رشد برهان ۴۴

برای دانش‌آموزان دوره متوسطه

سال سیزدهم، شمارهٔ دوم

۱۳۸۲، بها: ۲۰۰۰ ریال

www.roshdmag.org

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

دفتر انتشارات کمک آموزشی

- گفت‌وگو خودمانی با استاد شهریاری
- رسم نمودار fog از روی نمودارهای f و g
- دترمینان
- استقرای ریاضی
- جدول ریاضی
- سهم تو بزرگتر از سهم من است.

طراح واجرای شکل هندسی:
نوشین شرف الدین

بسم الله الرحمن الرحیم

❖ سال سیزدهم، شمارهٔ دوم ❖ ۱۳۸۲

❖ بها: ۲۰۰۰ ریال ❖ تیراژ: [illegible] ۱۷ نسخه

❖ برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه

www.roshdmag.org

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

چاپ و صحافی:
شرکت افست (سهامی عام)

رشد برهان، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

✍ **نگارش مقاله‌های کمک درسی** (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی متوسطه و پیش‌دانشگاهی) ✍ **طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها** (برای دانش‌آموزان) ✍ **طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها** (برای دانش‌آموزان) ✍ **طرح معماهای ریاضی** ✍ **نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی** (مانند تاریخ ریاضیات زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

رشد برهان، هر سه ماه یک شماره منتشر می‌شود.

✍ مجلّه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافه مقاله‌ها آزاد است. ✍ مقاله‌های وارده، باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.

✍ مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود. ✍ استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر با ذکر دقیق ماخذ بلامانع است.

نشانی دفتر مجلّه: صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵

تلفن دفتر مجلّه: ۸۳۰۵۸۶۲

تلفن امور مشترکین: ۸۸۳۹۱۸۶

یادداشت سردبیر

اول مهرماه سال ۱۳۵۷، وقتی وارد دبیرستان شدم، در گوشه‌ای از حیاط مدرسه تعدادی از همکلاسی های سال اول دبیرستان را دیدم که سال قبل هم با هم بودیم. به طرفشان رفتم. فرامرز از دور که مرا دید، به طرفم دوید و گفت: «حمید چه طوری؟ ۱۷ شهریور کجا بودی؟ دیدی این از خدا بی خبرها با مردم بی‌دفاع چه‌کردند؟ راستی آخرین اعلامیهٔ آقا را داری؟ من چندتا با خودم آورده‌ام. باید زودتر تکثیر کنیم و به بچه‌ها بدهیم. باید مواظب آنتن‌ها باشیم!»

تنها موضوعی که بچه‌ها راجع به آن صحبت نمی‌کردند، درس و کلاس بود. در عوض، اعلامیه‌های امام و اخبار تظاهرات و تعطیلی ها و اعتصاب‌ها بین بچه‌ها ردوبدل می‌شد. حتی سرکلاس‌ها، اگر معلمی انقلابی بود، راجع به همین مسائل صحبت بود و اگر انقلابی نبود، با برو بچه‌های انقلابی وارد بحث‌های سیاسی داغ می‌شد که گاهی به اخراج دانش‌آموز یا دانش‌آموزانی از کلاس می‌انجامید. به خاطر دارم، یک روز با معلمی که داشت به انقلابیون بدوبیراه می‌گفت، وارد جروبحث شدم و سرآخر مرا از کلاس اخراج کرد. اولین کسی که بعد از من از کلاس بیرون آمد، فرامرز بود و به دنبال او بقیهٔ بچه‌ها!

سال دوم دبیرستان در بین همهٔ سال‌های تحصیلی‌ام، سالی فراموش نشدنی و پر از تلخی و شیرینی بود. بیش‌تر اوقات، بچه‌ها مدرسه را تعطیل می‌کردند و به تظاهرات می‌رفتیم. چون دبیرستانمان دکتر هشترودی در محل با اهمیتی در تهران (میدان فلسطین فعلی) قرار داشت، همیشه با مأموران گارد و حکومت نظامی برخورد می‌کردیم. نزدیکی‌های پیروزی انقلاب (بهمن‌ماه) و تقریباً از زمان ورود امام که اصلاً مدرسه‌ای در کار نبود و بعد از پیروزی انقلاب اسلامی هم که با پیام مسؤولان دولت انقلابی و امام مدرسه‌ها دوباره بازگشایی شدند، نوبت به تبلیغات گروه‌ها و گروهک‌ها رسید. منافقین و فرصت‌طلب‌ها فعالیت‌های خود را شروع کردند و دبیرستان به میدان مبارزهٔ گروهک‌ها با یکدیگر و جرو بحث‌های داغ و گاهی خونین تبدیل شد. همان‌کسانی که تا دیروز اعلامیه‌های امام را تکثیر و ردوبدل می‌کردند و پشت‌سر فرامرز از کلاس بیرون می‌آمدند، حالا روبه‌روی امام و رهنمودهای ایشان قدعلم کرده بودند و سنگ خودشان را به سینه می‌زدند. همان معلمی که تا قبل از پیروزی انقلاب، با الهام از رهنمودهای امام خمینی برای بچه‌ها سخنرانی می‌کرد، امروز سر کلاس صحبت از ماده و مادیگرایی می‌کرد.

خلاصه عزیزان دانش‌آموز، غوغایی بود. فقط نگاه تیزبین امام و افکار مترقی و دستورهای به‌موقع ایشان بود که باعث شد، فتنه‌ها خاموش و دوباره جوّ علمی، آموزشی و پرورشی، در دبیرستان‌ها و همهٔ مراکز آموزشی کشور حاکم شود.

شما امروز به برکت خون‌های شهیدانی چون **فرامرز اختراعی**، با خیال راحت پشت میزهای درس نشسته‌اید. ان‌شاءالله قدر این کلاس‌ها، معلمان دلسوز و فضای علمی، آموزشی و پرورشی حاکم بر مدرسه‌ها را بدانید و پروردگار را شاکر باشید. با خوب درس خواندن به نیت خدمت به جامعهٔ اسلامی، هم پاسدار خون شهیدان انقلاب اسلامی باشید و هم مشت محکمی بر دهان دشمنان انقلاب و اسلام بکوبید که همواره در فکر تهاجم فرهنگی بوده و هستند و البته پیروزی به خواست خداوند، با ما بوده و خواهد بود.

۱۴

○ پرویز شهریاری

از تاریخ بیاموزیم

تکامل ریاضیات کاربردی و سنت نظری

در شماره قبل، از ریاضیات به عنوان ابزاری کاربردی یاد شد و این که اولین کاربرد ریاضیات در حل مسائل روزمره مردم بود، در این مقاله از تکامل ریاضیات کاربردی و عنصر استدلال که باعث سنت ساختمان نظری ریاضیات شده است، صحبت می کنیم.

از زمانی که در یونان باستان، عنصر «استدلال» وارد ریاضیات شد، سنت ساختمان نظری ـ استدلالی دانش ریاضی به وجود آمد؛ سنتی که در تمام تاریخ بعدی ریاضیات دنبال شده است. البته از نظر تاریخی، عقب نشینی از «ایده‌آل های» ساختمان نظری دانش ریاضی هم دیده می شود. این برگشت از نظریه و جهت گیری کاربردی را می توان در ریاضیات سده های میانه (و به ویژه در ایران) دید که بیش از هزار سال دوام داشت و زمینه را برای دوران جدید ریاضیات نظری فراهم کرد. ولی بعد از شعله های درخشان نظری در ریاضیات باستان و دوران هلنیم، دیگر ممکن نبود روش خاص کاربردی نخستین، دوباره زنده شود. دانش ریاضی سده های میانه، برایندی از سنت نظری و سمت گیری کاربردی است. نتیجهٔ این «سنتز» مرحلهٔ بعدی ریاضیات کاربردی است که نسبت به ریاضیات مصر و میان دورود، در سطح بالاتری قرار دارد.

این تصور که زمانی گمان می کردند، «وزن مخصوص» ریاضیات نظری در طول تاریخ، به طور دائم رو به افزایش بوده است، مدت هاست که دیگر وجود ندارد. این تصور به این دلیل پیدا شده بود که به ریاضیات ایرانی کم بها می دادند. «... ریاضیات عربی به هیچ وجه به معنای ریاضیات عرب ها نیست، همان طور که نوشته های لاتینی فرمای فرانسوی، توریچلی ایتالیایی، نیوتُن انگلیسی، لایب نیتس آلمانی و اولر که در آکادمی روسیه کار می کرد را نمی توان دانش لاتینی نامید. درواقع، اصطلاح نادرست ریاضیات عربی، به معنای موقعیت های دانشمندان ملت های گوناگون است... که چه در زمینهٔ ریاضیات و چه در دانش های دیگر، در طول بیش از پانصد سال از سدهٔ نهم تا سدهٔ پانزدهم میلادی، پیشتاز بوده اند. آن ها بیش تر از آسیای میانه و نزدیک و به ویژه از ایران (قفقاز، خوارزم، خراسان و...) برخاسته اند. به اصطلاح، ریاضیات عربی را باید بیش تر متعلق به ملت های آسیای میانه و خراسان بزرگ دانست.»[1]

حقیقت نشان می دهد که برخلاف تصور قبلی عده ای از تاریخ نویسان، ریاضیات «عربی» تنها «حلقهٔ ارتباطی» نبوده که ریاضیات نظری یونانی را حفظ کرده است و بدون این که چیزی به آن اضافه کند، این ارثیه را به اروپاییان تحویل دهد. روشن شده است که ریاضیات اروپای سده های میانه، از نظر ساختاری شبیه ریاضیات کشورهای شرق بوده و مجموعهٔ آن ها، خیلی نیرومندتر از ریاضیات

یونانی به سمت ریاضیات کاربردی گرایش داشته است. به‌طور کلی می‌توان دربارهٔ مرحلهٔ تازه‌ای از تکامل ریاضیات صحبت کرد. در این دوران می‌توان مسأله‌ها، موضوع‌ها و دانش‌هایی از ریاضیات را دید که آن را از دوران قبل از خود مشخص می‌کند.

باید گفت که در بسیاری از نوشته‌های فلسفی مربوط به ریاضیات، به آن دورهٔ تکامل ریاضیات که بسیار اساسی است و بی‌اندازه اهمیت دارد، به‌اندازهٔ کافی بها داده نشده و نیرو و پتانسیل روش‌شناختی که خاص ریاضیات سده‌های میانه است، بازتاب مناسب خود را پیدا نکرده است. درضمن، مؤلفان به نقش عمدهٔ روش‌شناسی ریاضیات تکیه می‌کنند که در نوشتهٔ **آندره کولمر گمروف**، با عنوان «ریاضیات» (۱۹۵۴) دربارهٔ آن صحبت شده است. بنابرآن، ریاضیات نظری یونان‌باستان و کشورهای هلنیستی (که آراسته به ساختمان اصل موضوعی بود) در ریاضیات سده‌های میانه (تا سال ۳۰ سدهٔ هفدهم)، به دورهٔ ریاضیات مقدماتی مربوط می‌شوند. در ریاضیات مقدماتی، ریاضیات نظری و ریاضیات کاربردی که دانش ریاضی را به سمت منظم‌شدن هدایت می‌کند، در هم ادغام شده‌اند و به‌عنوان حالتی واحد و یگانه مورد تفسیر قرار می‌گیرند که در آن جنبهٔ نظری ریاضیات برتری دارد. به‌دنبال دورهٔ ریاضیات مقدماتی، دورهٔ ریاضیات با کمیت‌های متغیر می‌آید (تا میانهٔ سدهٔ نوزدهم) که دیگر به‌روشنی خصلت نظری دارد.

داده‌های تازه ما را وامی‌دارد به جریان تکامل ریاضیات، به گونهٔ دیگری بنگریم. به‌ویژه کارهای **ارشمیدس و آپولونیوس**، به‌روشنی از مرزهای ریاضیات مقدماتی فراتر رفته‌اند. درحالی‌که ریاضیات سده‌های میانه، بیش‌تر با ریاضیات کاربردی دوران قبل از یونان خویشاوند است. ولی در کتاب‌هایی که دربارهٔ فلسفه و روش‌شناسی ریاضیات نوشته شده‌اند، حقیقت‌های تازه مورد ارزیابی درست قرار نگرفته‌اند و بازتاب کافی نیافته‌اند. **اُ. ای. کدرُوسکی** در مقدمهٔ کتاب خود به نام «مسأله‌های روش‌شناختی تکامل ریاضیات» (۱۹۷۷)، یادآوری می‌کند که دوره‌های تاریخی تکامل ریاضیات را، براساس تقسیم‌بندی **کولموگوروف** در نظر گرفته است. کم‌بهادادن به اندیشهٔ متفکران ریاضی سده‌های میانه در «مقاله‌هایی دربارهٔ تاریخ ریاضیات»، اثر **نیکل بورباکی** هم منعکس شده است. در این «مقاله‌ها»، به ۲۹ دانشمند یونانی استناد شده است و از یادگارهای سده‌های میانه، تنها از ۱۲ نوشته نام‌آورده شده است که درضمن، هیچ‌کدام از آن‌ها «عربی» نیستند.

گرایش‌های امروزی در تکامل ریاضیات را تنها وقتی می‌توان فهمید که از تقسیم نادرست تکامل ریاضیات صرف‌نظر کنیم؛ تقسیمی که تنها جنبه‌هایی از آن را، با نفی دیگری در نظر می‌گیرد و دورنمایی دگرگون‌شده‌ای از دانش ریاضی به ما می‌دهد و چنین می‌نمایاند که پیشرفت ریاضیات روی خط پیوسته‌ای از یونان‌باستان تا زمان حاضر حرکت کرده است. توجه اغراق‌آمیز به مسیر نظری ریاضیات و کم‌توجهی به ریاضیات کاربردی، به تحریف تصور ما از دانش ریاضی منجر می‌شود و در تقسیم‌بندی مسائل فلسفی ـ روش‌شناختی، تکیه‌گاهی نادرست پدید می‌آورد. با آغاز از یونان‌باستان، ریاضیات تنها به‌عنوان یک دانش نظری در نظر گرفته می‌شود و متناظر با آن، بررسی‌های فلسفی ـ روش‌شناختی، بر مسائل مربوط به روش قیاسی، ساختمان‌های ترکیبی و پایه‌های اصل موضوعی دانش ریاضی، منجر می‌شود.

نقطهٔ اوج در کتاب‌های مربوط به مسأله‌های فلسفی ریاضیات، به‌طور معمول در بررسی موقعیت‌های شکل‌گیری نظری ریاضیات است: روش اصل موضوعی و تکامل آن، و از آن جمله پارادکس‌های ساختمان نظری ریاضیات بر پایهٔ مجموعه‌ها و عکس‌العمل فلسفی ـ روش‌شناختی در برابر این پارادکس‌ها، و بر این اساس، درواقع، نقش خاص عمل در تکامل ریاضیات، به فراموشی سپرده می‌شود. این موقعیت در بیان نامهٔ **بورباکی**، دربارهٔ شکل گرفتن دانش ریاضیات نظری بازتاب

یافته است: «این که بین پدیده‌های تجربی و ساختارهای ریاضی، بستگی نزدیکی وجود دارد و این که به صورتی نامنتظر، با کشف‌های فیزیک معاصر تأیید می‌شود، برای ما دلیل‌های واقعی این علت‌ها معلوم نیست و به احتمالی، هرگز هم معلوم نخواهد شد.»[۲] و تا زمانی که علت‌های پنهانی را که درریاضیات کاربردی وجود دارد و موجب نیروی تاریخی ساختارهای نظری دورهٔ بعد شده است، از نظر دور داشته باشیم، نمی‌توانیم این «تردید» را از خود دور کنیم.

ارزیابی مسأله‌های اصلی فلسفی و روش شناختی دانش ریاضی در سده‌های میانه را، به جای سمت گیری در جهت کارهای نظری این زمان، باید در جای دیگری به دست آورد که عبارت است از واکنش نسبت به تکامل و تصحیح میانهٔ ریاضیات این دوران ـ مسأله‌ای که در برابر ریاضیات امروزی هم قرار دارد. تأثیر فعالیت‌های عملی بر جهت گیری تکامل ریاضیات، به صورت‌های متفاوتی در دوره‌های گوناگون وجود آن، نمایان می‌شود.

سنتز سنت‌های نظری و سمت گیری کاربردی را در ریاضیات سده‌های میانه، می‌توان در دو زمینه بررسی کرد. اگر از جنبهٔ خاص به این موضوع بنگریم، به‌هم آمیختگی سنت نظری و جهت گیری کاربردی، به کمک تنظیم آگاهی‌های ریاضی با روش محاسبه‌ای و الگوریتمی تحقق می‌یابد. هستهٔ مرکزی این شکل گیری تازهٔ دانش و ریاضی، **الگوریتم محاسبه‌ای** است که نسبت نظری (نسبت تنظیم آگاهی‌ها به کمک استدلال) را تثبیت می‌کند و در عین حال، عمل‌های لازم را برای جهت گیری کاربردی ریاضیات، به بهترین صورت خود درمی‌آورد. براساس تصور یگانه‌ای که دربارهٔ ریاضیات به‌عنوان یک دانش کاربردی وجود دارد، آگاهی‌های ریاضی پیش می‌رود و تکامل می‌یابد. و این دلیل عینی کلیت روش شناختی است؛ کلیتی که با آن دورهٔ فعالیت آن گروه اجتماعی که ریاضیات را حفظ و از آن استفاده می‌کند، تحکیم می‌شود. در کارهای روش شناختی دربارهٔ موضوع روش‌های ریاضیات، در اساس خود، نتیجه‌ای است از

خوارزمی

فعالیت‌های گروه‌های اجتماعی که درروند به‌وجود آوردن آگاهی‌ها دخالت دارند. سنتز سنت نظری «استدلال» و سمت گیری کاربردی دانش ریاضی، به صورت بازتابی از «طبقهٔ اجتماعی» درمی‌آید. برعکس، آن برخورد روش شناختی دربارهٔ ریاضیات، برخوردی که فعالیت گروه اجتماعی را به‌حساب می‌آورد و امکان یکی شدن اثبات و محاسبه را فراهم می‌آورد، به‌نوبهٔ خود بر ساز و کار تکامل دانش، تأثیر می‌گذارد و حلقه‌های متفاوت آن را بیش‌تر و محکم‌تر به‌هم نزدیک می‌کند. درنتیجه ریاضیات سده‌های میانه، همچون مجموعهٔ کاملی که سمت گیری کاربردی دارد، مصرف می‌شود. دانشی که به صورت خاصی تنظیم شده است، از نظر روش شناختی، به‌صورت واحد کاملی درک می‌شود و تصور همگون و یکپارچه‌ای دربارهٔ موضوع ریاضیات به ما می‌دهد.

زیرنویس

۱. آ. پ. یوسکدویچ، در کتاب «دربارهٔ ریاضیات ملت‌های آسیای میانه، در سده‌های نهم تا پانزدهم».

۲. بورباکی. «مقاله‌هایی دربارهٔ تاریخ ریاضیات».

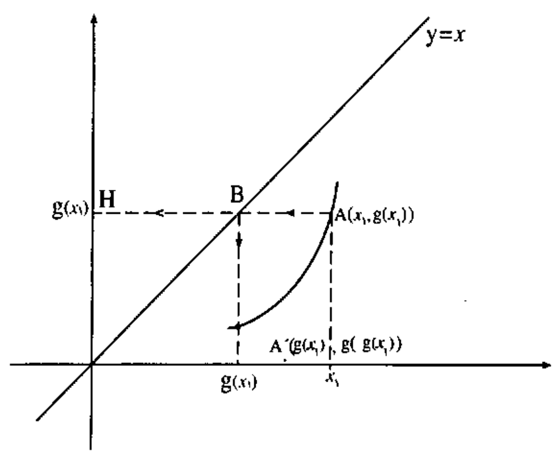
رسم نمودار fog از روی نمودارهای f و g

برای دانش آموزان سال سوم رشتهٔ ریاضی

احمد قندهاری

در این مقاله می‌خواهیم از روی نمودارهای f و g، نمودار $f(g(x))$ و از روی نمودار f، نمودار $f(f(x))$ را رسم کنیم.

۱. نمودار تابع g در شکل زیر مفروض است. می‌خواهیم نقطه‌ای روی نمودار g بیابیم که طول آن $g(x_1)$ باشد؛ $x_1 \in D_g$.



برای این کار خط y=x را نیز در شکل رسم کرده‌ایم.

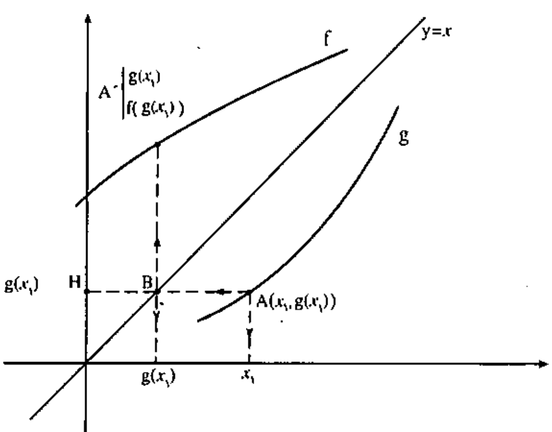
نقطه‌ای به طول x_1 روی محور xها انتخاب می‌کنیم و آن را به کمک رابط تا نمودار g امتداد می‌دهیم. نقطهٔ A به مختصات $(x_1, g(x_1))$ است.

اگر از نقطهٔ A رابطی موازی محور xها رسم کنیم تا خط y=x را در نقطهٔ B و محور yها را درنقطهٔ H قطع کند، خواهیم داشت: $x_B = y_B = g(x_1)$ و $y_H = g(x_1)$.

از نقطهٔ B رابطی بر محور xها عمود می‌کنیم تا نمودار g را در نقطهٔ A' قطع کند. نقطه A' روی نمودار g است و طول آن $g(x_1)$ است. پس $A'(g(x_1), g(g(x_1)))$ است.

۲. نمودارهای دو تابع g و f در شکل رسم شده‌اند. می‌خواهیم نقطه‌ای روی نمودار f بیابیم که طول آن $g(x_1)$ باشد؛ $x_1 \in D_g$.

در این جا هم از خط y=x کمک می گیریم.



فرض می‌کنیم $A(x_1, g(x_1))$ روی نمودار g باشد.

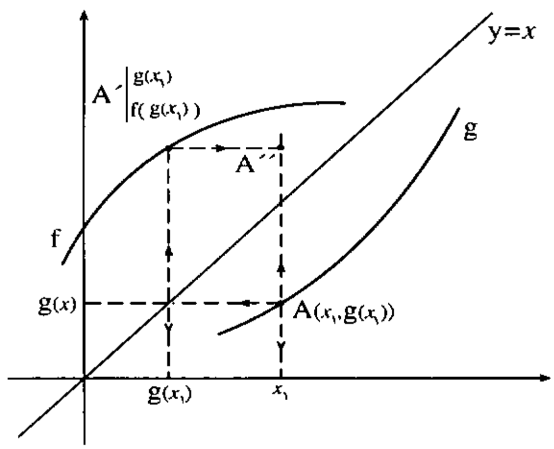
از A رابطی عمود بر محور yها رسم می‌کنیم تا خط y=x را در B و محور yها را در H قطع کند، خواهیم داشت: $x_B = y_B = g(x_1)$ و $y_H = g(x_1)$.

از نقطهٔ B رابطی عمود بر محور xها رسم می‌کنیم تا محور xها را در نقطه‌ای به طول $g(x_1)$ قطع کند و نمودار f

را در نقطهٔ A' قطع کند، پس $x_{A'} = g(x_1)$. درنتیجه $A'(g(x_1), f(g(x_1)))$ است.

۳. می‌خواهیم نقطهٔ A'' را در صفحهٔ محورهای مختصاتی که نمودارهای دو تابع f و g رسم شده‌اند، طوری بیابیم که $A''(x_1, f(g(x_1)))$ باشد.

مانند دو قسمت قبل خط y=x را رسم می‌کنیم.

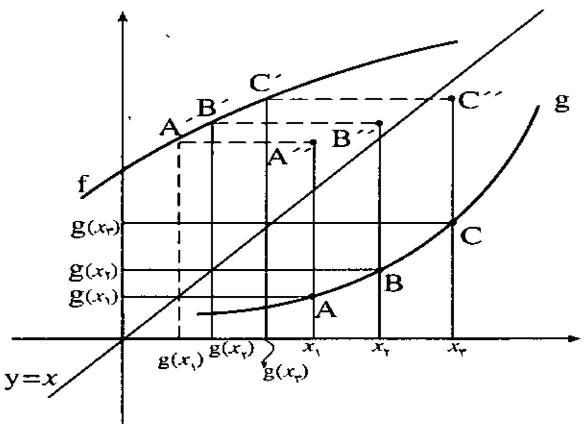


نقطهٔ $A(x_1,g(x_1))$ را روی نمودار g در نظر می‌گیریم. با توجه به توضیحات مورد ۲ به نقطهٔ $A'\left|\begin{matrix}g(x_1)\\f(g(x_1))\end{matrix}\right.$ می‌رسیم.

حال اگر از نقطه A' روی نمودار f خطی موازی محور xها رسم کنیم تا رابط رسم شده از نقطهٔ A (موازی محور yها) را درنقطه A'' قطع کند، آن‌گاه $A''\left|\begin{matrix}x_1\\f(g(x_1))\end{matrix}\right.$ خواهد شد. بنابراین A'' یک نقطه از تابع $f(g(x))$ است. با تکرار این عمل، نقاط متعدد A'' که روی تابع fog قرار دارند، مشخص می‌شوند.

در شکل زیر سه نقطه از تابع fog را با در دست داشتن نمودارهای دو تابع f و g به‌دست می‌آوریم؛ $x_1, x_2, x_3 \in D_g$.

نقاط A''، B'' و C''، سه نقطه از تابع fog هستند.



$A''\left|\begin{matrix}x_1\\f(g(x_1))\end{matrix}\right.$ $\quad B''\left|\begin{matrix}x_2\\f(g(x_2))\end{matrix}\right.$ $\quad C''\left|\begin{matrix}x_3\\f(g(x_3))\end{matrix}\right.$

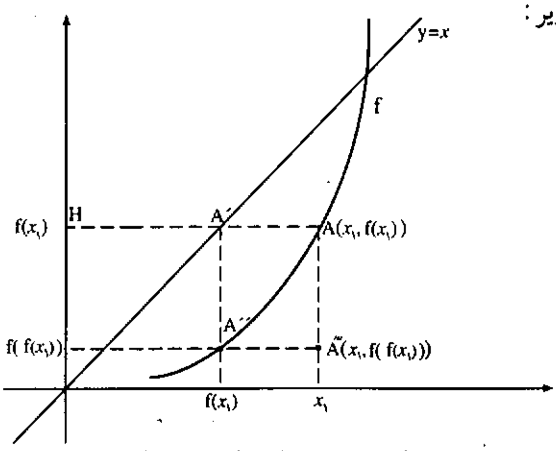
۴. می‌خواهیم از روی نمودار تابع f، نمودار تابع fof را رسم کنیم.

فرض می‌کنیم در صفحهٔ محورهای مختصات نمودار تابع f رسم شده است. خط y=x را هم در شکل رسم می‌کنیم. نقطه‌ای به طول x_1 روی نمودار تابع f در نظر می‌گیریم. مانند $A(x_1, f(x_1))$، از نقطهٔ A رابطی موازی

محور xها بر محور yها عمود می‌کنیم. این رابط، خط y=x را در نقطهٔ $A'(f(x_1),f(x_1))$ و محور yها را در H قطع می‌کند که $y_H=f(x_1)$.

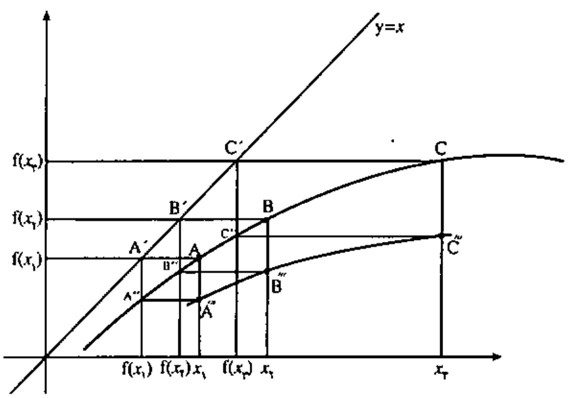
از نقطهٔ A' به محور xها عمود می‌کنیم. طول پای عمود $f(x_1)$ است. این رابط نمودار تابع f را در نقطهٔ A'' قطع می‌کند که $A''(f(x_1),f(f(x_1)))$ است.

چنانچه از A'' رابطی موازی محور xها رسم کنیم تا رابط عمود بر محور xها به طول x_1 را در نقطهٔ A''' قطع کند، آن‌گاه $A'''(x_1,f(f(x_1)))$ خواهد شد؛ مانند شکل زیر:



$$A(x_1,f(x_1))A'(f(x_1),f(x_1))$$
$$A''(f(x_1),f(f(x_1)))A'''(x_1,f(f(x_1)))$$

برای تمرین، در شکل زیر ۳ نقطهٔ A'''، B''' و C''' را از تابع fof مشخص می‌کنیم.



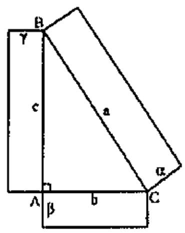
$$A'''(x_1,f(f(x_1)))$$
$$B'''(x_2,f(f(x_2)))$$
$$C'''(x_3,f(f(x_3)))$$

تعمیم قضیهٔ فیثاغورس

مجتبی فرهادی
دبیر ریاضی منطقه بوئین میاندشت استان اصفهان

طبق قضیهٔ فیثاغورس، در هر مثلث قائم‌الزاویه، مساحت مربعی که روی وتر ساخته می‌شود، برابر است با مجموع مساحت‌های دو مربعی که روی اضلاع زاویهٔ قائمه ساخته می‌شود.

تعمیم اول: اگر روی اضلاع هر مثلث قائم‌الزاویه، سه شکل متشابه رسم کنیم، مساحت شکلی که روی وتر است، با مجموع مساحت‌های دو شکل دیگر برابر است.



برای مثال، روی اضلاع مثلث قائم‌الزاویهٔ $A\overset{\Delta}{B}C$، سه مستطیل متشابه رسم می‌کنیم. چون مستطیل‌ها متشابهند، لذا نسبت طول به عرض، در هر مستطیل مقداری ثابت است که آن را k می‌نامیم. به عبارت دیگر:

$$\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta}=\frac{c}{\gamma}=k\Rightarrow\alpha=\frac{a}{k}\ ,\ \beta=\frac{b}{k}\ ,\ \gamma=\frac{c}{k}$$

مساحت مستطیل روی ضلع AB + مساحت مستطیل روی ضلع AC =

$$c\gamma+b\beta=c\left(\frac{c}{k}\right)+b\left(\frac{b}{k}\right)=\frac{c^2}{k}+\frac{b^2}{k}$$

$$=\frac{c^2+b^2}{k}=\frac{a^2}{k}=a\left(\frac{a}{k}\right)=a\alpha=BC_{\text{روی وتر}}^{\text{مساحت مستطیل}}$$

ـ تعمیم فوق را برای شکل‌هایی همچون: دایره، لوزی، مثلث و... تحقیق کنید.

اعداد فیبوناچی[1]

Fibonacci Numbers
Nicolai N. Vorobiev

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

۱ . تاریخ اولیهٔ ریاضیات پر از شرح‌حال ریاضی‌دان‌های برجسته است . بسیاری از دستاوردهای ریاضیات باستان از دقت ذهن مؤلفان آن‌ها به دست آمده‌اند و امروزه نام‌های **اقلیدس**، **ارشمیدس** و **هرون**، برای هر فرد تحصیلکرده‌ای آشنایند .

اما زمانی که ریاضیات دورهٔ قرون وسطا را در نظر بگیرید، این موضوع کاملاً تفاوت می‌کند . به استثنای ویت[2] که در قرن شانزدهم می‌زیست و غیر از ریاضیدان‌های بسیار نزدیک‌تر به دوران ما، دوره‌های مکتب جاری ریاضیات شامل هیچ گونه نام مرتبط با قرون وسطا نیستند . در این عصر ریاضیات، به آهستگی بسیار گسترش می‌یافت و تعداد بسیار اندکی ریاضیدان برجسته وجود داشت .

در این صورت، باید بیش‌تر توجه خود را به اثر «Liber abaci» (کتابی دربارهٔ چرتکه) از ریاضیدان برجستهٔ ایتالیایی، **لئوناردوی پیزایی**[3] معطوف کنیم که بیش‌تر به نام کنیه‌اش، فیبوناتچی مشهور است که مختصر شدهٔ «پسر بوناتچی»[4] است .

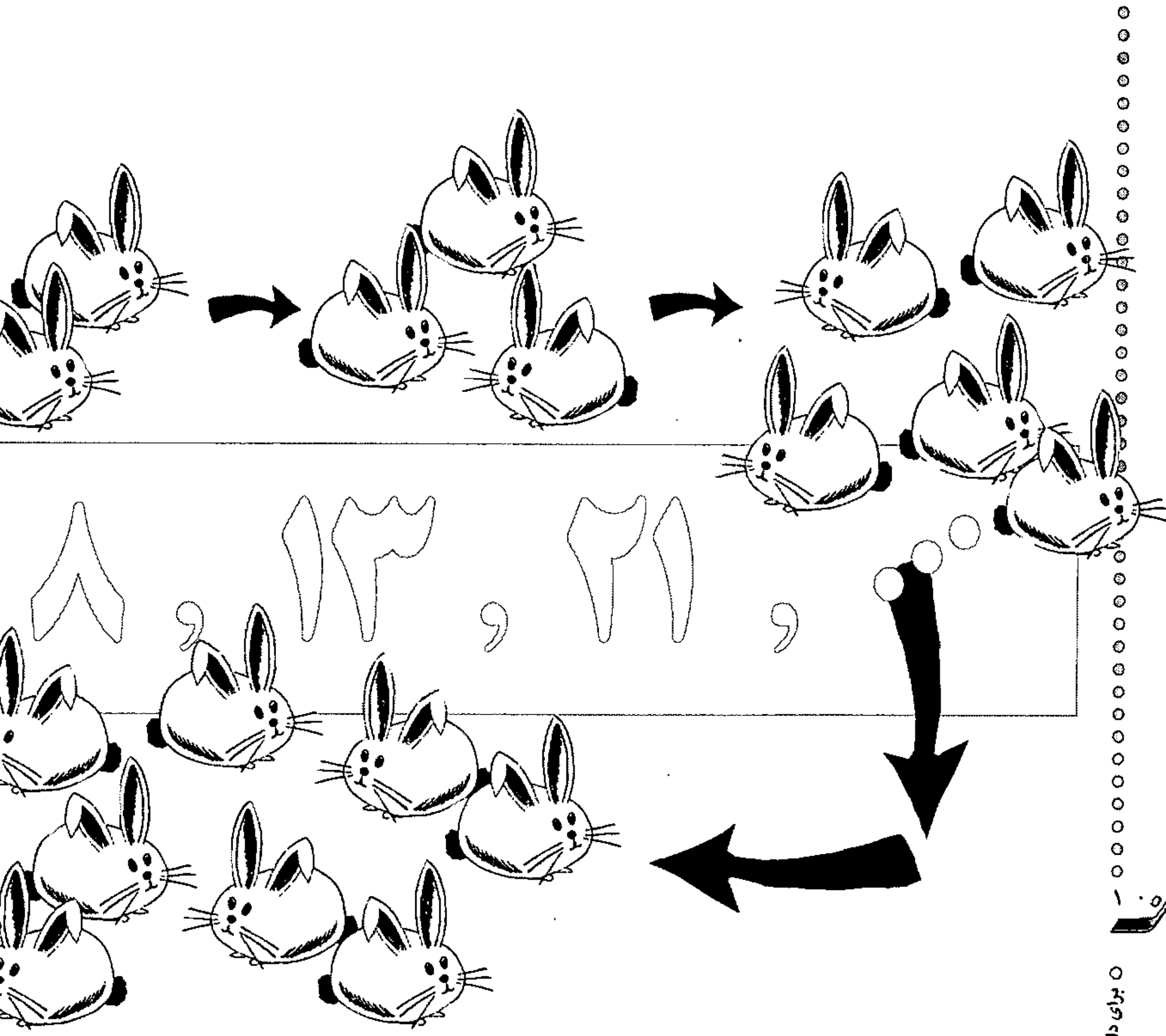
این کتاب معروف در سال ۱۲۰۲ منتشر شد و ویراستهٔ دوم آن به دست ما رسیده است؛ ویراسته‌ای که متعلق به سال ۱۲۲۸ است . Liber abaci، تألیف حجیمی است که تقریباً شامل جمیع معلومات حسابی و جبری آن دوره است و در توسعهٔ ریاضیات در اروپای غربی و در طول قرن‌های بعدی نقشی عظیم داشته است . به خصوص، از طریق این کتاب است که اروپایی‌ها با «عددهای هندی ـ عربی»[5] آشنا شدند .

موضوعات گردآمده در کتاب توسط مسائل زیادی توضیح داده شده‌اند که قسمت اعظم این رساله را تشکیل می‌دهند . در این جا کارمان را به ارائهٔ یکی از مسأله‌های فیبوناتچی، معروف به «مسألهٔ خرگوش»[6] محدود می‌کنیم . این مسأله را می‌توان در صفحه‌های ۱۲۳ و ۱۲۴ دست‌نوشتهٔ سال ۱۲۲۸م یافت .

«در طول یک سال، از یک جفت خرگوش، چند جفت خرگوش می‌توان پرورش داد؟»

شخصی یک جفت خرگوش را در محلی کاملاً محصور با دیوار، قرار می‌دهد تا دریابد که در طول یک سال، چند جفت خرگوش از این جفت حاصل می‌شود . طبیعت این خرگوش‌ها چنان است که در هر ماه یک جفت خرگوش، جفتی دیگر به‌وجود می‌آورد و زایش خرگوش‌ها در ماه دوم بعد از تولدشان آغاز می‌شود .

از آن‌جا که جفت اول در ماه اول تولیدمثل می‌کنند، دوبرابر می‌شوند و در یک ماه دو جفت خرگوش خواهیم داشت . از این جفت‌ها، یکی (اولی) در ماه بعدی جفتی دیگر به‌وجود می‌آورد . به‌این‌ترتیب، در ماه دوم ۳ جفت خرگوش حاصل می‌شود . از این سه جفت در یک ماه دو جفت آبستن می‌شوند . در این صورت در ماه سوم، دوجفت دیگر تولد خواهند یافت و تعداد جفت‌ها به پنج می‌رسد . از این پنج جفت در یک ماه، سه مورد بچه‌دار می‌شوند . بنابراین در ماه چهارم ۸ جفت خرگوش موجود

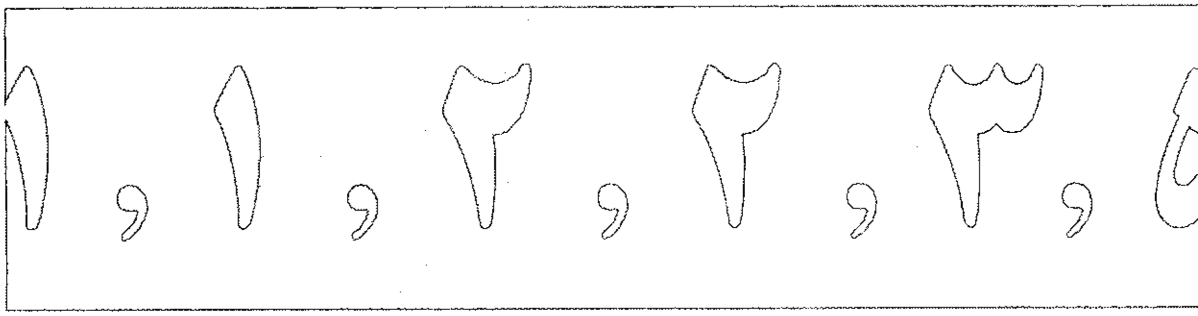


خواهند بود. از این هشت جفت، پنج مورد پنج جفت خرگوش دیگر تولید می‌کنند، که چون به هشت جفت قبلی افزوده شوند، در ماه پنجم ۱۳ جفت خرگوش خواهیم داشت.

از ۱۳ جفت مزبور، پنج مورد که در پنجمین ماه متولد شده‌اند، در این ماه آبستن نمی‌شوند، اما هشت جفت دیگر آبستن می‌شوند. به‌این ترتیب در ماه ششم، ۲۱ جفت خواهیم داشت. با افزودن این‌ها به ۱۳ جفتی که در ماه بعد تولد می‌یابند، ۳۴ جفت خرگوش در ماه هفتم به‌دست خواهیم آورد و با افزودن آن‌ها به ۲۱ جفت حاصل در ماه بعد، ۵۵ جفت در ماه هشتم خواهیم داشت.

افزودن آن‌ها به ۳۴ جفت حاصل در ماه بعد، ۸۹ جفت در ماه نهم به‌دست می‌دهد و افزودن این عدد به ۵۵ جفت تولد یافته در ماه بعد، ۱۴۴ جفت در ماه دهم حاصل می‌کند. آن‌گاه اضافه کردن این‌ها به ۸۹ مورد متولد شده در ماه بعد، ۲۳۳ مورد در ماه یازدهم به‌وجود می‌آورد. سرانجام، چون ۱۴۴ جفت متولد شده در ماه بعد را به این تعداد بیفزاییم، در ماه دوازدهم ۳۷۷ جفت خواهیم داشت. این عدد تعداد جفت‌های حاصل از جفت اول در محل مفروض در آخر یک سال است (البته با احتساب جفت اول).

در جدول صفحه ۱۱ می‌توان چگونگی انجام این محاسبات را ملاحظه کرد. با افزودن عدد اول به دوم، یعنی ۱ به ۲، دوم به سوم، سوم به چهارم، چهارم به پنجم و به همین ترتیب یکی بعد از دیگری، تا زمانی که عدد دهم به یازدهم اضافه شود، یعنی ۱۴۴ به ۲۳۳، تعداد کل جفت‌های خرگوش‌ها، یعنی ۳۷۷ به‌دست می‌آید. به‌این طریق می‌توان این کار را درباره ماه‌هایی با تعداد نامعین نیز انجام داد. (جدول صفحه بعد).



ماه	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم	هفتم	هشتم	نهم	دهم	یازدهم	دوازدهم
تعداد جفت‌ها	۲	۳	۵	۸	۱۳	۲۱	۳۴	۵۵	۸۹	۱۴۴	۲۳۳	۳۷۷

۲ . اکنون خرگوش‌ها را رها می‌کنیم و به سراغ اعداد می‌رویم و دنبالهٔ عددی:

$$u_1, u_2, \ldots, u_n \qquad (1)$$

را مورد بررسی قرار می‌دهیم که در آن، هر جمله برابر مجموع دو جملهٔ قبل از آن است. یعنی به‌ازای هر $n > 2$:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \qquad (2)$$

در ریاضیات، اغلب با دنباله‌هایی چنین که در آن‌ها هر جمله به‌صورت تابعی از جمله‌های پیشین تعریف شده است، مواجه می‌شویم؛ دنباله‌هایی که به «دنباله‌های برگشتی»[7] موسومند.

فرایند محاسبهٔ جمله‌های متوالی یک دنبالهٔ برگشتی، به «فرایند برگشتی»[8] موسوم است، و معادلهٔ ویژه‌ای که فرایند برگشتی را توصیف می‌کند، «رابطهٔ برگشتی»[9] نام دارد.[10]

اولین نکته‌ای که مایل به بیان آن هستیم، این است که رابطهٔ (۲)، به‌خودی‌خود نمی‌تواند جمله‌های دنبالهٔ (۱) را محاسبه کند؛ چرا که می‌توان بی‌نهایت دنبالهٔ عددی متفاوت و صادق در این شرط ساخت؛ مثل:

۲,۵,۷,۱۲,۱۹,۳۱,۵۰,...,
۱,۳,۴,۷,۱۱,۱۸,۲۹,...,
−۱,−۵,−۶,−۱۱,−۱۷,...,

و غیره.

بنابراین، هرگاه یکتایی دنبالهٔ (۱) مطلوب باشد، شرط (۲) به‌طور واضح ناکافی است و باید شرط‌های اضافی دیگری را مطرح کنیم. به‌عنوان مثال، می‌توان چند جملهٔ اول دنباله را به‌دست داد. درواقع باید چند جملهٔ اولیهٔ دنبالهٔ (۱) را به‌دست داد تا محاسبهٔ جمیع جمله‌های بعدی دنباله، تنها با به‌کار بردن شرط (۲) ممکن شود.

در پاسخ به این سؤال، ملاحظه می‌کنیم که هیچ جمله‌ای

از دنبالهٔ (۱) را نمی‌توان از رابطهٔ (۲) به‌دست آورد، مگر این که همهٔ جمله‌های (۱)، دو جملهٔ قبلی داشته باشند. به‌عنوان مثال، اولین جملهٔ دنبالهٔ مورد بحث، اصلاً دارای جمله‌های پیشین نیست و جملهٔ دوم تنها بعد از یک جمله قرار دارد.

نتیجه می‌گیریم که برای محاسبهٔ دنباله باید علاوه بر شرط(۲)، دو جملهٔ اولیهٔ آن را نیز بدانیم. دانستن این موضوع کفایت می‌کند تا همهٔ جمله‌های دیگر دنبالهٔ (۱) را به‌دست آوریم.

درواقع، u_3 را می‌توان به‌عنوان مجموع دو جملهٔ قبلاً مشخص‌شدهٔ u_1 و u_2 محاسبه کرد. سپس u_4 برابر مجموع u_2 و u_3 است که قبلاً محاسبه کرده‌ایم. u_5 نیز مجموع دو جملهٔ قبلاً حساب‌شدهٔ u_3 و u_4 است، و به‌همین ترتیب، «در حالت تعدادی نامشخص از جمله‌ها» است.

به این طریق، صرفاً با گذر از دو جملهٔ متوالی به جملهٔ بلافاصله بعدی آن‌ها، می‌توانیم به هر جمله با اندیس قبلاً مشخص‌شده برسیم و آن را محاسبه کنیم.

۳. اکنون توجه خود را به حالت خاص و مهم دنبالهٔ (۱) با شرط (۲) معطوف می‌کنیم که در آن داریم:

$u_1 = 1,\ \ u_2 = 1$

همان‌گونه که در بالا اشاره کردیم، شرط (۲) این امکان را می‌دهد که به‌طور متوالی جمیع جمله‌های دیگر این دنباله را محاسبه کنیم. به‌سادگی محقق می‌شود که در این حالت، چهارده جملهٔ اولیهٔ دنباله عبارتند از اعداد:

۱,۱,۲, ۳,۵,۸,۱۳,۲۱, ۳۴,۵۵,۸۹,۱۴۴,۲۳۳, ۳۷۷

که پیش از این در مسألهٔ خرگوش به آن‌ها برخوردیم.
دنبالهٔ (۱) هنگامی که:

$u_1 = u_2 = 1$

و رابطهٔ برگشتی توسط معادلهٔ (۲) داده شده باشد، به افتخار طراح این مسأله، به «دنبالهٔ فیبوناتچی»[11] موسوم است و جمله‌های آن «عددهای فیبوناتچی»[12] نامیده می‌شوند.

عددهای فیبوناتچی از ویژگی‌های جالب و مهم بسیاری برخوردارند که این مقاله به تحقیق و بررسی آن‌ها می‌پردازد.

ساده‌ترین ویژگی‌های عددهای فیبوناتچی

۱. این فصل را با محاسبهٔ مجموع n عدد اولیهٔ فیبوناتچی آغاز می‌کنیم. به‌ویژه قصد داریم ثابت کنیم که:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_{n+2} - 1 \qquad (1-1)$$

درواقع داریم:

$$u_1 = u_3 - u_2$$
$$u_2 = u_4 - u_3$$
$$u_3 = u_5 - u_4$$
$$\dots$$
$$u_{n-1} = u_{n+1} - u_n$$
$$u_n = u_{n+2} - u_{n+1}$$

با جمع جمله به جملهٔ همهٔ این معادله‌ها داریم:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_{n+2} - u_2$$

کار باقی‌مانده به خاطر آوردن این نکتهٔ مهم است که:

$$u_2 = 1$$

۲. سپس نشان می‌دهیم که مجموع n عدد اولیهٔ فیبوناتچی با اندیس‌های فرد، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{2n-1} = u_{2n} \quad (2-1)$$

برای اثبات این فرمول، توجه می‌کنیم که:

$$u_1 = u_2$$
$$u_3 = u_4 - u_2$$
$$u_5 = u_6 - u_4$$
$$\dots$$
$$u_{2n-1} = u_{2n} - u_{2n-2}$$

نتیجهٔ مطلوب با جمع جمله به جملهٔ همهٔ این معادله‌ها به‌دست می‌آید.

۳. مجموع n جملهٔ اولیهٔ عددهای فیبوناتچی با اندیس‌های زوج، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$u_2 + u_4 + \dots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1 \qquad (3-1)$$

اثبات این رابطه چنین است: بنا به (۱ـ۱) می‌دانیم که:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{2n} = u_{2n+2} - 1$$

از تفریق (۱ـ۲) از این معادله، نتیجهٔ

$$u_2 + u_4 + \dots + u_{2n} = u_{2n+2} - 1 - u_{2n} = u_{2n+1} - 1$$

را حاصل می‌کنیم.

گذشته از این، (۱ـ۳) را جمله به جمله از (۱ـ۲) تفریق می‌کنیم. درنتیجه به‌دست می‌آوریم:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + u_{2n-1} - u_{2n} = -u_{2n-1} + 1 \quad (1\text{-}4)$$

اکنون با جمع

$$u_{2n+1} = u_{2n} + u_{2n-1}$$

با هر دو طرف (۱-۴)، به‌دست می‌آوریم:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots - u_{2n} + u_{2n+1} = u_{2n} + 1 \quad (1\text{-}5)$$

با ترکیب (۱ـ۴) و (۱ـ۵) در فرمولی جداگانه، نتیجه می‌گیریم که مجموع تناوبی[13] n عدد اولیهٔ فیبوناتچی را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n+1} u_n = (-1)^{n+1} u_{n-1} + 1 \quad (1\text{-}6)$$

۴. فرمول‌های (۱ـ۱) و (۱ـ۲) با جمع جمله به جملهٔ یک مجموعهٔ کامل از معادله‌های واضح، استخراج شده‌اند. در این‌جا کاربرد دیگری از این شیوه را با استفاده از اثبات دیگر فرمولی برای مجموع مربع‌های n عدد اولیهٔ فیبوناتچی به‌دست می‌دهیم. یعنی:

$$u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = u_n u_{n+1} \quad (1\text{-}7)$$

برای رسیدن به این مقصود، ملاحظه می‌کنیم که:

$$u_k u_{k+1} - u_{k-1} u_k = u_k (u_{k+1} - u_{k-1}) = u_k^2$$

با جمع جمله به جملهٔ معادله‌های حاصل، یعنی:

$$u_1^2 = u_1 u_2$$

$$u_2^2 = u_2 u_3 - u_1 u_2$$

$$u_3^2 = u_3 u_4 - u_2 u_3$$

$$\dots$$

$$u_n^2 = u_n u_{n+1} - u_{n-1} u_n$$

به (۱ـ۷) خواهیم رسید.

زیرنویس

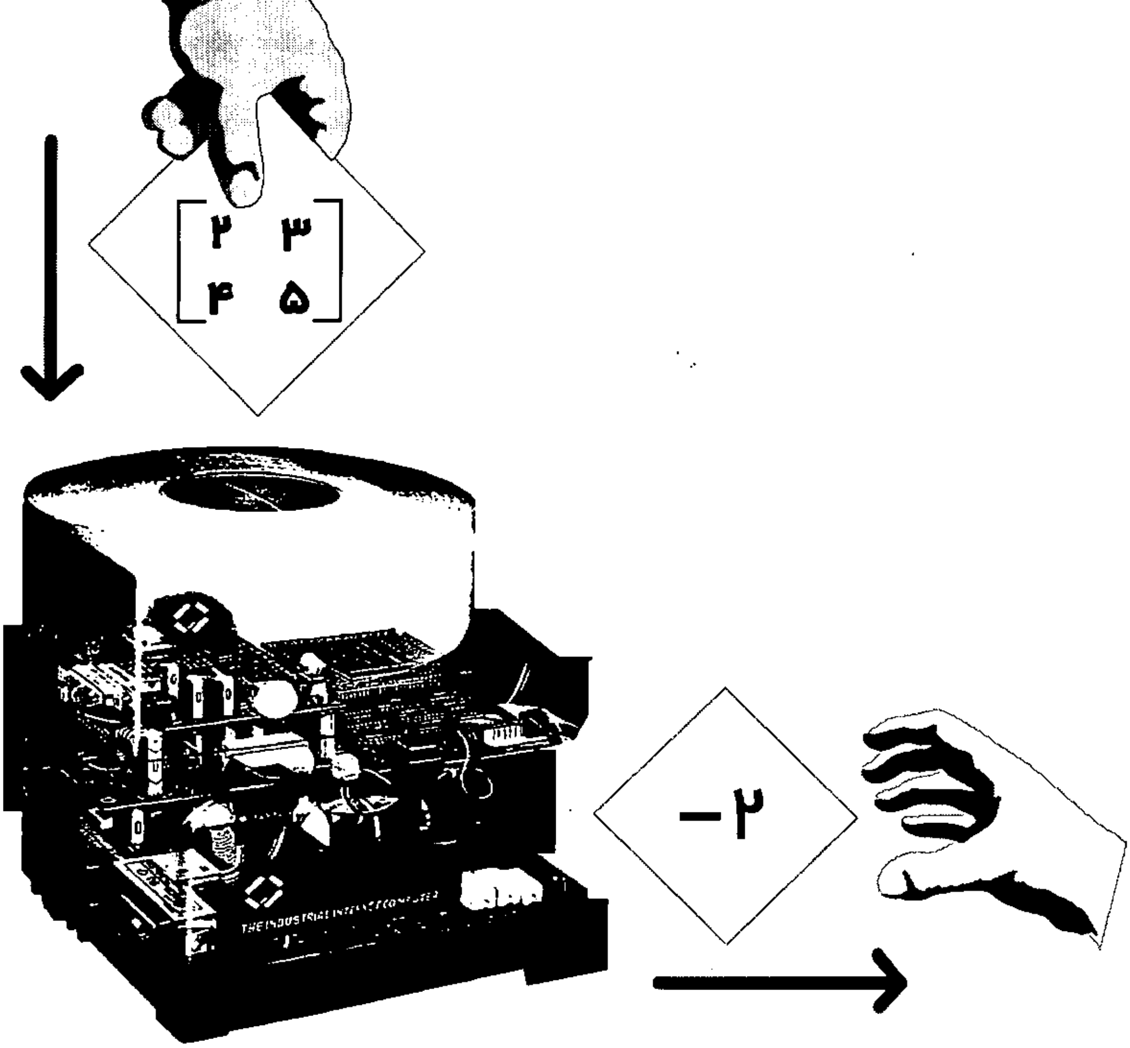
1. fibonacci
2. Viéte
3. Leonardo of Pisa
4. filius Bonacci
5. Hindu-Arabic numerals
6. Rabbit Problem
7. recurrent sequences
8. recurrence process
9. recurrence relation
10. خواننده می‌تواند تفصیلات بیش‌تر مربوط به نظریهٔ عمومی دنباله‌های برگشتی را در کتاب مارکوشویچ (A. I. Marku shevich) بیابد.
11. fibonacci sequence
12. fibonacci numbers
13. alternating sum

ادب ریاضی

یکی از هدف‌های عمدهٔ کتاب‌های کمک‌آموزشی، پرداختن به این مسألهٔ مهم است که ریاضیات به کجا می‌رود؟ برای دانش‌آموز و دانشجو مسألهٔ اول این است که ریاضیات چیست؟ به این مسأله معمولاً پاسخ‌هایی، گرچه ناقص، داده می‌شود و این پاسخ‌ها را می‌توان ضمن بیانات دبیر و استاد و طی مطالب کتاب درسی دریافت. اما معمولاً، به سؤال دوم یعنی، ریاضیات به کجا می‌رود؟ پاسخی در خور داده نمی‌شود و دانشجو و دانش‌آموز ریاضیات، باید پاسخ این پرسش را در کتاب‌های کمک‌آموزشی معتبر یابد.

در تاریخ [illegible] درباره کوشی چنین آمده است

گاووس بزرگ که همواره محزون و ترشروی بود، قسمتی از اکتشافات خود را از دیگران مخفی داشته بود و کوشی، کسی بود که توانست این اکتشافات را از نو به دست آورد و نظریهٔ ریاضی خیره کننده‌ای ارائه دهد، در آن دوران کودک چهارساله‌ای بیش نبود. پدر کوشی که در ادارهٔ پلیس رتبهٔ ستوانی داشت، مردی مقدس و جامع اطلاعات مذهبی و مادرش زنی به تمام معنی باتقوا بود و کوشی این صفت‌های فرشته‌گون را از پدر و مادر آموخت.



حمیدرضا امیری

دترمینان

قضایا، نتایج، نکته ها و مسأله ها

برای دانش آموزان دورهٔ پیش دانشگاهی رشتهٔ ریاضی

به هر ماتریس مربعی می توان عددی حقیقی نسبت داد که «دترمینانِ» آن ماتریس نام دارد. این عدد حقیقی در بسیاری موارد اطلاعات مفیدی دربارهٔ خود ماتریس و خواص آن در اختیار ما قرار می دهد. به عنوان مثال، وارون پذیری یک ماتریس با محاسبهٔ دترمینان آن ماتریس مشخص می شود و یا در بحث ماتریس های تبدیل در صفحه که ۲×۲ هستند، می توان مساحت شکل تبدیل یافته را با استفاده از دترمینان ماتریس تبدیل محاسبه کرد. همچنین در حل دستگاه ها و وجود یا عدم وجود جواب آن ها. حتی در مباحث غیر از ماتریس مانند هندسهٔ تحلیلی، در محاسبهٔ مساحت مثلث و متوازی الاضلاع پدید آمده توسط دو بردار و حجم متوازی السطوح حاصل از سه بردار، حتی تشکیل معادلهٔ صفحه و ضرب خارجی دو بردار، و... می توان از

دترمینان استفاده کرد.

برای تعریف دترمینان یک ماتریس، می‌توان تابعی به نام دترمینان از مجموعهٔ ماتریس‌های $n\times n$ به اعداد حقیقی به‌صورت $\det: M_{n\times n} \to R$ تعریف کرد که ضابطهٔ این تابع روی ماتریس‌های ۱×۱ و ۲×۲ و $n\times n$ $(n \ge ۳)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

I) $A=[s] \Rightarrow \det(A)=|A|=s$

II) $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A)=|A|=ad-bc$

تذکر: برای تعریف $|A|$ برای ماتریس‌های ۳×۳ و به طور کلی $n\times n$ که $n \ge ۳$ است، به تعریف دو نماد و اصطلاح نیاز داریم: یکی «کِهاد» و دیگری «همسازه».

تعریف کهاد

اگر A ماتریسی $n\times n$ باشد، M_{ij} را ماتریس حاصل از حذفِ سطر iام و ستون jام ماتریس A درنظر گرفته و آن را **کهاد** متناظر با درایهٔ a_{ij} از ماتریس A می‌نامیم.

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۲ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}$، در این صورت داریم:

$M_{۲۱}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}$ (سطر دوم و ستونِ اول A حذف شده)

$M_{۳۲}=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix}$ (سطر سوم و ستون دومِ A حذف شده)

تعریف همسازه

اگر A ماتریسی $n\times n$ باشد، **همسازهٔ** نظیر درایهٔ a_{ij} را با A_{ij} نمایش می‌دهیم و به صورت $A_{ij}=(-۱)^{i+j}\times|M_{ij}|$ تعریف می‌کنیم. با توجه به ماتریس A در مثال قبل داریم:

$$A_{۲۱}=(-۱)^{۲+۱}\times|M_{۲۱}|=-۱\times\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۲ & ۲ \end{vmatrix}=-۱\times(-۲)=۲$$

$$A_{۳۲}=(-۱)^{۳+۲}\times|M_{۳۲}|=-۱\times\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۴ & ۶ \end{vmatrix}=-۱\times(-۶)=۶$$

III) اگر A ماتریسی $n\times n$ باشد که $n \ge ۳$ است، دترمینان A برحسب هر سطر یا هر ستون با توجه به ضابطهٔ زیر بسط داده می‌شود که همواره عددی ثابت است.

فرض کنیم:

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱}\, a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱}\, a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & & \\ a_{n۱}\, a_{n۲} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

برای محاسبهٔ $|A|$ برحسب یک سطر (ستون) کافی است هر درایهٔ آن سطر (ستون) را در همسازهٔ نظیرش ضرب و همه را با هم جمع کنیم.

$|A|=a_{۱۱}A_{۱۱}+a_{۱۲}A_{۱۲}+\cdots+a_{۱n}A_{۱n}$ برحسب سطر اول

$|A|=a_{i۱}A_{i۱}+a_{i۲}A_{i۲}+\cdots+a_{in}A_{in}$ برحسب سطر iام

$|A|=a_{۱j}A_{۱j}+a_{۲j}A_{۲j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$ برحسب ستونِ jام

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$، ماتریسی ۳×۳ و دلخواه باشد، داریم:

$|A|=a_{۱۱}A_{۱۱}+a_{۱۲}A_{۱۲}+a_{۱۳}A_{۱۳}$ برحسب سطر اول

$$\Rightarrow |A|=a_{۱۱}\times(-۱)^{۲}\times\begin{vmatrix} a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix}+a_{۱۲}\times(-۱)^{۳}\times\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix}+$$

$$a_{۱۳}\times(-۱)^{۴}\times\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{vmatrix}$$

$|A|=a_{۱۳}A_{۱۳}+a_{۲۳}A_{۲۳}+a_{۳۳}A_{۳۳}$ برحسب ستون سوم

$$\Rightarrow |A| = a_{13}\times(-1)^4\times\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} + a_{23}\times(-1)^5\times\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} +$$

$$a_{33}\times(-1)^6\times\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$$

تذکر : توجه دارید که اگر تمام درایه‌های یک سطر یا یک ستون از ماتریسی مفروض باشند و همسازه‌های نظیر هریک از آن درایه‌ها نیز معلوم باشند، به راحتی می‌توان دترمینان آن ماتریس را به دست آورد.

مثال : اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 4\end{bmatrix}$ ، در این صورت |A| را برحسب سطر اول و سپس برحسب ستون اول بسط دهید و به‌دست آورید.

برحسب سطر اول :

$$|A| = 3\times(-1)^2\times(-4-6)+2\times(-1)^3\times(0-0)+$$
$$1\times(-1)^4\times(0-0) = -30$$

برحسب ستون اول :

$$|A| = 3\times(-1)\times(-4-6)+0\times A_{21}+0\times A_{31} = -30$$

تذکر : با توجه به تعریف دترمینان واضح است که اگر دترمینان یک ماتریس را برحسب سطر یا ستونی که تعداد صفرهای واقع در آن بیش از بقیهٔ سطر و ستون‌ها است بسط دهیم، ساده‌تر و سریع‌تر به جواب خواهیم رسید!

آزمون :

اگر A ماتریسی مربعی از مرتبهٔ ۳ و ستون سوم آن $\begin{bmatrix}4\\3\\2\end{bmatrix}$ باشد و داشته باشیم $A_{13} = -1$ و $A_{23} = 2$ و $A_{33} = 1$ ، در این صورت |A| کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

حل : گزینهٔ (۴). زیرا :

برحسب ستون سوم :

$$|A| = a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33} =$$
$$4\times(-1)+3\times2+2\times1 = 4$$

آزمون :

اگر $A = \begin{bmatrix}|A| & 3\\ 1 & 4|A|\end{bmatrix}$ ، در این صورت حاصل $\left(|A|^2+1\right)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۰ یا ۲

۳) $\frac{13}{4}$ یا ۲ ۴) ۱- یا ۲

حل : گزینهٔ (۳). زیرا : با توجه به تعریف دترمینان ۲×۲

$$|A| = 4|A|^2-3 \Rightarrow 4|A|^2-|A|-3 = 0$$

$$\Rightarrow |A| = 1 \text{ یا } |A| = \frac{-3}{4} \Rightarrow |A|^2 = 1 \text{ یا } |A|^2 = \frac{9}{4}$$

$$|A|^2+1 = 2 \text{ یا } \frac{13}{4}$$

آزمون :

اگر $A = \begin{bmatrix}2 & -1 & 5\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$ و α و β به ترتیب همسازه‌های نظیر a_{21} و a_{32} از ماتریس A باشند، در این صورت $(\alpha+\beta)$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۸

۳) ۱۷ ۴) ۱۱-

حل : گزینهٔ (۱). زیرا :

$$\alpha = A_{21} = (-1)^3\times(-2-5) = 7 \;,\; \beta = (-1)^5\times\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & 1\end{vmatrix} = 13$$

$$\Rightarrow \alpha+\beta = 20$$

دستور ساروس برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های ۳×۳

در این روش که فقط برای ماتریس‌های ۳×۳ قابل استفاده است، ابتدا دو ستونِ سمتِ چپ ماتریس را در کنارش می‌نویسیم. |A| برابر است با مجموع حاصل ضرب‌های درایه‌های واقع بر قطر اصلی و دو خط موازی آن، منهایِ مجموع حاصل ضرب‌های درایه‌های واقع بر قطر فرعی A و دو خط موازی با آن. به صورت زیر:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a & d & g & a & d \\ b & e & h & b & e \\ c & f & i & c & f \end{array}\right.$$

$$|A| = (aei + dhc + gbf) - (gec + ahf + bdi)$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۵ & ۲ \end{bmatrix}$، در این صورت |A| را از دستور ساروس حساب کنید.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} ۲ & -۱ & ۴ & ۲ & -۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ & ۳ & ۲ \\ ۰ & ۵ & ۲ & ۰ & ۵ \end{array}\right.$$

$$|A| = [(۲\times ۲\times ۲) + (-۱\times ۱\times ۰) + (۴\times ۳\times ۵)] -$$
$$[(۴\times ۲\times ۰) + (۲\times ۱\times ۵) + (-۱\times ۳\times ۲)]$$
$$\Rightarrow |A| = ۶۸ - ۴ = ۶۴$$

ویژگی‌های (قضیه‌های) مهم در دترمینان ماتریس‌ها

۱. دترمینان هر ماتریس با دترمینان ترانهادهٔ همان ماتریس برابر است. یعنی:

$$|A| = |A^t|$$

برای بررسی و اثبات قضیهٔ ۱ به نکتهٔ زیر نیاز داریم:

نکته: اگر A ماتریسی $n\times n$ و A^t ترانهادهٔ آن باشد و A_{ij} همسازهٔ نظیر a_{ij} از ماتریس A و A^t_{ij} همسازهٔ نظیر درایهٔ a^t_{ij} از ماتریس A^t باشد، همواره داریم:

$$A_{ij} = A^t_{ij}$$

حال اگر |A| را برحسب سطر iام بسط بدهیم، خواهیم داشت:

$$(۱)\ |A| = a_{i۱}A_{i۱} + a_{i۲}A_{i۲} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

از طرفی می‌دانیم، همواره $a_{ij} = a^t_{ji}$ است و با توجه به نکتهٔ قبل، رابطهٔ (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود که درواقع همان $|A^t|$ برحسب بسط ستونِ iام A^t است.

$$(۱) \Rightarrow |A| = a^t_{۱i}A^t_{۱i} + a^t_{۲i}A^t_{۲i} + \cdots + a^t_{ni}A^t_{ni} = |A^t|$$

۲. دترمینان حاصل ضرب دو ماتریسِ مربعی و هم‌مرتبه برابر است با حاصل ضرب دترمینان‌های آن دو ماتریس. یعنی: $|AB| = |A|\ |B|$

(به علت طولانی بودنِ روش اثبات، از آن صرف‌نظر می‌کنیم و آن را بدون اثبات می‌پذیریم.)

نتیجهٔ ۱: اگر A ماتریسی مربعی از مرتبهٔ n باشد، در این صورت داریم:

$$|AA^t| \geq ۰$$

اثبات:

$$|AA^t| \overset{\text{قضیهٔ ۲}}{=\!=} |A|\ |A^t| \overset{\text{قضیهٔ ۱}}{=\!=} |A|\ |A| = |A|^۲ \geq ۰$$

نتیجهٔ ۲: اگر A و B ماتریس‌های مربعی و هم‌مرتبه باشند، داریم:

$$|AB| = |BA|$$

اثبات: (توجه دارید که در حالت کلی تساوی $AB = BA$ برقرار نیست.)

$$|AB| = |A|\ |B| = |B|\ |A| = |BA|$$

آزمون:

اگر A ماتریسی ۲×۲ باشد، در این صورت کدام ماتریس می‌تواند AA^t باشد؟

۱) $\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$

حل: گزینهٔ (۳). زیرا، ماتریس AA^t دو ویژگی مهم دارد. اول این که باید AA^t متقارن باشد و دوم این که باید $|AA^t| \geq 0$ باشد. با کمی دقت مشاهده می‌کنید فقط ماتریس داده شده در گزینهٔ (۳) هر دو ویژگی را دارد.

آزمون:

اگر A و B ماتریس‌هایی ۲×۲ باشند و $AB = \begin{bmatrix} ۷ & ۱۹ \\ ۱۱ & ۲۲ \end{bmatrix}$ باشد، در این صورت ماتریس BA کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۲ & ۱۱ \\ ۵ & ۰ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۲۰ & ۱۱ \\ ۳ & ۹ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۲ & ۱۳ \\ ۵ & ۵ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۰ & ۵ \\ ۱۱ & ۲۹ \end{bmatrix}$

حل: گزینهٔ (۴). زیرا، اگر AB و BA را در حالت کلی با هم مقایسه کنیم، در دو خاصیت مشترکند. اول این که $|AB| = |BA|$ (که ثابت شد) و دوم این که «حاصل جمع درایه‌های روی قطر اصلیِ AB با حاصل جمع درایه‌های روی قطر اصلی BA برابر است». به عبارت دیگر، $trac(AB) = trac(BA)$ است و فقط گزینهٔ ۴ از هر دو خاصیت برخوردار است.

مسأله:

اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد، به قسمی که $AA^t = ۳I$، در این صورت مقدار $|A|$ را به دست آورید.

$$AA^t = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow |AA^t| = \begin{vmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A|^۲ = ۳^۳ \Rightarrow |A| = \pm ۳\sqrt{۳}$$

نتیجهٔ ۳: اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد، داریم:

$$\forall k \in \mathbb{N} ,\ |A^k| = |A|^k$$

اثبات به استقرا: برای $k = ۱$ تساوی بدیهی است. فرض کنیم تساوی به ازای m برقرار باشد، یعنی $|A^m| = |A|^m$. برای $m+۱$ تساوی را ثابت می‌کنیم:

$$|A^{m+۱}| = |A^m \times A| = |A^m|\,|A| \overset{\text{فرض}}{=} |A|^m \times |A| = |A|^{m+۱}$$

۳. دترمینان هر ماتریس بالا مثلثی یا پائین‌مثلثی برابر است با حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی. یعنی:

$$\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & & a_{۱n} \\ ۰ & a_{۲۲} & \cdots & & a_{۲n} \\ ۰ & ۰ & a_{۳۳} & \cdots & a_{۳n} \\ \vdots & & & & \\ ۰ & ۰ & \cdots & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{۱۱} \times a_{۲۲} \times a_{۳۳} \times \ldots \times a_{nn}$$

اثبات به استقراءِ روی مرتبهٔ ماتریس

اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ ۰ & c \end{bmatrix}$ باشد که واضح است $|A| = ac$.

حال فرض کنیم، حکم برای هر ماتریس از مرتبهٔ k برقرار باشد، ثابت می‌کنیم برای ماتریسی از مرتبهٔ $(k+۱)$ نیز برقرار است: (فرض می‌کنیم $k+۱ = \alpha$)

$$\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱\alpha} \\ ۰ & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲\alpha} \\ \vdots & & & \\ ۰ & ۰ & \cdots & a_{\alpha\alpha} \end{vmatrix} \overset{\text{بر حسب ستون اول}}{=\!=} a_{۱۱} \begin{vmatrix} a_{۲۲} & a_{۲۳} & \cdots & a_{۲\alpha} \\ ۰ & a_{۳۳} & \cdots & a_{۳\alpha} \\ ۰ & & & \\ \vdots & & & \\ ۰ & ۰ & \cdots & a_{\alpha\alpha} \end{vmatrix}$$

$$= a_{۱۱} \times (a_{۲۲} \times a_{۳۳} \times \ldots \times a_{\alpha\alpha})$$

(دترمینان اخیر، دترمینان یک ماتریس $k \times k$ است که طبق فرض استقراء حاصل آن برابر است با حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی.)

نتیجهٔ ۴: اگر A ماتریسی قطری باشد (هم بالا مثلثی و هم پائین مثلثی است)، در این صورت دترمینان A برابر است با حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلیِ آن. و خصوصاً اگر A ماتریسی اسکالر از مرتبهٔ n باشد و داشته

باشیم $a_{ii} = \lambda$ ، در این صورت $|A| = \lambda^n$ است و چون I (ماتریس همانی یا واحد) اسکالر و $a_{ii} = 1$ است، پس همواره $|I| = 1$ خواهد بود.

۴ . هرگاه یک سطر یا یک ستون ماتریسی در عدد حقیقی k ضرب شود، در این صورت دترمینان آن ماتریس در عدد k ضرب می‌شود، یعنی:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

اثبات: فرض کنیم، ماتریس A مربعی از مرتبهٔ n و عدد k در سطر iام A ضرب شود و ماتریس حاصل را B بنامیم، ثابت می‌کنیم $|B| = k|A|$

برحسب سطر iام:

$$|B| = k a_{i1}A_{i1} + ka_{i2}A_{i2} + \dots + ka_{in}A_{in}$$
$$= k(a_{i1}A_{i1} + \dots + a_{in}A_{in}) = k|A|$$

تذکر: قضیهٔ فوق به‌راحتی این امکان را به ما می‌دهد که در یک دترمینان در هر سطر یا ستون از عددی فاکتور گرفت یا اگر یک عدد در یک دترمینان ضرب شده باشد، بتوان برحسب نیاز آن را به داخل دترمینان برد و فقط در یک سطر یا یک ستون ضرب کرد.

نتیجهٔ ۵: اگر k عددی حقیقی و A ماتریسی $n \times n$ باشد، در این صورت داریم:

$$|KA| = k^n|A|$$

اثبات: ماتریس KA ماتریسی است که از ضرب عدد k در تمام سطرهای A به دست می‌آید. حال برای محاسبهٔ $|KA|$ می‌توان از هر سطر KA عدد حقیقی k را فاکتور گرفت و چون n سطر دارد، پس عدد $k^n|A|$ حاصل می‌شود. به روش دیگری نیز می‌توان این قضیه را ثابت کرد:

((KI) ماتریسی اسکالر است)

$$KI = \begin{bmatrix} K & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & K \end{bmatrix} \Rightarrow |KI| = K^n$$

از طرف دیگر:

$$KA = (KI)A \Rightarrow |KA| = |(KI)A| = |KI||A| = k^n|A|$$

نتیجهٔ ۶: اگر A ماتریسی پادمتقارن از مرتبهٔ n و n فرد باشد، آن‌گاه $|A| = 0$.

اثبات:

$$\text{پادمتقارن } A \Rightarrow A^t = -A \Rightarrow |A^t| = |-A| = |(-1)A|$$
$$= (-1)^n|A| = -|A| \quad (\text{n فرد است})$$
$$\Rightarrow |A^t| = -|A| \overset{\text{قضیهٔ ۱}}{\Rightarrow} |A| = -|A| \Rightarrow 2|A| = 0 \Rightarrow |A| = 0$$

نکته: دترمینان هر ماتریس پادمتقارن از مرتبهٔ زوج، عددی مربع کامل است.

آزمون:

اگر A ماتریسی 3×3 و $|A| = a$ باشد، در این صورت حاصل $|||A|A|A|$ کدام است؟

۱) a^{10} ۲) a^{13}

۳) a^{15} ۴) a^{11}

حل: گزینهٔ (۲). زیرا:

$$|||A|A|A| = ||aA|A| = |a^3|A|A|$$
$$= |a^3 \times aA| = |a^4A| = (a^4)^3; |A| = a^{12} \times a = a^{13}$$

آزمون:

معادلهٔ $\begin{vmatrix} 0 & x^2-1 & y^2+1 \\ 1 & 0 & 2z \\ -10 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0$ مفروض است،

اگر x و y و z یک دسته جواب برای این معادله باشند، (x+y+z) کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۵-　　　۲) ۲

۳) ۰　　　۴) ۱-

حل: گزینه (۱). زیرا، می‌دانیم دترمینان هر ماتریس پادمتقارن از مرتبهٔ فرد، همواره صفر است. پس اگر $x^2 - 1 = -1$ و $y^2 + 1 = 10$ و $2z = 4$ باشد، ماتریس پادمتقارن شده و دترمینان آن صفر است. پس باید $x = 0$ و $y = \pm 3$ و $z = 2$ باشد که در این صورت داریم:

$(x+y+z) = 5$ یا $(x+y+z) = -1$

۵. اگر ماتریسی یک سطر یا یک ستون صفر داشته باشد، آن‌گاه دترمینان آن ماتریس صفر است.

اثبات: فرض کنیم، سطر iام ماتریس A از مرتبهٔ n صفر باشد. در این صورت اگر |A| را برحسب سطر iام A بسط دهیم، خواهیم داشت:

$$|A| = 0\times A_{i1} + 0\times A_{i2} + \dots + 0\times A_{in} = 0+0+\dots+0 = 0$$

نتیجهٔ ۷: دترمینان ماتریس مربعی صفر، صفر است.

۶. اگر در ماتریسی جای دو سطر را با هم و یا جای دو ستون را با هم عوض کنیم، آن‌گاه دترمینانِ ماتریس حاصل قرینهٔ ماتریس قبل خواهد بود.

راهنمایی اثبات: کافی است دو سطر iام و tام A را با هم جابه‌جا کنیم و ماتریس حاصل را B بنامیم. سپس |A| را برحسب سطر iام و |B| را برحسب سطر tام به دست آوریم (ابتدا دو سطر مجاور را با هم جابه‌جا و بعد در حالت کلی قضیه را اثبات کنید).

۷. اگر در یک ماتریس مربعی دو سطر یا دو ستون برابر وجود داشته باشد، آن‌گاه دترمینان آن ماتریس صفر است.

اثبات: فرض کنیم A ماتریسی $n\times n$ بوده و سطر iام آن با سطر jام آن برابر باشد. اگر جای این دو سطر را با هم عوض کنیم، ماتریس تغییر نمی‌کند و فقط دترمینان آن قرینه می‌شود. پس:

$$|A| = -|A| \Rightarrow 2|A| = 0 \Rightarrow |A| = 0$$

نتیجهٔ ۸: اگر در ماتریس مربعی A یک سطر مضربی از سطر دیگر یا یک ستون مضربی از ستونِ دیگر باشد، آن‌گاه $|A| = 0$.

اثبات: اگر در ماتریس A سطر kام، λ برابر سطر iام باشد، برای محاسبهٔ |A| از λ در سطر kام فاکتور می‌گیریم و λ را در دترمینان ماتریسی ضرب می‌کنیم که دو سطر برابر دارد و طبق قضیهٔ ۷، دترمینان این ماتریس صفر است و $\lambda \times 0 = 0$ خواهد شد.

مسأله:

ثابت کنید:

$$A = \begin{vmatrix} 3a & 4b & 5a \\ 3d & e & 5d \\ 3g & 2h & 5g \end{vmatrix} = 0$$

حل: در ستون اول از ۳ و در ستونِ سوم از ۵ فاکتور می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$|A| = 3\times 5 \begin{vmatrix} a & 4b & a \\ d & e & d \\ g & 2h & g \end{vmatrix} = 15\times 0 = 0$$

مسأله:

ثابت کنید:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2x^2-2 & x^2 & x+1 \\ 2x^3-2 & x^3 & x^2+x+1 \\ 2x^4-2 & x^4 & x^3+x^2+x+1 \end{vmatrix} = 0$$

حل: در ستون اول از $(x-1)$ فاکتور می‌گیریم که

حاصل مضربی (۲ برابر) از ستون سوم می‌شود:

$$|A|=(x-۱)\begin{vmatrix} ۲(x+۱) & x^{۲} & x+۱\\ ۲(x^{۲}+x+۱) & x^{۳} & x^{۲}+x+۱ \\ ۲(x^{۳}+x^{۲}+x+۱) & x^{۴} & x^{۳}+x^{۲}+x+۱\end{vmatrix}$$
$$=(x-۱)\times ۰=۰$$

مسأله:

ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} bc & a^{۲} & a^{۲}\\ b^{۲} & ac & b^{۲}\\ c^{۲} & c^{۲} & ab\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} bc & ab & ac\\ ab & ac & bc\\ ac & bc & ab\end{vmatrix}$$

حل: (برای حل چنین مسائلی از یک طرف به طرف دیگر می‌رسیم.) در دترمینان سمت راست، a در سطر اول و b در سطر دوم و c در سطر سوم ضرب می‌کنیم. سپس برای این که تغییری پدید نیامده باشد، کل دترمینان را بر abc تقسیم می‌کنیم. پس:

$$\text{سمت راست}\quad \frac{۱}{abc}\begin{vmatrix} abc & a^{۲}b & a^{۲}c\\ ab^{۲} & abc & b^{۲}c\\ ac^{۲} & bc^{۲} & abc\end{vmatrix}$$

(حال به ترتیب از ستون‌های اول، دوم و سوم از a، b و c فاکتور می‌گیریم)

$$=\frac{abc}{abc}\begin{vmatrix} bc & a^{۲} & a^{۲}\\ b^{۲} & ac & b^{۲}\\ c^{۲} & c^{۲} & ab\end{vmatrix}\leftarrow \text{سمت چپ}$$

۸. اگر A و B و C سه ماتریس مربعی و هم‌مرتبه باشند، به طوری که سطر (ستون) iام A مساوی با مجموع سطرهای (ستون‌های) iام ماتریس‌های B و C باشد و سایر سطرهای (ستون‌های) سه ماتریس برابر باشند، در این صورت داریم:

$$|A|=|B|+|C|$$

به عنوان مثال، اگر A و B و C سه ماتریس ۳×۳ باشند، می‌توان نوشت:

$$\begin{vmatrix} a+b & c+d & e+f\\ a' & b' & c'\\ d' & e' & f'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & d & e\\ a' & b' & c'\\ d' & e' & f'\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & c & f\\ a' & b' & c'\\ d' & e' & f'\end{vmatrix}$$

(اثبات برای ماتریس‌های ۳×۳ به راحتی از محاسبهٔ طرفین تساوی حاصل می‌شود).

اثبات: |A| را برحسب سطر iام بسط می‌دهیم و محاسبه می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$|A|=a_{i۱}A_{i۱}+\dots+a_{in}A_{in}=(b_{i۱}+c_{i۱})A_{i۱}+\dots+(b_{in}+c_{in})A_{in}$$
$$=(b_{i۱}A_{i۱}+\dots+b_{in}A_{in})+(c_{i۱}A_{i۱}+\dots+c_{in}A_{in})=|B|+|C|$$

مسأله:

بدون بسط ثابت کنید:

$$|A|=\begin{vmatrix} ۳ & ۴ & ۵ & ۶\\ ۲ & ۲ & ۲ & ۲\\ ۴ & ۶ & ۸ & ۱۰\\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱\end{vmatrix}=۰$$

حل: درایه‌های سطر اول را به صورت [۱+۵ ۱+۴ ۱+۳ ۱+۲] می‌نویسیم و از قضیهٔ ۸ استفاده می‌کنیم:

$$|A|=\begin{vmatrix} ۲ & ۳ & ۴ & ۵\\ ۲ & ۲ & ۲ & ۲\\ ۴ & ۶ & ۸ & ۱۰\\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱\\ ۲ & ۲ & ۲ & ۲\\ ۴ & ۶ & ۸ & ۱۰\\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱\end{vmatrix}=۰+۰=۰$$

(در دترمینان سمت چپ، سطر سوم دو برابر سطر اول است و در دترمینان سمت راست، سطر دوم دو برابر سطر اول است.)

آزمون :

حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$k=\begin{vmatrix}2&3&4\\5&2&-1\\3&-2&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&4&3\\5&-1&2\\3&1&-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}6&3&5\\4&2&-1\\1&1&2\end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix}6&7&5\\4&-4&-1\\1&3&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&0&-1\\3&4&0\\2&0&0\end{vmatrix}$$

۱) ۸- ۲) ۸

۳) ۰ ۴) ۱-

حل : گزینهٔ (۲). زیرا:

$$k=\underbrace{\begin{vmatrix}2&3&4\\5&2&-1\\3&-2&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&3&4\\5&2&-1\\3&-2&1\end{vmatrix}}+\underbrace{\begin{vmatrix}6&10&5\\4&-2&-1\\1&4&2\end{vmatrix}}+(8)$$

$$=0+0+(8)=8$$

(در دترمینان دوم جای دو ستون دوم و سوم عوض شده و دو دترمینان سوم و چهارم به صورت یک دترمینان نوشته شده است.)

۹ . هرگاه مضربی از یک سطر (ستون) A را به سطر (ستون) دیگری از A اضافه کنیم، دترمینان ماتریس حاصل با دترمینان A برابر است. به عنوان مثال، در ماتریس‌های ۳×۳ داریم: (سطر را با R و ستون را با C نمایش می‌دهیم.)

$$\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}\xlongequal{kR_2+R_3}\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g+kd&h+ke&i+kf\end{vmatrix}$$

(k برابر سطر دوم را به سطر سوم اضافه کرده‌ایم و دترمینان تغییر نمی‌کند.)

اثبات : فرض کنیم A ماتریسی مربعی از مرتبهٔ n باشد. اگر k برابر سطر iام A را به سطر jام آن اضافه کنیم و ماتریس حاصل را B بنامیم، ثابت می‌کنیم: $|A|=|B|$.

$$\begin{array}{r}\\ \\ \text{سطر iام}\\ |B|=\\ \text{سطر jام}\\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\ka_{i1}+a_{j1}&\cdots&&ka_{in}+a_{jn}\\\vdots&&&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\xlongequal[\text{قضیه ۸}]{}\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{i1}&\cdots&a_{in}\\\vdots&&\vdots\\ka_{i1}&\cdots&ka_{in}\\\vdots&&\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{i1}&\cdots&a_{in}\\\vdots&&\vdots\\a_{j1}&\cdots&a_{jn}\\\vdots&&\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=0+|A|=|A|$$

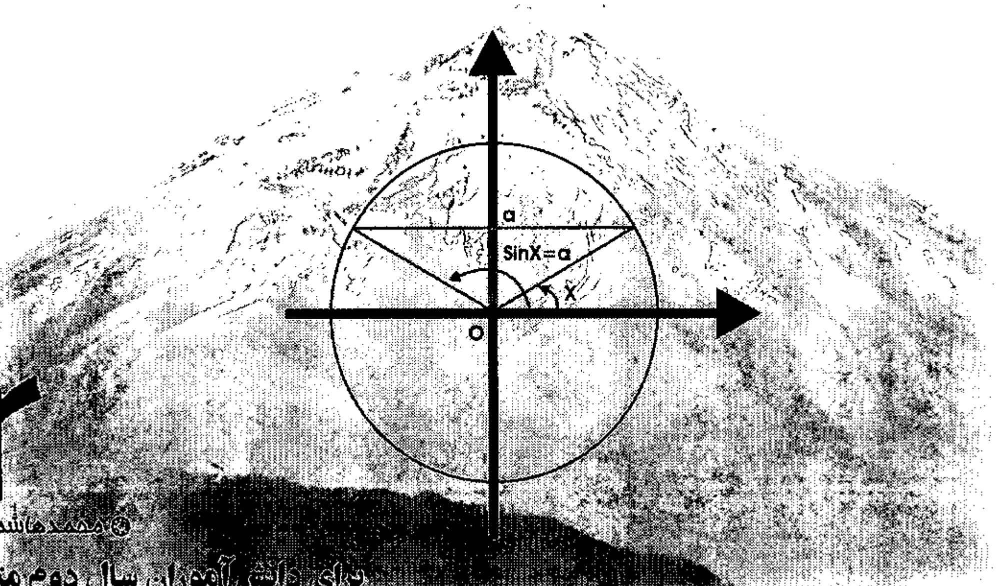
مسأله :

ثابت کنید:

$$|A|=\begin{vmatrix}16&15&14&13\\12&11&10&9\\8&7&6&5\\4&3&2&1\end{vmatrix}=0$$

حل : اگر هر سطر یا هر ستون را به دو سطر (یا دو ستون) بعد یا قبل از خودش بیفزاییم، مضربی از سطر (یا ستون) بین آن‌ها به دست می‌آید:

$$|A|\xlongequal{R_1+R_3}\begin{vmatrix}16&15&14&13\\12&11&10&9\\24&22&20&18\\4&3&2&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}16&15&14&13\\12&11&10&9\\12&11&10&9\\4&3&2&1\end{vmatrix}=2\times0=0$$



محمد هاشم رستمی

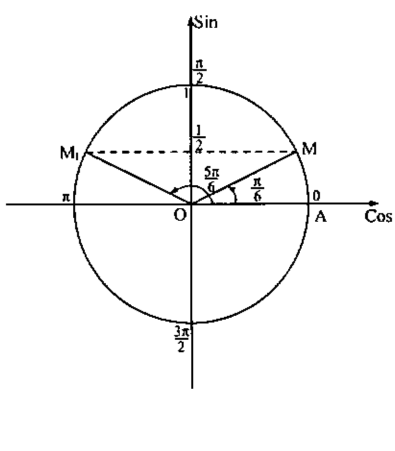
برای دانش آموزان سال دوم متوسطه

در شمارهٔ قبل حل معادلهٔ سادهٔ مثلثاتی $SinX = a(-1 \le a \le 1)$ را دیدیم. اینک چند مثال دیگر از حل این معادله و آزمون‌هایی از کنکورهای سراسری و دانشگاه آزاد که به این معادله مربوطند، ارائه می‌شوند. تست‌ها به صورت تشریحی حل شده و نکته‌های کلیدی مربوط به هر تست نیز بیان شده‌اند. در بخش آخر این قسمت، مسأله‌هایی برای حل ارائه شده‌اند تا دانش‌آموزان بتوانند میزان فراگیری خود را بسنجند. پاسخ این مسأله‌ها نیز آمده است.

حلّ معادله های مثلثاتی

مثال:

اگر $\frac{1}{2} < Sinx \le 1$ باشد، حدود x را در بازهٔ $[0,2\pi]$ تعیین کنید.



حل: تغییرات Sinx را وقتی x از صفر تا 2π تغییر می‌کند، بررسی می‌کنیم. می‌دانیم که $Sin\frac{\pi}{2} = 1$ و $\frac{1}{2} = Sin\frac{\pi}{6} = Sin\frac{5\pi}{6}$ هستند. با توجه به این‌که $Sinx \le 1$ است، $x = \frac{\pi}{2}$ در دامنهٔ تغییرات x قرار دارد. از طرفی $Sinx > \frac{1}{2}$ است. بنابراین $x > \frac{\pi}{6}$ یا $x < \frac{5\pi}{6}$ است. یعنی با فرض $\overline{AM} = \frac{\pi}{6}$ و $\overline{AM_1} = \frac{5\pi}{6}$، انتهای کمان x می‌تواند روی کمان MM_1 تغییر مکان دهد. باید توجه داشت که وقتی $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6} \le x \le 2\pi$ باشد،

$\frac{1}{2} \le \sin x$ است. بنابراین حدود x به یکی از صورت‌های زیر می‌تواند باشد:

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6} \quad \text{و} \quad \frac{\pi}{2} \le x < \frac{5\pi}{6} \quad \text{و} \quad \frac{\pi}{6} < x \le \frac{\pi}{2}$$

مثال:

اگر $\frac{1}{2} < \sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}) \le 1$ باشد، حدود x را در بازهٔ $[0, 2\pi]$ تعیین کنید.

حل: با فرض $\alpha = \frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}$، داریم $\frac{1}{2} < \sin\alpha \le 1$.

بنابراین بنا به مثال بالا، خواهیم داشت:

$$\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{5\pi}{6} \quad \text{و} \quad \frac{\pi}{2} \le \alpha < \frac{5\pi}{6} \quad \text{و} \quad \frac{\pi}{6} < \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

اکنون به جای α مقدار $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}$ را قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$\frac{\pi}{6} < \frac{x}{2}+\frac{\pi}{3} \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{-\pi}{6} < \frac{x}{2} \le \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{-\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{2} \le \frac{x}{2}+\frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{6} \le \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3} < x < \pi$$

$$\frac{\pi}{6} < \frac{x}{2}+\frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{-\pi}{6} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{-\pi}{3} < x < \pi$$

مثال:

به‌ازای چه مقادیری از a با شرط $\frac{\pi}{3} < x \le \frac{4\pi}{3}$، نامساوی مضاعف $a-2 \le \sin 2x \le 2a+3$ برقرار است؟

حل: داریم:

$$\frac{\pi}{3} < x \le \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} < 2x \le \frac{8\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3}$$

چون انتهای کمان $\frac{8\pi}{3}$ و انتهای کمان $\frac{2\pi}{3}$ برهم منطبقند، پس تغییرات زاویهٔ $2x$ شامل یک دور کامل دایره است، بنابراین $-1 \le \sin x \le +1$ خواهد بود و خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 2a+3 \ge 1 \\ a-2 \le -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a \ge -2 \\ a \le +2-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \ge -1 \\ a \le 1 \end{cases} \Rightarrow -1 \le a \le 1$$

آزمون ۱:

برای آن که $\sin x = 2a - 3$ گزاره‌ای درست باشد، حدود a کدام است؟

۱) $1 \le a < 2$ ۲) $1 < a \le -2$

۳) $1 \le a \le 2$ ۴) $1 < a < 2$

حل: گزینهٔ (۳) درست است، زیرا داریم:

$$-1 \le 2a-3 \le +1 \Rightarrow -1+3 \le 2a-3+3 \le +1+3$$
$$\Rightarrow 2 \le 2a \le 4 \Rightarrow 1 \le a \le 2$$

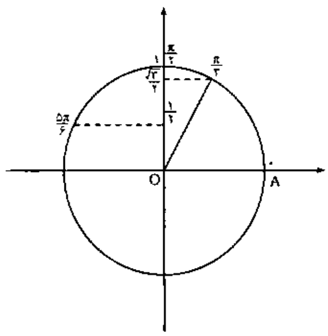
آزمون ۲:

با فرض $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{6}$، $\sin x = \frac{3-m^2}{3+m^2}$، مقادیر m در کدام فاصله است؟

۱) $|m| < \sqrt{3}$ ۲) $|m| < \sqrt{2}$

۳) $|m| < 1$ ۴) $|m| < \frac{1}{2}$

حل: گزینهٔ (۳) درست است. وقتی x از $\frac{\pi}{3}$ تا $\frac{5\pi}{6}$ تغییر می‌کند، $\sin x$ از $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ شروع به زیاد شدن می‌کند و هنگامی‌که $x = \frac{\pi}{2}$ شود، $\sin x = 1$ خواهد بود. اکنون وقتی x از $\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{5\pi}{6}$ تغییر کند، $\sin x$ از $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ تا $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ تغییر خواهد کرد. اما چون $x < \frac{5\pi}{6}$ است، پس $\sin x > \frac{1}{2}$ خواهد بود. بنابراین $\frac{1}{2} < \sin x \le 1$.



درنتیجه می‌توان نوشت :

$$\frac{۱}{۲} < \sin x \le ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲} < \frac{۳-m^{۲}}{۳+m^{۲}} \le ۱ \Rightarrow \begin{cases} \frac{۳-m^{۲}}{۳+m^{۲}} > \frac{۱}{۲} \\ \frac{۳-m^{۲}}{۳+m^{۲}} \le ۱ \end{cases}$$

نامعادلهٔ دوم این دستگاه همواره برقرار است، زیرا با توجه به مثبت بودن $۳+m^{۲}$ ، می‌توان نوشت :
که همواره درست است.

$$۳-m^{۲} \le ۳+m^{۲} \Rightarrow -m^{۲} \le m^{۲} \Rightarrow ۲m^{۲} \ge ۰$$

بنابراین جواب دستگاه، جواب نامعادلهٔ اول آن است.
برای حل این نامعادله با توجه به این‌که $۳+m^{۲}$ همواره مثبت است، داریم :

$$۶-۲m^{۲} > ۳+m^{۲} \Rightarrow ۳m^{۲} < ۳ \Rightarrow m^{۲} < ۱ \Rightarrow |m| < ۱$$

آزمون ۳ :

اگر $\frac{\pi}{۴} \le x \le \frac{۵\pi}{۶}$ و $\sin x = m+۱$ باشد، حدود m کدام است؟

۱) $۰ \le m < \frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲} \le m \le ۱$

۳) $\frac{-\sqrt{۳}}{۲} < m \le ۱$ ۴) $\frac{-۱}{۲} \le m \le ۰$

حل : گزینهٔ (۴) درست است، زیرا داریم :

$$\sin\frac{\pi}{۲} = ۱ \text{ و } \sin\frac{۵\pi}{۶} = \frac{۱}{۲} \text{ و } \sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{۴} \le x \le \frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow \frac{۱}{۲} \le \sin x \le ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲} \le m+۱ \le ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} - ۱ \le m \le ۱-۱ \Rightarrow -\frac{۱}{۲} \le m \le ۰$$

آزمون ۴ :

اگر $\frac{-\sqrt{۲}}{۲} < \sin ۲x < ۱$ باشد، حدود x کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{۸} < x < \frac{\pi}{۸}$ ۲) $-\frac{\pi}{۸} < x < \frac{\pi}{۴}$

۳) $۰ \le x \le \frac{\pi}{۴}$ ۴) $-\frac{\pi}{۸} \le x < \frac{\pi}{۴}$

حل : گزینهٔ (۲) درست است. برای گزینه‌های داده‌شده داریم :

۱) $-\frac{\pi}{۴} < ۲x < \frac{\pi}{۴}$ ۲) $-\frac{\pi}{۴} < ۲x < \frac{\pi}{۲}$

۳) $۰ \le ۲x \le \frac{\pi}{۲}$ ۴) $-\frac{\pi}{۴} \le ۲x \le \frac{\pi}{۲}$

با توجه به نامساوی داده شده و این‌که $\sin\frac{\pi}{۲} = ۱$ و $\sin(-\frac{\pi}{۴}) = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است، تنها گزینهٔ (۲) جواب است.

آزمون ۵ :

اگر $\frac{۱}{۲} \le \sin(\frac{x}{۲}+\frac{\pi}{۶}) < ۱$ باشد، حدود x کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۳} \le x < \frac{۴\pi}{۳}$ ۲) $۰ < x < \pi$

۳) $\frac{\pi}{۲} < x < \frac{۵\pi}{۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۶} < x < \frac{۴\pi}{۳}$

حل : گزینهٔ (۱) درست است. با استفاده از گزینه‌ها حدود $\frac{x}{۲}+\frac{\pi}{۶}$ و سپس حدود سینوس آن را مشخص می‌کنیم. داریم :

$$۱) \frac{\pi}{۳} \le x < \frac{۴\pi}{۳} \Rightarrow \frac{\pi}{۶} \le \frac{x}{۲} < \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow \frac{\pi}{۶}+\frac{\pi}{۶} < \frac{x}{۲}+\frac{\pi}{۶} < \frac{۲\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{3} \le \frac{x}{2}+\frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} < \operatorname{Sin}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}) \le 1 =$$

بنابراین گزینهٔ (۱) جواب است. بدیهی است، جواب نبودن گزینه‌های دیگر را می‌توان بررسی کرد، اما لازم نیست.

نکته:

وقتی زاویهٔ $\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}$ از $\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{5\pi}{6}$ تغییر می‌کند، حداکثر مقدار سینوس آن $\operatorname{Sin}\frac{\pi}{2} = 1$ و حداقل مقدارش $\operatorname{Sin}\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ است.

آزمون ۶:

جواب کلی معادلهٔ $\operatorname{Sin}(x-\frac{\pi}{3}) = \operatorname{Sin}(x+\frac{2\pi}{3})$ کدام است؟

۱) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ ۲) $k\pi + \frac{2\pi}{3}$

۳) $2k\pi - \frac{\pi}{3}$ ۴) $2k\pi + \frac{2\pi}{3}$

حل: گزینهٔ (۱) درست است. این معادله، یک معادلهٔ سادهٔ مثلثاتی است و داریم:

$$\operatorname{Sin}(x-\frac{\pi}{3}) = \operatorname{Sin}(x+\frac{2\pi}{3}) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x-\frac{\pi}{3} = 2k\pi + x + \frac{2\pi}{3} \\ x-\frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - (x+\frac{2\pi}{3}) \end{array} \right.$$

ممتنع

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} 0 \times x = 2k\pi + \pi \\ 2x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3} \end{array} \right.$$ جواب کلی معادله

آزمون ۷:

معادلهٔ $\operatorname{Sin}3x = \operatorname{Cos}x$ در فاصلهٔ $0 \le x \le \pi$ چند ریشه دارد؟

۱) یک ۲) سه

۳) دو ۴) چهار

حل: گزینهٔ (۲) درست است. این معادله را به معادله‌ای ساده به صورت $\operatorname{Sin}x = \operatorname{Sin}\alpha$ تبدیل می‌کنیم. آن‌گاه با حل آن، نخست جواب‌های عمومی و سپس جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $[0,\pi]$ را به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$\operatorname{Sin}3x = \operatorname{Cos}x \Rightarrow \operatorname{Sin}3x = \operatorname{Sin}(\frac{\pi}{2}-x) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \\ 3x = 2k\pi + \pi - (\frac{\pi}{2}-x) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{4} \end{array} \right.$$

k	x
۰	$\frac{\pi}{8}$ ، ج $\frac{\pi}{4}$ ج
۱	$\frac{5\pi}{8}$ ، ج $\pi+\frac{\pi}{4} > \pi$
۲	$\pi+\frac{\pi}{8} > \pi,\ 2\pi+\frac{\pi}{4} > \pi$

به‌طوری که دیده می‌شود، معادلهٔ داده‌شده تنها سه جواب $x = \frac{\pi}{8}$ ، $x = \frac{\pi}{4}$ و $x = \frac{5\pi}{8}$ را در بازهٔ $[0,\pi]$ داراست. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

آزمون ۸ :

یکی از جواب‌های معادلهٔ $\mathrm{Sin}(3x+\frac{\pi}{3})=\mathrm{Sin}2x$ کدام است؟

۱) $\frac{4\pi}{15}$ ۲) $\frac{\pi}{15}$

۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{8\pi}{15}$

حل : گزینهٔ (۴) درست است.

راه اول : راه کلی : شرط آن که مقداری از x جواب یک معادله (برحسب x) باشد، آن است که در آن معادله صدق کند. بنابراین جواب‌های داده‌شده را در معادله قرار می‌دهیم. هر کدام که در معادله صدق کند، جواب مورد نظر است. بدیهی است که اگر یکی از مقدارهای داده‌شده در گزینه‌ها، در معادله صدق کند، دیگر لازم نیست مقدارهای دیگر داده‌شده در گزینه‌ها را در معادله قرار دهیم.

$$x=\frac{4\pi}{15}\xrightarrow{\text{در معادله}}\mathrm{Sin}(\frac{12\pi}{15}+\frac{\pi}{3})\neq\mathrm{Sin}\frac{8\pi}{15}\Rightarrow\mathrm{Sin}\frac{17\pi}{15}\neq\mathrm{Sin}\frac{8\pi}{15}$$

تساوی برقرار نیست

$$x=\frac{\pi}{15}\xrightarrow{\text{در معادله}}\mathrm{Sin}(\frac{3\pi}{15}+\frac{\pi}{3})=\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{15}\Rightarrow\mathrm{Sin}\frac{8\pi}{15}\neq\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{15}$$

تساوی برقرار نیست

$$x=\frac{\pi}{3}\xrightarrow{\text{در معادله}}\mathrm{Sin}(\pi+\frac{\pi}{3})=\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\mathrm{Sin}\frac{4\pi}{3}=\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{3}$$

تساوی برقرار نیست

$$x=\frac{8\pi}{15}\xrightarrow{\text{در معادله}}\mathrm{Sin}(\frac{8\pi}{5}+\frac{\pi}{3})=\mathrm{Sin}\frac{16\pi}{15}\Rightarrow\mathrm{Sin}\frac{29\pi}{15}=\mathrm{Sin}\frac{16\pi}{15}$$

$$\Rightarrow\mathrm{Sin}(2\pi-\frac{\pi}{15})=\mathrm{Sin}(\pi+\frac{\pi}{15})\Rightarrow\mathrm{Sin}(-\frac{\pi}{15})=-\mathrm{Sin}\frac{\pi}{15}$$

تساوی برقرار است

بنابراین جواب معادله $x=\frac{8\pi}{15}$ است.

نکته :

اگر ابتدا $x=\frac{8\pi}{15}$ را در معادله قرار می‌دادیم و جواب بودن آن مشخص می‌شد، دیگر نیازی به قرار دادن مقدارهای دیگر داده‌شده در معادله، نبود.

راه دوم : معادله را حل و جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $[0,\pi]$ را مشخص می‌کنیم.

$$\mathrm{Sin}(3x+\frac{\pi}{3})=\mathrm{Sin}2x\Rightarrow\begin{cases}3x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+2x\\3x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\pi-2x\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=2k\pi-\frac{\pi}{3}\\x=\frac{2k\pi}{5}+\frac{2\pi}{15}\end{cases}$$

k	x	
۰	$-\frac{\pi}{3}<0,$	$\frac{2\pi}{15}$
۱	$\frac{5\pi}{3},$	$\frac{8\pi}{15}$

طوری که دیده می‌شود، $x=\frac{8\pi}{15}$ جواب معادله است.

آزمون ۹ :

به‌ازای کدام مقدار a، $x=\frac{3\pi}{4}$، یکی از ریشه‌های معادلهٔ $a\,\mathrm{Sin}(2x-\frac{\pi}{4})-1=0$ است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) 1

۳) $-\sqrt{2}$ ۴) -1

حل: گزینهٔ (۳) درست است. $x=\frac{3\pi}{4}$ باید در معادله صدق کند. داریم:

$$x=\frac{3\pi}{4}\xrightarrow{\text{در معادله}}a\sin(2\times\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4})-1=0\Rightarrow$$

$$a\sin(\frac{5\pi}{4})-1\Rightarrow a\times\frac{-\sqrt{2}}{2}=1\Rightarrow a=\frac{2}{-\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$$

آزمون ۱۰:

مجموع جواب‌های بین ۰ و π ی معادلهٔ $2\sin 2x-\sqrt{2+\sqrt{2}}=0$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{7\pi}{16}$

۳) $\frac{5\pi}{16}$ ۴) $\frac{7\pi}{8}$

حل: گزینهٔ (۱) درست است. جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $[0,\pi]$ و سپس مجموع آن‌ها را به‌دست می‌آوریم. داریم:

جواب:

k	x	
۰	$\frac{3\pi}{16}$ ، ج	$\frac{5\pi}{16}$ ج
۱	$\pi+\frac{3\pi}{16}>\pi,$	$\pi+\frac{5\pi}{16}>\pi$

بنابراین معادلهٔ داده‌شده، در بازهٔ $[0,\pi]$ تنها دو جواب $\frac{3\pi}{16}$ و $\frac{5\pi}{16}$ دارد که مجموع آن‌ها برابر است با:

$$\frac{3\pi}{16}+\frac{5\pi}{16}=\frac{8\pi}{16}=\frac{\pi}{2}$$

مسأله‌ها

۱. معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $2\sin x-1=0$

ب) $2\sin 3x+\sqrt{3}=0$

پ) $2\sin 2\pi x-\sqrt{2}=0$

ت) $2\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2})+\sqrt{2}=0$

ث) $4\sin(\frac{2x}{3}+\frac{\pi}{4})-\sqrt{6}+\sqrt{2}=0$

ج) $\sin(2x-\frac{\pi}{6})-\sin(3x+\frac{\pi}{2})=0$

چ) $\sin(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{4})+\cos(\frac{2\pi x}{3}-\frac{\pi}{3})=0$

۲. جواب‌های عمومی معادله‌های زیر را به‌دست آورید. سپس، جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ داده شده برای هر معادله را بیابید.

الف) $2\sin 4x-\sqrt{3}=0,\ [0,\pi]$

ب) $2\sin\frac{3x}{2}+1=0,\ [,\pi,\pi]$

پ) $2\sin 5\pi x-1=0,\ [0,1]$

ت) $\sin(2x-\frac{\pi}{6})+\sin(\frac{\pi}{4}-x)=0,\ [-\pi,0]$

ث) $\sin(\frac{\pi x}{5}+\frac{\pi}{3})+\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi x}{3})=0,\ [-1,5]$

۳. معادلهٔ $3\sin(2x+\frac{5\pi}{6})-2m+4=0$ داده شده است.

الف) حدود m را چنان تعیین کنید که این معادله جواب داشته باشد.

ب) حدود m را چنان بیابید که $\frac{-\pi}{12} < x < \frac{\pi}{4}$ باشد.

پ) مقدار m را چنان تعیین کنید که یکی از جواب‌های معادله $x = \frac{2\pi}{3}$ باشد.

ت) مقدار m را چنان بیابید که $\sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد.

ث) مقدار m را چنان بیابید که $\sin(2x - \frac{\pi}{6}) = -1$ باشد.

ج) به ازای $m = \frac{11}{4}$ جواب‌های کلی معادله را به دست آورید. سپس جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ را تعیین کنید.

۴. معادلهٔ $2\sin(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{6}) - m - 2 = 0$ داده شده است.

الف) حدود m را چنان بیابید که این معادله ریشه داشته باشد.

ب) حدود m را چنان بیابید که $1 < x < 2$ باشد.

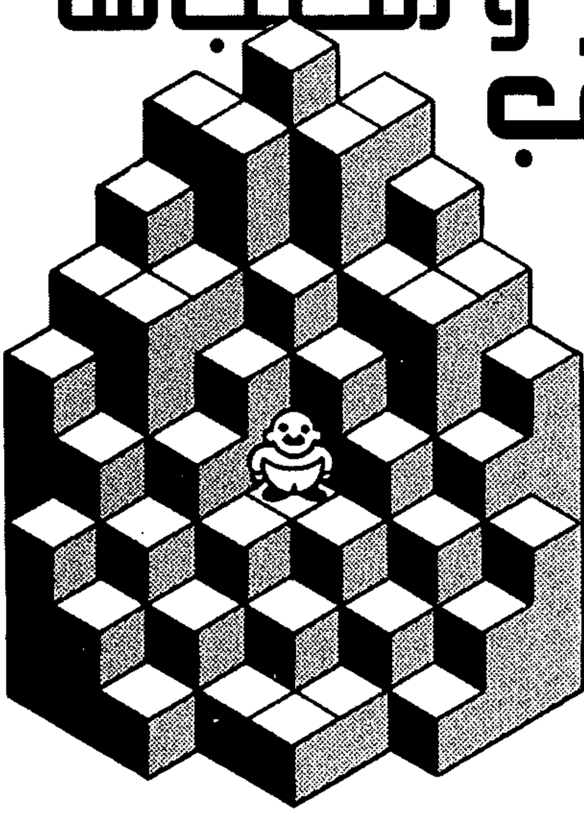
پ) مقدار m را چنان بیابید که یکی از جواب‌های معادله $x = 2$ باشد.

ت) مقدار m را چنان بیابید که $2\sin 2\pi x = 1$ باشد.

ث) به ازای $m = -3$ معادله را حل کنید.

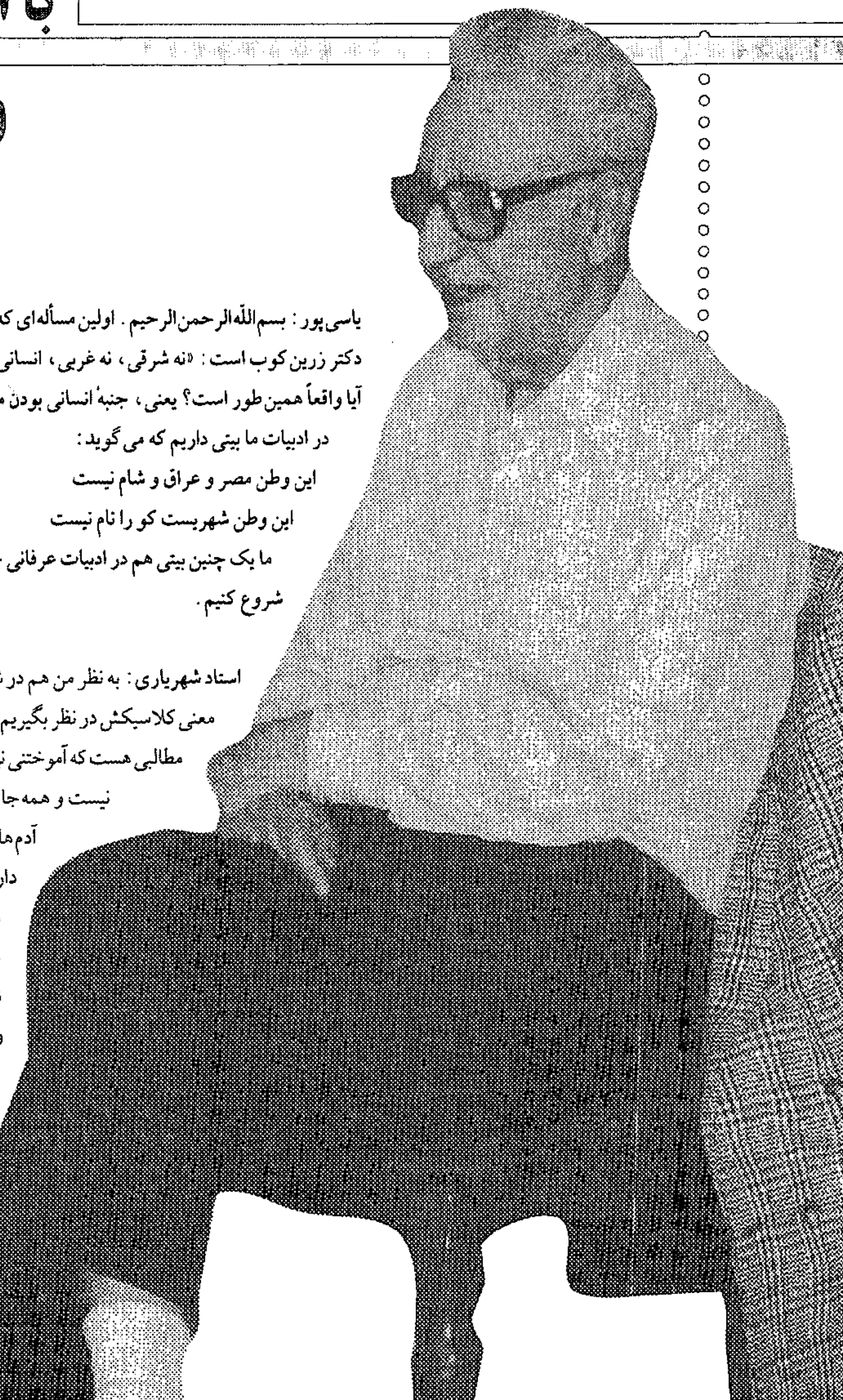
۵. اگر $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin(2x - \frac{\pi}{6}) < \frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد، حدود x را در بازهٔ $[0, 2\pi]$ بیابید.

وروجک و مکعب‌ها



وروجک می‌خواهد از آن‌جایی که ایستاده است، روی حداکثر مکعب‌های ممکن برود؛ بی‌آن‌که ناگزیر شود، روی یک مکعب بیش از یک بار پا بگذارد. او هربار می‌تواند، به یک مکعب مجاور هم‌سطح، یک مکعب بالا یا پائین محل استقرار خود (مکعبی که با مکعب زیر پای او یک وجه مشترک دارد) برود. هیچ حرکتی در راستای قطر مجاز نیست. حال، با احتساب مکعبی که روی آن ایستاده است، او روی چند مکعب گام خواهد گذاشت؟

گفتگوی خودمانی با استاد شهریاری



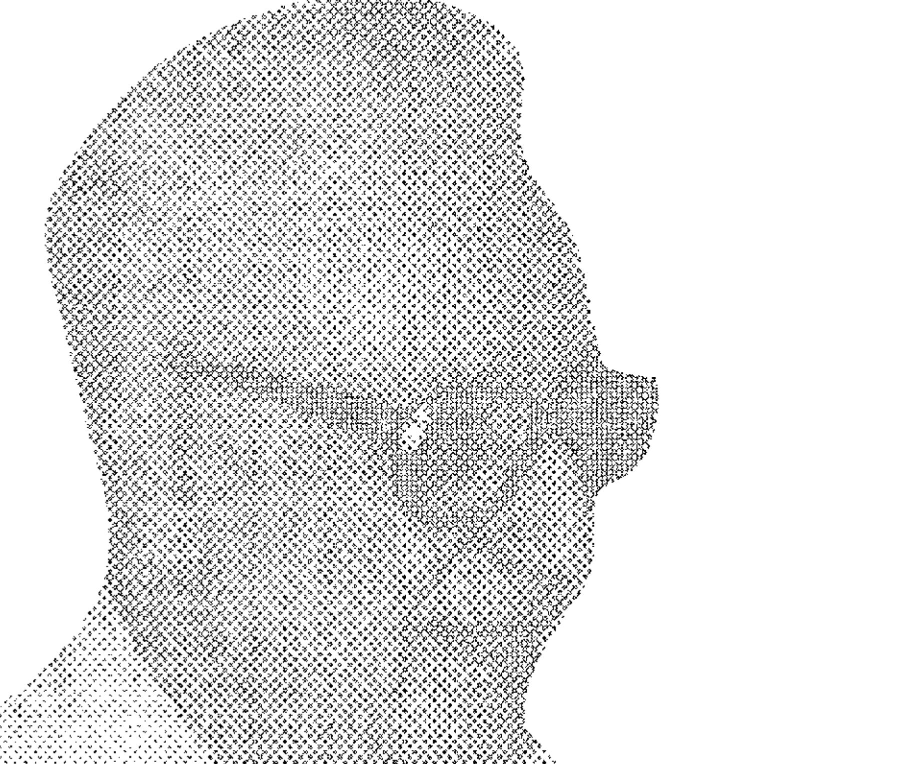
یاسی‌پور: بسم‌الله‌الرحمن‌الرحیم. اولین مسأله‌ای که باید به آن اشاره کنم عنوان یکی از کتاب‌های دکتر زرین کوب است: «نه شرقی، نه غربی، انسانی» و ما می‌خواستیم از این جا شروع کنیم که آیا واقعاً همین طور است؟ یعنی، جنبهٔ انسانی بودن مسلط به شرقی و غربی بودن است یا نه؟

در ادبیات ما بیتی داریم که می‌گوید:

این وطن مصر و عراق و شام نیست
این وطن شهریست کو را نام نیست

ما یک چنین بیتی هم در ادبیات عرفانی خودمان داریم. اگر اجازه بفرمایید از این جا شروع کنیم.

استاد شهریاری: به نظر من هم در شرق و هم در غرب، اگر شرق و غرب را به معنی کلاسیکش در نظر بگیریم، مطالبی هست آموختنی و باید یاد بگیریم و مطالبی هست که آموختنی نیست. انسانیت هم فقط به مملکت ما مربوط نیست و همه‌جای دنیا می‌شود، انسان بود. مثلاً در آمریکا آدم‌هایی هستند که تمام خصلت‌های انسانی را دارند. در شرق هم همین طور است؛ آدم‌هایی هستند که اصلاً خصلت انسانی ندارند؛ درست مثل رئیس جمهور فعلی امریکا و یا شارون. بنابراین به نظر من خود انسان بودن وانسانی فکر کردن کافی است. نه شرقی، نه غربی، مفهومی ندارد. این مطلب تا آن‌جایی درست است که ما جنبه‌های بد غربی یا شرقی را نگیریم، و اِلاّ در هر دو جا جنبه‌های مثبت هست. فقط کافی است که بگوییم انسانیت داشته



باشیم و انسانی فکر کنیم .

یاسی پور : به عبارت دیگر، مسألهٔ وطن در انسانیت تبلور پیدا می کند . آن هم به جای خود قابل قبول است.

استاد شهریاری : من معتقدم که هر کسی فقط در وطن خودش می تواند رشد و نمو کند، نه در جای دیگر . شما اگر بیست یا سی سال هم آن جا باشید، بالاخره خارجی هستید . به شما به نظر خارجی نگاه می کنند و تا شما بخواهید خودتان را با فرهنگ آن جا تطبیق دهید، عملاً از دست رفته اید . در حالی که چنانچه در کشور خودتان اگر سختی هایی هم داشته باشد، تحمل بکنید، رشد و نمو خواهید داشت .

یاسی پور : به عبارت دیگر، همان طور که قبلاً هم اشاره کردید، انسانیت نه در شرق و نه در غرب تبلور پیدا می کند، بلکه در وطن تبلور پیدا می کند.

استاد شهریاری : برای هرکس.

یاسی پور : خوب، سؤال بعدی که باز هم قدری شخصی است و جنبهٔ اجتماعی دارد، مربوط است به ظاهر استاد شهریاری . بنده حدود چهل سال است که با استاد آشنا هستم . و سال ۴۲ شاگرد ایشان بوده ام . در همان مدرسهٔ خوارزمی . طرز لباس پوشیدن استاد خیلی عادی بود . من هیچ وقت ندیدم که استاد شهریاری لباس فاخر بپوشند . لباس ایشان تمیز و مرتب بود، ولی فاخر نبود .

از نرم و خشن هر آنچه پوشی
باید که به پاکی اش بکوشی

یاد یک داستان افتادم از جلال آل احمد . آل احمد در یکی از نوشته هایش می گوید، رفته بودم مشهد . جلوی صحن کتم را روی دوشم انداخته بودم، داشتم می رفتم . یک نفر که از ده آمده بود و آن جا قدم می زد، به من گفت: عمو این کت را چند می فروشی؟ می گوید من به او گفتم : عمو این فروشی نیست .

بعد این صحبت را دکتر شریعتی مورد تحلیل قرار داده و می گوید، تازه بهتر آن بود که بگوید، این قدر می فروشم و بفروشد . یعنی تا این حد داخل اجتماع و جمعیت باشی . بنده در این مدت هر موقع استاد شهریاری را دیده ام، ظاهر ایشان عین همان ظاهری بود که چهل سال پیش دیده بودم که هیچ، بلکه همان طور که آل احمد می گوید، تیپ ایشان طوری بود که خیلی راحت می توانستند، با افراد معمولی جامعه نشست و برخاست کنند . چرا شما ظاهرتان را هیچ تغییری نداده اید؟ از گذشته هایتان همچنان ساده بودید.

می دانید که زمانی استاد معاونت وزارت را داشتند، در دبیرستان های معروف، مثل خوارزمی و مرجان، از نظر مقام اجتماعی، دارای بالاترین مقام ها بودند، ولی هیچ وقت این حالت نبود که لباسشان یا حتی وسیلهٔ نقلیه شان تغییر کند. من بارها دیده ام که با وجود این که ایشان از لحاظ وضعیت اجتماعی در بالاترین مقام بوده اند، ولی پیکان داشتند . این را ما دیده ایم . می خواهم بپرسم این چه انگیزه ای بود که باعث شد، شخصیت و ظاهر شما هیچ تغییر نکند .

استاد شهریاری : حقیقت این است که من هیچ تصمیمی در این مورد نگرفتم، بلکه این طور بار آمده ام و این طور عمل کرده ام معتقد هستم، و همیشه معتقد بودم که آدم

نباید خودش را از مردم دور کند و باید با مردم باشد. وقتی که با مردم بودن هست، دیگر آدم خودش را نمی‌گیرد، دیگر آدم هوس ماشین درجهٔ یک، و خیلی چیزهای دیگر را نمی‌کند. به قول یکی از مدرسین سابق علوم پاریس که می‌گوید، ریاضی یک وظیفهٔ اساسی دارد، وظیفه‌ای که امروز خیلی کم به آن توجه می‌کنند، و خیلی کم به آن ارادت دارند، ساختن انسان است؛ انسانی که به درک و فهم مردم بیش از داشتن یک تلویزیون اهمیت می‌دهد.

من همیشه در تمام زندگی‌ام این طور بودم. نه این طور تصمیم گرفته باشم، ولی این طور بودم و در رابطه با کار هم هیچ‌وقت فکر نکردم که این کار مثلاً در شأن من هست، آن کار در شأن من نیست. هرکاری که درست تشخیص دادم، آن را انجام دادم. مثلاً برای ترجمه یا تألیف مقاله یا کتاب، بارها به من گفتند که در شأن تو نیست که در فلان مجله کار کنی یا فلان مقاله را بنویسی. من گفتم: چرا؟ مگر آن مقاله بد است؟ مقاله‌ای که نوشتم برای مردم نوشتم. اگر برای مردمی بوده که در سطح پائین‌تری بودند، سعی کرده‌ام به زبان ساده‌تر بنویسم. اگر مطلب ریاضی بوده، برای ریاضیدان‌ها نوشته‌ام. هیچ‌وقت هم فکر نکردم که این کار در شأن من هست یا نیست. و به همین ترتیب در مورد لباس پوشیدن بود. لباس هر چه که داشته‌ام، پوشیده‌ام.

یاسی‌پور: من یاد داستانی افتادم که از انیشتین تعریف می‌کنند. او با پادشاه بلژیک آشنا بود و گاهی اوقات پادشاه و ملکهٔ بلژیک از او دعوت می‌کردند. یک‌بار که انیشتین رفته بود پیش پادشاه، جوراب‌هایش را یادش رفته بود بپوشد. پای برهنه در کفش کرده بود و بعد وقتی برگشت به همسرش گفت: مهم‌ترین کشف من این بود که می‌شود بدون جوراب هم مسافرت کرد.

استاد شهریاری: یک داستان دیگر هم دربارهٔ انیشتین خوانده‌ام. وقتی که آلمان بود، همان پالتویی را می‌پوشید که از دورهٔ جوانی داشت. به او رسیدند گفتند: که تو دیگر مشهور شدی، تو دیگر آدم مهمی هستی. آخر لباست؟!

گفت: این جا همه من را می‌شناسند، نگران نباشید.

بعد از سال‌ها که رفت آمریکا، درخیابان همان آدم او را دید که همان پالتو را پوشیده است، گفت: حالا این جا دیگر آمریکاست که آمدی، این را دیگر چه می‌گویی؟ گفت: این جا هیچ‌کس من را نمی‌شناسد.

یاسی‌پور: مطلب بعد که بنده این جا نوشته‌ام، غیر از ریاضی که خیلی دربارهٔ آن صحبت شده، جنبهٔ ادبی است. یعنی، شما یک سری کارهای ادبی هم انجام داده‌اید، مثل «جنبش مزدک و مزدکیان» که ظاهراً خود شما در مصاحبه‌تان فرمودید هیچ نسخه‌ای از آن ندارید. یا کتاب‌هایی مثل «شرح حال یان کوب» که چاپ شده است.

راجع به این جنبه کم‌تر صحبت شده. همهٔ ما مشتاق هستیم در این باره نیز صحبت شود و اهمیت این جنبه هم در کنار ریاضی مطرح شود. یعنی به عنوان یک محقق و یک مؤلف و یک مترجم و یک استاد ریاضیات، شما با چه انگیزه‌هایی به ادبیات پرداخته‌اید؟

استاد شهریاری: حقیقت این است، من در عین حال که در دورهٔ دبیرستان ریاضی می‌خواندم، به ادبیات و به‌خصوص، به فلسفه عقیده و اعتقاد داشتم. اولاً برای ما یک کلاس مخصوص گذاشتند، چون من تا کلاس پنجم خوانده بودم و یک سال دیگر هم باید می‌خواندم.

آن‌جا در دانشکدهٔ علوم یک جایی درست کردند به اسم کلاس مخصوص. من اول رفتم رشتهٔ ادبی، به امید این‌که بعداً فلسفه را ادامه دهم. ولی از سیصدوپنجاه دانشجویی که از شهرستان‌های مختلف آمده بودیم، سیصدوچهل نفر آمده بودند رشتهٔ ادبی.

من تقریباً یک ماه سر کلاس رفتم. استادهای بسیار خوبی داشتیم. یکی از استادها **دکتر معین** بود، یکی دیگر استاد **هوشیار** بود، و من می‌دیدم که نمی‌توانم استفاده کنم. همیشه سعی می‌کردم که زود بروم سر کلاس که ردیف‌های جلو بنشینم و بتوانم گوش کنم، باز هم نمی‌شد. وقتی می‌رفتم، می‌دیدم یک عده‌ای زودتر آمده‌اند و باز می‌رفتم آخر کلاس.

بالاخره تصمیم گرفتم، در رشته‌ای درس بخوانم که از آن استفاده بکنم و آن‌وقت اگر ادبیات و یا فلسفه را دوست دارم، خودم مطالعه کنم. این تصمیم باعث شد که به سوی، به اصطلاح آن روز، طبیعی، یعنی تجربی هم نروم. البته آن‌ها هم عده‌شان کم بود. چهارده نفر در رشتهٔ تجربی، یا به اصطلاح آن روز، طبیعی بودند و شش نفر در رشتهٔ ریاضی که من رفتم رشتهٔ ریاضی و شدیم هفت‌نفر. یکی از ما هم وسط راه رفت و شش‌نفر تا آخر کار ماندیم.

اصولاً ریاضی، زمانی که ما تحصیل می‌کردیم، خیلی کم داوطلب داشت. مثلاً دانشکدهٔ علوم، تمام تابستان سال ۱۳۲۴ تبلیغ می‌کرد که ما ۶۰ دانشجوی ریاضی

می‌پذیریم. یک دانشگاه در تهران بود، دانشگاه تهران که یک دانشکدهٔ علوم داشت و دانشکدهٔ علوم هم یک رشتهٔ ریاضی داشت؛ یعنی، تنها رشتهٔ ریاضی در تمام ایران که ۶۰ نفر می‌پذیرفت. آخرکار که رفتیم سر کلاس، سیزده‌نفر اسم نوشته بودند که خوشبختانه از این سیزده‌نفر سه‌نفرشان دختر خانم بودند. برای اولین‌بار خانم‌ها به این رشته آمده بودند. یعنی، ریاضی خیلی کم‌اهمیت بود. اصولاً هیچ رشته‌ای از دانشگاه در آن زمان کنکور نداشت، جز دانشکدهٔ حقوق، چون آزاد بود و سر کلاس حاضر غایب نمی‌کردند. من رفتم رشتهٔ ریاضی، اما هیچ‌وقت علاقهٔ خودم را به ادبیات و فلسفه از دست ندادم.

دو کتابی که شما نام بردید، کمابیش مربوط به تاریخ است، یعنی جزو ادبیات است. اما علاوه‌بر این‌ها، من مثلاً شرح زندگی **گالوا** را ترجمه کرده‌ام که یک کتاب کاملاً ادبی است؛ اصلاً یک داستان است. یا «**من ریاضیدانم**» را ترجمه کرده‌ام که **نوبرت وینر** نوشته و شرح زندگی خودش است، و علاوه بر آن یک کتاب صرفاً ادبی است. «**باد و باران**» یا «**یک روز زندگی پسرک قبطی**». کتاب «**یک روز زندگی پسرک قبطی**» جنبه‌هایی از تاریخ واقعی و واقعیت‌ها را در سه‌هزار و سیصد سال پیش در مصر، ریاضی در چه حد بوده یا نجوم در چه حد بوده، و در این‌باره به تفصیل صحبت شده است. ولی کتاب «**باد و باران**» **زاخاریا استانکو** یک رمان سه جلدی است. دو جلد آن چاپ شده و یک جلدش همچنان باقی‌مانده و چاپ نشده است. من هنوز هم علاقهٔ خودم را نه به ادبیات و نه به فلسفه، هیچ‌کدام، از دست نداده‌ام، منتها ریاضی دم‌دست‌تر است و بنابراین بیش‌تر به ریاضی پرداخته‌ام. با این حال ادبیات و فلسفه را همیشه دوست داشته‌ام و هنوز هم دوست دارم.

یاسی‌پور: بله، دربارهٔ این جنبهٔ ادبی بنده یک بیت از حافظ به یادم آمد که می‌فرماید:

در مکتب حقایق پیش ادیب عشق
هان ای پسر بکوش که روزی پدر شوی

این شعر معروفی است. البته من دیدم که شما به عشقی که حافظ مطرح کرده، در بعضی از مقالاتتان اشاره کرده‌اید.

عشق می‌ورزم و امید که این فن شریف
چون هنرهای دگر موجب حرمان نشود

استاد شهریاری: این شعری بود که در اولین شمارهٔ آشتی با ریاضیات چاپ شد.

یاسی‌پور: بله، این «مکتب حقایق» و «ادیب عشق» با آن جنبهٔ ادبی کار شما ارتباطی دارد یا نه؟

استاد شهریاری شاید داشته باشد، شاید نداشته باشد. باید دیگران قضاوت بکنند، من نمی‌توانم در این‌باره قضاوت کنم. من فقط می‌توانم بگویم که ادبیات و فلسفه را دوست داشتم و دوست دارم؛ همین.

یاسی‌پور: بله. سؤال دیگر سخنی است از دکتر گویا که اشاره کردند به یکی از کتاب‌های شما به نام «خلاقیت ریاضی». خود شما گفتید، استقبال دانش‌آموزان از این کتاب خیلی زیاد بوده است. ایشان گفتند که اگر استاد شهریاری تنها فقط همین یک کتاب را نوشته بودند، کافی بود که مقام بسیار بالا و والایی در ریاضیات ایران داشته باشند؛ حالا غیر از آن دویست و چند جلد کتاب دیگری که باید پهلوی این کتاب بگذارند. این جا مولوی به این خلاقیت اشاره می‌کند و می‌گوید:

خلق ما بر صورت خود کرد حق

چون خداوند خلاق است، ما هم خلاق هستیم. اصلاً می‌گوید خلق ما بر صورت خداوند است.

وصف او بر وصف ما دارد سبق

یعنی ما توصیفات خودمان و صفت‌های خودمان را از او گرفته‌ایم. او جلوست و ما پشت‌سر او حرکت می‌کنیم. بنابراین دستور هم این است که ما متخلق به اخلاق خداوندی بشویم و اخلاق خداوندی خلاقیت است. این قاعده‌ای است که در عرفان ما آمده. آیا این نکته در خلاقیت ریاضی هم صادق است؟

استاد شهریاری: این‌که در خلاقیت ریاضی صادق است. منتها نسخهٔ روسی کتاب «**خلاقیت ریاضی**» دستم بود. کتاب از انگلیسی به روسی ترجمه شده بود. کتاب را خواندم تقریباً تا آخرش. یعنی خیلی بیش از نصفش، خوشم آمد. من هر کتابی را که ترجمه می‌کنم، اول باید بخوانم. اگر دیدم می‌پسندم و خوب است، آن‌وقت آن را ترجمه می‌کنم. یک جایی دارم، کتاب‌هایی را که خوانده‌ام و نپسندیده‌ام آن‌جا می‌گذارم. من این کتاب را ترجمه کردم و به پیشنهاد انتشارات فاطمی برای چاپ به آنها دادم، اما تاکنون خبری نشده است.

کتاب «**خلاقیت ریاضی**» هر چه قدر که فروشش خوب باشد، مگرچه قدر فروش می‌کند؟ اولاً این کتاب را ریاضیدان باید بخواند. کسی که به ریاضیات علاقه‌مند است. ثانیاً از بین علاقه‌مندان به ریاضی هم درصد کمی کتاب را می‌گیرند. فرق دارد با کتابی که انتشارات فاطمی چاپ می‌کند و

در سال، مثلاً سه‌هزار تا چهارهزار نسخه فروش می‌رود. احتمالاً به این دلیل است که چاپ نمی‌کند. ما هم کارش نداریم.

از نظر چاپ کتاب، من خیلی گرفتاری دارم. مثلاً بیش از چهل کتاب من در امیرکبیر مانده است. قبلاً جعفری هروقت که من می‌رفتم، کتاب را با دستش وزن می‌کرد، بعد به من می‌داد و می‌گفت: خودت ببر چاپخانه پیدا کن، بده چاپ کنند.

آدم خیلی شریفی بود. حدود چهل کتاب از کتاب‌های من را امیرکبیر چاپ کرده است. یک چیزی هم دستی می‌نوشت که این کتاب مال ما باشد. حالا افتاده دست ناشر دیگری. الان امیرکبیر کتاب‌های من را نه چاپ می‌کند، نه آزاد. بسیاری از کتاب‌های من پیش آن‌هاست؛ مثل «اندیشهٔ ریاضی»، «درپی فیثاغورس»، «دورهٔ اختصاصی جبر»، «دورهٔ اختصاصی مثلثات»، که مورد استفادهٔ بچه‌ها هستند و «سرگرمی‌های جبر». این کتاب‌ها را نه چاپ می‌کند، نه آزاد می‌کند که به دیگران بدهم، هرکس را هم که فرستاده‌ام و گفته‌ام و نوشته داده‌ام که برو این کتاب‌ها را به هر قیمت که می‌دهد، آزادکن و تو چاپ کن، رفته آن‌جا به قدری آن‌جا او را سر دوانده‌اند و این طرف و آن طرف فرستاده‌اند که رها کرده است و آمده. آن کتاب‌هایی هم که به‌ندرت چاپ می‌کنند، اصلاً خبر نمی‌دهند. دوستان به من خبر می‌دهند: آقا فلان کتابت چاپ شده. من تلفن می‌کنم.

در مورد یک کتاب شاید بیش از بیست بار زنگ زده‌ام که آقا مدت‌هاست چاپ کرده‌اید، چرا حق‌التألیفش را نمی‌فرستید؟ همیشه می‌گویند: چَشم. ولی تا حالا هیچ خبری نشده.

یاسی‌پور: مختصری هم راجع به این دو کتابی که نوشته پرلمان است و شما هم به یکی از آن‌ها اشاره کردید، یکی «سرگرمی‌های جبر» و یکی دیگر «سرگرمی‌های هندسه»...

استاد شهریاری: سه تا کتاب است. یکی دیگرش هم «سرگرمی‌های ریاضی» است.

یاسی‌پور: به‌خصوص این دو کتاب که درواقع جبر و هندسه عملی هستند، مطالب بسیار جالبی را در عمل مطرح می‌کنند که اصلاً دید افراد را نسبت به ریاضی تغییر می‌دهد. اگر ممکن است، راجع به این دو کتاب هم صحبت بفرمایید.

استاد شهریاری: «سرگرمی‌های جبر» اول چهار عمل اصلی را با زبان بسیار شیرین و مثال‌های جالب مطرح کرده است. لگاریتم را هم شرح داده تا به اصطلاح، عمل پنجم را هم توضیح داده است. خود کتاب به‌قدری جالب است که وقتی که من فقط ده‌ـ دوازده صفحه از اصل کتاب را خوانده بودم، دیدم اگر فقط همین ده‌دوازده صفحه از این کتاب هم چاپ شود، جالب است. اما «سرگرمی‌های هندسه» از آن هم جالب‌تر است. یعنی در «سرگرمی‌های هندسه» شما یک فرمول یا یک رابطه هم نمی‌بینید، ولی با زبانی شیرین همهٔ مسائل هندسه را مطرح کرده است. با زبانی شیرین. باید این را هم بگوییم که نویسندهٔ این کتاب‌ها هنری پرلمان در جنگ جهانی دوم در لنینگراد پشت اردوهای کار از گرسنگی افتاد و مرد. ولی کتاب‌هایش کتاب‌های بسیار جالبی هستند.

کتاب «سرگرمی‌های هندسه» دست امیرکبیر نیست، نزد انتشارات خوارزمی است و هر ششم ماه یک‌دفعه خودش زنگ می‌زند، من اصلاً رها کرده‌ام. زنگ می‌زند که آقای شهریاری دارم کتاب‌هایتان را چاپ می‌کنم. چهار پنج کتابتان در چاپخانه است؛ ازجمله «سرگرمی‌های هندسه». می‌گویم: دستتان درد نکند. قطع می‌شود می‌رود تا شش‌ماه دیگر، یادش می‌رود که قبلاً تلفن کرده، دوباره تلفن می‌کند. این الان چند سال است ادامه دارد و هنوز «سرگرمی‌های هندسه» مانده است. من اهل این‌که بروم شکایت کنم، نیستم. برای این‌که راهی پیدا کنم برای نجات این کتاب‌ها، حاضرم وکالت بدهم، اما به‌شرطی که به من کاری نداشته باشند، و خودشان بروند دنبالش. چهل کتاب در امیرکبیر است. در حدود بیست کتاب هم در خوارزمی است. ترجیح می‌دهم که بنشینم کتاب جدیدی ترجمه کنم یا بنویسم، ولی سراغ آن‌ها نروم.

یاسی‌پور: دکتر بهزاد، در مجلس

بزرگداشت شما مطرح کرده‌اند که استاد شهریاری در عمومی کردن ریاضیات یکی از بزرگ‌ترین نقش‌ها را داشته است. در خارج معمولاً این کار را می‌کنند. مثلاً سرژ لانگ معروف که فردی جبری است، البته به معنی جبردان، نه جبری در مقابل اختیار، چند سخنرانی در عمومی کردن ریاضیات دارد. او در موزهٔ هنرهای پاریس، روزهای یکشنبه، برای آدم‌هایی که آمده‌اند تفریح و تماشا کنند، سخنرانی ریاضی می‌کرد. یعنی در خارج هم دنبال این هستند که صورتی از این ماجرا را داشته باشند. مثلاً، ژرژگاموف یکی از آن کسانی بود که در عمومی کردن ریاضیات در آمریکا خیلی نقش داشت. «۱، ۲، ۳، بینهایت» او بسیار معروف است.

استاد شهریاری: آقای بیرشک ترجمه کرده است.

یاسی‌پور: کتاب «پیدایش و مرگ خورشید» او نیز جنبهٔ فیزیکی دارد. به‌هرحال، استاد بهزاد بر این نکته تأکید داشت که نقش شما در عمومی کردن ریاضیات، نقش خیلی والایی است. شما این کار را تا چه حد لازم می‌دانید؟

استاد شهریاری: باز مثل موارد دیگر، من هیچ تصمیمی در این زمینه نداشتم. کتابی دستم آمد. بعد از این‌که آن را خواندم، دیدم جالب است، ترجمه کردم. شاید همین کتاب‌ها در دست افراد، عمومی‌کردن ریاضی را بیش‌تر ملموس کرده است. والاّ من کتاب‌هایی دارم که فقط به ریاضیات فرمولی و خشک پرداخته است. ولی این سخن درست است، بیش‌تر کتاب‌های من جنبهٔ عام و عمومی دارد و به درد همه می‌خورند.

یاسی‌پور: بله، شما در مجلهٔ «آشتی با ریاضیات» به این مسأله اشاره کرده‌اید. در آن شماره‌های اولیه فرموده‌اید که ما می‌خواستیم با این مجلهٔ «آشتی با ریاضیات»، پدرها و مادرها و افرادی را که از ریاضیات دور شده‌اند و به یک معنی با ریاضیات قهر کرده‌اند، دوباره آشتی بدهیم. بنابراین آن مجله را، بخصوص برای این کار، مطرح کرده بودید.

استاد شهریاری: تا حدی هم موفق شدم. هفتاد شمارهٔ «آشتی و آشنایی با ریاضیات» را منتشر کردم و سرانجام مسائل مالی، من را متوقف کرد و دیگر آن را منتشر نکردم. یک دوره از آن مجله را دارم. هنوز هروقت خودم به آن مراجعه می‌کنم، بعضی از مطالبش برای خود من هم جالب است که آن موقع گیر آورده‌ام و چاپ کرده‌ام. کمی دشوار است، دو ماه یک‌بار مجله‌ای را منتشر کردن و تا هفتاد شماره هم ادامه دادن که الحمدلله تمام شد.

یاسی‌پور: بله، این جا در همان بحث و گفت‌وگوها، دکتر رجبعلی‌پور، ظاهراً در دانشگاه کرمان در بزرگداشت شما، این مطلب را از قول گومان گفت که نخستین وظیفهٔ یک ریاضیدان، ساختن و تحویل‌دادن چیزی است که شاید امروز کم‌تر کسی طالب آن باشد؛ یعنی انسان. این حرف خیلی شبیه حرف عرفای ماست. مثلاً مولوی می‌گوید:

خویشتن نشناخت مسکین آدمی
از فزونی آمد و شد در کمی
خویشتن را آدمی ارزان فروخت
بود اطلس خویش را بر دلق بدوخت

یعنی انسان از آن مرحلهٔ انسانیت دور افتاد و افتاد این طرف مسیر. آیا این تنها وظیفهٔ ریاضیات است، یا یکی از مهم‌ترین وظایف آن؟

استاد شهریاری: به نظر من یکی از مهم‌ترین وظایفش است. ظاهراً وظیفهٔ یک معلم ریاضی که ریاضیات را یاد می‌دهد، همین است. منتها متأسفانه در مملکت ما اصلش به کلی از بین رفته. ریاضیات باید با کاربرد ریاضی و تاریخ ریاضیات و بخصوص، با فلسفهٔ ریاضی همراه باشد. با این تست و کنکوری که وجود دارد، این سه موضوع به‌کلی کنار رفته‌اند. در تست نمی‌شود تاریخ را مطرح کرد و من خاطرم می‌آید که یک‌بار المپیادی‌های ریاضی که به ایران برمی‌گشتند، یک دخترخانم بین آن‌ها بود که اتفاقاً مدال طلا گرفته بود. مصاحبه‌گر تلویزیون رفت جلو و از او پرسید: خانم شما جمشید کاشانی را می‌شناسید؟ او گفت: «نه». گفت: «کسی بوده که عدد پی را اختراع کرد».

هر دو طرف موضوع ناراحت‌کننده است. از یک طرف، این دخترخانم که در المپیاد ریاضیات مدال طلا گرفته، اصلاً جمشید کاشانی را نمی‌شناسد، و از طرف دیگر، این مصاحبه‌کننده جمشید کاشانی را از این جا می‌شناخت که «عدد پی را اختراع کرد». عددپی قابل اختراع نیست. در طبیعت وجود دارد و در طبیعت به‌کار رفته است. حداکثر باید آن را کشف کرد.

حتی هزاران سال قبل از میلاد در تورات، عددپی مطرح شده است. به‌این‌ترتیب که در غزل‌های سلیمان، دورهٔ یک ظرف را می‌دهد و می‌گوید ظرفی بساز که دوره‌اش این قدر باشد. قطرش را هم می‌دهد که وقتی بر هم تقسیم می‌کنید، عدد ۳ را حاصل می‌کنید. عددپی را ۳ می‌شناختند. همان‌موقع در مصر آن را

۳٫۱۶ می‌شناختند. کاشانی برای اولین بار عددپی را تا هفده رقم اعشار حساب کرد و کار بسیار عظیمی بود. از سه‌ضلعی شروع کرد، سه‌ضلعی داخلی و خارجی، بعد شش‌ضلعی، بعد دوازده‌ضلعی، بعد بیست‌وچهار ضلعی، تا موقعی که واسطه عددی بین این دو را به‌دست آورد. نمی‌دانم تا کجا جلو رفت.

یاسی‌پور: در خارج، مقاله‌ای نوشته بودند در این مورد که برای محاسبهٔ آن شانزده رقم ـ ظاهراً تا رقم شانزدهم درست است و یک رقم آخر آن ایراد دارد ـ باید آن n‌ضلعی محاطی و محیطی یک میلیون ضلعی باشد.

استاد شهریاری: هم داخلی، هم خارجی.

یاسی‌پور: تا آن شانزده رقم دربیاید. خیلی زیاد است!

استاد شهریاری: بله، کاشانی کارهایی کرده که هیچ کاری اصلاً قابل مقایسه با آن نیست. یکی از کارهایش حل معادلهٔ درجهٔ سوم است. یعنی سینوس یک درجه را می‌خواسته پیدا کند و تا سینوس سه درجه را می‌دانست. سینوس سه درجه برحسب سینوس یک درجه، یک عبارت درجهٔ سوم می‌شود. بنابراین او ناچار بوده، معادلهٔ $ax^3 + bx = 3$ را حل کند تا بتواند سینوس یک درجه را به‌دست بیاورد. او این معادله را حل کرد. با هر دقتی که شما بخواهید، با روش کاشانی می‌شود، هر معادله‌ای را حل کرد؛ چون ما می‌دانیم هر معادلهٔ درجهٔ سوم را می‌شود درجهٔ دومش را حذف کرد و آن بقیه‌اش را هم کاشانی حل کرده است.

کاردان یک قرن بعد از کاشانی معادلهٔ درجهٔ سوم را حل کرده. معادلهٔ درجهٔ سوم را به نام کاردان می‌شناسیم. کاردان کارش درست بود، چون ثابت کرد که ریشه‌های هر معادلهٔ درجهٔ سوم به کمک رادیکال‌ها قابل بیان است و این کار درستی بود. البته اگر این روش مال کاردان باشد؛ چون بعضی‌ها معتقدند که مال **تارتاگیلیا**، همشهری کاردان است. به هر صورت، روش او این فایده را دارد که نشان می‌دهد، ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم با رادیکال‌ها قابل بیان است. ولی راه‌حل کاشانی عملی است. می‌توانیم از آن استفاده کنیم. منتها نه در دبیرستان‌ها و نه در دانشگاه‌ها، اسمی از کاشانی نیست. یادمان باشد، کاشانی در دوره‌ای زندگی می‌کرد که بیش‌تر احتیاج به این داشتند ریاضیات عملی را استفاده کنند. در اساس او منجم و اخترشناس بود. از همان‌جا هم به سینوس یک درجه احتیاج پیدا کرد و آن را به‌دست آورد.

این مسألهٔ واقعاً جالب را که مربوط به کاشانی است، نه کسی می‌داند، نه کسی از او اسم می‌برد. هم در **«رسالهٔ محیطه»**ی او و هم در **«مفتاح‌الحساب»** هست، منتها کسی که می‌خواهد آن را بخواند، باید اهل نظر باشد.

من این‌جا یک نکتهٔ دیگر را بگویم: ما همیشه به دانش‌آموزانمان توصیه می‌کنیم که آقا دنبال تحقیق بروید. چرا تحقیق نمی‌کنید؟ چه‌طور تحقیق کند، وقتی که مدارک در اختیارشان نیست. این رساله‌های کاشانی را من الان می‌توانم خدمتتان بیاورم. به روسی ترجمه شده، انگلیسی آن هست، فرانسه‌اش هست، آلمانی آن هست، این چهار زبان را من دیده‌ام و دارم. اصلش هم عربی است. هنوز به فارسی ترجمه نشده. درحالی‌که باید به فارسی، آن هم دو نوع، ترجمه شود: یکی دقیقاً از روی آن با همان اصطلاح‌ها تا هرکس که مطالعه می‌کند، بداند کاشانی چه کسی بوده است، و یکی هم به زبان امروزی که برای دانش‌آموزان قابل استفاده باشد. کتاب‌های ریاضی را هم که از عربی به فارسی ترجمه شده‌اند جز موردی که مصاحب ترجمه کرده، یعنی **«جبر خیام»**، کسانی ترجمه کرده‌اند که عربی می‌دانستند، ولی ریاضی نمی‌دانستند و درنتیجه کار غلط درآمده است.

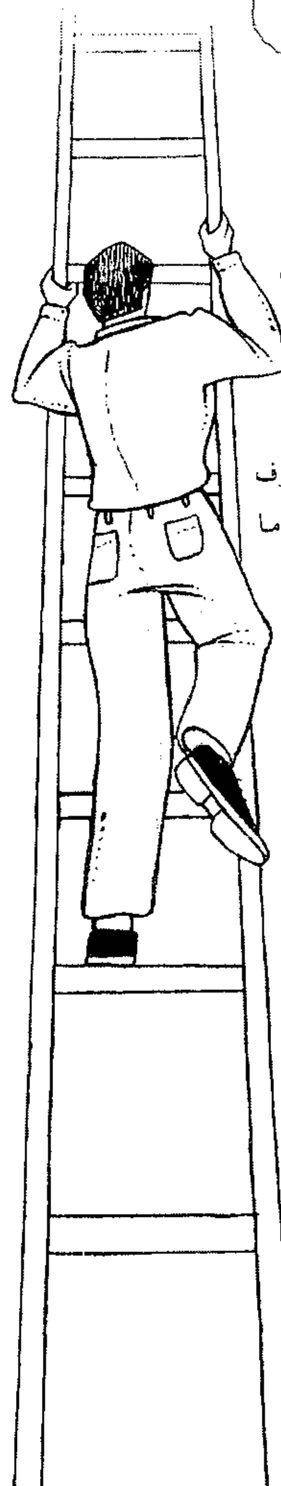
ادامه دارد

استقرای ریاضی

محدودیت های استدلال استقرایی و اصول استقرای ریاضی

میرشهرام صدر

برای دانش آموزان سال سوم ریاضی



برخی از ریاضیدانان بزرگ، وقتی به درستی قانونی تا حداکثر بیست حالت پشت سر هم پی می‌بردند، آن قانون را به صورت یک حکم کلی بیان می‌کردند. از این رو، تا میانه‌های قرن هفدم میلادی با استفاده از استدلال استقرایی، حکم‌های بسیاری در ریاضیات، به‌ویژه در شاخهٔ نظریهٔ اعداد روی هم انباشته شده بود که به ذکر دو مورد از آن‌ها می‌پردازیم.

پی یر فرما[1] (۱۶۵۱ ـ ۱۶۰۱ م)، ریاضیدان بزرگ فرانسوی تصور می‌کرد که عدد $F_n = ۲^{۲^n} + ۱$ به ازای عددهای حسابی n، اول است. این عدد به «عدد فرما» معروف است. هرگاه به‌جای n، عددهای حسابی را قرار دهیم، ملاحظه می‌کنیم که عدد فرما برای $n = ۵$ یک عدد اول نیست؛ زیرا:

$$n = ۰ \Rightarrow F_۰ = ۲^{۲^۰} + ۱ = ۳$$

$$n = ۱ \Rightarrow F_۱ = ۲^{۲^۱} + ۱ = ۵$$

$$n = ۲ \Rightarrow F_۲ = ۲^{۲^۲} + ۱ = ۱۷$$

$$n = ۳ \Rightarrow F_۳ = ۲^{۲^۳} + ۱ = ۲۵۷$$

$$n = ۴ \Rightarrow F_۴ = ۲^{۲^۴} + ۱ = ۶۵۵۳۷$$

$$n = ۵ \Rightarrow F_۵ = ۲^{۲^۵} + ۱ = ۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷$$

$$= ۶۴۱ \times ۶۷۰۰۴۱۷$$

ملاحظه می‌کنیم که $F_۵$ عددی مرکب است.

مارَن مِرسن[2] (۱۶۴۸ ـ ۱۵۸۸م)، ریاضیدان فرانسوی و از دوستان صمیمی دکارت بود. او معتقد بود که عدد $M_n = ۲^n - ۱$ به ازای عددهای اول ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۳۱، ۶۷، ۱۲۷ و ۲۵۷ عددی اول، و به ازای بقیهٔ عددهای طبیعی کوچک‌تر از ۲۵۷، عددی مرکب است. این عدد به «عدد مرسن» معروف است. در صورتی که به جای n، عددهای اول یاد شده را قرار دهیم، عددهای مرسن به دست می‌آیند:

$$n=2 \Rightarrow M_2=2^2-1=3$$
$$n=3 \Rightarrow M_3=2^3-1=7$$
$$n=5 \Rightarrow M_5=2^5-1=31$$
$$n=7 \Rightarrow M_7=2^7-1=127$$
$$n=13 \Rightarrow M_{13}=2^{13}-1=8191$$
$$\vdots$$
$$n=257 \Rightarrow M_{257}=2^{257}-1$$

مرسن چند اشتباه صادقانه داشت. ابتدا این که او به خطا تصور کرد که $M_{67}=2^{67}-1$ و $M_{257}=2^{257}-1$ عددهایی اول هستند. دیگر این که $M_{61}=2^{61}-1$ و $M_{89}=2^{89}-1$ و $M_{107}=2^{107}-1$ را جزو اعداد اول به حساب نیاورده بود.

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، بعضی از ریاضیدانان با بهره‌گیری از استدلال استقرایی (استقرای ناقص)، حکم‌هایی را صادر می‌کردند که در حالت کلی درست نبودند؛ زیرا آن‌ها با بررسی آزمایش‌های محدودی به یک نتیجهٔ کلی می‌رسیدند و می‌دانیم که چنین نتیجه‌هایی ممکن است با یک مثال نقض باطل شوند.

استدلال استقرایی

استدلال استقرایی، به طور معمول با مقایسهٔ مشاهده‌ها و نتیجه‌های ناشی از آزمایش‌های محدودی آغاز می‌شود. سپس نتیجهٔ این آزمایش‌ها را به همهٔ پدیده‌های مشابه تعمیم می‌دهند. استدلال استقرایی، اثبات دقیق ریاضی محسوب نمی‌شود؛ زیرا مجموعه مشاهدات ما همواره محدود است و نمی‌توانیم آزمایش را روی همهٔ پدیده‌ها انجام دهیم. فقط روش خوبی برای حدس زدن است و برای اثبات درستی این حدس، باید از اصول استقرای ریاضی استفاده کرد.

اصل استقرای ریاضی

فرض کنیم نردبانی با تعداد نامتناهی پله و از لحاظ فیزیکی در حالت تعادل موجود باشد. به نظر شما با چه ویژگی‌هایی می‌توان از این نردبان بالا رفت؟

در جواب ممکن است بگویید:

روی هر پله‌ای که هستیم باید بتوانیم از آن به روی پلهٔ بلافاصله بعد از آن برویم. یا فاصلهٔ بین پله‌ها باید طوری باشد که امکان دستیابی از هر پله به پلهٔ بعدی میسّر باشد.

این جواب‌ها کامل نیستند! ابتدا باید بگوییم که در مرحلهٔ اول باید پایمان روی پلهٔ اول برسد. سپس در مرحلهٔ بعدی بگوییم که اگر پایمان روی هر پله (برای مثال پله kام) رسید، آن‌گاه بتوانیم از روی آن به پلهٔ بلافاصلهٔ بعدی (یعنی پله $k+1$ ام) برویم. با این دو ویژگی می‌توان از نردبان تا بی‌نهایت بالا رفت.

این سؤال را برای این مطرح کردیم که اصل استقرای ریاضی را با یک مثال عملی به ذهن بسپارید تا آن را فراموش نکنید. اصل استقرای ریاضی به صورت زیر است:

اصل استقرای ریاضی

هر زیر مجموعه S از N که دارای دو خاصیت زیر باشد، با مجموعهٔ $\mathbb{N}$ برابر است:

۱. $1\in S$

۲. هرگاه $n\in S$، آن‌گاه $(n+1)\in S$.

معادل اصل استقرای ریاضی

فرض کنید، p(n) حکمی دربارهٔ عدد طبیعی n باشد. برای اثبات درستی این حکم به کمک معادل اصل استقرای ریاضی، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحلهٔ اول: حکم باید به ازای $n=1$ درست باشد.

مرحلهٔ دوم: *فرض استقرا*: فرض می‌کنیم که حکم به ازای $n=k; (k\in\mathbb{N})$ درست باشد.

مرحلهٔ سوم: حکم *استقرا*: ثابت می‌کنیم که حکم برای $n=k+1$ درست است.

مرحلهٔ چهارم: در این صورت، حکم برای هر عدد طبیعی n درست است.

مثال: با استفاده از اصل استقرای ریاضی برای عدد طبیعی n ثابت کنید:

الف) $1+2+3+\dots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

ب) $2+4+6+\dots+2n=n(n+1)$

ج) $(1+a)^n \ge 1+na(a\ge -1)$

د) $\log x^n = n\log x\,(x>0)$

هـ) $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=(\frac{n(n+1)}{2})^2$

و) $(2n)!<2^{2n}(n!)^2$

ز) $\frac{1}{3\times 8}+\frac{1}{8\times 13}+\dots+\frac{1}{(5n-2)(5n+3)}=\frac{n}{3(5n+3)}$

حل : الف) برای این که نشان دهیم حکم برای $n=1$ درست است، کافی است از طرف چپ برابری حکم، جملهٔ اول را انتخاب کنیم و به جای n در طرف راست برابری حکم، عدد ۱ را قرار دهیم:

$n=1:1=\frac{1}{2}\times 1\times(1+1)=1$ درست است

برای نوشتن فرض استقرا، کافی است به جای n در صورت مسأله، k را قرار دهیم:

$n=k:1+2+3+\dots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$ فرض استقرا

برای نوشتن حکم استقرا باید به جای n در صورت مسأله، $(k+1)$ را قرار دهیم

$n=k+1:1+2+3+\dots+k+(k+1)=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ حکم استقرا

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، در طرف چپ برابری حکم استقرا، قبل از جملهٔ $(k+1)$ ام، جمله kام را می‌نویسیم. برای اثبات درستی حکم استقرا، با یک مقایسه با فرض استقرا، درمی‌یابیم که باید به دو طرف فرض، $(k+1)$ را اضافه کنیم. بنابراین داریم:

$$1+2+3+\dots+k+(k+1)=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1) \quad (1)$$

ملاحظه می‌کنیم که طرف چپ برابری حکم به دست آمده است. اکنون با انجام عملیاتی، طرف راست برابری (۱) را به صورت طرف راست برابری حکم می‌نویسیم:

$$1+2+3+\dots+k+(k+1)=(k+1)\left(\frac{1}{2}k+1\right)=(k+1)\left(\frac{k+2}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

پس حکم برای هر عدد طبیعی n برقرار است.

ب) $n=1:2=1(1+1)=2$ درست است

$n=k:2+4+6+\dots+2k=k(k+1)$ فرض استقرا

$n=k+1:2+4+6+\dots+2k+2(k+1)=(k+1)(k+2)$ حکم استقرا

به دو طرف فرض $2(k+1)$ را اضافه می‌کنیم:

$$2+4+6+\dots+2k+2(k+1)=k(k+1)+2(k+1)$$
$$=(k+1)(k+2)$$

پس حکم برای هر $n\in\mathbb{N}$ برقرار است.

ج)

$n=1:(1+a)^1\ge 1+1\times a \Rightarrow 1+a\ge 1+a$

درست است

$n=k:(1+a)^k\ge 1+ka$ فرض استقرا

$n=k+1:(1+a)^{k+1}\ge 1+(k+1)a$ حکم استقرا

دو طرف فرض را در $(1+a)$ ضرب می‌کنیم:

$$(1+a)(1+a)^k \ge (1+a)(1+ka)$$
$$\Rightarrow (1+a)^{k+1}\ge 1+a+ka+ka^2$$

با مقایسهٔ نابرابری اخیر و حکم استقرا ملاحظه می‌کنیم که برای اثبات حکم باید، نابرابری زیر برقرار باشد:

$$1+a+ka+ka^2\ge 1+(k+1)a$$
$$\Rightarrow 1+a+ka+ka^2\ge 1+ka+a \Rightarrow ka^2\ge 0$$

نابرابری آخر، همواره درست است؛ پس حکم استقرا برای هر $n\in\mathbb{N}$ برقرار است.

د) $n=1:\log x^1=1\times\log x$ درست است

$n=k:\log x^k=k\log x$ فرض استقرا

$n=(k+1):\log x^{(k+1)}=(k+1)\log x$ حکم استقرا

به دو طرف فرض، logx را اضافه می‌کنیم:

$$\log x+\log x^k=\log x+k\log x$$
$$\Rightarrow \log x\times x^k=(k+1)\log x$$
$$\Rightarrow \log x^{(k+1)}=(k+1)\log x$$

پس حکم استقرا برای هر $n \in \mathbb{N}$ برقرار است.

هـ) درست است $n=1: 1^3 = (\frac{1(1+1)}{2})^2 = 1$

فرض استقرا $n=k: 1^3+2^3+3^3+\dots+k^3 = (\frac{k(k+1)}{2})^2 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$

حکم استقرا $n=(k+1): 1^3+2^3+3^3+\dots+k^3+(k+1)^3 = (\frac{(k+1)(k+2)}{2})^2 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

به دو طرف فرض استقرا، $(k+1)^3$ را اضافه می‌کنیم:

$$1^3+2^3+3^3+\dots+k^3+(k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

پس حکم استقرا به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ برقرار است:

و) $n=1: (2\times 1)! < 2^{2\times 1}(1!)^2 \ ;\ 2<4$

فرض استقرا $n=k: (2k)! < 2^{2k}(k!)^2$

حکم استقرا $n=(k+1): (2(k+1))! < 2^{2(k+1)}((k+1)!)^2 \ ;$

$$(2k+2)! < 2^{2k+2}[(k+1)!]^2$$

دو طرف فرض استقرا را در $(2k+1)(2k+2)$ ضرب می‌کنیم:

$$(2k+2)(2k+1)(2k)! < (2k+2)(2k+1)2^{2k}(k!)^2$$

$$(2k+2)! < 2(k+1)(2k+1)2^{2k}(k!)^2$$

اکنون برای برقراری حکم استقرا، باید نشان دهیم:

$$2(k+1)(2k+1)2^{2k}(k!)^2 < 2^{2k+2}[(k+1)!]^2 \quad (1)$$

$$\Rightarrow 2(k+1)(2k+1)2^{2k}(k!)^2 < 2^{2k}\times 2^2(k+1)^2(k!)^2$$

$$\Rightarrow 2k+1 < 2(k+1) \Rightarrow 1<2$$

چون نابرابری آخر، همواره درست است، پس نابرابری (۱) برقرار می‌باشد؛ درنتیجه، حکم استقرا به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ برقرار است.

ز) درست است $n=1: \frac{1}{3\times 8} = \frac{1}{3(5\times 1+3)} = \frac{1}{3\times 8}$

فرض استقرا $n=k$:

$$\frac{1}{3\times 8}+\frac{1}{8\times 13}+\dots+\frac{1}{(5k-2)(5k+3)} = \frac{k}{3(5k+3)}$$

حکم استقرا $n=k+1$:

$$\frac{1}{3\times 8}+\frac{1}{8\times 13}+\dots+\frac{1}{(5k-2)(5k+3)}+\frac{1}{(5k+3)(5k+8)} = \frac{k+1}{3(5k+8)}$$

دو طرف فرض استقرا را با $\frac{1}{(5k+3)(5k+8)}$ جمع می‌کنیم:

$$\frac{1}{3\times 8}+\frac{1}{8\times 13}+\dots+\frac{1}{(5k-2)(5k+3)}+\frac{1}{(5k+3)(5k+8)}$$

$$= \frac{k}{3(5k+3)}+\frac{1}{(5k+3)(5k+8)} = \frac{k(5k+8)+3}{3(5k+3)(5k+8)}$$

$$= \frac{5k^2+8k+3}{3(5k+3)(5k+8)} = \frac{(5k+3)(k+1)}{3(5k+3)(5k+8)} = \frac{k+1}{3(5k+8)}$$

درنتیجه، حکم برای هر $n \in \mathbb{N}$ برقرار است.

مثال: ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n، 5^n-1 بر ۴ بخش‌پذیر است.

حل: ابتدا حکم استقرا را به زبان ریاضی می‌نویسیم: برای هر عدد طبیعی n داریم:

$5^n-1=4k;\ (k\in Z)$

$n=1: 5^1-1=4k$ درست است

فرض استقرا $n=k:\ 5^k-1=4k_1$

حکم استقرا $n=k+1:\ 5^{k+1}-1=4k_2$

دو طرف فرض را در ۵ ضرب می‌کنیم. بنابراین داریم:

$5^{k+1} - 5 = 20k_1;\ 5^{k+1} - 1 = 20k_1 + 4;$

$5^{k+1} - 1 = 4\underbrace{(5k_1 + 1)}_{k_2 \in Z} = 4k_2$

درنتیجه، حکم برای هر $n \in \mathbb{N}$ برقرار است.

مثال: ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n، $4^n + 15n - 1$ بر ۹ بخش‌پذیر است.

حل: ابتدا حکم استقرا را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

برای هر عدد طبیعی n داریم:

$4^n + 15n - 1 = 9k;\ (k \in Z)$

درست است $n = 1:\ 4^1 + 15\times 1 - 1 = 9k;\ 18 = 9k$

فرض استقرا $n = k:\ 4^k + 15k - 1 = 9k_1$

حکم استقرا $n = (k+1):\ 4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = 9k_2$

$\Rightarrow 4^{k+1} + 15k + 14 = 9k_2$

دو طرف فرض را در ۴ ضرب می‌کنیم:

$4(4^k + 15k - 1) = 36k_1;\ 4^{k+1} + 60k - 4 = 36k_1$

$4^{k+1} + 15k + 45k - 4 + 18 = 36k_1 + 18$

$4^{k+1} + 15k + 14 = 36k_1 + 18 - 45k$

$4^{k+1} + 15k + 14 = 9\underbrace{(4k_1 + 2 - 5k)}_{k_2 \in Z} = 9k_2$

درنتیجه، حکم برای هر $n \in \mathbb{N}$ برقرار است.

مثال: ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n، $9^{n+1} - 8n - 9$ بر ۶۴ بخش‌پذیر است.

حل:

$9^{n+1} - 8n - 9 = 64k;\ (k \in Z)$

درست است $n = 1:\ 9^{1+1} - 8\times 1 - 9 = 64k;\ 64 = 64k$

فرض استقرا $n = k:\ 9^{k+1} - 8k - 9 = 64k_1$

حکم استقرا $n = (k+1):$

$9^{k+2} - 8(k+1) - 9 = 64k_2;\ \Rightarrow 9^{k+2} - 8k - 17 = 64k_2$

دو طرف فرض استقرا را در ۹ ضرب می‌کنیم:

$9(9^{k+1} - 8k - 9) = 576k_1;\ 9^{k+2} - 72k - 81 = 576k_1$

$9^{k+2} - 8k - 17 = 576k_1 + 64k + 64$

$9^{k+2} - 8k - 17 = 64\underbrace{(9k_1 + k + 1)}_{k_2 \in Z} = 64k_2$

درنتیجه، حکم برای هر $n \in \mathbb{N}$ برقرار است.

مثال: حاصل حدّ زیر را بیابید.

$$A = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right)$$

حل: ابتدا مجموع جملات را با استفاده از استدلال استقرایی حدس می‌زنیم. سپس حدس خود را به کمک معادل اصل استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم و با استفاده از آن، این حدّ را محاسبه می‌کنیم.

$$n = 1:\ \frac{1}{1\times 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$n = 2:\ \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} = \frac{2}{3} = \frac{2}{2+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$n = 3:\ \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} = \frac{3}{4} = \frac{3}{3+1} = \frac{n}{n+1}$$

با ادامهٔ روند استدلال استقرایی می‌توان حدس زد که مجموع جملات این حد برابر با $\frac{n}{n+1}$ است. اکنون حدس خود را به کمک معادل اصل استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم:

$$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

درست است $n = 1:\ \frac{1}{1\times 2} = \frac{1}{1+1}$

فرض استقرا $n = k:\ \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$

حکم استقرا $n = (k+1):\ \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \ldots +$

$$\frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

به دو طرف فرض استقرا $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ را اضافه می‌کنیم:

$$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

پس حکم برای هر $n \in \mathbb{N}$ برقرار است. درنتیجه به درستی حدس خود پی می‌بریم و از آن در محاسبهٔ حد به صورت زیر استفاده می‌کنیم: $A = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$

ادامه دارد.

زیرنویس

1. pierre fermat 2. Marin Mersenne

تابع های متناوب و روش های محاسبهٔ دورهٔ تناوب آن ها

برای دانش آموزان سال سوم متوسطه

هوشنگ شرقی

در شمارهٔ قبل، دربارهٔ تابع های متناوب بحث کردیم و ۱۲ روش از روش های محاسبهٔ دورهٔ تناوب آن ها را بیان کردیم. اکنون مطلب را ادامه می دهیم:

۱۳. اگر f و g توابعی متناوب با دورهٔ تناوب T_1 و T_2 باشند و T_1 و T_2 دارای کوچک‌ترین مضرب مشترک نباشند (مثلاً یکی گویا و دیگری گنگ باشد)، آن گاه $f \pm g$ و $f.g$ و f/g متناوب نیستند.

مثال: توابع $f(x)=\sin 2x$ و $g(x)=\cos \pi x$ هر دو متناوب و به ترتیب با دورهٔ تناوب $T_1=\pi$ و $T_2=2$ هستند. ولی مجموع آن‌ها، یعنی تابع با ضابطهٔ $h(x)=\sin 2x+\cos \pi x$ متناوب نیست.

۱۴. توابع با ضابطهٔ $f(x)=kx-[kx]$ و $f(x)=[kx]+[-kx]$ با دورهٔ تناوب $T=\frac{1}{k}$ $(k \neq 0)$ متناوبند.

$$f(x)=kx-[kx] \Rightarrow f(x+t)=k(x+t)-[k(x+t)]$$
$$=kx+kt-[kx+kt]=f(x)=kx-[kx] \Rightarrow$$
$$kt-[kx+kt]=0-[kx]$$

اگر $Kt \in Z$ باشد، می‌تواند از جزء صحیح خارج و از Kt بیرون جزء صحیح کم شود و یک برابری صحیح به‌دست آید. بنابراین، به ازای $Kt \in Z$ تابع متناوب است و چون کوچک‌ترین عدد صحیح و مثبت ۱ است. پس $Kt=1$ و $t=\frac{1}{k}$ استدلال برای تابع دوم، به عهدهٔ خواننده است.

مثال: دورهٔ تناوب هریک از توابع زیر را به‌دست آورید:

1) $f(x)=2x-[2x]$

2) $f(x)=tg\frac{\pi x}{2}+[3x]+[-3x]$

3) $f(x)=tg\pi x-\cot g\pi x+3x-[3x]$

حل:

۱. مطابق قضیهٔ گفته شده، داریم: $T=\frac{1}{2}$

۲. برای $tg\frac{\pi x}{2}$، $T_1=2$ و برای $[3x]+[-3x]$،

$T_2 = \frac{1}{3}$ است و از آن‌جا:

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = 2 = \frac{6}{3} \\ T_2 = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow T = \frac{6}{3} \quad T = 2$$

۳. برطبق قضیهٔ ۱۱، تابع $g(x) = tg\pi x - \cot g\pi x$ با دورهٔ تناوب $T_1 = \frac{1}{2}$ متناوب است و $h(x) = 3x - [3x]$ نیز، با دورهٔ تناوب $T_2 = \frac{1}{3}$ متناوب است. بنابراین، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = \frac{1}{2} = \frac{3}{6} \\ T_2 = \frac{1}{3} = \frac{2}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow T = \frac{6}{6} \quad T = 1$$

تمرین: دورهٔ تناوب توابع زیر را به‌دست آورید:

۱) $f(x) = 3x - [3x] - \sin^3 \frac{\pi x}{6}$

۲) $f(x) = 5x - [3x] - [2x] + \sin^2 \frac{\pi x}{2}$

۳) $f(x) = [4x] + [-4x] + tg\frac{\pi x}{3} - \cot g\frac{\pi x}{3} - \left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|$

۱۵. تابع با ضابطهٔ $f(x) = (-1)^{kx}$ با دورهٔ تناوب $T = \frac{2}{k}$ متناوب است (برهان به عهدهٔ خواننده).

مثال۱: دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x) = (-1)^{2x}$ برابر با $T = \frac{2}{2} = 1$ است.

مثال: دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x) = (-1)^x(x - [x])$ را به‌دست آورید.

حل: تابع با ضابطهٔ $(-1)^x$ با دورهٔ تناوب $T_1 = 2$ متناوب است و تابع با ضابطهٔ $x - [x]$ با دورهٔ تناوب $T_2 = 1$ متناوب است. بنابراین: $T=2$

تمرین: دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $g(x) = (-1)^{2x}([3x] + [-3x])$ را به دست آورید.

۱۶. تابع ثابت، تابعی است متناوب با دورهٔ تناوب هر عدد حقیقی و مثبت.

برهان: روشن است که برای $f(x) = c$، $f(x+t) = c$ است. پس همواره $f(x+t) = f(x)$ کافی است $T > 0$ باشد.

این نمونه، نشان می‌دهد که ممکن است کوچک‌ترین دورهٔ تناوب را نتوان مشخص کرد.

حالت‌های خاص در تعیین دورهٔ تناوب توابع

طبقه‌بندی حالت‌های گوناگون در تعیین دورهٔ تناوب توابع، نمی‌تواند تمام کنندهٔ بحث باشد و در همه حال، باید نگاهی هم به تعریف اصلی تابع متناوب داشت. مثال‌های زیر می‌توانند گویای این مطلب باشند.

مثال: می‌خواهیم دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x)=tgx.cotgx$ را تعیین کنیم.

حل: اگر به این تابع، به چشم یک تابع مثلثاتی مرکب از tgx و cotgx بنگریم، شاید بتوان در نظر اول، دورهٔ تناوب آن را $T = \pi$ گرفت. ولی با کمی دقت می‌توان دریافت که با تبدیل x به $x + \frac{\pi}{2}$، tgx به cotgx- و cotgx به tgx- تبدیل می‌شوند. بنابراین حاصل ضرب آن‌ها تغییری نمی‌کند. یعنی: $f(x + \frac{\pi}{2}) = f(x)$. که دورهٔ تناوب آن، $T = \frac{\pi}{2}$ است. از طرف دیگر، ممکن است به نظر آید که این تابع، با تابع ثابت $f(x)=1$ برابر است که در این صورت دورهٔ تناوب آن، هر عدد حقیقی و مثبتی می‌تواند باشد. ولی چنین نیست. چراکه دامنهٔ تعریف این تابع با دامنهٔ تعریف تابع ثابت $f(x)=1$ یکسان نیست.

نمودار این تابع، ما را به درستی نتیجه‌گیری خود مطمئن می‌سازد؛ ابتدا دامنهٔ تعریف این تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x) = tgx \cot gx \Rightarrow \sin x \neq 0 \;,\; \cos x \neq 0$$

$$\Rightarrow x \neq k\pi \;,\; x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$$

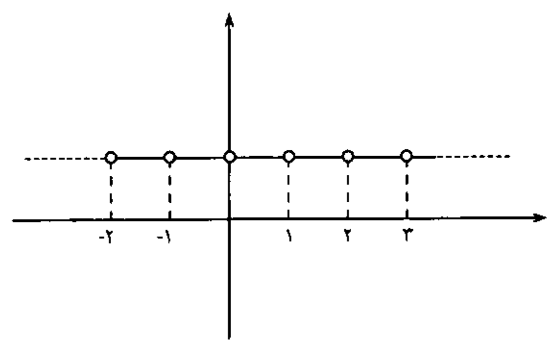
مجموعه جواب مخرج کسرها را، می‌توان به صورت $x=\frac{k\pi}{۲}$ در نظر گرفت؛ یعنی:

$$D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{k\pi}{۲} | k\in Z\right\}$$

بنابراین، تابع فوق با تابع معرفی شده در زیر، برابر است:

$$f(x)=۱ \quad x\neq \frac{k\pi}{۲} \quad k\in Z$$

و نمودار آن، همان خط راست y=۱ است که در $x=\frac{k\pi}{۲}$ دارای نقاط انفصال است:



و این نمودار نشان می‌دهد که دورهٔ تناوب تابع $\frac{\pi}{۲}$ است.

مثال: می‌خواهیم دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sin^۴ x+\cos^۲ x$ را تعیین کنیم.

حل: اگر از قضیه‌های ۲ و ۴ برای به‌دست آوردن دورهٔ تناوب این تابع استفاده کنیم، به‌دست می‌آید: $T=\pi$. که دورهٔ تناوبی برای f به حساب می‌آید. ولی کوچک‌ترین دورهٔ تناوب این تابع $T=\frac{\pi}{۲}$ است؛ زیرا $f(x+\frac{\pi}{۲})=\cos^۴ x+\sin^۲ x$ که به صورت زیر می‌توان ثابت کرد، برابر ضابطهٔ f(x) است:

$$\cos^۴ x+\sin^۲ x=(۱-\sin^۲ x)^۲+\sin^۲ x=$$
$$۱+\sin^۴ x-۲\sin^۲ x+\sin^۲ x=\sin^۴ x+۱-\sin^۲ x=$$
$$\sin^۴ x+\cos^۲ x=f(x)$$

چند تعریف دیگر

تابع پاد متناوب یا ضد متناوب(۱)

تابع f را پاد متناوب گوئیم؛ هرگاه برای هر $x\in D_f$، حداقل یک مقدار مثبت T یافت شود؛ به قسمی که: f(x+T)=f(x). T را دورهٔ تناوب آن می‌خوانیم.

برای مثال تابع f با ضابطهٔ f(x)=sinx و دورهٔ تناوب $T=\pi$، پاد متناوب است. یعنی:

$$f(x+\pi)=\sin(x+\pi)=-\sin x=-f(x)$$

تمرین۱: نشان دهید هریک از توابع $f(x)=\cos ۲x$ و $g(x)=tg^۳ x$ پاد متناوب هستند و دورهٔ تناوب آن‌ها را به‌دست آورید.

تمرین۲: ثابت کنید توابع با ضابطه‌های $f(x)=\sin^۲ x$ و $g(x)=x-[x]$ پاد متناوب نیستند؛ ولی تابع با ضابطهٔ $f(x)=(-۱)^x$ پاد متناوب است.

تابع شبه‌متناوب(۲)

تابع f را شبه‌متناوب گوئیم؛ هرگاه برای هر $x\in D_f$، دو مقدار مثبت T و T′ وجود داشته باشند؛ به قسمی که داشته باشیم:

$$f(x+t)=f(x)+T'$$

برای مثال، تابع f با ضابطهٔ $f(x)=[x]$ شبه متناوب است و در آن $T=T'=۱$؛ زیرا اگر $f(x+t)=f(x)+T'$ باشد، می‌توان نوشت:

$$[x+T]=[x]+T'$$

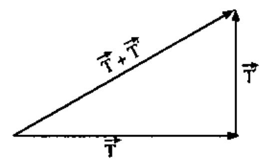
به روشنی می‌توان تشخیص داد که لازم است $T=T'\in Z$ باشد و از آن جا کوچک‌ترین مقدار T و T′ مساوی ۱ است.

تمرین: نشان دهید توابع با ضابطه‌های $f(x)=x+[x]$ و $g(x)=x+\sin x$ هردو شبه متناوب هستند و مقادیر T و T′ را برای آن‌ها بیابید.

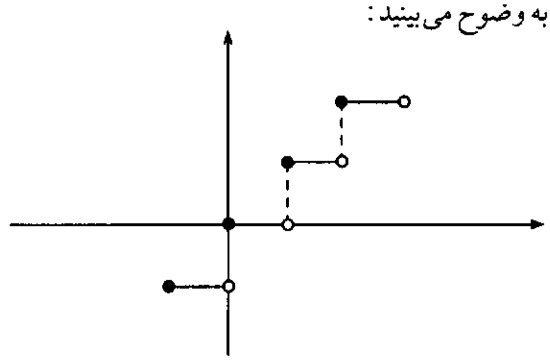
۱۷. تعبیر هندسی تابع شبه‌متناوب

تابع شبه‌متناوب نیز مانند تابع متناوب، خاصیت انتقالی دارد و نمودار آن را می‌توان در یک فاصله به طول T رسم

کرد. (مثلاً در فاصلهٔ $[0,T]$)، آن‌گاه آن را با یک بردار در جهت محور xها، به اندازهٔ طول T و با بردار دیگری در جهت محور yها به اندازهٔ طول T'، انتقال داد. یا این‌که با بردار برآیند این دو بردار، انتقال داد:

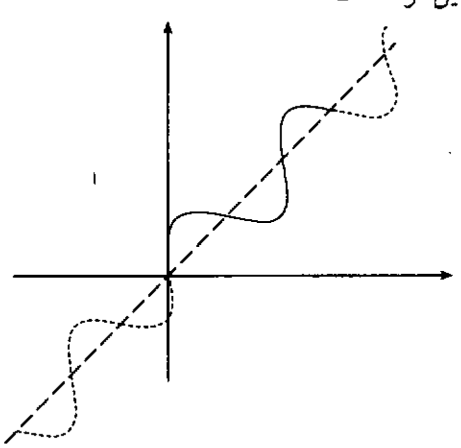


این موضوع را در نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = [x]$، به وضوح می‌بینید:



هریک از پاره‌خط‌ها را می‌توان با یک بردار به طول $\sqrt{2}$ در امتداد خطی که با محور xها زاویهٔ 45° می‌سازد، رسم کرد تا تمام نمودار تابع به دست آید:

همچنین در تابع شبه‌متناوب $f(x)=x+\sin x$ نیز همین گونه است:



در واقع، اگر این تابع حول محور xها و محور yها 45° در جهت مثبت مثلثاتی دوران کند، نمودار آن، به یک تابع متناوب تبدیل می‌شود.

ادب ریاضی

[illegible] در حَسَنی از خود نشان نمی‌داد. تا این‌که از حسنِ اتفاق، یکی از همسالانش با او به زدوخورد پرداخت و بر او غلبه کرد؛ به زبان ساده‌تر، کتک مفصلی به او زد. راهی برای انتقام مستقیم نبود؛ زیرا حریف خیلی از نیوتون نیرومندتر بود. ناچار تصمیم گرفت، رقیب را در درس عقب بگذارد. با این هدف، جدیت بیش‌تری در درس از خود نشان داد و چنان شوق و ذوقی به کار برد که شاگرد اول مدرسه شد. حق با فیگ‌لیؤ است. وی دربارهٔ نوجوانی که نیوتون را کتک زد، گفته است: «هیچ‌کس چنین مشت موفقیت‌آمیزی نزده است.»

جواب:

جدول ریاضی

کامران مرادی

افقی

۱. ⁕ اگر $f(x) = x + \frac{۱}{x}$ باشد، حاصل $۳۰f(f(۳)) + ۵۰$ چه قدر است؟

⁕ اگر $۳۶ = \binom{n}{۲} - p(n,۲)$ باشد، حاصل $\binom{n}{۶}$ چه قدر است؟

⁕ نامعادلهٔ «$x + y + z \leq ۱۴$» چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

۲. ⁕ $\overline{abcdef}$ عددی است ۶ رقمی، به طوری که $\overline{ab}$ و $\overline{cd}$ و $\overline{ef}$ اعداد فرد متوالی هستند و مجموعشان ۶۹ است و $\overline{ab} < \overline{cd} < \overline{ef}$.

⁕ حاصل مقدار مقابل چه قدر است؟

$$\binom{۱۲}{۹} + \binom{۱۲}{۱۰} + \binom{۱۳}{۱۱} + \binom{۱۴}{۱۲}$$

۳. ⁕ حاصل $۸۳۵^{۱۳۸۰} \overset{۱۳۸۰}{\equiv} ?$ چه قدر است؟

⁕ اگر $f(x) = x^۵$ باشد، حاصل $۳۷f(f'(۱) - ۳)$ چه قدر است؟

۴. ⁕ تعداد زیر مجموعه‌های ۳ عضوی از یک مجموعهٔ ۱۵ عضوی.

۵. ⁕ به چند طریق می‌توان ۳ کتاب از ۵ کتاب سال اول و ۴ کتاب از ۶ کتاب سال دوم را در قفسه‌ای چید.

⁕ مجموع مقسوم‌علیه‌های ۴۳۲ .

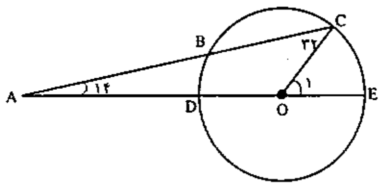
۶. ⁕ $۱۰x_۱ + x_۲$ به طوری که $x_۱ < x_۲$ و $x_۲$ و $x_۱$ جواب معادلهٔ $x^۲ - ۱۲x + ۳۵ = ۰$ باشند.

اگر از یک صفحهٔ فلزی به مساحت ۱۵۰π یک قوطی استوانه‌ای شکل به حجم ماکزیمم بسازیم، اگر حجم این استوانه برابر با $a\pi$ باشد، آنگاه a چه قدر است؟

⁕ عدد N در مبنای ۲ برابر است با ۱۱۰۰۰۱۱ . همین عدد در مبنای ۸ برابر است با a، $a - ۱$ چه قدر است؟

۷. ⁕ $۱۰x + y$ به طوری که x,y جواب معادله‌های
$\begin{cases} ۵x + y = ۳۲ \\ x - y = ۴ \end{cases}$ باشند.

⁕ اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{BD}$ در شکل زیر:



۸. ⁕ در یک تقسیم، اگر ۱۰۰ واحد به مقسوم و یک واحد به مقسوم‌علیه اضافه کنیم، خارج قسمت تغییر نمی‌کند و باقی‌مانده ۲ واحد زیاد می‌شود. اگر خارج قسمت a باشد، $۸a + ۳۲$ چه قدر است؟

⁕ اگر $a \times ۱۳۷۷$ مربع کامل باشد، آنگاه کوچک‌ترین عدد a چه قدر است؛ $۳a$ را در جدول بنویسید.

۹. ⁕ به چند طریق می‌توان ۹ مهرهٔ متمایز را به طوری در ۶ جعبه قرار داد که در هر جعبه حداکثر ۹ مهره قرار بگیرد.

⁕ کوچک‌ترین عددی که بر همهٔ اعداد یک رقمی بخش‌پذیر است، برابر است با a. حاصل $۲a + ۳$ را بنویسید.

۱۰. ⁕ تعداد روابط بازتابی روی یک مجموعهٔ ۴ عضوی

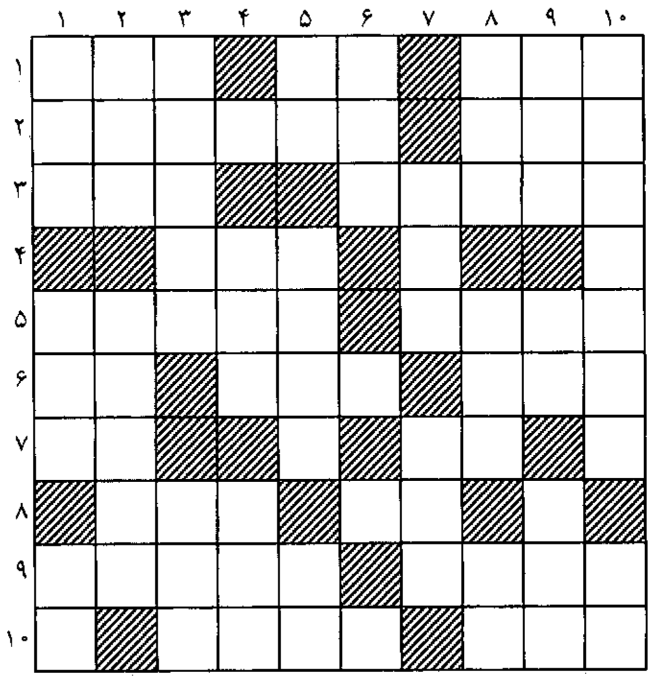
⁕ تعداد روابط پاد متقارن روی یک مجموعهٔ ۳ عضوی

عمودی

۱. ⁕ اگر $\int \frac{x + ۱}{x + ۴}\,dx = f(x) - g(x)$ باشد، $۸f(۱۲) = ?$.

⁕ تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعهٔ هشت عضوی چندتاست؟

⁕ در یک درخت از مرتبهٔ ۱۲ ، به طور کلی چند مسیر وجود دارد؟



۲. * حاصل $130+\begin{vmatrix}15&0&10\\3&4&1\\0&4&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}10&3&12\\1&2&3\\0&1&3\end{vmatrix}$ چه قدر است؟

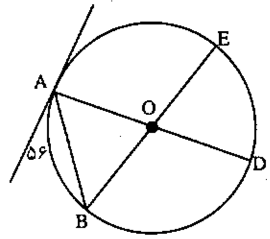
* به چند طریق می‌توان، ۴ دختر و ۵ پسر را طوری در کنار هم و در یک ردیف قرار داد که دخترها کنار هم باشند؟

۳. * اگر $f(x)=x^2(x+1)^2+x^2$ باشد، حاصل $100f(f(1))+46$ چه قدر است؟

ـ رقم‌های ۳، ۲، ۱ را رقم‌های آبی و رقم‌های ۵، ۴ را رقم‌های قرمز و رقم‌های ۶، ۷، ۸، ۹ را رقم‌های سبز می‌نامیم. حالا بگویید چند عدد سه رقمی غیر همرنگ می‌توان ساخت.

۴. * اعداد ۱ تا ۶ را مرتب می‌کنیم، تعداد حالاتی که اعداد فرد در کنار هم و اعداد زوج در کنار هم هستند، برابر a است. $7a-2$ چه قدر است؟

۵. * در شکل مقابل اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{AE}$ برابر است با a است، مقدار $10a$ چه قدر است؟



* $10x+y$ به طوری که x و y از معادله‌های روبه‌رو به دست می‌آیند: $\begin{cases}2x+3y=22\\3x+2y=28\end{cases}$

* مجموع اعداد ۱ تا ۱۰۰

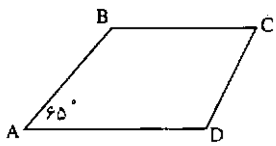
* دو رقم سمت راست حاصل $2^{20}+33$

۶. * مجموع یازده عدد اول تصاعد زیر:

۱, ۸, ۱۶, ۲۴, ...

۷. * در یک گراف کامل از مرتبهٔ ۱۰، a دور به طول ۳ وجود دارد. $a+1$ چه قدر است؟

* اگر چهار ضلعی ABCD قابل محاط در یک دایره باشد، اندازهٔ زاویهٔ C چه قدر است؟



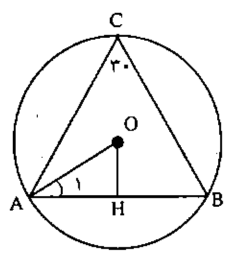
۸. * تعداد مقسوم‌علیه‌های صحیح و مثبت عدد $2^8\times3^5\times5^3\times7^2$

* در یک گراف کامل مرتبهٔ ۸، a دور به طول ۳ وجود دارد. $4a-6$ چه قدر است.

* دو رقم سمت راست عدد $3^{20}+1$.

۹. * حجم کره‌ای به شعاع ۶ برابر است با a. $a-10$ چه قدر است؛ در صورتی که $\pi=3$

ـ اندازهٔ A_1 برابر است با a. $a-16$ چه قدر است؟



* زاویهٔ بین دو نیم مماس بر منحنی $y=\sqrt{x^3-3x^2}$ برابر است با a. $4a+1$ چه قدر است؟

۱۰. * دو رقم سمت راست $49^{578}+4$

* تعداد روابط متقارن روی یک مجموعهٔ چهار عضوی

* چند نقطه با مختصات صحیح و مثبت بر صفحهٔ $x+y+z=10$ واقع است.

آیا قاعده هوپیتال همیشه کارآمد است؟!

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L \quad !??$$

در شمارهٔ قبل قاعده هوپیتال و شرایط استفاده از این قاعده بررسی شد، همچنین با چند هشدار تذکرهای لازم را در استفاده از این قاعده بیان کردیم، اینک در ادامهٔ مطلب :

قسمت دوم

مجتبی معارف‌وند
دبیر ریاضی اسلامشهر

برای دانش آموزان سال سوم و دورهٔ پیش دانشگاهی

معجون هوپیتال و روش‌های دیگر

در محاسبهٔ حدود، گاه استفادهٔ مکرر از قاعدهٔ هوپیتال به‌تنهایی کارآمد و ثمربخش نیست. درحالی‌که به‌کارگیری روش‌های دیگری چون «تغییر متغییر»، «جانشانی مثلثاتی» و... به همراه قاعدهٔ هوپیتال می‌تواند راه‌گشا باشد و ما را به سر منزل مقصود رهنمون شود.

به نمونه‌های زیر توجه کنید:

مثال ۱۱ . مطلوب است محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x}$.

حل: حد فوق، حالت مبهم $\frac{0}{0}$ را دارد، قاعدهٔ هوپیتال را به‌کار می‌بریم:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}}}{1}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x^2}=$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}}}{2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{-1}{x}}}{2x^3}=\cdots$$

و پس از n مرحله کاربرد قاعدهٔ هوپیتال، به کسر $\frac{e^{\frac{-1}{x}}}{n!x^{n+1}}$ می‌رسیم. نتیجه می‌گیریم هرگز رفع ابهام

نخواهد شد. درحالی‌که با تغییر متغییر سادهٔ $t=\frac{1}{x}$ و یک‌بار کاربرد قاعدهٔ هوپیتال، نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود؛ توجه کنید:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-t}}{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^t}=0$$

مثال ۱۲. مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to 0}\frac{\cot x}{\cot 2x}$.

حل: حد فوق، حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ را دارد، قاعدهٔ هوپیتال را به‌کار می‌بریم:

یادآوری:

$$\csc x=\frac{1}{\sin x}\to(\csc x)'=-\csc x\cot x;(\cot x)'=-\csc^2 x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cot x}{\cot 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\csc^2 x}{2\csc^2 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\csc^2 x.\cot x}{\csc^2 2x.\cot 2x}=\cdots$$

هر کاربرد قاعدهٔ هوپیتال، به صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ منجر می‌شود درحالی‌که با استفادهٔ ترکیبی از جانشانی مثلثاتی و قاعده هوپیتال، حد مذکور به‌راحتی محاسبه می‌شود؛ توجه کنید:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cot x}{\cot 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\tan x}}{\frac{1}{\tan 2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\tan x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2(1+\tan^2 2x)}{1+\tan^2 x}=2$$

مثال ۱۳. مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{\sqrt{\sin x}}-\frac{1}{\sqrt{x}})$.

حل: حد فوق، حالت مبهم $\infty-\infty$ را دارد و می‌توان آن را به صورت $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}\sqrt{\sin x}}$ نوشت و به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ تبدیل کرد. استفادهٔ مکرر از قاعدهٔ هوپیتال ثمربخش نیست. درحالی‌که گویا کردن و ضرب صورت و مخرج در عبارتی یکسان به‌همراه هوپیتال می‌تواند راه‌گشا باشد، توجه کنید:

$$\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{\sqrt{\sin x}}-\frac{1}{\sqrt{x}})=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}\sqrt{\sin x}}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}\sqrt{\sin x}}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}+\sqrt{\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\sin x}{x\sqrt{\sin x}+\sqrt{x}\sin x}\times\frac{\frac{1}{x^{3/2}}}{\frac{1}{x^{3/2}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x-\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}}{\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}}+\frac{\sin x}{x}}(\circledast)$$

حال از آن‌جا که داریم:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}}+\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{\sin x}{x}}+\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=2$$

اکنون کافی است سعی کنیم حد صورت کسر $(\circledast)$ را بیابیم.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\frac{3}{4}x^{\frac{-1}{2}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{4}{3}\sqrt{x}\sin x=0$$

بنابراین طبق قضیهٔ حد خارج قسمت، حد کسر $(\circledast)$ برابر صفر است و درنتیجه:

$$\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{\sqrt{\sin x}}-\frac{1}{\sqrt{x}})=0$$

تمرین ۲. مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to 0^+}x^2\ln\sin x$.

قاعدهٔ هوپیتال، ملال‌آور و خسته کننده

در بعضی مسائل، استفاده از قاعدهٔ هوپیتال میسر است، اما استفاده از آن به‌طور مکرر، گاه ملال‌آور و خسته‌کننده است و گاه مسأله را دشوارتر می‌کند. درحالی‌که روش‌های دیگر می‌توانند مفیدتر، مؤثرتر و ساده‌تر باشند و ما را سریع‌تر به‌جواب رهنمون شوند. به این نمونه‌ها توجه کنید:

مثال ۱۴. مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{10}-3\sin x}{3x^5+4x^{10}}$.

حل: صورت و مخرج کسر فوق را بر x^{10} تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{10}-3\sin x}{3x^5+4x^{10}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-(\frac{3\sin x}{x^{10}})}{\frac{3}{x^5}+4}=\frac{1}{4}$$

درحالی‌که استفادهٔ مکرر (۱۰ مرتبه) از قاعدهٔ هوپیتال بسیار ملال‌آور و خسته‌کننده خواهد بود.

مثال ۱۵. مطلوب است محاسبهٔ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x.\tan 2x.\tan 3x\cdots\tan nx}{x^n}.$$

حل: کسر فوق را به صورت زیر تفکیک می‌کنیم و از قضیهٔ $\lim_{u\to 0}\frac{\tan u}{u}=1$ سود می‌بریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x.\tan 2x.\tan 3x\cdots\tan nx}{x^n}=$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}.\frac{2\tan 2x}{2x}.\frac{3\tan 3x}{3x}\cdots\frac{n\tan nx}{nx}$$

درحالی‌که n بار استفاده از قاعدهٔ هوپیتال، هم خسته‌کننده است و هم در هر مرحله، کار سخت‌تر، دشوارتر و پیچیده‌تر خواهد شد.

عدم کارایی قاعده هوپیتال

گاه در بعضی مسائل از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم، اما رفع ابهام صورت نمی‌گیرد. چندین بار قاعده را به کار می‌بریم، اما باز هم نتیجه‌ای حاصل نمی‌آید و صورت‌های مبهم همچنان تکرار می‌شوند. در مواردی نیز صورت مسأله به مسأله‌ای بسیار پیچیده‌تر بدل می‌شود. درحالی‌که با استفاده از روش‌های دیگری چون تغییر متغییر، جانشانی مثلثاتی، «گویا کردن»، «حذف عامل ابهام از صورت و مخرج» و... بدون هیچ نیازی به قاعدهٔ هوپیتال، حدود مورد نظر به سادگی و زیبایی محاسبه می‌شوند. به این نمونه‌ها توجه کنید:

مثال ۱۶. مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

حل: حد فوق، حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ را دارد. قاعدهٔ هوپیتال را به کار می‌بریم.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\cdots$$

همان طور که مشاهده می‌شود، استفادهٔ مکرر از قاعدهٔ هوپیتال سودی ندارد و دچار مشکل می‌شویم. درحالی‌که با یک فاکتورگیری ساده و حذف عامل ابهام از صورت و مخرج، حد کسر فوق به سادگی محاسبه می‌شود. ملاحظه کنید:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2(\frac{1}{x^2}+1)}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=1$$

مثال ۱۷. مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\sec x}$.

حل: حد فوق، حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ را دارد. قاعدهٔ هوپیتال را به کار می‌بریم:

یادآوری:

$$\sec x=\frac{1}{\cos x}\to(\sec x)'=\sec x.\tan x;(\tan x)'=\sec^2 x$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\sec x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x}{\sec x.\tan x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec x}{\tan x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec x.\tan x}{\sec^2 x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\sec x}=\cdots$$

همان طور که مشاهده می شود، استفادهٔ مکرر از قاعدهٔ هوپیتال ثمربخش نیست و دچار مشکل می شویم.

درحالی که یک جانشانی مثلثاتی، محاسبهٔ حد فوق را زیبا و ساده می کند. ملاحظه کنید:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\sec x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x.\cos x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$$

مثال ۱۸. مطلوب است محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{10x+1}}{x+1}$.

حل: حد فوق، حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ را دارد. قاعدهٔ هوپیتال را به کار می بریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{10x+1}}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{10}{2\sqrt{10x+1}}}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{10\sqrt{x+1}}{\sqrt{10x+1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{10}{2\sqrt{x+1}}}{\frac{10}{2\sqrt{10x+1}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{10x+1}}{\sqrt{x+1}}=\cdots$$

همان طور که مشاهده می شود، استفادهٔ مکرر از قاعدهٔ هوپیتال به نتیجه نمی انجامد و دچار مشکل می شویم، درحالی که فاکتورگیری و حذف عامل ابهام از صورت و مخرج کسر می تواند راه گشا باشد. ملاحظه کنید:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{10x+1}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x(10+\frac{1}{x})}}{\sqrt{x(1+\frac{1}{x})}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\sqrt{10+\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{10+\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\sqrt{10}$$

تمرین ۳. مطلوب است محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x}+5}$.

تمرین ۴. مطلوب است محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2+x^2}}{x}$.

تمرین ۵. مطلوب است محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\csc x}{\cot x}$.

تمرین ۶. مطلوب است محاسبهٔ

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\sin(\sin x)}-\frac{1}{\sin(\sin(\sin x))}\right)$$

راهنمایی: قاعدهٔ هوپیتال برای محاسبهٔ این حد کارایی ندارد. سعی کنید از روش دیگری آن را محاسبه کنید.

نتیجه گیری

ریاضیات اقیانوس بیکرانی از مسائل و حل آن هاست و اصل ها، تعریف ها، مفهوم ها، قضیه ها، برهان ها، نظریه ها، دستورها و روش ها، همگی برای حل مسائل موجودیت یافته اند. اما آیا این قضیه ها و دستورها همیشه و برای همهٔ مسائل کارامد هستند؟ آیا نباید شرایط و ضوابط حاکم بر آن ها، مورد توجه قرار گیرند؟

قاعدهٔ هوپیتال، نمونه ای از این قضیه هاست که قدرت و کارایی فوق العاده و معجزه آسایی در محاسبهٔ حدود مبهم دارد و انکار آن کاری عبث و بیهوده است. اما دارای شرایط و ضوابط خاصی است که در حین استفاده، باید مورد توجه قرار گیرند و نیز باید پذیرفت که در حل برخی از مسائل، محاسبهٔ حدود، نه تنها مفید و کارامد نیست، بلکه باعث پیچیدگی و دشواری بیش تر مسأله می شود. درحالی که

روش‌ها و دستورات دیگری می‌توانند به سهولت و زیبایی مسأله را حل کنند. بنابراین، در برخورد با مسائل ریاضی، باید خود را به ابزار، قضیه‌ها و شیوه‌های گوناگونی مجهز کنیم و با فکر و اندیشه‌ای باز، برای حل هر مسأله، از راه و روش و ابزار مناسب آن سود بریم. به امید کسب چنین توانایی و مهارتی.

منابع

۱. تلگینی، محمود و خردپژوه، فروزان و رجالی، علی وقیاسیان، احمد. حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱) و (۲). چاپ پنجم. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. ۱۳۷۸.

۲. هاورد و. ایوز. آشنایی با تاریخ ریاضیات. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. جلد دوم. چاپ اول. مرکز نشر دانشگاهی تهران. ۱۳۶۸.

۳. تمپل بل، اریک. ریاضی‌دانان نامی. ترجمهٔ حسن صفاری. چاپ سوم. امیرکبیر. ۱۳۷۱.

۴. (زیر نظر) بیرشک، احمد. خلاصهٔ زندگینامهٔ علمی دانشمندان. چاپ اول. شرکت انتشارات علمی و فرهنگی بنیاد. دانشنامه فارسی. ۱۳۷۴.

۵. آیرس، فرانک. نظریه و مسائل حساب دیفرانسیل و انتگرال. ترجمهٔ علی‌اکبر عالم‌زاده و غلامرضا زباندان. چاپ اول. فارابی. ۱۳۷۲.

۶. جهانشاهی، محمد. اصول فراگیری و آموزش ریاضیات دبیرستانی و پیش‌دانشگاهی. چاپ اول. مدرسه. ۱۳۷۷.

۷. آپوستل، تام. م. حساب دیفرانسیل و انتگرال. ترجمهٔ علیرضا ذکایی و همکاران. جلد اول. چاپ چهارم. مرکز نشر دانشگاهی. ۱۳۶۹.

۸. نیکولسکی، اس. ام. دوره‌ای بر آنالیز ریاضی. ترجمهٔ بهمن هنری و همکاران. چاپ اول. دانشگاه امام رضا(ع). ۱۳۷۶.

۹. استورات، جیمز. حسابگان دیفرانسیل و انتگرال. ترجمهٔ محمدحسین علامت‌ساز و همکاران. جلد اول. چاپ دوم. دانشگاه اصفهان. ۱۳۷۸.

۱۰. آذرپناه، فریبرز. روش‌های تحدید حد و تعویض متغیر در محاسبهٔ حد. رشد آموزش ریاضی. شمارهٔ ۴۹، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. پائیز ۱۳۷۶.

۱۱. پارزینسکی، ویلیام ر. وزیپس، فیلیپ. آشنایی با آنالیز ریاضی. ترجمهٔ سید محمود طالبیان. چاپ دوم. آستان قدس رضوی. ۱۳۷۵.

۱۲. توماس، جرج. بی و فینی، راس. ال. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی. ترجمهٔ علی‌اکبر عالم‌زاده و داریوش بهمردی. جلد اول. چاپ چهارم. پژوهش. ۱۳۷۲.

۱۳. بارتل، رابرت. جی، دانلدر، شربرت. آشنایی با آنالیز حقیقی. ترجمهٔ دکتر طاهر قاسمی هنری و دکتر حکیمه ماهیار. چاپ اول. مبتکران. ۱۳۷۸.

نتایج بازی فوتبال

این جدول، رده‌بندی مسابقهٔ فوتبالی را که طی شش بازی انجام گرفته است، بین تیم‌های (الف)، (ب)، (ج) و (د) نشان می‌دهد. در این مسابقه، هر تیم با سه تیم حریف بازی کرده است. به نظر شما نتایج دو به دوی تیم‌ها چیست؟

	برد	باخت	تساوی	گل زده	گل خورده
الف	۲	۰	۱	۵	۲
ب	۲	۱	۰	۶	۳
ج	۱	۲	۰	۱	۳
د	۰	۲	۱	۰	۴

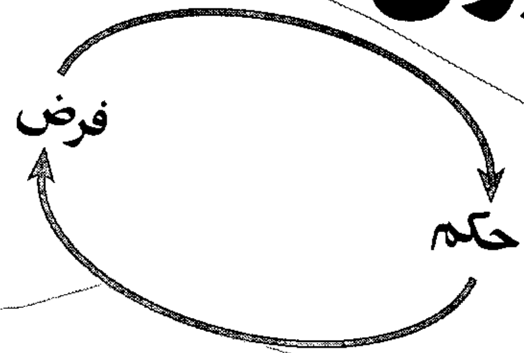
الف) ب = ــــ - ــــ   ب) ج = ــــ - ــــ

الف) ج = ــــ - ــــ   ب) د = ــــ - ــــ

الف) د = ــــ - ــــ   ج) د = ــــ - ــــ

پرویز شهریاری

پیشامد نامنتظر در قضیهٔ وارون



برای دانش‌آموزان سال اوّل و دوم متوسطه

می‌دانیم قضیهٔ وارون یک قضیه، قضیه‌ای است که حکم آن، فرض قضیهٔ اصلی، و فرض آن، حکم قضیهٔ اصلی باشد. در این‌جا شش قضیهٔ مستقیم داده شده است. همهٔ آن‌ها ساده و برای دانش‌آموزان سال‌های اول دبیرستان شناخته شده‌اند. تلاش کنید وارون این قضیه را تنظیم و ثابت کنید. شما درمی‌یابید که وارون قضیه‌ها، به مراتب از قضیه‌های مستقیم دشوارترند.

قضیه‌های مستقیم

۱. در ذوزنقه، پاره‌خط راستی که میان دو قاعده را به هم وصل کند، ذوزنقه را به دوشکل هم ارز (با مساحت‌های برابر) تقسیم می‌کند.

۲. در متوازی‌الاضلاع، مجموع فاصله‌های بین میان‌های ضلع‌های روبه‌رو، برابر با نصف محیط است.

۳. اگر H نقطهٔ برخورد ارتفاع‌ها در مثلث با زاویه‌های حادهٔ ABC باشد، داریم:

$$H\hat{B}A = H\hat{C}A \quad , \quad H\hat{A}B = H\hat{C}B$$

۴. اگر O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد، آن‌وقت:

$$O\hat{A}B - O\hat{B}A = O\hat{B}C - O\hat{C}B = O\hat{C}A - O\hat{A}C$$

۵. در مثلث متساوی‌الساقین، مرکز دایرهٔ محاطی مثلث، روی «خط راست اویلر» است (خط راست اویلر، خط راستی است که از نقطهٔ برخورد میانه‌ها و مرکز دایرهٔ محیطی مثلث گذشته باشد.)

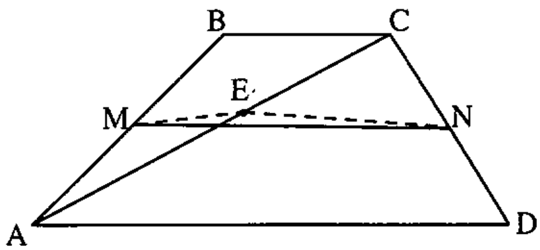
۶. در مثلث متساوی‌الساقین، نیمسازها زاویه‌های مجاور به قاعده با هم برابرند.

راهنمایی برای اثبات قضیه‌های وارون

۱. در چهارضلعی ABCD، نقطهٔ M را وسط AD و نقطهٔ N را وسط BC بگیرید. ثابت کنید مساحت مثلث ABN با مساحت مثلث DCN برابر است. در این صورت، AD با BC موازی، یعنی ABCD ذوزنقه است.

۲. ثابت کنید چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است (شکل ۱). نقطه‌های M ، N و E را وسط پاره‌خط‌های راست AB ، DC و AC بگیرید. در این صورت AD موازی EN و طول EN برابر نصف طول AD خواهد شد. همچنین، BC موازی ME و طول ME برابر نصف طول BC خواهد شد. از آن‌جا که:

$MN \le ME + EN$



شکل ۱

پس: $MN \le \frac{AD+BC}{۲}$. L و K را وسط‌های ضلع‌های BC و AD بگیرید. شبیه پیش به‌دست می‌آید: $LK \le \frac{AB+CD}{۲}$.

بنا به فرض: $MN + LK = \frac{AB+BC+CD+AD}{۲}$

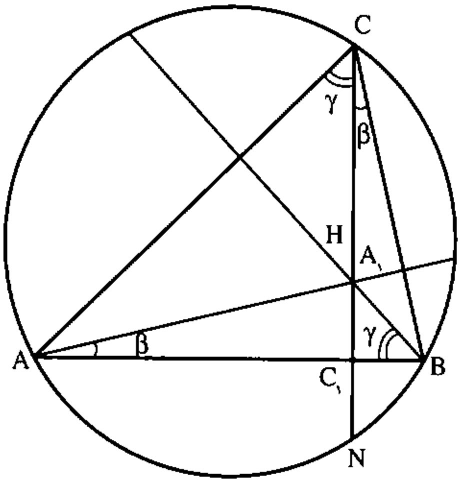
بنابراین باید این دو برابری درست باشد:

$MN = \frac{AD+BC}{۲}\ ,\ LK = \frac{AB+CD}{۲}$

و این تنها وقتی ممکن است که نقطهٔ مورد نظر به پاره‌خط‌های راست MN و LK متعلق باشد. از این جا:

$BC \parallel MN \parallel AD\ ,\ AB \parallel LK \parallel CD$

۳. دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم کنید و پاره‌خط راست $CC_۱$ را تا نقطهٔ N، محل برخورد با دایره امتداد دهید (شکل ۲).



شکل ۲

ثابت کنید، اگر داشته باشید:

$H\hat{A}B = H\hat{C}B\ ,\ H\hat{B}A = H\hat{C}A$

آن‌وقت نقطهٔ H، محل برخورد ارتفاع‌های مثلث با زاویه‌های حادهٔ ABC است. چون $B\hat{A}N = B\hat{C}N$ ، پس $H\hat{A}B = B\hat{A}N$ ؛ به همین ترتیب $H\hat{B}A = A\hat{B}N$ که از آن نتیجه می‌شود: $C_۱H$ بر AB عمود است. ثابت کنید زاویهٔ $AA_۱C$ برابر ۹۰ درجه است. زاویهٔ HAC را α ، زاویهٔ $HAC_۱$ را زاویهٔ β و زاویهٔ HBA را γ بنامید. چون مثلث $ACC_۱$ قائم‌الزاویه است،

پس: $\alpha + \beta + \gamma = ۹۰^\circ$

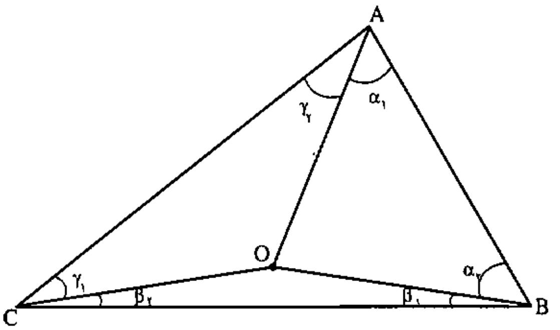
از قائم‌الزاویه بودن مثلث $CC_۱B$ استفاده و ثابت کنید: زاویهٔ HBC برابر α است. زاویهٔ $AA_۱B$ را برابر x می‌گیریم. در مثلث $AA_۱B$ داریم:

$x + \alpha + \beta + \gamma = ۱۸۰^\circ$

که از آن برای x، مقدار ۹۰ درجه به دست می‌آید.

۴. ثابت کنید، نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC است (شکل ۳).

زاویه‌هایی را که در فرض مسأله نام برده شده است، $\alpha_۱$ ، $\alpha_۲$ ، $\beta_۱$ ، $\beta_۲$ ، $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ می‌نامیم. برای معلوم بودن



شکل ۳

وضع، فرض می‌کنیم:

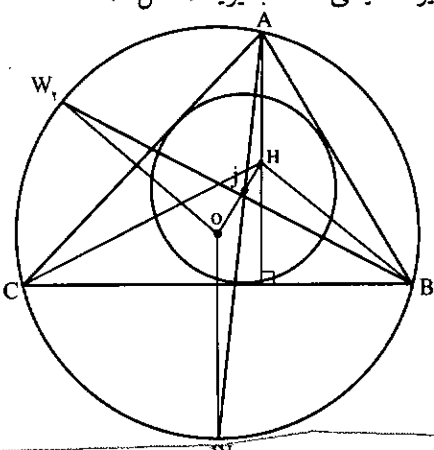
$$\alpha_1 > \alpha_2,\ \beta_1 > \beta_2,\ \gamma_1 > \gamma_2$$

در این صورت، با توجه به شکل داریم:

$$OB > OA,\ OC > OB,\ OA > OC$$

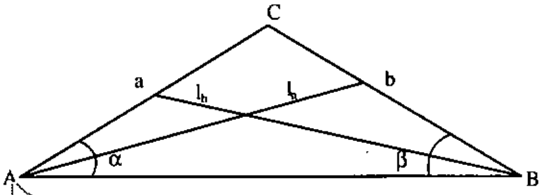
که از آن به‌دست می‌آید: $OB > OC$ و به تناقض می‌رسیم.

۵. ثابت کنید اگر مرکز دایرهٔ محاطی در مثلث، یعنی j روی خط راست اویلر باشد، مثلث، متساوی‌الساقین است. O را مرکز دایرهٔ محیطی، J را مرکز دایرهٔ محاطی، H را نقطهٔ برخورد ارتفاع‌ها، M را وسط ضلع BC، W_1 را نقطهٔ برخورد نیمساز زاویهٔ BAC با محیط دایرهٔ محیطی مثلث AB، و W_2 را نقطهٔ برخورد نیمساز زاویهٔ ABC با محیط دایرهٔ محیطی مثلث بگیرید (شکل ۴).



شکل ۴

به مثلث‌های متشابه OW_1J، HAJ، OW_2J و HBJ توجه کنید: به دست می‌آورید: AC=BC.



شکل ۵

۶. تنظیم قضیهٔ وارون به این ترتیب است: اگر در مثلث ABC، نیمسازهای درونی L_a و L_b برابر باشند، ضلع‌های ba هم طولی برابر دارند: a=b (شکل ۵).

اثبات را با برهان خُلف انجام می‌دهیم. برای نمونه فرض کنید: a>b. در این صورت $\alpha > \beta$ (در مثلث زاویهٔ بزرگ‌تر روبه‌روی ضلع بزرگ‌تر است). طول نیمساز در مثلث با این دستورها به دست می‌آید:

$$L_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2},\ L_b = \frac{2ac}{a+c}\cos\frac{\beta}{2}$$

این دو دستور را ثابت کنید.

چون $\alpha > \beta$ و در ضمن $\pi > \alpha > 0$ و $0 < \beta < \pi$، بنابراین $\cos\frac{\alpha}{2} < \cos\frac{\beta}{2}$. به جز این، $\frac{b}{b+c} < \frac{a}{a+c}$. در واقع.

$$\frac{a}{a+c} - \frac{b}{b+c} = \frac{c(a-b)}{(a+c)(b+c)} > 0$$

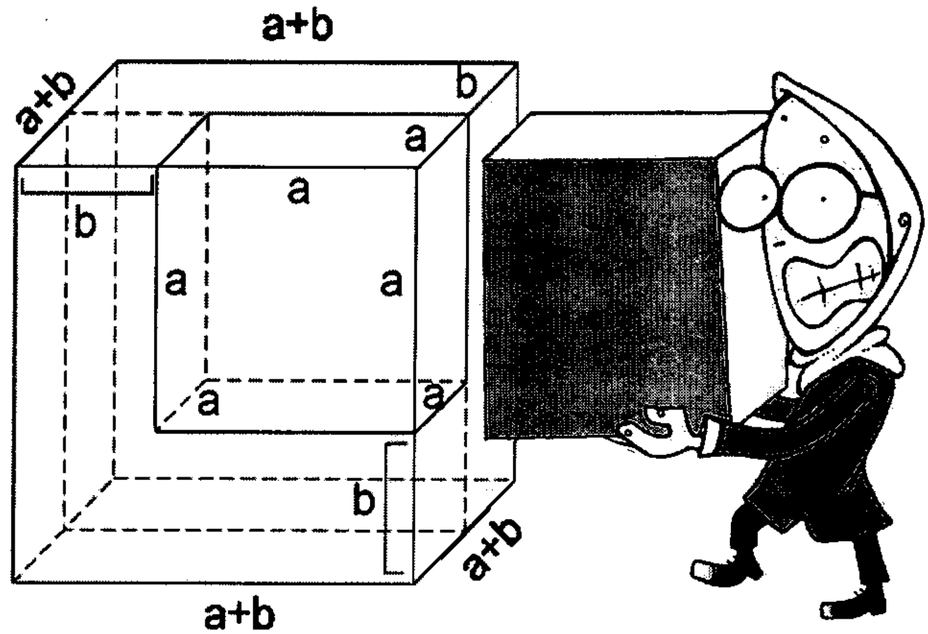
بنابراین به‌دست می‌آید: $L_a < L_b$ که با فرض تناقض دارد.

این‌ها نمونه‌هایی از قضیه‌هایی هستند که اثبات وارون آن‌ها، دشوار است. آیا شما چنین قضیه‌هایی را به‌خاطر دارید؟

اثبات اتحادها به کمک هندسه

برای دانش‌آموزان سال اول متوسطه

احمد قندهاری



مثال۱ : تساوی $۴x - ۱۲ = ۰$ را در نظر می‌گیریم. اگر بنویسیم: $۴x = ۱۲$، و دو طرف تساوی را بر ۴ تقسیم کنیم، آن‌گاه $x = ۴$ عدد ۴، تنها عددی است که اگر به جای x در تساوی $۴x - ۱۲ = ۰$ قرار گیرد، تساوی برقرار است.

مثال۲ : حال اگر تساوی $(۲x - ۴)(x - ۵) = ۰$ را در نظر بگیریم، باتوجه به این که وقتی حاصل ضرب دو پرانتز برابر صفر است، می‌گوییم: یا پرانتز اول برابر صفر است یا پرانتز دوم، لذا می‌نویسیم:

الف) $۲x - ۴ = ۰ \Rightarrow ۲x = ۴ \Rightarrow x = ۲$

یا

ب) $x - ۵ = ۰ \Rightarrow x = ۵$

اعداد ۲ و ۳، تنها دو عددی هستند که اگر هریک از آن‌ها را در تساوی $(۲x - ۴)(x - ۵) = ۰$ قرار دهیم، تساوی برقرار خواهد شد. تساوی $۴x - ۱۲ = ۰$ و تساوی $(۲x - ۴)(x - ۵) = ۰$ را «معادله» می‌گوییم. پس معادله، یک تساوی است که به ازای یک، دو یا چند مقدار مشخص که همان جواب یا جواب‌های معادله هستند، برقرار است.

تساوی $۴x - ۱۲ = ۰$ را معادلهٔ درجه اول و تساوی $(۲x - ۴)(x - ۵) = ۰$ را معادلهٔ درجه دوم می‌گوییم.

اتحاد

مثال۱ : تساوی $x^۲ - ۹ = (x - ۳)(x + ۳)$ را در نظر می‌گیریم. اگر در این تساوی، به‌جای x عدد ۲ را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$۴ - ۹ = (۲ - ۳)(۲ + ۳) \Rightarrow -۵ = -۵$$

حال اگر به جای x، عدد ۷- را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$۴۹ - ۹ = (-۷ - ۳)(-۷ + ۳) \Rightarrow ۴۰ = ۴۰$$

چنانچه به جای x، عدد $\frac{۵}{۲}$ را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\frac{۲۵}{۴}-۹=(\frac{۵}{۲}-۳)(\frac{۵}{۲}+۳)$$
$$\Rightarrow \frac{۲۵-۳۶}{۴}=(\frac{۵-۶}{۲})(\frac{۵+۶}{۲})$$
$$\Rightarrow \frac{۱۱}{۴}=(\frac{-۱}{۲})(\frac{۱۱}{۲})\Rightarrow \frac{۱۱}{۴}=\frac{۱۱}{۴}$$

و اگر به جای x، $\sqrt{۳}$ را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$(\sqrt{۳})^۲-۹=(\sqrt{۳}-۳)(\sqrt{۳}+۳)$$
$$\Rightarrow ۳-۹=۳+۳\sqrt{۳}-۳\sqrt{۳}-۹$$
$$\Rightarrow -۶=-۶$$

ملاحظه می‌کنیم، اگر در تساوی بالا به جای x، هر عددی را قرار دهیم، دو طرف تساوی به دو عدد مساوی تبدیل می‌شود که در این صورت می‌گوییم، تساوی برقرار است.

تساوی $x^۲-۹=(x-۳)(x+۳)$ را اتحاد می‌گوییم و برای آن که تفاوتی با معادله داشته باشد، بهتر است بنویسیم:

$$x^۲-۹\equiv(x-۳)(x+۳)$$

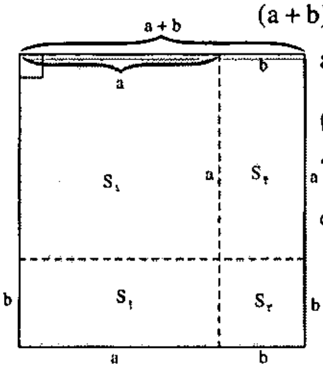
تعریف اتحاد

اگر دو طرف یک تساوی، به ازای همهٔ مقادیر عددی که به‌جای حرف یا حروف آن قرار دهیم؛ به دو عدد مساوی تبدیل شوند. آن را «اتحاد» می‌گوییم در این مقاله قصد داریم، همهٔ اتحادهای اصلی را به کمک هندسه ثابت کنیم.

۱. اثبات اتحاد اول (مربع مجموع دو جمله):

$$(a+b)^۲\equiv a^۲+b^۲+۲ab$$

مربعی به ضلع a+b مطابق شکلِ مقابل رسم می‌کنیم. با توجه به اندازه‌هایی که در شکل نشان داده شده است، می‌توان نوشت:



$(a+b)^۲$ = اندازهٔ مساحت مربع اصلی

= مجموع اندازه‌های شکل‌های داخل مربع اصلی

$S_۱+S_۲+S_۳+S_۴$

= مجموع اندازه‌های شکل‌های داخل مربع اصلی

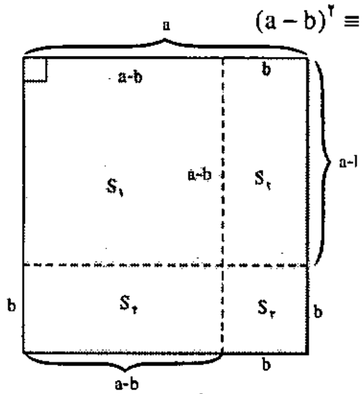
$a^۲+ab+b^۲+ab=a^۲+b^۲+۲ab$

$$\Rightarrow \boxed{(a+b)^۲\equiv a^۲+b^۲+۲ab}$$

۲. اثبات اتحاد دوم (مربع تفاضل دو جمله):

$$(a-b)^۲\equiv a^۲+b^۲-۲ab$$

مربعی به ضلع a را مطابق شکل در نظر می‌گیریم. به اندازه‌هایی که در شکل نوشته شده است، توجه فرمایید.



$a^۲$ = اندازهٔ مساحت مربع اصلی

= مجموع اندازه‌های مساحت‌های درون مربع اصلی

$S_۱+S_۲+S_۳+S_۴$

= مجموع اندازه‌های مساحت‌های درون مربع اصلی

$(a-b)^۲+b(a-b)+b^۲+b(a-b)\Rightarrow$

$(a-b)^۲+b(a-b)+b^۲+b(a-b)=a^۲$

$(a-b)^۲+ab-b^۲+b^۲+ab-b^۲=a^۲$

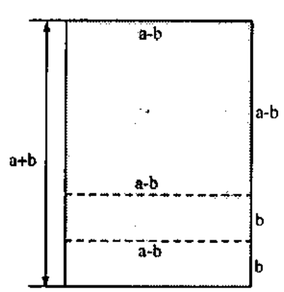
$\Rightarrow (a-b)^۲+۲ab-b^۲=a^۲$

$$\Rightarrow \boxed{(a-b)^۲\equiv a^۲+b^۲-۲ab}$$

۳. اثبات اتحاد سوم (اتحاد مزدوج):

$$a^۲-b^۲\equiv(a+b)(a-b)$$

مستطیلی به اضلاع (a-b) و (a+b)، مطابق شکل در نظر می‌گیریم. به اندازه‌هایی که در شکل نوشته شده است، توجه فرمایید.



اندازهٔ مساحت مستطیل اصلی $= (a-b)(a-b)$

مجموع اندازه‌های شکل‌های داخل مستطیل اصلی =

$(a-b)^2 + b(a-b) + b(a-b)$

$$\Rightarrow (a-b)(a+b) = (a-b)^2 + b(a-b) + b(a-b)$$

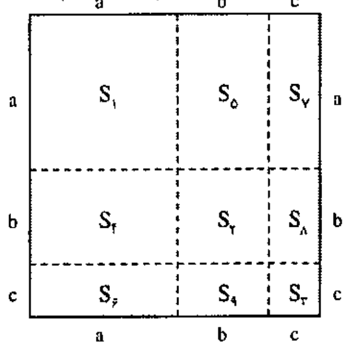
$$\Rightarrow (a-b)(a+b) = a^2 + b^2 - 2ab + ab - b^2 + ab - b^2$$

$$\Rightarrow \boxed{a^2 - b^2 \equiv (a-b)(a+b)}$$

۴. اثبات اتحاد چهارم (مربع مجموع سه جمله):

$$(a+b+c)^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc)$$

مربعی به ضلع (a+b+c) مطابق شکل رسم می‌کنیم. با توجه به اندازه‌هایی که در شکل نشان داده شده است، می‌توان نوشت:



اندازهٔ مساحت مربع اصلی $= (a+b+c)^2$

$= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7 + S_8 + S_9$

مجموع اندازه‌های شکل‌های داخل مربع

$= a^2 + b^2 + c^2 + ab + ab + ac + ac + bc + bc$

مجموع اندازه‌های شکل‌های داخل مربع

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

مجموع اندازه‌های شکل‌های داخل مربع

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc)$

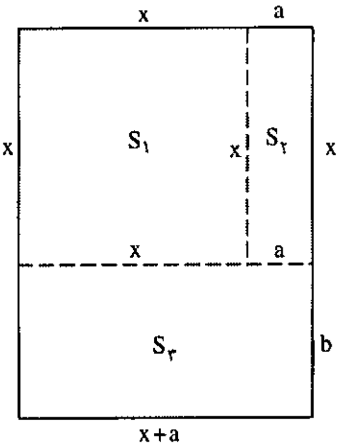
مجموع اندازه‌های شکل‌های داخل مربع

$$\boxed{(a+b+c)^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc)}$$

۵. اثبات اتحاد جمله مشترک:

$$(x+a)(x+b) \equiv x^2 + (a+b)x + ab$$

مستطیلی به اضلاع (x+a) و (x+b) مطابق شکل رسم می‌کنیم. به اندازه‌هایی که در شکل نوشته شده است، توجه فرمایید.



اندازهٔ مساحت مستطیل اصلی $= (x+a)(x+b)$

$= S_1 + S_2 + S_3$

مجموع اندازه‌های شکل‌های داخل مستطیل اصلی

$= x^2 + ax + b(x+a)$

مجموع اندازه‌های شکل‌های داخل مستطیل اصلی

$= x^2 + ax + bx + ab$

مجموع اندازه‌های شکل‌های داخل مستطیل اصلی

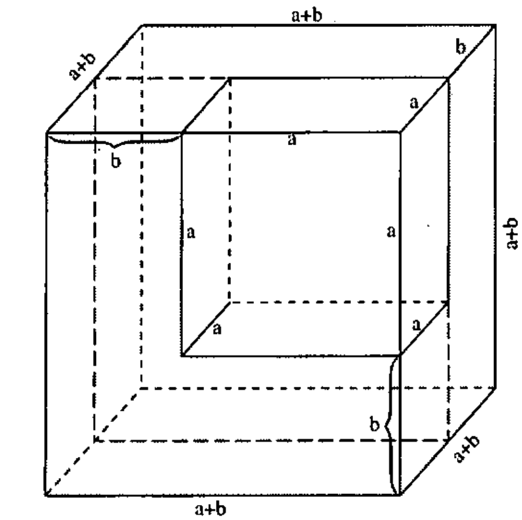
$= x^2 + (a+b)x + ab \Rightarrow$

مجموع اندازه‌های شکل‌های داخل مستطیل اصلی

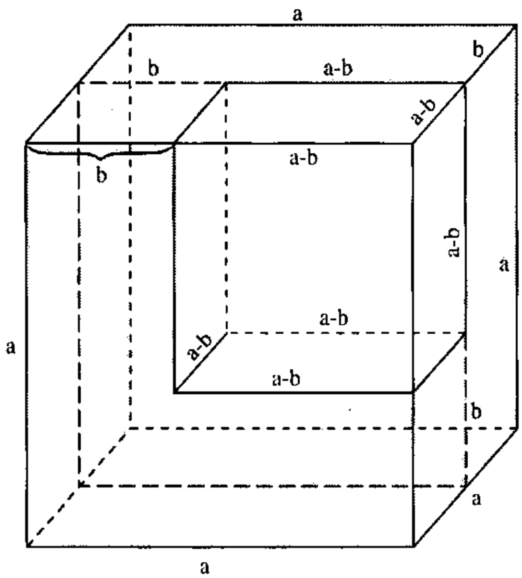
$$\boxed{(x+a)(x+b) \equiv x^2 + (a+b)x + ab}$$

۶. اثبات اتحاد مکعب مجموع دو جمله:

$$(a+b)^3 \equiv a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$$



مکعبی به طول یال (a+b) مطابق شکل در نظر می‌گیریم. تصور فضایی این نتایج قدری مشکل است، مگر آن‌که جسم را بسازیم. به هرحال، در داخل جسم حاصل یک مکعب به طول یال a، یک مکعب به طول یال b وسه مکعب مستطیل به طول یال‌های (a+b)، a و b وجود دارد.



با توجه به این‌که اگر طول یال مکعبی x باشد، حجم آن x^3 است و اگر طول یال‌های مکعب مستطیلی x، y و z باشد، حجم آن، x.yz است، پس می‌توان نوشت:

$(a+b)^3$ = اندازهٔ حجم مکعب اصلی

$a^3+b^3+3ab(a+b) \Rightarrow$ = مجموع اندازه‌های حجم‌های مکعب‌ها و مکعب مستطیل داخلی

$$(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b) \Rightarrow$$

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3+b^3+3a^2b+3ab^2}$$

۷. اثبات اتحاد مکعب تفاضل دو جمله:

$$(a-b)^3 \equiv a^3-b^3-3a^2b+3ab^2$$

مکعبی به طول یال a می‌سازیم. سپس در گوشهٔ مکعب شکل، مکعبی به طول یال (a-b) می‌سازیم. مطابق شکل، همان‌طوری که قبلاً گفته شد، تصور فضایی آن فوق‌العاده مشکل است. بنده خودم مکعب‌ها را با این شرایط ساختم و به نتایج زیر دست یافتم.

در داخل مکعب اصلی، یک مکعب به طول یال (a-b)، یک مکعب به طول یال b و سه مکعب مستطیل به طول یال‌های (a-b) و a و b به‌وجود می‌آید.

با توجه به توضیح مورد ۶، می‌توان نوشت:

a^3 = اندازهٔ حجم مکعب اصلی

$(a-b)^3+b^3+3ab(a-b)$ = مجموع اندازه‌های مکعب‌های داخلی و مکعب‌مستطیل‌های داخلی

$(a-b)^3+b^3+3a^2b-3ab^2$ = مجموع اندازه‌های مکعب‌های داخلی و مکعب‌مستطیل‌های داخلی

$$\Rightarrow a^3 = (a-b)^3+b^3+3a^2b-3ab^2$$

$$\Rightarrow \boxed{(a-b)^3 \equiv a^3-b^3-3a^2b+3ab^2}$$

مسائل مسابقه‌ای

احمد قندهاری

از بین پاسخ‌های درست، به سه نفر برای حل یک مسأله جایزه داده می‌شود.

برای سال دوم رشتهٔ ریاضی

اگر $x-\frac{1}{x}=2$ و $k=x^8-408x$، مقدار k را بیابید.

برای سال سوم ریاضی

اگر $f(x+\frac{1}{x})=x^{12}+\frac{1}{x^{12}}$، آن‌گاه $f(\sqrt{3})$ را بیابید.

برای پیش‌دانشگاهی رشتهٔ ریاضی

ثابت کنید:

$$\lfloor 3x\rfloor=\lfloor x\rfloor+\left\lfloor x+\frac{1}{3}\right\rfloor+\left\lfloor x+\frac{2}{3}\right\rfloor$$

مکان‌های هندسی دو نقطه‌ای

دکتر احمد شرف‌الدین

دانش‌آموزان گرامی، این مقاله چند مسألهٔ مکان هندسی را مطرح می‌کند که با مکان‌های هندسی معمولی فرق دارند. در این مسائل، دو نقطهٔ متحرک با دو شرط درنظر می‌گیریم و مکان هندسی دو نقطهٔ موردنظر را بررسی می‌کنیم. پس از مطالعهٔ این مقاله کوشش کنید، مسائلی از این نوع را طرح و حل کنید.

مسألهٔ ۱

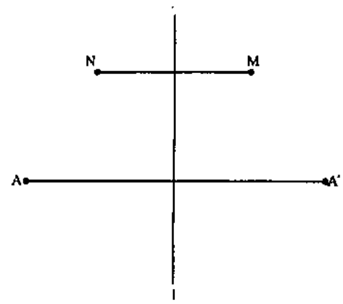
در صفحهٔ P خط l و نقطهٔ A را درنظر می‌گیریم. مطلوب است مکان هندسی دو نقطهٔ متحرک M و N به طوری که:

اولاً این دو نقطه همواره نسبت به خط l قرینه باشند (یعنی خط l عمودمنصف پاره‌خط MN باشد).

ثانیاً مجموع فاصله‌های نقطهٔ A از دو نقطهٔ M و N برابر عدد معلوم P باشد.

حل: قرینهٔ نقطهٔ A را نسبت به خط l می‌سازیم و آن را A' می‌نامیم. داریم:

$$\overline{MA'} = \overline{AN}$$



پس:

$$\overline{MA} + \overline{MA'} = \overline{AM} + \overline{AN} = P$$

بنابراین، مجموع فاصله‌های نقطهٔ متحرک M از دو نقطهٔ ثابت A و A' برابر مقدار ثابت P است.

پس مکان هندسی نقطهٔ M یک بیضی است که دو نقطهٔ A و A' دو کانون آنند و طول قطر بلندتر آن برابر P است. این بیضی را E می‌نامیم. مکان هندسی نقطهٔ N، نیز همان بیضی E است. وقتی نقطهٔ متحرک M، بیضی E را در جهتی بپیماید، نقطهٔ متحرک N بیضی E را در جهت مخالف آن می‌پیماید.

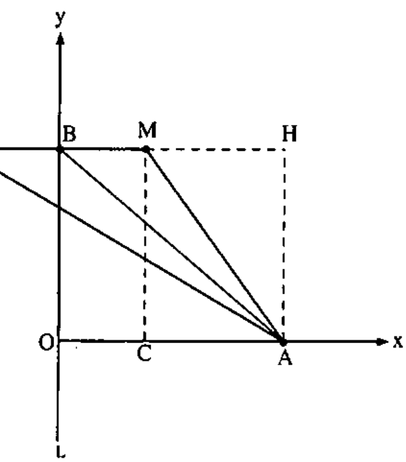
مسألهٔ ۲:

در صفحهٔ P خط l و نقطهٔ A را درنظر می‌گیریم. مطلوب است مکان هندسی دو نقطهٔ متحرک M و N به طوری که:

اولاً دو نقطهٔ M و N نسبت به خط l قرینه باشند.

ثانیاً مساحت مثلث متغیر AMN برابر مقدار معلوم S باشد.

حل: تصویر نقطهٔ A را روی خط l با o نشان می‌دهیم. تصویرهای دو نقطهٔ A و M را به ترتیب بر دو خط MN و oA، با H و C نشان می‌دهیم. وسط پاره‌خط MN را B می‌نامیم. چون خط AB میانهٔ مثلث AMN است، پس مساحت مثلث AMN دو برابر مساحت مثلث ABM است. بنابراین:



$$s = 2\left(\frac{1}{2}\overline{BM}\,.\,\overline{AH}\right) = \overline{BM}\,.\,\overline{MC}$$

یعنی نقطهٔ M در صفحهٔ P طوری حرکت می‌کند که حاصل‌ضرب فاصله‌های آن از دو خط عمود بر هم oA و l همواره معادل مقدار ثابت S است. پس مکان هندسی نقطهٔ M یک هذلولی است که دو خط oA و l دو مجانب آن هستند، به طور دقیق‌تر می‌گوییم، مکان هندسی نقطهٔ M دو هذلولی که مجانب هریک از آن‌ها دو خط oA و l هستند. هریک از شاخه‌های دو هذلولی، در یکی از ربع‌های صفحه قرار دارند (دو خط oA و l صفحه P را به چهار مربع تقسیم می‌کنند).

در مطلب بالا، این قضیهٔ را به کار برده‌ایم:

قضیه :

در صفحهٔ P دو خط متقاطع l و l' را درنظر می‌گیریم. مکان هندسی نقاطی که حاصل ضرب فاصله‌های آن‌ها از دو خط یاد شده، برابر مقدار ثابتی باشد، یک هذلولی است که دو خط یاد شده دو مجانب آن هستند. در حالت خاصی که دو خط l و l' بر هم عمود باشند، هذلولی متساوی‌القطرین است.

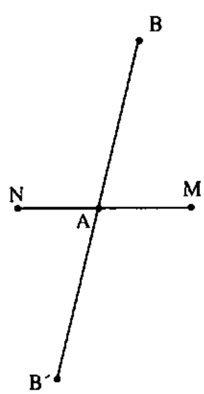
در مسألهٔ مورد بحث، مکان هندسی نقطهٔ M، از دو هذلولی متساوی‌القطرین تشکیل شده است. مکان هندسی نقطهٔ N نیز، همان دو هذلولی یاد شده است.

مسألهٔ ۳ :

در صفحهٔ P دو نقطهٔ ثابت A و B داده شده است. مطلوب است مکان هندسی دو نقطهٔ متحرک M و N از صفحهٔ P به طوری که :

اولاً همواره دو نقطهٔ متحرک M و N نسبت به نقطهٔ ثابت A قرینه باشند.

ثانیاً مجموع فاصله‌های دو نقطهٔ M و N از نقطهٔ ثابت B، برابر عدد معلوم l باشد.



حل : نقطهٔ B'، قرینهٔ نقطهٔ B را نسبت به نقطهٔ A تعیین می‌کنیم. دو مثلث AMB' و ABN مساوی‌اند (ض زض). پس: $\overline{MB'} = \overline{BN}$ بنابراین:

$$\overline{MB} + \overline{MB'} = \overline{MB} + \overline{NB} = l$$

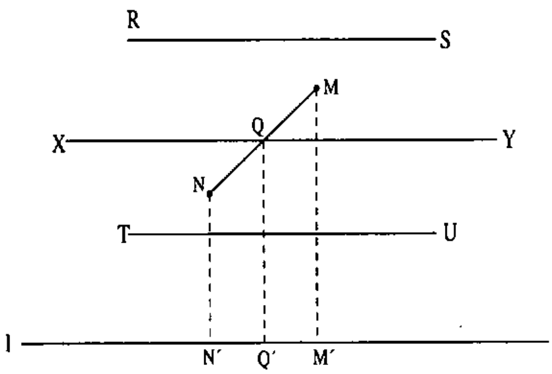
یعنی، مجموع فاصله‌های نقطهٔ متحرک M از دو نقطهٔ ثابت B و B' برابر l است بنابراین، مکان هندسی نقطهٔ M یک بیضی است که دو نقطهٔ ثابت B و B' دو کانون آنند و طول قطر بلندتر آن l است. این بیضی را E می‌نامیم. مکان هندسی نقطهٔ متحرک N نیز، همان بیضی E است. هنگامی که نقطهٔ متحرک M بیضی E را در جهتی می‌پیماید، نقطهٔ متحرک N همان بیضی را در همان جهت می‌پیماید.

مسألهٔ ۴ :

خط l را در صفحهٔ P درنظر می‌گیریم. مطلوب است مکان هندسی دو نقطهٔ متحرک M و N از صفحهٔ S، به طوری که :

اولاً طول پاره‌خط MN برابر P باشد.

ثانیاً مجموع فاصله‌های دو نقطهٔ M و N از خط l برابر q باشد (با شرط $(P \geq 2q)$).



حل : نقطهٔ وسط پاره‌خط MN را، Q می‌نامیم. تصویرهای سه نقطهٔ M، Q و N را بر خط l به ترتیب M'، Q' و N' می‌نامیم. در ذوزنقه $MNN'M'$ داریم:

$$\overline{QQ'} = \frac{1}{2}\left(\overline{MM'} + \overline{NN'}\right) = \frac{1}{2}q$$

پس فاصلهٔ نقطهٔ متحرک Q از خط l، برابر مقدار ثابت $\frac{1}{2}q$ است. بنابراین، مکان هندسی نقطهٔ متحرک Q، خط راست xy است که موازی خط l می‌باشد و به فاصلهٔ $\frac{1}{2}q$ از آن قرار دارد (دو خط داریم یکی در بالای خط l و یکی در پائین آن).

دو خط RS و TV را در دو طرف خط xy، موازی با آن و به فاصلهٔ $\frac{1}{2}l$ از آن، رسم می‌کنیم. مکان هندسی دو نقطهٔ متحرک M و N نواری است از صفحهٔ S که به دو خط RS و TV محدود می‌شود (دو نوار داریم: یکی بالای خط l و دیگری در پائین این خط).

ترجمه:
مهدی گروسیان

سهم تو، بزرگ‌تر از سهم من است! *

روزی از روزها یک مرد چاق و یک مرد لاغر، برای صرف شام در واگن رستوران یک قطار نشسته بودند. از قضا هر دو ماهی سفارش دادند. وقتی پیشخدمت ماهی‌ها را آورد، مرد چاق پیش‌دستی کرد و ماهی بزرگ‌تر را برای خودش برداشت. مرد لاغر از این حرکت او آزرده شد. او معتقد بود، کاری که مرد چاق کرد زشت و ناشایست بود.

مرد چاق پرسید: «اگر شما جای من بودید، چه می‌کردید؟»

مرد لاغر با دل‌چرکینی پاسخ داد: «مراعات ادب را می‌کردم و ماهی کوچک را برمی‌داشتم.»

مرد چاق گفت: «خوب، این همان چیزی است که به شما رسیده است!»

همان‌طور که از این لطیفهٔ باستانی برمی‌آید، همیشه نمی‌توان همه را راضی نگاه داشت. مسألهٔ تقسیم عادلانه، در پنجاه سال اخیر ریاضی‌دانان زیادی را به چالش طلبیده است. در این‌گونه مسائل شیء مورد ادعا، معمولاً کیک بوده است. جک رابرتسن[1] و ویلیام وب[2] در این باره، کتابی به نام «الگوریتم‌های کیک‌بری»[3] منتشر کرده‌اند که به بررسی دقیق این موضوع پرداخته است.

در این مقاله، راه‌هایی برای تقسیم یک کیک بین چند نفر و به گونه‌ای که همه راضی شوند،[4] ارائه می‌کنیم. ساده‌ترین حالت این است که یک کیک را بین دو نفر تقسیم کنیم. هر کدام از این دو نفر در صورتی راضی می‌شود که سهم عادلانه‌ای ببرد. در این‌جا سهم عادلانه یعنی: «نصف یا بیش‌تر

براساس ارزشگذاری خودم». البته ممکن است سهم‌بران در مورد ارزش هر قسمت، اختلاف نظر داشته باشند. به عنوان مثال، اگر آلیس[5] گیلاس دوست داشته باشد و باب[6] ژله، هر دو خوش‌شانس هستند و راه‌حل آسان است. می‌توانیم نیمهٔ گیلاس‌دار را به آلیس و نیمهٔ ژله‌دار را به باب بدهیم. بدین صورت هردو را راضی کرده‌ایم.

حال اگر هر دو نفر ژله دوست داشته باشند، مسأله اندکی بغرنج‌تر می‌شود و راه حل آن، روشی است که به ۲۸۰۰ سال پیش بازمی‌گردد: آلیس می‌برد و باب انتخاب می‌کند.

روش بالا از این روی عادلانه است که نه آلیس و نه باب حق شکایت ندارند؛ اگر آلیس از نتیجهٔ تقسیم ناراضی باشد، نمی‌تواند شکایت کند زیرا او می‌توانست با بُرش برابر، متحمل ریسک نشود. باب نیز باید راضی باشد، چون حق انتخاب داشته است.

مسأله وقتی جالب می‌شود که نفر سومی هم وارد کار کنیم.

رابرتسن و وب، کتابشان را با یک مثال الهام‌بخش ولی نادرست آغاز می‌کنند: **تام**[7]، **دیک**[8] و **هری**[9] می‌خواهند یک کیک را بین خودشان قسمت کنند. هرکدام از آن‌ها وقتی راضی می‌شوند که بنا به ارزش‌دهی خود، حداقل $\frac{1}{3}$ کیک را دریافت کنند. فرض می‌کنیم که کیک کاملاً برش‌پذیر است، یعنی، می‌توانیم هر قطاع دلخواهی از آن را ببریم، بدون این‌که له شود. الگوریتم آن از این قرار است:

قدم اول: تام کیک را به دو قطعهٔ X و W که در نظرش به‌ترتیب ارزشی برابر $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ دارند، قسمت می‌کند.

قدم دوم: دیک W را به دو قسمت برابر y و z برش می‌دهد.

قدم سوم: هری به دلخواه یکی از سه تکهٔ یادشده را برمی‌گزیند. بعد از او نوبت تام است که بین دو تای باقیمانده، سهمش را انتخاب کند. آخرین تکه هم به دیک می‌رسد.

واضح است که رضایت هری جلب می‌شود، زیرا اولین انتخاب‌کننده است. تام نیز به دلایلی پیچیده‌تر، راضی خواهد شد. اگر هری x را انتخاب کند، تام می‌تواند بین y و z تکه‌ای را که در نظرش باارزش‌تر است، انتخاب کند. به یاد داشته باشید که او معتقد بود، مجموع این دو قطعه به اندازهٔ $\frac{2}{3}$ ارزش دارد؛ پس قبول دارد که حداقل یکی از آن‌ها به اندازهٔ $\frac{1}{3}$ می‌ارزد. حال اگر هری y یا z را انتخاب کند، تام با انتخاب x راضی می‌شود. مشکل این‌جاست که ممکن است رضایت دیک جلب نشود. اگر او با تام بر سر تعیین x اختلاف داشته باشد، ارزش W را $\frac{2}{3}$ نخواهد دانست. یعنی تنها تکه‌ای که او را راضی می‌کند، x است. اما هری می‌توانست y و تام x را انتخاب کنند که درنتیجه z می‌ماند برای دیک بیچاره.

هوگو اشتاین هاوس[10] اولین کسی بود که در ۱۹۴۴ روشی برای تقسیم عادلانه ارائه داد. او عضو یک گروه از ریاضیدانان لهستانی بود که به طور منظم در یک کافه دور هم جمع می‌شدند. روش او به «پیرایش»[11] معروف است.

قدم اول: تام کیک را به دو تکهٔ x و W که در نظرش به‌ترتیب ارزش‌هایی برابر با $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ دارند، قسمت می‌کند.

قدم دوم: تام x را به دیک پیشنهاد می‌کند و از او می‌خواهد، اگر آن را می‌پذیرد، پیرایشش کند (منظور این است که اضافهٔ آن را پس دهد). البته او می‌تواند x را نپذیرد. نتیجهٔ این مرحله را x' می‌نامیم، این تکه برابر x یا از آن کوچک‌تر است.

قدم سوم

الف) دیک x' را به هری می‌سپارد؛ او نیز در پذیرش آن مختار است.

ب) اگر هری x' را بپذیرد، آن‌گاه تام و دیک باقیماندهٔ کیک $(w + x - x')$ را با روش عادلانهٔ «من می‌برم، تو انتخاب کن»، بین خود تقسیم می‌کنند.

قدم چهارم

الف) اگر دیک x را پیرایش کند، ولی هری آن را نپذیرد، خود دیک به قبول آن رضایت می‌دهد. می‌مانند هری و تام که به روش «من می‌برم، تو انتخاب کن» بقیهٔ کیک $(w + x - x')$ را بین خود تقسیم می‌کنند.

ب) حال اگر هری x' را نپذیرد و دیک هم آن را پیرایش نکند، تام آن را برمی‌دارد و باز بقیهٔ کیک (W-X) به روش «من می‌برم، تو انتخاب کن» تقسیم می‌شود.

روشی که بیان شد، می‌تواند یک راه‌حل قابل تعمیم باشد. بررسی ساختار منطقی آن را به خودتان واگذار می‌کنیم. اساساً اگر کسی از نتیجهٔ تقسیم ناراضی باشد، یا در انتخاب دچار اشتباه شده یا در برش ریسک کرده است که در هر صورت مقصر کسی نیست جز خودش.

در سال ۱۹۶۱، **لستر ای. دوبینز**[12] و **ادوین ایچ. اسپنیر**[13] روشی ارائه دادند که در آن از یک چاقوی متحرک استفاده می‌شد.

اکنون به شرح این روش می‌پردازیم:

ابتدا یک برش در کیک ایجاد می‌کنیم و آن را مبدأ کیک قرار می‌دهیم. سپس چاقو را به نرمی و آرامی حرکت می‌دهیم، به گونه‌ای که در هر لحظه روی یکی از شعاع‌های دایره باشد. مقداری از کیک را

که در هر لحظه پشت چاقو می‌ماند L می‌نامیم. تام، دیک و هری باید در لحظه‌ای که به نظرشان L به مقدار $\frac{1}{3}$ رسیده است، فریاد بزنند: «کافیه!» اولین کسی که فریاد می‌زند، صاحب L می‌شود. چاقو پس از برش سهم اولین شخص به حرکت ادامه می‌دهد. دومین شخص هم این گونه به سهم خود می‌رسد که وقتی در نظرش چاقو به نصف باقیماندهٔ کیک رسید، قبل از دیگری فریاد بزند: «کافیه!»

چه باید کرد اگر هر دو در یک لحظه فریاد بزنند؟ خودتان در این باره فکر کنید.

واضح است آنچه می‌ماند، سهم سومین نفر است. البته دو نفر آخر به روش دیگری نیز می‌توانند باقیماندهٔ کیک را بین خود تقسیم کنند و آن روش «من می‌برم، تو انتخاب کن» است.

روش دوبینز و اسپنیر قابل تعمیم به تقسیم کیک بین n نفر نیز هست. چاقو را حرکت دهید تا کسی که به نظرش L به مقدار $\frac{1}{n}$ رسیده است، فریاد بزند، کافیه و L را به عنوان سهم خود دریافت کند. برای تقسیم بقیهٔ کیک بین $(n-1)$ نفر باقیمانده، همین روش را ادامه دهید، توجه دارید که iامین نفر انتظار دریافت $\frac{1}{i}$ از قطعهٔ باقیمانده کیک را در مرحلهٔ iام دارد.

تأخیر زمانی کوتاهی که بین تصمیم‌گیری و عکس‌العمل شخص به وجود می‌آید، از کارایی این روش‌ها می‌کاهد. از این رو، الگوریتم‌های چاقوی متحرک راضی‌کننده نیستند. بهترین راه برای کاهش اثر این مسأله، حرکت دادن بسیار آرام چاقو است.

از این پس الگوریتم‌های نوع اول را الگوریتم‌های چاقوی ثابت و الگوریتم‌های نوع اخیر را الگوریتم‌های چاقوی متحرک می‌نامیم. در ادامه، یک روش چاقوی ثابت برای سه نفر معرفی می‌کنیم که قابلیت تعمیم نیز دارد.

تام از این که دور از چشم دیگران صاحب یک کیک شده، خوشحال است. برای خوردن اولین تکه خیز برمی‌دارد که دیک در مقابلش ظاهر می‌شود. ناچار می‌شود کیک را با او تقسیم کند، از این رو آن را با ارزشگذاری خودش به دو تکه تقسیم می‌کند. دیک یک قسمت را برمی‌دارد.

قبل از این که آن‌ها بتوانند چیزی از سهم کیکشان بخورند، هری سر می‌رسد و تقاضای یک سهم عادلانه می‌کند. تام و دیک به طور مستقل تکه کیک خود را به سه قسمت تقسیم می‌کنند. البته قسمت‌هایی که در نظرشان ارزش برابر دارند. هری اجازه دارد یک تکه از کیک تام و تکه‌ای دیگر از سهم دیک بردارد. نام این روش، «برش‌های تودرتو»[14] است.

تحقیق کارا بودن این الگوریتم مشکل نیست و روش تعمیم آن هم برای n نفر سرراست است. روش پیرایش نیز قابلیت تعمیم دارد، به این صورت که به هر دریافت‌کننده فرصت پیرایش داده می‌شود.

کدام روش برش‌های کم‌تری طلب می‌کند؟ روش چاقوی متحرک برای تقسیم بین n نفر، $n-1$ برش انجام می‌دهد که حداقل تعداد برش ممکن است. روش‌های چاقوی ثابت پیچیده‌تر و دست و پاگیرترند. تعداد برش‌های لازم برای تقسیم یک کیک بین n نفر، با استفاده از روش پیرایش $\frac{n^2-n}{2}$ و با روش برش‌های تودرتو $n!-1$ است.

حالا یک روش چاقوی ثابت کارآمدتر معرفی می‌کنیم؛ به نام «تقسیم کن و دست پیدا کن»[15]. روش کار از این قرار است:

سعی کنید کیک را به گونه‌ای به دو تکه تقسیم کنید که نیمی از دریافت‌کننده‌ها مایل به سهیم بودن در یکی باشند و بقیه در دومی. این کار را با زیر کیک‌ها تکرار کنید. تعداد برش‌های لازم برای این روش تقریباً $n \log 2n$ است. فرمول دقیق $nk - 2k + 1$ است که در آن k عددی صحیح و منحصر به فرد است و $2k - 1 < n \le 2k$. بعید است بتوانید روش چاقوی ثابتی بیابید که بهتر از این روش باشد.

الگوریتم‌های تقسیم کیک می‌توانند در مسائل واقعی و روزمره به کار گرفته شوند. اولین کوشش برای تقسیم آلمان بین متفقین و روسیه، به گونه‌ای بود که برلین به هیچ‌کدام تعلق نگرفت. بنابراین مجبور شدند، آن را جداگانه قسمت کنند. مذاکره‌کنندگان برای حل این مشکل، به طور شهودی از یک روش تقسیم کیک استفاده کردند.

زیرنویس

*این مقاله ترجمه‌ای است از: "Your Half's Bigger Than My Half!"، نوشتهٔ "Ian Stewart"، در قسمت "MATHEMATICAL RECREATIONS" از مجلهٔ December 1988,"SCIENTIFIC American"

1. Jack Robertson
2. William Webb
3. Cake Cutting Algorithms
۴. یا حداقل حق اعتراض نداشته باشند، م.
5.. Alice
6. Bob
7. Tom
8. Dick
9. Harry
10. Hugo Steinhaus
11. trimming
12. Lester E. Dubins
13. Edwin H. Spanier
14. Successive Pairs
15. Divide and Comquer

مجلات رشد آگهی می پذیرند

سفر به ۱۴۰ هزار مدرسه و میلیون ها خانه، با مجلات رشد

مجلات رشد (۹ ماهنامه و ۱۷ فصلنامه، با شمارگان ماهانه سه میلیون نسخه) با هدف اطلاع رسانی به دانش آموزان، معلمان، دست اندرکاران تعلیم و تربیت و خانواده ها برای دسترسی به کالاها و خدمات آموزشی ـ فرهنگی مناسب و به منظور کمک به انتخاب کالا و خدمات مورد نیاز و ارتقای فرهنگ مصرف، آگهی می پذیرد.

دفتر انتشارات کمک آموزشی
توزیع، بازرگانی و آگهی

دفتر انتشارات کمک آموزشی ناشر ماهنامه ها و فصلنامه های رشد:

کودک • نوآموز • دانش آموز • نوجوان • جوان • معلم • برهان • مدیریت مدرسه • آموزش ابتدایی

تکنولوژی آموزشی • آموزش شیمی • آموزش زبان • آموزش ریاضی • آموزش فیزیک • قرآن • آموزش راهنمایی تحصیلی • آموزش علوم اجتماعی

آموزش تاریخ • ورزش • آموزش جغرافیا • هنر • زمین شناسی • آموزش معارف اسلامی • آموزش زیست شناسی • آموزش زبان و ادب فارسی

خیابان کریم خان زند، ابتدای ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش، دفتر انتشارات کمک آموزشی.

با دیگر مجلات
دفتر انتشارات کمک آموزشی
آشنایی دارید؟
آموزش زبان ۶۸
Language
آموزش شیمی
۶۵
آموزش فیزیک
دفتر انتشارات کمک آموزشی
این مجلات را نیز منتشر
می کند:
رشد کودک
(ویژه‌ی پیش‌دبستان و دانش‌آموزان کلاس اول دبستان)
رشد نوآموز
(برای دانش‌آموزان دوم و سوم دبستان)
رشد دانش آموز
(برای دانش‌آموزان چهارم و پنجم دبستان)
رشد نوجوان
(برای دانش‌آموزان دوره‌ی راهنمایی)
رشد جوان
(برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه)
و مجلات :
رشد معلم، تکنولوژی آموزشی
آموزش ابتدایی، آموزش فیزیک،
آموزش شیمی، آموزش زبان،
آموزش راهنمایی تحصیلی
آموزش ریاضی، آموزش زیست شناسی
آموزش جغرافیا، آموزش تربیت بدنی
آموزش معارف اسلامی، آموزش تاریخ
آموزش قرآن، آموزش هنر
آموزش علوم اجتماعی، برهان (راهنمایی)،
برهان (متوسطه)،
آموزش زمین‌شناسی و مدیریت مدرسه