱۰}(\frac{۵}{۳}) + \log_{۱۰}(\frac{۱۶}{۹}) = \log_{۱۰}(\frac{۱۵}{۶۴})$
$\log_{۱۰}(\frac{۵^۲}{۳^۲}) + \log_{۱۰}(\frac{۱۶}{۹})$
$\underset{\text{با توجه به قاعده (۳)}}{=} \log_{۱۰}(\frac{۱۵}{۶۴} \times \frac{۹}{۲۵} \times \frac{۱۶}{۹}) \underset{\text{قواعد (۱) و (۲)}}{=} \log_{۱۰}(\frac{۳}{۲۰})$

(پ) $۳\log_a x + ۲\log_a y - \log_a z = \log_a x^۳ + \log_a y^۳ - \log_a z$
$\underset{\text{قواعد (۱) و (۲) و (۳)}}{=} \log \frac{x^۳ y^۳}{z}$

Example 13 Using only the rules of logarithms, find the value of $\log_3 125 \times \log_5 9$.

$\log_3 125 \times \log_5 9 = \log_3 5^3 \times \log_5 3^2$
$= 3 \log_3 5 \times 2 \log_5 3 = 6(\log_3 5)(\log_5 3)$
$= 6 \log_5 5 = 6.$

مثال ۱۳

فقط بااستفاده از قواعد لگاریتمها مقدار $\log_۳ ۱۲۵ \times \log_۵ ۹$ را بیابید.

$\log_۳ ۱۲۵ \times \log_۵ ۹ = \log_۳ ۵^۳ \times \log_۵ ۳^۲ = ۳\log_۳ ۵ \times ۲\log_۵ ۳$
$= ۶(\log_۳ ۵)(\log_۵ ۳) = ۶\log_۵ ۵ = ۶$

1.3 The logarithmic and exponential functions

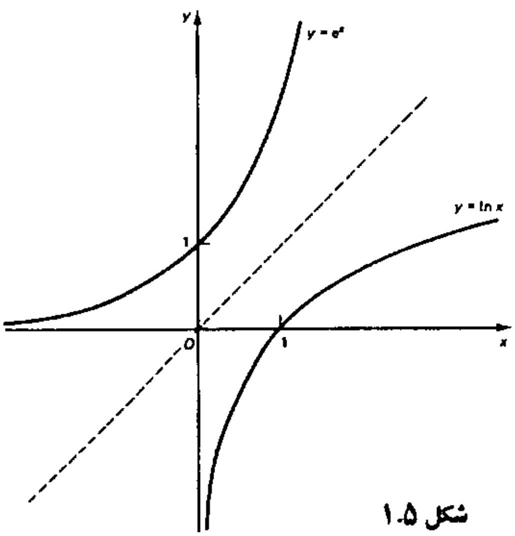
In calculus logarithms to a particular base are used. The logarithms are called *natural logarithms* and the base is denoted by e. The number e ≈ 2·718 281 8 and is defined as that base for which the function $\log_e x$ has unit gradient at $x = 1$. The standard notation is

$$\log_e x = \ln x.$$

The function $\ln x$ has domain $\mathbb{R}^+$ and is called the *logarithmic function*. The range of $\ln x$ is $\mathbb{R}$. Its inverse function is known as the *exponential function*, $\exp x$, which is denoted by e^x. The domain of the exponential function is $\mathbb{R}$ and its range is $\mathbb{R}^+$. To summarise,

$$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y.$$

The graphs of $y = e^x$ and $y = \ln x$ are given in Fig. 1.5. Note that, since e^x and $\ln x$ are inverse functions, their graphs are mirror images of each other in the line $y = x$ (shown dotted).



شکل ۱.۵

۱.۳ توابع لگاریتمی و نمایی

در حساب لگاریتمها از یک مبنای ویژه‌ای استفاده می‌شود. این نوع لگاریتم، لگاریتم طبیعی نامیده می‌شود و مبنای آن با e نمایش داده می‌شود. عدد $e \approx ۲/۷۱۸۲۸۱۸$ می‌باشد و آن به‌عنوان مبنایی برای تابع $\log_e^x$ درنظرگرفته شده که در $x = ۱$ دارای شیب واحدمی‌باشد. نمایش استاندارد آن به‌شکل $\log_e^x = lnx$ می‌باشد.

دامنهٔ تابع lnx، IR^+ است و آن را تابع لگاریتمی می‌نامند. بُرد این تابع IR است. تابع معکوس آن را تابع نمایی، (یا $e \times px$) می‌نامیم که آن را به‌صورت e^x نمایش می‌دهند و دامنهٔ تابع نمایی IR و بُردش IR^+ است. به‌طور خلاصه:

$$y = lnx \Leftrightarrow e^y = x$$

نمودارهای $y = e^x$ و $y = lnx$ در شکل ۱.۵ آمده است. توجه کنید که، همواره e^x و lnx معکوس یکدیگرند، نمودارهای آنها نسبت به خط $y = x$ تصویر معکوس یکدیگر می‌باشند. (خط $y = x$ با نقطه‌چین مشخص شده‌است.)

Example 14 Simplify

$$\frac{e^{2x} - \ln e}{e^x + e^{\ln 1}}.$$

We notice that $\ln e = 1$, and, since $\ln 1 = 0$, we have $e^{\ln 1} = e^0 = 1$. Therefore,

$$\frac{e^{2x} - \ln e}{e^x + e^{\ln 1}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1}.$$

Since

$$e^{2x} = (e^x)^2$$

we may write

$$e^{2x} - 1 = (e^x + 1)(e^x - 1)$$

and so

$$\frac{e^{2x} - \ln e}{e^x + e^{\ln 1}} = \frac{(e^x + 1)(e^x - 1)}{e^x + 1} = e^x - 1.$$

مثال ۱۴

(کسر زیر را) ساده کنید:

$$\frac{e^{۲x} - lne}{e^x + e^{ln۱}}$$

توجه داریم که $lne = ۱$ و، چون $ln۱ = ۰$ داریم: $e^{ln۱} = e^۰ = ۱$، بنابراین:

$$\frac{e^{۲x} - lne}{e^x + e^{ln۱}} \equiv \frac{e^{۲x} - ۱}{e^x + ۱}$$

از آن‌جاکه $e^{۲x} \equiv (e^x)^۲$ می‌توان نوشت:

$$e^{۲x} - ۱ \equiv (e^x + ۱)(e^x - ۱)$$

و بنابراین:

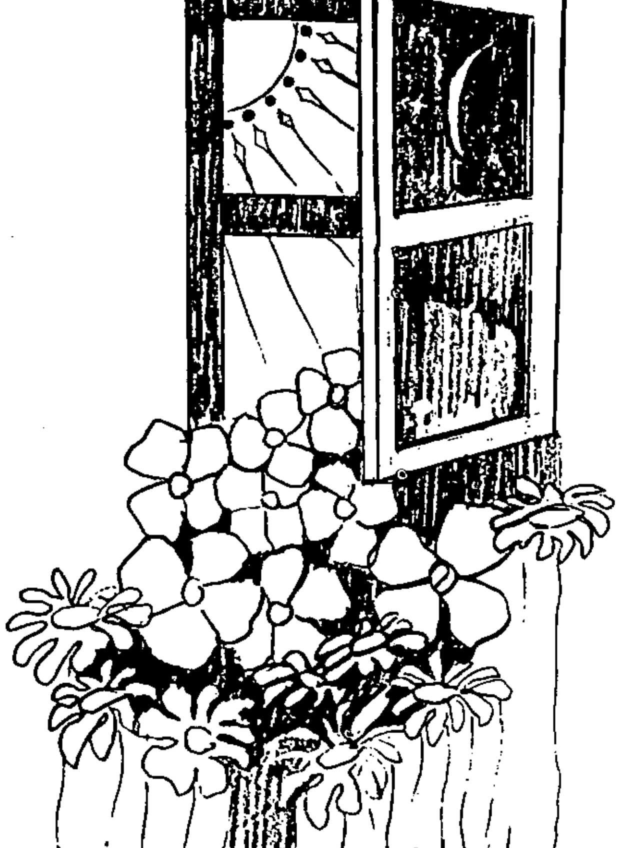
$$\frac{e^{۲x} - lne}{e^x + e^{ln}} \equiv \frac{(e^x + ۱)(e^x - ۱)}{(e^x + ۱)} \equiv e^x - ۱$$

ادب و ریاضی

هیلبرت با این فکر که هر مسألهٔ ریاضی، بالاخره روزی حل خواهد شد، تصمیم گرفت که ثابت کند که چگونه می‌توان بدون رها کردن هیچ جزء از کشفیات سابق، مبناهای غیر قابل سنجشی به بیان ریاضیات داد و با دقت و استحکام ثابت کرد که محال است که استدلال مبتنی بر این مبناها به تناقض برخورد کند، و اگر نتوانست برنامه‌ای چنین با عظمت را به ثمر برساند (امروز شک دارند که چنین اثباتی امکان‌پذیر باشد)، اقلاً" ثابت کرد که هیچ اندیشه‌ای روشن نیست مگر آن که بتوان آن را با علامتهای صریح (و بدیهی است که با تعداد محدود) بیان کرد، و با وجود این محدودیت، ریاضی‌دان کامل حق دارد که دربارهٔ بی‌نهایت استدلال کند.

سرگذشت آنالیز ریاضی
آندره دولاشه. پرویز شهریاری

مصاحبه با معلمین شما



در باغ تجربه‌ها

□ جناب آقای بهنیا، ضمن تشکر از فرصتی که در اختیار ما قرار دادید، دربارهٔ خودتان و زادگاهتان، زندگی و تحصیلاتتان توضیحاتی بفرمایید:

زادگاهم «جوبُنه» دهی است در پانزده کیلومتری شهر رشت. در یک روز سرد زمستان سال ۱۲۹۹ هجری شمسی که برف، ده را سفید پوش کرده بود، در یک کلبهٔ روستایی به دنیا آمدم. مادرم، که گویا از قبل اندیشیده بود، در همان لحظه‌های اولیهٔ حیاتم، نامم را «غلامرضا» به معنی واقعی کلمه (غلامِ رضا) گذاشت، تا امام هشتم مرا از جمیع بلایا حفظ کند. پدربزرگ (پدریم) دهقان مرفه‌الحالی بود، به طوری که هر چند سال یکبار، پس از برداشت محصول به زیارت مشهد می‌رفت. مادربزرگم شیرزنی بود کاردان؛ که نه تنها بر جمیع کارهای خانه، بلکه به امور زراعتی هم نظارت می‌کرد. خودخواه و مستبد بود.

پدرم، با کار زراعت به کلی بیگانه بود. کوره سوادی داشت، آن‌قدر که بتواند، بخواند و بنویسد. با وساطت تنی چند از خویشاوندان متنفذ، بخصوص پدربزرگم، توانست در «دایرهٔ میاه» وابسته به دارایی سنگسر (یا دوشنبه بازار، بازارروز دهات اطراف) استخدام شود. کارش توزیع آب به شالیزارهای حوالی یکی از شاخه‌های سفیدرود (از امامزاده هاشم تاآستانهٔ اشرفیه) بود.

در آن سالهایی که آب سفیدرود نقصان پیداکرده بود و شالیزارها با خطر کم آبی مواجه بودند، دهقانان بر سر تقسیم آب با داس و بیل به جان هم می‌افتادند و خونها می‌ریختند. در یکی از این دعواها، پدرم از اسب سقوط کرد و استخوان پایش شکست؛ مدتها قادر به حرکت نبود و خانه‌نشین شد. هر چند روز یک بار، برای پانسمان (خروج چرک) و مداوای جراحت، فتیله می‌گذاشتند. چون رفت و آمد شکسته‌بند از رشت به جوبنه مستلزم پرداخت مخارج گزافی بود، با تقاضای پدرم مبنی بر انتقال به رشت موافقت شد و ما به رشت کوچ کردیم.

مادر،دو خواهر دیگرم رابه‌مکتب(ملاخانه)ی که‌درجوار خانهٔ مابود فرستاد و خواهرانم، مرا هم با خود به ملاخانه می‌بردند. به این ترتیب از سن چهارسالگی پایم به مکتب‌خانه باز و گوشم با آیات قرآن آشنا شد. کلماتی را می‌شنیدم که بر اثر تکرار، ناخواسته در ذهنم نقش می‌بست.

«ملا ربابه» مدیرهٔ مکتب، شخصاً عهده‌دار تدریس من شد و در اندک مدتی خواندن ونوشتن را به من آموخت.

در آن زمان غرض از باسوادکردن فرزندان، در درجهٔ اول، آشنایی آنها با قرائت قرآن بود، تا شبهای جمعه برای آمرزش روح اموات، چند سوره‌ای بخوانند و فاتحه بدهند.

در مکتب، دیوان اشعار جودی، **محزون و جوهری** را که در رثای ائمه بود، می‌خواندیم و از روی آن می‌نوشتیم، ولی از حساب، حتی عدد نویسی، مطلقا" خبری نبود.

اواسط بهار ۱۳۰۷ شمسی، پدرم دست مرا گرفت و به «مدرسهٔ مبارکهٔ اسلامی» برد. مدیر مدرسه شخصاً از من امتحانی به عمل آورد و نامم را در کلاس اول دبستان ثبت کرد. یکی دو هفته بعد، امتحانات آخر سال فرا رسید. با شاگردان کلاس امتحان دادم و به کلاس بالاتر رفتم.

بجز درس حساب، من در سایر دروسم موفق بودم. در حالی که بچه‌ها بسهولت اعداد را جمع یا تفریق می‌کردند. من اعداد را نمی‌شناختم. بالاخره شد، آنچه انتظارش را می‌کشیدم و از آن وحشت داشتم. آموزگار کلاس، در مُنتهای ناباوری وقتی یقین حاصل کرد که من قادر به نوشتن اعداد نیستم - با همان چوب کذایی - چنان ضربه‌ای بر پشتم زد که بی‌هوش نقش زمین شدم و وقتی به اطلاع ایشان رسید که من شاگرد تازه واردم، از کردهٔ خود پشیمان شد و پس از استمالت و دلجویی، از من خواست که به پدر و مادرم چیزی نگویم. ضمناً به «پرویز» همکلاسیم دستور داد که در ساعات تفریح عددنویسی و جمع و تفریق اعداد را به من بیاموزد و خود هر روز بر کار ما نظارت می‌کرد. این همکاری دو سه هفته ادامه یافت و من به کلاس رسیدم.

معمولاً ساعات اول ایام تابستان، درس حساب داشتیم. آموزگار ما، یکی دو مسألهٔ حساب می‌داد یا حاصل ضرب دو عدد چند رقمی و یاخارج قسمت آن دو عدد... پیشرفتم در درس حساب چنان شد که روزانه در دفتر نمرهٔ کلاس، در مقابل اسمم، سه عدد بیست کنار هم ردیف می‌شد.

کلاسهای دوم و سوم را با موفقیت پشت سر گذاشتم. در شهریور ماه آن سال، پس از برگزاری امتحان و اعلام نتیجه و افزایش چند ریال به شهریه، به کلاس پنجم رفتم. با آن‌که شاگردان این کلاس، سه ماه تابستان، درس خوانده بودند، مشکل من درس حساب نبود، چون با مطالعهٔ دفترچهٔ قواعد حساب و هندسه و پاکنویس مسائل حل شده، عقب ماندگی سه ماهه، بسرعت و بسهولت جبران شد. مشکل من درس جغرافیا بود. در کلاس پنجم، جغرافیای جهان تألیف آقای ندیم تدریس می‌شد. روز قبل از ورودم به کلاس، جغرافیای چین تدریس شده بود و شاگردان کلاس تلفظ صحیح اسامی رودها و کوهها و شهرهای چین را شنیده بودند. در زنگ جغرافیا، آموزگار از من خواست تا رودهای چین را نام ببرم. من که به تلفظ صحیح آنها آشنا نبودم و کلمه‌های چاپی کتاب هم اعراب نداشت، در پاسخ گفتم: «مهمترین رود چین بانگ بسته کیانک... است» معلم ابتدا از شنیدن کلمه‌های «بانگ» و «بسته» و «کیانک» که تاج کیانی را تداعی می‌کرد، با تعجب به من نگریست، سپس بشدت خندید و متعاقب آن شلیک خندهٔ بچه‌ها هم بلند شد. من وحشت زده به آنان نگاه کردم و سپس به گریه افتادم. آن سال، گاه‌گاه که معلم سرحال بود، به شوخی از من می‌پرسید: «آیا بانگ کیانیت هنوز بسته است؟»

دورهٔ ابتدایی را طی چهار سال گذراندم. افزایش شهریه در سال اول دبیرستان، بیش از چند ریال بود. خطر ترک تحصیل تهدیدم می‌کرد. با پا درمیانی یکی از معلمین و شادروان «محمد حسابی» این مشکل حل شد. با پرداخت همان شهریهٔ دبستان، توانستم دورهٔ سه سالهٔ دبیرستان را بگذرانم. خرید کتابهای متعدد دبیرستان، آن هم با قیمت گزاف، ممکن نبود. استدلال قضایای هندسه را به خاطر می‌سپردم و در دفتر کاهی می‌نوشتم. مشکل من در درس ریاضی، وقتی بود که می‌بایست صورت مسائل و تمرینها را از روی کتاب بنویسم. در کلاس هشتم در درس جغرافیا تجدید شدم. چون معدل سالانه‌ام بالای چهارده بود، طبق آیین‌نامه به کلاس بالاتر رفتم.

«سعید» همکلاسی جدیدم در سال دوم دبیرستان، بچه‌ای ریز - نقش و باادب بود. بزودی احساس کرد با پیشرفت دروس، هر روز مشکلاتش بیشتر و درک او از مطلب کمتر می‌شود. پدرش به وسیلهٔ مدیر مدرسه از من خواست تا به او کمک کنم. مدیر مدرسه که از او به احترام یاد می‌کرد، متذکر شد، زحمات بی‌اجر نخواهد ماند. اطاق درس، کتابخانهٔ پدرش بود. من اجازه داشتم از کتابها استفاده کنم. پدرش هر بار که کتابی به من می‌داد توصیه می‌کرد که ضمن مطالعه، یادداشتهایی از آنها بردارم.

با تکرار مطالب و تعمق دربارهٔ سؤالهای سعید، مطالب درسی عمیقتر در ذهنم جای می‌گرفت و مرکوز ذهنم می‌شد. بعدها با همکلاسیهای دانشکده هم، جلسه‌های مطالعه داشته‌ام.

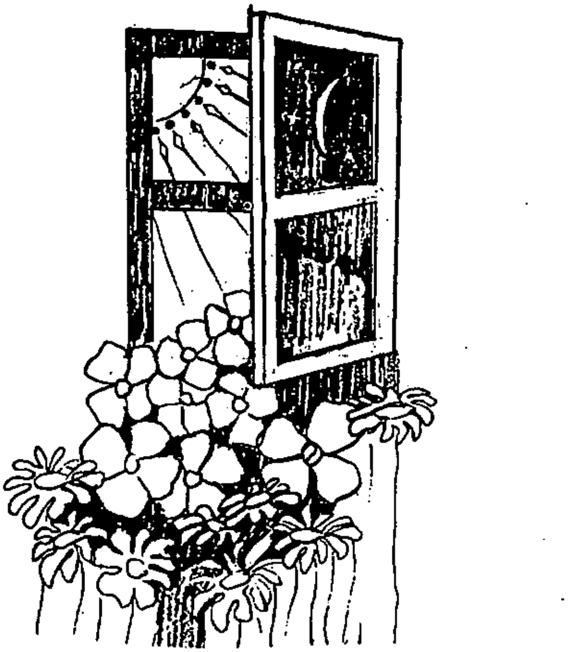
به توصیهٔ شادروان «محمد حسابی» در دانشسرای مقدماتی رشت ثبت‌نام کردم. به فکر افتاده بودم که به دبیرستان نظام بروم که با مخالفت شدید آن زنده‌یاد مواجه شدم و بعدها دانستم که او با استبداد و نظامی‌گری بشدت مخالف است. این همه، بدان علت بود که «دبیرستان ملی اسلامی» که فارغ التحصیل آن بودم، امتیاز تأسیس دورهٔ دوم متوسطه را نداشت.

شادروان «محمد حسابی» در محدودهٔ دروس دبیرستانی، جامع علوم بودند. ریاضیات را بخوبی تدریس می‌کردند. قلم پرقدرت وتوانایی داشتند. خوب شعر می‌گفتند. خطی به غایت زیبا و بسیار خوش داشتند. با زبان فرانسه تا آن جاکه از حل‌المسائل *F.G.M.* بتوانند استفاده کنند، آشنا بودند. بعدها که در دبیرستان اسلامی دورهٔ دوم (رشتهٔ ادبی) دایر شد، تدریس ادبیات فارسی و صرف و نحو و تجزیه و ترکیب زبان عرب بر عهدهٔ ایشان بود. شمرده سخن می‌گفت. موقع خواندن اشعار شعرای متقدم، کلاس و درس را فراموش می‌کرد. به کارش علاقه داشت. در زندگی ساده و بی‌تکلف بود. چقدر دلم می‌خواست، بتوانم خصوصیات اخلاقی و منش او را داشته باشم و در معلمی پا، جای پای او بگذارم. روانش شاد باد.

درخرداد ماه ۱۳۱۶ شمسی، از دانشسرای مقدماتی، فارغ‌التحصیل شدیم.

در تمام امتحانات داخلی دانشسرا من شاگرد اول بودم و در امتحان پایانی، سه نفر (حسین فریور - من و رضا مبین) با اختلاف یک صدم، رتبه‌های اول و دوم و سوم را احراز کردیم. تنها در آن سال و فقط از فرهنگ رشت، به جای دو نفر، سه نفر جهت ادامهٔ تحصیل در دانشسرای عالی، اعزام شدیم. شاگردان رتبه‌های اول و دوم دانشسراها، پس از گذراندن یکی از دو کلاس آمادگی *(préparatoire)* علمی یا ادبی دانشسرای عالی حق انتخاب رشته را داشتند. نظر به علاقهٔ مفرطی که به آموختن زبان پیداکرده بودم، در مهرماه ۱۳۱۶ شمسی درکلاس آمادگی (رشتهٔ ادبی) ثبت‌نام کردم. در اواسط آبان ماه به من اطلاع دادند که «شبانه‌روزیها» حق ادامهٔ تحصیل در رشتهٔ زبان خارجه را ندارند. چاره‌ای نبود. در اواخر آبان ماه به کلاس آمادگی (رشتهٔ علمی) رفتم.

خوب به خاطر دارم «شادروان محمد وحید تنکابنی» در آن وقت



از سال، از دیدن یک شاگرد تازه وارد به کلاس علمی، ابتدا تعجب کرد. متفکرانه یکی دو بار طول کلاس را پیمود. آنگاه با لحنی پدرانه پرسید: «شما تا حال کجا بودید؟» پس از اطلاع از کم و کیف ماجرا خیره به من نگریست و این بار پرسید: «برای جبران عقب‌ماندگی از کلاس، چه خواهید کرد؟ چه کمکی از من می‌خواهید؟» گفتم: «من از کلاس عقب نیستم، چنانچه به جزوات کلاس دسترسی پیدا کنم، دیگر مشکلی نخواهم داشت.» براحتی نفسی کشید، و با قیافه‌ای شاد گفت: «شما می‌توانید از جزوهٔ من ـ که در حقیقت یادداشتهایش برای تدریس بود ـ استفاده کنید.» یادداشتها تمیز و مرتب و با خطی خوش نوشته شده بود. شادروان وحید به کارش مسلط بود. می‌دانست چه می‌خواهد و چه چیزی و چگونه باید بگوید یا از کجا شروع کند. با رسم چند خط عمودی، تخته سیاه را به چند قسمت تقسیم می‌کرد و به ترتیب در این ستونها مطلب می نوشت. هرگز نیازی به پاک کردن تخته سیاه، پیدا نمی‌کرد. پس از اتمام درس، تمام مطالب گفته شده در آن دو زنگ که روی تخته سیاه نقش بسته بود، بخوبی قابل استفاده بود و تخته سیاه به کتیبه‌های باستانی شباهت داشت.

زنده یاد وحید، شخصاً تمیز و بسیار با سلیقه بود. با آن که خیابان شرقی دانشسرای عالی خاکی بود و در فصول زمستان، پوشیده از گل و

لای، هرگز لکه یا اثری از گل و لای بر گالشهای او ندیدم. شاید قبل از ورود به کلاس، کفشهایش را عوض می‌کرد!!

در آن سالها، درس مشترک دانشجویان دو رشتهٔ ریاضی و فیزیک و شیمی «ریاضیات عمومی» بود. دکتر اسداله آل بویه، هندسه تحلیلی *geométrie analytique* و دکتر (م) که تازه از فرنگ برگشته بود، متمم جبر و آنالیز *Complement d'algebre et analyse* را تدریس می‌کردند. به عقیدهٔ من، معلمی یک هنر است و داشتن سواد و معلومات کافی یکی از ابزارهای آن. به عبارت دیگر باسواد و مطلع بودن شرطی لازم است، ولی کافی نیست: کلاس از طرز تدریس دکتر ناراضی بود و دامنهٔ این عدم رضایت به اعتراض و شکایت و در نهایت اعتصاب کشیده شد. دکتر صدیق اعلم، رئیس دانشکده، صریحاً اعلام داشت که از من کاری ساخته نیست.... .

در شهریور ماه ۱۳۱۸ دکتر آل‌بویه به هواداری از همکارش دکتر (م) به قصد انتقامجویی از اعتصابیون، بیداد کردند و هیچ مرجعی هم برای دادخواهی و رسیدگی به اوراق وجود نداشت. چون وضع مالی من اجازه نمی‌داد که در خارج از شبانه‌روزی به تحصیل ادامه دهم، به وزارت فرهنگ مراجعه کردم که بلافاصله به سمت دبیری دبیرستانهای همدان منصوب و اعزام شدم.

درسال ۱۳۲۵، دکتر فریدون کشاورز (وزیر فرهنگ در کابینهٔ قوام) مصوبه‌ای را به تصویب رسانید، مبنی بر این که فارغ‌التحصیلان دانشسراهای مقدماتی، با پنج سال سابقهٔ تدریس و اخذ دیپلم کامل متوسطه، پس از قبولی در امتحانات ورودی دانشسرای عالی می‌توانند به عنوان «بورسیه» ادامهٔ تحصیل دهند. در امتحانات ورودی (در رشتهٔ ریاضی) شاگرد اول شدم و از مهرماه ۱۳۲۶ با داشتن زن و فرزند بار دیگر پشت نیمکتهای دانشکده نشستم.

درآن سالها، منوال کار دانشکدهٔ علوم بر این نهج بود که شاگرد اول دانشکده راجهت ادامهٔ تحصیل به خارج اعزام می‌کردند و شاگرد اول دانشکده، با توجه به معدل رشتهٔ تخصصی، معدل علوم تربیتی و نمره زبان خارجه انتخاب می شد و چون تک‌تک نمرات سه‌گانه‌ام بالاتر از سایرین بود، آن سال من انتخاب شدم تا به پاریس یا بن اعزام شوم. دانشکدهٔ علوم هم اقدامات اولیه را انجام داد و گزارش کار جهت صدور گذرنامهٔ تحصیلی به رکن دوم شهربانی فرستاده شد، که «صلاحیتم» به‌علت فعالیتهای دانشجویی مورد تأیید قرار نگرفت و در اواخر اسفند ۱۳۲۹ به یزد اعزام شدم.

در ۳۱ فروردین ۱۳۲۴ شمسی ازدواج کردم که ثمرهٔ آن چهار فرزند (دو دختر و دو پسر) است. «بهجت» نرس است و «بهناز» مددکار اجتماعی و کارشناس ارشد کودکان عقب ماندهٔ ذهنی و بدنی. «بهزاد» مهندس الکترونیک و فوق لیسانس مدیریت از لندن است و «بهنام» لیسانسیهٔ جامعه‌شناسی، فوق لیسانس آمار و دانشجوی دورهٔ دکترای اقتصاد در دانشگاه «اتاوا».

□ سابقهٔ تدریس شما چقدر است و در چه جاهایی تدریس کرده‌اید؟

اگر بگویم «نافم را با معلمی بریده‌اند» خلاف نگفته‌ام. چون از سال دوم دبیرستان به طور خصوصی و از آبان ماه ۱۳۱۸ به طور رسمی تا خرداد ماه ۱۳۵۸ (به مدت چهل سال) درس داده‌ام. درآبان ماه ۱۳۴۳ بنابه تقاضای شخصی با ۲۴ سال و ۱۱ ماه و ۲۸ روز خدمت فرهنگی بازنشسته شدم. ۸ ماه در یزد، دو سال دربندرانزلی و دو سال در رشت و پنج سال (در دو نوبت) در همدان انجام وظیفه کرده‌ام. در تهران، در دبیرستانهای وابسته به گروه‌های جاویدان، خوارزمی، هدف، آذر، بابکان، جام جم و... و در مدارس تهران نظیر مروی، البرز، کیهان نو، فیروز بهرام، انوشیروان دادگر و پیشاهنگ گرفته تا زاگرس، مدائن و تمدن و... و در آموزشگاه‌های شبانه و کلاسهای کنکور خزائلی، آذر، خوارزمی و جاویدان درس داده‌ام. یک سال هم در پلی تکنیک (دانشکدهٔ صنعتی) متمم جبر و آنالیز گفته‌ام.

□ از تألیفات و ترجمه‌هاتان بفرمایید.

با همکاری شادروان باقر امامی تبریزی و آقایان محمد باقر ازگمی، پرویز شهریاری وعلی اصغر شیخ رضایی، یک دورهٔ کامل کتابهای ریاضی، برای دانش آموزان سه سال اول متوسطه و دورهٔ دوم (رشته‌های ریاضی ـ طبیعی و ادبی) تألیف کردیم، تحت عنوان «مجلهٔ علوم». بعدها که وزارت فرهنگ چاپ و انتشار کتب دبیرستانی را رأساً بر عهده گرفت، چند جلد از مجموعهٔ علوم نیز انتخاب شد.

زنده یاد باقرامامی، به زبان فرانسه تسلط کافی داشت و به زبانهای انگلیسی و روسی هم آشنا بود. اطلاعاتش جامع و کامل و در واقع «استاد راهنما»ی ما بود. او کارها را تقسیم و وظیفهٔ هر یک را معین می‌کرد. او بود که به قصد کمک به دبیران ریاضی نقاط دور افتادهٔ کشور و اجابت تقاضاهای مکرر دانش‌آموزان (اکثرا" شهرستانی) ما را به نوشتن «حل مسائل مجموعهٔ علوم» واداشت، که ناشر موظف بود، این تألیفات را به عنوان «هدیهٔ مؤلفین» برای دبیران ریاضی ارسال دارد.

حل مسائل مثلثات کنکور (اثرهوسن استاد دانشگاه کمبریج)، حل مسائل ریاضیات مقدماتی (اثرلیواشتینسکی)، ترسیمات هندسی (اثرژولیوس پترسن، استاد دانشگاه کپنهاگ)، راهنمای جبر کنکور و جبر و آنالیز، از جملهٔ کتابهایی است که شخصاً ترجمه یا ترجمه و تألیف کرده‌ام.

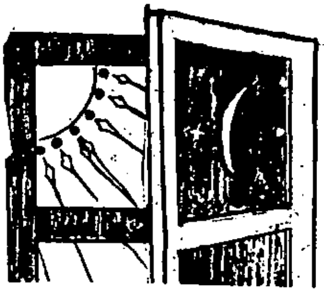
□ دربارهٔ چگونگی تشکیل گروه فرهنگی خوارزمی و جاویدان شرحی دهید:

در اوایل سال ۱۳۳۹ به پیشنهاد باقرامامی، با سرمایه‌ای معادل ۷۵۰۰۰۰ ریال (اولین حق‌التألیف چهل و چند جلد کتب ریاضی مجموعهٔ علوم) «گروه فرهنگی خوارزمی» راتأسیس کردیم. در تابستان همان سال، کلاسهای کنکور ما، بالاخص رشتهٔ ریاضی آن، با استقبال شدید دانش‌آموزان مواجه شد و همین امر، ما را بر آن داشت، تا با دلگرمی بیشتری، به فکر تأسیس دبیرستان باشیم. در سال تحصیلی ۴۰-۱۳۳۹ دبیرستان پسرانه و سال بعد دبیرستان دخترانهٔ خوارزمی تأسیس شد.

چند سال بعد، ابتدا از عضویت در گروه فرهنگی خوارزمی، سپس از همکاری با مؤلفین مجموعهٔ علوم کناره‌گرفتم. در اواخر ۱۳۴۸، با همکاری جمعی از دبیران پایتخت، «گروه فرهنگی جاویدان» را پی‌ریزی کردیم که ساختمان معظم «دبیرستان جاویدان» واقع در اول جلفای شمالی، تنها یادگار آن دوران است.

□ از شاگردان باهوش خود چه خاطره‌ای دارید؟

اثبات یکی از اتحادهای مثلثاتی به طریق هندسی، نه فقط ساعتها، بلکه روزها ذهنم را به خود مشغول کرده بود، تا آنجا که تصمیم



داشتیم، این تمرین را از متن کتاب درسی حذف کنیم. بالاخره با کوشش فراوان توانستم راه حلی، که نصف صفحهٔ کتاب را اشغال می‌کرد، پیدا کنم؛ کتاب هم با همین راه حل طولانی به چاپ رسید.

در یکی از کلاسهای ششم ریاضی خوارزمی، وقتی این تمرین را که دانش‌آموزان زبدهٔ کلاس از حل آن عاجز مانده بودند، حل می‌کردم و از توفیقی که در این راه نصیبم شده بود، مسرور بودم، «کتبای» یکی از شاگردان کلاس اجازه خواست تا راه حل جدیدی ارائه دهد. او، فقط با رسم یک خط و نوشتن یک رابطه، به نتیجهٔ مطلوب رسید. «راه حل کتبای» در چاپهای بعدی مورد استفاده قرارگرفت. یادش گرامی باد.

□ کدام یک از دبیرستانها را برخوردار از فضای مناسبتری یافته‌اید؟ اگر از شاگردان بازیگوشتان خاطره‌ای دارید، ذکربفرمایید:

برایم کلیهٔ دبیرستانها، محلهای مناسبی برای تدریس بودند. دانش‌آموزان، اگر کلاس درس را قابل استفاده تشخیص می‌دادند، سراپاگوش می‌شدند. این تشخیص در همان جلسات اول و دوم صورت می‌گرفت. تقریبا" تمام ساعات تدریسم در کلاسهای ششم و بالاخص در رشتهٔ ریاضی بود که به تناسب بنیهٔ تحصیلی و درک دانش‌آموزان کلاس، نحوهٔ تدریسم، درکلاسها و مدارس فرق می‌کرد. اتمام برنامهٔ درسی را وظیفهٔ خود می‌دانستم.

در واقع شاگرد مزاحم و بازیگوش، به معنای واقعی کلمه هرگز نداشتم. البته بودند، شاگردانی که گاه‌گاه «نکته‌پرانی» می‌کردند و همه می‌خندیدیم. آنها که مطالعهٔ بیشتری داشتند، حل مسائلی را از من می‌خواستند. به همین جهت اکثر اوقات جیبهایم پربود از اوراقی که صورت مسائل، نام شاگرد و نام دبیرستان روی آنها نوشته شده بود.

□ ازمیان مؤلفین و مترجمین، کدام یک بیشترمقبول شما افتاده‌اند؟ چه ویژگی یا ویژگیهایی در آنان، چنین موجب گشته است؟

مقام علمی استادانی چون «دکتر محمد معین» که قسمت اعظم عمر گرانبهای خود را صرف خدمت به فرهنگ کشور کرده‌اند، و «دکتر غلامحسین مصاحب» که با برخورداری از همکاری صمیمانهٔ جمعی از اساتید مسئولیت سنگین تهیه، چاپ ونشر «دایرةالمعارف فارسی» را بر عهده داشته‌اند، آن چنان رفیع و والاست که من قادر به توصیف آن نمی‌باشم.

ناسپاسی است اگر از «دکتر علی زرگری» به خاطر زحماتی که در تألیف اثر جاودانه‌اش «گیاهان دارویی ایران» متحمل شده‌اند واز «پرویز شهریاری» که ترجمه‌هایش را در کتابهای هر دانش‌آموز دبیرستانی می‌توان یافت، نامی برده نشود.

علاوه بر استادانی که حق معلمی به گردن من داشته‌اند، از مدرسینی که در قید حیات‌اند و سالها از مجالست آنها برخوردار بوده‌ام، حضرات آقایان فریدون کوشا (لیسانسیهٔ فیزیک و شیمی) و مهدی قمصری اصفهانی (لیسانسیهٔ علوم ریاضی) را از نوابغ اساتید دوران می‌دانم.

نوشته‌های آقای کوشا، نظر به تسلط کافی ایشان به زبان فرانسه و مطالعهٔ مداوم مجلات و کتابهای خارجی و اطلاع از تازه‌ترین تحولات علم شیمی، بسیار دقیق و مستند و جامع است.

مشخصهٔ آقای قمصری وسعت دید، سرعت انتقال، قدرت استدلال و خلاقیت ذهن پویا و فعال ایشان است. در همان محدودهٔ کوچک طرح سؤالهای جبر امتحانات نهایی سالهای ششم ریاضی، مطالبی نو و آموزنده عنوان کرده‌اند که در نوع خود بی‌نظیر بوده است و مهمتر از همه این که این همه، محصول تراوشات فکری ایشان بوده است، نه ترجمه یا اقتباس از کتب خارجی.

□ از آنهایی که شاگرد شما بوده‌اند و به مدارج بالای علمی رسیده‌اند، ذکر کنید:

تعداد شاگردانی که عهده‌دار تدریس آنان بوده‌ام، اندک نبوده است. بی‌شک جمع کثیری از آنها که استعداد ذاتی و امکان مالی داشته‌اند، مدارج علمی را پیموده‌اند. به علاوه ذهن آدمی، لوح محفوظ نیست. مهمتر از همه، در ظاهر جوان دیروز و اکثراً مهندس امروز، تغییرات عظیم روی می‌دهد. با تعدادی از شاگردانم که در سالهای ۱۳۱۸-۲۰ عدد یک درهمدان تحصیل می‌کردند، در سالهای ۱۳۲۹-۳۲ در دبیرستانهای همدان افتخار همکاری داشته‌ام.

□ وضع تدریس ریاضیات را در گذشته و حال چگونه می‌بینید؟

نشاط (جوانک اصفهانی که هنوز نامش را به یاد دارم) همراه من از کلاسی به کلاس دیگر می‌آمد. با علاقه و شور زایدالوصفی، گفته‌هایم رایادداشت می‌کرد. من هم، برای آن که با تکرار مطالب گفته شده در کلاس قبلی، وقتش را تلف نکنم، برخلاف برنامهٔ تنظیمی، در کلاس جدید، مطلب تازه‌ای را مطرح می‌کردم.

گاهی حضور حتی یک نفر در کلاس، یا طرح یک پرسش بجا یا نابجا در نحوهٔ تدریس و برداشت مطلب اثر می‌گذارد. هیچگاه نتوانستم یک مطلب علمی مشخص را، در یک روز، ولی در دو کلاس به یک نحو تدریس کنم. صدور یک حکم کلی دربارهٔ «وضع تدریس» یعنی رویارویی انسانها با یکدیگر به قصد تفهیم مطلبی که هنوز برای یک طرف ناشناخته است، شاید ممکن نباشد. چون تفهیم و تفاهم به عوامل متعددی بستگی دارد.

تنها مطلب قابل ذکر دراین زمینه و در شرایط کنونی، تلاش بیش از حد متعارف معلمین در راه تأمین نیازهای اولیهٔ زندگی است که به واقع، از جان خود مایه می‌گذارند. صرف این همه انرژی، علاوه بر فرسودگی جسمی و پیری زودرس، بازده چندانی هم ندارد. در حالی که در گذشته، شرایط زندگی تا بدین پایه دشوار و طاقت‌فرسا نبود و معلم، فرصت مطالعه داشت.

□ اوضاع تألیف کتابهای ریاضی را در گذشته و حال چگونه ارزیابی می‌کنید؟

اکثریت قریب به اتفاق معلمین دارالفنون یا فرانسوی بودند یا به زبان فرانسه تدریس می‌کردند. اکثر دانشجویان اعزامی به خارج مشتغل به تحصیل در دانشگاهها، در فرانسه تحصیل کرده بودند. در نتیجه، تألیفات آن زمان، ترجمه‌هایی بود از کتب فرانسه و طبق سلیقهٔ مترجم. واضح است حاصل کار یک فرد، هر اندازه ذهنی قوی و فعال داشته باشد، مصون از کاستی نخواهد بود.

بعدها که کار تألیف به صورت گروهی درآمد، توانستند با استفاده از منابع مختلف (و به زبانهای مختلف) بعضی مطالب علمی را به زبانی ساده‌تر یا به صورتی جامعتر بیان کنند. نظرات اصلاحی و پیشنهاداتِ بجایِ دبیران ریاضی و حتی‌انتقاداتِ دانش‌آموزان سراسر کشور، به کار بسته می‌شد، تا آن جا که در چاپهای متعدد یک کتاب، تفاوتها و تغییراتی مبتنی بر این‌گونه اصلاحات بخوبی مشهود است. از آن جا که مثلاً نویسندهٔ کتابهای جبر دورهٔ دوم متوسطه یک نفر بود، از کتابهای دیگر این دوره مطلع بوده، رفع گسستگی مطالب می‌گشت. مؤلفین کتب درسی کنونی نسبت به تألیفات خود بیگانه‌اند. چون اجازهٔ دخل و تصرف در نوشته‌های خود را ندارند و انگیزه‌ای هم در آنان برای غنیتر ساختن این آثار وجود ندارد. مهمتر از همه، نظرات یا پیشنهادات اصلاحی را با چه مقامی و در کجا باید در میان گذاشت که ثمربخش باشد؟

□ آیا تألیف کتابهای کمک درسی لازم است؟ آنها را تحت چه شرایطی مطلوب می‌دانید؟

مطالب کتابهای کمک درسی باید جامع، مفید و آموزنده باشند و از آن جا که نقش خودآموز را بازی می‌کنند، باید به زبانی ساده و روان و قابل فهم نوشته شوند تا به کار محصلان نقاط دورافتادهٔ کشور بیایند. باید که ضمن طرح مطالب جالب و آموزنده، از موضوعات ساده شروع کرد و آن جا که مسائل و مطالب، دشوار و بغرنج می‌شود، از ذکر توضیحات لازم و کافی خودداری نکرد.

□ موفقیت در ریاضیات را بسته به چه عواملی می‌دانید؟

توفیق درهر امری، مستلزم داشتن پشتکار و تداوم تمرین و ممارست درآن است. در ریاضیات هم، پس از درک مفاهیم ساده و مقدماتی که نقشی اساسی درآموختن ریاضیات دارد و سنگ بنای اولیهٔ آن در کلاسهای اول و دوم ابتدایی گذاشته می‌شود، شاگرد باید آنچنان به تکرار آموخته‌ها و تمرین مسائل بپردازد تا مطالب در ذهنش نقش بندد. آموزگاران سالهای اول دبستان می‌توانند، رغبت به فراگرفتن ریاضیات را در کودک تقویت کنند.

آقای بهنیا، در خاتمه باز هم از شما تشکر می‌کنیم و موفقیت و طول عمر شما را از درگاه خداوند متعال خواستاریم.

تفریح اندیشه ۲

هلال

آیا می‌توانید هلال شکل زیر را تنها با دو خط مستقیم به شش قسمت تقسیم کنید؟

جواب در صفحهٔ ۹۶

تابع معکوس

تابعهای مثلثاتی (Arc ها)

(قسمت سوّم)

● علی حسن زاده ماکویی

۷. هریک از رابطه‌های Arc ای را می‌توان با استفاده از روابط نسبتهای مثلثاتی کمانها نوشت. به مثالهای زیر توجه کنید.

مثال ۱

$$\sin\alpha = \frac{3}{5} \text{ و } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = Arc\sin\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5} \text{ و } cotg\,\alpha = \frac{4}{3} \text{ و } \dots$$

با توجه به حدود (α) هریک از رابطه‌های فوق را می‌توان بر حسب روابط Arc ای نوشت.

یعنی داریم:

$$\alpha = Arc\sin\left(\frac{3}{5}\right) = Arc\cos\left(\frac{4}{5}\right) = Arc\,cotg\left(\frac{4}{3}\right) = \dots$$

مثال ۲

$$\sin\beta = \frac{-5}{13} \text{ و } \frac{-\pi}{2} < \beta < 0 \text{ و } \beta = Arc\sin\left(\frac{-5}{13}\right)$$

حال با توجه به حدود β، رابطه‌های فوق را نمی‌توان به‌صورت روابط Arc ای نوشت. بافرض، $\beta = -\beta_1$ و $0 < \beta_1 < \frac{\pi}{2}$ خواهیم داشت:

$$\cos\beta = \cos\beta_1 = \frac{12}{13} \text{ و } cotg\,\beta_1 = \frac{12}{5} \Rightarrow$$

$$\beta_1 = Arc\cos\left(\frac{12}{13}\right) = Arc\,cotg\left(\frac{12}{5}\right) = \dots \Rightarrow$$

$$\beta = -Arc\cos\left(\frac{12}{13}\right) \text{ و } \beta = -Arc\,cotg\left(\frac{12}{5}\right)$$
$$= Arc\,cotg\left(\frac{-12}{5}\right) - \pi$$

از مثالهای فوق می‌توان نتیجه گرفت که اگر بخواهیم کمانهای ،

$|m| \le 1$ و $\alpha = Arc\sin(m)$ و $|n| \le 1$ و $\beta = Arc\cos(n)$

و ... برحسب سایر روابط Arc بنویسیم باید حدود کمانها مشخص شوند. ما به‌عنوان نمونه کمانهای α و β را برحسب سایر Arc ها می‌نویسیم.

علاقه‌مندان می‌توانند هریک از رابطه‌های،

$Arc\,tg(p)$ و $Arc\,cotg(q)$ و $Arc\sec(s)$ و $Arc\,cosec(r)$ را با توجه به مقادیر اعداد، p ، q ، s ، r، برحسب سایر Arc ها بنویسند:

الف.)

$$\alpha = Arc\sin(m) \text{ و } |m| \le 1$$

داریم:

$$(1)\quad \begin{cases} 0 \le m \le 1 \Rightarrow \alpha = Arc\cos\sqrt{1-m^2} \\ -1 \le m < 0 \Rightarrow \alpha = -Arc\cos\sqrt{1-m^2} \end{cases}$$

$$(2)\quad \alpha = Arc\,tg\left(\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}\right),\ -1 < m < 1$$

$$\alpha = Arc\ cosec\ (\frac{1}{m}) \quad و \quad m \neq 0 \qquad (3)$$

$$\alpha = \begin{cases} Arc\cot g(\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}), & 0<m\leq 1 \\ Arc\cot g(\frac{\sqrt{1-m^2}}{m})-\pi, & -1\leq m<0 \end{cases} \qquad (4)$$

$$\alpha = \begin{cases} Arc\sec(\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}), & 0\leq m<1 \\ -Arc\sec(\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}), & -1<m<0 \end{cases} \qquad (5)$$

کمان $Arc\ sin\ (m)$ به ازای $m = 0$ برحسب $Arc\ cotg$ و $Arc\ cosec$ و به ازای، $m = \pm 1$ برحسب $Arc\ tg$ و $Arc\ sec$ قابل تعریف نیست.

ب) $|\ n\ | \leq 1$ و $\beta = Arc\ cos\ (n)$ داریم:

$$\beta = \begin{cases} Arc\sin\sqrt{1-n^2}, & 0\leq n\leq 1 \\ \pi - Arc\sin\sqrt{1-n^2}, & -1\leq n<0 \end{cases} \qquad (1)$$

$$\beta = \begin{cases} Arctg(\frac{\sqrt{1-n^2}}{n}), & 0<n\leq 1 \\ \pi + Arctg(\frac{\sqrt{1-n^2}}{n}), & -1\leq n<0 \end{cases} \qquad (2)$$

$$\beta = Arc\ sec\ (\frac{1}{n}) \quad و \quad n \neq 0 \qquad (3)$$

$$\beta = Arc\cot g(\frac{n}{\sqrt{1-n^2}}), \quad -1<n<1 \qquad (4)$$

$$\beta = \begin{cases} Arc\,cosec(\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}), & 0\leq n<1 \\ \pi - Arc\,cosec(\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}), & -1<n<0 \end{cases} \qquad (5)$$

کمان $Arc\ cos\ (n)$ به ازای، $n = 0$ بر حسب کمانهای $Arc\ tg$ و $Arc\ sec$ و به ازای $n = \pm 1$ برحسب $Arc\ cotg$ و $Arc\ eosec$ قابل تعریف نیست. به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال ۱.

$$\gamma = Arc\cos(\frac{-\sqrt{2}}{2}) = \pi + Arctg(-1)$$
$$= Arc\cot g(-1)$$
$$= \frac{3\pi}{4}$$

مثال ۲. می‌خواهیم کمان، $\omega = Arc\ tg\ (-3)$ را برحسب کمانهای، $Arc\ cos$ و $Arc\ cotg$ و $Arc\ cosec$ بنویسیم.

ω زاویه حادهٔ منفی است. با توجه به رابطهٔ، (۳) $\omega = -Arctg$ می‌توان نوشت:

$$Arc\ tg(3) = \alpha \quad و \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad و \quad tg\alpha = 3 \Rightarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}, \quad \cot g\,\alpha = \frac{1}{3},$$

$$cosec\ \alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

با توجه به روابط فوق به ترتیب داریم:

:(I)

$$\omega = -Arc\cos(\frac{\sqrt{10}}{10}) \quad یا \quad \omega = Arc\cos(\frac{-\sqrt{10}}{10}) - \pi$$

:(II)

$$\omega = -Arc\,cotg\left(\frac{۱}{۳}\right) \quad \text{یا} \quad \omega = Arc\,cotg\left(\frac{-۱}{۳}\right) - \pi$$

:(III)

$$\omega = -Arcsec\left(\frac{\sqrt{۱۰}}{۳}\right) \quad \text{یا} \quad \omega = Arcsec\left(\frac{-\sqrt{۱۰}}{۳}\right)$$

مثال ۳. می‌خواهیم کمان، $\varphi = Arc\ cotg\ (-۲)$ را بر حسب کمانهای، $Arc\ sin$ و $Arctg$ و $Arcsec$ بنویسیم.

φ کمان منفرجهٔ مثبت است. وباتوجه به رابطهٔ (۲) $\varphi = \pi - Arc\ cotg(۲)$ می‌توان نوشت:

$$cotg\,\beta = ۲ \Rightarrow Arc\ cotg\,(۲) = \beta \quad \text{و} \quad ۰ < \beta < \frac{\pi}{۲} \quad \text{و} \quad \varphi + \beta = \pi$$

$$sin\,\beta = \frac{\sqrt{۵}}{۵}\ ,\ tg\,\beta = \frac{۱}{۲}\ ,\ sec\,\beta = \frac{۱}{cos\,\beta} = \frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$$

با توجه به روابط فوق داریم:

$$\varphi = \pi - Arc\ sin\ \left(\frac{\sqrt{۵}}{۵}\right) \qquad (I)$$

$$\varphi = \pi - Arctg\ \left(\frac{۱}{۲}\right) = \pi + Arctg\ \left(\frac{۱}{۲}\right) \qquad (II)$$

$$\varphi = \pi - Arcsec\ \left(\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}\right) = Arcsec\ \left(\frac{-۲\sqrt{۵}}{۵}\right) \qquad (III)$$

۸. نسبتهای مثلثاتی کمانها Arc. برای تعیین مقدار کمانهایی نظیر، $Arc\ sin\ (sin\ x)$ و $Arc\ cos(cos\ x)$ و $Arc\ sin\ (cos\ x)$ و $Arc\ cos\ (sin\ x)$ و $Arctg\ (cotg\ x)$ و ... و یا $Arc\ cotg\ (tg\ x)$ باید با توجه به روابط نسبتهای مثلثاتی کمانهای، $k\pi + \varphi$ یا $(۲k+۱)\frac{\pi}{۲} + \varphi$ با نسبتهای مثلثاتی φ، به‌جای x کمان اصلی آن را برحسب مجموعه مقادیر هریک از Arcها قرار می‌دهیم. به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال (۱)

$$\alpha = Arc\ sin\ sin\left(\frac{\pi}{۴}\right) = \frac{\pi}{۴}$$

$$\alpha = Arc\ sin\ \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)$$

مثال (۲)

$$\beta = Arc\ sin\ sin\left(\frac{۳\pi}{۵}\right)\ ,$$

$$sin\left(\frac{۳\pi}{۵}\right) = sin\left(\frac{۲\pi}{۵}\right) \Rightarrow \beta = \frac{۲\pi}{۵}$$

مثال (۳)

$$\gamma = Arc\,cos\,cos\left(\frac{۷\pi}{۵}\right)\ ,$$

$$cos\left(\frac{۷\pi}{۵}\right) = cos\left(۲\pi - \frac{۷\pi}{۵}\right) \Rightarrow$$

$$cos\left(\frac{۷\pi}{۵}\right) = cos\left(\frac{۳\pi}{۵}\right) \Rightarrow \gamma = \frac{۳\pi}{۵}$$

مثال (۴)

$$\lambda = Arc\ tg\ tg\left(\frac{۹\pi}{۵}\right) \text{ و } tg\left(\frac{۹\pi}{۵}\right) = tg\left(\frac{-\pi}{۵}\right) \Rightarrow \lambda = \frac{-\pi}{۵}$$

مثال (۵)

$$\delta = Arc\ cos(sin\ \frac{۵\pi}{۷}) \text{ و } sin\left(\frac{۵\pi}{۷}\right) = sin\left(\frac{\pi}{۲} + \frac{۳\pi}{۱۴}\right) \Rightarrow$$

$$sin\left(\frac{۵\pi}{۷}\right) = cos\ \frac{۳\pi}{۱۴} \Rightarrow \quad \delta = \frac{۳\pi}{۱۴}$$

مثال (۶)

$$\varphi = Arc\ cotg\ tg\left(\frac{۲۳\pi}{۱۰}\right) \quad \text{و} \quad tg\left(\frac{۲۳\pi}{۱۰}\right)$$

$$= tg\left(\frac{۳\pi}{۱۰}\right) = cotg\left(\frac{\pi}{۵}\right) \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{۵}$$

۹. روابط مجموع و تفاضل در Arc ها. مجموع یا تفاضل *Arc* های همنام را می‌توان مانند روابط نسبتهای مثلثاتی دو کمان به‌صورت یک *Arc* نوشت. ولی با توجه به محدودیت مجموعهٔ مقادیر *Arc*ها باید در تبدیل آنها دقت بیشتری کرد.

به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال (۱)

$$\alpha = Arc\cos\left(\frac{۵}{۱۳}\right) + Arc\cos\left(\frac{۳}{۵}\right) \text{ و } \alpha = ؟$$

$$x = Arc\cos\frac{۵}{۱۳} \quad \text{و} \quad \cos x = \frac{۵}{۱۳} \Rightarrow \sin x = \frac{۱۲}{۱۳}$$

$$y = Arc\cos\left(\frac{۳}{۵}\right) \quad \text{و} \quad \cos y = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \sin y = \frac{۴}{۵}$$

$$\cos\alpha = \cos(x+y) = -\frac{۳۳}{۶۵}$$

$$۰ < x < \frac{\pi}{۲} \text{ و } ۰ < y < \frac{\pi}{۲} \Rightarrow ۰ < x+y < \pi \Rightarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{-۳۳}{۶۵} \Rightarrow \alpha = Arc\cos\left(\frac{-۳۳}{۶۵}\right)$$
$$= \pi - Arc\cos\left(\frac{۳۳}{۶۵}\right)$$

۱ـ حالت کلی. با توجه به مثال فوق برای تعیین مجموع یا تفاضل دو کمان *Arc*ای داریم:

$$۰ \le m \le n \le ۱ \text{ و } \alpha = Arc\cos(m) \pm Arc\cos(n) \Rightarrow$$

$$\alpha = Arc\cos\left[m.n \mp \sqrt{(۱-m^۲)(۱-n^۲)}\right]$$

مثال (۲)

$$\beta = Arc\sin\left(\frac{۷}{۲۵}\right) + Arc\sin\left(\frac{۳}{۵}\right) \text{ و } \beta = ?$$

$$x = Arc\sin\left(\frac{۷}{۲۵}\right) \text{ و } \sin x = \frac{۷}{۲۵} \Rightarrow \cos x = \frac{۲۴}{۲۵}$$

$$y = Arc\sin\left(\frac{۳}{۵}\right) \text{ و } \sin y = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \cos y = \frac{۴}{۵}$$

$$\beta = x + y \Rightarrow \sin\beta = \frac{۴}{۵}$$

$$\frac{۷}{۲۵} < \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow , \ ۰ < x < \frac{\pi}{۴} , \ ۰ < y < \frac{\pi}{۴} \Rightarrow$$

$$۰ < \beta < \frac{\pi}{۲} \text{ و } \sin\beta = \frac{۴}{۵} \Rightarrow \beta = Arc\sin\frac{۴}{۵}$$

مثال (۳)

$$\alpha = Arc\sin\left(\frac{۱۲}{۱۳}\right) + Arc\sin\left(\frac{۲۴}{۲۵}\right) \text{ و } \gamma = ?$$

$$x = Arc\sin\left(\frac{۱۲}{۱۳}\right) \text{ و } \sin x = \frac{۱۲}{۱۳} \Rightarrow \cos x = \frac{۵}{۱۳}$$

$$y = Arc\sin\left(\frac{۲۴}{۲۵}\right) \text{ و } \sin y = \frac{۲۴}{۲۵} \Rightarrow \cos y = \frac{۷}{۲۵}$$

$$\sin\alpha = \frac{۲۰۴}{۳۲۵} , \frac{\pi}{۳} < x < \frac{\pi}{۲} \text{ و } \frac{\pi}{۳} < y < \frac{\pi}{۲} \Rightarrow$$

$$\frac{۲\pi}{۳} < \gamma < \pi \text{ و } \sin\gamma = \frac{۲۰۴}{۳۲۵} \Rightarrow \gamma = \pi - Arc\sin\left(\frac{۲۰۴}{۳۲۵}\right)$$

۲ـ حالت کلی. با توجه به مثالهای فوق در مورد مجموع کمانهای، $y = Arc\sin(n)$ و $x = Arc\sin(m)$ و $۰ < m$ و $n < ۱$ داریم:

الف)

$$۰ \le m^۲ + n^۲ \le ۱ , \ \gamma = x + y \Rightarrow$$
$$\gamma = Arc\sin\left(m\sqrt{۱-n^۲} + n\sqrt{۱-n^۲}\right)$$

ب)

$$۱ \le m^۲ + n^۲ \le ۲ \Rightarrow$$

$$\gamma = \pi - Arcsin\left(m\sqrt{۱-n^{۲}} + n\sqrt{۱-m^{۲}}\right)$$

۳. به همین ترتیب در مورد کمانهای، p و $q > ۰$ و $p \cdot q \neq ۱$ و $\varphi = Arctg\,(p) \pm Arctg\,(q)$ و $\lambda = tg\,(p) - Arctg\,(q)$ داریم:

الف) $\varphi = Arctg \dfrac{p+q}{۱-pq}$ و $p.q < ۱$، به ازای $p.q = ۱$ کمان φ برابر $\dfrac{\pi}{۲}$ است.

$$p.q > ۱ \Rightarrow \varphi = \pi + Arctg \frac{p+q}{۱-pq}$$

ب) $$\lambda = Arctg \frac{p-q}{۱+p.q}$$

به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال (۱)

$$Arctg\left(\frac{۳}{۴}\right) + Arctg\left(\frac{۵}{۱۲}\right) = Arctg\left(\frac{۵۶}{۳۳}\right)$$

مثال (۲)

$$Arctg\left(\frac{۲۴}{۷}\right) + Arctg\left(\frac{۴}{۳}\right) = \pi + Arctg\left(\frac{-۴}{۳}\right)$$

مثال (۳)

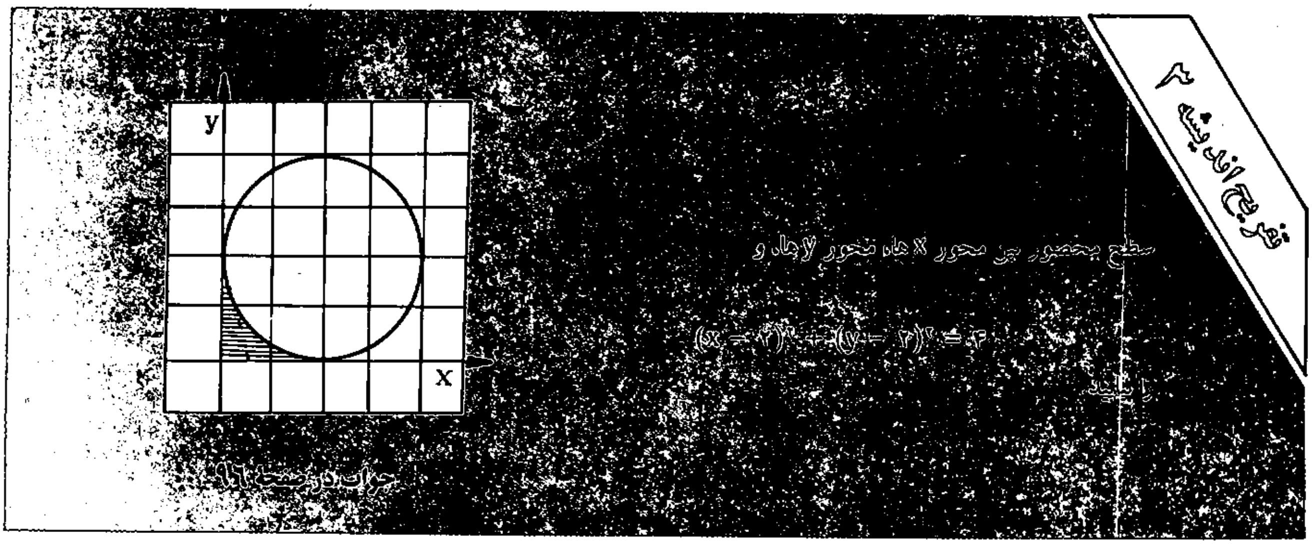
$$Arctg\left(\frac{۱}{۳}\right) - Arctg\left(\frac{۱}{۲}\right) = Arctg\left(\frac{-۱}{۷}\right)$$

مثال (۴)

$$Arctg\left(\frac{۵}{۲}\right) - Arctg\left(\frac{۳}{۲}\right) = Arctg\left(\frac{۴}{۱۹}\right)$$

تبصره. اولاً: در رابطه‌های فوق اگر اعداد m ، n ، p و q منفی باشند، با توجه به روابط بند (۴)، مثبت اعداد مزبور را در نظر می‌گیریم.

ثانیاً: باید درنظر داشت، همهٔ روابطی که در مورد نسبتهای مثلثاتی $\alpha \pm \beta$ یا ۲α و ۳α و ... موجود است، با درنظر گرفتن حدود کمانهایی که به‌صورت Arc هستند می‌توان در مورد آنها به‌کار برد.



تاریخچهٔ مجلات ریاضی در ایران (۷)

در این شماره به ادامهٔ تاریخچهٔ مجلهٔ آشتی با ریاضیات می‌پردازیم

شمارهٔ اول سال چهارم مجله با وجود مشکلاتی که در سر راه انتشار آن بود[1] بالاخره در شهریور ۱۳۵۹ چاپ شد.

در اولین مقالهٔ آن و در مقاله‌ای به‌نام خلاقیت ریاضی[2] چنین می‌خوانیم:

همهٔ ما این مطلب را می‌دانیم که بسیاری از دانشجویان خوب ریاضی، که امتحانهای خود را با نمره‌های خوب گذرانده‌اند، نتوانسته‌اند ریاضی‌دانان آفریننده‌ای بشوند، و این وضع مطلقاً به‌خاطر این نیست که آنها نیروی خود را در راه جست و جوی چیزهای تازه مصرف نمی‌کنند، بلکه به این خاطر است که نمی‌توانند چیز تازه‌ای به‌دست آورند. از بین آنها مروج خوب، مؤلف کتابهای جامع و سخنران زبردست بیرون می‌آید ولی نمی‌توانند در درون ریاضیات، خلاقیتی از خود نشان دهند. استعداد آنها به کلی درجهت دیگری بروز می‌کند. در عین حال، من افراد زیادی را می‌شناسم که در امتحانها هیچ درخششی نداشتند و نمی‌توانستند به‌عنوان استاد یکی از رشته‌های ریاضی به‌حساب آیند، ولی دارای این استعداد بودند که مسأله‌ها و روشها را با هم مقایسه کنند و هر چیزی را از جنبهٔ دیگری، که ظاهراً نامتعارف بود ببینند و به همین مناسبت، درست در جایی که ویژه کاران اصلی به هیچ نتیجه‌ای نمی‌رسیدند، آنها به نتیجه‌های جالب و تازه‌ای دست می‌یافتند.

این را هم باید گفت که استعداد ریاضی، برخلاف تصور بسیاری، خیلی نادر نیست، ولی این رگه‌های خلاق ریاضی در افراد مختلف، به صورتهای مختلف و در مسیرهای مختلف بروز می‌کند:

بعضی، نتیجه گیریهای قبلی را تعمیم می‌دهند و میدان کاربرد آنها را گسترده‌تر می‌کنند؛ بعضی دیگر، موضوعهای تازه‌ای را برای بررسی پیدا می‌کنند. گروه سوم، در جهت تحکیم مبانی منطقی و تکامل نظریه‌ها کار می‌کنند. گروه چهارم، به‌دنبال حل مسأله‌های عملی می‌روند و راههایی برای برطرف کردن دشواریهایی که در رشته‌های گوناگون دانش وجود دارد، جست‌وجو می‌کنند. گروه پنجم، به تجزیه و تحلیل مفهومهای ریاضی و روشهای مختلف بررسیهای ریاضی، یا به اصطلاح، تجزیه و تحلیل فلسفهٔ ریاضی، می‌پردازند و سپس شاخه‌های مختلف تفکر ریاضی را در رشتهٔ واحدی به‌هم می‌پیوندند.

برای این‌که بتوانیم به وجود یا عدم وجود استعداد ریاضی در مورد کسی حکم کنیم، باید همهٔ شکلهای گوناگون بروز این استعداد را درنظر داشته باشیم و حتی، یکی از آنها را هم به‌دست فراموشی نسپاریم. وقتی که کسی، مثلاً در یکی از این مسیرها استعداد ندارد، به هیچ وجه به معنای کلی نبودن استعداد خلاق ریاضی در او نیست. مثلاً در کنار برندگان مسابقات المپیادهای ریاضی، با زندگانی هم وجود دارند، آنها باید بدانند که شکست در چنین مسابقات سخت، به هیچ‌وجه به معنای نبودن استعداد در آنها نیست.

برای پرورش استعداد، کارهای فوق برنامه، چه در

زمینه‌های فنی و چه در زمینه‌های هنری، می‌تواند نقشی اساسی داشته باشد. علاقه به آفرینندگی و کارهای خلاقه باید از همان کودکی مورد توجه قرار گیرد. کار گروهی هم در این مورد نقش بسزایی دارد.

اما، در روند تقویت استعدادها، نقش معلم بزرگ و استثنایی است. اوست که می‌تواند دانش‌آموزان را به سمت پژوهش سوق دهد و شوق جست‌وجو را در آنها به‌وجود آورد. نیز در این مورد مهمتر از هرچیز، وجود محیطی علمی است، و این‌که: باید دربارهٔ چیزی همه چیز را دانست و دربارهٔ همه چیز، چیزی. نیروی آفرینندگی انسان هم به توانایی ذاتی او مربوط است و هم به این‌که بتواند دقت، و آگاهیهای خود را در سمتی که برای حل مسأله لازم است متمرکز کند.

در مقاله **ابوریحان بیرونی و گلها**[۳] چنین می‌خوانیم که شکل گلها و شمار گلبرگهای آنها تابع چند برهان منتظم‌اند که ساختمان هندسی دارند. آنچه که ساختمان خط کش و پرگاری ندارد، گلی هم به آن صورت پیدا نمی‌شود.

در مقالهٔ **روش اصولی**[۴] از قول گراسمان چنین آمده که: «کتاب من پایه‌ای برای بررسی انتزاعی مفهوم فضا است و درواقع از قید تصورات عینی ما در مورد محیط فارغ است؛ به عبارت دیگر این ریاضیات کاملاً انتزاعی است و اعمال آن در مورد فضا منجر به علم فضا می‌گردد. علم فضا، چون به چیزی موجود در جهان مادی مربوط می‌شود (منظور همان فضاست) دیگر ریاضیات نامیده نمی‌شود، بلکه کاربردی از ریاضیات در زمینهٔ طبیعت می‌باشد.»

کتاب «اصول هندسه»ی پئانو که در سال ۱۸۸۹ منتشر شد، عناصر هندسه را صرفاً به‌عنوان «چیزها» درنظر گرفت و این اندیشه را ـ که مورد تأکید پئانو بود ـ اثبات نمود که تعداد نسبتاً کمی از اصطلاحهای تعریف نشده برای تعریف کردن سایر اصطلاحهایی که در هندسه ظاهر می‌شود کافی است. او خاطرنشان کرد، تا جایی که مقدور است، تعداد این اصطلاحها (یا صرفاً نمادها[۵]) باید در حداقل ممکن باشد.

به‌طور خلاصه در یک دستگاه اصولی مفهوم را برمی‌گزینیم، اصطلاحهای تعریف نشده و احکامی را که به‌عنوان اصل پذیرفته می‌شوند، انتخاب می‌کنیم؛ سرانجام به اثبات قضایا می‌پردازیم که طبعاً در این مرحله اصطلاحهای جدید نیز به میان می‌آیند. در این‌صورت مهم این است که اصول واقع در یک سیستم با یکدیگر تناقض نداشته باشند.

در مقالهٔ **آفرینندگان ریاضیات عالی**[۶] در مورد پیرفرما چنین می‌خوانیم:

در ۱۶۰۱ متولد شد و در ۱۶۶۵ از دنیا رفت. حادثهٔ قابل ذکری در زندگی خارجی او پیش نیامد، ولی ردپاهایی که از خود در ریاضیات به جاگذاشته چنان است که حتی در زمان ما هم، برای مطالعهٔ شخصیت او، کشش زیادی وجود دارد.

فرما از ۱۴ مه ۱۶۳۱ به‌عنوان مشاور مرکز تمیز پارلمان تولوز مشغول خدمت شد و تا آخر عمر در همین شغل ماند. اما وقت آزاد خود را، با مطالعهٔ نوشته‌های ریاضی و ریاضیات سرگرم کننده و نامه‌نگاری پر می‌کرد. به خاطر استعداد بی‌نظیری که در ریاضیات داشت، به دشوارترین و مهمترین مسأله‌های ریاضی زمان خودش علاقه‌مند شد، و از آن‌جا که تنها یک دوستدار عادی ریاضی نبود و قابلیت و استعداد خلاق و ممتازی نسبت به ریاضیات از خود نشان می‌داد، است بزرگترین ریاضی‌دانان زمان او، با کمال میل با او مکاتبه می‌کردند.

در مقالهٔ **مسأله‌های قدیمی**[۷] دو مسألهٔ زیر را، که از مسأله‌های هندسی و اولی از پاپیروس ریند و دومی از پاپیروس مسکو است، می‌خوانیم:

۱. هفت نفر، هرکدام هفت گربه دارند. هر گربه می‌تواند هفت موش را بخورد، هر موش می‌تواند هفت خوشهٔ جو بجود و هر خوشه هفت جو دارد. بزرگترین عدد این رشته و مجموع آنها کدام است؟

۲. اگر مساحت و نسبت ضلعهای یک مستطیل معلوم باشد، طول ضلعهای آن را پیدا کنید.

در این شماره مقاله‌ای در شرح حال موسی نثری تحت عنوان مردی از این سرزمین با خلق و خویی از مردم این سرزمین[8] موجود است. در این مقاله مرحوم نثری معلم و شاعر و داستان‌پرداز و محقق و رمان نویس و ریاضی‌دان و سرانجام عاشق و حیران معرفی شده است.

از جمله کارهای نثری که به آن اشاره شده کتاب «قوانین نثری» در حل معادله‌های درجه سوم و طرز ساختن «بیضی‌کش» است.

به شمارهٔ دوم سال چهارم می‌رسیم. اولین مقالهٔ این شماره تحت عنوان ریاضیات را چگونه درس بدهیم[9] است. راستی ریاضیات را چگونه باید درس داد؟ هر معلم ریاضی این سؤال را بارها و بارها از خود پرسیده است و جوابهایی نیز در خور تجربه و سابقهٔ تدریس خود به آن داده است. ببینیم مقاله چه جوابی برای این سؤال دارد:

ضمن توضیح و تفسیر یک مفهوم ریاضی در کلاس، همیشه بهتر است که از زمینه‌های کاربرد آن گفتگو شود.

نتیجهٔ آموزش را، نه با کمیت آگاهیهایی که داده شده است، بلکه با کیفیت فراگیری آنها، با توانایی به کار بردن آنها، و با قدرت دانشجویان برای ادامهٔ کار به‌طور مستقل، ارزیابی می‌کنند، بهتر است کمتر ولی بهتر بدانیم.

در بین تمام موضوعهای فراوانی که در درس ریاضی وجود دارد، باید بدون تردید مقام اصلی را به آلگوریتمها و راه حلهای کلی داد.

اما تا چه حد باید به استدلالهای منطقی دقیق بها داد؟ آنها که به کاربرد ریاضیات می‌اندیشند می‌گویند تقریباً هیچ. و مهمترین دلیلشان نیز این است که تاکنون در خود ریاضیات هم (چه برسد به کاربردش) هیچ کشفی، از راه دقیق منطقی به دست نیامده است، بلکه همهٔ حکمهای تازهٔ ریاضی، بر ملاحظه‌های شهودی و بر قضاوتهای شبه واقعی و بر تخیل پیشگویی یک نتیجه‌گیری مشخص از یک حکم کلی یا مشخص دیگر بوده است.

اما معرفت شهودی تنها وقتی می‌تواند ثمربخش باشد که، نه بر زمینه‌ای تهی، بلکه بر زمینه‌ای از دانش واقعی و استوار قرار گیرد.

مجله گاه‌گاه در مقاله‌های خاصی به تحکیم دانش دانش‌آموزان در مورد مفاهیم اساسی ریاضیات دبیرستانی می‌پردازد و به این ترتیب معلومات آنان را بسط داده استوار می‌کند. مقالهٔ دربارهٔ حد[10] از این‌گونه مسائل است. یکی از مسائل این مقاله را همراه با حل آن در زیر می‌آوریم:

مسأله: برای مثلث با ضلعهای، ۵، ۱۲، ۱۳:

الف: آیا درست است که قائم الزاویه است؟

ب: آیا این حکم، از قضیهٔ فیثاغورس نتیجه می‌شود؟

حل:

الف: زاویهٔ روبه رو به ضلع ۱۳ را درنظر می‌گیریم. اگر این زاویه حاده باشد، بنا به قضیهٔ مربوط به ضلع روبه رو زاویهٔ حاده باید داشته باشیم:

$۱۳^۲ < ۱۲^۲ + ۵^۲$

اگر این زاویه منفرجه باشد، بنابر قضیهٔ ضلع روبه رو به

زاویهٔ منفرجه باید داشته باشیم:

$$۱۳^۲ > ۱۲^۲ + ۵^۲$$

ولی، هردوی این نامساویها نادرستند، زیرا:

$$۱۳^۲ = ۱۶۹ = ۱۴۴ + ۲۵ = ۱۲^۲ + ۵^۲$$

بنابراین، زاویهٔ روبه رو به ضلع ۱۳، نه حاده است نه منفرجه، یعنی قائمه است[۱۱].

ب: قضیهٔ فیثاغورس مربوط به مثلث قائم الزاویه است؛ ولی ما از قائم الزاویه بودن مثلث اطلاعی نداریم، بنابراین، نمی‌توان از قضیهٔ فیثاغورس استفاده کرد.

بعضی از دانش آموزان این طور استدلال می‌کنند: از برهان خلف استفاده می‌کنیم. اگر مثلث قائم الزاویه نباشد، در این‌صورت باید حکم فیثاغورس سازگار نباشد، و باید رابطهٔ $۱۳^۲ \neq ۱۲^۲ + ۵^۲$ برقرار باشد. ولی این رابطه درست نیست، و بنابراین، مثلث قائم الزاویه است.

ولی، در واقع استدلالی که به‌وسیلهٔ «حروف خوابیده» بیان شده است، ناشی از قضیهٔ فیثاغورس نیست، زیرا قضیهٔ فیثاغورس مربوط به مثلث قائم الزاویه است و هیچ حکمی دربارهٔ مثلثهای دیگر نمی‌کند. به این ترتیب این استدلال از قضیهٔ فیثاغورس استفاده نمی‌کند، بلکه مربوط به قضیه‌های دیگری است که دربارهٔ مثلثهای غیر قائم الزاویه وجود دارد[۱۲].

گفته شد که مجله به تاریخ ریاضیات عنایتی خاص دارد و در این راستا مقاله‌های متعددی ارائه کرده است. در یکی از این مقاله‌ها تحت عنوان **پیشرفت ریاضیات هندی در سده‌های میانه**[۱۳] چنین آمده که:

هندیها به‌خصوص در زمینهٔ حساب خیلی کار کردند. تعیین نمادهایی برای رقمهای دستگاه دهدهی عدد نویسی و به‌وجود آوردن اصل موضعی رقمها (یعنی این‌که، مقدار واحد هر رقم، بستگی به جای آن داشته باشد) به هندیها مدیون است. به جز این، در هند، برای صفر نمادی درنظر گرفتند و کاربرد گستردهٔ آن را، برای نشان دادن جای خالی رقمها، معین کردند.

معادله‌های درجه اول و درجه دوم را حل می‌کردند، و در حل مسائل حساب از روش معکوس و روش فرضی استفاده می‌بردند[۱۴].

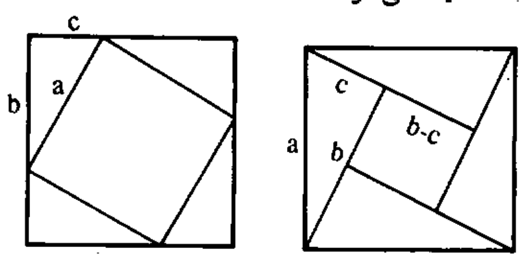
از رابطه‌هایی که به زبان امروزی به‌صورت زیر هستند[۱۵]، آگاه بودند:

$$\sqrt{a\pm b}= \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^۲-b}}{۲}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^۲-b}}{۲}}$$

$$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=\sqrt{a+b\pm ۲\sqrt{ab}}$$

مهمترین کارها را در رشتهٔ هندسه، باید به حساب براهماگوپتا گذاشت. مسأله‌های اصلی (پی) که براهماگوپتا حل کرده، چنین است: تعیین مساحت مثلث با معلوم بودن ضلع و شعاع دایرهٔ محیطی، رسم مثلثی که در آن ضلعها، شعاع دایرهٔ محیطی و مساحت با عددهای گویا بیان می‌شوند و ...

هندیها قضیهٔ فیثاغورس را هم، با روش جالبی اثبات می‌کردند. برای اثبات مثلاً دو شکل زیر را می‌کشیدند و می‌نوشتند «دیده می‌شود».



در مثلثات نیز، رابطه‌های

$$۱ - \cos ۲\alpha = ۲\sin^۲\alpha \,,\ \cos(۹۰^\circ-\alpha) = \sin\alpha$$

$$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱$$

را می‌شناختند و از رابطه‌های مربوط به سینوس مجموع و تفاضل دو کمان آگاه بودند.

از این مرحله که می‌گذریم به پنجمین سال انتشار مجله که مصادف با بهار ۱۳۶۰ است می‌رسیم و در اولین شماره و اولین مقالهٔ آن یعنی هندسه در دبیرستان[۱۶] چنین می‌خوانیم که:

معنای واقعی آموزش متوسطه و هدف آن باید این باشد که آگاهیهای لازم عملی را به آدمی بدهد، شخصیت او را تکامل بخشد، بر روابط فکری، روحی و اخلاقی او اثر مثبت بگذارد (و بخصوص، مسألهٔ موازین اخلاقی، اهمیّت فوق‌العاده دارد). بنابراین، مسألهٔ نیاز به این یا آن مادهٔ درسی و ضرورت وجود یا عدم وجود آن، می‌تواند تنها در قالب مسألهٔ نیازهای عملی جامعه و اهمیّتی که این مطالب در تکامل شخصیت انسان دارد، مورد بررسی قرار گیرد.

ویژگی هندسه در این است که در آن استدلال دقیق و منطقی با درک عینی مطلب همراه است. و اساساً، ماهیت هندسه در همین است که تصور زنده، را با منطق دقیق به هم پیوند می‌دهد و این هر دو یکدیگر را تنظیم و توجیه می‌کنند.

تصور، امکان مشاهدهٔ مستقیم موضوع هندسه را به دست می‌دهد و منطق بیان و استدلال آن را پیش‌بینی می‌کند. منطق هم به نوبهٔ خود تصور را دقیقتر می‌کند. این وضع، بی‌شک در مورد همهٔ موارد هندسهٔ سه بعدی اقلیدسی صادق است. ولی حتی در مورد سرچشمه و مبانی درونی هندسهٔ نااقلیدسی و هندسهٔ چندبعدی هم، تصور عینی، ولو به صورت تعمیم یافتهٔ آن وجود دارد.

تصور زنده بیشتر نزدیک به هنر است، در حالی‌که منطق خشک و دقیق امتیاز دانش است. می‌توان گفت که آنها به کلی در تضاد با یکدیگرند، با وجود این، هندسه آنها را به هم پیوند داده است. و مسأله آموزش همین است که آنها را در یک مادهٔ درسی، آشتی دهد.

در درس هندسه، دو جنبهٔ متضاد دیگر هم وجود دارد که با هم جمع شده‌اند: هندسهٔ انتزاعی و مجرد ریاضی، و هندسهٔ عملی، یعنی، بستگیهای واقعی فضایی و ویژگیهای جسمها. حکمهای هندسه برای وجودهای ایده آلی بیان و اثبات می‌شوند. در حالی‌که با آنها چنان برخورد می‌شود که گویا دربارهٔ وجودهایی هستند که به‌طور عینی قابل تصورند و می‌توانند در مورد چیزهای واقعی به کار روند.

تمامی انتزاعهای هندسی ریشه‌ای در عمل دارند و بعد هم در عمل به کار می‌روند. به این ترتیب در آموزش هندسه باید سه عنصر مربوط به هم، و در عین حال متضاد با هم، وارد شود: منطق، تصور عینی، کاربرد دنیای واقع.

ماشین محصولی از هندسه است. در مکانیک و فیزیک هم تصورهای هندسی نقشی اساسی دارند، دست کم به این علت که حرکت روندی است که در فضا اتفاق می‌افتد.

اهمیت تصورهای فضایی درهنرهای تجسمی و در معماری چنان روشن است که نیازی به گفتگو ندارد. تصورهای فضایی و شهود هندسی در خود ریاضیات (غیر از هندسه) هم نقشی اساسی به‌عهده دارد. آنالیز ریاضی که کار خود را با محور عددی و رسم منحنی و غیر آن آغاز می‌کند بدون شکلهای هندسی بی‌معنی می‌شود.

اما در مورد دقت هندسه، با توجه به این‌که دقت مطلق نه معنی دارد نه وجود دارد، مسألهٔ آموزش مربوط به این می‌شود که سطحی از دقت را بپذیریم و بیان خود را بر مبنای آن قرار دهیم.

نکتهٔ عمیق و پراهمیّتی که در درس هندسه نهفته است به تربیت جهان‌بینی علمی مربوط می‌شود. در درس هندسه است که می‌توان دانش‌آموز را واداشت تا به حقیقت حرمت بگذارد و ضمناً بپذیرد که «حقایق مشهود» نیاز به اثبات دارند و اعتبار پیشین آنها، تا زمانی که ثابت نشده‌اند، می‌تواند مورد تردید

قرار گیرد.

در احترام به حقیقت و درخواست اثبات، نکته‌های اخلاقی بسیار مهمی وجود دارد. ساده‌ترین، ولی نه کم اهمیت‌ترین آنها، این است که بدون استدلال قضاوت نکنیم و در جایی که نیاز به ارائهٔ حقایق و مدارک است، به احساسها و تأثرها و تهمتها تسلیم نشویم.

به‌طور کلی، آن توانایی و مهارتی که باید دانش‌آموزان در درس هندسه به‌دست آوردند، در قسمت عمده و قریب به اتفاق خود عبارت است از مهارت ترکیب تصور عینی با منطق.

در مقالهٔ **تلاشی برای تنظیم فرهنگ ریاضی**[17] در مورد آلگوریتم چنین آمده است که:

آلگوریتم، یکی از اساسی‌ترین مفهومهای ریاضیات است که با کمک مفهومهای ساده‌تر از خودش تعریف رسمی ندارد. به‌طور کلی، آلگوریتم به هر دستور دقیق و روشنی گفته می‌شود که یک روند محاسبه‌ای را (که در این حالت، روند آلگوریتمی نامیده می‌شود)، بر مبنای داده‌های اوّلیّه، در پی داشته باشد (و البته این داده‌های اوّلیّه، باید برای آلگوریتم مورد نظر، ممکن باشد)، و سپس ما را به نتیجهٔ کاملاً معینی برساند. دراین مورد، محتوی هر دستور، به جز دستورالعملی که برای مشخص کردن روند لگاریتمی به همراه دارد، باید دارای این ویژگیها هم باشد: ۱) مجموعهٔ ممکن را برای داده‌های اوّلیّه نشان دهد و ۲) شامل قانونی باشد که بنابرآن، روند کار، به‌صورت به‌دست آوردن نتیجه، به پایان برسد.

مفهوم آلگوریتم، در ریاضیات معاصر، و بخصوص ریاضیات محاسبه‌ای، اهمیّت زیادی دارد. در هر گامی از دانشها، به این مطلب برخورد می‌کنیم که بتوانیم مسأله‌ای را به‌صورت کلی خود حل کنیم و این در واقع، به معنای آن است که از یک آلگوریتم آگاهی داشته باشیم. وقتی که مثلاً دربارهٔ امکان جمع کردن عددها گفت‌و گو شود، تنها به معنای این نیست که قدرت جمع کردن هر دو عددی را داشته باشیم، بلکه، ضمناً به‌معنای این است که برای جمع عددهای مشخص، قاعدهٔ کلی و معینی هم وجود دارد که آن‌را آلگوریتم جمع می‌گوییم (نمونهٔ این آلگوریتم عبارت است از قاعدهٔ معلوم جمع ستونی عددها).

کلمهٔ آلگوریتم، از تحریف نام ریاضی‌دان بزرگ سدهٔ نهم میلادی خوارزم، محمدبن موسی خوارزمی گرفته شده است.

امروز عدم وجود آلگوریتم برای حل تعداد زیادی از مسأله‌های ریاضی ثابت شده است. کشف آلگوریتمهای مختلف، اثبات عدم وجود آلگوریتم برای یک رشته از مسأله‌ها، و تنظیم نظریه‌های کلی در مورد آلگوریتم، بخصوص با پیشرفت و تکامل شگفت‌آور ماشینهای محاسبه بستگی دارد، به‌نحوی که این امکان به‌دست آمده است که تقریباً هر آلگوریتمی را با ساختمان ماشینهای محاسبه تطبیق دهند.

در مقالهٔ **گردآوری و ارائهٔ اطلاعات**[18] که خود فصلی از کتاب **سیبرنتیک از الف تا یا**[19] است تحت عنوان **چگونه می‌توان سوزن گمشده‌ای را در جنگل یافت؟** چنین آمده که:

درحال حاضر مشکل اساسی این است که چگونه تمام معلومات بشری را ذخیره و تجزیه و تحلیل کنیم و نیز این که چطور بتوانیم امکان فراخواندن و انتقال‌شان را فراهم آوریم.

در سال ۱۸۰۰ یک‌صد نشریهٔ علمی در دنیا وجود داشت. در سال ۱۹۵۰ این رقم به ۱۰۰۰۰۰ رسید و امروز از مرز ۲۰۰۰۰۰ نیز می‌گذرد. دراین‌صورت چگونه می‌توان این همه مطلب را خواند و از آن مهمتر هضم کرد.

یکی از راه‌های برخورد با این مشکل وارسی نشریه‌ها و انتخاب و خلاصه کردن مقاله‌ها است. اما با این روش نه‌تنها ممکن است که بعضی از مطالب مهم از قلم بیفتد و از آن مهمتر

جان کلام از دست برود این امکان نیز وجود دارد که کل مطلب ازنظر پنهان بماند. به‌عنوان مثال، در سال ۱۹۵۳ از نشریه‌های صنعتی آمریکا مطلبی در مورد روش به کار گرفتن روکشهای قابل تعویض برای لاستیک چرخ اتومبیل به چاپ رسید. در سال ۱۹۵۹ کارشناسان شوروی به این مقاله برخوردند و دو هفته بعد کارخانهٔ «یاروسلاول» به تولید این‌گونه روکشهای قابل تعویض پرداخت. این کار در عین سادگی ازنظر اقتصادی نیز مقرون به صرفه بود و به این ترتیب ۶ سال تأخیر امکانات اقتصادی زیادی را به هدر داد.

اما بهترین راه ارائهٔ یک گزارش علمی چیست؟

اولاً گزارش باید خلاصه باشد. به‌همین منظور بهتر است متن اصلی اختیار شود و از توضیح و تفسیر مفصل صرف‌نظر گردد. از طرف دیگر گزارش نباید بیش از حد خلاصه شود زیرا در هر گزارش اطلاعاتی هست که نمی‌توان آنها را خلاصه کرد (مثل فرمولها، تاریخها، نامهای جغرافیایی و نامهای محققین).

نکتهٔ آخر این‌که در عصر گسترش علوم مختلطی چون زبانشناسی ریاضی، بیونیک، شیمی فضایی و غیره، دانشمندان یک رشته ـ هرچند هم که کارشان تخصصی باشد ـ نمی‌توانند از نتایج آثار و تحقیقات دانشمندان سایر رشته‌ها بی‌نیاز باشند.

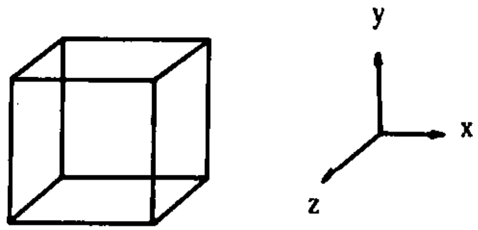
مجله به رویدادهای ریاضی معاصر نیز بی‌توجه نیست و مثلاً مقاله‌ای در مورد **دوازدهمین کنفرانس ریاضی کشور**[۲۰] که از ۸ - ۱۱ فروردین ۶۰ در دانشگاه صنعتی اصفهان تشکیل شده، دارد و در آن خلاصه‌وار به شرح وقایع کنفرانس می‌پردازد.

مقالهٔ مسألهٔ ریاضی را چگونه حل می‌کنیم[۲۱]: یکی از راه‌های انجام این کار را تغییر شکل شرطهای مسأله و بیان همهٔ آنها به یک نوع اصطلاح، مثلاً زاویه، می‌داند. راه دوم استفاده از «اصل صرف کردن» است. این اصل به این‌صورت است که در میان انواع شکلهای مختلفی که یک مطلب می‌تواند داشته باشد شکل صحیح آن را انتخاب کنیم. اصل سوم رسیدن از «جزئی به کلی» است، به این ترتیب که هر مسأله را به اجزای خود تجزیه می‌کنیم، مجموعه‌ای از اجزای آن را انتخاب می‌کنیم و آن را به کمک اجزای لازم دیگر، به‌صورت مجموعهٔ کاملی در می‌آوریم.

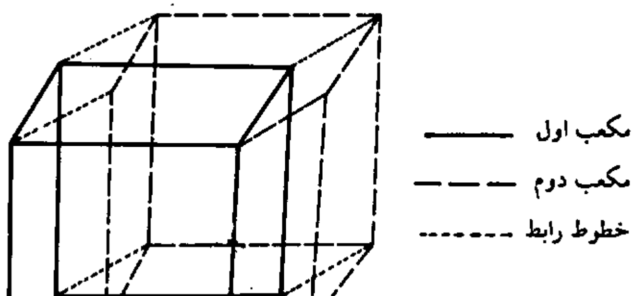
در مقالهٔ بررسی و شمارش عناصر نخستین در فضای n بعدی[۲۲] به قواعدی برخورد می‌کنیم که شخص را با مفهوم فضای بیشتر از سه بعدی، آشنا می‌کند، و دراین مسیر سعی مقاله بر این است که خصوصیاتی را که با تغییر بعد فضا ثابت می‌مانند، به‌عنوان تکیه‌گاههایی یافته و از آن برای استقرای ریاضی در مورد فضای بیشتر از سه بعد استفاده کند، و در این مورد به فضای چهاربعدی توجه می‌دارد و مطلب زیر را عنوان می‌کند:

در بررسی مسائل و قضایای هندسهٔ فضایی چون در عمل ناگزیر به استفاده از کاغذ هستیم که بیش از دو بعد ندارد به اشکال جدیدی برخورد می‌کنیم که هنگام مطالعهٔ هندسهٔ مسطحه ابداً با آن مواجه نیستیم. این موضوع بخصوص در آغاز آشنایی با هندسهٔ فضایی برای دانش‌آموزان سر در گمیهایی به‌وجود می‌آورد.

عملاً برای آن‌که بتوان مسائل اشکال هندسهٔ سه‌بعدی را روی کاغذ پیاده کرد براساس روش تصویری «پرسپکتیو» دو بعد را با ابعاد دوگانهٔ کاغذ تأمین می‌کنند و بعد سوم را که در واقع می‌بایست عمود بر صفحهٔ کاغذ باشد با امتداد مایل روی صفحهٔ ترسیم نشان می‌دهند. همهٔ ما با نمایش مکعب به‌صورتی که در شکل زیر نشان داده شده است آشنا هستیم و در حل مسائل هرجا که لازم باشد خطی به موازات بعد سوم رسم شود روی صفحهٔ ترسیم آن را به موازات محور مایل z می‌کشیم. با نگاه کردن به تصویر فوق از مکعب می‌توانیم حالت اصلی آن را که سه‌بعدی است تجسم کنیم.



بــا استفــاده از شکــل فــوق، مــوجودات دو بــعدی (موجوداتی فـرضی کـه هـمچون سـایه فـاقد حـجم بـاشند) درصورت داشتن ذهن ریاضی پرورش یافته می‌توانند مسائل مربوط به مکعب را در جهان صفحه‌ای خودشان حل کنند. پس ما هم که موجودات سه‌بعدی هستیم باید بتوانیم با استفاده از چنین تبدیلی مسائل مربوط به مکعب چهار بعدی را درجهان سه‌بعدی خودمان حل کنیم. همان‌طور که انسانهای چهاربعدی آن مسائل را روی کاغذهای سه‌بعدی دفتر هندسه‌شان حل می‌کنند! برای این کار اول یک مکعب می‌سازیم که اضلاعش از مفتول باشد، سپس مکعب دیگری همانند مکعب اوّلیّه ساخته آن‌را نسبت به مکعب اوّلیّه در موقعیتی قرار می‌دهیم کـه اولاً: هـمهٔ اضـلاع نظیرش با مکعب اوّلیّه موازی باشد، ثانیاً: مرکز این مکعب نسبت به مرکز مکعب اوّلیّه (یا هر رأس این مکعب نـسبت بـه رأس نظیرش در مکعب اوّلیّه) تغییر مکانی محدود و در امتدادی مایل نسبت به سه بعد اصلی داشته باشد. حال اگر با مفتولهای مستقیم دیگری رئوس نظیر این دو مکعب را به هم وصل کنیم، تصویری از مکعب چهاربعدی در فضای سه بعدی بـه‌دست آورده‌ایـم و



می‌توانیم مسائل مربوط بـه مکـعب چهـاربعدی را در فضـای سه‌بعدی حل کنیم.

تصویر دوبعدی هم می‌توان از مکعب چهاربعدی رسم کرد که در این جا ناچار به گنجاندن دو بعد اضافی در صفحه هستیم که به‌صورت دو امتداد مایل متفاوت ظاهر می‌شود.

این کار را می‌توان روی صفحه برای مکعبهـای ابعـاد بالاتر هم ادامه داد ولی شکل حاصل بسیار پیچیده و شلوغ خواهد شد.

یکی از خصوصیات عمده‌ای که در تصویر دوبعدی از مکعب محفوظ می‌ماند عدهٔ رئوس و اضلاع و وجوه است. این خاصیت در تصویر دوبعدی از مکعب چهار بعدی (شکل فوق) نیز محفوظ مانده است.

با دقت و تعمق در تصویر دوبعدی از مکعب چهاربعدی می‌توانیم دریابیم که مکعب چهاربعدی ۳۲ یال و ۸ مکـعب سه‌بعدی دارد.

در مسیر بررسی مقاله‌های مجلهٔ آشتی با ریاضیات می‌رسیم به مقالهٔ بحثی در زمینهٔ عددهای طبیعی[۲۳] و در آن می‌خوانیم که:

پاسخ به این سؤال که «عدد طبیعی چیست؟» «مانند این‌که ریاضی چیست؟» مطلبی است غیر ریاضی، لذا به زعم عده‌ای هیچ ریاضی‌دانی ملزم به پاسخ دادن به چنین سؤالهایی نیست، اما عدم وجود پاسخی روشن، و نه قاطع، برای چنین سؤالهایی از یک طرف و انتزاعی بودن خود ریاضیات از طرف دیگر، منجر به پیدا شدن نظریه‌هایی از این قبیل که: «گویا ریاضیات از تفکر خالص به‌وجود آمده» یا این طرز فکر عامیانه که «گویا ریاضیات مشکل و دست نیافتنی است» شده است، و نتیجهٔ این وضع این است که شاخه‌های مختلف ریاضی، که مانند چشمه‌های جوشانی تمام رشته‌های فنون و علوم مختلف را به فراخور حالشان سیراب می‌کنند، و خود نیز زادهٔ زندگی می‌باشند، به‌عنوان موجوداتی

ترسناک و وحشت‌انگیز جلوه‌گر شده، مآلاً ریاضیات را در هاله‌ای از ابهام فرو می‌برد. به این ترتیب، کوششی که در راه بازشناسی تکوین عددهای طبیعی خواهیم داشت، کوششی در راه محو کردن این هاله از پیرامون ریاضیات و نشان‌دادن جوهر زندگی ریاضی خواهد بود.

با هر آشنایی می‌توان سه خاصیّت زیر از عددهای طبیعی را ذکر کرد:

(۱) انتزاعی بودن عددهای طبیعی.

(۲) بی‌نام بودن قسمت اعظم عددهای طبیعی.

(۳) سهلتر بودن استفاده از علائم «نوشتاری» ـ نسبت به علائم گفتاری ـ ذکر عددهای طبیعی.

اینکه یک عدد طبیعی موجودی انتزاعی است، مطلبی واضح است، زیرا هیچ موجود طبیعی(ای) که مثلاً (۵۳) برای اشاره به آن به‌کار رود وجود ندارد. نتیجه این‌که عددها محصول طبیعت نمی‌باشند و محصول ذهن می‌باشند. بی‌نام بودن قسمت اعظم عددها واضح است، اما از (۲) نتیجه می‌شود که عددهای طبیعی همگی با هم متولد نشده‌اند. (۳) نیز واضح است.

به هر حال هر نظریّه‌ای که راجع به تکوین عددهای طبیعی بیان شود باید قادر به توجیه سه خاصیت بالا باشد.

یادداشتها

۱ ـ شرح این هجران و این خون جگر را می‌توان در مقالهٔ سردبیر همین شمارهٔ مجله، یعنی سال چهارم شمارهٔ ۱ (یا شمارهٔ مسلسل ۱۴) خواند.

۲ ـ مجلهٔ آشتی با ریاضیات، سال چهارم شمارهٔ ۱، صفحهٔ ۴، ترجمهٔ پرویز شهریاری.

۳ ـ همان مرجع، سال چهارم شمارهٔ ۱، صفحهٔ ۲۲، علی‌رضا امیرمعز.

۴ ـ همان مرجع، سال چهارم شمارهٔ ۱، صفحهٔ ۳۰، ترجمهٔ محمد باقری.

۵ ـ Symbols

۶ ـ همان مرجع، سال چهارم شمارهٔ ۱، صفحهٔ ۶۴، ترجمهٔ پرویز شهریاری.

۷ ـ همان مرجع، سال چهارم شمارهٔ ۱، صفحهٔ ۸۶.

۸ ـ همان مرجع، سال چهارم شمارهٔ ۱، صفحهٔ ۹۰.

۹ ـ همان مرجع سال چهارم شمارهٔ ۲، صفحهٔ ۱، ترجمهٔ پرویز شهریاری.

۱۰ ـ همان مرجع، سال چهارم شمارهٔ ۲، صفحهٔ ۴۳، ترجمهٔ پرویز شهریاری.

۱۱ ـ چون عکس قضیهٔ فیثاغورس، یعنی، این‌که، مثلثی به اضلاع a، b، c (با a>b، a>c) که در آن رابطهٔ $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار است قائم‌الزاویه می‌باشد، اثبات شده است، بنابراین می‌توان از این مطلب نیز در اثبات مسأله استفاده کرد.

۱۲ ـ به شمارهٔ قبل رجوع کنید.

۱۳ ـ همان مرجع، سال چهارم شمارهٔ ۳، صفحهٔ ۳۵، ترجمهٔ پرویز شهریاری.

۱۴ ـ هردوی این روشها در خلاصة الحساب شیخ بهایی آمده است.

۱۵ ـ رابطهٔ اول فرمول رادیکال مرکب و رابطهٔ دوم اتحادهای به اصطلاح «اول و دوم» است.

۱۶ ـ همان مرجع، سال پنجم شمارهٔ ۱، صفحهٔ ۱، ترجمهٔ پرویز شهریاری.

۱۷ ـ همان مرجع، سال پنجم شمارهٔ ۱، صفحهٔ ۴۸، ترجمهٔ پرویز شهریاری.

۱۸ ـ همان مرجع، سال پنجم شمارهٔ ۱، صفحهٔ ۵۸، ترجمهٔ محمد باقری.

۱۹ ـ Cybernetics A Toz

۲۰ ـ همان مرجع، سال پنجم شمارهٔ ۱، صفحهٔ ۱۰۵، محمدحسین احمدی.

۲۱ ـ همان مرجع، سال پنجم شمارهٔ ۲، صفحهٔ ۱، ترجمهٔ پرویز شهریاری.

۲۲ ـ همان مرجع، سال پنجم شمارهٔ ۲، صفحهٔ ۱۵، محمد باقری.

۲۳ ـ همان مرجع، سال پنجم شمارهٔ ۲، صفحهٔ ۲۸.

***

ادب و ریاضی

سه اصل سنتی این همانی، نفی ثالث و تضاد به ترتیب عبارت‌اند از:

(*i*) هر شئ عین خودش است.

(*ii*) هر شئ یا هست یا نیست.

(*iii*) یک شئ نمی‌تواند در عین حال وجود داشته باشد، و وجود نداشته باشد.

سرگذشت آنالیز ریاضی

آندره دولاشه، پرویز شهریاری

فاصله یک نقطه از یک مجموعه نقاط

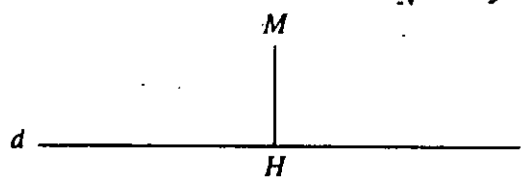
دکتر احمد شرف‌الدین

تعریف فاصله یک نقطه از یک مجموعه نقاط

نقطهٔ M و مجموعه نقاط E را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم که N نقطه‌ای از مجموعه E باشد به طوری که فاصله‌اش از نقطه M کمترین مقدار ممکن را دارا باشد. در این صورت فاصله نقطه M از نقطه N را فاصله نقطه M از مجموعه نقاط E می‌نامیم.

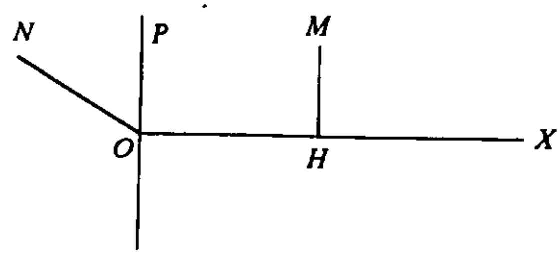
اکنون تعریف یاد شده در بالا را برای حل مسائل زیر به کار می‌گیریم.

مسئله ۱. در صفحه π خط d و نقطه M مفروض است. فاصله نقطه M از خط d چیست؟



از نقطه M عمود MH را بر خط d فرود می‌آوریم. طول پاره‌خط MH، فاصله نقطه M از خط d است.

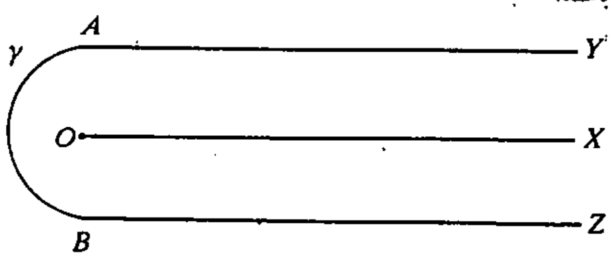
مسئله ۲. در صفحه π، نیم‌خط OX و نقطه M مفروض‌اند. فاصله نقطه M از نیم‌خط OX چیست؟



در صفحه π، خط OP را بر نیم‌خط OX عمود می‌کنیم. خط OP صفحه π را به دو بخش تقسیم می‌کند. یکی بخش I که شامل نیم‌خط OX است و دیگری بخش Π که شامل هیچ نقطه از بخش I نیست.

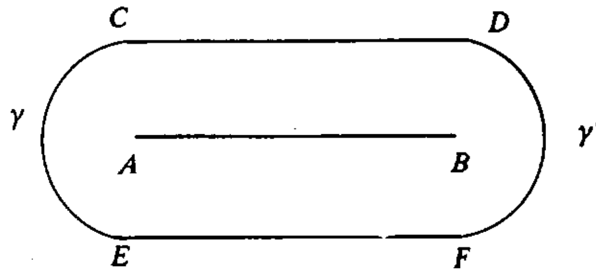
اگر نقطه M متعلق به بخش I باشد، فاصله آن از نیم‌خط OX عبارت است از طول عمود MH که از نقطه M بر خط OX فرود آید. اگر نقطه N متعلق به بخش Π باشد فاصله آن از نیم‌خط OX عبارت است از طول پاره‌خط ON.

مسئله ۳. در صفحه π، نیمخط OX را در نظر می‌گیریم. مطلوب است مکان هندسی نقاطی از صفحه π که از نیم‌خط OX به فاصله L باشند.



از نقطه O خط AB را در صفحه π، بر نیم‌خط OX عمود می‌کنیم. بر روی خط AB دو نقطه A و B را در دو طرف نقطه O به فاصله L از نقطه O اختیار می‌کنیم. دو نیم‌خط AY و BZ را موازی و همسو با نیمخط OX اختیار می‌کنیم. نیم دایره γ به قطر AB که نیم‌خط OX را قطع نمی‌کند رسم می کنیم. شکل حاصل از اجتماع دو نیم‌خط AY و BZ و نیم دایره γ مکان هندسی مطلوب است.

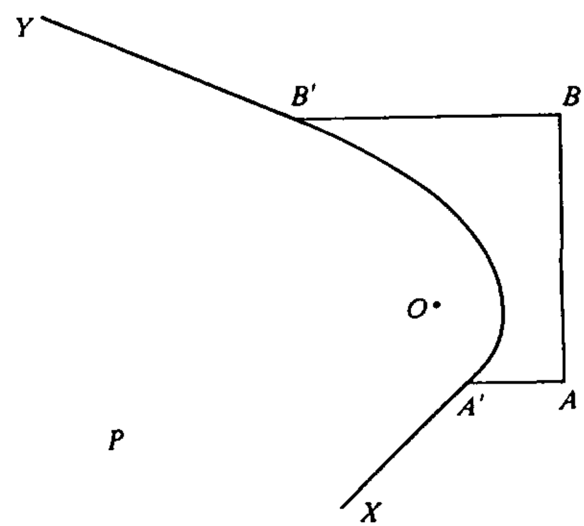
مسئله ۴. در صفحه π، پاره خط AB را در نظر می‌گیریم. مطلوب است مکان هندسی نقاطی از صفحه π که از پاره خط AB به فاصله L باشند.



در صفحه π، از نقطه A خط CE را برخط AB عمود می‌کنیم. بر روی خط CE دو نقطه C و E را در دو طرف نقطه A به فاصله L اختیار می‌کنیم. دو بردار $\vec{CD}$ و $\vec{EF}$ را همسنگ بردار $\vec{AB}$ رسم می‌کنیم. دو نیم دایره γ و γ' را با قطرهای CE و DF در خارج مستطیل $CDEF$ رسم می‌کنیم. شکل حاصل از دو پاره خط CD و EF و دو نیم‌دایره γ و γ' مکان هندسی مطلوب است.

مسئله ۵. در صفحه π، پاره خط AB و نقطه O غیر واقع بر خط AB مفروض‌اند. مطلوب است مکان هندسی نقاطی از صفحه π که از نقطه O و پاره خط AB به یک فاصله‌اند.

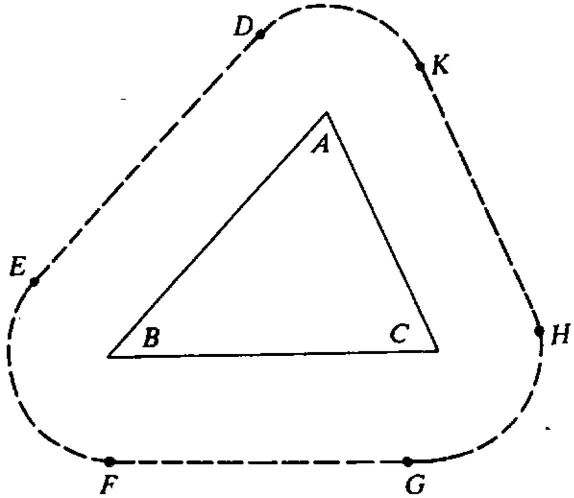
حل. در صفحه π، سهمی P را با کانون O و خط هادی AB رسم می کنیم. نقاط برخورد سهمی P را با دو خط AA' و BB' که بر خط AB عمود می‌شوند به ترتیب A' و B' می‌نامیم. دو نیم خط $A'X$ و $B'Y$ را به ترتیب بر دو پاره خط OA و OB عمود می‌کنیم. جهت این دو نیم خط را طوری اختیار می‌کنیم که هیچ نقطه از این دو نیم خط در داخل نواری از صفحه π که محدود به دو خط نواری AA' و BB' است نباشد. (دو نیم خط $A'X$ و $B'Y$ به ترتیب بر عمود منصفهای دو پاره خط OA و OB قرار دارند.)



مکان هندسی مطلوب عبارت است از شکل حاصل از اجتماع کمان $A'B'$ از سهمی P و دو نیم خط $A'X$ و $B'Y$.

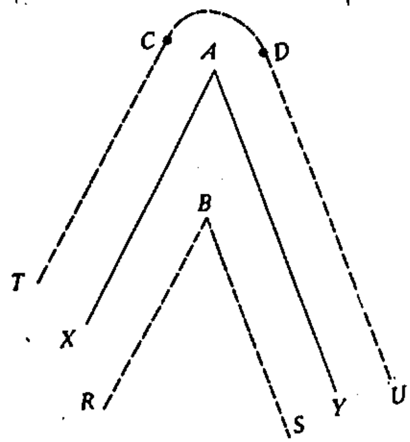
مسئلهٔ ۶. جزیره‌ای به شکل مثلث ABC در دریا در نظر می‌گیریم. مطلوب است مکان هندسی نقاطی از دریا که از جزیره مفروض به فاصله L باشند (L طولی است معلوم مثلاً ۶ کیلومتر). به عبارت دیگر منظور تعیین حریم جزیره تا فاصله ۶ کیلومتر است.

حل. مکان هندسی مطلوب به‌طور خط‌چین رسم شده است. این مکان متشکل از سه پاره‌خط DE ، FG و HK و سه کمان KD ، EF و GH است به‌طوری که سه چهارضلعی $BADE$ ، $BFGC$ و $CHKA$ مستطیل‌اند و سه کمان مذکور سه کمان از سه دایره‌اند که هرسه به شعاع Lاند و مرکزهای آنها به‌ترتیب نقاط A , B , C می‌باشند.



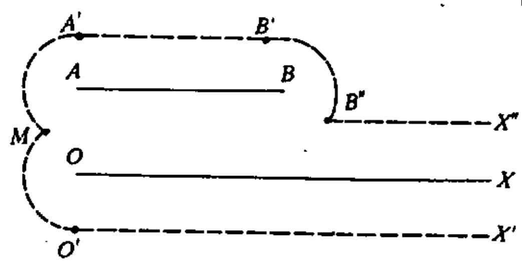
مسئلهٔ ۷. در صفحه P شکل F متشکل از دو نیم‌خط AX ، AY را درنظر می‌گیریم. مطلوب است مکان هندسی نقاطی از صفحه P که از شکل F به فاصله L قرار دارند.

حل. مکان هندسی مطلوب به‌طور خط‌چین رسم شده است. مکان هندسی مطلوب از چهار نیم‌خط BR ، BS ، CT و DU و کمان CD تشکیل شده است. دو نیم‌خط BR ، BS در داخل زاویه XAY اند. و به ترتیب موازی و همسو با نیم‌خط AX و AY اند. نیم‌خط BR به فاصله L از خط AX و نیم‌خط BS به فاصله L از خط BY رسم شده است.



نیم‌خط CT موازی و همسو با نیم‌خط AX رسم شده است و به فاصله L از آن قرار دارد. نیم‌خط DU موازی و همسو با نیم‌خط AY رسم شده است و به فاصله L از آن قرار دارد. کمان CD کمانی است از دایره γ به مرکز A و شعاع L. دو نیم‌خط CT و DU به‌ترتیب در دو نقطه C و D بر دایره γ مماس‌اند.

مسئلهٔ ۸. در صفحه P ، نیم‌خط OX را درنظر می‌گیریم. از نقطه O عمودی در صفحه P، بر خط OX رسم می‌کنیم و بر آن نقطه A را به فاصله معلوم d از نقطه O اختیار می‌کنیم و سپس پاره‌خط AB را موازی با خط OX رسم می‌کنیم به‌طوری که جهت بردار AB با جهت نیم‌خط OX یکی باشد. اجتماع نیم‌خط OX و پاره‌خط AB را



شکل F می‌نامیم. مطلوب است مکان هندسی نقاطی از صفحه P که از شکل F به فاصله L باشند با فرض آن که $d > L > \frac{d}{۲}$.

حل. مکان هندسی مطلوب به‌صورت خط‌چین رسم شده است. این مکان متشکل است از دو نیم‌خط $O'X'$ و $B''X''$ و پاره‌خط $A'B'$ و سه کمان $O'M$ ، MA' و $B'B''$.

نیم‌خط $O'X'$ موازی و همسو با نیم‌خط OX است و به فاصله L از آن قرار دارد و بعلاوه خط OO' بر خط OX عمود است. بردار $\overrightarrow{A'B'}$ همسنگ بردار $\overrightarrow{AB}$ رسم شده است. کمان $O'M$ کمانی است از دایره به مرکز O و شعاع L. کمان MA' کمانی است از دایره‌ای به مرکز A و شعاع L. کمان $B'B''$ کمانی است از دایره به مرکز B و شعاع L. نیم‌خط $B''X''$ موازی و همسو با نیم‌خط OX و به فاصله L از آن رسم شده است.

یک تذکر دربارهٔ عبارت «شرط لازم و کافی»

در اغلب کتابهای ریاضی عبارت «شرط لازم و کافی» به‌کار می‌برند. در بعضی کتابهای ریاضی عبارت «یک شرط لازم و کافی» به‌کار می برند. عبارت دوم مناسبتر است و شایسته است آن را به کار بریم. در سطور زیر در این باره توضیح می‌دهیم.

برای آن‌که یک خاصیت ریاضی برقرار باشد ممکن است شرطهای لازم و کافی متعددی موجود باشد. به قضیه‌های زیر توجه کنید.

۱. قضیه. شرط لازم و کافی برای آن که مثلثی قائم‌الزاویه باشد آن است که مجموع مربعات دو ضلع آن مثلث مساوی مربع ضلع سوم باشد.

۲. قضیه. شرط لازم و کافی برای آن که مثلثی قائم‌الزاویه باشد آن است که حاصل ضرب دو ضلع مساوی با حاصل ضرب ضلع سوم در ارتفاع مربوط باشد.

۳. قضیه. شرط لازم و کافی برای آن که مثلثی قائم‌الزاویه باشد آن است که طول یکی از میانه‌ها نصف طول ضلع مربوط باشد. ملاحظه می‌شود برای آن که مثلثی قائم‌الزاویه باشد شرطهای لازم و کافی متعددی وجود دارد. بنابراین مناسبتر آن است که قضایای مذکور با عبارت «یک شرط لازم و کافی» بیان شوند. اینچنین

۱. قضیه. یک شرط لازم و کافی برای آن که مثلثی قائم‌الزاویه باشد آن است که مجموع مربعات دو ضلع آن مثلث مساوی مربع ضلع سوم باشد. و همین طور درباره احکام دیگر.

مفهومهای اصلی و اصل موضوعها در هندسه فضایی (۲)

● پرویز شهریاری

۵. خطهای راست متنافر. معیار متنافر بودن خطهای راست

تااین‌جامی‌دانیم، دوخط راست می‌توانند درفضا متقاطع یا متوازی باشند. ولی برای دو خط راست در فضا، ممکن است حالت دیگری هم وجود داشته باشد. برای تصور عینی این گونه خطهای راست، می‌توان مکعب مستطیل $ABCD\,A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ را در نظر گرفت (معمولاً هر اطاقی، به شکل مکعب مستطیل است). در این مکعب مستطیل، خطهای راست AB و A_1D_1، نه متقاطع‌اند و نه متوازی.

تعریف. دو خط راست را متنافر گویند، وقتی که متقاطع یا متوازی نباشند.

دو خط راست متنافر را با نماد $\overset{\circ}{-}$ نشان می‌دهند.

قضیهٔ ۱ (معیار شناسایی دو خط راست متنافر). **اگر یکی از دو خط راست بر صفحه‌ای واقع باشد و خط راست دوم، صفحه را در نقطه‌ای که روی خط راست اول نیست، قطع کند، آن وقت این دو خط راست متنافرند.**

شرط: $a \subset \alpha$، $b \cap \alpha = M$ و $M \notin a$.

حکم: $a \overset{\circ}{-} b$.

اثبات. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید خطهای راست a و b متقاطع یا متوازی باشند. در این صورت، هر دوی آنها، بر صفحه‌ای مثل β قرار دارند. صفحه‌های α و β برهم منطبق‌اند، زیرا هر دوی آنها، از خط راست a و نقطهٔ M، که متعلق به a نیست، می‌گذرند. ولی β، از خط راست B که متعلق به α نیست، می‌گذرد یعنی β نمی‌تواند بر α منطبق باشد. تناقض حاصل، درستی حکم قضیه را ثابت می‌کند.

به کمک این معیار، اغلب می‌توان به سادگی و از روی شکل، خطهای راست متنافر را تشخیص داد. مثلاً، در چهار وجهی $ABCD$ (شکل ۱) یالهای AC و BD روی خطهای راست متنافر قرار دارند، زیرا $(AC) \subset (ABC)$، در ضمن BC صفحهٔ (ABC) را در نقطهٔ B، که متعلق به (AC) نیست، قطع می‌کند، توجه کنید: **از دو خط راست متنافر، نمی‌توان صفحه‌ای عبور داد.**

پرسشها و مسأله‌ها

۳۴. ۱) روی مکعب، چند زوج یال نشان دهید که روی خطهای راست متنافر باشند؛ ۲) روی جسمهایی که در کلاس درس می‌بینید، نمونه‌هایی از خطهای راست متناضر را پیدا کنید.

۳۵. هرم $SABCD$ در شکل ۲ را در نظر بگیرید. ۱) ثابت کنید، خط راست SA با خطهای راست BC و CD متنافر است؛ ۲) روی همان شکل، خطهای راستی را نشان دهید که با خط راست AD متنافر باشند.

۳۶. در یک چهاروجهی چند زوج یال وجود دارد که، روی خطهای راست متنافر قرار دارند؟

۳۷. ۱) یک خط راست و نقطه‌ای در بیرون آن مفروض است. ثابت کنید، می‌توان از این نقطه، خط راستی متنافر با خط راست مفروض رسم کرد؛ ۲) از این نقطه، چند خط راست، متنافر با خط راست مفروض، می‌توان رسم کرد؟

۳۸. دو خط راست متنافر a و b، نقطه‌های A_1 و A_2 واقع بر a، نقطه‌های B_1 و B_2 واقع بر b، داده شده‌اند. ثابت کنید: ۱) خطهای

راست A_1B_1 و A_2B_2؛ ۲) خطهای راست A_1B_2 و A_2B_1 نسبت به هم متنافرند.

۳۹. نقطه‌های A و B روی خط راست m قرار دارند. از نقطه‌های A و B، عمودهای a و b را بر m رسم کرده‌ایم خطهای راست a و b، چه وضعی نسبت به هم می‌توانند داشته باشند؟

۴۰. خطهای راست متنافر a و b و، همچنین خطهای راست $a \parallel a_1$ و $b \parallel b_1$ داده شده‌اند. خطهای راست a_1 و b_1 نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۴۱. یک صفحه، یک خط راست و نقطه‌ای در بیرون این خط راست، داده شده‌اند. آیا می‌توان خط راستی پیدا کرد که از نقطهٔ مفروض بگذرد، صفحهٔ مفروض را قطع کند و با خط راست مفروض متنافر باشد؟

۶. خط راست موازی با صفحه. معیار شناسایی موازی بودن خط راست با صفحه

دربارهٔ موقعیت خط راست، نسبت به صفحه، تا این‌جا با دو حالت آشنا هستیم: خط راست بر صفحه قرار دارد ($a \subset \alpha$) خط راست صفحه را قطع می‌کند ($a \cap \alpha = A$) حالت سومی هم وجود دارد: خط راست، نقطهٔ مشترکی با صفحه ندارد ($a \cap \alpha = \varnothing$)همان طور که دربارهٔ خطهای راست واقع بر صفحه عمل می‌کردیم، در این جا هم، حالتهای اول و سوم را، یک حالت به حساب می‌آوریم.

تعریف. خط راست و صفحه را موازی می‌نامیم، وقتی که یا نقطهٔ مشترکی نداشته باشند و یا خط راست بر صفحه منطبق باشد. موازی بودن خط راست a و صفحهٔ α را، به صورت $\alpha \parallel a$ یا $a \parallel \alpha$ نشان می‌دهند.

قضیهٔ ۲. (معیار موازی بودن خط راست با صفحه). **اگر خط راستی، با یک خط راست واقع بر صفحه موازی باشد، با صفحه موازی است.**

شرط: $a \parallel b$ و $b \subset \alpha$

حکم: $a \parallel \alpha$

اثبات. حالتی را در نظر می‌گیریم که $a \not\subset \alpha$. فرض می‌کنیم a و α در نقطه‌ای مثل M، مشترک باشند. خطهای راست a و b موازی و متمایزند، بنابراین b نمی‌تواند از M بگذرد. بنابراین، بنابر معیار شناسایی خطهای راست متنافر (قضیه ۱)، باید خطهای راست a و b متنافر باشند. ولی بنابر شرط $a \parallel b$ تناقض حاصل، به این معناست که فرض ما، مبنی بر این که خط راست a و صفحهٔ α نقطهٔ مشترکی دارند، نادرست است، یعنی $a \cap \alpha = \varnothing$ و $a \parallel \alpha$.

در حالتی که a بر صفحهٔ α منطبق باشد، بنابه تعریف $a \parallel \alpha$.

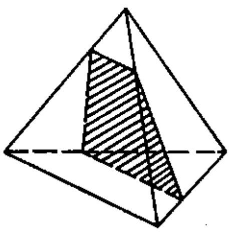
قضیهٔ ۳. اگر صفحه‌ای از خط راستی موازی با صفحهٔ دیگر بگذرد و صفحهٔ اخیر را قطع کند، آن وقت، فصل مشترک دو صفحه، با خط راست مفروض موازی است.

شرط: $a \parallel \alpha$، $a \subset \beta$، $\beta \cap \alpha = b$.

حکم: $a \parallel b$.

اثبات. فرض می‌کنیم $a \not\subset \alpha$. خطهای راست a و b روی صفحهٔ βقرار دارند، در ضمن، a نمی‌تواند bرا قطع کند، زیرا در غیر این صورت، a صفحهٔ α را قطع خواهد کرد. پس $a \parallel b$ درستی حکم، برای حالت $a \subset \alpha$، روشن است.

مسأله. نقطه‌های M و N، به‌ترتیب، درون یالهای AD و AB از چهاروجهی ABCD قرار دارند. مقطع چهاروجهی رابا صفحهٔ α پیداکنیدکه از این دو نقطه بگذرد و با خط راست AC موازی باشد.



شکل ۵

حل. فرض می‌کنیم، مقطع مجهول راساخته باشیم. شکل ۵ نشان می‌دهد، مسأله وقتی حل می‌شود که بتوانیم روشی برای پیداکردن پاره

خطهای راست NP و MQ پیدا کنیم. این پاره‌خطهای راست، عبارتند از فصل مشترک صفحهٔ α با وجه‌های ABC و ADC صفحهٔ ABC از خط راست AC می‌گذرد که با صفحهٔ α موازی است. در ضمن، این صفحه‌ها، درنقطه N مشترک‌اند با توجه به اصل موضوع برخورد دو صفحه و قضیه ۳، صفحه‌های ABC و α در خط راستی موازی (AC) یکدیگر را قطع می‌کنند، یعنی خط راست NP باید موازی خط راست AC باشد. به همین ترتیب روشن می‌شود که $(MQ) \parallel (AC)$.

از این‌جا، روش ساختمان مقطع به دست می‌آید:

۱) $(NP) \parallel (AC)$، $P \in [BC]$؛ ۲) $(MQ) \parallel (AC)$، $Q \in [DC]$؛ ۳) $[MN]$؛ ۴) $[PQ]$.

چهار ضلعی $MNPQ$، مقطع مجهول است. در واقع، چون $(AC) \parallel (NP)$، پس $(AC) \parallel (MNP)$.

پرسشها و مسأله‌ها

۴۲. روی جسمهایی که درکلاس می‌بینید، نمونه‌هایی از خط راست و صفحهٔ موازی با هم را نشان دهید.

۴۳. مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ را روی صفحه نشان دهید و سپس: ۱) خطهای راست موازی با صفحهٔ ABC و ۲) صفحه‌های موازی با خط راست A_1D_1 را مشخص کنید.

۴۴. خط راستی موازی با یک صفحه داده شده است. ۱) آیا این خط راست، با هر خط راست واقع بر صفحه، موازی است؟ آیا ممکن است، این خط راست، دست کم یکی از خطهای راست واقع بر صفحه را قطع کند؟

۴۵. خط راست a، با فصل مشترک دو صفحهٔ α و β موازی است. a و α و هم a و β، نسبت به هم، چه وضعی دارند؟

۴۶. چهاروجهی $ABCD$ مفروض است. نسبت به صفحهٔ ABC چه وضعی‌دارند: ۱) خط راست MN که‌از وسط یالهای BD و AD گذشته‌است؛ ۲) خط‌راست PQ که‌دونقطهٔ‌آن یالهای BD و CD را (ازطرف نقطه D) به‌نسبت ۲:۱ تقسیم‌کرده‌اند؛ ۳) خط‌راست MQ؟

۴۷. ازنقطهٔ‌مفروض: ۱) چندخط راست‌موازی‌باصفحهٔ مفروض؛ ۲) چند صفحهٔ موازی با خط راست مفروض، می‌توان رسم کرد؟

۴۸. دو خط راست، یکی موازی با صفحهٔ α و دیگری متقاطع با صفحهٔ α داده شده‌اند. این دو خط راست، نسبت به هم، چه وضعی می‌توانند داشته باشند؟

۴۹. نقطه‌های A و B، به ترتیب روی صفحه‌های متقاطع α و β قرار دارند، ولی متعلق به خط راست c، فصل مشترک دو صفحه، نیستند. ثابت کنید، از این دو نقطه، می‌توان تنها یک صفحه موازی با خط راست c رسم کرد.

۵۰. ۱) مقطع چهاروجهی $ABCD$ را، با صفحه‌ای پیدا کنید که از رأس C و نقطه M واقع در درون یال AB گذشته و با خط راست AD موازی باشد، ۲) مساحت این مقطع را محاسبه کنید، به شرطی که طول هر یال چهاروجهی برابر a باشد و نقطهٔ M، پاره‌خط راست AB را نصف کند.

۵۱. M و N را، به ترتیب، نقطه‌هایی در درون یالهای AD و BC از چهاروجهی $ABCD$ می‌گیریم. مطلوب است مقطع چهاروجهی با صفحه‌ای که از M و N بگذرد و ۱) با خط راست AB، ۲) با خط راست CD موازی باشد.

۵۲. ۱) مقطع منشور قائم $ABCA_1B_1C_1$ را با صفحه‌ای پیدا کنید که با یال AA_1 موازی باشد و ازنقطه‌های $M \in [AB]$ و $N \in [B_1C_1]$ بگذرد؛ ۲) محیط این مقطع را محاسبه کنید، به شرطی که طول هر یال منشور برابر b باشد و نقطه‌های M و N یالهای AB و B_1C_1 را نصف کرده باشند.

۵۳. ۱) مقطع چهاروجهی $ABCD$ را، با صفحه‌ای پیدا کنید که از نقطهٔ برخورد میانه‌های وجه‌های ABC، ACD و ABD بگذرد؛ ۲) منشور قائم $ABCA_1B_1C_1$ داده شده است. از نقطهٔ M متعلق به وجه ABC و نقطهٔ N متعلق به وجه BB_1C_1C صفحه‌ای موازی یال AA_1 رسم کرده‌ایم. مقطع منشور را با این صفحه پیدا کنید.

۵۴. هرم $SABCD$ (با قاعدهٔ $ABCD$) و نقطهٔ M واقع بر یال SD مفروض‌اند. مقطع هرم را با صفحه‌ای پیدا کنید که از نقطه‌های B و M بگذرد و با خط راست AC موازی باشد.

ادامه دارد...

روش برهان خلف[1]

غلامرضا یاسی‌پور

روش کوتاه‌تر جدول ارزش[2]

باز هم روش دیگری دراثبات درستی استدلالات[3]، و در دسته‌بندی کردن گزاره‌ها[4] به عنوان صادق[5]، کاذب[6]، یا محتمل[7] موجود است. در شمارهٔ قبل به این مطلب اشاره شد که استدلال نادرست[8] است اگر و فقط اگر ممکن باشد که ارزشهای راستی[9]ای به گزاره‌های سادهٔ[10] ترکیب کننده‌اش به طریقی تخصیص داده شود که تمام مقدماتش[11] راست[12] و نتیجه[13]اش دروغ[14] شود، و در مورد استدلالات درست، انجام گرفتن چنین تخصیصاتی غیر ممکن می‌باشد. در نتیجه، برای اثبات درستی یک استدلال کفایت می‌کند که ثابت کنیم که به گزاره‌های آن چنین ارزشهای راستی‌ای را نمی‌توان تخصیص داد، و این کار را با نشان دادن این که تنها با تخصیص دادن ارزشهای راستی ناموافق[15]، به این معنی که به گزارهٔ ترکیب کننده‌ای هم T هم F تخصیص داده شده باشد، می‌توان مقدمات یک استدلال را راست و نتیجه‌اش را دروغ ساخت، انجام می‌دهیم. به عبارت دیگر، اگر ارزش راستی T به هر یک از مقدمات یک استدلال درست و ارزش راستی F به نتیجهٔ آن تخصیص داده شود، لازمهٔ این کار این می‌شود که به گزارهٔ ترکیب کننده‌ای هم T هم F تخصیص دهیم که البته تناقض[16] به وجود می‌آورد.

به این ترتیب برای اثبات درستی استدلال

$(A \vee B) \Rightarrow (C \wedge D)$

$(D \vee E) \Rightarrow G$

$\therefore A \Rightarrow G$

به هر یک از مقدمات آن T و به نتیجهٔ آن F را تخصیص می‌دهیم. لازمهٔ تخصیص F به نتیجه این است که به A ، T و به G ، F تخصیص داده شود. از آن‌جا که به A ، T تخصیص داده شده، مقدم[17] مقدمهٔ اول راست است، و از آن جا که به این مقدمه T تخصیص داده شده، تالی[18] آن نیز باید راست باشد. لذا باید هم به C هم به D ، T را تخصیص داد. از آن جا که به D ، T تخصیص داده شده، مقدم مقدمهٔ دوم راست است و از آن‌جا که به این مقدمه T تخصیص داده شده، باید تالی آن نیز راست باشد، لذا باید به G ، T تخصیص داده شود. اما قبلاً برای این که نتیجه را دروغ بسازیم، مجبور شدیم که به G ، F را تخصیص دهیم. در نتیجه استدلال نادرست است تنها اگر گزارهٔ G هم راست هم دروغ باشد، که غیر ممکن است. این روش اثبات درستی یک استدلال صورت دیگر روش برهان خلف است که تخصیص ارزشهای راستی را به جای قوانین استنتاج[19] به کار می‌برد.

تعمیم این روش به دسته‌بندی کردن گزاره‌ها (و صورتهای گزاره‌ای) آسان است. به این ترتیب، برای تصدیق این که قانون پیرس[20]، یعنی، $[(p \supset q) \supset p] \supset p$ صادق است، به آن ارزش راستی F را، که لازمه‌اش این است که به مقدمش $[(p \supset q) \supset p]$ ، T و به تالیش p، F را تخصیص دهیم، نسبت می‌دهیم. برای این که شرطی[21] $[(p \supset q) \supset p]$ که تالیش P دروغ است راست باشد، باید به مقدمش $(p \supset q)$ نیز ارزش راستی F تخصیص داده شود. اما برای این که شرطی $p \supset q$ دروغ باشد، باید به مقدمش p، T و به تالیش q ، F تخصیص داد. اما قبلاً مجبور شدیم که به p، F را تخصیص دهیم، لذا فرض دروغ بودن قانون پیرس به نقیضی منجر می‌شود که ثابت می‌کند این قانون صادق است.

اگر امکان داشته‌باشد که ارزشهای راستی موافقی به ترکیبات

سازندهٔ عبارتی، با این فرض که دروغ باشد تخصیص دهیم، دراین صورت عبارت مورد بحث صادق نیست، اما باید یا کاذب یا محتمل باشد. در چنین حالتی سعی می‌کنیم که ارزشهای راستی‌ای تخصیص دهیم که آن را راست بسازد. اگر این کوشش به تناقضی منجر شود عبارت امکاناً نمی‌تواند راست باشد و باید کاذب باشد. اما اگر بتوانیم ارزشهای راستی‌ای را برای این که آن را راست سازد و ارزشهای راستی (دیگری) برای این که آن را دروغ سازد تخصیص دهیم، در این صورت این عبارت نه صادق و نه کاذب، بلکه محتمل است.

روش برهان خلف، تخصیص ارزشهای راستی ساده‌ترین و سریعترین روش امتحان استدلالات و دسته‌بندی کردن گزاره‌هاست. اما، این روش در بعضی حالات آسانتر از دیگر حالات به کار می‌رود. مثلاً" اگر به یک ترکیب فصلی[22] F تخصیص داده شده باشد، باید به هردو منفصلش[23] F نسبت داده شود، و جایی که به یک ترکیب عطفی[24] T تخصیص داده شده، باید به هر دو منعطفش[25] T نسبت داده شود، و در این موارد تابعیت تخصیصات اجباری است. اما جایی که به یک ترکیب فصلی T یا به یک ترکیب عطفی F تخصیص داده شده، این تخصیص به خودی خود مشخص نمی‌کند که کدام منفصل راست یا کدام منعطف دروغ است، و در این مورد باید آزمایش کنیم و «تخصیصات» گوناگونی را مورد امتحان قرار دهیم، که این کار سودمندی این روش را در مورد چنین حالاتی کاهش می‌دهد. اما علی‌رغم این مشکلات در اکثریت قریب‌الاتفاق حالات، روش برهان خلف به سایر روشهای معروف دیگر برتری دارد.

یادداشتها:

1. Reductio Ad Absurdum
2. Truth Table
3. Validity of Arguments
4. Statements
5. Tautologous
6. Contradictory
7. Contingent
8. Invalid
9. Truth Values
10. Simple Statements
11. Premisses
12. True
13. Conclusion
14. False
15. Inconsistent
16. Contradiction
17. Antecedent
18. Consequent
19. Rules of Inference
20. Peirce's Law
21. Conditional
22. Disjunction
23. Disjunct
24. Conjunction
25. Conjunct

مرجع:

Symbolic Logic
Irving M. Copi

ادب ریاضی

انسان با صورتهای انتزاعی (که صور مادی نامیده می‌شوند) و از اشیا در ذهنها انتزاع می‌شوند، می‌اندیشد. این صور که با یک جریان انتزاع دیگر منتزع می‌شوند، موجودات معقولی هستند که مدام ثبات داشته باشند، بلکه در درجهٔ اول بالقوه معقولند و سپس بالفعل معقول می‌شوند. بدین سان در معرض تکوین و تغییر نیستند، و انتزاع کافی نیست که ثابت کند آنها وجود مستقل دارند، بلکه فی الواقع فقط در ذهن مستقل می‌باشند.

ابن رشد

زندگینامهٔ علمی دانشمندان اسلامی

ویراستار: حسین معصومی همدانی

حلقه و میدان[1]

● حمید رضا امیری

در برهان ۱ از سال اول مقاله‌ای تحت عنوان «گروه، پیدایش و کاربرد نظریه گروهها» به چاپ رسید. در آنجا از یک دستگاه ریاضی[2] به‌نام گروه صحبت به میان آمد، این دستگاه ریاضی که در مقدمهٔ آن مقاله راجع به کاربردهای عملی و غیرریاضی آن نیز اشاره‌هایی شده است، از یک مجموعه مانند G و یک عمل دوتایی مانند $*$، روی G تشکیل می‌شد، در این مقاله راجع به دستگاههای ریاضی دیگری که هرکدام از یک مجموعه امّا با دو عمل تشکیل شده‌اند صحبت به میان خواهد آمد (در اینجا لازم به تذکر است عزیزان دانش‌آموز و خوانندگان محترمی که قصد مطالعهٔ این مقاله را دارند می‌بایست اطلاعات کافی در مورد گروه و خواص آن داشته‌باشند زیرا همانطور که خواهید دید اساس و مبنای نظریهٔ حلقه‌ها بر گروه استوار است).

فرض کنیم R مجموعه‌ای ناتهی و دو عمل روی این مجموعه تعریف شده باشد. عمل اول را $*$ و عمل دوّم را o می‌نامیم. (تقدم و تأخر این دو عمل مهّم است.) هرگاه مجموعهٔ R همراه با این دو عمل دارای خواص زیر باشد در این صورت آن را یک حلقه نامیده و می‌نویسیم $(R, *, o)$ یک حلقه است.

۱) R توأم با عمل اول $(*)$ یک گروه آبلی باشد ($(R , *)$ گروه آبلی باشد).

۲) R نسبت به عمل دوم (o) بسته باشد.

۳) عمل دوم (o) در R شرکت‌پذیر باشد.

۴) عمل دوم یعنی (o) نسبت به عمل اول یعنی $(*)$ از چپ و راست توزیع‌پذیر باشد یا به‌عبارت دیگر:

$$\forall a , b , c \in R \text{ ، } ao\,(b * c) = (aob) * (aoc)$$
$$(b * c)\,oa = (boa) * (coa)$$

قرار داد: از این به‌بعد برای راحتی کار عمل اول در یک حلقه را با نماد $+$ و عمل دوم را با نماد $\times$ نمایش می‌دهیم که این نمادها لزوماً جمع و ضرب معمولی نمی‌باشند.

مثال ۱) مجموعهٔ اعداد حقیقی یعنی IR را با دو عمل جمع و ضرب معمولی درنظر می‌گیریم، در این صورت:

۱) $(IR , +)$ یک گروه جابجایی است.

۲) IR نسبت به ضرب بسته است.

۳) عمل ضرب در IR شرکت‌پذیر است. (اصل موضوعهٔ دستگاه اعداد حقیقی)

۴) عمل ضرب از چپ و راست در عمل جمع توزیع‌پذیر است.

بنابراین $(IR , + , \circ)$ یک حلقه است.

نکته: توجه داریم، هرگاه خاصیتی با یک سور عمومی برای اعضای یک مجموعه برقرار باشد (مانند شرکت‌پذیری، توزیع‌پذیری یا جابجایی)، این خاصیت برای تمام زیر مجموعه‌های آن مجموعه نیز برقرار خواهد بود.

باتوجه به نکتهٔ گفته شده و مثال ۱ واضح است که $(Q, + , \circ)$ و $(Z , + , \circ)$ هرکدام یک حلقه می‌باشند که به‌ترتیب آنها را حلقهٔ اعداد گویا و حلقهٔ اعداد صحیح می‌نامیم.

---

۱) Ring and feild

۲) منظور از یک دستگاه ریاضی مجموعه‌ای است همراه با یک یا چند عمل که تعاریف، قضایا و ویژگیهای مخصوص به خود را دارا می‌باشد.

هرگاه مجموعهٔ ماتریسهای مربعی از مرتبهٔ n ($n \times n$) را $M_{n \times n}$ بنامیم در این صورت $M_{n \times n}$ همراه با دوعمل جمع و ضرب ماتریسی یک حلقه است یابه‌عبارت دیگر $(M_{n \times n}, +, \times)$ یک حلقه است.

مثال ۲) مجموعهٔ $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ را درنظر می‌گیریم و روی اعضای این مجموعه دو عمل جمع و ضرب را به شکل زیر تعریف می‌کنیم، ثابت کنید $(IR^2, +, \times)$ یک حلقه است.

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$
$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2)$$

الف) شرکت پذیری IR^2 نسبت به $+$ به‌راحتی قابل بررسی است.

ب) زوج مرتب $(0, 0)$ عضو خنثی می‌باشد.

ج) متقابل هرزوج مانند (a, b) به صورت $(-a, -b)$ می‌باشد.

د) جابجایی بودن IR^2 نسبت به $+$ نیز واضح است.

پس $(IR^2, +)$ یک گروه آبلی است.

ه) باتوجه به تعریف $\times$ مشاهده می‌شود که IR^2 نسبت به $\times$ بسته است. (حاصل ضرب دو زوج مرتب، یک زوج مرتب است.)

و) توزیع پذیری $\times$ نسبت به $+$ را بررسی می‌کنیم یعنی ثابت می‌کنیم:

$$(a_1, b_1) \times [(a_2, b_2) + (a_3, b_3)] = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) + (a_1, b_1) \times (a_3, b_3)$$

$$\text{سمت چپ} = (a_1, b_1) \times (a_2 + a_3, b_2 + b_3)$$
$$= (a_1(a_2 + a_3) - b_1(b_2 + b_3) \text{ و } a_1(b_2 + b_3) + b_1(a_2 + a_3))$$
$$= (a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3, a_1b_2 + a_1b_3 + b_1a_2 + b_1a_3)$$

$$\text{سمت راست} = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2) + (a_1a_3 - b_1b_3 \text{ و } a_1b_3 + b_1a_3)$$
$$= (a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3 \text{ و } a_1b_2 + a_1b_3 + b_1a_2 + b_1a_3)$$

که دو طرف باهم برابر بوده و تساوی برقرار است.

ز) آخرین خاصیت (باتوجه به تعریف حلقه) که به اثبات آن می‌پردازیم خاصیت شرکت‌پذیری IR^2 نسبت به $\times$ است یعنی باید ثابت کنیم:

$$(a_1, b_1) \times [(a_2, b_2) \times (a_3, b_3)]$$
$$= [(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)] \times (a_3, b_3)$$

(اثبات به‌عهدهٔ خواننده)

بیان چند تعریف و معرفی حلقه‌هایی خاص

تعریف: حلقهٔ $(R, +, \times)$ را یک حلقهٔ جابجایی می‌نامیم هرگاه R نسبت به عمل دوم یعنی $\times$ خاصیت جابجایی داشته‌باشد.

مثال: حلقه‌های زیر همگی جابجایی هستند.

$(IR, +, \cdot)$ و $(Q, +, \cdot)$ و $(Z, +, \cdot)$ و $(IR^2, +, \times)$

چون مجموعهٔ $M_{n \times n}$ نسبت به عمل ضرب ماتریسها خاصیت جابجایی ندارد لذا حلقهٔ $(M_{n \times n}, +, \times)$، حلقهٔ جابجایی نیست.

تعریف: حلقهٔ $(R, +, \times)$ را یک حلقهٔ یکدار[1] می‌نامیم هرگاه حلقهٔ R دارای عضو خنثی نسبت به عمل دوم یعنی $\times$ باشد.

مثال: حلقه‌های $(IR, +, \cdot)$، $(Q, +, \cdot)$ و $(Z, +, \cdot)$ حلقه‌هایی جابجایی و یکدارند. حلقهٔ $(M_{n \times n}, +, \times)$ یک حلقهٔ

۱) در حلقهٔ $(R, +, \times)$ عضو خنثی نسبت به عمل $+$ را صفر حلقه و عضو خنثی نسبت به عمل $\times$ را یکِ حلقه می‌نامیم.

غیرجابجایی ولی یکدار است که یکِ حلقه همان ماتریس واحد یا I_n است.

در حلقهٔ $(IR^۲ , + , \times)$ زوج مرتب $(۱ , ۰)$ عضو خنثی نسبت به $\times$ است زیرا:

$$(a , b) \times (۱ , ۰) = (a \times ۱ - b \times ۰ \text{ و } a \times ۰ + b \times ۱)$$
$$= (a , b)$$

پس $(IR^۲ , + , \times)$ یک حلقهٔ جابجایی و یکدار است.

نکته : وقتی می‌گوییم متقابل ضربی یا وارون یک عضو دریک حلقه، منظور از این متقابل یا وارون نسبت به عمل دوم یعنی ضرب است و مثلاً اگر $(R , + , \times)$ یک حلقه باشد و در ضمن حلقه‌ای یکدار باشد و $a \in R$، منظور از وارون یا متقابل ضربیِ a، عضوی است چون $a^{-۱} \in R$ به قسمی که :

$$a \times a^{-۱} = a^{-۱} \times a = ۱$$

تعریف میدان : اگر $(R , + , \times)$ یک حلقهٔ جابجایی و یکدار باشد و نیز هر عضو مخالفِ صفر آن متقابل ضربی داشته باشد در این صورت این حلقه با چنین شرایطی، دستگاهی ریاضی به نـام مـیدان تشکیل می‌دهد.

نتیجه : باتوجه به تعریف حلقه و تعریف میدان می‌توان میدان را به‌صورت زیر تعریف کرد: هرگاه F مجموعه‌ای ناتهی و دو عمل $*$ و o روی آن تعریف شده باشد در این صورت $(F , * , o)$ یک میدان است، وقتی که شرایط زیر برقرار باشند:

۱) $(F , *)$ گروه آبلی باشد.

۲) $(F - \{ ۰ \} , o)$ گروه آبلی باشد.

۳) عمل o از چپ و راست در عمل $*$ توزیع‌پذیر باشد.

مثال ۳) باتوجه به تعریف میدان و خواص دو عـمل جـمع و ضرب معمولی واضح است کـه، $(IR , + , ۰)$ و $(Q , + , ۰)$ هرکدام میدان‌می‌باشند. ازطرفی چون هرعضودر Z (به جز ۱ و ۱−) فاقد وارون یا متقابل ضـربی در Z است لذا، $(Z , + , ۰)$ مـیدان نمی‌باشد.

مثال ۴) باتوجه به‌اینکه اگر دترمینانِ یک ماتریس صفرباشد، آن ماتریس فاقد وارون خواهدبود، واضح‌است‌که $(M_{n \times n} , + , \times)$ درحالت کلّی ممکن است میدان نباشد.

مثال ۵) هرگاه مجموعهٔ باقیمانده‌های حاصل از تـقسیم اعـداد صحیح بر عدد صحیح m را Z_m بنامیم، خواهیم داشت :

$$Z_m = \{ ۰ , ۱ , ۲ , ... , m - ۱ \}$$

حال روی این مجموعه دو عملِ $\oplus$ و $\otimes$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$\forall x , y \in Z_m$ ، $x \oplus y = $ باقیماندهٔ تقسیم $x + y$ بر m

$\forall x , y \in Z_m$ ، $x \otimes y = $ باقیمانده تقسیم xy بر m

به‌عنوان مثال دو مجموعهٔ $Z_۵ = \{ ۰ , ۱ , ۲ , ۳ , ۴ \}$ و $Z_۶ = \{ ۰ , ۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ \}$ را درنظر می‌گیریم و خواهیم داشت:

در $Z_۵$ ←

$۳ \oplus ۴ = $ باقیماندهٔ تقسیم $۴ + ۳$ بر $۵ = ۲$

$۳ \otimes ۴ = $ باقیماندهٔ تقسیم ۴×۳ بر $۵ = ۲$

$۳ \otimes ۱ = $ باقیماندهٔ تقسیم ۱×۳ بر $۵ = ۳$

$۳ \oplus ۰ = $ باقیماندهٔ تقسیم $۰ + ۳$ بر $۵ = ۳$

$۲ \otimes ۳ = $ باقیماندهٔ تقسیم ۳×۲ بر $۵ = ۱$

در $Z_۶$ ←

$۳ \oplus ۴ = $ باقیماندهٔ تقسیم $۴ + ۳$ بر $۶ = ۱$

$۳ \otimes ۴ = $ باقیماندهٔ تقسیم ۴×۳ بر $۶ = ۰$

با توجه به تعاریف دو عمل فوق روی Z_m به سادگی قابل بررسی است که $(Z_m , \oplus , \otimes)$ یک حلقه است که این حلقه جابجایی و یکدار است.

در حالت کلّی ممکن است $(Z_m , \oplus , \otimes)$ میدان نباشد، زیرا

ممکن است بعضی از اعضای Z_m فاقد متقابل نسبت به $\otimes$ باشند مثلاً در Z_6 عددِ ۲ فاقدِ متقابلِ ضربی است (نسبت به $\otimes$) زیرا:

$$۲\otimes ۰ = ۰ \text{ و } ۲\otimes ۱ = ۲ \text{ و } ۲\otimes ۲ = ۴ \text{ و } ۲\otimes ۳ = ۰ \text{ و}$$
$$۲\otimes ۴ = ۲ \text{ و } ۲\otimes ۵ = ۴$$

یعنی ترکیب عدد ۲ با هیچ‌یک از اعضای Z_6 نسبت به عمل $\otimes$ مساوی با ۱ نمی‌باشد.

در اینجا به ذکر قضیه‌ای در این مورد می‌پردازیم.

قضیه : در حلقهٔ $(Z_m , \oplus , \otimes)$ هرگاه $a \in Z_m$ و a نسبت به m اول باشد (بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و m، یک باشد) در این صورت a وارون پذیراست (a دارای متقابل ضربی است).

اثبات : (برای اثبات ناگزیریم از قضیه‌ای در هم‌نهشتی ها استفاده کنیم) چون $(a , m) = ۱$ پس معادلهٔ هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} ۱$ همواره در Z_m دارای جواب است یعنی عددی صحیح در Z_m چون $x_\circ$ یافت می‌شود به قسمی که $ax_\circ \overset{m}{\equiv} ۱$ (باقیماندهٔ تقسیم $ax_\circ$ بر m مساوی با ۱ است). به عبارت دیگر $a \times x_\circ = ۱$ یعنی $x_\circ$ متقابل a می‌باشد.

نکتهٔ ۱) می‌دانیم هرگاه P عددی اول باشد تمام اعداد صحیح و مثبت که کوچکتر از P باشند نسبت به P اولند حال اگر حلقهٔ $(Z_p , \oplus, \otimes)$ را درنظر بگیریم که P اول باشد، چون همهٔ اعضا در Z_p از P کوچکترند پس نسبت به P اولند و طبق قضیهٔ قبل همهٔ اعضایِ مخالف صفر در Z_p وارون پذیرند یعنی: $(Z_p , \oplus, \otimes)$ یک میدان است.

نکتهٔ ۲) باتوجه به قضیهٔ قبل هرگاه بخواهیم تعداد اعضایِ وارون‌پذیر در حلقهٔ Z_m را محاسبه کنیم، کافی است تعداد اعدادی در Z_m که نسبت به m اولند را بشماریم که در این رابطه به معرفی فرمول اولر که به تابع فی ـ اولر معروف است می‌پردازیم:

هرگاه m عددی صحیح، مثبت و مخالف یک باشد و آن را به‌صورت استاندارد به حاصل ضرب عاملهای اول تجزیه کنیم، یعنی داشته‌باشیم:

$$m = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_k^{\alpha_k}$$

که P_1 ، P_2 ، ... ، P_k اعداد اول هستند.

دراین صورت تعداد اعداد صحیح مثبت و کوچکتر از m که نسبت به m اولند برابر است با $\varphi(m)$ که از دستور زیر محاسبه می‌شود:

$$\varphi(m) = m\,(۱ - \frac{۱}{P_1})\,(۱ - \frac{۱}{P_2}) \dots (۱ - \frac{۱}{P_k})$$

به‌عنوان مثال تعداد وارون‌پذیرهای حلقهٔ Z_{18} برابر است با:

$$۱۸ = ۲ \times ۳^۲ \Rightarrow \varphi(۱۸) = ۱۸ \times (۱ - \frac{۱}{۲})(۱ - \frac{۱}{۳})$$
$$\Rightarrow \varphi(۱۸) = ۱۸ \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۳} = ۶$$

یعنی در Z_{18}، ۶ عضو وارون‌پذیر وجود دارد.

تبصره : هرگاه عدد صحیح a را برعدد صحیح $b \neq ۰$ تقسیم کنیم اصطلاحاً b را مقسوم علیه a می‌نامند و اگر باقیمانده صفر باشد می‌نویسند $a = bq$ (در این حالت q نیز می‌تواند مقسوم علیه a باشد).

تعریف مقسوم‌علیه صفر: درحلقهٔ $(R , +, \times)$ عضو $a \neq ۰$ را یک مقسوم علیه صفر می‌نامند هرگاه عضوی چون $b \neq ۰$ در این حلقه یافت شود به قسمی که $a \times b = ۰$.

نکته ۱) باتوجه به تبصرهٔ قبل همانطور که حتماً پی برده‌اید اصطلاح مقسوم علیه صفر از همان اصطلاح جاری در اعداد صحیح ناشی شده زیرا دیدید که اگر حاصل ضربِ دو عدد مساوی با عددی دیگر باشد هریک از آن دو عدد مقسوم علیه عددِ حاصل است در این تعریف نیز حاصل ضرب a و b مساوی با صفر شده و بنابراین هریک مقسوم علیه صفر هستند.

نکته ۲) باتوجه به اینکه اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = ۰$ در این صورت، $a = ۰$ یا $b = ۰$، واضح است که حلقهٔ اعداد حقیقی و کلیهٔ حلقه‌های عددی همراه با اعمال جمع و ضرب معمولی فاقد مقسوم علیه صفر می‌باشند.

مثال ۱) در حلقهٔ $Z_۶$ دیدیم که $۳ \otimes ۴ = ۰$ درصورتی که $۳ \neq ۰$ و $۴ \neq ۰$ پس ۳ و ۴ در $Z_۶$ هریک مقسوم علیه صفر می‌باشند.

مثال ۲) در حلقهٔ ماتریسهای ۲×۲ داریم:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}}_{B} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

یعنی دو ماتریس A و B هر دو مخالف با ماتریس صفرند ولی حاصلِ AB مساوی با ماتریس صفراست پس A و B هریک مقسوم علیه صفرند.

در این قسمت نیز به بیان و اثبات قضیه‌ای بسیار مهّم می‌پردازیم که به نوعی ارتباط بین مقسوم علیه‌های صفر یک حلقه و وارون‌پذیرهای آن حلقه را نشان می‌دهد.

قضیه: در حلقهٔ یکدار $(R , + , \times)$ هرگاه a عضوی از این حلقه بوده و وارون‌پذیر باشد مقسوم‌علیه صفر نیست. (عکس این قضیه در حالت کلّی برقرار نمی‌باشد.)

اثبات: فرض‌کنیم $(R , + , \times)$ یک حلقهٔ یکدار و $a \in R$ و a وارون‌پذیر باشد. ثابت می‌کنیم a مقسوم‌علیه صفر نیست. در جهت نیل به این مقصود، برای b ای دلخواه در R فرض می‌کنیم $ab = ۰$ و ثابت می‌کنیم $b = ۰$.

$$b = ۱ \times b = (a^{-۱}a)\, b = a^{-۱}\,(ab) = a^{-۱} \times ۰ = ۰$$

همانطور که قید شد عکس قضیهٔ فوق درحالت کلّی برقرار نیست یعنی همواره نمی‌توان از اینکه عضوی دریک حلقه مقسوم علیه صفر نیست، نتیجه گرفت که وارون‌پذیر است. مثلاً در حلقهٔ اعداد صحیح همراه با جمع و ضرب معمولی عدد ۲ مقسوم علیه صفر نیست ولی وارون‌پذیر نیز نمی‌باشد ($\frac{۱}{۲} \notin Z$).

نتیجه: عکس نقیض قضیهٔ فوق که با خود قضیه هم ارز است به‌صورت زیر بیان می‌شود:

در حلقهٔ یکدار $(R , + , \times)$، اگر a مقسوم علیه صفر باشد، وارون‌پذیر نیست.

تذکر: عکس قضیهٔ قبل در مورد دو حلقهٔ $M_{n \times n}$ و Z_m، صادق است یعنی مثلاً در حلقهٔ Z_m، a مقسوم‌علیه صفر است اگر و فقط اگر وارون‌پذیر نباشد.

بنابراین در حلقه Z_m، مقسوم‌علیه‌های صفر عبارتنداز اعدادی که نسبت به m اول نیستند (چرا؟). یعنی باتوجه به تابع فی ـ اولر و اینکه عدد صفر نیز نمی‌تواند مقسوم علیه صفر باشد داریم:

$$Z_m \text{ تعداد مقسوم علیه‌های صفر در } = m - \varphi(m) - ۱$$

مثال: تعداد مقسوم‌علیه‌های صفر حلقهٔ $Z_{۱۸}$ را محاسبه می‌کنیم، که باتوجه به مطالب قبل خواهیم داشت:

$$Z_{۱۸} \text{ تعداد مقسوم علیه‌های صفر در } = ۱۸ - \varphi(۱۸) - ۱ = ۱۸ - ۶ - ۱ = ۱۱$$

نتیجه: دیدیم که در Z_p (p اول است) همهٔ اعضایِ مخالف صفر نسبت به p اول و در نتیجه وارون‌پذیرند، لذا Z_p فاقد مقسوم علیه صفر است.

$$p \text{ اول است} \Rightarrow \varphi(p) = p(۱ - \frac{۱}{p}) = (p - ۱) \; Z_p \text{ تعداد وارون‌پذیرهای }$$

$$Z_p \text{ تعدادمقسوم علیه‌های صفردر } = P - \varphi(p) - ۱ = P - (P - ۱) - ۱ = ۰$$

تعریف حوزهٔ صحیح یا میدان درست:

هرگاه R یک حلقهٔ جابجایی و یکدار باشد، که فاقد مقسوم‌علیه صفر است، در این صورت R یک میدان درست نامیده می‌شود.

مثال ۱) حلقهٔ $(Z , + , ۰)$ میدان درست است.

مثال ۲) « $(IR, +, \circ)$ « « « .

مثال ۳) « $(Q, +, \circ)$ « « « .

مثال ۴) « $(Z_p, \oplus, \otimes)$ « « « . (P اول است)

مثال ۵) اگر m اول نباشد در حلقهٔ $(Z_m, \oplus, \otimes)$ مقسوم‌علیه صفر موجود است لذا Z_m میدان درست نیست.

مثال ۶) حلقهٔ ماتریسهای مربعِ $n \times n$ میدان درست نیست.

تذکر: در حلقهٔ $(M_{n \times n}, +, \times)$ هر ماتریس مانند A که $|A| = \circ$ وارون‌پذیر نیست لذا مقسوم علیه صفر است.

در این قسمت نیز به بیان و اثبات قضیه‌ای می‌پردازیم که بیانگر رابطهٔ بین برقراری قاعدهٔ حذف در یک حلقه و وجود مقسوم علیه صفر در آن حلقه است.

قضیه: شرط لازم و کافی برای آنکه در حلقهٔ R قاعدهٔ حذف برقرار باشد آن است که R فاقد مقسوم علیه صفر باشد.

اثبات: فرض کنیم در R قانون حذف برقرار باشد یعنی

$$\forall a, b, c \in R \ ، ab = ac \Rightarrow b = c$$

ثابت می‌کنیم R فاقد مقسوم علیه صفر است. برای این کار فرض می‌کنیم $ab = \circ$ و ثابت می‌کنیم $a = \circ$ یا $b = \circ$. اگر $a \neq \circ$، در این صورت،

$$ab = \circ \Rightarrow ab = a\circ \xRightarrow{\text{قانون حذف}} b = \circ$$

عکس قضیه: فرض کنیم R فاقد مقسوم علیه صفر باشد ثابت می‌کنیم قانون حذف در R برقرار است برای این کار فرض می‌کنیم $a \neq \circ$ و $ab = ac$ ثابت می‌کنیم $b = c$.

$$ab = ac \Rightarrow ab - ac = \circ \Rightarrow a(b - c) = \circ$$

$$\xRightarrow[R \text{ فاقدمقسوم‌علیه صفر}]{a \neq \circ} (b - c) = \circ \Rightarrow b = c$$

نتیجه: باتوجه به تعریف میدان درست و قضیهٔ قبل داریم:

«شرط لازم و کافی برای آنکه حلقهٔ جابجایی و یکدار R میدان درست باشد آن است که قانون حذف در آن برقرار باشد.»

تذکر: استفاده از قضیهٔ قبل، در حلقه‌هایی که فاقد مقسوم علیه صفر می‌باشند منجر به استفاده از قانون حذف در این حلقه‌ها می‌باشد که در همنهشتی‌ها و حل معادلات همنهشتی در حلقه‌های Z_p به چشم می‌خورد، مثلاً در $Z_{۱۱}$ داریم:

$$۶x \overset{۱۱}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۶x \overset{۱۱}{\equiv} ۱ + ۱۱ \Rightarrow ۶x \overset{۱۱}{\equiv} ۶ \times ۲ \Rightarrow x \overset{۱۱}{\equiv} ۲$$

نتیجه: ثابت می‌کنیم هر میدان مانند F، میدان درست است.

روش اول: بنابر نتیجهٔ قبل چون هر میدان یک حلقهٔ جابجایی و یکدار است، کافی است ثابت کنیم در F قانون حذف برقرار است و این باتوجه به وارون‌پذیربودنِ همهٔ اعضای غیرصفر در F آسان است.

$$ab = ac \Rightarrow a^{-۱}ab = a^{-۱}ac \Rightarrow ۱b = ۱c \Rightarrow b = c$$

روش دوم: در میدان F همهٔ اعضا وارون‌پذیرند لذا طبق قضیه هیچ کدام مقسوم‌علیه صفر نیستند یعنی F فاقد مقسوم علیه صفر است و طبق قضیه قانون حذف در آن برقرار است لذا F میدان درست است.

در این قسمت به تعریف و بررسی خواص و قضایای مربوط به زیر حلقه‌ها و ایده‌آلها می‌پردازیم:

تعریف زیر حلقه: هرگاه $(R, +, \times)$ یک حلقه و R' زیر مجموعه‌ای ناتهی از R باشد و با همان دو عمل تعریف شده روی R، تشکیل یک حلقه دهد، در این صورت حلقهٔ R' را زیر حلقهٔ حلقهٔ R می‌نامیم.

تذکر ۱) همان طور که از تعریف زیر حلقه مشخص است، هر زیر حلقه به تنهایی یک حلقه است.

تذکر ۲) در بسیاری اوقات در حل مسائل مربوط به حلقه و میدان،

برای اثبات حلقه یا حتّی میدان بودنِ یک مجموعه، با توجه به قضیه‌ای که خواهیم‌گفت، ابتدا ثابت می‌کنیم آن مجموعه همراه با دو عمل تعریف شده روی آن، زیر حلقهٔ یک حلقهٔ شناخته شده است و بلافاصله نتیجه می‌گیریم که حلقه است.

قضیه : شرط لازم و کافی برای آنکه یک زیر مجموعهٔ ناتهی مانند R'، از حلقهٔ R زیر حلقهٔ آن باشد، آن است که:

الف) $\forall a , b \in R' ,\ (a-b) \in R'$

ب) $\forall a , b \in R' ,\ (ab) \in R'$

اثبات : شرط الف) زیر گروه[1] جمعی بودن R' نسبت به $(R , +)$ را می‌رساند و شرط ب) بسته بودن نسبت به عمل دوم یا ضرب را اثبات می‌کند و بقیهٔ شروط حلقه با توجه به زیر مجموعه بودنِ R'، از R به R' القاء می‌شود. اگر R' زیر حلقهٔ R باشد که طبق تعریف خودش حلقه است و نسبت به تفاضل و ضرب بسته خواهدبود.

$$\forall a , b \in R' \Rightarrow a ,(-b) \in R' \Rightarrow a + (-b) \in R'$$

بنابراین برای اثبات زیر حلقه بودنِ یک مجموعه کافی است دو شرط الف) و ب) را برای آن بررسی کنیم و بلافاصله به قضیه استناد کرده و نتیجه بگیریم که زیر حلقه است.

مثال : نشان‌دهیدکه‌مجموعهٔ $R_1 = \{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \mid a \in IR \}$ یک زیر حلقهٔ حلقهٔ ماتریسهای ۲ × ۲ است:

$$0 \in IR \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in R_1 \Rightarrow R_1 \neq \phi$$

و واضح است که $R_1 \subset M_{2 \times 2}$. پس R_1 یک زیر مجموعهٔ ناتهی از $M_{2 \times 2}$ است. حال به بررسی دو شرط زیر حلقه می‌پردازیم:

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{a_1 - a_2}^{a_3} & 0-0 \\ 0-0 & \underbrace{a_1 - a_2}_{a_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix} \in R_1$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{a_1 a_2}^{a} & 0 \\ 0 & \underbrace{a_1 a_2}_{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \in R_1$$

مسأله ۱) ثابت کنید اشتراک دو زیر حلقه از حلقهٔ R، زیر حلقه‌ای از حلقهٔ R است.

فرض کنیم R_1 و R_2 هردو زیر حلقهٔ، حلقهٔ R باشند ثابت می‌کنیم $(R_1 \cap R_2)$ نیز زیرحلقهٔ R است.

$$0 \in R_1 \wedge 0 \in R_2 \Rightarrow 0 \in (R_1 \cap R_2) \Rightarrow (R_1 \cap R_2) \neq \phi$$

$$(R_1 \cap R_2) \subset R_1 \wedge R_1 \subset R \Rightarrow (R_1 \cap R_2) \subset R$$

پس $(R_1 \cap R_2)$ یک زیر مجموعهٔ ناتهیِ حلقهٔ R است. حال دو شرط زیر حلقه را بررسی می‌کنیم:

$$\forall x,y \in (R_1 \cap R_2) \left. \begin{array}{l} \nearrow x,y \in R_1 \xRightarrow{R_1 \text{ زیرحلقه}} x-y \in R_1 \\ \searrow x,y \in R_2 \xRightarrow{R_2 \text{ زیر حلقه}} x-y \in R_2 \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{تعریف اشتراک}}$$

$$(x-y) \in (R_1 \cap R_2)$$

$$\forall x,y \in (R_1 \cap R_2) \left. \begin{array}{l} \nearrow x,y \in R_1 \xRightarrow{R_1 \text{ زیرحلقه}} xy \in R_1 \\ \searrow x,y \in R_2 \xRightarrow{R_2 \text{ زیر حلقه}} xy \in R_2 \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{تعریف اشتراک}}$$

$$(x\,y) \in (R_1 \cap R_2)$$

۱) اگر $(G , *)$ یک گروه باشد و G' زیر مجموعهٔ ناتهی G، شرط لازم و کافی برای آنکه G' زیر گروه G باشد آن است که: $a * b' \in G'$، $\forall a , b \in G'$. (در این جا * همان + است پس b' به‌صورت $-b$ درآمده است.)

مسألهٔ ۲) نشان دهید مجموعهٔ $Q\sqrt{3} = \{a + b\sqrt{3} \mid a,b \in Q\}$ یک میدان است (همراه با دو عمل جمع و ضرب معمولی).

ابتدا ثابت می‌کنیم $Q\sqrt{3}$ یک زیر حلقهٔ $(IR, +, \circ)$ است

الف) $$(a_1 + b_1\sqrt{3}) - (a_2 + b_2\sqrt{3}) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\sqrt{3} = (a_3 + b_3\sqrt{3}) \in Q\sqrt{3}$$

ب) $$(a_1 + b_1\sqrt{3})(a_2 + b_2\sqrt{3}) = \underbrace{(a_1a_2 + 3b_1b_2)}_{a} + \underbrace{(a_1b_2 + b_1a_2)}_{b}\sqrt{3} = (a + b\sqrt{3}) \in Q\sqrt{3}$$

پس $Q\sqrt{3}$ یک زیر حلقهٔ حلقهٔ IR است لذا طبق تعریف زیر حلقه $Q\sqrt{3}$ یک حلقه است و چون $1 = 1 + 0\sqrt{3} \in Q\sqrt{3}$ پس یکدار است و جابجایی بودن را از IR به ارث می‌برد بنابراین یک حلقهٔ جابجایی و یکدار است، کافی است ثابت کنیم هر عضوِ مخالف صفر آن متقابل ضربی دارد.

$$(a + b\sqrt{3}) \times t = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{a + b\sqrt{3}} = \frac{a - b\sqrt{3}}{a^2 - 3b^2} = \frac{a}{a^2 - 3b^2} + \frac{(-b)}{a^2 - 3b^2}\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow t \in Q\sqrt{3}$$

تعریف ایده‌آل: هرگاه I زیر مجموعه‌ای ناتهی از حلقهٔ R باشد و شرایط زیر را نیز دارا باشد در این صورت I را یک ایده‌آل دو طرفه حلقهٔ R می‌نامند.

الف) $\forall\, a, b \in I,\ (a - b) \in I$

ب) $\forall\, r \in R,\ \forall\, a \in I,\ ra \in I,\ ar \in I$

(حاصل‌ضرب هرعضو حلقهٔ R در هر عضو I، چه از چپ و چه از راست عضوی از I باشد.)

نکته: همانطور که مشاهده می‌شود شرط اولِ ایده‌آلها با شرط اول زیر حلقه‌ها برابر می‌باشد و توسط شرط دوم ایده‌آلها می‌توان به شرط دوم زیر حلقه‌ها (بسته‌بودن نسبت به ضرب) دست یافت. بنابراین هر ایده‌آل یک حلقه، زیر حلقهٔ آن حلقه نیز هست ولی عکس این مطلب در حالت کلّی برقرار نیست. مثلاً $(Z, +, \circ)$ یک زیر حلقهٔ $(IR, +, \circ)$ است ولی ایده‌آل آن نیست زیرا:

$\frac{2}{3} \in IR,\ 1 \in Z$ ولی $\frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3} \notin Z$

مسأله ۱) ثابت کنید اشتراکِ دو ایده‌آلِ حلقهٔ R، ایده‌آل حلقهٔ R است.

اثبات: فرض کنیم I_1 و I_2 هر دو ایده‌آلِ حلقهٔ R باشند برای اثبات ایده‌آل بودنِ $(I_1 \cap I_2)$ فقط به اثبات شرط ب) می‌پردازیم: (شرطِ الف) در اثبات زیر حلقه بودنِ اشتراک دو زیر حلقه قبلاً ثابت شده)

$$\forall r \in IR, \forall x \in (I_1 \cap I_2) \begin{cases} x \in I_1 \xRightarrow{I_1\ \text{ایده‌آل}} rx, xr \in I_1 \\ x \in I_2 \xRightarrow{I_2\ \text{ایده‌آل}} rx, xr \in I_2 \end{cases} \xRightarrow{\text{تعریف اشتراک}}$$

$$rx, xr \in (I_1 \cap I_2)$$

مسألهٔ ۲) ثابت کنید مجموعهٔ $mZ = \{mx \mid x \in Z\}$ یک ایده‌آل حلقهٔ Z است.

اثبات: فرض کنیم $mx_1, mx_2 \in mZ$

$$mx_1 - mx_2 = m\overbrace{(x_1 - x_2)}^{x_3} = mx_3 \in mZ$$

$$\forall\, r \in Z, \forall\, mx \in mZ,\ r(mx) = (rm)x = (mr)x = m\overbrace{(rx)}^{x_1} = (mx_1) \in mZ$$

$$(mx)\,r = m\overbrace{(xr)}^{x_2} = (mx_2) \in mZ$$

مسألهٔ ۳) ثابت کنید هرگاه I ایده‌آل حلقهٔ R باشد و $1 \in I$ ، آنگاه $I = R$. (هر ایده‌آلِ یکدار از حلقهٔ R، با خود حلقهٔ R برابر است.)

اثبات: فرض کنیم I یک ایده‌ال حلقهٔ R باشد و $1 \in I$. چون I ایده‌آلِ حلقهٔ R می‌باشد، لذا $I \subset R$ (۱).
حال ثابت می‌کنیم $R \subset I$،

$$[\forall x \in R \Rightarrow x \in R \wedge 1 \in I \xRightarrow{I\ \text{ایده‌آل}} 1x \in I \Rightarrow x \in I] \Rightarrow$$

$$R \subset I\ (۲) \xRightarrow{(۱)\ \text{و}\ (۲)} I = R$$

مسألهٔ ۴) هرگاه I و J هر دو ایده‌آل حلقهٔ R باشند و $(I \cap J) = \{0\}$، ثابت کنید: $\forall a \in I, \forall b \in J, ab = 0$

اثبات:

$$(۱)\ \forall a \in I, \forall b \in J \xRightarrow{I \subset R} a \in R, b \in J \xRightarrow{J\ \text{ایده‌آل}} ab \in J$$

$$(۲)\ \forall a \in I, \forall b \in J \xRightarrow{J \subset R} a \in I, b \in R \xRightarrow{I\ \text{ایده‌آل}} ab \in I$$

$$\xRightarrow{(۱)\ \text{و}\ (۲)} ab \in (I \cap J) \Rightarrow ab \in \{0\} \Rightarrow ab = 0$$

مسألهٔ ۵) ثابت کنید تنها ایده‌آلهای هر میدان مانند F عبارتند از F و $\{0\}$.

اثبات: فرض کنیم I ایده‌آل میدان F باشد و $I \neq \{0\}$، ثابت می‌کنیم $I = F$. برای اثبات اینکه $I = F$، طبق مسألهٔ ۳) کافی است ثابت کنیم، I یک ایده‌آل یکدار است یا $1 \in I$.

$$I \neq \{0\} \Rightarrow \exists x \neq 0 \in I \xRightarrow{I \subset F} x \in F \xRightarrow{F\ \text{میدان است}} x^{-1} \in F$$

$$\Rightarrow x \in I \wedge x^{-1} \in F \xRightarrow{I\ \text{ایده‌آل}} xx^{-1} \in I \Rightarrow 1 \in I \Rightarrow I = F$$

طرح یک تست: هرگاه I یک ایده‌آل حلقهٔ $(Q, +, 0)$ (حلقهٔ اعداد گویا یا اعداد مُنطق) باشد، و $9 \in I$ ، در این صورت I کدام است؟

۱) $I = Z$ ۲) $I = Q^+$ ۳) $I = Q$ ۴) $I = Z^+$

حل) گزینهٔ ۳) صحیح است زیرا:
Q میدان است و طبق مسألهٔ ۵) فقط می‌تواند دو ایده‌آل داشته باشد یکی $\{0\}$ و دیگری خودش یعنی Q، بنابراین $I = \{0\}$ یا $I = Q$ و چون $9 \in I$ پس $I \neq \{0\}$ و لذا $I = Q$.

مسألهٔ ۶) ثابت کنید هرگاه H و K هردو ایده‌آل حلقهٔ R باشند، در این‌صورت $H + K = \{(h + k) \mid h \in H, k \in K\}$ نیز یک ایده‌آل R است (جمع دو ایده‌آل، ایده‌آل است).

اثبات: $0 \in H \wedge 0 \in K \Rightarrow 0 + 0 \in H + K \Rightarrow 0 \in H + K$
$\Rightarrow (H + K) \neq \phi$

$$\text{اگر}\ (h+k) \in (H+K) \left.\begin{array}{l} h \in H \Rightarrow h \in R \\ k \in K \Rightarrow k \in R \end{array}\right\} \Rightarrow (h + k) \in R$$

$$\Rightarrow (H + K) \subset R$$

بنابراین ثابت کردیم $(H + K)$ یک زیر مجموعهٔ ناتهی از حلقهٔ R است. حال کافی است دو شرط ایده‌آل را بررسی کنیم:

$$(h_1 + k_1), (h_2 + k_2) \in (H+K) \left.\begin{array}{l} h_1, h_2 \in H \\ k_1, k_2 \in K \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} (h_1 - h_2) \in H \\ (k_1 - k_2) \in K \end{array}\right\} \Rightarrow (h_1 - h_2) + (k_1 - k_2) \in H + K\ (۱)$$

$$(h_1 + k_1) - (h_2 + k_2) = (h_1 + k_1) + [-h_2 + (-k_2)]$$
$$= [(h_1 + k_1) - h_2] - k_2 = [h_1 + (k_1 - h_2)] - k_2$$
$$= [h_1 + (-h_2 + k_1)] - k_2 = [(h_1 - h_2) + k_1] - k_2$$
$$= (h_1 - h_2) + (k_1 - k_2) \in h + k \leftarrow \text{طبق}\ (۱)$$

$$r \in R, h+k \in H+K \Rightarrow \left.\begin{array}{l} h \in H \Rightarrow rh, hr \in H \\ k \in K \Rightarrow rk, kr \in K \end{array}\right\} \Rightarrow$$

فرض کنیم

$$(rh + rk) \in H + K$$

(۲)

$$(hr + kr) \in H + K$$

$$r(h + k) = rh + rk \in H + K$$

طبق (۲) ←

$$(h + k)r = hr + kr \in H + K$$

لذا $\underline{H + K}$ یک ایده‌آل R است.

نکته ۱ : ثابت می‌شود ایده‌آلهای حلقهٔ اعداد صحیح یعنی $(Z , + , \circ)$ فقط به صورت mZ هستند که :

$$mZ = \{mx \mid x \in Z\}$$

مانند $۲Z$ و $۳Z$ و ... (مضارب ۲ و مضارب ۳ و ...)

نکته ۲ : برای هر دو عدد صحیح مثبت مانند a و b داریم:

$$aZ + bZ = dZ$$

که d بزرگترین مقسوم‌علیه مشترکِ اعداد a و b است. در حقیقت این نکته با این قضیه در تئوری اعداد هم ارز است:

«بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد بر هر مقسوم علیه مشترک آن دو عدد بخش‌پذیر است.»

واضح است که اگر a و b نسبت به هم اول باشند یعنی $d = ۱$ در این صورت $aZ + bZ = Z$.

نکته ۳ : به ازای هر دو عدد صحیح و مثبت مانند a و b داریم:

$$aZ \cap bZ = mZ$$

که m کوچکترین مضرب مشترک a و b است.

این نکته نیز با قضیهٔ زیر در تئوری اعداد هم ارز است.

«هر مضرب مشترک دو عدد بر کوچکترین مضرب مشترک آن دو عدد بخش‌پذیر است.»

به مثالهای زیر توجه کنید:

۱) $۲Z + ۳Z = Z$
۲) $۲Z \cap ۳Z = ۶Z$
۳) $۲Z \cap ۴Z = ۴Z$
۴) $۲Z + ۴Z = ۲Z$

در خاتمهٔ این مقاله با امید به اینکه مطالب فوق تا حدودی مشکلات و مسائل مربوط به این قسمت از کتاب را برطرف کرده باشد متذکر می‌شوم که، نظریه حلقه‌ها و میدانها بسیار وسیع و پیشرفته‌تر از آن است که بتوان همه را در یک مقاله جمع‌آوری نمود و در این مقاله سعی شده در حد نیاز به آن پرداخته شود.

والسلام.

ادب و ریاضی

من نمی‌دانم به چه صورتی ممکن است در نظر جهانیان جلوه گر شوم، اما به نظر خودم چنین می‌آید که همچون کودک خردسالی هستم که در ساحل زیبای دریا به بازی مشغولم و گاه و بی‌گاه سنگ ریزه‌ای صاف‌تر از سنگهای دیگر یا صدفی زیباتر از صدفهای دیگر به دست می‌آورم، در حالی که اقیانوس عظیم حقیقت در مقابل من گسترده است و مرا از آن آگاهی نیست.

اسحق نیوتن، ریاضی دانان نامی

ارنک تمپل بل

حسن صفاری

پارادوکس* وصیت شگفت‌انگیز

نوشتهٔ مارتین گاردنر

ترجمهٔ حسن نصیرنیا

یک وکیل دعاوی ثروتمند ۱۱ اتومبیل گرانبهای قدیمی داشت که ارزش هر یک در حدود ۲۵۰۰۰ دلار بود.

پس از مرگ وکیل، وصیت‌نامه‌ای از او به جا ماند. در وصیت‌نامه آمده بود که ۱۱ اتومبیل او میان سه پسرش به این ترتیب تقسیم شود که نیمی از اتومبیلها به فرزند ارشد، یک چهارم آنها به فرزند میانی و یک ششم دیگر به فرزند کوچکتر برسد.

همگی مات و مبهوت مانده بودند که چگونه می‌توان ۱۱ اتومبیل را به دو یا چهار و یا شش قسمت مساوی تقسیم کرد.

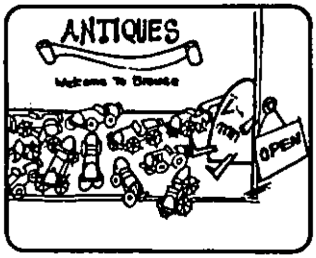
وقتی فرزندان وکیل بر سر چگونگی تقسیم آنها بگومگو می‌کردند، خانم «رقم پیشه» کارشناس عددشناسی نامدار، سوار بر اتومبیل اسپرت جدید خود از راه رسید.

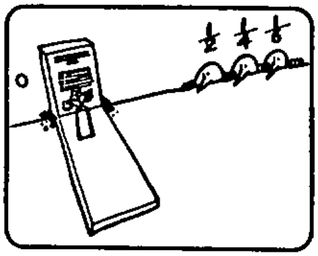
خانم رقم پیشه: سلام بچه‌ها. مثل این که مسأله‌ای برای شما پیش آمده است. چه خدمتی از من برمی‌آید؟ پس از این که پسران وکیل موضوع را برای خانم «رقم پیشه» تعریف کردند، او اتومبیل اسپرتش را در کنار ۱۱ اتومبیل قدیمی آنها پارک کرد و از آن بیرون پرید. **خانم رقم پیشه:** خب، بچه‌ها بگویید ببینم چند اتومبیل در این جا پارک شده است؟ پسرها اتومبیلها را شمردند، ۱۲ دستگاه بود.

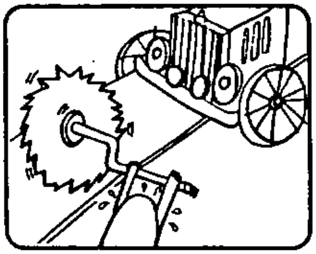
سپس خانم رقم پیشه با استناد به موضوع وصیت‌نامه شروع به تقسیم اتومبیلها کرد. به این ترتیب که نیمی از اتومبیلها یعنی شش دستگاه را به پسر ارشد، یک چهارم آنها را به پسر میانی و یک ششم بقیه یعنی دو دستگاه را به کوچکترین پسر داد. **خانم رقم پیشه:** ٦ به علاوهٔ ۳ به علاوهٔ ۲ دقیقا" ۱۱ می‌شود. و این یکی هم اتومبیل خود من.

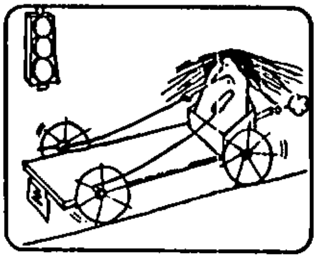
خانم رقم پیشه توی اتومبیل خود پرید و آن جا را ترک کرد.

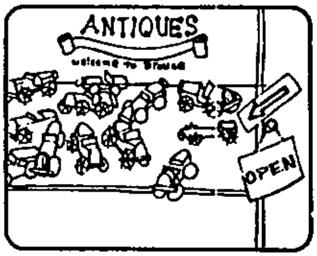
خانم رقم پیشه: هرکمک دیگری از دستم بربیاید، درآینده درخدمت شما فرزندانم خواهم بود. صورت حساب مربوط به هزینهٔ این مشاوره را برایتان خواهم فرستاد!

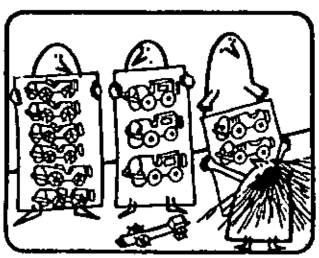


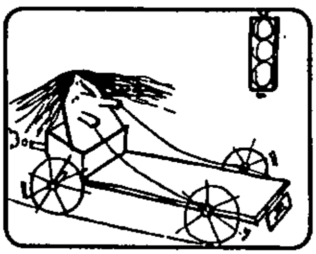












این پارادوکس شکل جدیدی از یک پارادوکس عربی[1] است که در آن به جای اتومبیلها، چند اسب موضوع تقسیم است. می‌توان شرایط وصیت‌نامه را با تغییر دادن تعداد اتومبیلها و تقسیم آنها بر مجموعهٔ دیگری از کسرها تغییر داد، مشروط بر این که وام گرفتن یک اتومبیل سبب اجرای درست وصیت شود و پس از تقسیم ما ترک، یک اتومبیل باقی بماند تا به وام دهنده مسترد گردد.

برای مثال، فرض کنیم ۱۷ اتومبیل داریم که طبق وصیت‌نامه باید به نسبتهای $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۹}$ میان سه نفر تقسیم شود. اگر تعداد اتومبیلها را n و سه کسر مربوط را $\frac{1}{a}$، $\frac{1}{b}$ و $\frac{1}{c}$ بگیریم، پارادوکس فقط در صورتی مصداق می‌یابد که معادلهٔ زیر:

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

دارای پاسخی با عددهای صحیح مثبت باشد. در این جا شما را فرا می‌خوانیم تا با مداقهٔ بیشتر در این‌باره، در صورت امکان راهی بیابید که با افزایش عدهٔ وارثان و نیز افزایش تعداد اتومبیلهای به عاریت گرفته شده، بتوان وصیت را عملی کرد.

البته حل این پارادوکس در گرو آن است که مجموع کسرهای مورد اشاره در وصیت‌نامه (پیش از افزودن هرگونه اتومبیل عاریتی) کمتر از ۱ باشد. چنانچه اجرای وصیت‌نامه در واقع به شیوهٔ قطعه قطعه کردن اتومبیلها صورت می‌گرفت، $\frac{۱۱}{۱۲}$ از یک اتومبیل باقی می‌ماند. خانم رقم پیشه به شیوهٔ توزیع همان $\frac{۱۱}{۱۲}$ میان پسران عمل کرد. به این ترتیب که پسر بزرگ $\frac{۶}{۱۲}$ یک اتومبیل، پسر میانی $\frac{۳}{۱۲}$ و پسر کوچک $\frac{۲}{۱۲}$ یک اتومبیل بیشتر از سهمیه مقرر دریافت کرد. حاصل جمع این سه کسر $\frac{۱۱}{۱۲}$ می‌شود و از آن جا که در حال حاضر هر پسر به تعداد یک عدد صحیح از اتومبیلها سهم می‌برد، نیازی به قطعه قطعه کردن اتومبیلها نیست.

---

* پارادوکس، Paradox ، (یا باطلنما) واژه‌ای یونانی به مفهوم «فراتر از اعتقاد» است و منظور از آن احکامی است که با عقل متعارف یا اصول مقدماتی منطق در تضاد باشد. ـ م.

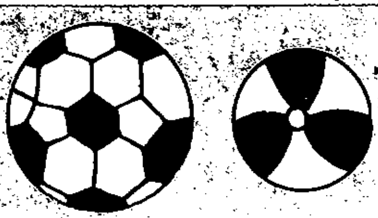
۱ـ شاید منظور نویسنده مسألهٔ مشابهی است که حل آن منسوب به حضرت علی (ع) است. در کتاب ناسخ التواریخ، جلد سّوم آمده است، سه مرد بر آن بودند که ۱۷ شتر همانند را به نسبتهای $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۹}$ میان خود تقسیم کنند. چون هیچ یک از سه مدعی حاضر نبود حتی از ذرّه‌ای از سهم خود به نفع دیگری بگذرد، یا این‌که با به میان نهادن مقداری درهم یا دینار مشکل تقسیم به نسبت را حل کند، کار آنان به مشاجره و بن‌بست رسید. ناگزیر برای حل اختلاف و داوری نزد حضرت علی (ع) رفتند. حضرت با شنیدن دعویِ آنان تدبیری اندیشیدند، به این ترتیب که یک شتر از آنِ خویش بر تعداد شترها افزودند و مجموع آنها را به ۱۸ رساندند. سپس با تقسیم ۱۸ بر عددهای ۲ و ۳ و ۹ به ترتیب ۹ و ۶ و ۲ (مجموعاً ۱۷ شتر) به دست آمد که هریک از این ارقام قدری بیشتر از سهم مورد درخواست آن سه مرد بود و همگی خشنود و سپاسگزار شدند. پس از تقسیم عادلانهٔ شتران، آن حضرت شتر خویش را پس گرفتند.

برای آگاهی از یک پارادوکس مشابه دیگر، نگاه کنید به فصل ۵ ، تقسیم مزرعه در کتاب «سرگرمیهای علمی و آموزشی» جلد ۲ ، ترجمهٔ حسن نصیرنیا، انتشارات مدرسه، تابستان ۱۳۷۱ . ـ م.

مأخذ و ترجمهٔ مقاله:

Gardner, Martin. aha! Gotcha ,
Paradoxes to puzzle & Delight, W.H. Freeman & Company , New York, 1982.

تفریح اندیشه ۴



دو توپ به ترتیب به قطرهای ۸ و ۴ سانتی‌مترند.
«توپ بزرگتر» چندمرتبه بیشتر است؟

جواب در صفحهٔ ۹۶

تعیین دامنه و برد توابع

(قسمت سوّم)

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

در دو شمارهٔ قبل مسئلهٔ تعیین دامنه و برد ۸ نوع تابع را متذکر شدیم. در این شماره نیز تعیین دامنه و برد توابع معکوس و مرکب ارائه خواهد شد.

۹ـ تعیین دامنه و برد توابع معکوس [14] (وارون):

تعیین دامنه و برد توابع معکوس وقتی معنا پیدا می‌کند که یک به یک بودنشان مسلم باشد، زیرا شرط لازم و کافی برای آن‌که تابع f وارون پذیر باشد، آن است که f یک به یک باشد. به بیان دیگر اگر f یک به یک نباشد وارون آن یعنی f^{-1} یک تابع نیست. به‌عنوان مثال وارون.تابع زیر یک تابع نیست زیرا یک‌به یک نیست.

$$f=\{(-1,4),(1,3),(2,1),(3,4)\}$$

f^{-1} یک رابطه است و تابع نیست زیرا داریم:

$$R=f^{-1}=\{(4,-1),(3,1),(1,2),(4,3)\}$$

و دو زوج مرتب (۳ و ۴) و (۱− و ۴) در آن موجود است که مؤلفهٔ اول آنان با هم مساوی است ولی مؤلفهٔ دوم آنان با هم مساوی نیست. بدیهی است که این رویداد از عدم یک به یک بودن تابع ناشی شده است. می‌دانیم اگر تابعی یک به یک باشد هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن یافت نمی‌شود که مؤلفهٔ دوم آنان با هم مساوی باشد. همچنین می‌دانیم نمودار هر تابع و تابع معکوس آن نسبت به خط $y=x$ قرینهٔ یکدیگرند، زیرا دو نقطهٔ $M(x,y)$ و $M'(y,x)$ نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم دستگاه مختصات قرینهٔ یکدیگر می‌باشند. بنابراین در این‌جا نتیجه می‌شود که اگر f تابعی از D_f به R_f $(f:D_f\rightarrow R_f)$ تعریف شده باشد و همچنین f یک به یک باشد آنگاه تابع معکوس (وارون) آن f^{-1} از R_f به D_f $(f^{-1}:R_f\rightarrow D_f)$ تعریف خواهد شد و داریم:

$$D_{f^{-1}}=R_f\,,\ R_{f^{-1}}=D_f$$

توجه: f^{-1} نمادی برای تابع معکوس (وارون) است و نباید با $\frac{1}{f}$ اشتباه شود.

مثال ۲۹: دامنه و برد تابع معکوس $f=\{(1,3),(-1,5),(3,1)\}$ و مجموعهٔ f^{-1} را به‌دست آورید.

حل: همان‌طور که مشاهده می‌شود تابع f یک به یک است پس معکوس‌پذیر است و داریم:

$$D_f=\{1,-1,3\}\ \text{و}\ R_f=\{3,5,1\}$$

بنابراین دامنه و برد تابع معکوس f یعنی f^{-1} چنین است:

$$D_{f^{-1}}=R_f=\{1,3,5\}\ \text{و}\ R_{f^{-1}}=D_f=\{-1,1,3\}$$

مجموعه f^{-1} چنین است:

$$f^{-1}=\{(3,1),(5,-1),(1,3)\}$$

---

14) Ineverse functions

مثال ۳۰: دامنه و برد تابع با ضابطهٔ $y = g(x) = Arc\ cosx$ راتعیین کنید.

حل: با توجه به ضابطهٔ تابع نتیجه می‌شود که تابع فوق وارون تابع $f(x) = cosx$ است. از آنجا که تابع $f(x) = cosx$ در هر یک از بازه‌های زیر یک به یک و در نتیجه وارون پذیر است:

... یا $[۲\pi$ و $\pi]$ یا $[\pi$ و $۰]$ یا $[۰$ و $-\pi]$ یا $[-\pi$ و $-۲\pi]$ یا...

بنابراین هریک از بازه‌های فوق را می‌توان به‌عنوان برد تابع $g(x)$ درنظر گرفت.

با انتخاب یکی از بازه‌های فوق درهر صورت دامنهٔ تابع $g(x)$ چنین نتیجه خواهد شد:

$$D_g = [-۱ \text{ و } ۱]$$

معمولاً برای سادگی، بازهٔ $[\pi$ و $۰]$ را برای برد تابع $g(x)$ اختیار می‌کنند:

$$R_g = [۰ \text{ و } \pi]$$

مثال ۳۱: دامنه و برد تابع با ضابطهٔ زیر را تعیین کنید.

$$y = f(x) = Arc\ sin \frac{۲x}{۱-x^۲}$$

حل: تعیین دامنهٔ تابع: $D_f = \left\{ x \mid -۱ \le \frac{۲x}{۱-x^۲} \le ۱ \right\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{۲x}{۱-x^۲} \le ۱ \\ \frac{۲x}{۱-x^۲} \ge -۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x^۲ + ۲x - ۱}{۱-x^۲} \le ۰ \\ \frac{-x^۲ + ۲x + ۱}{۱-x^۲} \ge ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} ۱-x^۲ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱ \\ x^۲ + ۲x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \pm \sqrt{۲} \\ -x^۲ + ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \pm \sqrt{۲} \end{array} \right.$$

x	$-\infty$ تا $-۱-\sqrt{۲}$	$-۱-\sqrt{۲}$ تا -۱	-۱ تا $۱-\sqrt{۲}$	$۱-\sqrt{۲}$ تا $-۱+\sqrt{۲}$	$-۱+\sqrt{۲}$ تا ۱	۱ تا $۱+\sqrt{۲}$	$۱+\sqrt{۲}$ تا $+\infty$
$\frac{x^۲ + ۲x - ۱}{۱-x^۲}$	−	+	−	−	+	−	−
$\frac{-x^۲ + ۲x - ۱}{۱-x^۲}$	+	+	−	+	+	−	+

$$\Rightarrow D_f = (-\infty, -۱-\sqrt{۲}] \cup [۱-\sqrt{۲}, -۱+\sqrt{۲}] \cup [۱+\sqrt{۲}, +\infty)$$

تعیین برد تابع: $y = Arc\ sin \frac{۲x}{۱-x^۲} \Rightarrow siny = \frac{۲x}{۱-x^۲}$

$$(۱-x^۲) sin y = ۲x \Rightarrow siny - x^۲ sin y = ۲x$$

$$x^۲ siny + ۲x - siny = ۰ \Rightarrow x = \frac{-۱ \pm \sqrt{۱ + sin^۲ y}}{siny}$$

$$siny \ne ۰ \Rightarrow y \ne k\pi$$

برای برد تابع معکوس سینوسی یکی از بازه‌های زیر را می‌توان انتخاب کرد. زیرا تابع سینوسی در هریک از فاصله‌های زیر یک به یک و در نتیجه معکوس‌پذیر است.

... یا $\left[\frac{۳\pi}{۲}\right.$ و $\left.\frac{\pi}{۲}\right]$ یا $\left[\frac{\pi}{۲}\right.$ و $\left.\frac{-\pi}{۲}\right]$ یا $\left[\frac{-\pi}{۲}\right.$ و $\left.\frac{-۳\pi}{۲}\right]$ یا ...

معمولاً برای سادگی بُرد تابع معکوس سینوسی رابازهٔ $\left[\frac{\pi}{۲}\right.$ و $\left.\frac{-\pi}{۲}\right]$ اختیار می‌کنند. بنابراین برد تابع فوق چنین است:

$$R_f = \left[\frac{-\pi}{۲} \text{ و } \frac{\pi}{۲}\right]$$

مثال ۳۲: دامنه و برد تابع با ضابطهٔ زیر را تعیین کنید.

$$y = g(x) = Arctgx$$

حل: با توجه به ضابطهٔ تابع نتیجه می‌شود که تابع $g(x)$ وارون تابع $f(x) = tgx$ است. تابع $f(x)$ در بازه‌های زیر یک به یک و در نتیجه معکوس‌پذیر است:

... یا $(\frac{\pi}{۲} \text{ و } \frac{۳\pi}{۲})$ یا $(\frac{-\pi}{۲} \text{ و } \frac{\pi}{۲})$ یا $(\frac{-۳\pi}{۲} \text{ و } \frac{-\pi}{۲})$ یا ...

با انتخاب هر یک از این فاصله‌ها برای برد تابع $g(x)$ در هر صورت دامنهٔ تابع $g(x)$ چنین است:

$$D_g = (-\infty \text{ و } +\infty)$$

بنابراین برد تابع $g(x)$ را می‌توان یکی از بازه‌های فوق اختیار کرد. معمولاً برای سادگی برد تابع $g(x)$ را در بازهٔ $(\frac{-\pi}{۲} \text{ و } \frac{\pi}{۲})$ درنظر می‌گیرند. بنابراین داریم:

$$R_g = (\frac{-\pi}{۲} \text{ و } \frac{\pi}{۲})$$

۱۰ـ تعیین دامنه و برد توابع مرکب[15]:

ترکیب دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را با نماد $f(g(x))$ یا $fog(x)$ نمایش می‌دهیم و آن را تابع مرکب می‌نامیم و در حالت عمومی دامنهٔ آن را چنین تعریف می‌کنیم:

$$D_{fog} = \{x \in Dg \mid g(x) \in D_f\}$$

به‌طور کلی همواره می‌توان دامنه و برد تابع مرکب fog را پس از ترکیب دو تابع f و g تعیین کرد.

15) composite functions

مثـال ۳۳: توابع $f =$ {(۲ و ۱) و (۳ و ۵) و (۱ و ۶)} و $g =$ {(۱ و ۳) و (۲ و ۴) و (۴ و ۱)} مفروضند، دامنه و برد توابع مرکب زیر را تعیین کنید.

الف) fog ب) gof ج) $(۲f + ۳g)\ o\ (g-۳f)$

د) $(۳f . g)\ o\ (\frac{f}{g})$

حل: الف) می‌دانیم: $fog(x) = f(g(x))$

با توجه به مجموعه‌های f و g و تعریف تابع مرکب داریم:

$$\begin{tikzcd} ۱ \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "fog"] & ۳ \arrow[r, "f"] & ۵ \end{tikzcd}$$

$$۲ \xrightarrow{g} ۴ \xrightarrow{f} ?$$

$$\begin{tikzcd} ۴ \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "fog"] & ۱ \arrow[r, "f"] & ٦ \end{tikzcd} \Rightarrow fog = \{(۱ \text{ و } ۵) \text{ و } (۴ \text{ و } ٦)\}$$

بدیهی است در این‌جا می‌توان با توجه به مجموعهٔ fog دامنه و برد آن را تعیین کرد:

$$D_{fog} = \{۱ \text{ و } ۴\} \text{ و } R_{fog} = \{۵ \text{ و } ٦\}$$

ب) می‌دانیم: $gof(x) = g(f(x))$

$۱ \xrightarrow{f} ٦ \xrightarrow{g} ?$ و $۳ \xrightarrow{f} ۵ \xrightarrow{g} ?$ و $\begin{tikzcd} ۲ \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "gof"] & ۱ \arrow[r, "g"] & ۳ \end{tikzcd}$

$$\Rightarrow gof = \{(۲ \text{ و } ۳)\} \Rightarrow D_{gof} = \{۲\} \text{ و } R_{gof} = \{۳\}$$

ج) لازم به توضیح است که معنی kf این است که مؤلفهٔ دوم هر زوج مرتب f را k برابر کنیم. به‌عنوان مثال اگر $(a , b) \in f$ آنگاه $(a , kb) \in kf$ است. در این صورت اگر $(a , b) \in f$ آنگاه $(a , ۲b) \in ۲f$ است. بنابراین داریم:

$$2f = \{(1,12),(3,10),(2,2)\}$$

$$3g = \{(3,4),(2,12),(1,9)\}$$

$$3f = \{(1,18),(3,15),(2,3)\}$$

از طرفی می‌دانیم: $D_{f\pm g} = D_f \cap D_g$ و در نتیجه خواهیم داشت:

$$D_{2f+3g} = \{1,2\}$$

$$\Rightarrow 2f + 3g = \{(1,12+9),(2,2+12)\}$$

$$2f + 3g = \{(1,21),(2,14)\}$$

$$\Rightarrow R_{2f+3g} = \{21,14\}$$

همچنین داریم:

$$D_{g-3f} = \{1,2\}$$

$$\Rightarrow g-3f = \{(1,3-18),(2,4-3)\}$$

$$= \{(1,-15),(2,1)\}$$

$$R_{g-3f} = \{-15,1\}$$

و بنابراین داریم: $(2f + 3g)\, o\, (g - 3f) = \{(2,21)\}$

زیرا:

$(2f + 3g)\, o\, (g - 3f)$

$2 \xrightarrow{g-3f} 1 \xrightarrow{2f+3g} 21$ و $1 \xrightarrow{g-3f} (-15) \xrightarrow{2f+3g} ?$

در نتیجه دامنه و برد تابع مرکب فوق چنین است:

$$D_{(2f+3g)\, o\, (g-3f)} = \{2\}$$

$$R_{(2f+3g)\, o\, (g-3f)} = \{21\}$$

د) داریم:

$$D_{\frac{f}{g}} = \{1,2\} \Rightarrow \frac{f}{g} = \{(1,\tfrac{6}{3}),(2,\tfrac{1}{4})\}$$

$$= \{(1,2),(2,\tfrac{1}{4})\}$$

$$D_{3f.g} = \{1,2\} \Rightarrow 3f.g = \{(2,3\times 4),(1,18\times 3)\}$$

$$3f.g = \{(2,12),(1,54)\}$$

$(3f.g)\, o\, (\frac{f}{g})$

$1 \xrightarrow{\frac{f}{g}} 2 \xrightarrow{3f.g} 12$ و $2 \xrightarrow{\frac{f}{g}} \frac{1}{4} \xrightarrow{3f.g} ?$

$$\Rightarrow (3f.g)\, o\, (\frac{f}{g}) = \{(1,12)\} \Rightarrow$$

$$D_{(3f.g)\, o\, (\frac{f}{g})} = \{1\} \quad \text{و} \quad R_{(3f.g)\, o\, (\frac{f}{g})} = \{12\}$$

مثال ۳۴: توابع با ضوابط $g(x) = \frac{1}{x}$ و $f(x) = 10^{-1\cdot\log(\log x)}$ مفروضند، دامنه و برد توابع مرکب $fog(x)$ و $gof(x)$ را تعیین کنید.

حل: در ابتدا دامنهٔ هریک از توابع $f(x)$ و $g(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$D_f = \{x \mid \log x > 0\} = (1,+\infty) \quad \text{و} \quad D_g = R - \{0\}$$

تابع $f(x)$ در دامنهٔ تعریفش به شکل سادهٔ شدهٔ $f(x) = \frac{1}{x}$ تحویل می‌شود:

$$f(x) = 10^{-1\cdot\log(\log x)} \xRightarrow{\log x > 0}$$

$$f(x) = 10^{-\log x} = 10^{\log\frac{1}{x}}$$

$$\xRightarrow{\frac{1}{x} > 0} f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{و} \quad D_f = (1,+\infty)$$

بنابراین با توجه به دامنه‌های توابع داریم:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \in R - \{0\} \mid \frac{1}{x} > 1\} = (0,1)$$

$$D_{gof} = \{x \in D_g \mid f(x) \in D_g\}$$
$$= \{x \in (1, +\infty) \mid \frac{1}{x} \in R - \{0\}\} = (1, +\infty)$$

همچنین برای تابع fog داریم:

$$fog(x) = f(g(x)) = f(\frac{1}{x}) = 10^{-1\cdot\log \log(\frac{1}{x})}$$

$$\log(\frac{1}{x}) > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 1 \Rightarrow \frac{1}{x} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{1-x}{x} > 0$$
$$\Rightarrow x \in (0, 1)$$

$$\Rightarrow y = fog(x) = 10^{-\log \frac{1}{x}} = 10^{\log x} \xRightarrow{x \in (0,1)}$$
$$y = fog(x) = x \Rightarrow D_{fog} = (0, 1)$$

تعیین برد تابع fog:

$$y = x \Rightarrow x = y \in (0, 1) \Rightarrow 0 < y < 1 \Rightarrow R_{fog} = (0, 1)$$

و همین‌طور برای تابع gof داریم:

$$gof(x) = g(f(x)) = g(10^{-1\cdot\log(\log x)}) = 10^{1\cdot\log(\log x)}$$

$$\Rightarrow \log x > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow gof(x) = 10^{\log x}$$

$$\xRightarrow{x > 1} gof(x) = x,\ x \in (1, +\infty) \Rightarrow D_{gof} = (1, +\infty)$$

تعیین برد تابع gof:

$$z = gof(x) = x \Rightarrow x = z \in (1, +\infty)$$
$$\Rightarrow z > 1 \Rightarrow R_{gof} = (1, +\infty)$$

بنابراین به‌طور خلاصه دامنه و برد توابع fog و gof چنین می‌شوند:

$$D_{fog} = R_{fog} = (0, 1)$$
$$D_{gof} = R_{gof} = (1, +\infty)$$

مثال ۳۵: توابع $gof(x) = \sqrt{x+1}$ و $f(x) = \frac{x}{x+1}$ مفروضند. دامنه و برد تابع مرکب $fog(x)$ را تعیین کنید.

حل: برای تعیین دامنه و برد تابع $fog(x)$ ابتدا باید ضابطهٔ آن را بیابیم. برای این منظور ابتدا ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$gof(x) = g(f(x))$$

$$g(\frac{x}{x+1}) = \sqrt{x+1} \Longrightarrow \frac{x}{x+1} = t \Longrightarrow x = \frac{t}{1-t}$$

$$g(t) = \sqrt{\frac{t}{1-t} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

t متغیر ظاهری است، بنابراین ضابطهٔ $g(x)$ چنین است:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

اینک ضابطهٔ $fog((x)$ را می‌نویسیم:

$$fog(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)}{g(x) + 1}$$

$$fog(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}} + 1} \xRightarrow{x \neq 1} y = fog(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{1-x}}$$

تعیین دامنه تابع fog:

$$\begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x < 1 \Rightarrow D_{fog} = (-\infty, 1)$$

تعیین برد تابع fog: ابتدا از ضابطهٔ تابع نتیجه می‌شود: $y > 0$.
همچنین داریم:

$$1 + \sqrt{1-x} = \frac{1}{y} \Longrightarrow \sqrt{1-x} = \frac{1}{y} - 1 = \frac{1-y}{y} > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1-y}{y} > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < y < 1$$

بنابراین برد تابع چنین است: $R_{fog} = (۰ و ۱)$

مثال ۳۶: اگر $f(x) = x - 1$ و $fog(x) = \dfrac{1}{x-1}$ آنگاه دامنه و برد تابع مرکب $gof(x)$ را تعیین کنید.

حل: ابتدا ضابطهٔ تابع $gof(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x) = x - 1 \Rightarrow f(g(x)) = g(x) - 1$$
$$\Rightarrow fog(x) = g(x) - 1$$
$$\frac{1}{x-1} = g(x) - 1 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{x-1} + 1 = \frac{x}{x-1}$$
$$\Rightarrow g(x) = \frac{x}{x-1}$$

اینک ضابطهٔ $gof(x)$ را می‌نویسیم:

$$y = gof(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)}{f(x)-1} = \frac{x-1}{x-2}$$

تعیین دامنهٔ تابع gof: $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow D_{gof} = R - \{2\}$

تعیین برد تابع gof: $y = \dfrac{x-1}{x-2} \Rightarrow x = \dfrac{2y-1}{y-1}$

$$y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow R_{gof} = R - \{1\}$$

در این‌جا به بحث و بررسی دامنه و برد توابع خاتمه می‌دهیم و در شماره‌های آیندهٔ مجله به مطالب جنبی دیگر تابع می‌پردازیم.

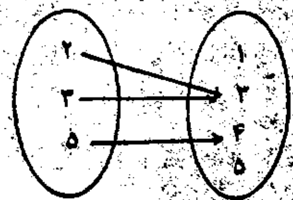
پوزش:

صورت مسألهٔ ۲۴ در قسمت دوم، مندرج در شمارهٔ ۷ برهان به شکل زیر اصلاح شود.

دامنه و برد تابع با ضابطهٔ زیر را تعیین کنید:

$$y = f(x) = \sqrt{\log\left(\frac{10(x+1)}{x^2-1}\right)\left[\frac{x^2-1}{x+1}\right] + \cos x}$$

نمودار مثال ۱، مندرج در برهان ۹ به شکل زیر اصلاح شود.



ادب ریاضی

دومین شاخهٔ ریاضیات که در آن تحولات قرن نوزدهم تأثیر زیادی بر کار علمی آتی داشت هندسه بود، زیرا در این قرن دو نظام هندسی کاملاً تازه مطرح شد. این نظامات ناشی از شکست دو قضیهٔ هندسهٔ اقلیدس بود. طرح کلی هندسهٔ اقلیدس بنی استادانه و یادوارهٔ باشکوه منطق انسان بود. این هندسه بیش از دو هزار سال بلامنازع حکم رانده و تا قرن نوزدهم، کم‌کم مترادف با جنبه‌ای از معنی «حقیقت» شده بود. اما دو قضیه وجود داشت که با هیچ استدلال منطقی قابل اثبات نبود. یکی مشعر بر این بود که پاره‌خط را می‌توان از هر دوسو تا بی نهایت امتداد داد. دیگری اشعار می‌داشت که دو خط موازی، تا هر جا که امتداد یابند، یکدیگر را قطع نمی‌کنند. گرچه هر دو بدیهی به نظر می رسند، اما نه اقلیدس و نه هندسه‌دانهای بعد از او هیچ یک نتوانستند آنها را رسما" به اثبات برسانند. اقلیدس خود همیشه در مورد این دو قضیه احتیاط می‌کرد و سعی داشت تا آن جا که می‌تواند از فرض خطوط موازی استفاده نکند.

کالین اـ رنان. تاریخ علم کمبریج
حسن افشار

مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۶)

ION CUCUREZEANU
Journal of Number Theory 44 (1993)

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

راه حل مقدماتی مسألهٔ لوکاس

با استفاده از روش نزول نامتناهی[1]، معادلهٔ پل[2]، و قانون تقابل درجهٔ دوم[3]، ثابت شده است که معادلهٔ $x(x+1)(2x+1)=6y^2$ تنها دارای جواب صحیح وناصفر[4]، $x=24$، $y=70$ است.

در ۱۸۷۵ لوکاس[5] [1] حدس زد که تنها جواب صحیح و ناصفر معادلهٔ

$$x(x+1)(2x+1)=6y^2 \qquad (*)$$

$x=24$، $y=70$ است. معادلهٔ (*) زمانی رخ می‌دهد که شخص این سؤال رامطرح کند که کدام عدد هرمی[6] مربع است، یعنی در جستجوی مقدار n ی باشد که به ازای آن $1^2+2^2+\dots+n^2$ مربع عددی طبیعی است.

مسألهٔ «چهاروجهی = مربع»[7] نیز به همین معادله منجر می‌شود، زیرا (*) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$2x(2x+1)(2x+2)=6(2y)^2$$

در ۱۹۱۹، واتسون[8]، [2] مسألهٔ لوکاس را (به اثبات) حل کرد. راه حل وی، مبتنی بر نظریهٔ توابع بیضوی[9]، بسیار پیچیده است.

راه حل مشکل دیگری توسط لجانگرن[10] [3] در سال ۱۹۵۲ داده شد. راه حل مزبور که کوتاه‌تر از راه حل واتسون است، بستگی به معادلهٔ پلی در هیأت درجهٔ دومی[11] دارد، که به هیأت درجه چهارمی[12] منجر می‌شود که جمیع هیأتهای مزدوجش[13] انگاری[14]اند.

مسألهٔ مزبور در اغلب کتب نظریهٔ اعداد[15] ذکر شده است. مردل[16] [4] و گای[17] [5] این پرسش را، که در این مورد راه حلی مقدماتی وجود دارد یا نه، مطرح کرده‌اند. (جالب توجه است که پرسش مزبور اخیراً در مجلهٔ زیر تکرار شده است:

Notices Amer. Math. Soc. 32, No.5 (243) (1985), (608)

هدف این مقاله به دست دادن چنین راه حلی است.

معادلهٔ (*) از آن‌جاکه x، $x+1$ و $2x+1$ نسبت به هم اول[18] هستند، به یکی از دستگاههای زیر، با $(v,t)=1$ و $y=vt$، منجر می‌شود:

$$(\mathrm{I})\begin{cases} x(x+1)=6t^2 \\ 2x+1=v^2 \end{cases} \quad \text{و} \quad (\mathrm{II})\begin{cases} x(x+1)=2t^2 \\ 2x+1=3v^2 \end{cases}$$

اگر شخص (I) را ابتدا به پیمانهٔ[19] ۸،

$$(v\equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow v^2\equiv 1 \pmod 8 \Rightarrow 2\,|\,x)$$

و سپس به پیمانه ۳،

$$(3\,|\,x+1 \Rightarrow v^2=2x+1\equiv -1 \pmod 3)$$

(که غیر ممکن است) تحلیل کند، نشان می‌دهد که تنها امکان، عبارت است از:

$$x=6z^2,\ x+1=u^2,\ 2x+1=v^2$$

به طریقی مشابه، از (II) نتیجه می‌شود که تنها امکان؛

$$x=z^2,\ x+1=2u^2,\ 2x+1=3v^2$$

با $(u,z)=1$، $uz=1$است. به این ترتیب یکی از دو مورد زیر را داریم:

$$(1)\begin{cases} 6z^2+1=u^2 \\ 12z^2+1=v^2 \end{cases} \quad \text{یا} \quad (2)\begin{cases} z^2+1=2u^2 \\ 2z^2+1=3v^2 \end{cases}$$

تنها جوابهای به اعداد طبیعی[20] (۱) عبارتند از $z = 0$، $u = v = 1$ و $z = 2$، $u = 5$، $v = 7$. (جوابهای متناظر (*) به ترتیب عبارتند از $x = 0$، $y = 0$ و $x = 24$، $y = 70$.) در واقع، ابتدا از (۱) به پیمانهٔ ۸، z را زوج[21] داریم. نیز از دستگاه (۱)، u و v را فرد[22] داریم، $(u , v) = 1$، و بنابراین، $(v - u , v + u) = 2$. از آن جا که $v^2 - u^2 = 6z^2$ یا، $(v + u)(v - u) = 6z^2$

$$\text{(a)} \begin{cases} v + u = 6r^2 \\ v - u = 4s^2 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \text{(b)} \begin{cases} v + u = 2r^2 \\ v - u = 12s^2 \end{cases}$$

را با $z = 2rs$، $(r , s) = 1$، و r فرد، داریم.

از (a)، $v = 3r^2 + 2s^2$ را داریم، که در ارتباط با $v^2 = 12z^2 + 1$، $z = 2rs$،

$$9r^4 - 36r^2s^2 + 4s^4 = 1$$

را می‌دهد، که به پیمانهٔ ۱۶ غیر ممکن است، زیرا:

$$9r^4 \equiv 9 \pmod{16}$$

r فرد، اما:

$$4s^2(9r^2 - s^2) \equiv 0 \pmod{16}$$

از (b) داریم: $v = r^2 + 6s^2$، که در ارتباط با $v^2 = 12z^2 + 1$، $z = 2rs$، می‌دهد:

$$r^4 - 36r^2s^2 + 36s^4 = 1 \qquad (3)$$

تنها جوابهای به اعداد طبیعی معادلهٔ (۳) عبارتند از:

$$r = 1 , s = 0 \quad \text{و} \quad r = 1 , s = 1$$

(جوابهای متناظر (*) عبارتند از: $x = 0$ و $x = 24$.)

در واقع، معادلهٔ (۳) را می‌توان به صورت،

$$(6s^2 - 3r^2)^2 - 8r^4 = 1$$

یا

$$(6s^2 - 3r^2 - 1)(6s^2 - 3r^2 + 1) = 8r^4 \qquad (3')$$

نوشت. از آن جا که

$$(6s^2 - 3r^2 - 1 , 6s^2 - 3r^2 + 1) = 2$$

از (3′) به پیمانهٔ ۳، موارد زیر را، با $(a , b) = 1$، $ab = r$، داریم:

$$\text{(a)} \begin{cases} 6s^2 - 3r^2 - 1 = -2a^4 \\ 6s^2 - 3r^2 + 1 = 4b^4 \end{cases}$$

$$\text{(b)} \begin{cases} 6s^2 - 3r^2 - 1 = -4b^4 \\ 6s^2 - 3r^2 + 1 = -2a^4 \end{cases}$$

یا:

$$\text{(c)} \begin{cases} 6s^2 - 3r^2 - 1 = -b^4 \\ 6s^2 - 3r^2 + 1 = -8a^4 \end{cases}$$

از (a) یا (b) نتیجه می‌شود که $2b^4 - a^4 = 1$، که می‌تواند به صورت:

$$(b^2)^4 - a^4 = (b^4 - 1)^2$$

نیز نوشته شود، که معادله‌ای به صورت $x^4 - y^4 = z^2$، با $(x , y) = 1$ است. می‌دانیم ([4] را ملاحظه کنید) که تنها جوابهای صحیح معادله توسط

$$x^2 = y^2 = 1 \ , \ z = 0$$

داده شده‌اند. بنابراین $a^2 = b^2 = 1$، که از آن $r = \mp 1$ و (۳)، $s = 0$ یا $s = 1$ را به دست می‌دهد.

این رابطه از (c)،

$$-b^4 + 8a^4 = -2$$

را، که به پیمانهٔ ۴ غیر ممکن است، به دست می‌دهد.

اکنون، ثابت می‌کنیم که تنها جواب دستگاه (۲) عبارت است از:

$$z^2 = u^2 = v^2 = 1$$

(جواب متناظر (*) عبارت است از $x = 1$، $y = 1$.)

از (۲) نتیجه می‌شود که $4u^2 - 3v^2 = 1$. با قرار دادن $U = 2u$، $V = v$، $Z = 2z$، می‌توانیم معادلهٔ اخیر را به صورت

$$U^2 - 3V^2 = 1 \qquad (4)$$

بنویسیم، در حالی که معادلهٔ اول دستگاه (۲) به

$$Z^2 = 2U^2 - 4 \qquad (5)$$

تبدیل می‌شود. اکنون جوابهای معادلهٔ (۴) را، تحت محدودیت مطرح شده توسط (۵)، پیدا می‌کنیم. معادلهٔ (۴) معادلهٔ پلی است که جواب اصلیش $U = 2$، $V = 1$ است. بنابراین جمیع جوابهای (۴) توسط

$$U_n + V_n\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^n \qquad (6)$$

با n صحیح، داده می‌شود.

روابط زیر را به‌سادگی به دست می‌آوریم:

$$U_{-n}=U_n\,,\ V_{-n}=-V_n \qquad (7)$$

$$U_{n+k}=U_n V_k+3V_n U_k \qquad (8)$$

$$V_{n+k}=V_n U_k+V_k U_n \qquad (9)$$

$$U_{2k}=U_k^2+3V_k^2=2U_k^2-1 \qquad (10)$$

$$V_{2k}=2U_k V_k \qquad (11)$$

معادلات (۸)، (۹)، (۱۰)، (۱۱) مستلزم مورد زیرند:

$$U_{n+2k}\equiv -U_n \pmod{U_k} \qquad (12)$$

ثابت می‌کنیم که جوابهای معادلهٔ (۴)، تحت محدودیت (۵)، توسط (۶) تنها به ازای $n=\pm1$، داده می‌شوند.

بنا به (۷) می‌توان فرض کرد که $n>0$. از آن جا که U زوج است، از (۶) نتیجه می‌شود که n فرد است. فرض می‌کنیم $n=4m\pm1$. به ازای $m\neq0$، می‌توانیم

$$n=\pm1+2^t(2h+1)$$

را، با $t\ge2$ و $h\ge0$ بنویسیم. قرار می‌دهیم $j=2^t$؛ به این ترتیب، $n=j\pm1+2jh$.

h بار به کار بردن (۱۲) می‌دهد:

$$U_n\equiv(-1)^h U_{j\pm1} \pmod{U_j}$$

از آن جا که

$$U_{j\pm1}=U_jU_{\pm1}+3V_jV_{\pm1}=2U_j\pm3V_j$$

داریم:

$$U_n\equiv\pm3V_j \pmod{U_j}$$

از (۵) نتیجه می‌شود که:

$$Z^2=2U_n^2-4\equiv18V_j^2-4 \pmod{U_j}$$

از آن جا که معادلهٔ (۴) مستلزم

$$3V_1^2\equiv-1 \pmod{U_j}$$

است، داریم:

$$Z^2\equiv-10 \pmod{U_j}$$

همنهشتی[23] فوق غیرممکن است. در واقع، به ازای $t\ge2$ (یعنی، $j\ge4$)، از (۱۰) با استفاده از استقرا[24] نتیجه می‌شود که:

$$U_j\equiv1 \pmod{8} \quad \text{و} \quad U_j\equiv2 \pmod{5}$$

(به حساب بیاورید که $U_4=97$). در این صورت، با استفاده از نمادنویسی معمول نماد لژاندر ـ ژاکوبی[25]، می‌توان نوشت:

$$\left(\frac{-10}{U_j}\right)=\left(\frac{10}{U_j}\right)=\left(\frac{2}{U_j}\right)\left(\frac{5}{U_j}\right)=\left(\frac{5}{U_j}\right)$$

$$=\left(\frac{U_j}{5}\right)=\left(\frac{2}{5}\right)=-1$$

که اثبات را تمام می‌کند.

یادداشتها

۱. Infinite descent

۲. Pell's Equation. معادلهٔ دیوفانتی $x^2-Dy^2=1$، که در آن D عدد صحیح غیرمربعی است. این معادله احتمالاً معروفترین معادلهٔ دیوفانتی بعداز معادلهٔ مربوط به سه تاییهای فیثاغورثی $a^2+b^2=c^2$، و از بعضی جهات از آن مهمتر است. یکی از مثالهای مشهور این مورد، مسألهٔ موسوم به مسألهٔ رمهٔ ارشمیدس است. این مسأله به‌معادلهٔ $x^2-4729494y^2=1$ منجر می‌شود که کوچکترین جوابش که توسط امتور «Amthor» به دست آمده، دارای ۲۰۶۵۴۵ رقم است. [برای توضیحات بیشتر رجوع کنید به: جلد سی و هفتم مجلهٔ آشنایی با ریاضیات ـ پاییز ۱۳۷۱؛ مقالهٔ نظریهٔ اعداد یونانی، ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور، صفحهٔ ۲۷۲.]

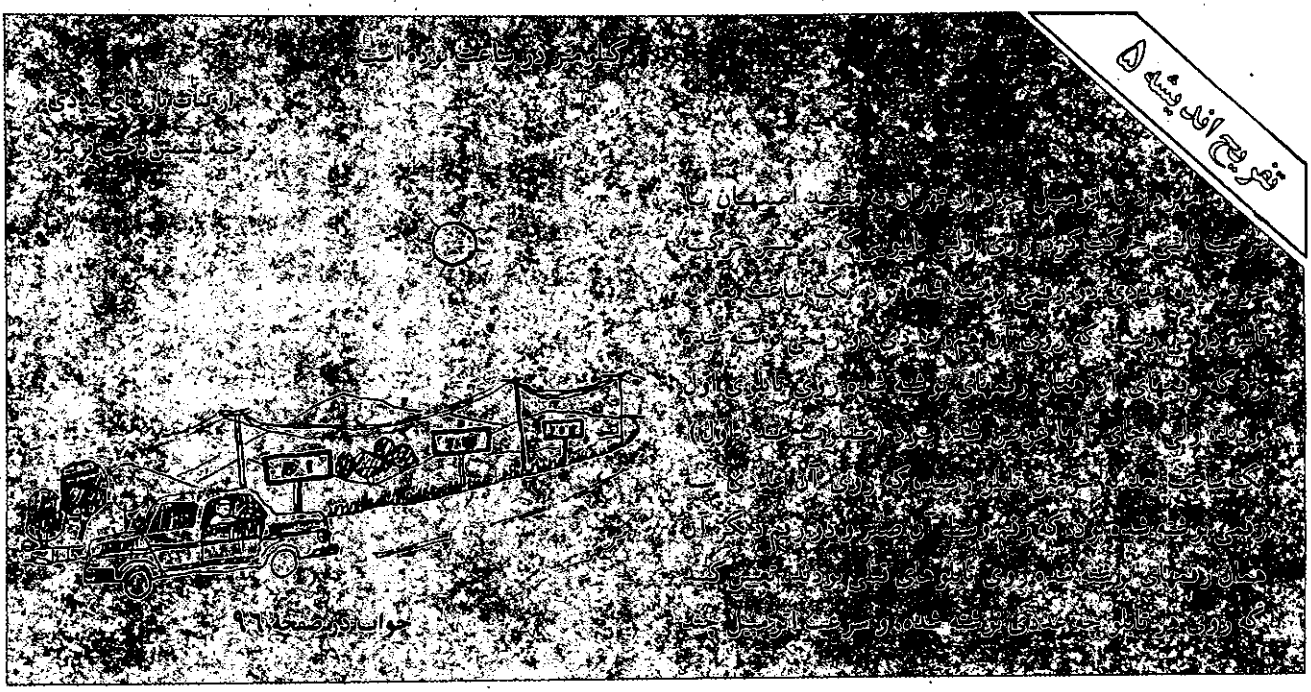
۳. Quadratic Reciprocity Law. نمادهای لژاندری معکوس اعداد اول فرد p و q مشمول فرمول $\left(\frac{p}{q}\right)\cdot\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{[(p-1)/2][(q-1)/2]}$اند. این قانون، که به قانون تقابل درجهٔ دوم موسوم است، توسط اویلر تنظیم

شد، اما به اثبات نرسید. اولین اثبات کامل آن توسط کارل فردریک گاوس، Karl Friedrich Gauss، در ۱۸۰۱ ارائه شد.

۴. Nontrivial Integer Solution
۵. Lucas
٦. Pyramidal Number
۷. Tetrahedron = Square ،
۸. Watson
۹. Theory of Elliptic Functions
۱۰. Ljunggern
۱۱. Quadratic Field
۱۲. Quartic Field
۱۳. Conjugate Fields
۱۴. Imaginary
۱۵. Number Theoretic Books
۱٦. Mordell
۱۷. Guy
۱۸. Relatively Primes
۱۹. Modulo
۲۰. Natural Numbers
۲۱. Even
۲۲. Odd
۲۳. Congruence
۲۴. Induction
۲۵. Legendre - Jaccobi Symbol

مراجع:

1. E. Lucas, problem 1180, Nouvelle Ann. Math (2)14 (1875), 33.6.
2. G.N. Watson, The problem of the square pyramid, Messenger of Math. 48 (1918/1919), 1 - 22.
3. W. LYUNGGREN, New Solution of a problem proposed by Lucas, Nordisk Mat. Tidskr. 34 (1952), 65 - 72.
4. L. J. MORDELL. « Diophantine Equations », Academic press, London, 1969.
5. R.K. Guy, « Unsolved Problems in Number Theory », Springer - Verlag, Berlin / NewYork, 1984.
6. S.P. MOHANTY AND A.M.S. RAMASAMY, the simultaneous diophantine equations. $5y^2-20=x^2$ and $2y^2+1=z^2$.J.Number Theory 18, No.3 (1984), 356 - 359.



طرح و حل مسائل اساسی ریاضی
به روشهای مقدماتی (٦)

از:
100 Great Problems
of Elementary Mathematics

قانون تقابل درجهٔ دوم

(قضیهٔ اویلر[1] ـ لژاندر[2] ـ گاوس[3]) نمادهای لژاندری معکوس اعداد اول فرد p و q مشمول فرمول زیرند:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\cdot\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{[(p-1)/2]\cdot[(q-1)/2]}$$

این قانون، که به قانون تقابل درجهٔ دوم[4] موسوم است، توسط اویلر (*Opuscula analytica*, Petersburg, 1783) تنظیم شد اما به اثبات نرسید. در ۱۷۸۵، لژاندر، همین قانون را مستقل از اویلر کشف و جزئاً اثبات کرد.

اولین اثبات کامل آن توسط کارل فردریک گاوس "karl friedric Gauss" (۱۷۷۷ ـ ۱۸۵۵) در *Disquisitiones Arithmeticae*[5] مشهورش (چاپ شده در ۱۸۰۱)، کتابی که اصول نظریهٔ اعداد[6] معاصر را بنا نهاد، ارائه شد؛ اثر مزبور، با پانصد صفحهٔ به قطع خشتی‌اش، پر از ایده‌های عمیقی بود که توسط گاوس در سن ۲۰ سالگی به رشتهٔ تحریر درآمده بود. کرونکر[7] در این مورد چنین می‌گوید: «اندیشه در این موضوع که چگونه مردی تنها، با سنی چنان اندک توانسته چنین گنجینه‌ای از نتایج را مطرح کند، و بالاتر از آن، چنین بررسی عمیق و سازمان یافته‌ای از دستگاهی کاملاً تازه را ارائه دهد، واقعاً حیرت‌آور است.»

بعدها، گاوس هفت اثبات دیگر برای قضیهٔ تقابل کشف کرد. (اثباتهای گاوس را می‌توان در جلد ۱۴ی، Ostwald 's *Klassiker der exakten Wissenschaften* یافت.)

قانون تقابل درجهٔ دوم یکی از مهمترین قضایای نظریهٔ اعداد است. خود گاوس آن را، «*Theorema fundamentale*[8]» نامیده است. دیکسن[9]، ریاضی‌دان آمریکایی در *Theory of Numbers* اش چنین می‌گوید: «قانون تقابل درجهٔ دوم بدون شک مهمترین وسیله در نظریهٔ اعداد است و در تاریخ آن، از موقعیت مرکزی برخوردار است.»

اهمیت این قانون منجر به این شد که ریاضی‌دانهای دیگری نظیر ژاکوبی[10]، کوشی[11]، لیوویل[12]، کرونکر، شرینگ[13]، و فروبنیوس[14]، پس از گاوس به تحقیق درآن بپردازند و اثباتهایی از آن را ارائه دهند. پ. باخمان[15] در *Niedere Zahlentheorie* اش چیزی ناکمتر از ۵۲ اثبات را نقل می‌کند و از مهمترین‌شان گزارش می‌دهد.

احتمالاً ساده‌ترین اثباتها اثبات حسابی ـ هندسی[16] زیر است، که از ترکیب لم معروف به لم گاوس[17] (Gauss' *Werke* vol. II, p.51) و ایده‌ای هندسی[18] از کیلی (Arthur Cayley [1821 ـ 1895] , *Collected Mathematical Papers,* vol. II) حاصل شده است.

اما، پیش از ورود به خود اثبات، استخراج لم گاوس را به دست می‌دهیم.

فرض می‌کنیم P عددی اول و فرد و D عدد صحیحی باشد که بر

P بخش‌پذیر نیست. اگر x یکی از اعداد ۱، ۲، ۳، ...، $P = (P-1)/2$، R_x ماندهٔ مشترک[19] تقسیم D_x / P[20]، g_x خارج قسمت صحیح[21] متناظر آن را نمایش دهد، آنگاه:

$$D_x = R_x + g_x P \qquad (1)$$

بنابراین چون R_x کوچکتر یا بزرگتر از $\frac{1}{2}P$ باشد، $R_x = \rho_x$ یا $R_x = \rho_x + P$ را قرار می‌دهیم، که در حالت دوم آن، ρ_x ماندهٔ مینیمم منفی[22] تقسیم Dx / P رانمایش می‌دهد، وبه‌دست می‌آوریم:

$$Dx = \rho_x + g_x P \qquad (1a)$$

$$Dx = \rho_x + p + g_x P \qquad (1b)$$

در این صورت، اگر n تعداد مانده‌های مینیمم منفی رخ دهنده در تقسیم Dx / P (به ازای $x = 1, 2, 3, \ldots, P$) باشد، n معادله‌به‌صورت $(1b)$ و $m = P - n$ معادله‌به‌صورت $(1a)$ داریم.

معادلات فوق را به همنهشتیهایی[23] به پیمانهٔ p تبدیل می‌کنیم و P همنهشتی زیر را به دست می‌آوریم:

$$Dx \equiv \rho_x \bmod p$$

اکنون P ماندهٔ ρ_x، جز درمورد علامت[24] و دنباله[25]، با P عدد ۱ تا P تطبیق می‌کنند.

[به عنوان مثال، اگر ρ_r، به ازای دو مقدار متفاوت r و s از x، برابر ρ_s یا $\rho_r = -\rho_s$ باشد، آنگاه $Dr \equiv \rho_r$ و $Ds \equiv \rho_s$، به ترتیب، با تفریق[26] یا جمع[27]، $D(r \mp s) \equiv 0 \bmod P$ را به دست خواهند داد. این همنهشتی، اما، غیر ممکن است، زیرا نه D، نه $r \mp s$ بر P بخش‌پذیر است.]

ضرب P همنهشتی (۲) منجر به

$$D^P P! \equiv (-1)^n P! \bmod P$$

می‌شود که از آن به دست می‌آوریم:

$$D^P \equiv (-1)^n \bmod p$$

اما از آن‌جا که، طبق قضیهٔ اویلر[28]،

$$D^P \equiv \left(\frac{D}{p}\right) \bmod p$$

به دست می‌آوریم:

$$\left(\frac{D}{p}\right) \equiv (-1)^n \bmod p$$

و از آن، از آن‌جا که هر دو طرف این همنهشتی دارای قدر مطلق[29] ۱ است،

$$\left(\frac{D}{p}\right) = (-1)^n \qquad (3)$$

این فرمول، که n آن، تعداد مانده‌های می‌نیمم منفی حاصل از تقسیم Dx / p $(x = 1, 2, 3, \ldots, p)$ را نمایش می‌دهد، لم گاوس است.

اکنون فرض می‌کنیم که D عدد اول و فرد qای که با p متفاوت است باشد. P معادلهٔ $(1a)$ و $(1b)$ را به همنهشتیهایی به پیمانهٔ ۲ تبدیل کرده، تمام مضارب[30] اضافی ۲، یعنی $x(q-1)$ را کنار می‌گذاریم، و به دست می‌آوریم:

$$x \equiv 1 + \rho_x + g_x \bmod 2 \quad \text{و} \quad x \equiv \rho_x + g_x \bmod 2$$

جمع P همنهشتی فوق می‌دهد:

$$\Sigma x \equiv n + \Sigma\rho_x + \Sigma g_x \bmod 2$$

اما از آن‌جا که قدر مطلقهای P_x با اعداد ۱ تا P در مطابقت‌اند و به جای هر جمعوند[31]، می‌توان مقدار مقابل[32] آن را در همنهشتی‌ای به پیمانهٔ ۲ قرار داد، در همنهشتی به دست آمده Σ_x را به جای $\Sigma \rho_x$ و $-n$ را به جای n قرار داده، به دست می‌آوریم:

$$\Sigma x + n \equiv \Sigma x + \Sigma g_x \bmod 2$$

یا

$$n \equiv \Sigma g_x \bmod 2 \qquad (4)$$

اکنون، بنابه (۴) می‌توانیم (۳) را به صورت زیر بنویسیم:

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\Sigma g_x}$$

اما g_x بزرگترین عدد صحیح مشمول در خارج قسمت qx / p است. اگر آن را به صورت $[qx / p]$ مشخص کنیم، در آخر به دست می‌آوریم:

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\Sigma[qx/p]} \qquad (I)$$

که در آن x، جمیع اعداد صحیح از ۱ تا $p = (p - 1) / 2$ را می‌پذیرد.

بنابراین

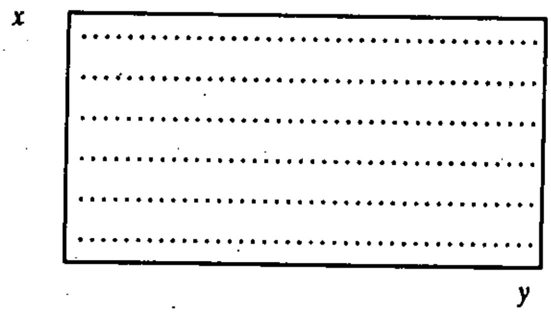
$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\Sigma[py/q]} \qquad (II)$$

که y آن، جمیع اعداد صحیح ۱ تا $q = (q - 1) / 2$ را می‌پذیرد.

ضرب (I) و (II) می‌دهد:

$$\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\Sigma[(q/p)x] + \Sigma[(p/q)y]} \qquad (III)$$

نمای عبارت سمت راست، ساده یاب است.



در دستگاه مختصات قائم[۳۳] xy، مستطیل[۳۴] با چهار زاویهٔ[۳۵]

$$0 | 0\ ,\quad \frac{p}{2} | 0\ ,\quad \frac{p}{2} | \frac{q}{2}\ ,\quad 0 | \frac{q}{2}$$

را رسم و آن را با قطر[۳۶] d، گذرنده از مبدأ[۳۷]، دارای معادلهٔ $y = (qx / p)$ نصف می‌کنیم، آنگاه جمیع نقاط شبکه‌ای[۳۸] داخل مستطیل مزبور را مشخص می‌کنیم. (به شکل، که در آن $p = ۱۹$، $q = ۱۱$ است، رجوع کنید.)

درآغازکار، واضح است که هیچ نقطهٔ شبکه‌ای نشان شدهٔ $x | y$ ی بر d قرار ندارد، زیرا در این صورت، x لزوماً کمتر از $\frac{1}{2}p$ و $y < \frac{1}{2}q$ می‌شود که شرط $y / x = q / p$ را نقض می‌کند.

به ازای طول درست[۳۹] x، عرض[۴۰] متناظر d عبارت است از $y = (qx / p)$ و تعداد نقاط شبکه‌ای نشان شدهٔ واقع بر این عرض $[qx / p]$ است. در نتیجه، تعداد نقاط نشان شدهٔ واقع در نیمهٔ پایین مستطیل مزبور $\Sigma [qx / p]$ است، که x آن جمیع اعداد صحیح ۱ تا P را قبول می‌کند.

به همین ترتیب، تعداد جمیع نقاط شبکه‌ای نشان شدهٔ واقع در نیمهٔ بالای مستطیلمان $\Sigma [py / q]$ است، که y آن جمیع اعداد صحیح ۱ تا q را می‌پذیرد.

در این صورت، نمای ظاهر در (III) تعداد جمیع نقاط شبکه‌ای نشان شدهٔ در مستطیلمان است. این تعداد کلاً $p.q$ عنصر است. نتیجتاً:

$$\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{p\,q}$$

یا

$$\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{[(p-1)/2] \cdot [(q-1)/2]}$$

فهوالمطلوب.

***

یادداشتها

۱. لئونارد اویلر (۱۷۸۳ ـ ۱۷۵۷) ریاضیدان سوئدی در تمام طول تاریخ ریاضیات، بیش از هر فرد دیگری مطالب جدید به‌وجود آورده است. دربارهٔ او گفته‌اند که: وی به همان آسانی که آدمی نفس می‌کشد و عقاب در آسمان پرواز می‌کند، به محاسبه می‌پردازد. هفده سال نابینایی کامل او در پایان عمر، نه‌تنها موجب رکودش نشد، که قدرت ادراک او را در جهان داخلی تصوراتش شدت بخشید. مجموع آثار او به بیش از ۹۰ مجله عظیم می‌رسد. جالب این است که اویلر، بیشتر به خاطر نمادهایی که معرفی یا همگانی کرده، معروف شده است. علائم اساسی π، e، i نماد مجموع Σ و نماد استاندارد تابع، $f(x)$، در میان کارهای او در زبان ریاضیات است. از آثار برجستهٔ اویلر که به حق از آن مغرور بود، یکی این است که:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

۲. آدرین ماری لژاندر (۱۸۳۳ ـ ۱۷۵۲) ریاضی‌دان فرانسوی معاصر با انقلاب کبیر فرانسه. وی در قرن نوزدهم به‌خاطر کتاب درسی هندسه‌اش که «کارسرهٔ» اقلیدسی‌ای بود، بسیار معروف بود. از جملهٔ کارهای وی چند جمله‌ایهای معروف لژاندر، است که در میان مهمترین توابع خاص قرار دارند. اثر اساسی وی در ارتباط بسیار با حساب دیفرانسیل وانتگرال است، وی انتگرالهای بیضوی را به صورتهای استانداردشان رده بندی کرد.

۳. کـــارل فـــردریک گـــاوس، Karl Friedrich Gauss (۱۷۷۷ـ ۱۸۵۵) ریاضی‌دان آلمانی این حق را دارد که بزرگترین مقام ریاضی‌دانهای محض در نظر گرفته شود. او سهم عظیمی در بسیاری از قسمتهای دیگر ریاضیات و فیزیک داشت. اثبات هر دو قضیهٔ اساسی حساب و جبرکار اوست.

۴. Quadratic Reciprocity Law

۵. کتابی است که گاوس در سن ۲۴ سالگی در تجسسات حسابی‌اش به چاپ رسانید. کتابی که می‌باید تأثیری عمیق بر نظریهٔ اعداد داشته باشد.

۶. Number Theory

۷. لئوپولدکرونکر در ۱۸۲۳ در لیگ نیتز پروس در خانواده‌ای یهودی و صاحب مکنت متولد شد، و البته جز تخصص در معاملات ـ که بعدها به نفع ریاضیات هم از امور مالی کناره جست و هم سیاست را ترک گفت ـ عشقی مفرط به فلسفه را از پدرش به میراث برد. غالباً اظهار می‌داشت که موسیقی زیباترین هنرهاست، شاید به استثنای ریاضیات که وی آن را به شعر تشبیه می‌کرد. کومر، کرونکر و دد کنید با اختراع تئوری جدید اعداد جبری که حیطهٔ عمل ریاضیات را بی‌نهایت بار افزایش داد و معادلات جبری را در خطهٔ اعداد وارد کرد، برای حساب عالی و تئوری معادلات جبری همان کاری را انجام دادند، که گاوس، لباچفسکی، یوهان بولیه و رهان با خلاص کردن هندسه از قید عبودیت دستگاه محدود اقلیدسی دربارهٔ این دانش انجام دادند. کرونکر در ۱۸۴۵، در بیست و دو سالگی با رد مسأله‌ای تحت عنوان De Unitatibus Complexis (درباره آحاد مطلق) که عبارت از آحاد حوزه‌های جبری مخصوصی بود که از مسألهٔ گاوس دربارهٔ تقسیم محیط دایره به n قسمت متساوی سرچشمه می‌گرفت، دکتر در فلسفه شد. شاید برخی کسان درصدد برآیند مبدأ شک و تردید کرونکر را در ریاضیات، در مطالعات عمیق او در زمینهٔ فلسفه و بخصوص فلسفه هگل جست و جو کنند، با این‌حال مابین برخی از شک و تردیدهای عصر حاضر دربارهٔ ثبات خود به خود ریاضیات و نازک کاریهای دستگاه هگل شباهتی عجیب و خیره کننده وجود دارد.

وی سالیان سال بدون کرسی رسمی استادی در دانشگاه برلین به تدریس پرداخت و تنها پس از بازنشستگی کومر در ۱۸۸۳ کرسی استادی را پذیرفت. کارهای اصلی کرونکر عبارت است از توابع بیضوی، نظریهٔ ایده آلها، و حساب صورتهای درجهٔ دوم. سلسله درسهای چاپ شدهٔ او دربارهٔ نظریهٔ اعداد توصیفهای دقیقی از کشفیات خود و پیشینیان است و به روشنی اعتقاد وی را به حسابی سازی ریاضیات نشان می‌دهد. به‌نظر او ریاضیات باید براساس عدد، و عدد باید برپایهٔ عدد طبیعی بنا شود. از گفته‌های اوست: «اعداد صحیح را خداوند ساخته، مابقی کار بشر است.»

کرونکر در دسامبر ۱۸۹۱ در برلین بر اثر عارضهٔ ذات‌الریه درگذشت.

۸. قضیهٔ اساسی

۹. Dickson

۱۰. Jacobi

۱۱. Cauchy

۱۲. Liouville

۱۳. Schering

۱۴. Frobenius

۱۵. P. Bachmann

۱۶. Arithmetic - Geometric Proof

۱۷. Lemma of Gauss

۱۸. Geometric Idea

۱۹. Common Residue

۲۰. Division

۲۱. Integral Quotient

۲۲. Negative Minimum Residue

۲۳. Congruencies

۲۴. Sign

۲۵. Sequence

۲۶. Subtraction

۲۷. Addition

۲۸. قضیهٔ عدد اول فرما ـ اویلر به صورت زیر است:

هر عدد اول به صورت ۱ + 4n را می‌توان تنها به یک روش به صورت مجموع دو مربع نمایش داد.

۲۹. Absolute Value

۳۰. Multiplies

۳۱. Summand

۳۲. Opposite Value

۳۳. System of Rectangular Coordinates

۳۴. Rectangle

۳۵. Angle

۳۶. Diagonal

۳۷. Origin

۳۸. Lattice Points

۳۹. Integral Abscissa

۴۰. Ordinate

تحقیقی پیرامون عدد پی π*

● احسان رضایی (دوم ریاضی دبیرستان کمال تهران)

کامپیوتر

یکی از معروفترین ثابتهای ریاضی π (از حروف یونانی) می‌باشد. این ثابت در بسیاری از روابط مشهور ریاضی به کار می‌رود مانند:
(محیط دایره) $C = ۲\pi r$ ، (مساحت دایره) $S = \pi r^۲$ ، (حجم کره) $V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳$

نخستین و قدیمی‌ترین تعریف دربارهٔ π عبارت بود از «نسبت محیط دایره به قطرش[1]» امّا این ثابت بسیار پیچیده‌تر از آن است که تعریفش نشان می‌دهد. مشکل می‌توان π را محاسبه کرد زیرا غیرممکن است که بتوان هم قطر و هم محیط دایره را به‌صورت عدد صحیح یا کسر محاسبه کرد. بنابراین π را نمی‌توان به صورت عدد صحیح یا کسر بیان کرد. از این رو π را جزو اعداد گنگ (اصم) می‌خوانند.

دربارهٔ وجه نامگذاری این عدد باید گفت که نماد π برای نسبت محیط دایره به قطر آن، از اوایل قرن هیجدهم[2] به کار رفته است و به این مناسبت است که واژهٔ محیط در زبان یونانی با π شروع می‌شود. قدیمی‌ترین سابقهٔ تاریخی در مورد عدد π پاپیروسی است که اکنون در مسکو نگهداری می‌شود. در این سند محاسبهٔ محیط دایره به‌وسیلهٔ مصریان ارائه شده‌است. به موجب این سند این عدد برابر با ۳ می‌باشد. در محاسبات بابلیان نیز این مقدار مساوی با ۳ فرض شده‌است. احتمالاً مردمان آن زمان این نسبت را از کوششهای تجربی نتیجه گرفته‌اند و مبنای دقیق علمی نداشته است.

برروی پاپیروس دیگری که متعلّق به ۱۷۰۰ سال پیش‌از میلاد است، مصریان مساحت دایره را اینچنین محاسبه کرده‌اند:

$$S = (d - \frac{۱}{۹} d)^۲$$

که در آن S مساحت و d قطر دایره است. اگر به‌جای d ، ۲r را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$S = \frac{۲۵۶}{۸۱} r^۲$$

بنابراین مصریان باستان π را برابر با $\frac{۲۵۶}{۸۱}$ می‌دانستند که مساوی است با ...۳/۱۶۰۵۰ ، که با مقدار صحیح آن ۲٪ اختلاف دارد.

ریاضی‌دان و دانشمند باستان ارشمیدس (۲۱۲ - ۲۸۷ پیش از میلاد) به کمکِ شکلهای هندسی، π را بیش‌از $۳\frac{۱۰}{۷۱}$ و $۳\frac{۱۰}{۷۰}$ برآورد کرد که اگر بخواهیم آن‌را به اعشار تبدیل کنیم باید π بین ...۳/۱۴۰۸۴۵ و ...۳/۱۴۲۸۵۷ باشد.

در چین باستان، π را چوانگ‌هونگ به سال ۱۲۵ میلادی چنین محاسبه کرد:

$$\pi = \sqrt{۱۰} = ۳/۱۶۲ \ldots ,$$

سپس ونگ فن درسال ۲۶۵ π را چنین برآورد کرد:

$$\pi = \frac{۱۴۲}{۴۵} = ۳/۱۵۵۵ \ldots ,$$

وچونگ چیک به سال ۴۷۰ کسر دیگری رابرای محاسبهٔ π معرفی کرد:

$$\pi = \frac{۳۵۵}{۱۱۳} = ۳/۱۴۱۵۹۲۹$$

که شش رقم اعشار آن درست است.

چنین کوششهایی برای پیداکردن مقدار π نمایانگر این مطلب بود که π کاملاً ناشناخته مانده‌است.

غیاث‌الدین جمشیدکاشانی، ریاضی‌دان بزرگ ایرانی و کاشف نمادهای اعشاری[3]، برای نخستین بار در کتاب «رسالهٔ محیطیه» مقدار π را تاهفده رقم اعشار چنین به‌دست آورد:

$$\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۵$$

که تنها رقم هفدهم اعشار آن نادرست می‌باشد.

شماره حروف	تلفظ	لاتین	حروف کوچک	حروف بزرگ
۱	آلفا	alpha	α	A
۲	بتا	beta	β	B
۳	گاما	gamma	γ	Γ
۴	دلتا	delta	δ	Δ
۵	اپسیلن	epsilonn	ε	E
۶	زتا	dzeta	ζ	Z
۷	اتا	eta	η	H
۸	تتا	theta	θ	
۹	یوتا	iota		I
۱۰	کاپا	kappa	κ	K
۱۱	لاندا	lambda	λ	Λ
۱۲	مو	mu	μ	M
۱۳	نو	nu	ν	N
۱۴	کسی	ksi	ξ	Ξ
۱۵	اُمیکرون	omicronn	o	O
۱۶	پی	pi	π	Π
۱۷	رو	ro	ρ	P
۱۸	سیگما(زیگما)	sigma	σ	Σ
۱۹	تو	tou	τ	T
۲۰	اپسیلن	upsilonn	r	V
۲۱	فی	phi	ϕ	Φ
۲۲	خی	khi	[illegible]	X
۲۳	پسی(سای)	psi	[illegible]	Ψ
۲۴	اُمگا	omega	ω	Ω

درسال ۱۵۸۵ «تیکوبراهه» منجم معروف دانمارکی در محاسبات خود به عدد $\pi = ۳/۱۴۰۹$ رسید.

مقارن همین اوقات «فرانسواویت» ریاضی‌دان معروف فرانسوی به کمک ۳۹۳۲۱۶ ضلعی منتظم مقدار π را تا ۹ رقم اعشار حساب کرد. درسال ۱۵۹۲، ریاضی‌دان فرانسوی «ویتا» π را چنین برآورد کرد:

$$\pi = 2\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\dots}\right)$$

به سال ۱۶۵۵ «جان والیس» ریاضی‌دانِ انگلیسی شکل ساده‌تری برای π ارائه داد، بدین شکل:

$$^4\pi = 4\left(\frac{2^2\times4^2\times8^2\times10^2\times12^2\times\dots}{3^2\times5^2\times7^2\times9^2\times11^2\times\dots}\right)$$

ولی قبل از او، «آندریاس رومانوس» به سال ۱۵۹۷ با کمک کثیرالاضلاع منتظم $2^{24}\times5\times3$ ضلعی مقدار π را تا ۱۵ رقم اعشار تقریب به‌دست آورد. همچنین، «لودلف» دانشمند آلمانی در سالهای ۱۶۱۵ و ۱۶۲۱ بااستفاده از $2^{35}\times5\times3$ ضلعی و 2^{65} ضلعی منتظم مقدار π را در دفعهٔ اوّل تا ۲۰ رقم و در نوبت دیگر تا ۳۵ رقم محاسبه نمود.[۵]

به سال ۱۶۵۸، «ویلیام برونکر» ریاضی‌دان ایرلندی مقدار π را چنین محاسبه کرد:

$$\pi = 4\times\cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cfrac{9^2}{2+\dots}}}}}}$$

ساده‌ترین عبارت برای π را «لایب نیتز» ریاضی‌دان آلمانی درسال ۱۷۰۸ ارائه داد:

$$\pi = 4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\dots\right)$$

در سال ۱۷۱۷ «آبراهام شارپ» ریاضی‌دان انگلیسی، رشته زیر را برای محاسبهٔ π تا ۷۲ رقم اعشار به‌کاربرد:

$$\pi = 6\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times\left(1-\frac{1}{3\times3}+\frac{1}{3^2\times5}-\frac{1}{3^3\times7}+\frac{1}{3^4\times9}-\frac{1}{3^5\times11}+\dots\right)$$

به سال ۱۸۷۳، ویلیام شانکز، ریاضی‌دان انگلیسی، مقدار π را تا ۷۰۷ رقم اعشار محاسبه کرد. این عدد در قصر اکتشافات پاریس در غرفهٔ مربوط به علوم ریاضی به صورت نواری دور تا دور تالار نوشته شده‌است. سپس به سال ۱۹۴۸ «جان فرنچ» از آمریکا و «فرگوسن» از انگلستان به اتفّاق مقدار π را تا ۸۰۸ رقم اعشار محاسبه کردند. آنها خطاهای چندی را در محاسبهٔ شانکز یافتند. این خطاها از رقم ۵۲۸ اعشار شروع می‌شد. در ژانویه سال ۱۹۵۰، مقدار π را تا ۲۰۰۰ رقم اعشار محاسبه کردند، این کار توسط کامپیوتر انجام شد. و در سال ۱۹۵۴ بااستفاده از حسابگرهای الکترونیکی بیش از ۳۰۰۰ رقم اعشار π را تعیین کردند.

در زبانهای مختلف شعرها و متن‌هایی گفته‌اند که با شمارش کلمات و حروف آن رقم‌هایی از π مشخص می‌شود و برای به‌خاطر سپردن این عدد بسیار مفید است[۶]. قدیمی‌ترین شعر موجود در این زمینه به زبان فرانسه سروده شده‌است که شمارش ارقام آن π را تا سی رقم اعشار نمایش می‌دهد.[۷]

در زبان فارسی نیز اشعاری در این مورد سروده شده‌است من جمله شعر زیر که π را تا ده رقم اعشار نمایان می‌کند:

گر کسی از تو بپرسد ره آموختن π

پاسخی ده که خردمند ترا آموزد:

«خرد و بینش و آگاهی دانشمندان

۳ ۱ ۴ ۱ ۵ ۹

ره سرمنزل توفیق بما آموزد.»

۲ ۶ ۵ ۳ ۵

و نمونهٔ ساده‌تری که بین دانش‌آموزان مرسوم است این است: «۳ و ۱ می‌شود ۴ و ۱ می‌شود ۵.»

در اینجا ما مقدار π را تا ۳۰ رقم اعشار ($\frac{۱}{۱۰^{۳۰}}$ دقّت) ارائه می‌دهیم:

π = ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸۴۶۲۶۴۳۳۸۳۲۷۹...

«پایان»

* موقعیت π درجدول حروف الفبای یونانی

پاورقیها:

۱ـ بعدها بقراط دانشمند بزرگ یونانی که درصدهٔ پنجم پیش‌از میلاد می‌زیست π را «نسبت مساحت دایره به مجذور شعاع آن» معرفی کرد.

۲ـ کلیهٔ سالهای آورده‌شده دراین مقاله‌برمبنای میلادحضرت مسیح(ع) است.

۳ـ غیاث‌الدین درکاشان متولد شد. دوران فعالیت علمی‌اش درقرنهای هفتم و هشتم هجری (قرنهای ۱۳ و ۱۴ میلادی) است. کاشانی همراه باتنظیم جدولهای مثلثاتی راه بسیار دقیقی برای محاسبهٔ سینوس زاویهٔ یک درجه بادانستن سینوس زاویهٔ سه درجه ارائه کرد. از کاشانی آثار چندی باقی‌مانده که از جملهٔ آنها کتاب «مفتاح الحساب» است. در این کتاب است که وی از کسرهای اعشاری سخن به میان آورده است.

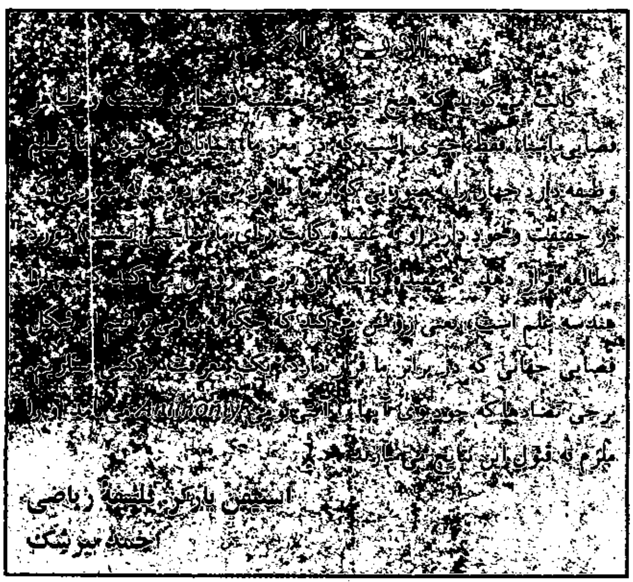
۴ـ توجّه کنید که در اینجا اعداد زوج در صورت و اعداد فرد در مخرج آورده شده‌اند.

۵ـ به همین جهت است که در آلمان π را لودلف می‌خوانند.

۶ـ از آنجاکه رقم سی ودوّم اعشار π صفر است این اعشار تا سی‌ویک رقم اعشار بیشتر به‌دست نمی‌آید.

۷ـ این متن چنین است:

«Que J'aime à faire apprendre un nomber Utile
auxsages Immortel Archimède, artiste, ingenieur
Qui de ton jugement peut priser La Valeur?
Pour moi ton problème est de pareils avantages»



جواب نامه‌ها

آقای محمد رضا ذکایی سال چهارم ریاضی (خوی)

ضمن عرض سلام و تشکر متقابل برای ارسال مسائل حل شده شما به اطلاع می‌رسانیم که مسائل ارسال شدهٔ شما بیشتر مورد استفاده دانش‌آموزان علاقه‌مند و المپیاد ریاضی است که جزو اهداف فعلی مجلهٔ دانش‌آموزی برهان نمی‌باشد. بنابراین سعی کنید مسائل را در سطح مجله ارائه دهید.

آقای اکبر شمسی (آذربایجان غربی)

ضمن تشکر از شما باید به عرض برسانیم که متأسفانه روش اثباتی که در مورد قضیهٔ فرما ارائه داده‌اید در هیچ حالت صحیح نیست. زیرا شما فرض کرده‌اید که $x + y = z$ و $x + z = y$ و $z + y = x$ که از این سه شرط حاصل می‌شود: $x = \circ$ و $y = \circ$ و $z = \circ$ که جوابهای صفر از نظر تئوری اعداد بیهوده می‌باشند و در نتیجه به عنوان جواب مطلوبی برای معادلهٔ $x^n + y^n = z^n$ محسوب نمی‌شوند و جوابها باید شرط $xyz \neq \circ$ را دارا باشند.

آقای اسداله نصیری (فارس)

پس از سلام به عرض می‌رسانیم که مجلهٔ برهان از پاسخ به مسائل خصوصی معذور است.

آقای محمد رضا اسماعیلی خدابنده

با تشکر از مسائل ارسالی شما، امید است که از آنان در جای مناسب استفاده شود.

آقای حسین اصلانی دانش‌آموز سال سوم (تبریز)

ضمن تشکر از مقالات ارسالی شما، باید به عرض برسانیم که مقالات ارسالی شما در غالب یک مسأله است. در صورت تمایل آن را به صورت یک مسئله بیان کنید و برای ما بفرستید.

آقای عبدالحمید معصومی (خوانسار)

ضمن تشکر و سپاس از مقالهٔ شما تحت عنوان «محاسبهٔ عدد π» به اطلاع می‌رسانیم که امید است امکان چاپ آن در شماره‌های بعدی مجله در جای مناسب به وجود آید. در انتظار مسائل (همراه با حل) و مقالات بعدی شما هستیم. موفق و پیروز باشید.

آقای علی بهرامی‌زاده دانش‌آموز سال سوم ریاضی (نیشابور)

ضمن سلام و تشکر ازمقالات ارسالی شما تحت عناوین «فهم و دقت در ریاضی» و «گزاره‌ها و قوانین آن» باید به عرض برسانیم که مقالهٔ اول شما حاوی چند تذکر به ریاضی خوانهای بی‌توجه است و باید توجه داشته باشید که مواردی راکه شما اشاره کرده‌اید جامع نیست زیرا بیان اصطلاحات و تعاریف نیز، با شرط درستی آنان تابع قیدوبند نیست و سلیقه‌ای می‌باشد. به‌عنوان مثال همان طور که خودتان نیز اشاره کرده‌اید در کتابهای دکتر مصاحب، عباراتی سلیقه‌ای مانند: ازبا، تابا و بازه و... را مشاهده می‌کنیم که شاید در کتابهای دیگر نظیر این نوع اصطلاحات را کمتر ببینیم. همچنین ارائهٔ یک تعریف ریاضی از نظر لفظی و یا جهات دیگر متفاوت است. مقالهٔ دوم شما نیز بسیار مختصر می‌باشد و در صورت لزوم از آن استفاده خواهیم کرد. در هر صورت توجه شما تحسین‌آمیز است و امید است با به کارگیری این توجهات (که لازمهٔ هر ابتکار و نوآوری است) ما را با ارائه مقالات دیگری در زمینه‌های مختلف ریاضی بهره‌مند سازید.

آقای عبدالرضا حیدری دانش‌آموز سال چهارم ریاضی (یزد)

با تشکر از مسئله حل شدهٔ ارسالی شما، امید است مسائل مطلوبتری را طرح و حل نمایید تا آنان را مورد استفادهٔ دانش‌آموزان علاقمند قرار دهیم.

آقای کیوان حاجی بیگ‌زاده دانش‌آموز سال سوم ریاضی (خوی)

ضمن تشکر از شما برای ارسال مسائل حل شده به عرض می‌رسانیم که ارسال حل مسائل مجله به جز مسائل مسابقه‌ای لزومی ندارد و فقط برای ارسال حل کامل و صحیح مسائل مسابقه‌ای در زمان مقرر شده جوایزی اهدا خواهد شد.

آقای وحید فرشاد دانش‌آموز سال چهارم ریاضی (تبریز)

ضمن تشکر از ارسال مسائل حل شدهٔ شما به اطلاع می‌رسانیم که در شماره‌های آینده از مسائل شما استفاده خواهیم کرد. در انتظار مسائل (همراه با حل) بعدی شما با همین کیفیت هستیم. موفقیت و پیروزی شما را از خداوند منان خواستاریم.

آقای حسن جعفریه (تهران)

ضمن تشکر از مسائل ارسالی حل شدهٔ شما به اطلاع می‌رسانیم که امید است در آینده از آنان استفاده کنیم.

آقای ناصر آذری دانش‌آموز سال سوم ریاضی (مازندران)

ضمن تشکر از ارسال حل برخی از مسائل به عرض می‌رسانیم که سعی کنید پس از حل مسائل مقطع مربوطه مندرج در مجله، به طرح و حل مسائلی جدید و متنوع و قابل استفادهٔ دانش‌آموزان بپردازید و در صورت امکان آن را ارسال دارید. تا پس از تأیید در یکی از شماره‌های مجله آن را به نام خودتان به چاپ برسانیم.

آقای حسن عطاردی دانش‌آموز سال چهارم تجربی (گناباد)

ضمن تشکر از ارسال تستهای حل شدهٔ شما، به عرض می‌رسانیم که سعی کنید تست یا مسائل ارسالی شما بیشتر توسط خودتان طراحی شود که در این صورت مطمئناً" از سطح مطلوبتری برخوردار خواهد بود.

آقای سبزرو دانش‌آموز سال چهارم ریاضی (تهران)

با تشکر از شما برای ارسال راه حلی دیگر برای مسألهٔ استاد هشترودی و طرح و حل یک مسأله، موفقیت روزافزون شما و سایر دانش‌آموزان علاقه‌مند و مستعد به ریاضی را از خداوند منان خواستاریم.

آقای علیرضا آسیابانی دانش‌آموز سال چهارم ریاضی (شهر قدس)

ضمن تشکر از مسائل ارسالی حل شدهٔ شما به عرض می‌رسانیم که سعی کنید مسائل را در سطح جامعتری انتخاب و یا طراحی کنید، تا بتوان مورد استفادهٔ دانش‌آموزان قرار داد. به این نکته نیز توجه داشته باشید که روشهای به کار گرفته شده درحل مسائل باید مربوط به همان مقطع تحصیلی شود.

آقای احسان پولادی دانش‌آموز سال دوم دبیرستان (قوچان)

ضمن تشکر از نامهٔ شما و ارسال یک مسألهٔ حل شده، باید به عرض برسانیم که پاسخ به سؤالات، جزو اهداف مجله نیست و به عنوان راهنمایی می‌توانیم کتاب بازآموزی هندسه را به شما معرفی کنیم که اثبات مسئله معروف مربوط به نیمساز را در آن مشاهده خواهید کرد.

آقای سعید عقلی دانش‌آموز چهارم ریاضی (یزد)

ضمن تشکر از شما برای ارسال مسائلی همراه با حل به عرض می‌رسانیم که سعی کنید طرح و حل مسائل بیشتر از خودتان باشد و تکراری نیز نباشد و همچنین در سطح مطلوبتری ارائه شود تا مورد استفاده دانش‌آموزان دبیرستان واقع شود.

آقای پوریا پوریحیی (رشت)

ضمن تشکر از شما برای ارسال دو مسألهٔ حل شده به اطلاع می‌رسانیم که امید است امکان درج آن در شماره‌های آیندهٔ مجله به وجود آید.

آقایان محمد رضا و علیرضا یمقانی (تهران)

ضمن تشکر از شما برای ارسال حل یکی از مسائل مسابقه‌ای و حل برخی از مسائل و تستهای مجله (البته صرفه‌نظر از اشکالاتی که در حل برخی از آنان موجود بود) به عرض می‌رسانیم که ارسال حل مسائل و تستهای مجله لزومی ندارد و فقط حل مسائل مسابقه‌ای را ارائه دهید.

آقای حیدر ذبیحی دانش‌آموز سال چهارم ریاضی

ضمن تشکر از ارسال نامهٔ شما باید به عرض برسانیم که قسمت جدیدی که تحت عنوان «آموزش ترجمهٔ متون ریاضی» باز شده است با توجه به این نیاز است که هر دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی لااقل با برخی از لغات و اصطلاحات اساسی که در مقطع دانشگاه نیز با آنان روبه‌رو خواهد شد آشنا شود و همچنین درمقطع فعلی نیز بتواند از منابع غنی ریاضی که اکثراً به زبان لاتین می‌باشند به سادگی استفاده کند. زیرا ترجمهٔ متون با به‌کارگیری واژه‌نامه آن قدر هم که شما نظر داده‌اید کار آسانی نیست و حتی ترجمهٔ چند سطر که محتوی چند لغت جدید و اصطلاح ریاضی باشد از یک دانش‌آموز مبتدی وقت زیادی را طلب می‌کند، چه رسد به ترجمهٔ یک متن کامل ریاضی که حاوی لغات و اصطلاحات فراوان ریاضی باشد. دیگر این‌که ذکر منابع و مآخذ برای یک مقاله هرچه‌قدر هم که زیاد باشد، مفید است، زیرا خواننده را برای رسیدن به چشمه‌های اصلی مطلب هدایت می‌کند.

آقای وحید آئین دانش‌آموز سال چهارم ریاضی (خوی)

ضمن تشکر از شما برای ارسال چند مسألهٔ حل شده، در جواب نامهٔ شما به عرض می‌رسانیم که به طور کلی لازمهٔ پیشرفت و خلاقیت و ابتکار در هر رشتهٔ از علوم استعداد و تحقیق و پشتکار است که آن هم ناشی از میل و علاقهٔ درونی شخص به آن رشتهٔ می‌باشد. بنابراین واقعیتها چنین حکم می‌کنند که انسان رشته‌ای را باید دنبال کند که با استعداد و میل درونی او انطباق داشته باشد. در این جا دیگر شما می‌توانید با توجه به معیارهای اساسی و نه معیارهای کاذبی مانند سرزنش دوستان یا مقدار درآمد و یا... به رشتهٔ مورد علاقهٔ خود که به گفتهٔ خودتان رشته ریاضی است قدم نهید تا پس از ارائهٔ نتایج پژوهشها و ابداعات جدید ریاضی به ارضای درونی خویش نایل شوید.

آقایان حنیف بیات موحد و امید کاویانی‌پور دانش‌آموزان مرکز آموزشی علامه حلی (تهران)

ضمن تشکر از شما برای تلاش و کوشش و ابتکاری که برای حل یکی از مسائل هندسه مندرج در مجلهٔ دانش‌آموزی برهان ارائه داده‌اید، موفقیت و پیروزی هر چه بیشتر شما را از خداوند منان خواستاریم.

ادب ریاضی

ارسطو میان بدیهیات [Axioms] (که مشترک میان تمام علوم است) یا اصول موضوعه [Postulates] (مربوط به فرد فرد علوم) تفاوت گذاشته است. مثالهایی از بدیهیات یا علوم متعارفه [Common notions] که ارسطو آورده چنین است: «قانون نفی حد وسط» (هر چیز باید تصدیق شود یا مورد انکار قرار گیرد)، «قانون تناقض» (یک شیء نمی‌تواند در آن واحد هم باشد و هم نباشد)، و «چون از دو چیز مساوی برداشته شود، باقیمانده‌ها مساوی یکدیگر است». تعریفات باید خوب فهم شود؛ و البته تعریف شیء ضرورت ندارد که وجود یا عدم شیء را اثبات کند. در حساب باید آحاد یا مونادها [Monads] و در هندسه نقطه و خط فرض شود، ولی در مورد اشیای پیچیده‌تر مانند مثلث و مماس باید وجودشان را اثبات کنند و بهترین راه اثبات این است که عملاً آنها را بسازند. بزرگترین خدمت ارسطو به ریاضیات، بحثی است که وی با کمال احتیاط دربارهٔ پیوستگی و لانهایت کرده است، و در مورد لانهایت گفته است که بالقوه وجود دارد و بالفعل موجود نیست.

جورج سارتون. تاریخ علم
احمد آرام

حل مسائل مسابقه‌ایِ برهان ۶

۱- ثابت کنید برای $n > 4$ ، $(1234321)_n$ و $(44100)_n$ مربع کامل‌اند و نشان‌دهید $(12543)_n$ بر $(111)_n$ و $(113)_n$ بخش‌پذیر است.

حل:

$$(1234321)_n = 1 + 2n + 3n^2 + 4n^3 + 3n^4 + 2n^5 + n^6$$
$$= (1 + n^2)^3 + 2n(1 + 2n^2 + n^4) = (1 + n^2)^3 + 2n(1 + n^2)^2$$
$$= (1 + n^2)^2 (1 + n^2 + 2n) = (1 + n^2)^2 (1 + n)^2$$ مربع کامل

$$(44100)_n = n^2 + 4n^3 + 4n^4 = n^2 (1 + 4n + 4n^2)$$
$$= n^2 (2n + 1)^2$$ مربع کامل

$$(111)_n = (1 + n + n^2) \text{ و } (113)_n = (3 + n + n^2)$$
$$(12543)_n = (3 + 4n + 5n^2 + 2n^3 + n^4)$$

با تقسیم K بر A و B داریم:

K بر A و بر B بخش‌پذیر است $\Leftarrow K = AB$

(راه‌حل از: مریم آقایی‌پور، دوم دبیرستان از شهرستان رشت)

۲- مجموع دو عدد ۱۴۸ و مجموع مقلوبهای این دو عدد ۵۵۳ است این دو عدد کدامند؟

حل: این دو عدد هر دو ۳ رقمی نیستند زیرا مجموع آنها ۱۴۸ است و هر دو، دو رقمی نیستند زیرا مجموع مقلوبهای آنها ۵۵۳ است پس الزاماً یکی باید دو رقمی و دیگری سه رقمی باشد عدد ۳ رقمی را $\overline{abc}$ و ۲رقمی را $\overline{de}$ فرض می‌کنیم.

$$\begin{array}{r} + \ \overline{abc} \\ \overline{de} \\ \hline \end{array}$$
$$\overline{a(b+d)(c+e)} = 148 \Rightarrow a = 1 \text{ و } b + d = 4 \text{ و } c + e = 8$$

$$\begin{array}{r} + \ \overline{cba} \\ \overline{ed} \\ \hline \end{array}$$
$$\overline{c(b+e)(a+d)} = 553 \Rightarrow c = 5 \text{ و } b + e = 5 \text{ و } a + d = 3$$

از مقایسهٔ آنها ۶ معادله و ۵ مجهول به‌دست می‌آید و از حل آنها داریم:

$c = 5$ و $c + e = 8 \Rightarrow e = 3$

$e = 3$ و $b + e = 5 \Rightarrow b = 2$

$b = 2$ و $b + d = 4 \Rightarrow d = 4$

$a = 1$

$c = 5$

$\overline{abc} = 125$

$\overline{de} = 23$

(راه حل از: نقی اصغری، سوّم ریاضی، دبیرستان فرخی، منطقه ۱۲ تهران)

مسائل مسابقه‌ای

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

۱ - ثابت کنید اگر به حاصل ضرب هر چهار عدد که به تصاعد حسابی با قدر نسبت d می‌باشند مقدار $d^۴$ را اضافه کنیم، حاصل همواره یک مربع کامل می‌شود (مسئله را برای شش، هشت و ده عدد که به تصاعد حسابی با قدر نسبت d باشند نیز در صورت امکان تعمیم دهید).

۲ - با استفاده از اتحاد

$$(A+B)^۳ = A^۳ + B^۳ + ۳AB(A+B)$$

معادلهٔ درجهٔ سوم کانونیک زیر را حل کنید:

$$X^۳ + pX + q = ۰$$

(نکتهٔ ۱: هر معادلهٔ درجهٔ سوم کامل به فرم عمومی $ax^۳ + bx^۲ + cx + d = ۰$ را نیز می‌توان با تبدیل $x = X - \frac{b}{۳a}$ به فرم کانونیک تبدیل نمود.

نکتهٔ ۲: در حالت عمومی وقتی معادلهٔ درجهٔ سوم سه ریشهٔ حقیقی دارد، ریشه‌های آن روی یک دایره می‌باشند و به فرم مثلثاتی بیان می‌شوند، لذا معادله در این حالت باید به طریقهٔ مثلثاتی حل شود).

اسامی تعدادی از افرادی که مسائل مسابقه‌ای برهان شمارهٔ ۶ را صحیح حل کرده‌اند:

راحله نظری - سال سوم ریاضی و فیزیک (رشت)
مهرداد سلامی - سال چهارم ریاضی و فیزیک (مشگین‌شهر)
ایمان زارعی - سال چهارم تجربی (اهواز)
مریم عباسی - سال سوم ریاضی (مشهد)
زهرا عباسی - سال سوم تجربی (مشهد)
رؤیا کریمیان - سال سوم ریاضی (شیراز)
رضا ظهرابی - (مسجد سلیمان)
امیر بابازاده - سال سوم ریاضی (زنجان)
کاوه بذرافکن - سال چهارم ریاضی (تهران)
ستاره ناصری - (قم)
نقی اصغری - سال سوم ریاضی و فیزیک (تهران)
مریم آقایی‌پور - سال سوم ریاضی و فیزیک (رشت)
قاسم اکبری فرد - سال سوم ریاضی (جهرم)
مهدی فرهمندفر - سال سوم ریاضی (تهران)
رحیم بغدادی - (فیزیک و ریاضی)
رضا توکلی - ([illegible])
سید عبدالصمد خواجه‌مرد - سال چهارم ریاضی و فیزیک (جهرم)
امیر حیدری - سال سوم ریاضی (تفرش)
مجید جباری‌راد (قزوین)
فاطمه فاضل سرجوئی - سال سوم ریاضی (تهران)
احمدرضا فتاحی - سال سوم ریاضی (اراک)
عباس زوار (تکاب)
عبدالرضا حیدری - سال چهارم ریاضی و فیزیک (یزد)

مسائل برای حل

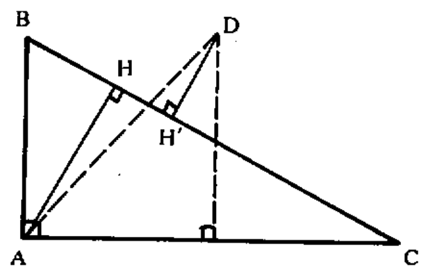
● هندسه: محمد هاشم رستمی

● ریاضیات جدید: حمیدرضا امیری ● جبر و مثلثات: احمد قندهاری و محمدرضا هاشمی

مسائل ریاضیات سال اول

۱ـ ثابت کنید که در هر مثلث غیرمتساوی الساقین در یک رأس، نیمساز زاویهٔ درونی آن رأس، داخل زاویهٔ بین میانه و ارتفاع نظیر آن رأس قرار دارد.

۲ـ مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\hat{A} = 90^\circ)$ با شرط $AC = 2AB$ مفروض است. نقطهٔ برخورد عمودمنصف ضلع AC و نیمساز درونی زاویهٔ A را D می‌نامیم. ثابت کنید که فاصلهٔ نقطهٔ D تا وتر مثلث، مساوی نصف اندازهٔ ارتفاع وارد بر وتر مثلث ABC است.



۳ـ هرگاه گزاره‌های $(p \Rightarrow q)$، $(q \Rightarrow p)$ و $(\sim p \wedge r)$ دارای ارزش درست باشند، ارزش گزارهٔ $(\sim q \Leftrightarrow p) \Longleftrightarrow (\sim p \Rightarrow q)$ را تعیین کنید.

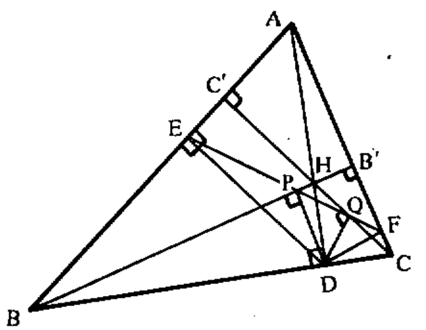
۴ـ بدون استفاده از جدول ارزشها، ثابت کنید گزارهٔ شرطی $(p \wedge q) \Longrightarrow (p \vee q)$ یک استلزام منطقی است. (گزارهٔ شرطی همیشه درست استلزام منطقی نام دارد.)

۵ـ اگر تساوی $\dfrac{A}{2x-1} + \dfrac{B}{x-1} = \dfrac{11x-8}{(2x-1)(x-1)}$ یک اتحاد باشد، A و B را بیابید.

۶ـ اگر $a - b + c = 2$، آنگاه عبارت $(a^2 - b^2 + c^2)$ برابر چیست؟

مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

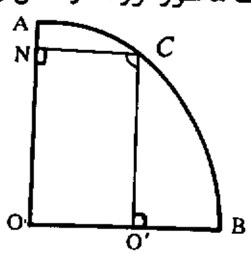
۱ـ تصویر نقطهٔ D پای ارتفاع رأس A از مثلث ABC روی اضلاع AB و AC را به ترتیب E و F، و نقطه‌های برخورد خط EF با ارتفاعهای رئوس B و C را P و Q می‌نامیم. ثابت کنید که مثلث DPQ با مثلث ABC متشابه است.



فرستنده: حسین اصلانی دانش‌آموز دبیرستان والفجر تبریز

۲ـ ربع دایرهٔ AOB مفروض است. وسط شعاع OB را O' می‌نامیم و مستطیل $OO'CN$ را می‌سازیم. سپس به قطر OB نیم‌دایره‌ای رسم می‌کنیم تا پاره‌خط $O'C$ را در نقطهٔ M قطع کند در صورتی‌که اندازهٔ وتر AB مساوی $10\sqrt{2}$ سانتی‌متر باشد، مساحت قسمت هاشورخورده در شکل را پیدا کنید.

فرستنده: غلامرضا روشندل



۳ـ هرگاه A و B دو مجموعهٔ جدا از هم باشند ثابت کنید:

$$(B \times A) - (B \times B') = \phi$$

۴ـ ثابت کنید تعداد رابطه‌هایی که روی یک مجموعهٔ K عضوی می‌توان تعریف کرد که هم خاصیت تقارنی و هم پادتقارنی داشته باشند عبارت است از 2^k.

۵ـ خاصیت یک به یکی و پوشایی را برای تابع با ضابطهٔ زیر بررسی کنید:

$$f: IR^+ \to IR^+$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x - 1}$$

۶ـ اگر $\log_9 16 = a$، آنگاه عبارت $\log_4 \sqrt[3]{3}$ را برحسب a بیابید.

۷ـ نقاطی روی خط نیمساز ربع اول و سوم بیابید که فاصله آنها از نقطهٔ $A \left| \begin{array}{l} 4 \\ -1 \end{array} \right.$ برابر $\sqrt{13}$ باشد.

۸ـ اگر $x = a\cos\alpha - b\sin\alpha$ و $y = a\sin\alpha + b\cos\alpha$ باشد، نشان دهید که:

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

فرستنده: رامتین آمویی دانش‌آموز رشته‌ریاضی مسجد سلیمان

۹ـ ثابت کنید:

$$\sin\left(Arc\cos\frac{3}{5}\right) = \cos\left(Arc\sin\frac{3}{5}\right)$$

فرستنده: خانم رضوان سعیدی دانش‌آموز مرکز فرزانگان اراک

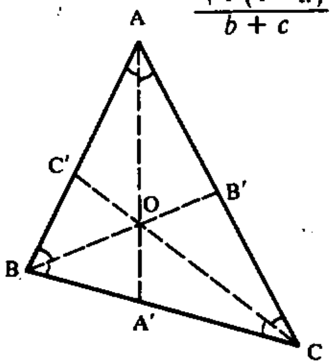
مسائل ریاضیات سال سوم ریاضی

۱ـ نقطه برخورد AA' و BB' و CC' نیمسازهای زوایای داخلی مثلث ABC را O می‌نامیم.

الف) ثابت کنید اگر $OB.OC = a.OA$ باشد، مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

ب) ثابت کنید تصویر AA' روی ضلع AC برابر است با:

$$\frac{2P(P-a)}{b+c}$$



۲ـ دایرهٔ به مرکز O و دو نقطهٔ A و B در صفحهٔ این دایره مفروض‌اند. از نقطهٔ A قاطع ACD را نسبت به دایره رسم می‌کنیم. مکان هندسی نقطهٔ G محل برخورد میانه‌های مثلث BCD را وقتی قاطع ACD حول نقطهٔ A دوران کند، تعیین کنید.

۳ـ اگر A و B هردو زیرفضای، فضای برداری V باشند، ثابت کنید:

«شرط لازم و کافی برای آنکه $(A \cup B)$ یک زیرفضای V باشد آن است که $A \subset B$ یا $B \subset A$»

۴ـ ثابت کنید مجموعهٔ توابع فرد، یک زیرفضای، فضای برداری توابع از IR به IR است.

۵ـ در یک جبر بول مانند B، عمل $*$ را به صورت $a*b = ab' + a'b$ تعریف می‌کنیم. ابتدا ثابت کنید $(B, *)$ یک گروه جابجایی است و سپس با استفاده از خواص گروه ثابت کنید:

(الف) $ab' + a'b = a \Rightarrow b = 0$

(ب) $ab' + a'b = 0 \Rightarrow a = b$

۶ـ دامنه و برد تابع به معادله $y = x + \sqrt{-x^2 + 2}$ را بیابید.

۷ـ به کمک تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ را بیابید.

۸ـ عبارت $3\sqrt{3} - 5$ را قابل محاسبهٔ لگاریتمی کنید.

فرستنده: امین خاتین‌زاده دانش‌آموز رشته ریاضی اهواز

۹ـ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$1 + \sqrt{2}\, \sin 3x = \cos 2x$$

فرستنده: خانم سیده صدیقه حسینی دانش‌آموز رشته ریاضی لنگرود

مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱ـ بردار $\vec{v}_1$ موازی بردار $\vec{v}_2 = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ و $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 42$ است. طول تصویر قائم بردار $\vec{v}_1$ روی صفحهٔ xoy را پیدا کنید.

۲ـ حجم متوازی‌السطوحی را بیابید که سه بردار $3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$ و $4\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ و $\vec{i} + \vec{j}$ سه یال مجاور آن باشند.

۳ـ دو نقطهٔ (۱− و ۳ و ۱) A و (۱ و ۰ و ۲−) B و صفحهٔ $P: 2x + y - 2z - 3 = 0$ مفروض‌اند:

الف) مشخص سازید که نقاط A و B در یک طرف صفحه P واقع‌اند یا در دو طرف آن.

ب) زاویهٔ خط AB با صفحه P را تعیین کنید.

۴ـ معادلهٔ کانونیک تصویر قائم خط $D: 2x - 1 = -y + 2 = 3z$ روی صفحهٔ $P: x + y - 2z - 2 = 0$ را به دست آورید.

۵ـ نقیض گزارهٔ $(r \Rightarrow s) \Rightarrow [s \Rightarrow (s \wedge t)]$ را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

۶ـ ثابت کنید گزارهٔ زیر یک استلزام منطقی است:

$$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)] \Rightarrow (q \Rightarrow p)$$

۷ـ نشان دهید که اعداد به شکل $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ که a و b و c اعداد گویا هستند تشکیل یک میدان می‌دهند.

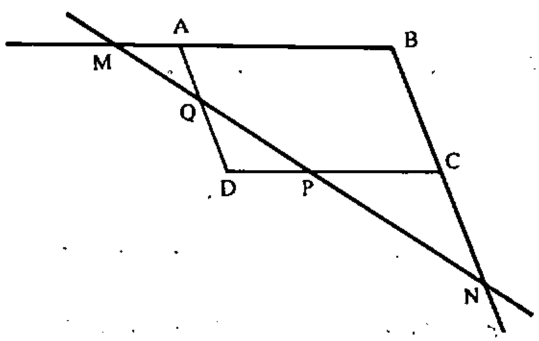
۸ـ ثابت کنید هر حلقهٔ متناهی (تعداد اعضایش متناهی باشد) که حوزهٔ درست باشد یک میدان خواهد بود.

۹ـ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x}$ را در نقطهٔ $x_0 = 1$ بررسی کنید.

۱۰ـ تابع به معادله $y = \dfrac{x^2 + bx + c}{x^2 + 1}$ را چنان مشخص کنید تا مجموع طولهای اکسترمم مساوی حاصلضرب عرضهای اکسترمم، مساوی صفر باشد.

مسائل ریاضیات دوّم تجربی

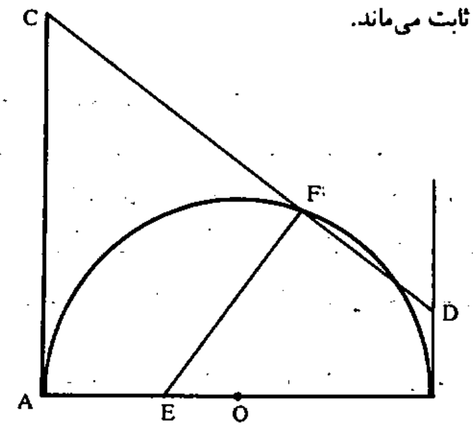
۱ـ متوازی‌الاضلاع $ABCD$ مفروض است. خط راستی، اضلاع یا امتداد اضلاع AB و BC و CD و DA از این متوازی‌الاضلاع را به



ترتیب در نقاط M و N و P و Q قطع می‌کند. ثابت کنید که:

$$\frac{MA}{MB}\times\frac{NB}{NC}\times\frac{PC}{PD}\times\frac{QD}{QA}=۱$$

۲ـ نیم دایره‌ای به قطر AB مفروض است. از نقطهٔ اختیاری F واقع براین نیم‌دایره به نقطهٔ ثابت E که روی قطر AB واقع است وصل می‌کنیم و در نقطهٔ F خطی عمود بر FE رسم می‌نماییم تا خطوط مماس بر نیم دایره در نقاط A و B را به ترتیب در نقاط C و D قطع کند. ثابت کنید که با تغییر مکان نقطهٔ F روی نیم‌دایره مقدار $AC \, . \, BD$ ثابت می‌ماند.



فرستندهٔ مسائل ۱ و ۲ : آقای علی عمیدی دانش‌آموز رشته ریاضی گرمسار

۳ـ عبارات زیر را تجزیه کنید:

۱) $a(a+۱)(a+۲)(a+۳)+۱$

۲) $y^۵+y+۱$

۴ـ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$(x+۲)(x+۴)(x-۳)(x-۵)=۷۲$$

۵ـ به ازای چه مقادیری از a دستگاه زیر دارای جواب است:

$$\begin{cases} x^۲+y^۲=۲a+۲ \\ (x+y)^۲=۱۴ \end{cases}$$

۶ـ ثابت کنید اگر a_m جملهٔ mام و a_n جملهٔ nام و d قدر نسبت یک تصاعد حسابی باشند، همواره داریم:

$$d=\frac{a_n-a_m}{n-m}$$

فرستنده مسائل ۵ و ۶: خانم مریم‌موسوی دانش‌آموز رشته‌ریاضی اهواز

۷ـ ثابت کنید:

$$\sin^۴\frac{\pi}{۸}+\sin^۴\frac{۷\pi}{۸}+\sin^۴\frac{۳\pi}{۸}+\sin^۴\frac{۵\pi}{۸}=\frac{۳}{۲}$$

فرستنده : خانم مریم‌موسوی دانش‌آموز رشته‌ریاضی اهواز

۸ـ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$۲\cos\frac{x}{۶}-\sin\frac{x}{۴}+۱=۰$$

فرستنده : سیدرضا موسوی‌عارف دانش‌آموز رشته‌ریاضی تبریز

مسائل ریاضیات سال سوّم تجربی

۱ـ در مثلث ABC اندازهٔ زاویهٔ A برابر ۶۰° است. وسط ضلع AB را نقطهٔ M و وسط ضلع AC را نقطهٔ N می‌نامیم. قرینهٔ نقطه M نسبت به ضلع AC را M' و قرینهٔ نقطهٔ N نسبت به ضلع AB را N' می‌نامیم. ثابت کنید:

الف) نقاط M' و A و N' روی یک خط راست قرار دارند.

ب) $M'N'=\frac{۱}{۲}(AB+AC)$.

در صورتی‌که $\hat{A}\neq ۶۰^\circ$ باشد رابطهٔ $M'N'=\frac{۱}{۲}(AB+AC)$ به چه صورت در می‌آید؟

۲ـ اگر $|\vec{v}_۱|=۴\sqrt{۲}$ و $|\vec{v}_۲|=۶$ و $|\vec{v}_۳|=۵$ و $|\vec{v}_۴|=۱۲$ و اندازهٔ زاویهٔ بردارهای $\vec{v}_۱$ و $\vec{v}_۲$ و $\vec{v}_۳$ با محور $x'ox$ به ترتیب $\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{\pi}{۲}$ باشد. اندازهٔ زاویهٔ بردار $\vec{v}_۴$ با محور $x'ox$ را به دست

آورید، در صورتی‌که اندازهٔ جبری تصویر مجموع هندسی این بردارها روی محور $x'ox$ برابر ۱+ باشد.

۳ـ اگر $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$ و $|\vec{b}| = 6$ و $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$ باشد مطلوب است محاسبهٔ $\vec{a}.(\vec{a} - 3\vec{b})$

۴ـ دامنهٔ تابع باضابطهٔ $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2 - 2x + 5}}{\sqrt{2x + 9 - \left(\dfrac{2x}{1-\sqrt{1+2x}}\right)^2}}$ را تعیین کنید.

فرستنده: آقای حسین سبزرو دانش‌آموز رشته ریاضی تهران

۵ـ مطلوب است محاسبهٔ حد زیر:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\ tg\ 2x$$

فرستنده: خانم سیدهٔ صدیقه حسینی دانش‌آموز رشته ریاضی لنگرود

۶ـ از رابطهٔ $5\sin x=\sin(2y + x)$ رابطهٔ $2tg(x+y) = 3tg y$ را نتیجه بگیرید.

فرستنده: آقای حمیدایزدیان دانش‌آموز رشته‌ریاضی اصفهان

۷ـ ثابت کنید که برابریهای زیر برقرار است:

الف) $16\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ \sin 90^\circ = 1$

ب) $\sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \sin 30^\circ + \sin 40^\circ + \sin 50^\circ = \frac{1}{2}\sin 25^\circ\ cosec 50^\circ$

فرستنده: آقای ن – ف دانش‌آموز رشته‌ریاضی آباده

مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱ـ معادلهٔ بیضی که مرکزش نقطهٔ $I\left|\begin{matrix}-4\\-2\end{matrix}\right.$ و بر محورهای مختصات مماس می‌باشد را بنویسید.

۲ـ نقاط $F(3-3\sqrt{2}, -3)$, $F'(3+3\sqrt{2}, -3)$ کانونهای یک هذلولی متساوی‌القطرین می‌باشند. معادلهٔ این هذلولی را بنویسید.

۳ـ معادلهٔ مکان هندسی نقاطی که از آن نقاط دو مماس عمود بر هم، بر سهمی به معادلهٔ: $(y+3)^2 = -8(x-2)$ می‌توان رسم نمود را بنویسید.

۴ـ مقدار $\lim_{n \to \infty} \left(n\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{tg^{2n}x}{\cos^2 x}\, dx\right)$ حد را حساب کنید.

مسائل مثلثات سال چهارم تجربی

۱ـ در معادلهٔ کلاسیک $a(\sin x - \cos x) + b\sin x\cos x = c$ ثابت کنید اگر $a^2 + b^2 < 2bc$ آنگاه معادله ریشهٔ حقیقی ندارد. همچنین ثابت کنید شرط لازم برای وجود جواب معادلهٔ $a(\sin x + \cos x) + b\sin x\cos x = c$ چنین است:

$$a^2 + b^2 + 2bc \ge 0$$

۲ـ از رابطهٔ بین سه ضلع و دو زاویه، قضیهٔ کسینوسها را نتیجه بگیرید:

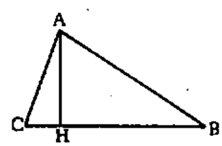
$$a = b\cos\hat{C} + c\cos\hat{B} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

فرستنده: آقای فرید آزادگان از اهواز

حل مسائل برهان شمارهٔ ۷

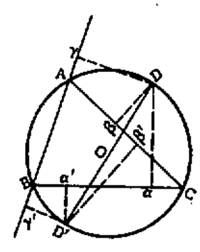
حل مسائل سال اول

۱ـ در مثلث ABC، $AB > AC$ اختیار شده است، پس $\hat{C} > \hat{B}$ است امّا $\hat{C} = ۹۰^\circ - H\hat{A}C$ و $B = ۹۰^\circ - H\hat{A}B$ است.
پس: $H\hat{A}B > H\hat{A}C \Rightarrow ۹۰ - H\hat{A}B > ۹۰ - H\hat{A}C$.



بنابراین می‌توان گفت: هرگاه مثلثی در یک رأس متساوی‌الساقین نباشد، ارتفاع نظیر آن رأس با ضلع بزرگتر، زاویه‌ای می‌سازد که بزرگتر است از زاویه‌ای که با ضلع کوچکتر می‌سازد.

۲ـ قطر DD' از دایرهٔ به مرکز o را رسم می‌کنیم و خطهای مماس نظیر نقاط D و D' را به ترتیب Δ و Δ' می‌نامیم. از C به نقاط D و D' وصل می‌کنیم و نقطهٔ برخورد Δ و Δ' را N می‌نامیم. چهارضلعی $\beta\alpha CD$ محاطی است پس:



(۱) $\beta\hat{\alpha}D = \beta\hat{C}D$. همچنین چهارضلعی $\alpha'\beta'CD'$ محاطی می‌باشد پس (۲) $\beta'\hat{\alpha'}C = \beta'\hat{D'}C$. از طرفی دو زاویهٔ $\beta\hat{C}D$ و $\beta'\hat{D'}C$ که اضلاعشان دو به دو برهم عمودند متساوی‌اند (۳) $\beta\hat{C}D = \beta\hat{D'}C$.

از روابط (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌گردد که $\beta\hat{\alpha}D = \beta'\hat{\alpha'}C$. امّا چون $D\alpha \perp BC$ است، $\beta\hat{\alpha}D + \beta\alpha\hat{\alpha'} = ۹۰^\circ$. و از آنجا می‌توان نوشت $\beta'\hat{\alpha'}\alpha + \beta\alpha\hat{\alpha'} = ۹۰^\circ$ پس مثلث $N\alpha\alpha'$ که مجموع دو زاویه‌اش ۹۰° می‌باشد، در رأس N قائم‌الزاویه است. یعنی $\Delta \perp \Delta'$ است.

۳ـ با توجه به درست بودن ارزش گزارهٔ $(p \Rightarrow q)$ و $(q \Rightarrow r)$ و $(\sim r \vee \sim p)$ نتیجه می‌گیریم که $\underline{P \equiv F}$، زیرا اگر $P \equiv T$ داریم، $\sim P \equiv F$ و با توجه به فرض باید $\sim r \equiv T$ یا $r \equiv F$ و از طرفی اگر $P \equiv T$ با توجه به فرض باید $q \equiv T$ بنابراین $(q \Rightarrow r) \equiv F$ که با درست بودن آن تناقض دارد، بنابراین $P \equiv F$، حال با توجه به اینکه $P \equiv F$ برای q دو حالت در نظر می‌گیریم. (همواره ثابت شده که $P \equiv F$)

I) اگر $q \equiv T$ پس با توجه به اینکه $(q \Rightarrow r) \equiv T$، باید $r \equiv T$ و $\sim r \equiv F$ بنابراین گزارهٔ $r \Leftrightarrow (\sim r \vee p) \Rightarrow q$ دارای ارزش درست خواهد بود.

II) اگر $q \equiv F$، چون $(q \Rightarrow r) \equiv T$ پس برای r دو حالت موجود است که در هر دو حالت گزاره حکم همواره درست خواهد بود زیرا: اگر $r \equiv T$ پس $\sim r \equiv F$ که همان حالت قبل ایجاد می‌شود و اگر $r \equiv F$ پس $\sim r \equiv T$ پس $(\sim r \vee p) \Rightarrow q$ با توجه به اینکه $q \equiv F$، دارای ارزش نادرست است که با r هم‌ارز است و لذا در این حالت نیز $r \Leftrightarrow (\sim r \vee p) \Rightarrow q$ دارای ارزش درست است.

۴ـ
$$C \cap [(A - B) \cup B] \cup (A \cup B) =$$
$$C \cap [(A \cap B') \cup B] \cup (A \cup B)$$
$$= [C \cap (A \cup B)] \cup (A \cup B) = (A \cup B)$$
(طبق قانون جذب)

۵ـ
$$A = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$$
$$A_۱ = \{a, \{a\}\} \quad A_۲ = \{\{a, \{a\}\}\}$$
$A = \{A_۱, A_۲\}$ یک افراز ۲ عضوی

(مجموعه‌های $A_۱$ و $A_۲$ مجموعهٔ A را افراز می‌کنند زیرا هرکدام ناتهی‌اند و اشتراکی ندارند و $A_۱ \cup A_۲ = A$)
از طرفی می‌دانیم A یک مجموعهٔ ۳ عضوی است پس $۸ = ۲^۳$ زیر مجموعه دارد و طبق فرض مجموعهٔ B، ۲۴ زیر مجموعه از A بیشتر دارد پس:

$$۲^n = ۲۴ + ۸ = ۳۲ \Longrightarrow n = ۵$$

یعنی B یک مجموعهٔ ۵ عضوی است.

۶ـ از رابطهٔ اول دستگاه به روابط زیر می‌رسیم:

$$y^۲ = xz,\ z^۲ = uy,\ u^۲ = sz,\ s^۲ = ut$$

اینک به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

(۱ $\frac{x}{y} = \frac{z}{u},\ x = ۸u \Longrightarrow z = \frac{۸u^۲}{y}$

(۲ $\frac{y}{z} = \frac{z}{u} \Longrightarrow z^۲ = uy \xRightarrow{۱} y = ۴u$

(۳ ۱ و ۲ $\Longrightarrow z = ۲u$

(۴ $u^۲ = zs \underset{(u \neq ۰)}{\xRightarrow{۳}} s = \frac{u}{۲}$

(۵ $s^۲ = ut \xRightarrow{۴} t = \frac{u}{۴}$

پس از جایگزینی روابط اخیر در معادلهٔ آخر دستگاه فوق داریم:

$8u + 4u + 2u + u + \frac{u}{2} + \frac{u}{4} = 15\frac{3}{4}$

$\Rightarrow 15\frac{3}{4}u = 15\frac{3}{4} \Rightarrow u = 1$

و پس از جایگزینی $u = 1$ داریم:

$x = 8$ و $y = 4$ و $z = 2$ و $s = \frac{1}{2}$ و $t = \frac{1}{4}$

۷ـ $m^2x - m^2 + mx + m + 6 - 2x = 0$

$(m^2 + m - 2)x = m^2 - m - 6$

$(m-1)(m+2)x = (m+2)(m-3)$

اگر $m \neq 1$ و $\neq -2 \Rightarrow x = \frac{m-3}{m-1}$

اگر $m = 1 \Rightarrow 0 \times x = -6$ معادله غیرممکن است

اگر $m = +3 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

اگر $m = -2 \Rightarrow 0 \times x = 0$

معادله به اتحاد تبدیل می‌شود و بی‌شمار مقدار می‌پذیرد.

۸ـ اگر معادلات دستگاه را با هم جمع کنیم خواهیم داشت:

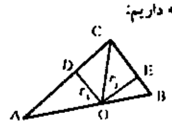
$3(x + y + z + t) = 30 \Rightarrow x + y + z + t = 10$

با توجه به معادلهٔ اوّل $(t = 4)$ وبا توجه به معادلهٔ دوّم $(x = 1)$ و با توجه به معادلهٔ سوم $(y = 2)$ و با توجه به معادلهٔ چهارم $(z = 3)$ خواهد شد.

حل مسائل سال دوم ریاضی

۱ـ (از آقای محمدعلی سلحشور دبیر ریاضی اصفهان): برای محاسبهٔ مساحت قطاع DOE لازم است شعاع دایرهٔ مورد بحث $OD = OE = r_1$ ، و زاویهٔ قطاع $D\hat{O}E = \alpha$ را به دست آوریم.

با توجه به داده‌های مسئله داریم:



نصف‌محیط مثلث $2p = 13+14+15 = 42 \Rightarrow p = 21$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 84\,cm^2$

$S_{ABC} = S_{OAC} + S_{OBC} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}(AC.r_1) + \frac{1}{2}(BC.r_1)$

$S = \frac{1}{2}r_1(AC+BC) \Rightarrow 84 = \frac{1}{2}r_1(15+13) \Rightarrow r_1 = 6$

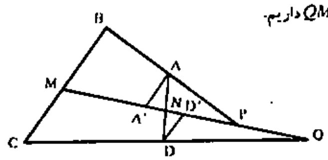
$\cos A\hat{C}B = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC.BC} = \frac{225+169-196}{2 \times 15 \times 13}$

$= \frac{198}{390} = \frac{99}{195}$

$\Rightarrow D\hat{O}E = \pi - Arc\cos\frac{99}{195} \Rightarrow S_{ODE}$ قطاع $= \frac{1}{2}r^2\alpha$

$= 18(\pi - Arc\cos\frac{99}{195})$

۲ـ از نقاط A و D خطهایی به موازات ضلع BC رسم می‌کنیم تا خط MN را به ترتیب در نقاط A' و D' قطع کند. در مثلثهای PMB و QMC داریم.



$AA' \parallel MB \Rightarrow \frac{PA}{PB} = \frac{AA'}{MB}$ (۱)

$DD' \parallel MC \Rightarrow \frac{QD}{QC} = \frac{DD'}{MC}$ (۲)

امّا $AA' = DD'$ است زیرا دو مثلث NAA' و NDD' با هم برابرند و $MB = MC$ است. پس طرفهای دوم روابط (۱) و (۲) با هم برابرند، لذا داریم:

$\frac{PA}{PB} = \frac{QD}{QC}$

۳ـ می‌دانیم هرگاه $(a,b) \in R$ آنگاه $(b,a) \in R^{-1}$ و برعکس. حال با فرض اینکه R یک رابطهٔ هم‌ارزی است و ۳ خاصیت انعکاسی، تقارنی و تعدی را دارا می‌باشد ثابت می‌کنیم R^{-1} نیز دارای هر سه این خواص است:

(۱ R^{-1} انعکاسی است)

$1)\ \forall a \in A,\ (a,a) \in R \Rightarrow (a,a) \in R^{-1}$

۲) اگر $(a,b) \in R^{-1} \Rightarrow (b,a) \in R \overset{R\ \text{تقارنی}}{\Longrightarrow} (a,b) \in R$

$\Rightarrow (b,a) \in R^{-1}$ (۲ R^{-1} تقارنی است)

۳) اگر $(a,b) \in R^{-1},\ (b,c) \in R^{-1} \Rightarrow (b,a) \in R,$

$(c,b) \in R \overset{R\ \text{تعدی است}}{\Longrightarrow} (c,a) \in R \Rightarrow (a,c) \in R^{-1}$

(۳ R^{-1} خاصیت تعدی دارد)

۴ـ $f: IR^2 \to IR^2$

$f(x,y) = (\frac{2x-6}{x+2}, \frac{y+4}{2y-1})$

$f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2) \Rightarrow (\frac{2x_1-6}{x_1+2}, \frac{y_1+4}{2y_1-1}) = (\frac{2x_2-6}{x_2+2}, \frac{y_2+4}{2y_2-1})$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2x_1-6}{x_1+2} = \frac{2x_2-6}{x_2+2} \overset{\text{با طرفین وسطین و ساده کردن}}{\Longrightarrow} x_1 = x_2 \\ \frac{y_1+4}{2y_1-1} = \frac{y_2+4}{2y_2-1} \Longrightarrow y_1 = y_2 \end{cases}$

$\Longrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$

بنابراین تابع یک به یک است.

حال فرض کنیم $(x_1, y_1) \in IR^2$ و دلخواه پس خواهیم داشت:

$(x_1, y_1) = (\frac{2x-6}{x+2}, \frac{y+3}{2y-1})$

$\Rightarrow \frac{2x-6}{x+2} = x_1 \Rightarrow 2x - 6 = x_1x + 2x_1 \Rightarrow$

$2x - x_1x = 2x_1 + 6 \Rightarrow x(2 - x_1) = 2x_1 + 6$

$\Rightarrow x = \frac{2x_1+6}{2-x_1}$

همان طور که مشاهده می‌شود برای $x_1 = 2$، هیچ xای در IR یافت نمی‌شود تا زوج مرتبی به شکل (x, y) تشکیل شود، بنابراین تابع پوشا نمی‌باشد.

۵ـ از فرض مسأله استفاده کرده و ثابت می‌کنیم G یک گروه جابجایی است:

$\forall x, y \in G: (x*y)^2 = x^2 * y^2 \Rightarrow$

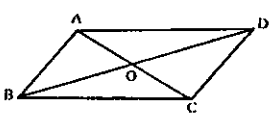
$(x*y)*(x*y) = (x*x)*(y*y)$

$\Rightarrow \underbrace{x'*x}_{e}*y*x*\underbrace{y*y'}_{e} = \underbrace{x'*x}_{e}*x*y*\underbrace{y*y'}_{e}$

$\Rightarrow y*x = x*y$ (پس G یک گروه جابجایی است)

۶ـ می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع، اضلاع روبه‌رو دو به دو با هم مساوی و موازیند، در این مسأله با توجه به شکل زیر باید ثابت کنیم:

$\begin{cases} \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB} \end{cases}$



با توجه به شکل داریم ← $\begin{cases} \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DC} \end{cases}$

و چون $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ پس می‌توانیم بنویسیم:

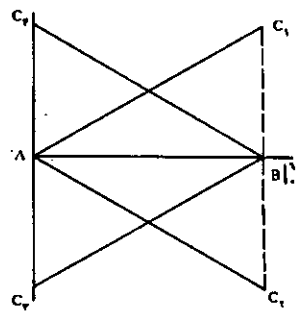
$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} \Rightarrow \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DO} - \overrightarrow{OB}$ (۱)

تساوی (۱) فقط به ازای حالت $\overline{O} = \overline{O}$ برقرار است یعنی:

$$\begin{cases}\vec{AO}-\vec{OC}=\vec{O} \Rightarrow \vec{AO}=\vec{OC}\\ \vec{DO}-\vec{OB}=\vec{O} \Rightarrow \vec{DO}=\vec{OB}\end{cases}$$

که حکم ثابت می‌شود، زیرا اگر تساوی (۱) در حالتی به جز $\bar{O}=\bar{O}$ برقرار باشد، بردار $\vec{AO}-\vec{OC}$ برداری خواهد بود روی پاره‌خط AC یا CA و بردار $\vec{DO}-\vec{OB}$ نیز برداری خواهد بود روی پاره‌خط BD یا DB که در هر حالت چون این پاره‌خطها یکدیگر را قطع کرده‌اند، موازی نبوده و تساوی هیچ‌گاه برقرار نخواهد شد.

۷- با توجه به شکل چهارمثلث قائم‌الزاویه عبارتند:



C_1BA , C_2BA , C_3BA , C_4BA

اگر مثلث ABC_1 را در نظر بگیریم:

$$S_{ABC_1}=\frac{AB\times C_1B}{2}=\frac{6\times y_{C_1}}{2}=12 \Rightarrow 6y_{C_1}=24$$

$$\Rightarrow y_{C_1}=4 \Rightarrow y_{C_4}=+4 \text{ و } y_{C_2}=y_{C_3}=-4$$

$$\Rightarrow \quad C_1\left|\begin{matrix}6\\4\end{matrix}\right. \quad C_2\left|\begin{matrix}6\\-4\end{matrix}\right. \quad C_3\left|\begin{matrix}\\-4\end{matrix}\right. \quad C_4\left|\begin{matrix}0\\4\end{matrix}\right.$$

۸-

$2x^3-7x^2+3x<0$

$x(2x^2-7x+3)<0$

$x=0$ و $2x^2-7x+3=0 \Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{25}}{4}$

$$=\frac{7\pm5}{4} \quad x''=3,\quad x'=\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	3 $+\infty$
x	$-$	$+$	$+$	$+$
$2x-7x+3$	$+$	$+$	$-$	$+$
$x(2x^2-7x+3)<0$	$-$	$+$	$-$	$+$

جواب: $x<0$ جواب: $\frac{1}{2}<x<3$

۹-

$tgx=2: \cos^2x=\frac{1}{1+tg^2x}=\frac{1}{1+4}=\frac{1}{5}$

$\sin^2x=1-\cos^2x=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

پس از تقسیم صورت و مخرج عبارت A بر $\cos^2x$ داریم:

$$A=\frac{45\left(tg^2x\sin^2x+\cos^2x+\frac{tgx}{\cos^2x}\right)}{1+tg^2x}$$

$$=\frac{45\left(8\times\frac{4}{5}+\frac{1}{5}+10\right)}{9}$$

$$A=5\left(\frac{32}{5}+10\right)=32+50=82 \Rightarrow \boxed{A=82}$$

۱۰- از فرض $\cos x=\frac{b}{a}$ داریم:

$$\sqrt{\frac{a-a\cos x}{a+a\cos x}}+\sqrt{\frac{a+a\cos x}{a-a\cos x}}$$

$$=\sqrt{\frac{a(1-\cos x)}{a(1+\cos x)}}+\sqrt{\frac{a(1+\cos x)}{a(1-\cos x)}}$$

$$=\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{1-\cos^2x}}+\sqrt{\frac{(1+\cos x)^2}{1-\cos^2x}}$$

$$=\sqrt{\frac{(1-\cos^2x)}{\sin^2x}}+\sqrt{\frac{(1+\cos x)^2}{\sin^2x}}$$

$$=\frac{|1-\cos x|}{|\sin x|}+\frac{|1+\cos x|}{|\sin x|}=$$

$$\frac{1-\cos x}{|\sin x|}+\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{2}{\sin x}$$

۱۱- معادله را به شکل زیر دسته‌بندی می‌کنیم:

$$[(\sin x+1)(\sin x+2)][(\sin x+6)(\sin x-3)]=-84$$

$$(\sin^2x+3\sin x+2)(\sin^2x+3\sin x-18)=-84$$

با فرض: $\sin^2x+3\sin x=y$ داریم: $(y+2)(y-18)=-84$

$(y-12)(y-4)=0 \Rightarrow y=12$ (غیرقابل قبول) یا $y=4$

$y=4: \sin^2x+3\sin x=4 \Rightarrow \sin^2x+3\sin x-4=0$

$\Rightarrow (\sin x-1)(\sin x+4)=0$

$\sin x=-4$ (غیرقابل قبول) یا $\sin x=1 \Rightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{2}$

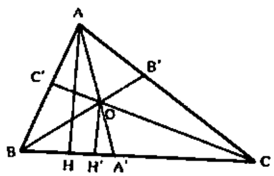
$\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$

حل مسائل سال سوم ریاضی

۱- از نقاط A و O به ترتیب عمودهای AH و OH' را بر ضلع BC فرود می‌آوریم. می‌دانیم که $AH=h_a$ و $OH'=r$ است. از تشابه مثلثهای AHA' و OH'A' داریم:

$$\frac{OA'}{AA'}=\frac{OH'}{AH}=\frac{r}{h_a}\Rightarrow$$

$$\frac{AA'-OA'}{AA'}=\frac{h_a-r}{h_a}\Rightarrow\frac{OA}{AA'}=\frac{h_a-r}{h_a}$$



با توجه به اینکه $AA'=d_a$ است خواهیم داشت:

$$OA=\frac{da}{ha}(ha-r)$$

با جایگزینی مقدارهای da و ha و r برحسب اضلاع مثلث در رابطهٔ فوق نتیجه می‌شود که:

$$OA=\frac{1}{P}\sqrt{bcp(p-a)}$$

و به طریق مشابه محاسبه می‌شود:

$$OB=\frac{1}{p}\sqrt{acp(p-b)},\ OC=\frac{1}{p}\sqrt{abp(p-c)}$$

حل: ثانیاً - دو مثلث OBC و ABC در قاعدهٔ BC مشترک‌اند پس داریم:

$$\frac{S_{OBC}}{S_{ABC}}=\frac{OH'}{AH}=\frac{OA'}{AA'}=\frac{AA'-OA}{AA'}=1-\frac{OA}{AA'}\Rightarrow$$

$$\frac{OA}{AA'}=1-\frac{S_{OBC}}{S_{ABC}} \qquad (1)$$

به روش مشابه داریم:

$$\frac{OB}{BB'}=1-\frac{S_{OAC}}{S_{ABC}} \qquad (2)$$

$$\frac{OC}{CC'}=1-\frac{S_{OAB}}{S_{ABC}} \qquad (3)$$

از جمع روابط (۱) و (۲) و (۳) با توجه به اینکه $S_{OBC}+S_{OAC}+S_{OAB}=S_{ABC}$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{OA}{AA'}+\frac{OB}{BB'}+\frac{OC}{CC'}=3-1=2$$

حل: ثالثاً

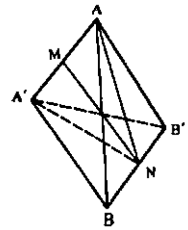
$OA.OB.OC=$

$$\frac{۱}{p}\sqrt{bcp(p-a)}\times\frac{۱}{p}\sqrt{acp(p-b)}\times\frac{۱}{p}\sqrt{abp(p-c)}$$

$$\Rightarrow OA.OB.OC = \frac{abc}{p^۲}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$\frac{abc\times S}{p^۲} = \frac{abc}{S}\times\frac{S^۲}{p^۲} = ۴Rr^۲$$

۲ ـ الف) از نقاط A و A' به نقطه N وسط پاره‌خط BB' وصل می‌کنیم. خطهای AN و $A'N$ از دو مثلث متساوی‌الساقین ABB' و $A'BB'$، عمود منصف قاعده می‌باشند. یعنی: $BB' \perp AN$ و $BB' \perp A'N$. در نتیجه BB' بر صفحهٔ $AA'N$ عمود می‌باشد، پس بر AA' که یکی از خطوط این صفحه است عمود است.



ب) دو مثلث ABB' و $A'BB'$ با هم برابرند. پس ارتفاعات نظیر رئوس A و A' نیز متساویند. یعنی $AN' = AN$ لذا مثلث $AA'N$ متساوی‌الساقین است. پس میانه NM از این مثلث، عمود منصف قاعدهٔ AA' است. یعنی خط MN بر AA' عمود است. از طرفی BB' بر صفحهٔ $AA'N$ عمود می‌باشد. پس MN بر BB' عمود می‌باشد. یعنی MN، عمود مشترک دوپاره خط AA' و BB' است.

۳ـ فرض کنیم بردارهای $V_۱$ و $V_۲$ و ... و V_n در فضای برداری V مستقل خطی باشند و فرض کنیم $V_۱$ و $V_۲$ و ... و V_p، P بردار دلخواه از این n بردار باشند، می‌خواهیم ثابت کنیم این P بردار نیز مستقل خطی‌اند.

برای این کار فرض می‌کنیم:

$$a_۱V_۱ + a_۲V_۲ + \dots + a_pV_p = \bar{o} \qquad (۱)$$

و ثابت می‌کنیم: $a_۱ = a_۲ = \dots a_p = ۰$.

$$(۱) \Rightarrow a_۱V_۱ + a_۲V_۲ + \dots + a_pV_p + ۰V_{p+۱} + ۰V_{p+۲} + \dots + ۰V_n = \bar{o} \qquad (۲)$$

رابطهٔ (۲) که در حقیقت همان رابطهٔ (۱) است، ترکیبی خطی از n بردار $V_۱$ تا V_n است که مساوی با بردار صفر شده و چون این بردارها طبق فرض مستقل خطی‌اند، پس باید ضرایب آن همگی صفر باشند که در این صورت حکم ثابت است.

۴ـ چون جدول از سه کلید تشکیل می‌شود پس ابتدا خواهیم داشت:

$$T = xy + xz + x'yz = xy(z+z') + xz(y+y')$$

$$+ x'yz = xyz + xyz + xyz + xy'z + x'yz$$

$$\Rightarrow T = xyz + x'yz + xy'z + xyz'$$

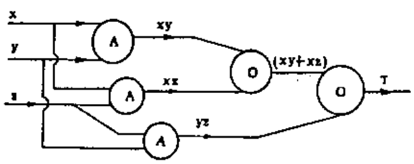
x	y	z	T	
۱	۱	۱	۱	→
۱	۱	۰	۱	→
۱	۰	۱	۱	→
۱	۰	۰	۰	
۰	۱	۱	۱	→
۰	۱	۰	۰	
۰	۰	۱	۰	
۰	۰	۰	۰	

حال عبارت T را ساده می‌کنیم:

$$T = \underline{xyz} + \underline{\underline{xyz}} + \underline{\underline{\underline{xyz}}} + \underline{x'yz} + \underline{\underline{xy'z}} + \underline{\underline{\underline{xyz'}}}$$

$$\Rightarrow T = yz\underbrace{(x+x')}_{۱} + xz\underbrace{(y+y')}_{۱} + xy\underbrace{(z+z')}_{۱}$$

$$\Rightarrow T = xy + xz + yz$$



۵ـ الف) حالتهایی که ۴ مهره می‌توانند همرنگ باشند به این صورت است که هر دو مهرهٔ خارج شده از جعبه A قرمز ودو مهرهٔ خارج شده از جعبهٔ B نیز قرمز باشند یا هر دو مهرهٔ خارج شده از جعبهٔ A سبز و هر دو مهره خارج شده از جعبهٔ B نیز سبز باشند.

بنابراین در قسمت الف) داریم:

$$P(A) = \frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۶}{۲}}\times\frac{\binom{۵}{۲}}{\binom{۸}{۲}} + \frac{\binom{۲}{۲}}{\binom{۶}{۲}}\times\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۸}{۲}}$$

ب) در این حالت صورتهای ممکن برای قرمز بودن ۳ مهره از ۴ مهره به شکل زیر است:

(۲ مهرهٔ قرمز از B و ۱ مهرهٔ قرمز و ۱ مهره سبز از A) + (۲ مهره قرمز از A و ۱ مهرهٔ قرمز و ۱ مهرهٔ سبز از B)

$$\Rightarrow P(B) = \frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۶}{۲}}\times\frac{\binom{۵}{۱}\times\binom{۳}{۱}}{\binom{۸}{۲}} + \frac{\binom{۵}{۲}}{\binom{۸}{۲}}\times\frac{\binom{۴}{۱}\times\binom{۲}{۱}}{\binom{۶}{۲}}$$

۶ـ منحنی این تابع باید بر محور xها یعنی خط $y = ۰$ مماس باشد. پس معادله تقاطع این خط با این منحنی باید ریشه مضاعف داشته باشد.

$$\begin{cases} y = (x-۱)(x^۲+mx+۲) \\ y = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-۱)(x^۲+mx+۲) = ۰$$

الف) $\Delta = ۰ \Rightarrow m^۲ - ۸ = ۰ \Rightarrow m^۲ = ۸ \Rightarrow$

$$\boxed{m = \pm ۲\sqrt{۲}}$$

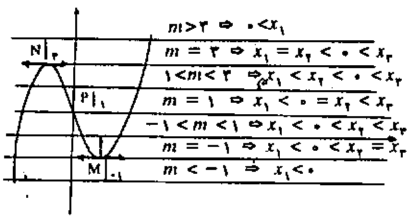
ب) $x = ۱ \xrightarrow{\text{در معادلهٔ دوم}} ۱ + m + ۲ = ۰ \Rightarrow \boxed{m = -۳}$

۷ـ

$$\begin{cases} m = x^۳ - ۳x + ۱ \\ y = m \end{cases} \Rightarrow y = x^۳ - ۳x + ۱$$

$$y' = ۳x^۲ - ۳ = ۰ \Rightarrow \boxed{x = \pm ۱}$$

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
y'		+		−		−		+	
y	$-\infty$	↗	۳	↘	۱	↘	-۱	↗	$+\infty$



۸ـ کمانها تشکیل تصاعد حسابی با قدر نسبت $\frac{۲\pi}{۱۱}$ داده‌اند. اینک با ضرب طرفین تساوی در $۲\sin\frac{\pi}{۱۱}$ داریم:

$$(۲\sin\frac{\pi}{۱۱})A = ۲\sin\frac{\pi}{۱۱}\cos\frac{\pi}{۱۱} + ۲\sin\frac{\pi}{۱۱}\cos\frac{۳\pi}{۱۱}$$

$$+ ۲\sin\frac{\pi}{۱۱}\cos\frac{۵\pi}{۱۱} + ۲\sin\frac{\pi}{۱۱}\cos\frac{۷\pi}{۱۱}$$

$$+ ۲\sin\frac{\pi}{۱۱}\cos\frac{۹\pi}{۱۱} = \sin\frac{۲\pi}{۱۱} + (\sin\frac{۴\pi}{۱۱} - \sin\frac{۲\pi}{۱۱})$$

$$+ (\sin\frac{۶\pi}{۱۱} - \sin\frac{۴\pi}{۱۱}) + (\sin\frac{۸\pi}{۱۱} - \sin\frac{۶\pi}{۱۱})$$

$$+ \sin(\frac{۱۰\pi}{۱۱} - \sin\frac{۸\pi}{۱۱})$$

پس از اختصار لازم داریم:

$$(۲\sin\frac{\pi}{۱۱})A = \sin\frac{۱۰\pi}{۱۱} = \sin(\pi - \frac{\pi}{۱۱}) = \sin\frac{\pi}{۱۱}$$

$$\Rightarrow ۲A = ۱ \qquad \Rightarrow A = \frac{۱}{۲}$$

۹ـ با توجه به اتحاد

$a^۳+b^۳+c^۳ = (a+b+c)^۳ - ۳(a+b)(a+c)(b+c)$

الف) داریم:

$(\sin x + \sin ۲x + \sin ۳x)^۳ - ۳(\sin x + \sin ۲x)$.

$(\sin x + \sin ۳x)(\sin ۲x + \sin ۳x)$

$= \sin^۳ x + \sin^۳ ۲x + \sin^۳ ۳x = (\sin x + \sin ۲x + \sin ۳x)^۳$

پس از اختصار لازم داریم:

$(\sin x + \sin ۲x)(\sin ۲x + \sin ۳x)(\sin x + \sin ۳x) = ۰$

که معادل سه معادلهٔ سادهٔ مثلثاتی است:

$\sin ۲x + \sin ۳x = ۰$ یا $\sin x + \sin ۳x = ۰$

یا $\sin x + \sin ۲x = ۰$

$\sin ۲x = -\sin x = \sin(-x) \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi - x \\ ۲x = ۲k\pi + \pi + x \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi \Rightarrow x_۱ = \frac{۲k\pi}{۳} \\ x_۲ = ۲k\pi + \pi \end{cases}$

برای حل دو معادلهٔ دیگر نیز به همین ترتیب عمل می‌کنیم.

ب) با استفاده از اتحاد $\cos ۲(x+\frac{\pi}{۳}) = ۱ - ۲\sin^۲(x+\frac{\pi}{۳})$ داریم:

$۲\sin^۲(x+\frac{\pi}{۳}) - ۴\sin(x+\frac{\pi}{۳}) + \frac{۳}{۲} = ۰$

$\left[۲\sin(x+\frac{\pi}{۳}) - ۳\right]\left[\sin(x+\frac{\pi}{۳}) - \frac{۱}{۲}\right] = ۰$

$۲\sin(x+\frac{\pi}{۳}) - ۳ = ۰$ یا $\sin(x+\frac{\pi}{۳}) - \frac{۱}{۲} = ۰$

$۲\sin(x+\frac{\pi}{۳}) = ۳ \Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۳}) = \frac{۳}{۲}$ (غیرممکن)

$\sin(x+\frac{\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲} = \sin\frac{\pi}{۶}$

$\Rightarrow \begin{cases} x+\frac{\pi}{۳} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x+\frac{\pi}{۳} = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_۱ = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶} \\ x_۲ = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \end{cases}$ (جوابهای عمومی معادله)

حل مسائل سال چهارم ریاضی

۱ـ اولاً:

$\vec u(۲,۳,-۱)$ و $\vec v(۱,-۲,۳)$

$P_r \frac{\vec u}{\vec v} = \frac{\vec u \cdot \vec v}{|\vec v|} = \frac{۲-۶-۳}{\sqrt{۱+۴+۹}}$

$= \frac{-۷}{\sqrt{۱۴}} = -\frac{۷}{۲}\sqrt{۱۴}$

ثانیاً: فرض می‌کنیم $\vec u_۱(x_۱, y_۱, z_۱)$ و $\vec u_۲(x_۲, y_۲, z_۲)$ باشد با توجه به فرض مسئله داریم:

$\vec u_۱ + \vec u_۲ = \vec u \Rightarrow \begin{cases} x_۱+x_۲=۲ \\ y_۱+y_۲=۳ \\ z_۱+z_۲=-۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_۲=۲-x_۱ \\ y_۲=۳-y_۱ \\ z_۲=-۱-z_۱ \end{cases}$

$\vec u_۱ \parallel \vec v \Rightarrow (x_۱ = k, y_۱ = -۲k, z_۱ = ۳k)$

$\Rightarrow \begin{cases} x_۲ = ۲-x_۱ = ۲-k \\ y_۲ = ۳-y_۱ = ۳+۲k \\ z_۲ = -۱-z_۱ = -۱-۳k \end{cases}$

$\vec u_۲ \perp \vec v \Rightarrow ۱(۲-k) - ۲(۳+۲k) + ۳(-۱-۳k) = ۰$

$\Rightarrow k = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \vec u_۱(-\frac{۱}{۲}, ۱, -\frac{۳}{۲}), \vec u_۲(\frac{۵}{۲}, ۲, \frac{۱}{۲})$

۲ـ خط $D: \begin{cases} x=۰ \\ y-z=۲ \end{cases}$ فصل مشترک دو صفحهٔ $x=۰$ و $y-z=۲$ است، که صفحهٔ $x=۰$ همان صفحهٔ مختصات yoz و صفحهٔ $y-z=۲$ صفحه‌ای است که بر صفحهٔ yoz عمود است بنابراین خط D در صفحهٔ yoz واقع است و با توجه به اینکه این خط محور yها را در نقطهٔ (۰ و ۲ و ۰)A و محور zها را در نقطهٔ (۲- و ۰ و ۰)B قطع می‌کند مثلث OAB قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است بنابراین زاویهٔ خط D با محور xها ۹۰° و با محور yها برابر ۴۵° و با محور zها برابر ۴۵° است.

نکته: اگر معادلهٔ خط D را به صورت $\begin{cases} x=۰ \\ y=z+۲ \end{cases}$ بنویسیم پارامترهای هادی این خط $(p=۰, q=r=۱)$ خواهد بود که از آنجا کسینوسهای هادی این خط برابر با $\alpha = ۰$ و $\beta = \gamma = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است، که از آنجا زاویه‌هایی که خط با محورهای مختصات می‌سازد به راحتی قابل محاسبه است.

۳ـ معادلهٔ دایره را به صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ در نظر می‌گیریم داریم:

$R = ۴ \Rightarrow R = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$

$\Rightarrow ۴ = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$

$\Rightarrow a^۲+b^۲-۴c = ۶۴$ (۱)

$M(۴,۰) \xrightarrow{\text{در معادلهٔ دایره}} ۱۶+۰+۴a+c=۰$

$\Rightarrow ۴a+c+۱۶=۰$ (۲)

$C: x^۲+y^۲-۲x+۴y=۰$: شرط عمود بودن

$aa' + bb' - ۲c - ۲c' = ۰$

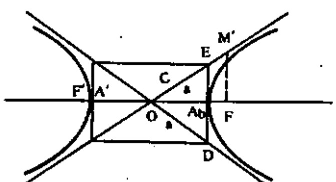
$-۲a + ۲b - ۲c = ۰ \Rightarrow a - b + c = ۰$ (۳)

$\begin{cases} a^۲+b^۲-۴c=۶۴ \\ ۴a+c+۱۶=۰ \\ a-b+c=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-۸ \\ b=+۸ \\ c=۱۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{۱۶}{۵} \\ b=-\frac{۳۲}{۵} \\ c=-\frac{۱۶}{۵} \end{cases}$

$\Rightarrow C_۱: x^۲+y^۲-۸x+۸y+۱۶=۰$

$C_۲: x^۲+y^۲-\frac{۱۶}{۵}x-\frac{۳۲}{۵}y-\frac{۱۶}{۵}=۰$

۴ـ فرض می‌کنیم محور کانونی هذلولی منطبق بر محور xها و مرکز هذلولی منطبق بر مبدأ مختصات باشد. در این صورت معادلهٔ هذلولی به صورت:



۴

$\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲} = ۱$ خواهد بود و معادلهٔ خط عمود بر محور کانونی در کانون F به صورت $x = c$ است. در نتیجه $FM = y = \frac{b^۲}{a}$ (۱) خواهد بود. حال FM' را محاسبه می‌کنیم: دو مثلث OFM' و OAE متشابهند پس داریم:

$\frac{FM'}{AE} = \frac{OF}{OA} \Rightarrow \frac{FM'}{b} = \frac{c}{a} \Rightarrow FM' = \frac{bc}{a}$ (۲)

$(۲)-(۱) \Rightarrow MM' = \frac{bc}{a} - \frac{b^۲}{a} = \frac{b(c-b)}{a} = \frac{ab(c-b)}{a^۲} =$

$\frac{ab(c-b)}{c^۲-b^۲} = \frac{ab}{b+c} \Rightarrow MM' = \frac{ab}{b+c}$ (۳)

از طرفی اگر شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث OED را r بنامیم در این مثلث $S = pr$ است یا $ab = (b+c)r$ یا:

$r = \frac{ab}{b+c}$ (۴)

از روابط (۳) و (۴) نتیجه می‌شود که: $r = MM'$

۵ـ

۱) $(p \Rightarrow \sim r)$ ۸

۲) $(\sim p \wedge r) \Rightarrow ۹$ ۸

$۳)(\sim t \wedge r)$

$\therefore\ t \Leftrightarrow \sim q$

از (۱) و عکس نقیض $۴)\ r \Rightarrow \sim p$

از (۲) و عطف مقدمات $۵)\ \sim p \Rightarrow (r \Rightarrow q)$

از (۴) و (۵) و قیاس $۶)\ r \Rightarrow (r \Rightarrow q)$

از (۶) و عطف مقدمات $۷)\ [(r \wedge r) \Rightarrow q] \equiv r \Rightarrow q$

از (۳) و حذف عاطف $۸)\ r$

از (۷) و (۸) و انتزاع $۹)\ q$

از (۳) و حذف عاطف $۱۰)\ \sim t$

طبق (۹) داریم، $q \equiv T$ و طبق (۱۰) داریم، $\sim t \equiv T$ پس $\sim q \equiv F$ و $t \equiv F$ بنابراین $\sim q \equiv t$ یعنی $(t \Leftrightarrow \sim q) \equiv T$، بنابراین استنتاج معتبر است.

۶ـ اگر عدد را a فرض کنیم طبق فرضیات مسأله داریم:

$a = ۲۵q + r$ و $r = q^۴$

از طرفی چون طبق قضیهٔ تقسیم، $۲۵ > r \geq ۰$ پس $۲۵ > q^۴$ پس $q = ۱$ یا $q = ۲$ که اگر $q = ۱$، $a = ۲۶$ و اگر $q = ۲$، $a = ۵۸$.

۷ـ چون $۱۲۰ = ۸ \times ۵ \times ۳$ و اعداد ۳ و ۵ و ۸ دو به دو نسبت به هم اولند کافی است ثابت کنیم $p^۴ - ۱$ بر ۳ و بر ۵ و بر ۸ بخش‌پذیر است.

الف) بخش‌پذیری بر ۵:

p اول و بزرگتر از ۵ $\Rightarrow (p\,,\,۵) = ۱ \xLeftrightarrow{\text{قضیهٔ فرما}} p^۴ \overset{۵}{\equiv} ۱ \Rightarrow$
$۵|p^۴ - ۱$

ب) بخش‌پذیری بر ۳:

می‌دانیم: $(p^۴ - ۱) = (p^۲ - ۱)(p^۲ + ۱)$

از طرفی: $(p\,,\,۳) = ۱ \xLeftrightarrow{\text{قضیهٔ فرما}} p^۲ \overset{۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۳|p^۲ - ۱ \Rightarrow$
$۳|(p^۲ - ۱)(p^۲ + ۱) \Rightarrow ۳|p^۴ - ۱$

ج) بخش‌پذیری بر ۸:

طبق یکی از مسائل کتاب داریم، مربع هر عدد فرد به صورت $(۸k + ۱)$ است، بنابراین چون p اول و بزرگتر از ۵ است، فرد است و داریم:

$p^۲ = ۸k + ۱ \Rightarrow ۸k = p^۲ - ۱ \Rightarrow ۸|p^۲ - ۱ \Rightarrow$
$۸|(p^۲ - ۱)(p^۲ + ۱) \Rightarrow ۸|p^۴ - ۱$

۸ـ ابتدا توجه می‌کنیم که اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند حاصل‌جمع و حاصل‌ضرب آن دو عدد نیز نسبت به هم اولند، یعنی از اینکه $(e\,,\,f) = ۱$ نتیجه می‌گیریم $(e + f\,,\,ef) = ۱$. از طرفی طبق قضیهٔ کتاب داریم:

$(a\,,\,b) = d\,,\,[a\,,\,b] = c \Rightarrow \frac{ab}{d} = c$

حال به حل مسأله می‌پردازیم:

$(a\,,\,b) = d \xRightarrow{\text{قضیهٔ کتاب}} (\frac{a}{d}\,,\,\frac{b}{d}) = ۱ \Longrightarrow (\frac{a+b}{d}\,,\,\frac{ab}{d^۲}) = ۱$

$\xRightarrow{\text{قضیهٔ کتاب}} (a + b\,,\,\frac{ab}{d}) = d \Longrightarrow (a + b\,,\,c) = d$

۹ـ ابتدا چند قضیه و نکته را یادآور می‌شویم:

$(AB)' = B'A'\,,\ (AB)^{-۱} = B^{-۱}A^{-۱}\,,\ (A')' = A\,,$

$(A^{-۱})^{-۱} = A\,,\ (A')^{-۱} = (A^{-۱})'$

طبق فرض داریم $\rightarrow A'A = AA' \rightarrow (A')^{-۱}(A'A)(A')^{-۱}$

$= (A')^{-۱}(AA')(A')^{-۱}$

$\Rightarrow\ A(A')^{-۱} = (A')^{-۱}A \quad (۱)$

از طرفی: $(A'A^{-۱})' = (A^{-۱})'(A')' = (A')^{-۱}A$

و داریم: $(A'A^{-۱})^{-۱} = (A^{-۱})^{-۱}(A')^{-۱} = A(A')^{-۱}$

$\xRightarrow{(۱)} (A'A^{-۱})' = (A'A^{-۱})^{-۱}$

۱۰ـ

$y = \frac{ax^۲ + b}{cx} \Rightarrow y' = \frac{acx^۲ + ۰x - bc}{v^۲} = ۰$

$acx^۲ + ۰x - bc = ۰ \Rightarrow x'x'' = -۱ \Rightarrow \frac{c}{a}$ معادله‌مشتق $= -۱$

$\Rightarrow \frac{-bc}{ac} = -۱ \Longrightarrow \boxed{a = b}$

$y = \frac{ax^۲ + b}{cx} \Rightarrow ax^۲ - cyx + b = ۰$

$\Delta = c^۲y^۲ + ۰y - ۴ab = ۰$

$|y_۱ - y_۲| = ۴ \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = ۴ \Rightarrow \sqrt{\Delta} = ۴|a|$

$\Delta = ۱۶a^۲ \Rightarrow b^۲ - ۴ac = ۱۶a^۲$

$\Rightarrow ۰ - ۴c^۲(-۴ab) = ۱۶c^۴$

$\Rightarrow ۱۶abc^۲ = ۱۶c^۴ \Rightarrow ab = c^۲ \Rightarrow a^۲ = c^۲ \Rightarrow \boxed{a = c}$

$y = \frac{ax^۲ + b}{cx} \Rightarrow y = \frac{ax^۲ + a}{ax} \Rightarrow \boxed{y = \frac{x^۲ + ۱}{x}}$

۱۱ـ اولاً:

$\begin{cases} y = \dfrac{x^۲ - ۲x + ۵}{۲x - ۱} \\ y = m \end{cases} \Rightarrow x^۲ - ۲(m + ۱)x + (m + ۵) = ۰$

$x_A + x_B = -\frac{b}{a} = ۲m + ۲$

$x_A x_B = \frac{c}{a} = m + ۵$

AB نقطه p وسط $\Rightarrow x_p = \frac{x_A + x_B}{۲} = \frac{۲m + ۲}{۲} = m + ۱$

$\Rightarrow P \left| \begin{array}{l} x = m + ۱ \\ y = m \end{array} \right. \Rightarrow m = x - ۱ \Rightarrow \boxed{y = x - ۱}$

معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ P که همان هوپیتال تابع است، بنابراین از نقاط اکسترمم منحنی تابع اصلی می‌گذرد.

ثانیاً:

$(x_M + x_N)(x_A + x_B) = ۲(x_M x_N + x_A x_B)$

$(۱ + x_N)(۲m + ۲) = ۲(x_N + m + ۵)$

$\Rightarrow ۲m x_N = ۸ \Rightarrow x_N = \frac{۴}{m}$

معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ N

$\Rightarrow N \left| \begin{array}{l} x = \frac{۴}{m} \\ y = m \end{array} \right. \Rightarrow m = \frac{۴}{x} \Rightarrow \boxed{y = \frac{۴}{x}}$

حل مسائل سال دوم تجربی

۱ـ ثابت می‌کنیم که $AJ = BH$ است.

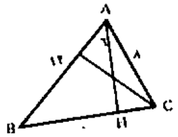
$FJ \parallel AC \Rightarrow \frac{FC}{AJ} = \frac{DC}{DA} \Rightarrow AJ = \frac{FC\,.\,DA}{DC} \qquad (۱)$

$EH \parallel AC \Rightarrow \frac{BE}{AB} = \frac{BH}{BC} \Rightarrow BH = \frac{BC\,.\,BE}{AB} \qquad (۲)$

از روابط (۱) و (۲) با توجه به اینکه $EB = FC$ و $DA = BC$ و $DC = AB$، نتیجه می‌شود که $AJ = BH$. پس $JH \parallel AB$ است.

۲ـ در مثلث ABC داریم: $\hat{A} = ۶۰^\circ$، $AC = ۸$، $AB = ۱۲$

با توجه به رابطهٔ کسینوسها در مثلث می‌توان نوشت:



$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos\hat{A} \Rightarrow a^۲ = ۶۴ + ۱۴۴ - ۲ \times ۸ \times ۱۲\cos۶۰^\circ$

$\Rightarrow a^۲ = ۲۰۸ - ۹۶ = ۱۱۲ \Rightarrow a = ۴\sqrt{۷}$

$CH = AC \times \sin۶۰ = ۸ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۴\sqrt{۳}$

$AH.BC = C\hat{H} \times AB \Rightarrow$

$AH \times ۴\sqrt{۷} = ۴\sqrt{۳} \times ۱۲ \Rightarrow AH = ۱۲\sqrt{\frac{۳}{۷}}$

۳ـ از فرض مسأله داریم:

$x_۱ = mx_۲$

پس دستگاه زیر را می‌توان نوشت:

$$m\begin{cases} x_۱ - mx_۲ = ۰ \\ x_۱ + x_۲ = \frac{-b}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_۱ - mx_۲ = ۰ \\ mx_۱ + mx_۲ = \frac{-bm}{a} \end{cases} \Rightarrow (m+۱)x_۱ = \frac{-bm}{a}$$

$$\Rightarrow x_۱ = \frac{-bm}{a(m+۱)}$$

$$x_۲ = \frac{۱}{m}\left(\frac{-bm}{a(m+۱)}\right) = \frac{-b}{a(m+۱)}$$

پس از جایگزینی مقادیر $x_۱$ و $x_۲$ در شرط $A = x_۱^۲ - ۲x_۲^۳$ داریم:

$$A = \frac{b^۲m^۲}{a^۲(m+۱)^۲} - ۲\frac{-b^۳}{a^۳(m+۱)^۳} =$$

$$\frac{ab^۲m^۲(m+۱) + ۲b^۳}{a^۳(m+۱)^۳}$$

$$\Rightarrow A = \frac{b^۲}{a^۳(m+۱)^۳}(am^۳ + am^۲ + ۲b)$$

۴ـ بدیهی است مکعب بزرگترین عدد برابر مجموع مکعبهای سه عدد دیگر است. بنابراین اگر چهار عدد متوالی را به ترتیب به a و $a + ۱$ و $a + ۲$ و $a + ۳$ نشان دهیم. با توجه به فرض مسأله داریم:

$$a^۳ + (a+۱)^۳ + (a+۲)^۳ = (a+۳)^۳$$

پس از اختصار لازم داریم:

$$a^۳ - ۶a - ۹ = ۰$$

$$a^۳ - ۶a - ۹ + ۲۷ - ۲۷ = ۰ \Rightarrow$$

$$(a^۳ - ۲۷) - ۶a + ۱۸ = ۰$$

$$(a-۳)(a^۲ + ۳a + ۹) - ۶(a-۳) = ۰$$

$(a-۳)(a^۲ + ۳a + ۳) = ۰ \Rightarrow a = ۳$ تنها ریشهٔ مورد قبول: ۳

پس فقط چهار عدد متوالی هستند که با شرایط مسأله سازگار باشند و آن چهار عدد، عبارتند از: ۳، ۴، ۵، ۶ و داریم:

$$۳^۳ + ۴^۳ + ۵^۳ = ۶^۳$$

۵ـ

$$m(t_۱ + (m-۱)r) = p(t_۱ + (p-۱)r)$$

$$mt_۱ + m(m-۱)r = pt_۱ + p(p-۱)r$$

$$mt_۱ - pt_۱ + m(m-۱)r - p(p-۱)r = ۰$$

$$\Rightarrow t_۱(m-p) + r(m(m-۱) - p(p-۱)) = ۰$$

$$t_۱(m-p) + r(m^۲ - m - p^۲ + p) = ۰$$

$$\Rightarrow t_۱(m-p) + r(m-p)(m+p-۱) = ۰$$

$$\Rightarrow (m-p)(t_۱ + (m+p-۱)r) = ۰$$

چون $m \neq p$ پس داریم:

$$t_۱ + (m+p-۱)r = ۰ \Rightarrow t_{p+m} = ۰$$

۶ـ می‌دانیم $\log_{b^n} a = \frac{۱}{n}\log_b a$ پس داریم:

$$\log_{\sqrt{۵}} x^۲ = \log_{۵^{\frac{۱}{۲}}} x^۲ = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}}\log_۵ x^۲ = ۲\log_۵ x^۲ = ۴\log_۵ x \qquad (۱)$$

$$\log_{۲۵} x = \log_{۵^۲} x = \frac{۱}{۲}\log_۵ x$$

و با فرض $y = \log_۵ x$ می‌توان نوشت:

$$\sqrt{۴y} + \sqrt{\frac{۱}{۲}y} = ۴ + \sqrt{۲}$$

$$۲\sqrt{y} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\sqrt{y} = ۴ + \sqrt{۲} \Rightarrow$$

$$\sqrt{y}\left(۲ + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = ۴ + \sqrt{۲}$$

$$y = \frac{۴+\sqrt{۲}}{۲+\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{۴+\sqrt{۲}}{\frac{۴+\sqrt{۲}}{۲}} = ۲ \Rightarrow \sqrt{y} = ۲ \Rightarrow y = ۴$$

$$\log_۵ x = ۴ \Rightarrow x = ۵^۴ = ۶۲۵ \Rightarrow \boxed{x = ۶۲۵}$$

۷ـ

$$A = ۲tg(\pi - ۵۰^\circ) - ۲cotg(\frac{\pi}{۲} + ۵۰^\circ) - tg(\pi + ۵۰^\circ) - ۵tg(۲\pi - ۵۰^\circ) + cotg(\frac{\pi}{۲} - ۵۰^\circ) - ۴tg۵۰^\circ$$

$$\Rightarrow A = -۲tg۵۰^\circ + ۲tg۵۰^\circ - tg۵۰^\circ + ۵tg۵۰^\circ + tg۵۰^\circ - ۴tg۵۰^\circ = ۰$$

$$B = \cos(\pi - \frac{\pi}{۶} - \frac{\pi}{۶} + \frac{\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶})$$

$$= \cos(\pi + \frac{\pi}{۶}) = -\cos\frac{\pi}{۶} = \frac{-\sqrt{۳}}{۲}$$

۸ـ

$$(\sin x + ۱) - \cos x - \sin x \cos x = (\sin x + ۱) -$$

$$\cos x(\sin x + ۱) = ۰$$

$$(\sin x + ۱)(۱ - \cos x) = ۰ \Rightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} \sin x + ۱ = ۰ \rightarrow \sin x = -۱ \\ ۱ - \cos x = ۰ \rightarrow \cos x = ۱ \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \sin x = \sin\left(\frac{-\pi}{۲}\right) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_۱ = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \\ x_۲ = ۲k\pi + \pi + \frac{\pi}{۲} = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲} \end{array} \right. \\ \cos x = \cos ۰ \Rightarrow x = ۲k\pi \pm ۰ \Rightarrow x_۲ = ۲k\pi \end{array} \right.$$

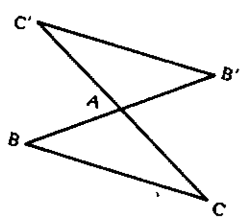
حل مسائل سال سوم تجربی

۱ـ قرینهٔ مرکزی رئوس B و C را نسبت به رأس A پیدا می‌کنیم و B' و C' می‌نامیم. مثلث $AB'C'$ قرینهٔ مرکزی مثلث ABC نسبت به رأس A است. برای محاسبهٔ مختصات نقاط B' و C' داریم:

A وسط BB' $\Rightarrow \begin{cases} x_A = \frac{x_B + x_{B'}}{۲} \\ y_A = \frac{y_B + y_{B'}}{۲} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۰ = \frac{-۲ + x_{B'}}{۲} \Rightarrow \\ ۳ = \frac{۱ + y_{B'}}{۲} \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} x_{B'} = ۲ \\ y_{B'} = ۵ \end{cases} \Rightarrow B' \left| \begin{array}{l} ۲ \\ ۵ \end{array} \right.$$

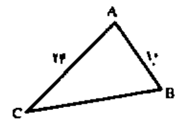
A وسط CC' $\Rightarrow \begin{cases} ۰ = \frac{۳ + x_{c'}}{۲} \Rightarrow \\ ۳ = \frac{۰ + y_{c'}}{۲} \end{cases} \begin{cases} x_{c'} = -۳ \\ y_{c'} = ۶ \end{cases} \Rightarrow c' \left| \begin{array}{l} -۳ \\ ۶ \end{array} \right.$



G مرکز ثقل مثلث $AB'C'$ $\left| \begin{array}{l} x = \frac{x_A + x_{B'} + x_{C'}}{۳} = \frac{۰ + ۲ - ۳}{۳} = \frac{-۱}{۳} \\ y = \frac{y_A + y_{B'} + y_{C'}}{۳} = \frac{۳ + ۵ + ۶}{۳} = \frac{۱۴}{۳} \end{array} \right.$

اندازهٔ بردار مکان نقطه G: $OG = \sqrt{\frac{۱}{۹} + \frac{۱۹۶}{۹}} = \frac{\sqrt{۱۹۷}}{۳}$

۲ـ اولاً: اندازهٔ وتر مثلث قائم‌الزاویه ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ را محاسبه می‌کنیم. شعاع کره برابر نصف این وتر است.



$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 100 + 576 = 676$

$\Rightarrow BC = 26 \xrightarrow{\text{کره محیطی}} R = \frac{26}{2} = 13$

حجم کره $= V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(13)^3 = \frac{8788\pi}{3}$

ثانیاً: سطح قطاع 60° از دستور $S_{\text{قطاع } \alpha^\circ} = \frac{\pi R^2 \alpha}{90^\circ}$ محاسبه می‌شود.

واحد سطح $S_{\text{قطاع } 60^\circ} = \frac{\pi(13)^2 \times 60^\circ}{90} = \frac{338\pi}{3}$

۳ـ برای حالتی که M نزدیک به A باشد داریم:

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = (\overline{OA} - \overline{OM})^2 + (\overline{MO} + \overline{OB})^2$$
$$= \overline{OA}^2 + \overline{OM}^2 - 2\overline{OA}\ \overline{OM}$$
$$+ \overline{MO}^2 + \overline{OB}^2 + 2\overline{MO}\ \overline{OB}$$

چون $\overline{OA} = \overline{OB}$ پس داریم:

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2\overline{OA}^2 + 2\overline{OM}^2 = 2(\overline{OA}^2 + \overline{OM}^2).$$

برای حالتی که M نزدیک به B باشد نیز به طریقهٔ مشابه عمل می‌شود و نتیجهٔ فوق حاصل می‌شود.

۴ـ با فرض $\cos x = t^{12}$، داریم:

$$\sqrt[6]{\cos x} = t^2,\ \sqrt[4]{\cos x} = t^3,\ \begin{vmatrix} x \to 0 \\ t \to 1 \end{vmatrix}$$

$$\lim_{t\to1}\frac{t^3 - t^2}{1 - t^{12}} = \lim_{t\to1}\frac{t^2(t-1)}{1 - t^{12}} = \lim_{t\to1}\frac{t^2(t-1)}{-(t^{12}-1)}$$
$$= \lim_{t\to1}\frac{t^2(t-1)}{-(t-1)(t^{11}+t^{10}+\dots+t+1)} =$$
$$\lim_{t\to1}\frac{-t^2}{t^{11}+t^{10}+\dots+t+1} = \frac{-1}{12}$$

۵ـ نخست نقاط تلاقی منحنی و خط را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = \frac{-(ax+c)}{b} & \text{خط} \\ y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} & \text{منحنی} \end{cases} \Rightarrow \frac{-(ax+c)}{b} = \frac{-b\sqrt{a^2-x^2}}{a}$$

$$-a^2x - ac = -b^2\sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow a^2x + ac = b^2\sqrt{a^2-x^2}$$

$$(a^2x + ac)^2 = b^4(a^2 - x^2)$$

پس از اختصار لازم داریم:

$$(a^4+b^4)x^2 + 2a^3cx + a^2c^2 + a^2b^4 = 0$$

شرط اینکه خط بر منحنی مماس باشد این است که معادلهٔ درجه دوم اخیر که ریشه‌هایش طولهای نقاط برخورد خط و منحنی را می‌دهد، دارای ریشهٔ مضاعف باشد و شرط ریشهٔ مضاعف این است که مبین آن برابر صفر باشد:

$$\Delta' = a^6c^2 - (a^4 + b^4)(a^2c^2 - a^2b^4) = 0$$
$$a^6c^2 - a^6c^2 + a^6b^4 - a^2c^2b^4 + a^2b^8 = 0$$
$$a^2b^4(a^4 + b^4 - c^2) = 0 \xrightarrow{ab \neq 0} a^4 + b^4 - c^2 = 0$$
$$\Rightarrow a^4 + b^4 = c^2.$$

۶ـ

$$x + y + z = k\pi \Rightarrow x = k\pi - (y + z)$$
$$tgx = tg\left(k\pi - (y+z)\right) = -tg(y+z)$$
$$-tgx = \frac{tgy + tgz}{1 - tgy\ tgz} \Rightarrow -tgx + tgx\ tgy\ tgz =$$
$$tgy + tgz \Rightarrow tgx + tgy + tgz = tgx\ tgy\ tgz$$

۷ـ

$$2\cos\frac{x}{3} + \sin\frac{x}{2} = 2$$

با فرض: (مضرب ۲ و ۳) $x = 6z$ داریم:

$$2\cos2z + \sin3z = 2$$
$$2(\cos2z - 1) + \sin3z = 0$$
$$2(-2\sin^2z) + 3\sin z - 4\sin^3z = 0$$
$$-\sin z\,(4\sin^2z + 4\sin z - 3) = 0$$

$\sin z = 0$ یا $4\sin^2z + 4\sin z - 3 = 0$

$$\sin z = 0 \Rightarrow z = k\pi \Rightarrow x_1 = 6k\pi$$
$$4\sin^2z + 4\sin z - 3 = 0 \Rightarrow \Delta' = 4 + 12 = 16$$
$$\sin z = \frac{-2 \pm 4}{4} \Rightarrow$$

$\sin z = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$ (غیرقابل قبول)

یا

$$\sin z = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} z = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ z = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 12k\pi + \pi \\ x_3 = 12k\pi + 5\pi \end{cases}$$

۸ـ عبارت A را به ترتیب زیر ساده می‌کنیم:

$$A = tg10^\circ tg50^\circ - tg10^\circ tg70^\circ + tg50^\circ tg70^\circ =$$
$$cotg80^\circ cotg40^\circ - cotg80^\circ cotg20^\circ + cotg40^\circ cotg20^\circ$$
$$= \frac{1}{tg80^\circ tg40^\circ} - \frac{1}{tg20^\circ tg80^\circ} + \frac{1}{tg20^\circ tg40^\circ}$$
$$A = \frac{tg20^\circ - tg40^\circ + tg80^\circ}{tg20^\circ tg40^\circ tg80^\circ}$$

از طرفی داریم:

$$tg\alpha + tg(60^\circ + \alpha) + tg(120^\circ + \alpha) = 3tg3\alpha$$
$$\xrightarrow{\alpha=20^\circ} tg20^\circ + tg80^\circ + tg140^\circ = 3tg60^\circ$$
$$(tg140^\circ = -tg40^\circ) \Rightarrow tg20^\circ - tg40^\circ + tg80^\circ = 3tg60^\circ \quad (1)$$

و از طرف دیگر نیز داریم:

$$tg\alpha\, tg(60^\circ + \alpha)\, tg(60^\circ - \alpha) = tg3\alpha$$
$$\xrightarrow{\alpha=20^\circ} tg20^\circ tg40^\circ tg80^\circ = tg60^\circ \quad (2)$$

از ۱ و ۲ داریم:

$$A = \frac{3log60^\circ}{tg60^\circ} = 3$$

حل مسائل سال چهارم تجربی

۱ـ

$$f(x) = \frac{1 - 12mx}{4x - 3m}$$

مرکز تقارن توابع هموگرافیک محل تلاقی مجانبهای قائم و افقی آنان می‌باشد، پس داریم:

$$I\begin{cases} x = \frac{3m}{4} \Rightarrow m = \frac{4}{3}x \\ y = \frac{-12m}{4} = -3m \end{cases}$$

(معادلهٔ مکان): $y = -3(\frac{4}{3}x) = -4x$

۲ـ $O(2,-3)$ مرکز هذلولی، $C = 2\sqrt{3}$

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow a = b \Rightarrow 2a^2 = c^2 \Rightarrow 2a^2 = 12 \Rightarrow$$
$$a^2 = 6 \Rightarrow a = b = \sqrt{6}$$

$$\frac{(x-2)^2}{6} - \frac{(y+3)^2}{6} = 1$$

۳ـ

مختصات نقاط تلاقی: $\begin{cases} y^2 = k^3x \\ x^2 = k^3y \end{cases} \Rightarrow O(0,0),\ A(k^3, k^3)$

$$y_1=\frac{x^3}{k^3}\ ,\ y_2=\sqrt{k^3x}\ \ S_0^{k^3}=\int_0^{k^3}(y_2-y_1)dx$$

$$S_0^{k^3}=\int^{k^3}\left(\sqrt{k^3x}-\frac{x^2}{k^3}\right)dx=\frac{k^6}{3}=72$$

$$\Rightarrow k^6=8\times 27\Rightarrow k^2=6\Rightarrow |k|=\sqrt{6}$$

-۴

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} cotg^m 2x\ \ cosec^2 2x\, dx=\frac{1}{14}$$

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{cotg^m 2x}{\sin^2 2x}dx=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} cotg^m 2x\,(1+cotg^2 2x)dx=$$

$$=\frac{-cotg^{m+1}2x}{2(m+1)}\Bigg|_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{cotg^{m+1}2\frac{\pi}{8}}{2(m+1)}=\frac{cotg^{m+1}\frac{\pi}{4}}{2(m+1)}$$

$$=\frac{1}{2(m+1)}=\frac{1}{14}\Rightarrow m+1=7\Rightarrow \boxed{m=6}$$

-۵

$$m\,(1+sinx+cosx)=3cosx+1$$

$$m+msinx+mcosx-3cosx=1$$

$$msinx+(m-3)\,cosx=1-m$$

شرط اینکه معادلهٔ کلاسیک نوع اول:

$$asinx+bcosx=c$$

دارای جواب باشد این است که داشته باشیم: $a^2+b^2\ge c^2$

پس برای معادلهٔ مفروض داریم:

$$m^2+(m-3)^2\ge(1-m)^2$$

$$m^2+m^2-6m+9\ge 1+m^2-2m\ \Rightarrow$$

$$m^2-4m+8\ge 0\Rightarrow (m^2-4m+4)+4\ge 0$$

$$\Rightarrow (m-2)^2+4>0$$

مبین معادله همواره مثبت است پس معادله به ازای تمام مقادیر m دارای جواب است.

ادب و ریاضی

هانری پوانکاره در ۲۹ آوریل ۱۸۵۴ متولد گردید و در مدرسهٔ متوسطهٔ شهر نانسی با همکار آینده‌اش پل آپل همشاگرد بود. دراین مدرسه مطالعات جالبی کرد و بدون شک شهرت او به عنوان ریاضی‌دان بزرگ آینده تا پاریس نیز رسید، زیرا هنگامی که خود را برای امتحان مسابقهٔ مدرسهٔ پلی تکنیک معرفی کرد (۱۸۷۳) یکی از ممتحنین جلسهٔ امتحان را مدت سه ربع ساعت متوقف ساخت تا برای او معماها و مسائل مشکل جدید بتراشد. و داوطلب مزبور نه تنها آن معماها را حل کرد بلکه راه حل جدیدی نیز برای آن کشف نمود. گذشته از آن امتحان مسابقهٔ او مشکل بزرگی از لحاظ وجدان برای هیأت ممتحنه تولید کرد؛ زیرا این جوان که می‌بایست با رتبهٔ اول در امتحانات پذیرفته شود در امتحان رسم نمرهٔ صفر داشت و در ورزش عدم لیاقت عجیبی از خود نشان داده بود. خوشبختانه بعد از دوران گالوآ نژاد ممتحنین اصلاح شده بودند، بنابراین نمرهٔ صفر را به ۱/۰ تبدیل کردند و با این حال با رتبهٔ اول پذیرفته شد.

پی‌یر روسو. تاریخ علوم
حسن صفاری

نخستین گامها را در جهت پدید آوردن هندسهٔ غیر اقلیدسی دو ریاضی‌دان، نیکولای‌لوباچفسکی در روسیه و یانوش‌بولیوی در مجارستان، در دهه ۱۸۲۰ و اوایل دههٔ ۱۸۳۰ برداشتند. لوباچفسکی در سال ۱۷۹۲ در نیژنی‌نوگورود (گورکی امروزی) به دنیا آمد. در دانشگاه کازان درس خواند و در همان جا استاد شد. لوباچفسکی نیز مانند پیشینیان خود کوشید قضیهٔ خطوط موازی را به اثبات برساند؛ ولی بر خلاف ریاضی‌دانان پیشین، هنگامی که این را نامکن یافت، گام منطقی بعدی را برداشت. او استدلال کرد که چون نمی‌شود به اثبات رسانید که از یک نقطه فقط یک خط می‌توان به موازات خط دیگر رسم کرد، پس می توان فرض کرد که بی‌نهایت خط می‌شود رسم کرد. بولیوی نیز، که افسر ارتش و ریاضی‌دانی نابغه بود، به همین نتیجه رسید. هر چند او وقتی شنید که گاوس نیز همین گامها را برداشته است، کار خود را فقط به عنوان ضمیمه به کتاب ریاضیات پدرش افزود. کاربولیوی تازه در اواخر دههٔ ۱۸۶۰ در جاهای دیگر شناخته شد، اما او دیگر مرده بود.

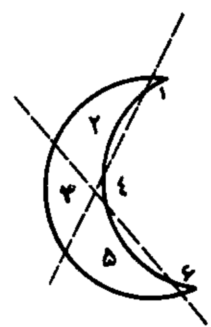
کالین اـ رنان. تاریخ علم کمبریج
حسن افشار

جوابهای تفریح اندیشه

جواب ۱ با توجه به شکلهای زیر:

می‌توان نتیجه گرفت که: مسعود شاعر نیست.

جواب ۲



جواب ۳

$\pi - 4$ واحد مربع. مربع دارای رؤس (۰ و ۴)، (۴ و ۰)، (۰ و ۰) و (۴ و ۴) را درنظر می‌گیریم. ناحیهٔ سایه خورده بنا به تقارن دارای مساحت $(4\pi - 16)(1/4)$ می‌باشد.

جواب ۴

دو مرتبه در محیط، شعاع، یا هر مقیاس خطی دیگر؛ چهار مرتبه در مساحت یا هرمقیاس مربع دیگر؛ و هشت مرتبه در حجم یا هر مقیاس مکعب دیگر.

جواب ۵

عدد دو رقمی نوشته شده روی تابلو اول را $\overline{ab}$ فرض می‌کنیم. در این‌صورت عدد نوشته شده روی تابلو دوّم $\overline{ba}$، و عدد نوشته شده روی تابلو سوم $\overline{a0b}$ یا $\overline{b0a}$ خواهد بود.

چون سرعت ثابت است، پس مسافت طی شده بین تابلوهای اوّل و دوّم یعنی: $\overline{ba} - \overline{ab}$ که از ۱۰۰ کمتر است، با مسافت پیموده شده بین تابلوهای دوّم و سوّم یعنی: $\overline{b0a} - \overline{ba}$ یا $\overline{a0b} - \overline{ba}$ برابر می‌باشد. بنابراین با توجه به اینکه $b>a$ است، عدد سه رقمی نوشته شده روی تابلو سوّم به‌صورت $\overline{a0b}$ و $a = 1$ می‌باشد. لذا داریم:

$$\overline{b1} - \overline{1b} = \overline{10b} - \overline{b1} \Rightarrow 10b + 1 - (10 + b) = 100 + b - (10b + 1)$$

$\Rightarrow b = 6 \Rightarrow \overline{ab} = 16$ و $\overline{ba} = 61$ و $\overline{a0b} = 106$

$\Rightarrow$ سرعت اتومبیل $= 61 - 16 = 106 - 61 = 45$ کیلومتر در ساعت

In the name of God

Borhān

VOL. 3. No.1
Serial numbers; 8
Autumn 1993

Borhān is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:
Madrasse Publication- No. 268, Iranshahr-e -Shomali Ave. Tehran Iran Post code: 15875

Contents:

روش «طبری» برای ضرب اعداد
(روش شبکه‌ای)

	۷	۰	۸	۶	
۱	۱ ۴	۰ ۰	۱ ۶	۱ ۲	۲
۷	۳ ۵	۰ ۰	۴ ۰	۳ ۰	۵
۹	۲ ۸	۰ ۰	۳ ۲	۲ ۴	۴
	۹	۸	۴	۴	

$$۷۰۸۶ \times ۲۵۴ = ۱۷۹۹۸۴۴$$

این روش ضرب را از کتاب **«شمارنامه»** تألیف محمد فرزند ایوب معروف به طبری برداشته‌ایم که در سالهای آخر سدهٔ چهارم و نیمهٔ اول سدهٔ پنجم هجری قمری در آمل مازندران و در دوران حکومت ایرانی آل‌بویه می‌زیسته است. او ریاضی‌دان و اخترشناس مسلمان ایرانی بود و از نخستین کسانی است که یک کتاب علمی را به زبان فارسی نوشته است. در **«شمارنامه»** با این که واژه‌ها و اصطلاحهای فراوان عربی دیده می‌شود، از واژه‌های فارسی زیادی (که باید ابتکار خود مؤلف باشد) مثل «افزودن»، «زدن»، «کاستن و کاهانیدن»، «سه یک»، «چهاریک»، «به دو نیم کردن» و ... استفاده شده است. طبری واژهٔ «شمارنامه» را به جای «حساب» به کار برده است. شیوهٔ ضرب عددها، با این روش، از جدول بالا روشن است.