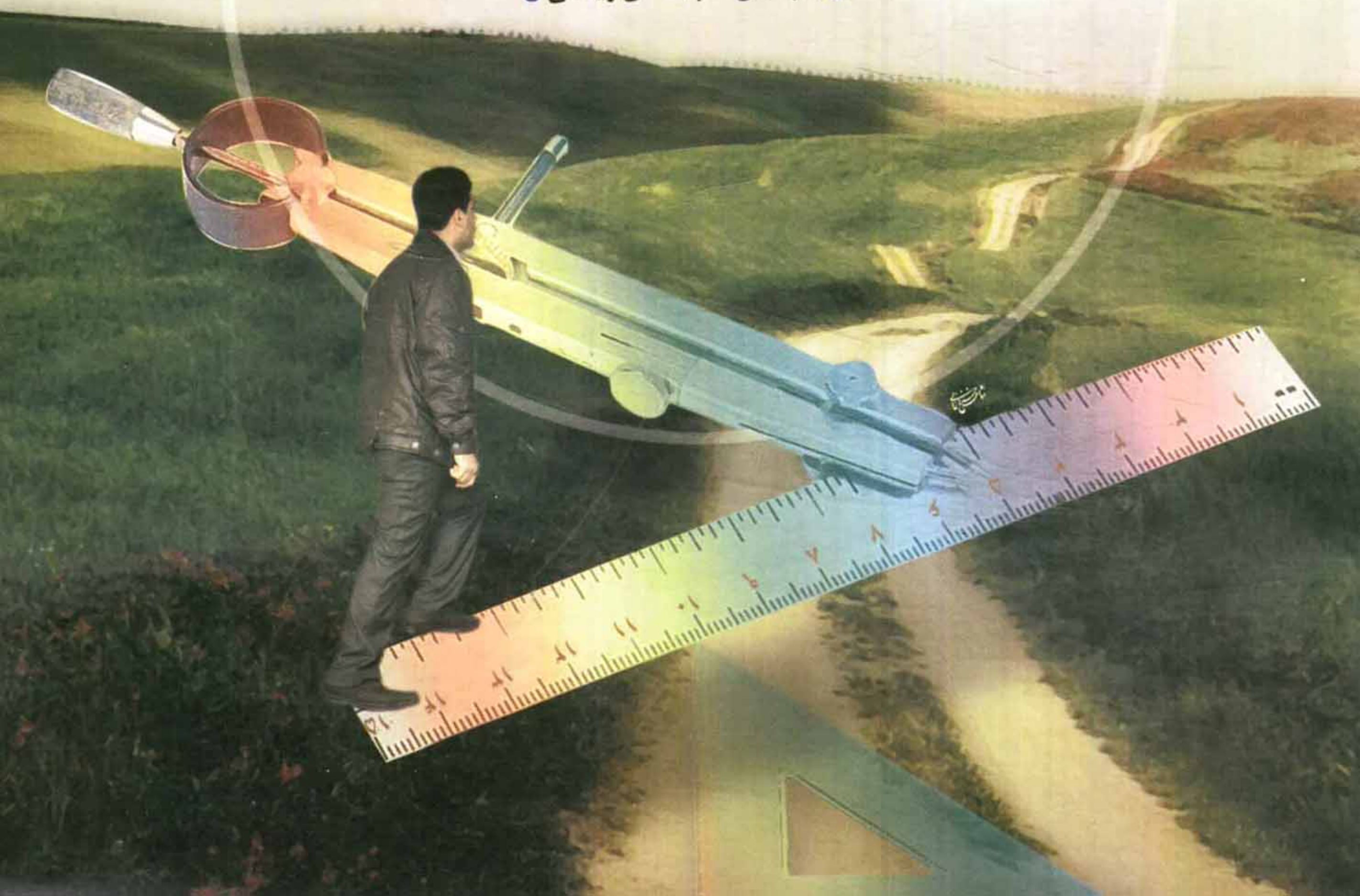
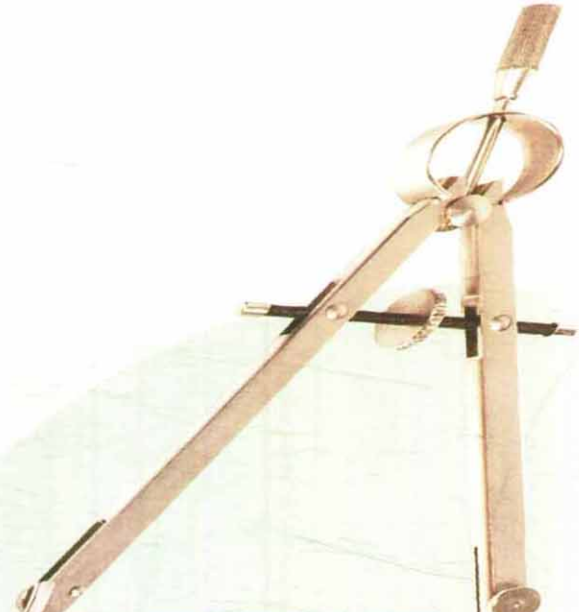
رشد
برهان
مجله‌ی ریاضی
۶۴
دوره‌ی متوسطه
ISSN:1735-4951
وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی
دوره‌ی نوزدهم / زمستان ۱۳۸۸ / شماره‌ی ۲ / بها ۴۵۰۰ ریال / ۶۴ صفحه
فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
www.roshdmag.ir

- رسم نمودار تابع f' از روی نمودار تابع f
- چند مسئله در جبر هندسه و هندسه‌ی تحلیلی
- کاربردهای قضیه‌ی تقسیم
- رویکرد هندسی و جبری ـ مختصاتی در آموزش هندسه
- با راهیان المپیادهای ریاضی





روش تحلیلی من همان قدر نسبت به راه و رسم قدما ارجح است که فصاحت و بلاغت سیسروس[1] بر حروف الفبا.

رنه دکارت

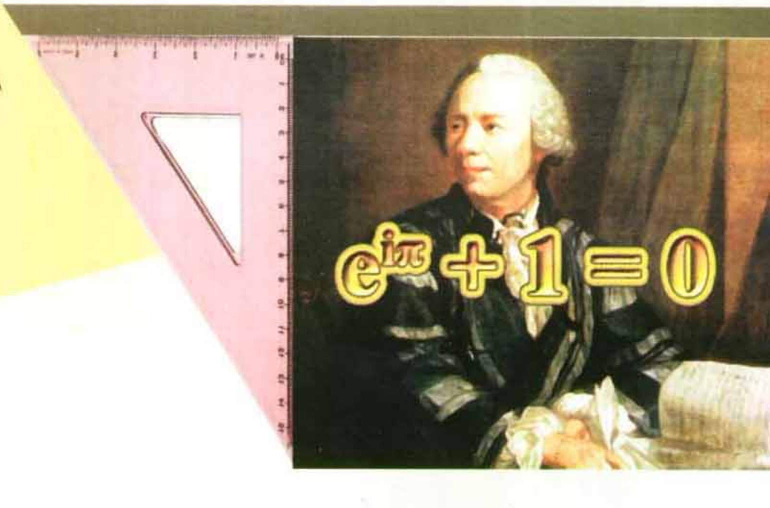
۱. خطیب معروف رومی

تمام نظریه‌ی حرکت سیالات به فرمول‌های ریاضی تحویل یافته است.

لئونارد داویلد

اکتشاف در ریاضیات از برهان استنتاجی مهم‌تر است. بدون اکتشاف چیزی وجود ندارد تا استنتاج بر آن بتازد و آن را منظم سازد.

ای. تی. بل



بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ۶۴ متوسطه

مجله‌ی ریاضی

دوره‌ی آموزش متوسطه

فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

دوره‌ی نوزدهم /شماره‌ی ۲ / زمستان ۱۳۸۸

◆مدیر مسئول: محمد ناصری ◆سردبیر: حمیدرضا امیری

◆مدیر داخلی: میرشهرام صدر ◆طراح گرافیک: شاهرخ خرمغانی

◆هیئت تحریریه: حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی، سید محمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی پور و با تشکر از همکاری ارزنده‌ی استاد پرویز شهریاری ◆ویراستار ادبی: کبری محمودی

◆ پایگاه اینترنتی www.roshd mag.ir

◆ Borhanm@roshdmag.ir

◆پیام گیر نشریات رشد: ۰۲۱-۸۸۳۰۱۴۸۲

نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵

◆تلفن دفتر مجله: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۸۶۲

◆تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ـ۰۲۱-۷۷۳۳۵۱۱۰

◆شمارگان: ۱۲۰۰۰ نسخه

■ چاپ: شرکت افست (سهامی عام)

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می‌کند:

■ نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)

■ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)

■ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)

■ طرح معماهای ریاضی

■ نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می‌شود.

مجلّه در حکّ، اصلاح، حذف و اضافه‌ی مقاله‌ها آزاد است.

مقاله‌های وارده، باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.

مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود.

استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

حرف اول

امام صادق (ع) در حدیثی گهربار می‌فرمایند: «عالم به علوم زمان خود باشید.»

شاید یکی از تعبیرات و تفسیرهای این روایت نورانی، مطلع بودن و آگاه بودن از علوم زمان است. اما با پیشرفتی که علوم در زمان فعلی کرده‌اند و گسترش روبه‌رشد علوم پایه، مهندسی، تجربی، انسانی و... شاید این گزاره درست باشد که در زمان حاضر، عالم به کسی اطلاق می‌شود که نشانی بیشتری بداند و برای هر موضوع مورد نیاز خود، دقیقاً بداند از چه مراجع و منابعی باید استفاده کرد.

البته این اطلاع داشتن و نشانی بلد بودن که متأسفانه امروزه به صورت «copy-paste» درآمده است، اصلاً قابل اطمینان و اعتماد نیست و اطلاعاتی که در وب‌لاگ‌ها و سایت‌ها انباشته شده‌اند، همگی از صحت کافی برخوردار نیستند. حتی در بعضی موارد با غرض‌ورزی و سودجویی‌هایی نیز همراه هستند. اطلاعات باید بر مبنای پژوهش و تحقیق آن هم توسط افراد و مراکز تأیید شده تهیه شده باشند تا بتوان به آن‌ها تکیه کرد و براساس آن‌ها تصمیم گرفت یا تجزیه و تحلیل درستی صورت داد.

در واقع برای ورود به هر مبحثی و یا مطالعه و حرکتِ رو به رشد در هر موضوعی، ابتدا باید با استفاده از منابع اصیل و محکم، درباره‌ی آن مطلب یا موضوع و حتی تاریخچه و فلسفه‌ی آن، اطلاعات کافی جمع‌آوری کنیم و به اصطلاح، خودمان را آماده کنیم و با چشمی باز، گوشی شنوا و قلبی محکم، به سراغ آن موضوع برویم.

بزرگی می‌گفت: شیطان از سه راه می‌تواند به وجود انسان‌ها راه یابد و باعث گمراهی آن‌ها شود: یکی چشم، یکی گوش و سومی قلب یا دل. ایشان می‌فرمودند: به هر چیزی نمی‌شود نگاه کرد، به هر چیزی نمی‌توان گوش داد و به هر چیزی نمی‌توان دل داد. برای هر کدام از موارد فوق، ابتدا باید مسلح و قوی شد و سپس به راه ادامه داد. چه بسیار انسان‌ها که با نگاه کردنِ به یک نوشته یا به یک تصویر، برای همیشه در ورطه‌ی گمراهی افتاده و به ناکجا آباد رفته‌اند.

چه‌قدر کتاب‌های ناخوانده دارم که جرئت خواندن آن‌ها را نداشته‌ام و منتظرم تا به سپری قوی و محکم دست پیدا کنم و پس از آن به مطالعه‌ی آن‌ها بپردازم. راستی، قلبی که «عرشِ خداست»، جای چه چیز یا چیزهای دیگری می‌تواند باشد؟ خداوند می‌فرمایند: «قلب مؤمن عرش من است.» پس چه‌طور است که خیلی آسان آن را به هر موجودی یا مطلبی یا فیلمی یا... گره زده و وابسته‌اش می‌شویم؟

عزیزان دانش‌آموز، بیایید همان‌طور که برای حل یک مسئله‌ی ریاضی کوتاه‌ترین و بهترین راه را انتخاب می‌کنیم و با استفاده‌ی صحیح از فرض مسئله به حکم می‌رسیم، در تمامی مسائل موجود در زندگی و اجتماع نیز درست، محکم، دقیق و با پشتوانه‌ی تحقیق و پژوهش گام برداریم، ان‌شاءالله.

سردبیر

● پرویز شهریاری

ریاضیات در ایران | ۶

خوارزمی و عیلامی‌ها

درباره‌ی **محمد فرزند موسی خوارزمی**، باید اندکی بیش‌تر صحبت کنیم. **جورج سارتون** در مقدمه‌ی تاریخ دانش، سده‌ی نهم میلادی را «دوران خوارزمی» نامیده است. او گفته است: «اگر همه‌ی جهت‌ها در نظر گرفته شود. خوارزمی یکی از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان همه‌ی دوران‌ها بوده است.»

آمتیسمار[۱] فرانسوی می‌گوید: «امروز یک موضوع را نمی‌توان فراموش کرد و آن این است که محمد، فرزند موسی خوارزمی، در واقع معلم اروپایی‌های جدید در دانش جبر است و جبر رشته‌ی اصلی ریاضیات به شمار می‌آید.

خوارزمی دانشمندی است که در پایان سده‌ی دوم هجری قمری بوده، تا سال ۲۳۲ زیسته و در سال‌های پس از آن درگذشته است. او به جز ریاضیات، در شاخه‌های دیگری مثل نجوم، جغرافیا، استرلاب، ساعت آفتابی و جز آن هم نوشته‌هایی داشته است که کمتر به دست ما رسیده اند.

خوارزمی کتابی درباره‌ی «جمع و تفریق» داشته که در زمان ما تنها برگردان لاتینی آن در دست است. او از عددشماری هندی و نوشتن عددها به یاری آن‌چه که هندی‌ها به‌کار می‌بردند و بعدها در همه‌ی جهان با تفاوت‌هایی مرسوم گشت، یاد می‌کند.

جدولی هم برای سینوس‌ها تنظیم کرده و ارائه داده است. در کتاب‌ها سینوس را «جیب» به کار برده‌اند که به معنای «گریبان» است. بعدها وقتی کتاب خوارزمی به فرانسه ترجمه شد، همین جیب را به سینوس ترجمه کردند که باز هم به معنای «گریبان» است و من نمی‌فهمم سینوس چه ربطی به گریبان دارد. چه بسا خوارزمی از واژه‌ی «جیب» که واژه‌ای فارسی (پهلوی) است و به معنای چوب عمودی که در زمین قرار گرفته استفاده کرده باشد، ولی هجی کردن واژه‌ی جیب به‌دلیل داشتن حرف

«پ» که ناآشنا بود، آن را به «ب» تبدیل کرد، چون در زبان عربی «پ» وجود ندارد، ولی «ب» وجود دارد و وقتی به فرانسوی هم برگردان شد، از همان واژه‌ی جیب که به معنای گریبان است، استفاده کردند.

در زمان خوارزمی، اخترشناسان بسیاری وجود داشتند که به‌طور خلاصه از آن‌ها یاد می‌کنیم:

احمد فرزند محمد، اهل نهاوند که به حاسب مشهور بوده است. او هم اخترشناس و هم ریاضی‌دان بود و در نیمه‌ی دوم سده‌ی دوم هجری در نیشابور می‌زیست.

یحیی فرزند **ابومنصور ابوعلی** که با فضل فرزند سهل سرخسی که وزیر مأمون، خلیفه‌ی عباسی بود، نسبت داشت. او به «بیت‌الحکمه» رفت و کارهای اخترشناسی خود را در آن‌جا انجام می‌داد.

> **❖ جورج سارتون در «مقدمه‌ی تاریخ دانش»، سده‌ی نهم میلادی را «دوران خوارزمی» نامیده است. او گفته است: «اگر همه‌ی جهت‌ها در نظر گرفته شود، خوارزمی یکی از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان همه‌ی دوران‌ها بوده است**

خالد فرزند عبدالملک مروورودی که اهل مروورود خراسان هم‌زمان با مأمون عباسی و مدتی هم در دمشق بود.

ابوسعید جرجانی که کتاب‌های «مسئله‌های هندسی» و «استخراج خط نصف‌النهار» او در قاهره موجودند. کتاب دوم را **کارل شو** به زبان آلمانی برگردانده است.

سرگذشت ریاضیات

در سال ۱۳۷۹ گروه ریاضی انتشارات مدرسه کتابی به نام «فرهنگ ریاضیات» منتشر کرد که فصل نخست آن با عنوان «ریاضیات، واژه‌شناسی، فلسفه‌ی تاریخ، کاربردها و سرگذشت ریاضیات نظری»، به قلم این جانب است. این مقاله در ۵۳ صفحه (صفحه‌ی ۵ تا ۵۸) است که همه‌ی خوانندگان علاقه‌مند را به مطالعه‌ی آن دعوت می‌کنم. در این‌جا برخی از نکته‌های اساسی این مقاله را می‌آوریم.

واژه‌ی ریاضیات به جای واژه‌ی «ماته ماتیکه»[2] گذاشته شده که خود از «ماته‌ما»[3] به معنای دانش و دانایی آمده است.

غالباً واژه‌ی ریاضیات را برگرفته از واژه‌ی ریاضت دانسته‌اند، چرا که ریاضت تنها به معنای «پرهیزکاری بدنی» نیست، بلکه «در خود فرو رفتن»، «فهمیدن» و «رسیدن به رازها» را هم می‌رساند. دیدگاه‌های دیگری هم وجود دارند. بسیاری از زبان‌شناسان با بخش‌های زبان‌شناختی خود نتیجه می‌گیرند: «ماته‌ما» همان واژه‌ی پارسی «مزدا» ست که همان معنای واژه‌ی یونانی را دارد: «دانا» و «آگاه».

دیدگاه سوم معتقد است، واژه‌ی «ریاضی» از واژه‌ی پارسی «راز» به معنای «اندازه‌گرفتن» آمده است این واژه‌ی «راز» هنوز در واژه‌های «تراز» و «ترازو» با حفظ معنای خود باقی مانده است. در واژه‌ی «ترازو»، «ترا» به معنای «این‌سو و آن‌سو» و «راز» به معنای اندازه‌گیری است. پسوند «او» بسیاری جاها در زبان پارسی به معنای «بسیار» به کار رفته است. به این ترتیب، «ترازو» یعنی «اندازه‌گیری و مقایسه‌ی بسیار».

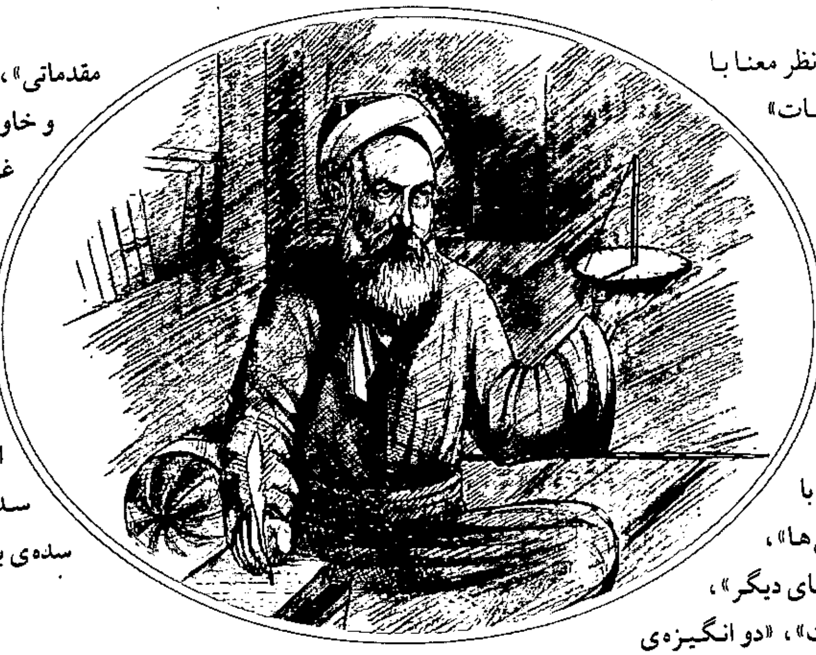
در ضمن، واژه‌ی «مَر» در زبان پارسی (که در واژه‌های «شمر» و «شمردن» وجود دارد.) به معنای شمردن و محاسبه‌کردن با دست است. به این ترتیب، اینان به جای واژه‌ی ریاضیات، واژه‌ی «راز و مَر» را پیشنهاد می‌کنند که درست به معنای «اندازه گرفتن و شمردن» است و اگر ریاضیات را دانش رابطه‌های کمیتی و شکل‌های فضایی بدانیم، واژه‌ی «راز و مَر» می‌تواند به تنهایی درست باشد.

اگر واژه‌ی «ریاضیات» را (که نه در ترکیب زیباست و نه به روشنی معرف یکی از دانش‌هاست)، برگرفته از واژه‌ی «ریاضت» فرض کنیم، می‌تواند اثری منفی در علاقه‌مندان به این دانش بگذارد، زیر همگان «ریاضت» را به معنای «سختی‌کشیدن»، «در انزوا فرو رفتن» و «فشار بیش از اندازه به خود» می‌دانند که با ماهیت دانش ریاضی سازگاری ندارد. ولی این تغییر شبیه تغییری است که برخی برای واژه‌ی جبر می‌آورند و آن را به معنای «زور» و «فشار» می‌دانند، در حالی که خوارزمی واژه‌ی جبر را به معنای «جبران کردن» گرفته است. چرا که به تعبیر خوارزمی و به زبان امروزی می‌توان مقدار منفی را از یک سمت معادله به سمت دیگر معادله برد تا مقداری مثبت شود (یعنی جبران شود). در مصراع سعدی: «که جبر خاطر مسکین بلا بگرداند»، واژه‌ی «جبر» درست به همین معنای جبران‌کردن به کار رفته است.

جدا از این بحث که «ماته‌ما» از واژه‌ی «مزدا» گرفته شده یا ریاضیات از واژه‌ی «راز» آمده است، به نظر می‌رسد اگر قرار باشد واژه‌ی پارسی به جای «ریاضیات» انتخاب شود، بهترین پیشنهاد همان واژه‌ی «راز و مَر» باشد که

هم زیباست و هم از نظر معنا با واژه‌ی «ریاضیات» سازگار است.

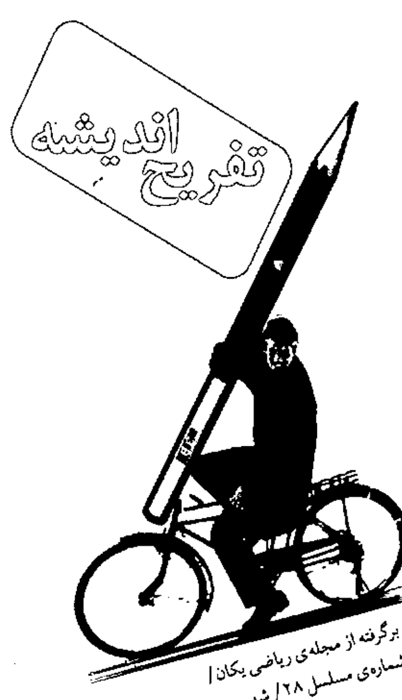
من به شرح ادامه‌ی این مقاله پایان می‌دهم و تنها عنوان‌های آن را یاد می‌کنم: «موضوع ریاضیات و بستگی آن با صنعت و دیگر دانش‌ها»، «ریاضیات و دانش‌های دیگر»، «ریاضیات و صنعت»، «دو انگیزه‌ی پیشرفت ریاضیات»، «دوره‌ی دوم تکامل ریاضیات یا ریاضیات یونانی»، «دوره‌ی سوم تکامل ریاضیات یا ریاضیات ایرانی»، «سرگذشت ریاضیات نظری از آغاز تا امروز»، «برداشت کلی»، «دوره‌ی بعدی ریاضیات»، «دوره‌ی ریاضیات مقدماتی»، «ایران، آسیای میانه و خاور نزدیک»، «اروپای غربی تا سده‌ی شانزدهم میلادی»، «دوران پیدایش ریاضیات با کمیت‌های متغیر»، «ریاضیات امروزی»، «پایان سده‌ی نوزدهم و آغاز سده‌ی بیستم.»



پی نوشت..............................

1. A. mare
2. mathematike
3. mathema

تقسیم بندی علوم از نظر ابن سینا



برگرفته از مجله‌ی ریاضی یکان / شماره‌ی مسلسل ۲۸ / شهریورماه ۱۳۴۵

شیخ ابوعلی سینا در کتاب مشهور **شفا** علوم زمان خود را به سه دسته تقسیم کرده است:

اول علوم عالی و آن‌ها علومی هستند که با ماده سروکار ندارند و درک و فهم آن‌ها فقط با تعقل صورت می‌گیرد و آن‌ها را **علوم ماوراءالطبیعه** نامند. مانند الهیات و فلسفه و منطق که علوم اولی نیز نامیده می‌شوند.

دوم ـ **علوم اوسط** یا وسطی هستند که هم با ماده سروکار دارند و هم برای یاد گرفتن علوم اولی دانستن آن‌ها لازم است و آن‌ها **علوم ریاضی** هستند چنانچه فلاسفه‌ی قدیم برای درک مطالب علمی خود ابتدا ریاضیات را فرامی گرفتند.

سوم ـ **علوم ادنی** یا دانی هستند که فقط با ماده سروکار دارند و آن‌ها را با مشاهده و تجربه می‌توان درک کرد و آن‌ها **علوم طبیعی** هستند که امروزه آن‌ها را علوم تجربی گویند.

اما علوم ریاضی در نظر شیخ ابوعلی سینا به چهار قسمت تقسیم می‌شد:

۱. **علم اعداد** که عبارت از آشنا شدن به انواع اعداد و دانستن خاصیت هر کدام و نسبت آن‌ها با یکدیگر است ـ جمع و تفریق ارقام هندسی و جبر و مقابله نیز جزو این علم محسوب می‌شد. این علم را **علم الارثما طیقی** (علم الحساب) نیز می‌گویند.

۲. **علم هندسه** ـ که عبارت از آشنایی به احوال خطوط و اشکال سطوح و مجسمات و مساحات اشکال و نسبت بین آن‌ها و علوم جر اثقال و اوزان و موازین و آلات جریه و مناظر و مَوایا و نقل میاه باشد.

۳. **علم هیأت** ـ که عبارت از آشنایی به عالم و شکل و اوضاع و مقادیر و حرکات ستارگان است و از فروع این علم همان زیجات و تقاویم می‌باشد.

۴. **علم موسیقی** ـ که عبارت از آشنا شدن به انواع نغمه‌ها و اتفاق و اختلاف آن‌ها و ابعاد و اجناس و جمع و انتقالات و ارتفاع آن‌ها و کیفیت تألیف لحن‌هاست، علم تهیه‌ی آلات موسیقی نیز از متفرعات این علم است.

ابن سینا یکایک این علوم را که از قدما به او رسیده می‌دانسته و اضافاتی نو نیز بر آن‌ها نموده است به خصوص در کتاب **المجسطی** اضافاتی به آخر آن نموده است. نکته‌ی قابل توجه آن است که در نظر ابن سینا علم هیأت یکی از علوم اساسی ریاضی است و به آن توجه به‌خصوصی داشته است. به طور کلی دانشمندان قدیم به این علم اهمیت فوق‌العاده‌ای می‌داده‌اند. هم‌چنین شیخ علم موسیقی را نیز جزو علوم ریاضی دانسته است.

احمد قندهاری

رسم نمودار تابع f′ از روی نمودار تابع f

ابتدا در توابع کثیرالجمله، رابطه‌ی بین منحنی تابع f و منحنی تابع f′ را به‌صورت شهودی بررسی و سپس نتایج را بیان می‌کنیم.

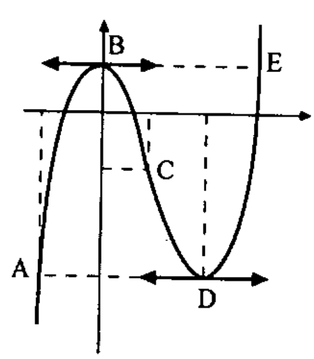
مثال: تابع f به معادله‌ی $f(x)=x^3-3x^2+1$ را رسم می‌کنیم.

طول‌های اکسترمم تابع f:

$$f'(x)=3x^2-6x=0 \Rightarrow 3x(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases}x=0\\x=2\end{cases}$$

طول نقطه‌ی عطف تابع f $\quad f''(x)=6x-6=0\Rightarrow x=1$

x	$-\infty$		-1		0		1		2		3		$+\infty$
f′(x)		+		+	0	−		−	0	+		+	
f(x)	$-\infty$	↗	-3	↗	1	↘	-1	↘	-3	↗	1	↗	$+\infty$
			A		B		C		D		E		



حال تابع f′ به معادله‌ی $U(x)=f'(x)=3x^2-6x$ را رسم می‌کنیم. طول نقطه‌ی عطف تابع f برابر است با طول نقطه‌ی اکسترمم تابع f′:

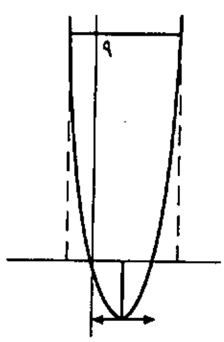
$$U'(x)=6x-6=0\Rightarrow x=1$$

$$U(x)=0\Rightarrow 3x^2-6x=0\Rightarrow 3x(x-2)=0$$

طول‌های اکسترمم تابع f برابرند با طول‌های نقاط تقاطع تابع f′ با محور xها:

$$\Rightarrow \begin{cases}x=0\\x=2\end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		2		3		$+\infty$
U′(x)		−		−		−	0	+		+		+	
U(x)	$+\infty$	↘	9	↘	0	↘	-3	↗	0	↗	9	↗	$+\infty$



۱. به‌طوری که ملاحظه شد، $x=0$ و $x=2$ طول‌های نقاط اکسترمم منحنی تابع f هستند که برابر طول‌های نقاط تقاطع منحنی تابع f′ با محور xهایند. پس می‌توان گفت:

نتیجه‌ی ۱. طول‌های نقاط اکسترمم منحنی تابع f برابر است با طول‌های نقاط تقاطع منحنی تابع f′ با محور xها؛ به‌شرطی که در نقاط اکسترمم منحنی تابع f، $f'(x)$ مساوی صفر باشد.

۲. اگر کمی توجه کنیم، درمی‌یابیم که طول نقطه‌ی عطف تابع f برابر ۱ است. از طرف دیگر، طول نقطه‌ی اکسترمم منحنی تابع f' برابر ۱ است. پس می‌توان گفت:

> **نتیجه‌ی ۲.** طول‌های نقاط عطف منحنی تابع f برابر است با طول‌های نقاط اکسترمم منحنی تابع f'.

۳. به‌طوری که در شکل تابع f ملاحظه می‌شود، تقعر قطعه‌ی منحنی ABC به طرف پایین است. پس y'' تابع f در فاصله‌ی طول‌های نقاط C و A یعنی در فاصله‌ی $[-۱,۱]$ منفی است. از طرف دیگر، y'' تابع f همان U' است. پس U' در این فاصله منفی و بنابراین تابع U در این فاصله اکیداً نزولی است.

> **نتیجه‌ی ۳.** اگر تقعر منحنی تابع f در فاصله‌ی $[a,b]$ به سمت پایین (جهت منفی محور yها) باشد، منحنی f' در این فاصله اکیداً نزولی است.

۴. هم‌چنین می‌توان گفت که تقعر قطعه‌ی منحنی CDE در تابع f به سمت بالا (جهت مثبت محور yها) است. پس y'' در فاصله‌ی طول‌های نقاط E و C، یعنی در فاصله‌ی $[۱,۳]$ مثبت است. از طرف دیگر، y'' همان U' است. پس U' در این فاصله مثبت و درنتیجه، تابع U در این فاصله اکیداً صعودی است.

> **نتیجه‌ی ۴.** اگر تقعر منحنی تابع f در فاصله‌ی $[c,d]$ به سمت بالا (جهت مثبت محور xها) باشد، منحنی f' در این فاصله اکیداً صعودی است.

۵. باز به شکل منحنی تابع f توجه کنیم. منحنی تابع f روی قطعه‌ی منحنی AB اکیداً صعودی است. یعنی تابع f در فاصله‌ی طول‌های این دو نقطه یعنی فاصله‌ی $[-۱,۰]$ اکیداً صعودی است. پس عبارت $f'(x)$ در این فاصله مثبت یا صفر است؛ یعنی: $f' \geq ۰$. بنابراین: $U(x) \geq ۰$ و درنتیجه نمودار تابع $U(x)$ در فاصله‌ی $[-۱,۰]$ بالای محور xها یا روی محور xهاست.

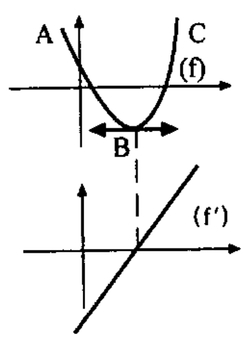
> **نتیجه‌ی ۵.** اگر منحنی تابع f در فاصله‌ی $[a,b]$ اکیداً صعودی باشد، آن‌گاه عبارت $f'(x)$ در این فاصله مثبت یا صفر است. بنابراین نمودار f' که همان نمودار تابع $U(x)$ است، در این فاصله بالای محور xها یا روی محور xهاست.

۶. منحنی تابع f روی قطعه منحنی BCD اکیداً نزولی است. پس تابع f در فاصله‌ی طول‌های نقاط D و B، یعنی فاصله‌ی $[۰,۲]$، اکیداً نزولی است و عبارت $f'(x)$ در این فاصله منفی یا صفر است. بنابراین، نمودار f' که همان نمودار تابع $U(x)$ است، در این فاصله زیر محور xها یا روی محور xهاست.

> **نتیجه‌ی ۶.** اگر منحنی تابع f در فاصله‌ی $[b,c]$ اکیداً نزولی باشد، آن‌گاه $f'(x)$ در این فاصله منفی یا صفر است. بنابراین، نمودار f' در این فاصله پایین محور xها یا روی محور xهاست.

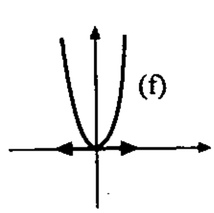
اکنون با توجه به شش نتیجه‌ی فوق تمرین‌های زیر را حل می‌کنیم. در مثال‌های زیر سعی شده است، محور yها در دو نمودار تابع f و f' در یک امتداد باشد تا از نتایج گفته شده بهتر بهره‌گیری شود.

مثال ۱. فرض می‌کنیم نمودار یک تابع درجه‌ی دوم به صورت شکل زیر باشد. با توجه به مطالب گفته شده، منحنی مشتق آن را رسم می‌کنیم.

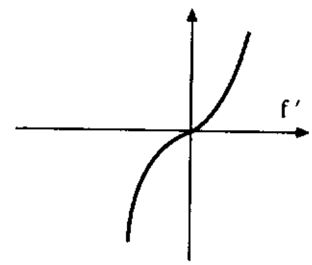


توضیح: تقعر منحنی f به طرف بالاست، پس تابع f' اکیداً صعودی است و طول نقطه‌ی B (نقطه‌ی مینی‌مم تابع f) برابر طول نقطه‌ی تقاطع منحنی f' با محور xهاست. با توجه به این‌که تابع درجه‌ی دوم است، مشتق آن تابعی از درجه‌ی اول خواهد شد و نمودار آن یک خط راست است.

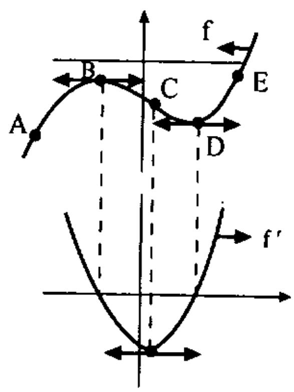
مثال ۲. فرض می‌کنیم تابع f به معادله‌ی $f(x) = x^{۲n}$، $n \geq ۲, n \in N$ باشد. نمودار این تابع به‌صورت زیر است:



تابع f′ به صورت یک منحنی و اکیداً صعودی است و از مبدأ مختصات می‌گذرد.



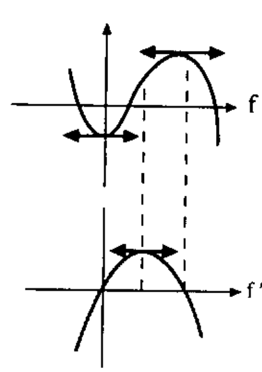
مثال ۳. فرض می‌کنیم نمودار تابع f به صورت زیر باشد. با توجه به مطالب گفته شده، نمودار f′ نموداری است که زیر نمودار تابع f آمده است.



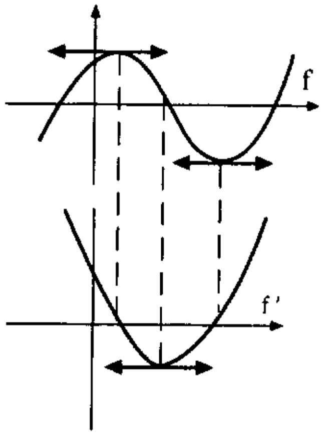
توضیح: طول‌های نقاط B و D برابر طول‌های نقاط تقاطع منحنی f′ با محور xهاست. نقطه‌ی C، نقطه‌ی عطف منحنی تابع f است که طول آن برابر طول اکسترمم منحنی تابع f′ است.

تقعر قطعه‌ی منحنی ABC به طرف پایین است. پس منحنی تابع f′ در فاصله‌ی طول‌های نقاط C و A اکیداً نزولی (با توجه به نتیجه‌ی ۳) و تقعر قطعه‌ی منحنی CDE به طرف بالاست. بنابراین منحنی تابع f′ در فاصله‌ی طول‌های نقاط E و C اکیداً صعودی است (با توجه به نتیجه‌ی ۴).

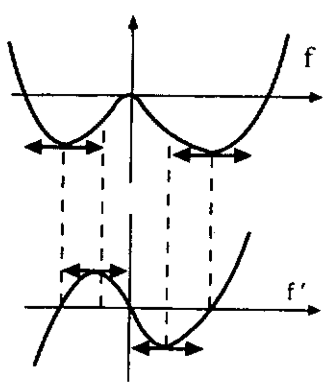
مثال ۴. نمودار تابع f به صورت شکل مقابل است و نمودار مشتق آن زیر شکل منحنی f رسم شده است.



مثال ۵. نمودار تابع f به صورت شکل زیر است و نمودار مشتق آن زیر شکل منحنی f رسم شده است.



مثال ۶. نمودار تابع f به صورت شکل زیر است و نمودار مشتق آن زیر شکل منحنی f رسم شده است.

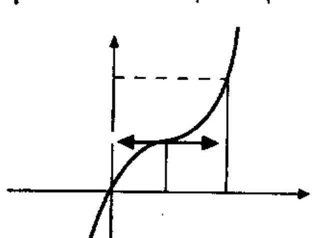


۷. حال تابع f به معادله‌ی $f(x)=(x-1)^3+1$ را در نظر می‌گیریم. جدول تغییرات و نمودار تابع f را رسم می‌کنیم. ضمناً $D_f = R$ و تابع در R پیوسته است.

$f'(x)=3(x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$

طول نقطه‌ی عطف تابع f = ریشه‌ی مضاعف؛ $x=1$

x	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
f′(x)		+		+	۰	+		+	
f(x)	$-\infty$	↗	۰	↗	۱	↗	۲	↗	$+\infty$

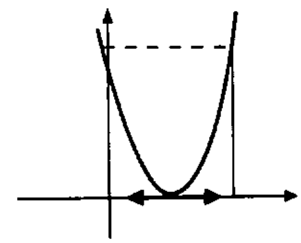


حال منحنی تابع f' به معادله‌ی $U(x) = ۳(x-۱)^۲$ را در نظر می‌گیریم. این تابع هم در R پیوسته است.

طول نقطه‌ی عطف تابع f = طول اکسترمم تابع f'

$U'(x) = ۶(x-۱) = ۰ \Rightarrow x = ۱$

x	$-\infty$	۰	۱	۲	$+\infty$
U'	−	−	۰	+	+
U	$+\infty$ ↘	۳ ↘	۰	↗	↗ $+\infty$

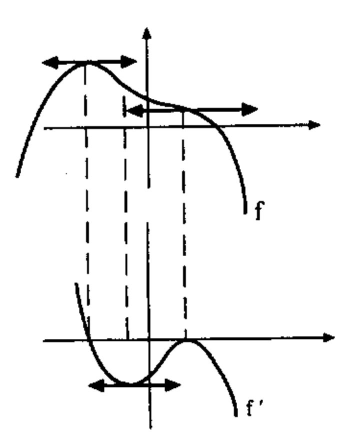


توجه: $x = ۱$ طول نقطه‌ی عطف تابع f است. پس بنابر نتیجه‌ی ۲، $x = ۱$ طول نقطه‌ی اکسترمم تابع f' است.

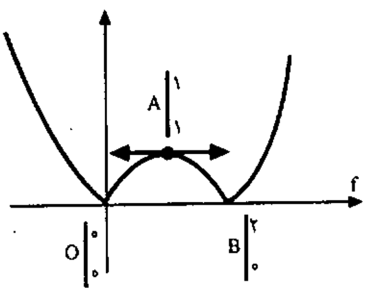
چون $x = ۱$ ریشه‌ی مضاعف مشتق تابع f است، پس $x = ۱$ طول نقطه‌ی عطفی از تابع f است که خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی عطف موازی محور xهاست. بنابراین، ضریب زاویه‌ی خط مماس بر منحنی تابع f در این نقطه صفر است. از این‌جا نتیجه می‌گیریم که $x = ۱$ طول نقطه‌ی اکسترمم تابع f' و عرض این اکسترمم صفر است.

> **نتیجه‌ی ۷.** اگر $x = a$ طول نقطه‌ی عطفی از تابع f باشد که خط مماس در این نقطه موازی محور xها باشد، آن‌گاه نقطه‌ی $M\Big|_{۰}^{a}$ نقطه‌ی اکسترمم منحنی تابع f' است.

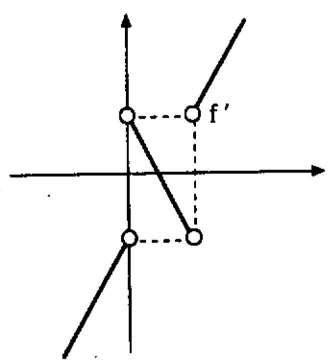
مثال ۷. اگر نمودار تابع f به صورت شکل زیر شد، آن‌گاه نمودار تابع مشتق، نموداری است که زیر منحنی تابع f رسم شده است.



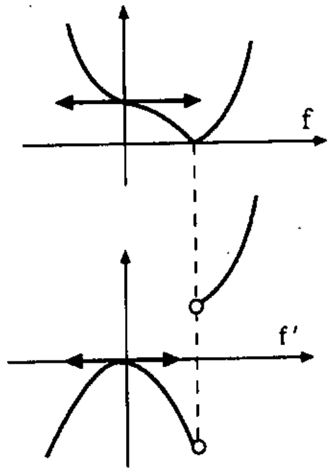
۸. تابع f به معادله‌ی $f(x) = |x^۲ - ۲x|$ را در نظر می‌گیریم. نمودار این تابع چنین است:



توجه: این تابع در نقطه‌ی A ماکزی‌مم نسبی است، لذا طول نقطه‌ی A برابر طول نقطه‌ی تقاطع منحنی f' با محور xهاست. این تابع در نقاط O و B مینی‌مم نسبی است، نظر به این‌که تابع f در نقاط O و B مشتق‌پذیر نیست، لذا تابع f' در نقاط به طول‌های (صفر و ۲) ناپیوسته است و درنتیجه نمودار تابع f' چنین است:



مثال ۸. اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، آن‌گاه نمودار مشتق تابع f نموداری است که زیر آن آمده است:



۹. تابع کسری به معادله‌ی $y=\frac{(ax+b)^n}{(a'x+b')^n}$ ، $n\in N$ را در نظر می‌گیریم. این تابع کسری یک مجانب افقی به معادله‌ی $y=\frac{a}{a'}$ دارد. می‌خواهیم نشان دهیم، تابع y' یک مجانب افقی به معادله‌ی $y=0$ دارد؛ زیرا:

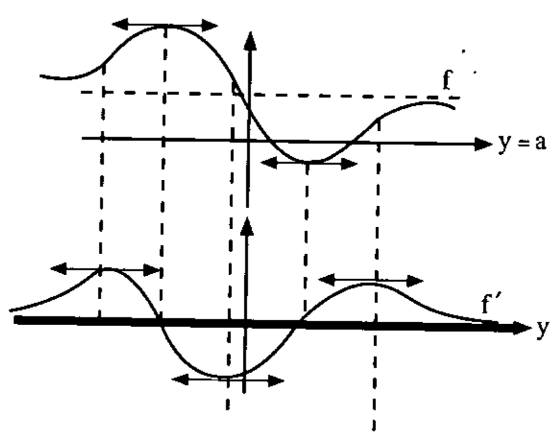
$$y'=\frac{an(ax+b)^{n-1}(a'x+b')^n-a'n(a'x+b')^{n-1}(ax+b)^n}{(a'x+b')^{2n}}$$

$$y'=\frac{an(ax+b)^{n-1}(a'x+b')-a'n(ax+b)^n}{(a'x+b')^{n+1}}$$

ملاحظه می‌کنیم که در تابع y' درجه‌ی مخرج بیشتر از درجه‌ی صورت است. بنابراین، اگر $x\to\infty$ ، آن‌گاه $y'\to 0$. پس خط $y=0$ مجانب افقی منحنی تابع y' است.

نتیجه‌ی ۹ . اگر تابع f دارای مجانب افقی باشد، آن‌گاه خط $y=0$ مجانب افقی منحنی تابع f' خواهد بود.

مثال ۹ . اگر نمودار تابع f به صورت شکل زیر باشد، آن‌گاه نمودار تابع f' نموداری خواهد بود که زیر آن آمده است.



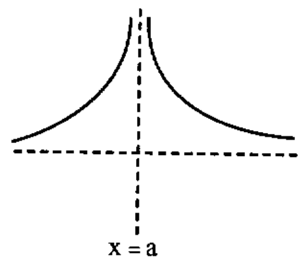
توجه: منحنی تابع f سه نقطه‌ی عطف دارد. پس منحنی تابع f' سه اکسترمم دارد.

تذکر: اگر معادله‌ی تابع f به صورت $f(x)=\frac{g(x)}{(x-a)^{2n-1}}$ ، $n\in N$ باشد و $g(a),g'(a)\neq 0$ آن‌گاه خط $x=a$ معادله‌ی مجانب قائم منحنی تابع f است. نوع انفصال ایجاد شده را «انفصال ساده» گوییم.

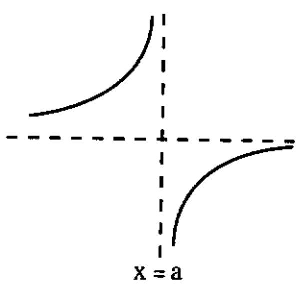
اگر $x\to a\Rightarrow f(x)\to\pm\infty$

اگر معادله‌ی تابع f به صورت $f(x)=\frac{g(x)}{(x-a)^{2n}}$ ، $n\in N$ باشد، و $g(a),g'(a)\neq 0$ آن‌گاه خط $x=a$ ، معادله‌ی مجانب قائم منحنی تابع f است. نوع انفصال ایجادشده را «انفصال مضاعف» گوییم.

اگر $x\to a\Rightarrow f(x)\to+\infty$ یا $f(x)\to-\infty$



در نمودار بالا خط $x=a$ انفصال مضاعف نمودار است.



در نمودار بالا خط $x=a$ انفصال ساده‌ی نمودار است.

۱۰. اگر منحنی تابع f مجانب قائمی به معادله‌ی $x=a$ داشته باشد (انفصال ساده)، آن‌گاه منحنی تابع f' دارای مجانب قائمی به معادله‌ی $x=a$ خواهد شد که $x=a$ انفصال مضاعف تابع f' است.

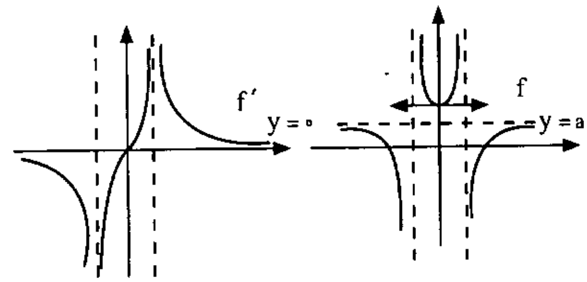
اثبات: فرض می‌کنیم معادله‌ی تابع f به صورت $f(x)=\frac{g(x)}{(x-a)^{2n-1}}$ ، $n\in N$ و $g(a),g'(a)\neq 0$ باشد.

می‌دانیم که خط $x=a$ انفصال ساده‌ی تابع f است. پس از مشتق‌گیری نسبت به x داریم:

$$f'(x)=\frac{(x-a)g'(x)+g(x)}{(x-a)^{2n}}$$

به طوری که دیده می‌شود، منحنی تابع f' دارای مجانب قائمی به معادله‌ی $x=a$ است. چون توان $(x-a)$ در مخرج زوج است، پس انفصال حاصل، انفصال مضاعف است.

مثال ۱۰ . اگر منحنی تابع f به صورت ذیل باشد، آن‌گاه منحنی تابع f' با توجه به مطالب گفته شده، به صورت نموداری است که آن را مقابل نمودار f می‌بینید.



توضیح: مجانب‌های قائم به انفصال‌های مضاعف تبدیل شده‌اند. مجانب افقی تابع که به صورت $y = k > 0$ است، به $y = 0$ تبدیل شده است.

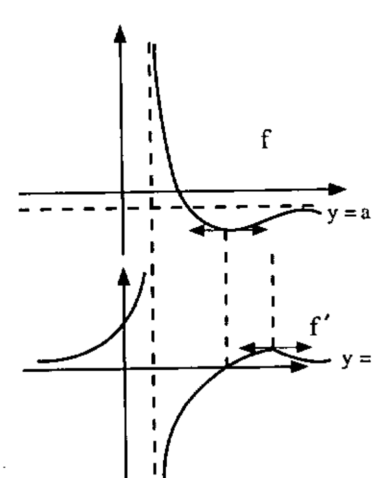
۱۱. اگر منحنی تابع f دارای مجانب قائمی به صورت $x = a$ و $x = a$ انفصال مضاعف تابع f باشد، آن‌گاه منحنی تابع f' دارای مجانب قائمی به معادله‌ی $x = a$ است، ولی انفصال حاصل در منحنی f'، انفصال ساده خواهد بود.

اثبات: فرض می‌کنیم معادله‌ی منحنی تابع f به صورت $f(x) = \frac{g(x)}{(x-a)^{2n}}$، $n \in N$ و $g(a), g'(a) \neq 0$ باشد. پس منحنی تابع f در $x = a$ انفصال مضاعف خواهد بود، اما پس از مشتق‌گیری نسبت به x خواهیم داشت:

$$f'(x) = \frac{(x-a)g'(x) - 2ng(x)}{(x-a)^{2n+1}}$$

ملاحظه می‌شود که عامل $(x - a)$ در تابع f' دارای توان فرد است. پس خط $x = a$ مجانب قائمی است که انفصال حاصل از آن، انفصال ساده خواهد بود.

مثال ۱۱. اگر منحنی تابع f به صورت زیر باشد، آن‌گاه منحنی تابع f' به صورت نموداری خواهد بود که زیر آن آمده است.



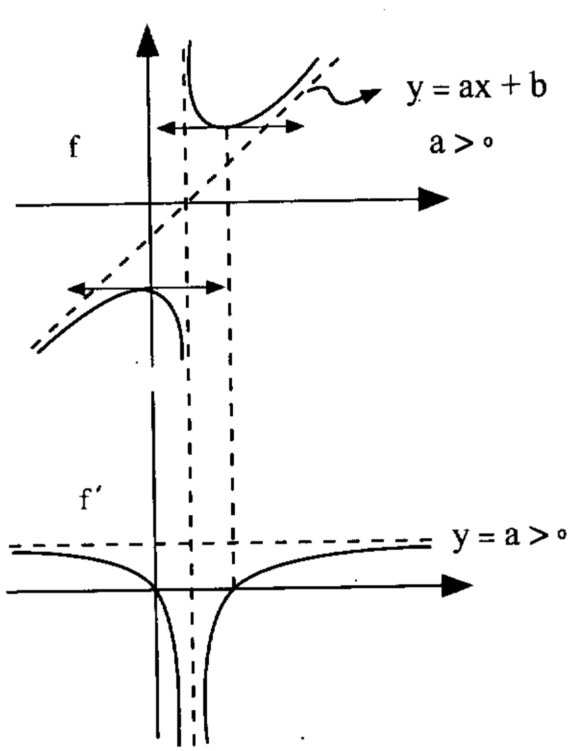
۱۲. اگر در توابع کسری، معادله‌ی مجانب مایل منحنی تابع به صورت $y = ax + b$ باشد، آن‌گاه منحنی تابع f' دارای مجانب افقی به معادله‌ی $y = a$ است.

اثبات: فرض می‌کنیم معادله‌ی تابع f به صورت $f(x) = ax + b + \frac{g(x)}{h(x)}$ و درجه‌ی h(x) حداقل یک واحد بیشتر از درجه‌ی g(x) باشد. اگر از معادله‌ی تابع f مشتق بگیریم خواهیم داشت:

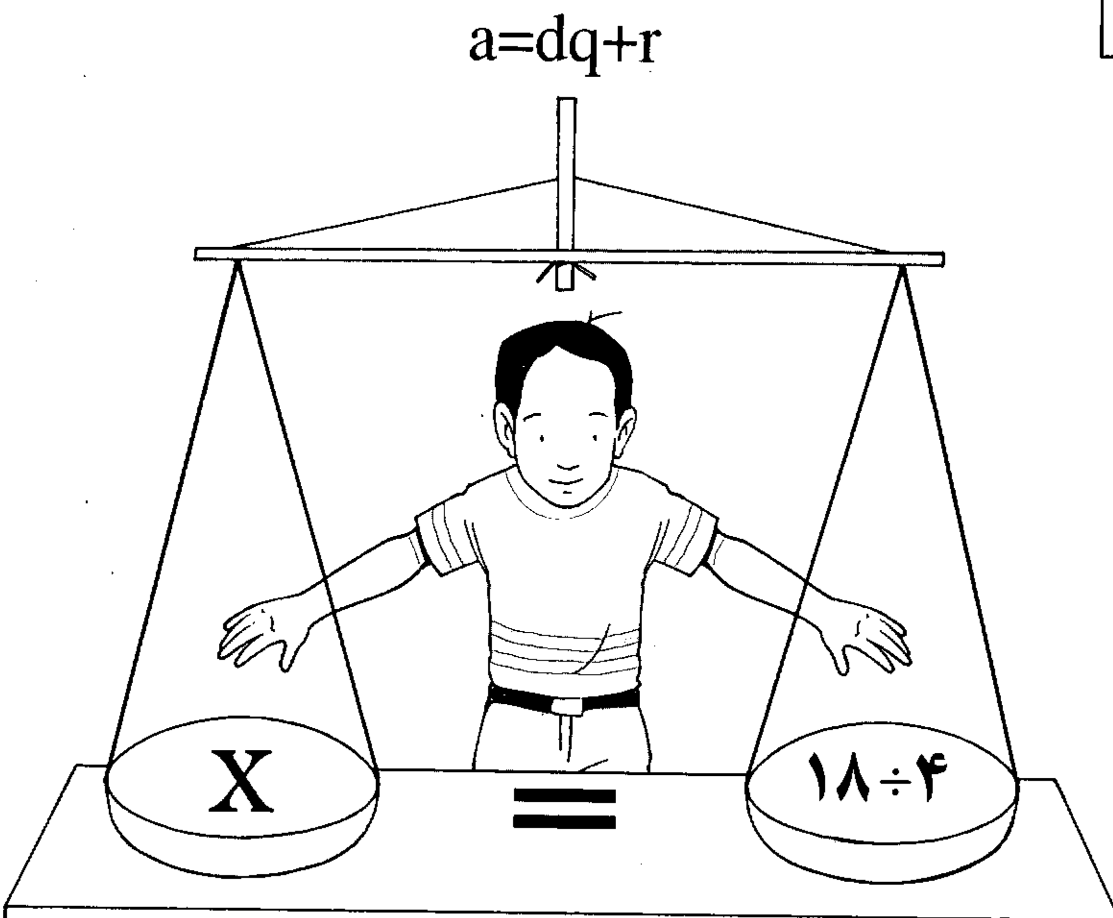
$$f'(x) = a + \frac{g'(x).h(x) + h'(x).g(x)}{(h(x))^2}$$

اگر درجه‌ی g(x)، n و درجه‌ی h(x)، $n+1$ و $n \in N$ باشد، آن‌گاه درجه‌ی صورت کسر $f'(x)$ مساوی $2n$ و درجه‌ی مخرج آن $(2n+2)$ است. پس اگر $x \to \infty$، آن‌گاه حد کسر صفر می‌شود و حد $f'(x)$ در این حالت برابر با a است که همان مجانب افقی منحنی تابع f' است.

مثال ۱۱. اگر منحنی تابع f به صورت زیر باشد، آن‌گاه منحنی تابع f' به صورت نموداری خواهد بود که زیر آن آمده است.



○ حمیدرضا امیری



کاربردهای قضیه‌ی تقسیم

افراز Z توسط قضیه‌ی تقسیم

در قضیه‌ی تقسیم مشاهده شد که اگر a عددی صحیح و دل‌خواه باشد و $b \in \mathbb{N}$ ، با تقسیم a بر b رابطه‌ی $a=bq+r$ را برای $0 \leq r < b$ و در b حالت ممکن، یعنی حالتی که $r=0$ تا $r=b-1$ باشد، می‌توان نوشت. برای مثال اگر $b=4$ ، در این صورت باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد صحیح a بر ۴، طبق قضیه‌ی تقسیم عبارت است از $r=0$ یا $r=1$ یا $r=2$ یا $r=3$. به بیان دیگر، هر عدد صحیح مانند a را به یکی از چهار صورت زیر می‌توان نوشت:

$a=4q$ یا $a=4q+1$ یا
$a=4q+2$ یا $a=4q+3$

در واقع می‌توان یک افراز ۴ عضوی برای Z و به صورت زیر تعریف کرد:

$$A_1=\{x \in Z | x=4k\}$$

$$A_2=\{x \in Z | x=4k+1\}$$

$$A_3=\{x \in Z | x=4k+2\}$$

$$A_4=\{x \in Z | x=4k+3\}$$

در حالت کلی می‌توان یک افراز k عضوی برای Z تعریف کرد؛ یعنی Z را به k زیر مجموعه، افراز یا تقسیم کنیم (منظور از افراز یک مجموعه به n زیر مجموعه‌ی خودش، تقسیم آن مجموعه به n زیر مجموعه است که اول، هیچ‌کدام از زیر مجموعه‌ها تهی نباشند. دوم، دو به دو اشتراکی نداشته باشند و سوم، اجتماع زیرمجموعه‌ها، مجموعه‌ی اصلی را تشکیل دهد):

$$Z=A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$$

که $A_k=\{x \in Z;\ x=kq+(k-1)\}$

حال می‌خواهیم از این نوع افراز Z، که توسط قضیه‌ی تقسیم صورت گرفت و با استفاده از روشی در استدلال به نام «روش اشباع» چند مسئله در نظریه‌ی اعداد طرح و حل کنیم.

مسئله‌ی ۱: ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد صحیح و متوالی، همواره بر ۲ بخش‌پذیر است.

حل: فرض کنیم $a = n(n-1)$. ثابت می‌کنیم $2|a$. برای این منظور، طبقه قضیه‌ی تقسیم، برای n دو حالت در نظر می‌گیریم. در هر دو حالت ثابت می‌کنیم a بر ۲ بخش‌پذیر است:

الف) $n = 2k \Rightarrow 2|n \Rightarrow 2|n(n-1) \Rightarrow 2|a$

ب) $n = 2k+1 \Rightarrow n-1 = 2k \Rightarrow 2|n-1 \Rightarrow 2|n(n-1) \Rightarrow 2|a$

مسئله‌ی ۲: ثابت کنید حاصل ضرب هر سه عدد صحیح و متوالی، همواره بر ۶ بخش‌پذیر است.

حل: فرض کنیم $a = (n-1)n(n+1)$. ثابت می‌کنیم $6|a$. کافی است ثابت شود $2|a$ و $3|a$. برای این منظور، برای n سه حالت در نظر می‌گیریم و از مسئله‌ی ۱ نیز استفاده می‌کنیم:

الف) $n = 3k \Rightarrow 3|n \Rightarrow 3|(n-1)n(n+1) \Rightarrow 3|a$

ب) $n = 3k+1 \Rightarrow n-1 = 3k \Rightarrow 3|n-1$

$\Rightarrow 3|(n-1)n(n+1) = a$

ج) $n = 3k+2 \Rightarrow n+1 = 3k+3 = 3k'$

$\Rightarrow 3|n+1 \Rightarrow 3|(n-1)n(n+1) = a$

ثابت شد که $3|a$. در مسئله‌ی ۱ نیز ثابت کردیم $2|n(n-1)$. بنابراین $2|n(n-1)(n+1) = a$ و در نتیجه $6|a$ (اگر عدد بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه بر ۶ هم بخش‌پذیر است).

مسئله‌ی ۳: ثابت کنید هر عدد صحیح و فرد را به یکی از دو صورت $(4k+1)$ یا $(4k+3)$ می‌توان نوشت. سپس نشان دهید مربع هر عدد صحیح فرد به‌صورت $(8t+1)$ است.

حل: فرض کنیم a عدد صحیح و دل‌خواه باشد. در این صورت طبق قضیه‌ی تقسیم، a را به یکی از چهار صورت $a = 4k$ یا $a = 4k+1$ یا $a = 4k+2$ یا $a = 4k+3$ می‌توان نوشت. حال اگر a فرد باشد، $a \neq 4k$ و $a \neq 4k+2$. بنابراین، فقط به یکی از دو صورت $a = 4k+1$ یا $a = 4k+3$ نوشته می‌شود:

الف) $a = 4k+1 \Rightarrow a^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 8t_1 + 1$

ب) $a = 4k+3 \Rightarrow a^2 = 16k^2 + 24k + 9$

$\Rightarrow a^2 = 16k^2 + 24k + 8 + 1 = 8t_2 + 1$

مسئله‌ی ۴: ثابت کنید برای هر $n \in Z$ عدد $a = n^5 - n$ بر ۳۰ بخش‌پذیر است.

حل: چون $a = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$ و قبلاً طبق مسئله‌ی ۲ ثابت کردیم $6|n(n-1)(n+1)$، پس $6|a$. کافی است ثابت کنیم $5|a$. برای این منظور، برای n، پنج حالت در نظر می‌گیریم:

الف) $n = 5k \Rightarrow 5|n \Rightarrow 5|n(n^4-1) \Rightarrow 5|a$

ب) $n = 5k+1 \Rightarrow n-1 = 5k \Rightarrow 5|n-1 \Rightarrow 5|a$

پ) $n = 5k+2 \Rightarrow n^2 = 25k^2 + 20k + 4$

$\Rightarrow n^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 5 = 5t \Rightarrow 5|n^2+1$

$\Rightarrow 5|(n^2-1) \times n \times (n^2+1) = a$

ت) $n = 5k+3 \Rightarrow n^2 = 25k^2 + 30k + 9 \Rightarrow n^2+1$

$\Rightarrow n^2 + 1 = 25k^2 + 30k + 10 = 5t$

$\Rightarrow 5|n^2+1 \Rightarrow 5|a$

ث) $n = 5k+4 \Rightarrow n+1 = 5k+5 = 5t \Rightarrow 5|n+1 \Rightarrow 5|a$

مسئله‌ی ۵: اگر a عددی فرد و مضرب ۳ نباشد، ثابت کنید (a^2+23) بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

حل: کافی است ثابت کنیم (a^2+23) بر ۸ و بر ۳ بخش‌پذیر است.

a فرد است $\Rightarrow a^2 = 8t+1$

$\Rightarrow a^2 + 23 = 8t + 1 + 23 = 8t + 24$

$\Rightarrow a^2 + 23 = 8(\underbrace{t+3}_{t_1}) \Rightarrow 8|a^2+23$

طبق فرض $a \neq 3k \Rightarrow \begin{cases} a = 3k+1 \\ a = 3k+2 \end{cases}$

اگر $a = 3k+1 \Rightarrow a^2 = 9k^2 + 6k + 1$

$\Rightarrow a^2 + 23 = 9k^2 + 6k + 24 = 3k'$

اگر $a = 3k+2 \Rightarrow a^2 = 9k^2 + 12k + 4$

$\Rightarrow a^2 + 23 = 9k^2 + 12k + 27 = 3k''$

مسئله‌ی ۶: ثابت کنید، اگر $p > 3$ عددی اول باشد، فقط به یکی از دو صورت $6k \pm 1$ نوشته می‌شود.

حل: می‌دانیم عدد $p \in N$ و $p \neq 1$ اول است، هرگاه هیچ شمارنده یا مقسوم‌علیه مثبتی به جز ۱ و خودش نداشته باشد و می‌دانیم عدد ۲ تنها عدد اول و زوج است. و نیز می‌دانیم هر عدد به صورت $6t+5$ همان $6k-1$ است، زیرا:

$$6t+5 = 6t+6-1 = 6(t+1)-1 = 6k-1$$

حال اگر p عددی اول باشد، لذا عددی صحیح است و هر عدد صحیح به یکی از ۶ صورت $6k$ یا $6k+1$ یا $6k+2$ یا $6k+3$ یا $6k+4$ یا $6k+5$ نوشته می‌شود که چون p اول و بزرگ‌تر از ۳ است، پس p زوج نیست و $p \neq 6k$ ، $p \neq 6k+2$ و $p \neq 6k+4$ و نیز p، مضرب ۳ نیستند. پس $p \neq 6k+3$. بنابراین فقط می‌تواند به یکی از دو صورت $p = 6k+1$ یا $p = 6k+5$ باشد که همان $6t-1$ است.

نتیجه‌ی متمم از مسئله‌ی ۶: اگر عددی طبیعی و بزرگ‌تر از ۳ را بر ۶ تقسیم کنیم و باقی‌مانده‌ی تقسیم آن عدد با ۱ یا ۵ برابر نباشد، قطعاً آن عدد اول نیست و اگر باقی‌مانده ۱ یا ۵ باشد، دلیل بر اول بودن آن عدد نیست. فقط می‌توان گفت آن عدد می‌تواند اول باشد. مانند عدد ۲۵ که به صورت $6 \times 4 + 1$ است، ولی اول نیست.

مسئله‌ی ۷: اگر a عددی فرد و اول باشد، ثابت کنید a را فقط به یک صورت منحصربه‌فرد به شکل تفاضل مربعین دو عدد طبیعی می‌توان نوشت.

حل: می‌دانیم اگر a فرد باشد، اعداد $(\frac{a+1}{2})$ و $(\frac{a-1}{2})$ اعدادی طبیعی و $a = (\frac{a+1}{2})^2 - (\frac{a-1}{2})^2$.

حال برای اثبات منحصر به فردی فرض کنیم x و y دو عدد طبیعی هستند و $a = x^2 - y^2$. در این صورت داریم: $a = (x-y)(x+y)$ که $0 < x-y < x+y$ و چون a اول است $a = 1 \times a$ ، پس $x - y = 1$ و $x + y = a$ که با حل دستگاه $\begin{cases} x+y=a \\ x-y=1 \end{cases}$ داریم:

$x = \frac{a+1}{2}$ و $y = \frac{a-1}{2}$.

یعنی: $a = x^2 - y^2 = (\frac{a+1}{2})^2 - (\frac{a-1}{2})^2$

تمرین: عکس مسئله‌ی ۷ را ثابت کنید. یعنی ثابت کنید: اگر یک عدد طبیعی و فرد که مخالف یک است، فقط یک نمایش به صورت تفاضل مربعین دو عدد صحیح و نامنفی داشته باشد، آن‌گاه آن عدد اول است (روش اثبات خود را برای ما بفرستید).

مسئله‌ی ۸: اگر p عددی اول و بزرگ‌تر از ۳ باشد، ثابت کنید $p^2 - 1$ بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

حل: فرض کنیم: $a = p^2 - 1$. ثابت می‌کنیم: $24|a$. برای این منظور کافی است ثابت کنیم: $8|a$ و $3|a$.

$p > 3 \Rightarrow$ اول است p فرد است $\Rightarrow p^2 = 8k+1 \Rightarrow p^2 - 1 = 8k$

$\Rightarrow 8|p^2-1 \Rightarrow 8|a$

بخش‌پذیری ۳ : p اول است $p > 3 \Rightarrow p \neq 3k \begin{cases} p = 3k+1 \Rightarrow p-1 = 3k \\ p = 3k+2 \Rightarrow p+1 = 3k' \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3|p-1 \Rightarrow 3|(p-1)(p+1) = p^2-1 = a \\ 3|p+1 \Rightarrow 3|(p+1)(p-1) = p^2-1 = a \end{cases}$$

مسئله‌ی ۹: اگر p عددی اول و بزرگ‌تر از ۵ باشد، ثابت کنید $(p^4 - 1)$ بر ۱۲۰ بخش‌پذیر است.

حل: اگر فرض کنیم $a = p^4 - 1$ ، ثابت می‌کنیم $120|p^4 - 1$. کافی است ثابت کنیم $(p^4 - 1)$ بر ۵ و ۲۴ بخش‌پذیر است.

بخش‌پذیری بر ۲۴ : $24|p^2-1$ ثابت شد $\Rightarrow 24|(p^2-1)(p^2+1) \Rightarrow 24|a$

بخش‌پذیری بر ۵ : $p > 5$ اول است

$$\Rightarrow p \neq 5k \begin{cases} p = 5k+1 \Rightarrow p-1 = 5k \Rightarrow 5|p-1 \Rightarrow 5|a \\ p = 5k+2 \\ p = 5k+3 \\ p = 5k+4 \end{cases}$$

اگر $p = 5k+2 \Rightarrow p^2 = 25k^2 + 20k + 4$

$\Rightarrow p^2 + 1 = 5k' \Rightarrow 5|p^2+1 \Rightarrow 5|a$

اگر $p = 5k+3 \Rightarrow p^2 = 25k^2 + 30k + 9$

$\Rightarrow p^2 + 1 = 5k'' \Rightarrow 5|p^2+1 \Rightarrow 5|a$

اگر $p = 5k+4 \Rightarrow p+1 = 5t \Rightarrow 5|p+1 \Rightarrow 5|a$

● تونی کریلی

ترجمه: غلامرضا یاسی پور

عدد پی (π)

π یا پی، طول دور دایره (پیرامون یا محیط آن) تقسیم بر طولِ در امتداد مرکز آن (قطر آن) است. مقدار این تقسیم، یعنی نسبت این دو طول، به اندازه‌ی دایره بستگی ندارد. درواقع، دایره هرچه بزرگ یا کوچک باشد، π ثابتی ریاضی است.

π معروف‌ترین عدد در ریاضیات است. جمیع ثابت‌های دیگر طبیعت را فراموش کنید، چه π همواره در رأس فهرستمان قرار می‌گیرد. اگر برای اعداد نیز جایزه‌ی اُسکار وجود داشت، π هر ساله جایزه را می‌برد.

π یا پی، طول دور دایره (پیرامون یا محیط آن) تقسیم بر طولِ در امتداد مرکز آن (قطر آن) است. مقدار این تقسیم، یعنی نسبتِ این دو طول، به اندازه‌ی دایره بستگی ندارد. درواقع، دایره هرچه بزرگ یا کوچک باشد، π ثابتی ریاضی است.

زیستگاه طبیعی π دایره است، اما این عدد در هر گوشه‌ی ریاضیات و در مکان‌هایی که به‌هیچ‌وجه با دایره مرتبط نیستند نیز خود را نشان می‌دهد.

به‌ازای دایره‌ای به قطر d و شعاع r:

$$\text{پیرامون} = \pi d = ۲\pi r$$

$$\text{سطح} = \pi r^{۲}$$

به‌ازای کره‌ای به قطر d و شعاع r:

$$\text{سطح رویه} = \pi d^{۲} = ۴\pi r^{۲}$$

$$\text{حجم} = ۴/۳\pi r^{۳}$$

ارشمیدس سیراکیوزی[1]

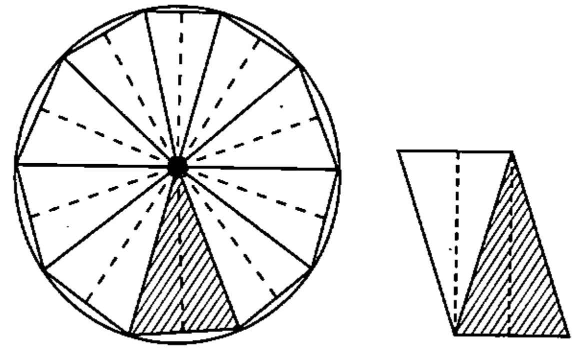
نسبت پیرامون دایره به قطر آن، موضوعی مورد توجه فرهنگ باستان بود. در حدود سال ۲۰۰۰ قبل از میلاد، بابلی‌ها متوجه شدند که پیرامون دایره، به تقریب، سه برابر طول قطر آن است. سپس در سال ۲۲۵ قبل از میلاد، این **ارشمیدس سیراکیوزی** بود که به‌طور جدی بررسی نظریه‌ی ریاضی π را آغاز کرد و از این رو در عداد بزرگان قرار گرفت. ریاضی‌دانان دوست دارند به این همکار خود درجه بدهند و او را هم‌سطح، و البته پیش‌گام **کارل فردریش گاوس**[2] (شاهزاده‌ی ریاضی‌دانان) و **سر اسحق نیوتن**[3] قرار دهند. درستی این قضاوت هرچه باشد، واضح است که ارشمیدس از شهرت و اعتبار بالایی برخوردار است. او غیر از سهمش در نجوم، ریاضی و فیزیک، سلاح‌های جنگی از قبیل منجنیق، اهرم و «آینه‌های سوزان»ی طراحی کرد که تمام آن‌ها برای دور نگه‌داشتن رومیان و متوقف کردن آنان به کار می‌رفت. اما با تمام این احوال، وی چون پروفسورهای پریشان‌حواس عمل می‌کرد، وگرنه چرا هنگام کشف قانون تقلیل وزن اجسام در مایعات، برهنه از حمام بیرون جست و فریاد «یافتم، یافتم»[4] سر داد؟!

افتخار تخصیص نماد فعلی π به ریاضی‌دان ولزی[۶] کمتر معروف، یعنی ویلیام جونز[۷] برمی‌گردد که در قرن هجدهم، معاون انجمن سلطنتی لندن[۸] بود

این که چگونه کار خود را در مورد π جشن گرفت، هنوز مشخص نشده است!

باری، با در دست داشتن این تعریف که π نسبت پیرامون دایره به قطرش است، رابطه‌ی آن با سطح[۵] دایره چه می‌شود؟ چنین استنتاج کرده‌اند که سطح دایره‌ای، به شعاع r، برابر πr^2 است؛ گرچه احتمالاً این رابطه معروف‌تر از تعریف نسبت پیرامون به قطر (π) است. این واقعیت که π وظایفی دوگانه در مورد سطح و پیرامون دایره دارد، قابل توجه است.

اما این مطلب را چگونه می‌توان نشان داد؟ دایره را می‌توان به تعدادی مثلث برابر و باریک تجزیه کرد که طول قاعده‌شان b و طول ارتفاعشان نزدیک به r باشد. این مثلث‌ها در داخل دایره، یک چندضلعی تشکیل می‌دهند که به سطح دایره نزدیک می‌شود. برای آغاز کار، ۱۰۰۰ مثلث را در نظر می‌گیریم. کل جریان، تمرین در تقریب‌ها است. در این صورت می‌توانیم، هر زوج مجاور از این مثلث‌ها را به‌هم وصل کنیم و مستطیلی بسازیم (تقریباً) با مساحت $b \times r$. بنابراین سطح یا مساحت کل چندضلعی، برابر ۵۰۰×b×r خواهد شد. مقدار ۵۰۰×b، از آن‌جا که در حدود نصف پیرامون دایره است، دارای طول πr می‌شود و سطح چندضلعی مورد بحث $\pi r \times r = \pi r^2$ خواهد شد. هرچه تعداد مثلث‌هایمان بیشتر باشد، شکل تقریبی‌مان به دایره نزدیک‌تر می‌شود و در حد نتیجه می‌گیریم که سطح دایره برابر πr^2 است.



ارشمیدس مقدار π را بین دو کسر ۲۲۳/۷۱ و ۲۲۰/۷۰ برآورد کرد. بنابراین تقریب آشنای ۲۲/۷ برای π را به ارشمیدس مدیونیم. افتخار تخصیص نماد فعلی π به ریاضی‌دان ولزی[۶] کمتر معروف، یعنی ویلیام جونز[۷] برمی‌گردد که در قرن هجدهم، معاون انجمن سلطنتی لندن[۸] بود. اما این لئونارد اویلر[۹] ریاضی‌دان و فیزیک‌دان بود که π را در زمینه‌ی نسبت دایره‌ای متداول ساخت.

مقدار دقیق π

هرگز نمی‌توانیم مقدار دقیق π را بدانیم، چرا که این عدد، عددی گنگ است؛ موضوعی که در سال ۱۷۶۸ **یوهان لامبرت**[۱۰] اثبات کرد، این بود که: بسط دهدهی عدد π، بدون نمونه‌ای قابل پیش‌بینی، نامتناهی است. ۲۰ رقم ده‌دهی اولیه عبارت‌اند از:

۳.۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸۴۶...

مقدار $\sqrt{10}$ که ریاضی‌دانان چینی در نظر می‌گرفتند، برابر است با:

۳.۱۶۲۲۷۷۶۶۰۱۶۸۳۷۹۳۳۱۹۹

این مقدار که در حدود سال ۵۰۰ میلادی، توسط **براهما گوپتا**[۱۱] پذیرفته شد، درواقع اندکی بهتر از مقدار تقریبی‌تر ۳ است؛ گرچه در رقم دوم ده‌دهی، با π اختلاف دارد.

π را می‌توان با استفاده از یک سری[۱۲] از اعداد محاسبه کرد.

یکی از معروف‌ترین این سری‌ها عبارت است از:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\dots$$

گرچه این سری در هم‌گرایی به π، به گونه‌ای پردردسر آهسته، و برای محاسبه نومیدکننده است. در این مورد، اویلر سری جالب توجه زیر را به‌دست آورد:

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\dots$$

رامانوجان[۱۳]، نابغه‌ی خودآموخته‌ی هندی، چندین فرمول تقریبی جالب برای π به‌دست داد که یکی از آن‌ها شامل تنها جذر ۲، عبارت است از:

$$\frac{9801}{4412}\sqrt{2}=3.1415927300133056603139961890\ldots$$

ریاضی‌دانان شیفته و مجذوب π هستند. در ایامی که لامبرت ثابت کرده بود این عدد نمی‌تواند کسری باشد، به سال ۱۸۸۲، **لیندمان**[۱۴]، ریاضی‌دان آلمانی، برجسته‌ترین مسئله‌ی مرتبط با π را حل کرد. یعنی نشان داد که π «متعالی»[۱۵] است به این معنی که نمی‌تواند جواب یک معادله‌ی جبری باشد (یعنی معادله‌ای که تنها شامل توان‌های x است). لیندمان، با حل این معمای روزگاران، به مسئله‌ی «تربیع دایره»[۱۶] نیز خاتمه داد. مسئله به این ترتیب بود که با مفروض بودن یک دایره و تنها با به کار بردن پرگار و خط‌کش نامدرج، مربعی رسم کنیم که مساحتش برابر مساحت آن دایره باشد. لیندمان به‌طور قطعی اثبات کرد که این کار غیرممکن است. امروزه عبارت تربیع دایره، هم ارز غیرممکن به کار می‌رود.

محاسبه‌ی دقیق‌تر مقدار π به سرعت ادامه یافت. در سال

۱۸۵۳ م، ویلیام شنکس[۱۷] مدعی محاسبه‌ی مقدار صحیح آن تا ۶۰۷ رقم ده‌دهی شد (عملاً تنها تا ۵۲۷ رقم ده‌دهی). در دوران جدید، تحقیق در محاسبه‌ی مقدار π با رقم‌های بیشتر بعد از ممیز، به کمک رایانه، شدت و حدت بیشتری یافته است. در سال ۱۹۴۹، π تا ۲۰۳۷ رقم ده‌دهی محاسبه شد و این کار با رایانه‌ی انیاک[۱۸] ۷۰ ساعت طول کشید. تا سال ۲۰۰۲، محاسبه‌ی π تا مقدار گیج کننده‌ی ۱/۲۴۱/۱۰۰/۰۰۰/۰۰۰ رقم ده‌دهی رسید، اما این رشته هم‌چنان سر دراز دارد. در این مورد، اگر در خط استوا بایستیم و شروع به نوشتن بسط π کنیم، طول محاسبه‌ی شنکس به ۱۴ متر می‌رسد، در حالی که بسط سال ۲۰۰۲ به حدود ۶۲ بار گردش دور زمین می‌انجامد.

در مورد π پرسش‌های گوناگونی مطرح و به آن‌ها پاسخ داده شده است. آیا رقم‌های π تصادفی[۱۹] هستند؟ آیا یافتن دنباله‌ای قابل پیش‌بینی در بسط آن ممکن است؟ برای نمونه، آیا می‌توان دنباله‌ی ۰۱۲۳۴۵۶۷۸۹ را در این بسط یافت؟ در دهه‌ی ۱۹۵۰ پاسخ این پرسش نادانستنی به نظر می‌رسید. هیچ‌کس چنین دنباله‌ای در ۲۰۰۰ رقم دانسته‌ی π نیافته بود. بروور[۲۰]، ریاضی‌دان پیشرو هلندی می‌گفت، این پرسش فاقد معنی است. زیرا بر این اعتقاد بود که تجربه‌پذیر نیست. درواقع، این ارقام در سال ۱۹۹۷ در آغاز مکان ۱۷۳۸۷۵۹۴۸۸۰، یا با به‌کار بردن استعاره‌ی خط استوا، در حدود ۳۰۰۰ مایل پیش از آن‌که دور اول کامل شود، به‌دست آمدند. در بسط π، پیش از آن‌که ۶۰۰ مایل کامل شود، ده شش می‌یابیم، اما برای یافتن ده هفت در یک ردیف، باید تا تکمیل یک دور و طی ۳۶۰۰ مایل دیگر صبر کنیم.

π در اشعار

در صورتی که بخواهیم مقادیر اولیه‌ی بسط π را به‌خاطر بسپریم، شاید چند بیتی شعر کارساز باشد. در این‌جا یکی از این ابیات را می‌آوریم:

گر ز قدر عدد پی بکنند از تو سؤال
پاسخی ده که خردمند تو را آموزد
خرد و دانش و آگاهی دانشمندان
ره بسر منزل توفیق به‌ما آموزد

تعداد حروف هر یک از کلمات بیت دوم، یکی از ارقام اولیه را مشخص می‌کند.

«از: سرگرمی‌های هندسه، پرویز شهریاری»

اهمیت π

فایده‌ی دانستن مقدار π با این همه رقم ده‌دهی چیست در حالی که اغلب محاسبات، تنها به چند رقم ده‌دهی نیاز دارند.

موضوعی که در سال ۱۷۶۸ یوهان لامبرت[۱۰] اثبات کرد، این بود که: بسط بخش دهدهی عدد π، بدون نمونه‌ای قابل پیش‌بینی، نامتناهی است

زیرا احتمالاً در مورد هر کاربرد عملی، به بیش از ده رقم ده‌دهی نیاز نیست و تقریب ارشمیدس، یعنی ۲۲/۷ برای اغلبشان کفایت می‌کند. باید توجه داشته باشیم محاسبات مفصل مزبور تنها برای تفریح نیست. این محاسبات علاوه بر به‌کار گرفتن شیفتگی گروهی از ریاضی‌دانان که خود را «دوست‌داران پی» می‌خوانند، برای امتحان حد و مرز توانایی رایانه‌ها نیز به‌کار می‌روند.

شاید عجیب‌ترین قسمت داستان π تلاشی باشد که در مجلس مقننه‌ی ایالت ایندیانای آمریکا برای گذراندن لایحه‌ای برای تثبیت مقدار آن به‌وقوع پیوست. این عمل در پایان قرن نوزدهم، زمانی به‌وقوع پیوست که دکتر گودوین[۲۱] طبیب، لایحه‌ای تقدیم مجلس کرد که π را «قابل هضم» کند. اما نتیجه‌ی عملی حاصل در این مرحله از قانون‌گذاری، عجز طراح آن برای تثبیت کردن مقداری بود که می‌خواست. خوش‌بختانه از لحاظ ایندیانا، پیش از آن‌که لایحه‌ی مورد بحث به تمامی تصویب شود، حماقت قانونی کردن π آشکار شد. و از آن زمان به بعد، سیاست‌مداران π را راحت گذاشتند.

چند تاریخچه

۲۰۰۰ قبل از میلاد: بابلی‌ها دریافتند که π به طور تقریب برابر ۳ است.

۲۵۰ قبل از میلاد: ارشمیدس تقریب نزدیک‌تر به π ی ۲۲/۷ را به دست داد.

۱۷۰۶ میلادی: ویلیام جونز نماد π را معرفی کرد.

۱۷۶۱ میلادی: لامبرت اثبات کرد که π عددی گنگ است.

۱۸۸۲ میلادی: لیندمان ثابت کرد که π متعالی است.

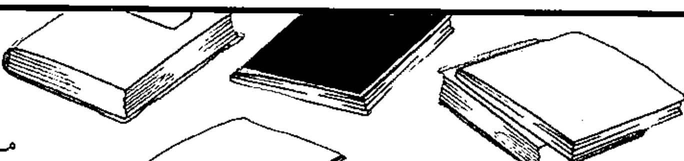
پی‌نوشت

1. Archimedes of Syracuse
2. Carl Friedrich Gauss
3. Sir Isaac Newton
4. Eureka
5. area
6. Welsh
7. William Jones
8. Royal Society of London
9. Leonhard Euler
10. Johann Lambert
11. Brahmagupta
12. series
13. Srinivasa Ramanujan
14. Ferdinand von Lindemann
15. transcendental
16. squaring the circle
17. William Shanks
18. Eniac
19. random
20. L. E. J. Brouwer

● هوشنگ شرقی

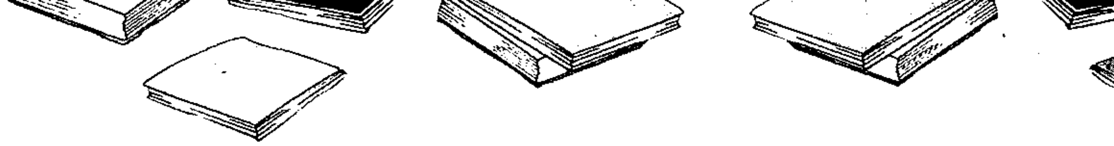
مسائل مسابقات ریاضی در کشورهای مختلف جهان

المپیاد ریاضی در یوگسلاوی سابق



کشور یوگسلاوی هم‌چون بیشتر کشورهای شرق قاره‌ی اروپا، همواره از پیشگامان المپیادهای ریاضی بوده است. از سال ۱۹۵۰، المپیادهای ریاضی منطقه‌ای در این کشور سامان داده شد و از سال ۱۹۶۰ نیز مسابقه‌ی سراسری ریاضی در چهار مرحله (مدرسه، منطقه، جمهوری‌ها و سراسر کشور) در آن برگزار می‌شود. از سال ۱۹۶۳ این کشور به المپیاد بین‌المللی ریاضی پیوست و برای تعیین تیم نهایی شرکت کننده در المپیاد بین‌المللی، مرحله‌ای دیگر نیز به مراحل فوق افزوده شد. با این مقدمات، واضح است که سطح آزمون‌های المپیادهای داخلی این کشور، باید قابل قبول باشد و سؤالات آن‌ها مسائل خوبی باشند و همین طور هم هست. با نگاهی به آرشیو مسائل ریاضی، المپیادها و مسابقات ریاضی و نیز نشریات ریاضی که در این کشور منتشر می‌شوند، به درستی این موضوع پی می‌بریم. با توجه به این موضوع بر آن شدیم، نمونه‌هایی از مسائل مرحله‌ی نهایی المپیاد ریاضی این کشور در سال ۱۹۸۶ را در این شماره، همراه با راه‌حل آن‌ها، بیاوریم.

لازم به یادآوری است، کشور یوگسلاوی در سال‌های ۱۹۷۷ و ۱۹۶۷ دو بار میزبان المپیاد ریاضی بوده و در سال‌های ۱۹۵۹ تا ۱۹۹۹ (قبل از فروپاشی و تجزیه) مقام‌های خوبی در این رقابت‌ها به دست آورده است. پس از تجزیه نیز کشورهای جدا شده از آن یعنی صربستان، کرواسی، اسلوونی، مقدونیه بوسنی-هرزگوین، در المپیادهای ریاضی فعالانه شرکت داشته و کشور اسلوونی در سال ۲۰۰۶ میزبانی این رقابت‌ها را برعهده داشته است. در صورتی که به مسائل المپیادهای ریاضی این کشورها نیز دست‌رسی پیدا کنیم، در شماره‌های آینده از آن‌ها نیز استفاده خواهیم کرد.



مسائل

۱. ثابت کنید می‌توان بی‌نهایت مقدار برای $n \in \mathbb{N}$ پیدا کرد که به ازای هر کدام از آن‌ها، هر یک از عددهای n، $n+1$ و $n+2$ به صورت مجموع مجذورهای دو عدد درست باشند.

۲. ثابت کنید اگر برای چهارضلعی محدب ABCD داشته باشیم: $AB+BD \le AC+CD$ آن وقت $AB \le AC$

۳. ثابت کنید اگر برای عددهای طبیعی m و n داشته باشیم: $2m^2+m=3n^2+n$ آن‌وقت عددهای $m-n$، $2m+2n+1$ و $3m+3n+1$ مجذورهای عددهای درستی هستند.

۴. ثابت کنید برای عددهای حقیقی و مثبت a، b و c همیشه داریم:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \ge \frac{1}{3}(a+b+c)$$

۵. روی محیط دایره‌ای به قطر AD، نقطه‌ی B و روی قطر AD نقطه‌ی C را طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم: AB=CD

ثابت کنید در مثلث ABC، نیم‌ساز رأس A، میانه‌ی رأس B و ارتفاع رأس C از یک نقطه می‌گذرند.

۶. همه‌ی تابع‌های صعودی $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را طوری بیابید که در اتحاد زیر صدق کنند: $f(x+f(y))=f(x+y)+1 \quad (x,y \in \mathbb{R})$

حل مسائل

۱. ابتدا نشان می‌دهیم بی‌شمار عدد طبیعی مربع کامل به فرم $2k^2+1$ (مانند ۱، ۹، ۲۸۹ و...) وجود دارد. سپس درباره‌ی ارتباط این مسئله با مسئله‌ی اصلی می‌گوییم، برای این موضوع در واقع باید ثابت کنیم که معادله‌ی سیاله‌ی $x^2=2y^2+1$ بی‌شمار جواب در $\mathbb{N}$ دارد. به سادگی می‌توان نشان داد، اگر (x_0,y_0) یک جواب این معادله باشد (یعنی: $x_0^2-2y_0^2=1$) آن‌گاه $(3x_0+4y_0,\ 2x_0+3y_0)$ نیز یک جواب این معادله است، زیرا:

$$(3x_0+4y_0)^2-2(2x_0+3y_0)^2=9x_0^2+16y_0^2+24x_0y_0$$
$$-2(4x_0^2+9y_0^2+12x_0y_0)=x_0^2-2y_0^2=1$$

برای مثال می‌دانیم، $x=3$ و $y=2$ یک جواب معادله است. پس $x=3\times3+4\times2=17$ و $y=2\times3+3\times2=12$ نیز یک جواب معادله است و در نتیجه $2(12)^2+1=17^2=289$. لذا می‌توان از هر جواب این معادله جوابی دیگر نیز به دست آورد. در نتیجه، بی‌شمار عدد مربع کامل به صورت $2k^2+1$ تولید کرد.

اکنون با توجه به این نتیجه، می‌توان پاسخ مسئله را به سادگی داد.

عدد طبیعی $n+1=x^2=2y^2+1$ را در نظر می‌گیریم. مطابق نتیجه‌ی فوق بی‌شمار x و y و در نتیجه بی‌شمار $n+1$ به صورت $2y^2+1$ داریم. حال عددهای قبل و بعد از این عدد را ببینیم:

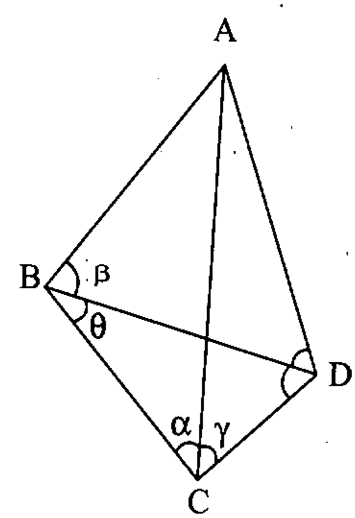
$$n=2y^2=y^2+y^2$$
$$n+1=2y^2+1=x^2=x^2+(0)^2$$
$$n+2=x^2+1=x^2+(1)^2$$

چنان‌که می‌بینیم، هر سه‌ی این عددها به صورت مجموع مجذورهای دو عدد درست نوشته شده‌اند.

در حالت کلی، معادله‌ی سیاله‌ی $x^2-dy^2=1$ را

معادله‌ی پل[1] می‌نامند. به نظر می‌رسد که نخستین بار **ارشمیدس** از این معادله نام برده است. البته **لرد برانکو** (ریاضی‌دان انگلیسی قرن هفدهم)، یک روش برای حل آن ارائه داده است. **فرما**، **والیس** و **لاگرانژ** نیز در سال‌های بعد کارهایی روی این معادله انجام دادند. در نظریه‌ی اعداد ثابت شده است، این معادله به ازای هر مقدار d که مجذور کامل نباشد، بی‌شمار جواب دارد.

۲. اثبات با برهان خلف انجام می‌شود. یعنی فرض می‌کنیم $AB > AC$. در آن صورت مطابق شکل در مثلث ABC داریم: $(I)\ \alpha > \beta + \theta$



و از ترکیب این نابرابری با فرض مسئله نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} AC + CD \geq AB + BD \\ AB > AC \end{cases}$$
$$\overline{\qquad CD \geq BD \qquad}$$

در نتیجه، در مثلث CBD داریم: $(II)\ \theta \geq \alpha + \gamma$. از مقایسه‌ی این نابرابری با نابرابری (I) نتیجه می‌شود:

$$\alpha > \beta + \alpha + \gamma \Rightarrow \beta + \gamma < 0$$

از نادرستی این نتیجه‌ی آخر، درستی حکم ثابت می‌شود.

۳. فرض مسئله را به صورت زیر تغییر می‌دهیم:

$$2m^2 + m - 2n^2 - n = n^2 \Rightarrow 2(m^2 - n^2) + (m - n) = n^2$$
$$\Rightarrow (m - n)(2m + 2n + 1) = n^2$$

حال اگر فرض کنیم که $((m-n),(2m+2n+1)) = d$ خواهیم داشت:

$$m - n = kd,\ 2m + 2n + 1 = k'd \Rightarrow$$
$$kk'd^2 = n^2 \Rightarrow d^2 | n^2 \Rightarrow d | n$$

هم‌چنین واضح است، $d|m-n$ و در نتیجه: $d|m$

بنابراین:

$$d|m,\ d|n \Rightarrow d|2m+2n$$

با توجه به این‌که $d = ((m-n),(2m+2n+1))$، $d|2m+2n+1$ و از مقایسه با $d|2m+2n$ نتیجه می‌شود $d|1$
در نتیجه: $d = 1$ بنابراین: $(m-n)$ و $(2m+2n+1)$ نسبت به هم اول‌اند و حاصل‌ضرب آن‌ها مساوی n^2. یعنی مجذور کامل است. پس هر دوی آن‌ها باید مجذور کامل باشند.

برای اثبات قسمت بعد، کافی است برابری فرض را چنین تغییر دهیم:

$$2m^2 + m = 3n^2 + n \Rightarrow$$
$$3m^2 - 3n^2 + m - n = m^2 \Rightarrow 3(m^2 - n^2) + (m - n) = m^2$$
$$\Rightarrow (m - n)(3m + 3n + 1) = m^2$$

و چون $m - n$ و m^2 هر دو مربع کامل هستند، پس $3m + 3n + 1$ نیز مربع کامل است.

۴. با استدلال بازگشتی و به صورت زیر، درستی این نابرابری اثبات می‌شود:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} =$$
$$\frac{a(a^2+ab+b^2) - ab(a+b)}{a^2+ab+b^2} + \frac{b(b^2+bc+c^2) - bc(b+c)}{b^2+bc+c^2}$$
$$+ \frac{c(c^2+ca+a^2) - ca(c+a)}{c^2+ca+a^2}$$
$$= a - \frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2} + b - \frac{bc(b+c)}{b^2+bc+c^2} +$$
$$c - \frac{ca(c+a)}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{1}{3}(a+b+c)$$
$$\Rightarrow \frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2} + \frac{bc(b+c)}{b^2+bc+c^2} + \frac{ca(a+c)}{c^2+ca+a^2}$$
$$\leq \frac{2(a+b+c)}{3}$$

اکنون این نابرابری را به سه نابرابری متقارن زیر تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{cases} \dfrac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2} \le \dfrac{a+b}{3} \\ \dfrac{bc(b+c)}{b^2+bc+c^2} \le \dfrac{b+c}{3} \\ \dfrac{ca(a+c)}{c^2+ca+a^2} \le \dfrac{a+c}{3} \end{cases}$$

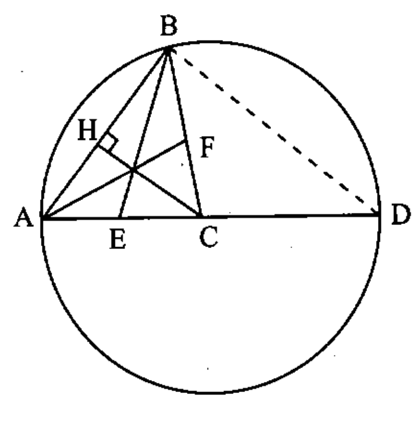
(از جمع این سه نابرابری، نابرابری فوق اثبات می‌شود)
اکنون کافی است درستی یکی از این سه نابرابری را به روش بازگشتی اثبات کنیم:

$$\frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2} \le \frac{a+b}{3} \Rightarrow a^2+ab+b^2 \ge 3ab$$

$$\Rightarrow a^2-2ab+b^2 \ge 0 \Rightarrow (a-b)^2 \ge 0$$

که به دلیل بازگشت‌پذیری همه‌ی مراحل، درستی حکم ثابت می‌شود.

۵. شکل زیر را مطابق مفروضات مسئله رسم می‌کنیم. برای اثبات همرسی نیم‌ساز AF، میانه‌ی BE و ارتفاع CH در مثلث ABC، از «قضیه‌ی سه وا»[2] کمک می‌گیریم. چون AD قطر دایره است، $A\hat{B}D = 90^\circ$ و در نتیجه $CH \parallel BD$ و از قضیه‌ی تالس در مثلث ABD کمک می‌گیریم:



$$\frac{AH}{BH} = \frac{AC}{CD}$$

هم‌چنین به کمک قضیه‌ی نیم‌سازها در مثلث ABC داریم:

$$\frac{BF}{CF} = \frac{AB}{AC} = \frac{CD}{AC}$$

و چون BE میانه است، پس $AE = CE$ و بنابراین:

$$\frac{AH}{BH} \times \frac{BF}{CF} \times \frac{CE}{EA} = \frac{AC}{CD} \times \frac{CD}{AC} \times \frac{AE}{AE} = 1$$

و طبق عکس قضیه‌ی سه‌وا، BE ،AF و CH از یک نقطه می‌گذرند.

۶. در تساوی فوق $x = -y$ قرار می‌دهیم:

$$f(-y+f(y)) = f(0)+1$$

و چون $f(0)+1$ مقداری ثابت است و با توجه این‌که f تابع ثابت نیست، پس باید $-y+f(y)$ مقداری ثابت باشد:

$$-y+f(y) = k \Rightarrow f(y) = y+k \Rightarrow$$

$$f(x) = x+k$$

با قرار دادن $x = 0$ در این رابطه نتیجه می‌شود: $f(0) = k$ و یا $f(x) = x+f(0)$ و اگر در این رابطه $x = f(0)$ قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

$$f(f(0)) = f(0)+f(0) = 2f(0) \quad (I)$$

و اگر در رابطه‌ی اولیه $x = y = 0$ قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

$$f(f(0)) = f(0)+1 \quad (II)$$

و از مقایسه‌ی روابط I و II نتیجه می‌شود:

$$2f(0) = f(0)+1 \Rightarrow f(0) = 1$$

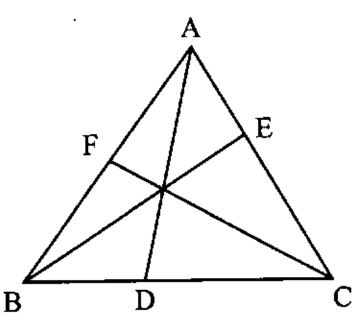
و لذا: $f(x) = x+1$.

پی‌نوشت...

1. Pell equation

۲. طبق قضیه‌ی سه‌وا، شرط لازم و کافی برای آن که سه خط AD و BE و CF در مثلث ABC در یک نقطه همرس باشند، آن است که:

$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = 1$$

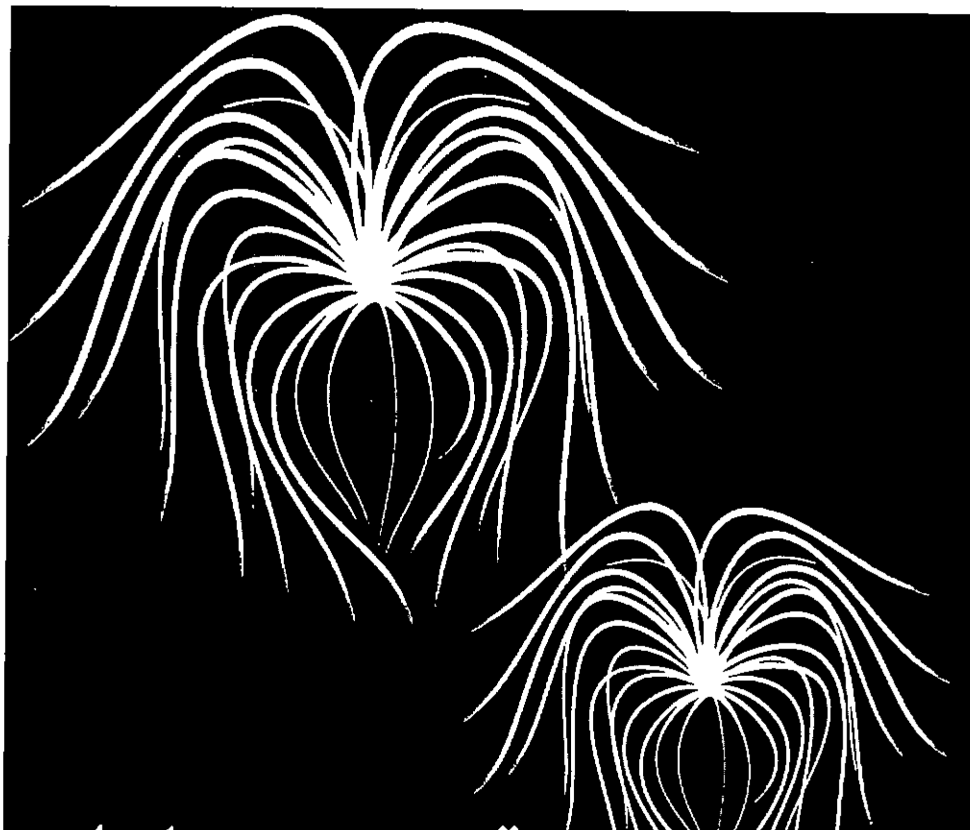


برای اطلاع بیشتر، به کتاب بازآموزی و بازشناخت هندسه، ترجمه‌ی عبدالحسین مصحفی از انتشارات مدرسه مراجعه کنید.

● میرشهرام صدر

برای دانش‌آموزان سال دوم

تابع چندجمله‌ای



چندجمله‌ای

هر عبارت جبری با تعدادی جملات متناهی متشکل از متغیرها و مقادیر ثابتی که بین آن‌ها از عمل‌های جمع، تفریق و ضرب استفاده شده باشد، یک چندجمله‌ای است. نکته‌ی مهم در چندجمله‌ای‌ها این است که توان متغیرها در آن‌ها عددهای صحیح نامنفی است. برای مثال، عبارت جبری $x^{۲} - ۳x + ۲$ چندجمله‌ای است که از سه جمله تشکیل شده است. اما عبارت جبری $x^{۲} - \frac{۴}{x} + ۳x^{\frac{۵}{۲}}$ چندجمله‌ای نیست، زیرا در عبارت $\frac{۴}{x}$ که می‌توان آن را به صورت $۴x^{-۱}$ نوشت، یا در عبارت $۳x^{\frac{۵}{۲}}$، توان x عددی صحیح و نامنفی نیست.

صورت دیگر چندجمله‌ای

هر عبارتی که به صورت حاصل ضرب چندجمله‌ای‌ها باشد، می‌تواند با استفاده از قانون توزیع‌پذیری در ضرب چندجمله‌ای‌ها، به صورت یک چندجمله‌ای نوشته شود. برای مثال، عبارت جبری $(x + ۱)^{۳}$ یک چندجمله‌ای به این صورت است:

$$\begin{aligned}(x+۱)^{۳} &= (x+۱)(x+۱)(x+۱)\\ &= (x^{۲}+۲x+۱)(x+۱)\\ &= x^{۳}+۳x^{۲}+۳x+۱\end{aligned}$$

توجه داشته باشید که عبارت $\frac{۱}{(x+۲)^{۲}}$ چندجمله‌ای نیست، زیرا:

$$\frac{۱}{(x+۲)^{۲}} = (x+۲)^{-۲}$$

در عبارت $(x + ۲)^{-۲}$ توان پرانتز منفی است.

معادلات چندجمله‌ای

به معادله‌ای که در آن یک چندجمله‌ای با چندجمله‌ای دیگر برابر شده باشد، معادله‌ی چندجمله‌ای می‌گوییم.

برای مثال معادله‌ی:

$$3x^2 - 3x + 2 = x^2 + 1 \qquad (1)$$

یک معادله‌ی چندجمله‌ای است. هدف از حل این معادله، یافتن مقادیری برای متغیر x است که وقتی آن‌ها را در معادله قرار می‌دهیم، به یک برابری درست برسیم. برای این منظور داریم:

$$3x^2 - 3x + 2 - x^2 - 1 = 0$$
$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$
$$\Rightarrow (x-1)(2x-1) = 0$$
$$\Rightarrow x = 1, x = \frac{1}{2}$$

این معادله دو جواب دارد که آن‌ها را ریشه‌های معادله‌ی ۱ می‌گوییم. زیرا وقتی آن‌ها را در این معادله قرار دهیم، به یک برابری درست می‌رسیم. (خودتان امتحان کنید.)

معادله‌ی چندجمله‌ای می‌تواند به صورت یک اتحاد بین چندجمله‌ای‌ها باشد؛ مانند:

$$(x-1)(x+1) = x^2 - 1$$

این معادله دارای بی‌شمار جواب است، زیرا برای هر مقدار حقیقی که جای‌گزین x کنیم، به یک برابری همیشه درست می‌رسیم. (خودتان امتحان کنید.)

تابع چندجمله‌ای ....

هر تابع با ضابطه‌ی

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

که در آن a_iها اعداد حقیقی ثابت باشند، یک تابع چند جمله‌ای از درجه‌ی عدد صحیح و نامنفی n (با شرط $a_n \neq 0$) برحسب متغیر x است؛ برای مثال: $f_1(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ ضابطه‌ی یک تابع دوجمله‌ای درجه اول و $f_2(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ ضابطه‌ی یک تابع سه‌جمله‌ای درجه دوم است.

می‌دانیم، نمودار تابع f_1 یک خط راست و نمودار تابع f_2 یک سهمی با راس به طول $x = -\frac{b}{2a}$ و محور تقارن به معادله‌ی $x = \frac{-b}{2a}$ است. اگر $a > 0$ باشد، سهمی در راس خود دارای می‌نیمم است و اگر $a < 0$، دارای ماکزیمم خواهد بود.

توجه داشته باشید که $x = \frac{-b}{2a}$ طول نقطه‌ی ماکزیمم یا می‌نیمم است و برای محاسبه‌ی عرض این نقطه کافی است در ضابطه‌ی f به جای xها مقدار $\frac{-b}{2a}$ را قرار دهیم تا عرض نقطه‌ی ماکزیمم یا می‌نیمم که اصطلاحاً به آن مقدار ماکزیمم یا می‌نیمم گفته می‌شود، به دست آید.

مثال: تابع درجه دوم f با ضابطه‌ی $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ مفروض است. راس سهمی و مقدار می‌نیمم تابع f را بیابید. (چون $a = 2 > 0$ پس سهمی در راس خود می‌نیمم دارد.)

حل: در این تابع درجه‌ی ۲ داریم: $a = 2$ ، $b = -4$ و $c = 1$. پس:

طول نقطه‌ی می‌نیمم $x = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{4} = 1$

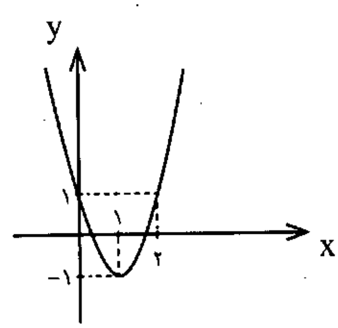
مقدار می‌نیمم تابع $f(1) = 2 \times (1)^2 - 4 \times (1) + 1 = -1$

در واقع برای تابع f در دامنه‌ی تعریف خود که $\mathbb{R}$ است، کم‌ترین مقدار ممکن با ۱- برابر است.

به عبارت دیگر، برای هر $k \in \mathbb{R}$ همواره داریم: $f(k) \geq -1$.

نمودار این سهمی به صورت زیر است:

x	0	1	2
y	1	-1	1



دامنه‌ی توابع چند جمله‌ای، مجموعه‌ی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ است. در مثال بالا، هر عدد حقیقی دل‌خواهی را می‌توان جای‌گزین x در تابع f(x) کرد. بنابراین: $D_f = \mathbb{R}$.

از طرف دیگر، با توجه به نمودار تابع ملاحظه می‌کنیم که عرض هر نقطه روی نمودار، یعنی $y = f(x)$ همواره بزرگ‌تر یا برابر با ۱- است. در نتیجه با توجه به نمودار، برد این تابع $y \geq -1$ است. بنابراین: $R_f = [-1, +\infty)$.

طول محل برخورد نمودار تابع با محور xها را صفرهای تابع می‌نامیم، که برای یافتن آن‌ها کافی است معادله‌ی $f(x) = 0$ را حل کنیم. در مثال قبل داریم:

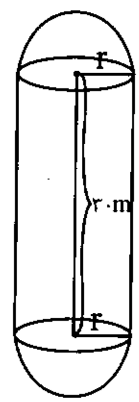
$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

صفرهای تابع $\Rightarrow x_1, x_2 = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$

در نتیجه، محل برخورد نمودار این تابع با محور xها، نقاط

$A_1\left|\begin{matrix}\frac{2+\sqrt{2}}{2}\\ 0\end{matrix}\right.$ و $A_2\left|\begin{matrix}\frac{2-\sqrt{2}}{2}\\ 0\end{matrix}\right.$ هستند.

مثال: یک تانکر گاز از یک استوانه و دو نیم کره به شعاع r در دو انتهای استوانه تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه ۳۰ متر باشد، حجم تانکر را بر حسب تابعی از r بنویسید.

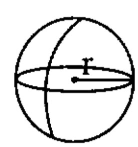


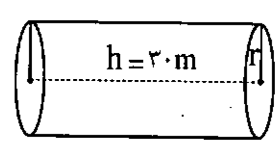
حل: حجم این تانکر از یک استوانه و یک کره که هر دو به شعاع r هستند، تشکیل شده است.

بنابراین داریم:

حجم کره به شعاع r : $y_1 = \frac{4}{3}\pi r^3$

حجم استوانه به شعاع r و ارتفاع $h = 30$: $y_2 = \pi r^2 h = 30\pi r^2$





حجم تانکر $f(x) = y_1 + y_2 \Rightarrow f(x) = \frac{4}{3}\pi r^3 + 30\pi r^2$

$\Rightarrow f(x) = \pi r^2(\frac{4}{3}r + 30)$

تمرین: مخزنی از یک استوانه و دو مخروط به شعاع مقطع ۵ در دو انتهای استوانه تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه و مخروط ها h باشد، حجم این مخزن را بر حسب تابعی از h بنویسید.

راهنمایی: حجم مخروط به شعاع r و ارتفاع h، $\frac{1}{3}$ حجم استوانه به شعاع مقطع r و ارتفاع h است.

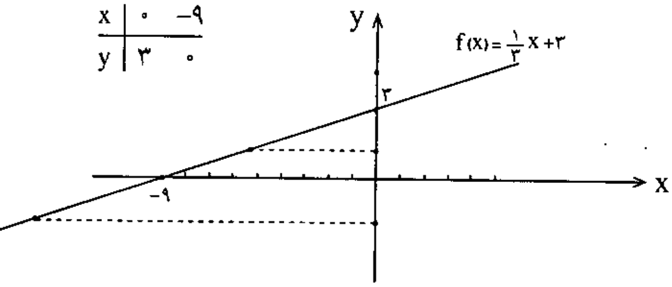
مثال: نمودار توابع زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و دامنه و برد هر یک را به دست آورید.

۱) $f(x) = \frac{1}{3}x + 3$ ۲) $g(x) = -x^2 + 4x - 3$

حل:

۱. $f(x)$ تابع چند جمله‌ای است، پس: $D_f = \mathbb{R}$. چون این تابع چند جمله‌ای از درجه‌ی اول است، بنابراین نمودار آن یک خط است که برای رسم آن از دو نقطه استفاده می‌کنیم:

x	0	-9
y	3	0



با توجه به نمودار تابع ملاحظه می‌کنیم، عرض هر نقطه روی نمودار می‌تواند یک عدد حقیقی از بازه‌ی $(-\infty,+\infty)$ باشد. بنابراین $R_f = \mathbb{R}$.

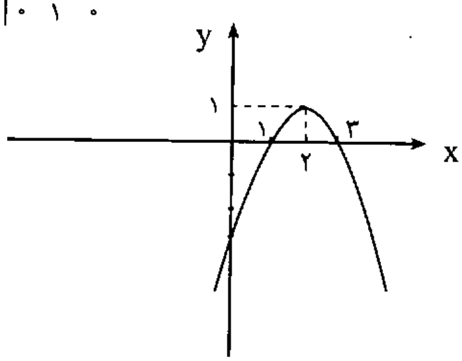
۲. $g(x)$ تابع چند جمله‌ای است، پس: $D_g = \mathbb{R}$. چون این تابع چند جمله‌ای از درجه‌ی دوم است، بنابراین نمودار آن یک سهمی است.

طول نقطه‌ی ماکزیمم $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2$

مقدار ماکزیمم تابع $f(2) = -(2)^2 + 4(2) - 3 = 1$

برای رسم سهمی از مختصات چند نقطه از سهمی استفاده می‌کنیم:

x	1	2	3
y	0	1	0



با توجه به نمودار تابع ملاحظه می‌کنیم که عرض هر نقطه روی سهمی، همواره کوچک‌تر یا برابر با ۱ است؛ یعنی همواره $f(x) \le 1$.

در نتیجه داریم: $R_f = (-\infty,1]$.

مثال: فرض کنیم $f(x)$ یک تابع چند جمله‌ای درجه اول باشد؛ به طوری که در آن $f(-1) = 2$ و $f(2) = -3$. ضابطه‌ی

این تابع را پیدا کنید.

حل: می‌دانیم ضابطه‌ی این تابع به صورت $f(x)=ax+b$ است. بنابراین داریم:

$$\begin{matrix} f(-۱)=۲\Rightarrow a(-۱)+b=۲ \\ f(۲)=-۳\Rightarrow a(۲)+b=-۳ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} -a+b=۲ \\ ۲a+b=-۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۲a+۲b=۴ \\ ۲a+b=-۳ \end{cases}$$
$$۳b=۱\Rightarrow b=\frac{۱}{۳}$$

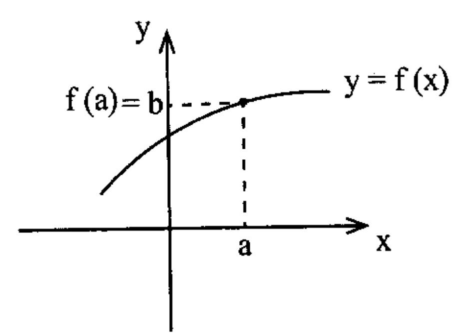
$$b=\frac{۱}{۳}\Rightarrow -a+\frac{۱}{۳}=۲\Rightarrow a=-\frac{۵}{۳}\Rightarrow f(x)=-\frac{۵}{۳}x+\frac{۱}{۳}$$

مثال: هرگاه $f(x)=۳x-۲$ و نقطه‌ی $(m+۱,\ ۲m-۱)$ روی نمودار تابع $f(x)$ باشد، مقدار m را بیابید.

حل: چون این نقطه روی نمودار تابع است، بنابراین داریم:

$$f(m+۱)=۲m-۱\Rightarrow ۳(m+۱)-۲=۲m-۱\Rightarrow m=-۲$$

نکته: هرگاه نقطه‌ی (a,b) روی نمودار تابع $y=f(x)$ باشد، در این صورت داریم: $f(a)=b$.



مثال: فرض کنیم $f(x)=۲x^۲-۱$ مطلوب است:

الف) $f(\sqrt{۲})$ ب) $f(۲x)$ ج) $f(x+۱)$

حل:

الف) کافی است به جای x در تابع $f(x)$، عدد $\sqrt{۲}$ را قرار دهیم:

$$f(\sqrt{۲})=۲(\sqrt{۲})^۲-۱=۴-۱=۳$$

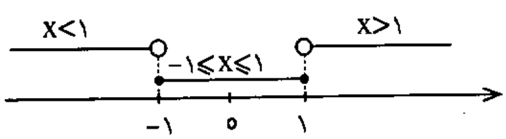
ب)
$$f(۲x)=۲(۲x)^۲-۱$$
$$=۸x^۲-۱$$

ج)
$$f(x+۱)=۲(x+۱)^۲-۱$$
$$=۲(x^۲+۲x+۱)-۱=۲x^۲+۴x+۱$$

تابع چند ضابطه‌ای ....

هرگاه دامنه‌ی یک تابع را به چند مجموعه‌ی جدا از هم تقسیم کنیم، به طوری که اجتماع آن مجموعه‌ها برابر با دامنه‌ی تابع باشد و روی هر مجموعه ضابطه‌ای متمایز تعریف کنیم، در این صورت یک تابع چند ضابطه‌ای به دست می‌آید.

مثال: دامنه‌ی تابع $f(x)$ برابر با $\mathbb{R}$ است. ابتدا به صورت زیر، این دامنه را به سه مجموعه‌ی جدا از هم تقسیم می‌کنیم:



اکنون روی هر مجموعه، ضابطه‌ای متمایز به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} ۲x & x>۱ \\ ۲ & -۱\le x\le ۱ \\ -۲x & x<-۱ \end{cases}$$

در این صورت به $f(x)$ تابع ای سه ضابطه‌ای می‌گوییم.

مثال: نمودار تابع سه ضابطه‌ای مثال قبل را رسم کنید و برد آن را به دست آورید.

برای رسم نمودار این تابع باید نمودار هر ضابطه را در محدوده‌ی دامنه‌اش رسم کنیم. به همین منظور، $f(x)=۲$ را برای $x>۱$، $f(x)=۲$ را برای $-۱\le x\le ۱$ و $f(x)=-۲x$ را برای $x<-۱$ رسم می‌کنیم:

$f(x)=۲x;$

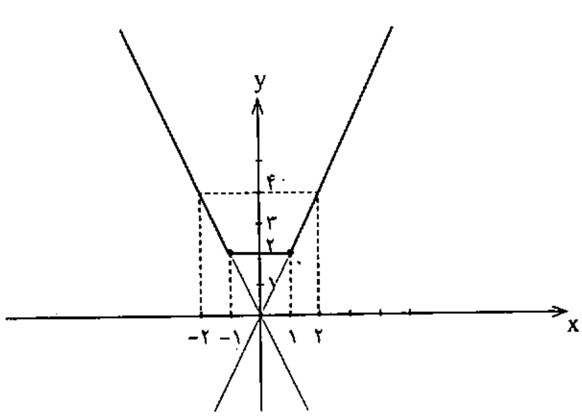
x	۱	۲
y	۲	۴

$f(x)=۲;$

x	-۱	۱
y	۲	۲

$f(x)=-۲x;$

x	-۱	-۲
y	۲	۴



توجه: نمودار هر ضابطه از تابع را رسم کردیم و روی هر نمودار، قسمت‌هایی را که در دامنه است، پر رنگ کردیم. ملاحظه می‌کنیم که عرض هر نقطه روی نمودار این تابع سه ضابطه‌ای، همواره بزرگ‌تر یا برابر با ۲ است. پس داریم:

$$R_f=[2,+\infty)$$

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}-x^2+1 & x\geq 0\\ 1-2x & x<0\end{cases}$ را در نظر بگیرید. حاصل $f(x^2+1)$، $f(-\sqrt{2})$ و $f(-\frac{1}{2}x^2-1)$ را به دست آورید.

حل: چون همواره $x^2+1>0$، بنابراین از ضابطه‌ی اول برای محاسبه‌ی $f(x^2+1)$ استفاده می‌کنیم:

$$f(x^2+1)=-(x^2+1)^2+1=-(x^4+2x^2+1)+1=-x^4-2x^2$$

چون $-\sqrt{2}<0$، بنابراین برای محاسبه‌ی $f(-\sqrt{2})$ از ضابطه‌ی دوم استفاده می‌کنیم:

$$f(-\sqrt{2})=1-2(-\sqrt{2})=1+2\sqrt{2}$$

چون $-\frac{1}{2}x^2<0$ بنابراین $-\frac{1}{2}x^2-1<0$. در نتیجه برای محاسبه‌ی $f(-\frac{1}{2}x^2-1)$ از ضابطه‌ی دوم استفاده می‌کنیم:

$$f(-\frac{1}{2}x^2-1)=1-2(-\frac{1}{2}x^2-1)=1+x^2+2=x^2+3$$

تابع قدر مطلق ....

تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|x|$ را تابع قدر مطلق می‌نامیم و آن را به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای تعریف می‌کنیم:

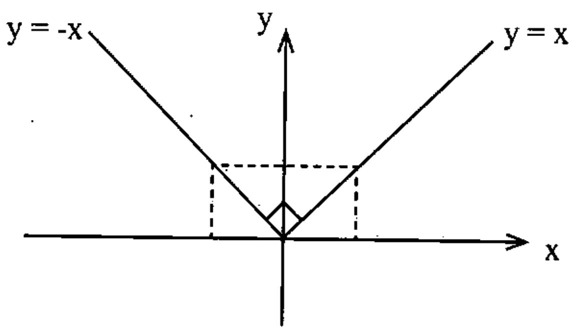
$$f(x)=|x|=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$$

این تابع به هر عضو از دامنه‌اش ($\mathbb{R}$)، قدر مطلق آن را نسبت می‌دهد. در حقیقت، حاصلِ تأثیر این تابع روی هر عدد حقیقی، یک عدد حقیقی نامنفی است. برای مثال:

$$f(3)=|3|=3;\quad f(-3)=|-3|=-(-3)=3;\quad f(0)=|0|=0$$

نمودار این تابع به صورت زیر است:

x	-1	0	1
y	1	0	1



دامنه‌ی تعریف این تابع مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. از طرف دیگر، عرض هر نقطه واقع بر این تابع، بزرگ‌تر یا برابر صفر است. یعنی همواره $y\geq 0$. در نتیجه برد این تابع $R_f=[0,\infty)$ است.

نکته ۱. می‌توان نمودار این تابع را یک زاویه قائمه دانست که رأس آن منطبق بر مبداء و دو ضلع این زاویه نیمسازهای ربع اول و دوم محورهای مختصات هستند.

نکته ۲. تابع قدرمطلق یک به یک نیست، زیرا خطی موازی محور طول وجود دارد که نمودار آن را در دو نقطه قطع می‌کند.

تمرین: نمودار هر یک از تابع‌های چند ضابطه‌ای زیر را رسم کنید. سپس دامنه و برد هر کدام را به دست آورید.

۱.
$$f(x)=\begin{cases}x^2 & -1\leq x\leq 1\\ -x+2 & x>1\\ x+2 & x<-1\end{cases}$$

۲.
$$g(x)=\begin{cases}-x^2 & -1\leq x\leq 1\\ x-2 & x>1\\ -x-2 & x<-1\end{cases}$$

۳. تابع $s(x)$ به تابع علامت معروف است.
$$s(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

۴.

$$h(x)=\begin{cases} x & x\ge 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

۵. با توجه به تابع علامت $s(x)$ که در تمرین ۳ ارائه شده است، مطلوب است محاسبه‌ی $s(x^2)-s(x)$.

جواب ۵ : $s(x^2)-s(x)=\begin{cases} 0 & x\ge 0 \\ 2 & x<0 \end{cases}$.

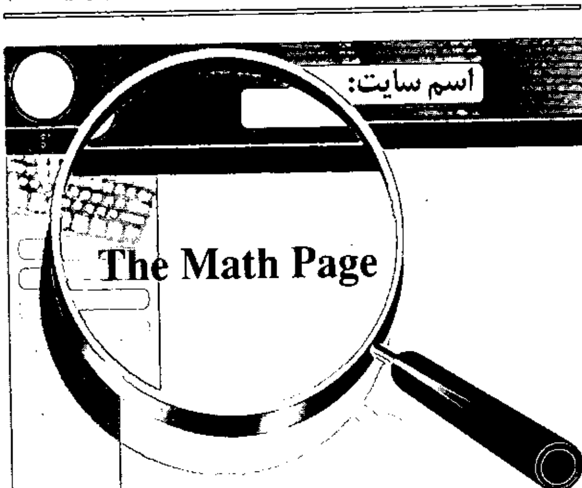
۶. اگر $f(x)=\begin{cases} 4 & x>2 \\ -2 & x\le 2 \end{cases}$ ، آن‌گاه حاصل $-5f(\sqrt{3})+4f(\frac{1}{100})+f(100)$ را بیابید.

جواب ۶ :

۷. هرگاه داشته باشیم $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x>2 \\ 4 & x=2 \\ x^2+1 & x<2 \end{cases}$ ، در این صورت مطلوب است محاسبه‌ی $f(\sqrt{2})$ ، $f(4)$ ، $f(2)$ و $f(k-1)$.

جواب ۷ : $f(2)=4$ و $f(k-1)=\begin{cases} 2k-3 & k>3 \\ 4 & k=3 \\ k^2-2k+2 & k<3 \end{cases}$

احسان یارمحمدی



معرفی
سایت های ریاضی
جهان

آدرس اینترنتی سایت: htttp://www.themathpage.com

صفحه‌ی اصلی این سایت شامل عنوان‌های زیر است، هر یک از این عنوان‌ها شامل زیر عنوان‌هایی است که هر کدام حاوی مطالبی مفصل می‌باشند.

* مهارت در حساب (Skill in Arithmetic)
* هندسه مسطحه (Plane Geometry)
* مهارت در جبر (Skill in Algebra)
* عناوینی در مثلثات (Topics in Trigonometry)
* عناوینی در حسابان مقدماتی (Topics in Pre-Calculus)
* رویکردی به حسابان (An Approach to Calculus)
* سیر تکامل اعداد حقیقی (The Evolution of the Real Numbers)

در پایین صفحه اصلی سایت، آدرس الکترونیکی

E-mail:themathpage@ncy.rr.com

وجود دارد که کاربر می‌تواند از طریق آن با سایت ارتباط داشته باشد.

⊛ محمد هاشم رستمی

۹

رویکرد هندسی و رویکرد جبری ـ مختصاتی در آموزش هندسه

اشاره

یکی از مهم ترین پیوندها و اتصال‌ها در همه‌ی ریاضیات، اتصال و پیوند بین هندسه و جبر است.

از استانداردهای موضوعی NCTM

در این شماره نیز این اتصال و پیوند را در فضای سه بعدی بررسی می‌کنیم.

نکته‌ی مهم: ضمن بررسی رویکرد هندسی، رویکرد جبری ـ مختصاتی در آموزش هندسه، برخی از راهبردهای مهم برای حل مسئله‌های هندسه مانند «تحدید یا کوچک کردن مسئله، مسئله را حل شده فرض می‌کنیم، چگونگی به کارگیری مکان‌های هندسی، انواع روش‌های حل یک مسئله، ...» را مطرح می‌کنیم. در ضمن لازم است گفته شود، مسئله‌هایی را که با دو رویکرد هندسی و رویکرد جبری ـ مختصاتی حل می‌کنیم، کلیدی هستند و از کتاب‌های هندسه‌ی ۱ و هندسه‌ی ۲ انتخاب شده‌اند تا دانش‌آموزان بتوانند مسئله‌های دیگر این کتاب‌ها را به‌راحتی با این دو رویکرد حل کنند.

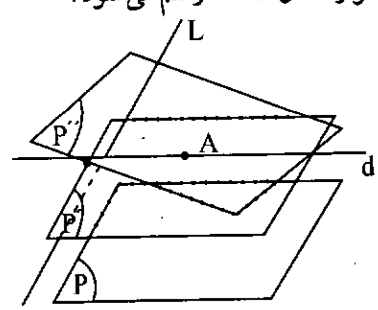
مسئله‌ی ۱۱. برای یک خط دل‌خواه L و صفحه‌ی دل‌خواه P و نقطه‌ی دل‌خواه A، آیا خطی وجود دارد که از A بگذرد، با P موازی باشد و بر L عمود شود؟ بنابر وضعیت‌های متفاوت بین A، P و L، چند جواب وجود دارد؟

مسئله را در حالتی کلی حل می‌کنیم که نقطه‌ی A روی خط L و صفحه‌ی P نباشد و خط L هم غیرموازی با صفحه‌ی P و غیرعمود بر این صفحه باشد.

الف) حل با روش هندسی

برای حل این مسئله از راهبرد «مسئله را حل شده فرض می‌کنیم»، استفاده می‌کنیم؛ راهبردی بسیار مهم و کارامد برای حل مسئله‌ها، به‌ویژه مسئله‌های هندسه. در این راهبرد، با حل شده در نظر گرفتن مسئله، ویژگی‌هایی از آن را استخراج و از آن‌ها برای حل مسئله استفاده می‌کنیم. اینک به این راه‌حل توجه کنید:

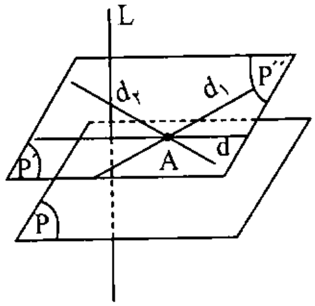
فرض می‌کنیم مسئله حل شده و خط d جواب مسئله است؛ یعنی خطی است که از نقطه‌ی A می‌گذرد، با صفحه‌ی P موازی و برخط L عمود است. چون خط d از نقطه‌ی A می‌گذرد و با صفحه‌ی P موازی است، پس در صفحه‌ای مانند P' قرار دارد که از نقطه‌ی A به موازات صفحه‌ی P رسم می‌شود. زیرا می‌دانیم، **مکان هندسی خط‌هایی که از یک نقطه به موازات یک صفحه رسم می‌شوند، یک صفحه است که از آن نقطه به موازات آن صفحه رسم می‌شود.**



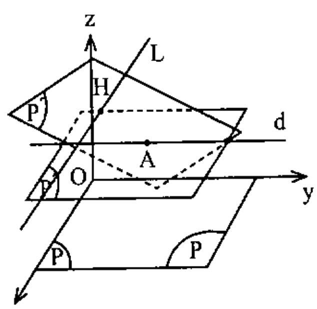
از طرفی خط d از نقطه‌ی A می‌گذرد و بر خط L عمود است، پس در صفحه‌ای مانند P'' قرار دارد که از نقطه‌ی A عمود بر خط L رسم می‌شود. زیرا می‌دانیم، **مکان هندسی خط‌هایی که از یک نقطه عمود بر یک خط رسم می‌شوند، یک صفحه است که از آن نقطه عمود بر آن خط رسم می‌شود.**

بنابراین، برای حل مسئله، از نقطه‌ی A صفحه‌ی P' را موازی صفحه‌ی P و سپس از همین نقطه‌ی A صفحه‌ی P'' را عمود بر خط L رسم می‌کنیم. فصل مشترک این دو صفحه خط d، جواب مسئله است که از نقطه‌ی A نیز می‌گذرد.

بحث: جواب مسئله فصل مشترک دو صفحه‌ی P' و P'' است که از نقطه‌ی A می‌گذرد. پس وضعیت این دو صفحه، معین‌کننده‌ی وجود جواب و تعداد جواب است. چون صفحه‌های P' و P'' هر دو از نقطه‌ی A می‌گذرند، یعنی حداقل یک نقطه‌ی مشترک دارند، پس دو حالت منطبق یا متقاطع می‌توانند داشته باشند. در حالت انطباق، تعداد جواب‌های مسئله بی‌شمار است، یعنی بی‌شمار خط وجود دارد که از نقطه‌ی A می‌گذرد، با صفحه‌ی P موازی است و بر خط L عمود است (شکل الف) و در حالت متقاطع، مسئله جواب یکتایی دارد که همان خط d است (شکل ب).



(الف)

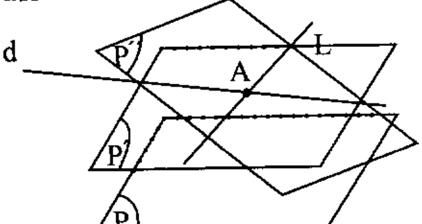


(ب)

P' و P'' وقتی برهم منطبق‌اند که L و P بر هم عمود باشند. در غیر این صورت، P' و P'' متقاطع خواهند بود.

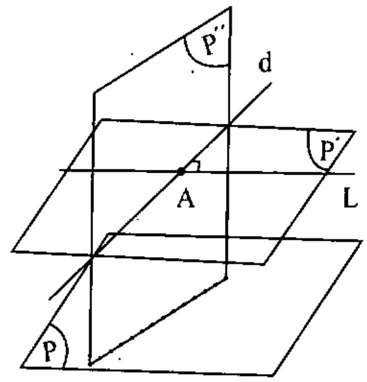
نکته: بحث در وجود جواب تعداد جواب‌های مسئله را می‌توان به روش دیگری نیز انجام داد. بدین ترتیب که حالت‌های متفاوتی را که نقطه‌ی A، خط L و صفحه‌ی P نسبت به هم می‌توانند داشته باشند، در نظر بگیریم. این حالت‌ها عبارت‌اند از:

۱. نقطه‌ی A روی خط L باشد و خط L، غیرموازی با P و غیرعمود با P باشد.

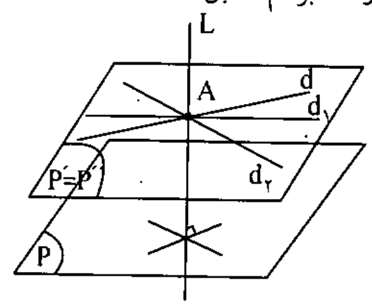


در این حالت دو صفحه‌ی P' و P'' متمایزاند و در یک خط که همان خط d (جواب مسأله) است، متقاطع هستند.

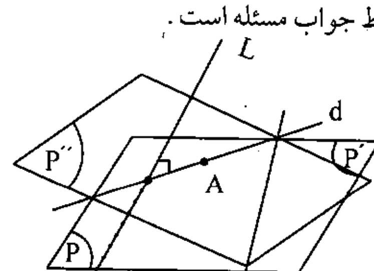
۲. نقطه‌ی A روی خط L و خط L موازی با صفحه‌ی P باشد. در این حالت، مسئله تنها یک جواب دارد، زیرا دو صفحه‌ی P' و P'' متمایز و متقاطع‌اند.



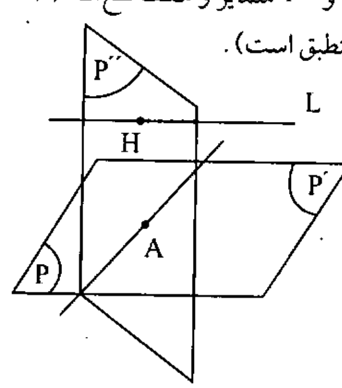
۳. نقطه‌ی A روی خط L و خط L عمود بر صفحه‌ی P باشد. در این حالت، مسئله بی‌شمار جواب دارد، زیرا دو صفحه‌ی P' و P'' برهم منطبق‌اند.



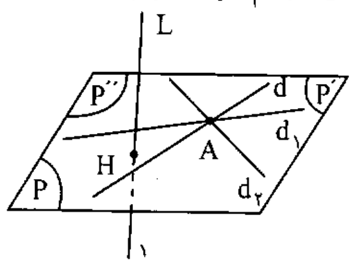
۴. نقطه‌ی A روی صفحه‌ی P و خط L غیرعمود بر P و L موازی با P باشد. در این حالت، صفحه‌ی P' بر صفحه‌ی P منطبق است و دو صفحه‌ی P' و P'' متمایز و متقاطع‌اند. پس تنها یک خط جواب مسئله است.



۵. نقطه‌ی A روی صفحه‌ی P و خط L موازی صفحه‌ی P باشد. در این حالت، مسئله تنها یک جواب دارد، زیرا دو صفحه‌ی P' و P'' متمایز و متقاطع‌اند (صفحه‌ی P' بر صفحه‌ی P منطبق است).

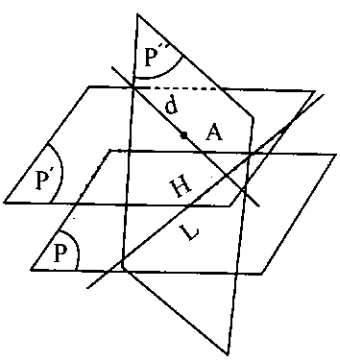


۶. نقطه‌ی A روی صفحه‌ی P و خط L عمود بر صفحه‌ی P باشد. در این حالت، دو صفحه‌ی P' و P'' بر صفحه‌ی P منطبق‌اند و مسئله بی‌شمار جواب دارد. یعنی هر خطی که از A در صفحه‌ی P رسم شود، جواب مسئله است.

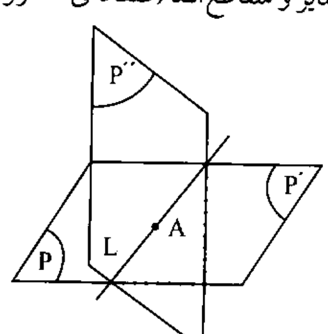


۷. نقطه‌ی A و خط L هر دو روی صفحه‌ی P قرار داشته باشند. در این حالت، مسئله تنها یک جواب دارد، زیرا دو صفحه‌ی P' و P'' متمایزند. این حالت شبیه حالت ۵ است.

۸. نقطه‌ی A خارج صفحه‌ی P و خط L روی صفحه‌ی P واقع باشند. در این حالت، مسئله تنها یک جواب دارد، زیرا دو صفحه‌ی P' و P'' متمایز و متقاطع‌اند.



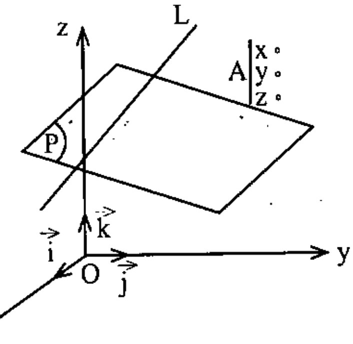
۹. نقطه‌ی A روی خط L و هر دو روی صفحه‌ی P باشند. در این حالت نیز مسئله تنها یک جواب دارد، زیرا دو صفحه‌ی P' و P'' متمایز و متقاطع‌اند (صفحه‌ی P' روی صفحه‌ی P قرار دارد).



نکته: اگر حالت دیگری نیز وجود دارد، آن را مشخص کنید و برای مجله‌ی برهان متوسطه بفرستید. در کدام حالت ممکن است خط d که تنها جواب مسئله است، بر خط L که در فرض مسئله داده شده است، منطبق باشد؟ اگر چنین حالتی وجود دارد، با ذکر دلیل، آن را بنویسید.

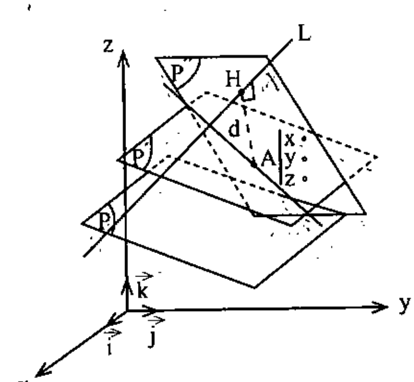
ب) حل با روش جبری ـ مختصاتی

دستگاه مختصات دکارتی قائم O-xyz با بردارهای یکه‌ی $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم در این دستگاه، نقطه‌ی A به مختصات $A=(x_0,y_0,z_0)$ ، خط L به معادله‌ی: $L:\frac{x-x_1}{p}=\frac{y-y_1}{q}=\frac{z-z_1}{r}$ و صفحه‌ی P به معادله‌ی $ax+by+cz+d=0$ باشد. می‌خواهیم از نقطه‌ی A خطی رسم کنیم که با صفحه‌ی P موازی و بر خط L هم عمود باشد.



می‌دانیم مکان هندسی خط‌هایی که از یک نقطه موازی یک صفحه رسم می‌شوند، صفحه‌ای است که از آن نقطه، موازی آن صفحه رسم می‌شود. این صفحه را P' می‌نامیم و معادله‌ی آن را می‌نویسیم. می‌دانیم، معادله‌ی تمام صفحه‌های موازی صفحه‌ی P به صورت کلی $ax+by+cz+d'=0$ (۱) است. برای تعیین معادله‌ی صفحه‌ی P' که از نقطه‌ی A می‌گذرد، باید مختصات این نقطه در معادله‌ی بالا صدق کند. یعنی داشته باشیم:

$$A=(x_0,y_0,z_0)\xrightarrow{\text{در (۱)}} ax_0+by_0+cz_0+d=0$$
$$\Rightarrow d'=-(ax_0+by_0+cz_0)$$



بنابراین، معادله‌ی صفحه‌ی P' که از نقطه‌ی A موازی صفحه‌ی P رسم می‌شود، به صورت $P':ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0)=0$ (۲) است.

از طرفی، مکان هندسی خط‌هایی که از یک نقطه عمود بر یک خط رسم می‌شوند، صفحه‌ای است که از آن نقطه بر آن خط عمود می‌شود. این صفحه را P'' می‌نامیم. می‌دانیم؛ معادله‌ی تمام صفحه‌هایی که بر خط $L:\frac{x-x_1}{p}=\frac{y-y_1}{q}=\frac{z-z_1}{r}$ عمود می‌شوند، به صورت $px+qy+rz+d''=0$ (۳) است، زیرا بردار نرمال این صفحه‌ها، همان بردار هادی خط L یعنی $\vec{V}_{P''}=\vec{V}_L=(p,q,r)$ است. برای تعیین معادله‌ی صفحه‌ای از این مجموعه صفحه که از نقطه‌ی $A=(x_0,y_0,z_0)$ می‌گذرد، باید مختصات نقطه‌ی A در معادله‌ی (۳) صدق کند. داریم:

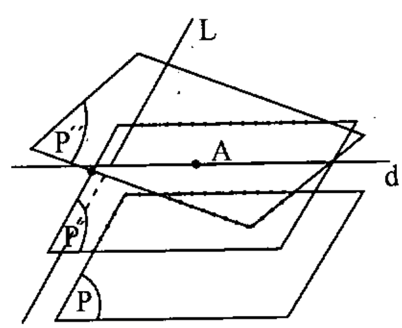
$$A=(x_0,y_0,z_0)\xrightarrow{\text{در (۳)}} px_0+qy_0+rz_0+d''=0$$
$$\Rightarrow d''=-(ax_0+by_0+cz_0)$$
$$\Rightarrow P'':px+qy+rz-(px_0+qy_0+rz_0)=0 \quad (۴)$$

فصل مشترک دو صفحه‌ی P' و P'' که آن را خط d می‌نامیم و از نقطه‌ی A نیز می‌گذرد، جواب مسئله است که معادله‌ی آن به صورت زیر است:

$$d:\begin{cases}ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0)=0\\ px+qy+rz-(px_0+qy_0+rz_0)=0\end{cases}$$

نکته: در صورت لزوم می‌توان معادله‌ی خط d را به صورت کانونیک درآورد.

نکته‌ی بسیار مهم: در قسمت‌های قبل رویکرد هندسی، رویکرد جبری ـ مختصاتی گفتیم، چگونگی انتخاب دستگاه مختصات، در ساده‌تر شدن یا مشکل‌تر شدن حل مسئله نقش بسزایی دارد و این مطلب را با ذکر نمونه‌هایی نشان دادیم. در مورد این مسئله نیز روش حل بیان شده‌ی جبری ـ مختصاتی را در حالت کلی در نظر گرفتیم. حال اگر دستگاه مختصات دکارتی را چنان در نظر بگیریم که صفحه‌ی P به عنوان صفحه‌ی xoy از دستگاه مختصات باشد (شکل). با فرض



و $A=(x_0,y_0,z_0)$ و $L:\frac{x-x_1}{p}=\frac{y-y_1}{q}=\frac{z-z_1}{r}$ معادله‌ی صفحه‌ی P' که از نقطه‌ی A موازی صفحه‌ی P رسم می‌شود، به صورت (۱) $z=z_0$ و معادله‌ی صفحه‌ی P'' که از نقطه‌ی A عمود بر خط L رسم می‌شود، به همان صورت (۲) $px+qy+rz-(px_0+qy_0+rz_0)=0$ خواهد بود. در نتیجه، معادله‌ی خط d، فصل مشترک دو صفحه‌ی P' و P'' که از نقطه‌ی A نیز می‌گذرد، به صورت زیر خواهد بود:

$$d:\begin{cases} P': z=z_0 \\ P'': px+qy+rz-(px_0+qy_0+rz_0)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d:\begin{cases} \dfrac{x}{-q}=\dfrac{y-\dfrac{px_0+qy_0}{q}}{p} \\ z=z_0 \end{cases}$$ معادله‌ی کانونیک d

اینک مثال‌هایی از روش جبری-مختصاتی را در چند حالت بررسی می‌کنیم.

مثال ۱: نقطه‌ی $A=(1,2,-1)$، خط $L:\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}$ و صفحه‌ی $P:x-2y+z-3=0$ داده شده‌اند. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی A می‌گذرد، با صفحه‌ی P موازی و بر خط L عمود است.

حل: از معادله‌ی خط L و صفحه‌ی P مشخص است که دستگاه مختصات قائم در نظر گرفته شده در این مسئله، حالت کلی دارد. بنابراین، محاسبات برای حل مسئله، حالت کلی دارد، کم و ساده نیست. بنابراین، برای حل مسئله، معادله‌های صفحه‌ی P' (که از A موازی صفحه‌ی P رسم می‌شود) و P'' (که از A عمود بر L رسم می‌شود) را می‌نویسیم و فصل مشترک آن‌ها را که جواب مسئله است، پیدا می‌کنیم. داریم:

$$P:x-2y+z-3=0 \Rightarrow \vec{V_P}=(1,-2,1)$$
$$\Rightarrow \vec{V_{P'}}=\vec{V_P}=(1,-2,1)$$
$$A=(1,2,-1)\in P'$$
$$\Rightarrow P': a(x-x_0)+b(y-y_0')+c(z-z_0)=0$$
$$\Rightarrow 1(x-1)-2(y-2)+1(z+1)=0 \Rightarrow P': x-2y+z+4=0$$
$$L:\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2} \Rightarrow \vec{V_L}=(3,-1,2)=\vec{V_{P''}},$$
$$A=(1,2,-1)\in P''$$
$$\Rightarrow P'': 3(x-1)-1(y-2)+2(z+1)=0$$
$$\Rightarrow P'': 3x-y+2z+1=0$$
$$\Rightarrow d:\begin{cases} x-2y+z+4=0 \\ 3x-y+2z+1=0 \end{cases}$$ معادله‌ی خط خواسته شده

در صورتی که بخواهیم معادله‌ی کانونیک خط d را به دست آوریم، باید معادله‌ی دو صفحه‌ی مصور این خط روی دو صفحه‌ی مختصات را به دست آوریم.

(صفحه‌های مصور یک خط، سه صفحه هستند که بر آن خط می‌گذرند و بر صفحه‌های مختصات عمودند). خواهیم داشت:

$$\begin{matrix} P': \\ P'': \end{matrix}\begin{cases} x-2y+z+4=0 \\ 3x-y+2z+1=0 \end{cases} -2P'+P''=0 \Rightarrow x+3y-7=0 \quad (1)$$
$$-P'+2P''=0 \Rightarrow +5x+3z-2=0 \quad (2)$$
$$(1)\Rightarrow x=-3y+7 \quad (3),(2)\Rightarrow x=\frac{-3z+2}{5} \quad (4)$$
$$(3),(4)\Rightarrow x=-\frac{3y-7}{1}=\frac{-3z+2}{5}$$
$$\Rightarrow x=\frac{y-\frac{7}{3}}{-\frac{1}{3}}=\frac{z-\frac{2}{3}}{-\frac{5}{3}} \Rightarrow \frac{x}{3}=\frac{y-\frac{7}{3}}{-1}=\frac{z-\frac{2}{3}}{-5}$$

معادله‌ی کانونیک خط d، فصل مشترک دو صفحه‌ی P' و P'' که جواب مسئله است.

مثال ۲. نقطه‌ی $A=(0,-2,1)$ و خط $L:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{4}$ و صفحه‌ی $P:z=0$ داده شده‌اند. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی A می‌گذرد، با صفحه‌ی P موازی و بر خط L عمود است.

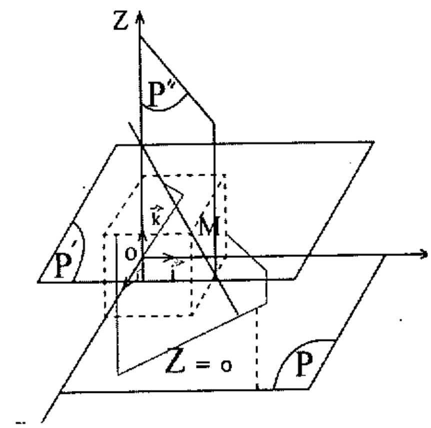
حل: به طوری که دیده می‌شود، در این مسئله، صفحه‌ی P بر صفحه‌ی xoy از دستگاه مختصات قائم o-xyz در فضا منطبق است: بنابراین، محاسبه‌ها و به طور کلی راه‌حل مسئله ساده‌تر خواهد بود. برای حل این مسئله، معادله‌ی صفحه‌ی P' را که از A به موازات صفحه‌ی P رسم می‌شود، هم‌چنین معادله‌ی صفحه‌ی P'' را که از نقطه‌ی A عمود بر خط L رسم می‌شود، می‌نویسیم و فصل مشترک آن‌ها را به دست می‌آوریم. داریم:

$$A=(0,-2,1)\in P' \Rightarrow P': z=z_0 \Rightarrow z=1$$
$$\vec{V_L}(2,3,4)=\vec{V_{P''}} \Rightarrow P'': 2(x-0)+3(y+2)+4(z-1)=0$$
$$\Rightarrow P'': 2x+3y+4z+2=0$$
$$\Rightarrow d:\begin{cases} z=1 \\ 2x+3y+4z+2=0 \end{cases} \Rightarrow 2x+3y+4(1)+2=0$$
$$\Rightarrow 2x+3y+6=0 \Rightarrow 2x=-3(y+2) \Rightarrow \frac{x}{-3}=\frac{y+2}{2}$$
$$\Rightarrow d:\begin{cases} \dfrac{x}{-3}=\dfrac{y+2}{2} \\ z=1 \end{cases}$$

معادله‌ی کانونیک خط d، که جواب مسئله است

مثال ۳. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $M=(۲,۲,۲)$ به موازات صفحه‌ی $P:z=۰$ رسم می‌شود و بر خط $L:\begin{cases}x=y-۲\\ z=۱\end{cases}$ عمود است.

حل: به‌طوری که دیده می‌شود، صفحه‌ی P بر صفحه‌ی xoy منطبق است ($z=۰$ معادله‌ی صفحه‌ی xoy است) و خط L نیز موازی صفحه‌ی P است، زیرا داریم:



$\vec{V}_P=(۰,۰,۱),\ \ \vec{V}_L=(۱,۱,۰)\Rightarrow \vec{V}_P\cdot\vec{V}_L=۰+۰+۰=۰$

$\Rightarrow \vec{V}_P-\vec{V}_L\Rightarrow \vec{L}\parallel P$

اکنون معادله‌ی صفحه‌ی P' را که از نقطه‌ی M موازی صفحه‌ی P رسم می‌شود، می‌نویسیم. سپس معادله‌ی صفحه‌ی P'' را که از M عمود بر خط L رسم می‌شود می‌نویسیم و معادله‌ی فصل مشترک دو صفحه‌ی P' و P'' را که خط d جواب مسئله است، به دست می‌آوریم.

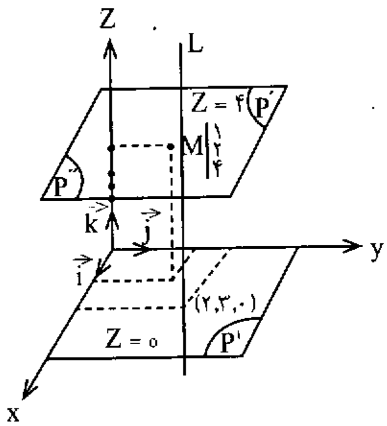
$P':z=z_۰\Rightarrow P':z=۲$ و $\vec{V}_{P''}=\vec{V}_L=(۱,۱,۰)$

$P'':۱(x-۲)+۱(y-۲)+۰(z-۲)=۰\Rightarrow P'':x+y-۴=۰$

$\Rightarrow d:\begin{cases}z=۲\\ x+y-۴=۰\end{cases}\Rightarrow d:\begin{cases}x=\dfrac{y-۴}{-۱}\\ z=۲\end{cases}$

مثال ۴. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A=(۱,۲,۴)$ موازی صفحه‌ی $P:z=۰$ و عمود بر خط $L:\begin{cases}x=۲\\ y=۳\end{cases}$ باشد.

حل: در این مسئله، صفحه‌ی P منطبق بر صفحه‌ی xoy از دستگاه مختصات o-xyz و خط L عمود بر صفحه‌ی P یا در این مسئله، عمود بر صفحه‌ی xoy است.



برای حل، معادله‌ی صفحه‌ی P' را که از A موازی صفحه‌ی P رسم می‌شود، هم‌چنین معادله‌ی صفحه‌ی P'' را که از نقطه‌ی A عمود بر خط L رسم می‌شود، می‌نویسیم و خط d، فصل مشترک آن‌ها را، به دست می‌آوریم.

داریم:

$P'\parallel P,\ \ A=(۱,۲,۴)\in P'\Rightarrow P':z=۴\ \ (۱)$

$\vec{L}\parallel P:\vec{V}_L=(۰,۰,۱),\ \ \vec{V}_P=(۰,۰,۱)\Rightarrow \vec{V}_L\parallel\vec{V}_P$

$\Rightarrow \vec{L}\parallel P\Rightarrow P'':۰(x-۱)+۰(y-۲)+۱(z-۴)=۰$

$\Rightarrow P'':z-۴=۰\Rightarrow P'':z=۴\ \ (۲)$

به‌طوری که دیده می‌شود، دو صفحه‌ی P' و P'' برهم منطبق هستند. بنابراین، هر خطی که از نقطه‌ی A در این دو صفحه‌ی منطبق برهم می‌گذرد، جواب مسئله است. یعنی مسئله بی‌شمار جواب دارد.

برای تعیین معادله‌ی یک خط دل‌خواه از این مجموعه خط، کافی است مختصات یک نقطه‌ی دل‌خواه از صفحه‌ی مشترک P' و P'' را به دست آوریم و آن‌گاه معادله‌ی خط گذرنده از این نقطه و نقطه‌ی A را بنویسیم. برای مثال داریم:

$B=(۰,۰,۴)\in P'=P''$ و $A=(۱,۲,۴)$

$\Rightarrow AB:\dfrac{x-۱}{۰-۱}=\dfrac{y-۲}{۰-۲}=\dfrac{z-۴}{۴-۴}\Rightarrow AB=d_۱:\begin{cases}\dfrac{x-۱}{-۱}=\dfrac{y-۲}{-۲}\\ z-۴=۰\end{cases}$

$\Rightarrow d_۱:\begin{cases}x=\dfrac{y}{۲}\\ z=۴\end{cases}$

و اینک یک جواب دیگر:

$C=(۳,۱,۴)\in P'=P''$ و $A=(۱,۲,۴)$

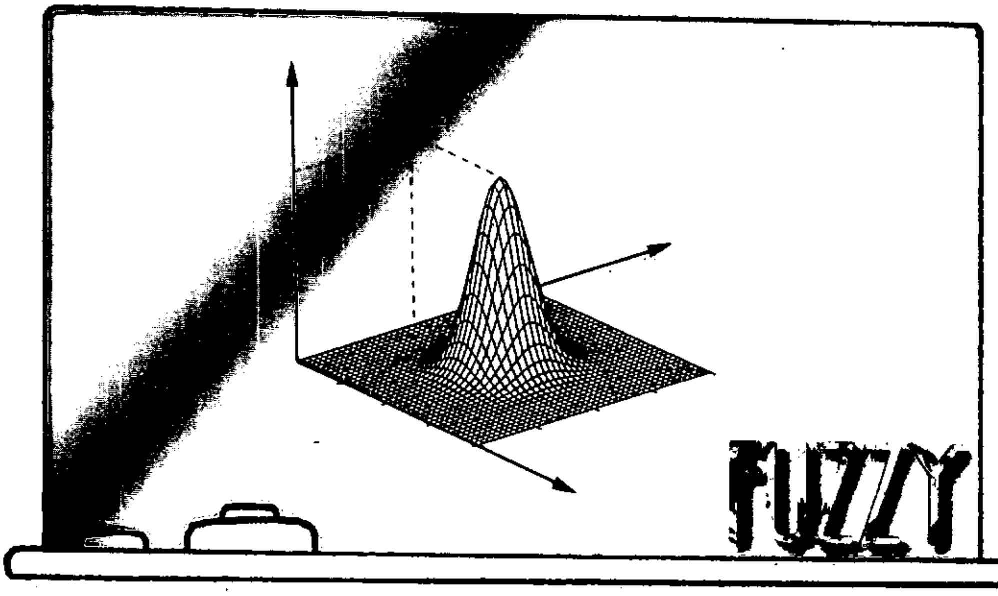
$\Rightarrow AC:\dfrac{x-۱}{۳-۱}=\dfrac{y-۲}{۱-۲}=\dfrac{z-۴}{۴-۴}\Rightarrow AC:\begin{cases}\dfrac{x-۱}{۲}=\dfrac{y-۲}{-۱}\\ z-۴=۰\end{cases}$

$\Rightarrow AC=d_۲:\begin{cases}\dfrac{x-۱}{۲}=\dfrac{y-۲}{-۱}\\ z=۴\end{cases}$

با همین روش، معادله‌ی خط‌های دیگر جواب مسئله را می‌توان به دست آورد.

دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی°

۶



نظریه‌ی مجموعه‌های فازی

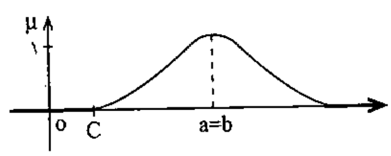
سرآغاز

مغز انسان مملو از مفاهیم فازی است. انسان با مجموعه‌های فازی فکر می‌کند و هرکدام از مرزهای فازی خود را با روش‌های متفاوت تعریف و مشخص می‌کند. اجزای جهان را در قالب مجموعه‌های فازی انباشته می‌کند و سپس به استدلال روی آن‌ها می‌پردازد. این همان چیزی است که به منطق فازی شهرت دارد. این منطق، رایانه‌ها را به فکر کردن روی مجموعه‌های فازی وامی‌دارد و به پیشرفتی می‌انجامد که نتیجه‌ی آن قدرت استدلال رایانه‌ها به کمک مجموعه‌های فازی است. در جهان، هر چیزی درجه‌بندی شده است. حتی اعداد که بیانگر دقت هستند، می‌توانند به شکل فازی مدل‌سازی شوند و اعداد فازی را پدید آورند. درواقع منظور از منطق فازی، استدلال کردن با اعداد فازی و مجموعه‌های فازی است. در این حالت، باید بتوانیم رایانه‌ای طراحی کنیم که قادر باشد با اعداد فازی در قالب جملات شرطی به صورت اگر-آن‌گاه یا قوانین تجربی، به استدلال بپردازد. مجموعه‌های فازی زمانی مطرح می‌شوند که یک مرز مبهم و نامشخص وجود داشته باشد. در این حالت، بین بودن (A) و نبودن (نه A) یک تلاقی رخ می‌دهد و این حالت نمی‌تواند با منطق دوارزشی تفسیر شود. برای مثال، کلاسی را در نظر بگیرید که در آن معلم از دانش‌آموزان سؤالاتی از این قبیل می‌پرسد: کدام یک از شما گرمتان است؟ کدام یک خوش حال هستید؟ چه کسانی خود را موفق و خوش‌بخت می‌دانند؟ چند نفر از شما قد بلند هستید؟ کدامتان برای امتحان آمادگی دارید؟...

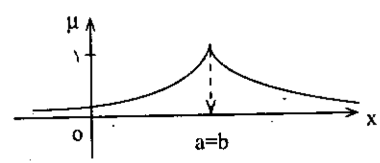
در این حالت، اگر برخی از محصلان دست‌های خود را کامل بالا ببرند و برخی اصلاً بالا نبرند و هم‌چنین برخی دست‌های خود را کمی بالا ببرند و برخی نیز نه به‌طور کامل بالا ببرند، نمی‌توان با یک قانون دقیق و قطعی، حد فاصلی برای احساس گرما کردن یا نکردن، خوش‌حال بودن یا نبودن، موفق بودن یا نبودن و امثال آن‌ها قائل شد. تنها در محیط منطق فازی می‌توان این مفاهیم را بررسی کرد. در این بحث، ابتدا عدد فازی نوع LR را معرفی و در ادامه یکی از اصول بنیادین نظریه‌ی مجموعه‌های فازی با عنوان «اصل گسترش»[1] را مطرح می‌کنیم.

یادآوری می‌کنیم که یک عدد فازی، مجموعه‌ی فازی روی خط حقیقی با تابع عضویت پیوسته، محدب، نرمال و تکیه‌گاهی کران‌دار است. در این حالت، مقدار تابع عضویت در خارج از بازه‌ای چون $[c,d]$ صفر است و دو عدد حقیقی a

و b وجود دارند که $c \le a \le b \le d$ و تابع عضویت روی $[c,a]$ به‌طور یکنواخت صعودی و روی $[b,d]$ به‌طور یکنواخت نزولی است. در این حالت، مقدار تابع عضویت به ازای هر $x \in [a,b]$ یک است (شکل ۱). در صورتی که تکیه‌گاه مجموعه‌ای بیکران باشد، در برخی از کتاب‌های فازی، به آن عدد شبه‌فازی[۲] گفته می‌شود. در این حالت، اعداد حقیقی a و b که $a \le b$ وجود دارند که برای هر $x \in [a,b]$، مقدار تابع عضویت یک است. هم‌چنین $\lim_{x \to +\infty} \mu_{\tilde{A}}(x) = 0$ و $\lim_{x \to -\infty} \mu_{\tilde{A}}(x) = 0$ (شکل ۲).



شکل ۱ **نمونه‌ای از یک عدد فازی با تکیه‌گاه کران‌دار**



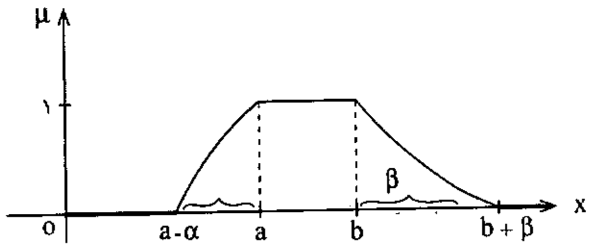
شکل ۲ **نمونه‌ای از یک عدد فازی با تکیه‌گاه بی‌کران (عدد شبه‌فازی)**

تعریف: در صورتی که تابع عضویت عدد فازی $\tilde{A}$ (با تکیه‌گاه کران‌دار) دارای نمایش کلی زیر باشد، آن‌گاه $\tilde{A}$ را یک عدد فازی از نوع LR می‌گوییم

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{a-x}{\alpha}\right) & a-\alpha \le x \le a \\ 1 & a \le x \le b \\ R\left(\frac{x-b}{\beta}\right) & b \le x \le b+\beta \end{cases}$$

که در آن $L:[0,1] \to [0,1]$ و $R:[0,1] \to [0,1]$ توابعی پیوسته و ناصعودی با خاصیت $L(0) = R(0) = 1$ و $L(1) = R(1) = 0$ موسوم به توابع مرجع یا توابع شکل[۳] هستند. در این حالت می‌نویسیم $\tilde{A} = (a,b,\alpha,\beta)_{LR}$.

به دو عدد مثبت α و β به‌ترتیب پهنا (یا گستره)ی چپ و پهنای راست می‌گوییم. تکیه‌گاه عدد فازی $\tilde{A}$ به‌صورت $\operatorname{Sup}\tilde{A} = (a-\alpha, b+\beta)$ است (شکل ۳).



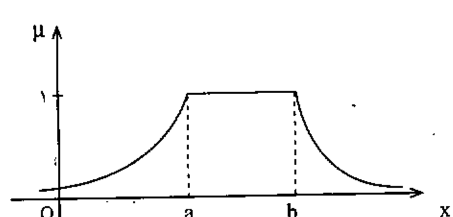
شکل ۳ **نمونه‌ای از یک عدد فازی LR با تکیه‌گاه کران‌دار**

هم‌چنین، در صورتی که تابع عضویت عدد فازی $\tilde{A}$ با تکیه‌گاه بی‌کران (عدد شبه‌فازی) دارای نمایش کلی زیر باشد، $\tilde{A}$ را یک عدد فازی از نوع LR می‌گوییم.

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{a-x}{\alpha}\right) & x \le a \\ 1 & a \le x \le b \\ R\left(\frac{x-b}{\beta}\right) & x \ge b \end{cases}$$

که در آن $L:[0,+\infty] \to [0,1]$ و $R:[0,+\infty] \to [0,1]$ توابعی پیوسته و ناصعودی با خاصیت $L(0) = R(0) = 1$ و $\lim_{x \to +\infty} R(x) = \lim_{x \to +\infty} L(x) = 0$ هستند.

در این حالت نیز، مشابه حالت قبل، عدد فازی $\tilde{A}$ را به‌صورت $\tilde{A} = (a,b,\alpha,\beta)_{LR}$ نمایش می‌دهیم (شکل ۴).



شکل ۴ **نمونه‌ای از یک عدد فازی نوع LR با تکیه‌گاه بی‌کران**

گاهی اوقات عدد فازی از نوع LR را چون به‌ازای کلیه‌ی مقادیر موجود در $[a,b]$ دارای درجه‌ی عضویت یک است، بازه‌ی فازی از نوع LR هم می‌گویند. در حالت خاص، اگر $a = b = m$ یعنی در حالتی که فقط در یک نقطه مقدار تابع عضویت یک باشد، به عدد فازی نوع LR، شبه‌مثلثی نیز می‌گویند. در این حالت می‌نویسیم $\tilde{A} = (m,\alpha,\beta)_{LR}$. اعداد فازی مثلثی و ذوزنقه‌ای که قبلاً معرفی شدند، حالت‌های

خاصی از اعداد فازی نوع LR هستند. در صورتی که در تعریف فوق $\alpha=\beta=0$، عدد $\tilde{A}=(a,b,0,0)_{LR}$ یک بازه‌ی قطعی (همان بازه‌ی $[a,b]$) و در صورتی که در این حالت $a=b=m$ عدد $\tilde{A}=(m,m,0,0)_{LR}$ یک عدد قطعی (همان عدد حقیقی m) است.

نمونه‌هایی از ضابطه‌ی توابع مرجع L و R عبارت‌اند از: (L برای معرفی تابع طرف چپ و R برای معرفی تابع طرف راست استفاده می‌شود.)

$\frac{1}{1+x^2}$ و e^{-x} و e^{-x^2} و $\max\{0,1-x^p\}(p>0)$ و $\frac{1}{1+2|x|}$

در حالتی که $L(x)=R(x)=\max\{0,1-x\}$ عدد فازی نوع LR همان عدد فازی ذوزنقه‌ای را مشخص می‌کند که اگر $a=b=m$ این عدد همان عدد فازی مثلثی است.

اعمال روی اعداد فازی نوع LR (در حالت شبه‌مثلثی)

فرض کنیم $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو عدد فازی نوع LR به‌صورت کلی $\tilde{A}=(m,\alpha,\beta)_{LR}$ و $\tilde{B}=(n,\gamma,\delta)_{LR}$ باشند. در این صورت، جمع و تفریق این دو عدد فازی و نیز قرینه‌ی یک عدد فازی نوع LR به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{A}\oplus\tilde{B}=(m+n,\alpha+\gamma,\beta+\delta)_{LR}$$

$$-\tilde{A}=(-m,\beta,\alpha)_{LR}$$

$$\tilde{A}\ominus\tilde{B}=(m-n,\alpha+\delta,\beta+\gamma)_{LR}$$

لازم به ذکر است، ضرب و تقسیم دو عدد فازی نوع LR لزوماً به‌صورت یک عدد فازی نوع LR نیست، ولی به‌صورت تقریبی می‌توان آن‌ها را با یک عدد فازی نوع LR برابر گرفت. برای نمونه در زیر، ضرب دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ تعریف شده‌اند. برای عمل تقسیم، علاقه‌مندان می‌توانند به کتاب‌های مرجع فازی نظیر مرجع ۵ مراجعه کنند.

$$\tilde{A}\otimes\tilde{B}\approx\begin{cases}(mn,m\gamma+n\alpha,m\delta+n\beta)_{LR} & \tilde{A},\tilde{B}>0 \text{ اگر}\\ (mn,n\alpha-m\delta,n\beta-m\gamma)_{LR} & \tilde{B}>0,\tilde{A}<0 \text{ اگر}\\ (mn,-n\beta-m\delta,-n\alpha-m\gamma)_{LR} & \tilde{A},\tilde{B}<0 \text{ اگر}\end{cases}$$

ملاحظه می‌شود، ضرب این دو عدد فازی تعریف پیچیده‌تری دارد و به مثبت یا منفی بودن عدد وابسته است. به این ترتیب، اگر عدد فازی مثبت یا منفی نباشد، ضرب آن‌ها قابل تعریف نیست. حالت کلی اعمال روی اعداد فازی نوع LR در کتاب‌های پیشرفته‌ی مجموعه‌های فازی مطرح شده‌اند که به علت پیچیدگی، در این مقاله بررسی نمی‌شوند.

مثال: فرض کنید $L(x)=R(x)=\frac{1}{1+x^2}$ و $\tilde{A}=(1,0/5,0/8)_{LR}$ و $\tilde{B}=(2,0/6,0/2)_{LR}$. در این حالت:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}L(\frac{1-x}{0/5})=\frac{1}{1+(\frac{1-x}{0/5})^2}=\frac{1}{1+4(1-x)^2} & x\le 1\\ R(\frac{x-1}{0/8})=\frac{1}{1+(\frac{x-1}{0/8})^2}=\frac{1}{1+\frac{25}{16}(x-1)^2} & x\ge 1\end{cases}$$

به همین ترتیب:

$$\mu_{\tilde{B}}(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+\frac{25}{9}(2-x)^2} & x\le 2\\ \frac{1}{1+25(x-2)^2} & x\ge 2\end{cases}$$

هم‌چنین:

$$-\tilde{B}=(-2,0/2,0/6)_{LR}$$

$$\tilde{A}\oplus\tilde{B}=(1,0/5,0/8)_{LR}\oplus(2,0/6,0/2)_{LR}=(3,1/1,1)_{LR}$$

$$\tilde{A}\ominus\tilde{B}=(1,0/5,0/8)_{LR}\ominus(2,0/6,0/2)_{LR}=(-1,0/7,1/4)_{LR}$$

و با توجه به مثبت بودن هر دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ خواهیم داشت:

$$\tilde{A}\otimes\tilde{B}=(1,0/5,0/8)_{LR}\otimes(2,0/6,0/2)_{LR}\approx(2,1/6,1/8)_{LR}$$

اصل گسترش یکی از مفاهیم اساسی و یک ابزار مهم در نظریه‌ی مجموعه‌های فازی است که به کمک آن می‌توان مفاهیم کلاسیک ریاضی را به محیط فازی تعمیم داد. در آنالیز ریاضی، مفاهیمی نظیر تابع، مشتق و انتگرال را می‌توان به کمک اصل گسترش، به حالت فازی گسترش داد. این اصل اولین‌بار توسط **لطفی عسگرزاده** مطرح و سپس توسط **جین**[3] و **دوبویس**[4] و **پرید**[5] مورد استفاده قرار گرفت.

اصل گسترش: فرض کنیم، X و Y مجموعه‌های قطعی باشند و f نگاشتی از X به Y باشد $(f:X\to Y)$ به‌طوری که برای $x\in X$، $f(x)=y\in Y$ و فرض کنیم $\tilde{A}$ یک زیرمجموعه‌ی فازی X باشد. در این صورت، تابع عضویت $f(\tilde{A})$ به‌عنوان یک زیرمجموعه‌ی فازی از Y به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{f(\tilde{A})}(y)=\begin{cases}\operatorname{Sup}\ \mu_{\tilde{A}}(x) & f^{-1}(y)\neq\phi\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

که در آن $f^{-1}(y)$ به معنای تصویر معکوس عضو y در Y

است، یعنی:

$$f^{-1}(y)=\{x\in X | f(x)=y\}$$

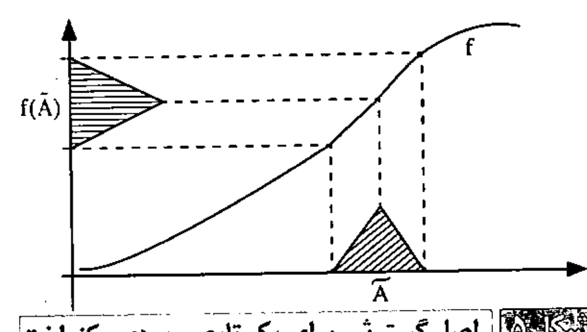
لازم به ذکر است، نماد Sup به معنای کوچک‌ترین کران بالای یک مجموعه و «سوپرمم» خوانده می‌شود. مثلاً سوپرمم مجموعه‌ی $[0,1)$ عدد ۱ است و سوپرمم مجموعه‌ی $\{-1,0,1,2,3,4\}$ عدد ۴ است.

در صورتی که سوپرمم یک مجموعه عضو همان مجموعه باشد، این عدد همان ماکزیمم مجموعه خواهد بود. هم‌چنین اگر مجموعه‌ای متناهی باشد، سوپرمم همان ماکزیمم یعنی بزرگ‌ترین عضو آن مجموعه خواهد بود. به این ترتیب، اگر مجموعه‌ی $f^{-1}(y)$ متناهی باشد، نماد Sup در صورت اصل گسترش مذکور در بالا، به نماد Max تبدیل می‌شود. هم‌چنین، اگر نگاشت f اکیداً یک‌نوا باشد، چون در این حالت اعضای موجود در برد f (R_f) تنها تصویر یک عضو از X هستند، لذا $f^{-1}(y)$ مجموعه‌ای تک‌عضوی است و می‌توان نماد Sup یا Max را برداشت و تابع عضویت را در اصل گسترش به شکل زیر در نظر گرفت:

$$\mu_{f(\tilde{A})}(y)=\begin{cases}\mu_{\tilde{A}}(f^{-1}(y)) & y\in R_f\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

که $R_f=\{y\in Y | \exists x\in X, f(x)=y\}$.

به عبارت دیگر، اگر f نگاشتی یک به یک باشد، برای $y\in R_f$ داریم: $\mu_{f(\tilde{A})}(y)=\mu_{\tilde{A}}(f^{-1}(y))$ و اگر f یک‌به‌یک نباشد، چون دو یا چند مقدار متمایز در x می‌تواند به‌عنوان تصویر معکوس عضو $y\in Y$ نگاشته شود، بین مقادیر تابع عضویت $\tilde{A}$ در نقاط موجود در تصویر معکوس y، مقدار بزرگ‌تر را به تابع عضویت $f(\tilde{A})$ در y نسبت می‌دهیم. شکل زیر، عملکرد اصل گسترش را در حالتی که f تابعی صعودی است، نمایش می‌دهد.



شکل ۵ اصل گسترش برای یک تابع صعودی یکنواخت

مثال ۱: فرض کنیم $\begin{cases} f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ f(x)=x^2\end{cases}$ و $\tilde{A}$ مجموعه‌ای فازی با تابع عضویت زیر باشد:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{2} & 1\le x\le 3\\ \dfrac{5-x}{2} & 3\le x\le 5\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

این تابع عضویت بیانگر عدد فازی مثلثی تقریباً ۳ است که می‌توان آن را به صورت زیر نیز نوشت:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}1-\dfrac{|3-x|}{2} & |3-x|\le 2\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

با توجه به این‌که $\text{Supp}\tilde{A}=(1,5)$ و به‌ازای مقادیر موجود در این بازه تابع f یک‌به‌یک است و چون $y=x^2$ لذا $x=\sqrt{y}$ که $y\ge 0$ یعنی: $f^{-1}(y)=\sqrt{y}$. به‌این‌ترتیب، بنابر اصل گسترش داریم:

$$\mu_{f(\tilde{A})}(y)=\mu_{\tilde{A}}(\sqrt{y}),\quad y\ge 0$$

به این ترتیب:

$$\mu_{f(\tilde{A})}(y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{y}-1}{2}, & 1\le y\le 9\\ \dfrac{5-\sqrt{y}}{2}, & 9\le y\le 25\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

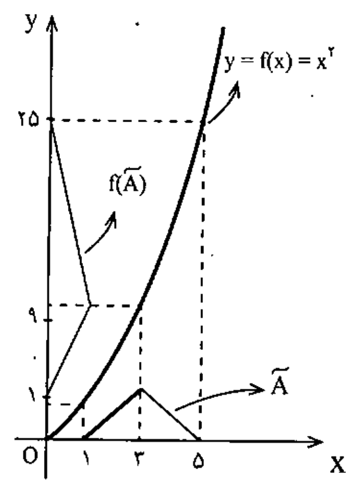
که می‌توان آن را به صورت زیر نیز خلاصه کرد:

$$\mu_{f(\tilde{A})}(y)=\begin{cases}1-\dfrac{|3-\sqrt{y}|}{2}, & |3-\sqrt{y}|\le 2, y\ge 0\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

ملاحظه می‌کنیم، تابع عضویت فوق بیانگر عدد فازی مثلثی تقریباً ۹ است. عدد فازی مثلثی $\tilde{A}$ به‌صورت $\tilde{A}=(3,2,2)$ و عدد فازی مثلثی $\tilde{B}=f(\tilde{A})$ به‌صورت

$\tilde{B}=(۹,۸,۱۶)$ است.

البته نمی‌توان گفت همواره یک عدد فازی مثلثی یا ذوزنقه‌ای به یک عدد فازی مثلثی یا ذوزنقه‌ای تصویر می‌شود و این به ضابطه‌ی تابع f و خواص این تابع وابسته است. شکل زیر، نتیجه‌ی اجرای اصل گسترش را روی مثال فوق مشخص می‌کند. در این حالت می‌توان نوشت: $f(\tilde{A})=\tilde{A}^{۲}$.



شکل ۶ **اعمال اصل گسترش در مثال ۱**

مثال ۲: فرض کنیم $\tilde{A}=\{(-۱,۰/۵),(۰,۰/۸),(۱,۱),(۲,۰/۴)\}$ و $y=f(x)=x^{۲}$. در این حالت $x\in\{-۱,۰,۱,۲\}$ و $y\in\{۱,۰,۴\}$. بنابراین $f^{-۱}(y)$ مجموعه‌ای متناهی برای هر کدام از مقادیر y خواهد بود. در این حالت:

اگر $y=۱\Rightarrow f^{-۱}(۱)=\{-۱,۱\}\Rightarrow \mu_{f(\tilde{A})}(۱)=\underset{x\in f^{-۱}(y)}{Max}\mu_{\tilde{A}}(x)$

$$=Max\{\mu_{\tilde{A}}(۱),\ \mu_{\tilde{A}}(-۱)\}=Max\{۱,۰/۵\}=۱$$

اگر $y=۰\Rightarrow f^{-۱}(۰)=\{۰\}\Rightarrow \mu_{f(\tilde{A})}(۰)=\mu_{\tilde{A}}(۰)=۰/۸$

اگر $y=۴\Rightarrow f^{-۱}(۴)=\{۲\}\Rightarrow \mu_{f(\tilde{A})}(۴)=\mu_{\tilde{A}}(۲)=۰/۴$

به این ترتیب:

$$\tilde{B}=f(\tilde{A})=\{(۰,۰/۸),(۱,۱),(۴,۰/۴)\}$$

نکته: اگر $\lambda\neq ۰$، عدد حقیقی و $f(x)=\lambda x$ تابعی خطی و $\tilde{A}$ یک عدد فازی باشد، چون $x=f^{-۱}(y)=\frac{۱}{\lambda}y$، بنابر اصل گسترش:

$$\mu_{f(\tilde{A})}(y)=Sup\{\mu_{\tilde{A}}(x)|\lambda x=y\}=\mu_{\tilde{A}}(\frac{y}{\lambda})$$

در این حالت می‌توان نوشت:

$$f(\tilde{A})=\lambda\tilde{A}$$

مثلاً به‌ازای $\lambda=۵$ خواهیم داشت:

$$y=f(x)=۵x\Rightarrow x=\frac{y}{۵}$$

$$\Rightarrow \mu_{f(\tilde{A})}(y)=\mu_{\tilde{A}}(\frac{y}{۵})$$

حال اگر $\tilde{A}$ همان عدد فازی مثال ۱ باشد، با جای‌گذاری $\frac{y}{۵}$ به جای x در ضابطه‌ی تابع عضویت $\tilde{A}$ خواهیم داشت:

$$\mu_{۵\tilde{A}}(y)=\begin{cases}\frac{y-۵}{۱۰}, & ۵\le y\le ۱۵\\ \frac{۲۵-y}{۱۰}, & ۱۵\le y\le ۲۵\\ ۰ & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

ملاحظه می‌کنیم، تابع عضویت فوق بیانگر عدد فازی مثلثی تقریباً ۱۵ است. به این ترتیب، طبق اصل گسترش عدد فازی $\tilde{A}=(۳,۲,۲)$ (تقریباً ۳) تحت تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=۵x$ به عدد فازی $\tilde{B}=f(\tilde{A})=(۱۵,۱۰,۱۰)$ نگاشته می‌شود.

نکته: اگر $\tilde{A}$ یک عدد فازی باشد و $f(x)=۰.x=۰$ آن‌گاه تابع عضویت عدد فازی $\tilde{A}\times ۰$ بنابر اصل گسترش به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\mu_{f(\tilde{A})}(y)=\mu_{۰\times\tilde{A}}(y)=Sup\{\mu_{\tilde{A}}(x)|۰.x=y\}=\begin{cases}۰ & y\neq ۰\\ ۱ & y=۰\end{cases}$$

یعنی: $۰\times\tilde{A}=\tilde{۰}$.

اصل گسترش یک صورت کلی‌تر دارد که در آن f روی حاصل‌ضرب دکارتی n مجموعه مرجع قطعی در نظر گرفته می‌شود. علاقه‌مندان می‌توانند برای مطالعه‌ی بیشتر روی این اصل، به مراجع مذکور در انتهای مقاله مراجعه کنند. در قسمت بعد، مباحثی دیگر از منطق فازی را می‌آوریم.

پی‌نوشت...

* عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی

1. Extension Principle
2. Quasi Fuzzy number
3. Shape (Refrence) function
4. Dubois
5. prade

منابع ....

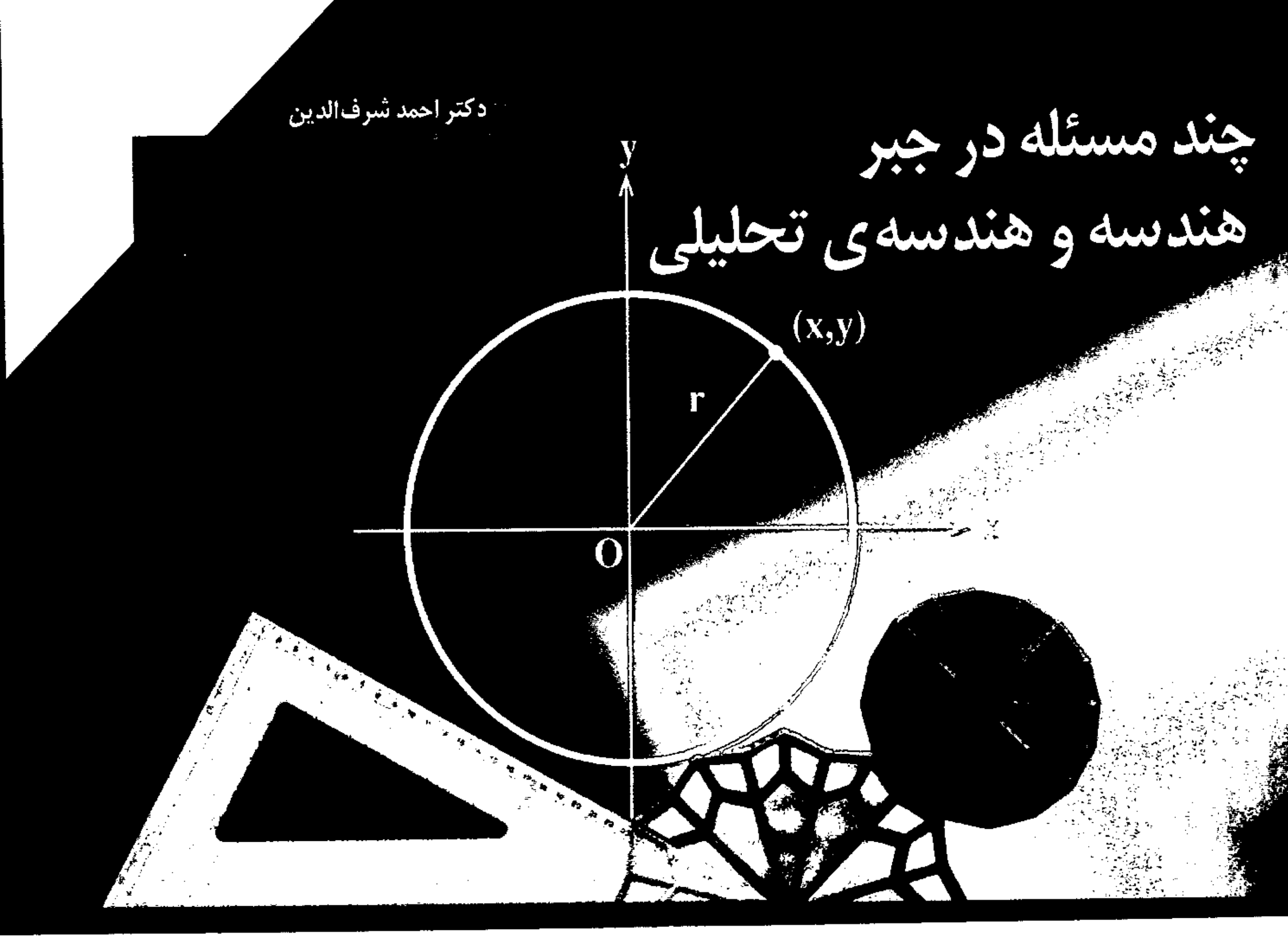
۱. منهاج، محمدباقر. محاسبات فازی. انتشارات دانش‌نگار. چاپ اول. ۱۳۸۶.

۲. کاسکو، بارت. تفکر فازی. دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی. چاپ اول. ۱۳۷۷. ترجمه‌ی علی غفاری و دیگران.

3. Fuller, R. Fuzzy Reasoning and Fuzzy optimization. Turko centre for Computer science, Abo, 1998.
4. Zimmermann H. J., Fuzzy Sets theory and its applications. 3rd edition. Kluwer Academic Publishers. 1996.
5. Dubois D. & Prade H., Fuzzy set and systems. theory and applications. Academic Press, Inc. 1980.

چند مسئله در جبر هندسه و هندسه‌ی تحلیلی

دکتر احمد شرف‌الدین



مسئله‌ی جبر

تعداد $(x+1)$ عدد حقیقیِ دوبه‌دو متمایز a_1 ، a_2 ، ... ، a_{n+1} و متغیر حقیقی x را در نظر می‌گیریم و مجموعه‌ی زیر را با عضوهای $x-a_1$ ، $x-a_2$ ، ... ، $x-a_{n+1}$ تشکیل می‌دهیم:

$$E=\{x-a_1, x-a_2, \dots, x-a_n, x-a_{n+1}\}$$

از اعضای مجموعه‌ی E، n تا n تا انتخاب می‌کنیم و هر n عضو انتخاب شده را در هم ضرب می‌کنیم. سپس حاصل‌ضرب‌ها را باهم جمع می‌کنیم و مجموع را $f_n(x)$ می‌نامیم:

ثابت کنید معادله‌ی زیر دارای n جواب حقیقی دوبه‌دو متمایز است:

$$f_n(x)=0$$

دو برهان

برهان اول

بدون کاسته شدن از کلیت استدلال فرض می‌کنیم: $a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1}$ چندجمله‌ای $f_n(x)=0$ شامل $(n+1)$ حاصل‌ضرب است. فقط یکی از این حاصل‌ضرب‌ها شامل $(x-a_1)$ نیست و آن حاصل‌ضرب به‌صورت زیر است:

$$(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\dots(x-a_{n+1})$$

هم‌چنین، فقط یکی از حاصل‌ضرب‌های یادشده شامل $(x-a_2)$ نیست که به‌صورت زیر است:

$$(x-a_1)(x-a_3)(x-a_4)\dots(x-a_{n+1})$$

دو رابطه‌ی زیر را در نظر می‌گیریم (در تابع $f_n(x)$ یک‌بار به‌جای x، a_1 و یک‌بار a_2 می‌گذاریم:

$$\begin{cases} f_n(a_1)=(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)\dots(a_1-a_{n+1}) \\ f_n(a_2)=(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)\dots(a_2-a_{n+1}) \end{cases}$$

از دو رابطه‌ی بالا، رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$f_n(a_1).f_n(a_2)=(a_1-a_2)(a_2-a_1)$$
$$\times[(a_1-a_3)(a_2-a_3)]\ [(a_1-a_4)(a_2-a_4)]$$
$$\times\dots\times[(a_1-a_{n+1})(a_2-a_{n+1})]$$

مقدار داخل هر کروشه مثبت است، زیرا مثلاً چون $a_1 < a_2 < a_3$ پس $(a_1-a_3)(a_2-a_3)>0$.

عبارت جلوی کروشه‌ی اول، یعنی $(a_1-a_2)(a_2-a_1)$ منفی است. پس $f_n(a_1)f_n(a_2)<0$. تابع $f_n(x)$ پیوسته است، زیرا یک چندجمله‌ای است. بنابراین، چندجمله‌ای $f_n(x)$ حداقل به ازای یک مقدار بین a_1 و a_2 صفر می‌شود. با همین شیوه‌ی استدلال نتیجه می‌شود، چندجمله‌ای مذکور در هر یک از فاصله‌های (a_2,a_3)، (a_3,a_4)، ... و (a_n,a_{n+1}) حداقل یک ریشه دارد. اما در هر یک از فاصله‌های (a_1,a_2)، (a_2,a_3)، ... و (a_n,a_{n+1})، معادله‌ی $f_n(x)=0$ فقط یک ریشه دارد، نه بیشتر. زیرا در غیر این صورت به تناقض می‌رسیم.

می‌دانیم هر چندجمله‌ای که دارای n ریشه باشد، از درجه‌ی n است. اگر فرض کنیم که یک چندجمله‌ای درجه‌ی n دارای $(n+1)$ ریشه‌ی α_1 ، α_2 ، ... ، α_n و α_{n+1} باشد، این معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)(x-\alpha_{n+1})=0$$

و این معادله از درجه‌ی $(n+1)$ است (تناقض).

برهان دوم

عبارت زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$q(x)=\frac{f_n(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{n+1})}$$

$$=\frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2}+\dots+\frac{1}{x-a_{n+1}}$$

خط‌های $x=a_1$ ، $x=a_2$ ، ... و $x=a_{n+1}$ مجانب‌های قائم نمودار تابع $q(x)$ هستند.

مشتق تابع $q(x)$ نسبت به x چنین است:

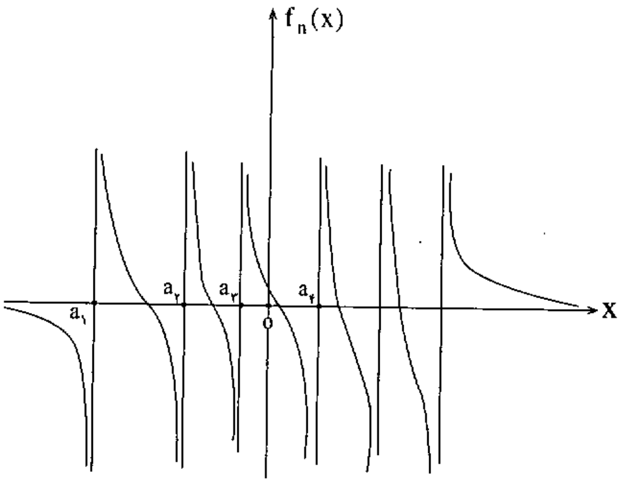
$$q'(x)=-\frac{1}{(x-a_1)^2}-\frac{1}{(x-a_2)^2}-\dots-\frac{1}{(x-a_{n+1})^2}$$

مشتق منفی است و لذا تابع نزولی است.

رفتار تابع را در یکی از فاصله‌ها مثلاً در فاصله‌ی (a_1,a_2) نشان می‌دهیم. تابع در این فاصله نزولی است و دو خط $x_1=a_1$ و $x_2=a_2$ دو مجانب نمودار هستند. به ازای $x=a_1+\varepsilon$ (ε مقدار مثبت بی‌نهایت کوچک فرض می‌شود)، مقدار تابع بی‌نهایت بزرگ است. به ازای $x=a_2-\varepsilon$ مقدار تابع منفی است و قدرمطلق آن بی‌نهایت بزرگ. نتیجه می‌شود که معادله‌ی $f_n(x)=0$ در فاصله‌ی (a_1,a_2) یک جواب و فقط یک جواب دارد.

معادله‌ی $f_n(x)=0$ در هر یک از فاصله‌های (a_2,a_3) ، (a_3,a_4) ، ... و (a_n,a_{n+1}) دارای جواب یکتاست. بنابراین، معادله‌ی موردنظر n جواب دارد.

نمودار معادله به شکل زیر است:



مسئله‌ای در چهارضلعی

چهارضلعی ABCD را در نظر می‌گیریم (شکل زیر). نقطه‌ی برخورد دو خط AB و CD را E و نقطه‌ی برخورد دو خط AD و BC را F می‌نامیم.

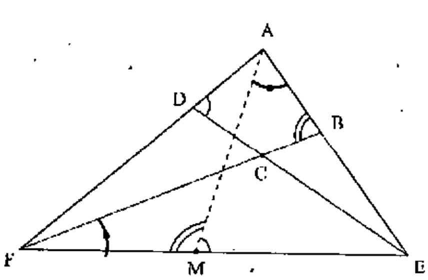
الف) ثابت کنید دایره‌های محیطی دو مثلث ABF و ADE روی خط EF یکدیگر را قطع می‌کنند.

ب) ثابت کنید رابطه‌ی زیر مسلم است:

$$\overline{EA}.\overline{EB}+\overline{FA}.\overline{FD}=\overline{EA}^2 \qquad (1)$$

پ) در مثلث ABC، دو ارتفاع BE و CE را در نظر می‌گیریم. ثابت کنید رابطه‌ی زیر محقق است:

$$\overline{BC}^2=\overline{BA}.\overline{BF}+\overline{CA}.\overline{CE} \qquad (2)$$



برهان

الف) نقطه‌ی برخورد دایره‌ی محیطی مثلث ADE را با خط EF نقطه‌ی M می‌نامیم. ثابت می‌کنیم دو زاویه‌ی ADE و AME روبه‌روی یک کمان‌اند. زاویه‌ی ABF مکمل زاویه‌ی ADE است و زاویه‌ی AMF مکمل زاویه‌ی ADE است. پس دو زاویه‌ی ABF و AMF برابرند. نتیجه می‌شود که نقطه‌ی M روی دایره‌ی محیطی مثلث ABF قرار دارد.

ب) ثابت می‌کنیم دو مثلث EAM و EFB متشابهند، زیرا زاویه‌ی E در هر مثلث مشترک است. دو زاویه‌ی EMA و EFB برابرند، زیرا در دایره‌ی محیطی چهارضلعی ABMF، دو زاویه‌ی یادشده، مقابل به کمان EM قرار دارند. از تشابه این دو مثلث، رابطه‌ی زیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{EF}}=\frac{\overline{EM}}{\overline{EA}}$$

از این تساوی رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\overline{EA}.\overline{EB}=\overline{EF}.\overline{EM} \qquad (۳)$$

با همین شیوه‌ی استدلال، درستی رابطه‌ی زیر را ثابت می‌کنیم:

$$\overline{FA}.\overline{FD}=\overline{FM}.\overline{FE} \qquad (۴)$$

به کمک دو رابطه‌ی ۳ و ۴، رابطه‌ی زیر را می‌نویسیم:

$$\overline{EA}.\overline{EB}+\overline{FA}.\overline{FD}=\overline{EF}^2$$

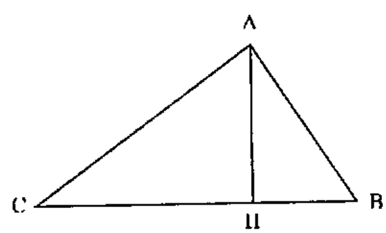
پ) به کمک حکم پ، رابطه‌ی ۲ ثابت می‌شود.

خاصیتی از مثلث قائم‌الزاویه ....

می‌خواهیم یکی از خاصیت‌های مثلث قائم‌الزاویه را از سه راه ثابت می‌کنیم:

قضیه: در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC که A رأس زاویه‌ی قائمه و AH ارتفاع است، رابطه‌ی زیر بین طول‌های دو ضلع زاویه‌ی قائمه و ارتفاع وجود دارد:

$$\frac{1}{\overline{AH}^2}=\frac{1}{\overline{AB}^2}+\frac{1}{\overline{AC}^2} \qquad (۱)$$



برهان ....

الف) اثبات با مثلثات: دو رابطه‌ی زیر را می‌نویسیم:

$$\begin{cases}\dfrac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=\sin B\\[2mm] \dfrac{\overline{AH}}{\overline{AC}}=\sin C\end{cases}$$

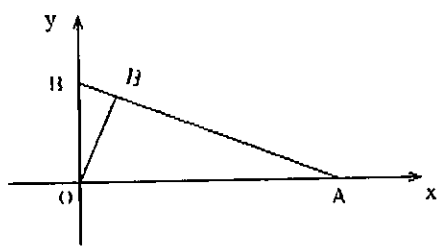
چون زاویه‌ی B متمم زاویه‌ی C است، نتیجه می‌شود:

$$\frac{\overline{AH}^2}{\overline{AB}^2}+\frac{\overline{AH}^2}{\overline{AC}^2}=\sin^2 B+\cos^2 B=1 \qquad (۲)$$

از رابطه‌ی ۲، رابطه‌ی ۱ به‌دست می‌آید.

ب) برهان با هندسه‌ی تحلیلی: در دستگاه مختصات oxy، دو نقطه‌ی A(a,o) و B(o,b) را در نظر می‌گیریم. طول ارتفاع OH را h می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \qquad (۱)$$



در دستگاه مختصات oxy، دو نقطه‌ی A(a,o) و B(o,b) را در نظر می‌گیریم. طول ارتفاع OH را h می‌نامیم. معادله خط AB چنین است:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (۲)$$

می‌دانیم که فاصله‌ی نقطه $M(x_0,y_0)$ از خط به معادله‌ی $ax+by+c=0$ از دستور زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (۳)$$

طول OH، ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAB را از دستور ۳ حساب می‌کنیم. این چنین:

$$\overline{OH}=\frac{\left|\frac{1}{a}\times 0+\frac{1}{b}\times 0-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}} \qquad (۴)$$

از رابطه‌ی ۴، رابطه‌ی مطلوب ۱ به‌دست می‌آید.

پ) برهان هندسی: در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC که A رأس زاویه‌ی قائمه است و طول‌های $\overline{AB}$، $\overline{AC}$ و $\overline{AH}$ را به ترتیب c، b و h می‌نامیم، دو رابطه‌ی زیرا را می‌نویسیم:

$$\begin{cases}b^2+c^2=a^2 & \text{(قضیه‌ی فیثاغورس)}\\ bc=ah & \text{(با به‌کارگیری مساحت مثلث)}\end{cases}$$

از دو رابطه‌ی بالا، رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{h^2}$$

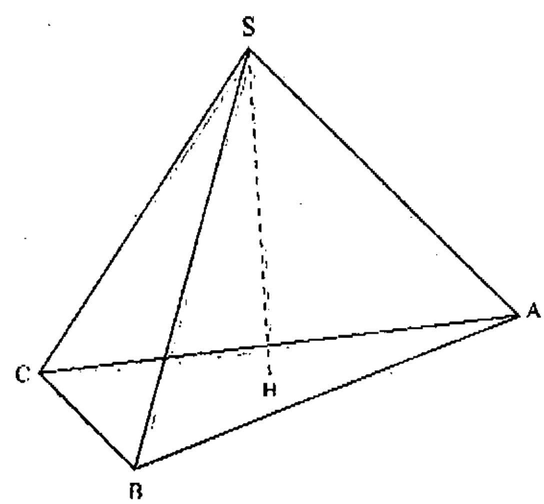
حکمی در چهاروجهی سه قائمه ....

تعریف چهاروجهی سه‌قائمه. چهاروجهی SABC را در رأس S، سه قائمه می‌نامند؛ اگر هر یک از سه زاویه‌ی اطراف رأس S یعنی سه زاویه‌ی ASB، BSC و CSA قائمه باشند.

حکم چنین است:

چهاروجهی SABC را که در رأس S سه قائمه است، در نظر می‌گیریم و ارتفاع رأس S را SH می‌نامیم. ثابت کنید رابطه‌ی زیر محقق است:

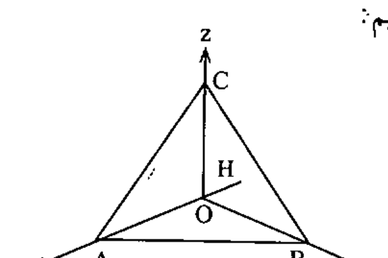
$$\frac{1}{\overline{SH}^2}=\frac{1}{\overline{SA}^2}+\frac{1}{\overline{SB}^2}+\frac{1}{\overline{SC}^2} \qquad (۱)$$



برهان ۱ ....

الف) برهان با به‌کارگیری هندسه‌ی تحلیلی

دستگاه مختصات oxyz و نقاط $A(a,0,0)$، $B(0,b,0)$ و $C(0,0,c)$ را در نظر می‌گیریم. عمود OH را بر صفحه‌ی ABC وارد می‌کنیم:



معادله‌ی صفحه‌ی ABC چنین است:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (۲)$$

می‌دانیم که فاصله‌ی نقطه‌ی $M(x_0,y_0,z_0)$ از صفحه‌ی $ax+by+cz=1$ چنین است:

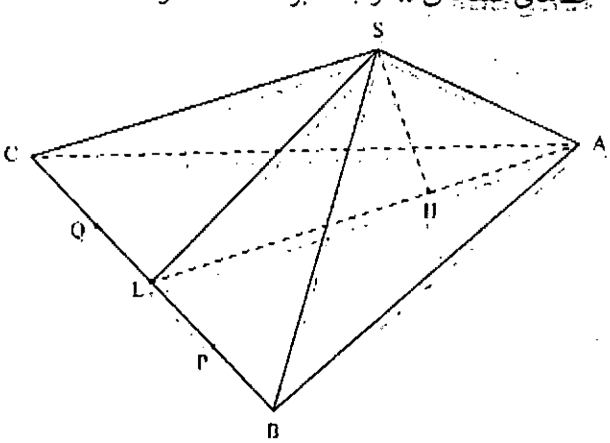
$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0-1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad (۳)$$

به کمک دستور ۳، فاصله‌ی نقطه‌ی o را از صفحه به معادله‌ی ۲ حساب می‌کنیم:

$$\overline{o'H}=\frac{\left|\frac{1}{a}\times 0+\frac{1}{b}\times 0+\frac{1}{c}\times 0-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}} \qquad (۴)$$

از تساوی ۴، رابطه‌ی مطلوب ۱ به‌دست می‌آید.

برهان۲. چهاروجهی سه قائمه‌ی SABC، سه قائمه در رأس S را در نظر می‌گیریم. چون خط AS بر دو خط SB و SC از صفحه‌ی $SBC=\pi$ عمود است، پس خط AS بر تمام خط‌های صفحه‌ی π از جمله بر خط BC عمود است.

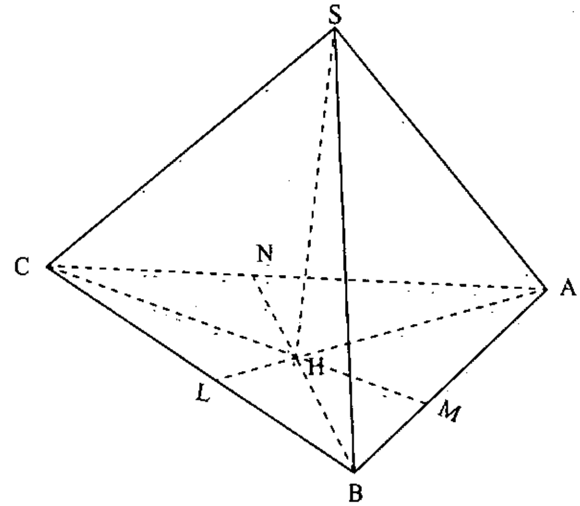


در صفحه‌ی π، از نقطه‌ی S خط SL را بر خط BC عمود می‌کنیم. از نقطه‌ی S، خط SH را بر صفحه‌ی ABC عمود می‌کنیم. اکنون می‌خواهیم ثابت کنیم خط AL ارتفاع مثلث ABC است و نقطه‌ی H که پای ارتفاع هرم SABC است، روی خط AL قرار دارد. دو نقطه‌ی P و Q را روی خط BC، به فاصله‌های مساوی از نقطه‌ی L اختیار می‌کنیم. هرم ASPQ نسبت به صفحه‌ی ASL متقارن است. برای درک آسان مطلب، نقطه‌ی A را رأس و مثلث APQ را قاعده‌ی هرم در نظر بگیریم و توجه داشته باشیم که هرم یاد شده قائم است (خط AS بر قاعده‌ی SPQ عمود است).

بنابراین، اگر عمود SH را بر صفحه‌ی APQ وارد کنیم، در صفحه‌ی ASP قرار می‌گیرد. نتیجه آن‌که نقطه‌ی H، پای

عمودی که از نقطه‌ی S بر صفحه‌ی ABC وارد می‌شود، بر نقطه‌ی تقاطع سه ارتفاع مثلث ABC می‌گذرد.

اکنون رابطه‌ی ۱ را ثابت می‌کنیم. در شکل زیر، SABC یک هرم است که زاویه‌های رأس S قائمه‌اند.



نقطه‌ی H، نقطه‌ی برخوردار سه ارتفاع مثلث ABC است. ارتفاع رأس S هرم از نقطه‌ی H می‌گذرد. ارتفاع رأس S از مثلث SBC و ارتفاع رأس A از مثلث ABC، یکدیگر را روی خط BC قطع می‌کنند. (این مطلب در سطرهای گذشته ثابت شده است).

در دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی SBC و ASL، به ترتیب رابطه‌های زیر را می‌نویسیم:

$$\frac{1}{\overline{SB}^2}+\frac{1}{\overline{SC}^2}=\frac{1}{\overline{SL}^2}$$

$$\frac{1}{\overline{SA}^2}+\frac{1}{\overline{SL}^2}=\frac{1}{\overline{SH}^2}$$

از دو رابطه‌ی بالا، رابطه‌ی ۱ به‌دست می‌آید.

تبصره ....

الف) در مثلث ABC که زاویه‌ی A قائمه است، این رابطه‌ی برقرار است:

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2 \qquad (1)$$

برعکس، اگر در مثلث ABC رابطه‌ی ۱ برقرار باشد، زاویه‌ی A قائمه است. به‌عبارت دیگر، شرط لازم و کافی برای آن که در مثلث ABC زاویه‌ی A قائمه باشد، آن است که رابطه‌ی ۱ برقرار باشد.

ب) اگر در مثلث ABC که AH ارتفاع است، رابطه‌ی زیر برقرار باشد، آیا زاویه‌ی A قائمه است؟

$$\frac{1}{\overline{AB}^2}+\frac{1}{\overline{AC}^2}=\frac{1}{\overline{AH}^2} \qquad (2)$$

ثابت کردیم، در مثلث ABC که زاویه‌ی A قائمه و AH ارتفاع است، رابطه‌ی ۲ برقرار است. عکس این حکم صحیح نیست، یعنی اگر در مثلث ABC که AH ارتفاع است، رابطه‌ی ۲ برقرار باشد، زاویه‌ی A الزاماً قائمه نیست. در سطرهای آینده، در این باره توضیح می‌دهیم:

در صفحه‌ی p، دو نقطه‌ی ثابت B و C و نقطه‌ی متحرک A را درنظر می‌گیریم و پای عمود وارد از نقطه‌ی A بر خط BC را H می‌نامیم. مطلوب است مکان هندسی نقطه‌ی A به‌طوری که رابطه‌ی ۲ برقرار باشد.

حل. دستگاه مختصات دکارتی xy را طوری انتخاب می‌کنیم که محور xها بر خط BC منطبق باشد و مبدأ آن نقطه‌ی O وسط پاره‌خط BC باشد. طول پاره‌خط AB را 2a فرض می‌کنیم. رابطه‌ی ۲ به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{1}{y^2}=\frac{1}{(x-a)^2+y^2}+\frac{1}{(x+a)^2+y^2} \qquad (3)$$

معادله‌ی ۳ پس از عمل‌های جبری متعددی، به‌صورت زیر در می‌آید:

$$(x^2+y^2-a^2)(x^2-y^2-a^2)=0 \qquad (4)$$

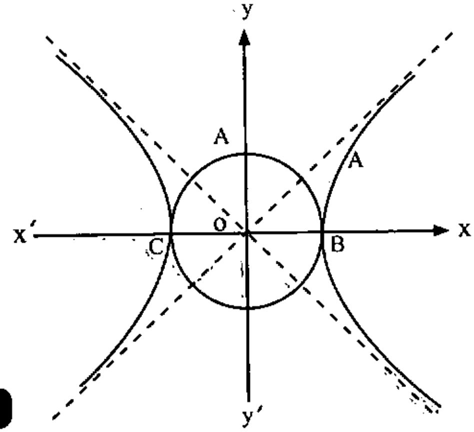
از معادله‌ی ۴ نتیجه می‌شود:

$$x^2+y^2-a^2=0 \qquad (5)$$

یا

$$x^2-y^2-a^2=0 \qquad (6)$$

نمودار معادله‌ی ۵ دایره‌ای به‌قطر BC است و نمودار ۶، یک هذلولی متساوی‌الساقین با رأس‌های B و C است. پس مکان هندسی نقطه‌ی A که در رابطه‌ی ۲ صدق کند، عبارت است از اجتماع دایره‌ای به‌قطر BC و هذلولی متساوی‌الساقینی با دو رأس B و C. نمودار معادله‌ی ۴ در شکل زیر رسم شده است.



● غلامرضا یاسی‌پور

با راهیان المپیادهای ریاضی

دستگاه‌های معادلات

در این بخش، دستگاه‌های معادلات نااستاندارد را انتخاب کرده‌ایم. اولین مسئله، گزیده‌ای است از المپیاد ریاضی بریتانیا در سال ۱۹۹۶:

۱. *جمیع جواب‌های اعداد حقیقی و مثبت a، b، c و d دستگاه زیر را بیابید:*

$$a+b+c+d=12$$

$$abcd=27+ab+ac+ad+bc+bd+cd$$

با استفاده از نابرابری AM − GM در معادله‌ی دوم، رابطه‌ی زیر را به دست می‌آوریم:

$$abcd \geq 27+6\sqrt{abcd}$$

با انتقال تمام عبارات به سمت چپ و تجزیه‌ی کل عبارت، و در نظر گرفتن آن به‌عنوان چندجمله‌ای درجه‌ی دومی برحسب $\sqrt{abcd}$، خواهیم داشت:

$$(\sqrt{abcd}+3)(\sqrt{abcd}-9) \geq 0$$

این نابرابری مستلزم آن است که داشته باشیم: $\sqrt{abcd} \geq 9$ که هرگاه با معادله‌ی اول دستگاه ترکیب شود، نابرابری زیر را بدهد:

$$\sqrt[4]{abcd} \geq \frac{a+b+c+d}{4}$$

نابرابری AM − GM مستلزم آن است که $a=b=c=d=3$ تنها جواب دستگاه باشد.

مسئله‌ی دوم، از المپیاد ریاضی ویتنام (سال ۱۹۹۶) برگزیده شده است.

۲. *جمیع اعداد حقیقی و مثبت x و y صادق در دستگاه معادلات زیر را بیابید:*

$$\sqrt{3x}\left(1+\frac{1}{x+y}\right)=2$$

$$\sqrt{7y}\left(1-\frac{1}{x+y}\right)=4\sqrt{2}$$

در این مسئله، جانشینی $u=\sqrt{x}$ و $v=\sqrt{y}$ طبیعی است.

در این صورت، دستگاه به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$u\left(1+\frac{1}{u^2+v^2}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$v\left(1-\frac{1}{u^2+v^2}\right)=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

اما u^2+v^2 مربع قدرمطلق عدد مختلط $z=u+iv$ است. این مطلب ما را راهنمایی می‌کند که معادله‌ی دوم ضرب در i را با معادله‌ی اول جمع کنیم. در این صورت داریم:

$$u+iv+\frac{u-iv}{u^2+v^2}=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+i\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)$$

خارج قسمت $\frac{(u-iv)}{(u^2+v^2)}$ برابر است با:

$$\frac{\bar{z}}{|z|^2}=\frac{\bar{z}}{(z\bar{z})}=\frac{1}{z}$$

بنابراین، معادله‌ی بالا به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$z+\frac{1}{z}=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+i\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)$$

درنتیجه z در معادله‌ی درجه‌ی دوم $z^2-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+i\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)z+1=0$ با جواب‌های

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\pm\frac{2}{\sqrt{21}}\right)+i\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\pm\sqrt{2}\right)$$

صدق می‌کند که در آن علامت‌های + و − متناظرند.
این موضوع نشان می‌دهد، دستگاه اولیه جواب‌های زیر را دارد:

$$x=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\pm\frac{2}{\sqrt{21}}\right)^2,\quad y=\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\pm\sqrt{2}\right)^2$$

که در آن علامت‌های + و − متناظرند.

دستگاه‌های زیر، جز در موارد مشخص‌شده، برحسب جواب‌های حقیقی حل می‌شوند.

مسائل

۱. دستگاه زیر را حل کنید:

$$\log(2xy)=\log x\ \ \log y$$
$$\log(yz)=\log y\ \ \log z$$
$$\log(2zx)=\log z\ \ \log x$$

۲. جمیع جواب‌های دستگاه معادلات زیر را بیابید:

$$\frac{4x^2}{4x^2+1}=y$$
$$\frac{4y^2}{4y^2+1}=z$$
$$\frac{4z^2}{4z^2+1}=x$$

۳. درصورتی که اعداد a، b، x و y در دستگاه معادلات زیر صدق کنند، ax^5+by^5 را بیابید:

$$ax+by=3$$
$$ax^2+by^2=7$$
$$ax^3+by^3=16$$
$$ax^4+by^4=42$$

۴. دستگاه زیر را حل کنید:

$$x+\frac{2}{x}=2y$$
$$y+\frac{2}{y}=2z$$
$$z+\frac{2}{z}=2x$$

۵. دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$(x+y)^3=z$$
$$(y+z)^3=x$$
$$(z+x)^3=y$$

۶. دستگاه زیر را حل کنید:

$$x^2-|x|=|yz|$$
$$y^2-|y|=|zx|$$
$$z^2-|z|=|xy|$$

۷. جواب‌های دستگاه معادلات زیر را بیابید:

$$x+\lfloor y\rfloor+\{z\}=1.1$$
$$\lfloor x\rfloor+\{y\}+z=2.2$$
$$\{x\}+y+\lfloor z\rfloor=3.3$$

که در آن $\lfloor\ \rfloor$ و $\{\ \}$، به‌ترتیب بزرگ‌ترین تابع صحیح و جزء کسری تابع را نشان می‌دهند.

۸. به‌ازای عدد مختلط مفروض a، جواب‌های متفاوت دستگاه زیر را بیابید:

$$(x_1+x_2+x_3)x_4=a$$
$$(x_1+x_2+x_4)x_3=a$$
$$(x_1+x_3+x_4)x_2=a$$
$$(x_2+x_3+x_4)x_1=a$$

۹. جمیع عددهای حقیقی a‌ای را بیابید که به‌ازای آن‌ها، اعداد حقیقی نامنفی x_1، x_2، x_3، x_4 و x_5 صادق و در دستگاه زیر موجودند:

$$\sum_{k=1}^{5}kx_k=a$$
$$\sum_{k=1}^{5}k^3x_k=a^2$$
$$\sum_{k=1}^{5}k^5x_k=a^3$$

۱۰. دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$x^3-9(y^2+3y-3)=0$$
$$y^3-9(z^2+3z-3)=0$$
$$z^3-9(x^2+3x-3)=0$$

۱۱. دستگاه زیر را حل کنید:

$$ax+by=(x-y)^2$$
$$by+cz=(y-z)^2$$
$$cz+ax=(z-x)^2$$

در این دستگاه: $a,b,c>0$.

۱۲. فرض می‌کنیم a، b و c اعدادی حقیقی و مثبت (نه همه برابر) باشند. جمیع جواب‌های حقیقی x، y و z دستگاه معادلات زیر را بیابید:

$$x^2-yz=a$$
$$y^2-zx=b$$
$$z^2-xy=c$$

۱. داریم:

$$\log(2xy) = \log 2 + \log x + \log y$$

با انتقال لگاریتم‌های شامل متغیر به سمت راست و افزودن ۱ به هر طرف سه معادله، حاصل می‌کنیم:

$$\log 20 = (\log x - 1)(\log y - 1)$$
$$1 = (\log y - 1)(\log z - 1)$$
$$\log 20 = (\log z - 1)(\log x - 1)$$

با ضرب جمیع معادلات و گرفتن ریشه‌ی دوم خواهیم داشت:

$$\pm \log 20 = (\log x - 1)(\log y - 1)(\log z - 1)$$

این رابطه، در ترکیب با برابری زیر:

$$\log 20 = (\log x - 1)(\log y - 1)$$

نشان می‌دهد: $\log 2 - 1 = \pm 1$

معادله‌های دیگر، $\log x - 1 = \pm \log 20$ و $\log y - 1 = \pm 1$ را به‌دست می‌دهند و دو جواب دستگاه یعنی $(200,100,100)$ و $(\frac{1}{2},1,1)$ را به‌دست می‌آوریم.

۲. کار را با ملاحظه‌ی این مطلب آغاز می‌کنیم که تابع: $f:[0,\infty) \to [0,\infty), f(t) = \frac{4t^2}{(4t^2+1)}$ اکیداً صعودی است.

درنتیجه اگر $x < y$، آن‌گاه $f(x) < f(y)$. بنابراین $y < z$.

با تکرار این استدلال، $x < z$ را به‌دست می‌آوریم.

درنتیجه داریم: $x < y < z < x$ که غیرممکن است.

به همین ترتیب، $x > y$ به تناقض می‌انجامد.

بنابراین: $x = y = z$.

حل معادله‌ی $\frac{4t^2}{(4t^2+1)} = t$، دو مقدار $t = \frac{1}{2}$ یا $t = 0$ را به‌دست می‌دهد. درنتیجه، تنها سه‌تایی‌هایی که در دستگاه صادق‌اند، عبارت‌اند از:

$$(0,0,0) \quad \text{و} \quad (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})$$

(المپیاد ریاضی کانادا، ۱۹۹۶)

۳. به ازای $n = 2$ و $n = 3$، اتحاد

$$(ax^n + by^n)(x+y) - (ax^{n-1} + by^{n-1})xy = ax^{n+1} + by^{n+1}$$

به معادلات زیر می‌انجامد:

$$7(x+y) - 3xy = 16 \quad \text{و} \quad 16(x+y) - 7xy = 42$$

حل هم‌زمان این دو معادله، $x + y = -14$ و $xy = -38$ را به‌دست می‌دهد.

با به‌کار بردن اتحاد بازگشتی، به ازای $n = 4$ داریم:

$$ax^5 + by^5 = (42)(-14) - (16)(-38) = -588 + 608 + 20$$

۴. فرض می‌کنیم (x,y,z) یکی از جواب‌ها باشد. واضح است، اگر یکی از این عددها مثبت باشد، دو عدد دیگر نیز باید مثبت باشند. در صورت ضرورت، با ضرب در -1 می‌توان فرض کرد: $x,y,z > 0$.

با جمع سه معادله حاصل می‌کنیم:

$$x + y + z = 2(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z})$$

نیز، کاربرد نابرابری AM − GM در مورد هر معادله‌ی دستگاه، موارد زیر را به‌دست می‌دهد:

$$2x \ge 2\sqrt{2} \quad \text{و} \quad 2y \ge 2\sqrt{2} \quad \text{و} \quad 2z \ge 2\sqrt{2}$$

این موضوع نشان می‌دهد که در معادله‌ی فوق، سمت چپ بزرگ‌تر از یا برابر با $3\sqrt{2}$ است. در حالی که سمت راست کمتر از یا برابر با $3\sqrt{2}$ است. برای به‌دست آوردن برابری، باید داشته باشیم:

$$x = y = z = \sqrt{2}$$

که یک جواب را به دست می‌دهد. جواب دیگر، با تغییر علامت به دست می‌آید و عبارت است از:

$$x = y = z = -\sqrt{2}$$

تبصره: این دستگاه به‌صورت:

$$y = f(x) \quad \text{و} \quad z = f(y) \quad \text{و} \quad x = f(z)$$

است که در آن داریم:

$$f(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{2}{t})$$

دنباله‌ی داده شده با $n \ge 0$ و $t_{n+1} = f(t_n)$ و $t_0 \in \mathbb{R}$ به‌طور سنتی برای محاسبه‌ی $\sqrt{2}$ با دقت بسیار به‌کار رفته است، زیرا با سرعت خوبی به آن هم‌گرا می‌شود. هریک از جمله‌های تالی، بی‌توجه به مقدار $t_0 \in \mathbb{R}$، در قدرمطلق بزرگ‌تر از یا برابر با $\sqrt{2}$ است. اگر برای راحتی کار فرض کنیم: $t_0 > 0$، آن‌گاه داریم: $t_n \ge r_2$، به‌ازای $n \ge 1$ و نیز:

$t_1 \ge t_2 \ge \cdots$

جمله‌ی واقع در این دنباله، تنها اگر دقیقاً $2\sqrt{2}$ باشد، می‌تواند تکرار شود. حل دستگاهی مشابه با هر تعداد متغیر، مشکل نیست.

۵. با تفریق معادله‌ی دوم از معادله‌ی اول، به‌دست می‌آوریم:

$$(x-z)((x+y)^2+(x+y)(x+z)+(y+z)^2)=z-x$$

از آن‌جا که:

$$(x+y)^2+(x+y)(y+z)+(y+z)^2>0$$

به دست می‌آوریم: $x=z$. بنا به تقارن، $y=z$، و کارمان به حل معادله‌ی $8x^3=x$ می‌انجامد. این معادله دارای جواب‌های $x=0$ و $x=\pm\frac{1}{2}$ است. نتیجه می‌شود، جواب‌های دستگاه معادلات مفروض عبارت‌اند از:

$$x=y=z=0$$

$$x=y=z=\frac{1}{(2\sqrt{2})}$$

$$x=y=z=-\frac{1}{(2\sqrt{2})}$$

(تورنمنت شهرها، ۱۹۸۵)

۶. فرض می‌کنیم (x,y,z) یکی از جواب‌ها باشد. اگر $xyz\neq 0$، آن‌گاه از آن‌جا که قدرمطلق مثبت است، موارد زیر را به‌دست می‌آوریم:

$x^2>|yz|$ و $y^2>|zx|$ و $z^2>|xy|$

با ضرب این موارد داریم:

$$x^2y^2z^2>x^2y^2z^2$$

که متناقض است. بنابراین یکی از اعداد صفر است، و با استفاده از معادله‌ای که شامل آن در سمت چپ است، درمی‌یابیم که یکی دیگر از این سه عدد نیز باید صفر باشد. عدد سوم تنها می‌تواند ۰ یا ±۱ باشد.

به این ترتیب، جواب‌ها عبارت‌اند از:

$(0,0,0)$، $(1,0,0)$، $(0,1,0)$، $(0,0,1)$، $(-1,0,0)$، $(0,-1,0)$ و $(0,0,-1)$

۷. با جمع سه معادله به دست می‌آوریم:

$$2x+2y+2z=6.6$$

درنتیجه:

$$x+y+z=3.3$$

تفریق معادلات اولیه از این معادله، دستگاه هم‌ارز زیر را به‌دست می‌دهد:

$$\{y\}+\lfloor z\rfloor=2.2$$

$$\{x\}+\lfloor y\rfloor=1.1$$

$$\{z\}+\lfloor x\rfloor=0$$

جواب‌های اولین معادله $\{y\}=0.2$ و $\lfloor z\rfloor=2$، جواب‌های دومین معادله $\{x\}=0.1$ و $\lfloor y\rfloor=1$ و جواب‌های سومین معادله $\{z\}=0$ و $\lfloor x\rfloor=0$ هستند. درنتیجه، جواب دستگاه عبارت است از: $x=0.1$، $y=1.2$ و $z=2$.

(مسابقه‌ی ریاضی رومانی ۱۹۷۹، طرح از T. Anderscu)

۸. فرض می‌کنیم:

$$s=x_1+x_2+x_3+x_4$$

در این صورت دستگاه می‌شود:

$$(s-x_4)x_4=a$$

$$(s-x_3)x_3=a$$

$$(s-x_2)x_2=a$$

$$(s-x_1)x_1=a$$

که هم‌ارز مورد زیر است:

$x_k^2-sx_k+a=0$ و $k=1,2,3,4$

نتیجه می‌شود که x_1، x_2، x_3 و x_4 جواب‌های معادله‌ی زیرند:

$$u^2-su+a=0$$

ادامه‌ی کار بدیهی است. به جای این‌که ۱۶ حالت ممکن را به‌طور جداگانه تحلیل کنیم، به‌طریق زیر اقدام می‌کنیم:

اگر $x_1=x_2=x_3=x_4$، هر x_i برابر $s/4$ است. با قرار دادن این رابطه در هریک از معادلات داریم: $s=\pm 4\alpha$ که در آن α یکی از جواب‌های معادله‌ی $a=3x^2$ است (به‌خاطر داشته باشید که a مختلط است و بنابراین نماد $\sqrt{a}$ معنی ندارد). این حالت به دو جواب $(\alpha,\alpha,\alpha,\alpha)$ و $(-\alpha,-\alpha,-\alpha,-\alpha)$ می‌انجامد.

اگر دو x_i متمایز باشند، مثلاً $x_1\neq x_2$، آن‌گاه این دو،

ریشه‌های معادله‌ی $u^2 - su + a = 0$ می‌شوند و بنابراین مجموعشان s است. در این صورت داریم:

$$x_3 + x_4 = 0$$

بررسی دو حالت کافی است.

اگر $x_3 \neq x_4$ باشد، همین استدلال نشان می‌دهد که: $x_3 + x_4 = s$. درنتیجه $s = 0$، و چهارتایی (x_1,x_2,x_3,x_4) به صورت $(\beta,-\beta,\beta,-\beta)$ است که در آن β یکی از جواب‌های معادله‌ی $x^2 + a = 0$ است. از تقارن، شش جواب زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$(\beta,-\beta,\beta,-\beta),(\beta,\beta,-\beta,-\beta)(\beta,-\beta,-\beta,\beta),(-\beta,\beta,\beta,-\beta),$$
$$(-\beta,\beta,-\beta,\beta),(-\beta,-\beta,\beta,\beta)$$

اگر داشته باشیم: $x_1 \neq x_2$ و $x_3 = x_4$، آن‌گاه خواهیم داشت: $x_3 = x_4 = 0$. این مستلزم آن است که سه x_i برابر صفر و چهارمی s باشد. اما این حالت، اگر و تنها اگر $a = 0$ باشد، امکان‌پذیر است. در این حال، جواب‌های اضافی $(0,0,0,s)$ و $(0,0,s,0)$ و $(0,s,0,0)$ و $(s,0,0,0)$ را با sای به‌دست می‌آوریم که عددی مختلط است.

(امتحان انتخابی IMO رومانی، ۱۹۷۶، طرح از T.Cuculescu)

۹. راه‌حل اول: توجه داشته باشید که $(0,0,0,0,0)$ یکی از جواب‌هاست. فرض می‌کنیم x_1، x_2، x_3، x_4 و x_5 جواب‌های نابدیهی هستند. بنابراین:

$$\sum(ak - k^3)x_k = 0$$

و:

$$\sum(ak^3 - k^5)x_k = 0$$

داریم:

$$\sum_{k^2\le a}(a-k^2)kx_k = \sum_{k^2>a}(a-k^2)kx_k$$

$$\sum_{k^2\le a}(a-k^2)k^2x_k = \sum_{k^2>a}(a-k^2)k^2x_k$$

اما:

$$\sum_{k^2\le a}(a-k^2)k^2x_k \le a\sum_{k^2\le a}(a-k^2)kx_k$$
$$= a\sum_{k^2>a}(a-k^2)kx_k \le \sum_{k^2>a}(a-k^2)k^2x_k$$

از آن‌جا که جمله‌های اول و آخر برابرند، جمیع علامت‌های نابرابری، درواقع برابری‌اند. در این صورت داریم:

$$\sum_{k^2>a} a(a-k^2)kx_k = \sum_{k^2>a} k^2(a-k^2)kx_4$$

اما به ازای $k^2 > a$ داریم:

$$a(k^2-a)kx_k > k^2(k^2-a)kx_k$$

که در ترکیب با نابرابری فوق، نشان می‌دهد که به ازای $k^2 > a$ داریم: $x_k = 0$.

استدلالی مشابه نشان می‌دهد، اگر $k^2 < a$ و $a_k = 0$، بنابراین برای این‌که دستگاه جواب نابدیهی را قبول کند، باید a برابر یکی از مربع‌های کامل ۱، ۴، ۹، ۱۶ و ۲۵ باشد.

توجه داشته باشید که اگر به‌ازای ۵ یا $m = 1,2,3,4$ داشته باشیم $a = m^2$، آن‌گاه به‌ازای $k \neq m$ و $x_k = 0$، $x_m = m$ یک جواب خواهد بود.

راه‌حل دوم: مانند قبل، فرض می‌کنیم x_1، x_2، x_3، x_4 و x_5 جواب‌هایی نابدیهی باشند. از معادلات دستگاه نتیجه می‌شود:

$$\left(\sum_{k=1}^{5} k^3x_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{5} kx_k\right)\left(\sum_{k=1}^{5} k^5x_k\right)$$

از طرف دیگر، نابرابری کوشی-شوارتز، چون در مورد دنباله‌های

$$\left\{\sqrt{kx_k}\right\}_{k=1,\dots,5} \text{ و } \left\{\sqrt{k^5x_k}\right\}_{k=1,\dots,5}$$

به کار رود، می‌دهد:

$$\left(\sum_{k=1}^{5} k^3x_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{5} kx_k\right)\left(\sum_{k=1}^{5} k^5x_k\right)$$

رابطه‌ی استنتاج شده در فوق نشان می‌دهد، در نابرابری کوشی-شوارتز، برابری داریم و درنتیجه دو دنباله متناسب‌اند. به ازای $x_k = 0$، داریم:

$$\frac{\sqrt{k^5x_k}}{\sqrt{kx_k}} = k^2$$

و از آن‌جا که جمیع این مقادیر متمایزند، نتیجه می‌شود که به‌ازای دقیقاً یک k داریم: $x_k \neq 0$. مانند قبل درمی‌یابیم، تنها مقادیر ممکن a عبارت‌اند از: ۱، ۴، ۹، ۱۶ و ۲۵.

(المپیاد بین‌المللی ریاضی بیست‌ویکم، ۱۹۷۹)

۱۰. دستگاه را می‌توان به صورت زیر دوباره نویسی کرد:

$$(y-3)^3 = y^3 - x^3$$

$$(z-3)^3 = z^3 - y^3$$

$$(x-3) = x^3 - z^3$$

با جمع آن‌ها خواهیم داشت:

$$(x-3)^3 + (y-3)^3 + (z-3)^3 = 0$$

بدون از دست رفتن کلیت کار، می‌توان فرض کرد که: $x \ge 3$. از سومین معادله‌ی دستگاه اولیه درمی‌یابیم:

$$z^3 - 27 = 9x(x-3)$$

از این رو:

$$z \ge 3$$

به همین ترتیب، $y \ge 3$، و برقراری نابرابری فوق مستلزم آن است که تنها جواب ممکن عبارت باشد از:

$$x = y = z = 3$$

۱۱. با جمع معادله‌ی سوم با اول، و تفریق از دوم، خواهیم داشت:

$$2ax = (x-y)^2 + (z-x)^2 - (y-z)^2$$
$$= 2(x^2 - xy - xz + yz)$$

با تجزیه‌ی این عبارت به‌دست می‌آوریم:

$$ax = (x-y)(x-z)$$

با روشی مشابه به‌دست می‌آوریم:

$by = (y-z)(y-x)$ و $cz = (z-x)(z-y)$

اکنون فرض می‌کنیم (x, y, z) یک جواب باشد. بدون از دست دادن کلیت کار، می‌توان فرض کرد: $x \ge y \ge z$. در این صورت:

$$by = (y-z)(y-x) \le 0$$

و

$$cz = (z-x)(z-y) \ge 0$$

و شرایط $b > 0$ و $c > 0$ مستلزم آن است که: $y \le 0 \le z \le y$.

به این ترتیب داریم: $y = z = 0$ و $ax = x^2$. بنابراین، در این حالت جواب‌ها عبارت‌اند از: $(0,0,0)$ و $(a,0,0)$. بنابر تقارن، جمیع جواب‌ها عبارت‌اند از:

$(0,0,0)$ و $(a,0,0)$ و $(0,b,0)$ و $(0,0,c)$

(المپیاد ریاضی بالکان، ۱۹۸۴)

۱۲. مربع کردن هر معادله و تفریق از حاصل ضرب دو معادله‌ی دیگر می‌دهد:

$$a^2 - bc = x(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$$
$$b^2 - ca = y(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$$
$$c^2 - ab = z(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$$

فرض می‌کنیم:

$$k = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

در این صورت:

$$(a^2 - bc)^2 - (b^2 - ca)(c^2 - ab) = k^2(x^2 - yz) = k^2 a$$

محاسبه‌ی مشابهی که دستگاه فوق به‌دست می‌دهد، نشان می‌دهد که عبارت سمت چپ عبارت است از:

$$a(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$$

و مورد اخیر، با توجه به نابرابری AM − GM، مثبت است. درنتیجه:

$$k = \pm\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}$$

و دو جواب دستگاه (به ازای هر انتخاب k یکی) عبارت‌اند از:

$x = \dfrac{a^2 - bc}{k}$ و $y = \dfrac{b^2 - ca}{k}$ و $z = \dfrac{c^2 - ab}{k}$

(طرح از k.kedlaya برای المپیاد بین‌المللی ریاضی ایالات متحده، ۱۹۹۸)

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

معادله‌های سیاله و روش‌های حل آن‌ها

اشاره

در قسمت قبل، به کاربردهای هم‌نهشتی در حل مسئله‌هایی در سطح المپیاد اشاره کردیم. در این قسمت می‌کوشیم، ابتدا روش‌های حل معادله‌های سیاله را بیاوریم و سپس روش‌های جدید حل معادله‌های دیوفانتی چند متغیره را که بر پایه‌ی هم‌نهشتی است، ارائه دهیم. از آن‌جا که بسیاری از مسئله‌های علوم پایه (ریاضی، فیزیک، شیمی و...) به یک معادله‌ی جبری چند متغیره می‌انجامد، اهمیت روش‌های حل معادله‌های سیاله‌ی چند متغیره به وضوح روشن می‌شود.

معادله‌های سیاله

می‌دانیم، بسیاری از مسئله‌های جبر به معادله‌هایی می‌انجامد که تعداد مجهول‌های مسئله، بیش از تعداد معادله‌های مربوط به آن است. از لحاظ تاریخی، این‌گونه مسئله‌ها از زمان **دیوفانت** مطرح بوده‌اند و به همین مناسبت به آن‌ها «معادله‌های دیوفانتی» می‌گویند. از طرف دیگر، بسیاری از مسئله‌های فیزیک، شیمی و دیگر رشته‌ها، به حل یکی از انواع درجه nام معادله‌های سیاله منجر می‌شود که هیچ الگوریتمی برای حل آن‌ها وجود ندارد. در حال حاضر نیز این‌گونه معادله‌ها در مسابقه‌ها و المپیادها، به‌عنوان مسئله‌هایی مستقل دیده می‌شوند. بنابراین، حل و بحث در مورد معادله‌های سیاله، بسیار ضروری به‌نظر می‌رسد.

اگرچه تا به‌حال به جز در مورد معادله‌های سیاله‌ی درجه اول دو مجهولی و یا بعضی از نوع‌های دیگر، فقط راه‌حل‌های عمومی و کلی ذکر شده است، ولی در واقع ذوق و ابتکار هر شخص، بیش از هر قاعده‌ای می‌تواند وسیله‌ای برای حل این‌گونه معادله‌ها باشد. ویژگی اصلی این مقاله آن است که روش حل و یک جواب عمومی معادله‌های درجه nام با ضرایب گویا را به‌دست می‌دهد که در اصل به بررسی معادله‌های سیاله‌ی عمومی از نظر وجود جواب با ضرایب گویا خاتمه می‌دهد؛ زیرا معادله‌های سیاله از نظر تعداد می‌توانند دارای بی‌شمار جواب باشند و یا هیچ جوابی نداشته باشند. برای مثال، برای معادله‌ی سیاله‌ی $x + y = 1$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی، هیچ جوابی یافت نمی‌شود، ولی در مجموعه‌ی اعداد صحیح، بی‌شمار جواب به صورت $(x, y) = (\alpha, 1 - \alpha)$ وجود دارد.

معادله‌های سیاله‌ی درجه اول دو مجهولی

تاکنون مسئله‌های گوناگونی مطرح شده‌اند که در واقع به یک معادله‌ی دو مجهولی ساده می‌انجامند و پس از بررسی از نظر وجود جواب، به یک نتیجه‌ی قطعی منتهی شده‌اند. صورت عمومی معادله‌های سیاله درجه اول دو مجهولی را که از ابتدا مطرح بوده‌اند، با فرض وجود a، b و c پارامتر و این‌که x و y مجهول باشند، به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$ax + by = c \qquad (1)$$

درباره‌ی معادله‌ی ۱ باید متذکر این واقعیت شد که برای به دست آوردن جواب‌های گویای بسیاری از معادلات خاص از نوع ۱ در کارهای دیوفانتین اسکندرانی (۲۵۰ سال بعد از میلاد) روش قانون‌مندی پیدا شده است. در واقع، عبارت «معادله‌های دیوفانتی» به معادله‌هایی اطلاق می‌شود که جواب‌های آن‌ها اعدادی گویا باشند. اما در زمان حاضر،

معادله‌هایی که جواب‌های صحیح برای آن‌ها در نظر گرفته شود، به «معادله‌های دیوفانتی» مشهورند.

در این‌جا، جواب‌های صحیح معادله‌ی عمومی ۱ مورد نظر است. پیش از بحث روی وجود جواب‌های معادله‌ی ۱ و بیان قضیه‌ی مربوط به آن، چند مثال کاربردی ارائه می‌دهیم که به نوع خاصی از معادله‌ی ۱ منجر می‌شوند.

مثال ۱: علی با ۲۰۰۰ تومان، چند عدد مداد ۱۵۰ تومانی و چند عدد دفترچه‌ی ۳۵۰ تومانی می‌تواند خریداری کند؛ با شرط این‌که تعداد مدادها از ۴ عدد و تعداد دفترچه‌ها از ۳ عدد کم‌تر نباشد.

حل: با توجه به شرایط مسئله، با معادله‌ی دیوفانتی زیر روبه‌رو هستیم: $۱۵۰x + ۳۵۰y = ۲۰۰۰$ ؛ ($y \geq ۳$: تعداد دفترچه‌ها و $x \geq ۴$: تعداد مدادها) پس از تقسیم معادله بر ۵۰، به معادله‌ی ساده شده‌ی زیر می‌رسیم:

$$۳x + ۷y = ۴۰$$

معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$x = \frac{۴۰ - ۷y}{۳} = ۱۳ - ۲y + \frac{۱ - y}{۳}$$

با فرض $t = \frac{۱-y}{۳}$ خواهیم داشت:

$$x = ۱۱ + ۷t \quad , \quad y = ۱ - ۳t$$

$$t = -۱ : \; x = ۴ \; ; \; y = ۴$$

تنها جواب مسئله با شرایط مذکور، ۴ عدد مداد و ۴ عدد دفترچه است. ملاحظه می‌شود، همیشه تعداد جواب‌ها به شرایط اولیه‌ی مذکور در مسئله بستگی دارد. در مثال اخیر، شرایط اولیه‌ی تعداد مدادها و دفترچه‌ها، سبب منحصر به‌فرد بودن جواب، یعنی به تعداد برابر دفترچه و مداد شد:

$$x = y \; ; \; ۳x + ۷x = ۴۰ \; ; \; ۱۰x = ۴۰ \; ; \; x = ۴$$

(تعداد مداد یا دفترچه) $x = y = ۴$

حل و بحث معادله‌ی سیاله‌ی خطی $ax+by=c$ (۱)

از نظر تحلیلی، معادله‌ی درجه اول دو مجهولی ۱، در صفحه‌ی مختصات دکارتی، می‌تواند نمودار یک خط راست را مشخص کند که با رسم چنین خطوطی آشنا هستید. می‌دانیم، هر خط به معادله‌ی ۱ که در آن a و b هر دو با هم صفر نباشند، نشان دهنده‌ی بی‌نهایت نقطه است که با اختیار عددی برای x یا y، دیگری به دست می‌آید. برای مثال، اگر $x = ۰$ و $b \neq ۰$، مقدار y محاسبه می‌شود: $y = \frac{c}{b}$ و اگر $y = ۰$ و $a \neq ۰$، مقدار x محاسبه می‌شود: $x = \frac{c}{a}$.

در این‌جا، برای بحث روی معادله‌ی ۱، کافی است به دو پرسش زیر پاسخ دهیم:

۱. آیا معادله‌ی ۱ با فرض صحیح بودن a، b و c در مجموعه‌ی اعداد صحیح (Z) جواب صحیح دارد؟ به بیان دیگر، نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix} x_. \\ y_. \end{matrix}\right.$ را که $y_. \in Z$ و $x_.$، چگونه می‌توان تعیین کرد تا در معادله‌ی ۱ صدق کند؟

۲. در صورتی که یک جواب معادله‌ی ۱ مانند $A\left|\begin{matrix} x_. \\ y_. \end{matrix}\right.$ معلوم باشد، چگونه می‌توان همه‌ی جواب‌های صحیح معادله را تعیین کرد؟ به بیان دیگر، با فرض وجود یک جواب صحیح معادله‌ی ۱، چگونه جواب عمومی معادله‌ی ۱ را ارائه دهیم؟

بسیاری از مسئله‌های جبر به معادله‌هایی می‌انجامد که تعداد مجهول‌های مسئله، بیش از تعداد معادله‌های مربوط به آن است

پاسخ پرسش اول را در برهان قضیه‌ی زیر می‌توان یافت:

قضیه: معادله‌ی ۱ در مجموعه‌ی اعداد صحیح Z دارای جواب است، اگر و تنها اگر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a و b (ضریب‌های x و y). عدد c (ثابت معادله) را بشمارد. در واقع، اگر $(a,b)=d$، آن‌گاه باید داشته باشیم: $d|c$.

برهان این قضیه در کتاب ریاضیات گسسته پیش دانشگاهی آمده است.

نتیجه: اگر ضریب‌های مجهول‌های معادله‌ی سیاله نسبت به هم اول باشند، معادله همیشه دارای جواب‌های صحیح است.

در این‌جا، جواب عمومی معادله‌ی ۱، توسط یک جواب خصوصی معادله به این صورت تعیین می‌شود:

$$\alpha, \beta, a, b \in Z : x = \alpha + bt \quad , \quad y = \beta - at$$

مثال ۱: در صورتی که یک جواب خصوصی معادله‌ی زیر معلوم (۱۶ و ۹) باشد، جواب عمومی معادله را بیابید.

$$۲۴x + ۱۴y = ۴۴۰$$

حل: چون ۲=(۱۴ و ۲۴)، پس:

$$۱۲x + ۷y = ۲۲۰$$

هم‌چنین، با معلوم بودن یک جواب خصوصی معادله، به‌طور مستقیم می‌توان به جواب عمومی آن رسید:

$$(\alpha = ۹ \; , \; \beta = ۱۶)$$

$$x = ۹ + ۷t \; , \; y = ۱۶ - ۱۲t$$

جواب‌های طبیعی معادله، به‌ازای مقادیر ۱-، ۰ و ۱ به‌دست می‌آیند:

t	-۱	۰	۱
x	۲	۹	۱۶
y	۲۸	۱۶	۴

مثال۲: عدد۲۹ را به تفاضل دو عدد بنویسید که یکی از آن‌ها بر ۱۱ و دیگری بر ۱۴ بخش‌پذیر باشد.
حل: مسئله، معادل حل معادله‌ی زیر است:

$11x - 14y = 29$;

دو طرف معادله را بر ضریب مجهول کوچک‌تر تقسیم می‌کنیم:

$$x - y - \frac{3y}{11} = 2 + \frac{7}{11} \;;$$

$$x - y - 2 = \frac{3y+7}{11} = t \;;$$

$$3y + 7 = 11t \;;\; y = \frac{11t-7}{3} = 3t + \frac{2t}{3} - 2 - \frac{1}{3} \;;$$

$$y - 3t + 2 = \frac{2t-1}{3} = k \;;\; 2t - 1 = 3k \;;$$

$$t = \frac{3k+1}{2} = k + \frac{k+1}{2} \;;\; \frac{k+1}{2} = S \;;\; k = 2S - 1$$

پس از جایگزینی مقدارهای فوق و اختصار لازم، خواهیم داشت:

$x = 14S - 5$, $y = 11S - 6$

ساده کردن برخی از صورت‌های معادله‌ی ۱ ....

در برخی از صورت‌های معادله‌ی ۱ می‌توان روش‌های ساده‌تری را به‌کار برد تا با سرعت بیش‌تری به جواب برسیم:

۱. اگر ضریب یکی از مجهول‌ها و مقدار ثابت، مقسوم‌علیه مشترکی داشته باشند، می‌توانیم با انتخاب مجهول کمکی جدید به جای مجهول دوم، دو طرف معادله را به مقسوم‌علیه مشترک ساده کنیم.

مثال۱: جواب عمومی معادله‌ی زیر را بیابید:

$18x - 25y = 21$

حل: چون ۳=(۲۱و۱۸)، پس جمله‌ی ۲۵y نیز باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد. چون ۱=(۳و۲۵)، پس y باید مضربی از ۳ باشد: $y = 3t$

$18x - 75t = 21$

معادله را به ۳ ساده می‌کنیم:

$6x - 25t = 7$

در این جا، معادله‌ی ساده شده را حل می‌کنیم:

$$6x = 25t + 7 \;;\; x = \frac{25t+7}{6} = 4t + 1 + \frac{t+1}{6}$$

$$\frac{t+1}{6} = k \;;\; t = 6k - 1 \;;\; x = 25k - 3$$

$$y = 3(6k-1) = 18k - 3 \;;\; y = 18k - 3$$

۲. در ضمن محاسبه‌ی یکی از مجهول‌ها بر حسب مجهول دیگر، اگر بین جمله‌های صورت کسری که به‌دست می‌آید (پس از گرفتن مقدار صحیح آن) مقسوم‌علیه مشترکی وجود داشته باشد، معادله را ساده‌تر می‌توان حل کرد.

مثال۲: معادله‌ی سیاله‌ی زیر را حل کنید.

$24x + 17y = 41$

حل: ابتدا y را بر حسب x محاسبه می‌کنیم:

$$17y = 41 - 24x \;;\; y = 2 - x + \frac{7-7x}{17} \;;$$

$$y = 2 - x + 7\left(\frac{1-x}{17}\right) \;;\; \frac{1-x}{17} = t \;;\; x = 1 - 17t$$

$$y = 2 - (1 - 17t) + 7t = 1 + 24t \;;\; y = 1 + 24t$$

هم‌چنین:

۳. در ضمن تقسیم، ممکن است باقی‌مانده بزرگ‌تر از نصف مقسوم‌علیه باشد. در این صورت بهتر است از باقی‌مانده‌ی منفی استفاده شود.

مثال۳: معادله‌ی سیاله‌ی زیر را حل کنید.

$11x - 40y = 49$

حل: ابتدا x را بر حسب y حل می‌کنیم:

$$x = \frac{49+40y}{11} = 4 + 3y + \frac{5+7y}{11} \;;\; \frac{5+7y}{11} = t \;;$$

$$y = \frac{11t-5}{7} = t - 1 + \frac{4t+2}{7} \;;\; \frac{4t+2}{7} = k$$

$$t = \frac{7k-2}{4} \overset{**}{=} \frac{8k-k-2}{4} = 2k - \frac{k+2}{4} \;;$$

$$\frac{k+2}{4} = m; k = 4m - 2$$

پس از اختصار لازم:

$x = 40m - 21$, $y = 11m - 7$

حل معادله‌ی سیاله‌ی ۱ به کمک کسرهای مسلسل

به‌کمک کسرهای مسلسل می‌توان یکی از جواب‌های معادله‌ی سیاله‌ی ۱ را در صورت وجود به‌دست آورد. این مطلب را ضمن مثال نشان می‌دهیم.

مثال۱: معادله‌ی سیاله‌ی $30x + 86y = 16$ را به کمک کسرهای مسلسل حل کنید.
حل: ابتدا معادله را به ۲ ساده می‌کنیم:

$15x + 43y = 8$

کسر $\frac{43}{15}$ را در نظر می‌گیریم و آن را به کسر مسلسل تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{43}{15}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2}}}$$

در این‌جا، کسر متقارب ماقبل آخر را در نظر می‌گیریم. این کسر برابر $\frac{20}{7}$ است. آخرین کسر برابر با مقدار حقیقی کسر $\frac{43}{15}$ است و $\frac{20}{7}$ هم کسر متقارب ردیف فرد است. پس با توجه به قضیه‌های مربوط به کسرهای مسلسل می‌توان نوشت:

$$\frac{43}{15}-\frac{20}{7}=\frac{1}{15\times 7}$$

برابری عددی بالا را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$43\times 7-15\times 20=1$$

دو طرف برابری بالا را هشت برابر می‌کنیم و با توجه به معادله‌ی اصلی، برابری عددی زیر را می‌نویسیم:

$$15(-160)+43(56)=8$$

با مقایسه‌ی رابطه عددی اخیر و معادله‌ی اصلی، یک جواب معادله به دست می‌آید:

$$x=-160\ ,\ \ y=56$$

با وجود یک جواب خصوصی معادله، جواب عمومی معادله به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}x=-160+43t\\ y=56-15t\end{cases}$$

برای ساده‌تر شدن جواب‌ها، کافی است t را به $t+3$ تبدیل کنیم:

$$x=-160+43(t+3)=-31+43t$$
$$y=56-15(t+3)=11-15t$$

مثال ۲: معادله‌ی سیاله‌ی $21x-57y=15$ را به کمک کسرهای مسلسل حل کنید.

حل: معادله را به ۳ ساده می‌کنیم:

$$7x-19y=5$$

ابتدا $\frac{7}{19}$ را به کسر مسلسل تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{7}{19}=0+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}$$

کسر متقارب ماقبل آخر $\frac{3}{8}$ و چون کسر متقارب ردیف زوج است:

$$\frac{7}{19}-\frac{3}{8}=\frac{-1}{19\times 8}$$

این برابری را در $8\times 19\times 5$ ضرب می‌کنیم و با توجه به معادله‌ی اصلی به صورت زیر می‌نویسیم:

$$7(-40)-19(-15)=5$$

یک جواب خصوصی معادله، $x=-40$ ، $y=-15$ و جواب عمومی معادله چنین است:

$$\begin{cases}x=-40+19t\\ y=-15+7t\end{cases}$$

حل معادله‌ی سیاله‌ی ۱ به کمک هم‌نهشتی ....

یکی دیگر از کاربردهای هم‌نهشتی، حل معادله‌ی سیاله است. معادله‌ی سیاله‌ی ax+by=c را می‌توان به یکی از دو صورت زیر نوشت:

$$ax\overset{b}{\equiv}c \text{ و } by\overset{a}{\equiv}c$$

معادله‌های سیاله از نظر تعداد می‌توانند دارای بی‌شمار جواب باشند و یا هیچ جوابی نداشته باشند

بدیهی است که برای حل هر یک از معادله‌های بالا، شرط $(a,b)|c$ باید برقرار باشد. با فرض این‌که $(a,b)=1$ ، معادله‌ی سیاله قابل حل است. در صورتی که $d=(a,b)$ ، آن‌گاه کافی است $d|c$. برای مثال، معادله‌ی $6x+21y=1389$ با توجه به $(6,21)=3$ و $1389=3\times 463$ ، $3|1389$ ، دارای جواب است و آن را می‌توان به صورت ساده شده‌ی زیر نوشت:

$$2x+7y=463 \qquad (1)$$

برای حل معادله‌ی بالا به کمک هم‌نهشتی، می‌توان معادله را به یکی از دو صورت زیر نوشت:

$$2x\overset{7}{\equiv}463\ ;\ \ 7y\overset{2}{\equiv}463$$

با توجه به برابری‌های $463=7\times 66+1$ و $463=2\times 231+1$ معادله‌های بالا ساده می‌شوند:

$$2x\overset{7}{\equiv}7\times 66+1\overset{7}{\equiv}1\ ;\ \ 2x\overset{7}{\equiv}1\ ;\ \ x=7k+4$$
$$7y\overset{2}{\equiv}2\times 231+1\overset{2}{\equiv}1\ ;\ \ 7y\overset{2}{\equiv}1\ ;\ \ y=2s+1$$

با قرار دادن x (یا y) در معادله‌ی اصلی (۱) مجهول دیگری را بر حسب k (یا s) به‌دست می‌آوریم که این جواب عمومی معادله محسوب می‌شود. زیرا بر حسب پارامتر دل‌خواه k (یا s) است. $2(7k+4)+7y=463$; $y=65-2k$ بنابراین، جواب عمومی معادله به‌صورت زیر است:

$$(x=7k+4\ ,\ \ y=65-2k)\ ;\ (x=228-7s\ ,\ \ y=2s+1)$$

برای آزمایش جواب‌ها کافی است هر جفت جواب را داخل معادله‌ی اصلی (۱) قرار دهیم.

پی نوشت ....

hashemi- moosavi@ yahoo.com

* برای (x,y) جفت‌های طبیعی (۱۰۴ و ۷)، ... و (۴ و ۲۶۷) به‌دست می‌آیند.

**: از باقی‌مانده‌ی منفی استفاده شد.

مسائل برای حل

● میرشهرام صدر

ریاضی سال اول

۱. مقدار a را چنان بیابید که عدد گویای $\frac{a}{20}$ بین دو عدد $\frac{2}{5}$ و $0/3$ باشد.

۲. با شرط $x<-1$، حاصل $\sqrt{x^2}+\left||x|-1\right|$ را بیابید.

۳. ساده‌شده‌ی عبارت زیر را محاسبه کنید.

$$A=\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|+\left|\sqrt{3}-\sqrt{2}-1\right|$$

۴. جمله‌ی زیر را به زبان ریاضی بنویسید.
«اگر از ربع مربع عدد ۸، ۱۳ واحد کم کنیم، حاصل برابر با ثلث مجذور ۳ می‌شود.»

۵. فرض کنید $A=\{a,b,c,d\}$، $B=\{b,e,f,g\}$ و $C=\{a,b,f,h\}$، درستی رابطه‌ی زیر را تحقیق کنید.

$$(A\cup B)-(B\cup C)=(A-B)-C$$

۶. مجموعه‌ای را که با اعضا مشخص شده است، با نماد ریاضی و مجموعه‌ای را که با نماد ریاضی مشخص شده است، با اعضایش مشخص کنید.

$$A=\{6,11,18,\dots,83\}$$

$$B=\left\{\frac{(-1)^n}{n(n+1)}\,\middle|\,n\in N\right\}$$

۷. فرض کنید A یک مجموعه‌ی n عضوی است، چنان‌چه ۲ عضو از اعضای A حذف کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۲۴ تا کم می‌شود، تعداد اعضای A را مشخص کنید.

۸. معادله‌ی توانی زیر را حل کنید.

$$\frac{7^{3x}\times 49^{x-2}}{7^{x-1}\times 14^{x}}=\frac{1}{2^{x}}$$

۹. اگر $A=4^n\times 2^4\times 5^{n-2}$ و $B=2^{2n}\times 10^{2n-4}$ چه رابطه‌ای بین A و B برقرار است.

۱۰. حاصل عبارت زیر را محاسبه کنید.

$$\sqrt[3]{54-27a}-\sqrt[3]{8a-16}$$

۱۱. با توجه به برابری زیر، حاصل $a+b+c+d+e$ را پیدا کنید.

$$(x^2-2x+1)(x^2+x-2)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

۱۲. با استفاده از اتحادها، حاصل هر عبارت را بیابید.

الف) $(a^4+4a^2+4)(a^4-4a^2+4)$

ب) $(x^2+1-5x)(x^2+1+4x)$

۱۳. هر یک از عبارت‌های زیر را به حاصل ضرب عوامل اول تجزیه کنید.

الف) n^4+4n^2-32

ب) n^4-2n^2+49

ج) $a^2b+b^2c-ab^2-abc$

د) $4x^2+2x-9y^2-3y$

۱۴. IQ افراد مختلف از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$IQ=\frac{MA}{CA}\times 100$$

که در آن MA سن هوشی و CA سن تقویتی افراد است. در صورتی که $80\le IQ\le 140$ برای بچه‌های ۱۲ ساله حدود تغییرات سن هوشی را به دست آورید.

● محمدرضا هاشمی موسوی

ریاضیات سال دوم

۱. اگر $f(k,s)=3^k-4s$، آن‌گاه حاصل $f(f(2,2),f(3,4))$ را بیابید.

۲. دامنه و برد تابع با ضابطه‌ی $y=f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$ را بیابید.

۳. معادله‌ی $3m^3x=27x+m^2$ به ازای چه مقادیری از m دارای جواب است؟

۴. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $x^2=x+1$ باشند، مقدار عبارت $S=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+x_1^4x_2^4$ را بیابید.

۵. تعداد ریشه‌های حقیقی معادله‌ی زیر را تعیین کنید:

$$\frac{(x^4-x^2)(x^3+1)(x^2-3x+2)}{(x^3+2x^2)(x^2-1)^2}=0$$

۶. اندازه‌ی مجذور قطر مستطیلی برابر ۱۰۰ است. در صورتی که اندازه‌ی محیط این مستطیل برابر ۲۸ باشد، قدرمطلق تفاضل طول و عرض مستطیل را بیابید.

۷. اگر مجموع و حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی متوالی برابر باشد، مجموع مربعات آن سه عدد را بیابید.

۸. مجموعه‌ی جواب‌های مشترک دو نامعادله‌ی زیر را با شرط $-1<x<3$ تعیین کنید: $-9x^2-12x<3$ ، $4x^2-12x>0$

۹. از رابطه‌ی $\log_4(1-x^2)\ge\frac{-1}{2}$، حدود $|x|$ را تعیین کنید.

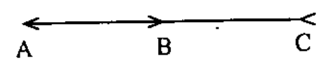
۱۰. در یک تصاعد حسابی (عددی) جمله‌ی پنجم ۲۳ و جمله‌ی هفتم ۳۸ است، جمله‌ی سوم آن را تعیین کنید.

۱۱. اگر در یک تصاعد هندسی، جمله‌ی چهارم ۲۴ و جمله‌ی هفتم ۱۹۲ باشد، جمله‌ی دوم آن را بیابید.

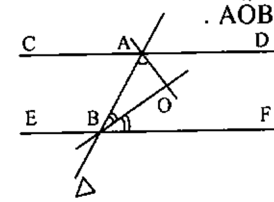
● محمدهاشم رستمی

هندسه‌ی ۱

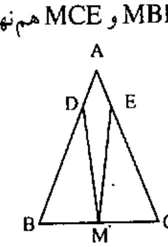
۱ . در شکل زیر اندازه‌های دو پاره‌خط AB و BC نسبت به هم چگونه‌اند؟



۲ . خط مورب Δ دو خط موازی CD و EF را به ترتیب در نقطه‌های A و B قطع کرده است. OA نیم‌ساز زاویه‌ی DAB و OB نیم‌ساز زاویه‌ی ABF است. ثابت کنید $A\hat{O}B=90^\circ$.

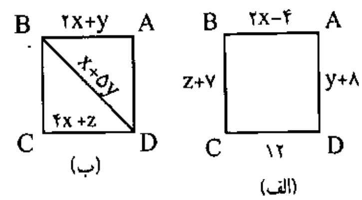


۳ . نقطه‌ی M وسط قاعده‌ی BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC، و BD=CE است (شکل). اگر از M به D و E وصل کنیم، ثابت کنید دو مثلث MBD و MCE هم‌نهشت‌اند.



۴ . تعداد قطرهای یک چندضلعی محدب ۱۴ است. مجموع زاویه‌های درونی این چندضلعی را بیابید.

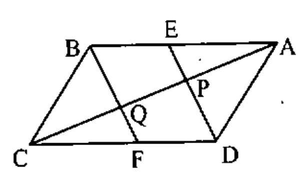
۵ . اندازه‌ی x، y و z را در هر یک از مدل‌های (الف) و (ب) تعیین کنید.



۶ . نقطه‌های E و F وسط ضلع‌های AB و CD از متوازی‌الاضلاع ABCD را به ترتیب به رأس‌های D و B وصل می‌کنیم تا قطر AC از متوازی‌الاضلاع را در P و Q قطع کنند. ثابت کنید:

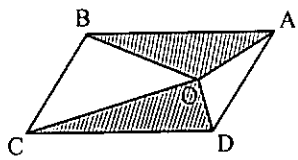
الف) BF موازی DE است.

ب) AP=PQ=QC



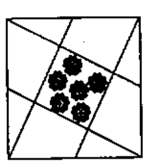
۷ . نقطه‌ی O واقع در درون متوازی‌الاضلاع ABCD را به رأس‌های A، B و C و D وصل می‌کنیم. ثابت کنید:

$$S_{OAD}+S_{OBC}=S_{OAB}+S_{OCD}$$



۸ . یک ضلع زاویه‌ی قائمه از مثلث قائم‌الزاویه‌ای، سه واحد بیش‌تر از ضلع دیگر زاویه‌ی قائمه است. اگر مساحت این مثلث ۲۳۰ واحد سطح باشد، طول ضلع‌های این مثلث را به دست آورید.

۹ . در یک باغچه به شکل مربع و به ضلع ۲۰ متر، از هر رأس به وسط ضلع مقابلش وصل کرده‌ایم.



قسمت وسط را درخت و بقیه‌ی باغچه را چمن کاشته‌ایم. مساحت قسمت چمن‌کاری شده چه مقدار است؟ در صورتی که قیمت هر مترمربع چمن ۳۰۰۰ تومان باشد، هزینه‌ی چمن‌کاری چه قدر است؟

۱۰ . الف) در جاهای خالی، حروف یا عددهای مناسب بنویسید.

$$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}\Rightarrow\frac{a-b+c}{\dots}=\frac{\dots}{2}$$

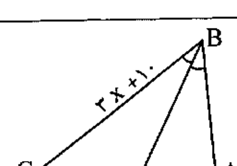
ب) واسطه‌ی هندسی بین دو عدد $\sqrt{2}$ و $3\sqrt{2}$ را تعیین کنید.

● محمدهاشم رستمی

هندسه‌ی ۲

۱ . سه ضلع مثلثی ۱۲، ۶ و ۸ سانتی‌مترند، اندازه‌ی پاره‌خط‌هایی را که نیم‌ساز بزرگ‌ترین زاویه‌ی مثلث روی ضلع روبه‌رویش ایجاد می‌کند، تعیین کنید.

۲ . در شکل داده شده، BD نیم‌ساز زاویه‌ی درونی B از مثلث ABC است. با توجه به شکل، اندازه‌ی x را تعیین کنید.



۳ . ثابت کنید در هر مثلث، اندازه‌ی ارتفاع وارد بر هر ضلع، از نصف مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر است.

۴ . سه پاره‌خط به طول‌های ۱۷، $x-1$، ۲۳ داده شده‌اند. حدود x را چنان بیابید که این سه پاره‌خط، ضلع‌های یک مثلث باشند.

۵ . مثلث ABC را با داده‌های زیر رسم کنید:

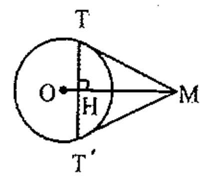
الف) AB=c، BC=a و AH=ha

ب) BC=a، $\hat{A}=\alpha$ و AH=ha

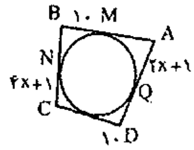
۶. دو نقطه‌ی A و B و خط L داده شده‌اند. مثلث متساوی‌الساقینی رسم کنید که رأسش روی L و قاعده‌اش پاره‌خط AB باشد.

۷. در دایره‌ی C به شعاع ۱۰ سانتی‌متر، دو وتر به طول‌های ۱۶ سانتی‌متر و ۱۲ سانتی‌متر رسم کرده‌ایم. نسبت فاصله‌های مرکز دایره از این دو وتر را تعیین کنید.

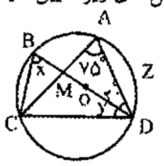
۸. از نقطه‌ی M که به فاصله‌ی ۲۵ از مرکز دایره‌ی (۱۵ و O) قرار دارد، دو مماس MT و MT' را بر این دایره رسم کرده‌ایم. اگر OM پاره‌خط TT' را در نقطه‌ی H قطع کند، اندازه‌ی پاره‌خط‌های MT، OH، TH و TT' را تعیین کنید.



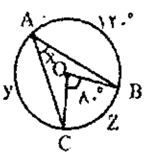
۹. اگر نصف محیط چهارضلعی محیطی ABCD برابر ۵۲ سانتی‌متر باشد، اندازه‌ی x را تعیین کنید (شکل).



۱۰. اندازه‌ی x، y و z را در هر یک از شکل‌های زیر تعیین کنید.



(الف)



(ب)

● هوشنگ شرقی

جبر و احتمال

۱. به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی ثابت کنید: $(n \in \mathbb{N})$

الف) $\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\dots+\frac{n}{2^n}=\frac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$

ب) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\dots+\frac{1}{3n+1}>1$

ج) $3^{2n-1}+4n+5=4r \quad (r\in \mathbb{Z})$

۲. به کمک استدلال استنتاجی ثابت کنید، هرگاه عدد طبیعی a در تقسیم بر ۵ باقی‌مانده‌ی ۳ داشته باشد، مکعب آن در تقسیم بر ۵، باقی‌مانده‌ی ۲ دارد.

۳. درستی نابرابری زیر را برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید:

$(a^2+1)(b^2+1)\ge 4ab$

۴. ثابت کنید، اگر a و b دو عدد حقیقی غیر صفر باشند و $a\neq b$، آن‌گاه $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\neq 2$.

۵. ثابت کنید، اگر بدانیم $\sqrt{2}$ عددی گنگ است، $\sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ نیز عددی گنگ است.

۶. در یک اداره، نوزده کارمند زن و مرد در بخش‌های رایانه، حسابداری و بازرگانی مشغول به کارند که مدرک‌های تحصیلی آن‌ها دیپلم، فوق‌دیپلم و لیسانس است. ثابت کنید حداقل دو نفر از این کارمندان هم‌جنس و هم مدرک هستند و در یک بخش کار می‌کنند.

۷. مجموعه‌ی زیر را با نماد ریاضی نمایش دهید.

$A=\{1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}\}$

۸. مجموعه‌ی $B=\left\{x \,\middle|\, x\in \mathbb{Z}, \frac{6}{x-4}<-1\right\}$ را با اعضای خود نمایش دهید.

● مجتبی رفیعی

حسابان

۱. دامنه‌ی تابع $f(x)=\frac{1}{|[x]|-1}$ را پیدا کنید.

۲. فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2+px+12=0$ باشند. p را چنان بیابید که $x_1-x_2=1$.

۳. فرض کنید x عددی حقیقی و تابع $f(x)=x^3-kx^2+2x$ فرد باشد. k را پیدا کنید.

۴. ثابت کنید تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^3+2x}{1+x^2}$ صعودی است.

۵. ثابت کنید:

$$1+\sin\alpha+\cos\alpha=2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$$

۶. حد توابع زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-2}{\sin(x-1)}$

ب) $\lim_{x\to 0^-}\frac{\tan x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}$

۷. مجانب‌های نمودار تابع زیر را پیدا کنید.

$f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{|x^2-1|}},\quad x\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$

۸. ثابت کنید تابع $f(x)=\begin{cases}x & x\in \mathbb{Q}\\ 1-x & x\notin \mathbb{Q}\end{cases}$ در نقطه‌ی $\frac{1}{2}$ پیوسته است.

حل تشریحی مسائل

ریاضی
سال اول

۱. $0/3 < \frac{a}{20} < \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{3}{10} < \frac{a}{20} < \frac{2}{5}$

$\Rightarrow \frac{6}{20} < \frac{a}{20} < \frac{8}{20} \Rightarrow a = 7$

۲. $x < -1 \Rightarrow |x| = -x$

$x < -1 \Rightarrow x + 1 < 0$

$\big|1 - |x|\big| + \sqrt{x^2} = \big|1 - (-x)\big| + |x| = |1 + x| + |x|$

$= -(1 + x) - x = -1 - 2x$

۳. $\sqrt{2} < \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{2} - \sqrt{3} < 0$

$\Rightarrow \left|\sqrt{2} - \sqrt{3}\right| = -(\sqrt{2} - \sqrt{3})$

$0 < \sqrt{3} - \sqrt{2} < 1 \Rightarrow -1 < \sqrt{3} - \sqrt{2} - 1 < 0$

$\Rightarrow \left|\sqrt{3} - \sqrt{2} - 1\right| = -(\sqrt{3} - \sqrt{2} - 1)$

$A = -(\sqrt{2} - \sqrt{3}) - (\sqrt{3} - \sqrt{2} - 1)$

$= -\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{2} + 1 = 1$

۴. ربع $a = \frac{1}{4}a$ ، مربع a = مجذور $a = a^2$

ثلث $a = \frac{1}{3}a$

$\frac{1}{4}(8)^2 - 13 = \frac{1}{3}(3)^2 \Rightarrow 16 - 13 = 3$

۵. $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

$B \cup C = \{a, b, e, f, g, h\}$

$(A \cup B) - (B \cup C) = \{\cancel{a}, \cancel{b}, c, d, \cancel{e}, \cancel{f}, \cancel{g}\}$

$= \{c, d\} \quad (1)$

$A - B = \{a, \cancel{b}, c, d\} = \{a, c, d\}$

$(A - B) - C = \{\cancel{a}, c, d\} = \{c, d\} \quad (2)$

با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) درستی حکم برقرار است.

۶.

$A = \{4+2, 9+2, 16+2, \dots, 81+2\}$

$= \{2^2+2, 3^2+2, 4^2+2, \dots, 9^2+2\}$

$\Rightarrow A = \{n^2 + 2 \mid n \in N, 2 \le n \le 9\}$

$B = \left\{\frac{(-1)^1}{1(1+1)}, \frac{(-1)^2}{2(2+1)}, \frac{(-1)^3}{3(3+1)}, \frac{(-1)^4}{4(4+1)}, \dots\right\}$

$\Rightarrow B = \left\{\frac{-1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \dots\right\}$

۷. می‌دانیم تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی برابر با 2^n و تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی (n-2) عضوی برابر است با $2^{(n-2)}$ است.

$2^n - 24 = 2^{(n-2)} \Rightarrow 2^n - 24 = \frac{2^n}{2^2}$

$\Rightarrow 4 \times 2^n - 96 = 2^n$

$\Rightarrow 3 \times 2^n = 96 \Rightarrow 2^n = 32$

$\Rightarrow 2^n = 2^5 \Rightarrow n = 5$

۸.

$\frac{7^{3x} \times (7^2)^{x-2}}{7^{x-1} \times (2 \times 7)^x} = \frac{1}{2^x}$

$\Rightarrow \frac{7^{3x} \times 7^{2x-4}}{7^{x-1} \times 2^x \times 7^x} = \frac{1}{2^x}$

$\Rightarrow \frac{7^{3x+2x-4}}{7^{x-1+x} \times 2^x} = \frac{1}{2^x} \Rightarrow \frac{7^{5x-4}}{7^{2x-1} \times 2^x} = \frac{1}{2x}$

با ضرب دوطرف تساوی اخیر در 2^x داریم:

$\Rightarrow \frac{7^{5x-4}}{7^{2x-1}} = 1 \Rightarrow 7^{5x-4} = 7^{2x-1} \Rightarrow 5x - 4 = 2x - 1$

$\Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$

۹.

$A = (2^2)^n \times 2^4 \times 5^{n-2} = 2^{2n+4} \times 5^{n-2}$

$B = 2^{2n} \times (5 \times 2)^{2n-4}$

$= 2^{2n} \times 5^{2n-4} \times 2^{2n-4} = 2^{4n-4} \times 5^{2n-4}$

$\frac{A}{B} = \frac{2^{2n+4} \times 5^{n-2}}{2^{4n-4} \times 5^{2n-4}}$

$= 2^{(2n+4)} \times 2^{-(4n-4)} \times 5^{(n-2)} \times 5^{-(2n-4)}$

$\Rightarrow \frac{A}{B} = 2^{-2n+8} \times 5^{-n+2}$

۱۰.

$\sqrt[3]{27(2-a)} - \sqrt[3]{8(a-2)}$

$= 3\sqrt[3]{2-a} - 2\sqrt[3]{-(2-a)}$

$= 3\sqrt[3]{2-a} + 2\sqrt[3]{2-a}$

$= 5\sqrt[3]{2-a}$

۱۱. $(x^2 - 2x + 1)(x^2 + x - 2)$

$= x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$

با مقایسه‌ی این تساوی و حکم داریم:

$a = 1, b = -1, c = -3, d = 5, e = -2$

۱۲.

(الف) $\left[(a^4+4) + 4a^2\right]\left[(a^4+4) - 4a^2\right] = (a^4+4)^2 - (4a^2)^2$

$= (a^4)^2 + 2(a^4)(4) + 4^2 - 16a^4$

$= a^8 + 8a^4 + 16 - 16a^4$

$= a^8 - 8a^4 + 16$

ب) $\left[(x^2+1)-5x\right]\left[(x^2+1)+4x\right]$

$= (x^2+1)^2 + (-5x+4x)(x^2+1) + (-5x)(4x)$

$= x^4 + 2x^2 + 1 - x^3 - x - 20x^2$

$= x^4 - x^3 - 18x^2 - x + 1$

۱۳.

الف) $(n^2)^2 + (8-4)n^2 + (8)(-4)$

$= (n^2+8)(n^2-4) = (n^2+8)(n-2)(n+2)$

ب) $n^4 + 14n^2 - 16n^2 + 49 = (n^4 + 14n^2 + 49) - 16n^2$

$= (n^2+7)^2 - 16n^2$

$= (n^2+7-4n)(n^2+7+4n)$

ج) $(a^2b - ab^2) + (b^2c - abc)$

$= ab(a-b) - bc(a-b)$

$= (a-b)(ab-bc)$

$= (a-b)\times b\times(a-c)$

د) $(4x^2 - 9y^2) + (2x - 3y)$

$= (2x-3y)(2x+3y) + (2x-3y)$

$= (2x-3y)(2x+3y+1)$

۱۴.

$80 \le \frac{MA}{12}\times 100 \le 140 \Rightarrow$

$9/6 \le MA \le 16/8$

ریاضیات سال دوم

۱. ابتدا $f(2,2)$ و $f(3,4)$ را تعیین می‌کنیم:

$f(k,s) = 3^k - 4s$

$f(3,4) = 3^3 - 4(4) = 27 - 16 = 11$

$f(2,2) = 3^2 - 4(2) = 1$

بنابراین:

$f(f(2,2), f(3,4)) = f(1,11)$

$= 3^1 - 4(11) = 3 - 44 = -41$

۲. دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $y = f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$ چنین است:

$\begin{cases} x-1 \ge 0 \\ x-1 \ne 0 \end{cases} : \begin{cases} x \ge 1 \\ x \ne 1 \end{cases} ;\ x > 1 ;\ D_f = (1,+\infty)$

تعیین برد می‌کنیم:

$y = f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} \overset{(x\in D_f)}{=\!=\!=} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{x-1}};$

$\sqrt{x-1} = \frac{1}{y}(y>0);\ x-1 = \frac{1}{y^2};\ x = \frac{1}{y^2} + 1 >;\ \frac{1}{y^2} > 0;$

$\begin{cases} y \ne 0 \\ y > 0 \end{cases} ;\ R_f = \mathbb{R}^+ = (0,+\infty)$

۳.

$3m^3x = 27x + m^2;\ 3m^3x - 27x = m^2;\ x = \frac{m^2}{3m^3 - 27}$

$3m^3 - 27 = 0;\ m^3 = 9;\ m = \sqrt[3]{9},\ D = \mathbb{R} - \left\{\sqrt[3]{9}\right\}$

معادله به ازای هر عدد حقیقی برای m به جز عدد $\sqrt[3]{9}$، دارای جواب است.

۴. برای معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - x - 1 = 0$:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 1 \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} = -1 \end{cases}$

$S = \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} + x_1^4x_2^4 = \frac{x_1^3 + x_2^3}{(x_1x_2)^3} + (x_1x_2)^4$

$= \frac{(x_1+x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1+x_2)}{(-1)^3} + 1$

$S = \frac{1 - 3(-1)(1)}{-1} + 1 = -4 + 1 = -3;\ \boxed{S = -3}$

۵. کسری برابر صفر است که صورت آن صفر باشد. هم‌چنین، ریشه‌های صورت یک معادله‌ی کسری، نباید مخرج را صفر کند:

$x^4 - x^2 = 0;\ x^2(x^2-1) = 0;\ x^2 = 0;\ x^2 - 1 = 0$

$x^3 + 1 = 0;\ x^3 = -1;\ x = -1,\ x^2 - 3x + 2 = 0;$

$(x-1)(x-2) = 0;\ x = 1;\ x = 2,\ (x^2-1)^2 = 0;$

$x^2 = 1;\ x = \pm 1,\ x^3 + 2x^2 = 0;\ x^2(x+2) = 0;$

$x^2 = 0;\ x = -2$

جواب معادله فقط یک ریشه است: $\boxed{x = 2}$

۶. اگر طول و عرض مستطیل را به ترتیب با x و y نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ 2(x+y) = 28 \end{cases};\ \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 100 \\ x + y = 14 \end{cases};\ \begin{cases} x + y = 14 \\ xy = 48 \end{cases}$

$z^2 - 14z + 48 = 0;\ (z-6)(z-8) = 0,\ \begin{cases} x = 8 \\ y = 6 \end{cases};$

$|x-y| = |8-6| = 2;\ |x-y| = 2$

۷. اگر اعداد متوالی را با $x-1$، x و $x+1$ نمایش دهیم:

$(x-1)x(x+1) = (x-1) + x + (x+1);$

$x(x^2-1) = 3x;\ x(x^2-1) - 3x = 0$

$;\ x(x^2 - 1 - 3) = 0;$

$x = 0;\ x^2 - 4 = 0;\ x = \pm 2;\ x = 2$

چون سه عدد طبیعی هستند، پس $x_1 = 1$، $x_2 = 2$ و $x_3 = 3$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$

۸. با شرط $-1 < x < 3$:

$\begin{cases} -9x^2 - 12x < 3;\ 9x^2 + 12x + 3 > 0 \\ 4x^2 - 12x > 0;\ 4x(x-3) > 0 \end{cases};\ \begin{cases} (3x+1)(x+1) > 0 \\ x(x-3) > 0 \end{cases}$

x		-1		$-\frac{1}{2}$		0		2	
$(x+1)(2x+1)$	+	●	−	●	+		+		+
$x(x-2)$	+		+		+	●	−	●	+
جواب					$-\frac{1}{2}<x<0$ جواب				

۹. با توجه به رابطه‌ی $\log_b^a = \dfrac{\log a}{\log b}$ می‌توان نوشت:

$$\log_4(1-x^2) = \frac{\log(1-x^2)}{\log^4};$$

$$\frac{\log(1-x^2)}{2\log 2} \geq \frac{-1}{2};\ \log(1-x^2) \geq -\log 2 (= \log\frac{1}{2});$$

$$\log(1-x^2) \geq \log\frac{1}{2};\ 1-x^2 \geq \frac{1}{2};\ x^2 \leq \frac{1}{2};\ |x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۰. جمله‌ی nام (عمومی) تصاعد حسابی (عددی) فوق به صورت زیر است:

$a_n = a_1 + (n-1)d$ (جمله‌ی عمومی تصاعد حسابی)

با توجه به جمله‌ی عمومی تصاعد:

$$\begin{cases} n=5:\ a_5 = a_1 + 4d = 23 \\ n=8:\ a_8 = a_1 + 7d = 38 \end{cases};\ a_8 - a_5 = 7d - 4d = 15;$$

$3d = 15$ $\boxed{d=5}$;

$a_1 = 23 - 4d = 23 - 4(5) = 3$ $\boxed{a_1 = 3}$

$a_3 = 3 + (3-1)(5) = 13;$ $\boxed{a_3 = 13}$

۱۱. جمله‌ی عمومی تصاعد هندسی فوق به صورت زیر است:

$a_n = a_1 r^{n-1}$ (جمله‌ی عمومی تصاعد هندسی)

با توجه به جمله‌ی عمومی تصاعد:

$$\begin{cases} n=4:\ a_4 = a_1 r^3 = 24 \\ n=7:\ a_7 = a_1 r^6 = 192 \end{cases};\ \frac{a_7}{a_4} = \frac{r^6}{r^3} = \frac{192}{24};$$

$r^3 = 8;$ $\boxed{r=2}$, $a_1 r^3 = 24;\ a_1 = \frac{24}{r^3} = \frac{24}{8} = 3;$ $\boxed{a_1 = 3}$

$a_2 = 3 \times 2^{2-1} = 3 \times 2 = 6$

$\boxed{a_2 = 6}$ (جمله‌ی دوم تصاعد)

هندسه‌ی (۱)

۱. به نظر می‌رسد که $AB < BC$ است. اما درواقع چنین نیست، بلکه $AB = BC$ است و این موضوع، خطای مشاهده را نشان می‌دهد.

۲. بنا به داده‌های مسئله داریم:

$$\begin{cases} CD \parallel EF \\ \text{و} \\ AB \text{ قاطع} \end{cases} \Rightarrow D\hat{A}B + A\hat{B}F = 180^\circ (1)$$

$$\Rightarrow \frac{D\hat{A}B}{2} + \frac{A\hat{B}F}{2} = 90^\circ$$

اما AO نیم‌ساز زاویه‌ی DAB و OB نیم‌ساز زاویه‌ی ABF است. یعنی:

$$\frac{D\hat{A}B}{2} = O\hat{A}B, \frac{A\hat{B}F}{2} = O\hat{B}A \quad (2)$$

پس از رابطه‌های ۱ و ۲ خواهیم داشت:

$$O\hat{A}B + O\hat{B}A = 90^\circ \quad (3)$$

اما در مثلث OAB داریم:

$$A\hat{O}B + O\hat{A}B + O\hat{B}A = 180^\circ \quad (4)$$

از رابطه‌های ۳ و ۴ نتیجه می‌شود:

$$A\hat{O}B + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow A\hat{O}B = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

۳. دو مثلث MBD و MCE به حالت (ض‌زض) هم‌نهشت‌اند، زیرا به دلیل متساوی‌الساقین بودن مثلث ABC، $\hat{B} = \hat{C}$ است. و چون M وسط ضلع BC است، پس $MB = MC$. از طرف دیگر، بنا به فرض مسئله $BD = CE$ است. بنابراین، دو مثلث MBD و MCE هم‌نهشت‌اند.

۴. داریم:

$$\frac{n(n-3)}{2} = 14 \Rightarrow n(n-3) = 28 \Rightarrow n^2 - 3n - 28 = 0$$

$$\Rightarrow (n-7)(n+4) = 0 \Rightarrow n-7=0 \Rightarrow n=7,\ n+4=0$$

$$\Rightarrow n = -4 < 0$$

اما مجموع زاویه‌های درونی هر n ضلعی محدب مساوی $(2n-4)$ قائمه یا $(n-2)\times 180^\circ$ است. پس برای ۷ ضلعی محدب داریم:

$(7-2)\times 180^\circ = 900^\circ$ = مجموع زاویه‌های درونی

۵. الف) ضلع‌های مربع با هم مساوی‌اند. پس داریم:

$$y + 8 = 2x + 4 = z + 7 = 12 \Rightarrow y = 4,\ x = 4,\ z = 5$$

ب) هر قطر مربع، نیم‌ساز زاویه‌های آن است و هر زاویه‌ی مربع نیز 90° است. پس داریم:

$4x + z = 90^\circ$ (1)، $2x + y = 45^\circ$ (2) و $x + 5y = 45^\circ$ (3)

از حل دستگاه سه معادله‌ی سه‌مجهولی تشکیل شده از رابطه‌های ۱، ۲ و ۳ خواهیم داشت:

$$x = 20^\circ,\ y = 5^\circ,\ z = 10^\circ$$

۶. الف) چهارضلعی BEDF متوازی‌الاضلاع است. زیرا ثابت می‌کنیم که دو ضلع روبه‌روی آن یعنی BE و DF موازی و مساوی‌اند. چون چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است، پس $AB \parallel CD$ و $AB = CD$ است.

درنتیجه $BE \parallel DF$ است. از طرف دیگر:

$$BE = \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2} = FD \Rightarrow BE = DF$$

از متوازی‌الاضلاع بودن BEDF نتیجه می‌شود که BF موازی DE است.

نکته: این فرض مسئله را به روش‌های دیگری نیز می‌توان حل کرد. از آن جمله می‌توانیم ثابت کنیم که زاویه‌های روبه‌روی چهارضلعی BEDF دوبه‌دو مساوی‌اند و یا می‌توانیم ثابت کنیم که $B\hat{F}C = E\hat{D}F$ است.

ب) دو مثلث APE و CFQ به حالت «زض‌ز» هم‌نهشت‌اند، زیرا:

$AE = CF$ و $Q\hat{C}F = P\hat{A}E$ و $C\hat{F}Q = A\hat{E}P$

درنتیجه $AP = CQ$ (1) است.

اما در مثلث CDP از نقطه‌ی F وسط CD خطی موازی DP رسم شده است. پس این خط از وسط ضلع دیگر، یعنی از وسط CP می‌گذرد. یعنی $PQ = CQ$ (2) است. از رابطه‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌شود:

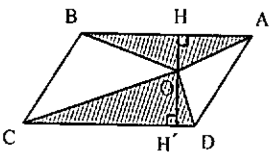
$AP = PQ = QC$.

نکته: این مسئله، در کتاب کار هندسه‌ی ۱ از انتشارات مدرسه، به روش دیگری حل شده است.

۷. کافی است ثابت کنیم که:

$$S_{OAD} + S_{OBC} = S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

زیرا متوازی‌الاضلاع ABCD به این چهار مثلث افراز شده است. برای اثبات، از O خطی عمود بر دو ضلع موازی AB و CD از متوازی‌الاضلاع رسم می‌کنیم تا AB را در H و



CD را در H' قطع کند. می‌دانیم که HH' ارتفاع متوازی‌الاضلاع است. بنابراین داریم:

$$S_{ABCD} = AB \times HH' \qquad (1)$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} OH.AB \qquad (2)$$

$$S_{OCD} = \frac{1}{2} OH'.CD = \frac{1}{2} OH'.AB \quad (3)$$

و

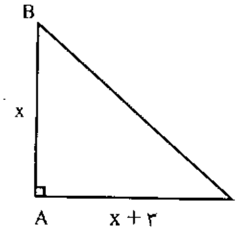
$$S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{1}{2} AB(OH + OH')$$

$$= \frac{1}{2} AB.HH' \qquad (4)$$

$$(1),\ (4) \Rightarrow S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

و حکم مسئله ثابت شد.

۸. ضلع کوچک‌تر زاویه‌ی قائمه از مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC را x فرض می‌کنیم. در این صورت، بنابه فرض، ضلع بزرگ‌تر زاویه‌ی قائمه $x + 3$ خواهد بود. از آن‌جا داریم:



$$\text{مثلث } S = \frac{1}{2} AB.AC \Rightarrow 230 = \frac{1}{2} \times x(x+3)$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x - 460 = 0$$

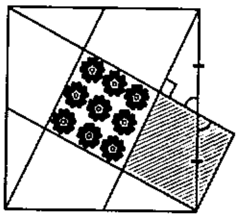
$$\Rightarrow (x+23)(x-20) = 0$$

$\Rightarrow x = -23 < 0,\ \ x = 20$ ضلع کوچک‌تر زاویه‌ی قائمه

$\Rightarrow x+3 = 20+3 = 23$ ضلع بزرگ‌تر زاویه‌ی قائمه

$\Rightarrow BC = \sqrt{20^2 + 23^2} = \sqrt{929}$ اندازه‌ی وتر

۹. چهار ذوزنقه با هم و چهار مثلث با یکدیگر هم‌نهشت‌اند و اگر یک ذوزنقه و یک مثلث را کنار هم قرار دهیم، یک مربع حاصل می‌شود. یعنی مجموع مساحت هر ذوزنقه و هر مثلث، مساوی مساحت مربع ایجاد شده برای درخت‌کاری است. بنابراین، مربع بزرگ به پنج مربع کوچک و مساوی تقسیم شده است. یعنی مساحت هر مربع کوچک، با یک‌پنجم مساحت



مربع بزرگ مساوی است. پس مساحت قسمت درخت‌کاری شده مساوی $\frac{1}{5} \times 20^2 = \frac{1}{5} \times 400 = 80$ است. مساحت قسمت چمن‌کاری شده نیز مساوی $320 = 80 - 400$ است. از آن‌جا، هزینه‌ی چمن‌کاری برابر است با:

$320 \times 3000 = 960000$ تومان

۱۰. الف) داریم:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{-b}{-3} = \frac{c}{4} \Rightarrow \frac{a-b+c}{2-3+4} = \frac{a}{2}$$

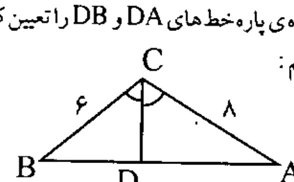
$$\Rightarrow \frac{a-b+c}{3} = \frac{a}{2}$$

ب) واسطه‌ی هندسی بین $\sqrt{2}$ و $3\sqrt{2}$ را x می‌نامیم. داریم:

$$x^2 = 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 6 \Rightarrow x = \sqrt{6}$$

هندسه‌ی (۲)

۱. ضلع‌های مثلث را $AB = 12$، $AC = 8$ و $BC = 6$ می‌گیریم. بزرگ‌ترین زاویه‌ی مثلث، زاویه‌ای است که روبه‌روی بزرگ‌ترین ضلع مثلث، یعنی در این شکل، زاویه‌ی $\hat{C}$ است. بنابراین، نیم‌ساز این زاویه را رسم می‌کنیم و CD می‌نامیم. می‌خواهیم اندازه‌ی پاره‌خط‌های DA و DB را تعیین کنیم. داریم:



$$\frac{DA}{DB} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{DA}{DB} = \frac{8}{6} \Rightarrow \frac{DA}{DA+DB} = \frac{8}{6+8} \Rightarrow \frac{DA}{AB} = \frac{8}{14}$$

$$\Rightarrow \frac{DA}{12} = \frac{8}{14} \Rightarrow DA = \frac{12 \times 8}{14} = \frac{48}{7} \Rightarrow DB = AB - DA$$

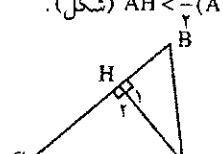
$$\Rightarrow DB = 12 - \frac{48}{7} = \frac{36}{7}$$

۲. بنا به ویژگی نیم‌ساز زاویه‌های درونی مثلث داریم:

$$\frac{DC}{DA} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{2x+4}{15} = \frac{3x+10}{25} \Rightarrow 50x + 100 = 45x + 150$$

$$\Rightarrow 5x = 50 \Rightarrow x = 10$$

۳. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و یکی از ارتفاع‌های این مثلث، مثلاً ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که $AH < \frac{1}{2}(AB + AC)$ (شکل).



در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی AHB و AHC $(\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90°)$ داریم:

$$AH < AB \qquad (1)$$

$$AH < AC \qquad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2AH < AB + AC \Rightarrow$$

$$AH < \frac{1}{2}(AB + AC)$$

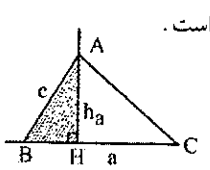
و حکم ثابت است.

۴. بنا به نامساوی مثلثی باید داشته باشیم:

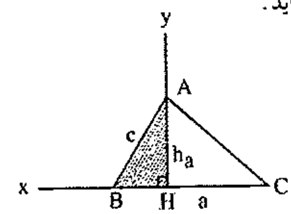
$$|23 - 17| < x - 1 < 23 + 17 \Rightarrow$$

$$6 < x - 1 < 40 \Rightarrow 7 < x < 41$$

۵. الف) فرض می‌کنیم مسئله حل شده و مثلث ABC جواب آن است. ارتفاع AH از این مثلث را رسم می‌کنیم. چون $AB = c$، $AH = h_a$ و $\hat{H} = 90°$ است، پس مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABH به حالت وتر و یک ضلع قابل رسم است.

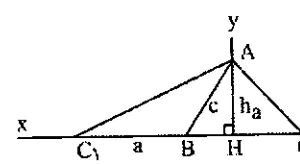


از طرف دیگر، طول پاره‌خط $BC = a$ نیز مشخص است. بنابراین، برای رسم مثلث ABC، نخست مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABH را با معلوم بودن وتر $AB = c$ و ضلع $AH = h_a$ رسم می‌کنیم (زاویه‌ی $x\hat{H}y = 90°$ را رسم می‌کنیم. روی Hy پاره‌خط $HA = h_a$ را جدا می‌کنیم تا رأس A به‌دست آید.

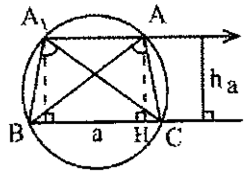


به مرکز A و به شعاع C کمانی رسم می‌کنیم تا Hx را در نقطه‌ی B قطع کند). اکنون $BC = a$ را روی خط Hx مشخص می‌کنیم تا رأس C به‌دست آید. از C به A وصل می‌کنیم. مثلث ABC به دست می‌آید.

نکته: پاره‌خط $BC = a$ را در دو طرف رأس B روی خط BH می‌توان جدا کرد که دو جواب مسئله، یکی مثلث ABC با زاویه‌های حاده و دیگری مثلث ABC_1 با زاویه‌ی منفرجه‌ی $A\hat{B}C$ است. اگر مسئله شرطی برای نوع مثلث قرار نداده باشد، هر دو جواب قابل قبول هستند.

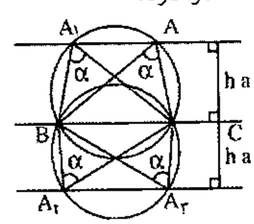


ب) مسئله را حل شده و مثلث ABC با معلومات $BC = a$، $\hat{A} = \alpha$ و $AH = h_a$ را جواب مسئله می‌گیریم. چون $C\hat{A}B = \alpha$ معلوم و پاره‌خط BC، $BC = a$ نیز معلوم است، پس یک مکان هندسی رأس A کمان درخور زاویه‌ی $\hat{A} = \alpha$ روبه‌روی پاره‌خط معلوم $BC = a$ است. از طرف دیگر، چون $AH = h_a$ مقدار معلومی است، پس یک مکان هندسی دیگر رأس A، دو خط موازی BC و به فاصله‌ی $AH = h_a$ از آن هستند. پس برای رسم مثلث ABC، نخست پاره‌خط $BC = a$ را رسم می‌کنیم. آن‌گاه کمان درخور زاویه‌ی $\hat{A} = \alpha$ روبه‌روی این پاره‌خط را رسم می‌کنیم.



سپس خطی موازی BC و به فاصله‌ی $AH = h_a$ از آن را که در طرف کمان درخور واقع است، رسم می‌کنیم. نقطه‌ی برخورد این خط و کمان درخور رأس A از مثلث ABC است. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC رسم می‌شود.

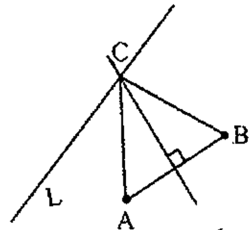
نکته‌ی ۱. با رسم کمان درخور زاویه‌ی $\hat{A} = \alpha$ در دو طرف پاره‌خط BC، و رسم دو خط موازی BC و به فاصله‌ی $AH = h_a$ از BC، چهار مثلث جواب مسئله به‌دست می‌آید (ABC، A_1BC، A_2BC و A_3BC) که هم‌نهشت هستند. پس مسئله درواقع یک جواب متمایز ABC را دارد.



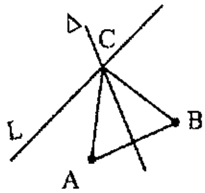
نکته‌ی ۲. شرط جواب مسئله آن است که خطی که به موازات BC و به فاصله‌ی $AH = h_a$ از BC رسم می‌شود، کمان درخور زاویه‌ی $\hat{A} = \alpha$ روبه‌رو به پاره‌خط $BC = a$ را قطع کند. اگر این خط، کمان درخور را در دو نقطه‌ی A و A_1 قطع کند، دو مثلث هم‌نهشت ABC و A_1BC جواب مسئله‌اند و اگر این خط مماس بر کمان درخور باشد، نقطه‌ی تماس A رأس مثلث متساوی‌الساقین ABC جواب مسئله است. اگر این خط مکان هندسی، کمان درخور را قطع نکند، مسئله جواب ندارد.

۶. مسئله را حل شده و مثلث متساوی‌الساقین $ABC(CA = CB)$ را جواب مسئله فرض می‌کنیم. چون $CA = CB$ است، پس رأس C روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد. از طرف دیگر، رأس C روی خط L است. پس این نقطه، محل برخورد عمودمنصف پاره‌خط AB با خط L است.

بنابراین، برای حل مسئله، از A به B وصل و عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. آن را Δ می‌نامیم. نقطه‌ی برخورد Δ و L، رأس C از مثلث متساوی‌الساقین $ABC(CA = CB)$ جواب مسئله است.

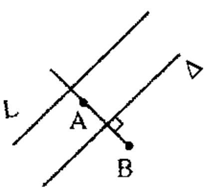


بحث. اگر عمودمنصف پاره‌خط AB یعنی خط Δ، خط L را تنها در یک نقطه مانند C قطع کند، مسئله تنها یک جواب دارد (شکل الف).



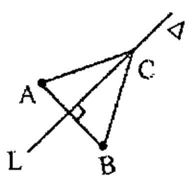
الف

۲. اگر خط Δ موازی خط L باشد، مسئله جواب ندارد و این در صورتی است که AB بر L عمود باشد (شکل ب).



ب

۳. اگر خط Δ بر خط L منطبق شود، مسئله بی‌شمار جواب دارد، زیرا از هر نقطه‌ی L به A و B وصل کنیم. مثلث ABC جواب مسئله است (شکل پ).

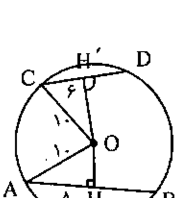


پ

۷. فرض می‌کنیم وترها $AB = 16Cm$ و $CD = 12Cm$ باشند. از نقطه‌ی O مرکز دایره، عمودهای OH و OH' را به‌ترتیب بر AB و CD رسم و از O به A و C نیز وصل می‌کنیم. با توجه به این‌که قطر عمود بر هر وتر عمود منصف آن وتر است، پس

$$AH = \frac{AB}{2} = \frac{16}{2} = 8Cm$$

$$CH' = \frac{CD}{2} = \frac{12}{2} = 6Cm$$

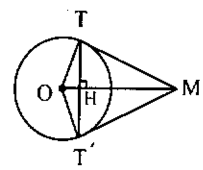


از آن‌جا با توجه به این که $OA = OC = 10$ است، در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی AOH و COH' $(\hat{H}=\hat{H}'=90^\circ)$ داریم:

$$OH=\sqrt{OA^2-AH^2}=\sqrt{10^2-8^2}=\sqrt{36}=6cm$$

$$OH'=\sqrt{OC^2-CH'^2}=\sqrt{10^2-6^2}=\sqrt{64}=8cm$$

$$\Rightarrow \frac{OH}{OH'}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$



۸. از O به T و T' وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OMT $(\hat{T}=90^\circ)$ داریم:

$$OT^2+MT^2=OM^2\Rightarrow 225+MT^2=625$$

$$\Rightarrow MT^2=400\Rightarrow MT=20$$

$$OT^2=OH.OM\Rightarrow 225=OH.25\Rightarrow OH=9$$

$$O\overset{\triangle}{T}H:\ OH^2+TH^2=OT^2\Rightarrow 81+TH^2=225\Rightarrow TH=12$$

$$TT'=2TH=2\times 12=24$$

۹. می‌دانیم که مماس‌های رسم شده از یک نقطه بر دایره، با هم مساوی‌اند. پس داریم:

$$AM=AQ=2x+1,\quad BN=BM=10,$$

$$CN=CP=4x+1,\quad DP=DQ=10$$

$\Rightarrow$ محیط چهار ضلعی $=2(AQ+BM+CN+DP)$

$$\Rightarrow 2\times 52=2(2x+1+10+4x+1+10)\Rightarrow 6x+22=52$$

$$\Rightarrow 6x=30\Rightarrow x=5$$

۱۰. داریم:

الف) $x=\hat{A}=70^\circ,\ \widehat{CD}=140^\circ,\ \widehat{BC}+\widehat{CD}=180^\circ,$

$$\widehat{BC}+140^\circ=180^\circ\Rightarrow \widehat{BC}=40^\circ\Rightarrow y=\frac{\widehat{BC}}{2}=20^\circ$$

$$\hat{M}=180^\circ-(30^\circ+70^\circ)=80^\circ,\quad \hat{M}=\frac{\widehat{BC}+z}{2}$$

$$\Rightarrow 80^\circ=\frac{40^\circ+z}{2}\Rightarrow z=120^\circ$$

ب) $z=\widehat{BC}=B\hat{O}C=80^\circ,\ x=\frac{\widehat{BC}}{2}=\frac{80^\circ}{2}=40^\circ,$

$$y=360^\circ-(120^\circ+80^\circ)=160^\circ$$

جبر و احتمال

۱.

الف) $n=1:\ \frac{1}{2^1}=\frac{2^2-1-2}{2^1}\Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(فرض استقرا) $n=k:\ \frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\dots+\frac{k}{2^k}=\frac{2^{k+1}-k-2}{2^k}$

(حکم استقرا) $n=k+1:\ \underbrace{\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\dots+\frac{k}{2^k}}_{\frac{2^{k+1}-k-2}{2^k}}+\frac{k+1}{2^{k+1}}$

$$=\frac{2^{k+2}-(k+1)-2}{2^{k+1}}$$

$$\frac{2^{k+1}-k-2}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}}=\frac{2(2^{k+1}-k-2)+k+1}{2^{k+1}}$$

$$=\frac{2^{k+2}-2k-4+k+1}{2^{k+1}}=\frac{2^{k+2}-(k+1)-2}{2^{k+1}}$$

ب) $n=1:\ \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1\Rightarrow \frac{13}{12}>1$

فرض: $n=k:\ \frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\dots+\frac{1}{3k+1}>1$

حکم: $n=k+1:\ \frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\dots+\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}$

$$+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}>1$$

برای اثبات حکم، ابتدا عبارت $\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}$ را به دو طرف فرض اضافه می‌کنیم:

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\dots+\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}$$

$$+\frac{1}{3k+4}>1+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\frac{1}{k+4}+\dots+\frac{1}{3k+4}>1+\frac{1}{3k+2}$$

$$+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}$$

از مقایسه‌ی این حکم با حکم استقرا نتیجه می‌شود که برای اثبات حکم کافی است ثابت کنیم:

$$1+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}\geq 1$$

و یا این‌که:

$$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}\geq \frac{1}{k+1}-\frac{1}{3k+3}=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{3(k+1)}$$

$$=\frac{2}{3(k+1)}$$

و به کمک روش بازگشتی نتیجه می‌شود:

$$\frac{6k+6}{(3k+2)(3k+4)}\geq \frac{2}{3(k+1)}\Rightarrow \frac{6(k+1)}{9k^2+18k+8}\geq \frac{2}{3(k+1)}$$

$$\Rightarrow 9(k+1)^2\geq 9k^2+18k+8$$

$$\Rightarrow 9k^2+18k+9\geq 9k^2+18k+8\Rightarrow 9\geq 8$$

نامساوی آخر درست است و همه‌ی مراحل نیز بازگشت‌پذیرند. در نتیجه حکم استقرار ثابت می‌شود:

ج) $n=1:\ 3^1+4+5=12=4r\qquad (r=1)$

فرض: $n=k:\ 3^{2k-1}+4k+5=4r$

حکم: $n=k+1:\ 3^{2k+1}+4(k+1)+5=4r'$

دو طرف فرض را در ۹ ضرب می‌کنیم:

$$3^2(3^{2k-1}+4k+5)=36r\Rightarrow 3^{2k+1}+36k+45=36r$$

$$\Rightarrow 3^{2k+1}+4(k+1)+5=36r-32k-36$$
$$=4(\underbrace{9r-8k-9}_{r'})=4r'$$

۲.

$$a=5k+3\Rightarrow a^3=(5k+3)^3=125k^3+225k^2+135k+27$$
$$=5(\underbrace{25k^3+45k^2+27k+5}_{k'})+2=5k'+2$$

بنابراین a^3 در تقسیم بر ۵ باقی‌مانده‌ی ۲ دارد.

۳. $(a^2+1)(b^2+1)\geq 4ab \Leftrightarrow a^2b^2+a^2+b^2+1\geq 4ab$

$$\Leftrightarrow (a^2b^2-2ab+1)+(a^2+b^2-2ab)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow (ab-1)^2+(a-b)^2\geq 0$$

نابرابری آخر درست است، زیرا مربع‌های کامل نامنفی‌اند و مجموع آن‌ها نیز همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است. همه‌ی مراحل نیز برگشت‌پذیرند.

۴. برای اثبات از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ مخالف ۲ نباشد، بنابراین:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=2\Rightarrow \frac{a^2+b^2}{ab}=2\Rightarrow a^2+b^2=2ab\Rightarrow$$
$$a^2+b^2-2ab=0\Rightarrow (a-b)^2=0\Rightarrow a-b=0\Rightarrow a=b$$

این نتیجه با فرض مسئله $(a\neq b)$ مغایرت دارد.

۵. اثبات به کمک برهان خلف: فرض کنیم $\sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ عددی گویا باشد:

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\in Q\Rightarrow \sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{a}{b},\ a,b\in Z,\ b\neq 0,\ a\neq 0$$
$$\Rightarrow \sqrt{5}-\sqrt{2}=\frac{a^3}{b^3}\Rightarrow \sqrt{5}=\sqrt{2}+\frac{a^3}{b^3}\Rightarrow$$
$$5=\left(\sqrt{2}+\frac{a^3}{b^3}\right)^2=2+\frac{a^6}{b^6}+\frac{2\sqrt{2}a^3}{b^3}$$
$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{2}a^3}{b^3}=3-\frac{a^6}{b^6}=\frac{3b^6-a^6}{b^6}$$
$$\Rightarrow \sqrt{2}=\frac{3b^6-a^6}{2a^3b^3}=\frac{a'}{b'}$$
$$a',b'\in Z,\ b'\neq 0\Rightarrow \sqrt{2}\in Q$$

نتیجه‌ی آخر مخالف فرض گنگ بودن $\sqrt{2}$ است.

۶. کارمندان در دو جنس زن و مرد هستند و در سه بخش گوناگون کار می‌کنند و سه نوع مدرک تحصیلی دارند. بنابراین، طبق اصل ضرب $(18=3\times3\times2)$ هجده نوع کارمند (از نظر جنس و نوع کار و مدرک تحصیلی) وجود دارد. و وقتی نوزده کارمند داشته باشیم، طبق اصل لانه کبوتری، دو تای آن‌ها باید از یک نوع باشند. یعنی جنسیت و بخش کاری و مدرک تحصیلی یکسان دارند.

۷. معادله‌ی درجه دومی می‌نویسیم که ریشه‌های آن $1\pm\sqrt{3}$ باشند:

$$S=1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=2,\quad P=(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=1-3=-2$$
$$\Rightarrow x^2-Sx+p=0\Rightarrow x^2-2x-2=0$$
$$A=\left\{x\,\middle|\,x^2-2x-2=0\right\}$$

۸.

$$\frac{6}{x-4}+1<0\Rightarrow\frac{x+2}{x-4}<0\Rightarrow -2<x<4\Rightarrow$$
$$x=-1,0,1,2,3\Rightarrow\ B=\{-1,0,1,2,3\}$$

حسابان

۱.

$$|[x]|-1\neq 0\Rightarrow |[x]|\neq 1\Rightarrow \begin{cases}[x]=1\\ [x]=-1\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}1\leq x<2\\ -1\leq x<0\end{cases}\text{یا}$$
$$\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\left([-1,0)\cup[1,2)\right)$$

۲.

$$x_1x_2=\frac{c}{a}=12\ \text{و}\ x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-p$$

می‌دانیم: $(x_1+x_2)^2=(x_1-x_2)^2+4x_1x_2$

درنتیجه: $(-p)^2=1^2+(4\times12)=49\Rightarrow p=\pm7$

۳. می دانیم $1\in D_f$ و $f(-1)=-3-k$ و $f(1)=3-k$

چون f فرد است، پس: $f(1)=-f(-1)$.

$$3-k=-(-3-k)\Rightarrow \boxed{k=0}$$

۴. فرض کنیم: $x_1\leq x_2$، در این صورت:

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1^3+2x_1}{1+x_1^2}-\frac{x_2^3+2x_2}{1+x_2^2}$$
$$=\frac{(x_1^3+2x_1)(1+x_2^2)-(x_2^3+2x_2)(1+x_1^2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$$
$$=\frac{x_1^3+x_1^3x_2^2+2x_1+2x_1x_2^2-x_2^3-x_2^3x_1^2-2x_2-2x_2x_1^2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$$
$$=\frac{(x_1^3-x_2^3)+x_1^2x_2^2(x_1-x_2)+2(x_1-x_2)-2x_1x_2(x_1-x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$$
$$=\frac{(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+x_1^2x_2^2+2-2x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$$
$$=\frac{(x_1-x_2)(x_1^2x_2^2+x_1^2-x_1x_2+x_2^2+2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}\leq 0$$

توجه کنید که عبارت $(x_1x_2)^2-(x_1x_2)+2$ همواره مثبت است.
بنابراین تابع f صعودی است.

۵. می‌توانیم بنویسیم:

$$1+\sin\alpha+\cos\alpha=(1+\cos\alpha)+\sin\alpha$$
$$=2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$
$$=2\cos\frac{\alpha}{2}(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2})$$
$$=2\cos\frac{\alpha}{2}(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}))$$
$$=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\pi}{4}\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})$$
$$=2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})$$

۶. الف)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-2}{\sin(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-1)+(x^2-1)}{\sin(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1+x+1)}{\sin(x-1)}$$
$$=(\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{\sin(x-1)})(\lim_{x\to 1}(x^2+2x+2))$$
$$=1\times 5=5$$

ب)

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\tan x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\tan x}{\sqrt[3]{4\sin^4\frac{x}{2}}}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\tan x}{\sin\frac{x}{2}\sqrt[3]{4\sin\frac{x}{2}}}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos x\sqrt[3]{4\sin\frac{x}{2}}}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{2\cos\frac{x}{2}}{\cos x\sqrt[3]{4\sin\frac{x}{2}}}=-\infty$$

۷. با توجه به این‌که:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to -1}f(x)=+\infty$$

پس خط‌های $x=1$ و $x=-1$ مجانب‌های قائم نمودار f هستند.

اما:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{|x|\sqrt{\left|1-\frac{1}{x^2}\right|}}=+\infty$$

بنابراین، نمودار f مجانب افقی ندارد.

۸. می‌دانیم که:

$$0\le\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|\le\left|x-\frac{1}{2}\right|$$

چون:
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left|x-\frac{1}{2}\right|=0$$

بنابر قضیه‌ی فشردگی:
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|=0$$

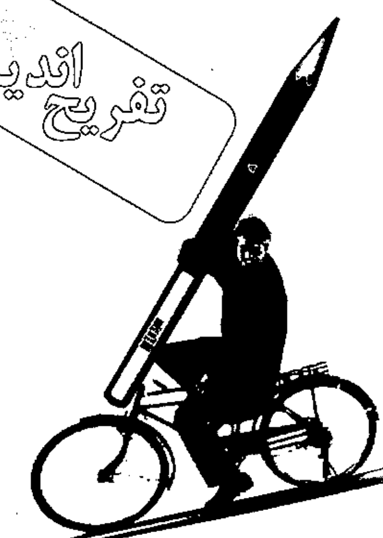
در نتیجه:
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}(f(x)-\frac{1}{2})=0$$

یعنی:
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=\frac{1}{2}=f(\frac{1}{2})$$

پس f در نقطه‌ی $\frac{1}{2}$ پیوسته است.

تفریح اندیشه

تقسیم زیرکانه



سه نفر به نام‌های A، B و C به سراغ زیرکی می‌آیند و از او می‌پرسند؛ از ریاضیات چه میدانی؟

او می‌گوید: در این هنر سرآمد روزگارم.

A چهار هزار تومان به زیرک می‌دهد که بین آن‌ها تقسیم کند.

او دو هزار تومان به B و دو هزار تومان به C می‌دهد و می‌گوید، آقای A باید صبر کند تا پول دیگری به دستم برسد و فعلاً برای او پولی ندارم.

A سخت عصبانی می‌شود و می‌گوید: این چه حسابی است؟

زیرک می‌گوید: از نظر من کاملاً صحیح است، چون مجموعه‌های $\{A,B,C\}$ دامنه و مجموعه‌ی $\{0,2\}$ برد تابع زیر است.

$$f(B)=f(C)=2 \quad و \quad f(A)=0$$

و این به درستی یک تابع است.

ابوالعباس فضل بن حاتم نیریزی

ریاضی‌دان مسلمان و منجم ایرانی (نیمه‌ی دوم سده‌ی سوم و اوایل سده‌ی چهارم)

اهل نیریز فارس و یکی از افاضل ریاضی‌دانان و منجمان دوره‌ی اسلامی و به قول **ابن ندیم**، در علم نجوم و به‌ویژه در علم هیئت انگشت‌نما بود. مترجمان لاتینی او را **اناریتیوس**[1] می‌نامیدند. وی در نیمه‌ی دوم سده‌ی سوم و احیاناً در اوایل سده‌ی چهارم فعالیت علمی داشت و معاصر با **المعتضد**، خلیفه‌ی عباسی[2] بود و برخی از تألیفات خود را به‌نام وی و یا وزرای وی نوشته است. مثلاً رساله‌ی «فی احداث الجو» را به نام المعتضد و کتاب «فی معرفة آلات یعرف بها ابعاد الاشیاء» را به نام یکی از وزرای او تألیف کرده است.

متأسفانه از زندگی نیریزی اطلاعی در دست نیست، جز آن‌چه جسته و گریخته در آثار ریاضی‌دانان دیگر درباره‌ی تألیفات وی دیده می‌شود. اما مسلم است که آثارش همواره مورد مراجعه و اعتماد ریاضی‌دانان و منجمان بزرگ بوده است. محققان اروپایی وفات نیریزی[3] را در حدود سال ۳۱۰ دانسته‌اند.[4]

بیرونی در چندین موضع از «قانون مسعودی»، «آثار الباقیه» و «افراد المقال فی امر الظلال»، از نیریزی نام برده و مسائل و مطالبی از وی نقل کرده و به آرای او استناد نموده است.

عمر خیام نیز در چند موضع از رساله‌ی «مصادرات» خود از نیریزی یاد کرده است[5] و **نصیرالدین طوسی** در کتاب «شکل القطاع»، استدلالی از قول نیریزی نقل کرده است.

کمال الدین فارسی، در کتاب «تنقیح المناظر» نوشته است که در زمان بعضی از خلفا (ظاهراً المعتضد)، قوس قزحی دیده شد که طبقه‌ی سیاهی در آن نمودار بود. این امر خلیفه و اطرافیان او را به وحشت انداخت. پس به ابوالعباس فضل بن حاتم نیریزی، شارح «مجسطی» رجوع کردند و او علت امر را بیان کرد.

سارتن نوشته است که نیریزی اصطلاح «ظل معکوس»[6] را که معادل با اصطلاح «تانژانت» است، به عنوان یک خط مثلثاتی مستقل به‌کار برده است (امّا پیش از وی، حبش حاسب نیز این اصطلاح را به‌کار برده بود). او رساله‌ی «اسطرلاب کروی» تألیف نیریزی را اثری استادانه و بهترین کتابی معرفی کرده است که مسلمانان درباره‌ی اسطرلاب نوشته‌اند.

تفسیری که نیریزی بر کتاب مجسطی **بطلمیوس** نوشته، بهترین تفسیرهای آن کتاب دانسته شده است، تا آن‌جا که گاهی نیریزی را به‌طور مطلق «شارح مجسطی» خوانده‌اند؛ با وجود آن‌که عده‌ای دیگر نیز بر مجسطی بطلمیوس شرح و تفسیر نوشته‌اند. وقتی بدون قید نام از «شارح مجسطی» سخن به‌میان می‌آید، معلوم است که مقصود نیریزی است.

شرحی که نیریزی بر کتاب اصول اقلیدس نوشته است نیز از مهم‌ترین و مشهورترین شرح‌های آن کتاب است که به زبان لاتینی ترجمه شده و مورد استفاده و توجه مورخان ریاضی است.

آثار ریاضی موجود نیریزی

۱. شرح کتاب اصول اقلیدس

این شرح را نیریزی بر ترجمه‌ی اصول اقلیدس توسط **حجاج بن یوسف بن مطر** نوشته است و از نظر تاریخ ریاضیات دوره‌ی اسلامی و یونانی حائز اهمیت است. زیرا در آن قسمت‌هایی از آثار ایرن (هرون) **اسکندرانی**[6] و **سنبلیقیوس**[7] و **اغانیس**[8] نقل شده است.

۲. رساله فی (بیان) المصادرة المشهوره لاقلیدس

یک نسخه از این رساله در کتاب‌خانه‌ی «مدرسه عالی شهید مطهری» (سپهسالار قبلی)، موجود است.

سوتر نوشته است که امکان دارد این رساله بخشی از کتاب شرح نیریزی بر اصول اقلیدس باشد.

زیرنویس ....

1. Anaritius

۲. از ۲۷۹ تا ۲۸۹ خلافت کرد.

۳. در بعضی نسخه‌های آثارش، نسبت وی را به غلط «تبریزی» نوشته‌اند.

۴. سوتر و به استناد قول او سارتن و بروگلمان.

۵. همایی: خیامی‌نامه، ج۱، ص۵۸.

6. umbraversa

۶. Heron of Alexandria ریاضی‌دان اسکندرانی که در حدود نیمه‌ی دوم سده‌ی اول میلادی می‌زیسته است.

۷. Simplicios فیلسوف یونانی از قرن ششم میلادی که شرحی بر مقاله‌ی اول اصول اقلیدس نوشته است.

منبع: زندگی‌نامه‌ی ریاضیدانان دوره‌ی اسلامی / ابوالقاسم قربانی / دفتر نشر دانشگاهی


دهه‌ی فجر مبارک باد