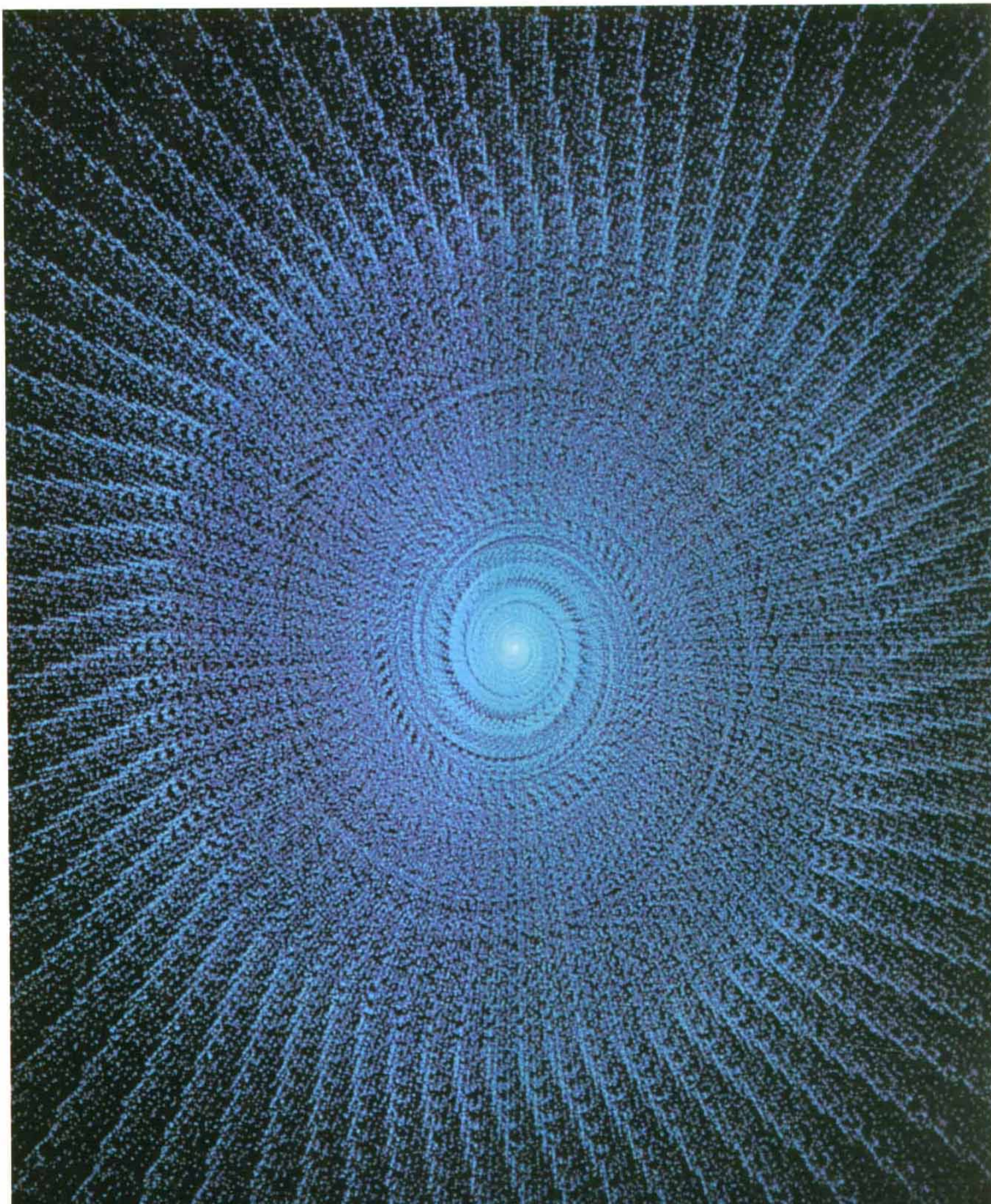
مجلهٔ ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۱۲

سال چهارم، زمستان ۱۳۷۳، شمارهٔ دوم، بها ۱۵۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه
وابسته به وزارت آموزش و پرورش

• صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه
• مدیر مسئول: محمود ابراهیمی
• سردبیر: حمیدرضا امیری

(با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقایان پرویز شهریاری و مهدی قمصری و با تشکر از آقای حسین ابراهیم‌زاده قُلزم در بخش کامپیوتر مجله)

• مسئول فنی: هوشنگ آشتیانی • صفحه‌آراو رسام: احمد پیرحسینلو
• حروفچینی: یگانه

سال چهارم، زمستان ۱۳۷۳ ، شمارهٔ دوم

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱ـ نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی دبیرستان)
۲ـ طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن
۳ـ طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن
۴ـ طرح معماهای ریاضی
۵ـ نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

• هیئت تحریریه درحکّ واصلاح وحذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.
• مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
• مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

مطالب این شماره

■ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، کوچه بهرام چوبینی، پلاک ۱۷ تلفن: ۸۸۲۵۹۶۴، ۸۸۲۳۱۴۹، ۵۲ ـ ۸۸۴۳۹۵۰، فاکس: ۸۸۲۰۵۹۹

یکی از بهترین راههای یادگیری و فهم عمیقِ مطالب و مفاهیم ریاضی، بازگو کردن و یا به عبارت دیگر تدریس آن به دیگری است. آیا تا به‌حال برای شما پیش آمده است که بخواهید مسأله‌ای و یا قضیه‌ای را برای دیگری شرح دهید؟ بی‌شک تجربه کرده‌اید که به‌همراه تشریح آن مسأله یا قضیه، خود به نکاتی تازه پی‌برده‌اید و آن موضوع خیلی بیشتر از پیش، برای شما جا افتاده و خیلی دیرتر از همیشه آن را فراموش کرده‌اید. این مسأله پر اهمیتی است که انسان بازیافته‌های خود را در اختیار دیگران قرار دهد تا ضمن بهره‌رسانی به دیگران خود نیز از آن بهره‌مند گردد، گذشته از آن چون «زکات علم، نشر آن است» در واقع شما زکات علم خود را نیز با این عمل پرداخت کرده‌اید و موجب رضای خداوند متعال را فراهم ساخته‌اید.

توصیهٔ ما به شما عزیزان این است که آنچه آموخته‌اید، یا آنچه از کتاب یا جزوه یا مجله در اختیار دارید، در طبق اخلاص نهاده و در اختیار دوستان و علاقه‌مندان قرار دهید.

روی مسائل و مفاهیم ریاضی با یکدیگر به بحث و تبادل نظر بپردازید و از نظرات یکدیگر بهره‌مند شوید.

همواره برای حلّ هر مسأله یا حتی قضیهٔ ریاضی، به دنبال راه‌حلهای تازه‌تری باشید و تنها به راه حلِ کتاب یا معلم اکتفا نکنید و برای هر مطلب دلیل بخواهید و به دنبال علّت آن باشید.

آرزوی توفیق و موفقیت روزافزون برای شما دانش‌آموزان و آینده‌سازان عزیزِ ایرانِ اسلامی را داریم و فرا رسیدنِ ماه مبارک رمضان، ماه بهارِ قرآن و بهار دلهای پاک و بی‌آلایش مؤمنین را به همهٔ شما مؤمنین تبریک عرض کرده و قبولی طاعات و عبادات شما را از درگاه خالقِ یکتا خواستاریم.

والسلام. سردبیر

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۱۲)

پرویز شهریاری

□ ریاضیات و دانشهای دیگر

تا این‌جا، با برخی نکته‌های آموزشی ـ که به کار شما در زمینهٔ ریاضیات مربوط می‌شد ـ آشنا شدید. اکنون زمان آن رسیده است، به این پرسش پاسخ بدهیم: **مسأله‌های ریاضی را چگونه حل کنیم؟** با وجود این، پیش از پرداختن به این پرسش، باید به جنبهٔ دیگری از زندگی ـ که بویژه در روزگار ما اهمیت بسیار دارد ـ اشاره کنیم: **تخصص در شاخه‌ای از دانش، و از آن جمله ریاضیات، نباید به معنای دوری از هنر و دانشهای دیگر باشد.**

ابتدا، این مقالهٔ کوتاه، آموزنده و پرطنز را ـ که از شمارهٔ سوم سال ۱۹۹۱ میلادی ماهنامهٔ «کوانت» چاپ مسکو برداشته‌ایم ـ بخوانید تا بعد، بحث خود را ادامه دهیم. عنوان مقاله، این است:

آیا می‌توان $2^{16}(2^{16}+1)$ ضلعی منتظم را رسم کرد؟

و اما، خود مقاله:

بلافاصله، بعد از آنکه سردبیر «کوانت»، این پرسش را مطرح کرد، بحث و جدل آغاز شد:

ریاضی‌دان و منطق‌شناس. بله می‌توان! چون $2^{16}+1$، یکی از عددهای اول فرما[1] است و همان طور که گوس[2] ثابت کرد، می‌توان این چند ضلعی منتظم را رسم کرد.

ریاضی‌دان و تاریخ‌شناس. این چند ضلعی منتظم به وسیلهٔ پروفسور هرمس رسم شده است. دو برابر کردن تعداد ضلعها هم، کار دشواری نیست. شرح آن، یک چمدان بزرگ را پر کرده است و این چمدان، در دانشگاه گوتینگن نگهداری می‌شود. هرکس مایل باشد، می‌تواند آن را مطالعه کند.

ریاضی‌دان و ویراستار. ولی تا امروز، کسی تفسیری بر آن ننوشته است! بنابراین معلوم نیست، متن آن، قابل اعتماد است یا نه!

ریاضی‌دان و روش شناس. در امکان رسم این چند ضلعی، هیچ تردیدی نیست! ولی پرسش در جای دیگری است: چگونه می‌توان آن را رسم کرد؟ بفرمایید، در اختیار شماست (صفحهٔ کاغذ، مداد، خط‌کش و پرگار را روی میز گذاشت).

ریاضی‌دان فیلسوف. نمی‌فهمم، گیر کار در کجاست؟ ثابت شده است، روش رسم وجود دارد. می‌دانیم اثبات درست و روش کار عملی است. بنابراین، می‌توان رسم کرد!

ریاضی‌دان اقتصادشناس. می‌توان یا نمی‌توان! باید محاسبه کرد (ماشین حساب خود را بیرون آورد). اگر برای رسم هر ضلع، یک ثانیه وقت لازم باشد و کار در سه نوبت (یعنی ۲۴ ساعته) انجام شود، آن وقت ... اوه اوه ... ۱۳۶ سال طول می‌کشد. نه، نمی‌شود!

ریاضی‌دان و ویژه‌کار سیبرنتیک. پس کامپیوتر برای چیست؟ برنامه‌ای تنظیم می‌کنیم ... در یک ساعت و کسری، کار انجام می‌شود.

نظریه‌پرداز فیزیک. اجازه بدهید، من هم امتحان کنم (مداد را در دست خود چرخاند و نوک آن را نشان داد). اگر اتم کربن ... در یک لایه ... قطر دایرهٔ محیطی ۳۰ سانتی‌متر ... فاصلهٔ بین سوراخها، در شبکهٔ بلوری مغز مداد ۱/۴ آنگستروم[3] ... بنابراین، محیط دایره $9/4 \times 10^9$ آنگستروم ... بله، می‌توان اتمهای کربن را در دایره قرار داد ... تنها باید فاصله‌ها برابر باشند ... در ضمن عرض کنم ... نوسانها ...

آزمایش‌گر فیزیک. (حرف همکارخود را قطع کرد.) این محاسبه‌ها برای چیست؟ (پرگاری برداشت و یک دایره رسم کرد.) بفرمایید! هر

کس مایل است، برای من ثابت کند، این یک ۴۲۹۵۰۳۲۸۳۲ ضلعی منتظم نیست؟

□

نخستین و مهمترین نکته‌ای که، بعد از خواندن این گفت‌وشنود پرطنز ، ولی بر پایهٔ واقعیت، به ذهن می‌رسد، این است که: ریاضیات، دانشی خصوصی و ویژهٔ ریاضی‌دانان نیست و هر کسی که با دانش، به مفهوم عام آن سروکار دارد، باید با ریاضیات آشنا باشد و ، همین‌طور برعکس، یک ریاضی‌دان نمی‌تواند سر در لاک خود فرو برد و بدون اینکه از دانشهای دیگر بهره‌ای داشته باشد، خود را با فرمولها و شکلها سرگرم کند. بویژه ریاضی‌دان نمی‌تواند به دور از واقعیت و تنها با دستگیرهٔ قانونهایی که در ریاضیات کشف کرده است ، حکم کند و نتیجه‌گیریهای خود را عملی و واقعی پندارد.

ریاضیات دانشی زنده است و مثل هر موجود زنده ، تنها دربستگی محیط دور و برخود و در رابطه با واقعیتهای زندگی، می‌تواند رشد کند و یا حتی معنا داشته باشد.همهٔ قانونهای ریاضی ، مستقیم و یا غیر مستقیم ، ریشه در قانونمندیهای طبیعت دارند و با جدا شدن از ریشهٔ خود ، نمی‌توانند به زندگی خود ادامه دهند. ولی از آنجاکه ریاضیات به صورتی انتزاعی و به ظاهر جدا از طبیعت و زندگی مطرح می‌شود، در هر مورد خاص، باید با معیار واقعیتهای بیرون از ریاضیات و بر پایهٔ تجربه و نوع کاربرد ، مورد ارزیابی قرار گیرد و روش تطبیق آن با عمل و شیوهٔ کاربرد آن معین شود.

ریاضیات، از یک طرف به تاریخ خود وابسته است و از طرف دیگر با زندگی ما درآمیخته است و به همین دلیل ، ریاضی‌دان نمی‌تواند خود را ازتاریخ ریاضیات و از جنبه‌های کاربردی ریاضیات و (به اعتباری مهمتر از هر دوی اینها) از فلسفهٔ ریاضیات دور نگه دارد. بجزاینها ریاضی‌دان، پیش از آنکه ریاضی‌دان باشد، یک انسان است و بویژه در روزگار ما، انسان «تک بُعدی» فرصت ابراز وجود نمی‌یابد و نمی‌تواند خود را با پیشرفتهای مادی و معنوی زمان، سازگار و هماهنگ کند.

درست است که ریاضی‌دان، به دلیل تخصصی که انتخاب کرده است، کار فکری خود را بیشتر در مسیر پیشرفت ریاضیات متمرکز می‌کند، ولی یک ریاضی‌دان هم، به عنوان انسانی که در عصر ما زندگی می‌کند، باید با دانشهای دیگر و با مسأله‌های عمدهٔ علمی و اجتماعی زمان خود آشنا باشد، از هنر لذت ببرد و در زندگی خانوادگی و اجتماعی خود، مثل هر انسان دیگری، هم به رشد فکری و هنری خود علاقه‌مند باشد و هم در جست وجوی راه یا راههای نجات انسانها از زشتیهای موجود.

اگر ریاضی‌دان، این حق را از خود سلب کند که از موسیقی لذت ببرد، به کمک شعر و رمان خوب به ژرفای روح انسانها وارد شود، گل و گیاه را دوست داشته باشد، به مسأله‌های حاد اجتماعی و سیاسی زمان خود علاقه‌مند باشد و ...، آن وقت، به یک انسان «تک بُعدی» تبدیل می‌شود که دراین صورت، بعید می‌دانم بتواند حتی یک ریاضی‌دان خوب باشد. ریاضی‌دان، همان طور که برای زنده ماندن، به غذا و لباس ومسکن نیاز دارد، برای زندگی در جامعهٔ بومی خود و یا، به طور کلی، در جامعهٔ انسانی، به غذای روح و به تقویت اندیشه وعاطفه خود نیازمند است که با عشق ورزیدن به هنر و علاقه‌مند بودن به مطالعهٔ تاریخ گذشته و حال جامعه‌های بشری وتلاش در جهت بهتر کردن زندگی انسانها، می‌تواند تأمین شود.

یک ریاضی‌دان، باید با عمل خود و با رفتار فردی و اجتماعی خود، این تصور نادرست را از ذهن همگان دور کند که «ریاضی‌دان تنها با عدد و شکل سروکار دارد و به درد هیچ کار و هیچ بحث دیگری نمی‌خورد».

دربارهٔ رابطهٔ ریاضیات با هنر، بستگی جدی و عمیق درک ریاضی با درک فلسفی، دربارهٔ اهمیت آگاهی از تاریخ ریاضیات (و اینکه، در تحلیل آخر، تاریخ ریاضیات، به گونه‌ای، خود ریاضیات است)، دربارهٔ ریاضیات کاربردی و دوره‌های متناوب تاریخ تکامل ریاضیات، که گاه با سمت‌گیری نظری و گاه با سمت‌گیری کاربردی، ظاهر شده است و ... ، به موقع خود صحبت خواهد شد، ولی در این‌جا، تنها به نمونهٔ مشخصی در زمینهٔ تاریخ ریاضیات اشاره می‌کنیم و برای بحث منطقیتر و پیوسته‌تر دربارهٔ آن، منتظر فرصت مناسب می‌مانیم.

□

اوگوستن لوئی کوشی (۱۷۸۹ - ۱۸۵۷ میلادی)، ریاضی‌دان بزرگ فرانسوی و عضو فرهنگستان علوم پاریس (از ۱۸۱۶ میلادی)

برای نخستین بار، این قضیّه را در حالت کلی خود ثابت کرد:

میانگین حسابی n عدد مثبت، از میانگین هندسی آنها کوچکتر نیست؛ یعنی اگر n عدد مثبت a_1 ، a_2 ، ... ، a_n را در نظر بگیریم، همیشه داریم :

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}$$

و تنها در حالت برابری همهٔ عددهای a_1، a_2، ...، a_n، این نابرابری، به برابری تبدیل می‌شود. [میانگین حسابی n عدد، یعنی $\frac{1}{n}$ مجموع آنها و میانگین هندسی n عدد، یعنی ریشهٔ n ام حاصل ضرب آنها.]

کوشی این نابرابری مهم و مشهور را، همراه با اثبات آن، در سال ۱۸۲۱ منتشر کرد. این نابرابری، که به سرعت کاربردهای زیادی پیدا کرد، از همان آغاز طرح خود، به عنوان یکی از دشوارترین نابرابریهای عددی (دشوار از نظر اثبات و نه از جهت مفهوم و مضمون آن) شناخته شد. اثباتی که خود کوشی برای آن آورده بود، هم پیچیده بود وهم مفصل؛ عملهای این اثبات، چند صفحهٔ کامل را پر می‌کند. ولی ریاضی‌دانان بعد از «کوشی»، از پای ننشستند و در طول بیش از ۱۷۰ سالی که از طرح و اثبات نابرابری می‌گذرد دهها راه دیگر برای اثبات درستی آن پیدا کردند که، اغلب از روش اثبات کوشی ساده‌ترند (برای آگاهی از برخی از اثباتهای نابرابری «کوشی» می‌توانید به کتاب «نابرابریها» نوشتهٔ پرویز شهریاری مراجعه کنید).

در این‌جا، این پرسش پیش می‌آید: اگر کوشی توانست درستی نابرابری میانگینها را ثابت کند واگر برای استفاده از این نابرابری نیازی به اطلاع از روش اثبات آن نیست، چرا ریاضی‌دانان، به صورتی پی‌گیر، درصدد اثبات آن، با روشهای دیگری برآمده‌اند؟

در واقع در این گونه موردها هدف اصلی، نه خود قضیه، بلکه جست و جوی روشهای تازه‌ای در ریاضیات است. اغلب روشهای استدلال و اثباتهای منطقی (و به عنوان نمونه، روش استقرای ریاضی) از همین راه (والبته، نه یکباره، بلکه گام به گام، در طول زمان و با کوشش عدهٔ زیادی از ریاضی‌دانان) پدید آمده‌اند.

بطلمیوس، اخترشناس یونانی و ریاضی دانان و اخترشناسان بعد از او (و از جمله خوارزمی)، برای تنظیم زیجها (جدولهای اخترشناسی) و محاسبه‌های آنها، از قضیه‌های کم وبیش دشوار هندسی (مثل قضیهٔ بطلمیوس، قضیهٔ منلائوس و قضیهٔ یسوا) استفاده می‌کردند که با پیچیدگیهای زیادی همراه بود. ولی ریاضی‌دانان ایرانی، به این روشها قانع نشدند و روشهای تازه‌تر و ساده‌تری را برای محاسبه‌های طولانی و ملال‌آور و بغرنجی که در اخترشناسی لازم داشتند، جست‌وجو می‌کردند. این تلاشها، که بخش عمدهٔ آن، به وسیلهٔ «ابوریحان بیرونی» و «ابوالوفای بوزجانی» انجام گرفت، منجر به پیدایش روشهای مثلثاتی و رابطه‌های آنها شد و سرانجام با ساختمانی که «نصیرالدین طوسی»، براساس یافته‌های ریاضی‌دانان ایرانی پیش ازخود بنا کرد، مثلثات به‌عنوان شاخهٔ مستقلی از ریاضیات به وجود آمد.

همچنین، ریاضی‌دانان ایرانی، که تحت تأثیر کارهای ریاضی‌دانان یونانی، برای حل معادله‌ها به روشهای هندسی توجه داشتند؛ به این روشها قانع نشدند و بتدریج توانستند عنصرهای خالص جبری و محاسبه‌ای را وارد کار خود کنند. خوارزمی معادله‌های درجه دوم و خیام معادله‌های درجه سوم را، گاه با روش هندسی و گاه با روش محاسبه‌ای، حل می‌کردند و در میان همین تلاشها بود که دانش جبر تولد یافت و به جایی رسید که جمشید کاشانی، توانست معادلهٔ درجه سوم $a = 3x - 4x^3$ را (به قصد پیدا کردن سینوس یک درجه، با معلوم بودن سینوس سه درجه) حل کند.

□

به نابرابری «کوشی» برگردیم. در این جا ابتدا، یکی از روشهای اثبات نابرابری را (که به نظر من زیباترین و در عین حال، ساده‌ترین آنهاست) می‌آوریم و سپس، به نمونه‌ای از کاربرد نابرابری «کوشی» اشاره می‌کنیم.

در آغاز، باید فکری برای ریشهٔ n ام کرد که در سمت راست نابرابری قرار دارد. چراکه وجود ریشهٔ n ام، مزاحم به نظر می‌رسد و ذهن را آشفته می‌کند. دو طرف نابرابری را، به این ریشهٔ n ام (که مقداری مثبت است) تقسیم می‌کنیم. سمت راست برابر ۱ می‌شود و مقدار سمت چپ نابرابری را، می‌توان میانگین حسابی این عددها دانست:

$$y_1 = \frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}}, \quad y_2 = \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}}, \dots,$$
$$y_n = \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}}$$

به این ترتیب، قضیهٔ نابرابری کوشی، تغییر شکل می‌دهد و به صورت قضیهٔ زیر درمی‌آید:

اگر y_1، y_2، ...، y_n عددهای مثبت و حاصل ضربی برابر واحد داشته باشند، ثابت کنید:

$$\frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} \geq 1 \qquad (*)$$

و این قضیه را می‌توان با روش استقرای ریاضی ثابت کرد.

به ازای $n = 1$، نابرابری (*) روشن است و به برابری تبدیل می‌شود. به ازای $n = 2$، باید ثابت کنیم، به شرط مثبت بودن y_1 و y_2 و $y_1y_2 = 1$، داریم: $\frac{y_1 + y_2}{2} \geq 1$. این نابرابری، با توجه به شرط $y_1 y_2 = 1$، به نابرابری $y_1 + \frac{1}{y_1} \geq 2$ و یا

$(y_1 - 1)^2 \ge 0$ تبدیل می‌شود که درستی آن روشن است (این نابرابری، به ازای $y_1 = 1$، یعنی $y_1 = y_2 = 1$، به برابری تبدیل می‌شود).

اکنون فرض می‌کنیم، نابرابری (*)، برابر n عدد برقرار باشد و ثابت می‌کنیم، در این صورت، برای $n + 1$ عدد هم برقرار است. این برابریها را در نظر می‌گیریم:

$$z_1 = y_1 ,\ z_2 = y_2 ,\ \dots ,\ z_{n-1} = y_{n-1} ,\ \ z_n = y_n\, y_{n+1}$$

برای عددهای z_1، z_2، ...، z_n، این شرط برقرارند:

$$z_1 > 0 \ ,\ z_2 > 0 \ ,\ \dots ,\ z_n > 0$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = 1$$

بنابراین، طبق فرض استقرا داریم:

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n \ge n$$

یعنی: $y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + y_n\, y_{n+1} \ge n \quad (**)$

می‌توان عددهای y_1، y_2، ...، y_n، y_{n+1} را طوری انتخاب کرد که داشته باشیم:

$$y_n > 1 \ ,\ \ y_{n+1} < 1$$

(روشن است، اگر همهٔ عددهای y_i برابر ۱ نباشند، چنین دو عددی در بین آنها پیدا می‌شود.)

ثابت می‌کنیم، با این فرض، داریم:

$$y_n + y_{n+1} \ge y_n\, y_{n+1} + 1$$

اگر در این نابرابری، همهٔ جمله‌ها را به سمت چپ منتقل و سپس، به ضرب تبدیل کنیم، به دست می‌آید:

$$(1 - y_n)(y_{n+1} - 1) \ge 0$$

که درستی آن روشن است، زیرا فرض کردیم $y_n > 1$ و $y_{n+1} < 1$.

با توجه به نتیجهٔ اخیر، نابرابری (**)، چنین می‌شود:

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n + y_{n+1} \ge n + 1$$

اثبات کامل و درستی نابرابری «کوشی» ثابت شد.

«کوشی» ریاضی‌دانی بزرگ و درجهٔ اوّل بود، با وجود این نتوانست راه حل ساده‌ای برای نابرابری میانگینها پیدا کند. و این، یکی از درسهای تاریخ است. اگر شما، برای نخستین بار، با مسأله‌ای روبه‌رو می‌شوید. نباید انتظار داشته باشید، بلافاصله حل آن را ـ آن هم به صورتی ساده ـ پیدا کنید. از اینکه موفق به حل مسأله‌ای نمی‌شوید و اگر راه حلی طولانی، دشوار و ملال‌آور برای آن پیدا می‌کنید، خودتان را سرزنش نکنید. تاریخ ریاضیات به ما می‌آموزد، حتی بزرگترین ریاضی‌دانان هم، مثل شما، گاهی با ناکامی روبه‌رو می‌شده‌اند، گاهی اشتباه می‌کرده‌اند و اگر هم به موفقیتی می‌رسیده‌اند، اغلب از کوتاهترین و زیباترین مسیر نبوده است.

□

به کمک نابرابری «کوشی»، قضیهٔ زیر که یکی از مهمترین قضیه‌ها در جبر است، ثابت می‌شود:

اگر چند متغیر مثبت، مجموع ثابتی داشته باشند، حاصل ضرب آنها وقتی به حداکثر مقدار خود می‌رسد که، این متغیرها با هم برابر باشند.

n عدد مثبت a_1، a_2، ...، a_n را به مجموع ثابت m در نظر می‌گیریم. بنابر نابرابری «کوشی» داریم:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{m}{n}$$

اگر دو طرف این نابرابری را به توان n برسانیم، به دست می‌آید:

$$a_1 a_2 \dots a_n \le \left(\frac{m}{n}\right)^n$$

یعنی، حاصل ضرب $a_1\, a_2 \dots a_n$، همیشه از $\left(\frac{m}{n}\right)^n$ کوچکتر است، مگر در حالت

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{m}{n}$$

که در آن صورت، حاصل ضرب مفروض با $\left(\frac{m}{n}\right)^n$ برابر می‌شود.

شبیه این قضیه دربارهٔ حداقل مجموع وجود دارد:

اگر چند متغیر مثبت، حاصل ضرب ثابتی داشته باشند، مجموع آنها وقتی به حداقل مقدار خود می‌رسد که این متغیرها، با هم برابر باشند.

[اثبات را خودتان پیدا کنید.]

تا بعد

$x\,R\,y$

رابطه ـ خواص رابطه‌ها

(قابل استفادهٔ دانش‌آموزان دوم ریاضی فیزیک و ریاضیات ۳ و جبر و احتمال سال سوم ریاضی نظام جدید)

● حمیدرضا امیری

در شمارهٔ ۱۱ «برهان» تعریف عمل حاصل ضرب‌دکارتی را بیان کرده و خواص این عمل را بررسی کردیم. بویژه دیدیم که برای هر دو مجموعهٔ دلخواه مانند: A و B،

$$(A \times B) = \{(x , y) \mid x \in A \ \&\ y \in B\}$$

همچنین مشاهده کردید که اگر A یک مجموعهٔ m عضوی و B یک مجموعهٔ k عضوی باشد، در این‌صورت $(A \times B)$ دارای mk عضو[1] خواهد بود که نتیجه می‌گیریم $(A \times B)$ دارای 2^{mk} زیر مجموعه است. به عنوان مثال: اگر $n(A) = 3$ و $n(B) = 2$، آنگاه $n(A \times B) = 6$، پس $(A \times B)$ دارای $64 = 2^6$ زیر مجموعه است، که خودِ $(A \times B)$ و $\varnothing$ نیز جزو این زیرمجموعه‌ها هستند.

حال رابطه را تعریف می‌کنیم:

هرگاه A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، در این صورت هر زیر مجموعه از $(A \times B)$ را یک رابطه از A در B می‌نامند. پس طبق مطالب فوق اگر $(A \times B)$ دارای n عضو باشد، 2^n زیرمجموعه دارد و بنابر تعریف رابطه به همین تعداد یعنی؛ 2^n رابطه از A در B می‌توان تعریف کرد و $\varnothing$ نیز یکی از این رابطه‌ها است که به رابطهٔ مُمتنع معروف است.

مثال ۱ ـ فرض کنیم: $A = \{2\}$ و $B = \{4,3\}$ بنابراین:

$$A \times B = \{(2,4) \text{ و } (2,3)\}$$

و بنابراین با توجه به تعریف رابطهٔ هریک از مجموعه‌های زیر، یک رابطه از A در B

$R_1 = \{(2,4)\}$ و $R_2 = \{(2,3)\}$ و $R_3 = \{(2,4) , (2,3)\}$ و

$R_4 = \varnothing$

قرارداد ۱ ـ هرگاه رابطهٔ R از A در A تعریف شود یعنی؛ هرگاه $R \subset (A\times A)$ در این صورت می‌گوییم: رابطهٔ R روی A تعریف شده است.

قرارداد ۲ ـ هرگاه رابطهٔ R مفروض باشد و داشته‌باشیم $(x,y) \in R$ می‌توانیم از نماد xRy استفاده کنیم یعنی:

$$(x,y) \in R \iff xRy$$

$$(x,y) \notin R \iff x \not R y$$

مثال ۲ ـ رابطه‌ای چون R روی $IN^2 = IN \times IN$ تعریف کنید به شرطی که دارای ۳ عضو باشد.

طبق قرارداد ۱، رابطه روی IN^2 یعنی؛ از IN^2 در IN^2 پس همواره باید $R \subset IN^2 \times IN^2$ و بنابراین اعضای R می‌بایست زوج مرتبهایی باشند که مؤلفهٔ آن خود یک زوج مرتب است زیرا،

$$IN^2 \times IN^2 = \{((x,y) , (z,t)) \mid (x,y) \in IN^2, (z,t) \in IN^2\}$$

بنابراین مثلاً می‌توان نوشت:

$$R = \{((1,2),(2,1)),((2,6),(7,11)),((5,3),(99,15))\}$$

که R دارای ۳ عضو است و طبق قرار داد ۲ می‌توانیم بنویسیم:

$(1,2)\ R\ (2,1)$ و $(2,6)\ R\ (7,11)$ و $(5,3)\ R\ (99,15)$

طرح یک تست ـ هرگاه $n(A) = m$ در این صورت چند رابطه روی A می‌توان نوشت؟

۱) 2^m ۲) 2^{2m} ۳) 2^{2m} ۴) 2^{m^2}

جواب ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$n(A) = m \Rightarrow n(A \times A) = m^2$

پس $(A \times A)$ دارای 2^{m^2} زیر مجموعه است و به همین تعداد نیز می‌توان رابطه روی A تعریف کرد.

دامنهٔ یک رابطه ـ اگر R رابطه‌ای از A در B باشد، مجموعهٔ حاصل از مؤلّفه‌های اوّلِ رابطهٔ R را دامنهٔ R می‌نامند و با D_R نمایش می‌دهند، که واضح است همواره $D_R \subset A$.

بُرد یک رابطه ـ مجموعهٔ حاصل از مؤلّفه‌های دوم رابطهٔ R را بُرد رابطهٔ R می‌نامند و با نماد R_R نمایش می‌دهند و همچنین واضح است که $R_R \subset B$ (رابطهٔ R از A در B تعریف شده است).

مثال ۳ ـ هرگاه $A = \{2,4,6,8\}$ و $B = \{1,9,7\}$ و رابطهٔ $R = \{(2,1),(4,1),(6,7)\}$ از A در B تعریف شده باشد، در این صورت:

$D_R = \{2,4,6\} \subset A$ و $R_R = \{1,7\} \subset B$

◆ وارون یک رابطه

اگر R رابطه‌ای از A در B باشد، وارون رابطهٔ R که با R^{-1} نمایش داده می‌شود، رابطه‌ای است از B در A که با عوض کردنِ جای مؤلّفه‌های اوّل و دومِ R حاصل می‌شود، یعنی:

$R^{-1}=\{(a,b) \mid (b,a) \in R\}$ یا $(x,y) \in R \Leftrightarrow (y,x) \in R^{-1}$

به عنوان مثال، با توجه به مثال ۳ داریم:

$R^{-1} = \{(1,2),(1,4),(7,6)\}$

از طرفی با توجه به تعریف دامنه و بُرد و تعریف وارون یک رابطه همواره داریم:

$D_R = R_{R^{-1}}$ و $R_R = D_{R^{-1}}$

در این قسمت با توجه به مطالب گفته شده، به طرح و حل چند مسألهٔ مهّم می‌پردازیم:

مسألهٔ ۱ ـ هرگاه R_1 و R_2 دو رابطه از A در B باشند ثابت کنید:

$D_{R_1 \cup R_2} = D_{R_1} \cup D_{R_2}$

حل ـ

فرض کنیم: $[x \in D_{R_1 \cup R_2} \Rightarrow \exists y \in B ; (x,y) \in (R_1 \cup R_2) \Rightarrow$

$(x,y) \in R_1 \vee (x,y) \in R_2 \Rightarrow x \in D_{R_1} \vee x \in D_{R_2} \Rightarrow$

$x \in (D_{R_1} \cup D_{R_2})] \Rightarrow D_{R_1 \cup R_2} \subset D_{R_1} \cup D_{R_2} \quad (1)$

حال فرض کنیم: $[x \in (D_{R_1} \cup D_{R_2}) \Rightarrow x \in D_{R_1} \vee x \in D_{R_2} \Rightarrow$

$\exists y_1, \exists y_2 ; (x,y_1) \in R_1 \vee (x,y_2) \in R_2 \xRightarrow{R_1, R_2 \subset R_1 \cup R_2}$

$(x,y_1) \in (R_1 \cup R_2) \vee (x,y_2) \in (R_1 \cup R_2) \Rightarrow$

$x \in D_{R_1 \cup R_2} \vee x \in D_{R_1 \cup R_2} \overset{P \vee P \equiv P}{\Rightarrow} x \in D_{R_1 \cup R_2}] \Rightarrow$

$(D_{R_1} \cup D_{R_2}) \subset D_{R_1 \cup R_2} \quad (2)$

$(1),(2) \Rightarrow D_{R_1} \cup D_{R_2} = D_{R_1 \cup R_2}$

مسألهٔ ۲ ـ با ذکر یک مثال (مثال نقض) نشان دهید که تساویِ مسألهٔ قبل برای اشتراک برقرار نیست یعنی نشان دهید:

$D_{R_1 \cap R_2} \neq D_{R_1} \cap D_{R_2}$

حل ـ

فرض کنیم: $A = \{2,4,6,8\}$ و $B = \{3,5,7,9\}$ و تعریف می‌کنیم:

$R_1 = \{(2,3),(4,7),(6,9)\}, R_2 = \{(2,3),(4,5),(7,8)\}$

$D_{R_1} = \{2,4,6\}, D_{R_2} = \{2,4,8\}, D_{R_1} \cap D_{R_2} = \{2,4\}$

$(R_1 \cap R_2) = \{(2,3)\}, D_{R_1 \cap R_2} = \{2\}$

$\Rightarrow D_{R_1 \cap R_2} \neq D_{R_1} \cap D_{R_2}$

مسألهٔ ۳ ـ اگر f و g رابطه‌هایی از A در B باشند ثابت کنید:

$(f \cup g)^{-1} = f^{-1} \cup g^{-1}$

فرض کنیم: $[(x,y) \in (f \cup g)^{-1} \xLeftrightarrow{\text{تعریف وارون}} (y,x) \in (f \cup g) \xLeftrightarrow{\text{تعریف اجتماع}}$

$(y,x) \in f \vee (y,x) \in g \xLeftrightarrow{\text{تعریف وارون}} (x,y) \in f^{-1} \vee (x,y) \in g^{-1}$

$\xLeftrightarrow{\text{تعریف اجتماع}} (x,y) \in (f^{-1} \cup g^{-1})] \Rightarrow (f \cup y)^{-1} = f^{-1} \cup g^{-1}$

تمرین ـ ثابت کنید: $(f\cap g)^{-1} = f^{-1}\cap g^{-1}$، که f و g هر دو رابطه‌هایی از A در B هستند.

مسألهٔ ۴ ـ اگر f و g رابطه‌هایی از A در B باشند، ثابت کنید:

$$(f-g)^{-1} = f^{-1}-g^{-1}$$

فرض‌کنیم: $[(x,y)\in(f-g)^{-1} \Longleftrightarrow (y,x)\in(f-g) \overset{\text{تعریف تفاضل}}{\Longleftrightarrow}$

$(y,x)\in f \wedge (y,x)\notin g \Longleftrightarrow (x,y)\in f^{-1} \wedge (x,y)\notin g^{-1}$

$\Longleftrightarrow (x,y)\in(f^{-1}-g^{-1})] \Rightarrow (f-g)^{-1} = f^{-1}-g^{-1}$

◆ تعریف رابطهٔ همانی

رابطهٔ همانی روی یک مجموعهٔ ناتهی مانند A که آن را با I نمایش می‌دهند عبارت است از: تمام زوج مرتبهای متعلق به A×A که هر دو مؤلّفه با هم برابر باشند، یعنی:

$$I = \{(a,a) \mid a\in A\}$$

بنابراین با توجه به تعریف فوق اگر A یک مجموعهٔ m عضوی باشد، در این صورت رابطهٔ همانیِ تعریف شده روی A، یعنی I دارای m عضو است.

مثال ۴ ـ اگر $A = \{۲,۳,۷,۹\}$ در این صورت:

$$I = \{(۲,۲)\ ,\ (۳,۳)\ ,\ (۷,۷)\ ,\ (۹,۹)\}$$

■ انواع رابطه‌ها (خواص رابطه‌ها)

۱ ـ خاصیت بازتابی (انعکاسی):

اگر A مجموعه‌ای ناتهی باشد و رابطهٔ R روی A تعریف شده باشد، در این صورت می‌گوییم: رابطهٔ R دارای خاصیت بازتابی یا انعکاسی است، هرگاه هر عضو مجموعهٔ A مانند a، به صورت (a,a) در R وجود داشته باشد، یعنی:

رابطهٔ R خاصیت بازتابی دارد. $\Leftrightarrow \forall a\in A$ ، $(a,a)\in R$ یا aRa

توجه دارید که گفتیم: هر عضو مجموعهٔ A، به‌عبارت دیگر؛ اگر R رابطه‌ای بازتابی روی مجموعهٔ m عضوی A باشد، حداقل اعضایی که R می‌تواند داشته باشد، m است یعنی؛ رابطهٔ بازتابی R باید حداقل شاملِ رابطهٔ همانی در A باشد.

مثال ۵ ـ مجموعهٔ $A = \{۲,۴,۶\}$ مفروض است، در این صورت:

الف) $R_1 = \{(۲,۲)\ ,\ (۴,۴)\ ,\ (۲,۶)\ ,\ (۶,۲)\}$

R_1 خاصیت بازتابی ندارد زیرا، $۶\in A$ ولی $(۶,۶)\notin R_1$ یا $۶\not R_1 ۶$.

ب) $R_2 = \{(۲,۲),(۴,۴),(۴,۲),(۶,۶)\}$

R_2 خاصیت بازتابی دارد و همان‌طور که مشاهده می‌کنید، $I\subset R_2$.

ج) $R_3 = \{(۲,۲),(۴,۴),(۶,۶)\}$

R_3 خاصیت بازتابی دارد، این رابطه همان رابطهٔ همانی است.

مثال ۶ ـ رابطه‌های تساوی و کوچکتر یا مساوی در اعداد حقیقی دارای خاصیت بازتابی هستند، زیرا هر عدد مساوی خودش است و نیز هر عدد کوچکتر یا مساوی خودش است یا به عبارت دیگر:

$$\forall a\in \mathbb{R}\ ;\ a=a \qquad \text{و} \qquad \forall a\in\mathbb{R}\ ،\ a\le a$$

مثال ۷ ـ رابطهٔ جزئیت (زیر مجموعه بودن) در مجموعهٔ، زیر مجموعه‌های A دارای خاصیت بازتابی است زیرا، هر مجموعه زیرمجموعهٔ خودش است، یعنی؛

$$\forall B\in p(A)\ ،\ B\subseteq B$$

مثال ۸ ـ رابطهٔ بخش‌پذیری در مجموعهٔ اعداد طبیعی (IN) خاصیت بازتابی دارد، زیرا هر عدد طبیعی برخود بخش‌پذیر است، یعنی:

$$\forall a\in \mathbb{N}\ ،\ \frac{a}{a} = ۱ \ \text{یا}\ a = ۱a$$

تذکر ـ برای اینکه ثابت کنیم، رابطه‌ای چون R روی A، دارای خاصیت بازتابی نیست کافی است تنها یک عضو از A مانند a بیابیم به طوری که $a\not R a$.

در این قسمت و قبل از بیان بقیّهٔ خواص رابطه‌ها به ذکر این نکته مهّم می‌پردازیم که گاهی اوقات تعریف یک رابطه را به صورت و با نماد ریاضی بیان می‌کنند، در حقیقت ارتباط بین مؤلّفه‌های هر زوج مرتب را با نماد ریاضی نمایش می‌دهند، به عنوان مثال: رابطهٔ بخش‌پذیری را در IN به صورت زیر می‌توان نشان داد:

$$\forall a,b\in\mathbb{N}\ ;\ aRb \Leftrightarrow \frac{a}{b} = k \ \text{یا}\ a = kb$$

که در تعریف فوق $k\in\mathbb{N}$ بوده و داریم:

$$R = \{(۱,۱)\ ,\ (۲,۱)\ ,\ (۲,۲)\ ,\ (۳,۱)\ ,\ (۳,۳),\ldots\}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، مؤلّفهٔ هر زوج، مضربی از مؤلّفهٔ

دوم آن است و برعکس. یعنی؛ اگر عددی طبیعی مضربی از یک عدد طبیعی دیگر باشد، آن دو عدد به صورت یک زوج مرتب در رابطهٔ مزبور وجود خواهد داشت، مثلاً:

$۸ = ۲ \times ۴ \Rightarrow (۸,۲) \in R$ یا $۸R۲$

مثال ۹ ـ رابطهٔ R روی مجموعهٔ اعداد صحیح (Z) به صورت زیر تعریف شده است، نشان دهید این رابطه خاصیت بازتابی دارد.

$\forall x , y \in Z$ ، $xRy \Longleftrightarrow x - y = ۴k \ (k \in Z)$

برای نشان دادن این مطلب، ابتدا ضابطه‌ای که براساس آن رابطهٔ R تعریف شده را بررسی می‌کنیم. برطبق این ضابطه زوج مرتبهایی در رابطهٔ R موجود هستند که تفاضل مؤلفهٔ اوّل و دوم آنها مضرب صحیحی از ۴ باشد، مثلاً:

$$\left.\begin{array}{l} ۸ - ۴ = ۴ = ۱ \times ۴ \ (k = ۱) \\ ۱۲-(-۴)=۱۶= ۴ \times ۴(k= ۴) \end{array}\right\} \Rightarrow ۸R۴ \ , \ ۱۲R(-۴)$$

یا مثلاً؛

$[۲- ۲ = ۰ = ۴ \times ۰(k = ۰)] \Rightarrow ۲R۲$

بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$\forall x \in Z \ ; x - x = ۰ = ۴ \times ۰ \Rightarrow xRx$

ثابت شد: $\forall x \in Z$ ، xRx

بنابراین رابطهٔ R طبق تعریف دارای خاصیت بازتابی است.

با توجه به تعریف رابطهٔ همانی و تعریف خاصیت بازتابی برای یک رابطه دیدیم هر رابطه که خاصیت بازتابی داشته باشد باید شامل رابطهٔ همانی یعنی؛ I باشد و برعکس یعنی اگر R شامل I باشد، حتماً خاصیت بازتابی دارد بنابراین می‌توان نوشت:

$I \subset R \Longleftrightarrow$ رابطهٔ R روی مجموعهٔ A خاصیت بازتابی دارد.

از همین نکته استفاده کرده و ثابت می‌کنیم:

الف ـ اگر f و g دو رابطهٔ روی مجموعهٔ ناتهی A بوده و انعکاسی باشند در این صورت $(f \cup g)$ و $(f \cap g)$ نیز انعکاسی هستند ولی $(f - g)$ دیگر دارای خاصیت انعکاسی نیست.

ب ـ رابطهٔ مُمتنع $(\varnothing)$ انعکاسی نیست.

$$\text{(اثبات الف)} \left\{\begin{array}{l} f \text{ انعکاسی} \Rightarrow I \subseteq f \\ g \text{ انعکاسی} \Rightarrow I \subseteq g \end{array}\right\} \Rightarrow I \subseteq (f \cap g)$$

و چون همواره $(f \cap g) \subseteq (f \cup g)$ لذا $I \subset (f \cup g)$ و حکم ثابت است.

از طرفی: $I \subseteq f \ , \ I \subseteq g \Rightarrow I \not\subseteq (f - g)$

اثبات ب) فرض کنیم رابطهٔ تُهی انعکاسی باشد، بنابراین می‌بایست $I \subseteq \varnothing$ و این ممکن نیست، جز آنکه $I = \varnothing$ و این با ناتهی بودنِ مجموعهٔ A تناقض دارد، پس رابطهٔ تهی انعکاسی نیست.

مثال ۱۰ ـ با ذکر یک مثال نقض نشان می‌دهیم؛ رابطهٔ زیر که روی اعدادِ حقیقی (IR) تعریف شده است، خاصیت انعکاسی ندارد.

$\forall x , y \in IR \ ; xRy \Leftrightarrow ۲x + ۳y = ۹$

$۳ \in IR$ ولی $\rightarrow ۲ \times ۳ + ۳ \times ۳ = ۱۵ \neq ۹ \Rightarrow ۳ \not R ۳$

۲ـ خاصیت تقارنی

می‌گوییم رابطهٔ R روی مجموعهٔ ناتهی A خاصیت تقارنی دارد هرگاه، هر زوج مرتب مانند (x , y) که در R موجود باشد، (y , x) نیز در R موجود باشد به عبارت دیگر:

رابطهٔ R متقارن است $\Leftrightarrow \forall x,y \in A ; [(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R]$

تذکر: از تعریف فوق چنین برمی‌آید که در صورت وجودِ زوج مرتبی چون (x,y) می‌بایست (y,x) هم در R باشد و اگر زوج مرتبی چون (z,t) در R نبود دیگر به دنبال (t,z) نیستیم و **نمی‌توان** ادعا کرد که رابطهٔ تقارنی نیست. در ضمن توجه دارید که چون در تعریف خاصیت تقارنی از سور عمومی (به ازای هر) استفاده شده نیازی به رابطهٔ دو شرطی نداریم.

مثال ۱۱ ـ مجموعهٔ $A = \{۲,۴,۶,۸\}$ را در نظر می‌گیریم در این‌صورت:

(الف $R_۱ = \{(۲,۴),(۶,۲),(۴,۲),(۲,۶),(۸,۸)\}$

رابطهٔ $R_۱$ متقارن است زیرا هر زوج مرتب در آن که در نظر گرفته

شود، دارای وارونی در R_1 است.

$$R_2 = \{(2,4),(4,2),(8,6)\} \text{ (ب}$$

رابطهٔ R_2 خاصیت تقارنی ندارد زیرا ۸R۶ ولی ۶R̸۸ .

$$R_3 = \{(2,2),(4,4),(6,6),(8,8)\} \text{ (ج}$$

رابطهٔ R_3 نیز دارای خاصیت تقارنی است در واقع رابطهٔ همانی رابطه‌ای متقارن است.

مثال ۱۲ ـ رابطهٔ کوچکتر یا مساوی در IR خاصیت تقارنی ندارد، زیرا:
مثلاً ۲≤۳ ولی ۲ ≰ ۳.

مثال ۱۳ ـ رابطهٔ بخش‌پذیری در IN متقارن نیست، زیرا مثلاً عدد ۴ بر ۲ بخش‌پذیر است (خارج قسمتِ تقسیم، عددی صحیح و باقی‌مانده صفر است) ولی عدد ۲ بر ۴ بخش‌پذیر نیست.

مثال ۱۴ ـ نشان دهید رابطهٔ زیر که روی Z تعریف شده دارای خاصیت تقارنی است.

$$\forall x,y \in Z ،\ xRy \Leftrightarrow x - y = 4k \qquad (k \in Z)$$

برای اثبات چنین مسائلی همیشه برای شروع خودمان فرض می‌کنیم، (x,y) ای دلخواه در رابطهٔ R موجود است و در نهایت باید ثابت کنیم (y,x) نیز در R است و با توجه به دلخواه بودنِ (x,y) حکم به اثبات می‌رسد، بنابراین داریم:

$$\text{فرض کنیم}(x,y) \in R \Rightarrow x-y = 4k_1 \xRightarrow{\text{در منفی ضرب می‌کنیم}} y - x = 4(-k_1)$$
$$\xRightarrow{-k_1 = k_2} y - x = 4k_2 \Longrightarrow (y,x) \in R$$

تمرین: نشان دهید رابطهٔ زیر متقارن است:

$$\forall x,y \in IR ;\ xRy \Leftrightarrow x + y = 9$$

قضیّه: هرگاه R رابطه‌ای روی مجموعهٔ ناتهی A باشد، شرط لازم و کافی برای آنکه R تقارنی باشد آن است که $R = R^{-1}$.
اثبات شرط لازم: فرض کنیم رابطهٔ R متقارن باشد ثابت می‌کنیم: $R = R^{-1}$.
برای اثبات به‌روش عضوگیری دلخواه از R استفاده می‌کنیم:

$$[\text{فرض کنیم}: (x,y)\in R \xRightarrow{\text{R تقارنی}} (y,x)\in R \xRightarrow{\text{تعریف وارون}} (x,y)\in R^{-1}] \Rightarrow R = R^{-1}$$

اثبات شرط کافی: فرض کنیم: $R = R^{-1}$، ثابت می‌کنیم: R متقارن است:

$$[\text{فرض کنیم}: (x,y) \in R \xRightarrow{R = R^{-1}} (x,y) \in R^{-1} \xRightarrow{\text{تعریف وارون}} (y,x) \in R\ ] \Rightarrow \text{R متقارن است}$$

تذکر: از قضّیهٔ فوق می‌توان در اثبات متقارن بودنِ رابطه‌ها استفاده کرد، یعنی برای اثبات اینکه رابطهٔ R متقارن است کافی است ثابت کنیم: $R = R^{-1}$

مسألهٔ ۵ ـ هرگاه R_1 و R_2 رابطه‌هایی روی A باشند و هر دو دارای خاصیت تقارنی باشند ثابت کنید:

$(R_1 \cap R_2)$، $(R_1 - R_2)$ و $(R_1 \cup R_2)$ نیز متقارن هستند.
کافی است ثابت کنیم ← $(R_1 \cap R_2)^{-1} = (R_1 \cap R_2)$
و $(R_1 \cup R_2)^{-1} = (R_1 \cup R_2)$ و $(R_1 - R_2)^{-1} = (R_1 - R_2)$
چون R_1 و R_2 متقارن هستند، پس طبق قضّیهٔ قبل $R_1 = R_1^{-1}$ و $R_2 = R_2^{-1}$ بنابراین داریم:

$$(R_1 \cup R_2)^{-1} = (R_1^{-1} \cup R_2^{-1}) = (R_1 \cup R_2) \text{(طبق مسألهٔ ۳)}$$

$$(R_1 \cap R_2)^{-1} = (R_1^{-1} \cap R_2^{-1}) = (R_1 \cap R_2)$$

$$(R_1 - R_2)^{-1} = (R_1^{-1} - R_2^{-1}) = (R_1 - R_2) \text{(طبق مسألهٔ ۴)}$$

مسألهٔ ۶ ـ رابطهٔ R روی IR^2 تعریف شده آیا این رابطه متقارن است؟

$$\forall (x,y)\ ,\ (z,t) \in IR^2 ،\ (x,y)\ R\ (z,t) \Leftrightarrow x^2 + t^2 = y^2 + z^2$$

حل ـ با توجه به اینکه رابطه روی IR^2 تعریف شده واضح است که $R \subset IR^2 \times IR^2$ (به مثال ۲ مراجعه کنید) و نظیر آنچه در قبل گفتیم عمل می‌کنیم، یعنی؛ به صورت دلخواه زوج مرتبی از رابطه فرض کرده و ثابت می‌کنیم وارون آن زوج نیز در رابطه موجود است یعنی:

جابه‌جایی عمل جمع

$[(x,y)R(z,t) \Longrightarrow (x^2 + t^2 = y^2 + z^2) \Longrightarrow$:فرض کنیم

رابطهٔ Rمتقارن است $\Rightarrow [(z,t)\ R\ (x,y)] \Longleftarrow (z^2+y^2=t^2+x^2)$

توجه‌دارید که، $(x,y)\ R\ (z,t)$ معادل‌است بااینکه $((x,y),(z,t))\in R$ و $(z,t)\ R\ (x,y)$ معادل است با اینکه $((z,t)\ ,\ (x,y))\ \in R$.

مسأله ۷ ـ ثابت کنید، هرگاه R رابطه‌ای دلخواه روی A باشد در این‌صورت $(R \cup R^{-1})$ متقارن است.

حل ـ با توجه به قضیهٔ قبل اگر $R = R^{-1}$ آنگاه R متقارن است

بنابراین، کافی است نشان دهیم، $(R \cup R^{-1})^{-1} = (R \cup R^{-1})$

$$(R \cup R^{-1})^{-1} = (R^{-1} \cup R) = (R \cup R^{-1})$$

توجه دارید که از تساوی $(R^{-1})^{-1} = R$ استفاده کرده‌ایم.

تمرین: ثابت کنید، اگر R رابطه‌ای دلخواه روی مجموعهٔ A باشد، در این صورت $(R \cap R^{-1})$ متقارن است.

مسألهٔ ۸ ـ ثابت کنید، رابطهٔ مُمتنع (رابطهٔ تهی) متقارن است.

حل ـ (برهان خلف)، فرض کنیم رابطهٔ تهی متقارن نباشد، پس طبق تعریف می‌بایست (x,y) ای در رابطهٔ تهی باشد ولی (y,x) در آن نباشد و این ممکن نیست، زیرا تهی عضوی ندارد. پس رابطهٔ تهی متقارن است.

۳ـ خاصیت تراگذری یا ترایایی یا تعدی

فرض‌کنیم رابطهٔ R روی مجموعهٔ A تعریف شده باشد، حال اگر با فرض $(x,y) \in R$ و $(y,z) \in R$ ، بتوانیم‌ثابت‌کنیم، $(x,z)\in R$ ، در این صورت می‌گوییم: R خاصیت تعدی دارد یا رابطه‌ای متعدی است. به بیان ریاضی می‌توان نوشت:

رابطهٔ R خاصیت‌تعدی‌دارد $\Longleftrightarrow \forall x,y,z\in A,[xRy \wedge yRz]\Rightarrow xRz$

تذکر: همان‌طور که در تعریف خاصیت تعدی مشخص است، اثبات برقراری این خاصیت برای رابطه‌ای چون R ، مستلزم آن است که درستی گزارهٔ شرطیِ ذکر شده در تعریف، اثبات شود و می‌دانید گزاره شرطی $(p \Rightarrow q)$ در ۳ حالت درست و فقط در حالتی که مقدم درست و تالی نادرست باشد، ارزش نادرست دارد. بنابراین، اگر مقدمِ گزارهٔ شرطیِ مزبور که ترکیبی عطفی از دو گزارهٔ xRy و yRz است، نادرست باشد در کلّ گزارهٔ شرطی ارزش درست داشته و در اصطلاح می‌گوییم: به انتفای مقدم گزاره درست بوده و رابطه متعدی است.

مثال ۱۵ ـ مجموعهٔ $A = \{۲,۵,۶,۷\}$ مفروض است. در این صورت:

الف) $R_1 = \{(۲,۵), (۵,۲)\ ,\ (۲,۲)\}$

R_1 متعدی نیست زیرا:

۵R۲ ∧ ۲R۵ ولی ۵R۵

ب) $R_2 = \{(۲,۶)\}$

R_2 متعدی است زیرا گزارهٔ شرطی زیر به انتفای مقدم درست است:

$$(۲R۶ \wedge ۶Rx) \Rightarrow ۲Rx \qquad (x\in A)$$
$$\quad T \qquad\quad F$$

ج) $R_3 = \{(۲,۵),(۵,۶),(۲,۶),(۶,۲),(۲,۲)\}$

رابطهٔ R_3 متعدی نیست، زیرا:

$(۵,۶) \in R \wedge (۶,۲) \in R$ ولی $(۵,۲) \notin R$

د) $R_4 = \{(۲,۲)\ ,\ (۵,۵)\ ,\ (۶,۶)\ ,\ (۷,۷)\}$

رابطهٔ R_4 خاصیت تعدی دارد (به انتفای مقدم).

مثال ۱۶ ـ رابطهٔ «کوچکتر یا مساوی» روی مجموعهٔ اعداد حقیقی متعدی است زیرا، با فرض $a \leq b$ و $b \leq c$ می‌توان نتیجه گرفت $a\leq c$.

مثال ۱۷ ـ رابطهٔ بخش‌پذیری روی Z متعدی است زیرا، اگر فرض کنیم a بر $b \neq 0$ بخش‌پذیر و b نیز بر $c \neq 0$ بخش‌پذیر باشد، داریم:

$$a = bq_1 \text{ و } b = cq_2 \Longrightarrow a = (cq_2)q_1$$
$$\Longrightarrow a = c(q_2q_1) \Longrightarrow a = cq_3$$

یعنی نتیجه گرفتیم a بر $c \neq 0$ بخش‌پذیر است.

نکته: همان‌طور که مشاهده کردید، برای اثبات خاصیت تعدیِ رابطهٔ R می‌بایست با فرض xRy و yRz ثابت کنیم xRz.

مثال ۱۸ ـ رابطهٔ R را روی Z به شکل زیر تعریف می‌کنیم. ثابت کنید، رابطهٔ R متعدی است.

$$\forall x,y \in Z \text{ ، } xRy \Longleftrightarrow x - y = 4k \ (k \in Z)$$

فرض کنیم: $xRy \wedge yRz \Rightarrow x - y = 3k_1 \wedge y - z = 3k_2$

$$\xRightarrow{\text{جمع طرفین}} (x - y) + (y - z) = 3\underbrace{(k_1 + k_2)}_{k_3}$$
$$\Longrightarrow x - z = 3k_3 \Longrightarrow xRz$$

مسألهٔ ۹ ـ رابطهٔ R روی IR^2 به‌صورت زیر تعریف شده. ثابت کنید این رابطه خاصیت تراگذری (تعدی) دارد.

$$\forall (x,y)\ ,\ (z,t) \in IR^2 \text{ ، } (x,y)\ R\ (z,t) \Leftrightarrow x^2 + t^2 = y^2 + z^2$$

حل:

فرض کنیم $(x,y)\ R\ (z,t) \wedge (z,t)\ R\ (u,v)$
$$\Rightarrow x^2 + t^2 = y^2 + z^2 \wedge z^2 + v^2 = t^2 + u^2$$

$$\Rightarrow x^2 + \cancel{y^2} + \cancel{z^2} + v^2 = y^2 + \cancel{z^2} + \cancel{t^2} + u^2$$
$$\Rightarrow x^2 + v^2 = y^2 + u^2 \Rightarrow (x,y)\ R\ (u,v)$$

مسألهٔ ۱۰ ـ هرگاه R_1 و R_2 رابطه‌هایی روی مجموعهٔ A بوده و هر دو دارای خاصیت تعدی باشند، ثابت کنید: $(R_1 \cap R_2)$ نیز متعدی است. آیا $(R_1 \cup R_2)$ نیز متعدی است؟

حل:

فرض کنیم: $(x,y) \in (R_1 \cap R_2) \wedge (y,z) \in (R_1 \cap R_2)$

$$\xRightarrow{\text{تعریف اشتراک}} \left.\begin{array}{l} (x,y)\in R_1 \wedge (y,z)\in R_1 \xRightarrow{R_1 \text{ متعدی}} (x,z)\in R_1 \\ (x,y)\in R_2 \wedge (y,z)\in R_2 \xRightarrow{R_2 \text{ متعدی}} (x,z)\in R_2 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{تعریف اشتراک}}$$
$$(x,z) \in (R_1 \cap R_2)$$

در مورد $(R_1 \cup R_2)$ حکم بالا در حالت کلّی برقرار نیست که می‌توان این موضوع را با یک مثال نمایش داد. اگر فرض کنیم:

$$A = \{2,4\}$$

و $R_1 = \{(2,4)\}$ و $R_2 = \{(4,2)\}$. واضح است که R_1 و R_2 هر دو بنابر انتفای مقدم متعدی هستند ولی $(R_1 \cup R_2) = \{(2,4), (4,2)\}$ متعدی نیست زیرا، $(2,2) \notin (R_1 \cup R_2)$.

* * *

تذکّر مهم: اگر رابطهٔ R روی مجموعهٔ A، تک عضوی باشد از طریق برهان خلف نیز می‌توان ثابت کرد که رابطهٔ R خاصیت تعدی دارد: فرض کنیم $R = \{(a,b)\}$. فرض کنیم R خاصیتِ تعدی نداشته باشد (فرض خلف) بنابراین طبق تعریفِ خاصیتِ تعدی و با توجه به اینکه $(a,b) \in R$ باید $(b,x) \in R$ ای $(x \in A)$ باشد به قسمی که $(a,x) \notin R$ و وجودِ (b,x) در R یک تناقض است، زیرا فقط $(a,b) \in R$ بنابراین، فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

در انتها و با تشکر از اینکه با حوصله تا آخر مقاله پیش آمدید، لازم می‌دانم که بحثِ راجع به رابطه‌های هم‌ارزی و کلاسهای هم‌ارزی را به علت حجم زیاد آن به شمارهٔ بعدیِ مجله موکول کنم، إن‌شاءا... مفید واقع شده باشد.

تاریخچهٔ مجلات ریاضی در ایران (۱۱)

بررسی مجلهٔ ریاضی یکان را در این شماره نیز ادامه می‌دهیم:

در مقالهٔ **چگونگی معرفی و انتخاب نامزدهای دریافت جایزهٔ نوبل**[1] چنین آمده است:

بنابر اساس‌نامه‌ای که برای مؤسسهٔ نوبل تنظیم شده است، چهار هیأت برای اعطای جوایز پنج‌گانهٔ نوبل فعالیت می‌کنند: آکادمی سلطنتی علوم (برای جوایز فیزیک و شیمی) ـ مؤسسهٔ طبی سلطنتی کارولین (برای جایزهٔ طب و فیزیولوژی) ـ آکادمی سلطنتی سوئد (برای جایزهٔ ادبیات) ـ کمیتهٔ وابسته به پارلمان نروژ (برای جایزهٔ صلح). علاوه بر آن پنج کمیته وجود دارد که هر یک برای توزیع یکی از جوایز فعالیت می‌کند.

هیأتهای فوق‌الذکر، هر ساله دربارهٔ برندگان جوایز تصمیم می‌گیرند. نامزدی برندگان جوایز باید تا قبل از اوّل فوریهٔ هر سال به این هیأتها ابلاغ شود. اشخاص یا مؤسسه‌های واجد شرایط خاص می‌توانند کاندیداها را به هیأتهای مزبور معرفی کنند.

کمیته‌های پنج‌گانهٔ نوبل، هر یک سه تا پنج عضو دارد که توسط هیأت مربوطه تعیین می‌شوند (انتخاب اعضای کمیتهٔ صلح به عهدهٔ پارلمان نروژ است). وظیفهٔ کمیته‌ها، مقدماتی و مشورتی است و هر یک از کمیته‌ها می‌توانند متخصصینی از ملیتهای مختلف را برای شور و مذاکره دعوت کنند.

اشخاص یا مؤسسه‌هایی که می‌توانند معرف نامزدهای جوایز باشند، عبارتند از: برندگان سابق جوایز نوبل (در رشته‌ای که برای آن جایزه گرفته‌اند) ـ اعضای هیأتها و کمیته‌های جوایز (در رشتهٔ مربوط) ـ استادان برجستهٔ دانشگاهها ـ اشخاصی که توسط اعطاکنندگان جوایز انتخاب می‌شوند ـ رئیس بنگاه مخصوص چاپ آثار کاندیداها (برای جایزهٔ ادبیات) ـ اعضای تازه‌ای از سازمانهای پارلمانی یا حقوقی بین‌المللی (برای جایزهٔ صلح) ـ اعضای پارلمانها و کابینه‌ها (برای جایزهٔ صلح).

در اول فوریهٔ هر سال کمیته‌ها در پشت درهای بسته مشغول مطالعهٔ دقیق پیشنهادهای رسیده می‌شوند و تا پایان کار خود و اخذ تصمیم نهایی، فعالیتها و نظریات خود را مسکوت می‌گذارند و در پایان، به طور مختصر علت و حقانیت انتخاب خود را اعلام می‌دارند (مگر در مورد برندهٔ جایزهٔ صلح).

هر یک از جوایز نوبل ممکن است به یک نفر یا مشترکاً به چند نفر (با ملیتهای مختلف) اعطا گردد.

جوایز پنج‌گانه همه ساله طی مراسم باشکوهی در تاریخ دهم دسامبر در استکهلم برگزار می‌شود. برندگان جوایز حتی‌المقدور به استکهلم می‌روند و مدال و دیپلم و مبلغ جایزه را شخصاً از دست پادشاه سوئد دریافت می‌دارند. در مراسم مزبور هر یک از برندگان سخنرانیهایی ایراد می‌نمایند.

بعضی برندگان ممکن است از دریافت جایزه خودداری کنند و یا اینکه در شرایطی باشند که نتوانند آن را دریافت نمایند. در این مورد مبلغ جایزه تا اول اکتبر سال بعد

نگاهداری می‌شود و بعد از آن به حساب صرفه‌جوییهای مؤسسهٔ نوبل منظور شده موجب افزایش مبلغ جوایز سالهای بعد می‌شود.

در مقالهٔ امیر مقتدر چندین معما به صورت داستان آمده است. یکی از معماها با نام **پیش‌بینی روز اعدام**[۲] به صورت زیر است:

عبدالکاظم قرصی نان دزدیده بود، و به خاطر همین، وزیر وی را به اعدام محکوم کرده بود.

از دیر زمانی، وزیر می‌کوشید که عبدالکاظم را از راه خود بردارد و حالا این بهانهٔ کوچک را غنیمت شمرده بود. اما یک موضوع اسباب تأسف وزیر بود: طبق قانون، هر محکوم در آخرین مرحله، و فقط در همان روز اجرای حکم، حق داشت که از حضور امیر تقاضای استیناف بنماید. اعتقاد به اینکه **امیرابن الخوض** حکم را فسخ خواهد کرد، وزیر را واداشت که نقشهٔ ماهرانه‌ای طرح کند؛ وی در حضور عبدالکاظم تعلیمات لازم را به نگهبان داد. بنابه این تعلیمات، هفتهٔ اجرای حکم، صراحتاً معلوم شده بود، اما نگهبان ملزم بود که روز اعدام را بر عبدالکاظم فاش نکند.

وزیر، باز هم در حضور عبدالکاظم، به نگهبان گفت:

برای انتخاب روز اعدام، شخصاً تصمیم خواهید گرفت، مشروط بر آنکه، وی نتواند آن را پیش‌بینی کند، باید که کاملاً غافلگیر شود. هر روز صبح، شخصاً صبحانه عبدالکاظم را برایش می‌برید. چنانچه، در روزی که برای اعدام در نظر گرفته‌اید، هنگام صبحانه، به شما اظهار داشت و با دلایلی منطقی ثابت کرد که در آن روز هلاک می‌شود، آن وقت، موظف خواهید بود که اجازه دهید، وی از حضور امیر تمنای مرحمت بنماید. اما، اگر وی آن فراست را نداشت که به هنگام صبحانهٔ روز مورد نظر، از اعدام خود در آن روز، خبر دهد، حق استیناف را از دست می‌دهد و بعد از ظهر آن روز، اعدامش می‌کنید.

وزیر از آنجا رفت و عبدالکاظم و نگهبان را با افکار خود تنها گذاشت. هر کدام فکر خود را به کار انداخته بود و می‌کوشید هوش خود را بیازماید تا دریابد احتمال وقوع امر در کدام روز از آن هفته بیشتر است. برای نگهبان، مسئله بغرنجتر بود چون می‌بایست قبلاً روز اعدام را تعیین کرده و مقدمات کار را فراهم کند.

حقیقت از این قرار بود که وزیر خواسته بود با پیش آوردن یک چنین شرط شوم و شگفت‌آور، عبدالکاظم را از حق استیناف محروم سازد.

امیرزادهٔ جوان از این امر خلاف اخلاق آگاه شد و پدر را از آن باخبر کرد.

امیر نگهبان را احضار کرده و به وی گفت:

شنیده‌ام که وزیر، عبدالکاظم را محکوم به اعدام کرده است و حکم را به نحوی تنظیم نموده است که امکان درخواست استیناف را از عبدالکاظم سلب می‌کند. آیا حقیقت دارد؟

نگهبان جواب داد:

صحیح است، ای امیر بزرگ، اما استدعا می‌کنم که باور بفرمایید، من مداخله‌ای نداشته‌ام، من شخصاً نسبت به عبدالکاظم کمال تأثر را دارم و چنانچه مفید به حال وی باشم، بی‌اندازه خوشحال خواهم بود، اما چه کنم که از من چاره‌ای برنمی‌آید.

امیر گفت:

باشد، اینطور می‌فهمم که تو، خیلی درس خوانده‌ای.

زیاد نه، ای امیر، تحصیلات معمولی را گذرانده‌ام، موقعی که محصل بودم، منطق را خیلی دوست می‌داشتم و هنوز هم مایلم که دنبال تحصیل آن را بگیرم.

کاملاً مهم است، آیا اصل استدلال استقرایی را بلد هستی؟

بلی، ای امیر.

فعلاً این موضوع را کنار بگذاریم، و به کار عبدالکاظم بیچاره بپردازیم. آیا تاکنون دربارهٔ تعیین روز اعدام، تصمیم گرفته‌ای؟

هنوز نه، در فکر آن هستم.

آنچه معلوم است و من فهمیدم، تو باید او را در روزی از آن هفتهٔ معین، که با شنبه شروع می‌شود و به جمعه پایان می‌یابد، اعدام کنی. خواهش من آن است که، چنانچه ممکن است، جمعه را برای این کار انتخاب کنی؟

نگهبان بعد از کمی فکر، با قطعیت جواب داد:

نه، مقدورم نیست، شما می‌دانید که عبدالکاظم خیلی باهوش است. او همهٔ شرایط قید شده در حکم را می‌داند و از

این جهت وقتی که تا صبح جمعه زنده باشد، هنگام بردن صبحانه، به من خواهد گفت: «نگهبان ، می‌دانم که تصمیم داری امروز مرا اعدام کنی، برای آنکه، امروز آخرین روزی است که می‌توانی حکم را اجرا کنی.»

نگهبان ادامه داد ؛ و این عین واقع خواهد بود، وقتی که پنج شنبه گذشت و او هنوز زنده بود ، جمعه آخرین روزی است که می‌توانم وی را اعدام کنم، و وقوع اعدام در آن روز واضح خواهد بود، و او استیناف خواهد خواست.

امیراندیشمند گفت :

به این امر به خوبی واقفم که تو و او هر دو می‌دانید که بنابر مدلول حکم، وقوع اعدام در روز جمعه غیرممکن است.

همین‌طور است. من فقط می‌توانم عبدالکاظم را در یکی از روزهای از شنبه تا پنج‌شنبه اعدام کنم، جمعه مستثنی است.

بنابراین هم تو و هم عبدالکاظم ، جمعه را کنار گذاشته‌اید و تو بجز در یکی از روزهای شنبه تا پنج‌شنبه، نمی‌توانی او را اعدام بنمایی. پنج‌شنبه آخرین روز ممکن است، اگر، میسر است، پنج‌شنبه را برای اجرای حکم انتخاب کن؟

نگهبان ، بعد از مدتی فکر جواب داد :

محققاً نه ، عبدالکاظم و من، هر دو می‌دانیم که پنج‌شنبه آخرین‌روزممکن‌برای انجام اعدام می‌باشد. بنابراین چنانچه، تا صبح پنج‌شنبه ، عبدالکاظم زنده مانده باشد، در آن صبح، وقتی که نزدش برسم، برایم توضیح خواهد داد که در آن روز کشته می‌شود.

لابد خواهی گفت: عبدالکاظم را نمی‌توانی اعدام کنی مگر در یکی از روزهای شنبه تا چهارشنبه ، و او هم این را می‌داند.

کاملاً همین‌طور است.

اگر چنین است و چهارشنبه آخرین روزی می‌تواند باشد که عبدالکاظم باید اعدام شود، آیا نمی‌توانیم به همان ترتیب ثابت کنیم که، چهارشنبه را هم باید کنار بگذاریم؟

نگهبان ، در کمال بهت و تعجب گفت:

کاملاً صحیح است، و این موضوع ما را دلالت می‌کند براینکه سه‌شنبه آخرین روز ممکن می‌باشد، و سه‌شنبه‌هم باید از دور حذف شود و به دنبال آن، روزهای دیگر هفته نیز حذف خواهد شد و بنابراین اجرای اعدام غیرممکن می‌باشد.

«این نوعی مورد استفادهٔ مستقیم از اصل استدلال ترجیعی (استقراء ریاضی) است ؛ ما ثابت کرده‌ایم که آخرین روز ممکن برای اجرای حکم، خودبه خود ، غیرممکن می‌باشد.»

امیر خنده‌کنان گفت :

بلی، این امر به ما کمک می‌کند که ثابت کنیم که اجرای اعدام غیرممکن است، و این مشیتی است که این چنین خواسته است. خوشبختانه تو و عبدالکاظم یکی از دیگری باهوشترید. چنانچه یکی از شما دو نفر فهم قضیه را نداشت، کار به این آسانی پیش نمی‌رفت.

* * *

۱ . یکان سال ، فروردین ۱۳۴۴.

۲ . مرجع پیشین.

ادب ریاضی

قضاوت گاوس در مورد رسالهٔ دکتری ددکیند که در بیست و یک سالگی راجع به انتگرالهای اویلر به سال ۱۸۵۲ میلادی نوشته است:

«اثری که به وسیلهٔ آقای ددکیند عرضه شده است تجسسی دربارهٔ حساب انتگرالها می‌باشد که به هیچ وجه موضوع عادی و پیش‌پا افتاده‌ای نیست. منصف مزبور نه فقط نشان می‌دهد که اطلاعات بسیار در موضوع مورد بحث دارد بلکه نشانه‌هایی از فکر مستقل در اثر او دیده می‌شود که برای تجسسهای آیندهٔ وی نویدهای درخشان می‌دهد. من این اثر را برای پذیرفته شدن در امتحان کاملاً رضایتبخش می‌یابم.»

ریاضی‌دانان نامی، اریک تمپل بل

حسن صفاری

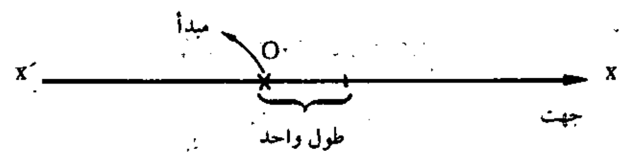
دستگاه، محورهای مختصات

فصل سوم از کتاب: ریاضیات (۲ و ۱) نظام جدید قسمت دوّم

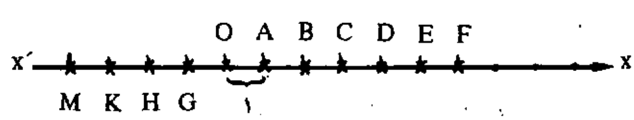
◆ احمد قندهاری

۱ـ۱ تعریف محور

خطّی است جهت‌دار که در روی آن نقطه‌ای به‌نام مبدأ و طولی به‌نام واحد اندازه‌گیری در نظر گرفته شده باشد.
پس یک محور، سه مشخصه دارد:
۱ـ جهت، ۲ـ نقطه‌ای به‌نام مبدأ، ۳ـ طولی به‌نام واحد.



محور زیر را با نقاط روی آن در نظر می‌گیریم.



با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$\overline{OA} = +۱$ $\overline{OF} = +۶$

$\overline{OB} = +۲$ $\overline{OG} = -۱$

$\overline{OC} = +۳$ $\overline{OH} = -۲$

$\overline{OD} = +۴$ $\overline{OK} = -۳$

$\overline{OE} = +۵$ $\overline{OM} = -۴$

بنا به تعریف $\overline{OA}$ را x_A، $\overline{OB}$ را x_B، $\overline{OC}$ را x_c و...

می‌نامیم. پس:

$x_A = +۱$ $x_F = +۶$

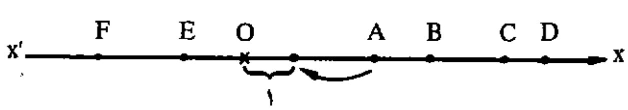
$x_B = +۲$ $x_G = -۱$

$x_C = +۳$ $x_H = -۲$

$x_D = +۴$ $x_K = -۳$

$x_E = +۵$ $x_M = -۴$

توجه: محورهای فوق را $x'ox$ می‌نامیم.
محور زیر را در نظر می‌گیریم.



می‌توان نوشت:

$\overline{OA} = x_A$ $\overline{OD} = x_D$

$\overline{OB} = x_B$ $\overline{OE} = x_E$

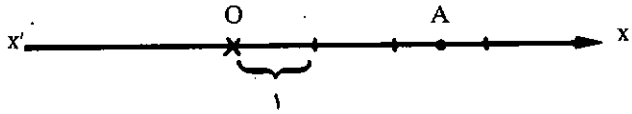
$\overline{OC} = x_C$ $\overline{OF} = x_F$

پس هر نقطه که روی محور $x'ox$ واقع باشد دارای (x) ای است. این x را در اصطلاح طول نقطه گوییم.

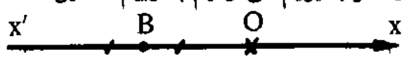
بنابراین؛ هر نقطه که روی محور $(x'ox)$ باشد، دارای طول است که این طول یک عدد حقیقی است. و برعکس هر عدد حقیقی می‌تواند یک نقطه را روی محور نشان دهد که طول آن نقطه برابر همان عدد حقیقی است.

مثلاً روی محور

$x_A = +۲/۵$



و اگر عدد $(-\frac{۳}{۲})$ را در نظر بگیریم می‌توانیم بگوییم که این عدد نقطه‌ای مانند B را روی

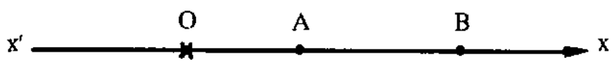


مشخص می‌کند.

۲ـ ۱ اندازهٔ جبری پاره‌خط AB [1]

اندازهٔ جبری پاره‌خط AB را با نماد $\overline{AB}$ نشان می‌دهیم و طول پاره‌خط AB را با AB نشان می‌دهیم یعنی: $|\overline{AB}| = AB$.

فرض می‌کنیم دو نقطهٔ A و B روی محور (x'ox) شکل زیر داشته باشیم.



می‌توانیم بنویسیم:

$$\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$$

$$\Rightarrow x_A + \overline{AB} = x_B$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{AB} = x_B - x_A}$$

مثال: اگر $x_A = ۲$ و $x_B = ۵$ باشد، اندازهٔ جبری $\overline{AB}$ را بیابید.

$$\overline{AB} = x_B - x_A$$

$$\overline{AB} = ۵ - ۲$$

$$\boxed{\overline{AB} = +۳}$$

مثال: اگر $\overline{AB} = ۵$ و $x_B = ۷$ ، طول نقطهٔ A رابیابید.

$$\overline{AB} = x_B - x_A$$

$$۵ = ۷ - x_A \Rightarrow +x_A = ۷ - ۵ \Rightarrow \boxed{x_A = ۲}$$

۳ـ ۱ طول نقطهٔ C وسط AB

فرض می‌کنیم نقطهٔ C وسط AB روی محور

باشد داریم: $\overline{AC} = \overline{CB}$.

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} \\ \overline{OC} = \overline{OB} - \overline{CB} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} ۲\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB}$$

$$\Rightarrow \overline{OC} = \frac{\overline{OA} + \overline{OB}}{۲} \Rightarrow \boxed{x_c = \frac{x_A + x_B}{۲}}$$

مثال: اگر $x_A = ۵$ و $x_B = -۷$ ، آنگاه طول نقطه C وسط AB چقدر است؟

$$x_c = \frac{x_A + x_B}{۲} \Rightarrow x_c = \frac{۵-۷}{۲} \Rightarrow \boxed{x_c = -۱}$$

مسأله: اگر نقطهٔ C وسط AB باشد و داشته باشیم $x_C = ۴$ و $\overline{AB} = ۱۰$، x_A و x_B را بیابید.

حل:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{۲} \Rightarrow ۴ = \frac{x_A + x_B}{۲} \Rightarrow \boxed{x_A + x_B = ۸}$$

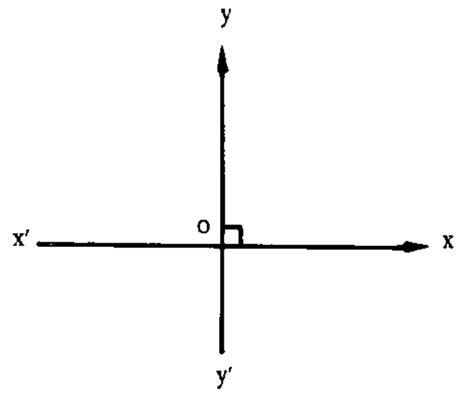
$$\overline{AB} = x_B - x_A \Rightarrow ۱۰ = x_B - x_A \Rightarrow \boxed{x_B - x_A = ۱۰}$$

$$\begin{cases} x_A + x_B = ۸ \\ x_B - x_A = ۱۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} ۲x_B = ۱۸ \Rightarrow \boxed{x_B = ۹}$$

$$x_A + x_B = ۸ \Rightarrow x_A + ۹ = ۸ \Rightarrow \boxed{x_A = -۱}$$

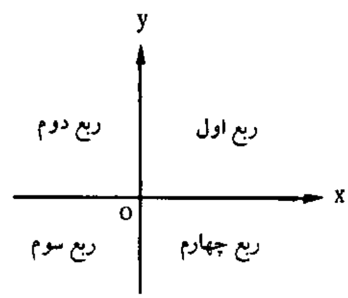
۴ـ ۱ صفحه محورهای مختصّات:

هرگاه دو محور x'ox و y'oy در نقطهٔ O بر یکدیگر عمود باشند، آنها را محورهای مختصات یا صفحه محورهای مختصات گوییم. معمولاً محور x'ox را افقی (موازی سطرهای همین مجله برهان) رسم می‌کنیم.



محور $x'ox$ را محور xها یا محور طولها و محور $y'oy$ را محور yها یا محور عرضها گوییم. این دو محور را به صورت (xoy) نشان می‌دهیم.

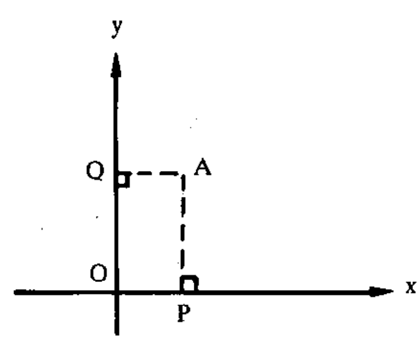
این دو محور صفحهٔ کتاب یا دفتر را به چهار ناحیه یا چهار ربع تقسیم می‌کند که به ربع اوّل، ربع دوم، ربع سوم و ربع چهارم معروف است.



هر نقطه که در صفحهٔ محورهای مختصات واقع باشد، دارای طول و عرض است. و برعکس هر نقطه که دارای طول و عرض باشد، یک نقطه از صفحه محورهای مختصات را مشخّص می‌کند. اگر نقطه‌ای، مانند: A در صفحهٔ محورها داشته باشیم. چنانچه از نقطهٔ A عمودی برمحور xها رسم کنیم و پای عمود را P بنامیم داریم:

$\overline{OP} = x_A$ (شکل زیر)

و اگر از نقطه A خطی بر محور yها عمود کنیم و پای عمود را Q بنامیم، داریم: $\overline{OQ} = y_A$ (شکل زیر)



طول و عرض نقطهٔ A را مختصات نقطه A گوییم. اگر طول A مساوی (۳) و عرض A مساوی (۲) باشد، می‌نویسیم:

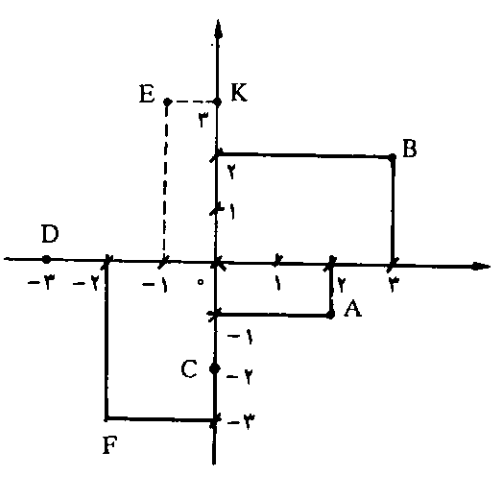
$$A=\begin{bmatrix}۳\\۲\end{bmatrix} \text{ یا } A(۳,۲) \text{ یا } A\left|\begin{matrix}۳\\۲\end{matrix}\right.$$

اگر $A\left|\begin{matrix}۳\\۲\end{matrix}\right.$ باشد و بخواهیم جای نقطهٔ A را در صفحه محورهای مختصات مشخص کنیم، باید در روی محور x ها (۳) واحد مثبت جدا کنیم و در روی محور y ها (۲) واحد مثبت جدا کنیم، از این نقاط خطوطی عمود بر محورها رسم کنیم، نقطهٔ برخورد این دو عمود، نقطهٔ A را نشان می‌دهد.

توجه: هر نقطه که روی محور x ها باشد، عرض آن صفر است مانند: $A\left|\begin{matrix}۲\\۰\end{matrix}\right.$

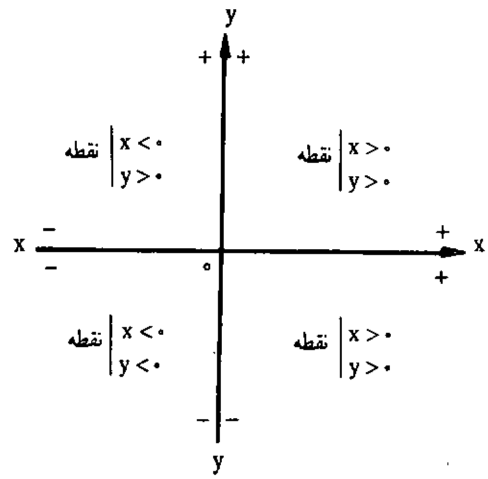
و هر نقطه که روی محور y ها باشد، طول آن صفر است مانند: $B\left|\begin{matrix}۰\\۳\end{matrix}\right.$

مثال: جای نقاط $A\left|\begin{matrix}۲\\-۱\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}۳\\۲\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}۰\\-۲\end{matrix}\right.$ و $D\left|\begin{matrix}-۳\\۰\end{matrix}\right.$ و $E\left|\begin{matrix}-۱\\۳\end{matrix}\right.$ و $F\left|\begin{matrix}-۲\\-۳\end{matrix}\right.$ و $K\left|\begin{matrix}۰\\۳\end{matrix}\right.$ را در صفحه محورهای مختصات مشخص کنید.

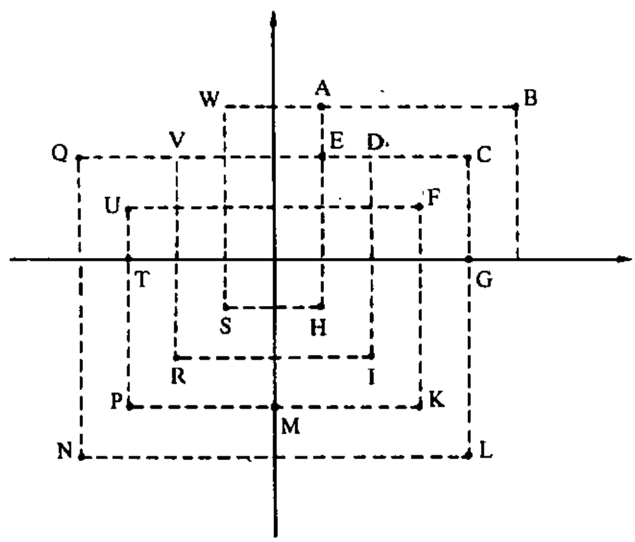


به دستگاه مختصات زیر توجه کنید.

مثبت و منفی بودن مختصات یک نقطه در چهار ربع مشخص است.



تمرین: مختصات نقاط شکل زیر را بنویسید:



مسأله: نقطهٔ $A\left|\begin{matrix} ۲m-۶ \\ m-۲ \end{matrix}\right.$ مفروض است. m را چنان بیابید تا

اولاً: نقطهٔ A روی محور x ها باشد.

ثانیاً: نقطهٔ A روی محور y ها باشد.

ثالثاً: نقطهٔ A در ربع اوّل باشد.

رابعاً: نقطهٔ A در ربع دوّم باشد.

خامساً: نقطهٔ A در ربع سوّم باشد.

سادساً: نقطهٔ A در ربع چهارم باشد.

اوّلاً: $y_A = ۰ \Rightarrow m - ۲ = ۰ \Rightarrow m = ۲$

ثانیاً: $x_A = ۰ \Rightarrow ۲m - ۶ = ۰ \Rightarrow m = ۳$

ثالثاً: $\begin{cases} x_A > ۰ \\ y_A > ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲m-۶>۰ \\ m-۲>۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m>۳ \\ m>۲ \end{cases} \Rightarrow m>۳$

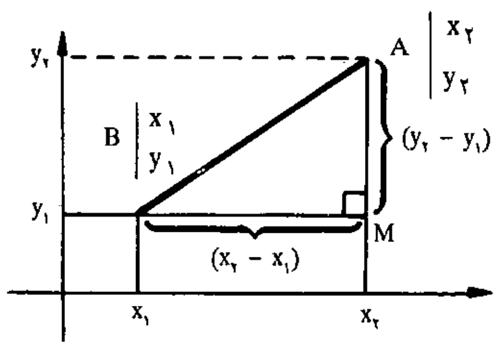
رابعاً: $\begin{cases} x_A < ۰ \\ y_A > ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲m-۶<۰ \\ m-۲>۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m<۳ \\ m>۲ \end{cases} \Rightarrow ۲<m<۳$

خامساً: $\begin{cases} x_A < ۰ \\ y_A < ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲m-۶<۰ \\ m-۲<۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m<۳ \\ m<۲ \end{cases} \Rightarrow m<۲$

سادساً: $\begin{cases} x_A > ۰ \\ y_A < ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲m-۶>۰ \\ m-۲<۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m>۳ \\ m<۲ \end{cases}$ غیرممکن

۵ـ۱ طول پاره‌خط AB

شکل مقابل را در نظر می‌گیریم:



در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{AMB}$ می‌توان نوشت:

$$AB^۲ = BM^۲ + AM^۲$$

$$AB = \sqrt{BM^۲ + AM^۲}$$

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}}$$

مثال: اگر $A\left|\begin{matrix} ۵ \\ ۱ \end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix} ۱ \\ -۲ \end{matrix}\right.$ باشد. مطلوب است تعیین طول پاره‌خط AB.

$A\left|\begin{matrix} ۵ = x_۲ \\ ۱ = y_۲ \end{matrix}\right. \quad B\left|\begin{matrix} ۱ = x_۱ \\ -۲ = y_۲ \end{matrix}\right.$

$$AB = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲} = \sqrt{(۵-۱)^۲ + (۱+۲)^۲}$$

$$= \sqrt{۱۶ + ۹} = \sqrt{۲۵} \Rightarrow AB = ۵$$

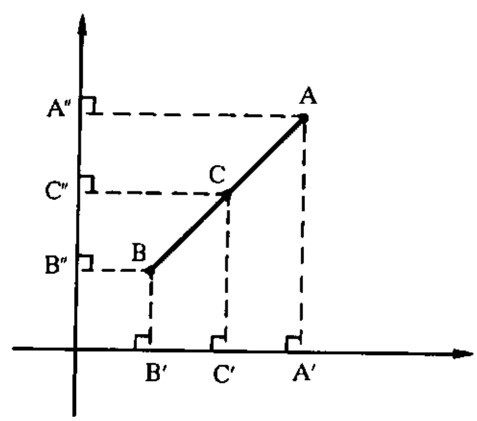
مثال: نقطهٔ A به طول (۶) روی محور xها و نقطهٔ B به عرض (۸) روی محور yها واقع است. طول پاره‌خط AB را بیابید.

$$A\left|\begin{matrix}۶=x_۲\\ ۰=y_۲\end{matrix}\right. \qquad B\left|\begin{matrix}۰=x_۱\\ ۸=y_۱\end{matrix}\right.$$

$$AB=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}=\sqrt{(۶-۰)^۲+(۰-۸)^۲}$$
$$=\sqrt{۳۶+۶۴}=\sqrt{۱۰۰}=۱۰$$

۶-۱ مختصات نقطهٔ C وسط پاره‌خط AB

شکل مقابل را در نظر می‌گیریم و نقطهٔ C وسط AB است.



چون نقطهٔ C وسط پاره‌خط AB است. بسادگی ثابت می‌شود که C′ وسط A′B′ و C″ وسط A″B″ است.

$$\Rightarrow x_{C'}=\frac{x_{A'}+x_{B'}}{۲}\Rightarrow \boxed{x_C=\frac{x_A+x_B}{۲}}$$

$$y_{C''}=\frac{y_{A''}+y_{A''}}{۲}\Rightarrow \boxed{y_C=\frac{y_A+y_B}{۲}}$$

مثال: اگر $A\left|\begin{matrix}۲\\ ۵\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}۴\\ ۳\end{matrix}\right.$ باشد، مختصات نقطهٔ C وسط AB را بیابید.

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{۲+۴}{۲}=۳$$
$$y_C=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{۵+۳}{۲}=۴ \qquad \Rightarrow C\left|\begin{matrix}۳\\ ۴\end{matrix}\right.$$

مثال: اگر $M\left|\begin{matrix}۱\\ ۴\end{matrix}\right.$ نقطهٔ وسط پاره‌خط KF باشد، به‌طوری‌که $K\left|\begin{matrix}۰\\ ۳\end{matrix}\right.$، آنگاه مختصات نقطهٔ F را بیابید.

$$x_M=\frac{x_K+x_F}{۲}\Rightarrow ۱=\frac{۰+x_F}{۲}\Rightarrow x_F=۲$$

$$y_M=\frac{y_K+y_F}{۲}\Rightarrow ۴=\frac{۳+y_F}{۲}\Rightarrow ۳+y_F=۸$$

$$\Rightarrow y_F=۵\Rightarrow F\left|\begin{matrix}۲\\ ۵\end{matrix}\right.$$

تمرین: نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}-۲m+۶\\ -m+۱\end{matrix}\right.$ در صفحهٔ محورهای مختصات xoy مفروض است. m را چنان بیابید که اوّلاً: نقطهٔ A به یک فاصله از دو محور باشد. ثانیاً: نقطهٔ A در ربع اوّل باشد. ثالثاً: نقطهٔ A در ربع دوّم باشد. رابعاً: نقطهٔ A در ربع سوم باشد. خامساً: نقطهٔ A در ربع چهارم باشد.

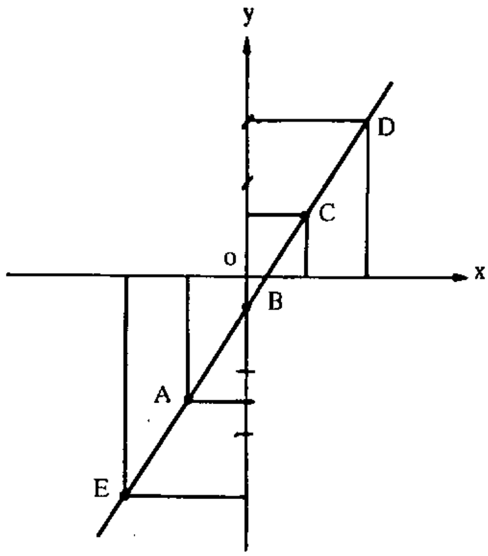
تمرین: نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}m^۲-۵m+۴\\ m^۲-۳m+۲\end{matrix}\right.$ در صفحهٔ محورهای مختصات مفروض است. m را چنان بیابید تا اوّلاً: نقطهٔ A روی محور xها باشد. ثانیاً: نقطهٔ A روی محور yها باشد. ثالثاً: نقطهٔ A روی مبدأ مختصات باشد. رابعاً: نقطهٔ A به یک فاصله از دو محور باشد.

۷-۱ معادلهٔ خط

هر رابطه درجهٔ اوّل بین x و y مانند: $y=۲x-۱$ و $y=x+۲$ و $۲x+۴y=۸$ را معادلهٔ خط گویند.

ممکن‌است معادلهٔ خط به‌صورت $y=mx+n$ یا $ax+by+c=۰$ باشد که m، n، a، b، c اعداد حقیقی‌اند (a و b و c با هم صفر نیستند). حال می‌خواهیم خط $y=۲x-۱$ را رسم کنیم. به x چند عدد دلخواه نسبت می‌دهیم و y آنها را پیدا می‌کنیم. زوج مرتبهایی به دست می‌آید که هر کدام مختصات یک نقطه متعلق به خط است. جای این نقاط را در صفحهٔ محورها مشخص می‌کنیم. سپس آنها را به هم وصل می‌کنیم.

x	y	(x,y)
۱−	۳−	(۳− و ۱−) : A
۰	۱−	(۱− و ۰) : B
۱	۱	(۱ و ۱) : C
۲	۳	(۳ و ۲) : D
۲−	۵−	(۵− و ۲−) : E



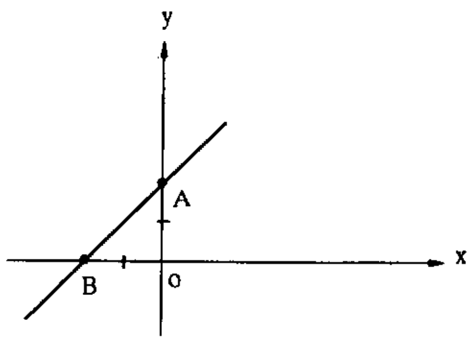
توجه:

برای رسم یک خط کافی است دو نقطه از آن را پیدا کنیم. سپس جای این دو نقطه را در صفحهٔ محورهای مختصات مشخص می‌کنیم و آنها را به هم وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم.

مثال: خط $y = x + ۲$ را رسم کنید.

$x = ۰ \Rightarrow y = ۲ \Rightarrow A(۲ \text{ و } ۰)$

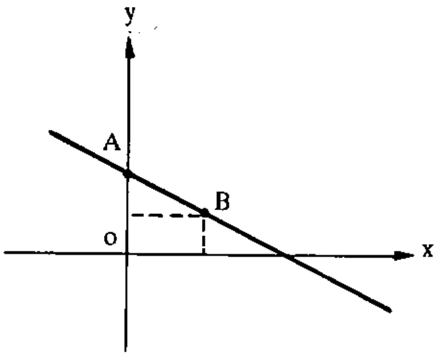
$x = -۲ \Rightarrow y = ۰ \Rightarrow B(-۲ \text{ و } ۰)$



مثال: خط $۲x + ۴y = ۸$ را رسم کنید.

$x = ۰ \Rightarrow y = ۲ \Rightarrow A(۰ \text{ و } ۲)$

$x = ۲ \Rightarrow y = ۱ \Rightarrow B(۲ \text{ و } ۱)$

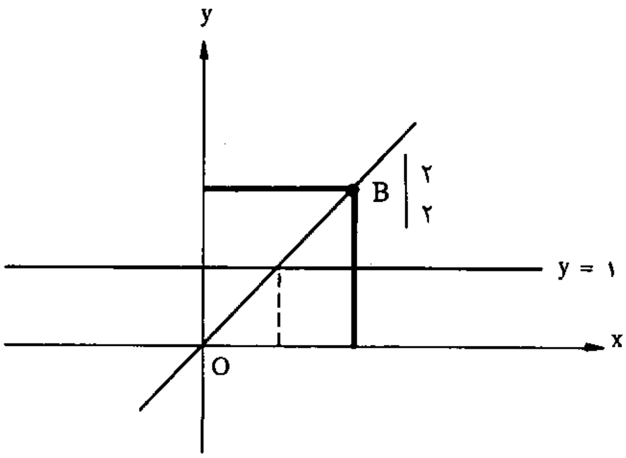


مثال: نمودار $xy - y^۲ - x + y = ۰$ را رسم کنید.

$$xy - y^۲ - x + y = ۰$$

$$y(x-y) - (x-y) = ۰$$

$$(x-y)(y-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = ۱ \end{cases} \text{ یا } \Rightarrow O \left| \begin{matrix} ۰ \\ ۰ \end{matrix} \right. \text{ و } B \left| \begin{matrix} ۲ \\ ۲ \end{matrix} \right.$$



۸ـ۱ شیب یک خط

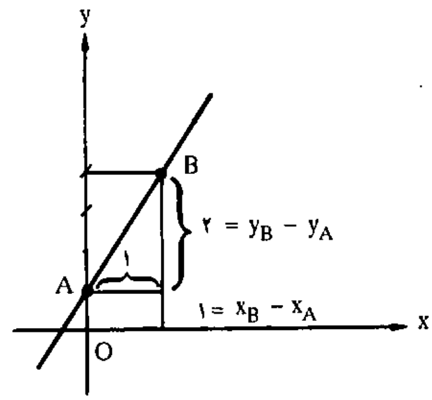
بنا به تعریف $\dfrac{\text{تفاضل عرضهای دو نقطه از خط}}{\text{تفاضل طولهای همان دو نقطه}}$ را شیب خط گوییم.

مثال: شیب خط $y = ۲x + ۱$ را بیابید:

$$x = ۰ \Rightarrow y = ۱ \Rightarrow A \left| \begin{matrix} ۰ \\ ۱ \end{matrix} \right.$$

$$x = ۱ \Rightarrow y = ۳ \Rightarrow B \left| \begin{matrix} ۱ \\ ۳ \end{matrix} \right.$$

$$\text{شیب خط} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۳ - ۱}{۱ - ۰} = \frac{۲}{۱} = ۲$$



تمرین: شیب خطهای زیر را بیابید:

$y = ۴x + ۱$

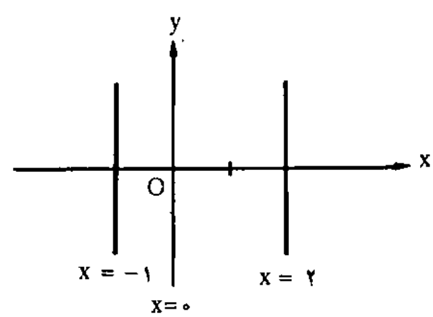
$y = \frac{۱}{۲}x - ۵$

$y = -x$

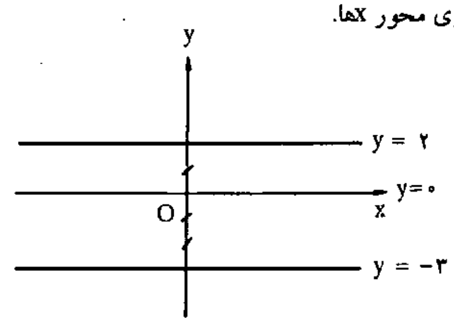
۹ـ۱ انواع خط

خط نوع اول: به‌صورت $x = a$ است مانند $x = ۲$ ، $x = ۰$ ، $x = -۱$. شیب این خطها تعریف نشده است و نمودار آنها راستایی است عمود بر محور xها.

مثال: خطهای $x = ۲$ و $x = ۰$ و $x = -۱$ را رسم کنید.



خط نوع دوم: به صورت $y = b$ است مانند: $y = ۲$ ، $y = ۰$ ، $y = -۳$. شیب این خطها صفر است ونمودار آنها راستایی است موازی محور xها.



مثال: خطهای $y = ۲$ و $y = ۰$ و $y = -۳$ را رسم کنید.

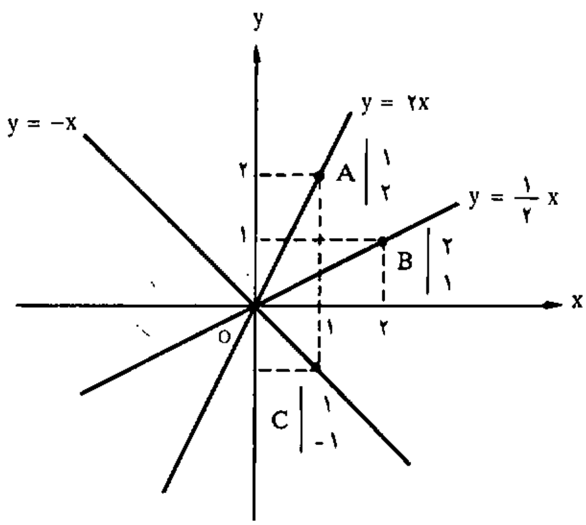
خط نوع سوم: به‌صورت $y = mx$ است، مانند: $y = ۲x$ و $y = -x$ و $y = \frac{۱}{۲}x$.

شیب این خطها عدد (m) است. برای رسم این خطها یک نقطه از خط را پیدا می‌کنیم سپس آن را به مبدأ مختصات وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم.

$$y = ۲x \quad A \left| \begin{array}{l} ۱ \\ ۲ \end{array} \right.$$

$$y = -x \quad C \left| \begin{array}{l} ۱ \\ -۱ \end{array} \right.$$

$$y = \frac{۱}{۲}x \quad B \left| \begin{array}{l} ۲ \\ ۱ \end{array} \right.$$



خط نوع چهارم: به‌صورت $y = mx + n$ است، مانند: $y = ۲x + ۲$ ، $y = -x + ۳$ ، $y = x - ۱$.

شیب این خطها هم عدد (m) است.

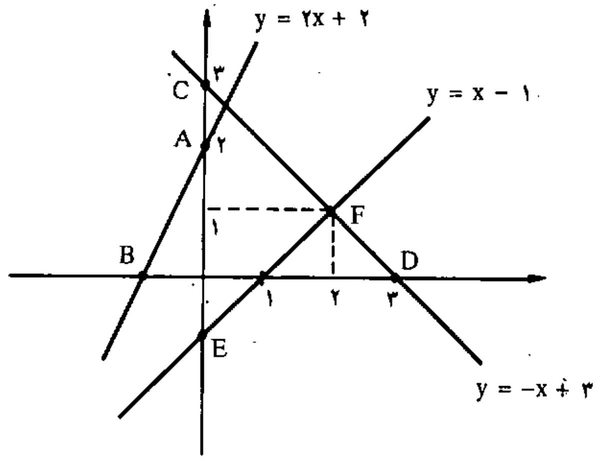
برای رسم آنها باید مختصات دو نقطهٔ آنها را پیداکرد سپس آنها را به هم وصل کرد و امتداد داد.

مثال: سه خط فوق را رسم کنید.

$$y = ۲x + ۲ \Rightarrow A \left| \begin{array}{l} ۰ \\ ۲ \end{array} \right. \quad B \left| \begin{array}{l} -۱ \\ ۰ \end{array} \right.$$

$$y = -x + ۳ \Rightarrow C \left| \begin{array}{l} ۰ \\ ۳ \end{array} \right. \quad D \left| \begin{array}{l} ۳ \\ ۰ \end{array} \right.$$

$$y = x - 1 \Rightarrow E\left|\begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix}\right. \qquad F\left|\begin{matrix} +2 \\ 1 \end{matrix}\right.$$



توجه: اگر معادلهٔ خط به‌صورت $ax + by + c = 0$ ، آنگاه شیب خط $(-\frac{a}{b})$ است.

۱۰ ـ ۱ مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط

در شکل فوق نقطهٔ $F\left|\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}\right.$ نقطهٔ تقاطع دو خط $y = -x + 3$ و $y = x - 1$ است. برای تعیین مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط، معادلات آنها را مانند دستگاه دو معادله دو مجهولی حل می‌کنیم.

مثال: می‌خواهیم مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط $y = -x + 3$ و $y = x - 1$ را پیدا کنیم.

$$\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow x - 1 = -x + 3$$

$$\Rightarrow x + x = 3 + 1 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

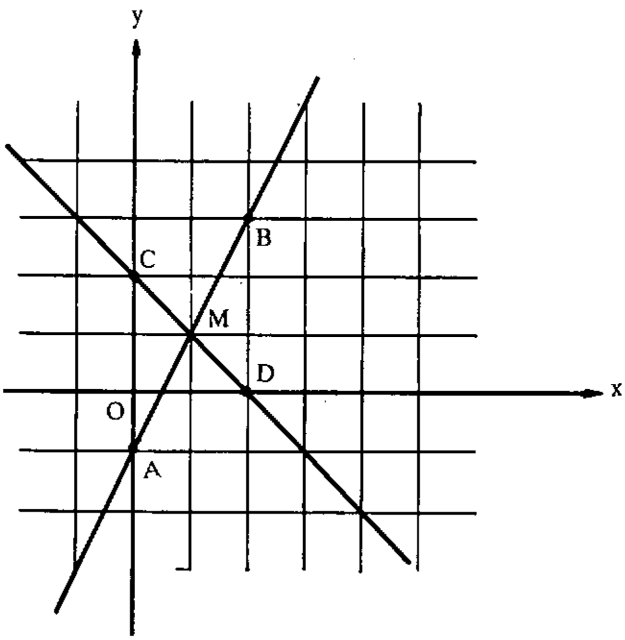
$$y = x - 1 \Rightarrow y = 2 - 1 \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

$\Rightarrow F\left|\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}\right.$ مختصات نقطه تقاطع دو خط است

اگر بخواهیم، مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط را به وسیلهٔ رسم پیدا کنیم باید نمودارهای خط را در یک صفحه شطرنجی (اگر دقیقتر بخواهیم باید در یک صفحهٔ میلیمتری) رسم کنیم سپس مختصات نقطهٔ تقاطع آنها در شکل دیده می‌شود. مانند مثال زیر:

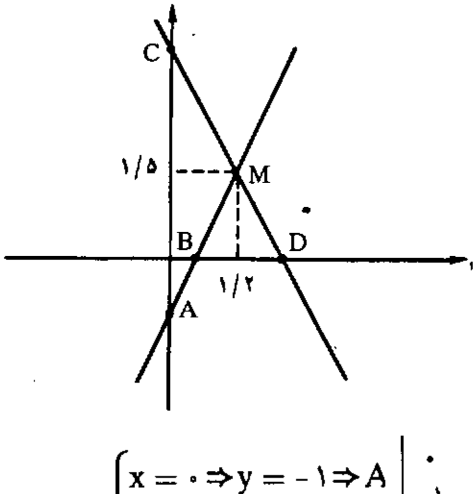
مثال: مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط زیر را به کمک شکل بیابید:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 & \Rightarrow A\left|\begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix}\right. , \quad B\left|\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}\right. \\ y = -x + 2 & \Rightarrow C\left|\begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix}\right. , \quad D\left|\begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix}\right. \end{cases}$$



به‌طوری که در نمودار مشخص شده است نقطهٔ M نقطهٔ تقاطع آنهاست که مختصات آن (۱ و ۱) است پس: $M\left|\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\right.$.

مثال: مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط $y = 2x - 1$ و $y = -2x + 4$ را به روش ترسیم بیابید.



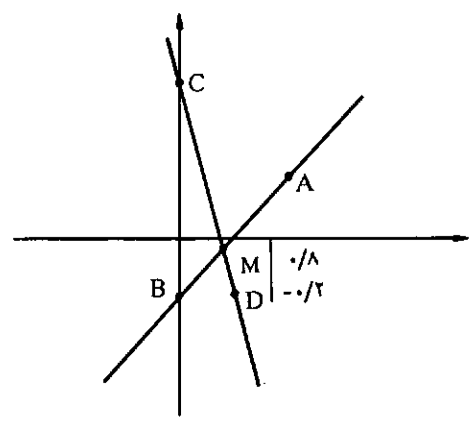
$$y = 2x - 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow A\left|\begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix}\right. \\ y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow B\left|\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{matrix}\right. \end{cases}$$

$$y = -2x + 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow C \left| \begin{matrix} 0 \\ 4 \end{matrix} \right. \\ y = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow D \left| \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} \right. \end{cases}$$

مثال: مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط به معادلات $y = x - 1$ و $y = -4x + 3$ را بیابید.

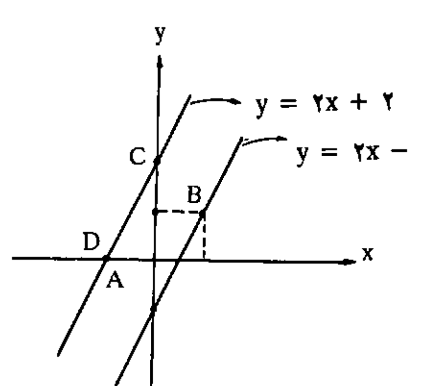
$$y = x - 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A \left| \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right. \\ x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow B \left| \begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix} \right. \end{cases}$$

$$y = -4x + 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow C \left| \begin{matrix} 0 \\ 3 \end{matrix} \right. \\ x = 1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow D \left| \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \right. \end{cases}$$



۱۱ ـ ۱ مطالبی درباره شیبهای دو خط

۱ـ اگر شیبهای دو خط برابرباشند، آنگاه آن دو خط موازیند و نقطهٔ تقاطع ندارند، مانند دو خط: $y = 2x - 1$ و $y = 2x + 2$.



$$y = 2x - 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow A(0, -1) \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow B(1, 1) \end{cases}$$

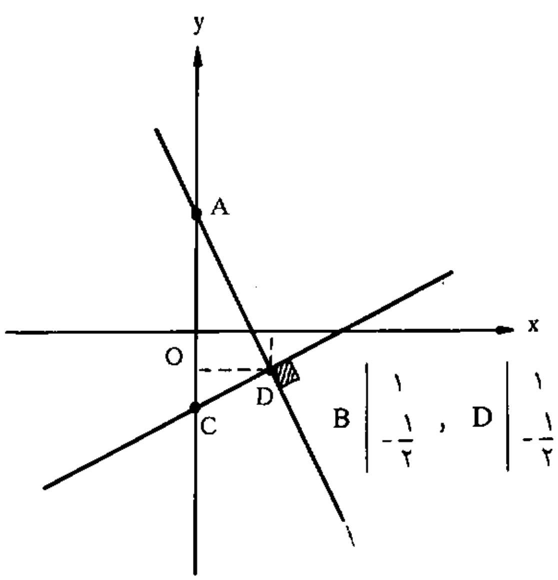
$$y = 2x + 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow C(0, 2) \\ x = -1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow D(-1, 0) \end{cases}$$

۲ـ اگر شیبهای دو خط عکس یکدیگر باشند، ولی علامتهای آنها یکی مثبت و دیگری منفی باشند، آنگاه دو خط بر هم عمودند و یک نقطهٔ تقاطع دارند (دو خط در نقطه تقاطع بر هم عمودند).

مثال: دو خط $y = -2x + \frac{1}{2}$ و $y = \frac{1}{2}x - 1$ بر هم عمودند، زیرا شیب اوّلی -2 و شیب دومی $(\frac{1}{2})$ است.

$$y = -2x + \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2} \Rightarrow A(0, \frac{3}{2}) \\ x = 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \Rightarrow B(1, -\frac{1}{2}) \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow C(0, -1) \\ x = 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \Rightarrow D(1, -\frac{1}{2}) \end{cases}$$



$$B \left| \begin{matrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{matrix} \right. , \quad D \left| \begin{matrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{matrix} \right.$$

به‌طوری که ملاحظه می‌شود نقطهٔ D و نقطهٔ B هر دو یکی هستند و مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط است.

۳ـ اگر شیبهای دو خط مساوی نباشند:

دو خط متقاطعند. (چنانچه شیبهای دو خط عکس یکدیگر با

علامت مخالف باشند هم متقاطعند و هم بر هم عمودند). مانند دو خط $y = x - ۳$ و $y = -۲x$ که متقاطعند.

محاسبهٔ نقطهٔ تقاطع دو خط

$$\begin{cases} y = x - ۳ \\ y = -۲x \end{cases} \Rightarrow x - ۳ = -۲x$$

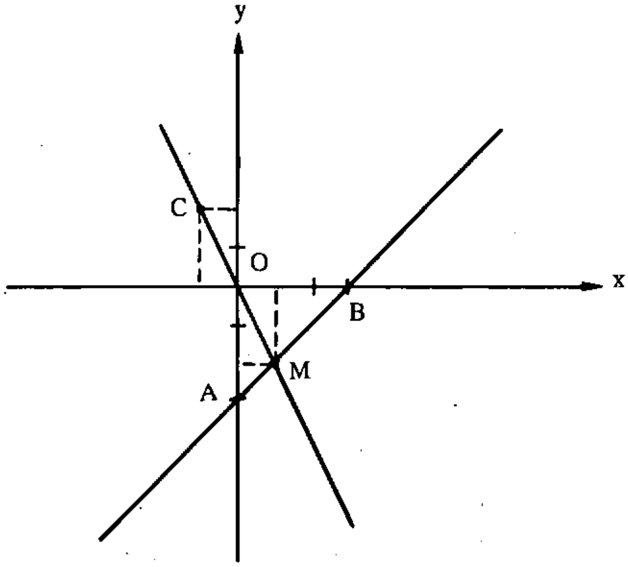
$$\Rightarrow x + ۲x = ۳ \Rightarrow ۳x = ۳ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow y = -۲$$

$$\Rightarrow M \left| \begin{matrix} ۱ \\ -۲ \end{matrix} \right.$$ نقطهٔ تقاطع

و نمودارهای آنها چنین است:

$$y = x - ۳ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \Rightarrow y = -۳ \Rightarrow A(۰, -۳) \\ y = ۰ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow B(۳, ۰) \end{cases}$$

$$y = -۲x \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \Rightarrow y = ۰ \Rightarrow O(۰, ۰) \\ x = -۱ \Rightarrow y = ۲ \Rightarrow C(-۱, ۲) \end{cases}$$



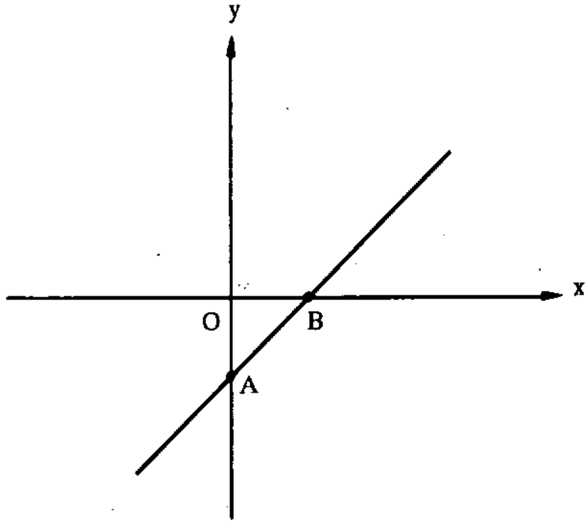
۴ـ اگر هم شیبهای دو خط مساوی و هم عدد ثابت آنها مساوی باشند، آنگاه دو خط بر هم منطبقند و بی‌شمار نقطهٔ مشترک دارند.

مانند:

$y - x + ۱ = ۰$ و $y = x - ۱$

$x = ۰ \Rightarrow y = -۱ \Rightarrow A(۰, -۱)$

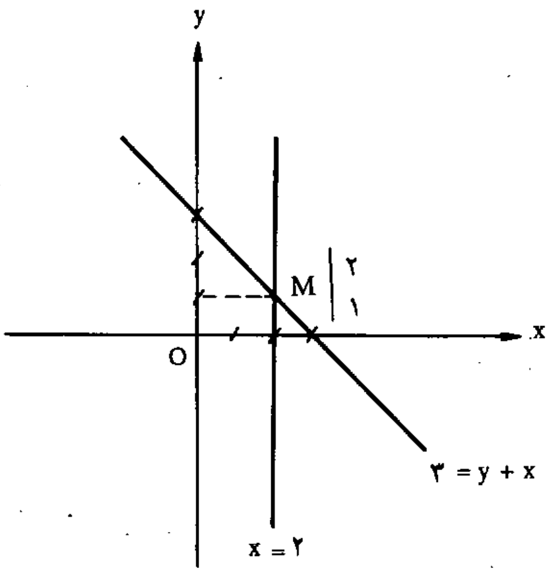
$x = ۱ \Rightarrow y = ۰ \Rightarrow B(۱, ۰)$



همان‌طوری که قبلاً گفته شد، برای حل یک دستگاه، به کمک رسم، باید شکل را روی یک صفحهٔ کاغذ میلیمتری رسم کرد و مختصات تقاطع آنها را پیدا کرد.

مثال: دستگاه زیر را به کمک نمودار حل کنید:

$$\begin{cases} x = ۲ \\ x + y = ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \Rightarrow y = ۳ \Rightarrow A(۰, ۳) \\ y = ۰ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow B(۳, ۰) \end{cases}$$



آموزش ترجمه متون ریاضی (۸)

● حمید رضا امیری

6 Inequalities*

6.1 Linear Inequalities

The inequality 'x is greater than y', written $x > y$, is defined to mean $x - y$ is positive. In a similar way, 'x is less than y', written $x < y$, means $x - y$ is negative.

$$(x > y) \Leftrightarrow (x - y > 0).$$
$$(x < y) \Leftrightarrow (x - y < 0).$$

If x is greater than or equal to y, then we write $x \geqslant y$ with a similar notation, $x \leqslant y$, for x less than or equal to y.

The basic rules for manipulating inequalities are:

(1) The same number may be added to both sides of an inequality, so that

$$(x > y) \Rightarrow (x + a > y + a).$$

(2) The same number may be subtracted from both sides of an inequality, so that

$$(x > y) \Rightarrow (x - b > y - b).$$

(3) If both sides of an inequality are multiplied by a *positive* number, the inequality is *preserved*.

$$(x > y \text{ and } a > 0) \Rightarrow (ax > ay).$$

(4) If both sides of an inequality are multiplied by a *negative* number the inequality is *reversed*.

$$(x > y \text{ and } b < 0) \Rightarrow (bx < by).$$

(5) The corresponding sides of inequalities of the same kind may be added (but not subtracted).

$$(a > b \text{ and } x > y) \Rightarrow (a + x > b + y).$$

(6) Inequalities of the same type are transitive.

$$(x > y \text{ and } y > z) \Rightarrow (x > z).$$

*Throughout this chapter all variables are real (i.e. $\in \mathbb{R}$).

٦ نابرابریها*

٦.١ نابرابریهای خطی

نابرابری «x بزرگتر از y است» با نماد $x>y$ نوشته شده و به معنی این است که $x - y$ مقداری مثبت است. به طریق مشابه «x کوچکتر از y است»، به صورت $x<y$ نوشته شده و به معنی این است که $x - y$ مقداری منفی می‌باشد.

$$(x > y) \Longleftrightarrow (x - y > 0)$$
$$(x < y) \Longleftrightarrow (x - y < 0)$$

اگر x بزرگتر یا مساوی با y باشد در این صورت می‌نویسیم $x \geq y$ و به طریق مشابه نماد $x \leq y$ برای x کوچکتر یا مساوی با y به کار می‌رود.

قاعده‌های اساسی برای تغییر و دستکاری نابرابریها به قرار زیراند:

(۱) می‌توان به دو طرف یک نابرابری یک عدد یکسان (مساوی) اضافه نمود، به صورت زیر:

$$(x > y) \Rightarrow (x + a > y + a)$$

(۲) از دو طرف یک نابرابری می‌توان یک عدد یکسان کم کرد، به صورت زیر،

$$(x > y) \Rightarrow (x - b > y - b)$$

(۳) اگر دو طرف یک نابرابری را در یک عدد مثبت ضرب کنیم، نابرابری حفظ می‌شود (جهت آن تغییر نمی‌کند).

$$(x > y\ ,\ a > 0) \Rightarrow (ax > ay)$$

(۴) اگر دو طرف یک نابرابری در یک عدد منفی ضرب شود، نابرابری حفظ نمی‌شود (جهت آن عوض می‌شود).

$$(x > y\ ,\ a < 0) \Rightarrow ax < ay$$

(۵) طرفین متناظر در نامساویهای هم جهت را می‌توان با هم جمع کرد (در مورد تفریق حکم کلّی نیست).

$$(a>b\ ,\ x>y) \Rightarrow (a + x > b + y)$$

(٦) در نامساویها خاصیت تعدی یا تراگذری برقرار است.

$$(x > y\ ,\ y > z) \Rightarrow (x > z)$$

* در این بخش تمامی مقادیر حقیقی هستند (یعنی متعلق به IR).

Example 1 Given that $x > y$, show that $x + a > y + a$.

By definition $(x > y) \Leftrightarrow (x - y$ is positive).
We may write $x - y = (x + a) - (y + a)$.

$$[(x + a) - (y + a)] \text{ is positive} \Leftrightarrow (x + a > y + a)$$

Hence,

$$(x > y) \Leftrightarrow (x + a > y + a).$$

مثال ۱. فرض کنیم که $x>y$، نشان دهید $x + a > y + a$.

با توجه به اینکه $(x > y) \Leftrightarrow (x - y > 0)$ می‌توانیم بنویسیم:

$$x - y = (x + a) - (y + a)$$

$$\Rightarrow (x + a) - (y + a) > 0 \Leftrightarrow x + a > y + a$$

بنابراین،

$$(x > y) \Leftrightarrow (x + a > y + a)$$

Example 2 Given that $x > y$ and $b < 0$, show that $bx < by$.

As above, $(x > y) \Leftrightarrow (x - y$ is positive).
Since $b < 0$, $b(x - y)$ is negative. But $b(x - y) = bx - by$. Hence,

$$(bx - by \text{ is negative}) \Leftrightarrow (bx < by).$$

مثال ۲. فرض کنید $x>y$ و $b<0$، نشان دهید $bx<by$.

می‌دانیم: $(x>y) \Leftrightarrow (x - y > 0)$

از آن‌جا که $b<0$ پس، $b(x - y)$ مقداری است منفی. امّا داریم:

$$b(x - y) = bx - by < 0 \Leftrightarrow bx < by$$

Example 3 Given that $x > y$ and $a > b$, show that $a + x > b + y$.

$$(x > y) \Leftrightarrow (x - y \text{ is positive}).$$
$$(a > b) \Leftrightarrow (a - b \text{ is positive}).$$

Hence,

$$[(x - y) + (a - b) \text{ is positive}]$$
$$\Rightarrow [(x + a) - (y + b) \text{ is positive}].$$
$$\Rightarrow (x + a > y + b).$$

مثال ۳. فرض کنید $x>y$ و $a>b$، نشان دهید $a + x > b + x$:

$$(x>y) \Rightarrow (x - y > 0)$$

$$(a > b) \Rightarrow (a - b > 0)$$

بنابراین،

$$(x - y) + (a - b) > 0$$

$$\Rightarrow (x + a) - (y + b) > 0 \Rightarrow (x + a) > (y + b)$$

Example 4 Given that $a > b$, what can be said about the relation between a^2 and b^2?

We need to consider three separate cases depending on the signs of a and b.
(a) a, b both positive.

$$(a > b) \Rightarrow (a^2 > ab), \text{ multiplying by } a,$$
$$(a > b) \Rightarrow (ab > b^2), \text{ multiplying by } b.$$

Combining these, we have

$$(a^2 > ab \text{ and } ab > b^2) \Rightarrow (a^2 > b^2).$$

(b) a, b both negative.

$$(a > b) \Rightarrow (a^2 < ab), \text{ multiplying by } a, \text{ which is negative},$$
$$(a > b) \Rightarrow (ab < b^2), \text{ multiplying by } b, \text{ which is negative}.$$

Combining these, we have

$$(a^2 < ab < b^2) \Rightarrow (a^2 < b^2).$$

(c) Nothing can be said in the case when a is positive and b is negative. For example,

$$4 > -2 \text{ and } 4^2 > (-2)^2$$

but

$$4 > -6 \text{ and } 4^2 < (-6)^2.$$

مثال ۴. اگر فرض کنیم $a>b$، راجع به رابطهٔ بین a^2 و b^2 چه می‌توان گفت؟

ما نیاز داریم که سه حالت مجزا از یکدیگر و برحسب علامتهای a و b در نظر بگیریم.

(الف) a و b هر دو مثبت باشند.

$(a > b) \Rightarrow (a^2 > ab)$ با ضرب دو طرف در a

$(a > b) \Rightarrow (ab > b^2)$ با ضرب دو طرف در b

با ترکیب دو رابطه اخیر داریم:

$(a^2 > ab$ و $ab>b^2) \Rightarrow (a^2 > b^2)$

(ب) a و b هر دو منفی باشند.

با ضرب دو طرف در a که مقداری منفی است:

$$(a > b) \Rightarrow (a^2 < ab)$$

با ضرب دو طرف در b که مقداری منفی است:

$$(a > b) \Rightarrow (ab < b^2)$$

از ترکیب این روابط خواهیم داشت:

$$(a^2<ab<b^2) \Rightarrow (a^2<b^2)$$

(ج) در حالتی که a مثبت و b منفی باشد چیزی نمی‌توانیم بگوییم. به عنوان مثال:

$4 > -2$ و $4^2 > (-2)^2$

امّا

$4>-6$ و $4^2 < (-6)^2$

(وقتی دو طرف یک نابرابری در یک عدد منفی ضرب شود جهت نابرابر معکوس می‌شود.)

$۳ + ۴x > ۳x \Rightarrow x > -۳$

بنابراین، مجموعه جواب عبارت است از $\{x : -۳ < x < ۰\}$.

Example 5 Find the set of values of x for which $2x + 2 > 6$.

$(2x + 2 > 6) \Rightarrow (2x > 6 - 2 = 4)$, subtracting 2 from each side,

$\Rightarrow x > 2$, multiplying each side by $\frac{1}{2}$.

The required set is

$$\{x: x > 2\}.$$

مثال ۵. مجموعهٔ مقادیری را برای x بیابید که به ازای آنها نابرابری $۲x + ۲ > ۶$ برقرار باشد (مجموعهٔ جواب نابرابری را مشخص کنید):

$$(۲x + ۲ > ۶) \xRightarrow{\text{تفریق ۲ از طرفین}} (۲x > ۶ - ۲ = ۴) \xRightarrow{\text{ضرب دو طرف در } \frac{۱}{۲}} x > ۲$$

بنابراین مجموعهٔ جواب عبارت است از $\{x : x > ۲\}$.

6.2 Quadratic inequalities

An inequality of the form $ax^2 + bx + c \geq 0$, where $a \neq 0$, is called a quadratic inequality. The solution depends on the sign of the discriminant $(b^2 - 4ac)$.

(i) If $b^2 \leq 4ac$, then:

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \text{ for all values of } x \text{ when } a > 0,$$

and

$$ax^2 + bx + c \leq 0 \text{ for all values of } x \text{ when } a < 0.$$

These results follow from the work of chapter 3.

۶.۲ نابرابریهای درجه دوّم

هر نابرابری به شکل $ax^۲ + bx + c \geq ۰$ که در آن، $a \neq ۰$، یک نابرابری درجه دوم نامیده می‌شود. حل چنین نابرابریهایی بستگی به علامت مبین آن یعنی $(b^۲ - ۴ac)$ دارد.

(۱) اگر $b^۲ < ۴ac$ در این صورت:

برای هر مقدار x در حالتی که $a > ۰$، همواره داریم:

$ax^۲ + bx + c \geq ۰$

و برای هر مقدار x در حالتی که $a < ۰$، همواره داریم:

$ax^۲ + bx + c \leq ۰$

نتایج فوق با توجه به کاری که در بخش ۳ انجام شد، به دست آمده است.

Example 6 Find the set of values of x for which

$$\frac{3 + 4x}{x} < 3.$$

(a) When $x > 0$,

$$\left(\frac{3 + 4x}{x} < 3\right) \Rightarrow (3 + 4x < 3x)$$

$\Rightarrow (4x - 3x < -3) \Rightarrow (x < -3)$.

As this contradicts the condition $x > 0$, the required set cannot contain positive values.

(b) When $x < 0$,

$$\left(\frac{3 + 4x}{x} < 3\right) \Rightarrow (3 + 4x > 3x),$$

since multiplying by a negative number reverses the inequality.

$$(3 + 4x > 3x) \Rightarrow (x > -3).$$

Hence, the required set is

$$\{x: -3 < x < 0\}.$$

مثال ۶. مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\frac{۳+۴x}{x} < ۳$ را بیابید.

(الف) وقتی که $x > ۰$،

$(\frac{۳+۴x}{x} < ۳) \Rightarrow (۳ + ۴x < ۳x)$

$\Rightarrow (۴x - ۳x < -۳) \Rightarrow x < -۳$

که در این حالت با شرط $x > ۰$ تناقض ایجاد می‌شود و مجموعهٔ جواب نمی‌تواند شامل مقادیر مثبت باشد.

(ب) وقتی که $x < ۰$،

$(\frac{۳+۴x}{x} < ۳) \Rightarrow (۳ + ۴x > ۳x)$

پیکارجویی!

۲۵ خودریخت است دو رقم آخر مربع آن (۶۲۵) رقمهای ۲ و ۵ اند. عددهای خود ریخت دیگری را به دست آورید.

عددهای ابر - خود ریخت به صورت رقمهای نهایی مکعبهاشان ظاهر می شوند. عددهای ابر - خود ریخت را کشف کنید.

مبانی کامپیوتر و برنامه‌نویسی با BASIC (1)

● حسین ابراهیم‌زاده قُلزم

◆ مقدمه

کامپیوتر[1] الکترونیکی اندکی بیش از سی‌سال پیش اختراع شد. در تاریخ دنیا، بندرت یک تکنولوژی با چنین سرعت انفجارآمیزی توسعه یافته و پیشرفت کرده است. هم‌اکنون کامپیوتر در تمام جوانب مادّی زندگی ما نقش اوّل را بازی می‌کند. از کامپیوتر در امور تجاری و اداری، در سیستم نمرات و کارنامهٔ تحصیلی دانش‌آموزان و دانشجویان، در کار نشر کتاب و مجلات، در پُستهای الکترونیکی، در آموزش ریاضیات و فیزیک، در ثبت معاملات بانکی و کنترل گزارشات مالیات بردرآمد، در کنترل صورتِ کالاهای موجود فروشگاههایی که خرید می‌کنیم و درکنترل پرواز هواپیماها، در تنظیم فرایندهای تولید یک کارخانهٔ شیمیایی و در طراحی صنعتی و در تجزیه و تحلیل نتیجهٔ آزمایشهای پیچیدهٔ فیزیکی و در امور مربوط به راکتور اتمی و تحقیقات فضایی استفاده می‌شود.

ما اکنون شاهد حضور کامپیوتر در لوازم خانگی خود هستیم. در چرخهای خیاطی فوق مدرن کامپیوترهایی تعبیه شده است که بدون داشتن دندانه‌های مکانیکی، امکان استفاده از چرخ را در انتخاب مدلهای مختلف فراهم ساخته است. بسیاری از شما، از بازیهایی موسوم به بازیهای ویدیویی لذت برده‌اید، این بازیها در حقیقت بازی[2]هایی کامپیوتری هستند که صفحهٔ نمایش[3] آن، صفحهٔ تلویزیون است. با توجه به نفوذ و کارایی زیاد کامپیوتر، هر شخص با هر میزان از کنجکاوی می‌خواهد مطالبی راجع به کامپیوتر بداند. سؤالات متعددی برای یک شخص می‌تواند مطرح باشد:

نخست اینکه، کامپیوتر چیست؟ تاریخ کامپیوتر به چه دوره‌هایی برمی‌گردد؟ چه مراحلی طی گردید تا کامپیوترهای نوین و الکترونیکی امروزی ساخته شد؟ کامپیوترها توانایی انجام چه نوع کارهایی را دارند؟ نحوهٔ کار باکامپیوتر به چه صورت است؟ چگونه می‌توان از کامپیوتر در حل مسائل[4] استفاده کرد؟ کامپیوتر حاصل کار را به چه صورت به ما تحویل می‌دهد؟ و بی‌شمار سؤال دیگر در مورد کامپیوتر.

ما در طی سلسله مقالاتی که در مجلهٔ برهان به چاپ می‌رسانیم تلاش خواهیم کرد که به این سؤالات و به بسیاری از سؤالات دیگر شما جواب دهیم. البته، برایمان مقدور نیست تمام جنبه[5]های کار کامپیوتر و سیر تکاملی کامل آن را بیان کنیم. در طی این سلسله مقالات نخست مختصری راجع به تاریخ محاسبات[6] و کامپیوتر تا به امروز و ساختمان[7] و اجزای[8] اصلی تشکیل دهندهٔ کامپیوتر با شما به گفتگو می‌نشینیم و سپس مطالبی در رابطه با سیستمهای مختلف کُدگذاری[9] در کامپیوتر و اَلگوریتم[10] و فلوچارت[11] ارائه می‌دهیم. آنگاه برنامه‌نویسی با BASIC یا PASCAL یا C را مورد بررسی کامل قرار خواهیم داد و در انتها مباحث برنامه‌نویسی را با برنامه‌نویسی گرافیکی با BASIC یا برنامه‌نویسی گرافیکی با PASCAL یا C به پایان می‌رسانیم.

◆ تاریخ محاسبات و کامپیوتر تا به امروز

در عصر[12]های بسیار دور، بدون شک نخستین وسیلهٔ محاسباتی و شمارش[13] را برای بشر انگشتان[14] دست او تشکیل می‌داد. یکی از دلایل استفادهٔ انسان از مبنای ۱۰[15] یا سیستم دهدهی در شمارش اعداد، تعداد ۱۰ انگشت دستِ او بوده است. در آغاز، بشر برای ثبت

اطلاعات[۱۶] از وسایلی نظیر چوب، پوست حیوانات و از دیوار غارها استفاده می‌کرده است. تا اینکه ...

عصری که ما در آن زندگی می‌کنیم با عصری که پدران و مادران ما و بطور کلی با عصری که نسلهای گذشته در آن زندگی می‌کردند کاملاً متفاوت است. مشخصهٔ[۱۷] اصلی عصر ما، تغییرات سریع[۱۸] ایجاد شده در صنعت و تکنولوژی از یک طرف و سبک[۱۹] زندگی انسانها از طرف دیگر است. ما در عصر خود، توسعه و تکامل کامپیوترهای الکترونیکی نوین را مشاهده می‌کنیم که به جرأت می‌توان گفت یکی از دستاوردهای[۲۰] عظیم و مهم قرن بیستم به شمار می‌رود.

کامپیوترها بر خلاف انسانها توانایی[۲۱] آن را دارند تا مقدار زیادی اطلاعات را در حافظه[۲۲] خود به صورت ذخیره[۲۳] شده، نگهدارند[۲۴]، محاسبات پیچیدهٔ[۲۵] ریاضی و مقایسه‌های منطقی[۲۶] را در کسر بسیار کوچکی از ثانیه انجام می‌دهد، کُند[۲۷] و فراموش کار نیست، خستگی‌پذیری در کامپیوتر معنا ندارد و محاسبات طولانی را بطور دقیق انجام می‌دهد.

نقش کامپیوتر در عرصه‌های[۲۸] مختلف زندگی اجتماعی[۲۹]، و در شاخه‌های مختلف علوم و مهندسی[۳۰] و پزشکی، بر هیچ کس پوشیده نیست. نخست به این پرسش پاسخ می‌دهیم که اساساً: کامپیوتر چیست؟

کامپیوتر یک وسیلهٔ[۳۱] الکترونیکی است که قادر به قبول و ذخیره داده[۳۲]ها بوده.و آنها را پردازش[۳۳] می‌کند و داده‌های پردازش شده یا اطلاعات[۳۴] را در حافظهٔ خود می‌تواند ذخیره کند یا اطلاعات مورد درخواست استفاده کنندهٔ[۳۵] از کامپیوتر را به او تحویل دهد.

راجع به مفاهیم[۳۶] داده، پردازش، اطلاعات و حافظه دیرتر صحبت خواهیم کرد.

دسته‌بندی کامپیوتر

تمام کامپیوترها به دو دستهٔ[۳۷] کلی[۳۸] الف ـ کامپیوترهای قیاسی[۳۹] ب ـ کامپیوترهای رقمی[۴۰] تقسیم می‌شوند.

الف ـ کامپیوترهای قیاسی: اعداد[۴۱] در کامپیوترهای قیاسی به کمک یک سری از کمیت[۴۲]های فیزیکی[۴۳] که با سیستمهای خاصی واحدگذاری شده‌اند نمایش[۴۴] داده می‌شوند.

کمیتهای فیزیکی می‌توانند ولتاژ الکتریکی[۴۵]، سرعت[۴۶] چرخش[۴۷] یک میله، جریان الکتریکی[۴۸]، فشار هوا، فواصل[۴۹] طولی و غیره باشند. در کامپیوترهای قیاسی، برای به دست آوردن نتایج عددی، از وسایل اندازه‌گیری[۵۰] استفاده نمی‌شود بلکه قوانین فیزیکی در آن حاکم است. نتایج با علامتی نشان داده می‌شود که قابل تبدیل (البته با خطا![۵۱]) به عدد است. از این‌رو جوابها دقیق نیستند. از وسایلی که شبیه کامپیوترهای قیاسی عمل می‌کنند[۵۲] می‌توانیم حرارت‌سنج، سرعت‌سنج، ولت‌سنج و فشارسنج را نام ببریم. این کامپیوترها برای منظورهای خاصی[۵۳] مورد استفاده قرار می‌گیرند و انعطاف‌پذیری[۵۴] آنها نسبت به سایر کامپیوترها کم است. در محاسبهٔ حجم[۵۵] گازها، در تعیین مقدار آب و فشار آب سدها از کامپیوترهای قیاسی استفاده می‌شود.

ب ـ کامپیوترهای رقمی: در این نوع کامپیوتر، اطلاعات به کمک اعداد نمایش داده می‌شود. نمایش اعداد در کامپیوترهای رقمی توسط نوعی الگوریتم موسوم به سیستم اعداد دودویی[۵۶] تعیین می‌شود. این الگوریتم عدد را به صورت دنباله[۵۷]هایی از ۰ و ۱ تبدیل[۵۸] می‌کند و اعداد به همین صورت دودویی در داخل[۵۹] کامپیوترهای رقمی نمایش داده می‌شوند.

از آنجا که در کامپیوترهای قیاسی، برای نمایش اعداد از وسایل فیزیکی استفاده می‌شود از این‌رو در این نوع کامپیوتر، عملیات ریاضی وقت‌گیر[۶۰] انجام نمی‌شود: از محدودیت[۶۱]های کامپیوتر قیاسی آن است که عملیات منطقی یا مقایسه‌ای در آن انجام نمی‌شود. کامپیوترهای قیاسی حافظهٔ بسیار اندکی دارند، اندازهٔ دقیق محاسبات را نمی‌دهند و در اثر دما[۶۲] و رطوبت[۶۳] دستخوش تغییر می‌شوند. اما در مقابل، کامپیوترهای رقمی دارای حافظهٔ نامحدود هستند و دقت محاسباتی بسیار زیادی دارند، دقت یک کامپیوتر رقمی را معمولاً با مقدار فضای حافظه‌ای که برای نگهداری ارقام معنی‌دار[۶۴] عدد اختصاص می‌یابد می‌سنجند. در اجتماع هم که از کامپیوتر صحبت می‌شود منظور همین کامپیوترهای رقمی است.

تلاشهای زیادی صورت گرفته است تا توانستند خصوصیات خوب کامپیوترهای رقمی و قیاسی را در یک کامپیوتر نوع سوم به نام کامپیوتر پیوندی[۶۵] یا Hybrid Analog / Digitial Computer گرد آورند. در کامپیوترهای پیوندی داده‌ها با روش قیاسی دریافت[۶۶] می‌شوند و به مقادیر عددی تبدیل شده و سپس پردازش به صورت عددی انجام می‌شود. از کامپیوترهای پیوندی می‌توان رادار هواپیما را نام برد.

مراحل توسعهٔ تاریخی و تکامل کامپیوتر: انجام عمل محاسباتی و

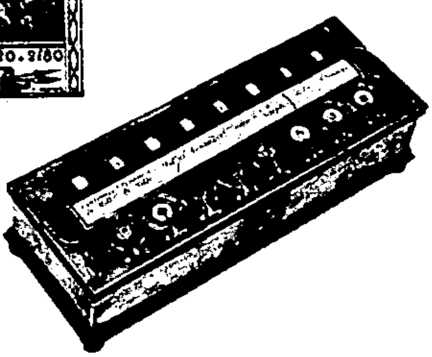
ریاضی و مفهوم ذخیرهٔ برنامه جهت کنترل اتوماتیک کامپیوتر دو مفهوم اساسی[۶۷]ای را تشکیل می‌دادند که تحقیق[۶۸] و بررسی در این موارد، منجر به اختراع[۶۹] وسایل محاسباتی و کامپیوتری گردید. اکنون برخی از وسایل و ابزارهای مهمی را که در پیاده‌سازی[۷۰] این مفاهیم بکار رفته‌اند از آغاز تا به امروز شرح می‌دهیم:

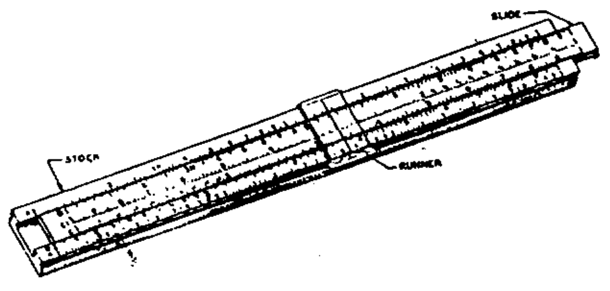
چرتکه: چرتکه[۷۱] یکی از ابتدایی‌ترین وسیلهٔ محاسباتی رقمی به کمک شمارش به شمار می رود. منشأ[۷۲] این وسیله را گاهی در رُم و یونان و گاهی در هند، ایران، چین، مصر یا بابل می‌دانند ولی قریب به اتفاق معتقدند که این وسیله ۲۰۰۰ سال قبل از میلاد مسیح برای نخستین‌بار در چین ساخته شده و بکار رفته است. با اختراع چرتکه، عملیات از حالت دستی خارج شدهٔ و انجام آن به یک وسیلهٔ مکانیکی محول شده است. از چرتکه برای جمع و تفریق و ضرب (یا جمعهای متوالی[۷۳]) و تقسیم (یا تفریقهای متوالی) استفاده می‌شد.

خط‌کش محاسبه: جان نپر (۱۶۱۷ - ۱۵۵۰) ریاضی دان اسکاتلندی و واضع نظریهٔ لگاریتمها در سال ۱۶۱۵ میلادی شکل اولیه و ابتدایی خط‌کش محاسبه[۷۴] را ابداع نمود. وی از این وسیله در محاسبهٔ جدول[۷۵] اوّل لگاریتم استفاده کرد و در عملیات جمع و ضرب از آن بهره جست. یک مخترع انگلیسی بنام Edmund Gunter در سال ۱۶۲۰ خط‌کش لگاریتمی را ابداع کرد و محاسبات را به کمک پرگار[۷۶] انجام می‌داد. William Oughtred مخترع دیگر انگلیسی با استفادهٔ همزمان از دو خط‌کش گانتر توانست اولین خط‌کش محاسبه را در سال ۱۶۲۱ بسازد. خط‌کش محاسبه را می‌توان اولین وسیلهٔ محاسبهٔ قیاسی[۷۷] به شمارآورد که در آن عملیات ضرب و تقسیم با استفاده از عمل جمع و تفریق انجام می‌شد. برروی خط‌کش محاسبه اعداد بوسیلهٔ فاصله‌هایی نشان داده می‌شوند که این فاصله بوسیلهٔ لگاریتم اعداد تعیین شده‌اند. به عنوان مثال، حاصل ضرب[۷۸] دو عدد از جمع فاصله‌های آنها در روی خط‌کش محاسبه تعیین می‌شوند.

ماشین حساب رومیزی[۷۹]: ویلهلم شیکارد (۱۶۲۳ - ۱۵۹۲)، طرح[۸۰] ماشین حساب را در سال ۱۶۲۳ ارائه داد. ماشین شیکارد علاوه بر عمل جمع و تفریق، عمل ضرب و تقسیم را نیز انجام می‌داد. ماشین شیکارد هرگز ساخته نشد و در همان حد طرح باقی ماند، علاوه براین طرح شیکارد تأثیری در ساخت و تکامل ماشینهای جمع کننده نداشت چون طرح وی به مدت ۳۰۰ سال به دست فراموشی سپرده شده بود و بعدها در سال ۱۹۵۷ جزئیات[۸۱] ساختمان ماشین حساب شیکارد برحسب اتفاق[۸۲] توسط Von Freytag Löringhoff کشف شد.

ماشین حساب پاسکال: بلز پاسکال (۱۶۶۲ - ۱۶۲۳) ریاضی‌دان فرانسوی در سن ۱۹ سالگی در سال ۱۶۴۲ یکی از اولین ماشین - حساب جمع کنندهٔ[۸۳] مکانیکی را که به جمع کنندهٔ پاسکال[۸۴] نیز معروف بود اختراع نمود. این ماشین حساب از تعدادی چرخ[۸۵] و دنده[۸۶] متداخل تشکیل می‌شد که برروی چرخها از ۰ تا ۹ شماره‌گذاری شده بود که یک چرخ نمایندهٔ ستون یکان، چرخ بعدی نمایندهٔ ستون دهگان و به همین ترتیب چرخهای بعدی نمایندهٔ ستونهای صدگان، هزارگان و غیره بودند. ماشین حساب پاسکال این توانایی را داشت که عمل جمع و تفریق را انجام دهد. به عنوان مثال، عدد ۱۵ با ۵ بار حرکت دنده در چرخ اوّل و یکبار حرکت دنده در چرخ دوم به دست می‌آمد و چنانچه در نظر بود عدد ۲۳ را با عدد ۱۵ جمع کنند، چرخ اول را به اندازهٔ ۳ دندهٔ دیگر و چرخ دوم را به اندازهٔ ۲ دندهٔ دیگر حرکت می‌دادند که نتیجه، عدد ۳۸ را به دست می‌داد.





◆ ماشین حساب پاسکال

Samuel Morland مخترع انگلیسی در خلال سالهای ۱۶۶۳-۱۶۶۶، ماشین حسابی ساخت که می‌توانست عمل جمع و تفریق را انجام دهد. وی ماشین دیگری برای عمل ضرب ابداع نمود. علاوه براین وی ماشین حساب دیگری ساخت که می‌توانست محاسبات مثلثاتی[۸۷] را انجام دهد.

ماشین حساب لایب نیتز: گاتفرید ویلهلم لایب نیتز (۱۷۱۶ - ۱۶۴۶) ریاضی‌دان آلمانی در سال ۱۶۷۱ ماشین حسابی ساخت که می‌توانست عمل جمع و تفریق و ضرب و تقسیم را که جمعها و تفریقهای متوالی بود و ریشه گیری[۸۸] از اعداد را نیز انجام دهد. این ماشین در سال ۱۶۹۴ ساخته شد و توسط لایب نیتز کار ماشین حساب تشریح[۸۹] گردید.

◆ ماشین حساب لایب نیتز

بعد از پاسکال و لایب نیتز تلاش[۹۰]های زیادی صورت گرفت تا ماشین حساب دیگری براساس طرح آنها ساخته شود. اولین ماشین حساب موفق به Charles Thomas منسوب است[۹۱] که وی طرح ماشین حساب خود را در سال ۱۸۲۰ ارائه داد. نمونهٔ کاملی از این ماشین در سال ۱۸۷۹ ساخته شد و می‌توان این ماشین را اولین ماشین حسابی به شمار آورد که به تولید انبوه رسیده است.

ماشین حساب قیاسی: J.M. Hermann در سال ۱۸۱۴ یک ماشین حساب قیاسی ساخت که می‌توانست سطح محصور[۹۲] به یک منحنی[۹۳] را محاسبه کند. بعد از طرح هرمان، Gonella در سال ۱۸۲۴ ماشینی ساخت که قادر بود سطح یک شکل را اندازه بگیرد.

ماشینهای کارت منگنه شده: استفاده از کارتهای منگنه شده[۹۴] در پردازش داده‌ها در سال ۱۸۸۴ برای اولین بار توسط هرمان هالریث آماردان[۹۵] امریکایی انجام شد و در سرشماری ۱۸۹۰ مورد استفاده قرار گرفت. طرح کارت منگنه شده با ۸۰ ستون[۹۶] توسط دکتر هالریث به ثبت رسید. وی یک ماشین مکانیکی ابداع کرد که از آن توانست در ثبت داده‌ها، محاسبه و جدول بندی[۹۷] داده‌های آماری و نیز برای تفسیر[۹۸] اطلاعات ذخیره شده روی کارتهای منگنه توسط یک حس کنندهٔ[۹۹] الکتریکی استفاده کند. Otto Schaeffler اتریشی با ایجاد بهبودهایی[۱۰۰] در ماشین هالریث، از آن در سرشماری[۱۰۱] ۱۸۹۰ اتریش استفاده کرد.

رایج‌ترین روش پردازش داده‌های زیاد را در بین سالهای ۱۹۰۰ تا ۱۹۶۰ پردازش باکارت‌های منگنه شده تشکیل می‌داد.

◆ کارت منگنه شده

کارگاه بافندگی ژاکار: دومین ایدهٔ مهم در تاریخ اختراع کامپیوتر، مفهوم ذخیرهٔ برنامه برای کنترل اتوماتیک کامپیوتر و محاسبات بود. اولین نمونهٔ کنترل کامپیوتر توسط برنامهٔ ذخیره شده در سال ۱۷۲۵ توسط Blaise Bouchon در کارگاه نساجی[۱۰۲]اش پیاده شد. در سال ۱۸۰۱ ژوزف ژاکار[۱۰۳] فرانسوی برای اول‌بار ماشینی ساخت که از کارت منگنه شده به عنوان ورودی[۱۰۴] استفاده می‌کرد. ماشین بافندگی ژاکار در نمایشگاه ۱۸۰۱ پاریس به نمایش درآمد. در این ماشین، عمل بافتن[۱۰۵] توسط کارتهایی که در آن سوراخ[۱۰۶]هایی برطبق دستورات زبان تعبیه شده بود کنترل پردازش در بافندگی را به عهده داشت.

ماشین تفاضلی و تحلیلی بابیج: چارلز بابیج[۱۰۷] (۱۸۷۱ - ۱۷۹۱) ریاضی‌دان و استاد دانشگاه کمبریج انگلستان، مفاهیم ماشین حساب مکانیکی و برنامهٔ ذخیره شده[۱۰۸] را در یک ماشین حساب برنامه‌پذیر[۱۰۹] خود با هم ترکیب کرد. علاقهٔ وی به مقالات لایب نیتز در مورد نمایش توابع به صورت سریهای نامتناهی[۱۱۰] موجب آن شد تا او ماشین تفاضلی‌اش را بسازد. این ماشین برای محاسبه و چاپ جداول توابع ریاضی[۱۱۱] تا ۲۰ رقم اعشار[۱۱۲] به کمک جمعهای مکرر تفاضلات[۱۱۳] طراحی شده بود. وی این ماشین را «ماشین تفاضلی[۱۱۴]» نامید زیرا جداولی که بوسیلهٔ این ماشین تهیه می‌گردید به کمک روشی بنام «روش تفاضلات» به دست می‌آمد. به نمودار زیر که چگونگی به دست آمدن مربع عدد ۶ را از طریق جدول تفاضلات نشان می‌دهد توجه کنید:

تفاضل دوم	تفاضل اول	$x^2 = x.x$	x
		۱	۱
	۳		
۲		۴	۲
	۵		
۲		۹	۳
	۷		
		۱۶	۴
۲	۹		
		۲۵	۵
۲	۱۱	۳۶	۶

کار ساخت این ماشین در سال ۱۸۲۲ متوقف شد. متأسفانه بابیج هرگز ماشین تفاضلی خود را تکمیل نکرد.

بابیج در سال ۱۸۳۳ موفق به طرح ماشین دقیق‌تری بنام ماشین تحلیلی[۱۱۵] گردید. ماشین تحلیلی بابیج از ۵ واحد اساسی زیر تشکیل می‌شد:

۱ ـ واحد حافظه[۱۱۶] جهت ذخیرهٔ داده‌ها و نتایج میانی[۱۱۷] محاسبات

۲ ـ واحد محاسبه و منطق[۱۱۸] برای انجام محاسبات ریاضی و منطقی

۳ـ یک سری چرخ‌دنده برای انتقال داده‌ها از واحد حافظه به واحد محاسبه و منطق

۴ـ یک سری چرخ‌دنده برای برقرار دادن داده‌ها در ماشین تحلیلی و گرفتن جواب

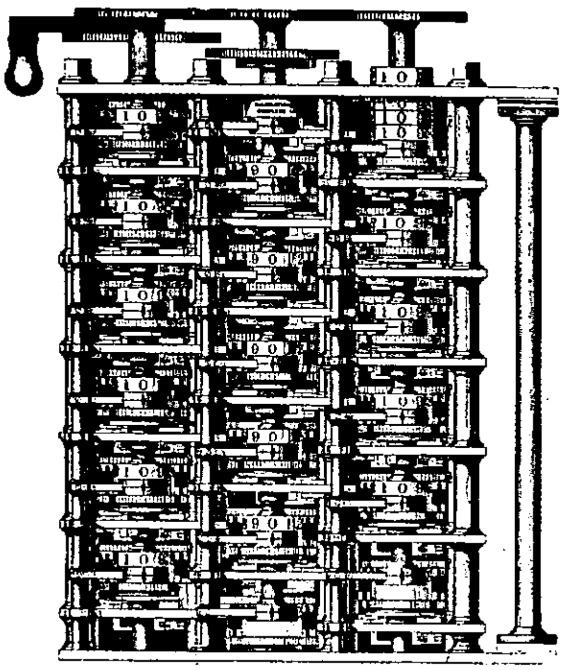
۵ـ یک سری چرخ‌دنده برای گرفتن جواب و ارائه خروجی

در ماشین تحلیلی به عنوان ورودی، از کارت منگنه شده استفاده می‌شد و کار ماشین تحلیلی به صورت خودکار توسط کارتهای منگنه کنترل می‌شد.

بابیج هرگز موفق به ساختن ماشین تفاضلی و تحلیلی خود نشد. طرح او جلوتر از تکنولوژی زمانش بود و قطع کمک هزینهٔ تحقیقاتیش توسط دولت انگلستان را بایستی عامل اصلی تکمیل نشدن ماشین تحلیلی به حساب آورد. طرح ماشین تحلیلی حائز اهمیت بسیار است زیرا بسیاری از مفاهیم بکار رفته در طرح او، در کامپیوترهای امروزی بار گرفته شده است. از بابیج اغلب به عنوان «پدر کامپیوتر[۱۱۹] نوین» یاد می‌کنند. سهم خانم اِیْدا Ada همکار بابیج را در کارهای او نباید نادیده گرفت. خانم ایدا آگوستا[۱۲۰] (۱۸۵۲ ـ ۱۸۱۵) چند اشکال طرح بابیج را برطرف کرد و برای ماشین تحلیلی بابیج برنامه نوشت و بدین ترتیب از ایدا به عنوان اولین زن برنامه‌نویس یاد می‌شود زیرا وی برنامه‌ای برای محاسبهٔ اعداد برنولی[۱۲۱] برروی ماشین تحلیلی بابیج نوشت که این برنامه اولین برنامهٔ منتشر شدهٔ کامپیوتری[۱۲۲] بود.

خانم اِیْدا دختر لُرد بایرون شاعر معروف انگلیسی است. یک زبان برنامه‌نویسی جدید به افتخار ایدا بنام Ada در چند سال اخیر بوجود آمده است که یکی از مهمترین و قوی‌ترین زبانهای برنامه‌نویسی[۱۲۳] سطح بالا[۱۲۴] به شمار می‌رود.

چارلز بابیج (۱۸۷۱ ـ ۱۷۹۱)



کامپیوترهای Z: جورج بول[۱۲۵] (۱۸۶۴ ـ ۱۸۱۵) ریاضی‌دان هم‌عصر[۱۲۶] بابیج، یک سیستم بنام منطق ریاضی[۱۲۷] ابداع کرده بود

که به کمک آن سیستم وی می‌توانست هر مسئله را به مسئله‌ای تبدیل کند[۱۲۸] که فقط دارای جواب «درست[۱۲۹]» یا «نادرست[۱۳۰]» باشد. بدین‌ترتیب مسائل به آسانی حل می‌شدند. با استفاده از منطق ریاضی بول، یک مهندس جوان آلمانی بنام کُنراد سوزه، Konrad Zuse یک ماشین الکترومکانیکی ابداع کرد که در آن به جای استفاده از سیستمهای دهدهی، از سیستم دودویی اعداد استفاده می‌شد. در این سیستم برای نمایش اعداد از کلیدهای «باز و بسته[۱۳۱]»، «۰ و ۱»، «روشن و خاموش[۱۳۲]» استفاده می‌کردند. در تمام کامپیوترهای امروزی از این روش نمایش اعداد یعنی سیستم دودویی در حافظه استفاده می‌شود.

کامپیوتر Z1 سوزه، کامپیوتری بود که براساس سیستم دودویی با نقطه شناور[۱۳۳] کار می‌کرد. این کامپیوتر در سال ۱۹۳۶ ساخته شد. کامپیوتر Z2 ی سوزه یک کامپیوتر اتوماتیک بود که در سال ۱۹۳۹ یا احتمالاً در سال ۱۹۴۱ ساخته شد. این کامپیوتر توسط برنامه کنترل می‌شد و براساس سیستم دودویی کار می‌کرد.

طرح کامپیوتر دیگری که قابل کنترل بوسیلهٔ برنامه بود با نام Z4 در سال ۱۹۴۲ شروع شد. این کامپیوتر دارای حافظهٔ مکانیکی منحصر بفرد[۱۳۴] بود. کامپیوتر Z4 در سال ۱۹۵۰ در دانشگاه صنعتی شهر زوریخ، در سوئیس نصب[۱۳۵] و راه‌اندازی شد[۱۳۶] و مورد بهره‌برداری قرار گرفت.

ماشین تیورینگ: استفاده از سیستم دودویی اعداد باعث حل بسیاری از مسائل مکانیکی گردید و اینکار توسط کامپیوتر به‌راحتی انجام می‌شد. امّا همچنان یک سؤال اساسی باقی ماند:

«چه مسایلی را می‌توان بوسیلهٔ ماشین با پردازشهای مکانیکی حل کرد؟»، آلن تیورینگ[۱۳۷] (۱۹۵۴ - ۱۹۱۲) در مقاله‌ای که آن را در سال ۱۹۳۶ به چاپ رساند از نظر تئوری تشریح کرد که هرگاه یک ماشین ساده بتواند یک محاسبه را انجام دهد این کار توسط یک ماشین دیگری انجام‌شدنی است. علاوه براین وی مسئله توقف The Halting Problem را در حلقه‌های نامتناهی برنامه کامپیوتری حل کرد و قبل از آنکه کامپیوتری ساخته شود طبق الگوریتمی نحوهٔ برخورد کامپیوتر و عکس‌العمل آن را در پاسخ به این مسئله تشریح کرد. ماشین تیورینگ یک ماشین با ماشین تیورینگ محدودیتی در اندازهٔ نوار ایجاد نمی‌کرد، در نتیجه حافظهٔ آن نامحدود بود. این ماشین به عنوان شکل پذیرفته شدهٔ کامپیوترهای همه منظوره[۱۴۱] با ظرفیت محاسبهٔ بالا مورد توجه بسیار قرار گرفت، طرح ماشین تیورینگ توسط Jon Barwise و John Etchemendy برای شرکت اَپل مکینتاش پیاده‌سازی شد.

کلوسوس: در طی جنگ جهانی دوم، دانشمندان آلمانی ماشینی ابداع کرده بودند بنام Enigma برای رمزدار کردن پیغامهای نظامی. این ماشین یک مجموعهٔ مکانیکی از تعدادی چرخ و سیم‌پیچ بود که حروف رمز را به تصادف به عنوان ورودی دریافت می‌کرد. تلاش برای ساختن ماشینی که بتواند کدهای Enigma را رمزگشایی کند در سال ۱۹۳۹ شروع شد و ارتش انگلستان این کار را به عهدهٔ یک تیم از بهترین مغز[۱۴۲]های ریاضی انگلیس محول کرد که آلن تیورینگ نیز در آن عضویت داشت. در ابتدا برای رمزگشایی Enigma، از چندین کامپیوتر الکترومکانیکی نظیر کامپیوترهای خانوادهٔ Z سوزه استفاده شد اما این کامپیوترها سرعت کافی نداشتند و کارها بکندی پیش می‌رفت. برای این منظور اولین کامپیوتر الکترونیکی با برنامهٔ ثابت[۱۴۳] که دارای ۲۰۰۰ لامپ خلاء[۱۴۴] بود در سال ۱۹۴۳ ساخته شد و کار عملی خود را شروع کرد. این کامپیوتر، کامپیوتر کلوسوس[۱۴۵] نام داشت و به کمک آن ارتش انگلستان توانست پیغام[۱۴۶] سری ارتش آلمان را لحظه به لحظه رمزگشایی کند و بسیاری معتقدند به کمک این کامپیوتر بود که متحدین توانستند در جنگ جهانی دوم پیروز از میدان نبرد خارج شوند.

دنبالهٔ تاریخ محاسبات و کامپیوتر را در شمارهٔ بعد بخوانید.

* * *

◆ واژه نامهٔ ریاضی و کامپیوتر:

1 - Computer
2 - Game
3 - Screen
4 - Problems Solving
5 - Aspect
6 - Computing
7 - Architecture
8 - Components
9 - Coding
10 - Algorithm
11 - Flow Chart
12 - Age
13 - Counting
14 - Fingers
15 - Decimal Base
16 - Information
17 - Characteristic
18 - Rapid changes
19 - Life style
20 - Achievement
21 - Ability
22 - Memory
23 - Stored
24 - Holds
25 - Complex
26 - Logical
27 - Slow
28 - Field
29 - Social Life
30 - Engineering
31 - Device
32 - Data
33 - Process
34 - Information
35 - Sensor
36 - Concept

37 - Class
38 - General
39 - Analog
40 - Digital
41 - Numbers
42 - Quantity
43 - Physical
44 - Represent
45 - Electrical voltage
46 - Velocity
47 - Rotation
48 - Electrical current
49 - Distances
50 - Measurement
51 - Error
52 - Operate
53 - Special purpose
54 - Flexibility
55 - Volume
56 - Binary
57 - Sequence
58 - Converts
59 - Internal
60 - Time - consuming
61 - Restriction
62 - Temperature
63 - Humidity
64 - Significant fingures
65 - Hybrid
66 - Get
67 - Main
68 - Search
69 - Invention
70 - Implementation
71 - Abacus
72 - Origin
73 - Successive
74 - Slide Rule
75 - Table
76 - Compass
77 - Analog
78 - Product
79 - Desk calculator
80 - Design
81 - Details
82 - Randomly
83 - Adding
84 - Pascal's Adder
85 - Wheel
86 - Gear
87 - Trigonometrical
88 - Extracting of Root
89 - Describe
90 - Attempt
91 - is due to
92 - Area Bounded By
93 - Curve
94 - Punched card
95 - Statistician
96 - Column
97 - Tabulating
98 - Interpretation
99 - Electrical Sensors
100 - Modifications
101 - Census
102 - Loom
103 - Joseph Jacquard
104 - Input
105 - Weaving
106 - Holes
107 - Charles Babbage
108 - Stored Program
109 - Programmable
110 - Infinite
111 - Mathematical Functions
112 - Decimal Place
113 - Differences
114 - Difference Engine
115 - Analyticul Engine
116 - Memory Unit
117 - Intermediate Result
118 - Arithmetic & Logic Unit
119 - Father of Computer
120 - Lady Ada Augusta countess of lovelace
121 - Bernoulli Numbers
122 - First published computer program
123 - Programming Language
124 - High Level
125 - George Boole
126 - Contemporary
127 - Mathematical Logic
128 - Reduce
129 - True
130 - False
131 - Open & close
132 - On & off
133 - Floating point
134 - Unique
135 - Install
136 - Boot
137 - Alan Turing
138 - Tape
139 - Finite state
140 - Output
141 - General purpose
142 - Best Mathematical Brains
143 - Fixed program
144 - Vacuum tube
145 - Clossus
146 - Message

ادب ریاضی

من هیچ وقت کار مفیدی نکرده‌ام. هیچکدام از کشفیات من، مستقیم یا غیرمستقیم، در جهت مثبت یا منفی، تا به حال کوچکترین تغییری در آسایش جهانیان ایجاد نکرده‌اند. و احتمال هم نمی‌رود که چنین کنند. من البته به تعلیم سایر ریاضیدانها هم پرداخته‌ام، اما ریاضیدانهایی مثل خودم. و کار آنها هم، لااقل تا حدی که من به انجام آن کارها کمک کرده‌ام، به همان اندازهٔ کار خودم بدون فایده بوده است. با معیارهای عملی، ارزش زندگی ریاضی من هیچ است، و خارج از محدودهٔ ریاضیات هم به هر حال اندک است. تنها چیزی که می‌تواند مرا از محکومیت قطعی به ابتربودن نجات دهد، این است که پذیرفته شود من چیزی شایستهٔ آفرینش خلق کرده‌ام. در اینکه من چیزی آفریده‌ام شکی نیست؛ بحث بر سرارزش این آفریده است.

پس معنای زندگانی من و همهٔ آن دیگرانی که به همان معنای موردنظر من ریاضیدان بوده‌اند این است که: من چیزی به دانش بشری افزوده‌ام، و به دیگران کمک کرده‌ام تا آنها هم چیزهایی به آن بیافزایند؛ و این چیزها ارزشی دارند که تنها از لحاظ مرتبه و نه از لحاظ نوع با ابداعات ریاضیدانان بزرگ یا هنرمندان ریز و درشت دیگری که از خود آثاری ماندگار به جاگذاشته‌اند، تفاوت دارد.

هاردی

نشر ریاضی، رضاکرمی

اثبات نادرستی

«ادامهٔ منطق ریاضی»

● غلامرضا یاسی‌پور

◆ اثبات نادرستی[1]

در فصل قبل نادرستی استدلالات نادرست شامل گزاره‌های مرکب تابع ارزشی را با نسبت دادن ارزشهای راستیی به گزاره‌های سادهٔ ترکیب کننده‌شان به طریقی که مقدمه‌هایشان را راست و نتایجشان را دروغ کنند، ثابت می‌کردیم. در این‌جا برای اثبات نادرستی استدلالات نادرست شامل تسویرات از روشی بسیار نزدیک و وابسته به آن روش استفاده می‌کنیم. روش اثبات نادرستیی که در شرف توصیف آنیم با فرض اساسیمان در این مورد که دست‌کم یک فرد موجود است، ارتباط دارد.

فرض وجود دست‌کم یک فرد را می‌توان به بی‌نهایت طریق مختلف : اگر دقیقاً یک فرد موجود باشد، یا اگر دقیقاً دو فرد موجود باشند، یا اگر دقیقاً سه فرد موجود باشند، و غیره برقرار کرد. در مورد هر حالت یک تعادل منطقی اکید بین قضایای کلی نامرکب و ترکیبات تابع ارزشی قضایای فردی (شخصی) وجود دارد، به این ترتیب، اگر دقیقاً یک فرد، مثلاً a، موجود باشد ، در این صورت :

$[(x)\ \varphi x] \equiv \varphi a$ و $[(\exists x)\ \varphi x] \equiv \varphi a$

اگر دقیقاً دو فرد، مثلاً a و b، موجود باشند، در این صورت :

$[(x)\ \varphi x] \equiv [\varphi a \wedge \varphi b]$ و $[(\exists x)\ \varphi x] \equiv [\varphi a \vee \varphi b]$

و در مورد هر عدد k، اگر دقیقاً k فرد ، مثلاً a ، b ، c ،...، k موجود باشند، در این صورت

$$[(x)\ \varphi x] \equiv [\varphi a \wedge \varphi b \wedge \varphi c \wedge \ldots \wedge \varphi k]$$

و

$$[(\exists x)\ \varphi x] \equiv [\varphi a \vee \varphi b \vee \varphi c \vee \ldots \vee \varphi k]$$

راستی این دو شرطیها نتیجهٔ فوری تعاریفمان از سورهای عمومی و وجودی است. در این‌جا از چهار قاعدهٔ تسویر مذکور در بخش قبل استفاده‌ای به عمل نیامده است. بنابراین در مورد هر عالم یا مدل[2] ناتهی شامل هر تعداد متناهی افراد، هر قضیّهٔ کلی منطقاً معادل ترکیب تابع ارزشیی از قضایای فردی است. در نتیجه به ازای هر چنین مدلی هر استدلال شامل سورها منطقاً معادل استدلالی شامل تنها قضایای فردی و ترکیبات تابع ارزشی آنهاست.

استدلال شامل سورهایی درست است اگر و فقط اگر با حداقل یک فرد، بی‌توجه به این‌که چند فرد در آن موجود است درست باشد. بنابراین هر استدلال شامل سورها درست است اگر و فقط اگر به ازای هر عالم یا مدل ناتهی ممکنی منطقاً معادل استدلال تابع ارزشیی باشد که درست است. در نتیجه می‌توانیم نادرستی یک استدلال مفروض را با نمایش دادن یا توصیف کردن مدلی که استدلال مفروض به ازای آن منطقاً معادل یک استدلال تابع ارزشی نادرست است، اثبات کنیم. به این مقصود می‌توانیم با ترجمهٔ استدلال شامل سورهای مفروض به استدلالی منطقاً معادل و شامل قضایای فردی و ترکیبات تابع ارزشی آنها نایل شویم. به عنوان مثال، استدلال زیر را داریم :

H W
تمام ماهیهای وال سنگین‌اند.

E
تمام فیلها سنگین‌اند.

بنابراین تمام ماهیهای وال فیل‌اند.

ابتدا این استدلال را به صورت زیر علامتی می‌کنیم :

$(x)\ [Wx \Rightarrow Hx]$

$(x)\ [Ex \Rightarrow Hx]$

$\therefore (x)\ [Wx \Rightarrow Ex]$

در حالت مدل شامل دقیقاً یک فرد ، مثلاً a، استدلال مفروض منطقاً معادل

$$Wa \Rightarrow Ha$$

$$Ea \Rightarrow Ha$$

$$\therefore Wa \Rightarrow Ea$$

است که با نسبت دادن ارزش راستی T به «Wa» و «Ha» و F به «Ea» ثابت می‌شود که نادرست است. این نسبت ارزشهای راستی طریق مختصر توصیف مدل مورد بحث به عنوان مدلی است که تنها شامل یک فرد a که W (ماهی وال) و H (سنگین) است اما E (فیل) می‌باشد.[۳] در نتیجه استدلال اصلی به ازای مدل شامل دقیقاً یک فرد درست نیست ، و بنابراین **نادرست است.**

باید تأکید شود که در اثبات نادرستی استدلالات شامل سورها از **قواعد تسویرمان استفاده نشده است.** در مورد مدل شامل تنها یک فرد a گزارهٔ «$Wa \Rightarrow Ha$» را از گزارهٔ «$(x)\ [Wx \Rightarrow Hx]$» با استفاده از UI **استنتاج نمی‌کنیم** ، چه این دو گزاره در مورد این مدل منطقاً معادل‌اند زیرا در آن «$Wa \Rightarrow Ha$» **تنها** مثال جانشین تابع گزاره‌ای «$Wx \Rightarrow Hx$» است.

می‌شود چنین اتفاق بیفتد که یک استدلال نادرست شامل سورها ، به ازای هر مدل شامل دقیقاً یک فرد، منطقاً معادل یک استدلال تابع ارزشی درست باشد، هر چند که، به ازای هر مدل شامل بیش از یک فرد، منطقاً معادل یک استدلال تابع ارزشی نادرست خواهد شد. به عنوان مثال ؛ استدلال

W

تمام ماهیهای وال سنگین‌اند.

E

بعضی فیلها سنگین‌اند.

بنابراین تمام ماهیهای وال فیل‌اند.

که به صورت

$$(x)\ [Wx \Rightarrow Hx]$$

$$(\exists x)\ [Ex \wedge Hx]$$

$$\therefore (x)\ [Wx \Rightarrow Ex]$$

علامتی می‌شود را در نظر می‌گیریم. این استدلال به ازای مدلی شامل تنها یک فرد a منطقاً معادل

$$Wa \Rightarrow Ha$$

$$Ea \wedge Ha$$

$$\therefore Wa \Rightarrow Ea$$

است که استدلالی درست است. اما به ازای مدلی شامل دو فرد a و b استدلال مفروض منطقاً معادل

$$(Wa \Rightarrow Ha) \wedge (Wb \Rightarrow Hb)$$

$$(Ea \wedge Ha) \vee (Eb \wedge Hb)$$

$$\therefore (Wa \Rightarrow Ea) \wedge (Wb \Rightarrow Eb)$$

است که با نسبت دادن ارزش راستی T به «Wa» ، «Wb» ، «Ha» ، «Hb» ، «Eb» ، و ارزش راستی F به «Ea» ثابت می‌شود که نادرست است. در نتیجه استدلال اصلی نادرست است، زیرا مدلی وجود دارد که به ازای آن مدل، منطقاً معادل یک استدلال تابع ارزش نادرست است.

* * *

یادداشتها

1 . Proving Invalidity

2 . Universe or model

۳ . در این جا فرض بر این است که توابع گزاره‌ای سادهٔ «Ax» ، «Bx» ، «Cx» ، ... نه لازم‌اند، یعنی، منطقاً تصدیق همهٔ افراد (به عنوان مثال: x یکسان با خودش است)، نه ناممکن، یعنی، منطقاً تکذیب همهٔ افراد (به عنوان مثال، x متفاوت با خودش است).

همچنین فرض می‌کنیم که تنها روابط منطقی بین توابع گزاره‌ای ساده آنهایی هستند که توسط مقدمات استدلال نادرست ثابت شده، بیان یا منطقاً و به طور ضمنی مقرر شده‌اند. نکتهٔ این محدودیتها در این است که نسبت به دلخواه دادن ارزشهای راستی به مثالهای جانشین این توابع گزاره‌ای ساده را بدون ناسازگاری مجاز می‌کند ـ چه البته توصیفات مدلیمان باید سازگار باشند.

* * *

مرجع :

Symbolic Logic

Irving M . Copi

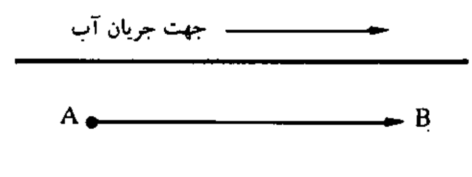
بـردارهـا [1]

(قسمت اول)

● سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

● مفهوم بردار

قایق کوچکی را در نقطه‌ای مـانند: A از یک رودخـانه پـرآبـی بدون حرکت در نظر می‌گیریم. حال اگر تصور کنیم که این قایق از نقطهٔ A فقط در اثر جریان آب شروع به حرکت کند ودر نـقطه‌ای دیگر مانند B متوقف شود، در اصطلاح مسافت طی شدهٔ AB را که دارای اندازه و امتداد و جهت است را یک بردار می‌نامیم.



برای اینکه نشان دهیم یک پاره‌خط جهت‌دار است یک پیکان در بالای پاره‌خط مفروض قرار می‌دهیم. مانند: بردار $\overrightarrow{AB}$ ؛ که نشـان ـ دهندهٔ پاره‌خطی جهت‌دار از A به B و به اندازهٔ $|\overrightarrow{AB}|$ است.

بنابراین بدیهی است که یک پاره‌خط جهت‌دار است؛ هرگاه یک سرآن به عنوان ابتدا (نقطهٔ شروع یا مبدأ) و سر دیگرش به عنوان انتها (نقطهٔ پایان یا مقصد) در نظر گرفته شود.

برای درک بیشتر بردار می‌توان تأثیر یک یا چند نیرو روی یک جسم را نیز بیان کرد. مثلاً فرض کنید جسم سـاکـنی بـه وزن $\overrightarrow{W}$ را می‌خواهیم جابه‌جا کنیم. اگر چند نفر با نیروهای F_1 ، F_2 ، ... ، F_n به این جسم در جهت و اندازه‌های مختلف اثر گذارنـد و مـجموع یـا برآیند نیروهای وارده را $\overrightarrow{F}$ بنامیم؛ بدیهی است وقتی $\overrightarrow{F} > \overrightarrow{W}$ باشد، جسم حرکت خواهد کرد و در صورتی کـه $\overrightarrow{F} \leq \overrightarrow{W}$ بـاشد، جسـم حالت سکون خود را حفظ خواهد کرد.

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \ldots + \overrightarrow{F_n} > \overrightarrow{W}$$

شرط جابه‌جایی جسم: $\overrightarrow{F} > \overrightarrow{W}$ (بردار برآیند)

بنابراین وقتی دربارهٔ تأثیر یک نیرو روی یک جسم مطالعه می‌کنیم باید:

۱) نقطه اثر

۲) اندازه

۳) راستا یا امتداد

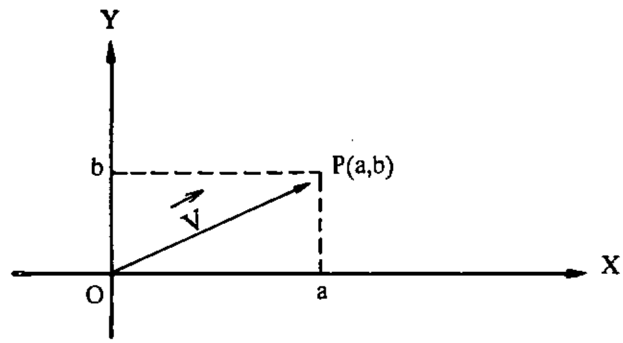
آن نیرو را مشخص کنیم.

● طریقه‌های نشان دادن یک بردار و مؤلّفه‌های آن روی دو محور عمود بر هم.

هرگاه A و B دو نقطه از صفحه باشند، پاره‌خط جهت‌دار AB را بـه‌صورت زوج مـرتب (A,B) و یـا بـه صـورت <A و B> نشـان می‌دهند.

هر نقطهٔ P(a,b) در صفحهٔ یک و تنها یک بردار مـثل: $\overrightarrow{OP}$ و برداری مانند: $\overrightarrow{OP}$ فـقط و فـقط یک نـقطه را در صـفحه مشـخص می‌کند. بردار $\overrightarrow{OP}$ به‌نام بردار مکان نقطهٔ $\overrightarrow{P}$ خوانده می‌شود.

1. Vectors



بنابراین بردار $\overrightarrow{V}$ را که ابتدای آن O و انتهای آن نقطهٔ P(a,b) در صفحهٔ مختصات XOY است؛ بردار نظیر دوتایی مرتب (a,b) می‌نامند.

اعداد a و b را مؤلّفه‌های $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{V}$ می‌نامند و چنین می‌نویسند:

$$\overrightarrow{V} = \langle a,b \rangle \text{ یا } \overrightarrow{V} \sim (a,b)$$

هر نقطه از صفحه مانند: P(a,b) را می‌توان با یک ماتریس 1×2 به صورت زیر نیز نشان داد:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

در این صورت گفته می‌شود که $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ یک بردار ستونی است.

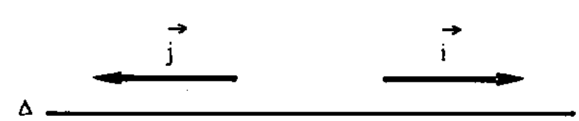
همچنین مختصات نقطهٔ P را می‌توان با یک ماتریس سطری 2×1 به‌صورت $[a \quad b]$ نیز نمایش داد، که دراین صورت گفته می‌شود $\overrightarrow{OP}$ به‌طریق‌ماتریس‌سطری $[a \ b]$ نشان‌داده‌شده است:

$$\overrightarrow{OP} = [a \ b]$$

• بردار یکانی (واحد)

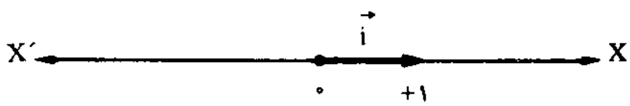
هر بردار به اندازهٔ واحد را یک بردار یکانی می‌نامند. اگر امتداد بردار یکانی $\overrightarrow{i}$ موازی خط Δ باشد، بردار $\overrightarrow{i}$ را بردار یکانی راستای Δ گوییم.

هر راستا دو بردار یکانی دارد، مانند: بردارهای یکانی $\overrightarrow{i}$ و $\overrightarrow{j}$ برای راستای Δ (مطابق شکل).



اگر یک بردار یکانی برروی یک محور چنان باشد که آغازش بر صفر و پایانش بر +۱ منطبق باشد، آن بردار را بردار یکانی (واحد) محور می‌نامیم.

هر محور فقط یک بردار واحد دارد مانند: بردار یکانی $\overrightarrow{i}$ برای محور X′OX (مطابق شکل).



تجربیات فیزیکی نشان می‌دهند که:

اگر $\overrightarrow{F_1}$ و $\overrightarrow{F_2}$ و $\overrightarrow{F_3}$ نیروهای وارد به یک نقطهٔ مادی (جرمی متمرکز در یک نقطهٔ فضا) مانند: P باشند، آنگاه روابط زیر برقرار می‌باشند:

$$\overrightarrow{F_1} + (\overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}) = (\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}) + \overrightarrow{F_3} \qquad \text{(شرکت‌پذیری)}$$

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_1} \qquad \text{(جابه‌جایی)}$$

اگر نماد $\overrightarrow{o}$ نشان دهد که به P نیرویی وارد نمی‌شود، یا به عبارت دیگر به P، نیزویی‌معادل صفر وارد می‌شود، برای هر نیروی دیگر مؤثر بر P مانند $\overrightarrow{F}$ داریم:

$$\overrightarrow{o} + \overrightarrow{F} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{o} = \overrightarrow{F} \qquad \text{(عضو خنثی)}$$

تجربه نشان می‌دهد که اگر نیروی $\overrightarrow{F_1}$ به P وارد شود و نیروی $\overrightarrow{F_2}$ که اندازهٔ آن مساوی $\overrightarrow{F_1}$ ولی جهت آن‌برخلاف $\overrightarrow{F_1}$ است نیز روی P اثر گذارد، این دو نیرو یکدیگر را خنثی خواهند کرد. به عبارت دیگر، برای نیروی معین $\overrightarrow{F}$ نیرویی که با نماد $-\overrightarrow{F}$ نشان می‌دهیم وجود دارد به‌طوری که داریم:

$$\overrightarrow{F} + (-\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{o} \qquad \text{(عضو وارون)}$$

$\overrightarrow{o}$ عضو بی‌اثر جمع و $-\overrightarrow{F}$ وارون $\overrightarrow{F}$ در مجموعهٔ بردارها نامیده می‌شوند. فرض کنیم نیروی $\overrightarrow{F}$ روی P تأثیر کند. اندازهٔ این نیرو را باعلامت $|\overrightarrow{F}|$ نشان می‌دهیم. برای هر $k \in \mathbb{R}$ و $k \neq 0$، نیروی $k\overrightarrow{F}$ که بر P اثر می‌کند را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

اندازهٔ $k\overrightarrow{F}$ برابر $|k| \ |\overrightarrow{F}|$ است. اگر $k > 0$ باشد، جهت $k\overrightarrow{F}$

همان جهت $\vec{F}$ است و اگر $k<0$ باشد، جهت $k\vec{F}$ برخلاف جهت $\vec{F}$ است.

همچنین تجربیات فیزیکی ضرب عدد در بردار را به شکل زیر نشان می‌دهد:

$$k(\vec{F}_1+\vec{F}_2)=k\vec{F}_1+k\vec{F}_2$$

$$(k_1+k_2)\vec{F}=k_1\vec{F}+k_2\vec{F}$$

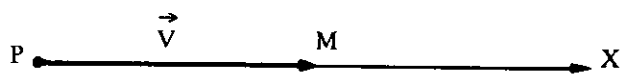
$$k_1(k_2\vec{F})=(k_1k_2)\vec{F}$$

برای تکمیل تعریف $k\vec{F}$، فرض می‌کنیم که $0.\vec{F}=\vec{0}$ باشد.

توجه داشته باشید که تمام خاصیتهای بیان شده از نظر ریاضی نیز معتبر هستند. مسأله‌ای که در این‌جا مطرح می‌شود، تعیین برآیند نیروهای $\vec{F}_1$، $\vec{F}_2$،...و $\vec{F}_n$ است. برای این منظور نمایش هندسی نیروها را تعریف می‌کنیم.

● نمایش هندسی نیروها ـ تعریف بردار

فرض می‌کنیم که نیروی $\vec{F}$ به نقطهٔ مادی P اثر می‌کند. نیمخط PX که از P شروع می‌شود و همراستای $\vec{F}$ است را رسم می‌کنیم. هر واحد نیرو را با یک واحد طول نمایش می‌دهیم، مثلاً: یک کیلوگرم را با یک سانتی‌متر نشان می‌دهیم. اگر اندازهٔ نیروی $\vec{F}$ مساوی $a\neq 0$ باشد، $|\vec{F}|=a$، نقطهٔ M که فاصلهٔ آن از P برابر a واحد طول است را در نظر می‌گیریم.



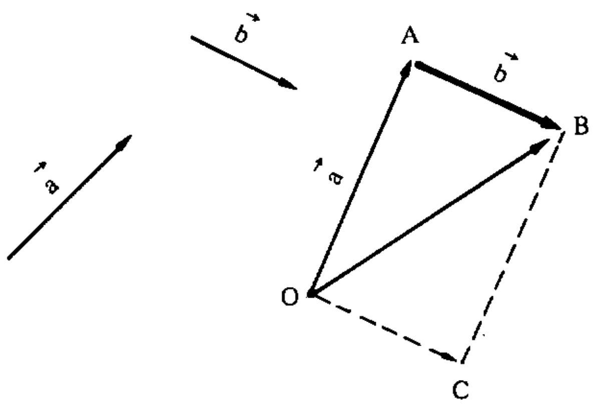
پاره‌خط PM که ابتدای آن P و انتهای آن M است، یک پاره‌خط جهت‌دار نامیده می‌شود، که آن را بردار $\vec{V}$ می‌نامیم.

لازم است تذکر دهیم که کمیتهای دیگری مثل: سرعت و شتاب نیز وجود دارندکه مانند: نیرو برای بیان آنها به پاره‌خطهای جهت‌دار یا بردارها نیاز داریم.

مطالعه و بررسی بردارها یعنی؛ پاره‌خطهای جهت‌دار که در اصل کمیتهای هندسی هستند، نه تنها از نظر فیزیکی بلکه به‌طور کلی از نظر ریاضی اهمیت فراوانی دارد. لازم است توضیح دهیم که گرچه تعریف بردار را با تکیه به مفهوم فیزیکی نیرو بیان کردیم، ولی می‌توان خواص بردارها را صرف‌نظر از این‌ارتباط مورد بررسی و مطالعه قرار داد.

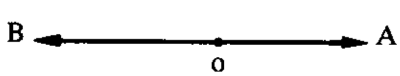
● جمع بردارها

هرگاه دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داده شده باشند، از نقطه‌ای مانند: O بردار $\overrightarrow{OA}$ را برابر $\vec{a}$ و از نقطهٔ A بردار $\overrightarrow{AB}$ را برابر $\vec{b}$ رسم می‌کنیم. بردار $\overrightarrow{OB}$ را مجموع هندسی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می‌نامیم. مجموع هندسی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را با $\vec{a}+\vec{b}$ نمایش می‌دهیم. در شکل زیر دیده می‌شود که اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ همراستا نباشند OB قطر متوازی‌الاضلاع OABC است که بردارهای $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OC}$ به ترتیب با بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر هستند. در این حالت می‌گوییم که مجموع هندسی دو بردار قطر متوازی‌الاضلاع است که بر آن دو بردار بنا می‌شود.

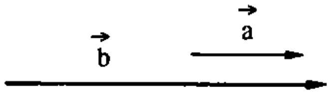


در شکلهای زیر مجموع دو بردار همراستا نمایش داده شده است:

۱) دو بردار مخالف



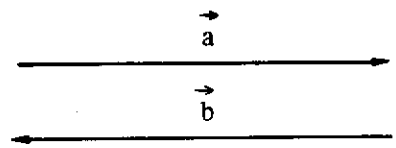
(جمع دو بردار مخالف)

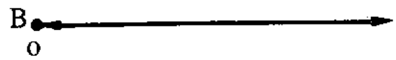


۲) دو بردار موافق

(جمع دو بردار موافق)

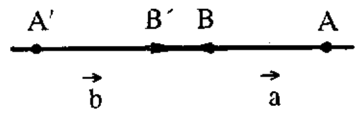
۳) (دو بردار زوج)





(جمع دو بردار زوج)

۴) (دو بردار متقابل یا قرینه)

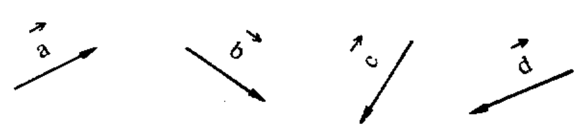


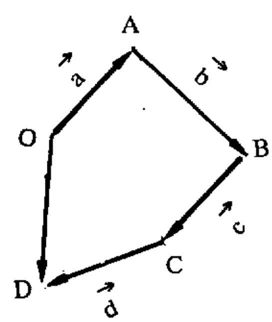
با توجه به شکل (۳) می‌توان نوشت: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{o}$

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

در شکل (۳) مجموع دو بردار صفر شده است، زیرا o و B برهم منطبق شده‌اند.

اگر چند بردار مانند $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ و $\vec{d}$ داشته‌باشیم، مجموع آنها را چنین تعریف می‌کنیم: از نقطه‌ای مانند O بردار $\overrightarrow{OA}$ را هم اندازهٔ $\vec{a}$ و از نقطهٔ A بردار $\overrightarrow{AB}$ را برابر $\vec{b}$ و از نقطهٔ B بردار $\overrightarrow{BC}$ را برابر $\vec{c}$ و سرانجام از نقطهٔ c بردار $\overrightarrow{CD}$ را برابر $\vec{d}$ رسم می‌کنیم. بردار $\overrightarrow{OD}$ را مجموع‌هندسی‌بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ و $\vec{d}$ می‌نامیم‌و با $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$ نمایش می‌دهیم. با توجه به شکل دیده می‌شود که مجموع چند بردار به تریب بردارها بستگی ندارد و به هر ترتیبی که بردارهای موردنظر را با هم جمع کنیم در هر صورت به یک بردار خواهیم رسید که با مجموع بردارها برابر است. به عنوان مثال: بردارهای زیر را با دو ترتیب مختلف جمع می‌کنیم.

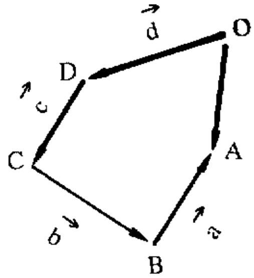




$$\overrightarrow{OD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$

حالت (۱)

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$



حالت (۲)

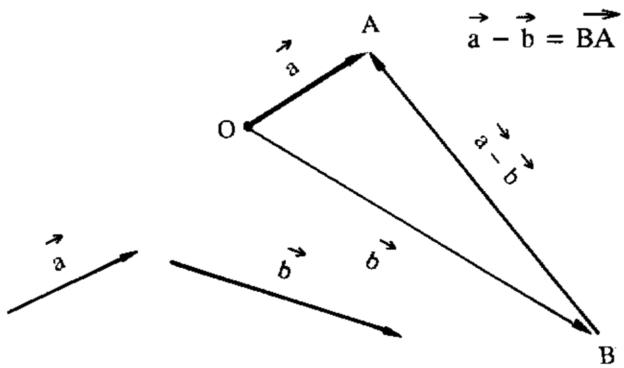
● تفریق دو بردار

بنا به تعریف تفاضل $\vec{b}$ از $\vec{a}$ برداری است مانند: $\vec{c}$ به‌طوری که داشته‌باشیم:

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$$

بردار $\vec{c}$ را با $\vec{a} - \vec{b}$ نمایش می‌دهیم که مانند شکل زیر، برای یافتن آن از نقطه‌ای مانند: O دو بردار $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ را به ترتیب برابر بابردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ رسم می‌کنیم، بردار $\overrightarrow{BA}$ تفاضل $\vec{b}$ از $\vec{a}$ است:

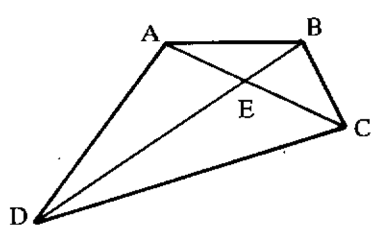
$$\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA}$$



بنابراین بردارهای $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{AB}$ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a} \text{ و } \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \vec{a} - \vec{b}$$

مثال ۱: در شکل زیر هر پاره‌خط متناظر با یک بردار است، حاصل هریک از مجموعهای داده شده را حساب کنید:



الف) $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{CB} = ?$

ب) $\overrightarrow{AC} + (-\overrightarrow{BC}) = ?$

ج) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} + (-\overrightarrow{BD}) = ?$

حل: الف)

$$\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE}) + (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD})$$
$$= \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{CD}$$

ب) $\overrightarrow{AC} + (-\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

ج)
$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} + (-\overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BD}$$
$$= \overrightarrow{BA} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB})$$
$$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$$
$$= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}$$

● ضرب داخلی (نقطه‌ای) دو برابر

حاصل‌ضرب داخلی یا نقطه‌ای دو بردار عددی حقیقی (یا اسکالر) است و بردار نیست. فرض می‌کنیم $\overrightarrow{V_1} = < a_1 , b_1 >$ و $\overrightarrow{V_2} = < a_2 , b_2 >$ دو بردار از فضای برداری V_2 باشند.

حاصل‌ضرب داخلی $\overrightarrow{V_1}$ و $\overrightarrow{V_2}$ که با نماد $\overrightarrow{V_1} . \overrightarrow{V_2}$ نشان داده می‌شود، عبارت عددی زیر است:

$$\overrightarrow{V_1} . \overrightarrow{V_2} = < a_1 , b_1 > \cdot <a_2 , b_2> = a_1 a_2 + b_1 b_2$$

برهان: اگر $\vec{i}$ و $\vec{j}$ به‌ترتیب بردارهای یکانی (واحد) محورهای x و y باشند، داریم:

$$\overrightarrow{V_1} = <a_1,b_1> = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} \quad و \quad \overrightarrow{V_2} = <a_2,b_2> = a_2\vec{i} + b_2\vec{j}$$

و همچنین حاصل ضربهای نقطه‌ای زیر را نیز به آسانی می‌توان تحقیق کرد:

$$\vec{i} . \vec{i} = 1 \ , \ \vec{j} . \vec{j} = 1 \ , \ \vec{i} . \vec{j} = 0$$

زیرا خواهیم دید که حاصل‌ضرب نقطه‌ای دوبردار عمود بر هم صفر است و حاصل‌ضرب نقطه‌ای دو بردار موازی و یا منطبق بر هم برابر یک است.

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = <a_1,b_1> \cdot <a_2,b_2> = (a_1\vec{i} + b_1\vec{j})(a_2\vec{i} + b_2\vec{j})$$
$$= a_1a_2\vec{i}.\vec{i} + a_1b_2\vec{i}.\vec{j} + b_1a_2\vec{j}.\vec{i} + b_1b_2\vec{j}.\vec{j}$$
$$= a_1a_2\,(1) + a_1b_2(0) + b_1a_2\,(0) + b_1b_2\,(1)$$
$$= a_1a_2 + b_1b_2$$

مثال ۲: وضع بردارهای $\overrightarrow{V_1} = < -1, \frac{3}{4} >$ و $\overrightarrow{V_2} = <3,4>$ نسبت‌به هم چگونه است.

حل:

$$\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = < -1 \, , \frac{3}{4} > \cdot <3,4> = (-1)(3) + (\tfrac{3}{4})(4)$$
$$= -3 + 3 = 0$$

حاصل‌ضرب نقطه‌ای دو بردار صفر است و در نتیجه دو بردار برهم عمودند.

تبصره: حاصل‌ضرب‌نقطه‌ای بردار $\vec{V} = <a,b>$ درخودش چنین است:

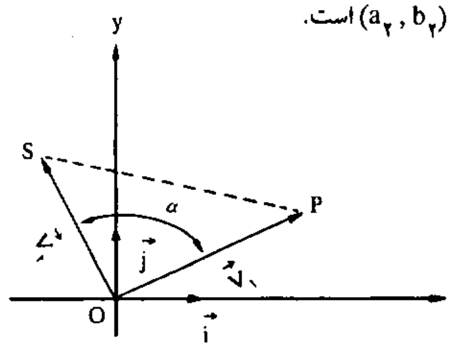
$$\vec{V}.\vec{V} = a^2 + b^2$$
$$\Rightarrow |\vec{V}|^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow |\vec{V}| = \sqrt{a^2+b^2}$$

قضیّه: هرگاه α زاویهٔ بین دو بردار ناصفر $\overrightarrow{V_1}$ و $\overrightarrow{V_2}$ باشد، یعنی $(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}) = \alpha$، آنگاه

$$\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = |\overrightarrow{V_1}| \; |\overrightarrow{V_2}| \cos (\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2}) = |\overrightarrow{V_1}| \; |\overrightarrow{V_2}| \cos\alpha$$

برهان: شکل زیر را درنظر می‌گیریم:

فرض کنیم: $\overrightarrow{V_1} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j}$ و $\overrightarrow{V_2} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j}$ و همچنین، $\overrightarrow{OP}$ نمایش موضعی $\overrightarrow{V_1}$ و $\overrightarrow{OS}$ نمایش موضعی $\overrightarrow{V_2}$ باشد. P نقطهٔ (a_1,b_1) و S نقطهٔ (a_2 , b_2) است.



با توجه به شکل در مثلث $\overset{\Delta}{OPS}$ قانون کسینوسها رامی‌نویسیم:

$$|\overrightarrow{PS}|^2 = |\overrightarrow{V_1}|^2 + |\overrightarrow{V_2}|^2 - 2|\overrightarrow{V_1}|\,|\overrightarrow{V_2}|\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{V_1}|^2 + |\overrightarrow{V_2}|^2 - |\overrightarrow{PS}|^2}{2|\overrightarrow{V_1}|\,|\overrightarrow{V_2}|}$$

می‌دانیم:

$$\overrightarrow{PS} = \langle a_2 - a_1 , b_2 - b_1 \rangle = (a_2 - a_1)\vec{i} + (b_2 - b_1)\vec{j}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\cos\alpha = \frac{(a_1^2 + b_1^2) + (a_2^2 + b_2^2) - \left[(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2\right]}{2|\vec{V}_1||\vec{V}_2|}$$

$$= \frac{2a_1a_2 + 2b_1b_2}{2|\vec{V}_1||\vec{V}_2|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{|\vec{V}_1||\vec{V}_2|} = \frac{\vec{V}_1 . \vec{V}_2}{|\vec{V}_1||\vec{V}_2|}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{V}_1 . \vec{V}_2}{|\vec{V}_1||\vec{V}_2|} \Rightarrow \vec{V}_1 . \vec{V}_2 = |\vec{V}_1||\vec{V}_2|\cos\alpha$$

با توجه به اینکه $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ ، خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{V_1} . \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_2} . \overrightarrow{V_1} \quad \text{(قانون تعویض‌پذیری)}$$

و همچنین روابط زیر را نیز می‌توان بسادگی تحقیق کرد:

$$\overrightarrow{V_1} . (\overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3}) = \overrightarrow{V_1} . \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_1} . \overrightarrow{V_3} \quad \text{(قانون پخش‌پذیری)}$$

هرگاه $\overrightarrow{V_1}$ و $\overrightarrow{V_2}$ بردارهایی در $\overrightarrow{V_2}$ بوده و c یک اسکالر باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$c(\overrightarrow{V_1} . \overrightarrow{V_2}) = (c\overrightarrow{V_1}) . \overrightarrow{V_2}$$

$$\overrightarrow{V_1} . \overrightarrow{V_1} = |\overrightarrow{V_1}|^2$$

$$0 . \overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{V_1} . 0 = 0$$

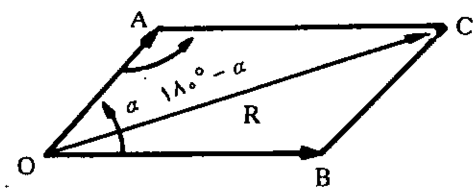
$$(\overrightarrow{V_1} . \overrightarrow{V_2} = 0) \Longleftrightarrow \left(\overrightarrow{V_1} = 0 \vee \overrightarrow{V_2} = 0 \vee (\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}) = \pm\frac{\pi}{2}\right)$$

• **اندازهٔ برآیند دو بردار**

دوبردار $\overrightarrow{V_1}$ و $\overrightarrow{V_2}$ را درنظرگرفته و برآیند (مجموع‌هندسی) آنها را مشخص می‌کنیم.

اگر $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{V_1}$ و $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{V_2}$ و $(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}) = \alpha$ و $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{R}$ مجموع هندسی (برآیند) آنها باشد، در مثلث $\overset{\Delta}{OAC}$ داریم:

$$OA = |\overrightarrow{V_1}| \quad \text{و} \quad AC = |\overrightarrow{V_2}| \quad \text{و} \quad O\hat{A}C = 180^\circ - \alpha$$



طبق رابطهٔ کسینوسها می‌توان نوشت:

$$\overset{\Delta}{OAC} : OC^2 = OA^2 + AC^2 - 2OA \times AC \cos O\hat{A}C$$

$$\Rightarrow |\vec{R}|^2 = |\overrightarrow{V_1}|^2 + |\overrightarrow{V_2}|^2 - 2|\overrightarrow{V_1}|.|\overrightarrow{V_2}|\cos(180^\circ - \alpha)$$

و باتوجه به $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ رابطهٔ بالا را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$|\vec{R}|^2 = |\overrightarrow{V_1}|^2 + |\overrightarrow{V_2}|^2 + 2|\overrightarrow{V_1}|.|\overrightarrow{V_2}|\cos(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}) \quad \text{(I)}$$

بنابراین، بین چهار جزو $|\overrightarrow{V_1}|$ و $|\overrightarrow{V_2}|$ و $|\overrightarrow{R}|$ و $(V , V) = \alpha$ سه‌جزو معلوم باشد، می‌توان با استفاده از رابطهٔ (I) جزو مجهول را محاسبه کرد.

مثال ۳: طول‌دو بردار $\overrightarrow{V_1}$ و $\overrightarrow{V_2}$ به‌ترتیب ۶ و ۴ و زاویهٔ‌بین‌دوبردار ۱۲۰° است. طول بردار برآیند را حساب کنید.

حل: طبق رابطه برآیند دو بردار (رابطهٔ I) خواهیم داشت:

$$|\vec{R}|^2 = 6^2 + 4^2 + 2 \times 6 \times 4 \cos 120^\circ$$

$$= 36 + 16 - 24 = 28 \Rightarrow |\vec{R}| = 2\sqrt{7}$$

مثال ۴: اگر $|\vec{V_۱}| = ۳$ و $|\vec{V_۲}| = ۴$ و $|\vec{V_۱} + \vec{V_۲}| = \sqrt{۱۳}$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ $(\vec{V_۱}, \vec{V_۲})$ را حساب کنید.

حل: داریم:

$$|\vec{V_۱} + \vec{V_۲}| = |\vec{R}| \Rightarrow |\vec{R}|^۲ = |\vec{V_۱}|^۲ + |\vec{V_۲}|^۲ + ۲|\vec{V_۱}||\vec{V_۲}| \cos (\vec{V_۱}, \vec{V_۲})$$

$$\Rightarrow ۱۳ = ۹ + ۱۶ + ۲ \times ۳ \times ۴ \cos (\vec{V_۱}, \vec{V_۲}) \Rightarrow \cos (\vec{V_۱}, \vec{V_۲}) = -\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \cos (\vec{V_۱}, \vec{V_۲}) = \cos ۱۲۰^\circ \Rightarrow (\vec{V_۱}, \vec{V_۲}) = ۱۲۰^\circ$$

تمرین: اگر $|\vec{V_۱}| = ۳$ و $|\vec{V_۱} + \vec{V_۲}| = \sqrt{۱۳}$ و $(\vec{V_۱}, \vec{V_۲}) = ۱۲۰^\circ$ باشد، اندازهٔ $|\vec{V_۲}|$ را حساب کنید.

راهنمایی: با استفاده از فرمول اندازهٔ برآیند دو بردار (رابطهٔ I) مانند مثال قبل نتیجه بگیرید که $|\vec{V_۲}| = ۴$ است.

● قرینهٔ یک بردار

قرینهٔ $\vec{a}$ به $-\vec{a}$ نمایش داده می‌شود. به عبارت دیگر قرینهٔ یک بردار مانند: $\vec{a}$ برداری است مانند: $-\vec{a}$ که با بردار a هم‌اندازه، همراستا و مختلف‌الجهت با آن باشد. با توجه به مطلب فوق می‌توان نوشت:

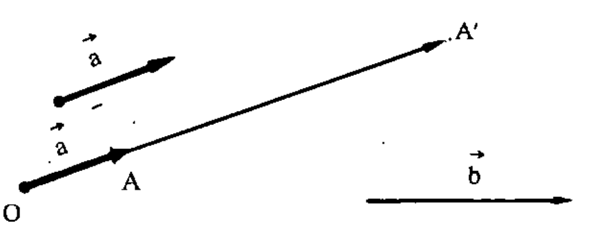
$$\vec{a} - \vec{b} = -(\vec{b} - \vec{a})$$

مثال ۵: اگر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باهم زاویهٔ ۴۵° تشکیل دهند، بردارهای زیر را رسم کنید:

۱) $۴\vec{a}$ ۲) $\vec{a} + ۳\vec{b}$ ۳) $۲\vec{a} - \vec{b}$

حل: ۱) اگر $\vec{OA} = \vec{a}$ باشد، $\vec{OA'} = ۴\vec{a}$ است.

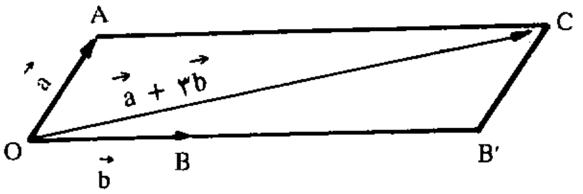
باتوجه به اینکه $|\vec{OA'}| = ۴\,|\vec{OA}|$ اختیار شده باشد.



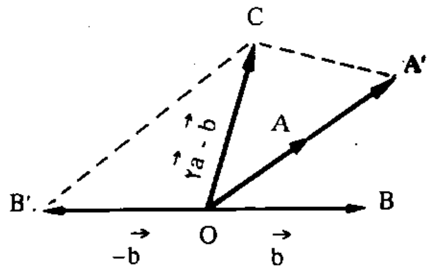
۲) با توجه به شکل زیر داریم:

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB'} = \vec{a} + ۳\vec{b}$$

$$(|\vec{OB'}| = ۳|\vec{OB}|)$$



۳) برای پیدا کردن $۲\vec{a} - \vec{b}$ ابتدا بردار $۲\vec{a}$ و سپس بردار $-\vec{b}$ را پیدا می‌کنیم و سرانجام مجموع هندسی آنها یعنی: $۲\vec{a} + (-\vec{b})$ یا همان $۲\vec{a} - \vec{b}$ را رسم می‌کنیم.



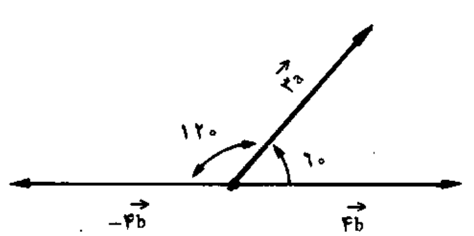
مثال ۶: اگر $|\vec{a}| = ۲$ و $|\vec{b}| = ۱$ و $(\vec{a}, \vec{b}) = ۶۰^\circ$ باشد، اندازهٔ بردارهای زیر را حساب کنید:

۱) $۳\vec{a} - ۴\vec{b}$ ۲) $-۳\vec{a} - ۳\vec{b}$ ۳) $۳\vec{a} + ۴\vec{b}$

حل: ۱) داریم:

$$۳\vec{a} - ۴\vec{b} = ۳\vec{a} + (-۴\vec{b})$$

$$(\vec{V_۱}, \vec{V_۲}) = ۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ$$



با فرض $\overrightarrow{V_1}=3\vec{a}$, $\overrightarrow{V_2}=4\vec{b}$ خواهیم داشت:

$|\overrightarrow{V_1}|=3|\vec a|=3\times2=6$ و

$|\overrightarrow{V_2}|=|-4\vec b|=4|\vec b|=4\times1=4$

با استفاده از دستور برآیند دو بردار (رابطهٔ I) نتیجه می‌شود:

$$|\vec R|^2=|3\vec a+(-4\vec b)|^2=|\overrightarrow{V_1}+\overrightarrow{V_2}|^2=$$

$$|\overrightarrow{V_1}|^2+|\overrightarrow{V_2}|^2+2|\overrightarrow{V_1}|.|\overrightarrow{V_2}|\cos 120^\circ$$

$$|3\vec a-4\vec b|^2=6^2+4^2+2\times6\times4\cos 120^\circ$$

$$=36+16+48(-\tfrac{1}{2})=28$$

$$\Rightarrow |3\vec a-4\vec b|=2\sqrt{7}$$

۲) داریم:

$|-3\vec a|=3|\vec a|=3\times2=6$ و $|-3\vec b|=3|\vec b|=3\times1=3$

$$(-3\vec a,-3\vec b)=(\vec a,\vec b)=60^\circ$$

$$|-3\vec a-3\vec b|^2=|-3\vec a|^2+|-3\vec b|^2+2|-3\vec a|.|-3\vec b|\cos 60^\circ$$

$$=6^2+3^2+2\times6\times3(\tfrac{1}{2})=36+9+18=63$$

$$\Rightarrow |-3\vec a-3\vec b|=\sqrt{63}=3\sqrt{7}$$

۳) داریم:

$|3\vec a|=3|\vec a|=3\times2=6$ و $|4\vec b|=4\times1=4$

$$(3\vec a,4\vec b)=60^\circ$$

بنابراین:

$$|3\vec a+4\vec b|^2=|3\vec a|^2+|4\vec b|^2+2|3\vec a|.|4\vec b|\cos 60^\circ$$

$$=6^2+4^2+2\times6\times4(\tfrac{1}{2})=36+16+24=76$$

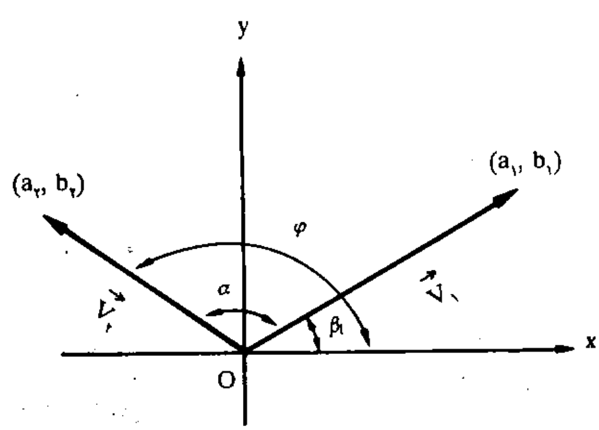
$$\Rightarrow |3\vec a+4\vec b|=\sqrt{76}=2\sqrt{19}$$

تمرین: اگر $|\vec a|=4$ و $|\vec b|=3$ و $(\vec a,\vec b)=30^\circ$ باشد، اندازهٔ بردارهای زیر را حساب کنید:

۱) $2\vec a+\vec b$ ۲) $3\vec a-2\vec b$ ۳) $-2\vec a-3\vec b$

تعبیر هندسی حاصل‌ضرب داخلی (نقطه‌ای) دو بردار

دو بردار غیرصفر $\overrightarrow{V_1}=\langle a_1,b_1\rangle$ و $\overrightarrow{V_2}=\langle a_2,b_2\rangle$ را در دستگاه مختصات با زاویهٔ بین $(\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2})=\alpha$ در نظر می‌گیریم.



با فرض $\vec{V_1} = \vec{3a}$, $\vec{V_2} = \vec{4b}$ خواهیم داشت:

$|\vec{V_1}| = 3|\vec{a}| = 3\times 2 = 6$ و

$|\vec{V_2}| = |-\vec{4b}| = 4|\vec{b}| = 4\times 1 = 4$

با استفاده از دستور برآیند دو بردار (رابطهٔ I) نتیجه می‌شود:

$$|\vec{R}|^2 = |\vec{3a} + (-\vec{4b})|^2 = |\vec{V_1} + \vec{V_2}|^2 =$$

$$|\vec{V_1}|^2 + |\vec{V_2}|^2 + 2|\vec{V_1}|.|\vec{V_2}| \cos 120°$$

$$|\vec{3a} - \vec{4b}|^2 = 6^2 + 4^2 + 2\times 6\times 4\cos 120°$$

$$= 36 + 16 + 48(-\frac{1}{2}) = 28$$

$$\Rightarrow |\vec{3a} - \vec{4b}| = 2\sqrt{7}$$

۲) داریم:

$|-\vec{3a}| = 3|\vec{a}| = 3\times 2 = 6$ و $|-\vec{3b}| = 3|\vec{b}| = 3\times 1 = 3$

$$(-\vec{3a}, -\vec{3b}) = (\vec{a}, \vec{b}) = 60°$$

$$|-\vec{3a} - \vec{3b}|^2 = |-\vec{3a}|^2 + |-\vec{3b}|^2 + 2|-\vec{3a}|.|-\vec{3b}|\cos 60°$$

$$= 6^2 + 3^2 + 2\times 6\times 3(\frac{1}{2}) = 36 + 9 + 18 = 63$$

$$\Rightarrow |-\vec{3a} - \vec{3b}| = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$$

۳) داریم:

$|\vec{3a}| = 3|\vec{a}| = 3\times 2 = 6$ و $|\vec{4b}| = 4\times 1 = 4$

$$(\vec{3a}, \vec{4b}) = 60°$$

بنابراین:

$$|\vec{3a} + \vec{4b}|^2 = |\vec{3a}|^2 + |\vec{4b}|^2 + 2|\vec{3a}|.|\vec{4b}| \cos 60°$$

$$= 6^2 + 4^2 + 2\times 6\times 4(\frac{1}{2}) = 36 + 16 + 24 = 76$$

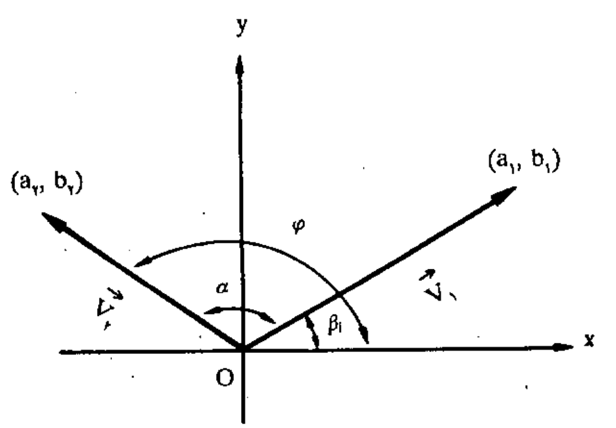
$$\Rightarrow |\vec{3a} + \vec{4b}| = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$$

تمرین: اگر $|\vec{a}| = 4$ و $|\vec{b}| = 3$ و $(\vec{a}, \vec{b}) = 30°$ باشد، اندازهٔ بردارهای زیر را حساب کنید:

۱) $\vec{2a} + \vec{b}$ ۲) $\vec{3a} - \vec{2b}$ ۳) $-\vec{2a} - \vec{3b}$

تعبیر هندسی حاصل‌ضرب داخلی (نقطه‌ای) دو بردار

دو بردار غیرصفر $\vec{V_1} = \langle \vec{a_1}, \vec{b_1} \rangle$ و $\vec{V_2} = \langle \vec{a_2}, \vec{b_2} \rangle$ را در دستگاه مختصات با زاویهٔ بین $\alpha = (\vec{V_1}, \vec{V_2})$ در نظر می‌گیریم.



و بنابراین می‌توان نوشت:

$$\cos\alpha = \cos(\varphi - \beta) = \cos\varphi\cos\beta + \sin\varphi\sin\beta$$

با توجه به شکل داریم: $\alpha = \varphi - \beta$

اما با توجه به نمودار، داریم:

$$\sin\beta = \frac{b_۱}{|\vec{V}_۱|} \quad , \quad \cos\beta = \frac{a_۱}{|\vec{V}_۱|} \quad , \quad \sin\varphi = \frac{b_۲}{|\vec{V}_۲|}$$

$$\cos(\pi - \varphi) = \frac{-a_۲}{|\vec{V}_۲|} \Rightarrow -\cos\varphi = \frac{-a_۲}{|\vec{V}_۲|}$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{a_۲}{|\vec{V}_۲|}$$

پس می‌توان نوشت:

$$\cos\alpha = \frac{a_۲}{|\vec{V}_۲|}\cdot\frac{a_۱}{|\vec{V}_۱|} + \frac{b_۱}{|\vec{V}_۱|}\cdot\frac{b_۲}{|\vec{V}_۲|} = \frac{a_۱a_۲ + b_۱b_۲}{|\vec{V}_۱||\vec{V}_۲|}$$

$$= \frac{\vec{V}_۱\cdot\vec{V}_۲}{|\vec{V}_۱||\vec{V}_۲|}$$

ودر نتیجه داریم:

$$\vec{V}_۱\cdot\vec{V}_۲ = |\vec{V}_۱||\vec{V}_۲|\cos\alpha$$

همچنین داریم:

$$\cos\alpha = \frac{a_۱a_۲ + b_۱b_۲}{\sqrt{a_۱^۲ + b_۱^۲}\cdot\sqrt{a_۲^۲ + b_۲^۲}} = \frac{a_۱a_۲ + b_۱b_۲}{\sqrt{(a_۱^۲ + b_۱^۲)(a_۲^۲ + b_۲^۲)}}$$

مثال ۷: زاویهٔ بین دو بردار $\vec{V}_۱ = \langle -۳ , ۴ \rangle$ و $\vec{V}_۲ = \langle ۰ , ۲ \rangle$ را به‌دست آورید.

حل:

$$\cos\alpha = \frac{(-۳)(۰) + (۴)(۲)}{\sqrt{\left[(-۳)^۲ + ۴^۲\right]\left[(۰)^۲ + ۲^۲\right]}} = \frac{۸}{۱۰} = ۰/۸$$

$$\cos\alpha = ۰/۸ \Rightarrow \alpha = \text{Arc}\cos(۰/۸) \simeq ۳۶^\circ$$

مثال ۸: زاویهٔ دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر $\frac{\pi}{۳}$ است، اگر $|\vec{a}| = ۲$ و $|\vec{b}| = ۳$ باشد، زاویه‌ای که دو بردار $(\vec{a} + \vec{b})$ و $(\vec{a} - \vec{b})$ با هم می‌سازند را حساب کنید.

$$(\vec{a} + \vec{b})\cdot(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} + ۲\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^۲ + ۲\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^۲ = ۲^۲ + ۲\times۲\times۳\cos\frac{\pi}{۳} + ۳^۲ = ۱۹$$

$$\Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^۲ = ۱۹ \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{۱۹}$$

$$(\vec{a} - \vec{b})\cdot(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} - ۲\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b} =$$

$$|\vec{a}|^۲ - ۲\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^۲$$

$$= ۲^۲ - ۲\times۲\times۳\cos\frac{\pi}{۳} + ۳^۲ = ۷ \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{۷}$$

$$(\vec{a} - \vec{b})\cdot(\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a} - \vec{b}||\vec{a} + \vec{b}|\cos[(\vec{a} - \vec{b}), (\vec{a} + \vec{b})]$$

$$|\vec{a}|^۲ - |\vec{b}|^۲ = ۴ - ۹ =$$

$$\sqrt{۷} \times \sqrt{۱۹}\cos((\vec{a} - \vec{b}), (\vec{a} + \vec{b})) \Rightarrow ((\vec{a} - \vec{b}),$$

$$(\vec{a} + \vec{b})) \simeq ۱۱۵^\circ/۷$$

مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۱۰)

فروشندهٔ دوره‌گرد

MICROMATH
Summer 1992
David Green
Lought borough University of Technology

■ ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

□ مقدمه

مسألهٔ معروف فروشندهٔ دوره‌گرد[1] در رابطه با یافتن کوتاهترین مسیر مسافرت به چند شهر، به هر ترتیب، و هر شهر یکبار، و بازگشت به شهر مبدأ، مسأله‌ای آسان فهم است که بلافاصله به عنوان مسأله‌ای که در دنیای واقعی از اهمیت خاصی برخوردار است شناخته شدهٔ است.

به ازای تعداد اندکی شهر (مثلاً ۱۰) می‌توان از کامپیوتر کوچکی[2] برای محاسبهٔ جمیع مسیرها و بنابراین یافتن کوتاهترین مسیر با یقینیِ مطلق بهره برد. اما در مورد تعداد بسیاری از شهرها آزمون جمیع مسیرهای ممکن کاری تقریباً ناممکن است.

حتی ابرکامپیوترهای[3] امروزه نیز نمی‌توانند از عهدهٔ مسألهٔ مشهور ۴۲ ـ شهر[4] برآیند، و محاسبه نشان می‌دهد که حل مسألهٔ ۱۰۰ ـ شهر از این طریق هیچ‌گاه ممکن نیست، زیرا در این مورد در حدود 10^{156} مسیر برای بررسی موجودند!

روشهای بسیار کاراتری از رهیافت «رام‌نشدنی» فوق برای یافتن جواب بهینهٔ[5] مسأله موجودند اما جمیع آنها از لحاظ محاسباتی بسیار سنگین‌اند.

اخیراً گزارش شده است که «بزرگترین نمونه‌ای که تا این زمان به‌طور بهینه حل شده تنها شامل ۳۱۸ شهر است» [۱].

بسیاری معتقدند که اشکال مزبور ـ محاسبات لازمی که با افزون شدن تعداد شهرها خارج از کنترل می‌شوند ـ از ویژگیهای خود مسألهٔ فروشندهٔ دوره‌گرد است. البته جستن بهترین جواب یک چیز است و در دست داشتن آن چیز دیگر!

مقالهٔ حاضر گزارش دو روش مستقیم، یکی برمبنای نقشه و دیگری برمبنای جدول، است که نتیجه‌هایی نسبتاً مناسب با محاسباتی بالنسبه اندک به‌دست می‌دهند. مسألهٔ مورد بحث امکاناتی بسیار برای تحقیقات مبتنی بر کلاس درس یا شخصی و پروژه‌هایی در سطحهای وسیع ـ در مورد ریاضیات و محاسبه، و حتی جغرافیا یا اقتصاد ـ به دست می‌دهد.

□ تعریف مسألهٔ مورد نظر

فروشنده‌ای در شهر T_1 باید سفری به شهرهای T_2، T_3، ...، T_n، به هر ترتیب و هر شهر یکبار، کرده به T_1 بازگردد. کدام مسیر کل فاصلهٔ مسافرت را به حداقل می‌رساند؟

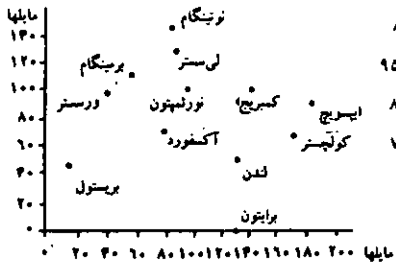
□ نمایش گرافیکی[6]

در این نمایش نقشه‌ای برای نشان دادن شهر تهیّه می‌شود. با به‌کار گرفتن دستگاهی، مختصات شهرها را مشخص می‌کنیم، که از آنها می‌توان فاصله‌های بین شهرها را محاسبه کرد. دستگاه مزبور بین هر دو شهر را کوتاهترین مسیرهای، مستقیم‌الخط در نظر گرفته است.

درک چنین تنظیمی، چون رسم شود، ساده و تشخیص مسیرهای مناسب آن آسان است. اگر قرار شود که از کامپیوتری استفاده به عمل آید، در این صورت ورودی می‌تواند به‌صورت مختصات جدول فاصلهٔ بین شهرها باشد.

◆ مختصات شهری

برمینگام ۵۷,۱۱۷	لندن ۱۳۰,۵۱
برایتون ۱۳۰,۰	لی‌ستر ۸۷,۱۲۷
بریستول ۱۶,۱۴۶	نورثمپتون ۹۵,۱۰۱
کمبریج ۱۴۹,۹۵	نوتینگام ۸۴,۱۴۶
کولچستر ۱۷۴,۷۶	آکسفورد ۷۹,۶۷
ایپسویچ ۱۸۴,۸۹	ورستر ۳۸,۹۸



□ نمایش جدولی[7]

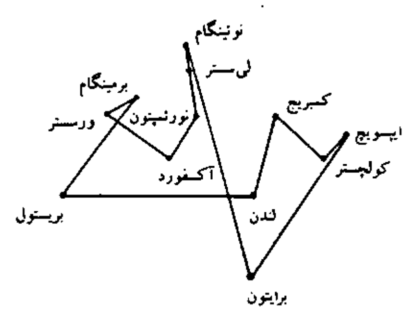
در این نمایش جدولی از فاصله‌های بین شهری تهیّه می‌شود. این روش، با تجویز استفاده از فاصله‌های جاده‌ای واقعی ـ نیز تهیّهٔ مسیرهای یک طرفه یا عدم مسیر، روشی عمومیتر است.

تعیین مسیرهای مناسب، به علت این‌که اساساً طبیعتی عددی دارند، آسان نیست، و در این مورد نمی‌تواند نمایش گرافی‌هامنی معنی‌داری موجود باشد. نیز داده‌های تهیّه شده می‌توانند به‌جای فاصله با هزینهٔ سفر، زمان سفر یا عامل دیگری مرتبط باشند.

□ روش نزدیکترین مکان بعدی[8]

این روش بسیار ساده، که نتیجه‌های مناسبی به دست می‌دهد، خواهان این است که در هر مرحله فروشندهٔ مورد بحث به نزدیکترین شهر نرفته مسافرت کند.

فرض می‌کنیم فروشنده‌ای مایل باشد که از مبدأ سفرش در نوتینگام، و پیش از بازگشتش به این مبدأ، از یازده شهر دیگر دیدن کند. در این صورت، با استفاده از داده‌های مختصاتی، روش نزدیکترین مکان بعدی، مسیر نشان داده شده در زیر را به طول ۷۱۷ مایل پیدا می‌کند. در این مورد جمیع مسیرهای بین شهرها به خط مستقیم فرض شده و فاصله‌های بین شهرها مستقیماً با استفاده از برنامهٔ مزبور از مختصات مربوطه محاسبه شده‌اند.



این مسیر، چنان‌که آشکار است، مسیری مناسب نیست. اما، هنگامی که به جای ۴۷۹۱۰۰۱۶۰۰ مسیر تنها یک مسیر محاسبه شده باشد چه انتظاری می‌توان داشت؟

در واقع، به جای این مسیر، شروع از شهر مجاور لی‌ستر، مسیر بازگشت به مبدأ بسیار بهتری (۶۳۳ مایل) را به دست می‌دهد.

این موضوع راهی ساده، برای اصلاح این روش، بدون افزایش محاسبه‌های بسیار مفصل، به دست می‌دهد. به عبارت دیگر از آن‌جا که مسیری بسته مورد نظر است می‌توانیم مسیر مورد بحث را از هر شهر آغاز و به آن ختم کنیم.

بنابراین با تکرار روش اساسی مزبور در مورد هریک از شهرها ممکن است جوابی بهتر به‌دست آوریم (و معمولاً می‌آوریم).

در واقع با تکرار روش مزبور «بهترین» مسیر را، با ۵۹۶ مایل فاصله، به دست می‌آوریم و با این همه باید تنها دوازده مسیر را محاسبه بکنیم.

این مسیر در واقع مسیر بهینه که ۵۲۸ مایل است نیست، اما قابل قبول (۱۳٪ بیشتر) ومحققاًبسیار بهترازمسیراوّلی (۳۸٪ بیشتر) است.

مقدار محاسبهٔ لازم برای روش نزدیکترین مکان بعدی به کار رفته در مورد n شهر متناسب است با n^2، اگر یکبار به کار رود و با n^3 اگر با شروع از هر شهر تکرار شود.

افراد بشری می‌توانند از عهدهٔ «حل» چنین مسأله‌های کوچکی، در صورتی که آنها را به‌طور گرافیکی نمایش دهند، بخوبی برآیند.

افراد بشر، در مورد مسأله‌ای بزرگ، یا اگر تنها جدول فاصله‌ها را داده باشند، از کارایی بسیار کمتری برخوردار خواهند بود.

ادامه دارد...

* * *

یادداشتها

1. Travelling Saleman
2. microcomputer
3. Supercomputers
4. 42 - city problem
5. optimum solution
6. graphical representation
7. Tabular representation
8. Nearest Next Place method

کاربردهایی از تابع همنگار (هموگرافیک) در هندسه

● دکتر احمد شرف‌الدین

خلاصه . در سطور آینده تابع همنگار و تابع جبری را تعریف می‌کنیم و بیان خواهیم کرد که تابع همنگار، تابع جبری یک‌به‌یک است و این خاصیت را در محاسبه طول نیمساز مثلث و اثبات رابطه‌های نیوتن و دکارت به کار خواهیم برد.

۱ . تعریف تابع همنگار. تابع $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ که در آن a، b، c، و d اعداد حقیقی و x متغیری است با شرط $x \neq -\frac{d}{c}$ تابع همنگار نامیده‌می‌شود.

۲ . تعریف تابع جبری

۲ . ۱ . تعریف تابع همانی. تابع $y = x$ تابع همانی نامیده می‌شود.

۲ . ۲ . تابع ثابت. تابع $y = c$ که در آن c مقدار ثابتی است تابع ثابت نامیده می‌شود.

۲ . ۳ . تعریف تابع جبری. تابع جبری تابعی است که با اجرای اعمال جبری (یعنی جمع، ضرب، تقسیم، توان، و ریشه‌یابی) روی تابع همانی و تابع ثابت حاصل می‌شود به شرط آن‌که تعداد اعمال جبری متناهی باشد.

مثال . تابعهای زیر تابعهای جبری‌اند :

$$y = ۲x \quad و \quad y = ۲x + ۷ \quad و \quad y = ۵x^{۲} + ۶x - ۴$$

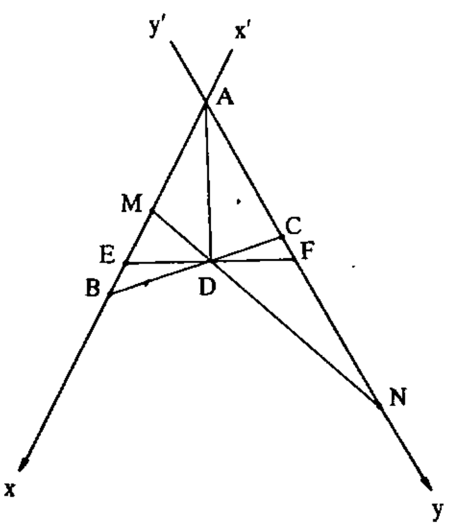
$$و \quad y = \sqrt[۳]{x^{۲} + ۱} \quad و \quad y = \frac{۴x + ۱}{x^{۲} + ۷}$$

۳ . تابع جبری یک‌به‌یک. اگر یک تابع جبری یک‌به‌یک باشد آنگاه آن تابع همنگار است.

۴ . محاسبه طول نیمساز مثلث . در مثلث ABC، طولهای دو ضلع AB و AC را به ترتیب c و b و اندازه زاویه A را α می‌نامیم. اگر طول نیمساز AD را l را بنامیم ثابت کنید رابطه زیر برقرار است :

$$\frac{۱}{b} + \frac{۱}{c} = \frac{۲\cos\frac{\alpha}{۲}}{l}$$

حل . دو محور $x'x$ و $y'y$ را با مبدأ مشترک A، به ترتیب منطبق بر دو خط AB و AC اختیار می‌کنیم. نقطه دلخواه M را روی خط AB اختیار می‌کنیم و آن را به نقطهٔ D وصل می‌کنیم و محل برخورد خط MD را با خط AC، نقطه N می‌نامیم.



اندازه‌های جبری دو بردار $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AN}$ را به ترتیب روی دو محور $x'x$ و $y'y$ با x و y نشان می‌دهیم. چون به ازای هر نقطه M از خط AB یک نقطه N از خط AC حاصل می‌شود و برعکس به ازای هر نقطهٔ N از خط AC یک نقطه M از خط AB حاصل می‌شود پس یک رابطه یک‌به‌یک بین x و y وجود دارد. اما این رابطه جبری است زیرا با اجرای اعمال جبری روی x و مقادیر ثابت (به تعداد متناهی)، عبارت y حاصل می‌شود (برای اثبات این مطلب می‌گوییم در مثلث AMD با معلوم بودن طولهای $\overline{AM}$ و $\overline{AD}$ و اندازه زاویه MAD، اندازه زاویه ADM حساب می‌شود. سپس در مثلث ADN با معلوم بودن طولهای AD و اندازه‌های دو زاویه DAN و ADN طول ضلع AN حساب می‌شود. تمام اعمالی که بکار می‌بریم جبری هستند و تعداد آنها متناهی است. باید توجه داشت که ما محاسبه نکرده‌ایم که طولانی باشد بلکه فقط با استدلال ثابت کرده‌ایم که مقدار $\overline{AN}$ بر حسب مقدار AM بوسیله یک تابع جبری به دست می‌آید).

با توجه به مطالب مذکور تابع y بر حسب x یک تابع همنگار است که آن را با رابطه زیر بیان می‌کنیم:

$$y = \frac{mx + n}{px + q} \qquad (۱)$$

اگر در شکل مقدار $\overline{AM}$ را برابر y اختیار کنیم آنگاه مقدار $\overline{AN}$ برابر x می‌شود پس می‌توان در رابطه (۱) جای x و y را عوض نمود و چنین نوشت:

$$x = \frac{my + n}{py + q} \qquad (۲)$$

از مقایسه دو رابطه (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $m = -q$. با توجه به این مطلب رابطه (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y = \frac{mx + n}{px - m} \qquad (۳)$$

حال توجه می‌کنیم که اگر نقطه M روی محور $x'x$ به سوی نقطه A میل کند آنگاه نقطه N روی محور $y'y$ به سوی همان نقطه A میل می‌کند. پس اگر در رابطه (۳)، مقدار x به سوی صفر میل کند مقدار y به سوی صفر میل خواهد کرد. از این مطلب نتیجه می‌شود که $n = ۰$. لذا رابطه (۳) به صورت زیر است:

$$y = \frac{mx}{px - m} \qquad (۴)$$

رابطه (۴) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} = \frac{p}{m} = \text{ثابت} \qquad (۵)$$

پس هنگامی که نقطه M روی خط AC حرکت می‌کند بین دو مقدار متغیر $\overline{AM}$ و $\overline{AN}$ رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{۱}{\overline{AM}} + \frac{۱}{\overline{AN}} = \frac{p}{m} = \text{ثابت} \qquad (۶)$$

برای تعیین مقدار ثابت $\frac{p}{m}$ یک حالت خاص در نظر می‌گیریم: حالتی که $\overline{AM} = \overline{AN}$ باشد. از نقطه D عمودی بر خط AD رسم می‌کنیم و نقطه‌های برخورد آن عمود را با دو خط AC و AB به ترتیب E و F می‌نامیم. با توجه به رابطه (۵) چنین می‌نویسیم:

$$\frac{۱}{\overline{AE}} + \frac{۱}{\overline{AF}} = \frac{۱}{\overline{AE}} + \frac{۱}{\overline{AF}} = \frac{p}{m} \qquad (۷)$$

از طرفی چنین داریم:

$$l = \overline{AD} = \overline{AE} \cos \frac{\alpha}{۲} \qquad (۸)$$

از (۷) و (۸) نتیجه می‌شود:

$$\frac{p}{m} = \frac{۲\cos \frac{\alpha}{۲}}{l} \qquad (۹)$$

رابطه (۵) با توجه به رابطه (۹) چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} = \frac{۲\cos \frac{\alpha}{۲}}{l} \qquad (۱۰)$$

اگر نقطه M بر روی نقطه B جای گیرد آنگاه نقطه N بر روی نقطه C جای خواهد گرفت پس می‌توان در رابطه (۱۰) به جای x و y به ترتیب c و b گذاشت و رابطه زیر را به دست آورد:

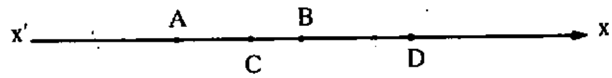
$$\frac{۱}{b} + \frac{۱}{c} = \frac{۲\cos \frac{\alpha}{۲}}{l} \qquad (۱۱)$$

که همان رابطه مطلوب است. از این رابطه طول نیمساز مثلث (یعنی l) بر حسب b و c (یعنی طولهای دو ضلع AC و AB) و اندازه زاویه A حساب می‌شود.

۵. تقسیم توافقی

۱.۵ تعریف تقسیم توافقی. بر محور $x'x$ چهار نقطه A، B، C و D در نظر می‌گیریم. می‌گوییم این چهار نقطه تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند اگر رابطه زیر برقرار باشد:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \qquad (۱۲)$$



۵ . ۲ . کاربرد تابع همنگار در تقسیم توافقی

سه نقطه A ، B و C را بر محور x'ox در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم نقطه D را بر محور x'ox طوری تعیین کنیم که چهار نقطه A ، B ، C و D تشکیل تقسیم توافقی بدهند یعنی رابطه زیر مسلم باشد:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \qquad (۱۳)$$

برای این منظور دو خط موازی AP و BQ رسم می‌کنیم و بر خط AP نقطه دلخواه $M \neq A$ را اختیار می‌کنیم و محل برخورد خط ML با خط BQ را نقطه N می‌نامیم. بر خط BQ نقطه L را طوری انتخاب می‌کنیم که $\overline{NB} = \overline{BL}$ باشد. نقطه D محل برخورد خط ML با خط AB نقطه مطلوب است یعنی چهار نقطه A ، B ، C و D تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند. برای اثبات می‌گوییم از تشابه دو مثلث CAM و CBN رابطه زیر حاصل می‌شود :

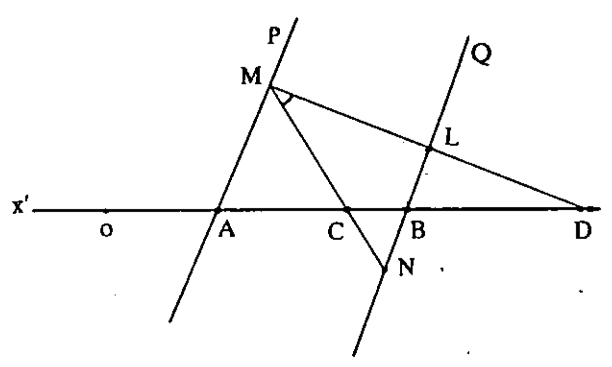
$$\frac{CA}{CB} = \frac{AM}{BN} \qquad (۱۴)$$

همچنین از تشابه دو مثلث DAM و DBL رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{DA}{DB} = \frac{AM}{BL} \qquad (۱۵)$$

از مقایسه دو رابطه (۱۴) و (۱۵) با رعایت آنکه $NB = BL$ ، حاصل می‌شود :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$$



که چون علامتهای جبری در نظر گرفته شود رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

حال اگر دو نقطه A و B را ثابت نگاه داریم و نقطه C را روی محور x'x حرکت دهیم نقطه D روی این محور حرکت می‌کند. اما از ترسیم پیشگفته نتیجه می‌شود که به ازای هر نقطه C فقط یک نقطه D حاصل می‌شود و برعکس.

اگر قرار دهیم $\overline{OC} = x$ و $\overline{OD} = y$ ، از مطالب بالا نتیجه می‌شود یک رابطه یک‌به‌یک بین x و y وجود دارد. این رابطه جبری است زیرا ترسیم پیشگفته نشان می‌دهد که مقدار y بر حسب x با اجرای اعمال جبری روی x و مقادیر ثابت (به تعداد متناهی) حاصل می‌شود زیرا رابطه تشابه دو مثلث یک رابطه جبری است.

پس تابع y بر حسب x یک تابع جبری یک‌به‌یک است یعنی یک تابع همنگار به صورت زیر :

$$y = \frac{mx+n}{px+q} \qquad (۱۶)$$

اکنون می‌گوییم اگر نقطه C بر نقطه D جای گیرد آنگاه نقطه D بر نقطه C جای خواهد گرفت پس می‌توان جای x و y را در رابطه (۱۶) عوض کرد یعنی می‌توان نوشت :

$$x = \frac{my+n}{py+q} \qquad (۱۷)$$

از مقایسه دو رابطه (۱۶) و (۱۷) نتیجه می‌شود که $m = -q$. با توجه به این مطلب تابع (۱۶) به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$y = \frac{mx+n}{px-m} \qquad (۱۸)$$

۵ . ۳ . رابطه نیوتن. اگر چهار نقطه A ، B ، C و D تشکیل تقسیم توافقی بدهند و نقطه O وسط پاره خط AB باشد آنگاه رابطه زیر که به نام رابطه نیوتن مشهور است برقرار است :

$$\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = \overline{OC}.\overline{OD} \qquad (۱۹)$$

برهان. محور x'x را منطبق بر خط AB با مبدأ O اختیار می‌کنیم. دو نقطه A و B را ثابت نگاه می‌داریم. اگر نقطه C را روی خط AB حرکت می‌دهیم آنگاه نقطه D روی خط AB حرکت می‌کند. اگر قرار دهیم $OC = x$ و $OD = y$ رابطه زیر برقرار است (بنابر مطلب

شماره ۵ . ۲):

$$y=\frac{mx+n}{px-m} \qquad (۲۰)$$

اگر نقطه C روی خط AB حرکت کند و به سوی نقطه O میل کند نقطه D به سوی بی‌نهایت می‌رود پس اگر در رابطه (۲۰) مقدار x به سوی صفر میل کند مقدار y به سوی بی‌نهایت میل می‌کند. از این مطلب نتیجه می‌شود که $m = ۰$ پس رابطه (۲۰) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$y=\frac{n}{px} \qquad (۲۱)$$

پس

$$xy=\frac{n}{p}= \text{ثابت} \qquad (۲۲)$$

پس هنگامی‌که نقطه C و D حرکت می‌کنند حاصل‌ضرب $\overline{OC}\,.\,\overline{OD}$ ثابت می‌ماند.

$$\overline{OC}\,.\,\overline{OD}=\frac{n}{p} \qquad (۲۳)$$

برای تعیین این مقدار ثابت یک حالت خاص در نظر می‌گیریم. حالتی که نقطه C به سوی نقطه A (یا B) میل کند در این صورت نقطه D به سوی نقطه A (یا B) میل می‌کند و نتیجه می‌گیریم که:

$$\overline{OA}^{۲}=\overline{OB}^{۲}=\frac{n}{p} \qquad (۲۴)$$

رابطه (۲۳) با توجه به رابطه (۲۴) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\overline{OC}\,.\,\overline{OD}=\overline{OA}^{۲}=\overline{OB}^{۲}$$

۵ . ۴ . رابطه دکارت. اگر چهار نقطه A ، B ، C و D تشکیل تقسیم توافقی بدهند آنگاه رابطه زیر که به نام رابطه دکارت مشهور است برقرار است:

$$\frac{۲}{\overline{AB}}=\frac{۱}{\overline{AC}}+\frac{۱}{\overline{AD}}$$

برهان. دو نقطه A و B را ثابت نگاه می‌داریم و نقطه C را روی خط AB را حرکت می‌دهیم. نقطه D روی خط AB حرکت می‌کند. محور x'x را منطبق بر خط AB با مبدأ A اختیار می‌کنیم و قرار می‌دهیم:

$\overline{AC} = x$ و $\overline{AO} = y$. بنابر مطلب شماره (۵ . ۲)، بین x و y یک رابطه همنگار به صورت زیر برقرار است:

$$y=\frac{mx+n}{px-m} \qquad (۲۵)$$

اگر نقطه C حرکت کرده و به سوی نقطه A میل کند نقطه D حرکت کرده و به سوی نقطه A میل می‌کند پس اگر در رابطه (۲۵) مقدار x بسوی صفر میل کند مقدار y نیز به سوی صفر میل خواهد کرد. از این مطلب نتیجه می‌شود که $n = ۰$ یعنی رابطه (۲۵) به صورت زیر است:

$$y=\frac{mx}{px-m} \qquad (۲۶)$$

از رابطه (۲۶) نتیجه می‌شود:

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}=\frac{p}{m}= \text{ثابت} \qquad (۲۷)$$

یعنی وقتی دو نقطه C و D حرکت می‌کنند. رابطه زیر مسلم است:

$$\frac{۱}{\overline{AB}}+\frac{۱}{\overline{AD}}=\frac{p}{m}= \text{ثابت} \qquad (۲۸)$$

برای تعیین این مقدار ثابت، یک حالت خاص در نظر می‌گیریم. حالتی که نقطه C به سوی نقطه B میل کند. در این صورت نقطه D نیز به سوی نقطه B میل می‌کند. با توجه به این مطلب از رابطه (۲۸) نتیجه می‌شود:

$$\frac{۱}{\overline{AB}}+\frac{۱}{\overline{AB}}=\frac{p}{m} \qquad (۲۹)$$

و یا

$$\frac{۲}{\overline{AB}}=\frac{p}{m} \qquad (۳۰)$$

رابطه (۲۸) با رعایت رابطه (۳۰) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{۱}{\overline{AC}}+\frac{۱}{\overline{AD}}=\frac{۲}{\overline{AB}}$$

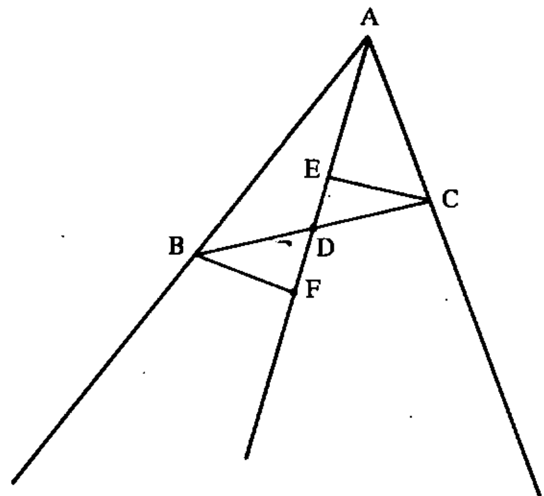
۵ . ۵ . محاسبه طول نیمساز مثلث. در مثلث ABC نیمساز AD را رسم می‌کنیم و اندازه زاویه A را α می‌نامیم. می‌خواهیم رابطه زیر را ثابت کنیم:

$$\frac{۱}{AB}+\frac{۱}{AC}=\frac{۲\cos\frac{\alpha}{۲}}{AD}$$

برهان. از دو نقطه B و C عمودهای BF و CE را بر خط AD فرود می‌آوریم. می‌گوییم چهار نقطه A ، D ، E و F تشکیل تقسیم

توافقی می‌دهند. برای اثبات این مطلب می‌گوییم از تشابه دو مثلث DBF و DEC رابطه زیر نتیجه می‌شود :

(۳۱) $$\frac{DE}{DF} = \frac{CE}{BF}$$



از تشابه دو مثلث ABF و ACE رابطه زیر حاصل می‌شود :

(۳۰) $$\frac{AE}{AF} = \frac{CE}{BF}$$

از مقایسه دو رابطه (۲۹) و (۳۰) رابطه زیر به دست می‌آید :

(۳۱) $$\frac{DE}{DF} = \frac{AE}{AF}$$

رابطه (۳۱) با رعایت علامتهای جبری، به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} = -\frac{\overline{AE}}{\overline{AF}}$$

پس چهار نقطه A ، D ، E و F تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند. لذا می‌توانیم رابطه دکارت را به صورت زیر بنویسیم (بنابر ۵ . ۴) :

(۳۲) $$\frac{2}{\overline{AD}} = \frac{1}{\overline{AE}} + \frac{1}{\overline{AF}}$$

اما در دو مثلث قائم‌الزاویه AEC و AFB دو رابطه زیر برقرار است.

(۳۳) $$\overline{AE} = \overline{AC}\cos\frac{\alpha}{2} \quad , \quad \overline{AF} = \overline{AB}\cos\frac{\alpha}{2}$$

رابطه (۳۲) با رعایت دو رابطه (۳۳) به صورت زیر درمی‌آید :

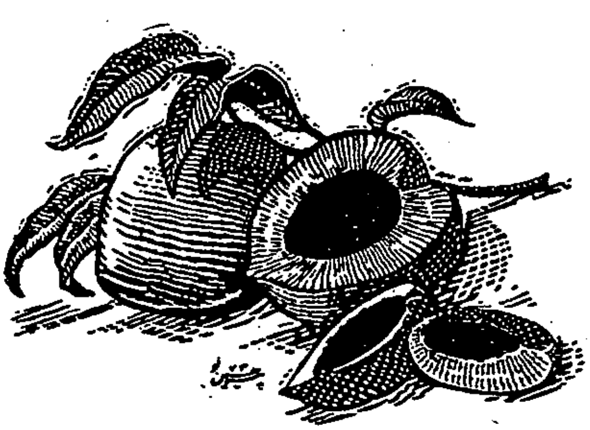
$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{AD}$$

این مسئله را در شماره (۴) حل کرده‌ایم.

تفریح اندیشه ۱

ضخامت لایهٔ نرم آلبالو با ضخامت هستهٔ آن یکی است. می‌پذیریم که شکل آلبالو و هسته گرد است. آیا شما می‌توانید در ذهنتان برآورد کنید که حجم قسمت نرم آلبالو از حجم هسته، چند بار بیشتر است؟

جواب در صفحهٔ ۸۸



طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۱۰)

Kutepov & Rubanov, ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

اثبات چند اتحاد مثلثاتی به کمک فرمول اویلر

فرمول اویلر عبارت است از:

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x \quad (۱)$$

که در آن e مبنای لگاریتم طبیعی یا بسط $(1+\frac{1}{n})^n$ چون $n \to \infty$ و i عدد $\sqrt{-1}$ است. به کمک این فرمول می‌توان بسیاری از اتحادهای مثلثاتی از جمله اتحادهای زیر را به اثبات رساند.

اثبات اتحاد اساسی مثلثات: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (۱)

حل: در فرمول اویلر $-x$ را به جای x قرار می‌دهیم:

$$e^{-xi} = \cos(-x) + i \sin(-x)$$

$$e^{-xi} = \cos x - i \sin x \quad (۲)$$

طرفین رابطه‌های (۱) و (۲) را در هم ضرب می‌کنیم:

$$e^{xi} \cdot e^{-xi} = (\cos x + i \sin x)(\cos x - i \sin x)$$

$$e^0 = \cos^2 x - i^2 \sin^2 x$$

$$1 = \cos^2 x - (-1) \sin^2 x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

(۲) اثبات اتحادهای:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

حل: اتحاد زیر را درنظر می‌گیریم:

$$e^{xi} \cdot e^{yi} = e^{(x+y)i} \quad (۳)$$

با استفاده از فرمول اویلر داریم:

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{yi} = \cos y + i \sin y$$

$$e^{(x+y)i} = \cos(x + y) + i \sin(x + y)$$

با استفاده از این رابطه‌ها و (۳) داریم:

$$(\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y)$$

$$= \cos(x + y) + i \sin(x + y)$$

$$\cos x \cos y + i \cos x \sin y + i \sin x \cos y$$

$$+ i^2 \sin x \sin y = \cos(x + y) + i \sin(x + y)$$

$$(\cos x \cos y - \sin x \sin y) + (\sin x \cos y + \cos x \sin y)i = \cos (x + y) + i \sin (x + y)$$

با برابر هم قرار دادن قسمتهای حقیقی و قسمتهای انگاری از دو طرف، اتحادهای مطلوب را به‌دست می‌آوریم.

(۳) اثبات اتحادهای:

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$ و $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

حل: تساوی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(e^{xi})^2 = e^{2xi}$$

با استفاده از این تساوی و فرمول اویلر خواهیم داشت:

$$(\cos x + i \sin x)^2 = \cos 2x + i \sin 2x$$

$$\cos^2 x + i^2 \sin^2 x + 2i \sin x \cos x = \cos 2x + i \sin 2x$$

$$(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2i \sin x \cos x = \cos 2x + i \sin 2x$$

در نتیجه:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

و

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

(۴) استخراج فرمول دموآور:

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

حل: تساوی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(e^{xi})^n = e^{nxi} \qquad (۴)$$

بااستفاده از فرمول اویلر چون nx را به جای x قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$e^{nxi} = \cos nx + i \sin nx \qquad (۵)$$

اکنون چون در طرفین رابطهٔ (۴) از فرمولهای (۱) و (۵) قرار دهیم، به دست می‌آوریم:

$$(\cos x + i \sin x)^2 = \cos nx + i \sin nx$$

که همان رابطهٔ دموآور است.

تبصره. همان‌طور که در فوق هم اشاره شد به کمک فرمول اویلر می‌توان بسیاری از اتحادهای مثلثاتی را اثبات کرد و از خواننده می‌خواهیم که خود در این مورد به تحقیق پرداخته اتحادهای دیگری را به اثبات برساند.

ادب ریاضی

ددکیند زندگی طویل و آرامی داشته است. با اینکه برخی از آثارش (نظریهٔ او دربارهٔ اعداد اصم) برای دانشجویان آنالیز که یک نسل قبل از مرگ او به وجود آمدند، کلاسیک و عادی شده بود، وی بزودی در شمار ریاضی‌دانان افسانه‌ای درآمد و در مدت حیاتش بسیاری از مردم او را در شمار درگذشتگان محسوب می‌داشتند. دوازده سال قبل از مرگش «تقویم ریاضی‌دانان» که از طرف مؤسسهٔ نشریات توبنر «Teubner» منتشر می‌شد تاریخ مرگ ددکیند را چهارم سپتامبر ۱۸۹۹ میلادی نوشته بود و این موضوع خیلی باعث خنده و تفریح «آن مرحوم» شد و در نامه‌ای که به ناشر تقویم مزبور نوشت چنین متذکر شد:

«احتمالاً ممکن است تاریخ روز و ماه که برای وفات من داده‌اید صحت داشته باشد، لیکن تاریخ سال حتماً اشتباه است. طبق دفتر یادداشتهایم در آن روز از صحت کاملی برخوردار بوده‌ام و حتی با دوست و مهمان برجستهٔ خودم آقای ژرژ کانتور استاد دانشگاه هال مباحثهٔ پرحرارتی دربارهٔ «دستگاه و نظریه» داشته‌ایم.»

ریاضی‌دانان نامی، اریک تمپل بل

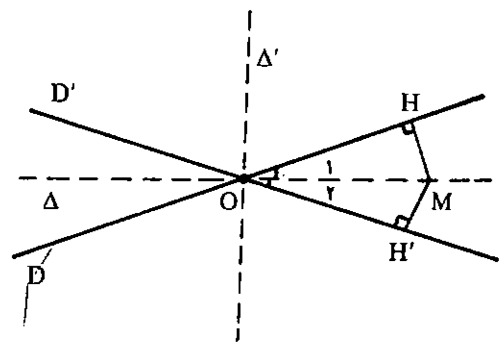
حسن صفاری

مکان هندسی

(قسمت چهارم)

محمدهاشم رستمی

۳ـ مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که از دو خط متقاطع به یک فاصله باشد، نیمسازهای زاویه‌های بین آن دو خط است.



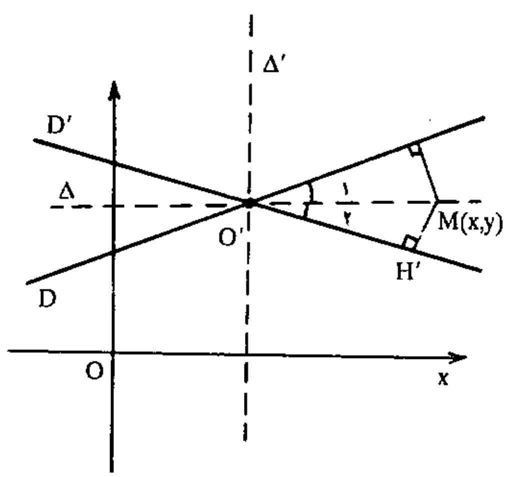
اثبات: دو خط متقاطع D و D′ را در نظر گرفته، نیمسازهای زاویه‌های بین این دو خط را رسم می‌کنیم و Δ و Δ′ می‌نامیم.

اولاً ـ اگر M نقطه‌ای واقع بر یکی از نیمسازها (دو خط Δ و Δ′) باشد، از دو خط D و D′ به یک فاصله است. زیرا دو مثلث قائم‌الزاویه OMH و OMH′ به حالت برابری وتر و یک زاویه حاده متساویند ($\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ و $OM = OM$ و $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$) پس: $MH = MH'$.

ثانیاً ـ اگر M نقطه‌ای باشد که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد ($MH = MH'$)، در این صورت روی نیمساز زاویهٔ بین دو خط D و D′ واقع است، زیرا دو مثلث قائم‌الزاویه OMH و OMH′ به حالت برابری وتر و یک ضلع متساویند ($OM = OM$ و $MH = MH'$ و $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$) پس $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ یعنی OM نیمساز زاویهٔ HOH′ است.

◆ اثبات به روش تحلیلی

فرض می‌کنیم $D: ax+by+c=0$ و $D': a'x+b'y+c'=0$ باشد. در این صورت اگر M (x , y) نقطه‌ای باشد که از دو خط D و D′ به یک فاصله باشد، خواهیم داشت:



$$MH = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad MH' = \frac{|a'x+b'y \quad c'|}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

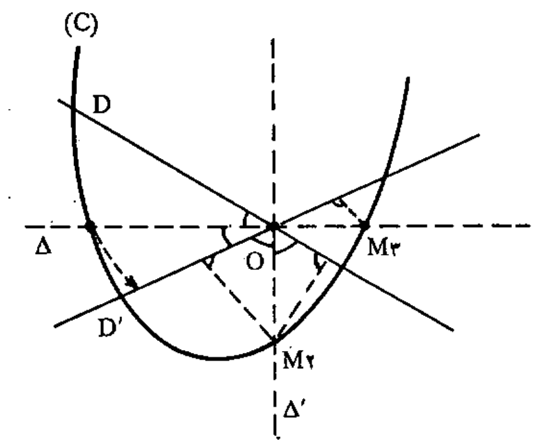
$$MH = MH' \Rightarrow \boxed{\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|a'x+b'y+c'|}{\sqrt{a'^2+b'^2}}} \quad (1)$$

معادلهٔ (۱) که به صورت

$$\boxed{\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}}$$

نیز نوشته می‌شود، دو خط راست عمود بر هم را که همان خطوط Δ و Δ' نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط D و D' می‌باشند، مشخص می‌کند. به‌عکس مشخص است، هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادلهٔ (۱) صدق کند از دو خط D و D' به یک فاصله است یعنی روی نیمساز زاویه‌های بین دو خط D و D' قرار دارد.

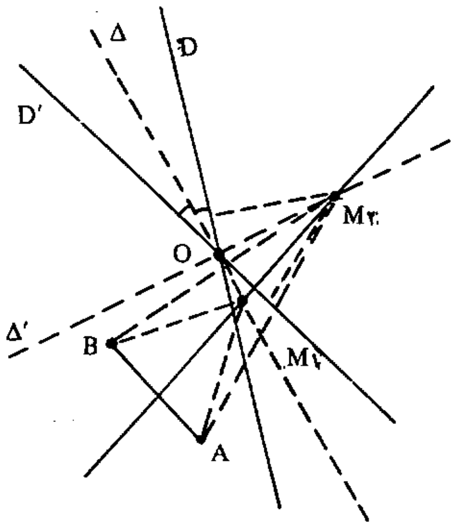
مثال ۱: دو خط متقاطع D و D' و منحنی (c) در یک صفحه مفروضند. نقطه‌ای روی منحنی (c) پیدا کنید که از دو خط D و D' به یک فاصله باشد.



حل: خطهای Δ و Δ' نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط D و D' را رسم می‌کنیم. نقطه یا نقاط تقاطع این نیمسازها با منحنی (c) جواب مسأله است و به تعداد نقاط برخورد، جواب وجود دارد. (در شکل بالا ۳ جواب وجود دارد. نقاط M_1 و M_2 و M_3).

مثال ۲: دو خط متقاطع D و D' و دو نقطهٔ A و B در یک صفحه مفروضند. نقطه‌ای تعیین کنید که از دو نقطهٔ A و B، همچنین از دو خط D و D' به یک فاصله باشد.

حل: نیمسازهای زوایای بین دو خط D و D'، همچنین عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. نقطه یا نقطه‌های تقاطع این عمودمنصف با نیمسازهای زوایای بین دو خط D و D' جواب مسأله است و به تعداد نقطه‌های برخورد، مسأله جواب دارد. (در شکل بالا دو جواب وجود دارد. نقاط M_1 و M_2).



مثال ۳: معادله‌های نیمسازهای زوایای بین دو خط $D: 3x-4y-1=0$ و $D': 7x+24y-5=0$ را تعیین کنید.

حل: داریم:

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

$$\frac{3x-4y-1}{\sqrt{9+16}}=\pm\frac{7x+24y-5}{\sqrt{49+576}}$$

$$\Rightarrow \frac{3x-4y-1}{5}=\pm\frac{7x+24y-5}{25}$$

$$\Rightarrow 15x-20y-5=\pm(7x+24y-5)$$

$$15x-20y-5=7x+24y-5 \Rightarrow 8x-44y=0$$

$$\Rightarrow \boxed{2x-11y=0}$$

$$15x-20y-5=-7x-24y+5 \Rightarrow$$

$$22x+4y-10=0 \Rightarrow \boxed{11x+2y-5=0}$$

مثال ۴: نقطه‌ای از منحنی (c) به معادلهٔ $y = \frac{x+1}{2x-1}$ را تعیین کنید که از دو خط $D: x + 2y - 1 = 0$ و $D': x - 2y + 3 = 0$ به یک فاصله باشد.

حل: معادله‌های نیمسازهای زوایای بین دو خط D و D′ را به دست می‌آوریم و نقطه تقاطع این نیمسازها با منحنی (c) را تعیین می‌کنیم.

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{x+2y-1}{\sqrt{1+4}} = \pm\frac{x-2y+3}{\sqrt{1+4}} \Rightarrow$$

$$x+2y-1 = \pm(x-2y+3)$$

$$\Rightarrow x+2y-1 = x-2y+3 \Rightarrow \boxed{y=1}$$

$$x+2y-1 = -x+2y-3 \Rightarrow \boxed{x=-1}$$

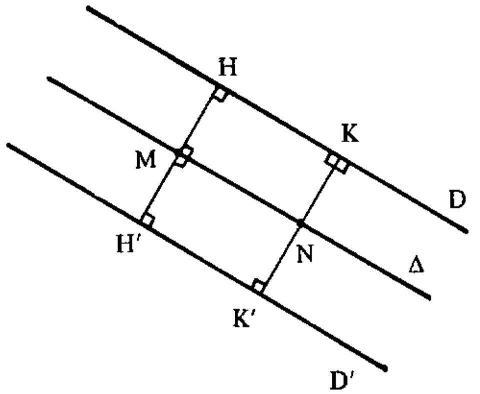
معادلات نیمسازهای زوایای بین دو خط D و D′.

$$\begin{cases} y = \frac{x+1}{2x-1} \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x+1}{2x-1} = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow M_1 \left| \begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} y = \frac{x+1}{2x-1} \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow M_2 \left| \begin{array}{l} x=-1 \\ y=0 \end{array} \right.$$

نقاط جواب مسأله

۴ـ مکان هندسی نقطه‌ای که از دو خط راست متوازی به یک فاصله است، خطی است راست موازی آن دو خط و به یک فاصله از آن دو خط.



اثبات: دو خط راست متوازی D و D′ را در نظر می‌گیریم. اگر M نقطه‌ای باشد که از این دو خط به یک فاصله باشد (MH = MH′)، از نقطهٔ M خط Δ را به موازات دو خط راست D و D′ رسم می‌کنیم.

اولاً ـ هر نقطه‌ای مانند N از خط Δ، از دو خط D و D′ به یک فاصله است زیرا چهار ضلعیهای MHKN و MH′K′N مستطیل یا مربعهای متساویند. N ∈ Δ ⇒ NK = NK′

ثانیاً ـ هر نقطه‌ای که از دو خط D و D′ به یک فاصله باشد، روی خط Δ واقع است. NK = NK′ ⇒ N ∈ Δ

پس خط Δ مکان هندسی مورد نظر است.

◆ اثبات به روش تحلیلی

دو خط راست متوازی D و D′ به معادله‌های $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم M(x,y) نقطه‌ای باشد که از این دو خط به یک فاصله باشد، در این صورت داریم:

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pm\frac{ax+by+c'}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Rightarrow ax + by + c = \pm(ax + by + c')$$

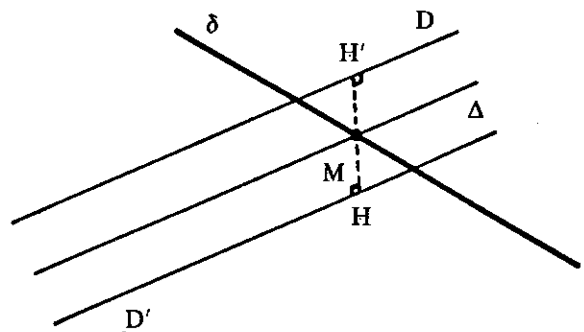
$$\Rightarrow \boxed{2ax + 2by + c + c' = 0} \text{ (۱) یا } \boxed{ax + by + \frac{c+c'}{2} = 0}$$

معادلهٔ (۱) خط راستی است که با دو خط D و D' موازی است زیرا:

$$m/D = m/D' = m/\Delta = \frac{-a}{b}$$

به عکس، هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادلهٔ (۱) صدق کند از دو خط D و D' به یک فاصله است.

مثال ۱: دو خط راست موازی D و D' و خط δ (یا منحنی C) در یک صفحه مفروضند. نقطه‌ای روی خط δ (یا منحنی C) پیدا کنید که از دو خط D و D' به یک فاصله باشد.



حل: مکان هندسی نقاطی را که از دو خط متوازی D و D' به یک فاصله‌اند، رسم می‌کنیم (خط Δ). نقطهٔ برخورد این خط با خط δ (یا منحنی C) جواب مسأله است.

مثال ۲: دو خط $D: x - 2y + 1 = 0$ و $D': 2x - 4y + 3 = 0$ مفروضند. روی سهمی به معادلهٔ $x^2 + 8y - 2x - 8 = 0$ نقطه‌ای بیابید که از دو خط فوق به یک فاصله باشد.

حل: دو خط فوق موازی‌اند بنابراین معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای که از این دو خط به یک فاصله است به صورت زیر است:

$D: x - 2y + 1 = 0$ یا $D: 2x - 4y + 2 = 0$

$D': 2x - 4y + 3 = 0$

$$\Rightarrow \Delta : 2x - 4y + \frac{3+2}{2} = 0 \Rightarrow 2x - 4y + \frac{5}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{4x - 8y + 5 = 0}$$

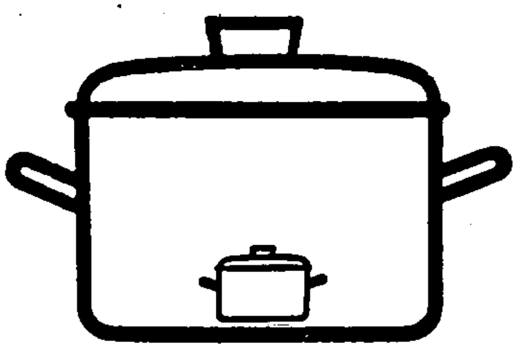
حال نقطهٔ برخورد این خط با سهمی به معادلهٔ $x^2 + 8y - 2x - 8 = 0$ را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} x^2 + 8y - 2x - 8 = 0 \\ 4x - 8y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$M_1 \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ y = \frac{9}{8} \end{array} \right. \qquad M_2 \left| \begin{array}{l} x = -3 \\ y = -\frac{7}{8} \end{array} \right.$$

تفریح اندیشه ۲

دو قابلمهٔ مسی با شکل یکسان و ضخامت یکسان دیواره‌ها مفروض است. گنجایش یکی ۸ بار از گنجایش دیگری بیشتر است. وزن آن چقدر بیشتر است؟



جواب در صفحهٔ ۸۸

دو خاصیت مهم در انتگرال معین

● سیامک جعفری (دبیر ریاضی - اهواز)

$$۱)\int_{۰}^{a} f(x)\,dx=\int_{۰}^{a} f(a-x)\,dx$$

اثبات:

$$a-x=u \Rightarrow -dx=du,$$

$$\int_{۰}^{a} f(a-x)\,dx=\int_{a}^{۰} -f(u)\,du=\int_{۰}^{a} f(u)\,du$$

$$=\int_{۰}^{a} f(x)\,dx$$

مثال: انتگرال زیر را حساب کنید:

$$I=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx$$

$$I=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{۲}-x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{۲}-x\right)}+\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{۲}-x\right)}}\,dx$$

$$I=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}\,dx$$

اکنون با هم جمع می‌کنیم:

$$I+I=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx=\frac{\pi}{۲}$$

بنابراین:

$$I=\frac{\pi}{۴}$$

* چندین بار هم می‌توان از این خاصیت استفاده کرد.

مثال: انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$I=\int_{۰}^{\pi} \frac{x\sin x}{\cos^{۲}x}\,dx$$

حل:

$$I=\int_{۰}^{\pi} \frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{\cos^{۲}(\pi-x)}\,dx$$

$$I=\int_{۰}^{\pi} \frac{(\pi-x)\sin x}{\cos^{۲}x}\,dx$$

$$I=\int_{۰}^{\pi} \frac{\pi\sin x}{\cos^{۲}x}\,dx-\int_{۰}^{\pi} \frac{x\sin x}{\cos^{۲}x}\,dx$$

اکنون می‌توان جمع کرد:

انتگرال دوّم همان I در صورت مسئله، است که به طرف چپ منتقل می‌کنیم.

برای محاسبه این انتگرال ساده $\cos x = u$ می‌گیریم.

$$2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$2I = -\pi \int \frac{du}{u^2} = -\pi \frac{u^{-2+1}}{-2+1} = \frac{\pi}{u}$$

$$2I = \frac{\pi}{\cos x}\Big|_0^{\pi} = \pi\left(\frac{1}{\cos\pi} - \frac{1}{\cos 0}\right) = \pi(-1-1)$$

$$I = -\pi$$

که مقدار آن به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

* اگر حد پایین صفر نباشد می‌توانیم با روش زیر آنها را تبدیل کنیم:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \sin x \, dx$$

$$x = a\theta + b \Rightarrow \begin{cases} a\left(\frac{\pi}{2}\right) + b = \pi \\ a(0) + b = \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow a = 1$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) d\theta$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta . \sin\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \cos\theta \, d\theta$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\cos\theta - \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\cos\theta \, d\theta =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 . \frac{\pi}{2} \cos\theta \, d\theta = \pi [\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$2I = \pi \Rightarrow I = \frac{\pi}{2}$$

خاصیت دیگر که حالت کلّیتر مسألهٔ قبلی است.

$$2) \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(a+b-x) \, dx$$

اثبات:

حد بالا $u = a + b - b = a$

$a + b - x = u \Rightarrow -dx = du$

حد پایین $u = a + b - a = b$

$$\int_a^b f(a+b-x) \, dx = -\int_b^a f(u) \, du$$

$$= \int_a^b f(u) \, du = \int_a^b f(x) \, dx$$

مثال:

$$\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x} + \sqrt{x}} dx$$

$$= \int_1^3 \frac{\sqrt{1+3-x}}{\sqrt{4-(1+3-x)} + \sqrt{1+3-x}} dx$$

$$I = \int_1^3 \frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{x} + \sqrt{4-x}} dx$$

$$2I = \int_1^3 \frac{\sqrt{x} + \sqrt{4-x}}{\sqrt{x} + \sqrt{4-x}} dx \Rightarrow I = 1$$

به‌عنوان تمرین انتگرالهای زیر را حساب کنید:

$$1) \int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{1 + \sin x}$$

$$2) \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$3) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 + \sqrt{\operatorname{tg} x}} dx$$

هنر محاسبه یا راه‌های میان بُر

در محاسبهٔ اعداد

نوشتهٔ جرالد و. کِلی
ترجمهٔ حسن نصیرنیا

اشاره:

آیا مایلید باسرعتی معادل دو یا سه برابر سرعتِ معمول، اعداد را محاسبه کنید؟ آیا مایلید با یک محاسبهٔ سریعِ ذهنی، درستی یا نادرستی نتایج عملیات ماشین حساب خود را بررسی کنید؟

هرگز به دوستان و آشنایانی که بادقت کامل و سرعتی خیره کننده چنین محاسباتی را انجام می‌دهند، رشک نبرید، زیرا توانایی آنان در انجام دادن این گونه محاسبات، عموماً ذاتی نیست؛ شما نیز می‌توانید با پیروی از روشهای ارائه شده در این **مقاله**[1] به چنین مهارتهایی دست یابید.

هنر محاسبه یا چگونگی محاسبهٔ سریع و آسان اعداد، روش درست و آزموده شده‌ای است که شما را در رویارویی با ریاضیات مورداستفاده در زندگی روزمره ـ انجام دادن عملیات مربوط به جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و ... ـ یاری می‌دهد. در واقع پدیدآورندهٔ کتاب حاضر بر آن بوده است تا راهها و شگردهای سریع و آسان محاسبهٔ اعداد را که مدارس از ارائه آنها غفلت ورزیده‌اند، به خواننده بیاموزد.

برای هر راه میان بُر، چند مثال داده شده است تا خواننده به چگونگی کاربرد آن کاملاً آشنا شود. با این حال، کوشش شده است تا تمرینها و مثالها، کوتاه و مختصر باشد.

یکی از ویژگیهای روش مذکور، آن است که پاسخ مثالها همراه با برهان مربوط آمده است. برهان ارائه شده، نشان می‌دهد که استفاده از راه میان بُر تا چه حد ساده‌تر از راه حلِّ معمولی است. نتیجهٔ به‌دست‌آمده غالباً چنان شگفت‌آور است که باور کردنش مشکل می‌نماید و این خود انگیزه‌ای برای ایجاد عادتِ خوبِ بررسیِ درستی یا نادرستی نتایج است.

البته راه‌های میان بُر در محاسبهٔ اعداد برای جایگزینی کار با ماشین حساب نیست. بلکه برعکس مجال برای بهره‌مندی از این هر دو شیوهٔ محاسبه باقی است. دیری است که برای اعجازِ الکترونیک در محاسبات پیچیده هیچ رقیبی پا به میدان نگذارده است. اما در مورد مسأله‌های ساده‌تر یک راه میان بُر یا محاسبهٔ ذهنی سریع، غالباً پاسخ را سریعتر از ماشین به دست می‌دهد. و این‌جاست که باید گفت: «ابزارهای قدیمی و مورداعتماد، یعنی مداد و کاغذ را نادیده نینگار.» مداد و کاغذ کم هزینه‌اند، به‌آسانی حمل می‌شوند، هرگز به باتری نیاز ندارند، حاصل محاسبات را ثبت می‌کنند و از این رو می‌توان نتایج به‌دست آمده را بازبینی کرد. هرکدام از این دو، مزایای خاص خود را دارند. بنابراین، بسته به نیاز، می‌توان یکی از این روشها یا آمیزه‌ای از آنها را در حل مسأله‌ها به کار گرفت.

باید به خاطر داشت که بهترین شیوهٔ دستیابی به‌سرعت، دقت و سهولت در محاسبهٔ اعداد، انجام دادن تمرینهای پیگیر و منظم است. باشد که این مطالب شما را به درک بهتر از اصول حساب و شگفتیهای کار با اعداد رهنمون سازد.[2]

---

(۱) برگرفته و ترجمه شده از کتاب:

Kelly, W. Gerald. Short - Cut Math . Dover Publications, Tm C. N. Y, 1984.

(۲) ـ م . برداشت از سخن ناشرِ کتاب و توضیح ناشرِ کتاب خارجی مشابهِ کتاب موردِ ترجمهٔ حاضر.)

◻ اصول روشهای میان بُر درمحاسبهٔ اعداد

۱ ـ ۱ ـ راه‌های اصلی ساده کردن محاسبات

شیوه‌های میان بُر در محاسبهٔ اعداد براساس تغییر دادن اعداد و عملیاتِ «دشوار» به اعداد و عملیاتِ آسانتر استوار است. برای مثال، در مورد یافتن حاصل جمع ۲۹ و ۳۶ می‌توان عدد ۱ را به ۲۹ اضافه و از ۳۶ کم کرد تا مسأله به شکل ۳۵ + ۳۰ تبدیل شود. در این صورت پاسخ مسأله یعنی ۶۵ فوری به‌دست می‌آید. به این ترتیب، ملاحظه می‌شود که افزودن و کم کردنِ عددِ ۱، مسأله را آسان می‌کند ولی تغییری در پاسخ نمی‌دهد. این اصل، یعنی اصلِ «هم ارزی» که در محاسبهٔ اعداد به‌عنوان روشِ میان بُر موردِاستفاده قرار می‌گیرد، دستیابی به پاسخِ درست را آسانتر و سریعتر می‌کند.

از این روش نیز می‌توان درضرب استفاده کرد. برای مثال، ۱۵ × ۲۸ را در نظر بگیرید. اگر ۲۸ را نصف (۱۴ =) و ۱۵ را دو برابر (۳۰ =) کنیم، مسأله به‌صورت ۳۰ × ۱۴ در می‌آید و چنان که می‌بینید پاسخ، یعنی ۴۲۰، بآسانی به‌دست می‌آید. و این همان نتیجه‌ای است که از ضرب ۲۸ × ۱۵ گرفته می‌شُد.

سبب دشوار شدن محاسبات همواره «اندازهٔ» اعداد نیست، بلکه «نوعِ» اعداد نیز می‌تواند مشکل آفرین باشد. البته می‌دانید که ضرب‌کردن یک عدد در ۱۰ بسیار آسانتر از ضرب کردن آن در ۹ است، هرچند که ۱۰ از ۹ بزرگتر است. با این حال، عددِ «دشوارِ» ۹ را می‌توان به دو عددِ «آسانِ» ۱۰ منهایِ ۱ (که برابر ۹ است) بدل کرد. بنابراین، برای ضرب کردن عددی در ۹، می‌توان آن را در ۱۰ ضرب و عدد موردنظر (مضروب فیه) را از حاصل ضرب کم کرد. به این ترتیب:

۳۳۳ = ۳۷− ، ۳۷۰ = ۹ × ۳۷. البته ۳۷ − ۳۷۰ همان (۱ − ۱۰) × ۳۷ است که جایگزین ۹ × ۳۷ شده است. هر دو روش، پاسخ واحدی به‌دست می‌دهد.

عددهای ۰، ۱، ۱۰ و ۲ جزء آسانترین عددها هستند. همین طور عددهای ۱۰۰، ۱۰۰۰ و جز آنها و نیز سایر «عددهای مختوم به صفر» مانند ۲۰ و ۳۰ و ... کار محاسبه را آسان می‌کنند. بنابراین اگر بتوان عدد دشواری را به یکی از این عددها تبدیل کرد، راه رسیدن به پاسخِ سریع هموار می‌شود.

چه بسا که تبدیل یک عمل دشوار به دو یا سه عمل ساده کار محاسبه را آسانتر و سریعتر می‌کند؛ درست همان گونه که پیمودنِ یکایک پلّه‌های میانِ طبقه‌های اوّل و دوّم یک ساختمان راحت‌تر از کوشش برای پیمودن آنها با یک جهشِ بلند است. برای مثال: در مورد ضرب ۶۴ در ۲۵ می‌توان ۴۶ را بر ۴ تقسیم (۱۶ =) و حاصل را در ۱۰۰ ضرب کرد تا نتیجه، یعنی ۱۶۰۰ به‌دست آید. این عمل بدان سبب نتیجه بخش است که تقسیم بر ۴ و ضرب در ۱۰۰، درست مانند ضرب کردن در $\frac{۱۰۰}{۴}$ (یعنی مساوی ۲۵) است.

یک راه دیگرِ ساده‌کردن محاسبه آن است که عددها را به جزءهای آسانتر تقسیم کنید. برای‌مثال، در موردتقسیم‌عددی بر ۱۶، می‌توان آن عدد را بر ۲ و سپس بر ۸ تقسیم کرد یا این‌که دوبار آن را بر ۴ تقسیم کرد، زیرا ۸ × ۲ و ۴ × ۴ هرکدام مساوی ۱۶ است. برای تقسیم ۲۲۴ بر ۱۶ می‌توان مقسوم را نصف کرد (۱۲ =) و حاصل را بر ۸ تقسیم کرد تا نتیجه (۱۴ =) به‌دست آید، یا این‌که ۲۲۴ را بر ۴ تقسیم (۵۶ =) و حاصل را بار دیگر به ۴ بخش کرد (۱۴ =). چنان‌که ملاحظه می‌شود، تقسیم ۲۲۴ بر ۱۶ همان نتیجهٔ واحد، یعنی ۱۴ را می‌دهد؛ زیرا هر سه راهِ مذکور هم ارز هستند.

یک عدد را نیز می‌توان به ترتیبی دیگر به چند پاره تقسیم کرد، مثلاً تقسیم به یکان، دهگان، صدگان و ... زیرا انجام دادن محاسبه با یک عددِ تقسیم شده به جزءهای کوچکتر، بسیار آسانتر خواهد بود. برای مثال، عدد ۶۱۳ را می‌توان به صورت ۳ + ۱۰ + ۶۰۰ در آورد. چنانچه بخواهید عدد ۶۱۳ رادرعدد دیگری مثل ۱۲ ضرب کنید، می‌توانید هرجزء را در آن عدد ضرب و نتیجه‌های به‌دست آمده را با هم جمع کنیم، به این ترتیب:

۶۰۰ × ۱۲ = ۷۲۰۰
۱۰ × ۱۲ = ۱۲۰
۳ × ۱۲ = ۳۶
۶۱۳ × ۱۲ = ۷۳۵۶

علاوه بر روشهای معرفی شده در بالا، می‌توان باحذف یا آسان کردن روند محاسبهٔ‌اعداد مانند «انتقال» درجمع وضرب، «ده بریک» در تفریق، پیچیدگیهای تقسیم «طولانی» و لزوم به یاد سپاریِ نتایج به هنگام حل مسأله‌ها به‌طور ذهنی (که درنظر بسیاری از افراد دشوار است) راه‌های میان‌بر دیگری اندیشید.

۱ ـ ۲ ـ نتایج دلخواه شما

درضمن حل کردن مسأله، بهتر است فقط به «نتایج» هر مرحله بیندیشید و از پرداختن به جزئیات نالازم در آن مرحله خودداری کنید. برای مثال: به هنگام دیدن ۳۶ ÷ ۹ بی‌درنگ به ۴ فکر کنید و

از وارد شدن به جزئیات محاسبه، یعنی گفتن: «۳۶۰ تقسیم بر ۹ می‌شود ۴ مرتبه» صرف‌نظر کنید. همین‌طور مثلاً به‌هنگام انجام دادن عمل جمع ۸ + ۱۱ + ۵، اگر بگویید: «۵ به‌علاوهٔ ۱۱ می‌شود ۱۶، به علاوهٔ ۸ می‌شود ۲۴»، کاری جز کُند کردنِ روندِ محاسبه انجام نداده‌اید. پس بهتر است در ضمن محاسبه، فقط به: «۲۴» و «۱۶» بیندیشید.

تا می‌توانید واژه‌های مورداستفاده در هر محاسبه را حذف و ذهن خود را برنتایج متمرکز کنید، چه حلّ مسأله‌ها بدون ذکر واژه‌ها، سریعتر انجام می‌شود. اعداد و محاسبات مانند: حروف الفبا و خواندن هستند. وقتی به واژه‌ای برمی‌خورید، برای هجی کردن یک یک حروف مکث نمی‌کنید، بلکه آن واژه رابه‌طور کلی مشاهده و درک می‌کنید. همین طور برای دریافتِ تک تک واژه‌ها توقف نمی‌کنید، بلکه واژه‌ها راکلاً باهم می‌خوانید و به مفهوم کلی آنها می‌اندیشید. اگر در مورد اعداد و محاسبات همین کار را بکنید، مسأله‌ها با سرعت و سهولت بیشتری حل می‌شود.

۱ ـ ۳ ـ آمیختن فعالیتهای ذهنی و نوشتاری برای گرفتن بهترین نتیجه‌ها در ریاضی

هدف از ارائهٔ راه‌های میان بر در محاسبات تنها حل مسأله به‌طور ذهنی یا آنی نیست؛ هرچند که با استفاده از آنها می‌توانید به چنین منظوری برسید. صَرفِ اندکی وقت برای یادداشت کردن نکات مهم در جریان محاسبات، غالباً بسرعت بخشیدن در کار کمک می‌کند. به نکته‌ای که درپی می‌آید توجه کنید، تا موضوع برایتان روشنتر شود:

باهر محاسبه، ذهن ما متوجه دو فرآیند می‌شود: ۱) توجه کافی برای درک هر مرحله‌از مسأله و ۲) ثبت و ضبط نتایج هر مرحله برای استفاده در مرحله‌های بعد. طبعاً هرچه یک مسألهٔ ریاضی طولانیتر و پیچیده‌تر باشد و برای حل آن تنها به فعّالیّت ذهنی خود اکتفا کنید، ناگزیرید موارد بیشتری را به ذهن بسپرید و به همان نسبت میزان اشتباه‌های احتمالی شما افزونتر خواهد شد.

ازطرفی اگر تمامی نکات مهم مسأله را یادداشت کنید، ناچار خواهید بود که نتایج یکایک مرحله‌ها را به ذهن بسپرید. بلکه در عوض خواهید توانست فکر خود را برراه حل متمرکز کنید. با این‌که یادداشت برداری ممکن است زمان بیشتری بگیرد، ولی احتمال بروز اشتباه راکم می‌کند واین در نهایت، موجب صرفه‌جویی در وقت خواهد شد.

بیشتر اوقات می‌توانید با بهره‌مندی از هر دو روشِ ذهنی و نوشتاری به حداکثر سرعتِ همراه با درستی و دقت دست یابید. برای مثال، در مورد ضرب ۴۹۸۳۷ در ۱۱، لازم نیست که تمامی جزئیات را یادداشت کنید یا به‌عنوان یک ورزش فکری با آن کلنجار بروید. بلکه کافی است که برخی از حاصل ضربها را یادداشت و آنها را جمع کنید تا پاسخ به‌دست آید، به این ترتیب:

$$\begin{array}{r} ۴۹۸۳۷ \\ \underline{۴۹۸۳۷} \end{array}$$

همین‌طور اگر بخواهید ۲۱۸۴ را بر ۲۴ تقسیم کنید، بهتر است نخست، آن را بر ۳ تقسیم و حاصل یعنی ۷۲۸ را بنویسید، تا ناگزیر به حفظ کردن آن نباشید، سپس آن را بر ۸ تقسیم کنید تا نتیجه (۹۱) به‌دست آید.

بافراگیری برخی از راه‌های میان بُرِ ارائه شده در این سلسله مقاله‌ها، خواهید توانست مسأله‌ها را به‌طور ذهنی یا حتی نظری حل کنید. برخی دیگر از راه‌های میان بُر به شما نشان می‌دهد که بهترین راه حل آن است که در پاره‌ای موارد صرفاً به مداد و کاغذ اکتفا کنید و یا این‌که فقط نکات مهم مراحل حلّ مسأله را یادداشت کنید تا به نتیجه درست و سریع برسید. به هرحال، در نهایت بسته به تصمیم و تشخیص شماست که چه مقدار از حل مسأله را در ذهن انجام دهید و چه مقدار را یادداشت کنید، تا به نتیجه‌ای درست و سریع برسید. با این‌که سرعت در حل مسأله یک عاملِ مطلوب به شمار می‌آید، ولی آشکار است که استفاده از یک راه‌حلِ میان بُر که منجر به پاسخ نادرست شود، کاری بی‌حاصل است. درصورت لزوم، در مراحل نخستِ تمرین بهتر است از راه حلهای طولانیتر استفاده کنید تابه نتیجه درست دست یابید.

۱ ـ ۴ ـ برآورد پاسخ تقریبی وگِرد کردن اعداد

پیش‌از حلّ مسأله و یافتن پاسخ، لازم است میزان درستی ودقت پاسخ خود را مشخّص کنید. چنانچه پیشاپیش پاسخ تقریبی مسأله را بدرستی تخمین بزنید، می‌توانید از بسیاری محاسبات غیرضروری ارقام صرف‌نظر و در وقت صرفه‌جویی کنید. یافتن پاسخ تقریبی مستلزم آن است که «ارقامِ مهم» تشکیل دهندهٔ اعداد مسأله ـ ارقامی که برای تخمین شما اهمیّت دارند ـ را مشخّص کنید.

برای مثال: اگر بهای ۲ عدد مداد ۱۹۷ ریال باشد، در محاسبهٔ بهای ۳ عدد مداد مرتکب اشتباه فاحشی نخواهید شد، چه می‌توان پیش‌از حل مسأله تخمین زد که پاسخ در حدود ۳۰۰ ریال است. یا اگر بخواهید دیواری به مساحت ۲۳۸۶ متر مربع را رنگ کنید و بدانید که هر قوطی بزرگ رنگ ۵۰ متر مربع را می‌پوشاند، درصورتی که عددِ مساحت را گرد کنید (= ۲۵۰۰ مترمربع)، می‌توانید میزان تقریبی رنگ مصرفی را به‌طور ذهنی سریعتر از استفاده از مداد و کاغذ محاسبه کنید.

۱ ـ ۵ ـ امتحان کردن پاسخ مسأله از طریق «طرحِ نُه نُه»

می‌توان پاسخ مسأله را با حل کردن دوبارهٔ آن، یا به روش بازبینی به ترتیب معکوس و یا به روشی دیگر امتحان کرد. حل کردن دوبارهٔ مسأله به‌روشی متفاوت باروش معمول سبب می‌شود که از تکرار اشتباهی که ممکن است برحسب معمول پیش‌آید، جلوگیری گردد.

برای بازبینی پاسخ مسأله‌های مربوط به جمع، تفریق، ضرب و تقسیم راه‌های مختلفی وجود دارد که در مقاله‌های بعدی (درفصلهای راجع به هریک از چهار عمل اصلی که در شماره‌های آتی مجله خواهد آمد) به تفکیک از آنها سخن خواهیم گفت.

یکی از راه‌های مذکور، طرح کردنِ نُه نُهِ عددِ پاسخ مسأله است که می‌توان از آن در مورد چهار عمل اصلی استفاده کرد. این روش برمبنای خاصیت جالب توجه عدد ۹ استوار است. هرگاه عددی بر ۹ تقسیم شود، باقیمانده برابر خواهد بود با حاصل جمع رقمهای تشکیل دهندهٔ آن عدد (مقسوم) یا حاصل جمع رقمهای تشکیل دهندهٔ مقسوم پس از «طرح کردنِ» نُه نُه آن. شاید این خاصیتِ عدد ۹ شگفت‌انگیز به نظر آید، اما درک و فهم آن با توجه به مثالهای زیر آسان خواهد بود:

ـ مثال (۱): ۷ = باقیمانده و ۱ = ۹ ÷ ۱۶

مجموع ارقام عدد ۱۶ (یعنی ۷ = ۶ + ۱) برابر است باباقیماندهٔ تقسیم ۱۶ بر ۹.

ـ مثال (۲): ۶ = باقیمانده و ۲ = ۹ ÷ ۲۴

مجموع ارقام عدد ۲۴ (۶ = ۴ + ۲) نیز با ۶ برابر است.

ـ مثال (۳): ۲ = باقیمانده و ۴ = ۹ ÷ ۳۸

البته مجموع ارقام عدد ۳۸، عدد ۲ نیست، بلکه ۱۱ است. اما پس از طرحِ نه نه آن (کم کردن ۹ از ۱۱) باقیمانده ۲ می‌شود که همان باقیماندهٔ تقسیم ۳۸ بر ۹ است.

برای طرح نُه نُه و به دست آوردن باقیمانده‌ها می‌توانید به چهار روش زیر عمل کنید:

الف: طرح نُه نُه از طریق تقسیم:

عدد را بر ۹ تقسیم کنید تا باقیمانده به‌دست آید:

باقیمانده	عدد
۱	۴۶
۴	۵۸
۰	۱۹۸
۵	۶۳۶۸

ب: طرح نه نه از طریق جمع:

ارقام تشکیل دهندهٔ عدد را جمع کنید و چنانچه مجموع ارقام تشکیل دهندهٔ حاصل جمع از یک رقم بیشتر شد، آنها را نیز جمع کنید تا یک باقیماندهٔ یک رقمی به دست آید. درصورتی که باقیمانده ۹ باشد و یا عددی باشد که توسط ۹ عاد شود، باقیمانده را صفر تلّقی کنید:

باقیمانده		عدد
۱	۱ + ۰ = ;	۴۶ : ۴ + ۶ = ۱۰
۴	۱ + ۳ = ;	۸۵ : ۸ + ۵ = ۱۳
۰	۱ + ۸ = ۹ ;	۱۹۸ : ۱ + ۹ + ۸ = ۱۸
۵	۲ + ۳ = ;	۶۳۶۸ : ۶ + ۳ + ۶ + ۸ = ۲۳

ج: طرح نُه نُه از طریق تفریق:

ارقام تشکیل دهندهٔ عدد را جمع کنید و هر بار که حاصل جمع برابر ۹ یا از ۹ بیشتر شد، ۹ را از آن کم کنید. این عمل را چندان تکرار کنید تا باقیمانده نهایی از ۹ کمتر شود.

باقیمانده	عدد
۱	۴۶ : ۴ + ۶ = ۱۰ ; − ۹ =
۴	۸۵ : ۸ + ۵ = ۱۳ ; − ۹ =

۱۹۸ : ۱+۹ =۱۰ ;−۹ =۱ ;+۸ =۹; −۹= ۰

همچنین: ۱۹۸ : ۱+۹+۸ =۱۸;−۹=۹;−۹= ۰

۶۳۶۸ : ۶+۳=۹;−۹=۰;+۶+۸=۱۴;−۹= ۵

همچنین: ۶۳۶۸ : ۶+۳+۶+۸=۲۳;−۹=۱۴;−۹= ۵

۱۹۸: ۱، و ۹ را حذف کنید ۱ + ۸ = ۰

۶۳۶۸: ۶، ۳ را حذف کنید ۶ + ۳ ;۶ + ۸ =۱۴; −۹ = ۵

د: طرح نُه نُه از طریق حذف کردن ۹ ها:

ارقام تشکیل دهندهٔ عدد ـ بجز ۹ها و ترکیبهای معادل ۹ مانند: ۶، و ۳، ، ۵، و ۴، ، ۱، و ۳ و ۵، و جز آنها ـ را جمع کنید. حذف کردن ۹ها و ترکیبهای معادل ۹ سبب صرفه‌جویی در وقت می‌شود. سپس اگر حاصل‌جمع ارقام برابر ۹ یا از ۹ بیشتر شد، آن را نُه نُه طرح کنید تا باقیمانده به‌دست آید.

عدد		باقیمانده
۴۶:	هیچ ۹ ی نیست که حذف شود ; ۴ + ۶ = ۱۰ ;−۹ =	۱
۸۵:	;۸ +۵=۱۳ ; −۹ =	۴

چنان‌که ملاحظه می‌کنید، حذف کردن ۹ها آسانترین راهِ طرحِ نه نه، بویژه در مورد اعداد بزرگ، است. در مقاله‌های آتی از چگونگی استفاده از «طرح نه نه» برای امتحان کردن سریع نتایج مسأله‌های مربوط به چهار عمل اصلی آگاه خواهید شد.

در خاتمه باید دانست که هیچ یک از روشهای امتحان کردن پاسخ مسأله، برهانی قاطع بردرستی پاسخ ارائه نمی‌دهد، زیرا همواره این احتمال هست که در حین بازبینی درستی یا نادرستی پاسخ نیز مرتکب اشتباه شوید و این تأییدی اشتباه‌آمیز برعمل قبلی باشد. بااین حال، هرگاه کارِ بازبینی مسأله را تمام کردید، معمولاً می‌توانید بپذیرید که پاسخ درست است.

ادب ریاضی

اگر دو عدد مُنطق (گویا) با هم مساوی باشند این نکته کاملاً بدیهی است که جذر این دو عدد نیز با هم مساوی هستند، به این طریق از تساوی ۶ = ۳ × ۲ چنین نتیجه می‌شود که :

$$\sqrt{۲\times۳}=\sqrt{۶}$$

لیکن این نکته به هیچ وجه بدیهی نیست که

$$\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}=\sqrt{۲\times۳}$$

و بنابراین تساوی $\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}=\sqrt{۶}$ نیز به هیچ وجه محقق نیست.

اکنون که هیچ گونه قطعیتی بر حقیقت رابطهٔ $\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}=\sqrt{۶}$ که در مدرسهٔ متوسطه همچون واقعیتی تدریس می‌شود وجود ندارد، خوب است در این باره مطالعهٔ بیشتری کنیم و علت این موضوع را درک کنیم.

مسأله در این است که باید جذر اعداد ۲ و ۳ و ۶ را استخراج کرد و نتیجهٔ این کار سه سلسله اعداد اعشاری پایان‌ناپذیر و عاری از هر گونه قانونی است. آنگاه باید دو عدد اوّلی را در هم ضرب کرد و نتیجه گرفت که حاصل آن مساوی با سومی است. از آن‌جا که هر قدر تعداد ارقام اعشاری را ادامه دهیم هیچ‌گونه جذر صحیحی برای این سه عدد به دست نمی‌آید ، بنابراین واضح است که اثبات تساوی این اعداد به وسیلهٔ ضرب هرگز جامهٔ عمل نخواهد پوشید.

ریاضی‌دانان نامی ، اریک تمپل بل

حسن صفاری

معرفی کتاب

روشهایی از جبر

ترجمه: حمیدرضا امیری

ناشر: انتشارات مدرسه، چاپ اول، پاییز ۷۳

اولین کتاب از سریِ کتابهای کوچک ریاضی بوده که بقیهٔ این کتابها نیز قرار است از طرف انتشارات مدرسه به چاپ برسند. کتاب **روشهایی از جبر** کتابی است برای دانش‌آموزانِ دبیرستان که مباحث آن برای دانش‌آموزانِ هر دو نظام آموزشی مفید است و نیز دبیران ریاضی می‌توانند از آن بهره بگیرند. کتاب دارای شش فصل است که عبارتند از ۱ـ توابع جبری که شامل رادیکالها و لگاریتمها نیز می‌باشد ۲ـ چند جمله‌ایها و توابع گویا. ۳ـ توابع درجه دوم و معادلاتِ درجه دوم. ۴ـ اثبات ریاضی که شامل بعضی از مفاهیم منطقی و انواع اثباتهای ریاضی از قبیل برهان خلف و استقراء می‌باشد. ۵ـ دنباله‌ها و سریها، این فصل شامل تصاعدها و سریهای عددی و هندسی است. ۶ـ نابرابریها، در این فصل نامساویهای خطی و غیرخطی مورد حل و بحث قرار می‌گیرند.

در سرتاسر کتاب علاوه بر توضیح کافی برای هر مبحث از مثالهای حل شدهٔ فراوان استفاده شده تا مفاهیم مزبور بهتر برای خواننده درک شود.

کتاب از نثر بسیار ساده و روان برخوردار است و در انتهای هر فصل تمرینهایی آورده شده است که جواب کوتاه آنها در آخر کتاب موجود می‌باشد.

ابتکارهایی در ریاضیات

راس هانسبرگر

ترجمه: سیامک کاظمی، ویراستهٔ دکتر علی عمیدی

مرکز نشر دانشگاهی

این کتاب از بین کتابهای چاپ جامعهٔ ریاضی آمریکا انتخاب شده است. از پیشگفتار کتاب چنین برمی‌آید که کتاب شامل گفتارهایی کوتاه و مستقل در زمینهٔ ریاضیات مقدماتی است. در بسیاری از گفتارهای آن، شرح کارهایی از ریاضیدانهای برجسته، از جمله گاوس، آمده است، و باریک بینی و ابتکار که خصیصهٔ اصلی هر کار ریاضی درجه اول در هر سطحی است، نشان داده می‌شود.

گفتار اول کتاب دربارهٔ **احتمال و عدد π** است، و مطلب اول آن چنین است: احتمال این که دوعدد صحیح و مثبت که به تصادف انتخاب شده‌اند، نسبت به هم اول باشند، برابر $6/\pi^2$ است. یکی از تمرینهای این گفتار نیز عبارت از این است که: سه نقطهٔ A، B، و C به تصادف روی محیط دایره‌ای انتخاب می‌شوند. احتمال این که ΔABC مثلث حاد الزاویه‌ای باشد چقدر است؟

گفتار دوم در مورد **اعداد فرد و زوج** است. در این گفتار مؤلف ابتدا به آوردن مسأله‌ای دربارهٔ شبکه‌ها پرداخته است.

گفتار سوم دربارهٔ **مسألهٔ سیلوستر دربارهٔ سه تاییهای همخط** است. این مسأله مجموعهٔ متناهی S ی از نقاط متمایز در صفحه را جستجو می‌کند که همگی بر یک خط راست واقع نبوده دارای این خاصیت باشند که هر خط راستی، که دو نقطه از S را به هم وصل می‌کند، شامل حداقل یک نقطهٔ دیگر S باشد.

گفتارهای دیگر کتاب، به‌ترتیب، عبارتند از:

جبر گزاره‌ها، سری فیری، یک ویژگی a^n، تجزیهٔ مربع به مربعهای کوچک‌تر، نوشتن یک عدد به‌صورت مجموع مربعات دو عدد، مسألهٔ برابر محیطی، پنج شگفتانه در حساب، مسأله‌ای از رگیومونتانوک، دنباله‌های مکمل، حساب فیثاغورسی، اعداد زائد، ماسکرونی و اشتاینر، یک ویژگی بعضی از اعداد دوره‌ای، قضیهٔ باربیه، سری عکسهای اعداد اول، مسألهٔ وان اسخوتن.

حل تمرینها، کتابنامه، و فهرست راهنما از مطالب پایانی کتابند. کتاب برای دانش‌آموزان جستجوگر و دبیران هنرور نوشته شده است و خواندنش برای هر دو این گروه واجب می‌نماید.

❑ مجموعهٔ مقالات و مسائل ریاضی
شمارهٔ دوم: ویراستار غلامرضا یاسی‌پور
ناشر: انتشارات مدبّر

شمارهٔ دوم مجموعه با تأخیری نه اندک در دی‌ماه ۱۳۷۲ شمسی منتشر شد. در این شماره در مقدمهٔ ویراستار با خبر می‌شویم که آقای **موسی آذرنوش**، که از دبیران ریاضی باسابقهٔ این مرزوبوم بودند و مجلهٔ برهان در شمارهٔ چهارم خود مصاحبه‌ای با ایشان را انتشار داده بود، در ۲۲ بهمن ۱۳۷۱ شمسی به رحمت ایزدی پیوستند، رحمةالله علیه. در مقالهٔ **سامان ریاضی** می‌خوانیم که: قضایای ریاضی عامند اما عامه‌پسند نیستند و به تعبیری دیگر «در هندسه راه شاهانه وجود ندارد» تعریف کردن ریاضیات کار آسانی نیست، و یادگرفتنش گرچه به ظرافت شیشه، کار شیشه دلان نه، امتیاز اصلی در ریاضیات نه جستجوی فایده و کاربرد است و نه تحرّی حقیقت، بلکه تنها همسازی درونی است. در مقالهٔ **ریاضیات گسستهٔ** آن می‌خوانیم که: علاقه به دلایل راست یا دروغ بودن گزاره‌ها، یکی از مواردی است که ریاضیات را جاذب می‌کند. ریاضی‌دان، اغلب نه تنها به این مطلب که چه چیز راست است، بلکه به این موضوع نیز که چرا راست است، علاقه‌مند است.

در نظریهٔ گرافها با تعاریف و مثالهای گرافها آشنا می‌شویم. در مقالهٔ **ابوالوفا بوزجانی** در می‌یابیم که ابوالوفا با دانشمند معاصر خود بیرونی مکاتبه داشته است، و در مقالهٔ **فصلی از یک کتاب** با فصلی از کتاب خواندنی **هنر ریاضی ورزیدن** آشنا می‌شویم. در مجله با مسألهٔ مشهور **سریهای سینوسی و کسینوسی نیوتن** برخورد می‌کنیم، و در یادنامهٔ **محمد بن موسی خوارزمی** آن با بعضی از کارهای این دانشمند معروف آشنایی حاصل می‌کنیم. در مقالهٔ **نیوتن و اندیشهٔ ریاضی زمان ما** با فلوکسیونهای نیوتن محشور می‌شویم و در **داستان غم‌انگیزی به نام کنکور دانشگاه** ملاحظه می‌کنیم که گناه مشکلات کنکور به عهدهٔ چه کسی است. از مقاله‌های دیگر مجموعه **توابع و نمودارهای آنها، ماتریسها، تکه‌هایی از مجله‌های ریاضی، هندسه فضائی، هندسهٔ تصویری، فرهنگ ریاضیات، و مسائل برای حل** می‌باشند، و آخر مجله با **تعمیم قضیهٔ فیثاغورس** آشنا می‌شویم.

مجموعه مجله‌ای است که برای دانش‌آموزان علاقه‌مند به ریاضی و دانشجویان در کار تعلیم و تعلم ریاضی، نیز دبیران ریاضی تهیّه می‌شود و خواندش بر هر یک از این سه گروه لازم می‌نماید.

❑ فرهنگ ریاضیات آکسفورد
ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور
ناشر: انتشارات مدبر

فرهنگ ریاضیات آکسفورد کتابی است که به شرح موضوعات ریاضی در حد دبیرستان و سالهای اوّل دانشگاه پرداخته و این کار را با دقتی قابل تحسین و ایجازی قابل توجه متقبل شده و البته که از عهدهٔ آن نیز برآمده است.

کتاب علاوه بر این، در شرح زندگی ریاضی‌دانها نیز مطالبی دارد و خوانندهٔ علاقه‌مند را با بزرگ‌ترین و مشهورترین آنها آشنایی بیشتری می‌دهد.

در کتاب با ریاضی‌دانهایی از قبیل **آبل، آپولونیوس، آرگان، اقلیدس، اودوکسوس اویلر، اینشتاین، ارشمیدس، بورباکی، بول، پنانو، پاسکال، پوانکاره، توم، تیلور، خانوادهٔ برنولی، خوارزمی، ددکیند، دکارت، ریمان، فرما، فوریه، فون نویمان، فیبو ناتچی، فیثاغورس، کانتور، کوشی، گالوا، گاوس، گودل، لاپلاس، لایب نیتز، لژاندر، نیوتن، وایراشتراس، همیلتون، هیلبرت**، آشنا می‌شویم. و به مطالبی از قبیل: استقرای ریاضی، استوانهٔ بیضوی، سهموی و هذلولوی، افراز، الگوریتم انتقال، انتگرال، عددهای اوّل، بردارها، برهان مستقیم، پیمانهٔ همنهشتی، بهرهٔ ساده و مرکب، پارادوکس راسل، عمل پاشنه‌ای، پس ـ ضرب، پوشایی، تابع، تابع اوّلیّه، تابع اویلر، تابع کراندار، تابع هدف، تثلیث زاویه، تربیع دایره، تقسیم زرین، تنزل نمایی، تورم، ثابت اویلر، جبر خطی، چند جمله‌ای تیلور، حاصل‌ضرب اسکالر و برداری، حاصل‌ضرب والیس، حجم جسم دورانی، حد، حدس گلدباخ، حذف گاوس ـ ژردان، حساب‌انتگرال، حساب دیفرانسیل، خط اویلر، دامنه، دترمینان، درخت، درونیابی، دستگاه معادلات خطی، دنباله، رابطه، ریشه، زیر حلقه، زیرگروه، سوپرمم، سور، سوگراف، صورت پلکانی تحویل یافته، عدد فیبوناتچی، فرمول هرو، فرمول بخشی، قاعدهٔ زنجیری، قاعدهٔ سیمسن، قضیهٔ چهار رنگ، قضیهٔ کوچک فرما، قضیهٔ لایب نیتز، کاردیوئید، گراف، گره، لم دست دادن، ماتریس، مارپیچ، مبنا، مجانب، مجموعه، محور، مسألهٔ فروشندهٔ دوره‌گرد، مشتق، معادلات، مکان هندسی، میانگین، میدان، مینیمم، نگاشت، نمودار، نوار موبیوس، همسایگی، یک ریختی، و بسیاری مطالب دیگر برخورد می‌کنیم.

فرهنگ ریاضیات آکسفورد کتابی است مورد نیاز دانش‌آموز و دانشجو، که معلم و دبیر را نیز به کار می‌آید و از آن‌جا که اصطلاحات ریاضی انگلیسی و فارسی نیز در متن و انتهای آن آمده مرجع مترجمان نیز تواند بود.

جـــواب نامـــه‌هـــا

آقای مهران مهرداد؛ دانش آموز رشته ریاضی (تهران)

ضمن تشکر از ارسال حل مسائل مسابقه‌ای «برهان» شمارهٔ (۸) به عرض می‌رسانیم که متأسفانه نامهٔ شما بعداز زمان مقرر شده به دست ما رسیده است و در مورد مقالهٔ شما تحت عنوان «تحقیقی در مورد قضیهٔ فرما» باید بگوییم که مقاله‌ای تحت همین مضمون را در شمارهٔ (۴۰) «رشد ریاضی» می‌توانید مشاهده کنید.

آقای مهدی وحیدی اربابی؛ دانش آموز رشته ریاضی (تهران)

با تشکر از ارسال مسائل و تست حل شدهٔ شما به عرض می‌رسانیم که سعی کنید تستهای جدید و مطلوبتری را بفرستید.

آقای فرشاد داوودی فرد؛ دانش آموز رشتهٔ ریاضی (اصفهان)

ضمن تشکر از مقالهٔ ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که حدس شما در رابطه با رتبهٔ اعداد اوّل همان‌طوری که خود شما به آن اشاره کرده‌اید کلی نیست و فقط برای تعداد محدودی اعداد اوّل صادق است و این از نظر ریاضی نمی‌تواند مورد توجه باشد، زیرا قوانین و احکام و قضایایی از نظر ریاضی معتبر و باارزش هستند که تناقض‌پذیر نباشند. در هر صورت تلاش شما برای دستیابی به ضابطهٔ مورد نظر در رابطه با اعداد اوّل تحسین‌برانگیز است، موفق و پیروز باشید.

آقای رضا جمشیدیان؛ دبیر ریاضی (اصفهان)

با تشکر از نامهٔ شما، در صورت لزوم و درجای مناسب از مطالب و مسائل ارسالی شما استفاده خواهیم کرد.

آقای بهزاد مسگرزاده؛ دانش آموز رشته ریاضی (ارومیه)

با تشکر از مسائل ارسالی حل شدهٔ شما به اطلاع می‌رسانیم که در صورت لزوم از آنها در جای مناسب استفاده خواهیم کرد.

خانم مرضیهٔ محمدی کجیدی؛ دانش آموز رشتهٔ ریاضی (اصفهان)

ضمن تشکر از دو مسألهٔ حل شده ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که در جای مناسب از آنها استفاده خواهیم کرد.

آقای علی ایمانی، دانش آموز رشته ریاضی (بابل)

از مسألهٔ حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم، در جای مناسب استفاده خواهیم کرد.

آقای حسین روح الامینی؛ دانش آموز رشته ریاضی (سیرجان)

از ارسال مسائل و تستهای حل شدهٔ شما متشکریم. از آنها برای شماره‌های بعدی مجله انتخاب خواهیم کرد. موفقیت و پیروزی شما را از خداوند منان مسئلت داریم.

خانم زینب جعفری؛ دانش آموز رشته ریاضی (زنجان)

ضمن تشکر از نامهٔ ارسالی شما که حاوی یک مسألهٔ حل شده در رابطه با مشتق است به عرض می‌رسانیم که در صورت لزوم و در جای مناسب از آن استفاده خواهیم کرد.

آقای امیرحسین عمودالعلائی؛ دانش آموز رشته ریاضی (تهران)

ضمن تشکر از نامهٔ ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که جواب

دادن به مسائل خصوصی جزو اهداف مجله نیست و باز کردن چنین بخشی نیز در مجله با حجم کاری زیاد و روزافزون مجله ممکن نیست.

آقای حسین فخررنجبری؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (تبریز)

با تشکر از مطلب ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که در صورت لزوم و در جای مناسب از آن استفاده خواهیم کرد. متذکر می‌شویم که مطالب و مسائل ارسالی باید مطابق با نیاز و ضرورت دانش‌آموزان دبیرستان باشد تا به درج آنها اقدام کنیم.

آقای علی گشاس؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (اهواز)

ضمن تشکر به عرض می‌رسانیم که از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما برای شماره‌های بعدی مجله انتخاب خواهیم کرد.

آقای محمد مقدم؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران)

از مسألهٔ حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. در صورت لزوم و در جای مناسب از آن استفاده خواهیم کرد.

آقای محمد علی مهتدی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (بناب)

از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. از آنها برای شماره‌های بعدی مجله انتخاب خواهیم کرد.

آقای یحیی افشار؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (قم)

از مطلب ارسالی شما متشکریم. امیدواریم امکان درج آن به وجود آید.

آقای محمد توسلی؛ دانش‌آموز رشته تجربی (آمل)

از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. از آنها برای شماره‌های بعدی مجله انتخاب خواهیم کرد.

خانم لاله تراب‌نژاد؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (تبریز)

از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. از آنها برای شماره‌های بعدی مجله انتخاب خواهیم کرد. موفقیت و پیروزی شما را از خداوند منان مسئلت داریم.

آقای بابک سلیمانزاده؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (کرج)

ضمن تشکر از دو مسأله حل شدهٔ ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که در صورت لزوم و در جای مناسب از آنها استفاده خواهیم کرد.

خانم نغمه هاشمی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (کرج)

با تشکر به اطلاع می‌رسانیم که امید است از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما برای شماره‌های بعدی مجله استفاده کنیم. موفقیت و پیروزی شما را از خداوند منان مسئلت داریم.

آقای داریوش باقرلو دانش‌آموز رشته ریاضی (خوی)

پس از عرض سلام متقابل و تشکر از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که امید است امکان درج آنان برای شماره‌های بعدی به‌وجود آید.

آقای امید قطره‌سامانی (اصفهان)

ضمن تشکر از تستهای ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که در صورت لزوم از آنان استفاده خواهد شد.

آقایان نادر فنایی و حجت‌ا... شریفی دانش‌آموزان رشته ریاضی (آباده فارس)

ضمن سلام و تشکر متقابل از ارسال مسائل حل شدهٔ شما به اطلاع می‌رسانیم که امید است امکان درج آنان برای شماره‌های بعدی مجله به‌وجود آید.

آقای داریوش دیدبان دانش‌آموز رشته ریاضی (کاشان)

از مسائل ارسالی حل شدهٔ شما متشکریم. در صورت لزوم در جای مناسب از آنان استفاده خواهد شد.

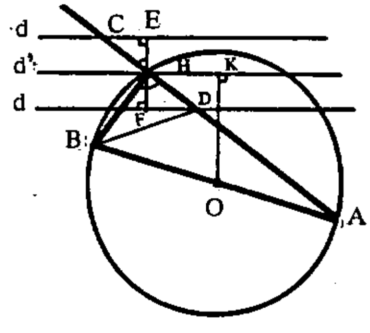
آقای علی ایمانی (بابل)

ضمن تشکر از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که سعی کنید مسائل از سطح مطلوب‌تری برخوردار باشد.

حل مسائل مسابقه‌ای برهان ۱۰

حل مسئله ۱ـ از آقای سبحان نظری دانش‌آموز سال سوم ریاضی، نورآباد ممسنی

فرض می‌کنیم مسئله حل شده و خطی که d را در نقطهٔ C و d' را از نقطهٔ D قطع می‌کند جواب مسئله باشد. از نقطهٔ B به نقاط C و D وصل می‌کنیم. مثلث BCD در رأس B متساوی‌الساقین است، زیرا BC=BD است و ارتفاع BH از این مثلث عمود منصف قاعدهٔ CD است، پس $B\hat{H}D = 90°$ و $HC = HD$، یعنی نقطهٔ H وسط پاره‌خطی است که دو سرش روی دو خط موازی d و d' واقع است. لذا مکان هندسی نقطهٔ H خط راست d" موازی خطوط d و d' و به یک فاصله از این دو خط است (اگر از H عمودهای HE و HF را بر خطوط d و d' فرود آوریم، دو مثلث قائم‌الزاویه CHE و DHF با هم برابرند، پس $HE = HF$ است).



از طرفی چون $B\hat{H}A = 90°$ است، پس نقطهٔ H روی دایره‌ای به قطر AB قرار دارد. بنابراین برای حل مسئله به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

خط d" را موازی دو خط d و d' و به یک فاصله از این دو خط رسم می‌کنیم.

آنگاه دایره‌ای به قطر AB رسم می‌کنیم، اگر نقطهٔ تقاطع این دو را H بنامیم، و از A به H وصل کنیم، خط AH جواب مسئله است، و به تعداد نقاط برخورد خط d" با دایرهٔ به قطر AB، مسئله دارای جواب است.

بحث: نقطهٔ وسط پاره‌خط AB را O نامیده و فاصلهٔ این نقطه از خط d" را l می‌نامیم $(OK = l)$. سه حالت پیش می‌آید:

۱) اگر $\frac{AB}{2} > l$ باشد، خط d" دایرهٔ به قطر AB را در دو نقطه قطع می‌کند و مسئله دو جواب دارد.

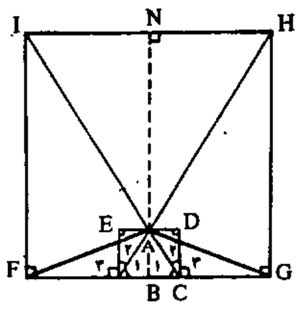
۲) اگر $\frac{AB}{2} = l$ باشد، خط d" مماس بر دایرهٔ به قطر AB است و مسئله یک جواب دارد.

۳) اگر $\frac{AB}{2} < l$ باشد، خط d" دایرهٔ به قطر AB را قطع نمی‌کند و مسئله جواب ندارد.

حل مسئله ۲ ـ از آقای علی نصیری امینی، دانش‌آموز سال سوم ریاضی، تهران

دو مثلث متساوی‌الساقین AEB و ACD متساویند زیرا:

$$\hat{B}_2 = \hat{C}_2 = 30° \;,\; EB = BA = AC = CD$$



پس $\hat{E}_1 = \hat{D}_1 = 75°$. از آنجا دو مثلث قائم‌الزاویه EBG و FCD با هم برابرند زیرا:

$$E\hat{B}G = D\hat{C}F = 90° \;,\; \hat{E}_1 = \hat{D}_1 = 75° \;,\; EB = DC$$

در نتیجه $BG = CF$ خواهد بود. از آنجا دو مثلث قائم‌الزاویهٔ IFC و HBG با هم برابر می‌باشد چون:

$$\hat{F} = \hat{G} = 90^\circ \qquad \hat{B}_1 = \hat{C}_1 = 60^\circ \qquad FC = BG$$

از برابری این دو مثلث نتیجه می‌شود که $IF = HG$ ، امّا بنابه‌فرض $IF \parallel HG$ است. بنابراین چهارضلعی $IFGH$ که دو ضلع مقابلش متوازی و مساوی هستند مستطیل است (متوازی‌الاضلاعی است که زاویهٔ قائمه دارد پس مستطیل است).

حال کافی است ثابت کنیم که دو ضلع مجاور این مستطیل با هم برابرند. داریم:

$$EB \parallel HG \Rightarrow \Delta GAH \sim \Delta EAB \Rightarrow \frac{AB}{HA} = \frac{EB}{HG} \text{ و } AB = EB$$
$$\Rightarrow HA = HG \qquad (1)$$

از طرفی مثلث AIH متساوی‌الاضلاع است زیرا به علت موازی بودن IH و BC با مثلث متساوی‌الاضلاع ABC متشابه است. پس:

$$IH = AH = AI \qquad (2)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $IH = HG$ بنابراین، چهارضلعی $IFGH$ مربع است.

دو مربع $BCDE$ و $FGHI$ نسبت به مرکز متجانس A مجانس یکدیگرند زیرا:

$$\Delta AHI \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AB}{AH} = \frac{AC}{AI} = \frac{BC}{IH}$$
$$\Delta AEB \sim \Delta GHA \Rightarrow \frac{AB}{AH} = \frac{AE}{AG} = \frac{EB}{GH}$$
$$\Delta ACD \sim \Delta FIA \Rightarrow \frac{DC}{FI} = \frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AI}$$

از رابطه‌های فوق نتیجه می‌شود که: $\frac{AC}{AI} = \frac{AB}{AH} = \frac{AE}{AG} = \frac{AD}{AF}$

و یا $\boxed{\frac{AI}{AC} = \frac{AH}{AB} = \frac{AG}{AE} = \frac{AF}{AD}}$. این رابطه نشان می‌دهد که مربع $IFGH$ مجانس مربع $EBCD$ نسبت به مرکز تجانس A است. برای محاسبهٔ نسبت تجانس اندازهٔ ضلع مربع $IFGH$ را a' می‌نامیم و ارتفاعهای رأس A در دو مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و AIH را رسم می‌کنیم. داریم:

$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad AN = \frac{a'\sqrt{3}}{2}, \quad MN = IF = a' \Rightarrow$$

$$AM + AN = IF \Rightarrow \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a'\sqrt{3}}{2} = a' \Rightarrow$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a'(2-\sqrt{3})}{2} \Rightarrow \frac{a'}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \sqrt{3}(2+\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow K = 2\sqrt{3} + 3$$ نسبت تجانس دو مربع

امّا نسبت مساحتهای دو مربع، مساوی مجذور نسبت تشابه است پس:

$$\frac{S_{IFGH}}{S_{EBCD}} = K^2 = (2\sqrt{3}+3)^2 = 21 + 12\sqrt{3}$$

نام کسانی که حل درست یک یا دو مسئله از مسائل مسابقه‌ای برهان ۱۰ را فرستاده‌اند:

۱ـ آقای نادر مطیع، تهران (۱ و ۲)
۲ـ آقای ارسلان چوپانی، تهران (۱ و ۲)
۳ـ آقای سیدروزبه مصطفوی‌پور، تهران (۱ و ۲)
۴ـ آقای سبحان نظری، نورآباد ممسنی (۱ و ۲)
۵ـ آقای علی نصیری امینی، تهران (۱ و ۲)
۶ـ آقای محمد بشیری (۱ و ۲)
۷ـ آقای علی قنبریان، تهران (۱ و ۲)
۸ـ آقای محمدعلی ملیحی، تهران (۱)
۹ـ آقای امیرسیفی، تهران (۱)
۱۰ـ آقای یزن صادقی، تهران (۱)
۱۱ـ آقای شبگیر حسنی، تهران (۱)
۱۲ـ آقای علی نخودچی، مشهد (۱)
۱۳ـ آقای شهاب ایلکا، تهران (۱ و ۲)
۱۴ـ آقای علیرضا خلیق، تبریز (۲)
۱۵ـ خانم ساناز پاسدار، تبریز (۱ و ۲)

مسائل مسابقه‌ای

۱ـ نمودار گردشی‌ای رسم کنید و برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا شمارهٔ کارمندی و حقوق ناخالص کارمندان یک مؤسسه را بخواند و طبق تعرفهٔ زیر حقوق خالص کارمندان را همراه با شمارهٔ کارمندی با پیغام مناسب چاپ کند.

الف ـ کسور ثابت ۵%

ب ـ مالیات تا ۷۰۰۰۰ ریال معاف

ج ـ مالیات از ۷۰۰۰۱ الی ۱۱۰۰۰۰ ریال به ازای هر ۱۰۰۰۰ ریال افزایش به ترتیب: ۶، ۸، ۱۰، ۱۲ درصد بر مازاد

د ـ مالیات از ۱۱۰۰۰۱ ریال الی ۱۵۰۰۰۰ ریال، ۲۲ درصد

هـ ـ مالیات از ۱۵۰۰۰۱ ریال بیشتر ۴۴ درصد بر مازاد

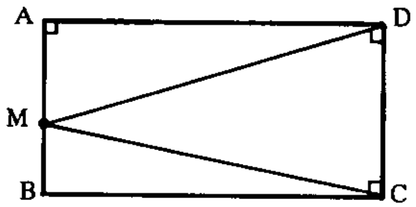
(مسایل مسابقه‌ای کامپیوتر)

◆ مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

ف ۲ ①

۱ـ در مستطیل ABCD بر ضلع AB نقطهٔ M را چنان اختیار می‌کنیم که $AM^2 = AB \cdot MB$ باشد. از M به C و D وصل می‌کنیم. ثابت کنید: $MD^2 - MC^2 = MA \cdot MB$.

(فرستنده آقای رضا، شاه‌اکبری از نیشابور)

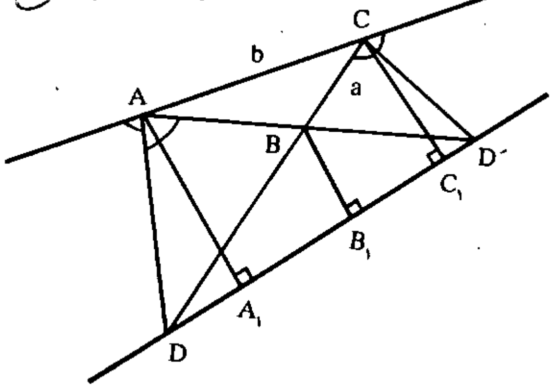


ف ۳ ①

۲ـ ثابت کنید فاصلهٔ سه‌رأس هر مثلث از خطی که پای نیمسازهای زوایای خارجی دو رأس مثلث را به هم وصل می‌کند، به نسبت عکس اضلاع مقابل به این رأسها است. یعنی در شکل زیر داریم:

$$\frac{AA_1}{\frac{1}{a}} = \frac{BB_1}{\frac{1}{b}} = \frac{CC_1}{\frac{1}{c}}$$

راهنمایی: نیمساز هر زاویه مثلث ضلع روبرو را به نسبت اضلاع مجاور تقسیم می‌کند.



جبر ۱ ۳ـ هرگاه $A = \{x - y , 3\}$ و $B = \{x + y , 1\}$ و داشته باشیم، $(A \times B) = (B \times A)$، مقادیر x و y را به دست آورید.

جبر ۱ ۴ـ رابطهٔ زیر روی IR^2 تعریف شده است، خواص این رابطه را بررسی کنید.

$(a , b) R (c , d) \Leftrightarrow (a - c)(b - d) = 0$

جبر ۱ ۵ـ هرگاه R یک رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ A باشد، ثابت کنید: $aRb \Leftrightarrow [a] = [b]$.

$([a] = \{x \in A \mid xRa\})$

حساب ۱ ۶ـ تابع $f: IN \to IN$ با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4}$ مفروض است، خاصیت یک به یکی و پوشایی را برای این تابع بررسی کنید.

حج ۱ ۷ـ با استفاده از ماتریسهای تبدیل (ماتریس دوران حول مبدأ) و تبدیلات متوالی ثابت کنید:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos \alpha \quad \text{و} \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

(۲) ۸ـ معادله $15 - \left(\frac{a - x}{x - b}\right)^2 = 8 \left(\frac{a - x}{x - b}\right)$ را حل کنید.

(۲) ۹ـ مطلوب است تعیین معادلهٔ خطّی که از نقطهٔ $A \left| \begin{matrix} 5 \\ 10 \end{matrix} \right.$ گذشته، فاصلهٔ مبدأ مختصات از آن مساوی (۱۰) باشد.

(۳) ۱۰ـ ثابت کنید اگر اضلاع مثلثی تصاعد هندسی بسازد، سه ارتفاع آنها نیز تصاعد هندسی می‌سازد.

(۴) ۱۱ـ از رابطهٔ $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 0$، رابطهٔ زیر را نتیجه بگیرید:

$$\cos \alpha \cos 2\alpha + \cos \beta \cos 2\beta + \cos\gamma \cos 2\gamma = 6\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$$

(راهنمایی: از اتحاد $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$ استفاده کنید.)

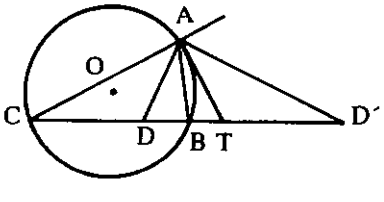
(فرستنده: آقای علی‌گشاس دانش‌آموز رشته ریاضی از اهواز)

۱۲ـ حاصل عبارت زیر را حساب کنید:

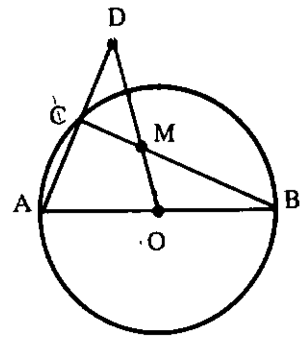
$$tg\frac{1}{2}\left[\mathrm{Arc}\cos\left(\frac{-2}{3}\right) - \mathrm{Arc}\sin\left(\frac{2}{3}\right)\right]$$

◆ مسائل ریاضیات سال سوّم ریاضی

۱ـ مثلث ABC مفروض است. در نقطهٔ A مماسی بر دایرهٔ محیطی مثلث رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع BC را در نقطهٔ T قطع کند. نیمسازهای زوایای داخلی و خارجی زاویهٔ A را نیز رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در نقاط D و D′ قطع کنند (نقطهٔ B بین D و D′ است). ثابت کنید که: $TA^2 - TB^2 = BD \cdot BD'$.



۲ـ قطر AB از دایرهٔ O مفروض است. از نقطهٔ A به نقطهٔ دلخواه C از این دایره وصل می‌کنیم و نقطهٔ D را در امتداد AC چنان اختیار می‌کنیم که $AC = CD$ باشد. از C به B و از O به D وصل می‌کنیم تا در نقطهٔ M یکدیگر را قطع کنند. مکان هندسی نقطهٔ M، وقتی نقطهٔ C دایرهٔ O را می‌پیماید، تعیین کنید.



۳ـ ثابت کنید مجموعهٔ n تاییهای مرتب با درآیه‌های گویا همراه با دو عمل جمع n تاییها (مؤلفه به مؤلفه) و ضرب عدد در یک n تایی (در هر مؤلفه ضرب می‌شود) یک فضای برداری روی IR تشکیل نمی‌دهد.

$$Q^n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_1, a_2, ..., a_n \in Q\}$$

۴ـ هرگاه بردارهای V_1، V_2 و V_3 در فضای برداری V مستقل خطی باشند، آیا بردارهای $(V_1 - V_2 - V_3)$ و $(2V_1 + V_2 - V_3)$ و $(3V_1 - 2V_3)$ استقلال خطی دارند؟ چرا؟

۵ـ عبارات بولی زیر را ساده کنید:

الف) $A = (a + b' + c')(a' + b)(a + bc)$

ب) $B = (ab + c)' + a'c + cb' + b$

۶ـ اولاً معین کنید به چند طریق می‌توان ۲ عدد از میان اعداد ۱ تا ۲۰ انتخاب کرد به شرطی که مجموع آنها فرد باشد. ثانیاً به چند طریق می‌توان از بین این اعداد ۳ عدد انتخاب کرد به‌طوری که مجموع آنها فرد باشد.

۷ـ چند عدد کوچکتر از یک میلیون به کمک ارقام ۸ و ۹ می‌توان درست کرد؟

۸ـ دو شخص A و B به هدفی تیراندازی می‌کنند. احتمال زدن A به هدف $\frac{1}{4}$ و احتمال زدن B به هدف $\frac{2}{5}$ است، اگر A و B باهم تیراندازی کنند احتمال آنکه حداقل یکی به هدف بزند چقدر است؟

۹ـ مطلوب است تعیین کلیهٔ اعدادی که عدد $(2^{12n} - 1)$ برآنها بخش‌پذیر است $n \in N$

۱۰ـ مطلوب است محاسبهٔ حدّ $\frac{n!+(n-1)!+(n+1)!}{(n-2)! + (n+2)! + n!}$ وقتی $n \to +\infty$، $n \in N$.

۱۱ـ مطلوب است تعیین معادلهٔ مکان هندسی نقاطی از صفحه که بتوان دو مماس عمود بر هم بر منحنی تابع به معادلهٔ $y = \frac{x^2+1}{x}$ رسم کرد.

۱۲ـ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$6\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{8}\right) + \cos\frac{x}{2} = 2$$

(فرستنده: آقای علی‌کشاس دانش‌آموز رشته ریاضی از اهواز)

۱۳ـ در مثلث ABC داریم $b^3 + c^3 = a^2(b + c)$، ثابت کنید: $\hat{A} = 60°$.

(فرستنده: آقای مهدی محمدی دانش‌آموز رشته ریاضی از آمل)

◆ مسائل کامپیوتر سال سوم ریاضی

۱ـ برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا عدد π را به کمک ۲۰ جملهٔ حاصلضرب زیر محاسبه کرده نتیجه را با پیغام مناسب در خروجی چاپ کند.

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \times \dots$$

۲ـ برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا ابتدا تعداد جملات سری زیر را بخواند و سپس مقدار π را محاسبه کرده نتیجه را با پیغام مناسب در خروجی چاپ کند.

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right)$$

۳ـ برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا مقدار e (عدد اویلر) را با

استفاده از سری

$$e = ۱ + \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \dots$$

محاسبه کرده نتیجه را با پیغام مناسب در خروجی چاپ کند و به محض اینکه مقدار یک جمله کمتر از $۱۰^{-۶}$ شد به محاسبه خاتمه دهد. مقدار e را از طریق تابع کتابخانه‌ای به‌دست آورده و نتیجه‌ها را با هم مقایسه کنید.

۴ـ شرایط تمرین ۳ را در مورد مقدار تقریبی $e^{-۱}$ پیاده کنید که در آن:

$$e^{-۱} = ۱ - \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۴!} - \frac{۱}{۵!} + \dots$$

۵ـ برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا عدد طبیعی N را از ورودی بخواند و یکبار بدون استفاده از حلقه‌های FOR و WHILE ، و بار دیگر با استفاده از حلقهٔ FOR ، مجموع زیر را محاسبه کرده و نتیجه را با پیغام مناسب در خروجی چاپ کند.

$$\sum_{I=۰}^{N} ۲^I = ۱ + ۲^۱ + ۲^۲ + ۲^۳ + \dots + ۲^N$$

(فرستنده مسائل شمارهٔ ۴ و ۵ آقای سیدرضا حسینی، دبیر دبیرستانهای سنندج)

• مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

تکلیف ۱ـ دو بردار $\vec{V}_۱ = ۳\vec{i} + \vec{j} - ۲\vec{k}$ و $\vec{V}_۲ = -\vec{i} + \vec{k}$ مفروضند. مطلوب است محاسبهٔ:

الف) $(۳\vec{V}_۱) \cdot (-۲\vec{V}_۲)$

ب) ($\frac{۳}{۵}\vec{V}_۱$ و $-\frac{۲}{۳}\vec{V}_۲$)

ج) اندازهٔ جبری تصویر بردار $۲\vec{V}_۱ + ۳\vec{V}_۲$ روی بردار $۳\vec{V}_۱ - ۴\vec{V}_۲$.

د) $|(\vec{V}_۱ - ۲\vec{V}_۲) \wedge (-\vec{V}_۱ + \vec{V}_۲)|$

تکلیف ۲ـ دو خط d و d' به معادلات زیر مفروضند:

$$d: \frac{x+۲}{۲} = \frac{y-a+۲b-۲}{۲b} = z \qquad (b \neq ۰)$$

$$d': \frac{۲x-b}{b} = \frac{y-(a+۱)(۲b+۱)}{(a+۱)(۲b+۱)-۱} = \frac{z-b-۱}{b}$$

اولاً: مقدار a را چنان تعیین کنید که این دو خط در ازای جمیع مقادیر حقیقی b برهم عمود باشند. سپس به ازای $a = -۱$ تحقیق کنید دو خط در نقطهٔ ثابت A ، که مختصاتش را پیدا می‌کنید متقاطعند.

ثانیاً: با همان مفروضات، خط دیگر

$$d'': \begin{cases} x = z - c \\ y = -۱ \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم. مقدار b را به قسمی بیابید که خط d'' با دو خط d و d' زاویه‌های متساوی تشکیل دهد.

ثالثاً: اگر $a = -۱$ و $b = ۱$ باشد:

الف) معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که شامل دو خط d و d' است و ثابت کنید به ازای مقداری از c، که آن را تعیین خواهید کرد، خط d'' می‌تواند بر این صفحه منطبق باشد.

ب) به ازای $c = ۲$ مختصات نقاط تلاقی خط d'' را با دو خط d و d' یافته، این دو نقطه را B و C بنامید و تحقیق کنید مثلث ABC قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است. آنگاه معادلهٔ مکان هندسی نقاطی را تعیین کنید که از سه رأس مثلث به یک فاصله باشند.

ج) هرم SABC را به حجم ۹ طوری در نظر می‌گیریم که $SA = SB = SC$ بوده؛ و رأس S پایین صفحهٔ xoy واقع باشد. مختصات این رأس را حساب کنید.

د) مختصات رأسهای مقطع صفحهٔ xoy را در هرم SABC تعیین کنید.

(از آقای م ـ ا ـ گیتی‌زاده دبیر ریاضی)

۳ـ هم‌ارزی‌های زیر را ثابت کنید:

الف) $(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

ب) $p \vee (q \Leftrightarrow r) \equiv (p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee r)$

۴ـ ثابت کنید استنتاج زیر معتبر است (با ذکر قوانین):

۱) $(p \wedge q) \Rightarrow r \wedge$

۲) $(p \wedge \sim r)$

$\therefore q \Rightarrow s$

۵ـ اگر R حلقه‌ای باشد فاقد مقسوم علیه‌صفر، ثابت کنید معادلهٔ $ax = b$ در حلقهٔ R جوابی منحصر به فرد دارد (حداکثر یک جواب دارد).

۶ـ می‌دانیم کلیه ایده‌آلهای حلقهٔ اعداد صحیح به شکل KZ هستند که $KZ = \{kx|x \in Z\}$ ثابت کنید $mZ + nZ = dZ$ که در آن $d = (m,n)$.

به‌طور کلّی اگر I_1 و I_2 ایده‌آلهای حلقهٔ R باشند داریم:

$I_1 + I_2 = \{a + b|\ a \in I_1\ ,\ b \in I_2\}$

۷ـ تعیین کنید در خارج قسمت و باقیماندهٔ یک تقسیم چه تغییری رخ می‌دهد هرگاه: الف) مقسوم‌علیه را به مقسوم بیفزاییم (یا کم کنیم)، ب) ۳ برابر مقسوم علیه را به مقسوم بیفزاییم.

۸ـ ثابت کنید اگر عدد صحیح a مضرب ۷ نباشد در این صورت:

$a^3 = 7K \pm 1$

۹ـ مطلوب است تعیین دو عدد که مجموعشان ۱۸۷ و کوچکترین مضرب مشترک آنها ۳۰ برابر بزرگترین مقسوم علیه مشترکشان باشد.

۱۰ـ بدون استفاده از مشتق ثابت کنید، تابع به معادلهٔ $f(x) = \sqrt{x + 4 + 3\sqrt{x + 4}}$ در دامنه‌اش یک به یک است.

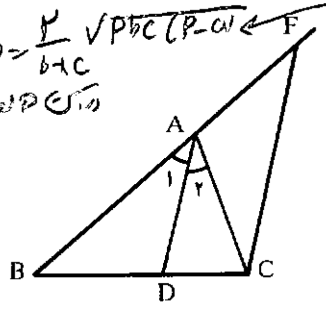
۱۱ـ در تابع به‌معادلهٔ $y = \frac{x^2 - 4x + m}{x - 1}$، m را چنان بیابید تا بین طولهای نقاط اکسترمم منحنی تابع فوق رابطه $4x'x'' + 3(x'+x'') = 6$ برقرار باشد.

۱۲ـ مطلوب است محاسبهٔ $\int \frac{4\sin x \cos x\, dx}{\sqrt{2\sin^2 x + \cos^2 x}}$

◆ مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

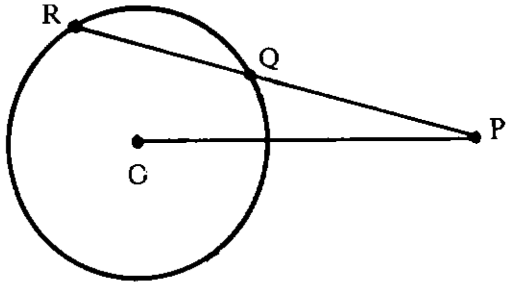
۱ـ از نقطهٔ C خطی موازی نیمساز زاویهٔ داخلی A رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع AB را در نقطهٔ F قطع کند. اندازهٔ پاره‌خط CF را برحسب اضلاع مثلث به دست آورید.

راهنمایی، $AD = \frac{2}{b+c}\sqrt{pbc(p-a)}$ است که p نصف محیط مثلث است



۲ـ نقطهٔ P خارج یک دایره و به فاصلهٔ ۱۳ سانتی‌متر از مرکز آن واقع است. خطی از P رسم شده است که دایره را در نقطه‌های Q و R چنان قطع کرده که پاره‌خط PQ برابر ۹ سانتی‌متر و پاره‌خط QR برابر ۷ سانتی‌متر است. شعاع دایره را حساب کنید.

فرستنده: آقای رضا نصیری دانش‌آموز از زنجان



۳ـ نامعادلهٔ زیر به‌ازای چه مقادیری از x برقرار است:

$$\log_5^x > \log_{125}(3x - 2)$$

(فرستنده: آقای مجید شهبازی دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (زنجان))

۴ـ عبارت زیر را تجزیه کنید:

$$16y^2 + 4x^2 + 32y + x^4 - 4x^2y^2 + 16 = ?$$

(فرستنده: آقای سروش عباس‌پور دانش‌آموز دبیرستان مرکز شهیدبهشتی ساری)

۵ـ اگر a و b و c جملات متوالی یک تصاعد هندسی باشند ثابت کنید:

$$a^3 + b^3 + c^3 = a^2b^2c^2(a^{-3} + b^{-3} + c^{-3})$$

(فرستنده مسائل ۵ و ۶: آقای محمد توسلی دانش‌آموز رشته تجربی آمل)

۶ـ در صورتی‌که $\log_b^a$ و $\log_c^b$ و $\log_a^c$ به ترتیب تشکیل یک تصاعد هندسی بدهند مطلوب است محاسبهٔ a و b و c از دستگاه زیر:

$$\begin{cases} \log_2^a + \log_2^b + \log_2^c = 10 & (\log a \neq 0) \\ a = b + c \end{cases}$$

۷- دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=1 \\ x^2+xz+z^2=4 \\ y^2+yz+z^2=7 \end{cases}$$

(فرستنده: آقای محمدعلی مهتدی دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (بناب))

۸- با شرط $b>0$ و $a>0$، حاصل عبارت زیر را حساب کنید:

$$S=\sqrt{a\sqrt[3]{b\sqrt{a\sqrt[3]{b\sqrt{a\sqrt[3]{b\sqrt{\dots}}}}}}}$$

(فرستنده: خانم لاله تراب‌نژاد دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (تبریز))

۹- مقدار عبارت زیر را حساب کنید:

(راهنمایی: $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$)

$$S=\operatorname{Arc}\sin\frac{23}{26}-\operatorname{Arc}\cos\frac{11}{13}$$

(فرستندهٔ مسائل ۱ و ۲: آقای حسین روح‌الامینی دانش‌آموز رشته ریاضی (سیرجان))

۱۰- از روابط زیر رابطه‌ای مستقل از x پیدا کنید:

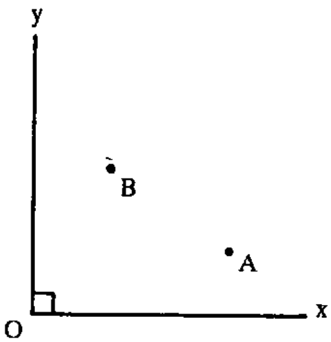
$$\begin{cases} a\sin^2x-b\cos^2x=p \\ a\sin^4x+b\cos^4x=q \end{cases}$$

◆ مسائل ریاضیات سال سوّم تجربی

۱- اندازهٔ بردار مکان مرکز ثقل مثلث حاصل از تقاطع خط Δ به معادلهٔ $2x-3y-6=0$ با محورهای مختصات را به دست آورید.

۲- اگر $|\vec{a}|=3$ و $|\vec{b}|=5$ و $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\pi}{3}$ باشد، مطلوب است محاسبهٔ $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})$

۳- دو نقطهٔ A و B درون زاویهٔ قائمهٔ xoy مفروضند. روی نیمخطهای ox و oy به ترتیب نقاط P و Q را چنان پیدا کنید که $AP+PQ+QB$، کمترین مقدار ممکن را دارا باشد.



۴- حدّ زیر را حساب کنید:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x\sin 2x\sin 3x}{x^3}\right)$$

۵- اگر $y=a\sin mx+b\cos mx$ باشد، ثابت کنید:

$$y''+m^2y=0$$

(فرستنده مسائل ۴ و ۵ آقای فرزاد نصیری، رشته ریاضی از اراک)

۶- در تابع با ضابطهٔ پارامتری زیر y'_x را به دست آورید:

$$\begin{cases} x=2\operatorname{tg}3\alpha+3 \\ y=2\sin^3\alpha-5 \end{cases}$$

۷- نمودار تغییرات تابع باضابطهٔ مفروض $y=2mx-(2m-1)x^3$ همواره از چند نقطهٔ ثابت می‌گذرد؟

۸- اگر منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ مفروض $y=\frac{ax+b}{x+a}$ محور xها را در $x=-1$ قطع کند و خط $x=-2$ مجانب منحنی باشد، مقادیر a و b را تعیین کنید.

۹- اگر ماکزیمم تابع با ضابطهٔ مفروض $f(x)=2x^3-3mx^2$ برابر ۸ باشد، مقدار m را تعیین کنید.

۱۰- حاصل عبارت $T=\sin^6 15^\circ+\cos^6 15^\circ+\sin^4 15^\circ+\cos^4 15^\circ$ را حساب کنید.

(فرستنده: آقای حسین روح‌الامینی دانش‌آموز رشته ریاضی (سیرجان))

۱۱ـ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$3(\sin x - \cos x) - 4(\sin^3 x - \cos^3 x) = \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$$

(فرستنده: آقای علی‌گشاس دانش‌آموز رشته ریاضی (اهواز))

◆ مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱ـ فاصلهٔ نقطهٔ عطف منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{-2}{3}x^3 + 2x^2 - 1$ از نیمساز ربع دوم و چهارم را به‌دست آورید.

۲ـ معادلهٔ زیر دارای چند ریشهٔ حقیقی است:

$$(x-1)^3 + (x-2)^3 + \dots + (x-101)^3 = 0$$

۳ـ به ازای چه مقادیری از k تابع با ضابطهٔ مفروض $y = \frac{k+2x}{kx+8}$ مقداری ثابت است؟

۴ـ حدود m برای آن‌که نقطهٔ $P(-2\,,\,3)$ داخل دایره به معادلهٔ $2x^2 + 2y^2 + 2my = 18$ باشد را به‌دست آورید.

۵ـ اندازهٔ مماس مرسوم از نقطهٔ $M(2\,,\,-3)$ بر دایرهٔ به معادلهٔ $3x^2 + 3y^2 - 6y = 9$ را حساب کنید.

۶ـ اگر $\int_0^{\frac{\pi}{m}} \sin\frac{mx}{2}\,dx = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار m را به‌دست آورید.

۷ـ یک جواب عمومی معادلهٔ $\cos x\,(3\sin x + 3\cos x) = \frac{3}{2}$ را به‌دست آورید.

۸ـ اگر در مثلثی رابطهٔ $\cos^2\hat{A} + \cos^2\hat{B} - \cos^2\hat{C} = 1$ برقرارباشد، زاویهٔ C چه‌قدر است؟

تفریح اندیشه ۳

دو نفر یکی بزرگسال و دیگری بچه با لباس یکسان در هوای باز یخبندان ایستاده‌اند. کدام یک از آنها بیشتر سردش است؟

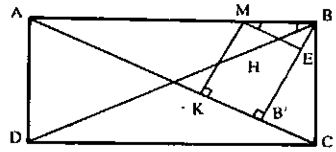
جواب در صفحه ۸۸

حل مسائلِ برهانِ شمارهٔ ۱۱

□ حل مسائل ریاضیات سال اول

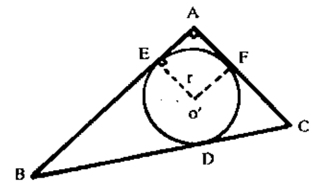
۱ـ از نقطهٔ B عمود BB' را بر قطر AC فرود می‌آوریم و از M عمود ME را بر BB' رسم می‌کنیم. چهار ضلعی $MEB'K$ مستطیل است. پس، $MK = EB'$. از طرفی دو مثلث قائم‌الزاویهٔ MBH و MBE به حالت تساوی وتر و یک زاویهٔ حاده برابرند بنابراین $MH = BE$ و درنتیجه داریم:

$$MH + MK = BE + EB' = BB' = C^{te}$$



۲ـ دایرهٔ محاطی داخلی مثلث قائم‌الزاویه ABC $(\hat{A} = ۹۰°)$ را رسم می‌کنیم و نقاط تماس این دایره با اضلاع BC و AB و AC را به‌ترتیب D و E و F می‌نامیم. می‌دانیم که $AE = AF$ و $CD = CF$ و $BD = BE$ است. از طرفی داریم:

$$AB + AC + BC = ۲p \Rightarrow$$
$$AE + EB + AF + FC + BD + DC = ۲P \Rightarrow$$
$$۲AE + ۲BD + ۲CD = ۲P \Rightarrow AE + BC = P \Rightarrow$$
$$AE = P - BC \Rightarrow AE = P - a$$



اما چهار ضلعی $O'EAF$ مربع است بنابراین $AE = r$ است پس:

$$r = p - a \Rightarrow ۲r = ۲p - ۲a \Rightarrow$$
$$۲r = a + b + c - ۲a = b + c - a \Rightarrow ۲r + a = b + c$$

اما در مثلث قائم‌الزاویه ABC $(\hat{r} = ۹۰°)$ $a = BC = ۲R$ است. پس:

$$\boxed{b + c = ۲R + ۲r}$$

۳ـ روش اول: دو حالت درنظر می‌گیریم، اگر $P \equiv T$ در این‌صورت $(p \vee q) \equiv T$ و اگر $P \equiv F$ در این صورت باید $\sim P \equiv T$ وچون طبق‌فرض $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv T$ لذا باید $q \equiv T$ که باز نتیجه می‌شود $(p \vee q) \equiv T$ حال اگر $p \vee (\sim p \wedge q)$ نادرست باشد باید $p \equiv F$ و $(\sim p \wedge q) \equiv F$ و چون $\sim p \equiv T$ پس باید $q \equiv F$ که نتیجه می‌شود $(p \vee q) \equiv F$ بنابراین همواره $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv (p \vee q)$.

روش دوم: از خاصیت توزیع‌پذیری $\vee$ نسبت به $\wedge$ استفاده می‌کنیم:

$$p \vee (\sim p \wedge q) \equiv (p \vee \sim p) \wedge (p \vee q) \equiv T \wedge (p \vee q) \equiv (p \vee q)$$

۴ـ گزارهٔ سوری $\forall x \in IR ، \frac{x+۱}{۲x-۱} \in IR$ نادرست است زیرا برای $x = \frac{۱}{۲}$ ، $\frac{x+۱}{۲x-۱} \notin IR$ و از طرفی گزارهٔ $(p \Rightarrow p)$ که تالی گزارهٔ $[(r \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Rightarrow p)]$ می‌باشد همواره درست بوده و می‌دانیم هر ترکیب شرطی که تالی آن درست باشد همواره درست خواهد بود، بنابراین در ترکیب دو شرطی مزبور چون دو طرف هم ارز نیستند همواره ارزش نادرست خواهیم داشت.

۵ـ باتوجه به تعریف $A_k = [-K , K]$ واضح است که

$$A_۱ \subset A_۲ \subset A_۳ \subset \dots \subset A_n \subset \dots$$

بنابراین باتوجه به‌قضایای اصلی اجتماع و اشتراک و تعمیم آنها داریم:

الف) $A_۱ \cap A_۲ \cap \dots \cap A_n \cap \dots = A_۱$

ب) $A_۱ \cup A_۲ \cup \dots \cup A_{۱۵} = A_{۱۵}$

ج) $A_۱ \cup A_۲ \cup \dots \cup A_n = A_n$

۶ـ فرض کنیم $(A \cup B) = \phi$ ثابت می‌کنیم $A = \phi$ و $B = \phi$

می‌دانیم $\rightarrow A \subset (A \cup B) \overset{\text{طبق فرض}}{\Longrightarrow} A \subset \phi$ (۱)

از طرفی همواره $\Rightarrow \phi \subset A$ (۲)

(۱) و (۲) $\Rightarrow A = \phi$

و به‌ترتیب ثابت می‌شود $B = \phi$.

از طرفی می‌دانیم اگر $A = B$ آنگاه $A' = B'$ و برعکس. بنابراین ثابت کردیم: (درمسألهٔ فوق به‌جای A ، A' و به‌جای B ، B' قرار داده‌ایم.)

$$(A' \cup B') = \phi \Rightarrow A' = \phi \wedge B' = \phi$$

یا به‌عبارت دیگر: $(A' \cup B')' = \phi' \Rightarrow (A')' = \phi' \wedge (B')' = \phi'$

یا $\rightarrow (A \cap B) = M \Rightarrow A = M \wedge B = M$

۷ـ

$$\frac{۲^{۱/۵}}{۱+\sqrt{۲}+(۳)^{\frac{۱}{۲}}} + ۹^{۰/۲۵} + \frac{۱}{۲^{-\frac{۱}{۲}}} = \frac{۲^{\frac{۳}{۲}}}{۱+\sqrt{۲}+۳^{\frac{۱}{۲}}} + ۹^{\frac{۱}{۴}} - ۲^{\frac{۱}{۲}}$$

$$= \frac{\sqrt{۲^۳}}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}} + \sqrt[۴]{۹} - \sqrt{۲} = \frac{۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}+(\sqrt{۲}+۱)} + \sqrt{۳} - \sqrt{۲}$$

$$\frac{۲\sqrt{۲}(\sqrt{۳}-\sqrt{۲}-۱)}{[\sqrt{۳}+(\sqrt{۲}+۱)][\sqrt{۳}-(\sqrt{۲}+۱)]} + \sqrt{۳} - \sqrt{۲}$$

$$= \frac{۲\sqrt{۲}(\sqrt{۳}-\sqrt{۲}-۱)}{۳-۲-۱-۲\sqrt{۲}} + \sqrt{۳} - \sqrt{۲}$$

$$= \frac{۲\sqrt{۲}(\sqrt{۳}-\sqrt{۲}-۱)}{-۲\sqrt{۲}} + \sqrt{۳} - \sqrt{۲}$$

$$= -(\sqrt{۳}-\sqrt{۲}-۱) + \sqrt{۳} - \sqrt{۲} = ۱$$

۸ـ

$$\text{جمع}\begin{cases} ۲x + ۳y + ۴z = ۱۹ \\ ۴x + y + z = ۱۵ \\ x + ۳y + ۲z = ۱۹ \end{cases}$$

$$۷x + ۷y + ۷z = ۶۳ \Rightarrow x + y + z = ۹$$

$$x + y + z = m + ۴ \Rightarrow ۹ = m + ۴ \Rightarrow \boxed{m = ۵}$$

۹ـ داریم: $a > ۰ \quad : (a - ۱)^۲ \geq ۰$

طرفین نامساوی را بر $a > ۰$ تقسیم می‌کنیم:

$$\Rightarrow a^۲ + ۱ - ۲a \geq ۰ \Rightarrow a^۲ + ۱ \geq ۲a$$

$\Rightarrow \boxed{a + \frac{۱}{a} \geq ۲} \Rightarrow$ $\boxed{\text{۲} \geq \text{عکس آن + هر عدد مثبت}}$

$$(a^۲ + b^۲ + c^۲)\left(\frac{۱}{a^۲} + \frac{۱}{b^۲} + \frac{۱}{c^۲}\right)$$

$$= ۱ + \frac{a^۲}{b^۲} + \frac{a^۲}{c^۲} + \frac{b^۲}{a^۲} + ۱ + \frac{b^۲}{c^۲} + \frac{c^۲}{a^۲} + \frac{c^۲}{b^۲} + ۱$$

$$\frac{a^۲}{b^۲} + \frac{b^۲}{a^۲} \geq ۲$$

$$\frac{a^۲}{c^۲} + \frac{c^۲}{a^۲} \geq ۲$$

$$\frac{b^۲}{c^۲} + \frac{c^۲}{b^۲} \geq ۲$$

به طرفین ۳ واحد اضافه می‌کنیم.

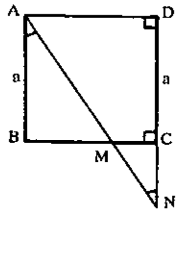
$$\Rightarrow \frac{a^۲}{b^۲} + \frac{b^۲}{a^۲} + \frac{c^۲}{a^۲} + \frac{a^۲}{c^۲} + \frac{b^۲}{c^۲} + \frac{c^۲}{b^۲} \geq ۶$$

$$۳ + \frac{a^۲}{b^۲} + \frac{b^۲}{a^۲} + \frac{c^۲}{a^۲} + \frac{a^۲}{c^۲} + \frac{b^۲}{c^۲} + \frac{c^۲}{b^۲} \geq ۹$$

$$\Rightarrow (a^۲ + b^۲ + c^۲)\left(\frac{۱}{a^۲} + \frac{۱}{b^۲} + \frac{۱}{c^۲}\right) \geq ۹$$

□ حل مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱ـ (حل از آقای رضا، شاه‌اکبری از نیشابور) دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABM و AND متشابهند زیرا $\hat{A}_۱ = \hat{N}_۱$ و $\hat{B} = \hat{D} = ۹۰°$ پس:



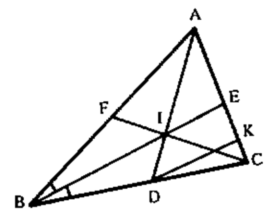
$$\frac{AB}{DN}=\frac{AM}{AN}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{AM}=\frac{DN}{AN}\Rightarrow \frac{a^2}{AM^2}=\frac{DN^2}{AN^2}=\frac{AN^2-a^2}{AN^2}\Rightarrow$$

$$\frac{a^2}{AM^2}=\frac{AN^2-a^2}{AN^2}=1-\frac{a^2}{AN^2}\Rightarrow \frac{a^2}{AM^2}+\frac{a^2}{AN^2}=1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AN^2}=\frac{1}{a^2}}$$

۲ـ از نقطهٔ D خطی موازی نیمساز BE رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در نقطهٔ K قطع کند. در مثلث ADK داریم:



$$IE \parallel DK \Rightarrow \frac{AI}{ID}=\frac{AE}{EK}\Rightarrow$$

$$\frac{AI}{ID}=\frac{AE}{EC}\times\frac{EC}{EK}\Rightarrow$$

$$\frac{AI}{ID}=\frac{c}{a}\times\frac{EC}{EK} \qquad (1)$$

از طرفی در مثلث BCE داریم:

$$DK \parallel BE \Rightarrow \frac{KC}{KE}=\frac{DC}{DB}=\frac{b}{c}\Rightarrow \frac{EC}{KE}=\frac{b+c}{c} \qquad (2)$$

از رابطه‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌شود:

$$\frac{AI}{ID}=\frac{c}{a}\times\frac{b+c}{c}=\frac{b+c}{a}$$

در نتیجه $\boxed{\frac{IA}{ID}=\frac{b+c}{a}}$. به همین ترتیب ثابت می‌شود که

$$\frac{IC}{IF}=\frac{a+c}{b}, \frac{IB}{IE}=\frac{a+b}{c}$$

۳ـ $A=\{1,2,3\}$

الف) $R_1=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(2,3)\}$

رابطهٔ R_1 خاصیت تقارنی ندارد زیرا، $(3,2)\notin R_1$ و نیز خاصیت تعدی ندارد زیرا، $1R_1 2$ و $2R_1 3$ ولی $1\not R_1 3$ و همچنین خاصیت پاد تقارن ندارد زیرا $1R_1 2$ و $2R_1 1$ ولی $2\neq 1$، بنابراین رابطهٔ R_1 فقط خاصیت بازتابی دارد.

ب) $R_2=\{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(2,3),(1,3)\}$

خاصیت بازتابی ندارد $\Leftarrow$ $3\not R_2 3$

خاصیت پادتقارن ندارد $\Leftarrow$ $1R_2 2 \wedge 2R_2 1$ و $1\neq 2$

خاصیت تقارنی ندارد $\Leftarrow$ $2R_2 3$ و $3R_2 2$

۴ـ می‌خواهیم ثابت کنیم اگر $(A\times B)=(C\times D)$ آنگاه $A=C$ و $B=D$.

$$\xLeftrightarrow{\text{طبق فرض}}\ (x,y)\in(A\times B)\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B \text{ فرض کنیم } [$$

$$(x,y)\in(C\times D)\Leftrightarrow x\in C\wedge y\in D]\Rightarrow A\subset C\wedge C\subset A$$

و $B\subset D\wedge D\subset B$

در واقع به یکباره ثابت کردیم $A=C$ و $B=D$.

۵ـ با فرض xRy و yRz نمی‌توان ثابت کرد xRz بنابراین، به‌دنبال مثال نقض هستیم:

$$2\times 0+3\times 2=6\Rightarrow 0R2$$

$$2\times 2+3\times\frac{2}{3}=6\Rightarrow 2R\frac{2}{3}$$

ولی واضح است که $0\not R\frac{2}{3}$ زیرا $2\times 0+3\times\frac{2}{3}\neq 6$.

۶ـ

الف) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$$f(x,y)=(x+1,y-4)$$

ب) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$$f(x,y)\to(x,\sqrt{y})$$

ج) $f:\mathbb{R}^2\to(R^+\cup\{0\})^2$

$$f(x,y)=(x^2,y^2)$$

د) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$$f(x,y)=(2x+y \text{ و } 6x+3y)$$

۷ـ برای حل این تمرین رجوع کنید به مقالهٔ گروه، پیدایش و کاربرد نظریه گروهها در برهان ۱ (سال اول).

۸ـ

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=35$$

$$(x+2)(x+3)(x+1)(x+4)=35$$

فرض می‌شود: $x^2+5x=y$

$$(x^2+5x+6)(x^2+5x+4)=35$$

$$(y+6)(y+4)=35\Rightarrow y^2+10y-11=0\Rightarrow\begin{cases}y=1\\y=-11\end{cases}$$

$$x^2+5x=1 \qquad \begin{cases}x^2+5x=-11\\x^2+5x+11=0\\\Delta<0\end{cases}$$

$$x^2+5x-1=0$$

$$\boxed{x=\frac{-5\pm\sqrt{29}}{2}}$$

۹ـ $a_1 \quad a_1q \quad a_1q^2 \quad a_1q^3$

$$\begin{cases}a_1+a_1q^3=\frac{35}{4}\\a_1q+a_1q^2=\frac{15}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1(1+q^3)=\frac{35}{4}\\a_1q(1+q)=\frac{15}{2}\end{cases}$$

دو معادله را برهم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{1+q^3}{q(1+q)}=\frac{\frac{35}{4}}{\frac{15}{2}}\Rightarrow\frac{(1+q)(1+q^2-q)}{q(1+q)}=\frac{7}{6}$$

$$\Rightarrow\frac{1+q^2-q}{q}=\frac{7}{6}\Rightarrow 6q^2-13q+6=0$$

$$q=\frac{13\pm\sqrt{25}}{12}=\frac{13\pm5}{12}\Rightarrow \boxed{q=\frac{3}{2},\frac{2}{3}}$$

۱۰ـ

$$\log_x=\frac{1}{\log_y x}$$

فرض می‌شود: $\log_y x=a$

$$\Rightarrow\log_y x+\frac{1}{\log_y x}=\frac{50}{7}$$

$$a+\frac{1}{a}=\frac{50}{7}\Rightarrow\frac{a^2+1}{a}=\frac{50}{7}\Rightarrow 7a^2-50a+7=0$$

$$a=\frac{25\pm\sqrt{576}}{7}=\frac{25\pm24}{7}\Rightarrow a=7,\frac{1}{7}$$

$$\log_y^x=7\Rightarrow x=y^7,\ xy=256\Rightarrow x=\frac{256}{y}$$

از طرفین تساوی لگاریتم می‌گیریم: $x=y^7\Rightarrow\frac{256}{y}=y^7$.

$$\log\frac{256}{y}=\log y^7\Rightarrow\log 256-\log y=7\log y$$

$$\log 256=8\log y\Rightarrow\log 2^8=8\log y$$

$$\Rightarrow 8\log z=8\log y$$

$$\Rightarrow\log y=\log 2\Rightarrow\boxed{y=2}\Rightarrow\boxed{x=128}$$

$\log_y x=\frac{1}{7}$ با شرط x>y قابل قبول نیست.

۱۱ـ

$$a^{\cos^2x}+a^{\sin^2x}=a+1\Rightarrow a^{\cos^2x}+a^{1-\cos^2x}=a+1$$

$$\Rightarrow a^{\cos^2x}+\frac{a}{a^{\cos^2x}}=a+1\Rightarrow(a^{\cos^2x}=y)y+\frac{a}{y}=a+1$$

$$\Rightarrow y^2-(a+1)y+a=0\Rightarrow y=\frac{a+1\pm\sqrt{(a+1)^2-4a}}{2}$$

$$\Rightarrow y=\frac{a+1\pm\sqrt{(a-1)^2}}{2}=\frac{a+1\pm|a-1|}{2}$$

$$=\frac{a+1\pm(a-1)}{2}$$

$$y=a \text{ یا } y=1\Rightarrow a^{\cos^2x}=a \text{ یا } a^{\cos^2x}=1$$

$$\Rightarrow\cos^2x=1 \text{ یا } \cos^2x=0$$

$$\Rightarrow\cos x=\pm1 \text{ یا } \cos x=0$$

$$\Rightarrow\left|\begin{array}{l}\cos x=1\Rightarrow\cos x=\cos 0\Rightarrow x=2k\pi\\\cos x=-1\Rightarrow\cos x=\cos\pi\Rightarrow x=2k\pi\pm\pi\end{array}\right.$$

$$\text{یا } \cos x=0\Rightarrow\cos x=\cos\frac{\pi}{2}\Rightarrow x$$

$$=2k\pi\pm\frac{\pi}{2} \text{ یا } x=k\pi+\frac{\pi}{2}$$

۱۲ـ

$$\begin{cases}\sqrt{2}\sin x=\sin y\\b\cos x=\cos y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\sin^2x=\sin^2y\\b^2\cos^2x=\cos^2y\end{cases}$$

از جمع روابط دستگاه داریم:

$$2\sin^2x+b^2\cos^2x=\sin^2y+\cos^2y=1$$

$$2(1-\cos^2x)+b^2\cos^2x=1\Rightarrow(b^2-2)\cos^2x=-1$$

$$\cos^2x=\frac{-1}{b^2-2}=\frac{1}{2-b^2}\Rightarrow 0<\frac{1}{2-b^2}\le1$$

$$\Rightarrow 2-b^2\ge1\Rightarrow b^2\le1$$

$$\Rightarrow|b|\le1$$

□ حل مسائل ریاضیات سال سوّم ریاضی

۱ـ (حل از آقای بهروز بیرامی از نقده). می‌دانیم که در هر چهار ضلعی، مجموع مربعات اندازه‌های اضلاع، برابر است با مجموع مربعات اندازه‌های دو قطر، به‌اضافهٔ چهار برابر مجذور اندازهٔ پاره‌خطی که وسطهای دو قطر چهار ضلعی را به هم وصل می‌کند.

$$y-1=\pm 2 \Rightarrow y=3 , y=-1$$
$$\Rightarrow x=2 , -2 \Rightarrow$$
$$M_1(2,3,2) , M_2=(-2,-1,2)$$

-۴

$1)\ [(p \Rightarrow q) \wedge r] \Rightarrow q \quad \wedge$

$2)\ \sim p \quad \wedge$

$3)\ q \Rightarrow s \quad \wedge$

$4)\ \sim s$

$\therefore r \Rightarrow p$

$5)\ (p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow q)$ از ۱ و عطف مقدمات

$6)\ (\sim p \vee q) \equiv p \Rightarrow q$ از ۲ و ادخال فاصل

$7)\ (r \Rightarrow q)$ از ۵ و ۶ و انتزاع

$8)\ (r \Rightarrow s)$ از ۷ و ۳ و قیاس

$9)\ \sim r$ از ۴ و ۸ و نقیض انتزاع

$10)\ \therefore (\sim r \vee p) \equiv r \Rightarrow p$ از ۹ و ادخال فاصل

۵ـ چون F میدان است بنابراین تمام اعضای مخالف صفر در آن وارونِ ضربی داشته و همواره داریم:

طبق فرض $x^{-1}+y^{-1}=1 \Rightarrow xy\,(x^{-1}+y^{-1})=xy \quad (1)$

از طرفی: $xy\,(x^{-1}+y^{-1})=x+y \overset{(1)}{\Rightarrow} xy=x+y=1$
$\Rightarrow xy=1 \Rightarrow x=y^{-1}$

۶ـ واضح است که هر دو عدد صحیحِ متوالی نسبت به هم اولند یعنی، $(a,(a+1))=1$ حال اگر $(a,(2a+1))=d$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} d|a \Rightarrow d|2a \\ d|2a+1 \end{array}\right\} \Rightarrow d|(2a+1)-2a \Rightarrow d|1 \Rightarrow d=1$$

و اگر $((a+1)$ و $(2a+1))=d$ در این‌صورت داریم:

$$\left.\begin{array}{l} d|a+1 \rightarrow d|2a+2 \\ d|2a+1 \end{array}\right\} \Rightarrow d|(2a+2)-(2a+1) \Rightarrow d|1 \Rightarrow d=1$$

پس دو به‌دو نسبت به هم اولند.

حال اگر $((2a+1)$ و $\frac{a(a+1)}{2})=d$ در این‌صورت:

$$d\,|\,\frac{a(a+1)}{2} \Rightarrow d\,|\,2\times\frac{a(a+1)}{2} \Rightarrow$$
$$d|a^2+a \Rightarrow d|2a^2+2a \qquad (1).$$

از طرفی: $d|2a+1 \Rightarrow d|2a^2+a \qquad (2)$

(1) و $(2) \Rightarrow d|(2a^2+2a)-(2a^2+a) \Rightarrow d|a \qquad (3)$

پس ثابت شد $d|a$ و داشتیم $d|2a+1$ و نیز ثابت کردیم که $((2a+1),a)=1$ پس $d|1$ یعنی $d=1$.

۷ـ طبق فرض داریم $a+b=324$ از طرفی اگر $(a,b)=d$ داریم:

$a=a'd$ و $b=b'd$ که $\rightarrow (a',b')=1$

$a+b=324 \Rightarrow a'd+b'd=(a'+b')d=324$

$=2^2\times 3^4 \qquad (1)$

از طرفی چون مقسوم‌علیه‌های مشترک a و b عبارت هستند از مقسوم‌علیه‌های d پس، تعداد مقسوم‌علیه‌های d نیز ۱۲ می‌باشد. با توجه به رابطهٔ (۱) باید $d=2^{\alpha}\times 3^{\beta}$ و $(\alpha+1)(\beta+1)=12$ بنابراین $d=2^2\times 3^3$ یا $d=108$ بنابراین، $a'+b'=3$ که با توجه به $(a',b')=1$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a'=1 \\ b'=2 \end{array}\right\} \Rightarrow a=108 \text{ و } b=216$$

$$\left.\begin{array}{l} a'=2 \\ b'=1 \end{array}\right\} \Rightarrow a=216 \text{ و } b=108$$

۸ـ اثبات به استقراء روی n.

$$p(1): A^1=\begin{bmatrix} \cos\alpha+\sin\alpha & \sqrt{2}\sin\alpha \\ -\sqrt{2}\sin\alpha & \cos\alpha-\sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow p(1)\equiv T$$

$$p(k)\equiv T \Rightarrow A^k = \text{فرض استقراء} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos k\alpha+\sin k\alpha & \sqrt{2}\sin k\alpha \\ -\sqrt{2}\sin k\alpha & \cos k\alpha-\sin k\alpha \end{bmatrix}$$

$$p(k+1): A^{k+1} = \text{حکم استقراء} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos(k+1)\alpha+\sin(k+1)\alpha & \sqrt{2}\sin(k+1)\alpha \\ -\sqrt{2}\sin(k+1)\alpha & \cos(k+1)\alpha-\sin(k+1)\alpha \end{bmatrix}$$

$$A^{k+1}=A\times A^k=\begin{bmatrix} \cos\alpha+\sin\alpha & \sqrt{2}\sin\alpha \\ -\sqrt{2}\sin\alpha & \cos\alpha-\sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos k\alpha+\sin k\alpha & \sqrt{2}\sin k\alpha \\ -\sqrt{2}\sin k\alpha & \cos k\alpha-\sin k\alpha \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos k\alpha+\cos\alpha\sin k\alpha+\sin\alpha\cos k\alpha-\sin\alpha\sin k\alpha & \sqrt{2}\cos\alpha\sin k\alpha+\sqrt{2}\sin\alpha\cos k\alpha \\ -\sqrt{2}\sin\alpha\cos k\alpha-\sqrt{2}\sin k\alpha\cos\alpha & -\sin\alpha\sin k\alpha+\cos\alpha\cos k\alpha-\cos\alpha\sin k\alpha-\sin\alpha\cos k\alpha \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos(k+1)\alpha+\sin(k+1)\alpha & \sqrt{2}\sin(k+1)\alpha \\ -\sqrt{2}\sin(k+1)\alpha & \cos(k+1)\alpha-\sin(k+1)\alpha \end{bmatrix}$$

۹ـ می‌خواهیم ثابت کنیم وارون هر ماتریس پایین مثلثی، پایین مثلثی است. اگر $\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+a_0=0$ معادلهٔ سرشتمایی ماتریس پایین مثلثی A باشد طبق قضیهٔ کیلی هامیلتون این ماتریس در معادله سرشتمایی‌اش صدق می‌کند یعنی:

$$A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\dots+a_1A+a_0I=\bar{0}$$

از طرفی چون A وارون‌پذیر است $a_0\neq 0$ پس:

$$A(A^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\dots+a_1I)=-a_0I$$
$$\Rightarrow A\left(\frac{-1}{a_0}A^{n-1}-\frac{a_{n-1}}{a_0}A^{n-2}-\dots-\frac{a_1}{a_0}I\right)=I$$
$$\Rightarrow A^{-1}=\left(-\frac{1}{a_0}A^{n-1}-\dots-\frac{a_1}{a_0}I\right)$$

و می‌دانیم اگر ماتریسی پایین مثلثی باشد هر توان آن نیز پایین مثلثی بوده و جمع چند ماتریس پایین مثلثی، پایین مثلثی است پس، A^{-1} پایین مثلثی می‌باشد.

-۱۰

اولاً:

$$y=x\sqrt{x}+3x+3\sqrt{x}-5$$
$$y+6=x\sqrt{x}+3x+3\sqrt{x}+1$$
$$y+6=(\sqrt{x}+1)^3 \Rightarrow y=(\sqrt{x}+1)^3-6$$
$$\Rightarrow f(x)=(\sqrt{x}+1)^3-6$$

$\forall x_1,x_2\in[0,+\infty]$ اگر $f(x_1)=f(x_2)$

$$\Rightarrow(\sqrt{x_1}+1)^3-6=(\sqrt{x_2}+1)^3-6$$
$$\Rightarrow(\sqrt{x_1}+1)^3=(\sqrt{x_2}+1)^3$$
$$\Rightarrow\sqrt{x_1}+1=\sqrt{x_2}+1\Rightarrow\sqrt{x_1}$$
$$=\sqrt{x_2}\Rightarrow \boxed{x_1=x_2}$$

بنابراین تابع فوق در فاصله (∞+ و ۰) یک به یک است.

ثانیاً:

$$y=(\sqrt{x}+1)^3-6\Rightarrow(\sqrt{x}+1)^3=y+6$$
$$\sqrt{x}+1=\sqrt[3]{y+6}\Rightarrow\sqrt{x}=\sqrt[3]{y+6}-1$$
$$\Rightarrow x=(\sqrt[3]{y+6}-1)^2$$

حال جای x و y را با هم عوض می‌کنیم.

$$\Rightarrow y=(\sqrt[3]{x+6}-1)^2=f^{-1}(x)$$

-۱۱

$$x^3-3\sqrt{3}x^2-3x+\sqrt{3}=0$$
$$\sqrt{3}-3\sqrt{3}x^2=3x-x^3$$
$$\sqrt{3}(1-3x^2)=3x-x^3$$
$$\Rightarrow\sqrt{3}=\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$$

فرض می‌کنیم: $x=\mathrm{tg}\,a$.

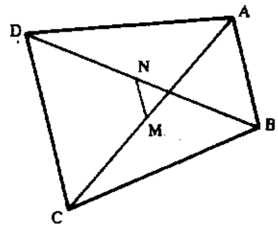
$$\sqrt{3}=\frac{3\mathrm{tg}\,a-\mathrm{tg}^3a}{1-3\mathrm{tg}^2a}\Rightarrow\mathrm{tg}\,3a=\sqrt{3}=\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}$$
$$3a=k\pi+\frac{\pi}{3}$$
$$\Rightarrow a=\frac{k\pi+\frac{\pi}{3}}{3}$$

k	a	x
۰	$\frac{\pi}{9}$	$\mathrm{tg}\frac{\pi}{9}=x_1$
۱	$\frac{4\pi}{9}$	$\mathrm{tg}\frac{4\pi}{9}=x_2$
۲	$\frac{7\pi}{9}$	$\mathrm{tg}\frac{7\pi}{9}=x_3$

به‌ازای سایر مقادیر k برای x همان جوابهای قبلی حاصل می‌شود.

-۱۲

یعنی، در چهار ضلعی ABCD که وسطهای قطرها را M و N نامیده‌ایم، داریم:



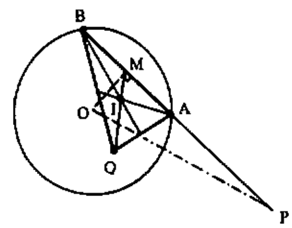
$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2$$

که با فرض $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=l_1$ و $AC^2+BD^2=l_2$ داریم:

$$l_1 = l_2 + 4MN^2 \Rightarrow MN^2 = \frac{1}{4}(l_1 - l_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{MN = \frac{1}{2}\sqrt{l_1 - l_2}}$$

۲ـ می‌دانیم مکان هندسی نقطهٔ M وسط وتر AB وقتی قاطع PAB تغییر می‌کند دایره‌ای به قطر OP است. (یا قسمتی از این دایره که داخل دایرهٔ O واقع است. درصورتی که نقطهٔ P خارج دایره باشد). حال اگر نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث QAB را I بنامیم، چون Q نقطه‌ای ثابت و $\frac{QI}{QM} = \frac{2}{3}$ است. پس مکان هندسی نقطهٔ I مجانس مکان هندسی نقطهٔ M نسبت به مرکز تجانس Q و نسبت تجانس $\frac{2}{3}$ است. یعنی مکان مطلوب یک دایره است که مجانس دایرهٔ به قطر OP است نسبت به مرکز تجانس Q، و نسبت تجانس $\frac{2}{3}$.



۳ـ فرض کنیم V یک فضای برداری روی IR باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم جابجایی جمع را می‌توان از سایر اصول فضای برداری نتیجه گرفت. فرض کنیم x و y دو عضو دلخواه V باشند، داریم:

$$(1+1)(x+y)=(1+1)x+(1+1)y= x+x+y+y \quad (1)$$

از طرف دیگر داریم:

$$(1+1)(x+y)=1(x+y)+1(x+y)=x+y+x+y \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow x + x + y + y = x + y + x + y$$

و باتوجه به قانون حذف در گروه (+ , V) داریم:

$$x + y = y + x$$

۴ـ شرط لازم: فرض کنیم اعضای مجموعهٔ $A= \{V_1,V_2,...,V_n\}$ وابسته خطی باشند. در این‌صورت اسکالرهایی چون α_1، α_2، ...، α_n هستند که لااقل یکی از آنها مثلاً $\alpha_i \neq 0$ و $\alpha_1V_1+...+\alpha_iV_i+...+\alpha_nV_n = \vec{0}$. حال اگر طرفین را بر $\alpha_i \neq 0$ تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$V_i = \left(\frac{-\alpha_1}{\alpha_i}\right)V_1 + ... + \left(\frac{-\alpha_n}{\alpha_i}V_n\right)$$

یعنی V_i به‌صورت ترکیب خطی از بقیه بردارها نوشته‌شد.

شرط کافی: فرض کنیم لااقل یکی از بردارها را برحسب ترکیبی خطی از بقیه بردارها بتوان نوشت، در این صورت:

$$V_i = \lambda_1V_1 + \lambda_2V_2 + ... + \lambda_nV_n$$
$$\Rightarrow V_i - \lambda_1V_1 - \lambda_2V_2 - ... - \lambda_nV_n = \vec{0}$$

رابطهٔ اخیر نشان دهندهٔ یک ترکیب خطی از n بردار V_1 تا V_n است که مساوی با بردار صفر شده و می‌دانیم حداقل ضریب V_i، یک است و مخالف باصفر، پس این بردارها وابستهٔ خطی‌اند.

۵ـالف) ۶ نفر به !۶ طریق می‌توانند سخنرانی کنند که در نیمی از این تعداد A بعداز B و نیمی دیگر B بعداز A سخنرانی خواهند کرد. پس، تعداد راههایی که B بعداز A سخنرانی می‌کند برابر است با $\frac{6!}{2}$.

ب) اگر بخواهیم شخص B بلافاصله بعد از A سخنرانی کند، B و A را یک نفر فرض کرده که با ۴ نفر دیگر ۵ نفر شده و به !۵ طریق می‌توانند سخنرانی کنند.

۶ـ

$$xyz + x.(x' + y) + y.(x' + y') + xy'z + xz'$$
$$= xyz+xy+yx'+xy'z + xz' \quad (x(x'+y)=xy, y(x'+y')=yx')$$
$$= xyz + y\underbrace{(x + x')}_{1} + xy'z + xz'$$
$$= xyz + xy'z + y + xz'$$
$$= xz(y + y') + y + xz'$$
$$= xz + y + xz' = xz + xz' + y$$
$$= x(z + z') + y = x + y$$

۷ـ

$$P(x) \;\; \underline{\left| x-1 \right.}$$
$$3 \quad Q_1(x) \Rightarrow P(x)=(x-1)Q_1(x)+3 \Rightarrow \boxed{P(1)=3}$$

$$P(x) \;\; \underline{\left| x-2 \right.}$$
$$7 \quad Q_2(x) \Rightarrow P(x)=(x-2)Q_2(x)+7 \Rightarrow \boxed{P(2)=7}$$

$$P(x) \;\; \underline{\left| x-3 \right.}$$
$$13 \quad Q_3(x) \Rightarrow P(x)=(x-3)Q_3(x)+13 \Rightarrow \boxed{P(3)=13}$$

$$P(x) \;\; \underline{\left| (x-1)(x-2)(x-3) \right.}$$
$$mx^2 + nx + k \quad Q(x)$$

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3).Q(x) + mx^2 + nx + k$$
$$x = 1 \Rightarrow P_{(1)} = m + n + k = 3$$
$$x = 2 \Rightarrow P_{(2)} = 4m + 2n + k = 7$$
$$x = 3 \Rightarrow P_{(3)} = 9m + 3n + k = 13$$

$$-1\begin{cases} m+n+k=3 \\ 4m+2n+k=7 \end{cases} \Rightarrow 3m+n=4$$

$$-1\begin{cases} m+n+k=3 \\ 9m+3n+k=13 \end{cases} \Rightarrow 8m+2n=10$$

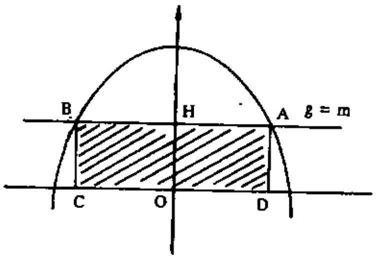
$$-2\begin{cases} 3m+n=4 \\ 8m+2n=10 \end{cases} \Rightarrow 2m=2$$

$$\Rightarrow \boxed{m=1}, \boxed{n=1}, \boxed{k=1}$$

$$\Rightarrow mx^2+nx+k=x^2+x+1$$

۸ـ

اگر $A\left|\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right.$ فرض شود داریم: $\begin{cases} AH=x \\ OH=y \end{cases}$



در نتیجه طول ضلع مستطیل (2x) و عرض آن (y) است:

عرض × طول = مساحت مستطیل

$$S = 2x.y$$
$$S = 2x(27 - x^2) \Rightarrow S = 2(27x - x^3)$$
$$S' = 2(27 - 3x^2) = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

x		-3		3	
S'	−		+		−
S	↘		↗		↘

پس $x = 3$ طول ماکزیمم است:

$$\Rightarrow x = 3 \Rightarrow S_{Max} = 2(27 \times 3 - 27) = 108$$

۹ـ

$$y_1 = x^2 - 2x$$
$$y'_1 = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	-∞		-1		0		1		2		3		+∞
y'_1		−		−		−		+		+		+	
y_1	+∞	↘	3	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	3	↗	+∞
			A		B		C		D		E		

$$y_2 = x^3 - 3x^2 + 2$$
$$y'_2 = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0, 2$$

x	-∞		-1		0		1		2		3		+∞
y'_2		+		+		−		−		+		+	
y_2	-∞	↗	-2	↗	2	↘	0	↘	-2	↗	2	↗	+∞
			F		G		H		I		K		

$$y_3 = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} < 0$$

$x = 0$ مجانب قائم

$y = 0$ مجانب افقی

x	-∞		-1		0		1		+∞
y'_3		−		−	‖	−		−	
y_3	0	↘	-1	↘	-∞ ‖ +∞	↘	1	↘	0
			L				M		

مسائل برای حل

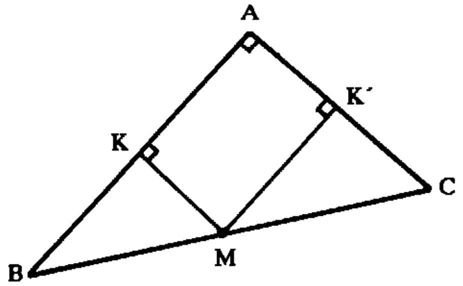
- هندسه: محمدهاشم رستمی
- ریاضیات جدید: حمیدرضا امیری
- جبر و مثلثات: احمد قندهاری ـ محمدرضا هاشمی ـ مهدی قمصری
- کامپیوتر: حسین ابراهیم‌زاده قلزم

◆ مسائل ریاضیات سال اول

۱ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = ۹۰°)$، اگر نقطهٔ M وسط وتر BC، R شعاع دایرهٔ محیطی و r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث و MK و MK′ فاصلهٔ نقطهٔ M از دو ضلع AB و AC باشد، ثابت کنید: $MK + MK' = R + r$.

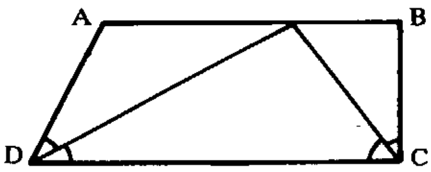
$b+c = ۲r + ۲R$

(فرستنده آقای بهادر طالبی دانش‌آموز دبیرستان ولایت تبریز)



۲ـ خط راست xy و نقطهٔ A غیرواقع بر آن مفروضند. خطی موازی خط xy رسم کنید که از نقطهٔ A، و از خط xy به یک فاصله باشد.

۳ـ در ذوزنقه ABCD، قاعدهٔ کوچکتر AB برابر مجموع اندازه‌های دو ساق AD و BC است. $(AB = AD + BC)$.
ثابت کنید نیمسازهای زوایای درونی C و D از این ذوزنقه روی قاعدهٔ AB متقاطعند.



۴ـ هرگاه ارزش گزارهٔ $q \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$ درست باشد ثابت کنید همواره ارزش $(p \wedge q)$ درست است.

۵ـ ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید:

الف) $(\forall t \in \mathbb{R}; t \leq -t) \Leftrightarrow (\nexists x \in \mathbb{Z}; x^۲ \geq x)$

ب) $(\exists y \in \mathbb{Q}; (\frac{y+۱}{y^۲ - \frac{۱}{۲}}) \notin \mathbb{Q}) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}; n^۲ + ۱ > ۲)$

۶ـ تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه ۲K عضوی، ۴۸ واحد از تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ ۳K عضوی کمتر است، عدد طبیعی K را معین کنید.

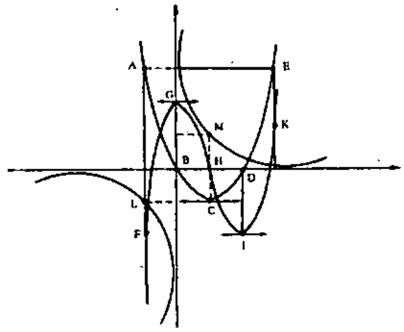
۷ـ ثابت کنید: اگر $(B \cap C) = C$ و $(A \cap B) = B$، آنگاه $C \subset B \subset A$ و برعکس.

۸ـ ابتدا ثابت کنید، $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
سپس با استفاده از آن ثابت کنید: اگر $B \cap C = \phi$ آنگاه $(A - B) \cup (A - C) \cup (A - D) = A$

۹ـ اگر $x + y = \sqrt{۵}$ و $x . y = ۱$، آنگاه $(x^۴ + y^۴)$ را محاسبه کنید.

۱۰ـ اگر تساوی $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+۱} + \frac{C}{x+۲} = \frac{۱}{x(x+۱)(x+۲)}$ به‌ازای جمیع مقادیر x برقرار باشد A و B و C را بیابید.

۱۱ـ حاصل کسر $\frac{\sqrt{۲} + \sqrt{۳} + \sqrt{۴}}{\sqrt{۲} + \sqrt{۳} + \sqrt{۶} + \sqrt{۸} + \sqrt{۱۶}}$ را بیابید.



$$A = tg^2 20° + tg^2 40° + tg^2 80°$$ -۱۰

به طرفین تساوی عدد ۳ را اضافه می‌کنیم:

$$A + 3 = 1 + tg^2 20° + 1 + tg^2 40° + 1 + tg^2 80° = \frac{1}{\cos^2 20°} + \frac{1}{\cos^2 40°} + \frac{1}{\cos^2 80°}$$

$$= \frac{(\cos 40° \cos 80°)^2 + (\cos 20° \cos 80°)^2 + (\cos 20° \cos 40°)^2}{(\cos 20° \cos 40° \cos 80°)^2}$$

$$= \frac{[\frac{1}{2}(\cos 120° + \cos 40°)]^2 + [\frac{1}{2}(\cos 100° + \cos 60°)]^2}{(\frac{1}{4}\cos 60°)^2} + \frac{[\frac{1}{2}(\cos 60° + \cos 20°)]^2}{(\frac{1}{4}\cos 60°)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}[(\cos 40° - \frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2} - \cos 80°)^2}{\frac{1}{16}} + \frac{(\frac{1}{2} + \cos 20°)^2]}{\frac{1}{16}}$$

$$= 16(\cos^2 40° + \frac{1}{4} - \cos 40° + \frac{1}{4} + \cos^2 80° - \cos 80° + \frac{1}{4} + \cos^2 20° + \cos 20°)$$

$$= 16(\frac{3}{4} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 80°}_{\cos^2 40°} - \cos 40° + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 160°}_{\cos^2 80°} - \cos 80° + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 40°}_{\cos^2 20°} + \cos 120°)$$

$$= 16(\frac{9}{4} - \frac{1}{2}\cos 80° - \frac{1}{2}\cos 40° + \frac{1}{2}\cos 20°)$$

$$= 16(\frac{9}{4} - \frac{1}{2}(2\cos 60° \cos 20°) + \frac{1}{2}\cos 20°)$$

$$= 16(\frac{9}{4} - \cos 60° \cos 20° + \frac{1}{2}\cos 20°)$$

$$= 16(\frac{9}{4} - \frac{1}{2}\cos 20° + \frac{1}{2}\cos 20°)$$

$$= 16(\frac{9}{4}) = 36 \Rightarrow A + 3 = 36 \Rightarrow \boxed{A = 33}$$

-۱۱

$$S_n = tg^2\frac{a}{2}tga + 2tg^2\frac{a}{2^2}tg\frac{a}{2} + ... + 2^{n-1}tg^2\frac{a}{2^n}tg\frac{a}{2^{n-1}}$$

داریم:
$$tg^2\frac{a}{2}\, tg\, a = tg\, a - tg\, a + tg^2\frac{a}{2}\, tg\, a = tg\, a - tg\, a\,(1 - tg^2\frac{a}{2})$$

$$= tga - \frac{2tg\frac{a}{2}}{1 - tg^2\frac{a}{2}}(1 - tg^2\frac{a}{2}) = tga - 2tg\frac{a}{2}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$S_n = tga - 2tg\frac{a}{2} + 2\,tg\frac{a}{2} - 4tg\frac{a}{4} + ... + 2^{n-1}tg\frac{a}{2^{n-1}} - 2^n tg\frac{a}{2^n}$$

$$\Rightarrow S_n = tga - 2^n tg\frac{a}{2^n}$$

$$S_n = tga - 2^n tg\frac{a}{2^n} = tga - 2^n\frac{\sin\frac{a}{2^n}}{\cos\frac{a}{2^n}}$$

$$\Rightarrow S_n = tga - \frac{1}{\cos\frac{a}{2^n}} \times \frac{a\sin\frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(tga - \frac{a}{\cos\frac{a}{2^n}} \times \frac{\sin\frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}})$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = tga - \lim_{n\to\infty}(\frac{a}{\cos\frac{a}{2^n}}) \times \lim_{n\to\infty}(\frac{\sin\frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}})$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = tga - a \times 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = tga - a$$

□ حل مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱- حجم متوازی‌السطوحی که بردارهای $\vec{OA}$ و $\vec{OB}$ و $\vec{OC}$ یالهای‌جانبی آن باشند، برابر است با قدر مطلق حاصل ضرب مختلط این سه‌بردار.

یعنی: $V = |\vec{OC}\ \vec{OA}\ \vec{OB}|$ و یا:

$$V = |\vec{OC} \cdot (\vec{OA} \wedge \vec{OB})|$$

اما بنا به‌فرض $\vec{OC} = \vec{OA} \wedge \vec{OB}$ پس:

$$V = |\vec{OC} \cdot \vec{OC}| = |\vec{OC}|^2 \Rightarrow 36 = |\vec{OC}|^2 \Rightarrow |\vec{OC}| = 6$$

۲- شرط متوازی بودن دو خط را می‌نویسیم:

$$\frac{p}{p'} = \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'}$$

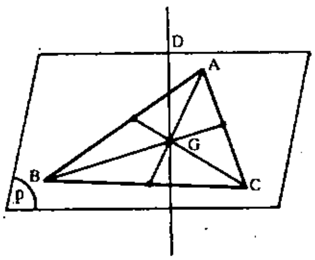
$$D: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t + 3 \\ z = -3t + 5 \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_1(2, 1, -3)$$ بردار هادی خط D

$$D': ax + 1 = (b+1)y - 2 = 3z \Rightarrow \vec{V}_2(\frac{1}{a}, \frac{1}{b+1}, \frac{1}{3})$$ بردار هادی خط D'

$$\Rightarrow \frac{2}{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\frac{1}{b+1}} = \frac{-3}{\frac{1}{3}} \Rightarrow$$

$$2a = b + 1 = -9 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-9}{2}}, \quad \boxed{b = -10}$$

۳- الف) مکان هندسی جواب مسأله خطی است که در نقطهٔ تقاطع میانه‌های مثلث بر صفحهٔ مثلث، عمود می‌شود. برای نوشتن معادلهٔ این خط کافی است مختصات نقطهٔ G محل تلاقی میانه‌های مثلث ABC و تصاویر بردار عمود بر صفحهٔ این مثلث را پیداکنیم.



G مرکز ثقل مثلث
$$\begin{cases} x = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{-1 + 0 + 1}{3} = 0 \\ y = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{2 + 1 + 0}{3} = 1 \\ z = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{3 + 1 + 2}{3} = 2 \end{cases}$$

$$A\begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix} \quad B\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad C\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{AB}\begin{vmatrix} 0 + 1 = 1 \\ 1 - 2 = -1 \\ 1 - 3 = -2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{AC}\begin{vmatrix} 1 + 1 = 2 \\ 0 - 2 = -2 \\ 2 - 3 = -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{AB} \wedge \vec{AC}\begin{vmatrix} -3 = p \\ -3 = q \\ 0 = r \end{vmatrix}$$

$$\frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = \frac{z - z_1}{r} \Rightarrow$$

$$\frac{x - 0}{-3} = \frac{y - 1}{-3}, \quad z - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y - 1 \\ z = 2 \end{cases}$$ معادلهٔ مکان هندسی مطلوب

ب) نقطهٔ تقاطع کره به معادلهٔ $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 12$ را با خط D به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 12 \\ x = y - 1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(y-1)^2 + (y-1)^2 + 4 = 12 \Rightarrow$$

$$2(y-1)^2 = 8 \Rightarrow (y-1)^2 = 4 \Rightarrow$$

مخرج کسر را در $\frac{\cos x}{\cos x}$ ضرب می‌کنیم:

$$I=\int\frac{\sqrt{2}\,dx}{\cos x\sqrt{\sin 2x}}$$

$$I=\int\frac{\sqrt{2}\,dx}{\cos^2x\sqrt{\frac{2\sin x\cos x}{\cos x}}}=\int\frac{\sqrt{2}\,dx}{\cos^2x\sqrt{\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2x}}}$$

$$=\int\frac{\sqrt{2}\,dx}{\cos^2x\sqrt{2\,tgx}}=\int\frac{dx}{\cos^2x\sqrt{tgx}}$$

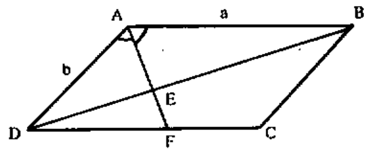
$$=\int\frac{(1+tg^2x)dx}{\sqrt{tgx}}$$

$$=2\int\frac{(1+tg^2x)dx}{2\sqrt{tgx}}=2\sqrt{tgx}+C$$

ـ □ حل مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

۱ـ دو مثلث AEB و DEF متشابهند پس داریم:

$$\frac{EA}{EF}=\frac{EB}{ED}\quad(1)$$



از طرفی در مثلث DAB پاره‌خط AE نیمساز زاویه درونی A است پس:

$$\frac{EB}{ED}=\frac{AB}{AD}\quad(2)$$

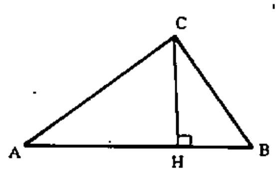
از مقایسه روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$\frac{EA}{EF}=\frac{AB}{AD}=\frac{a}{b}$$

۲ـ داریم $AH=m+4$ و $BH=m+1$ و $CH=m+2$

از طرفی: $CH^2=BH\,.\,AH$.

پس:



$$(m+2)^2=(m+1)(m+4)\Rightarrow\boxed{m=0}$$

$$\Rightarrow AH=4\,,BH=1\;,\;CH=2$$

$$\Rightarrow AB=AH+BH=4+1=5$$

$$AC^2=AH.AB=4\times5=20\Rightarrow AC=2\sqrt{5}$$

$$BC^2=BH.BA=1\times5=5\Rightarrow BC=\sqrt{5}$$

$$S=\frac{1}{2}AC.BC=\frac{1}{2}(2\sqrt{5})(\sqrt{5})=5$$

۳ـ

$$a^3+b^3-a^2b-ab^2-a-b$$
$$=(a+b)(a^2-ab+b^2)-ab(a+b)-(a+b)$$
$$=(a+b)(a^2-ab+b^2-ab-1)$$
$$=(a+b)(a^2-2ab+b^2-1)$$
$$=(a+b)((a-b)^2-1)$$
$$=(a+b)(a-b-1)(a-b+1)$$

۴ـ فرض می‌کنیم که: $A=\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n}$ پس داریم:

$$A^4=(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n})^4=\sqrt[4]{m^4}+4\sqrt[4]{m^3}\sqrt[4]{n}+6\sqrt[4]{m^2}\sqrt[4]{n^2}+4\sqrt[4]{m}\sqrt[4]{m^3}+\sqrt[4]{n^4}$$
$$=m+n+4\sqrt[4]{m}\sqrt[4]{n}(\sqrt[4]{m^2}+\sqrt[4]{n^2})+6\sqrt{mn}$$

می‌دانیم:

$$x^2-ax+b=0:\begin{cases}m+n=a & \text{(مجموع ریشه‌ها)}\\ mn=b & \text{(حاصل ضرب ریشه‌ها)}\end{cases}$$

$$\Rightarrow A^4=a+4\sqrt[4]{b}(\sqrt{m}+\sqrt{n})+6\sqrt{b}$$

با فرض: $B=\sqrt{m}+\sqrt{n}$ داریم:

$$B^2=m+n+2\sqrt{mn}\Rightarrow B^2=a+2\sqrt{b}\Rightarrow$$
$$B=\sqrt{a+2\sqrt{b}}$$
$$\Rightarrow A^4=a+4\sqrt[4]{b}(\sqrt{a+2\sqrt{b}})+6\sqrt{b}$$
$$\Rightarrow A=\sqrt[4]{a+4\sqrt[4]{b}\sqrt{a+2\sqrt{b}}+6\sqrt{b}}$$

روش دوم: ریشه‌های معادله چنین هستند:

$$n=\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}\quad\text{و}\quad m=\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

بنابراین، کافی است m و n را جایگزین کنیم.

۵ـ

$$\begin{cases}\sqrt{x}+y=11\\ x+\sqrt{y}=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x}+y=2+9\\ x+\sqrt{y}=4+3\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x}-2=9-y\\ x-4=3-\sqrt{y}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}① & \sqrt{x}-2=(3-\sqrt{y})(3+\sqrt{y})\\ ② & (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)=3-\sqrt{y}\end{cases}$$

در رابطهٔ ۲ بجای $(\sqrt{x}-2)$ مساویش را از رابطهٔ ۱ قرار می‌دهیم:

$$(3-\sqrt{y})(3+\sqrt{y})(\sqrt{x}+2)=3-\sqrt{y}$$
$$(3-\sqrt{y})(3+\sqrt{y})(\sqrt{x}+2)-(3-\sqrt{y})=0$$
$$(3-\sqrt{y})\left[(3+\sqrt{y})(\sqrt{x}+2)-1\right]=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3-\sqrt{y}=0\Rightarrow\sqrt{y}=3\Rightarrow\boxed{y=9}\\ (3+\sqrt{y})(\sqrt{x}+2)-1=0 & \text{(غیرممکن)}\end{cases}$$

$$\sqrt{x}+y=11\Rightarrow\sqrt{x}+9=11$$

$$\Rightarrow\sqrt{x}=2\Rightarrow\boxed{x=4}$$

۶ـ اگر قطر مستطیل را با R و طول و عرض مستطیل را به‌ترتیب به x و y نمایش دهیم، داریم:

$x^2+y^2=R^2$ و محیط مستطیل $=2(x+y)$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=169\\ \frac{3}{2}\times2(x+y)=51\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=169\\ x+y=17\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}s^2-2p=169\\ s=17\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=60\\ s=17\end{cases}$$

$$\Rightarrow z^2-17z+60=0\Rightarrow\Delta=289-240=49$$

$$\Rightarrow x=\frac{17+7}{2}=\frac{24}{2}=12\;,\;y=\frac{17-7}{2}=\frac{10}{2}=5$$

۵ = عرض مستطیل و ۱۲ = x طول مستطیل

۷ـ می‌توان نوشت:

$$S_n=4+34+334+3334+\dots+\underbrace{333\dots34}_{n\ \text{مرتبه}}$$
$$=3+33+333+3333+\dots+333\dots33+n(1)$$
$$=\frac{1}{3}(9+99+999+9999+\dots+999\dots99)+n$$
$$=\frac{1}{3}(10-1+10^2-1+10^3-1+10^4-1$$
$$+\dots+10^n-1)+n$$
$$=\frac{1}{3}(\underbrace{10+10^2+10^3+10^4+\dots+10^n})+n-\frac{n}{3}$$
$$=\frac{1}{3}(10)(\frac{10^n-1}{10-1})+\frac{2n}{3}=\frac{10(10^n-1)}{27}+\frac{2n}{3}$$
$$\Rightarrow S_n=\frac{2n}{3}+\frac{10}{27}(10^n-1)$$

۸ـ

$$9\log x^2=6\log3\Rightarrow3\log x^2=2\log3$$
$$\Rightarrow\log x^6=\log9\Rightarrow x^6=9$$
$$\Rightarrow|x|=\sqrt[6]{9}\Rightarrow|x|=\sqrt[3]{3}$$

۹ـ داریم:

$$(\sin^4x-\cos^4x)^2=\left[(\sin^2x-\cos^2x)\underbrace{(\sin^2x+\cos^2x)}_{1}\right]^2$$
$$=(\sin^2x-\cos^2x)^2$$
$$\sin^8x+\cos^8x-2\sin^4x\cos^4x=$$
$$\sin^4x+\cos^4x-2\sin^2x\cos^2x\quad(1)$$

و همچنین داریم:

$$(\underbrace{\sin^2x+\cos^2x}_{1})^2=\sin^4x+\cos^4x+2\sin^2x\cos^2x=1$$
$$\Rightarrow\sin^4x+\cos^4x=1-2\sin^2x\cos^2x\quad(2)$$

با جایگزینی رابطهٔ (۲) در رابطهٔ (۱) خواهیم داشت:

$$\sin^8 x + \cos^8 x - 2\sin^4 x\cos^4 x$$
$$= 1 - 4\sin^2 x\cos^2 x$$
$$\Rightarrow \sin^8 x + \cos^8 x$$
$$= 1 - 4\sin^2 x\cos^2 x + 2\sin^4 x\cos^4 x \quad (3)$$

بنابراین با توجه به رابطهٔ (۳) داریم:

$$\frac{\sin^8 x + \cos^8 x}{1 - 4\sin^2 x\cos^2 x + 2\sin^4 x\cos^4 x} - 2\sin^2 x\cos^2 x$$
$$= 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x = \sin^4 x + \cos^4 x$$

۱۰ـ طرفین معادله را در ۱- ضرب می‌کنیم:

$$-\sin 2x + 12(\sin x - \cos x) - 12 = 0$$

معادلهٔ اخیر را می‌توان چنین نوشت:

$$1 - \sin 2x + 12(\sin x - \cos x) - 13 = 0$$
$$1 - 2\sin x\cos x + 12(\sin x - \cos x) - 13 = 0$$
$$(\sin x - \cos x)^2 + 12(\sin x - \cos x) - 13 = 0$$

با فرض $\sin x - \cos x = y$ داریم:

$$y^2 + 12y - 13 = 0 \Rightarrow (y-1)(y+13) = 0 \Rightarrow y = 1 \text{ یا } y = -13$$

جواب $y = -13$ قابل قبول نیست، زیرا:

$$y = \sin x - \cos x = -13 \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= -13 \Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-13}{\sqrt{2}} < -1$$

بنابراین داریم:

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$
$$\Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$
$$\text{یا} \quad x = 2k\pi + \pi$$

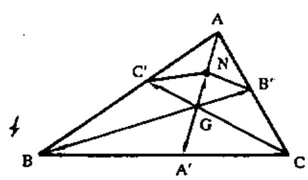
□ حل مسائل ریاضیات سال سوّم تجربی

۱ ـ نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث ABC را G و وسط پاره‌خط AG را N می‌نامیم. از N به B' و C' وصل می‌کنیم. چهار ضلعی GB'NC' متوازی‌الاضلاع است، زیرا:

$GC' = \frac{GC}{2} = NB'$ و $GC' \parallel NB'$ پس $\overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \overrightarrow{GN}$

امّا بردار $\overrightarrow{GN}$ قرینهٔ $\overrightarrow{GA'}$ است یعنی، $\overrightarrow{GN} = -\overrightarrow{GA'}$ پس:

$$\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GN} = \overrightarrow{GA'} - \overrightarrow{GA'} = \vec{0}$$



۲ ـ در مکعب، مساحت هر صفحهٔ قطری برابر است با $a^2\sqrt{2}$، پس:

$$a^2\sqrt{2} = 16\sqrt{2} \Rightarrow a = 4 \Rightarrow V = a^3 = 64\ cm^3$$
حجم مکعب

۳ـ می‌دانیم که $S = 4\pi R^2$ کره، پس:

$$4\pi R^2 = 108\pi \quad\Rightarrow\quad R^2 = 27 \quad\Rightarrow$$
$$R = 3\sqrt{3} \qquad \text{شعاع کره}$$
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\times\pi\times\left(3\sqrt{3}\right)^3 = 108\sqrt{3}\pi$$

$$\text{حجم قاچ } \alpha^\circ = \text{حجم کره} \times \frac{\alpha^\circ}{360}$$
$$= 108\sqrt{3}\pi \times \frac{60}{360} = 18\sqrt{3}\pi$$

۴ـ برای حل معادلهٔ $|x-2| + |x+1| = 5$ سه حالت در نظر می‌گیریم:

$$x > 2 : x - 2 + x + 1 = 5 \Longrightarrow 2x = 6 \Longrightarrow x = 3$$
$$x < -1 : -(x-2) - (x+1) = 5 \Longrightarrow -2x = 4 \Longrightarrow x = -2$$

معادله در حالت $-1 < x < 2$ دارای جواب نیست. زیرا به تساویهای عددی غیر ممکن می‌رسیم. بنابراین معادله، تنها دارای دو جواب $x = -2$ و $x = 3$ است.

۵ ـ حد، عبارت $\frac{x^n + x^3 + 73}{mx^7 + 2x^2 + 74}$ برابر $-\frac{3}{4}$ شده است، پس درجهٔ صورت و مخرج باید مساوی باشند: $n = 7$

همچنین داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^7 + x^3 + 73}{mx^7 + 2x^2 + 74}\right) \simeq \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^7}{mx^7} = \frac{1}{m}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{m} = -\frac{3}{4} \quad\Rightarrow\quad m = -\frac{4}{3}$$

۶ـ شرایط پیوستگی در نقطهٔ $M(-1, 3)$ چنین است:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = f(-1) = 3$$

$$\begin{cases} k(-1)^3 + s = 3 \\ k(-1)^2 + 4 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s - k = 3 \\ k = -1 \end{cases} \Rightarrow \left|\begin{matrix} k = -1 \\ s = 2 \end{matrix}\right.$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x^3 + 2 & x < -1 \\ -x^2 + 4 & x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \quad f(0) = 4$$

$$x \geq -1 : f'(x) = -2x \quad\Rightarrow\quad f'(2) = -4$$
$$x < -1 : f'(x) = -3x^2 \Rightarrow f''(x) = -6x \Rightarrow$$
$$f''(-3) = -6(-3) = 18$$
$$\frac{f'(2)\,f''(-3)}{f(0)} = \frac{(-4)(18)}{4} = -18$$

۷-

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + d} \quad\Rightarrow\quad f'(x) = \frac{3x^2}{3\sqrt[3]{(x^3+d)^2}}$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+d)^2}} \quad\Rightarrow\quad f'(1) = 1$$

$$f'(1) = \frac{1}{\sqrt[3]{(1+d)^2}} = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{(1+d)^2} = 1$$

$$\Rightarrow (d+1)^2 = 1$$
$$\Rightarrow d + 1 = \pm 1 \Rightarrow d = -1 \pm 1 \Rightarrow d = 0 \text{ یا } d = -2$$

۸-

$$f(x) = x^3 + ax + 5 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + a$$
$$m = f'(-1) = 3(-1)^2 + a = a + 3$$
$$9x + 3y + 2 = 0 \Rightarrow m' = \frac{-9}{3} = -3$$

$mm' = -1$ (شرط عمود بودن) : $(a+3)(-3) = -1$

$$a = \frac{1}{3} - 3 = \frac{-8}{3} \Rightarrow \boxed{a = \frac{-8}{3}}$$

۹-

$$S = \cos\frac{\pi}{11}\cos\frac{2\pi}{11}\cos\frac{3\pi}{11}\cos\frac{4\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11}$$

طرفین تساوی را در $32\sin\frac{\pi}{11}$ ضرب می‌کنیم:

$$32\, S\sin\frac{\pi}{11} = 16\left(2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{\pi}{11}\right)\cos\frac{2\pi}{11}\cos\frac{3\pi}{11}$$
$$\cos\frac{4\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11}$$
$$= 8\left(2\sin\frac{2\pi}{11}\cos\frac{2\pi}{11}\right)\cos\frac{3\pi}{11}\cos\frac{4\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11}$$
$$= 4\left(2\sin\frac{4\pi}{11}\cos\frac{4\pi}{11}\right)\cos\frac{3\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11}$$
$$= 4\sin\frac{8\pi}{11}\cos\frac{3\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11}$$
$$= 4\sin\left(\pi - \frac{8\pi}{11}\right)\cos\frac{3\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11}$$
$$= 4\sin\frac{3\pi}{11}\cos\frac{3\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11}$$
$$= 2\sin\frac{6\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11} = 2\sin\left(\pi - \frac{6\pi}{11}\right)\cos\frac{5\pi}{11}$$
$$= 2\sin\frac{5\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11} = \sin\frac{10\pi}{11} = \sin\left(\pi - \frac{10\pi}{11}\right) = \sin\frac{\pi}{11}$$
$$\Longrightarrow 32 S\sin\pi = \sin\frac{\pi}{11} \Longrightarrow S = \frac{1}{32}$$

۱۰-

$$\begin{cases} \cos\alpha + \cos\beta = m \\ \sin\alpha + \sin\beta = n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = m \\ 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = n \end{cases}$$

از ضرب دو رابطهٔ دستگاه داریم:

$$\left(2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)\left(2\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right) = mn$$
$$2\sin(\alpha+\beta)\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = mn \Rightarrow$$
$$\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{mn}{2\sin(\alpha+\beta)} \quad (1)$$

اکنون طرفین رابطه‌های دستگاه را به توان ۲ می‌رسانیم و با هم جمع می‌کنیم:

$$4\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) +$$

$$4\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=m^2+n^2$$

$$4\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\left(\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)=m^2+n^2$$

$$\Rightarrow \cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\frac{m^2+n^2}{4} \qquad (2)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\operatorname{cosec}(\alpha+\beta)=\frac{m^2+n^2}{2mn}$$

□ حل مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱-

$$AH=\frac{|-4(-1)+2(2)-2m|}{\sqrt{16+4}}=\frac{\sqrt{20}}{2m}$$

$$|4+4-2m|=\frac{20}{2m} \Rightarrow |8-2m|=\frac{10}{m}$$

$$2m(4-m)=\pm 10 \Rightarrow m(4-m)=\pm 5 \Rightarrow$$

$$m^2-4m\pm 5=0$$

$$m=2\pm\sqrt{4-(\pm 5)}=2\pm\sqrt{4\pm 5}$$

$$\Rightarrow m=2\pm\sqrt{9}=2\pm 3 \Rightarrow m=2+3$$

$$=5 \Rightarrow \boxed{m=5}$$

۲ـ در حالت عمومی داریم:

$$y=\frac{3mx-6}{m-2x}=\frac{3mx-6}{-2x+m}$$

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}=\frac{\Delta}{(cx+d)^2}$$

می‌دانیم اگر علامت مشتق همواره مثبت باشد، تابع همواره صعودی است، بنابراین شرط صعودی بودن تابع هموگرافیک در حالت عمومی $\Delta > 0$ است:

$$\Delta=ad-bc=3m^2-12>0 \Longrightarrow 3m^2>12 \Longrightarrow m^2>4$$

$$\Longrightarrow m>2 \text{ یا } m<-2$$

۳ـ اگر خطِ مفروض $m^2y+4mx+4=0$ قائم بر دایره به معادلهٔ ساده شدهٔ $x^2+y^2+2x-2y=4$ باشد، مختصات مرکز دایره در معادلهٔ خط قائم صدق می‌کند:

$$o'(-1,1): m^2(1)+4m(-1)+4=0 \Longrightarrow$$

$$(m-2)^2=0 \Longrightarrow \boxed{m=2}$$

۴ـ می‌دانیم محل تلاقی قطرهای بیضی مرکز تقارن آن است و بیضی فوق بر محورهای مختصات مماس است، پس داریم:

$$2x-6=0 \Longrightarrow 2x=6 \Longrightarrow x=3 \Longrightarrow b=3$$

$$3y+12=0 \Longrightarrow 3y=-12 \Longrightarrow y=-4 \Longrightarrow a=4:$$

و در نتیجه بیضی قائم است و داریم: $o'(3,-4)$

و معادلهٔ بیضی چنین است: $\dfrac{(x-3)^2}{9}+\dfrac{(y+4)^2}{16}=1$

۵ـ معادلهٔ خط مماس بر هذلولی به معادلهٔ عمومی $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ در نقطهٔ $M(x_0, y_0)$ واقع بر هذلولی چنین است: $\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=1$ بنابراین داریم:

$$8x^2-18y^2=72 \Longrightarrow \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$$

M واقع بر هذلولی است، پس مختصات آن در معادلهٔ هذلولی صدق می‌کند:

$$x_M=3: \frac{3^2}{9}-\frac{y_M^2}{4}=1 \Rightarrow y_M=0 \Rightarrow M(3,0)$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{9}-\frac{(0)y}{4}=1$$

$$\Rightarrow \boxed{x=3} \quad \text{(معادلهٔ خط مماس)}$$

۶ـ داریم:

$$M(\sin\alpha, \operatorname{tg}\alpha): \left| \begin{array}{l} x=\sin\alpha \\ y=\operatorname{tg}\alpha \end{array}\right.$$

از حذف α بین x و y معادلهٔ مکان به‌دست می‌آید:

$$\left|\begin{array}{l} x^2=\sin^2\alpha \\ y^2=\operatorname{tg}^2\alpha \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{\sin^2\alpha} \\ \dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{\sin^2\alpha} \\ \dfrac{1}{y^2}=\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} \end{array}\right.$$

$$\xRightarrow{\text{(از تفاضل معادلات)}} \frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=\frac{1}{\sin^2\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=$$

$$\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}$$

با توجه به‌فرض $\alpha \neq k\pi$ داریم:

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=1 \qquad \text{(معادلهٔ مکان)}$$

۷-

$$V_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\pi y^2\,dx=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}16\sin^2x\,dx$$

$$=16\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\,dx=16\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx$$

$$=8\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2x)\,dx=8\pi\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=8\pi\left(\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-\left(\frac{-\pi}{2}-0\right)\right)=8\pi^2 \text{ (واحد حجم)}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=8\pi^2 \quad \text{(واحد حجم)}}$$

۸ـ معادلهٔ کلاسیک نوع اوّل به‌فرم عمومی $a\sin x+b\cos x=c$ وقتی دارای جواب است که داشته باشیم:

$$\Delta=a^2+b^2-c^2\geq 0 \Rightarrow a^2+b^2\geq c^2 \text{ (شرط جواب)}$$

بنابراین برای معادلهٔ

$$2m(\sin x+\cos x)=m(\sin x-\cos x)+\sqrt{5}$$

و یا: $2m\sin x+2m\cos x=m\sin x-m\cos x+\sqrt{5}$

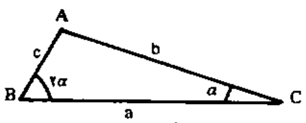
و یا: $m\sin x+3m\cos x=\sqrt{5}$ داریم:

$$\Delta=m^2+9m^2-5=10m^2-5<0 \Rightarrow 10m^2<5$$

$$\Rightarrow m^2<\frac{5}{10} \Rightarrow m^2<\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}<m<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

در نتیجه اگر $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<m<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ آنگاه معادله جواب حقیقی ندارد.

۹ـ با توجه به شکل زیر:



می‌توان نوشت:

$$\frac{a}{\sin(\pi-3\alpha)}=\frac{c}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{a}{\sin 3\alpha}=\frac{c}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}=\frac{c}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{a}{3-4\sin^2\alpha}=c$$

$$\Rightarrow \frac{a}{3-4\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)}=c \Rightarrow \frac{a}{3-2+2\cos 2\alpha}=c$$

$$\Rightarrow \frac{a}{1+2\cos 2\alpha}=c \Rightarrow 1+2\cos 2\alpha=\frac{a}{c}$$

$$\Rightarrow 2\cos 2\alpha=\frac{a}{c}-1$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos 2\alpha=\frac{a-c}{2c}}$$

جوابهای تفریح اندیشه

*** جواب ۱**

از مفاد مسأله برمی‌آید که قطر آلبالو ۳ برابر بزرگتر از قطر هستهٔ آن است. بنابراین، حجم آلبالو ۳ × ۳ × ۳ یعنی ۲۷ برابر بیشتر است. هسته ۱/۲۷، و نرمه بقیهٔ ۲۶/۲۷ حجم آلبالو را دارد. بنابراین حجم نرمه ۲۶ برابر حجم هستهٔ آلبالو است.

*** جواب ۲**

هر دو قابلمه اشکال هندسی متشابهی هستند. هرگاه گنجایش قابلمهٔ بزرگتر ۸ برابر بیشتر باشد آنگاه همهٔ اندازه‌های خطی آن ۲ برابر بزرگتر هستند یعنی ؛ ارتفاع و عرض آن در هر دو جهت دو برابر بیشتر است. اما از آن جاکه ارتفاع و عرض آن دوبرابر بیشتر است سطح آن ۲ × ۲ یعنی ۴ برابر بیشتر است، زیرا نسبت مساحت اجسام متشابه مانند نسبت مجذور اندازه‌های خطی است. اگر ضخامت جدارها یکی باشد وزن قابلمه به سطح آن بستگی دارد. از اینجا جواب سؤال مسأله به دست می‌آید : قابلمهٔ بزرگتر ۴ برابر سنگینتر از قابلمهٔ کوچکتر است.

*** جواب ۳**

قبل از اینکه آن را حل کنیم، مسألهٔ مشابهی منتها تا اندازه‌ای ساده‌تر را در نظر می‌گیریم.

دو دیگ (یا دو سماور) ، یکی کوچک و دیگری بزرگ، از یک جنس و به یک شکل، پر از آب جوش هستند، کدام یک زودتر سرد می‌شود؟

اجسام معمولاً از سطح سرد می‌شوند و بنابراین آن دیگ زودتر سرد می‌شود که هر واحد حجمش با سطح بیشتر متناظر باشد. هرگاه یک دیگ n برابر بلندتر و پهنتر از دیگری باشد، آنگاه سطح آن n^2 برابر، و حجم آن n^3 برابر بیشتر است. یک واحد سطح دیگ بزرگتر با حجم n برابر بیشتر متناظر است و بنابراین، دیگ کوچکتر، زودتر باید سرد شود.

به همین علت هم، بچه‌ای که در هوای یخبندان ایستاده است باید بیشتر از شخص بزرگسالی که لباس یکسان با لباس بچه را به تن دارد سرد شود، زیرا مقدار گرمای تولید شده در هر سانتیمتر مکعب جسم برای هر دو نفر تقریباً مساوی است، لیکن سطح سرد شوندهٔ تن بچه که با هر سانتیمتر مکعب متناظر است از شخص بزرگسال بیشتر است.

این پدیده همچنین باعث می‌شود که انگشتان دست و بینی بیشتر از دیگر اندامها ـ که سطح آنها نسبت به حجم آنها آن‌قدر زیاد نیست ـ سرد یا دچار سرمازدگی شود.

فرم اشتراک

عزیزانی‌که مایل به‌اشتراک ۴ شمارهٔ مجلهٔ برهان هستند باواریز مبلغ ۷۰۰۰ ریال‌به‌حساب‌جاری ۷۹۱۰/۵ بانک ملت شعبهٔ کریمخان‌زند به‌نام مشترکین انتشارات‌مدرسه، اصل فیش واریزی را همراه با فرم تکمیل شده به آدرس دفترمرکزی‌انتشارات‌مدرسه واقع در خیابان ایرانشهر شمالی،کوچه‌بهرام‌چوبینی پلاک ۱۷ ارسال دارند.

■ **لطفاً از ارسال وجه‌نقد جداً خودداری فرمایید.**

درصورت مشترک بودن **کد اشتراک** خود را حتماً ذکر فرمایید: ....

۱ـ نام خانوادگی .... ۲ـ نام .... ۳ـ سال تولد .... ۴ـ دختر ☐ پسر ☐

۵ـ پایه و رشته تحصیلی ....

۶ـ نشانی: استان .... شهرستان .... خیابان .... کوچه .... پلاک ....

۷ـ کدپستی .... ۸ـ مبلغ‌واریزی .... ۹ـ شماره‌فیش .... ۱۰ـ تاریخ فیش ....

In the name of God

Borhān

VOL. 4. No. 2
Serial numbers ; 12
Winter 1994

Borhan is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:
Madrasse Publication - No. 268 , Iranshahr - e - Shomali Ave. Tehran , Iran Post code: 15875

Contents:

ابوسهل بیژن‌بن رستم کوهی

اهل طبرستان، در سدهٔ چهارم هجری قمری می‌زیسته (فوت در ۴۰۵ هجری)، در بغداد به دستور شرف‌الدوله فرزند عضدالدولهٔ دیلمی با همکاری مستقیم ابوالوفای بوزجانی، به رصد و تنظیم جدولهای اخترشناسی مشغول بوده است.

این دانشمند ایرانی، برای رصد خورشید وسیله‌ای ساخت که بسیار دقیق بود و از دانشمندان ساکن بغداد خواسته بود تا این وسیله را مورد آزمایش قراردهند. دانشمندان، دوبار به فاصله سه ماه، این وسیله را مورد آزمایش قرار دادند و دقت کار آن‌را تأیید کردند. دومین تأییدنامهٔ دانشمندان را، به زبان فارسی امروزی، در زیر می‌خوانید:

«به نام خداوند بخشندهٔ مهربان. روز سه‌شنبه، سه شب مانده به پایان جمادی‌الاخر سال ۳۷۸ هجری، یازدهم شهریور ۳۵۷ یزدگردی و ۱۸ ایلول سال ۱۲۹۹ اسکندری، برای بار دوم، گروهی از داوران و نام‌آوران اخترشناس و مهندس و دیگرانی از اهل دانش اخترشناسی و هندسه، گردهم آمدند تا کاربرد وسیله‌ای راکه برای رصد خورشید، در آمدن به رأس میزان ساخته شده، آزمایش کنند. بعد ازگذشت چهار ساعت از این روز، که سه‌شنبه باشد، هریک از حاضران، به خط خود، به درستی آن‌چه حاضر بود و مشاهده کرده‌بودند، گواهی دادند.»

قاضی ابوبکر فرزند ضبه، ابوسعد یونس نصرانی شیرازی؛ قاضی ابوالحسن خوزی؛ ابواسحاق ابراهیم فرزند هلال صابی؛ ابوالوفا محمد فرزند محمد؛ ابوحامد احمد فرزند محمدالصاغانی صاحب اسطرلاب؛ ابوالحسن محمد فرزند محمد السافری؛ ابوالحسن مغربی؛ بیژن فرزند رستم صاحب رصد.

او به دستور شرف‌الدوله دیلمی اولین رصدخانه را در بغداد بنا کرد که سقفش به‌صورت نیمکره و به‌قطر حدود ۲۰ متر بود که در حقیقت اولین بنای پلانتاریوم جهان است.