رشد

برهان ۴۲

برای دانش آموزان دوره‌ی متوسطه

سال سیزدهم، شماره‌ی چهارم

۱۳۸۳، بها: ۲۰۰۰ ریال

www.roshdmag.org

سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی

دفتر انتشارات کمک آموزشی

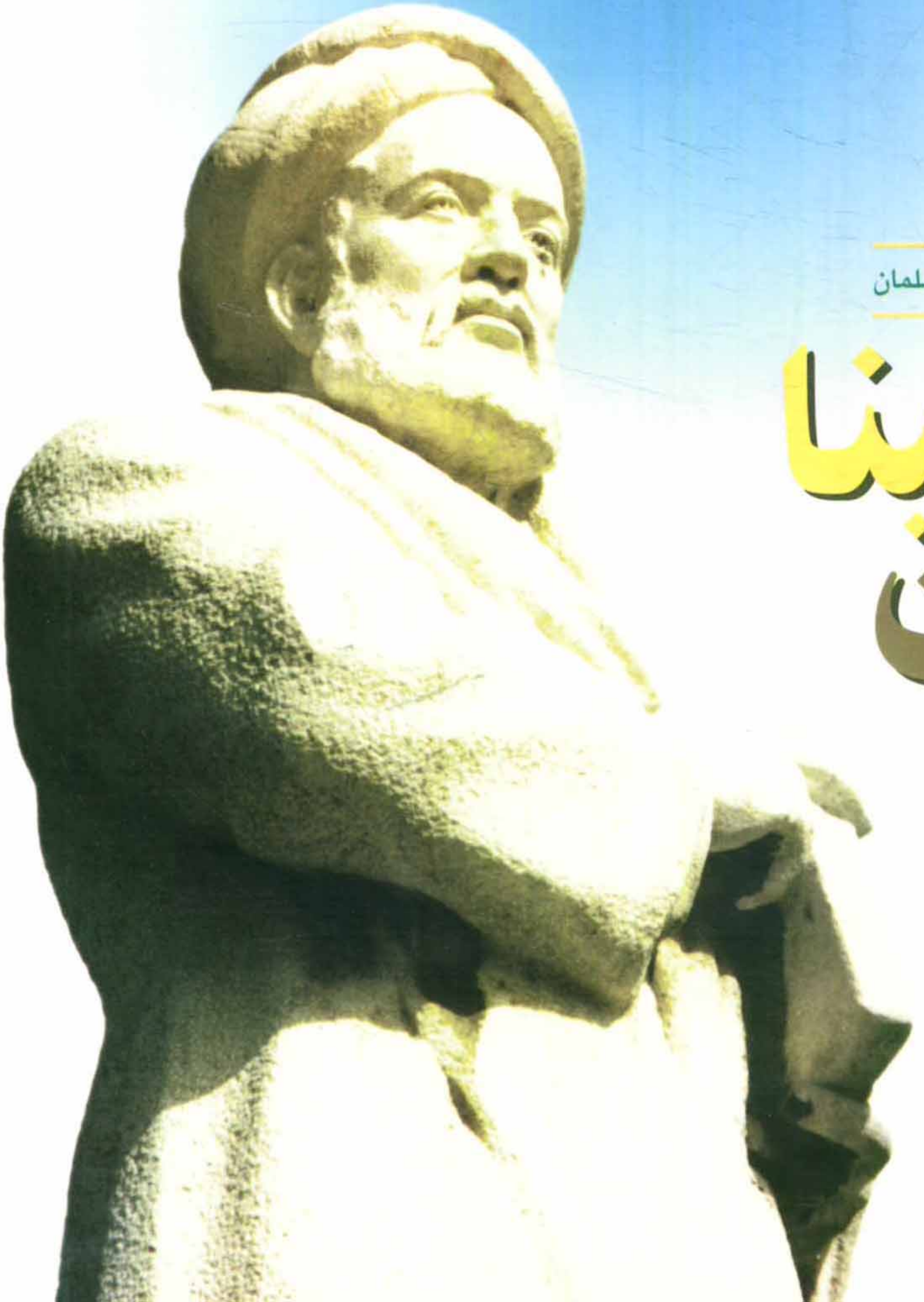
- تابع حسابی فی اویلر
- وارون ماتریس
- یک روش محاسبه
- غیاث الدین جمشید کاشانی
- تقریب ریشهٔ سوم یک عدد
- حل نامعادله های جبری به روش هندسی

ابوعلی حسین بن عبدالله بن حسن بن علی بن سینا،
ملقّب به شیخ الرئیس، فیلسوف، طبیب، ریاضیدان و منجّم، اهل بلخ و متولد بخارا، به سال
۳۷۰ هجری و متوفی در همدان به سال ۴۲۸. در بخارا منطق، طب و ریاضیات را فرا گرفت و در هفده
سالگی، نوح بن منصور سامانی را معالجه کرد و همین امر، موجب راه یافتن وی به کتابخانهٔ سلطنتی امیرسامانی
گردید که در آن جا از کتابهای کمیاب و گرانبهای موجود در آن عصر بهره ها برد.

زندگی پرفراز و نشیبی داشت؛ هم به وزارت رسید، هم به زندان افتاد، و سرانجام در شهر همدان به بیماری درگذشت.

دو ریاضیدان بزرگ، ابونصر عراق و ابوریحان بیرونی، با وی مرتبط بودند، و بنا به گفتهٔ شاگردش ابوعبید جوزجانی، در
بعضی از کتابهای ریاضی، مواردی اضافه کرده و در حساب، خواص جدیدی به دست آورده است.

آثار ریاضی وی عبارت است از: اَرثما طیقی یا حساب نظری، اصول هندسه، رساله در تحقیق زاویه، رساله در تحقیق مبادی
هندسه، و دانشنامهٔ علائی در هندسه و هیات و حساب.



مشاهیر ریاضی مسلمان

ابن سینا

آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ۴۲

❖ سال سیزدهم ،شمارهٔ چهارم ❖ ۱۳۸۳
❖ بها: ۲۰۰۰ ریال ❖ تیراژ: ۱۲۵۰۰ نسخه
❖ برای دانش آموزان دورهٔ متوسطه

www.roshdmag.org

سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد برهان،تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه های زیر دعوت به همکاری می کند:

✍ **نگارش مقاله های کمک درسی**(شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب های ریاضی متوسطه و پیش دانشگاهی) ✍ **طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن ها**(برای دانش آموزان)
✍ **طرح مسائل مسابقه ای به همراه حل آن ها**(برای دانش آموزان) ✍**طرح معماهای ریاضی** ✍ **نگارش یا ترجمهٔ مقاله های عمومی ریاضی** (مانند تاریخ ریاضیات، زندگی نامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

رشد برهان،هر سه ماه یک شماره منتشر می شود.

✍ مجلّه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافه مقاله ها آزاد است. ✍مقاله های وارده ،باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.
✍ مقاله های رسیده مسترد نمی شود. ✍ استفاده از مطالب مجلّه در کتاب ها یا مجله های دیگر با ذکر دقیق ماخذ بلامانع است.

نشانی دفتر مجلّه: صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله: ۹ ـ ۸۸۳۱۱۶۱ داخلی ۲۷۴ ـ ۳۷۰
تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۶۶۵۶ ـ ۷۷۳۱۱۱۰

یادداشت سردبیر

یکی از مهم‌ترین مقوله‌هایی که در آموزش ریاضی مدنظر است، ایجاد «تفکر ریاضی» در ذهن دانش‌آموز است. اگر ذهن فرد ساختاری منطقی و ریاضی پیدا کند، وی می‌تواند مفاهیم مختلف ریاضی، حتی مفاهیم پیچیدهٔ این علم را به راحتی فرا بگیرد. علاوه بر این، توانایی «مستقیم فکر کردن» و به عبارت دیگر «میان‌بُر فکر کردن» نیز یکی دیگر از دستاوردهای داشتن ذهن منطقی و ریاضی است.

میان‌بر فکر کردن یعنی این که شما به بهترین وجهی از اطلاعات پیشین خودتان در حل مسأله یا مسائل استفاده کنید و وقت خود را صرف بازگویی و بهتر بگوییم، پرگویی، دربارهٔ آنچه قبلاً می‌دانسته‌اید نکنید، بلکه همهٔ دانسته‌های خود را به عنوان داده‌های موجود، در حل مسأله به‌کار گیرید. با مثالی این مطلب را روشن می‌کنیم.

اگر شما مثلاً در سال‌های قبل مبحث «تشابه در مثلث» را خوانده باشید، می‌دانید هنگامی که دو زاویه مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند. حال اگر ـ باز هم برای مثال ـ به مسأله‌ای برخوردید که حل آن مستلزم دانستن قضایای تشابه است؛ آیا باز هم نیازی به اثبات قضیهٔ تشابه دو مثلث و سپس کاربرد آن در حل مسأله احساس می‌کنید و آیا اصولاً این کار لازم است؟ مسلماً نه. بنابراین، هرچه دانسته‌های ریاضی شما در درس ریاضی بیشتر شود، «راه‌های میان‌بر» شما برای حل مسائل مختلف بیشتر می‌شود.

ذکر یک مطلب که چند سال پیش در یکی از مجله‌های ریاضی خارجی منتشر شده بود، شاید به شما کمک کند به اهمیّت این گونه فکر کردن بیشتر پی ببرید: در یکی از دانشگاه‌ها برای ادامه تحصیل دانشجویان رشته ریاضی، مصاحبه‌ای توسط یک استاد ریاضی انجام شده بود، ۱۵ نفر در مصاحبه شرکت کرده بودند. از این ۱۵ نفر قرار بود دو سؤال پرسیده شود و اگر هریک از آنها به هر دو سؤال پاسخ مناسب می‌دادند، برای ادامه تحصیل (درمقطع بالاتر) پذیرفته می‌شدند. دو سؤال برای هر ۱۵ نفر ثابت بوده و افراد از پاسخ‌های یکدیگر بی‌اطلاع بودند.

سؤال اول: اگر بخواهیم آب یک کتری پر از آب را که در آشپزخانه، روی میز قرار دارد، جوش بیاوریم (شرایط انجام کار آماده است: کبریت و گاز و...) چه‌کار باید بکنیم؟ جواب شما چیست؟ آری، معجزه که نمی‌توان کرد باید کتری را روی گاز گذاشت و گاز را روشن کرد. آب به جوش می‌آید! هر ۱۵ نفر با کمی اختلاف در جزئیات همین جواب را داده بودند که البته درست بود. همگی خوشحال ولی با تعجب، از این سؤال آسان، جلسه را ترک کردند.

سؤال دوم: استاد ریاضی سؤال دوم را از نفر اول این گونه پرسید: دوباره در همان آشپزخانه هستیم و کتری پر از آب روی زمین است و می‌خواهیم آب آن را جوش بیاوریم، چه‌کار باید بکنیم؟ جواب شما چیست؟

باز هم معجزه‌ای در کار نیست! اما اگر پاسخ شما مثل مرحلهٔ قبل باشد، شما هم شبیه ۱۳ نفر از آن ۱۵ نفر جواب داده‌اید که البته ازنظر استاد ریاضی پاسخ مناسبی نیست! ولی دو نفر از آن ۱۵ نفر این‌گونه پاسخ دادند: استاد، کتری را روی میز می‌گذاریم و دیگر هیچ! در واقع این دو نفر مسأله را به حالت قبل برگرداندند. چون از حالت میز به روی گاز و روشن کردن گاز و جوش آمدن آب را قبلاً توضیح داده بودند. پس، در واقع حرف زیادی نزدند! این تفکر، یک تفکر ریاضی است که لازمهٔ ادامه تحصیل در رشتهٔ ریاضی است و برای آموزشگران ریاضی اهمیت دارد. شما نیز باید به این تفکر دست پیدا کنید و از آن در پیشرفت درس ریاضی خود بهره برده و بتوانید حتی در زندگی روزمره‌تان از آن استفاده کنید.

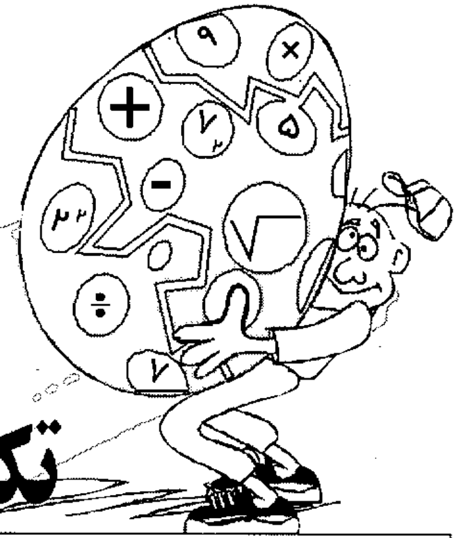
به‌نظر شما چه آثار دیگری از تفکر ریاضی می‌توان بر شمرد، برای ما بنویسید و ارسال کنید.

والسلام

◎ پرویز شهریاری

از تاریخ بیاموزیم

تکامل ریاضیات کاربردی و سنت نظری



در شمارهٔ قبل دربارهٔ تکامل ریاضیات کاربردی و موقعیت خاص الگوریتم در ریاضیات کاربردی که معرف اشتراک ساختارهای فعالیت عملی و فکری است، صحبت کردیم. اینک ادامهٔ مطلب را در پی می‌آوریم:

سازوکار پخش دانش در جریان آموزش، تا حدی موجب عمومی شدن آموزش و انتقال سنت نظری شد. سنت نظری در آموزش با تمایل به سمت بخش نظری زنجیرهٔ حرکت دانش، پا گرفت و به صورت روشن‌تری در آموزش‌های خصوصی وارد شد. **علی قوشچی** شاگرد **جمشید کاشانی**، **ابراهیم** فرزند **سنان** نوه و شاگرد **ثابت‌بن قره**، **ابونصر فارابی** معلم **بیرونی**، **جرجانی** معلم **پورسینا**، **توسی** معلم **قطب‌الدین شیرازی**، **خیام** شاگرد **شیخ محمد منصور** (که دربارهٔ او هیچ اطلاعی نداریم)، همه در جریان آموزش درس می‌دادند و درس می‌گرفتند. جهت‌گیری کاربردی دانش ریاضی، به طور عمده در نوع دیگری از آموزش تحکیم می‌شد: آموزش عمومی شبیه آموزشی که کاتبان مصری، عیلامی و میان‌دورودی می‌دیدند. در سال ۱۳۳۸ میلادی، در فلورانس شش مدرسه برپا کرد که مردان جوان را برای کار در بخش تجارت و الهیات آماده می‌کرد. در هریک از این مدرسه‌ها تا ۱۲۰۰ شاگرد وجود داشت. آموزش عمومی ریاضیات کاربردی، در کشورهای مسلمان‌نشین در مکتب‌هایی متمرکز بود که در آن‌ها، متخصصان مالی، کارمندان دولتی آینده و غیره را تربیت می‌کردند. هدفمند بودن آموزش و یکپارچگی گروه اجتماعی ریاضیدانان متخصص، امکانی برای عبور از آموزش خصوصی به آموزش عمومی، یعنی عبور از جهت‌گیری کاربردی به سمت سنت نظری شد. اگر چنین گذاری صورت نمی‌گرفت، آن‌وقت آموزش، بسته به گروه‌های اجتماعی متفاوت، به صورت‌های مختلفی درمی‌آمد. در آن صورت، از جنبهٔ روش‌شناسی آموزشی، وجود دو گروه اجتماعی، به معنای وجود دو نوع ریاضی بود «کاربردی و خالص» که هم از نظر موضوع و هم از نظر روش، متفاوت بودند. این که چنین وضعی پیش نیامده است، گواه بر یکپارچگی علاقه‌های ریاضی است. هم آموزش عمومی و هم آموزش خصوصی به یک گروه اجتماعی خدمت می‌کرد که در درون آن، امکان جابه‌جایی این دو نوع آموزش وجود داشت. در آموزشی که پشتیبان ریاضیات سده‌های میانه بود، سودمند بودن و زیبایی درآمیخته بود: «کاری را انجام بده که لازم است و در ضمن با سلیقه.»

نظام کاربردی با ساختارهای نظری پیوند می‌خورد و این دو به صورت خاصی، همچون دانشی سازمان‌یافته، به همجوشی خود ادامه می‌دهند. آموزش به هر گونه‌ای که باشد، چه به صورت آموزش عمومی و چه به صورت آموزش شخصی، چه جهت عمل و کاربرد را نشانه گرفته باشد، چه جهت‌گیری نظری داشته باشد، نتیجه یکی است: در عمل شکافی بین نظریه و کاربرد وجود ندارد. چیزی که به نظر ما عجیب می‌آید، پرسش از استدلال کلی به طرف توصیه‌های عملی مشخص است: همه جا دانش سازمان‌یافتهٔ سده‌های میانه، پیوندی از جهت‌گیری کاربردی با تصورهای نظری است.

دیدگاه‌های مربوط به موضوع و روش‌های ریاضیات، جنبهٔ اجتماعی دارند و در واقع، به تکامل واقع‌بینانهٔ این دانش برمی‌گردند. توجه به موضوع و روش‌های دانش ریاضی، تنها به صورتی سطحی می‌تواند درک مشهورترین نمایندگان اندیشهٔ علمی و فلسفی را بیان کند. با وجود این، به خاطر نیاز گسترده به آگاهی‌های ریاضی و از آن‌جا به وجود آمدن گروه‌های اجتماعی که این آگاهی‌ها را فرامی‌گیرند، حفظ می‌کنند و پایه‌های آن را استحکام می‌بخشند، به یک ساختمان روش‌شناختی نیاز می‌افتد.

دیدگاه‌های مربوطِ به موضوع و روش ریاضیات، معرف و منعکس‌کنندهٔ درک گروه‌های اجتماعی نسبت به فعالیت خود و برخوردی است که با این دانش دارند. بنابراین، دگرگونی واقعی و تدریجی این دانش، در سازوکار اجتماعیِ گسترش و انتقال آن بازتاب می‌یابد.

از طرف دیگر، درک آموزشی هم، به نوبهٔ خود، بر زنجیرهٔ حرکت دانش ریاضی اثر می‌گذارد و گذار «هموارتر» از بین حلقه‌های آن را تأمین می‌کند. به خصوص همین مطلب برای تجزیه و تحلیل رابطهٔ بین الگوریتم‌ها با مبانی نظری آن‌ها و به ویژه، با اثبات قضیه‌ها، اهمیت دارد. دیدگاه‌های آموزشی به روش‌های مجاز در ریاضیات و به موضوع آن، به «پاک کردن» استدلال‌های نظری کمک می‌کند و موجب می‌شود تا در «باخت» قضیه‌ها، استدلال‌هایی بیرون از طرح نظری وارد شود. در فعالیت‌هایی که نمی‌توان در چارچوب سنت نظری، استدلال دقیقی ارائه داد و تنها «نیم اثباتی» براساس شباهت و استدلال‌های نااستوار وجود دارد، ولی در عین حال ضرورت تعیین تکلیف آن احساس می‌شود (برای آماده کردن الگوریتم‌هایی که در حل مسأله‌های کاربردی سودمند هستند)، نمایندگان ریاضیات کلاسیک با انتخاب شیوه‌های دیگری، مشکل را از سر راه برمی‌دارند؛ شیوه‌هایی که براساس استفاده از وسیله‌های اندازه‌گیری و دیگر وسیله‌های «زیرکانه» (ابوریحان بیرونی) قرار دارند. به این ترتیب، اثبات تنها یکی از راه‌های ساختن دانش ریاضی خواهد بود که نسبت به راه‌های دیگر مزیتی ندارد. این عقب‌نشینی از سازماندهی نظری، به نفع سازماندهی کاربردی است. کم شدن نیاز به اثبات، جدا کردن ساختارهای نظری و تقسیم آن‌ها را به الگوریتم‌ها ساده‌تر می‌کند؛ الگوریتم‌هایی که برای حل گونه‌های متفاوت مسأله‌ها، ضرورت دارند. اثبات به کمک ابزارهای مکانیکی، خیلی ساده‌تر به روندهای الگوریتمی منجر می‌شود (مثل تقسیم زاویه به سه قسمت برابر با استفاده از مقطع‌های مخروطی؛ این اثبات می‌تواند برای محاسبهٔ سینوس یک درجه مورد استفاده قرار گیرد، همان‌طور که ابوریحان بیرونی عمل کرده است).

آنچه به ماهیت دانش ریاضی مربوط می‌شود، آن را به عنوان

دانشی در نظر می‌گیرد که در جهت کاربردی تنظیم شده است؛ با این که به ساختمان نظری ریاضیات هم، باور دارد. بهترین نمونه‌ها در این باره، تعریفی است که فارابی و پورسینا از موضوع ریاضیات می‌کنند. فارابی در سخن، ریاضیات نظری را از ریاضیات کاربردی جدا می‌کند، ولی در همان حال، ضمن سازماندهی ریاضیات، نظام کاربردی را هم در کنار نظام نظری می‌آورد، و این با سازماندهی سنتی فیثاغورس، که به ریاضیات به عنوان یک دانش خالص می‌نگرد، به کلی متفاوت است. فارابی دانش‌های ریاضی را به هفت بخش تقسیم می‌کند: حساب، هندسه، نور، دانش مربوط به ستارگان، دانش مربوط به موسیقی، دانش مربوط به ثقل‌ها و دانش مربوط به «شیوه‌های ابداعی» (شیوه‌های ابداعی به معنای مجموعهٔ روش‌هایی است که در حل مسأله‌های مختلف کاربردی مورد استفاده قرار می‌گیرند).

طبقه‌بندی پورسینا به طبقه‌بندی فارابی نزدیک است. پورسینا هم آن روش‌های کاربردی را که فارابی در بخش «شیوه‌های ابداعی» جمع کرده است، شاخه‌ای از دانش ریاضی می‌داند. پورسینا در شاخه حساب از «جمع و تفریق با روش هندی» و جبر نام می‌برد؛ به شاخهٔ هندسه، دانش مربوط به ابزارهای متحرک، دربارهٔ جابه‌جایی مرکز ثقل، دربارهٔ وزن کردن، دربارهٔ جابه‌جایی آبگون‌ها و همچنین نور و زمین‌سنجی را مربوط می‌داند؛ در شاخهٔ اخترشناسی، تنظیم جدول‌های نجومی و تقویم‌ها؛ و در شاخهٔ موسیقی، آماده کردن «سازهای حیرت‌آور» موسیقی. به این ترتیب، تقسیم‌بندی ریاضیات در بحث آموزشی، کار را به نفع سمت‌گیری کاربردی تمام می‌کند.

از این گذشته، عقب‌نشینی از نظام نظری، در فضای دیدگاه‌های فلسفی هم، به صورت عینی بودن مسأله‌های نظری، ظاهر می‌شود. بحث‌های نظری دوران سده‌های میانه، به کلی از فضای تصورهای کلی دربارهٔ تکامل دانش دور می‌شود که البته، نمی‌تواند یک تصادف ساده باشد. ولی در این صورت باید همزمانی پیشرفت دانش را در مجموع، در نظر گرفت؛ زیرا چنین تصورهایی نمی‌توانند ویژهٔ دانش ریاضی باشند. بنابراین به کلی نادرست است که با ارزیابی حالت ریاضیات امروزی و نقشی که ساختمان نظری دارد، ریاضیات سده‌های میانه را تجزیه و تحلیل کنیم و در دوره‌ای که جهت‌گیری کاربردی نیرومند بود، بر مسأله‌هایی تکیه کنیم که پایهٔ نظری دارند. با این که برای همهٔ ریاضیدانان، سنت نظری و تصور دربارهٔ آن، یار و همراه باوفایی بود، مسأله‌های اصلی فلسفی-آموزشی ریاضیات را نباید در این حوزه جست‌وجو کرد. مسأله اصلی برای ریاضیدانان سده‌های میانه، کاربرد و عملی بود. آن‌ها به خواست عمل و زندگی توجه داشتند که به طور مستقیم و از راه ساختمان‌های محاسبه‌ای ـ الگوریتمی، در دانش ریاضی نفوذ می‌کرد.

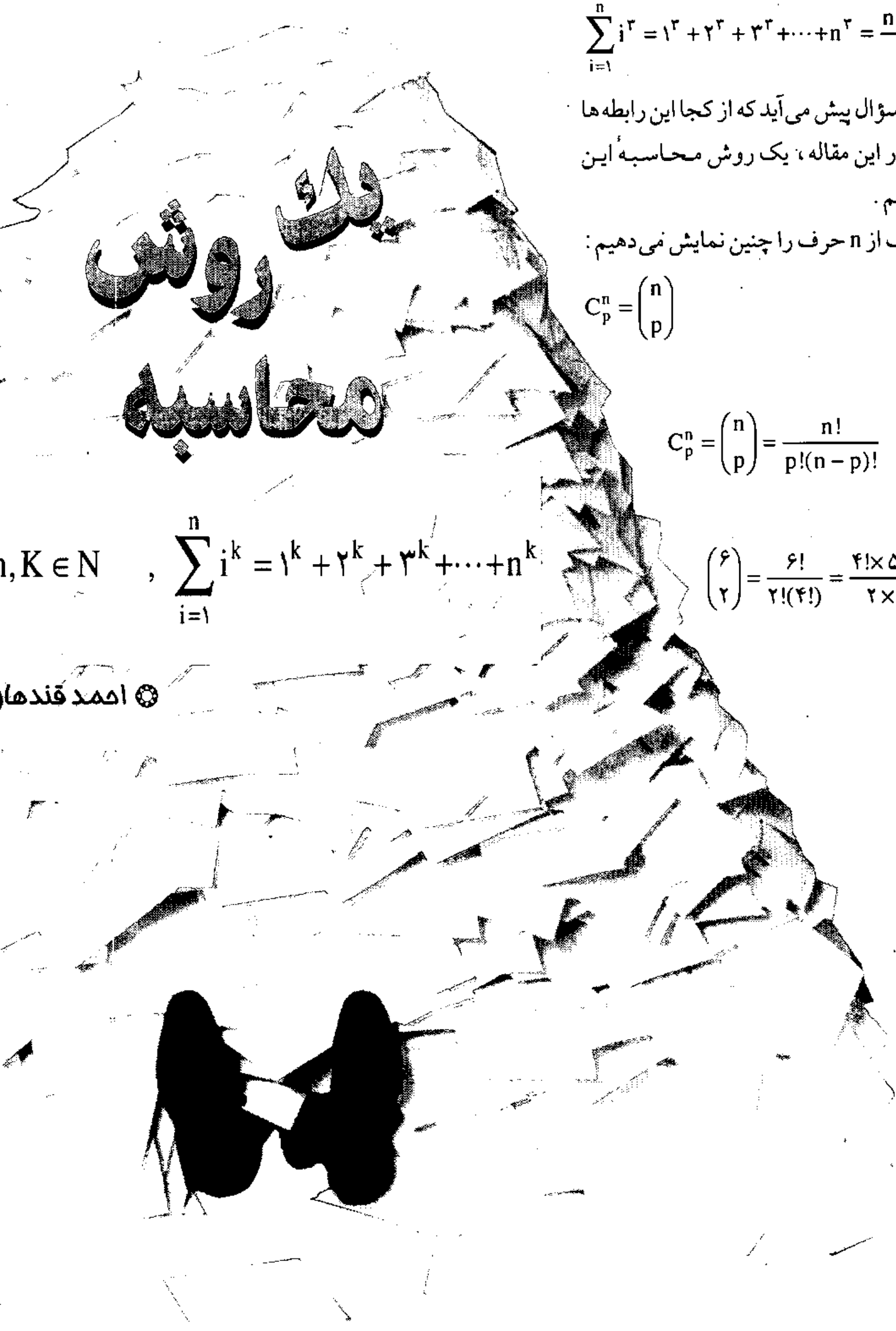
تمامیت ترکیبی و یکپارچه بودن ریاضیات کاربردی سده‌های میانه را، باید همچون زنجیرهٔ حرکت و تغییر دانش ریاضی به حساب آورد. آگاهی در جریان آموزش و کار علمی (که از آموزش جدا نیست) تحکیم می‌یابد. آنچه را که به زنجیرهٔ حرکت و تغییر مربوط است، می‌توان همچون گام ناگزیر منطقی ریاضیات کاربردی دانست که در شرایط وجود سنت نظری، به طرف پایه‌گذاری روش‌ها گام برمی‌دارد. در عین حال، این زنجیره را می‌توان همچون دگرگونی سنت‌های نظری و تلاش برای یکی شدن با مسأله‌های کاربردی دانست. تمامیت و یکپارچگی واهی ریاضیات تحکیم می‌شود و درک موضوع ریاضیات در حوزهٔ آگاهی‌های عملی ـ الگوریتمی متمرکز می‌شود؛ بدون این که ضمن کار، نظریه را در برابر عمل و کاربرد قرار دهد. به علاوه، بخش عمدهٔ دانش ریاضی، به آگاهی‌های مربوط به محاسبه تبدیل می‌شود. به همین جهت، اگر بخواهیم خصلت واقعی ریاضیات سده‌های میانه را بیان کنیم، باید آن را جهت‌گیری محاسبه‌ای ـ الگوریتمی بنامیم. به همین دلیل است که ریاضیات سده‌های میانه را، می‌توان یکپارچه و دارای جهت‌گیری کاربردی دانست: **ریاضیات سده‌های میانه، ریاضیات کاربردی است.**

به این ترتیب، در شرایط وجود سنت نظری (ریاضیات نظری یونان باستان)، ریاضیات کاربردی در مسیر سنتز جهت‌گیری کاربردی دانش و ساختمان نظری آن پیش می‌رود. این سنتز در جنبهٔ الگوریتمی دانش ریاضی متمرکز می‌شود و در جریان آموزش، با سازوکار اجتماعی سنت‌ها حفظ می‌شود. دورهٔ دوم وجود ریاضیات کاربردی، یعنی وقتی که عمل و کاربرد، به صورتی فعال در ریاضیات جذب می‌شد، نیروهای لازم برای دوران جدید ریاضیات نظری فراهم شد؛ دورهٔ دوم ریاضیات کاربردی ترکیبی است که تنها به کمک مطالعهٔ ریاضیات کاربردی مصر و میان‌دورود و دیگر جاها، قابل فهم است.

یک روش محاسبه

$$n, K \in N \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} i^k = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$$

احمد قندهار



در بسیاری از کتاب‌ها دیده می‌شود که می‌گویند: ثابت کنید:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

که معمولاً به کمک استقرا ثابت می‌شود. همچنین می‌گویند: ثابت کنید

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

به طور مسلّم این سؤال پیش می‌آید که از کجا این رابطه‌ها به‌دست آمده است؟ در این مقاله، یک روش محاسبهٔ این رابطه‌ها را بیان می‌کنیم.

۱. ترکیب p حرف از n حرف را چنین نمایش می‌دهیم:

$$C_p^n = \binom{n}{p}$$

و داریم:

$$C_p^n = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

مثال:

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(4!)} = \frac{4! \times 5 \times 6}{2 \times 4!} = \frac{30}{2} = 15$$

۲. به کمک اتحادها می‌توان، بسط $(a+b)^2$ و $(a+b)^3$ را به‌دست آورد.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

ولی برای محاسبهٔ بسط $(a+b)^4$ ، $(a+b)^5$ ، $(a+b)^6$ از رابطه‌ای به‌نام بسط دو جمله‌ای نیوتن استفاده می‌کنیم.

۳. بسط دو جمله‌ای نیوتن: $(n \in N)$

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

مثال ۱.

$$(a+b)^4 = a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

مثال ۲.

$$(a+b)^5 = a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + b^5$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

می‌دانیم: $\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

حال بسط دو جمله‌ای نیوتن را برای $(x+1)^k$ می‌نویسیم.

$$n = k \in N \ , \ a = x \ , \ b = 1$$

$$(x+1)^k = x^k + \binom{k}{1}x^{n-1} + \binom{k}{2}x^{k-2} + \binom{k}{3}x^{k-3} + \cdots + \binom{k}{k-1}x + 1$$

اگر در این رابطه به جایِ x، به طور مرتّب، اعداد ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ... و n را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$x=1: \ 2^k = 1^k + \binom{k}{1}1^{k-1} + \binom{k}{2}1^{k-2} + \binom{k}{3}1^{k-3} + \cdots + \binom{k}{k-1}1 + 1$$

$$x=2: \ 3^k = 2^k + \binom{k}{1}2^{k-1} + \binom{k}{2}2^{k-2} + \binom{k}{3}2^{k-3} + \cdots + \binom{k}{k-1}1 + 1$$

$$x=3: \ 4^k = 3^k + \binom{k}{1}3^{k-1} + \binom{k}{2}3^{k-2} + \binom{k}{3}3^{k-2} + \cdots + \binom{k}{k-1}3 + 1$$

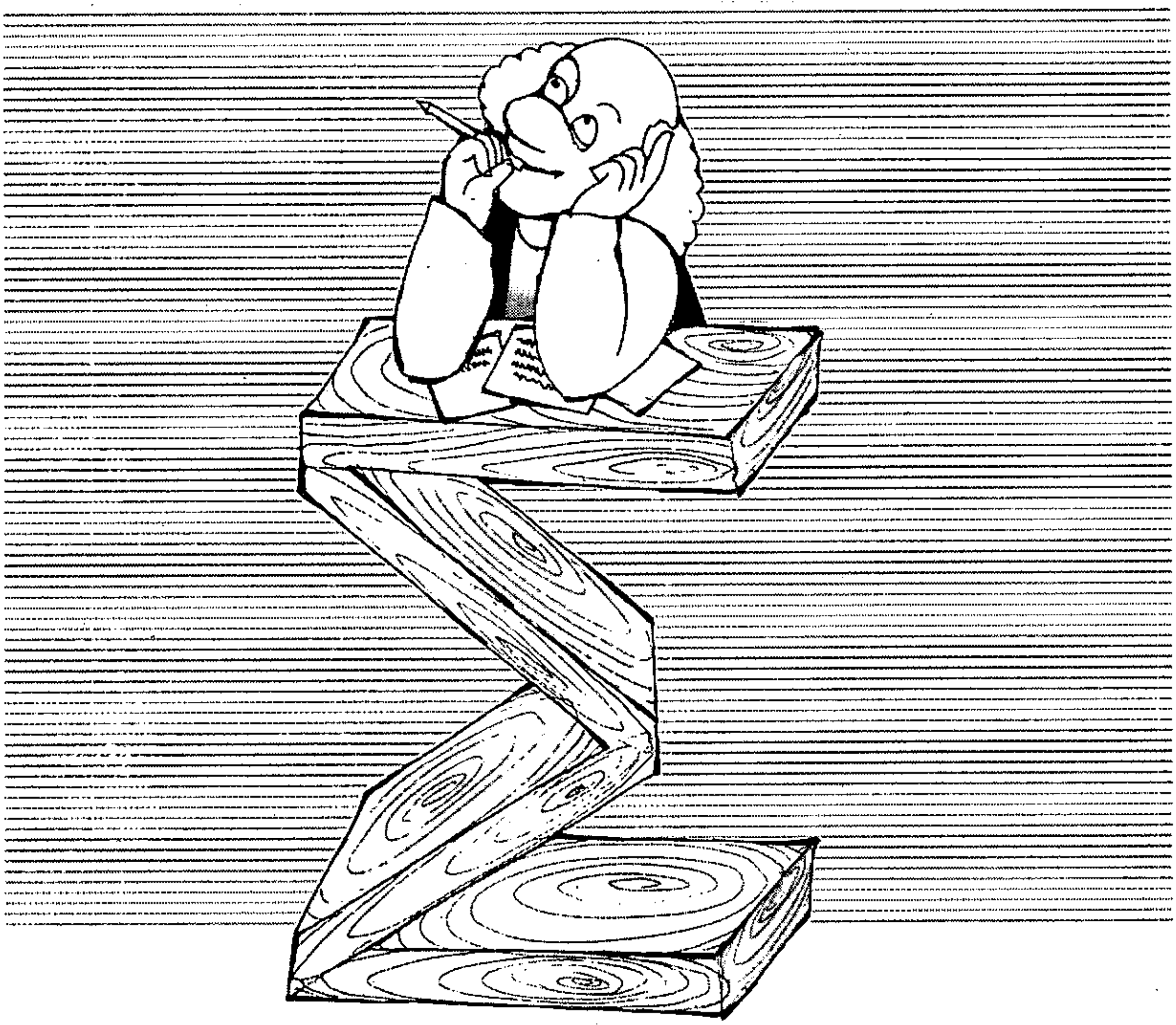
$$x=4: \ 5^k = 4^k + \binom{k}{1}4^{k-1} + \binom{k}{2}4^{k-2} + \binom{k}{3}4^{k-2} + \cdots + \binom{k}{k-1}4 + 1$$

....

....

$$x=n: \ (n+1)^k = n^k + \binom{k}{1}n^{k-1} + \binom{k}{2}n^{k-2} + \binom{k}{3}n^{k-3} + \cdots + \binom{k}{k-1}n + 1$$

حال این رابطه‌ها را نظیر به نظیر با هم جمع می‌کنیم و عوامل مساوی را از دو طرف حذف می‌کنیم. در این صورت خواهیم داشت:



$$(n+1)^k=\binom{k}{1}\left(1^{k-1}+2^{k-1}+3^{k-1}+\cdots+n^{k-1}\right)$$
$$+\binom{k}{2}\left(1^{k-2}+2^{k-2}+3^{k-2}+\cdots+n^{k-2}\right)$$
$$+\binom{k}{3}\left(1^{k-3}+2^{k-3}+3^{k-3}+\cdots+n^{k-3}\right)$$
$$+\cdots+\binom{k}{k-1}(1+2+3+\cdots+n)+(n+1)$$

در نتیجه:

$$(n+1)^k=\binom{k}{1}\sum_{i=1}^{n} i^{k-1}+\binom{k}{2}\sum_{i=1}^{n} i^{k-2}+\binom{k}{3}\sum_{i=1}^{n} i^{k-3}$$
$$+\cdots+\binom{k}{k-1}\sum_{i=1}^{n} i+(n+1) \qquad \text{رابطهٔ (۱)}$$

حال به کمک رابطهٔ (۱) $\sum_{i=1}^{n} i^2$ ، $\sum_{i=1}^{n} i^3$ ، $\sum_{i=1}^{n} i^4$ را محاسبه می‌کنیم.

الف) محاسبهٔ $\sum_{i=1}^{n} i^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

اگر در رابطهٔ (۱) به جای k، عدد ۳ را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$(n+1)^3=\binom{3}{1}\sum_{i=1}^{n} i^2+\binom{3}{2}\sum_{i=1}^{n} i+(n+1) \Rightarrow$$

$$(n+1)^3=3\sum_{i=1}^{n} i^2+3\sum_{i=1}^{n} i+(n+1) \Rightarrow$$

$$3\sum_{i=1}^{n} i^2=(n+1)^3-3\sum_{i=1}^{n} i-(n+1) \Rightarrow$$

$$3\sum_{i=1}^{n} i^2 = (n+1)^3 - \frac{3}{2}n(n+1) - (n+1)$$
$$= (n+1)(n^2+2n+1-\frac{3}{2}n-1)$$
$$\Rightarrow\ 3\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n+1}{2}(2n^2+n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$
$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

ب) محاسبهٔ $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3$

اگر در رابطهٔ (۱) به جای k، عدد ۴ را قرار دهیم، خواهیم داشت:

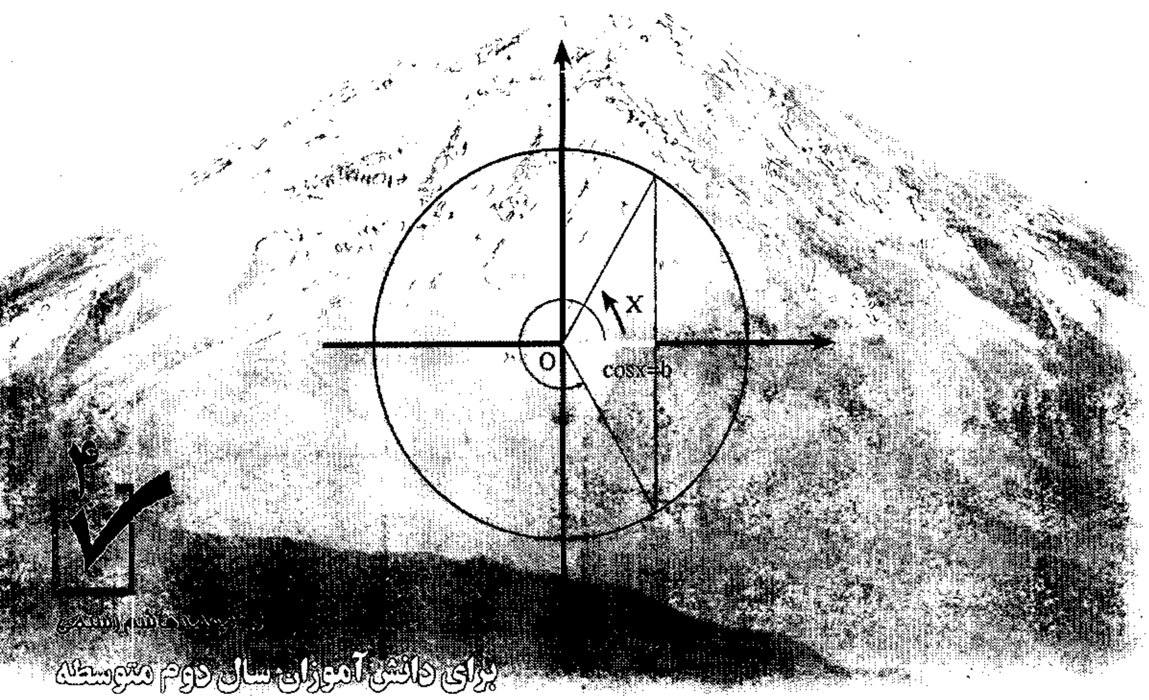
$$(n+1)^4 = \binom{4}{1}\sum_{i=1}^{n} i^3 + \binom{4}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \binom{4}{3}\sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \Rightarrow$$
$$(n+1)^4 = 4\sum_{i=1}^{n} i^3 + 6\sum_{i=1}^{n} i^2 + 4\sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \Rightarrow$$
$$4\sum_{i=1}^{n} i^3 = (n+1)^4 - 6\sum_{i=1}^{n} i^2 - 4\sum_{i=1}^{n} i - (n+1) \Rightarrow$$
$$4\sum_{i=1}^{n} i^3 = (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1)$$
$$\Rightarrow\ 4\sum_{i=1}^{n} i^3 = (n+1)(n^3+3n^2+3n+1-2n^2-n-2n-1)$$
$$= (n+1)(n^3+n^2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4\sum_{i=1}^{n} i^3 = n^2(n+1)^2 \Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

ج) محاسبهٔ $\sum_{i=1}^{n} i^4 = 1^4+2^4+3^4+\dots+n^4$

اگر در رابطهٔ (۱) به جای k عدد ۵ را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$(n+1)^5 = \binom{5}{1}\sum_{i=1}^{n} i^4 + \binom{5}{2}\sum_{i=1}^{n} i^3 + \binom{5}{3}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \binom{5}{4}\sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \Rightarrow$$
$$(n+1)^5 = 5\sum_{i=1}^{n} i^4 + 10\sum_{i=1}^{n} i^3 + 10\sum_{i=1}^{n} i^2 + 5\sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \Rightarrow$$
$$5\sum_{i=1}^{n} i^4 = (n+1)^5 - 10\sum_{i=1}^{n} i^3 - 10\sum_{i=1}^{n} i^2 - 5\sum_{i=1}^{n} i - (n+1) \Rightarrow$$
$$5\sum_{i=1}^{n} i^4 = (n+1)^5 - \frac{5}{2}n^2(n+1)^2 - \frac{5}{3}n(n+1)(2n+1) - \frac{5}{2}n(n+1) - (n+1) \Rightarrow$$
$$30\sum_{i=1}^{n} i^4 = 6(n+1)^5 - 15n^2(n+1)^2 - 10n(n+1)(2n+1) - 15n(n+1) - 6(n+1) \Rightarrow$$
$$30\sum_{i=1}^{n} i^4 = (n+1)\left[6(n+1)^4 - 15n^2(n+1) - 10n(2n+1) - 15n - 6\right] \Rightarrow$$
$$30\sum_{i=1}^{n} i^4 = (n+1)\times \left[6(n^4+4n^3+6n^2+4n+1) - 15n^2(n+1) - 10n(2n+1) - 15n - 6\right] \Rightarrow$$
$$30\sum_{i=1}^{n} i^4 = (n+1)\times \left[6n^4+24n^3+36n^2+24n+6-15n^3-15n^2-20n^2-10n-15n-6\right]$$
$$30\sum_{i=1}^{n} i^4 = (n+1)\left[6n^4+9n^3+n^2-n\right]$$
$$= n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1) \Rightarrow$$
$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}}$$

به همین روش می‌توان $\sum_{i=1}^{n} i^5$ و $\sum_{i=1}^{n} i^6$ و ... را محاسبه کرد.



حلّ معادله های مثلثاتی

اشاره

حلّ معادلهٔ مثلثاتی$(-۱ \le b \le ۱)$ $\cos x = b$ را در شمارهٔ قبل دیدیم. اکنون چند نکته دربارهٔ این معادله با مثال‌های مختلف ارائه می‌کنیم.

آزمون۱. اگر $-\frac{\pi}{۹} < x < \frac{\pi}{۹}$ و $\text{Cos}۳x = \frac{m-۱}{۲}$، مقادیر m در کدام فاصله است؟

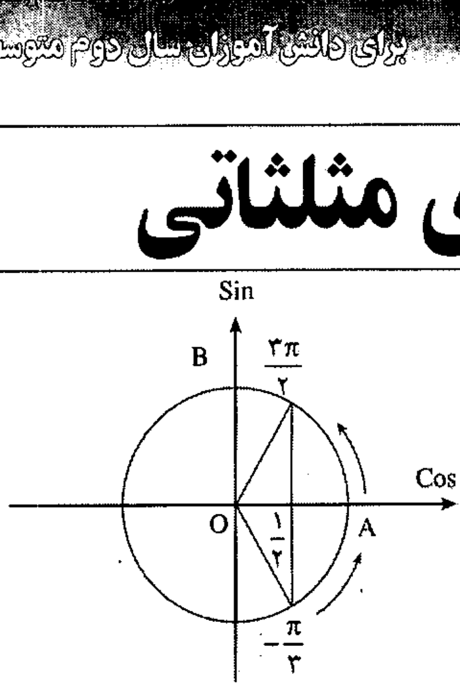
۱) $[۱و۲)$ ۲) $(۱و۲)$

۳) $(۲و۳]$ ۴) $[۳و۴)$

کنکور سراسری

حل: گزینهٔ (۳) صحیح است. داریم:

$$-\frac{\pi}{۹} < x < \frac{\pi}{۹} \Rightarrow -\frac{\pi}{۳} < ۳x < \frac{\pi}{۳}$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} < \text{Cos}۳x \le ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲} < \frac{m-۱}{۲} \le ۱$$
$$\Rightarrow ۱ < m-۱ \le ۲ \Rightarrow ۱+۱ < m-۱+۱ \le ۲+۱$$
$$\Rightarrow ۲ < m \le ۳ \Rightarrow m \in (۲,۳]$$



نکته: $\text{Cos}(-\frac{\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲}$ است هنگامی که زاویه از $-\frac{\pi}{۳}$ به صفر می‌رسد، کسینوس آن از $\frac{۱}{۲}$ به ۱ می‌رسد، زیرا $\text{Cos}۰ = ۱$ است و هنگامی که زاویه از ۰ تا $+\frac{\pi}{۳}$ تغییر کند، کسینوس آن از ۱ تا $\frac{۱}{۲}$ تغییر می‌کند. بنابراین هنگامی که زاویه از $-\frac{\pi}{۳}$ تا $+\frac{\pi}{۳}$ تغییر کند، کسینوس آن حدّاقل مساوی $\frac{۱}{۲}$ و حدّاکثر مساوی ۱ است. که چون $-\frac{\pi}{۳} < ۳x < \frac{\pi}{۳}$ است، پس $\frac{۱}{۲} < \text{Cos}۳x \le ۱$ است.

آزمون۲. اگر $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ و $\cos 2x = \frac{1}{1-m}$ ، آن‌گاه حدود تغییرات m کدام است؟

۱) $]-\infty, 2[$ ‏ ۲) $]1, +\infty[$

۳) $[2, +\infty[$ ‏ ۴) $]-\infty, 1[$

کنکور سراسری

حل: گزینهٔ (۳) صحیح است. داریم:

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < 2x < \frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow -1 \le \cos 2x \le 0 \Rightarrow -1 \le \frac{1}{1-m} < 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{1-m} \ge -1 \\ \frac{1}{1-m} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{1-m} + 1 \ge 0 \\ \frac{1}{1-m} \le 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2-m}{1-m} \ge 0 \Rightarrow m \ge 2 \ , \ m < 1 \\ \frac{1}{1-m} < 0 \Rightarrow m > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m \ge 2$$

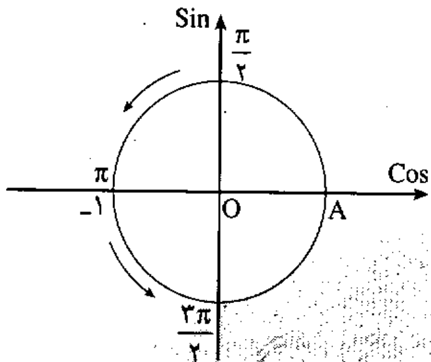
m	$-\infty$		۱		۲		$+\infty$
$2-m$		+		+	۰	−	
$1-m$		+	۰	−		−	
کسر اول		+	نامعین	−	۰	+	
نامعادلهٔ اول		ج			ج	ج	
کسر دوم		+	نامعین	−		−	
نامعادلهٔ دوم				ج		ج	
دستگاه نامعادله					ج	ج	

نکتهٔ ۱. برای تعیین جواب دستگاه نامعادله به دست آمده، باید از جدول تعیین علامت کنیم. امّا در این مسأله، کسر $\frac{2-m}{1-m}$ ، با $(2-m)(1-m)$ یا m^2-3m+2 هم‌علامت است (مگر در $m=1$ که ریشهٔ مخرج کسر است) و این سه جمله‌ای به ازای مقادیر m بین دو ریشه منفی و به ازای مقادیر m خارج دو ریشه مثبت است؛ پس جواب نامعادلهٔ اول $m \ge 2$ و $m < 1$ است.

جواب نامعادلهٔ دوم، یعنی $\frac{1}{1-m} < 0$ نیز $1-m < 0$ یا $m > 1$ است.

جواب دستگاه اشتراک جواب‌های دو نامعادله، یعنی $m \ge 2$ است.

نکتهٔ ۲. وقتی زاویه‌ای از $\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{3\pi}{2}$ تغییر می‌کند، کسینوس آن از ۰ تا ۱- تغییر می‌کند؛ زیرا $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ ، $\cos\pi = -1$ و $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$ است، بنابراین وقتی $\frac{\pi}{2} < 2x < \frac{3\pi}{2}$ است، داریم $-1 \le \cos 2x < 0$.



آزمون۳. اگر $\cos x = \frac{2a-1}{a+2}$ و $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$ باشد، حدود a کدام است؟

۱) $(0, \frac{4}{3})$ ‏ ۲) $(-2, \frac{4}{3})$

۳) $(-2, 0)$ ‏ ۴) $(\frac{4}{3}, +\infty)$

حل: گزینهٔ (۱) صحیح است. داریم:

$$\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3} \Rightarrow -\frac{1}{2} < \cos x < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{2a-1}{2a+2} < \frac{1}{2}$$

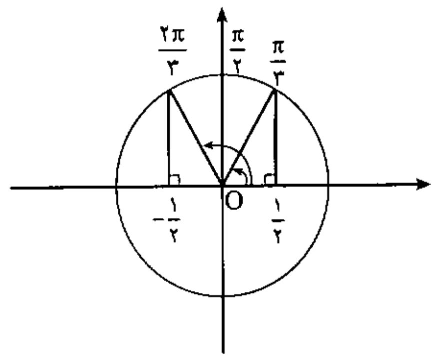
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2a-1}{a+2} > -\frac{1}{2} \\ \frac{2a-1}{a+2} < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2a-1}{a+2} + \frac{1}{2} > 0 \\ \frac{2a-1}{a+2} - \frac{1}{2} < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{4a-2+a+2}{2(a+2)} > 0 \\ \frac{4a-2-a-2}{2(a+2)} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5a}{2(a+2)} > 0 \\ \frac{3a-4}{2(a+2)} < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a > 0 \text{ و } a < -2 \\ -2 < a < \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 < a < \frac{4}{3}$$

نکته: با توجه به این که $\cos\frac{\pi}{۳}=+\frac{۱}{۲}$ و $\cos\frac{۲\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}$ است، وقتی x از $\frac{\pi}{۳}$ تا $\frac{۲\pi}{۳}$ تغییر کند، Cosx از $+\frac{۱}{۲}$ تا $-\frac{۱}{۲}$ تغییر خواهد کرد.



آزمون۴. اگر $-۱<\cos x<\frac{۱}{۲}$ باشد، حدود x کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{۳}<x<\frac{\pi}{۳}$ ۲) $۰<x\le\pi$

۳) $\frac{\pi}{۳}<x<\pi$ ۴) $\frac{\pi}{۳}\le x\le\pi$

حل: گزینهٔ (۳) صحیح است. می‌دانیم که $\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{۱}{۲}$ و $\cos\pi=-۱$ است.

نکته: برای گزینهٔ (۱) $\frac{۱}{۲}<\cos x\le ۱$، برای گزینهٔ (۲) $-۱\le\cos x<۱$ و برای گزینهٔ (۴)، $-۱\le\cos x\le\frac{۱}{۲}$ است.

آزمون۵. اگر $-۱<\cos(\frac{x}{۲}+\frac{\pi}{۴})<۰$ باشد، حدود x کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۳}<x<\pi$ ۲) $\frac{\pi}{۲}<x<\frac{۳\pi}{۲}$ در معادلهٔ دومی

۳) $\frac{\pi}{۲}\le x<\frac{۳\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}<x\le\frac{۳\pi}{۲}$

حل: گزینهٔ (۲) صحیح است. با استفاده از گزینه‌های داده شده، نخست حدود $\frac{x}{۲}+\frac{\pi}{۴}$ و سپس حدود $\cos(\frac{x}{۲}+\frac{\pi}{۴})$ را برای هر گزینه به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$(۱)\quad \frac{\pi}{۳}<x<\pi \Rightarrow \frac{\pi}{۶}<\frac{x}{۲}<\frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{۶}+\frac{\pi}{۴}<\frac{x}{۲}+\frac{\pi}{۴}<\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \frac{۵\pi}{۱۲}<\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}<\frac{۳\pi}{۴}\Rightarrow$$

$$\frac{-\sqrt{۲}}{۲}<\cos(\frac{x}{۲}+\frac{\pi}{۴})<\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}\Rightarrow$$ (خلاف فرض است)

$$(۲)\quad \frac{\pi}{۲}<x<\frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow \frac{\pi}{۴}<\frac{x}{۲}<\frac{۳\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{۴}+\frac{\pi}{۴}<\frac{x}{۲}+\frac{\pi}{۴}<\frac{۳\pi}{۴}+\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \frac{\pi}{۲}<\frac{x}{۲}+\frac{\pi}{۴}<\pi$$

$$\Rightarrow -۱<\cos(\frac{x}{۲}+\frac{\pi}{۴})<۰$$ (جواب)

توجه: برای گزینهٔ (۳)، $-۱<\cos(\frac{x}{۲}+\frac{\pi}{۴})\le ۰$ و برای گزینهٔ (۴)، $-۱\le\cos(\frac{x}{۲}+\frac{\pi}{۴})<۰$ است.

آزمون۶. معادلهٔ $\sin ۳x+\cos ۲x=۰$ در فاصلهٔ $[۰,\pi]$ چند ریشه دارد؟

۱) دو ریشه ۲) سه ریشه

۳) چهار ریشه ۴) شش ریشه

حل: گزینهٔ (۱) صحیح است. معادلهٔ داده شده را می‌توان به معادله‌ای ساده بر حسب سینوس زاویه‌ها یا به معادله‌ای ساده بر حسب کسینوس زاویه‌ها تبدیل کرد، که در این جا آن را به معادله‌ای ساده بر حسب کسینوس زاویه‌ها تبدیل و حل می‌کنیم تا تعداد ریشه‌ها در فاصلهٔ خواسته شده را تعیین کنیم. داریم:

$$\sin ۳x+\cos ۲x=۰$$

$$\Rightarrow \cos ۲x=-\sin ۳x=\cos(\frac{\pi}{۲}+۳x)$$

$$\Rightarrow ۲x=۲k\pi\pm(\frac{\pi}{۲}+۳x) \Rightarrow ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}+۳x$$ و

$$۲x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}-۳x \Rightarrow x=-۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$$ و

$$x = \frac{2k\pi}{5} - \frac{\pi}{10}$$

k	x
-1	$\frac{3\pi}{2} > \pi \ , \ \frac{-2\pi}{5} - \frac{\pi}{10} = -\frac{\pi}{2} < 0$
0	$-\frac{\pi}{2} < 0 \ , \ -\frac{\pi}{10} < 0$
1	$-2\pi - \frac{\pi}{2} < 0 \ , \ \frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{10} = \frac{3\pi}{10}$ ج
2	$-4\pi - \frac{\pi}{2} < 0 \ , \ \frac{4\pi}{5} - \frac{\pi}{10} = \frac{7\pi}{10}$ ج
3	$-6\pi - \frac{\pi}{2} < 0 \ , \ \frac{6\pi}{5} - \frac{\pi}{10} = \frac{13\pi}{10} > \pi$

بنابراین معادلهٔ داده شده در بازهٔ $[0,\pi]$، تنها دو ریشه دارد.

نکته: برای تعیین تعداد ریشه‌ها، می‌توان تعداد عددهای صحیح k را که به ازای آن‌ها، نامساوی‌های زیر:

$$0 < -2k\pi - \frac{\pi}{2} < \pi \quad \text{و} \quad 0 < \frac{2k\pi}{5} - \frac{\pi}{10} < \pi$$

برقرارند، تعیین کرد. نامعادلهٔ اول تنها به ازای k=۱ و k=۲ برقرار است و نامعادلهٔ دوم به ازای هیچ مقداری از k برقرار نیست؛ بنابراین معادلهٔ داده شده، تنها دو ریشه دارد.

آزمون ۷. مجموع جواب‌های معادلهٔ زیر:

$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{x}{4} + \pi)$$

که در شرط $0 \le x \le \pi$ صدق می‌کنند، کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{8}$ ۲) $\frac{5\pi}{8}$

۳) $\frac{8\pi}{3}$ ۴) $\frac{8\pi}{5}$

کنکور سراسری

حل: گزینهٔ (۴) صحیح است. نخست باید جواب‌های کلی معادله و سپس جواب‌های خصوص موجود در بازهٔ $[0,\pi]$، و آن‌گاه مجموع این جواب‌ها را به دست آوریم. داریم:

$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{x}{4} + \pi)$$

$$\Rightarrow \ x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm (\frac{x}{4} + \pi)$$

$$\Rightarrow \ x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{x}{4} + \pi \quad \text{و} \quad x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{x}{4} - \pi$$

$$\Rightarrow \ \frac{3x}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \quad \text{و} \quad \frac{5x}{4} = 2k\pi - \frac{5\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \ x = \frac{8k\pi}{3} + \pi \quad \text{و} \quad x = \frac{8k\pi}{5} - \pi$$

k	x
0	π ج $, \ -\pi < 0$
1	$\frac{8\pi}{3} + \pi > \pi \ , \ \frac{8\pi}{5} - \pi = \frac{3\pi}{5}$ ج
2	$\frac{16\pi}{3} + \pi > \pi \ , \ \frac{16\pi}{5} - \pi = \frac{11\pi}{5} > \pi$

بنابراین معادلهٔ داده شده در بازهٔ $[0,\pi]$، دارای دو جواب π و $\frac{3\pi}{5}$ است، که مجموع آن‌ها برابر $\pi + \frac{3\pi}{5} = \frac{8\pi}{5}$ است.

آزمون ۸. انتهای کمان‌های جواب معادلهٔ زیر:

$$\cos 2x + \sin(\frac{\pi}{2} + x) = 0$$

روی دایرهٔ مثلثاتی رأس‌های کدام چهارضلعی است؟

۱) مثلث متساوی‌الاضلاع ۲) مثلث قائم‌الزاویه

۳) مستطیل ۴) مربع

کنکور سراسری

حل: گزینهٔ (۱) صحیح است. جواب‌های خصوصی معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$ را به دست می‌آوریم و شکل حاصل از انتهای کمان‌ها را بررسی می‌کنیم. داریم:

$$\cos 2x + \sin(\frac{\pi}{2} + x) = 0 \ \Rightarrow \ \cos 2x + \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \ \cos 2x = -\cos x = \cos(\pi - x)$$

$$\Rightarrow \ 2x = 2k\pi \pm (\pi - x)$$

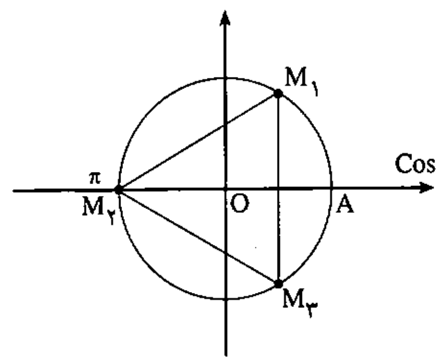
$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \pi - x, \\ 2x = 2k\pi - \pi + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \pi \end{cases}$$

k	x
0	$\frac{\pi}{3}$ ج $, \ -\pi < 0$
1	$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$ ج $, \ \pi$ ج
2	$\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ ج $, \ 3\pi > 2\pi$
3	$2\pi + \frac{\pi}{3} > 2\pi \ , \ 5\pi > 2\pi$

بنابراین جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $[0,2\pi]$ سه جواب دارد، که عبارتند از $\frac{\pi}{3}$ ، π و $\frac{5\pi}{3}$ ؛ بنابراین اگر $\widehat{AM_1}=\frac{\pi}{3}$ ، $\widehat{AM_2}=\pi$ و $\widehat{AM_3}=\frac{5\pi}{3}$ اختیار کنیم، دیده می‌شود که:

$$\widehat{M_1M_2}=\widehat{M_2M_3}=\widehat{M_3M_1}=\frac{2\pi}{3}$$

بنابراین $\widehat{M_1M_2}=\widehat{M_2M_3}=\widehat{M_3M_1}$ و در نتیجه مثلث $M_1M_2M_3$ متساوی‌الاضلاع است.



آزمون ۹ . یک جواب کلی معادلهٔ زیر کدام است؟

$$\cos(2x-\frac{\pi}{6})-\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2})=0$$

۱) $\frac{4k\pi}{5}+\frac{5\pi}{3}$ ۲) $\frac{4k\pi}{5}-\frac{7\pi}{15}$

۳) $\frac{4k\pi}{5}+\frac{7\pi}{15}$ ۴) $\frac{4k\pi}{5}-\frac{5\pi}{3}$

حل: گزینهٔ (۳) صحیح است. داریم:

$$\cos(2x-\frac{\pi}{6})-\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2})=0$$

$$\Rightarrow \cos(2x-\frac{\pi}{6})=\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2})=\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow \cos(2x-\frac{\pi}{6})=\cos(\pi-\frac{x}{2})$$

$$\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{6}=2k\pi\pm(\pi-\frac{x}{2})$$

$$\Rightarrow \begin{cases}2x-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\pi-\frac{x}{2}\\ 2x-\frac{\pi}{6}=2k\pi-\pi+\frac{x}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{5x}{2}=2k\pi+\frac{7\pi}{6}\\ \frac{3x}{2}=2k\pi-\frac{5\pi}{6}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=\frac{4k\pi}{5}+\frac{7\pi}{15}\\ x=\frac{4k\pi}{3}-\frac{5\pi}{3}\end{cases}$$

آزمون ۱۰ . یک جواب معادلهٔ $\cos 3x-\cos x=0$ کدام است؟

۱) $x=\frac{\pi}{3}$ ۲) $x=\pi$

۳) $x=\frac{7\pi}{6}$ ۴) $x=\frac{5\pi}{3}$

حل: گزینهٔ (۲) صحیح است.

راه اول: برای آن‌که مقداری از x ریشهٔ معادله‌ای باشد، باید در آن معادله صدق کند. بنابراین عددهای داده شده در گزینه‌ها را، درمعادله قرار می‌دهیم تا ریشهٔ معادله مشخص شود. داریم:

$$x=\frac{\pi}{3}\xrightarrow{\text{در معادله}}\cos3(\frac{\pi}{2})-\cos\frac{\pi}{3}=0$$

$$\Rightarrow \cos\pi-\cos\frac{\pi}{3}=0$$

$$\Rightarrow -1-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow -\frac{3}{2}=0$$

$$x=\pi\xrightarrow{\text{در معادله}}\cos3\pi-\cos\pi=0$$

$$\Rightarrow \cos\pi-\cos\pi=0\Rightarrow 0=0$$

بنابراین $x=\pi$ یک جواب معادلهٔ داده شده است.

توجه: $x=\frac{7\pi}{6}$ و $x=\frac{5\pi}{3}$ در معادله صدق نمی‌کنند.

آزمون ۱۱ . به ازای کدام مقدار m ، یکی از جواب‌های معادلهٔ $(m-1)\cos 2x=2m+1$ ، برابر $\frac{2\pi}{3}$ است؟

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{-2}{5}$

۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{-1}{5}$

حل: گزینهٔ (۴) صحیح است. $x=\frac{2\pi}{3}$ باید در معادلهٔ داده شده صدق کند. بنابراین داریم:

$$x=\frac{2\pi}{3}\xrightarrow{\text{در معادله}}(m-1)\cos\frac{4\pi}{3}=2m+1$$

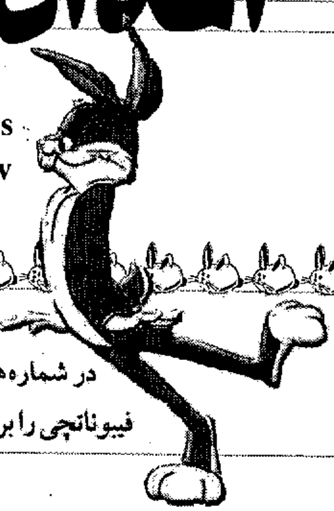
$$\Rightarrow (m-1)(-\frac{1}{2})=2m+1 \Rightarrow -m+1=4m+2$$

$$\Rightarrow 5m=-1 \Rightarrow m=-\frac{1}{5}$$

اعداد فیبوناتچی

Febonacci Numbers
Necolai N. Vorobiev

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور



اشاره

در شماره‌های قبل به معرفی اعداد فیبوناتچی پرداختیم، همچنین رابطه‌های بین اعداد فیبوناتچی را بررسی کردیم، در ادامه مطلب باز هم دربارهٔ رابطه‌های بین این اعداد بحث می‌کنیم.

۱۰ . باز هم می‌توان به طریقی مشابه، ویژگی‌های دیگر اعداد فیبوناتچی، از قبیل موارد بعد را به اثبات رساند.

$$u_1u_2+u_2u_3+u_3u_4+\dots+u_{2n-1}u_{2n}=u_{2n}^2$$

$$u_1u_2+u_2u_3+u_3u_4+\dots+u_{2n}u_{2n+1}=u_{2n+1}^2-1$$

$$nu_1+(n-1)u_2+(n-2)u_3+\dots+2u_{n-1}+u_n=u_{n+4}-(n+3)$$

$$u_1+2u_2+3u_3+\dots+nu_n=nu_{n+2}-u_{n+3}+2$$

اثبات این موارد را به عنوان تمرین، به خواننده واگذار می‌کنیم.

۱۱ . مجموعهٔ دیگری از اعداد، موسوم به **ضریب‌های دوجمله‌ای**[1] موجودند، که اهمیتش کم‌تر از گردایهٔ اعداد فیبوناتچی نیست.

این اعداد، همان طور که از نامشان پیداست، به صورت ضرایب توان‌های x در بسط[2] $(1+x)^n$ رخ می‌دهند؛ یعنی،

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\dots+\binom{n}{n}x^n \quad (11.1)$$

به طور واضح، اعداد $\binom{n}{k}$، به ازای هر عدد صحیح نامنفی n و به ازای هر عدد صحیح نامنفی k ای که از n تجاوز نکند، به‌گونه‌ای یکتا تعریف شده‌اند. به معادلهٔ (۱۱.۱) معمولاً به صورت **فرمول دو جمله‌ای**[3] ارجاع می‌شود.

آشکار می‌شود که کاربرد ضرایب دو جمله‌ای در بسیاری از استدلال‌های ریاضی مفید است. این ضرایب در بررسی ویژگی‌های اعداد فیبوناتچی نیز سودمندند.

گذشته از این، ضرایب دو جمله‌ای به طریقی مستقیم با اعداد فیبوناتچی مرتبط‌اند. در این مرحله، به ذکر بعضی از جنبه‌های اساسی این رابطه می‌پردازیم.

اما به عنوان مرحله‌ای مقدماتی، ابتدا چند ویژگی از ضرایب دو جمله‌ای را مشخص می‌کنیم.

با قرار دادن $n=1$ در (۱۱.۱) بلافاصله ملاحظه می‌کنیم که:

$$\binom{1}{0}=\binom{1}{1}=1$$

علاوه بر این، لم زیر نیز برقرار است.

لم: اگر $n\geq 1$ و $0\leq k\leq n-1$، آن‌گاه

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

اثبات: اتحاد واضح زیر را داریم:

$$(1+x)^{n+1}=(1+x)^n(1+x)$$

که با استفاده از ضرایب دو جمله‌ای، به مورد زیر می‌انجامد:

$$\binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}x+\dots+\binom{n+1}{k+1}x^{k+1}+\dots+\binom{n+1}{n+1}x^{n+1}$$

$$=\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\ldots+\binom{n}{k}x^k+\binom{n}{k+1}x^{k+1}+\ldots+\binom{n}{n}x^n\right)(1+x)$$

$$=\binom{n}{0}+\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right)x+\ldots+\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}\right)x^{k+1}+\ldots$$

$$+\left(\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right)x^n+\binom{n}{n}x^{n+1}$$

دو طرف راست و چپ این معادله به ازای یک چند جمله‌ای یکسان برقرار است. بنابراین ضرایب توان‌های مشابه x در چپ و راست آن، باید برابر باشند.

به ویژه نتیجه می‌شود که:

$$\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$$

که همان فرمول مطلوب است.

لم اثبات شده، برای این است که ضرایب دو جمله ای را می توان به کمک فرایندی بازگشتی مشابه فرایند به کار رفته در تولید اعداد فیبوناتچی، منتهی با طبیعتی پیچیده‌تر، محاسبه کرد.

۱۲. ضرایب دو جمله‌ای را به صورت الگویی مثلثی قرار می‌دهیم و آرایهٔ زیر موسوم به **مثلث پاسکال**[۴] را به‌دست می‌آوریم:

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$$

$$\ldots$$

$$\binom{n}{0}\ \binom{n}{1}\ \binom{n}{2}\ \cdots\ \binom{n}{n}$$

$$\ldots$$

یعنی:

۱
۱ ۱
۱ ۲ ۱
۱ ۳ ۳ ۱
۱ ۴ ۶ ۴ ۱
۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱
۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱
...

توضیح مفصل بعضی از ویژگی‌های اساسی مثلث پاسکال و ضرایب دو جمله‌ای تشکیل دهندهٔ آن را می‌توان در کتاب زیر یافت:

"pascal's Triangle"by V.A.Uspenski (Popular Lectures on Mathematics Series , vol. 43, Moscow: Nauka,1979)

سطرهای مثلث پاسکال را طبق رسم، از بالا به پایین و چنان بر چسب می زنیم که به سطر بالایی شامل عدد منفرد ۱ به عنوان سطر صفر اشاره شود.

از توضیحات پیشین نتیجه می‌شود که اعداد اول و آخر واقع در هر سطر مثلث پاسکال، برابر ۱ هستند و هر عدد دیگر واقع در هر سطر، با جمع دو عدد بلافاصله بالای آن به دست می‌آید.

۱۳. فرمول (۱۱.۱) این توان را می‌دهد که بلافاصله دو فرمول مهمی را استنتاج کنیم که ضرایب دو جمله ای واقع در یک سطر مثلث پاسکال را به هم مرتبط می‌کنند.

با قرار دادن $x=1$ در (۱۱.۱)، به‌دست می‌آوریم

$$2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}$$

گذشته از این، اگر قرار دهیم $x=-1$، آن گاه به دست می‌آوریم:

$$0=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}$$

۱۴ . اکنون با استفاده از استقرای بر n ثابت می‌کنیم که :

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2.\ldots k} \qquad (12.1)$$

این فرمول ، اغلب به عنوان تعریف ضرایب دو جمله‌ای به کار می رود . فرمول مورد بحث، ضریب دو جمله‌ای $\binom{n}{k}$ را به عنوان تعداد ترکیب‌های[5] n شیئ، هر بار k شیء برگرفته ، مشخص می کند .

در این‌جا رهیافت متفاوت صوری‌تری را اختیار کردیم ؛ زیرا این رهیافت به اهداف جاری‌مان بهتر کمک می کند .

اگر به توافق فرض کنیم که حاصل‌ضرب شامل عوامل صفر همواره برابر ۱ است، آن‌گاه $k=0$ ، فرمول (۱۲.۱) نتیجهٔ قبلاً مشخص شده $\binom{n}{0}=1$ را به دست می دهد .

بنابراین، بدون از دست دادن عمومیّت کار، می‌توان در نتیجهٔ مزبور فرض کرد که $k \geq 1$.

به ازای $n=1$ داریم :

$$\binom{1}{1}=\frac{1}{1}=1$$

اکنون فرض می‌کنیم فرمول (۱۲.۱) به ازای n معلوم و هر $k=0,1,\ldots,n$ برقرار است .

سپس توجه‌مان را به $\binom{n+1}{k}$ معطوف می‌کنیم . از آن‌جا که $k \geq 1$ ، می توان نوشت :

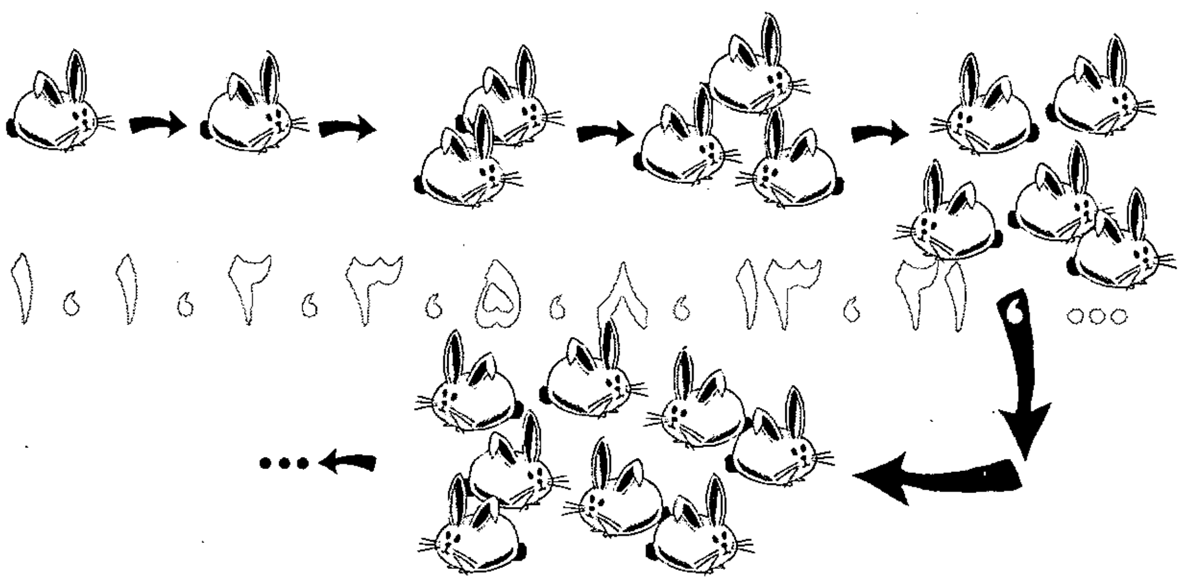
$$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k-1}+\binom{k}{n}$$

فرض استقرایی (۱ . ۱۲) مستلزم این است که :

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)}{1.2.\ldots(k-1)}+$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)(n-k+1)}{1.2.\ldots(k-1)k}$$

$$=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)}{1.2.\ldots(k-1)}\left(1+\frac{n-k+1}{k}\right)$$



$$= \frac{n(n-1)...(n-k+2)}{1.2....(k-1)} . \frac{k+n-k+1}{k}$$

$$= \frac{(n+1)n(n-1)...(n-k+2)}{1.2....(k-1)k} = \binom{n+1}{k}$$

آنچه باقی مانده، توجه به این مطلب است که معادلهٔ اخیر، به ازای هر ضریب دو جمله ای واقع در سطر بلافاصله بعدی مثلث پاسکال، یعنی، سطر $(n+1)$ ام، به فرمول (۱۲.۱) منجر می‌شود.

۱۵ . اکنون خطوط راستی از اعداد مثلث پاسکال به زاویهٔ ۴۵ درجه با سطرهای آن رسم می‌کنیم و آن‌ها را **قطرهای ناشی**[6] از مثلث پاسکال می‌نامیم. قطرهای ناشی این چنین، به عنوان نمونه، دو خط مستقیم گذرنده از اعداد ۱ , ۴ و ۳ یا ۱ , ۵ , ۶ و ۱ هستند.

می‌خواهیم نشان دهیم مجموع جمیع عددهای واقع در امتداد یک قطر ناشی، یک عدد فیبوناتچی است. در واقع، اولین و بالاترین قطر ناشی، شامل عددی منفرد، یعنی ۱، است، بنابراین اولین مجموع برابر ۱ است. قطر دوم نیز شامل یک فرد، ۱، است، بنابراین مجموع دوم نیز برابر است.

بنابراین، تمام کاری که اکنون باید برای اثبات مقصودمان انجام دهیم، نشان دادن این مطلب است که مجموع اعداد سازندهٔ قطرهای n ام و $(n+1)$ ام مثلث پاسکال، برابر مجموع جمیع اعداد واقع در امتداد قطر $(n+2)$ ام است.

برای این منظور، ملاحظه می‌کنیم که قطر n ام شامل اعداد:

$$\binom{n-1}{0},\binom{n-2}{1},\binom{n-3}{2},...$$

است؛ در حالی که قطر $(n+1)$ ام عددهای:

$$\binom{n}{0},\binom{n-1}{1},\binom{n-2}{2},...$$

را نمایش می‌دهد.

مجموع این اعداد را می‌توان به صورت:

$$\binom{n}{0}+\left(\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}\right)+\left(\binom{n-2}{0}+\binom{n-2}{2}\right)+...,$$

یا با تکیه بر لم بخش ۱۱، به صورت:

$$\binom{n+1}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n-1}{2}+,...$$

نوشت.

باقی ملاحظهٔ این مطلب است که عبارت اخیر، دقیقاً مجموع جمیع اعداد واقع در قطرناشی $(n+2)$ ام مثلث پاسکال است.

از دستاورد به اثبات رسیدهٔ فوق و بر مبنای فرمول (۱.۱)، بلافاصله درمی‌یابیم که مجموع جمیع ضرایب دو جمله‌ای **واقع بر یا بالای** قطر ناشی n ام مثلث پاسکال، برابر $U_{n+2}-1$ است.

خواننده با استفاده از (۱ . ۲)، (۱ . ۳)، (۱ . ۴) یا فرمول‌های مشابه، می‌تواند بدون زحمت زیاد، تعداد قابل توجهی اتحاد دیگری به دست آورد که اعداد فیبوناتچی را به ضرایب دو جمله‌ای مرتبط می‌کنند.

۱۶ . تاکنون اعداد فیبوناتچی را توسط اندیس‌هاشان با استفاده از فرایندی بازگشتی، یعنی، استقرایی، تعریف کرده‌ایم. اما آشکار می‌شود که هر عدد فیبوناتچی را می‌توان به طریقی مستقیم، به صورت تابعی صریح از اندیس‌هایش نیز تعریف کرد.

برای رسیدن به این هدف، مجموعهٔ جمیع دنباله‌های:

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

صادق در رابطه بازگشتی

$$u_n = u_{n-2} + u_{n-1} \quad (13.1)$$

را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

هریک چنین دنباله‌ای را **جواب معادلهٔ** (۱ . ۱۳) می‌نامیم.

در زنجیرهٔ مورد بحث، فرض می‌کنیم V، V' و V''، به ترتیب، دنباله‌های زیر را نمایش دهند:

$$v_1, v_2, v_3, \ldots$$
$$v'_1, v'_2, v'_3, \ldots$$
$$v''_1, v''_2, v''_3, \ldots$$

در شروع کار، ابتدا به اثبات دو لم ساده می‌پردازیم:

لم ۱ . اگر V جواب معادلهٔ (۱ . ۱۳) و c عددی دلخواه باشد، آن‌گاه cV ، یعنی، دنبالهٔ:

$$cv_1, cv_2, cv_3, \ldots$$

جواب معادلهٔ (۱ . ۱۳) نیز هست.

اثبات: با ضرب هر جملهٔ معادلهٔ:

$$v_n = v_{n-2} + v_{n-1}$$

در c ، به دست می‌آوریم:

$$cv_n = cv_{n-2} + cv_{n-1}$$

که نتیجهٔ مطلوب را محقق می‌کند.

لم ۲ . اگر دنباله‌های V′ و V″ جواب‌های معادلهٔ (۱ . ۱۳) باشند، آن‌گاه v′+v″ ، مجموعشان، یعنی، دنبالهٔ:

$$v'_1 + v''_1, v'_2 + v''_2, v'_3 + v''_3, \ldots$$

نیز جواب معادلهٔ (۱ . ۱۳) است.

اثبات: از شرط‌های بیان شده در لم‌مان، داریم:

$$v'_n = v'_{n-1} + v'_{n-2}$$

و

$$v''_n = v''_{n-1} + v''_{n-2}$$

با جمع جمله به جملهٔ این معادلات، به دست می‌آوریم:

$$v'_n + v''_n = \left(v'_{n-1} - v''_{n-1}\right) + \left(v'_{n-2} + v''_{n-2}\right)$$

و به این ترتیب، لم مورد نظر اثبات می‌شود.

اکنون فرض می‌کنیم v′ و v″ دو جواب از معادلهٔ (۱ . ۱۳) را نمایش دهند که متناسب نیستند؛ یعنی بی‌توجه به مقدار انتخابی ثابت c، اندیس nی چنان موجود باشد که $v'_n / v''_n \neq c$. دراین صورت، نشان می‌دهیم که دنبالهٔ v که جوابی از معادلهٔ (۱ . ۱۳) است، می‌تواند به صورت:

$$c_1 v' + c_2 v'' \qquad (۱۴ . ۱)$$

بیان شود، که در آن c_1 و c_2 ثابت‌هایی هستند. در این رابطه، مرسوم است که به (۱ . ۱۴) به عنوان جواب عمومی «genral solution» معادلهٔ (۱ . ۱۳) اشاره شود.

ابتدا ثابت می‌کنیم هر گاه v′ و v″ ، دو جواب معادلهٔ (۱ . ۱۳) متناسب نباشند، آن‌گاه

$$\frac{v'_1}{v''_1} \neq \frac{v'_2}{v''_2} \qquad :(۱۵ . ۱)$$

یعنی، دو جملهٔ اولّیه دنباله‌های v′ و v″ ، متناسب بودن یا نبودن دنباله‌های مورد بحث را آشکار می‌کنند.

اثبات (۱ . ۱۵) را می‌توان با فرض نقیض مطلب انجام داد. فرض می‌کنیم دو جواب v′ و v″ معادله‌های (۱ . ۱۳) متناسب نباشند و با این حال، در

$$\frac{v'_1}{v''_1} \neq \frac{v'_2}{v''_2} \qquad (۱۶ . ۱)$$

صدق کنند.

از (۱ . ۱۶) تناسب مستخرج:

$$\frac{v'_1 + v'_2}{v''_1 + v''_2} = \frac{v'_2}{v''_2}$$

یا با در نظر گرفتن این موضوع که v′ و v″ جواب‌های معادلهٔ (۱ . ۱۳) اند،

$$\frac{v'_3}{v''_3} = \frac{v'_2}{v''_2}$$

را به دست می‌آوریم.

به طور مشابه وبا استدلالی استقرایی، به سادگی متقاعد می‌شویم که:

$$\frac{v'_3}{v''_3} = \frac{v'_4}{v''_4} = \ldots = \frac{v'_n}{v''_n} = \ldots$$

به این ترتیب، از (۱ . ۱۶) نتیجه می‌گیریم که دنباله‌های v′ و v″ متناسب‌اند، که این نتیجه، درستی فرض اولّیه‌مان را نقض می‌کند. این موضوع راستی (۱ . ۱۵) را محقق می‌کند.

زیر نویس ....

1.binomial coefficients
2.expansion
3.binomial formula
4.pascal's Triangles
5.Combination
6. rising diagonals

تقریب ریشهٔ سوم یک عدد

محمد حسین پورسعید
گروه ریاضی دانشگاه لرستان

مقدمه

با بهره‌گیری از مبحث دیفرانسیل (خطی سازی) می‌توان ریشهٔ سوم یک عدد را به صورت تقریبی[1] یا به طور دقیق و با دقت دلخواه تعیین کرد[2]. ولی نظر به این‌که یکی از اساسی‌ترین روش‌های تولید دانش، افزایش سطح توانایی در مدل سازی پدیده‌های مورد مطالعه است، روشی ارائه می‌شود که شهودی بودن، دقت بیش‌تر و عدم نیاز به اطلاعاتی در سطح بالا، از مزایای آن هستند.

بحث و نتایج

برای به‌دست آوردن تقریب ریشهٔ سوم یک عدد، شبیه روند تعیین جذر تقریبی اعداد، مندرج در کتاب ریاضی سال دوم دورهٔ راهنمایی تحصیلی[3] می‌توان به صورت زیر اقدام کرد.

فرض کنید که می‌خواهیم ریشهٔ سوم عددی مانند a را محاسبه کنیم. بدون آن که خللی به کلیت مسأله وارد آید، فرض می‌شود که a عددی مثبت است. پس در واقع باید اندازهٔ ضلع مکعبی با حجم a را تعیین کنیم. اگر ضلع مکعب را با b نشان دهیم، داریم:

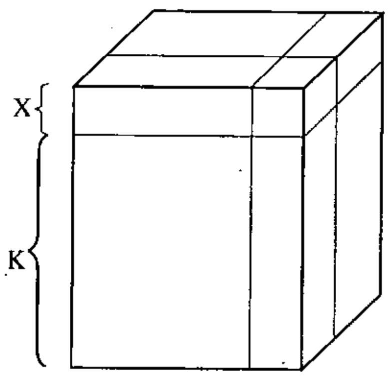
$$a = b^3 \Rightarrow b = \sqrt[3]{a}$$

$\sqrt[3]{x}$

حال اگر عدد a مکعب کامل نباشد، می‌توان دو مکعب با اضلاع مشخص را به گونه‌ای یافت که یکی از آن‌ها محیط بر مکعب مورد نظر (با حجم a) و دیگری محاط در آن باشند. در نتیجه اندازهٔ ضلع مکعب با حجم a و در واقع ریشهٔ سوم a بین اندازه‌های اضلاع مکعب‌های محیطی و محاطی خواهد بود. به عنوان مثال، در تعیین ریشهٔ سوم ۲۸ می‌توان دو مکعب با اضلاع ۳ و ۴ را به عنوان مکعب‌های محاطی و محیطی در نظر گرفت. در این صورت، ریشهٔ سوم ۲۸ عددی بین ۳ و ۴ است. به طور دقیق‌تر می‌توان به صورت زیر عمل کرد:

$$(۳/۰۱)^۳ = ۲۷/۲۷ < ۲۸ < ۲۹/۷۹۱ = (۳/۱)^۳$$

در این حالت ریشهٔ سوم ۲۸ بین ۳/۰۱ و ۳/۱ خواهد بود.



اگر k را اندازهٔ ضلع مکعبی بدانیم که حجم آن نزدیک‌ترین مقدار به a است و تفاضل بین ضلع این مکعب و ضلع مکعب مورد نظر را با x نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$x = k - b \Rightarrow b = k - x,$$
$$a = b^3 = (k-x)^3 = k^3 - 3k^2x + 3kx^2 - x^3 \qquad (1)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، تعیین ریشهٔ سوم a منوط به محاسبهٔ مقدار x و در واقع تعیین تنها ریشهٔ تابع درجه سوم $f(x) = -x^3 + 3kx^2 - 3k^2x + k^3 - a$ است. از طرفی اگر مکعب محیطی یا محاطی را خیلی نزدیک به مکعب مورد نظر انتخاب کنیم، آن‌گاه مقدار x خیلی کوچک و در نتیجه مقدار x^3 به مراتب کوچک‌تر خواهد شد که در این صورت با حذف x^3 از f(x) تابع درجه دوم $g(x) = 3kx^2 - 3k^2x + k^3 - a$ را در نظر می‌گیریم. به همین صورت، همان‌طور در تعیین جذر تقریبی [۱] از مساحت یک عنصر مربعی کوچک صرف‌نظر می‌شود، در این‌جا نیز از حجم یک عنصر مکعبی چشم‌پوشی می‌کنیم).

حال با توجه به وضعیت نمودار f(x) و g(x) و تلاقی آن‌ها در $x=0$ و فرض انتخاب مکعب‌های محیطی یا محاطی خیلی نزدیک به مکعب مورد نظر، در می‌یابیم که تنها ریشهٔ f(x) خیلی نزدیک به ریشهٔ کوچک‌تر g(x) (و نزدیک به صفر) خواهد شد. لذا می‌توان تنها ریشهٔ f(x) را توسط ریشهٔ کوچک‌تر g(x) تقریب زد. بنابراین، اگر x_0 را ریشهٔ کوچک‌تر g(x) و x^* را تنها ریشهٔ f(x) بدانیم، آن‌گاه با توجه به رابطهٔ ۱ خواهیم داشت:

$$g(x_0) = 0\ ,\ f(x^*) = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{a} = k - x^* \approx k - x_0$$
$$g(x) = 3kx^2 - 3k^2x + k^3 - a = 0 \Rightarrow x_1, x_2 = \frac{k}{2} \pm \sqrt{\frac{4a - k^3}{12k}}$$
$$\Rightarrow x_0 = \frac{k}{2} - \sqrt{\frac{4a - k^3}{12k}}$$

جهت خوش تعریف بودن رابطهٔ ۲ باید نامنفی بودن $4a-k^3$ را ثابت کنیم:

الف) در حالتی که حجم مکعب محاطی نزدیک‌ترین مقدار به a باشد، داریم:

$$k^3<a \Rightarrow k^3<a<4a \Rightarrow 4a-k^3>0$$

ب) در حالتی که حجم مکعب محیطی نزدیک‌ترین مقدار به a باشد، $a<k^3$ خواهد بود. اگر فرض شود که $4a-k^3<0$ در دو حالت $a<\frac{k^3}{8}<\frac{k^3}{4}$ یا $\frac{k^3}{8}<a<\frac{k^3}{4}$ به‌آسانی می‌توان نشان داد:

$$\left|\frac{k^3}{8}-a\right|<\left|k^3-a\right|=k^3-a$$

در این صورت به‌جای مکعب محیطی با ضلع k، باید مکعب با ضلع $\frac{k}{2}$ به عنوان مکعب نزدیک‌تر در نظر گرفته شود و در واقع انتخاب مکعب با ضلع k با فرض کوچک بودن x در تعارض است.

پس به‌طور کلی، نمی‌توان منفی بودن $4a-k^3$ را پذیرفت. بنابراین با توجه به روابط (۱) و (۲) داریم:

(۳)

$$4a-k^3\ge 0 \Rightarrow a\ge\frac{k^3}{4}>\frac{k^3}{8}\Rightarrow \sqrt[3]{a}>\frac{k}{2}$$

(۴)

$$\Rightarrow \sqrt[3]{a}\approx\frac{k}{2}+\sqrt{\frac{4a-k^3}{12k}}$$

مثال) در تعیین مقدار تقریبی ریشهٔ سوم ۲۸ داریم:

$$3^3=27<28<64=4^3$$

$$\Rightarrow k=3 \Rightarrow \sqrt[3]{28}\approx\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{4(28)-27}{12\times 3}}\cong 3/037$$

که اختلاف آن با مقدار دقیق $\sqrt[3]{28}$ کم‌تر از ۰/۰۰۰۰۲ است. در صورتی که اگر از مبحث دیفرانسیل (خطی سازی) استفاده شود، با محاسبهٔ عبارت $\sqrt[3]{28}\cong 3+\frac{28-27}{3\times 3^2}$ در می‌یابیم که به‌کارگیری دیفرانسیل در مقایسه با روش پیشنهادی از دقت کم‌تری برخوردار است. البته این امر اتفاقی نیست. نشان می‌دهیم که در حالت کلی، اگر k اندازهٔ ضلع مکعب محاطی باشد، روش پیشنهادی در مقایسه با روش به‌کارگیری دیفرانسیل دقیق‌تر است.

نظر به مقعر بودن تابع $h(x)=\sqrt[3]{x}$ (به ازای $x>0$)، مقدار تقریبی محاسبه شده بر اساس استفاده از مبحث دیفرانسیل همواره بیش‌تر از مقدار طبیعی واقعی است. یعنی:

$$\sqrt[3]{a}<k+\frac{a-k^3}{3k^2}\approx\sqrt[3]{a}$$

از طرفی با توجه به رابطهٔ (۲) در می‌یابیم که x_0 عددی منفی است و

$$f(0)=k^3-a<0,\quad f(x_0)=g(x_0)-(x_0)^3=-(x_0)^3>a$$

بنابراین طبق قضیهٔ مقدار میانی، تنها ریشهٔ $f(x)$ در فاصلهٔ $(x_0,0)$ قرار دارد[۴]. پس:

$$x_0<x^*<0\Rightarrow \sqrt[3]{a}=k-x^*<k-x_0\approx\sqrt[3]{a}$$

بنابراین بر اساس استفاده از روش پیشنهادی نیز مقدار تقریبی بیش‌تر از مقدار واقعی است. در این صورت به‌آسانی می‌توان صحت نامعادلهٔ زیر را که نشان دهندهٔ برتری روش پیشنهادی و دقت بیش‌تر آن‌است، نشان داد.

$$\left|k+\frac{a-k^3}{3k^2}-\sqrt[3]{a}\right|=k+\frac{a-k^3}{3k^2}-\sqrt[3]{a}>\frac{k}{2}+\sqrt{\frac{4a-k^3}{12k}}-\sqrt[3]{a}$$
$$=\left|\frac{k}{2}+\sqrt{\frac{4a-k^3}{12k}}-\sqrt[3]{a}\right|$$

منابع

۱. حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱) و (۲). دورهٔ پیش‌دانشگاهی. رشتهٔ علوم ریاضی. چاپ پنجم. ۱۳۷۸. ص ۱۸۱-۱۷۶.

۲. مجلهٔ ریاضی برهان. برای دانش‌آموزان دبیرستان. شمارهٔ ۳۵. صفحات ۴۲ و ۴۳.

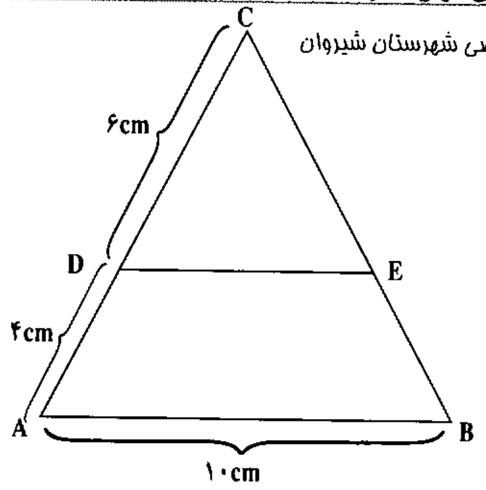
۳. ریاضی سال دوم دورهٔ راهنمایی تحصیلی. چاپ ۱۳۷۹. صفحهٔ ۵۰.

۴. حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱) و (۲). دورهٔ پیش‌دانشگاهی. رشتهٔ علوم ریاضی. چاپ پنجم. ۱۳۷۸. ص۶۹.

حل يك مسألهٔ هندسه به كمك ترسيم

برای دانش‌آموزان سال اول متوسطه

علی باقری شادمان، دبیر ریاضی شهرستان شیروان



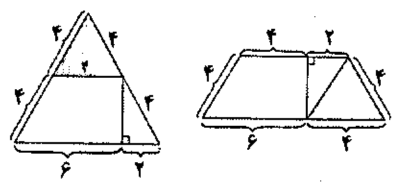
مسأله:

مثلث ABC، مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۱۰ cm است و پاره‌خط DE را طوری رسم کرده‌ایم که: AD=۴cm و AB || DE. به چند طریق می‌توان، تنها با دو برش روی ذوزنقه ABED، یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۸cm ساخت؟

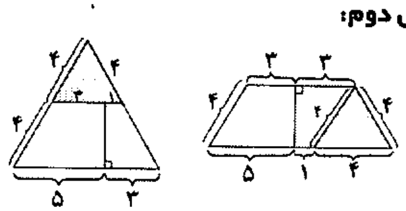
حل: چون مثلث ABC متساوی‌الاضلاع و DE || AB است، پس مثلث CDE متساوی‌الاضلاع و ذوزنقهٔ ABED متساوی‌الساقین است. بنابراین: DE=۶cm و EB=۴cm.

اکنون، برخی از روش‌های حل مسأله را در ادامه می‌آوریم. برای هر روش، در سمت راست، ذوزنقهٔ ABCD و چگونگی برش آن و در سمت چپ، مثلث متساوی‌الاضلاع ساخته شده و به ضلع ۸cm، رسم شده است.

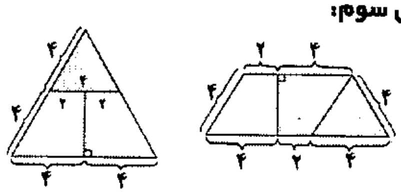
۱. روش اول:



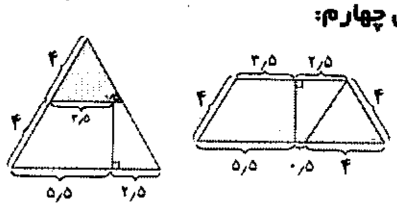
۲. روش دوم:



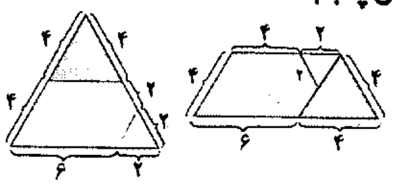
۳. روش سوم:



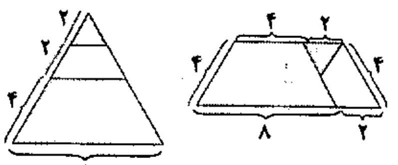
۴. روش چهارم:



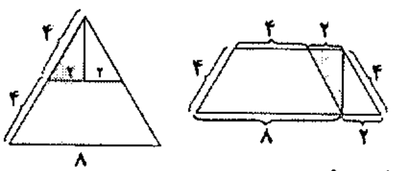
۵. روش پنجم:



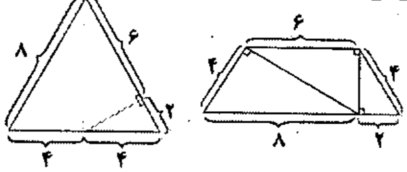
۶. روش ششم:



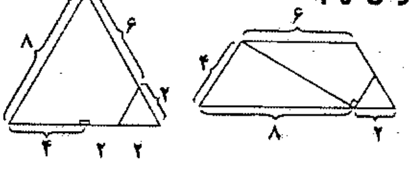
۷. روش هفتم:



۸. روش هشتم:



۹. روش نهم:



وارون ماتریس

تعریف، قضیه ها و مسأله ها

حمیدرضا امیری

وقتی صحبت از وارون می‌شود، بلافاصله وارون یک عدد حقیقی مانند a، یعنی $\frac{1}{a}$ در ذهن تصور می‌شود و این خاصیت که حاصل ضرب هر عدد در وارونش، عضو خنثی در عمل ضرب، یعنی ۱ را نتیجه می‌دهد. ($a \times \frac{1}{a} = 1$) البته شرط $a \neq 0$ برای وجود $\frac{1}{a}$، شرطی لازم و کافی است و می‌توان به جای $\frac{1}{a}$ از نماد a^{-1} استفاده کرد. در مجموعهٔ ماتریس‌ها نیز، شبیه تعریف فوق برای وارون هر ماتریس، یک ماتریس مربعی وجود دارد و می‌توان از آن الهام گرفت!

تعریف: اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد و ماتریسی چون B وجود داشته باشد؛ به‌طوری که $AB = BA = I$ (I ماتریس واحد از مرتبهٔ n است) در این صورت، ماتریس B را وارون A می‌نامند و با A^{-1} نمایش می‌دهند. در این صورت، A را وارون‌پذیر یا نامنفرد می‌نامیم.

تذکر: اگر $AB = BA = I$، A وارون B است و B نیز وارون A است؛ یعنی $B = A^{-1}$ و $A = B^{-1}$.

مثال. ماتریس $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ مفروض است. نشان دهید که ماتریس $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ وارون ماتریس A است.

حل: طبق تعریف، کافی است $AB = BA = I$ (در آینده، قضیه‌ای ثابت می‌کنیم که بر اساس آن، برای این که B وارون A باشد، کافی است $AB = I$ یا $BA = I$).

$$A \times B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } B \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

قضیهٔ یکتایی وارون: وارون هر ماتریس، در صورت وجود، منحصر به فرد است.

اثبات: فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ و دارای دو وارون باشد. ثابت می‌کنیم این دو وارون باهم برابرند. فرض کنیم B و C هر دو وارون A باشند، پس طبق تعریف $AB = BA = I$ و $AC = CA = I$،

$$B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$$

قضیهٔ یکتایی وارون در به‌دست‌آوردن وارون یک ماتریس، می‌تواند مؤثر باشد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال. اگر $A(2I + A) = (2I + A)A = I$ بلافاصله از قضیهٔ یکتایی وارون، نتیجه می‌شود $A^{-1} = (2I + A)$.

نکتهٔ مهم: اگر k یک عدد حقیقی و ناصفر باشد، در این صورت kI ماتریسی وارون‌پذیر و وارون آن $(\frac{1}{k}I)$ است؛ زیرا:

$$(\frac{1}{k}I)(kI) = (kI)(\frac{1}{k}I) = (k \times \frac{1}{k})(I \times I) = 1 \times I = I$$

درنتیجه بنا به قضیهٔ یکتایی وارون داریم:

$$(kI)^{-1} = (\frac{1}{k}I), (\frac{1}{k}I)^{-1} = (kI)$$

در قضیهٔ بعدی، شرط برقراری قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها بیان می‌شود:

قضیه: اگر A ماتریسی وارون‌پذیر باشد (A^{-1} وجود داشته باشد) و B و C دو ماتریس دلخواه باشند، به‌طوری که AB و AC تعریف شود، در این صورت داریم:

$$AB = AC \Rightarrow B = C$$

اثبات: چون A وارون‌پذیر است، پس A^{-1} وجود دارد. حال، اگر طرفین فرض را از چپ در A^{-1} ضرب کنیم، حکم به‌دست می‌آید.

$$AB = AC \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \Rightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C$$
$$\Rightarrow IB = IC \Rightarrow B = C$$

نتیجهٔ ۱: در حالت خاص، اگر $A = [K]$ ماتریسی 1×1 باشد و $K \neq 0$، در این صورت داریم:

$$KB = KC \Rightarrow B = C$$

نتیجهٔ ۲: اگر A ماتریسی وارون‌پذیر باشد و داشته باشیم: $AB = \overline{O}$، در این صورت داریم: $B = \overline{O}$؛ زیرا:

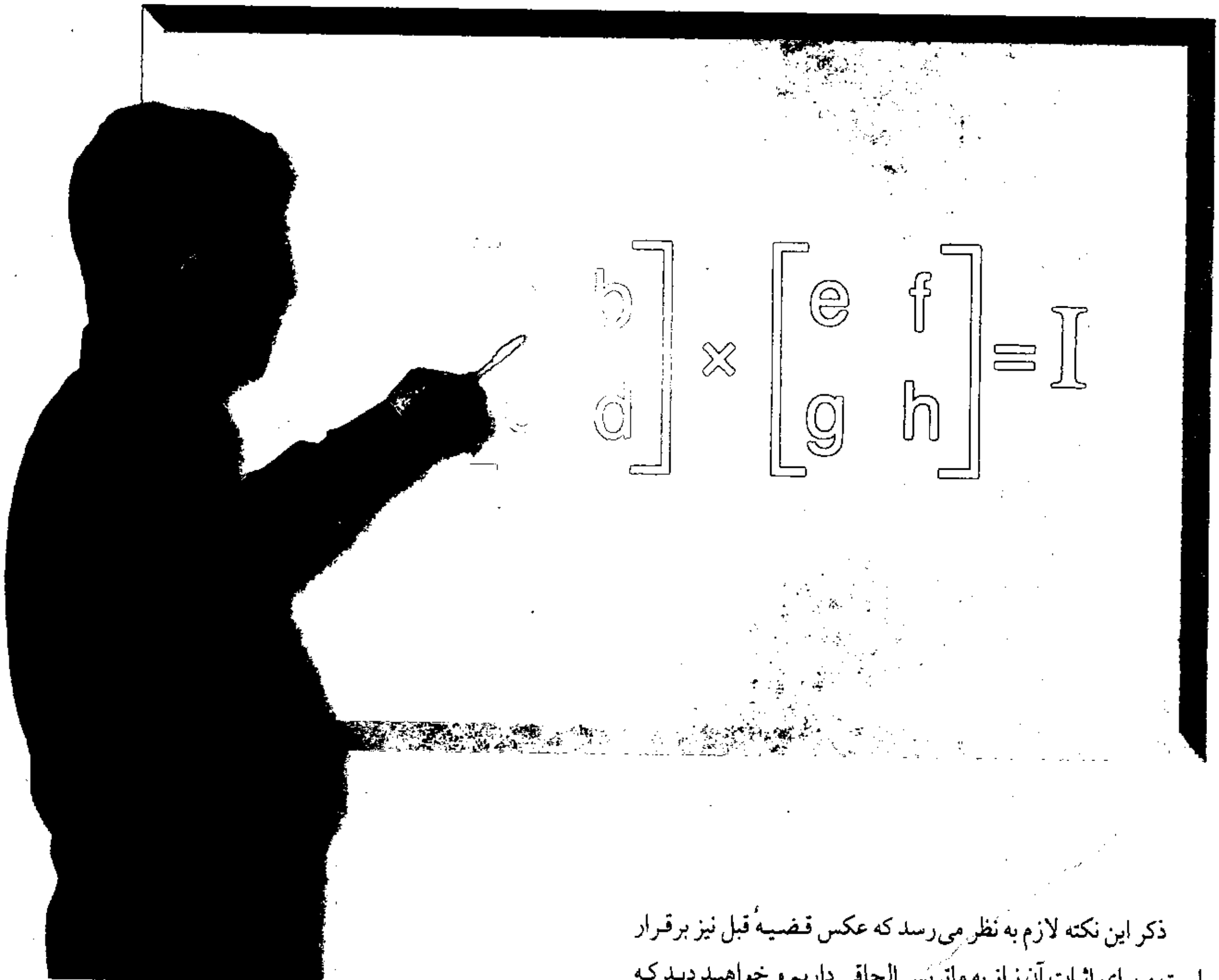
$$AB = \overline{O} \Rightarrow AB = A\overline{O} \Rightarrow B = \overline{O}$$

قضیه: اگر A ماتریسی وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه $|A| \neq 0$ است.

اثبات: طبق تعریف وارون داریم:

$$AA^{-1} = I \Rightarrow |AA^{-1}| = |I| \Rightarrow |A||A^{-1}| = 1$$
$$\Rightarrow |A| \neq 0$$

برای دانش آموزان دوره متوسطه



ذکر این نکته لازم به نظر می‌رسد که عکس قضیهٔ قبل نیز برقرار است و برای اثبات آن نیاز به ماتریس الحاقی داریم و خواهید دید که هنگام اثبات قضیه، به دستوری برای محاسبهٔ A^{-1} در حالت کلّی دست می‌یابیم.

قضیه: اگر A ماتریسی مربعی و $|A| \neq 0$، آن‌گاه A وارون‌پذیر است و داریم:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times A^* \quad (\text{ماتریس الحاقی A است } A^*)$$

اثبات: اگر A^* ماتریس الحاقی A باشد، ابتدا نشان می‌دهیم که:

$$AA^* = A^*A = |A|I \qquad (1)$$

کتاب درسی برقراری رابطهٔ (۱) را فقط برای ماتریس‌های ۳×۳ بررسی کرده است؛ ولی این رابطه در حالت کلّی نیز برقرار است. درواقع، قبلاً متذکّر شدیم که:

$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots a_{in}A_{in}$ بر حسب سطر iام

$|A| = a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \cdots a_{jn}A_{jn}$ بر حسب ستون jام

حال، اگر بخواهیم تساوی (۱) را اثبات کنیم، باید نشان دهیم درایهٔ عمومی AA^* با درایهٔ عمومی $|A|I$ برابر است.

درایهٔ روی سطر iام و ستون jام = درایهٔ عمومی AA^*

= سطر iام A × ستون jام A^*

ستون jام A^* درواقع همان سطر jام ماتریس همسازه است.

$$= \begin{bmatrix} a_{i1} a_{i2} \cdots a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ \vdots \\ A_{jn} \end{bmatrix}$$

$$= a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots a_{in}A_{jn} = k$$

حال اگر $i = j$، واضح است که: $k = |A|$

$$i = j \Rightarrow k = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = |A|$$

و اگر $i \neq j$، ثابت می‌شود $k = 0$؛ زیرا اگر فرض کنیم ماتریس B فقط در سطر jام با A تفاوت داشته باشد، به‌جای سطر jام A از سطر iام A استفاده کنیم؛ یعنی:

$$B = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \text{سطر jام} \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

واضح است که دو سطر B با هم برابر و همواره ۰ = |B| است و داریم:

$|B| = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0$ بر حسب سطر زام

پس ثابت شد اگر $i \neq j$ ، همواره ۰ = k ؛ یعنی:

$$\text{درایهٔ عمومی } AA^* = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ |A| & i = j \end{cases} = \text{درایهٔ عمومی } |A|I$$

و به همین ترتیب ثابت می‌شود که $A^*A = |A|I$. پس می‌توان نوشت:

$$AA^* = A^*A = |A|I$$

که طرفین رابطهٔ فوق را با توجه به فرض ($|A| \neq 0$) اگر بر $|A|$ تقسیم کنیم یا در $\frac{1}{|A|}$ ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$A(\frac{1}{|A|}A^*) = (\frac{1}{|A|}A^*)A = I$$

و با توجه به قضیهٔ یکتایی وارون، بلافاصله نتیجه می‌شود که:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$

تذکر ۱: توجه داشته باشید که در حلّ مسأله‌ها یا پرسش‌های چهارگزینه‌ای، برای محاسبهٔ (AA^*) یا (A^*A) با فرض معلوم بودن A ، نیازی به محاسبهٔ وقت‌گیر A^* نیست و حاصل هریک، همان $(|A|I)$ است.

تذکر ۲: اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریسی ۲×۲ و دلخواه باشد و $|A| \neq 0$ ، در این صورت، با توجه به تعریف A^* ، واضح است که $A^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ (جای درایه‌های روی قطر اصلی عوض و قطر فرعی در (۱-) ضرب شده است) و طبق قضیهٔ قبل داریم:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

نتیجه: تمام ماتریس‌های دوران حول مبدأ به اندازهٔ α ، یعنی R_α وارون‌پذیرند و $(R_\alpha)^{-1} = R_{-\alpha}$ ؛ زیرا:

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} \text{Cos}\alpha & -\text{Sin}\alpha \\ \text{Sin}\alpha & \text{Cos}\alpha \end{bmatrix}, \ |R_\alpha| = 1 \neq 0$$

$$\Rightarrow R_\alpha^{-1} = \begin{bmatrix} \text{Cos}\alpha & \text{Sin}\alpha \\ -\text{Sin}\alpha & \text{Cos}\alpha \end{bmatrix} = R$$

(جای درایه‌های قطر اصلی عوض و قطر منفی در (۱-) ضرب و همهٔ درایه‌ها بر $|R_\alpha| = 1$ تقسیم شده‌اند.)

قضیه: اگر A و B دو ماتریس مربع هم‌مرتبه و $\alpha \neq 0$ و $AB = \alpha I$ ، در این صورت A و B وارون‌پذیرند و $AB = BA$.

اثبات:

$$AB = \alpha I \Rightarrow |AB| = |\alpha I| \Rightarrow |A|\ |B| = \alpha^n |I| = \alpha^n$$

$\alpha \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0 \ , \ |B| \neq 0 \ \Rightarrow$ A و B وارون‌پذیرند

حال، طرفین رابطهٔ فرض را از چپ در A^{-1} و از راست در A ضرب می‌کنیم؛ خواهیم داشت:

$$AB = \alpha I \Rightarrow A^{-1}(AB)A = A^{-1}(\alpha I)A$$
$$\Rightarrow (A^{-1}A)(BA) = \alpha(A^{-1}I)A \Rightarrow I(BA) = \alpha A^{-1}A = \alpha I$$
$$\Rightarrow BA = \alpha I$$

پس ثابت شد $AB = BA = \alpha I$.

نتیجه: در حالت خاص، اگر $\alpha = 1$ ، در این صورت از تساوی $AB = I$ نتیجه می‌شود که A و B وارون‌پذیرند و $BA = I$ و طبق تعریف وارون، فقط از $AB = I$ می‌توان نتیجه گرفت که A وارون B و B وارون A است.

ویژگی‌های وارون در ماتریس‌ها

اگر A و B ماتریس‌هایی مربعی، هم‌مرتبه و وارون‌پذیر باشند و λ یک عدد حقیقی باشد، در این صورت، ویژگی‌های زیر همگی برقرارند.

تذکر: برای اثبات این که دو ماتریس وارون یکدیگر باشند، کافی است ضرب آن‌ها مساوی با I شود.

ویژگی ۱: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

اثبات

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = (AI)A^{-1} = AA^{-1} = I$$

چون حاصل ضرب این دو ماتریس I است، پس طبق قضیهٔ یکتایی، باید وارون یکدیگر باشند، یعنی $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

ویژگی ۲: $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$

اثبات: $(\lambda A)(\frac{1}{\lambda}A^{-1}) = (\lambda \times \frac{1}{\lambda})(AA^{-1}) = 1 \times I = I$

یکتایی وارون $\Rightarrow \frac{1}{\lambda}A^{-1} = (\lambda A)^{-1}$

ویژگی ۳: اگر A^t ترانهادهٔ A باشد، داریم:

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

اثبات:

$$AA^{-1} = I \Rightarrow (AA^{-1})^t = I^t \Rightarrow (A^{-1})^t A^t = I$$

یکتایی وارون $\Rightarrow (A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

تذکر ۱: ویژگی ۱ در حالت کلّی نیز برقرار و قابل تعمیم است؛ یعنی:

$$(A_1A_2\ldots A_n)^{-1}=A_n^{-1}A_{n-1}^{-1}\ldots A_2^{-1}A_1^{-1}$$

(به کمک استقراء تساوی بالا را ثابت کنید.)

و اگر $A=A_1=A_2=\ldots=A_n$، در این صورت داریم: $(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$.

تذکر ۲: برای وارون حاصل جمع، رابطه و فرمولی وجود ندارد؛ یعنی برای محاسبهٔ $(A+B)^{-1}$ می‌باید A و B را با هم جمع کنیم و سپس وارون حاصل را به دست آوریم.

تذکر ۳: توان منفی در ماتریس‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A^{-n}=(A^{-1})^n$$

تذکر ۴: وارون هر ماتریس بالا مثلثی (پایین مثلثی) ماتریسی بالا مثلثی (پایین مثلثی) است.

تذکر ۵: هر ماتریس بالا (پایین) مثلثی که تمام درایه‌های روی قطر در آن ناصفر باشند، وارون‌پذیر است.

تذکر ۶: در هر ماتریس قطری و وارون‌پذیر $(\forall i\ ;\ a_{ii}\neq 0)$ برای محاسبهٔ وارون، کافی است درایه‌های روی قطر را وارون کنیم. به مثال توجه کنید:

$$A=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&4&0\\0&0&\frac{2}{3}\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

مسائل حل شده

* **مسألهٔ ۱**: اگر A ماتریسی وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه داریم:

$$|A^{-1}|=|A^{-1}|$$

اثبات:

$$AA^{-1}=I\Rightarrow |A||A^{-1}|=|I|=1\Rightarrow |A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=|A|^{-1}$$

* **مسألهٔ ۲**: اگر A ماتریسی $n\times n$ و وارون‌پذیر و A^* ماتریس الحاقی A باشد، آن‌گاه داریم: $|A^*|=|A|^{n-1}$

اثبات:

$$AA^*=|A|I\Rightarrow |A||A^*|=\big||A|I\big|=|A|^n|I|=|A|^n$$

$$\Rightarrow |A^*|=\frac{|A|^n}{|A|}=|A|^{n-1}$$

نتیجه: اگر A ماتریسی 2×2 باشد، همواره داریم: $|A^*|=|A|$؛ و اگر A ماتریسی $n\times n$ و n فرد باشد، همواره $|A^*|$ عدد مربع کاملی است.

* **مسألهٔ ۳**: اگر A ماتریسی $n\times n$، وارون‌پذیر و $(A^*)^*$ ماتریس الحاقیِ الحاقی A باشد، آن‌گاه داریم:

$$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$$

اثبات: می‌دانیم حاصل ضرب هر ماتریس در الحاقیِ خودش، مضربی از I خواهد بود که آن مضرب دترمینان خود آن است. پس می‌توان نوشت:

$$(A^*)(A^*)^*=|A^*|I\Rightarrow A\big[(A^*)(A^*)^*\big]=A\big(|A^*|I\big)$$

$$\Rightarrow (AA^*)(A^*)^*=|A^*|(AI)\Rightarrow (|A|I)(A^*)^*=|A^*|A$$

$$\Rightarrow \quad |A|\big(I(A^*)^*\big)=|A|^{n-1}A\Rightarrow (A^*)^*=\frac{|A|^{n-1}}{|A|}A$$

$$\Rightarrow (A^*)^*=|A|^{n-2}A$$

نتیجه: اگر A ماتریسی 2×2 باشد، در این صورت الحاقیِ الحاقیِ A با خود A برابر است.

مسألهٔ ۴: اگر A ماتریسی پوچ توان از مرتبهٔ n باشد، در این صورت $(I-A)$ وارون‌پذیر و وارون آن، ماتریس $(I+A+A^2+\cdots+A^{n-1})$ است.

اثبات: چون IA=AI، پس اتّحاد زیر برقرار است:

$$(I^n-A^n)=(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^{n-1})$$

$$\xrightarrow{A^n=\overline{O}}(I-A)(I+A+\cdots+A^{n-1})=I$$

$$\xrightarrow{\text{یکتایی وارون}}(I-A)^{-1}=(I+A+\cdots+A^{n-1})$$

تمرین: در مسألهٔ قبل، اگر مرتبهٔ پوچ توانی ماتریس یعنی n فرد باشد، ثابت کنید (A+I) وارون‌پذیر و وارون آن $(A_{-}^{n-1}A_{+}^{n-2}\cdots+I)$ است.

مسألهٔ ۵: اگر ماتریس A در چند جمله‌ای $\alpha_nx^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\alpha x+\beta=0$ صدق کند، در این صورت A وارون‌پذیر و وارون آن ماتریس زیر است.

$$\left(\frac{\alpha_n}{-\beta}x^{n-1}+\frac{\alpha_{n-1}}{-\beta}x^{n-2}+\cdots+\frac{\alpha}{-\beta}I\right)$$

اثبات: طبق فرض، ماتریس A در چند جمله‌ای داده شده صدق می‌کند. پس:

$$\alpha_nA^n+\alpha_{n-1}A^{n-1}+\cdots+\alpha A+\beta I=\overline{O}$$

$$\Rightarrow \alpha_nA^n+\cdots+\alpha A=-\beta I\Rightarrow A(\alpha_nA^{n-1}+\cdots+\alpha I)=-\beta I$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{\alpha_n}{-\beta}A^{n-1}+\cdots+\frac{\alpha}{-\beta}I\right)=I$$

$$\xrightarrow{\text{یکتایی وارون}}A^{-1}=\left(\frac{\alpha_n}{-\beta}A^{n-1}+\cdots+\frac{\alpha}{-\beta}I\right)$$

برای مثال، اگر A ماتریسی مربعی و در معادلهٔ $x^2 - 4x - 2 = 0$ صدق کند، در این صورت داریم:

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{2}A - 2I\right)$$

مسألهٔ ۶: اگر A ماتریسی وارون‌پذیر و B هم مرتبهٔ A و ماتریس‌های (A+B) و (A−B) نیز وارون‌پذیر باشند، ثابت کنید:

الف) $(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B)$

ب) $(A-B)^{-1}A(A+B)^{-1} = (A+B)^{-1}A(A-B)$

اثبات: الف) ثابت می‌کنیم دو طرف تساوی با یک مقدار مساوی‌اند.

سمت چپ تساوی $= (A+B)(I - A^{-1}B)$

$= A - IB + B - BA^{-1}B = A - B$

سمت راست تساوی $= (I - BA^{-1})(A+B)$

$= A + B - BI - BA^{-1}B = A - BA^{-1}B$

ب) کافی است دو طرف رابطهٔ (الف) را وارون کنیم:

$$\left[(A+B)A^{-1}(A-B)\right]^{-1} = \left[(A-B)A^{-1}(A+B)\right]^{-1}$$

$$\Rightarrow (A-B)^{-1}(A^{-1})^{-1}(A+B)^{-1} = (A+B)^{-1}(A^{-1})^{-1}(A-B)^{-1}$$

$$\Rightarrow (A-B)^{-1}A(A+B)^{-1} = (A+B)^{-1}A(A-B)^{-1}$$

مسألهٔ ۷: اگر A و B ماتریس‌های وارون‌پذیر و تعویض‌پذیر باشند، ثابت کنید:

الف) A و B^{-1} تعویض‌پذیرند.

ب) A^{-1} و B تعویض‌پذیرند.

ج) A^{-1} و B^{-1} تعویض‌پذیرند.

اثبات:

الف) $AB = BA \Rightarrow B^{-1}(AB)B^{-1} = B^{-1}(BA)B^{-1}$

$(B^{-1}A)\underbrace{(BB^{-1})}_{I} = \underbrace{(B^{-1}B)}_{I}(AB^{-1}) \Rightarrow B^{-1}A = AB^{-1}$

ب) $AB = BA \Rightarrow A^{-1}(AB)A^{-1} = A^{-1}(BA)A^{-1}$

$\underbrace{(A^{-1}A)}_{I}(BA^{-1}) = (A^{-1}B)\underbrace{(AA^{-1})}_{I} \Rightarrow BA^{-1} = A^{-1}B$

ج) $AB = BA \Rightarrow (AB)^{-1} = (BA)^{-1} \Rightarrow B^{-1}A^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

مسألهٔ ۸: اگر A و B ماتریس‌هایی متقارن و وارون‌پذیر و تعویض‌پذیر باشند، ثابت کنید ماتریس‌های A^{-1} و B^{-1} نیز متقارن‌اند و سپس، با توجه به مسألهٔ ۷ نتیجه بگیرید که ماتریس‌های $(A^{-1}B)$، (AB^{-1}) و $(A^{-1}B^{-1})$ نیز متقارن‌اند.

اثبات: باید ثابت کنیم ترانهاده‌های A^{-1} و B^{-1} با خودشان برابر است.

(چون A متقارن است، $A^t = A$)

$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1} = A$

$(B^{-1})^t = (B^t)^{-1} = B$

حال، چون A^{-1} و B^{-1} متقارن و با A و B تعویض‌پذیرند، یعنی: $(A^{-1}B = BA^{-1})$ و $(AB^{-1} = BA^{-1})$ و $(A^{-1}B^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})$ (مسألهٔ قبل ثابت شد.) و این نکته که ضرب دو ماتریس متقارن و تعویض‌پذیر، ماتریسی متقارن است؛ حکم به اثبات می‌رسد.

مسألهٔ ۹: اگر A ماتریسی n×n و هم مرتبه با ماتریس وارون‌پذیر B باشد، ثابت کنید: $(B^{-1}AB)^n = B^{-1}A^nB$

اثبات: به استقراء روی n داریم:

$n = 1 \Rightarrow (B^{-1}AB)^1 = B^{-1}A^1B$ تساوی برقرار است

$n = k \Rightarrow (B^{-1}AB)^k = B^{-1}A^kB$ فرض استقراء

$n = k+1 \Rightarrow (B^{-1}AB)^{k+1} = B^{-1}A^{k+1}B$ حکم استقراء

$$(B^{-1}AB)^{k+1} = (B^{-1}AB)^k(B^{-1}AB) \overset{\text{فرض}}{=} (B^{-1}A^kB)(B^{-1}AB)$$

$$= (B^{-1}A^k(BB^{-1})AB) = B^{-1}A^k(IA)B$$

$$= B^{-1}A^kAB = (B^{-1}A^{k+1}B)$$

مسألهٔ ۱۰: اگر یکی از دو ماتریس A یا B وارون‌پذیر باشند، ثابت کنید:

$$|AB - \lambda I| = |BA - \lambda I|$$

اثبات: فرض کنیم A وارون‌پذیر باشد. پس داریم: $AA^{-1} = I$ ، $|A||A^{-1}| = 1$، لذا با توجه به ویژگی‌های دترمینان‌ها داریم:

$$|AB - \lambda I| = |A^{-1}||A|\ |AB - \lambda I| = |A^{-1}|.|AB - \lambda I||A|$$

$$= |A^{-1}(AB - \lambda I)A| = |(A^{-1}AB - \lambda IA^{-1})A|$$

$$= |(IB - \lambda A^{-1})A| = |BA - \lambda A^{-1}A| = |BA - \lambda I|$$

مسألهٔ ۱۱: اگر A و B ماتریس‌های مربعی و هم مرتبه و AB=A+B باشد، در این صورت ثابت کنید که اگر A وارون‌پذیر باشد، B نیز وارون‌پذیر خواهد بود و داریم: $A^{-1} + B^{-1} = I$.

اثبات: چون A وارون‌پذیر است، پس داریم:

$$AB = A + B \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}(A+B)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(A^{-1}A)}_{I}B = \underbrace{(A^{-1}A)}_{I} + (A^{-1}B) \Rightarrow B = I + A^{-1}B$$

$$\Rightarrow B - A^{-1}B = I \Rightarrow B(I - A^{-1}) = I$$

$\Rightarrow |B||I - A^{-1}| = 1 \Rightarrow |B| \neq 0$ (B وارون‌پذیر است).

$$B(I - A^{-1}) = I \xrightarrow{\text{یکتایی وارون}} (I - A^{-1}) = B^{-1} \Rightarrow I = A^{-1} + B^{-1}$$

مسألهٔ ۱۲: اگر A و B دو ماتریس وارون‌پذیر و هم مرتبه باشند، ثابت کنید:

$$(AB)^* = B^*A^*$$

اثبات: (توجه دارید که $|AB|=|BA|=|A||B|\neq 0$)

می‌دانیم: $\frac{1}{|A|}A^*=A^{-1}$ ، $\frac{1}{|B|}B^*=B^{-1}$ ، $\frac{1}{|AB|}(AB)^*=(AB)^{-1}$

از طرفی: $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}=\left(\frac{1}{|B|}B^*\right)\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)=\frac{1}{|BA|}B^*A^*$

$$\Rightarrow \frac{1}{|AB|}(AB)^*=\frac{1}{|BA|}B^*A^*\Rightarrow (AB)^*=B^*A^*$$

تذکر: این مسأله قابل تعمیم است؛ یعنی در حالت کلّی داریم:

$$(A_1A_2\dots A_n)^*=A_n^*\dots A_2^*A_1^*$$

***مسألهٔ ۱۳**: ثابت کنید:

$$\left|(A^*)^*\right|=|A|^{(n-1)^2}$$

اثبات: اگر A ماتریسی $n\times n$ باشد، داریم:

ثابت کردیم: $\left|(A^*)^*\right|=|A^*|^{n-1}=\left(|A|^{(n-1)}\right)^{n-1}=|A|^{(n-1)^2}$

مسألهٔ ۱۴: اگر A ماتریسی متقارن $(A^t=A)$ و وارون‌پذیر باشد، ثابت کنید (A^*) نیز متقارن است.

اثبات:

می‌دانیم $AA^*=A^*A=|A|I\Rightarrow (A^*A)^t=(|A|I)^t$

$$A^t(A^*)^t=(|A|I)^t\Rightarrow (AA^*)^t=|A|I$$

(ماتریس $|A|I$ قطری و در نتیجه متقارن است.)

$$\Rightarrow A(A^*)^t=|A|I\Rightarrow AA^*$$

$$\Rightarrow A(A^*)^t=AA^*\xrightarrow{\text{A وارون پذیر}}(A^*)^t=A^*\Rightarrow \text{متقارن است}$$

مسألهٔ ۱۵: اگر A و B ماتریس‌های هم مرتبه و هر دو وارون‌پذیر باشند و داشته باشیم: $(AB)^2=A^2B^2$ ، ثابت کنید A و B تعویض‌پذیرند.

اثبات: $(AB)^2=(AB)(AB)=ABAB$

طبق فرض: $(AB)^2=A^2B^2=AABB$

$$\Rightarrow ABAB=AABB\xrightarrow{\text{A و B وارون پذیر}}A^{-1}(ABAB)B^{-1}$$

$$=A^{-1}(AABB)$$

$$\Rightarrow\left(\underbrace{A^{-1}A}_{I}\right)BA\left(\underbrace{BB^{-1}}_{I}\right)=\left(\underbrace{A^{-1}A}_{I}\right)AB\left(\underbrace{BB^{-1}}_{I}\right)\Rightarrow BA=AB$$

توجه: مسائلی را که با علامت ❊ مشخص شده است، می‌توانید به عنوان قضیه‌هایی در حالت کلی درنظر بگیرید.

تمرین

۱. ثابت کنید اگر A ماتریسی وارون‌پذیرباشد، A^n نیز وارون‌پذیر است و داریم: $\left(A^n\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^n$

۲. ثابت کنید اگر A ماتریسی وارون‌پذیر ومتقارن (پاد متقارن) باشد، A^{-1} نیز متقارن (پاد متقارن) است.

۳. اگر ماتریس A در معادلهٔ $A^3+2A^2-3A-2I=\bar{o}$ صدق کند، وارون A را بیابید.

۴. اگر A و B دو ماتریس هم مرتبه و وارون‌پذیر باشند و $AB=BA$ وهر دو خود توان باشند، ثابت کنید که برای هر عدد حقیقی $\lambda\neq 1$ ، ماتریس $D=\lambda AB+I$ وارون‌پذیر است و داریم: $D^{-1}=I-\frac{\lambda}{1+\lambda}AB$.

(راهنمایی: $DD^{-1}=I$ را تحقیق کنید.)

۵. اگر V ماتریسی وارون‌پذیر و $V^{-1}=V^t$ و D ماتریسی قطری باشد و داشته باشیم: $AV=VD$ ، ثابت کنید که A ماتریسی متقارن است.

۶. اگر B ماتریسی وارون‌پذیر باشد، ثابت کنید که:

$$\left|B^{-1}AB-\lambda I\right|=\left|A-\lambda I\right|$$

(راهنمایی: از تساوی $\lambda I=B^{-1}(\lambda I)B$ استفاده کنید.)

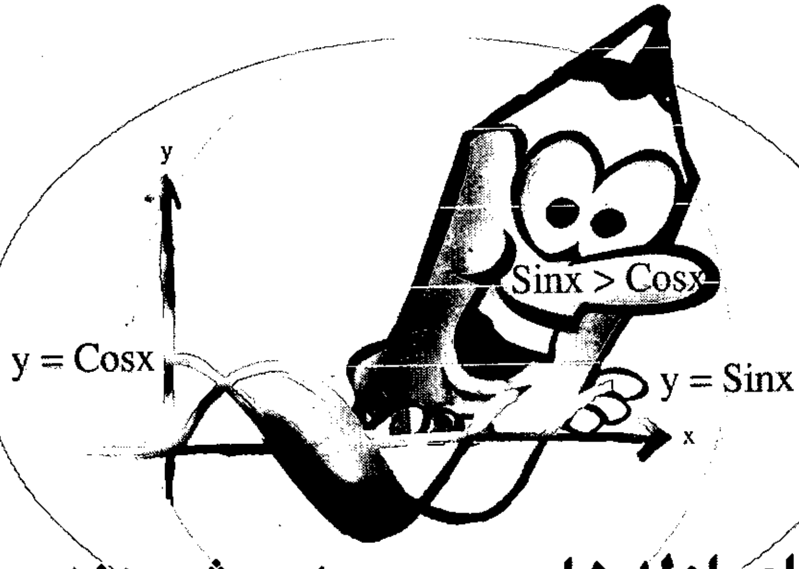
۷. ثابت کنید: $\left|\left((A^*)^*\right)^*\right|=|A|^{(n-1)^3}$

۸. ثابت کنید که اگر A ماتریسی پایین مثلثی باشد، در این صورت A^* (ماتریس الحاقی A) نیز پایین مثلثی است. (ماتریس همسازهٔ A، یعنی N چگونه است؟)

۹. دو ماتریس A و B را درصورتی هم‌نشست با هم می‌نامیم که ماتریسی وارون‌پذیر چون D باشد؛ به قسمتی که داشته باشیم: $B=D^tAD$. ثابت کنید رابطهٔ هم‌نشستی در ماتریس‌ها یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

۱۰. اگر داشته باشیم: $A=\left[a_{ij}\right]_{3\times 3}$ و $a_{ij}=\frac{(i+j)!}{i!j!}$ ، نشان دهید که A وارون‌پذیر است و وارون آن را بیابید.

۱۱. اگر A و B ماتریس‌هایی وارون‌پذیر باشند و داشته باشیم: $(AB)^2=A^2B^2$ ، ثابت کنید A و B تعویض‌پذیرند.



حلّ نامعادله های جبری به روش هندسی

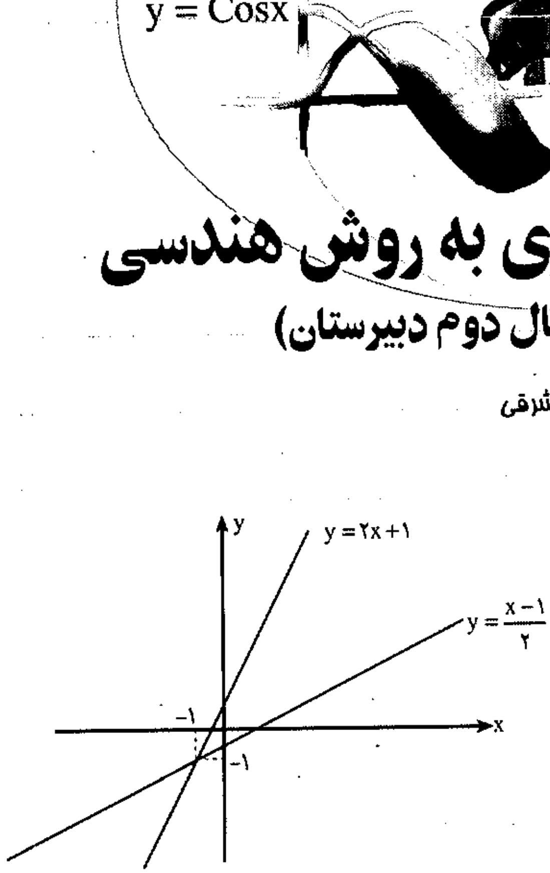
(برای دانش آموزان سال دوم دبیرستان)

هوشنگ شرقی

حلّ نامعادله های مختلف و یافتن مجموعهٔ جواب آن ها، از بحث های اساسی در ریاضیات پایه است که در کتاب های درسی نیز دربارهٔ آن بحث شده است. آنچه در این جا مورد نظر است، ارائهٔ راه‌حلّی برای نامعادله هاست که کم‌تر دربارهٔ آن بحث شده و آن، استفاده از نمودار هندسی توابع برای حلّ نامعادله هاست. می‌دانیم که هر نامعادله، دارای صورت کلّی $f(x) > g(x)$ است که f و g عبارت هایی (تابع هایی) بر حسب x هستند. برای یافتن مجموعهٔ جواب این نامعادله، کافی است نمودارهای توابع با ضابطه های $y = f(x)$ و $y = g(x)$ را رسم کنیم و مجموعهٔ طول های نقاطی را در نظر بگیریم که در آن نقاط، نمودار تابع f بالاتر از نمودار تابع g قرار داشته باشد. اکنون با چند مثال مختلف که از مثال های ساده‌تر شروع می‌شود، مطلب را روشن می‌کنیم.

مثال۱. مجموعه جواب نامعادلهٔ $2x + 1 > \frac{x-1}{2}$ را به‌دست آورید.

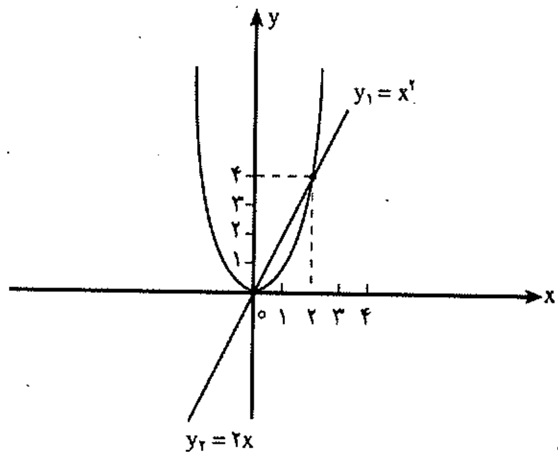
حل: نمودار تابع های f و g با ضابطه های $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = \frac{x-1}{2}$ را رسم می‌کنیم:



همچنان که در شکل ملاحظه می‌کنیم، نقطهٔ برخورد دو نمودار نقطهٔ $(-1 , -1)$ است که این نقطه را با حلّ معادلهٔ $f(x) = g(x)$ نیز می‌توان به دست آورد و برای کلیهٔ نقاط سمت راست این نقطه، خط $y = 2x + 1$ بالای خط $y = \frac{x-1}{2}$ قرار دارد، لذا مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ فوق، به صورت $\{x | x > -1\}$ است.

مثال۲. نامعادلهٔ $2x > x^2$ را حل کنید.

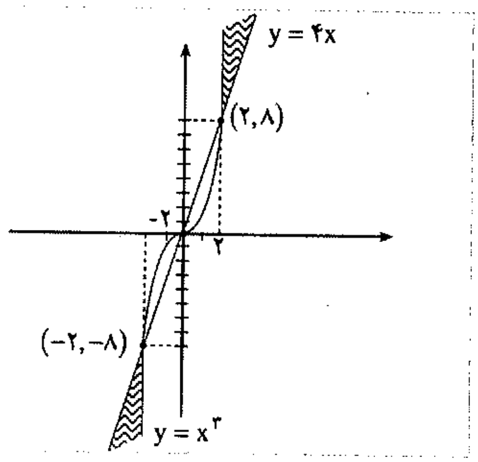
حل: در شکل صفحه بعد، نمودارهای توابع با ضابطه های $y_1 = x^2$ و $y_2 = 2x$ رسم شده‌اند:



چنان که ملاحظه می‌کنید، تنها برای $0 < x < 2$، نمودار خط $y = 2x$ بالای نمودار سهمی $y = x^2$ قرار دارد و جواب نامعادله نیز به صورت $0 < x < 2$ به‌دست می‌آید.

مثال۳. نامعادلهٔ $x^3 > 4x$ را حل کنید.

حل: نمودارهای توابع با ضابطه‌های $y = x^3$ و $y = 4x$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

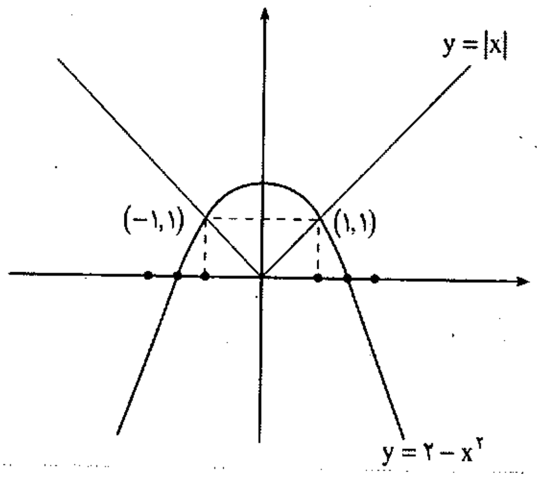


همان‌گونه که در شکل مشاهده می‌کنید، در دو محدودهٔ هاشورخورده، یعنی برای $-2 < x < 0$ و $x > 2$، نمودار منحنی $y = x^3$ بالاتر از نمودار خط $y = 4x$ قرار دارد. بنابراین مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ مزبور به صورت زیر نوشته می‌شود:

$\{x \mid -2 < x < 0$ یا $x > 2\}$

مثال۴. مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $x^2 + |x| > 2$ را به دست آورید.

حل: ابتدا نامعادلهٔ فوق را به صورت $|x| > 2 - x^2$ می‌نویسیم و سپس نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $y = 2 - x^2$ و $y = |x|$ را در یک شکل و به صورت زیر رسم می‌کنیم:



نقطه‌های (۱و۱) و (۱و۱-) نقاط برخورد منحنی‌های دو تابع هستند و به سادگی در شکل می‌بینید که به ازای $x > 1$ یا $x < -1$ نمودار $y = |x|$ بالای نمودار $y = 2 - x^2$ واقع می‌شود.

تمرین. مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $x^2 + |x| \le 2$ چیست؟

آزمون. مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\sqrt{1 - x^2} > 2x + 1$ کدام بازهٔ زیر است؟

۱) (۱ و ۰) ۲) (۰ و ۱-)

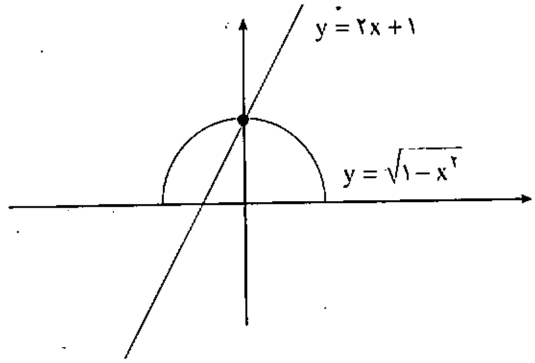
۳) (۱ و ۱-) ۴) (۰ و $-\frac{1}{2}$)

حل: اهمیت روش هندسی در حلّ نامعادلات، از مثال‌هایی این‌چنین بهتر روشن می‌شود؛ چرا که اگر بخواهیم مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ فوق را به روش جبری تعیین کنیم، مدت زمان نسبتاً زیادی صرف می‌شود؛ زیرا باید دو حالت مختلف $2x + 1 \ge 0$ و $2x + 1 < 0$ را بررسی کنیم. در حالت دوم، نامعادله به یک نامساوی همیشه درست تبدیل شده و مجموعهٔ جواب آن، دامنهٔ تعریف عبارت $\sqrt{1 - x^2}$ است که باید با جواب نامعادلهٔ $2x + 1 < 0$، اشتراک گرفته شود. در حالت دوم، می‌توانیم دو طرف نامعادله را به توان دو برسانیم و...

چنان که می‌بینید، روش فوق مدت زمان زیادی را صرف

می‌کند. اما به روش هندسی و با رسم نمودارهای $y=\sqrt{1-x^2}$ و $y=2x+1$، در زمان کوتاهی می‌توان پاسخ مسأله را به دست آورد و گزینهٔ صحیح را مشخص کرد.

نمودار $y=\sqrt{1-x^2}$، همان نمودار $x^2+y^2=1$ با شرط $y>0$ است، لذا شکل آن نیم‌دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع ۱ و در قسمت بالای محور xهاست. نمودار $y=2x+1$ نیز یک خط راست است. در زیر، نمودارهای دو تابع رسم شده‌اند:

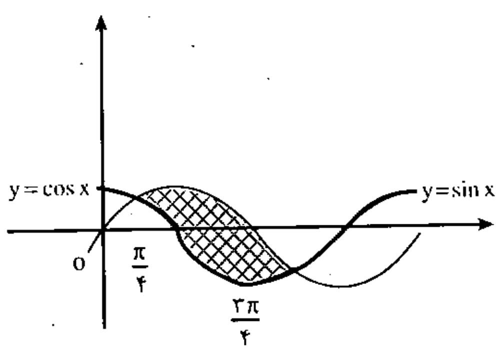


و چنان که در شکل ملاحظه می‌کنید، به سادگی روشن است که فقط وقتی $-1<x<0$ باشد، نمودار نیم‌دایره، بالای نمودار خط واقع می‌شود و پاسخ صحیح، گزینه (۲) است.

روشی که در مورد حلِ نامعادلات جبری ذکر شد، برای حلِ نامعادله‌های غیرجبری (مانند نامعادلات مثلثاتی، لگاریتمی و...) نیز قابل استفاده است. به یک مثال در این زمینه توجه کنید:

مثال. مجموعهٔ جواب نامعادله $\sin x > \cos x$ را با شرط $0 \le x \le 2\pi$ به دست آورید.

حل: نمودارهای $y=\sin x$ و $y=\cos x$ را در شکل زیر، در یک دستگاه مختصات رسم کرده‌ایم:



نقطه‌های برخورد دو منحنی در بازهٔ $[0,2\pi]$، دارای طول‌های $x_1=\frac{\pi}{4}$ و $x_2=\frac{3\pi}{4}$ هستند (این نقاط را می‌توان از حلِ معادله $\sin x=\cos x$ یا $\operatorname{tg}x=1$ نیز به دست آورد) و به سادگی روشن است که در فاصلهٔ بین این دو مقدار، منحنی $y=\sin x$ بالای منحنی $y=\cos x$ واقع است، لذا جواب نامعادله به صورت $\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$ نوشته می‌شود.

تمرین. مجموعهٔ جواب هریک از نامعادلات زیر را به روش هندسی به دست آورید:

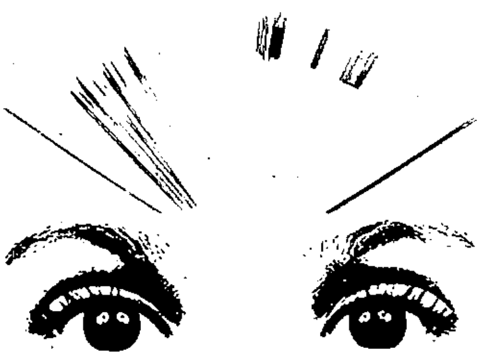
۱) $\frac{x+1}{2}<\frac{2x-1}{3}$ ۲) $x^2+1>x$

۳) $x-2<\sqrt{x}$ ۴) $x^2\ge\frac{1}{x}$

۵) $x^3<x^2$ ۶) $x^2>4$

تمرین. به روش هندسی ثابت کنید:

$$x^2<a^2 \Rightarrow -a<x<a \quad (a>0)$$



تفریح اندیشه

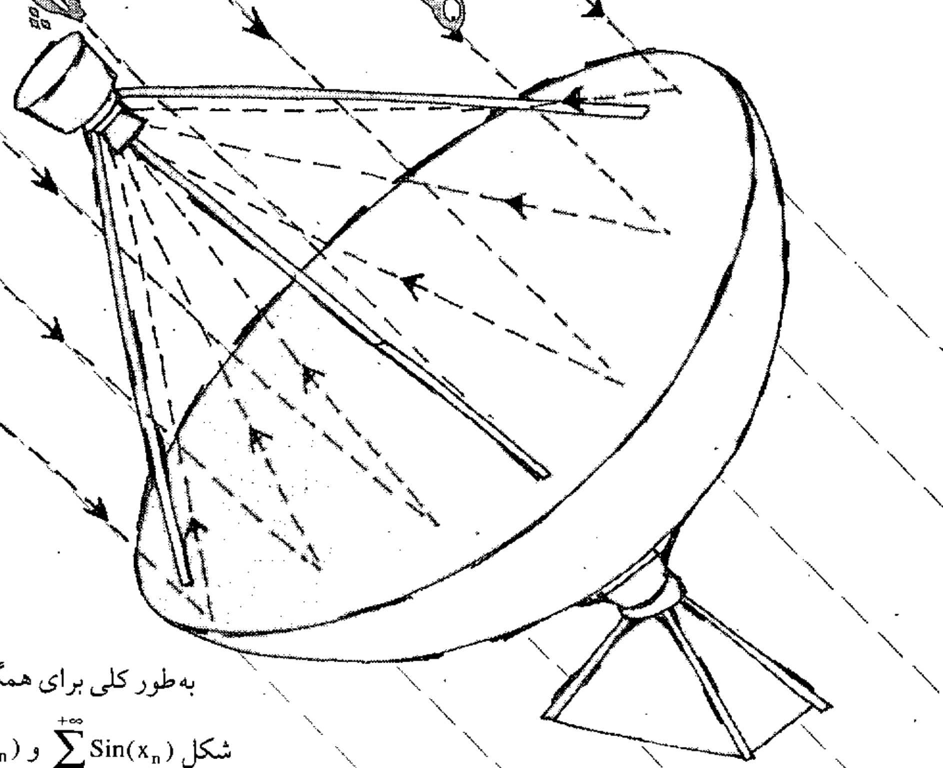
مجموع دو ریشه از سه ریشهٔ معادلهٔ زیر، صفر است:

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

معادله‌ای بیابید که c را به طور صریح بر حسب a و b نمایش دهد.

مبحثی در همگرایی چند سری خاص

احسان یارمحمدی



در سری‌هایی به شکل $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}\mathrm{Sin}(x_n)$ و $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}\tan(x_n)$ که در آن‌ها x_n دنباله‌ای از اعداد طبیعی است، داریم:

الف) اگر x_n دنباله‌ای واگرا باشد، آن‌گاه دنبالهٔ $\mathrm{Sin}(x_n)$ واگراست؛ بنابراین سری $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}\mathrm{Sin}(x_n)$ واگراست (دربارهٔ سری $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}\tan(x_n)$ این مطلب صادق است).

ب) اگر x_n دنباله‌ای همگرا باشد، آن‌گاه دنبالهٔ $\mathrm{Sin}(x_n)$ همگراست؛ ولی نمی‌توان نتیجه گرفت که سری $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}\mathrm{Sin}(x_n)$ همگرا باشد (در مورد سری $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}\tan(x_n)$ این مطلب صادق است).

به‌طور کلی برای همگرایی یا واگرایی، سری‌هایی به شکل $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}\mathrm{Sin}(x_n)$ و $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}\tan(x_n)$ معمولاً از آزمون مقایسهٔ حدّی استفاده می‌کنند.

بدین ترتیب که اگر $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}x_n$ و $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}\mathrm{Sin}(x_n)$ دو سری نامتناهی با جملات مثبت باشند، آن‌گاه:

۱. اگر $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathrm{Sin}(x_n)}{x_n}=\lambda>0$ بنابراین یا هر دو سری همگرایند یا هر دو سری واگرایند.

۲. اگر $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathrm{Sin}(x_n)}{x_n}=0$ و $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}x_n$ همگرا باشند، بنابراین سری $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}\mathrm{Sin}(x_n)$ همگراست.

۳. اگر $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathrm{Sin}(x_n)}{x_n}=+\infty$ و $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}x_n$ واگرا باشند، بنابراین سری $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}\mathrm{Sin}(x_n)$ واگراست.

برهان:

چون داریم $\lim_{n\to\infty} \frac{Sin(x_n)}{x_n} = \lambda > 0$ ، بنابراین :

$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N}:$

$$n \geq M \Rightarrow \left|\frac{Sin(x_n)}{x_n} - \lambda\right| < \varepsilon, \varepsilon = \frac{\lambda}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: \left|\frac{Sin(x_n)}{x_n} - \lambda\right| < \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \frac{\lambda}{2} < \frac{Sin(x_n)}{x_n} < \frac{3\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow Sin(x_n) < \frac{3\lambda}{2} x_n \text{ یا } x_n < \frac{2}{\lambda} Sin(x_n)$$

حالت اول:

۱) اگر سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ همگرا باشد سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{3\lambda}{2} x_n$ همگرا است پس بنابر آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} Sin(x_n)$ همگرا می‌باشد.

۲) اگر سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} Sin(x_n)$ همگرا باشد سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{2}{\lambda} Sin(x_n)$ همگرا است پس بنابر آزمون مقایسه سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ همگرا می‌باشد.

حالت دوم:

۱) اگر سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} Sin(x_n)$ واگرا باشد پس بنابر آزمون مقایسه سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{3\lambda}{2} x_n$ واگرا است بنابراین سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ واگرا می‌باشد.

۲) اگر سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ واگرا باشد پس بنابر آزمون مقایسه سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{2}{\lambda} Sin(x_n)$ واگرا است بنابراین سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ واگرا می‌باشد.

برهان: قسمت‌های دیگر قضیه بالا نیز به همین روش قابل بیان است که به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

(در مورد سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} tan(x_n)$ نیز این مطلب صادق است)

اکنون اگر فرض کنیم که x_n دنباله‌ای همگرا باشد که سری $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$ تشکیل یک سری همگرای تلسکوپی یا همگرای هندسی را بدهد، می‌توانیم الگوریتمی را برای محاسبهٔ کران بالا و کران پایین حدّ مجموع جزئی سری‌های $\sum_{n=n_0}^{+\infty} Sin(x_n)$ و $\sum_{n=n_0}^{+\infty} tan(x_n)$ مطرح کنیم. به بیان دیگر، مشخص می‌کنیم که حدّ مجموع جزئی سری‌های $\sum_{n=n_0}^{+\infty} Sin(x_n)$ و $\sum_{n=n_0}^{+\infty} tan(x_n)$ بین کدام دو عدد حقیقی قرار دارد.

حالت اوّل - سری $\sum_{n=n_0}^{+\infty} Sin(x_n)$

ابتدا مقدار سری همگرای تلسکوپی یا هندسی $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$ را به‌دست می‌آوریم و سپس بنا بر نامساوی $SinX < X$ ، سری $\sum_{n=n_0}^{+\infty} Sin(x_n)$ را با سری $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$ مقایسه می‌کنیم تا یک کران بالا را برای سری $\sum_{n=n_0}^{+\infty} Sin(x_n)$ به‌دست آوریم. سپس جملات سری $\sum_{n=n_0}^{+\infty} Sin(x_n)$ را به‌ازای n_0 های متفاوت یادداشت می‌کنیم و با یکدیگر جمع می‌زنیم تا مجموع جملات این سری به‌دست آید. اگر مجموع جملات این سری عددی مثبت باشد، لذا صفر می‌تواند یک کران پایین در این نوع از سری‌ها باشد.

آزمون ۱ . کدام گزینه دربارهٔ سری $\sum_{n=1}^{+\infty} Sin(\frac{1}{n})$ صحیح است؟

۱) همگرا به صفر ۲) همگرا به ۱

۳) همگرا به ۱- ۴) واگرا

جواب: گزینهٔ (۴) صحیح است؛ چون بنابر آزمون مقایسهٔ حدّی داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\frac{1}{n})}{(\frac{1}{n})}=1>0$$

از طرفی چون سری هارمونیک $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n})$ واگراست، لذا هردو سری واگرایند.

آزمون ۲. کدام گزینه در مورد سری $S=\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\frac{1}{2^n})$ صحیح است؟

۱) $S=1$ ۲) $0<S<1$

۳) $-1<S<0$ ۴) واگرا

جواب: گزینهٔ (۲) صحیح است؛ چون بنابر آزمون مقایسهٔ حدّی داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\frac{1}{2^n})}{2^n}=1>0$$

از طرفی چون سری هندسی $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$ همگرا به یک است، لذا هر دو سری همگرایند.

درضمن، بنابر الگوریتمی که ارائه شده، داریم:

$$\sin(\frac{1}{2^n})<\frac{1}{2^n}\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\sin(\frac{1}{2^n})<1$$

بنابراین که:

$$S=\sum_{n=1}^{+\infty}\sin(\frac{1}{2^n})=\sin(\frac{1}{2})+\sin(\frac{1}{4})+\sin(\frac{1}{8})+\cdots>0$$

پس نتیجه می‌گیریم که $0<S<1$ است.

حالت دوم ـ سری $\sum_{n=n_0}^{+\infty}\tan(x_n)$

ابتدا مقدار سری همگرای تلسکوپی یا هندسی $\sum_{n=n_0}^{+\infty}x_n$ را به‌دست می‌آوریم سپس بنابر نامساوی $x<\tan x$، سری $\sum_{n=n_0}^{+\infty}x_n$ را با سری $\sum_{n=n_0}^{+\infty}\tan(x_n)$ مقایسه می‌کنیم تا یک کران پایین را برای سری $\sum_{n=n_0}^{+\infty}\tan(x_n)$ به‌دست آوریم.

آزمون ۳. کدام گزینه در مورد سری $\sum_{n=1}^{+\infty}\tan(\frac{1}{\sqrt{n}})$ صحیح است؟

۱) همگرا به صفر ۲) همگرا به ۱

۳) همگرا به ۱- ۴) واگرا

جواب: گزینهٔ (۴) صحیح است؛ چون بنابر آزمون مقایسهٔ حدّی داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\tan(\frac{1}{\sqrt{n}})}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=1>0$$

از طرفی چون سری $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ واگراست، لذا هردو سری واگرایند.

آزمون ۴. کدام گزینه در مورد سری $S=\sum_{n=1}^{+\infty}\tan(\frac{1}{n(n+1)})$ صحیح است؟

۱) $S=1$ ۲) $S>1$

۳) $S<1$ ۴) واگرا

جواب: گزینهٔ (۲) صحیح است؛ چون بنابر آزمون مقایسهٔ حدّی داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\tan(\frac{1}{n(n+1)})}{\frac{1}{n(n+1)}}=1>0$$

از طرفی چون سری تلسکوپی $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ همگرا به یک است، لذا هر دو سری همگرایند. در ضمن، بنابر الگوریتمی که ارائه شد، داریم:

$$\frac{1}{n(n+1)}<\tan(\frac{1}{n(n+1)})\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\tan(\frac{1}{n(n+1)})>1$$

پس نتیجه می‌گیریم که $S>1$ است.

منابع

[۱] آنالیز ریاضی تام. م. آپوستل، ترجمه: علی‌اکبر عالم‌زاده، انتشارات دانشگاه صنعتی شریف.

[۲] حساب دیفرانسیل و انتگرال دورهٔ پیش‌دانشگاهی، دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی.

[۳] حساب دیفرانسیل و انتگرال تام. م. آپوستل، ترجمه: علی‌اکبر عالم‌زاده و همکاران انتشارات مرکز نشر دانشگاهی.

تابع حسابی فی اویلر

میر شهرام صدر

لئونارد اویلر (۱۷۰۷ـ۱۷۸۳ م.) از پرکارترین ریاضیدانان مشهور است. می‌گویند که محاسبه‌ها را به سادگی نفس کشیدن انجام می‌داد. در حدود سال ۱۷۶۶، دچار مصیبت نابینائی کامل شد، ولی این مسأله کمترین خللی در کارهای او وارد نکرد و جالب این که به کمک حافظه شگفت‌انگیز و توانایی تمرکز حواس، حتی با وجود سروصدای زیاد به کار خلاق خود با دیکته کردن به یک منشی و با نوشتن فرمول‌ها روی تخته بزرگی که منشی‌اش از روی آن رونویسی کند، او ادامه داد و قسمت مهمی از آثار خود را پس از نابینایی انجام داده است. اویلر اگر از پربارترین ریاضیدانان همهٔ اعصار نباشد، پربارترین ریاضیدان قرن هجدهم است و در اغلب زمینه‌های ریاضی سهیم است. او دربارهٔ آنالیزِ بی‌نهایت کوچک‌ها، حساب دیفرانسیل، نظریه گراف‌ها، نظریه معادلات، نظریه اعداد، هندسه مقدماتی و بخش‌های دیگر ریاضی تحقیق و تألیف می‌کرد.

در مقدماتی‌ترین مطالب نظریه اعداد با قضیه اویلر و تابع φ (تابع فی اویلر) مواجه می‌شویم که به تفصیل به این قضیه خواهیم پرداخت.

شهرت اویلر بیشتر به خاطر نمادهایی است که معرفی یا همگانی کرده است، که عبارتند از:

۱ . π برای نمایش نسبت محیط دایره به قطر آن.
۲ . $f(x)$ به نشانه نماد تابع.
۳ . e برای پایه لگاریتم طبیعی (عدد اویلر).
۴ . a ، b و c برای نمایش اضلاع مثلث ABC.
۵ . r برای شعاع دایره محاطی داخلی مثلث ABC.
۶ . R برای شعاع دایره محیطی مثلث ABC.
۷ . $\sum$ برای علامت مجموع‌یابی.
۸ . i در اعداد مختلط که $i^۲=-۱$ یا $i=\sqrt{-۱}$.

از میان حجم عظیم آثار اویلر، نتیجه‌ای معروف را مطرح می‌کنیم که به حق از به دست آوردن آن بسیار راضی بود:

$$۱+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\cdots+\frac{۱}{n^۲}+\cdots=\frac{\pi^۲}{۶}$$

اکنون تابع حسابی اویلر را مطرح می‌کنیم. برای مثال عدد طبیعی ۱۰ را در نظر بگیرید، چند تا عدد طبیعی کوچکتر از ۱۰ وجود دارند که نسبت به ۱۰ اول می‌باشند؟ به بیان دیگر تعداد عضوهای مجموعهٔ زیر:

$$A=\{m\in\mathbb{N} | ۱\le m<۱۰,(m,۱۰)=۱\}$$

چند تا است؟ با اندکی تأمل ملاحظه می‌کنیم که $A=\{۱,۳,۷,۹\}$ ، در نتیجه ۴ عدد طبیعی کوچکتر از ۱۰ وجود دارند که نسبت به ۱۰ اول می‌باشند، در این حالت می‌نویسیم $\varphi(۱۰)=۴$.

تعریف. فرض می‌کنیم $n>۱$ یک عدد طبیعی باشد، تعداد عددهای طبیعی که اولاً کوچکتر از n باشند، ثانیاً نسبت به n اول باشند، با نماد $\varphi(n)$ نمایش داده می‌شود و به آن تابع حسابی اویلر می‌گوییم. بنابراین اگر داشته باشیم:

$$A=\{m\in\mathbb{N} | ۱\le m<n,(m,n)=۱\}$$

آنگاه $\varphi(n)=|A|$.

قضیه زیر که با استفاده از اصل شمول و عدم شمول آن را ثابت می‌کنیم، به سادگی برای هر عدد طبیعی n، مقدار $\varphi(n)$ را مشخص می‌کند.

قضیه. فرض کنیم که n یک عدد طبیعی باشد و $n=P_۱^{\alpha_۱}\times P_۲^{\alpha_۲}\times\cdots\times P_k^{\alpha_k}$ ، تجزیه n به حاصل ضرب عامل‌های اول باشد که در آن $P_۱$ ، $P_۲$ ، ... ، P_k عددهای اول و متمایز باشند و $\alpha_۱$ ، $\alpha_۲$ ، ... ، α_k عددهای طبیعی باشند، در این صورت داریم:

$$\varphi(n)=n(۱-\frac{۱}{P_۱})(۱-\frac{۱}{P_۲})\cdots(۱-\frac{۱}{P_k})$$

اثبات. مجموعهٔ $S=\{۱,۲,۳,\cdots,n\}$ را در نظر می‌گیریم، سپس برای هر $۱\le i\le k$ ، مجموعهٔ A_i را برابر با عضوهایی از مجموعه S در نظر می‌گیریم که عدد اول P_i آن عضوها را عاد می‌کنند، یعنی داریم:

$$A_i=\{۱\le m\le n: P_i | m\}$$

در واقع هدف یافتن $|\overline{A_۱\cup A_۲\cup\cdots\cup A_k}|$ است. برای این منظور از اصل شمول و عدم شمول برای k مجموعهٔ متناهی استفاده می‌کنیم. می‌دانیم که:

$$|\overline{A_۱\cup A_۲\cup\cdots\cup A_k}|=|S|-|A_۱\cup A_۲\cup\cdots\cup A_k| \quad (۱)$$

برای هر $۱\le i\le k$ چون n بر P_i بخش‌پذیر است، بنابراین داریم:

$$|A_i|=\left[\frac{n}{P_i}\right]=\frac{n}{P_i} \quad (۱\le i\le k)$$

همچنین داریم:

$$|A_i\cap Aj|=\left[\frac{n}{P_iP_j}\right]=\frac{n}{P_iP_j} \quad (۱\le i<j\le k)$$

$$|A_i\cap Aj\cap A_r|=\left[\frac{n}{P_iP_jP_r}\right]=\frac{n}{P_iP_jP_r} \quad (۱\le i<j<r\le k)$$

و به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$|A_i\cap Aj\cap\cdots\cap A_k|=\left[\frac{n}{P_۱P_۲\cdots P_k}\right]=\frac{n}{P_۱P_۲\cdots P_k}$$

با جای‌گذاری رابطه‌های بالا در رابطه (۱)، خواهیم داشت:

$$|\overline{A_۱\cup A_۲\cup\cdots\cup A_k}|=n-\left(\sum_{i=۱}^{k}|A_i|-\sum_{۱\le i<j\le k}|A_i\cap A_j|+\right.$$

$$\sum_{1\le i<j<r\le k}\left|A_i\cap A_j\cap A_r\right|\cdots+(-1)^{n-1}\left|\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right|\Bigg)$$

$$\left|\overline{\bigcup_{i=1}^{k}A_i}\right|=n-\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{n}{P_i}-\sum_{1\le i<j\le k}\frac{n}{P_iP_j}+\sum_{1\le i<j<r\le k}\frac{n}{P_iP_jP_r}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{P_1P_2\cdots P_k}\right)$$

$$\left|\overline{\bigcup_{i=1}^{k}A_i}\right|=n\left(1-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{P_i}+\sum_{1\le i<j\le k}\frac{1}{P_iP_j}-\sum_{1\le i<j<r\le k}\frac{1}{P_iP_jP_r}+\cdots+(-1)^{n}\frac{1}{P_1P_2\cdots P_k}\right)$$

طرف دوم برابری را در عبارت $\frac{P_1P_2\cdots P_k}{P_1P_2\cdots P_k}$ ضرب می‌کنیم:

$$\left|\overline{\bigcup_{i=1}^{k}A_i}\right|=\frac{n}{P_1P_2\cdots P_k}\Big[P_1P_2\cdots P_k-(P_2P_3\ldots P_k+P_1P_3\cdots P_k+P_1P_2P_4\ldots P_k+\cdots+P_1P_2\ldots P_{k-1})+(P_3P_4\ldots P_k+P_2P_4P_5\ldots P_k+\cdots+P_1P_2\ldots P_{k-2})-\cdots+(-1)^{n-1}(P_k+P_{k-1}+\ldots+P_1)+(-1)^{n}\Big]$$

$$\left|\overline{\bigcup_{i=1}^{k}A_i}\right|=\frac{n}{P_1P_2\cdots P_k}\left[(P_1-1)(P_2-1)\ldots(P_k-1)\right]$$

$$=n\left[\frac{(P_1-1)}{P_1}\times\frac{(P_2-1)}{P_2}\times\cdots\times\frac{(P_k-1)}{P_k}\right]$$

$$=n\left(1-\frac{1}{P_1}\right)\left(1-\frac{1}{P_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{P_k}\right)$$

مثال. ثابت کنید که $\varphi(105)=48$.

حل. ابتدا عدد ۱۰۵ را به حاصل ضرب عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم:

$$n=105=3\times5\times7=P_1\times P_2\times P_3$$

اکنون با توجه به قضیه قبل داریم:

$$\varphi(105)=n\left(1-\frac{1}{P_1}\right)\left(1-\frac{1}{P_2}\right)\left(1-\frac{1}{P_3}\right)$$

$$=3\times5\times7\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)=2\times4\times6=48$$

$$\Rightarrow\varphi(105)=48$$

مثال. تعداد عددهای صحیح و مثبت کوچکتر از ۳۶۰ که در رابطهٔ $(a,360)=12$ صدق می‌کنند، چند تا است؟

حل. چون $(a,360)=12$ پس $12|a$ در نتیجه $a=12k$ که $k\in Z$، بنابراین داریم:

$$\begin{cases}(a,360)=12\\ a=12k\end{cases}\Rightarrow(12k,360)=12\Rightarrow(k,30)=1$$

در این مرحله باید تعداد عددهای صحیح و مثبتی را پیدا کنیم که نسبت به ۳۰ اول هستند و این برابر با $\varphi(30)$ است.

$$n=30=2\times3\times5=P_1\times P_2\times P_3$$

$$\varphi(30)=2\times3\times5\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=1\times2\times4=8$$

در نتیجه ۸ عدد صحیح و مثبت کوچکتر از ۳۶۰ وجود دارد که در رابطهٔ $(a,360)=12$ صدق می‌کنند.

مثال. اگر برای عددهای صحیح m و n داشته باشیم $180n+am=1$ و $a\le180$، آنگاه چند عدد طبیعی برای a یافت می‌شود؟

حل. چون برای عددهای صحیح m و n داریم $180n+am=1$ آنگاه طبق قضیه بزو نتیجه می‌گیریم که $(180,a)=1$. ملاحظه می‌کنیم که تعداد عددهای طبیعی $a\le180$ را می‌خواهیم به طوری که $(180,a)=1$، بنابراین کافی است $\varphi(180)$ را به دست آوریم:

$$180=2^2\times3^2\times5$$

$$\varphi(180)=2^2\times3^2\times5\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=2\times6\times4=48$$

قضیه بزو. فرض کنیم که $(a,b)=d$ در این صورت عددهای صحیح m و n یافت می‌شوند به گونه‌ای که $ma+nb=d$.

نتیجه. هرگاه a و b دو عدد نسبت به هم اول باشند، در

این صورت عددهای صحیح m و n یافت می‌شوند به گونه‌ای که:

$$(a,b)=1 \Leftrightarrow ma+nb=1$$

چند خاصیت تابع حسابی اویلر

۱. اگر P یک عدد اول باشد، آنگاه $\varphi(P)=P-1$.

زیرا اگر P عددی اول باشد، آنگاه P با هریک از عضوهای مجموعه $\{1,2,3,\ldots,P-1\}$ متباین است.

۲. اگر P یک عدد اول باشد و $\alpha \in \mathbb{N}$ آنگاه $\varphi(P^{\alpha})=P^{(\alpha-1)}(P-1)$.

زیرا اگر P عددی اول باشد، آنگاه طبق قضیه تابع حسابی اویلر داریم:

$$\varphi(P^{\alpha})=P^{\alpha}(1-\frac{1}{P})=P^{\alpha}-P^{\alpha-1}=P^{\alpha-1}(P-1)$$

۳. اگر n و m دو عدد طبیعی باشند، آنگاه $\varphi(n^m)=n^{(m-1)}\varphi(n)$.

فرض کنیم $n=P_1^{\alpha_1}\times P_2^{\alpha_2}\times\cdots\times P_k^{\alpha_k}$ در این صورت $n^m=P_1^{m\alpha_1}\times P_2^{m\alpha_2}\times\cdots\times P_k^{m\alpha_k}$ بنابراین طبق قضیه تابع حسابی اویلر داریم:

$$\varphi(n^m)=P_1^{m\alpha_1}\times P_2^{m\alpha_2}\times\cdots\times P_k^{m\alpha_k}(1-\frac{1}{P_1})(1-\frac{1}{P_2})\cdots(1-\frac{1}{P_k})$$

از طرفی $(1\le i\le k)P_i^{m\alpha_i}=P_i^{(m-1)\alpha_i}\times P_i^{\alpha_i}$ و می‌دانیم که:

$$\varphi(n)=P_1^{\alpha_1}\times P_2^{\alpha_2}\times\cdots\times P_k^{\alpha_k}(1-\frac{1}{P_1})(1-\frac{1}{P_2})\cdots(1-\frac{1}{P_k})$$

در نتیجه داریم:

$$\varphi(n^m)=P_1^{(m-1)\alpha_1}\times P_2^{(m-1)\alpha_2}\times\cdots\times P_k^{(m-1)\alpha_k}$$

$$\times P_1^{\alpha_1}\times P_2^{\alpha_2}\times\cdots\times P_k^{\alpha_k}(1-\frac{1}{P_1})(1-\frac{1}{P_2})\cdots(1-\frac{1}{P_k})$$

$$\varphi(n^m)=(P_1^{\alpha_1}\times P_2^{\alpha_2}\times\cdots\times P_k^{\alpha_k})^{(m-1)}\times\varphi(n)$$

$$\Rightarrow \varphi(n^m)=n^{(m-1)}\varphi(n)$$

۴. اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a,b)=1$، آنگاه $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$.

معماهای فکری و منطقی ۳

معمای۱: در بانکی سه شغل صندوقدار، رئیس و تحویلدار به B، J و S، گرچه نه لزوماً به این ترتیب، داده شده است.

تحویلدار که نوجوانی بیش نیست، از همه کم‌تر حقوق می‌گیرد.

حقوق S، که باخواهر B ازدواج کرده، از مدیر بیش‌تر است.

شغل هریک چیست؟

معمای۲: C، D و F زندگی خود را به عنوان نجّار، نقّاش و لوله‌کش، گرچه نه لزوماً به این ترتیب، می‌گذرانند.

اخیراً نقّاش از نجّار تقاضا کرد که کاری برای او انجام دهد؛ اما به او گفته شد، نجّار در کار تهیهٔ ماکتی برای لوله‌کشی است.

لوله‌کش بیش از نقاش درآمد دارد.

درآمد D بیش از C است.

F هرگز با D آشنا نبوده است.

شغل هریک چیست؟

تفریح اندیشه

جواب: $c=ab$.

حل: اگر مجموع دو ریشه، صفر باشد، ریشه‌ها قرینهٔ یکدیگرند. ریشه‌های معادله را s، s- و t فرض می‌کنیم. در این صورت:

$$x^3+ax^2+bx+c=(x-s)(x+s)(x-t)$$
$$=x^3-tx^2-s^2x+s^2t$$

بنابراین داریم $a=-t$ و $b=-s^2$ و $c=s^2t$، پس:

$$c=s^2t=(-b)(-a)=ab$$

غیاث الدین جمشید کاشانی

اسفندیار معتمدی

غیاث‌الدین جمشید که در نوشته‌های عربی و غربی او را «الکاشی» خوانده‌اند، در حدود سال ۷۹۰ هجری قمری در کاشان به دنیا آمد. پدربزرگش طبیب، پدرش عالم و خودش بزرگ‌ترین ریاضیدان و اخترشناس قرن نهم هجری بود. گرچه عمرش کوتاه بود، ولیکن توانست آثاری ماندنی به صورت تألیف و تصنیف در موضوع‌های ریاضی و نجومی از خود به جای گذارد. او روز چهارشنبه ۱۹ ماه رمضان ۸۳۲ هجری قمری دعوت حق را لبیک گفت.

غیاث‌الدین تا سال ۸۰۸ هجری قمری در کاشان می‌زیست و به کارهای ریاضی و نجومی مشغول بود. در این سال، قاضی‌زاده رومی، منجم و ریاضیدان ترک (حدود ۷۶۶ تا حدود ۸۴۰) که برای ملاقات میرزاالغ‌بیک، پسر شاهرخ و نوه امیرتیمور گورکانی، از بغداد به سمرقند می‌رفت، مسیرش از کاشان می‌گذشت، روزی در کاشان به دیدن غیاث‌الدین رفت. او را مردی هوشمند، ریاضیدانی دقیق و منجمی کاردان یافت و هنگامی که به سمرقند رسید، وصفش را برای میرزاالغ‌بیک، حاکم سراسر فرارودان (ماوراءالنهر)، بیان کرد.

الغ‌بیک، پسر شاهرخ میرزا و گوهرشاد خاتون، مردی دانشمند و بافرهنگ بود. شاهرخ و گوهرشاد خاتون برعکس تیمور، در عمران و آبادی ایران کوشیدند و بنایی باشکوه چون «مسجد گوهرشاد» در جوار مرقد حضرت رضا(ع) ساختند. الغ‌بیک و برادرش بایسنقر نیز در ترویج علم و هنر و در تشویق دانشمندان و هنرمندان، بسیار کوشیدند. الغ‌بیک به ساخت رصدخانه‌ای در نزدیکی سمرقند، و بر بالای تپه‌ای، به نام «کوهک» که امروز «چوپان‌آتا» یا «چوپان عطا» خوانده می‌شود، فرمان داد و برای اداره امور این رصدخانه، غیاث‌الدین جمشید را با احترام فراوان از کاشان به سمرقند دعوت کرد.

غیاث‌الدین دعوت این فرمانروای خردمند را پذیرفت و در سال ۸۲۴ ق. به همراه خواهرزاده خود،

مولانا معین‌الدین کاشی رهسپار سمرقند شد و مدیریت رصدخانه را برعهده گرفت.

خواندمیر، در کتاب گرانقدر «حبیب‌السیر» می‌نویسد: «در سنه ۸۲۴، آن خسرو بی‌مانند [الغ‌بیک] در وسط بلده فاخرهٔ سمرقند، مدرسه رفیع و خانقاهی منیع بنا نموده و همچنین فرمان داد استادکاران در آن بلدهٔ فردوس‌نشان رصدی بنیان نهادند و **بطلمیوس ثانی**، **مولانا غیاث‌الدین جمشید** و جامع کمالات انسانی، **مولانا معین‌الدین کاشی** در ترتیب آن نیا سعی و اهتمام دادند.»

یک سال پس از ورود کاشانی به سمرقند، بنای رصدخانه پایان یافت و او با دستیاری جمعی از اخترشناسان کار رصد ستارگان را آغاز کرد. الغ‌بیک که خود نیز از زمان کودکی به مطالعه ستارگان علاقه‌مند بود و در ریاضیات نیز دستی داشت، در کار رصد ستارگان همکاری می‌کرد و همواره مراتب سپاس خود را از غیاث‌الدین جمشید، در حضور مردم اعلام می‌کرد. این رصدخانه به تنظیم جدول رصد ستارگان، معروف به «زیج الغ‌بیک» پرداخت.

نامه‌های غیاث‌الدین به پدرش

هنگامی که غیاث‌الدین در سمرقند بود، برای پدرش در کاشان نامه می‌نوشت. دو نامه از این مجموعه در دست است که از مهم‌ترین و کامل‌ترین سندهای علمی در زبان فارسی هستند. در این نامه‌ها محیط علمی سمرقند، مسائل ریاضی و نجومی مطرح در آن زمان، وضع و موقعیت خود و بزرگواری و آزادمنشی الغ‌بیک را شرح داده است.

نامه‌ها در پاسخ به نامه‌های پدر بوده‌اند و اصطلاحاتی که در آن‌ها به کار رفته است، مشخص می‌کند که پدر نیز اهل علم و آشنا به امور رصد و ریاضی بوده است. در این نامه‌ها از الغ‌بیک به عنوان عضوی از گروه علمی رصدخانه، با احترامی شایسته نام می‌برد؛ عضوی که در جلسه‌ها حضور می‌یابد و شخصاً اظهار نظرهای علمی می‌کند. در زمان نوشتن این نامه‌ها، الغ‌بیک ۲۶ ساله بود و شوق فراوانی به یاد گرفتن و یاد دادن دانش ریاضی و نجوم داشت.

غیاث‌الدین از حضور ۶۰ تا ۷۰ نفر ریاضیدان سخن می‌گوید که در آن زمان در مدرسه سمرقند به کار ریاضی اشتغال داشتند. این ریاضیدانان در جلسه‌های بحث علمی که در دربار الغ‌بیک تشکیل می‌شدند، شرکت می‌کردند. قاضی‌زادهٔ رومی که معلم الغ‌بیک بود، از احترام خاصی برخوردار بود و توانسته بود در رونق بخشیدن به این محفل علمی و رصدخانهٔ سمرقند مؤثر باشد.

بخش‌هایی از نامهٔ دوم کاشانی به پدرش که هفتم ذی‌قعدهٔ سال ۸۲۴ یا ۸۲۷ قمری نوشته شده، با حذف‌هایی چنین است:

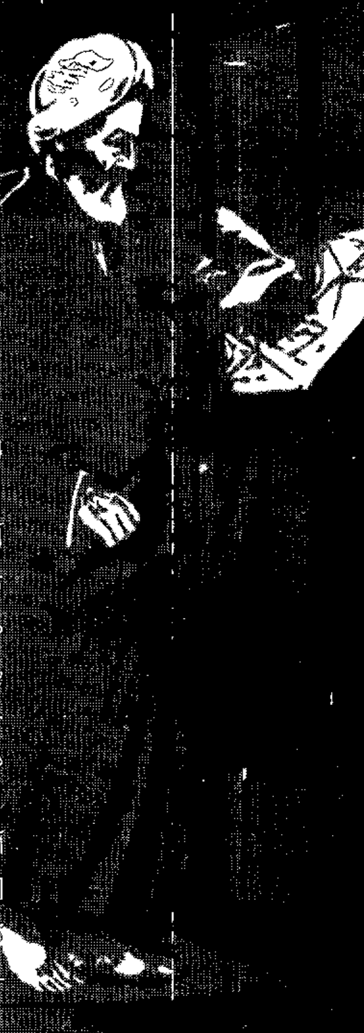
«... اکنون در خطهٔ سمرقند، حرسها الله عن الآفات، حضرت پادشاه اسلام، فرمانفرمای هفت اقلیم، دانشمند است...»

این معنی نه بر سبیل رسم ادب می‌گوید و می‌نویسد:

«... حقیقت آن که قرآن مجید اکثر یاد دارد و تفاسیر آن و سخن مفسران را در هر آیتی مستحضر است و هر دو روز، دو جزء به ورد می‌خواند به قرائت و حفاظ حاضر می‌باشند که هیچ غلط واقع نمی‌شود. نحو و صرف نیکو دانند و ترکیب عربی به غایت خوب می‌کنند و خوش نویسند و همچنین از فقه خیلی واقفند و از منطق و معانی بیان باخبر و از اصول به دستور و اقسام ریاضیات را خود تمام ورزیده‌اند.

و براهین بر اعمال نجومی نیکو بیرون می‌آرند و استنباط ضوابط می‌فرمایند که درس تذکره و تحفه چنان می‌گویند که هیچ مزیدی بر آن متصور نیست [**تذکرهٔ نصیریه**، کتاب **خواجه نصیرالدین توسی** و **تحفة‌الشاهیه**، کتاب **قطب‌الدین شیرازی**، هر دو در علم هیئت، کتاب‌های درسی زمان بودند و آن‌ها را الغ‌بیک، سلطان زمان درس می‌داده است].

و ثانیاً در سمرقند، اکنون اکثر علما جمعند و مدرسانی که در جمیع علوم درس می‌گویند، متعدد هستند و بیش‌تر به فن ریاضی مشغولند از آن جمله چهار نفر شرح **اشکال تأسیس** [کتابی است در هندسه از شمس‌الدین محمد بن اشرف حسینی سمرقندی] کرده‌اند و یکی شرح تجنیس حساب و یکی دیگر رساله نوشته در برهان



هندسی بر مسأله خطائین و قاضی‌زاده رومی که از آن‌ها همه اعلم است، شرح چغمینی و شرح اشکال تأسیس نوشته، و منجم و مستخرج، خود بسیارند [کتاب چغمینی تألیفی است به نام الملخص فی الهیه که محمودبن محمدبن عمر چغمینی خوارزمی، ریاضیدان و پزشک ایرانی در قرن هشتم هجری نوشته است].

و همچنین هر فن که هست، طلبه از ارباب آن بینهایت جمعند... هر چند روز بندگی حضرت سلطنت پناهی [الغ‌بیک]، در حلقه درس حاضر می‌شوندو چون حاضر شدند، درس ریاضیات را مقدم می‌دارند. این بنده هم حاضر می‌شود.

چون آغاز بحث می‌شود، هر بار به عنایت الله تعالی و به یمن همت آن خداوند، این بنده دخلی کامل کرده، چنان که چند چیز که ایشان را از مطالعه معلوم نشده، گفته و اعتراضات وارد بر سخن ایشان کرده و نکته‌های لطیف بیرون آورده که همه حیران مانده‌اند.

و پیش از آمدن این بنده اشکالی چند ایشان را واقع شده بود و در میان یکدیگر انداختند و هیچ کس بیرون آوردن نتوانسته است. مثلاً خواسته بوده‌اند که اسطرلابی که یک گز قطر آن باشد، بسازند و هزار و بیست و دو ثوابت مرصوده را مجموع بر آن ثبت کنند. [۱۰۲۲ ستاره برابر تعداد ستارگانی است که در فهرست ستارگان محسطی، کتاب بطلمیوس موجود است.] به مطالع مهر آن‌ها احتیاج بوده و همه مستخرجات را فرموده‌اند که به اتفاق عمل کنند. قریب صدوپنجاه ثابته از آن بوده است که به طریقی که در زیج ایلخانی مذکور است و چنانچه ایشان فهم کرده‌اند، مطلوب حاصل نمی‌شد و درمانده بودند و چون این بنده رسید، در روز این مسأله در حضور حضرت سلطنت پناهی پیش آوردند و این بنده برخود هم در آن مجلس ... آن را تمام کرد.

دیگر خواسته بودند که بر سطح دیواری از سرای بندگی حضرت خلدالله ملکه و سلطانه مقیاسی [ساعت آفتابی] نصب کنند و خطوط ساعات مستویه بر آن رسم کنند. و چون سطح آن دیوار در سطح نصف‌النهار [شمالی ـ جنوبی] یا اول السموت [شرقی ـ غربی] نبود، مثل آن هرگز کسی نکرده بود، هیچ کس نتوانست کردن. بعضی گفته بودند در یکسال توان کرد... چون این بنده رسیده، فرمودند. بنده در یک روز تمام کرد. چنان که امتحان آن با اسطرلاب بزرگ کردند، موافق و مطابق بود.

و از تحسین‌های حضرت سلطنت پناهی که ذکر کرد، آن است که هیچ هفته نگذرد که بعضی دوستان به این بنده برسانند که بندگی حضرت سلطنت پناهی امشب یا امروز چنین و چنین نیکی‌ها فرمودند که فلانی بسیار مستحضر است و این مراتب را خوب می‌داند و از قاضی‌زاده بهتر می‌داند و از او مستحضرتر و پرماده‌تر است و در این فن تیزذهن‌تر؛ چیزی را که قاضی‌زاده به ده روز مشکل درمی‌یابد، مولانا غیاث‌الدین بر خود در یک روز می‌یابد و جمیع اقسام این فن را می‌داند.

و نیز مرد نیک‌نفس و سلیم‌القلب است. هرکس از جنس موالی و غیره که پیش ما آمد، همین که ما او را اندک تربیتی کردیم، خود را نگاه نداشتند و با مردم جنگ می‌کردند و فضولی‌ها پیش می‌گرفتند. مولانا غیاث‌الدین با وجودی که انواع تربیت و عنایت در حق او فرمودیم و دایماً شرف مجاوره و مکالمه است و در این مدت هرگز با کسی نزاع نکرده. نه او از کسی و نه کسی از او گله کرد و سخن مردم را به عرض رسانیدن جهت طمع خود دخل نکرده و نیکو معاشی دارد و امثال این سخنان به کرات فرموده. الحمدلله علی ذلک و ذلک فضل الله یؤتیه من یشاء.

مردم سال‌ها سعی نمایند تا معاش ایشان و هنر ایشان در پیش مردم هم‌جنس نیکو نماید. بلکه چنان کنند که پیش مردم بزرگ نیز نیکو نماید. بحمدالله و المنة که بعد از چندین مدت که در کنج خانه به سر برده بود، چون بیرون آمد، به چنان شهری معظم و چنین مردمی هنرمند وبه حضرت چنان پادشاهی هنرمند دانا و عالم ملتفت به حال مردم، مستنفر احوال خلایق رسید، به همین عنایت ازلی و سعادت لم‌یزلی و برکت همت آن خداوند چنان زیست که در آن حضرت مستحسن افتاد.

دیگر آنچه استنصار فرموده بودند که کار رصد به این بنده مفوض است یا شریکی دارد، عجب که آن خداوند بعد از چنین شهرت این استنصار فرموده بودند. حال آن که اگرچه آن‌جا مردم بسیار هستند که در ریاضیات دخلی دارند، اما هیچ کدام چنان نیستند که ایشان را از علمی و عملی رصد وقوفی باشد، چه هیچ کدام محیطی

نمی داند.

«حقا که لاف نمی زند و آن خداوند هم می داند که به عنایت الهی چنان در خود می بیند که به قوت استنصار علمی فن و عملی و قدرت در عملی مطلق که اگر بنده به دارالرصد درآید، از اول مدت تا آخر مدت تمامت اعمال بکند و زیج بیرون آرد که در هیچ مسأله رجوع به کتاب نکند، مگر حاصل او بساط روزی معین از رصد سابق که آن امر یقین است و تاریخ آن روز، و در رصد به آن احتیاج می باشد که تا تفاوت حاصل اوساط این رصد با این حاصل اوساط بگیرد و بر مدت مابین الرصدین قسمت کند تا مقدار حرکت معلوم شود و آن مجموع برابر دو ورق می توان نوشت.

زیاده اطناب نیارست نمود. ظلال عالی پاینده و مستدام باد. بندهٔ کم‌ترین، غیاث.»

تألیفات غیاث الدین جمشید

۱. **رسالهٔ سلّم السماء** (نردبان آسمان) یا رسالهٔ کمالیه، به زبان عربی، تألیف سال ۸۰۹ در کاشان. موضوع این رساله اندازهٔ زمین، ماه، خورشید، سیارات و ستارگان و فاصلهٔ آن‌ها از زمین است.

۲. **مختصر در علم هیئت**، اثری است به زبان فارسی که در سال ۸۱۳ یا پیش از آن در بیست باب نوشته شده و موضوع آن مسیرهای ماه و خورشید و ستارگان و سیارات و چگونگی حرکت آن‌هاست.

۳. **زیج خاقانی** اثری است به فارسی که آن را در سال ۸۱۶ کامل کرده و به میرزا الغ بیک، ملقب به «خاقان» تقدیم کرده است.

۴. **رسالهٔ شرح آلات رصد**، رساله‌ای است به فارسی، تألیف سال ۸۱۸ که در آن هشت ابزار نجومی شرح داده شده است.

۵. **نزهة الحدائق** که در سال ۸۱۸ به عربی نوشته و در آن دستگاهی به نام «طبق المناطق» را که خود اختراع کرده، شرح داده است. در سال ۸۲۹ در سمرقند پیوست‌هایی به آن اضافه کرد.

۶. **رسالهٔ محیطیه**، به زبان عربی که آن را در سال ۸۲۷ نوشته است. در این کتاب محاسبهٔ محیط دایره را به روش قدیم شرح داده است. نسخه‌ای از این اثر به خط خود کاشانی در کتابخانهٔ آستان قدس رضوی نگهداری می شود.

۷. **مفتاح الحساب**، به زبان عربی که آن را در سال ۸۳۰، دوسال پیش از فوتش نوشته است. این کتاب از تألیفات مهم دورهٔ اسلامی است و قرن‌ها در مدرسه‌ها و حوزه‌های علمیه تدریس می شود.

۸. **رسالهٔ وتر و جیب** به محاسبهٔ سینوس زاویهٔ یک درجه می پردازد. متن اصلی آن موجود نیست ولی از شرح‌هایی که بر آن نوشته شده‌اند، موضوع آن مشخص می شود.

۹. **زیج تسهیلات**، کتابی است که کاشانی در مقدمهٔ «مفتاح الحساب» از آن نام برده، ولی تاکنون از آن اثری به دست نیامده است.

همچنین، **رساله در ساخت اسطرلاب** (به فارسی)، **سمت قبله از دایرهٔ هندیه معروفه** (به عربی)، **تشریح پرگار** (به فارسی)، **مفتاح الارباب فی علم الزیج** و برخی آثار دیگر را نیز به کاشانی نسبت می دهند.

مهم‌ترین کار علمی غیاث‌الدین جمشید کاشانی محاسبهٔ عدد π، یعنی نسبت محیط دایره به قطر آن است. او مقدار ۲π را در رسالهٔ محیطیه چنین محاسبه کرده است:

$$۲\pi = ۶/۲۸۳۱۸۵۳۰۷۱۷۹۵۸۶۵$$

این مقدار تا حدود ۱۵۰ سال بعد از او دقیق‌ترین محاسبهٔ π بوده است.

کار مهم دیگر او محاسبهٔ جیب زاویهٔ یک درجه ($\mathrm{Sin}\,۱^\circ$) است. مقداری که او به دست آورده، برابر است با:

$$\mathrm{Sin}\,۱^\circ = ۰/۰۱۷۴۵۲۴۰۶۴۳۷۲۸۳۵۱۰۳۷۱۲$$

هفده رقم اعشاری از این عدد با آخرین محاسبات انجام شده، یکسان است.

منابع

۱. باقری، محمد. از سمرقند به کاشان. شرکت انتشارات علمی و فرهنگی. تهران. ۱۳۷۵.

۲. برگرن، جی. ال. گوشه‌هایی از ریاضیات دوره اسلامی. ترجمه علیرضا جمالی. انتشارات فاطمی. چاپ دوم. ۱۳۷۴.

۳. فرشاد، دکتر مهدی. تاریخ علم در ایران. امیرکبیر. ۱۳۶۶.

۴. قربانی: ابوالقاسم. زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی. مرکز نشر دانشگاهی. ۱۳۶۵.

۵. کاشانی نامه. مرکز نشر دانشگاهی. تهران. ۱۳۶۸.

۶. لواسانی نوایی، حمید. جمشید کاشانی. دفتر انتشارات کمک آموزشی. تهران. ۱۳۸۰.

۷. معتمدی، اسفندیار و دیگران. تاریخ علوم. وزارت آموزش و پرورش. تهران.

درباره اتحاد و معادله ۳

پرویز شهریاری

نمادهای ریاضی و اتحادها

در شمارهٔ قبل دربارهٔ تاریخچه اتحاد دو معادله و برخی اتحادها بحث کردیم. در ادامه مطلب چند نکته دیگر درباره اتحادها را مرور کرده‌ایم.

دربارهٔ اتحادها، باید به چند نکته اشاره کنیم. معمول است که در دبیرستان به چند اتحاد مهم، برای ساده کردن ضرب‌ها اشاره می‌شود. برخی عادت دارند اتحادها را به همان ردیفی که در کتاب درسی آمده‌اند، شماره گذاری کنند و برای نمونه، وقتی از اتحاد:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

گفت و گو می‌شود، بگویند «اتحاد سوم». در کتاب درسی ممکن است ردیف اتحادهایی که آورده‌اند، با هم فرق داشته باشند. «اتحاد سوم» هیچ معنایی ندارد، باید گفت، اتحادی است که حاصل ضرب دو عبارت مزدوج را به صورت تفاضل مربع‌های دو عبارت می‌دهد یا چیزی شبیه آن، که مضمون اتحاد را برساند. در واقع، تعداد اتحادها، بی‌نهایت است و به عنوان مثال، می‌توان از اتحاد عددی ۵=۵ یا کلی از آن $a = a$ صحبت کرد. یا فرض کنید، این اتحاد مورد نظر باشد:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

بسیاری می‌گویند: «اتحاد یک جمله مشترک» درست است دو عبارتی که در هم ضرب شده‌اند، یک جملهٔ مشترک (x) دارند؛ ولی توجه کنیم، این دو عبارتی که یک جملهٔ مشترک دارند، تشکیل اتحاد نمی‌دهند، اتحاد به معنای یک برابری است و در عبارت «اتحاد یک جملهٔ مشترک» نمی‌توان به این برابری پی برد. برای نمونه، خیلی وقت‌ها پیش می‌آید که از کسی پرسیده می‌شود: «$a^2 - b^2$ را تعریف کن» و او، بی‌هیچ تردیدی، پاسخ می‌دهد؛ این یک اتحاد مزدوج است. در دو جمله‌ای $a^2 - b^2$ هیچ برابری دیده نمی‌شود، در حالی که شرط نخست اتحاد، وجود یک برابری است. دوم، در کجای این عبارت، «مزدوج» را می‌بینید؟ برای «مزدوج» هم باید عبارت داشت که یک جملهٔ آن‌ها با هم برابر و جملهٔ

دیگر قرینهٔ هم باشند. پس این عبارت، نه اتحاد است ونه مزدوج. خیلی ساده می‌توان گفت: «a^2-b^2 یک عبارت جبری است» یا دقیق‌تر از آن، «تفاضل دو مجذور کامل است». اگر بخواهیم واژهٔ اتحاد را به میان آوریم، می‌توان گفت: «این عبارت قابل تبدیل به صورت ضرب دو عبارت مزدوج هم است.» در ریاضیات، جمله‌ای را کامل می‌گوییم که از دید رضیات معنا داشته باشد و نتوان از جمله‌ای که به نام «تعریف» می‌آوریم، مفهوم دیگری استنباط کرد. برای مثال، «وقت طلاست»، ولی نه به آن اندازه که جملهٔ ما بی‌معنا باشد. تعریف باید «لازم و کافی» باشد؛ و آنچه منظورماست، از تعریف بیرون نیاید و در ضمن، به‌طور کامل، مفهوم مورد نظر ما را برساند.

این گونه رمزگونه صحبت کردن، کار ریاضیات نیست. برای نمونه، وقتی از معادله‌ای صحبت می‌کنید، نگویید «معلوم و مجهول می‌کنیم»، این جمله هیچ معنایی ندارد، بگویید: «جمله‌های معلوم را به یک طرف معادله و جمله‌های مجهول را به طرف دیگر معادله می‌بریم.»

وقتی از خارج قسمت دو کسر گفت‌وگو می‌کنید، از جملهٔ معنایی (یا دست‌کم غیر ریاضی) «دور در دور، نزدیک در نزدیک» استفاده نکنید، معنای ریاضی جملهٔ خود را بیان کنید: «برای تقسیم یک کسر بر کسر دیگر، بخشیاب را به‌طور وارون در بخشی ضرب می‌کنیم». اگر دو کسر با هم برابرند، نگویید: «طرفین، وسطین می‌کنیم»، بگویید «از ویژگی تناسب استفاده می‌کنیم» یا «دو طرف برابری را درحاصل ضرب مخرج‌ها، ضرب می‌کنیم».

راه اثبات اتحاد بودن: می‌خواهیم درستی این اتحاد را ثابت کنیم:

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=$$
$$a^3+b^3+c^3-3abc$$

درستی این اتحاد را از راه‌های متفاوت می‌توان تحقیق کرد:

راه اول: اگر در سمت چپ برابری، عمل ضرب را انجام دهیم، به سمت راست می‌رسیم (خودتان ضرب را انجام دهید.)

راه دوم: اگر سمت راست برابری را بر $a+b+c$ تقسیم کنیم، پرانتز دوم سمت چپ برابری به دست می‌آید. این تقسیم را انجام می‌هیم؛ ابتدا باید بخشی (مقسوم) و بخشیاب (مقسوم‌علیه) را برحسب توان‌های نزولی یکی از حرف‌ها، و از جمله a منظم می‌کنیم:

بخشی $=a^3+0a^2-3bca+(b^3+c^3)$,

بخشیاب $=a+(b+c)$

در بخشی جملهٔ $0a^2$ را برای مرتّب بودن توان‌های a و پیش‌گیری از اشتباه افزوده‌ایم. از تقسیم a^3 بر a، نخستین جملهٔ خارج قسمت، یعنی a^2 به‌دست می‌آید. از ضرب a^2 در دو جملهٔ بخشیاب ($b+c$ را یک جمله به حساب آورده‌ایم، به همین مناسبت آن‌را داخل پرانتز نوشته ایم)، نتیجه می‌شود:

$$a^3+(b+c)a^2$$

که اگر آن‌را از بخشی کم کنیم، باقی‌ماندهٔ اول به دست می‌آید:

$$-(b+c)a^2-3bca+b^3+c^3$$

از تقسیم $-(b+c)a^2$ بر a، دومین جملهٔ خارج قسمت، یعنی $-(b+c)a$ پیدا می‌شود، که از ضرب آن دربخشیاب پیدامی‌شود:

$$-(b+c)a^2-(b+c)^2a$$

آن را از ماندهٔ اول کم می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$(b^2+c^2-bc)a+b^2+c^2$$

از تقسیم نخستین جملهٔ باقی‌ماندهٔ دوم بر a به‌دست می‌آید:

$$b^2+c^2-bc$$

که جملهٔ سوم خارج قسمت است. آن‌را در بخشیاب ضرب می‌کنیم:

$$\left(b^2+c^2-bc\right)a+\left(b^2+c^2-bc\right)(b+c)$$

یا اگر پرانتزهای آخر را درهم ضرب کنیم:

$$\left(b^2+c^2-bc\right)a+b^3+c^3$$

جملهٔ سوم خارج قسمت برابر $\left(b^2+c^2-bc\right)$ می‌شود، که اگر حاصل ضرب آن‌را بر بخشیاب، از باقی ماندهٔ دوم کم کنیم، باقی‌مانده‌ای برابر صفر به‌دست می‌آید. بنابراین تقسیم بدون باقی‌مانده است:

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac\right)$$

و به این ترتیب، درستی اتحاد ثابت شد.

راه سوم: اگر a را در این برابری مجهول بگیریم، معادله‌ای از درجهٔ سوم به‌دست می‌آید. هر معادلهٔ درجهٔ n، حداکثر دارای n ریشهٔ حقیقی است و اگر معادله‌ای بیش‌تر درجهٔ خود ریشه داشت، دیگر معادله نیست، بلکه اتحاد است. می‌توان آزمایش کرد که این برابری برای $a=0$، $a=-b$، $a=-c$ و $a=-b-c$ برقرار است. وقتی معادلهٔ درجهٔ سوم، دارای چهار ریشهٔ حقیقی باشد، اتحاد است.

استفاده از ویژگی‌های معادله در اثبات اتحادها

معادله، هستهٔ مرکزی و مضمون اصلی جبر مقدماتی را تشکیل می‌دهد. واژهٔ «جبر» با توجه به همین مضمون انتخاب شده است. در تاریخ ریاضیات، محمد فرزند موسا مشهور به خوارزمی، ریاضی‌دان ایرانی سدهٔ سوم هجری را به‌وجود آورندهٔ جبر می‌دانند. این ریاضی‌دان، در دورهٔ ریاضیات کاربردی به سر می‌برد و برای حلّ مسأله‌هایی که ناشی از تقسیم ارث و عمل کردن به وصیت‌ها بود، در «حساب» روش تازه‌ای آورد و آن را «جبر و مقابله» نامید. او «جبر» را به معنای «جبران کردن» و انتقال از یک سمت معادله به سمت دیگر می‌دانست (عملی که در واقع، موجب مثبت شدن عدد منفی می‌شود) و «مقابله» را به معنای «مقابل قراردادن» در سمت معادله می‌دانست. اروپائیان واژهٔ «جبر» را به‌صورت الجبر نگه داشتند و واژهٔ «مقابله» را حذف کردند.

دربارهٔ معادله و ویژگی آن، بعد از این صحبت خواهیم کرد و دراین جا تنها به کاربرد ویژگی‌های معادله در اثبات اتحادها می‌پردازیم.

نمونهٔ اول: درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2$$

حل: البته می‌توان درستی این اتحاد را، با تحمل اندکی محاسبه‌های طولانی، با جمع سه کسر سمت چپ و ساده کردن آن، ثابت کرد؛ ولی ساده‌ترین راه این است که از برهان خُلف استفاده کنیم. اگر این برابری یک معادله باشد (ونه اتحاد)، به دلیل درجهٔ دوم بودن آن نسبت به x، باید حداکثر دو ریشهٔ حقیقی داشته باشد؛ در حالی‌که به سادگی می‌توان تحقیق کرد، اگر به جای x، مقدارهای a، b و c را قرار دهیم، در برابری صدق می‌کنند. یک معادلهٔ درجهٔ دوم، نمی‌تواند ریشهٔ حقیقی داشته باشد. البته در این میان، a، b و c را برابر نمی‌گیریم و مخالف صفر فرض می‌کنیم.

برای نمونه، برای $x=a$، در سمت چپ برابری، کسر اول برابر a^2 و دو کسر دیگر برابر صفر می‌شوند، سمت راست برابری برابر a^2 می‌شود؛ یعنی $x=a$ ریشه‌ای از این معادله است. به همین ترتیب، برای $x=b$ و $x=c$ هم می‌توان آزمایش کرد. اکنون معادلهٔ درجه دوم ما دارای سه جواب می‌شود، بنابراین معادله نیست، یک اتحاد است.

نمونهٔ دوم: می‌خواهیم دربارهٔ درستی این اتحاد تحقیق کنیم:

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=1$$

حل: در این‌جا باید a، b و c طوری باشند که هیچ دو تایی از آن‌ها با هم برابر صفر نشوند. برابری برای $x=a$، $x=b$ و $x=c$ برقرار است، بنابراین نمی‌تواند معادله باشد؛ زیرا اگر معادله باشد، به دلیل درجهٔ دوم بودن آن، نباید بیش از دو ریشهٔ حقیقی داشته باشد.

نمونهٔ سوم: چرا این برابری، یک اتحاد است؟

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=0$$

به شرط این که از سه عدد a، b و c، هیچ دوتایی قرینهٔ هم نباشند.

حل: عبارت سمت چپ برابری را می‌توان این طور نوشت:

$$\frac{1}{(a+b)(b+c)(c+a)}(a-b)(a+c)(b+c)+$$
$$(a+c)(a+b)(b-c)+(a+b)(c-a)(b+c)+$$
$$(a-b)(b-c)(c-a)$$

عبارت داخل کروشه، نسبت به a، از درجهٔ دوم است؛ ولی برای $a=b$ و $a=c$ و $a=0$ برابر صفر می‌شود؛ در نتیجه عبارت مفروض، متحد با صفر است.

نمونهٔ چهارم: درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$\frac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2-ac}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2-ab}{(c+a)(c+b)}=0$$

راهنمایی. شبیه تمرین قبل عمل کنید. بعد از مخرج مشترک گرفتن، عبارت صورت کسر نسبت به a، از درجهٔ دوم است و برای $a=-b$، $a=c$ و $a=0$ برابر صفر می‌شود؛ یعنی این، یک اتحاد است.

یک نمونهٔ دیگر (اتحاد مثلثاتی). درستی این برابری را ثابت کنید.

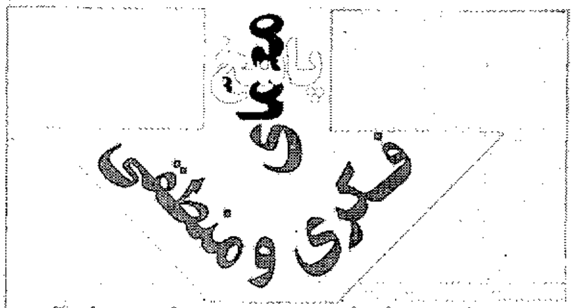
$$\tan\sum_{k=1}^{4n+1}\arctan\frac{k^2+k+2}{k^2+k}=4n+2$$

حل: به ترتیب داریم:

$$\sum_{k=1}^{4n+1}\arctan\frac{k^2+k+2}{k^2+k}=\sum_{k=1}^{4n+1}\left(\arctan 1+\arctan\frac{1}{k^2+k+2}\right)$$
$$=\frac{\pi}{4}(4n+1)+\sum_{k=1}^{4n+1}\left(\arctan(k+1)+\arctan k\right)$$
$$=\frac{\pi}{4}(4n+1)+\arctan(4n+2)-\arctan 1$$
$$=\frac{\pi}{4}(4n+1)+\arctan\frac{4n+1}{4n+3}$$

بنابراین:

$$\tan\sum_{k=1}^{4n+1}\arctan\frac{k^2+k+2}{k^2+k}$$
$$=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\arctan\frac{4n+1}{4n+3}\right)=\frac{1+\frac{4n+1}{4n+3}}{1-\frac{4n+1}{4n+3}}=4n+2$$



جواب معمای ۱:

B: رئیس

J: تحویلدار

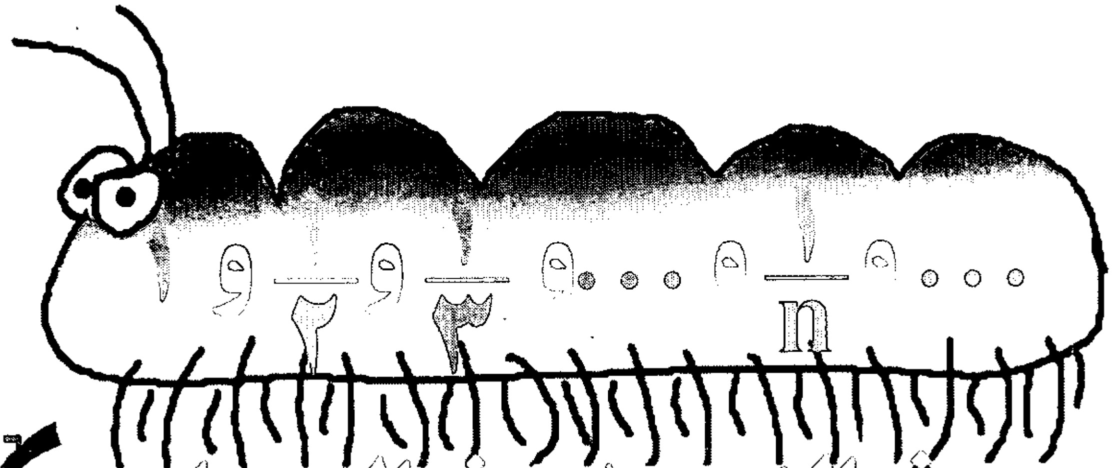
S: صندوقدار

جواب معمای ۲:

C: نجّار

D: نقّاش

F: لوله‌کش



دنباله، حد دنباله ها

سید محمدرضا هاشمی موسوی

اشاره

در شماره قبل به معرفی دنباله به عنوان یک تابع پرداختیم، همچنین تصور شهودی دربارهٔ حد دنبالهٔ عددی و تعریف حد دنباله را بیان کردیم، در ادامهٔ مطلب قضیه یکتایی حد دنباله دار و چند نکته دیگر بررسی شده است.

قضیهٔ یکتایی حدّ دنباله: اگر دنبالهٔ $\{a_n\}$ به سمت حدّی مثل a میل کند، دنبالهٔ $\{a_n\}$ به سمت عدد دیگری مثل b میل نخواهد کرد. بیان ریاضی این قضیه چنین است:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, a_n = a,\ \underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, a_n = b \Rightarrow a = b$$

نکته: نباید همیشه گمان کرد که هر دنباله‌ای، دارای حد است؛ زیرا دنباله هایی وجود دارند که با این که همهٔ جمله های آن‌ها محدود و معین هستند، ولی دارای حدی نیستند. به طور مثال، دنباله با جملهٔ عمومی $a_n = (-1)^n$ را در نظر می گیریم. با وجود این که برای همهٔ جمله های آن داریم $|a_n| \le 1$، ولی بی‌نهایت جمله برابر ۱- و بی‌نهایت جمله برابر ۱ موجود است.

تعریف: اگر a_n و a_{n+1} دو جملهٔ متوالی یک دنباله باشند:

۱) دنباله را صعودی (یکنوا) گویند؛ هرگاه داشته باشیم:

$a_{n+1} \ge a_n$

۲) دنباله را صعودی اکید (یکنوای اکید) گویند؛ هرگاه داشته باشیم:

$a_{n+1} > a_n$

برای مثال، دنبالهٔ $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$، صعودی اکید (یکنوای اکید) است؛ زیرا همیشه $a_{n+1} > a_n$ برقرار است.

تذکر: دنبالهٔ صعودی یا نزولی را دنبالهٔ یکنوا و دنبالهٔ صعودی اکید یا نزولی اکید را **دنبالهٔ یکنوای اکید** گویند.

مثال. دنبالهٔ $\left\{a_n = \frac{1}{n}\right\}$ یک دنبالهٔ نزولی اکید است؛ زیرا همیشه داریم:

$a_{n+1} < a_n$

نکته: دنبالهٔ یکنوا، تنها می تواند از یک سمت (راست یا چپ)، به حدّ خود نزدیک شود.

تعریف: اگر برای دنبالهٔ $\{a_n\}$، عددی حقیقی مثبت مثل k وجود داشته باشد، به طوری که برای هر n طبیعی داشته باشیم $|a_n| < k$، دنباله را **کراندار**، در غیر این صورت آن را **بی کران** می نامند.

قضیه: دنبالهٔ یکنوای صعودی $\{a_n\}$، وقتی کران بالایی حقیقی مثل a داشته باشد، دارای حدّی معین و محدود و برابر a است:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, a_n = a$$

نکته: اگر دنبالهٔ $\{a_n\}$، یکنوای صعودی باشد، ولی کران بالا نداشته باشد، خواهیم داشت:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, a_n = +\infty$$

همچنین، اگر دنبالهٔ $\{t_n\}$، یکنوای نزولی باشد، ولی کران پایین نداشته باشد، خواهیم داشت:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, t_n = -\infty$$

مثال. دنبالهٔ $\left\{a_n = \frac{2^n}{n!}\right\}$، دارای جمله‌های زیر است:

$$2 \text{ و } 2 \text{ و } \frac{4}{3} \text{ و } \frac{2}{3} \text{ و } \dots \text{ و } \frac{2^n}{n!} \text{ و } \dots$$

عدد ۲ کران بالای این دنباله و یکی از کران پایین آن، عدد صفر است؛ درنتیجه دنباله کراندار است. این دنباله یکنوای نزولی است؛ زیرا داریم $a_1 = a_2 > a_3 > a_4 > \cdots$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$ همیشه داریم: $a_{n+1} \le a_n$.

مسأله. آیا دنبالهٔ $\left\{a_n = (1+\frac{1}{n})^n\right\}$ دارای حدّی است؟

$(n \in \mathbb{N})$

حل: با توجه به بسط دوجمله‌ای $(1+\frac{1}{n})^n$:

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1 + n.\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\times 2}.\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-n+1)}{1\times 2\times 3\times\cdots\times n}.\frac{1}{n^n}$$

و یا:

$$(1+\frac{1}{n})^n = 2 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

واضح است که $a_{n+1} > a_n$؛ بنابراین، دنباله، صعودی اکید است.

حال در این‌جا، کراندار بودن دنباله را ثابت می‌کنیم. برای این منظور، نابرابری بدیهی زیر را می‌نویسیم:

$$a_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

(جملهٔ اوّل دنباله، برابر ۲ است)

$$n=1:\ a_1 = (1+\frac{1}{1})^1 = 2$$

همچنین:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

درنتیجه:

$$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

پس:

$$n \in \mathbb{N}:\ 2 < a_n = (1+\frac{1}{n})^n < 3$$

بنابراین، دنباله دارای حدّی است و حدّ این دنباله را با نماد e (پایهٔ لگاریتم طبیعی) نشان می‌دهیم:

$$e = \underset{n\to\infty}{\text{حد}} (1+\frac{1}{n})^n$$

عدد e به **عدد اویلر** مشهور است و عددی گنگ و غیرجبری است و در آنالیز کاربرد فراوانی دارد و مقدار آن چنین است:

$e \approx 2/7182818284\cdots$

مثال. تابع t با ضابطهٔ $t(n) = \frac{n-1}{n}$ و فرض $n \in \mathbb{N}$ را در نظر می‌گیریم. بنابراین می‌توان نوشت:

$$t_1 = 0,\ t_2 = \frac{1}{2},\ t_3 = \frac{2}{3},\ t_4 = \frac{3}{4},\ t_5 = \frac{4}{5}, \dots, t_n = \frac{n-1}{n}, \dots$$

حال اگر عددهای به‌دست آمده را به دنبال هم بنویسیم، دنبالهٔ زیر تشکیل می‌شود:

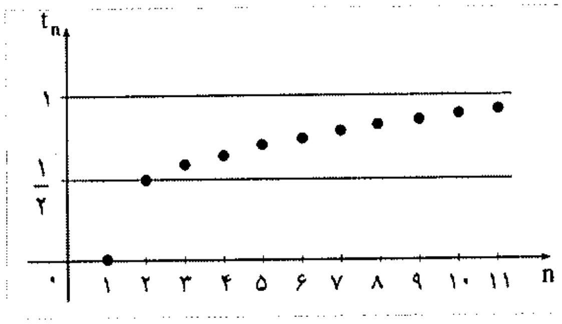
$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots$$

نمایش دیگری از تابع t، به صورت مجموعه‌ای از

زوج‌های مرتّب است :

$$t = \left\{(1,0),\ (2,\frac{1}{2}),\ (3,\frac{2}{3}),\ (4,\frac{3}{4}),\cdots,(n,\frac{n-1}{n}),\cdots\right\}$$

در این جا، برای درک شهودی دنباله، نمودار قسمتی از آن را رسم می‌کنیم :



با توجه به نمودار، می‌بینیم که هر اندازه n بزرگ‌تر اختیار شود، جمله‌های دنباله به عدد ۱ نزدیک‌تر خواهد شد. بنابراین، می‌توان t_n را به عدد ۱ به اندازهٔ دلخواه نزدیک کرد؛ به شرطی که عدد n را به اندازهٔ کافی بزرگ اختیار کنیم.

به عنوان مثال، برای $n=100$ ، به‌دست می‌آید :

$$t_{100} = \frac{99}{100} = 0/99 .$$

همچنین :

$$n=10000:\ t_{10000} = \frac{9999}{10000} = 0/9999$$

$$n=10^6:\ t_{10^6} = \frac{999999}{10^6} = 0/999999$$

.

.

.

$$n=10^k:\ t_{10^k} = \frac{\overbrace{999\cdots9}^{k\text{مرتبه}}}{10^k} = \overbrace{0/999\cdots9}^{k\text{مرتبه}}$$

واضح است که اگر $n>100$ ، آن‌گاه هر یک از جمله‌های دنباله به عدد ۱ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند؛ به تعبیری دیگر، جمله‌های دنباله، نزدیک عدد ۱ تجمع خواهند کرد و به بیان ریاضی: «جمله‌های دنباله، در همسایگی عدد ۱ واقع می‌شوند.»

با این شرایط، بدیهی است که این دنباله به عدد ۱ ، همگرا خواهد شد.

در این جا، می‌توان به این نتیجه رسید که حدّ دنبالهٔ $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$ ، برابر عدد ۱ است یا به بیان ریاضی می‌توان نوشت :

$$n \in \mathbb{N}:\ \underset{n\to\infty}{\text{حد}} \left(\frac{n-1}{n}\right) = 1$$

می‌بینیم که هر جملهٔ این دنباله، از عدد ۱ کوچک‌تر است. حال می‌خواهیم t_n را به اندازه‌ای به عدد ۱ نزدیک کنیم تا اختلاف بین عدد ۱ و t_n از عددی مثل $\frac{1}{100}$ کم‌تر باشد، با نماد ریاضی، این مطلب را چنین می‌نویسند :

$$n \in \mathbb{N}: 1 - t_n < \frac{1}{100};\ 1 - \frac{n-1}{n} < \frac{1}{100} \qquad (1)$$

واضح است که حلّ این مسأله، به انتخاب n بستگی پیدا می‌کند؛ یعنی n را برابر چه عددی بگیریم تا نامعادلهٔ (۱) به یک نابرابری ثابت (همیشه درست) تبدیل شود. برای این منظور، کافی است نامعادلهٔ (۱) را حل کنیم :

$$1 - \frac{n-1}{n} < \frac{1}{100};\ \frac{n-n+1}{n} < \frac{1}{100};\ \frac{1}{n} < \frac{1}{100};\ n > 100$$

بنابراین، اگر $n \geq 101$ ، آن‌گاه t_n به اندازه‌ای به عدد ۱ نزدیک می‌شود که داشته باشیم :

$$1 - t_n < \frac{1}{100}$$

اکنون مسأله را برای عدد مثبت دلخواهی مثل ξ (اپسیلن) طرح می‌کنیم؛ یعنی می‌خواهیم t_n را به اندازه‌ای به عدد ۱ نزدیک کنیم که داشته باشیم :

$$n \in \mathbb{N}:\ 1 - t_n < \xi;\ 1 - \frac{n-1}{n} < \xi \qquad (2)$$

در این جا نیز، حلّ مسأله، به انتخاب n بستگی دارد؛ یعنی n را بر حسب ξ چگونه در نظر بگیریم تا نامعادلهٔ (۲) به یک نابرابری ثابت (همیشه درست) تبدیل شود؟ برای این منظور، کافی است نامعادلهٔ (۲) را حل کنیم :

$$1 - \frac{n-1}{n} < \xi;\ \frac{n-n+1}{n} < \xi;\ \frac{1}{n} < \xi;\ n > \frac{1}{\xi}$$

با توجه به $\xi > 0$ و با در نظر گرفتن این که $\frac{1}{\xi}$ ممکن است یک عدد طبیعی نباشد، بهتر است از عبارت $\left[\frac{1}{\xi}\right]$ که حاصل آن همیشه یک عدد طبیعی است، استفاده کنیم. بنابراین با فرض $M \in \mathbb{N}$ و $M \ge \left[\frac{1}{\xi}\right]+1$ و برای هر $\xi > 0$، همیشه عددی طبیعی مثل M وجود دارد؛ به طوری که داشته باشیم:

$$n \ge M \Rightarrow 1 - t_n < \xi \qquad (3)$$

زیرا، با توجه به $M \ge \left[\frac{1}{\xi}\right]+1$، می‌توان نوشت:

$$n \ge M \ge \left[\frac{1}{\xi}\right]+1 > \frac{1}{\xi} \Rightarrow n > \frac{1}{\xi} \Rightarrow \frac{1}{n} < \xi$$

$$\Rightarrow \frac{n-n+1}{n} < \xi \Rightarrow 1 - \frac{n-1}{n} = 1 - t_n < \xi$$

در این جا، ثابت می‌شود که رابطهٔ (۳) یک گزارهٔ شرطی همیشه درست (استلزام منطقی) است. اکنون می‌توان مفهوم مطالب اخیر را به طریق ریاضی بیان کرد:

$$n \in \mathbb{N}: \ \underset{n\to\infty}{\text{حد}} \left(\frac{n-1}{n}\right) = 1 \qquad (4)$$

رابطه‌های (۳) و (۴)، درواقع مفهوم واحدی را می‌رسانند؛ زیرا هر دو بیان می‌کنند که «حدّ دنبالهٔ $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$ برابر عدد ۱ است».

دنبالهٔ همگرا

اگر L یک عدد حقیقی ($L \in \mathbb{R}$) و حدّ دنبالهٔ $\{a_n\}$ برابر L باشد، در اصطلاح می‌گوییم دنبالهٔ $\{a_n\}$ به عدد L همگراست. به بیان دیگر، اگر برای هر $\xi > 0$، همیشه عددی طبیعی مثل M وجود داشته باشد، به طوری که گزارهٔ شرطی زیر برقرار باشد:

$$n \ge M \Rightarrow |a_n - L| < \xi \qquad (1)$$

در این صورت می‌توان نوشت:

$$n \in \mathbb{N}: \ \underset{n\to\infty}{\text{حد}} (a_n) = L \qquad (2)$$

همچنین، اگر رابطهٔ (۲) برقرار باشد با استفاده از علائم ریاضی $\forall$ (هرچه باشد) و $\exists$ (وجود دارد) می‌توان آن را به صورت ریاضی تعبیر کرد:

$$\forall \xi > 0 \ \exists M \in \mathbb{N}: \ n \ge M \Rightarrow |a_n - L| < \xi$$

مثال. ثابت کنید دنبالهٔ $\{a_n\}$ با جملهٔ عمومی $a_n = \frac{4n+3}{n}$، $n \in \mathbb{N}$، به عدد ۴ همگراست:

$$n \in \mathbb{N}: \ \underset{n\to\infty}{\text{حد}} a_n = 4$$

حل: بنا به تعریف همگرایی، کافی است ثابت کنیم که رابطهٔ شرطی زیر، همیشه درست است:

$$\forall \xi > 0 \ \exists M \in \mathbb{N}: \ n \ge M \Rightarrow |a_n - 4| < \xi \qquad (1)$$

در این جا، برای تعیین رابطهٔ بین n و ξ، به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$|a_n - 4| = \left|\frac{4n+3}{n} - 4\right| = \left|\frac{4n+3-4n}{n}\right| = \left|\frac{3}{n}\right| \overset{n \in \mathbb{N}}{=\!=} \frac{3}{n} < \xi$$

بنابراین، رابطهٔ بین n و ξ، چنین است:

$$n > \frac{3}{\xi}$$

با توجه به $\xi > 0$ و با در نظر گرفتن این که $\frac{3}{\xi}$ ممکن است یک عدد طبیعی نباشد، بهتر است از عبارت $\left[\frac{3}{\xi}\right]$ که حاصل آن همیشه یک عدد طبیعی است، استفاده کنیم. بنابراین با فرض $M \in \mathbb{N}$ و $M \ge \left[\frac{3}{\xi}\right]+1$، برای هر $\xi > 0$، همیشه عددی طبیعی مثل M وجود دارد؛ به طوری که داشته باشیم:

$$n \ge M \Rightarrow |a_n - 4| < \xi$$

زیرا، با توجه به $M \ge \left[\frac{3}{\xi}\right]+1$، می‌توان نوشت:

$$n \ge M \ge \left[\frac{3}{\xi}\right]+1 > \frac{3}{\xi} \Rightarrow n > \frac{3}{\xi} \Rightarrow \frac{3}{n} < \xi \Rightarrow \frac{3}{n} \overset{n \in \mathbb{N}}{=\!=} \left|\frac{3}{n}\right| < \xi$$

$$\Rightarrow \left|\frac{3}{n}\right| = \left|\frac{4n+3-4n}{n}\right| = \left|\frac{4n+3}{n} - 4\right| = |a_n - 4| < \xi$$

در این جا، ثابت می‌شود که همیشه از فرض $n \ge M$،

می‌توان حکم $\xi > |a_n - 4|$ را نتیجه گرفت، پس رابطهٔ (۱) یک همیشه درست است.

توجه: دنبالهٔ $\{a_n\}$ را وقتی کراندار گوییم که کران پایین و کران بالای آن وجود داشته باشد.

مثال. دنبالهٔ $\left\{a_n = \frac{n+1}{2n-1}\right\}$ را در نظر می‌گیریم.

جمله‌های این دنباله چنین است:

$$2, 1, \frac{4}{5}, \frac{5}{7}, \frac{2}{3}, \frac{7}{11}, \ldots, \frac{n+1}{2n-1}, \ldots$$

به سادگی ثابت می‌شود:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right) = \frac{1}{2}$$

بنابراین، یکی از کران پایین این دنباله، عدد $\frac{1}{2}$ است و هر عدد کوچک‌تر یا معادل $\frac{1}{2}$ را نیز، می‌توان یک کران پایین این دنباله منظور کرد.

به همین ترتیب، عدد ۲، یکی از کران بالای این دنباله است و هر عدد بزرگ‌تر یا معادل ۲ را نیز، می‌توان یک کران بالای این دنباله منظور کرد.

در این دنباله، عدد $\frac{1}{2}$ را بزرگ‌ترین کران پایین و عدد ۲ را کوچک‌ترین کران بالای دنبالهٔ $\left\{\frac{n+1}{2n-1}\right\}$ می‌گوییم.

توجه: در این صورت، بزرگ‌ترین کران پایین و کوچک‌ترین کران بالای دنبالهٔ $\{a_n\}$، یکتاست.

دنبالهٔ واگرا: اگر دنباله‌ای همگرا نباشد، واگراست؛ یعنی اگر حدّ دنبالهٔ $\{a_n\}$، وقتی n به بی‌نهایت میل کند، برابر عددی حقیقی مانند L نباشد، دنبالهٔ $\{a_n\}$ را واگرا می‌نامیم.

مسأله. ثابت کنید حدّ دنبالهٔ $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$، برابر صفر است:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = 0$$

حل: کافی است ثابت کنیم، برای هر $\xi > 0$، عددی طبیعی مثل M وجود دارد که رابطهٔ شرطی زیر همیشه درست باشد:

$$\forall \xi > 0 \;\; \exists M \in \mathbb{N}:\; n \geq M \Rightarrow \left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \xi \qquad (1)$$

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \xi \Rightarrow n > \frac{1}{\xi} \Rightarrow M \geq \frac{1}{\xi}$$

پس، کافی است $M \geq \frac{1}{\xi}$ اختیار شود تا رابطهٔ شرطی (۱)، به یک رابطهٔ همیشه درست تبدیل شود؛ زیرا:

$$n \geq M \geq \frac{1}{\xi} \Rightarrow n > \frac{1}{\xi} \Rightarrow \frac{1}{n} < \xi \Rightarrow \left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \xi$$

بنابراین همیشه از فرض $M \geq \frac{1}{\xi}$، می‌توان حکم $\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \xi$ را نتیجه گرفت.

مسأله. ثابت کنید دنبالهٔ $\{n^2\}$ واگراست.

حل: از آن‌جا که جمله‌های دنبالهٔ $\{n^2\}$ به‌طور مرتّب افزایش می‌یابند، به همین دلیل نمی‌توانند در ξ همسایگی هیچ عدد حقیقی قرار گیرند؛ زیرا اگر فرض کنیم دنباله همگرا و حدّ آن L باشد، برای $\xi = 1$، باید بتوانیم عددی طبیعی مثل M بیابیم که رابطهٔ شرطی زیر همیشه برقرار باشد:

$$n \geq M \Rightarrow |n^2 - L| < 1$$

یا:

$$n \geq M \Rightarrow L - 1 < n^2 < L + 1$$

و این غیرممکن است؛ زیرا مجموعهٔ عددهای طبیعی، کراندار نیست.

قضیه: اگر دنبالهٔ $\{a_n\}$ همگرا باشد، آن‌گاه حدّ آن یکتاست.

اثبات: فرض کنیم دنباله دارای دو حدّ L_1 و L_2 باشد، چون $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$، بنابراین عدد طبیعی M_1 وجود دارد؛ به‌طوری که رابطهٔ شرطی زیر برقرار باشد:

و چون $\lim_{n\to\infty} a_n = L_2$، عدد طبیعی M_2 نیز وجود دارد؛ به‌طوری که داشته باشیم:

$$n \geq M_2 \Rightarrow |a_n - L_2| < \frac{\xi}{2}$$

پس، برای هر $n \geq M$ که $M = \max\{M_1, M_2\}$، خواهیم داشت:

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - a_n + a_n - L_2|$$
$$\le |a_n - L_1| + |a_n - L_2| < \frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{2} = \xi$$

یعنی $0 \le |L_1 - L_2| < \xi$ ، پس داریم $|L_1 - L_2| = 0$ یا $L_1 = L_2$.

بنابراین، دنبالهٔ همگرا تنها یک حدّ دارد.

تمرین

۱. نشان دهید که هر دنبالهٔ همگرا، کراندار است.

۲. ثابت کنید دنبالهٔ $\left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$ غیر یکنوا، کراندار و همگراست.

مسأله. نشان دهید دنبالهٔ $\{(-1)^n\}$ واگراست.

حل: برای اثبات واگرایی، کافی است نشان دهیم جمله‌های دنباله نمی‌توانند در ξ همسایگی هیچ عدد حقیقی قرار گیرند.

اگر فرض کنیم که دنبالهٔ همگرا و حدِ آن برابر L باشد، برای $\xi = \frac{1}{2}$ باید عدد طبیعی M را بیابیم؛ به‌طوری که داشته باشیم:

$$n \ge M \Rightarrow |(-1)^n - L| < \frac{1}{2}$$

می‌دانیم که اگر $n \ge M$ زوج باشد:

$$|1 - L| < \frac{1}{2} \qquad (1)$$

واگر $n \ge M$ فرد باشد:

$$|-1 - L| < \frac{1}{2};\ |1 + L| < \frac{1}{2} \qquad (2)$$

ولی در این‌جا، با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) و استفاده از نابرابری مثلث، به تناقض زیر می‌رسیم:

$$2 = |1 - L + 1 + L| < |1 - L| + |1 + L| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1;\ \ 2 < 1$$

این تناقض، نشان می‌دهد که هیچ عدد حقیقی مثل L، همزمان نمی‌تواند در دو رابطهٔ (۱) و (۲) صدق کند. بنابراین، دنبالهٔ $\{(-1)^n\}$ واگراست.

تمرین. نشان دهید دنباله‌های $\{2n\}$ ، $\left\{n^{(-1)^n}\right\}$ ، $\left\{\frac{n^2 + n}{2n + 1}\right\}$ ، $\{\sqrt{n}\}$ و $\left\{\frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}\right\}$ ، همگی واگرا هستند؛ یعنی حدّ هیچ‌یک از این دنباله‌ها برابر عددی حقیقی مانند L نمی‌شود.

برخی از ویژگی‌های حدّ دنباله‌ها

۱. اگر $\{a_n\}$ را دنباله‌ای همگرا فرض کنیم (یعنی دارای حدّ باشد) و حدّ آن را برابر عدد حقیقی L در نظر بگیریم، در صورتی که c عدد ثابتی باشد، دنبالهٔ $\{c.a_n\}$ هم همگراست:

$$\lim_{n\to\infty}(c.a_n) = c(\lim_{n\to\infty} a_n) = c.L$$

۲. اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ ، دنباله‌هایی همگرا باشند و L_1 و $L_2 \in \mathbb{R}$ و داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L_1 \ , \ \ \lim_{n\to\infty} b_n = L_2$$

الف) آن‌گاه دنباله‌های $\{a_n \pm b_n\}$ هم همگرا هستند:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = L_1 \pm L_2$$

ب) آن‌گاه دنبالهٔ $\{a_n . b_n\}$ هم همگراست:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n . b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n . \lim_{n\to\infty} b_n = L_1 . L_2$$

ج) آن‌گاه با فرض $b_n \ne 0$ و ، دنبالهٔ $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ هم همگراست:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{L_1}{L_2}$$

تمرین. اگر $a_n = (-1)^n$ و $b_n = (-1)^{n+1}$ ، تعیین کنید از دنباله‌های $\{a_n - b_n\}$ و $\{a_n b_n\}$ و $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ ، کدام همگراست.

مجانب ها

احمد قندهاری

شاخهٔ بی‌نهایت منحنی

می‌گوییم منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $y = f(x)$ دارای شاخهٔ بی‌نهایت است؛ هرگاه نقطه یا نقاطی روی نمودار تابع f وجود داشته باشد که لااقل یکی از مختصات آن‌ها به سمت بی‌نهایت میل کند.

مثال۱ . منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $y = x^2 + x$ دارای شاخهٔ بی‌نهایت است؛ زیرا:

$$x \to \pm\infty \Rightarrow y \to +\infty$$

مثال۲ . منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $y = \frac{x-1}{x-4}$ دارای شاخه بی‌نهایت است؛ زیرا:

$$x \to 4 \Rightarrow \lim \frac{x-1}{x-4} = \infty \text{ یا } y \to \infty$$

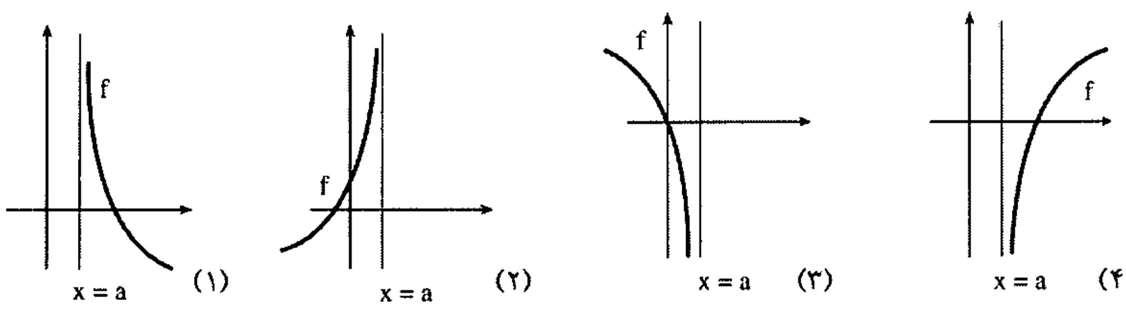
مثال۳ . منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $y = \frac{x^2+1}{x}$ دارای شاخه بی‌نهایت است؛ زیرا: $x \to \pm\infty \Rightarrow y \to \pm\infty$

تعریف خط مجانب

هرگاه نمودار (C) نمایش تابع با ضابطهٔ $y = f(x)$ دارای شاخهٔ بی‌نهایت باشد، خط (D) را مجانب آن شاخهٔ منحنی گوییم؛ هرگاه: فاصلهٔ نقطهٔ متغیر M روی آن شاخه تا خط D، وقتی نقطهٔ M روی آن شاخه بی‌نهایت دور شود، به سمت صفر میل کند.

۱. مجانب قائم

به چهار شکل زیر توجه کنید.



در شکل (۱) داریم: $x \to a^+ \Rightarrow f(x) \to +\infty$

در شکل (۲) داریم: $x \to a^- \Rightarrow f(x) \to +\infty$

در شکل (۳) داریم: $x \to a^- \Rightarrow f(x) \to -\infty$

در شکل (۴) داریم: $x \to a^+ \Rightarrow f(x) \to -\infty$

در هر چهار شکل، خط به معادلهٔ $x = a$ را مجانب قائم نمودار تابع f گوییم.

تعریف: اگر در تابع با ضابطهٔ $y = f(x)$ داشته باشیم: $x \to a^+$ یا $x \to a^-$ ، آن‌گاه $y \to +\infty$ یا $y \to -\infty$ ، در این صورت خط به معادلهٔ $x = a$ را مجانب قائم نمودار تابع f گوییم.

تذکر۱. در چهار شکل بالا، تابع f در $x = a$ تعریف نشده است؛ یعنی اگر $x = a$ ، آن‌گاه y وجود ندارد؛ ولی اگر $x \to a$ ، آن‌گاه $y \to +\infty$ یا $y \to -\infty$.

مثال۴. تابع با ضابطهٔ $y = f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$ را در نظر می‌گیریم. در این تابع داریم: $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

و اگر $x \to 2$ ، آن‌گاه $y \to \pm\infty$ ، پس بنا به تعریف، خط به معادلهٔ $x = 2$ مجانب قائم نمودار تابع f است و $x = 2$ در دامنهٔ تعریف تابع نیست.

حال تابع با ضابطهٔ $y = f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$ را در نظر می‌گیریم.

در این تابع داریم: $D_f = [1, +\infty) - \{2\}$

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ یا $x = -2$

$x \to 2 \Rightarrow y \to \pm\infty$

پس خط به معادلهٔ $x = 2$ مجانب قائم نمودار تابع f است.

در این تابع، x نمی‌تواند به سمت ۲- میل کند؛ زیرا هیچ یک از دو طرف ۲-، در دامنهٔ تعریف تابع واقع نیست.

تذکر۲. اگر خط به معادلهٔ $x = a$ مجانب قائم نمودار یک تابع مانند f باشد، آن‌گاه $x = a$ عضو دامنه نیست؛ ولی لااقل a^+ یا a^- باید عضو دامنهٔ f باشند.

مثال۵. تابع با ضابطهٔ $y = f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1}$ را در نظر می‌گیریم.

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ یا $x = -1$

$x \to 1 \Rightarrow y \to \dfrac{6}{0^{\pm}} \Rightarrow y \to \pm\infty$

پس خط به معادلهٔ $x = 1$ مجانب قائم نمودار تابع f است.

$x \to -1 \Rightarrow \lim \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1} = \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -1}\frac{x+2}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

پس خط به معادلهٔ $x = -1$ معادلهٔ مجانب قائم تابع فوق نیست.

مثال۶. تابع با ضابطهٔ $y = f(x) = \dfrac{x^2-4}{(x-2)^2(x-3)}$ را در نظر می‌گیریم.

$(x-2)^2(x-3) = 0 \Rightarrow x = 2$ یا $x = 3$

$x \to 3 \Rightarrow \lim y = \dfrac{5}{0^{\pm}} = \pm\infty \Rightarrow y \to \pm\infty$

پس خط به معادلهٔ $x = 3$ مجانب قائم نمودار تابع f است.

$$x \to 2 \Rightarrow y \to \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)^2(x-3)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2(x-3)} = \lim_{x\to 2}\frac{x+2}{(x-2)(x-3)} = \frac{4}{0^{\pm}} \to \pm\infty$$

$\Rightarrow y \to \pm\infty$

پس خط به معادلهٔ $x = 2$ هم مجانب قائم تابع فوق است.

تذکر۳. اگر در یک تابع، $x \to a$ ، آن‌گاه $\lim y = \dfrac{0}{0}$ ، چنانچه پس از رفع ابهام $\lim\limits_{x\to a} y = \infty$ ، آن‌گاه خط به معادلهٔ $x = a$ مجانب قائم نمودار تابع است.

مسألهٔ۱. در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \dfrac{x^2+5}{x^2+(m-1)x+1}$ ، m را چنان بیابید تا منحنی تابع فقط یک مجانب قائم داشته باشد.

حل: باید معادلهٔ $x^2+(m-1)x+1 = 0$ فقط یک ریشه داشته باشد، لذا باید $\Delta = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (m-1)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (m-1)^2 = 4$

$\Rightarrow m - 1 = \pm 2 \Rightarrow m = 1 \pm 2 \Rightarrow m = 3$ یا $m = -1$

مسألهٔ۲. در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x-2}{x^2+(m-4)x-2}$، m را چنان بیابید تا نمودار تابع یک مجانب قائم داشته باشد.

حل: مانند مسألهٔ قبل عمل می‌کنیم. می‌گوییم باید معادلهٔ $x^2+(m-4)x-2=0$ یک ریشه داشته باشد؛ یعنی باید $\Delta=0$

$$\Delta=b^2-4ac=(m-4)^2+8$$

ملاحظه می‌کنیم که عبارت $(m-4)^2+8$ همواره مثبت است و نمی‌تواند برابر صفر باشد، پس چه باید کرد؟

باید m را چنان پیدا کرد تا نمودار تابع، یک مجانب قائم داشته باشد. (به مثال ۵ دقت کنید.)

m را چنان پیدا می‌کنیم تا یکی از دو ریشهٔ مخرج عدد۲ باشد؛ یعنی $x=2$ را در معادلهٔ $x^2+(m-4)x-2=0$ قرار می‌دهیم، بنابراین:

$$4+(m-4)(2)-2=0 \Rightarrow 2m-6=0 \Rightarrow m=3$$

حال $m=3$ را بررسی می‌کنیم.

$$f(x)=\frac{x-2}{x^2+(m-4)x-2}$$

$$f(x)=\frac{x-2}{x^2-x-2}$$

$$x^2-x-2=0 \Rightarrow x=-1 \text{ یا } x=2$$

$$x\to -1 \Rightarrow f(x)\to \pm\infty$$

$$x\to 2 \Rightarrow f(x)=\frac{0}{0} \text{ و } \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$$

پس خط به معادلهٔ $x=2$ نمی‌تواند مجانب قائم تابع f باشد؛ زیرا g آن به سمت ∞ میل نکرده است. بنابراین نمودار تابع فقط یک مجانب قائم دارد.

مسألهٔ۳. در تابع با ضابطهٔ زیر:

$$y=f(x)=\frac{x^2-4}{(m-4)x^2-2x+1}$$

m را چنان بیابید تا منحنی تابع یک مجانب قائم داشته باشد.

حل: به حلّ این مسأله بیشتر توجه کنید. باید m را چنان بیابیم تا نمودار تابع f یک مجانب قائم داشته باشد.

$$(m-4)x^2-2x+1=0$$

بنابراین سه حالت زیر را دارد:

۱) $\Delta'=b'^2-ac=0 \Rightarrow 1-(m-4)=0 \Rightarrow m=5$

۲) $a=0$ یا $m-4=0 \Rightarrow m=6$

۳) یکی از جواب‌های معادلهٔ «۰=مخرج»، برابر یکی از جواب‌های معادله «۰=صورت» باشد.

$$x^2-4=0 \Rightarrow x=2 \text{ یا } x=-2$$

$$x=2 \xrightarrow{\text{در معادلهٔ ۰=مخرج}} (m-4)(4)-4+1=0 \Rightarrow 4m-19=0$$

$$\Rightarrow m=\frac{19}{4}$$

$$x=-2 \xrightarrow{\text{در معادلهٔ ۰=مخرج}} (m-4)(4)+4+1=0 \Rightarrow 4m-11=0$$

$$\Rightarrow m=\frac{11}{4}$$

مسألهٔ۴. در تابع با ضابطهٔ $y=\frac{x^2+5}{x^2+(a+b)x+2a}$، a و b را چنان بیابید تا دو خط به معادله‌های $x=2\sqrt{3}-2$ و $x=2\sqrt{3}+2$ مجانب‌های قائم نمودار تابع باشد.

حل: در واقع ریشه‌های معادلهٔ $x^2+(a+b)x+2a=0$ ، $(2\sqrt{3}-2)$ و $(2\sqrt{3}+2)$ هستند. اگر x' و x'' ریشه‌های معادلهٔ فوق باشند، داریم:

$$x'.x''=\frac{c}{a}=2a$$

$$x'.x''=(2\sqrt{3}-2)(2\sqrt{3}+2)=12-4=8$$

$$2a=8 \Rightarrow \boxed{a=4}$$

$$x'+x''=-\frac{b}{a}=-(a+b)$$

$$x'+x''=2\sqrt{3}-2+2\sqrt{3}+2=4\sqrt{3}$$

$$-(a+b)=4\sqrt{3} \Rightarrow a+b=-4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 4+b=-4\sqrt{3} \Rightarrow b=-4\sqrt{3}-4 \text{ یا } \boxed{b=-4(\sqrt{3}+1)}$$

مسألهٔ۵. معادلهٔ مجانب قائم تابع به معادلهٔ $\frac{x-2}{x}+\frac{y-1}{y+1}=4$ را بیابید.

حل: روش اول:

$$\frac{(x-2)(y+1)+x(y-1)}{x(y+1)}=4$$

$$\Rightarrow 4xy+4x=xy+x-2y-2+xy-x$$

$$\Rightarrow 2xy+2y=-4x \Rightarrow 2(x+1)y=-4x$$

$$\Rightarrow y=\frac{-2x}{x+1}$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

پس خط به معادلهٔ $x=-1$ ، مجانب قائم منحنی تابع است .

$$x \to -1 \Rightarrow y \to \pm\infty$$

روش دوم :

$$\lim_{y\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}+\frac{y-1}{y+1}\right)=4$$

$$\Rightarrow \lim_{y\to\infty}\frac{x-2}{x}+1=4 \Rightarrow \lim_{y\to\infty}\frac{x-2}{x}=3 \Rightarrow x\to -1$$

پس خط به معادلهٔ $x=-1$ مجانب قائم نمودار تابع فوق است .

مسألهٔ ۶ . معادله‌های مجانب‌های قائم منحنی مکان هندسی نقطهٔ $M(\frac{t}{t^2+1}, \frac{t^3}{t^2-4})$ را وقتی t تغییر می‌کند، بیابید .

حل : برای تعیین معادله‌های مجانب قائم، y را به سمت ∞ میل می‌دهیم .

$$y\to\infty \Rightarrow \frac{t^3}{t^2-4}\to\infty \Rightarrow \begin{cases} t^2-4\to 0 \\ \text{یا} \\ t\to\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t\to\pm 2 \\ \text{یا} \\ t\to\infty \end{cases}$$

حال وقتی $t\to 2$ ، $t\to -2$ و $t\to\infty$ ، حدّ x را محاسبه می‌کنیم :

$$t\to 2 \Rightarrow \lim x=\frac{2}{4+1}=\frac{2}{5}$$

$$t\to -2 \Rightarrow \lim x=\frac{-2}{4+1}=-\frac{2}{5}$$

$$t\to\infty \Rightarrow \lim x=0$$

پس خط‌های به معادله‌های $x=\frac{2}{5}$ و $x=-\frac{2}{5}$ و $x=0$ مجانب‌های قائم منحنی مکان نقطهٔ M است .

مسألهٔ ۷ . معادله‌های مجانب‌های قائم تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\tan x}{2\mathrm{Cos}x-1}$ را در بازهٔ $[0, 2\pi]$ بیابید .

حل :

$$f(x)=\frac{\frac{\mathrm{Sin}x}{\mathrm{Cos}x}}{2\mathrm{Cos}x-1}=\frac{\mathrm{Sin}x}{\mathrm{Cos}x(2\mathrm{Cos}x-1)}$$

الف) $\mathrm{Cos}x=0 \Rightarrow x=2k\pi \xrightarrow{k=0,1} \boxed{x=0, 2\pi}$

ب) $2\mathrm{Cos}x-1=0 \Rightarrow \mathrm{Cos}x=\frac{1}{2}=\mathrm{Cos}\frac{\pi}{3}$

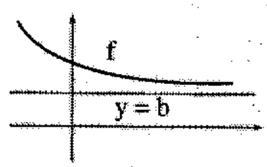
$$x=2k\pi+\frac{\pi}{3} \xrightarrow{k=0} \boxed{x=\frac{\pi}{3}}$$

$$x=2k\pi-\frac{\pi}{3} \xrightarrow{k=1} \boxed{x=\frac{5\pi}{3}}$$

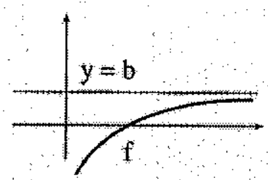
پس خط‌های به معادله‌های $x=0$ و $x=2\pi$ ، $x=\frac{\pi}{3}$ و $x=\frac{5\pi}{3}$ مجانب‌های قائم منحنی تابع فوق است .

۲. مجانب افقی

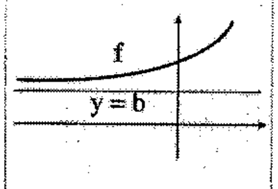
به نمودارهای زیر توجه کنید .



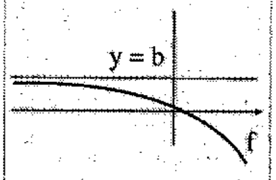
شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)



شکل (۴)

در شکل ۱ : $x\to+\infty \Rightarrow \lim f(x)=b$

در شکل ۲ : $x\to+\infty \Rightarrow \lim f(x)=b$

در شکل ۳ : $x\to-\infty \Rightarrow \lim f(x)=b$

در شکل ۴ : $x\to-\infty \Rightarrow \lim f(x)=b$

خط به معادلهٔ $y=b$ را در شکل‌های فوق، مجانب افقی تابع f گویند .

تعریف : اگر در تابع f فقط و فقط وقتی $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ یا $x\to\pm\infty$ ، $\lim f(x)=b$ ، آن‌گاه خط به معادلهٔ $y=b$ را مجانب افقی نمودار تابع f گویند .

مثال ۷ . مجانب‌های افقی هریک از تابع‌های به معادله‌های زیر را بیابید .

۱) $f(x)=\frac{2x-1}{x-4}$

مجانب افقی : $x \to \pm\infty \Rightarrow \lim f(x) = \lim \frac{2x-1}{x-4} = 2$

پس خط به معادلهٔ $y = 2$ مجانب افقی منحنی تابع f است.

۲) $f(x) = \frac{2x^2 - x + 5}{x^3 + x}$

مجانب افقی : $x \to \pm\infty \Rightarrow \lim f(x) = \lim \frac{2x^2 - x + 5}{x^3 + x}$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x} = 0$$

پس خط به معادلهٔ $y = 0$ مجانب افقی منحنی تابع f است.

۳) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

مجانب افقی : $x \to \pm\infty \Rightarrow \lim f(x) = \lim \frac{x^3}{x^2 - 1}$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}(x) = \pm\infty$$

پس نمودار این تابع مجانب افقی ندارد.

تذکر۱. یک تابع با ضابطهٔ کسری وقتی مجانب افقی دارد که درجهٔ صورت از درجهٔ مخرج بیشتر نباشد.

مثال۸. معادله‌های مجانب افقی تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x-1}$ را بیابید.

حل:

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{2x-1}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(2-\frac{1}{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(2-\frac{1}{x})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2-\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$$

پس $y = \frac{1}{2}$ معادلهٔ مجانب افقی این تابع است.

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{2x-1}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(2-\frac{1}{x})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(2-\frac{1}{x})}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2-\frac{1}{x}} = -\frac{1}{2}$$

پس خط به معادلهٔ $y = -\frac{1}{2}$ نیز مجانب افقی این تابع است.

مثال۹. معادلهٔ مجانب افقی تابع با ضابطهٔ $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 4x}$ را بیابید.

حل:

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 4x} = (x + \sqrt{x^2 - 4x})\left(\frac{x - \sqrt{x^2 - 4x}}{x - \sqrt{x^2 - 4x}}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2 - x^2 + 4x}{x - \sqrt{x^2(1-\frac{4}{x})}} = \frac{4x}{x - |x|\sqrt{1-\frac{4}{x}}}$$

الف) $x \to +\infty \Rightarrow \lim f(x) = \lim \frac{4x}{x - x\sqrt{1-\frac{4}{x}}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{x(1-\sqrt{1-\frac{4}{x}})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{1-\sqrt{1-\frac{4}{x}}} = \frac{4}{0^+} \to +\infty$$

پس در این تابع، وقتی $x \to +\infty$، منحنی تابع مجانب افقی ندارد.

ب) $x \to -\infty \Rightarrow \lim f(x) = \lim \frac{4x}{x + x\sqrt{1-\frac{4}{x}}}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x}{x(1+\sqrt{1-\frac{4}{x}})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{1+\sqrt{1-\frac{4}{x}}} = \frac{4}{1+1} = 2$$

پس خط به معادلهٔ $y = 2$، معادلهٔ مجانب افقی این تابع است.

مثال ۱۰ . معادلهٔ مجانب افقی تابع با ضابطه $f(x)=x-\sqrt[3]{x^3+4x^2}$ را بیابید.

حل:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x-\sqrt[3]{x^3+4x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x-\sqrt[3]{x^3+4x^2}\right)\times\frac{x^2+\sqrt[3]{(x^3+4x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+4x^2}}{x^2+\sqrt[3]{(x^3+4x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+4x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x^3-4x^2}{x^2+\sqrt[3]{(x^3+4x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+4x^2}}$$

$$\sim\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-4x^2}{x^2+\sqrt[3]{x^6}+x\sqrt[3]{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-4x^2}{x^2+x^2+x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-4x^2}{3x^2}=-\frac{4}{3}$$

پس خط به معادلهٔ $y=-\frac{4}{3}$ مجانب افقی تابع f است.

مثال ۱۱ . اگر خط به معادلهٔ $y=2$ مجانب افقی تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{(a-2)x^3+(ab-8)x^2+(ac-20)x+4}{x-10}$ باشد، a، b و c را بیابید.

حل: بنابه تذکر (۱) مجانب افقی، این تابع کسری وقتی مجانب افقی دارد که ضریب‌های x^3 و x^2 در صورت کسر صفر باشد؛ یعنی:

$a-2=0\Rightarrow\boxed{a=2}$

$ab-8=0\Rightarrow 2b-8=0\Rightarrow\boxed{b=4}$

شکل جدید معادلهٔ تابع: $f(x)=\frac{(2c-20)x+4}{x-10}$

$$x\to\pm\infty\Rightarrow\lim f(x)=\frac{2c-20}{1}\Rightarrow y=2c-20$$

معادلهٔ مجانب افقی این تابع است. از طرفی $y=2$ معادلهٔ مجانب افقی است؛ پس:

$2c-20=2\Rightarrow 2c=22\Rightarrow\boxed{c=11}$

مثال ۱۲ . اگر در تابع با ضابطهٔ زیر:

$$f(x)=ax+b-\sqrt{4x^2-24x}$$

وقتی $x\to+\infty$ منحنی تابع مجانب افقی به معادلهٔ $y=2$ داشته باشد، a و b را بیابید. $(a>0)$

حل: $\lim_{x\to+\infty}\left(ax+b-\sqrt{4x^2-24x}\right)$

$$A=\lim_{x\to+\infty}\left(ax+b-\sqrt{4x^2-24x}\right)\times\frac{ax+b+\sqrt{4x^2-24x}}{ax+b+\sqrt{4x^2-24x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^2x^2+2abx+b^2-4x^2+24x}{ax+b+\sqrt{x^2(4-\frac{24}{x})}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a^2-4)x^2+(2ab+24)x+b^2}{ax+b+x\sqrt{4-\frac{24}{x}}}$$

باید $a^2-4=0$ ، پس $a=2$ یا $a=-2$ ، باتوجه به شرط مسأله فقط $a=2$ قابل قبول است.

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2ab+24)x+b^2}{x(a+\frac{b}{x}+\sqrt{4-\frac{24}{x}})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(2ab+24+\frac{b^2}{x})}{x(a+\frac{b}{x}+\sqrt{4-\frac{24}{x}})}$$

$$=\frac{2ab+24}{a+2}$$

پس $y=\frac{2ab+24}{a+2}$ معادلهٔ مجانب افقی است.

$\frac{2ab+24}{a+2}=2\Rightarrow 2ab+24=2a+4,\ \ a=2$

$4b+24=8\Rightarrow 4b=-16\Rightarrow\boxed{b=-4}$

مثال ۱۳ . معادله‌های مجانب‌های افقی مکان هندسی نقطهٔ $M(\frac{t^3+4}{t^2-1},\ \frac{t+4}{t})$ را وقتی t تغییر می‌کند، بیابید.

حل:

$$x\to\pm\infty\Rightarrow\frac{t^3+4}{t^2-1}\to\infty$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t^2-1\to 0\\ \text{یا}\\ t\to\infty\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t\to 1\ \ \text{یا}\ \ t\to -1\\ \text{یا}\\ t\to\infty\end{cases}$$

$t\to 1\Rightarrow\lim y=\frac{1+4}{1}=5\Rightarrow y=5$

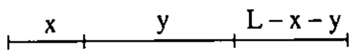
$t\to -1\Rightarrow\lim y=\frac{-1+4}{-1}=-3\Rightarrow y=-3$

$t\to\infty\Rightarrow\lim y=1\Rightarrow y=1$

پس خط‌های به معادله‌های $y=5$ و $y=-3$ و $y=1$ مجانب‌های افقی است.

مسائل احتمال در فضاهای نمونهٔ پیوسته، به دلیل ساختار شهودی و هندسی که دارند، معمولاً مورد توجه خاص دانش‌آموزان قرار می‌گیرند. یکی از معروف‌ترین این مسائل که امروزه در میان دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی، مسأله‌ای کاملاً شناخته شده است، مسأله زیر است:

ـ یک میلهٔ فلزی به طول معلوم L را دو برش تصادفی می‌زنیم. احتمال آن که سه قطعهٔ تولید شده بتوانند طول‌های اضلاع مثلثی باشند، چه‌قدر است؟ این مسأله در کتاب جبر و احتمال سال سوم رشتهٔ ریاضی و در بسیاری از کتاب‌های کمک‌آموزشی، به صورت‌های مختلف طرح شده است. راه‌حلّ معمول این کتاب‌ها این است که مطابق شکل زیر،



یک مسأله از احتمال پیوسته و یک راه‌حلّ تمام هندسی برای آن

طول‌های سه قطعه تشکیل شده را x، y و $L-x-y$ می‌نامند. فضای نمونهٔ این پدیدهٔ تصادفی، تمام زوج‌های مرتّب (x,y) هستند که در شرایط $۰<x<L$، $۰<y<L$ و $۰<x+y<L$ صدق می‌کنند. پیشامد مطلوب نیز با توجه به نامساوی مثلثی، به صورت زیر فرموله می‌شود:

$$x+y>L-x-y\ ,\ x+L-x-y>y\ ,\ y+L-x-y>x$$

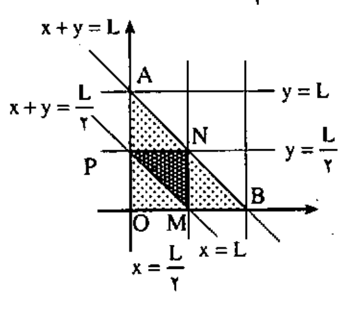
$$\Rightarrow x+y>\frac{L}{۲}\ ,\ y<\frac{L}{۲}\ ,\ x<\frac{L}{۲}$$

بنابراین فضای نمونه و پیشامد تصادفی عبارتند از:

$$S=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}, ۰<x<L, ۰<y<L, ۰<x+y<L\}$$

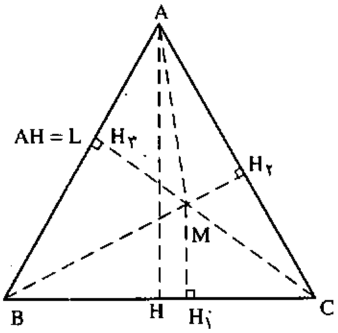
$$A=\left\{(x,y)\mid(x,y)\in S\ ,\ x+y>\frac{L}{۲}\ ,\ y<\frac{L}{۲}\ ,\ x<\frac{L}{۲}\right\}$$

و با رسم محدودهٔ A و S در یک دستگاه مختصات دوبعدی، احتمال A را از تقسیم مساحت محدودهٔ A به مساحت محدودهٔ S به دست می‌آوریم:



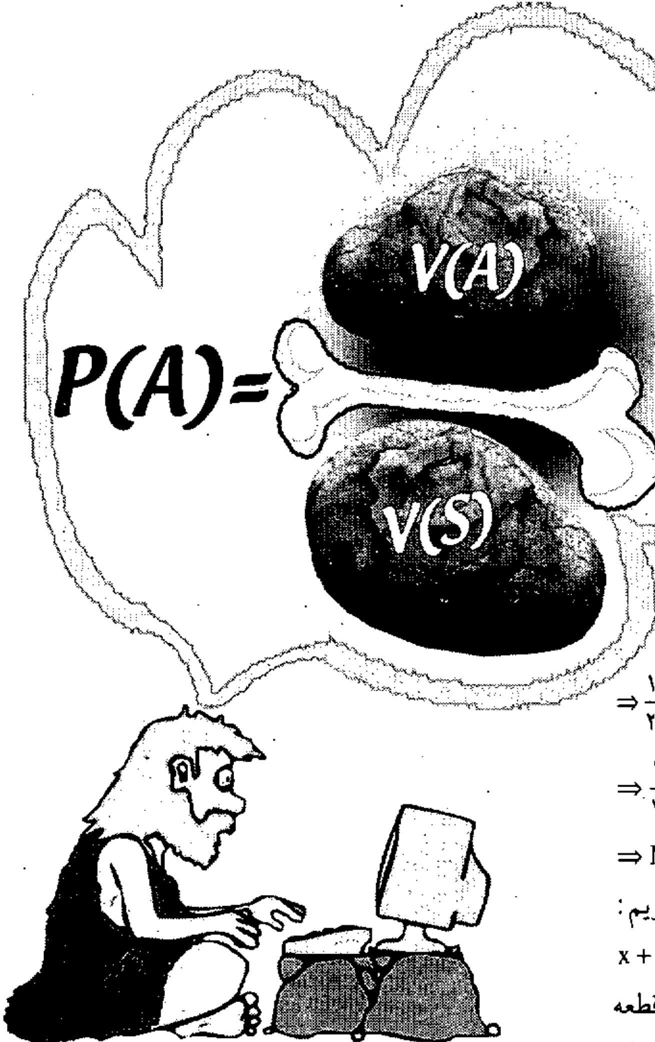
$$P(A)=\frac{S_{MNP}}{S_{OAB}}=\frac{۱}{۴}$$

درنتیجه، احتمال پیشامد فوق برابر $\frac{۱}{۴}$ است. امّا اکنون استدلالی دیگر برای محاسبهٔ این احتمال ارائه می‌دهیم که امتیاز آن، این است که جنبهٔ هندسی قوی‌تری دارد و بیش‌تر جالب توجه است. لازم به ذکر است که این روش استدلال، با کمی توضیح بیش‌تر، عیناً از مجلهٔ «دانش و مردم» شمارهٔ ۳۲ـ۳۱ (به سردبیری استاد پرویز شهریاری) و از مقاله‌ای تحت عنوان «احتمال و ابهام»، نوشتهٔ مارتین گاردنر (ترجمهٔ هرمز شهریاری) اقتباس شده است.



میله‌ای به طول L را ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع a فرض می‌کنیم. یک قضیهٔ معروف در هندسه می‌گوید:

مجموع فواصل هر نقطه در صفحهٔ مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن، مساوی طول ارتفاع مثلث است. اثبات این قضیه به کمک مساحت‌ها، آسان



است. مطابق شکل، نقطهٔ متغیر M در درون مثلث ABC را درنظر بگیرید. اگر فاصلهٔ M، یعنی طول‌های عمودهایی که از M بر سه ضلع مثلث رسم می‌شود، $MH_۱$، $MH_۲$ و $MH_۳$ باشد، می‌توان نوشت:

$$S_{ABC} = S_{MAB} + S_{MAC} + S_{MBC}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}BC \times AH = \frac{۱}{۲}AB \times MH_۳ + \frac{۱}{۲}AC \times MH_۲ + \frac{۱}{۲}BC \times MH_۱$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}a.AH = \frac{۱}{۲}a.MH_۱ + \frac{۱}{۲}a.MH_۲ + \frac{۱}{۲}a.MH_۳$$

$$\Rightarrow MH_۱ + MH_۲ + MH_۳ = AH$$

و با فرض $MH_۱ = x$ و $MH_۲ = y$ و $MH_۳ = z$ داریم:

$$x + y + z = L$$

به این ترتیب، هر برش روی میله و تبدیل آن به سه قطعه به طول‌های x، y و z را می‌توان متناظر با انتخاب یک نقطه در درون مثلث متساوی‌الاضلاع فوق درنظر گرفت؛ یعنی فضای نمونهٔ پدیدهٔ تصادفی فوق، تمام نقاط درون مثلث است. اکنون می‌ماند تعیین نقاطی از این مجموعهٔ نقاط که واجد شرایط تشکیل مثلث باشند؛ یعنی مجموعهٔ نقاطی که به ازای آن‌ها $x + y < z$، $x + z > y$ و $y + z > x$ باشد. برای تعیین این مجموعهٔ نقاط، ابتدا فرض کنید برای یک نقطهٔ مفروض M، $z > x + y$ باشد؛ یعنی:

$MH_۳ > MH_۱ + MH_۲$، بنابراین:

$$\frac{۱}{۲}aMH_۳ > \frac{۱}{۲}aMH_۱ + \frac{۱}{۲}aMH_۲$$

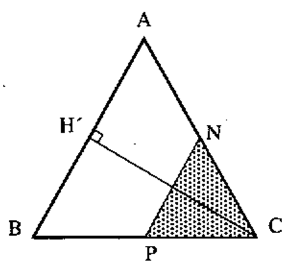
و از آن‌جا داریم: $S_{MAB} > S_{MAC} + S_{MBC}$ و در نتیجه:

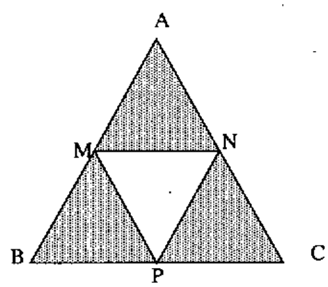
$$S_{MAB} > S_{ACBM} \Rightarrow ۲S_{MAB} > S_{ABC}$$

$$\Rightarrow S_{MAB} > \frac{۱}{۲}S_{ABC}$$

یعنی مجموعهٔ نقاط M که به ازای آن‌ها مساحت MAB از نصف مساحت مثلث ABC بیش‌تر باشد، نقاط نامطلوب هستند و بدیهی است که این نقاط، مجموعهٔ نقاطی هستند که فاصلهٔ آن‌ها از AB، بیش‌تر از نصف ارتفاع رأس C باشد.

در شکل مقابل، همهٔ نقاط درون مثلث NPC، نقاطی هستند که فاصلهٔ آن‌ها از AB بیش‌تر از نصف ارتفاع ´CH است. به همین ترتیب، اگر وسط‌های اضلاع دیگر مثلث را به یکدیگر وصل کنیم، مجموعهٔ نقاط بالای این پاره‌خط‌ها متناظر با برش‌هایی از میلهٔ L هستند که تشکیل مثلث نمی‌دهند. در شکل مقابل، این نقاط هاشور زده شده‌اند و نقاط پیشامد مطلوب نقاط درون مثلث MNP هستند و از آن‌جا خواهیم داشت:





$$P(A) = \frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{۱}{۴}$$

بحث پیرامون مقاطع مخروطی ۱

رحمان کیومرثی
دبیر ریاضی استان چهارمحال و بختیاری

ابتدا ثابت می‌کنیم که شکل کلی معادلهٔ یک مقطع مخروطی به صورت زیر است:

$$Ax^2+2Bxy+cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

برهان: فرض می‌کنیم $F(\alpha,\beta)$ کانون و خط (D) به معادلهٔ $ax+by+c=0$ خط هادی و نقطهٔ $M(x,y)$ نقطهٔ دلخواهی از یک مقطع مخروطی باشند.

طبق تعریف، در یک مقطع مخروطی می‌توان نوشت:

$$\frac{MF}{MH}=e \qquad (1)$$

e خروج از مرکز مقطع مخروطی است:

$$MH=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\ ,\ MF=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$$

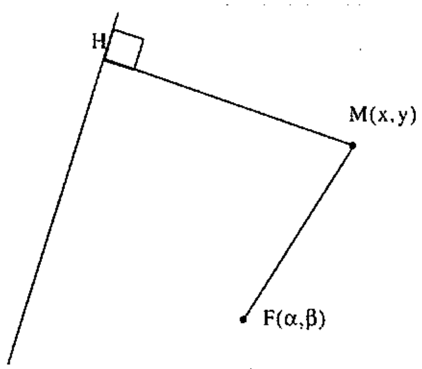
اکنون به جای MH و MF در (۱) مقدارگذاری می‌کنیم.

درنتیجه داریم:

$$\frac{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}}{\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}=e\Rightarrow$$

$$\frac{(a^2+b^2)[x^2-2\alpha x+\alpha^2+y^2-2\beta y+\beta^2]}{c^2+a^2x^2+b^2y^2+2abxy+2acx+2bcy}=e^2$$

$$(a^2+b^2)x^2-2(a^2+b^2)\alpha x+\alpha^2(a^2+b^2)+$$
$$(a^2+b^2)y^2-2\beta(a^2+b^2)y+\beta^2(a^2+b^2)=$$
$$a^2e^2x^2+b^2e^2y^2+2abe^2xy+2ace^2x+2bce^2y+e^2c^2$$
$$\Rightarrow\underbrace{(a^2e^2-a^2-b^2)}_{A}x^2+\underbrace{2abe^2}_{B}xy+\underbrace{(b^2e^2-a^2-b^2)}_{C}y^2+$$
$$2\underbrace{(ace^2-\alpha a^2-\alpha b^2)}_{D}x+2\underbrace{\left(bce^2-\beta a^2-\beta b^2\right)}_{E}y-$$
$$\underbrace{(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)}_{F}=0$$



در نتیجه خواهیم داشت:

$$Ax^2+2Bxy+cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

حال فرض می‌کنیم، مقطع مخروطی در حالت کلی مرکزدار و تجزیه نشده باشد. بنابراین برای پیدا کردن مختصات مرکز و با شرایطی که به پیدا کردن مختصات مرکز منجر می‌شود، معادلهٔ کلی مقطع مخروطی را همگن می‌کنیم، یعنی:

$$x\to\frac{x}{z},y\to\frac{y}{z}$$

در این صورت:

$$\frac{Ax^2}{z^2}+\frac{2Bxy}{z^2}+\frac{cy^2}{z^2}+\frac{2Dx}{z}+\frac{2Ey}{z}+F=0$$
$$Ax^2+2Bxy+cy^2+2Dxz+2Eyz+Fz^2=0$$

اینک به کمک مشتق، مختصات مرکز مقطع مخروطی را به دست می‌آوریم:

$$\omega\left|\begin{array}{l} f'x=0 \Rightarrow 2Ax+2By+2Dz=0 \Rightarrow Ax+By+Dz=0\\ f'y=0 \Rightarrow 2Bx+2cy+2Ez=0 \Rightarrow Bx+cy+Ez=0\\ f'z=0 \Rightarrow 2Dx+2Ey+2Fz=0 \Rightarrow Dx+Ey+Fz=0 \end{array}\right.$$

دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی بالا، یک دستگاه همگن است. شرط وجود جواب در این دستگاه آن است که دترمینان ضرایب آن مخالف صفر باشد. یعنی:

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D\\ B & C & E\\ D & E & F \end{vmatrix}\neq 0$$

حال فرض می‌کنیم، این مقطع مخروطی مرکزدار از نوع هذلولی باشد. بنابراین باید بتوانیم نقاط بینهایت دور این مقطع را به دست آوریم تا به کمک آن‌ها معادلات مجانب‌های مقطع را به دست آوریم. برای این کار اگر در فرم همگن شدهٔ معادله مقدار z را صفر کنیم، نقاط بینهایت دور به دست می‌آید. بنابراین داریم:

$$\left|\begin{array}{l} Ax^2+2Bxy+cy^2+2Dxz+2Eyz+Fz^2=0\\ z\to 0 \end{array}\right.$$

وقتی که $z\to 0$، آن‌گاه:

$$Ax^2+2Bxy+cy^2=0 \qquad (2)$$

در دیفرانسیل فرا گرفته‌ایم که شیب خط مجانب مایل از تساوی زیر به دست می‌آید:

شیب مجانب مایل $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}$

بنابراین طرفین رابطهٔ (۲) را به x^2 تقسیم می‌کنیم و اگر $x\to\pm\infty$ میل دهیم، خواهیم داشت:

$$A+2B\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}+C\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{y}{x}\right)^2=0 \Rightarrow A+2Bm+cm^2=0$$

معادلهٔ درجه دوم بالا، یعنی: $cm^2+2Bm+A=0$ (۳) را درنظر می‌گیریم و در تعداد جواب‌های آن بحث می‌کنیم:

$$\Delta=4B^2+4AC=4(B^2-AC)=4\delta$$

$$\delta=B^2-AC$$

۱. اگر $\delta>0$، یعنی معادلهٔ (۳) دو ریشه دارد، پس منحنی دارای ۲ مجانب است، درنتیجه مقطع هذلولی است. به‌خصوص اگر $A+C=0$ باشد، هذلولی متساوی‌القطرین یا متساوی‌الساقین است.

۲. اگر $\delta<0$ باشد، معادلهٔ (۳) ریشه ندارد و بنابراین مقداری برای m به دست نمی‌آید. یعنی مقطع مجانب ندارد. پس مقطع بیضی است و اگر A=C و $B=0$ باشند، مقطع دایره است.

۳. اگر $\delta=0$ باشد، منحنی یک امتداد مجانب دارد و درنتیجه مقطع سهمی است.

پس با توجه به نکات گفته شده، چکیدهٔ مطالب به صورت زیر است:

در مقطع مخروطی $Ax^2+2Bxy+cy^2+2Dx+2Ey+F=0$، که $\delta=B^2-Ac$، داریم:

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D\\ B & C & E\\ D & E & F \end{vmatrix}\neq 0$$

۱. اگر $\delta>0$، آن‌گاه مقطع مرکزدار تجزیه‌نشده از نوع هذلولی اگر $A+C=0$ باشد، هذلولی متساوی‌الساقین است.

۲. اگر $\delta<0$، آن‌گاه مقطع مرکزدار تجزیه‌نشده از نوع بیضی اگر A=C و $B=0$ باشد، هذلولی دایره است.

۳. اگر $\delta=0$، آن‌گاه مقطع سهمی است.

حال اگر $\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D\\ B & C & E\\ D & E & F \end{vmatrix}=0$ باشد، بحث را به صورت زیر پی می‌گیریم:

$$\Delta=0\begin{cases} \delta<0 & \text{۱. منحنی در این حالت به دو خط موهولی یا یک نقطه تبدیل می‌شود.}\\ \delta>0 & \text{۲. مقطع به دو خط متقاطع تبدیل می‌شود.}\\ \delta=0\Rightarrow B^2-Ac=0\Rightarrow c=\dfrac{B^2}{A} & \text{۳.} \end{cases}$$

و اگر در این حالت به جای $c=\frac{B^2}{A}$ در Δ مقدارگذاری

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D\\ B & \frac{B^2}{A} & E\\ D & E & F \end{vmatrix}=D\begin{vmatrix} B & D\\ \frac{B^2}{A} & E \end{vmatrix}-E\begin{vmatrix} A & B\\ D & E \end{vmatrix}+F\begin{vmatrix} A & B\\ B & \frac{B^2}{A} \end{vmatrix}=0$$

وقتی حاصل جمع بالا را ساده کنیم، خواهیم داشت:

وقتی حاصل جمع بالا را ساده کنیم، خواهیم داشت:

$$-\frac{1}{A}(AE-BD)^2=0 \Rightarrow AE-BD=0 \Rightarrow E=\frac{BD}{A}$$

اگر این مقدار را در معادلهٔ کلی مقطع مخروطی جایگزین کنیم و $C=\frac{B^2}{A}$ قرار دهیم، معادله به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{1}{A}(Ax-By)^2+2Dx+2Ey+F=0$$

با توجه به تساوی $E=\frac{BD}{A}$ در معادلهٔ مقطع مخروطی خواهیم داشت:

$$(Ax-By)^2+2D(Ax+By)+AF=0 \Rightarrow \delta'=D^2-AF$$

حال توجه داریم که اگر معادلهٔ بالا دو ریشهٔ متمایز داشته باشد، این ریشه‌ها نمایش دو خط موازی هستند و اگر ریشهٔ مضاعف داشته باشد، نمایش دو خط منطبق بر هم است و اگر ریشهٔ حقیقی نداشته باشد، ریشه‌های موهومی نمایش دو خط موازی موهومی هستند. بحث بالا را به صورت زیر خلاصه می‌کنیم:

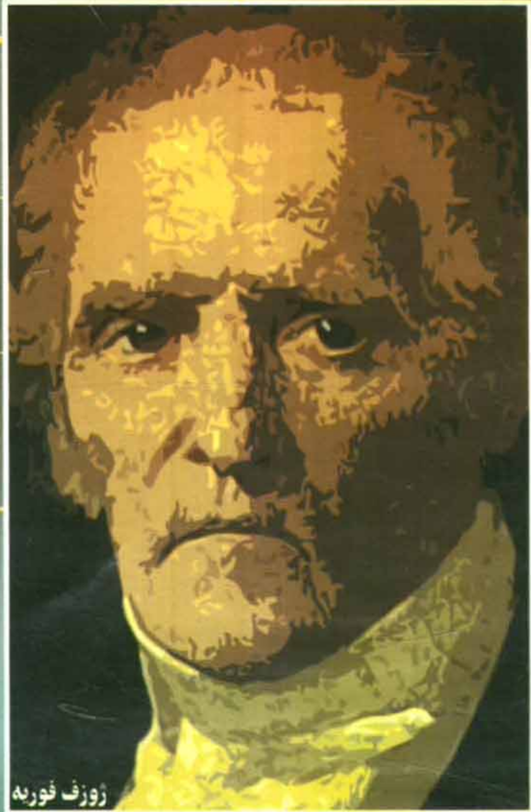
$$\left|\begin{array}{l}\delta=B^2-Ac\\ \delta=0\Rightarrow\\ \Delta=0\end{array}\right. \quad \begin{cases}D^2-AF>0 & \text{۱. مقطع به دو خط موازی حقیقی تبدیل می‌شود:}\\ D^2-AF=0 & \text{۲. مقطع به دو خط منطبق بر هم تبدیل می‌شود:}\\ D^2-AF<0 & \text{۳. مقطع به دو خط موازی موهومی تبدیل می‌شود:}\end{cases}$$

$$\Delta\neq 0 \Rightarrow \begin{cases}\Delta>0 \Rightarrow \begin{cases}\delta>0 \ (1)\\ \delta<0 \Rightarrow \begin{cases}A\Delta<0 \ (2)\\ A\Delta>0 \ (3)\end{cases}\\ \delta=0 \ (4)\end{cases}\\[2em] \Delta<0 \Rightarrow \begin{cases}\delta>0 \ (5)\\ \delta<0 \Rightarrow \left|\begin{array}{l}A\Delta<0 \ (6)\\ A\Delta>0 \ (7)\end{array}\right.\\ \delta=0 \ (8)\end{cases}\end{cases}$$

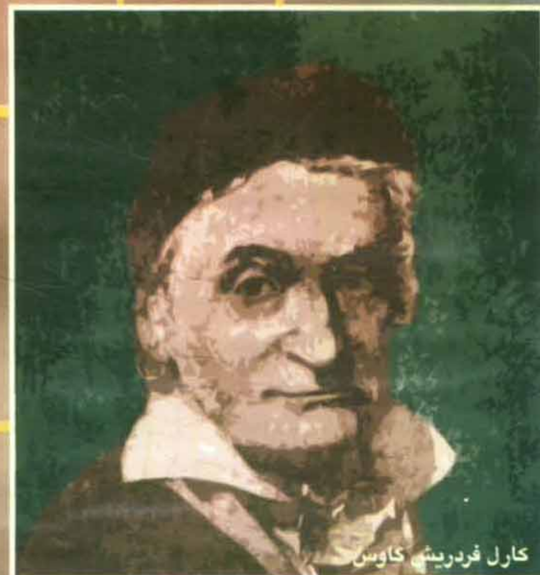
۱. مرکزدار تجزیه نشده هذلولی
۲. مرکزدار بیضی حقیقی
۳. مرکزدار بیضی موهومی
۴. مقطع سهمی است.
۵. مقطع مرکزدار هذلولی اگر $A+c=0$ هذلولی متساوی‌الساقین
۶. مرکزدار و بیضی حقیقی
۷. مرکزدار بیضی موهومی
۸. مقطع سهمی است

ادامه دارد

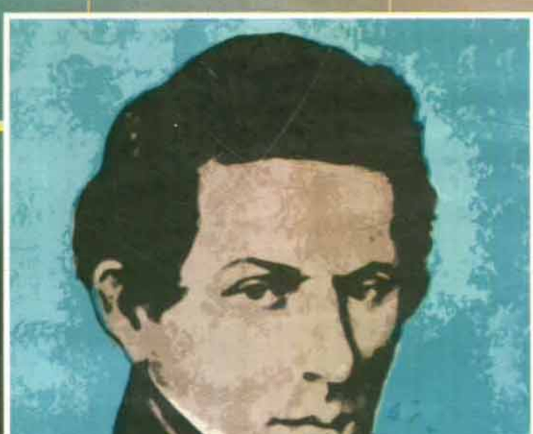
زبان حال ریاضی دان



ژوزف فوریه



کارل فردریش گاوس



نیکلای لباچفسکی

بررسی عمیق طبیعت پربارترین منبع کشفیات ریاضی است.

ژوزف فوریه (۱۷۶۸-۱۸۳۰)

هیچ شاخه ای از ریاضیات نیست که روزی در جهان واقعی به کار نرود.

نیکلای لباچفسکی(۱۷۹۳-۱۸۵۶)

ریاضیات مادر علوم و حساب مادر ریاضیات است و گاهی در خدمت ستاره شناسی و سایر علوم طبیعی درمی آید ولی در همه حال شأن مادری اش محفوظ است.

کارل فردریش گاوس(۱۷۷۷-۱۸۵۵)

برگرفته از کتاب زبان حال ریاضی دان

به روایت دکتر علی اکبر عالم‌زاده


دفتر انتشارات کمک آموزشی
آیا شما مجله های رشد را می شناسید
آموزش زبان و ادب فارسی
رشد آموزش شیمی 69
LC
شیمی و دنیای شگفت انگیز LC ها
شبیه سازی تعادل دینامیک
نمایش بزرگی عدد آووگادرو
سلاح های شیمیایی در یک نگاه
رشد آموزش ریاضی 76
رشد آموزش فیزیک 67
رشد آموزش زبان 71
مجله علمی - ترویجی
www.roshdmag.org