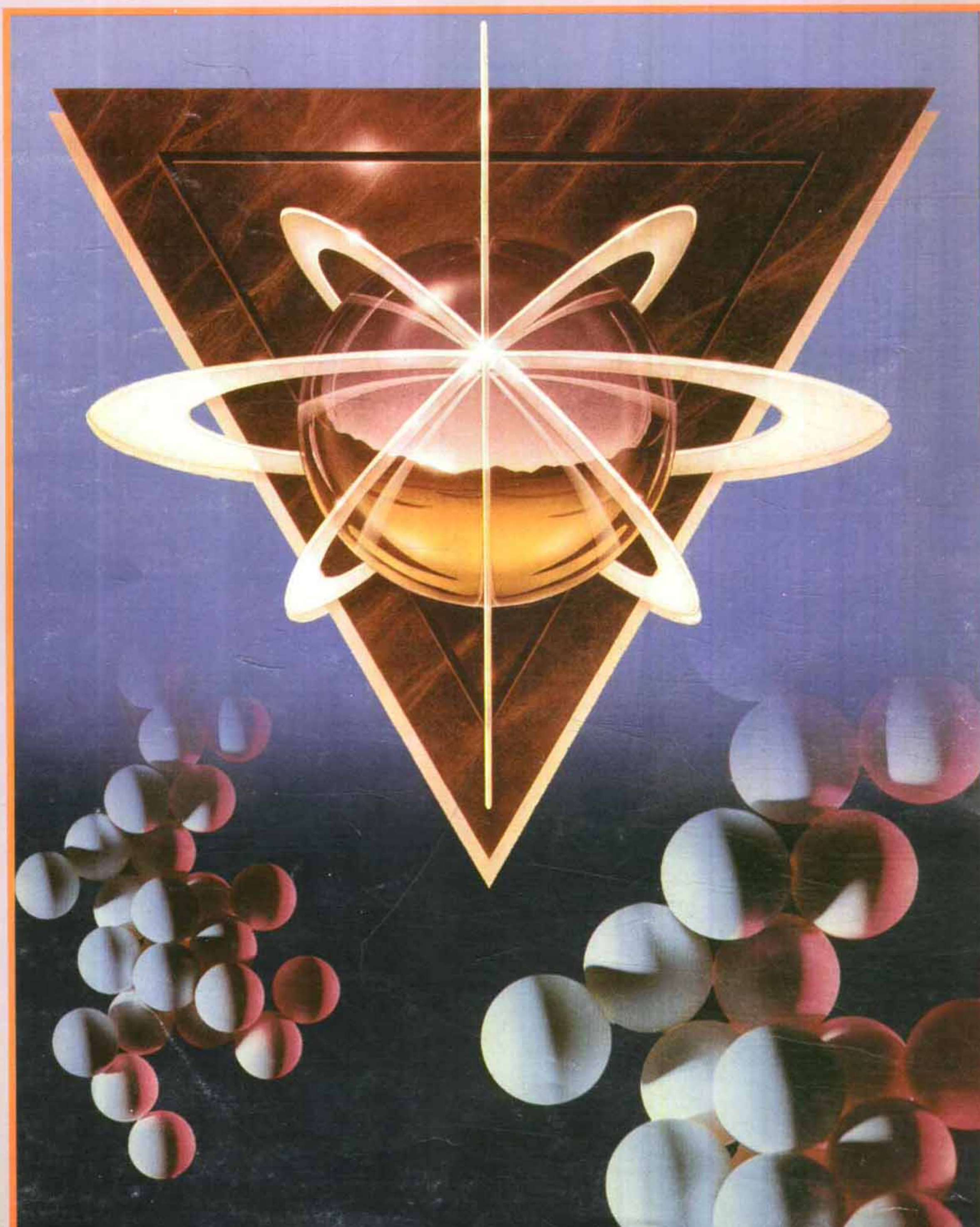
مجله ریاضی

برهان

۳۶

برای دانش آموزان دبیرستان

سال یازدهم، شمارهٔ دوم، زمستان ۱۳۸۰، بها ۳۰۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

برهان

سال یازدهم
زمستان ۸۰
شمارهٔ دوم

نشانی : خیابان سپهبد قرنی ، خیابان سپند شرقی ، پلاک ۳۸، صندوق پستی : ۱۹۴۹ / ۱۴۱۵۵

تلفن : ۶ – ۸۸۹۶۷۶۵ ، دورنویس (فاکس) : ۸۹۰۳۸۰۹ ، تلفن امور مشترکین : ۹ – ۸۸۰۰۳۲۴

برهان

تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

- نگارش مقاله‌های کمک درسی
(شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتابهای ریاضی دبیرستان)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آنها
(برای دانش‌آموزان)
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آنها
(برای دانش‌آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی
(مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی واجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات ، آموزش مسائل کامپیوتر و...)

برهان

هر سه ماه یک شماره منتشر می شود

- هیأت تحریریه در حکّ و اصلاح و حذف واضافه مقاله ها آزاد است.
- مقاله‌های مجله با رسم الخط انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.
- مقاله‌های وارده باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.
- مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود.
- استفاده از مطالب مجلّه در کتابها یا مجلّه های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

حرف اوّل

«مملکت ما، مملکت امام حسین علیه‌السلام است.»

مقام معظم رهبری

سالی که در پیش رو داریم یعنی سال ۱۳۸۱ هجری شمسی سالی است که دوبار در آن سالروز عاشورای حسینی را به سوگ می‌نشینیم و عزادار فرزند فاطمه (س) و اهل بیت او خواهیم بود.

عزاداری برای امام حسین علیه‌السلام بزرگ و کوچک، پیر و جوان، شیعه و سنی و حتی مسلمان و غیر مسلمان نمی‌شناسد. و همین عزاداری‌ها در محرّم و صفر است که به قول امام راحل «اسلام را زنده نگه داشته است».

بیایید امسال را که شروعش با محرم و ایام عاشورای حسینی و خاتمه‌اش نیز با عاشورای حسینی خواهد بود، برای خودمان سالِ «امام حسین (ع)» و پیروی از سیره، جوانمردی و آزادمردی آن بزرگوار قرار داده و همواره فلسفه قیام امام حسین (ع) و اهداف مقدس ایشان از قیام خونبارش روشنگر راهمان باشد.

زمانی که امام حسین (ع) به خاطر احیای دین جدش، به فرمودهٔ خودشان به خاطر امر به معروف و نهی از منکر و اقامهٔ نماز همه چیز خود را قربانی می‌کند، چرا ما نباید برای امر به معروف و نهی از منکر که شاید در شرایط فعلی جامعهٔ ما از واجب‌ترین امور برای هر فرد مسلمان است، تلاش فراوان نکنیم.

امام حسین علیه‌السلام، امر به معروف را با شمشیر آغاز نکرد که حتی در صبح روز عاشورا به میان دشمن رفته و با سخنرانی و موعظه، تصمیم بر هدایت دشمنان خود داشت، اما دشمن کوردل که لحظه‌ای طاقت شنیدن سخنان بر حق و هدایتگر امام را نداشتند با سنگ و کلوخ و تیر جواب امام را دادند که امام باز هم نرمش نشان داده، خودشان و اصحاب وفادارشان هر یک به این مهم - امر به معروف و نهی از منکر - پرداختند تا شاید حتی یک نفر هدایت شود و حجت بر همه تمام شده و در پیشگاه عدل الهی، جایی برای عذر باقی نماند.

افرادی چون حرّ بن یزید ریاحی با امام همراه گشته و از شهیدان والامقام کربلا محسوب می‌شوند که آب بر امام بستند و دلِ فرزندان اهل بیت امام را شکستند و این چیزی جز اثر اعمال و رفتار حسینی نیست.

عزیزان دانش‌آموز بیایید امسال را سال «حسینی» شدن و حسینی رفتار کردن قرار داده و از او برای رسیدن به اهدافش کمک بخواهیم که حسین علیه‌السلام چراغ هدایت و سفینه نجات است و کشتی حسین (ع) سریعتر به ساحلِ نجات می‌رسد.

والسلام - سردبیر

از تاریخ بیاموزیم (۱۰)

دنبالهٔ مقالهٔ «ریاضیات ملت‌های هند»

● پرویز شهریاری

جبر

دانشمندان هندی در زمینهٔ جبر، به موفقیت‌های زیادی رسیدند. آنها روی نمادهای جبری کار کردند، قاعدهٔ حلّ معادلهٔ درجه را در حالت کلی به دست آوردند و عددهای منفی و عددهای گنگ را وارد عمل کردند. برای مقدار مجهول، جملهٔ ثابت معادله و توان نمادهایی داشتند. در ضمن، بسیاری از این نمادها، کوتاه شدهٔ واژه سانسکریتی متناظر با آنها بود.

مقدار مجهول را «یاوات ـ تاوات» (همان اندازه که) می‌نامیدند و برای نماد مجهول از حرف نخست واژهٔ نخست سانسکریتی آن، یعنی «یا» استفاده می‌کردند. اگر با چند مجهول سروکار داشتند، همان نماد را با رنگ‌های مختلف می‌نوشتند. جملهٔ ثابت را در معادله با «رو»، هجای اوّل واژه «روپا» (روپیه = کامل) مشخص می‌کردند. برای توان، واژه‌های «وارگا» (مربع)، «گهانا» (مکعب) و «گهاتا» را به کار می‌بردند. برای نمونه توان ششم را «وارنا ـ گهانا» می‌گفتند و از «گهاتا» برای جمع توان‌ها استفاده می‌شد؛ از جمله توان پنجم را «وارگا ـ گهانا ـ گهاتا» می‌نامیدند. نماد توان و ضریب را پس از نماد مجهول می‌گذاشتند. بین جمله‌ها علامتی وجود نداشت. وقتی جمله‌ها را پشت سرهم می‌نوشتند، به معنای جمع بود؛ دربارهٔ تفریق، روی جمله‌ای که باید کم شود، نقطه‌ای قرار می‌دادند، گاهی هم برای نماد تفریق، از علامت صلیب استفاده می‌کردند و آن را بعد از عدد قرار می‌دادند؛ ۵- را به صورت °۵ ۷̱ + ۵ می‌نوشتند.

نمادی برای برابری، در معادله‌ها وجود نداشت؛ دو طرف معادله را زیر هم می‌نوشتند، به این ترتیب که مجهول‌ها و توان‌ها در یک طرف معادله، زیر همان مجهول‌ها و توان‌ها در طرف دیگر معادله بود. اگر در حالتی، مجهولی وجود نداشت، برای آن، ضریب صفر می‌گذاشتند. معادلهٔ

$$۱۹۷x - ۱۶۴۴y - z = ۶۳۰۲$$

این طور نوشته می‌شد:

یا	۱۹۷	کا	°۱۶۴۴	نی	$\overset{۲}{۱}$	رو	۰
یا	۰	کا	۰	نی	۰	رو	۶۳۰۲

یعنی:

$$۱۹۷x - ۱۶۴۴y - z + ۰ = ۰x + ۰y + ۰z + ۶۳۰۲$$

یا نمونه‌ای دیگر، معادلهٔ

$$8x^3 + 4x^2 - 10y^2 = 4x^3 + 12y^2$$

به این صورت:

۱۰ وا کا ۴ وا یا ۸ گها یا

۱۲ وا کا ۰ وا یا ۴ گها یا

و به این ترتیب، ریاضیدانان هندی گام بلندی در جهت پیدایش جبر علامتی برداشتند؛ گرچه علامت‌هایی که به کار می‌بردند زیاد بود و خود علامت‌ها، یعنی حرف‌های سانسکریت، شکل پیچیده‌ای داشت.

عددهای منفی را برای نخستین بار «براهماگوپتا» (سدهٔ هفتم میلادی) به کار برد؛ عددهای مثبت را «دارایی» و عددهای منفی را «قرض» می‌نامید. او می‌گوید: «قانون چنین است: مجموع دو دارایی، یک دارایی و مجموع دو قرض، یک قرض است. حاصلضرب دارایی و قرض، عبارت است از قرض و حاصلضرب دو دارایی یا دو قرض، عبارت است از دارایی».

برای نخستین بار، در نوشته‌های «آریابهاتا» ی اوّل (سدهٔ پنجم و ششم میلادی) به معادله‌های خطی برمی‌خوریم. یکی از مسأله‌های مشهور آریابهاتا، که در ادب ریاضی به مقیاس گسترده‌ای اثر گذاشته، «مسألهٔ قاصدها» است. در این مسأله باید زمان برخورد دو جسم آسمانی را که با سرعت‌های v_1 و v_2 در حرکتند و فاصلهٔ بین آنها برابر s است، پیدا کنیم. پاسخ آریابهاتا چنین است:

$$t = \frac{s}{v_1 - v_2}$$

در نوشته‌های «مهاویرا» (سدهٔ نهم میلادی) به یک رشته مسأله برمی‌خوریم که حل آنها، منجر به دو معادلهٔ دو مجهولی درجه اوّل می‌شود. این مسأله، نمونه‌ای از آنهاست:

«قیمت ۹ لیمو و ۷ سیب جنگلی روی هم ۱۰۷ و قیمت ۷ لیمو و ۹ سیب جنگلی روی هم ۱۰۱ شده است. اکنون، خیلی زود قیمت هر لیمو و هر سیب جنگلی را به من بگویید.» این مسأله، منجر به حلّ این دستگاه می‌شود:

$$9x + 7y = 107$$

$$7x + 9y = 101$$

روشی که امروز برای حلّ چنین دستگاهی، به یاری برابر کردن ضریب‌ها به کار می‌رود، هیچ تفاوتی با روش مهاویرا ندارد.

معادله‌های به صورت:

$$Ax^2 = Bx \text{ و } Ax^3 = Bx^2$$

جزو معادله‌های درجه اوّل به شمار می‌آمد. از جمله، «بهاسکارا» ی دوم، این مسأله را حل می‌کند: «چهار کسر پیدا کنید که مخرج‌های آنها با هم برابر باشند و مجموع مربع‌های آنها برابر با مجموع مکعب‌های آنها شود».

راه حلّ بهاسکارای دوم را برای این مسأله، به زبان امروزی جبر می‌آوریم. مخرج‌ها را برابر واحد می‌گیریم. کسر اوّل را x، کسر دوم را ۲x، کسر سوم را ۳x و سرانجام کسر چهارم را ۴x می‌نامیم. مجموع مربع‌های کسرها برابر $30x^2$ و مجموع مکعب‌های آنها برابر $100x^3$ می‌شود و از برابری

$$30x^2 = 100x^3$$

معلوم می‌شود، کسر اوّل برابر $\frac{3}{10}$، کسر دوم برابر $\frac{6}{10}$، کسر سوم برابر $\frac{9}{10}$ و کسر چهارم برابر $\frac{12}{10}$ است.

به حلّ معادله‌های کامل درجهٔ دوم، برای نخستین بار، در نوشته‌های آریابهاتای اوّل برخورد می‌کنیم. مسأله پس از یک رشته عمل‌های کم‌وبیش پیچیده، منجر به این معادله می‌شود:

$$tx^2 + px = qp$$

که آریابهاتا، پاسخ آن را این طور می‌دهد:

$$x = \frac{\sqrt{qpt + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}}{t}$$

بهاسکارای دوم، از این مطلب آگاه بود که برای جذر یک عدد مثبت، دو جواب به دست می‌آید. او می‌نویسد: «جذر یک عدد مثبت، گاهی مثبت و گاهی منفی است. مجذور عدد مثبت ۳ یا مجذور عدد منفی ۳، برابر است با ۹. بنابراین، جذر عدد مثبت ۹، بسته به نیاز ماست؛ ممکن است عدد مثبت ۳ و ممکن است عدد منفی ۳ باشد. ولی اگر کسی بپرسد جذر عدد منفی ۹ چه‌قدر است، پاسخ معقولی نداریم؛ زیرا هرگز مجذور یک عدد نمی‌تواند برابر یک عدد منفی بشود.»

بهاسکارای دوم، بعضی از معادله‌های خاص درجهٔ سوم و درجهٔ چهارم را بررسی می‌کند و ریشه‌های درست آنها را به یاری تبدیل‌های ساده به دست می‌آورد. برای نمونه، برای

حلّ معادلهٔ

$$x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$$

بهاسکارا، به دو طرف معادله، عبارت:

$$4x^2 + 400x + 1$$

را می‌افزاید و به دست می‌آورد:

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 4x^2 + 400x + 10000$$

پس از دو طرف معادله، جذر می‌گیرد، که در نتیجه به دست می‌آید:

$$x^2 + 1 = 2x + 100$$

$$x^2 - 2x = 100$$

$$x = 11$$

هندی‌ها در حلّ معادله‌های سیّال هم، به موفقیت‌های زیادی رسیدند. برخی مسأله‌های مربوط به گاه‌شماری اخترشناسی، که در آنها باید دورهٔ گردش جایگاه ستاره‌های با دورهٔ گردش‌های مختلف پیدا کرد، منجر به معادلهٔ سیّال می‌شوند. ریاضیدانان هندی، بی‌آن که از کارهای دیوفانت (سدهٔ سوم میلادی) آگاه باشند، با جست‌وجوی پاسخ‌های گویا، روش یافتن پاسخ‌های درست و مثبت معادله‌های سیّال را به دست آوردند.

حلّ معادلهٔ خطی دو مجهولی:

$$ax + b = cy$$

و راه پیدا کردن پاسخ‌های مثبت و درست آن را، آریابهاتای اوّل داده است، ولی در نوشته‌های براهماگوپتا و بهاسکارای دوم، با تفصیل بیشتری آمده است. این روش که به «روش پراکندگی» معروف است، در واقع، با روشی که امروز به نام «کسرهای مسلسل» وجود دارد، تفاوتی ندارد.

موفقیت بزرگی که ریاضیدانان هندی در نظریهٔ عددها به دست آوردند، مربوط به یافتن ریشه‌های درست و مثبت معادلهٔ

$$y^2 = ax^2 + b$$

و حالت خاص، ولی مهم آن

$$y^2 = ax^2 + 1$$

است که در آن، a عددی درست است؛ ولی مجذور کامل نیست.

دانشمندان هندی، تنها به یافتن یکی از ریشه‌های مثبت و درست معادله اکتفا می‌کردند؛ ولی این کمبود، ارزش کار آنها و موفّقیتی را که به دست آوردند، کم نمی‌کند.

حلّ دقیق و کامل این معادله‌ها، بعدها در سال ۱۷۶۹ میلادی، به‌وسیلهٔ لاگرانژ ریاضیدان فرانسوی داده شد که روش او، به روش عمل هندی‌ها بسیار نزدیک است.

براهماگوپتا و بهاسکارای دوم، گونه‌های دیگری از معادله‌های سیّال هم بررسی کردند؛ برای نمونه معادلهٔ

$$ax + by + c = xy$$

در این معادله، $ab + c$ را به صورت ضرب دو عامل m و n درمی‌آوردند و $m + b$ یا $n + b$ را به عنوان x و $n + a$ یا $m + a$ را به عنوان y انتخاب می‌کردند. برای نمونه، در معادلهٔ

$$5x + 7y - 29 = xy$$

می‌توان نوشت:

$$ab + c = 5 \times 7 - 29 = 6 = 6 \times 1 = 3 \times 2$$

و پاسخ چنین هستند:

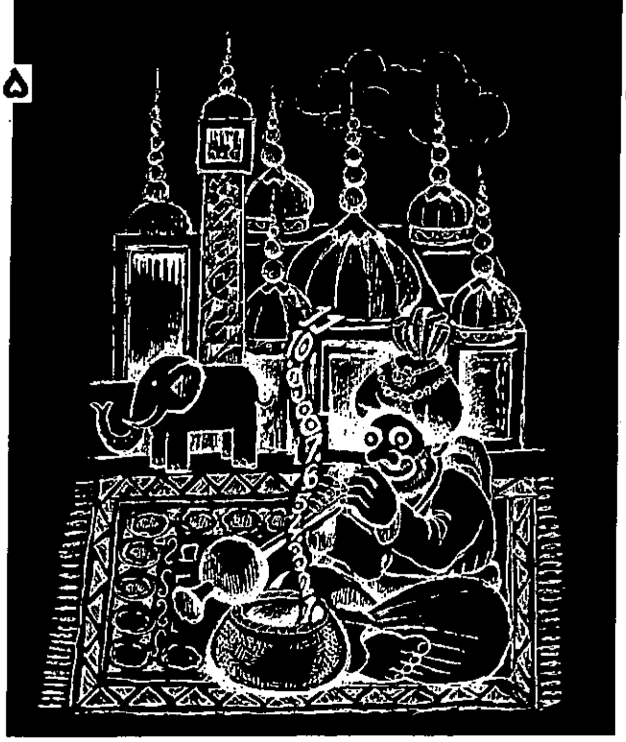
$$\begin{cases} x = 9 \\ y = 8 \end{cases};\quad \begin{cases} x = 8 \\ y = 11 \end{cases};\quad \begin{cases} x = 10 \\ y = 7 \end{cases};\quad \begin{cases} x = 13 \\ y = 6 \end{cases}$$

هندسه

آگاهی‌های ریاضیدانان هندی در زمینهٔ هندسه و موفقیت‌هایی که در این راه به دست آوردند، در مقایسه با دانش آنها در زمینهٔ حساب، جبر و نظریهٔ عددها، اهمیت کمتری دارد.

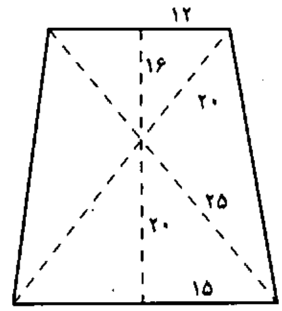
حکم‌های هندسی را در بیشتر حالت‌ها، بدون اثبات می‌آوردند و اغلب همه چیز را، منجر به مراجعهٔ به شکل می‌کردند و با یک جملهٔ «دیده می‌شود» اثبات شده می‌پنداشتند. تنها در حالت‌های نادری، اشاره‌های استدلالی وجود داشت. به احتمالی برای آموزش، اثبات را به صورت شفاهی یادآوری می‌کردند.

نخستین آگاهی‌های مربوط به هندسه را می‌توانیم در رسالهٔ «قانون طناب‌ها» بیابیم، که در واقع، یک رسالهٔ دستی برای معماران است که در ساختمان نیایشگاه‌ها و محراب‌ها از آن استفاده می‌کردند. ساختمان نیایشگاه‌ها، از قانون‌هایی پیروی می‌کرد؛ سمت آنها باید به طرف نور باشد و در پایه‌ها، شکل‌های معینی قرار گیرد. برای رسیدن به این هدف‌ها، باید یک رشته مسأله‌های هندسی را حل می‌کردند؛ ساختن زاویهٔ



قائمه، مربع، مثلث قائم‌الزاویه‌ای که طول ضلع‌های آن با عددهای درست بیان شده باشند، ساختن مربعی هم‌ارز مستطیل مفروض، ساختن مربعی با مساحت na، با در دست داشتن مربع به مساحت a.

بسیاری از این ساختمان‌های هندسی، با توجه به قضیهٔ فیثاغورس انجام می‌گرفت. از مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که طول ضلع‌های آنها عددهای درستی باشد، می‌توان ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی، شبیه شکل ۱ ساخت:



شکل ۱

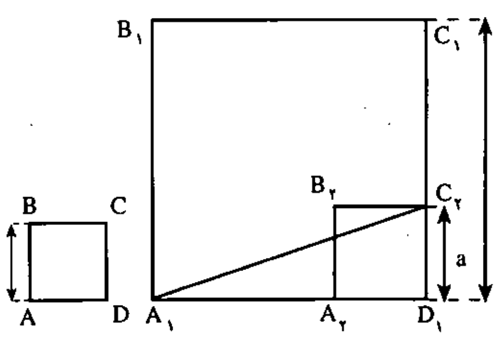
ساختن مربعی با مساحت na، از روی مربعی با مساحت a، منجر به دو عمل می‌شد؛ اوّل، دو برابر کردن یک مربع که برای آن، قطر مربع اوّل را به عنوان ضلع مربع تازه انتخاب می‌کردند؛ دوم، ساختن مربعی هم‌ارز با دو مربع مفروض. برای این منظور، مربع کوچکتر را در درون مربع بزرگتر قرار می‌دهیم؛ به نحوی که ضلع‌های آن، روی ضلع‌های مربع بزرگتر قرار گیرد (شکل ۲). در این صورت به دست می‌آید:

$$A_1C_2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

و مربع به ضلع A_1C_2، مساحتی برابر مجموع مساحت‌های دو مربع دارد؛ زیرا:

$$|A_1C_2|^2 = a^2 + b^2$$

در همین رساله، روش رسم مربعی که مساحت آن برابر تفاضل مساحت‌های دو مربع مفروض باشد، داده شده است. برای این منظور، مثل حالت قبل، مربع کوچکتر را درون مربع

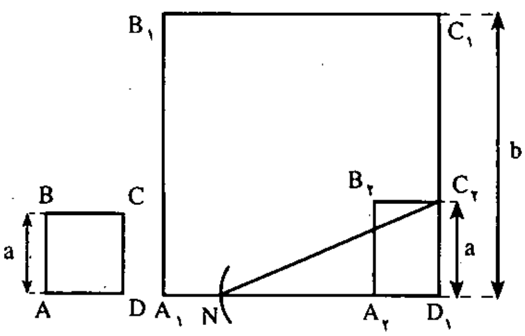


شکل ۲

بزرگتر قرار می‌دهیم (شکل ۳). سپس به مرکز نقطهٔ C_2 و با شعاع برابر b، کمانی رسم می‌کنیم تا A_1D_1 را در نقطهٔ N قطع کند. در این صورت:

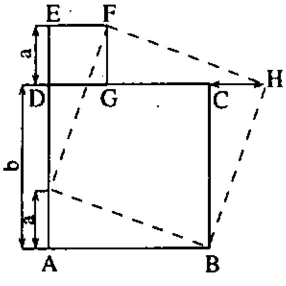
$$|ND_1| = \sqrt{b^2 - a^2}$$

طولی برابر طول ضلع مربع مجهول دارد.



شکل ۳

خود قضیهٔ فیثاغورس را هم می‌توان با ساختن مربعی هم‌ارز با مجموع دو مربع دیگر، ثابت کرد. به شکل ۴ توجه کنید؛ مساحت مربع به ضلع a برابر MB برابر است با مجموع مساحت‌های مربع‌های به ضلع‌های AD و DE. در ضمن مثلث‌های MEF، FHG، CHB و MBA، مثلث‌هایی همنهشت هستند.



در زمینهٔ هندسه، می‌توان این آگاهی‌ها را در نوشته‌های براهماگوپتا، شریدهارا، مهاویرا و بهاسکارای دوم یافت. براهماگوپتا، دستوری تقریبی برای محاسبهٔ مساحت یک چهارضلعی دلخواه داده است (از این دستور، مصری‌ها هم استفاده می‌کردند):

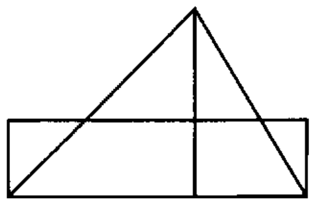
$$S \approx \frac{a+c}{2} \times \frac{b+d}{2}$$

که در آن a و c طول‌های دو ضلع روبه‌رو و b و d طول دو ضلع دیگر روبه‌رو در چهار ضلعی هستند. شریدهارا، ضمن این که یادآوری می‌کند این دستور را نمی‌توان برای همهٔ چهار ضلعی‌ها به کار برد، دستور محاسبهٔ مساحت ذوزنقه را می‌دهد: حاصلضرب نصف مجموع دو قاعده در ارتفاع. براهماگوپتا، برای محاسبهٔ مساحت چهار ضلعی از این دستور هم استفاده می‌کرد:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

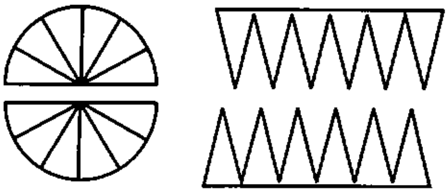
که در آن a، b، c و d طول ضلع‌های چهارضلعی و p اندازهٔ نصف محیط آن است. می‌دانیم، این دستور برای محاسبهٔ مساحت یک چهار ضلعی محاطی درست است؛ ولی براهماگوپتا، چیزی در این باره نمی‌گوید؛ گرچه دو گونهٔ چهار ضلعی را (ذوزنقه متساوی‌الساقین و چهار ضلعی‌هایی که قطرهای عمود بر هم دارند) بررسی می‌کند که این دستور برای آنها درست است.

همان طور که پیش از این هم گفتیم، استدلال‌های هندسی در نوشته‌های ریاضیدانان هندی، کوتاه است. برای نمونه، اثبات قضیهٔ مربوط به مساحت مثلث، تنها با شکلی شبیه شکل ۵ داده شده است. در این شکل، ارتفاع مستطیل، برابر نصف ارتفاع مثلث است و شکل با جملهٔ «دیده می‌شود»



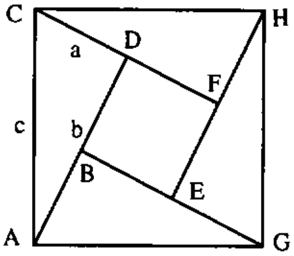
شکل ۵

همراه است، اثبات مربوط به محاسبهٔ مساحت دایره، که برابر است با مساحت مستطیلی که ضلع‌های آن به ترتیب، برابر نصف محیط دایره و شعاع دایره است، به وسیلهٔ شکل ۶ و همراه با جملهٔ «دیده می‌شود» داده شده است. اثبات قضیهٔ فیثاغورس،



شکل ۶

آن طور که بهاسکارای دوم داده است، تنها بر پایهٔ شکل ۷ قرار دارد.



شکل ۷

چون همهٔ مثلث‌ها با هم برابرند، پس:

$$S_{ACHG} = 4S_{ADC} + S_{BEFD}$$

که در آن داریم:

$$S_{ACHG} = c^2,\ S_{ADC} = \frac{1}{2}ab,\ S_{BEFD} = (b-a)^2$$

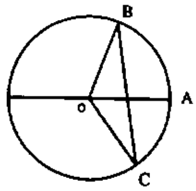
بنابراین:

$$c^2 = \frac{4ab}{2} + (b-a)^2 = a^2 + b^2$$

آریابهاتای اوّل، برای اندازه‌گیری دایره، عدد π را برابر ۳/۱۴۱۶ می‌گیرد. «نیلاکانتا» (سده‌های پانزده و شانزده میلادی)، مقدار عدد π را تا ۱۰ رقم درست دهدهی محاسبه کرده است.

مثلثات

پیدایش و پیشرفت مثلثات، با مسأله‌های عملی، رابطهٔ تنگاتنگی دارد. در هند، پایه‌های مثلثات گذاشته شد؛ گرچه دربارهٔ حلّ مثلث، موفقیت اندکی پیدا کردند. از تابع‌های مثلثاتی، سینوس، کسینوس و «سینوس ـ ورزوس» برای آنها معلوم بود. ریاضیدانان هندی، برخلاف یونانیها از نصف وتر، به جای تمام وتر استفاده می‌کردند. اگر طول شعاع OB را واحد بگیریم (شکل ۸)، آن وقت سینوس زاویهٔ AOB برابر نسبت $\frac{|BK|}{|OB|}$ می‌شود، که از نظر عددی برابر طول BK است و طول پاره‌خط راست OK برابر کسینوس زاویهٔ AOB می‌شود.



شکل ۸

از بستگی بین تابع‌های مثلثاتی، اینها را می‌شناختند:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

مقدار تابع‌های مثلثاتی را، تنها در ربع اوّل دایره بررسی می‌کردند، برای استفاده از مثلثات در اخترشناسی، جدول‌هایی که تنظیم کرده بودند، نقش اساسی داشت. هندی‌ها جدول وترها را خیلی دقیق‌تر از یونانی‌ها و بطلمیوس (سدهٔ دوم میلادی) تنظیم کردند.

در رساله‌ها و به صورتی مبهم، برخی از قضیه‌های مثلثات کروی هم وجود دارد. برای نمونه، قضیه سینوس‌ها در مثلث قائم‌الزاویهٔ کروی و قضیهٔ کسینوسها در حالت کلی.

در بسیاری از کتاب‌های مربوط به تاریخ ریاضیات، گفته شده است، ریاضیدانان هندی پس از بهاسکارای دوم تا آغاز سدهٔ بیستم، هیچ کار جدّی و تازه‌ای نکرده‌اند؛ ولی در واقع چنین نیست. موفقیت جالب و مهم ریاضیدانان هندی سدهٔ شانزدهم، عبارت است از تبدیل «تانژانت» و «آرک تانژانت» به صورت رشته‌های بی‌پایان.

دانشمندان سده‌های ششم تا دوازدهم، عدد π را در بهترین حالت خود تا ۵ رقم دهدهی می‌شناختند. نیلاکانتا، دانشمند هندی سدهٔ شانزدهم، رشتهٔ بی‌پایانی را می‌دهد (البته، بدون اثبات) که به زبان نمادهای امروزی چنین است:

$$\pi\varphi = \frac{\pi\sin\varphi}{\cos\varphi} - \frac{\pi\sin^3\varphi}{3\cos^3\varphi} + \frac{\pi\sin^5\varphi}{5\cos^5\varphi} - \dots$$

با فرض $\sin\varphi \leq \cos\varphi$ ، اگر در این برابر $\pi = 1$ بگیریم، به دست می‌آید:

$$\varphi = \tan\varphi - \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3\varphi + \frac{1}{5}\mathrm{tg}^5\varphi - \dots$$

و نیلاکانتا، برای محاسبه، π فرض می‌کند $\frac{\pi}{4} = \varphi$. در ضمن، $\frac{\pi}{4}$ را به صورت مجموع محدود S_n با جملهٔ متمم $K_n^{(i)}$ نشان می‌دهد، که سه صورت مختلف دارد:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + K_n^{(i)}$$

که در آن داریم:

$$K_n^{(1)} = \frac{(-1)^n}{4n}, \quad K_n^{(2)} = \frac{(-1)^n . n}{2n-1}, \quad K_n^{(3)} = \frac{(-1)^n(n^2+1)}{n(4n^2+5)}$$

و در ضمن:

$$\left|K_n^{(1)}\right| > \left|K_n^{(2)}\right| > \left|K_n^{(3)}\right|$$

این جمله‌های متمم، برای مقدارهای کوچک n هم، خیلی خوب، تقریب را تصحیح می‌کند. مقداری که نیلاکانتا برای عدد π می‌دهد، دارای ۱۰ رقم است.

کارهای دیگر ریاضیدانان هندی هم، در سدهٔ شانزدهم جالب است. آنها دستوری را می‌شناختند که با نمادهای امروزی چنین است:

$$\text{arc tg } t = \lim_{n\to\infty} \sum_{K=0}^{n-1} \frac{\frac{t}{n}}{1 + \left(\frac{kt}{n}\right)^2} \qquad (I)$$

آنها از بسط سینوس و کسینوس هم، به صورت یک رشته، آگاه بودند:

$$\pi \sin\varphi = S - \frac{S^3}{3!\pi^2} + \frac{S^5}{5!\pi^4} - \dots$$

$$\pi \cos\varphi = S - \frac{S^2}{2!\pi} + \frac{S^4}{4!\pi^3} - \dots$$

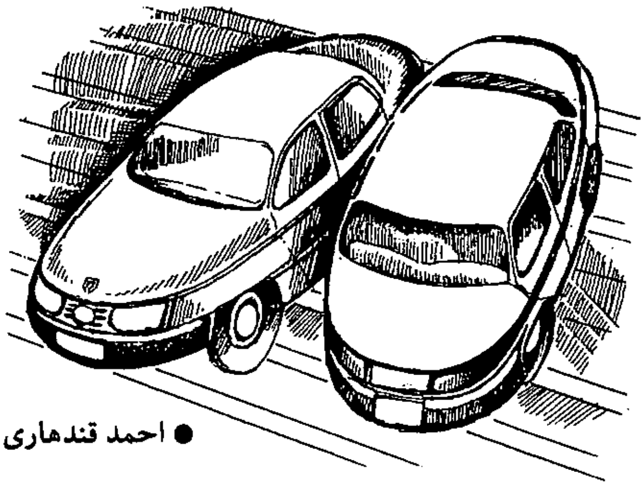
که در آن، S، طول کمان متناظر با زاویه φ است.

به این ترتیب، ریاضیدانان هندی در سال ۱۵۰۲ میلادی، برای نخستین بار و پیش از «ج. گریگوری» و «لایب نیتس» توانستند arctgx را به صورت رشته‌ای از توان‌های x بسط دهند و به‌ویژه از رشته‌ای که به نام گریگوری برای $\frac{\pi}{4}$ وجود دارد، اطلاع داشتند. این رشته، بعدها در سال ۱۶۷۱ میلادی، به وسیلهٔ گریگوری و در سال ۱۶۷۳ میلادی، به وسیلهٔ لایب نیتس، دوباره کشف شد. رشته‌های دیگری را هم که هندی‌ها به دست آورده بودند، در اروپای پیش از نیمهٔ دوم سدهٔ هفدهم، شناخته شد. دستور (I) را «اولر» در سال ۱۷۳۹ میلادی پیدا کرد.

درست است که این اندیشه‌ها و بسیاری اندیشه‌های دیگر نتوانست به اندازهٔ کافی رشد کند؛ ولی همین گام‌های نخستین که هندی‌ها در زمینهٔ دستگاه موضعی دهدهی، قانون‌های حساب، مثلثات مقدماتی و یک رشته قاعده برای جبر و نظریهٔ عددها تا پایان سدهٔ سیزدهم میلادی برداشتند، در آغاز در کشورهای شرق میانه و نزدیک، و سپس در اروپا، اثر بی‌اندازه‌ای گذاشت و امکان تکامل بعدی ریاضیات را فراهم کرد.

مماس و قائم بر منحنی

قسمت دوم



● احمد قندهاری

حالت دوم: می‌خواهیم از نقطهٔ $P(a , b)$ واقع در خارج منحنی دو مماس بر منحنی رسم کنیم.

روش اوّل (راه α)

فرض می‌کنیم نقطهٔ متحرّک A به طول α نقطهٔ تماس باشد؛ بنا به حالت اوّل، معادلهٔ خط مماس بر منحنی را در نقطه A می‌نویسیم. سپس مختصات نقطه P را در معادلهٔ خط مماس نقطهٔ A قرار می‌دهیم. از حلّ معادله حاصل αها (طول‌های نقاط تماس) به دست می‌آید.

αهای به دست آمده را در معادلهٔ مماس نقطهٔ A قرار می‌دهیم، معادله‌های مماس‌ها حاصل می‌شود.

مثال (۱۷): از نقطهٔ $P(۰ , ۱)$ دو مماس بر منحنی تابع به معادلهٔ $y = x^۲ - ۷x$ رسم می‌کنیم؛ مطلوب است معادله‌های مماس‌ها.

حل: فرض می‌کنیم نقطهٔ A به طول α نقطهٔ تماس باشد.

$$y_A = \alpha^۲ - ۷\alpha \qquad A\left|\begin{array}{l}\alpha\\ \alpha^۲ - ۷\alpha\end{array}\right.$$

$$y'_x = ۲x - ۷ \ ; \ \underset{\text{مماس}}{m} = ۲\alpha - ۷$$

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

معادلهٔ مماس بر منحنی در نقطهٔ A

$$y - \alpha^۲ + ۷\alpha = (۲\alpha - ۷)(x - \alpha)$$

$$P(۰,-۱)\xrightarrow{\text{در معادلهٔ مماس نقطهٔ A}} -۱ - \alpha^۲ + ۷\alpha = (۲\alpha - ۷)(۰ - \alpha) \Rightarrow$$

$$-۱ - \alpha^۲ + \cancel{۷\alpha} = -۲\alpha^۲ + \cancel{۷\alpha}$$

$\Rightarrow \alpha^۲ = ۱ \Rightarrow \alpha = \pm ۱$ طول‌های نقاط تماس

$$\alpha = ۱ \xrightarrow{\text{در معادلهٔ مماس نقطهٔ A}} y - ۱ - ۷ = (۲ - ۷)(x + ۱)$$

$\Rightarrow y = -۵x - ۱$ معادلهٔ یک خط مماس

$$\alpha = -۱ \xrightarrow{\text{در معادلهٔ مماس نقطهٔ A}} y - ۱ - ۷ = (-۲ - ۷)(x + ۱)$$

$\Rightarrow y = -۹x - ۱$ معادلهٔ مماس دیگر

مثال (۱۸): از نقطهٔ $P(۱ , -۲)$ دو مماس بر منحنی تابع به معادلهٔ $y = ۱ - \frac{۹}{(x-۱)^۲}$ رسم کرده‌ایم، معادله‌های مماس‌ها را بیابید.

حل:

$$y'_x = \frac{۱۸}{(x-۱)^۳}$$

فرض می‌کنیم A به طول α نقطهٔ تماس باشد.

$$y_A = ۱ - \frac{۹}{(\alpha - ۱)^۲} \ \text{و} \ \underset{\text{مماس}}{m} = \frac{۱۸}{(\alpha - ۱)^۳}$$

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - ۱ + \frac{۹}{(\alpha - ۱)^۲} = \frac{۱۸}{(\alpha - ۱)^۳}(x - \alpha)$$

معادلهٔ مماس بر منحنی در نقطهٔ A

$$P(۱,-۲)\xrightarrow{\text{در معادلهٔ مماس نقطهٔ A}} -۲ - ۱ + \frac{۹}{(\alpha - ۱)^۲} = \frac{۱۸}{(\alpha - ۱)^۳}(۱ - \alpha) \Rightarrow$$

$$\frac{-۳(\alpha - ۱)^۲ + ۹}{(\alpha - ۱)^۲} = \frac{-۱۸(\alpha - ۱)}{(\alpha - ۱)^۳}$$

$$\Rightarrow -۳(\alpha - ۱)^۲ + ۹ = -۱۸ \Rightarrow$$

$$(\alpha - ۱)^۲ = ۹ \Rightarrow \alpha - ۱ = \pm ۳$$

$\Rightarrow \alpha = ۴ , -۲$ طول‌های نقاط تماس

$$\alpha = ۴ \xrightarrow{\text{در معادلهٔ مماس نقطهٔ A}} y - ۱ + \frac{۹}{۹} = \frac{۱۸}{۲۷}(x - ۴) \Rightarrow$$

$y = \frac{۲}{۳}(x - ۴)$ معادلهٔ یکی از مماس‌ها

$$\alpha = -۲ \xrightarrow{\text{در معادلهٔ مماس نقطهٔ A}} y - ۱ + \frac{۹}{۹} = -\frac{۱۸}{۲۷}(x + ۲) \Rightarrow y = -\frac{۲}{۳}(x + ۲)$$

معادلهٔ مماس دیگر

روش دوم (راه m)

اگر بخواهیم از نقطهٔ $P(a , b)$ واقع در خارج یک منحنی، دو مماس بر منحنی رسم کنیم، شیب‌های مماس‌ها را m فرض می‌کنیم. با در دست داشتن نقطهٔ P و شیب m، معادلهٔ فرضی مماس را می‌نویسیم، این خط را با معادله تقاطع می‌دهیم (yها حذف). سپس شرط ریشهٔ مضاعف را برای

معادلهٔ تقاطع می‌نویسیم و از آن جا m به دست می‌آید. mها را در معادلهٔ فرضی مماس قرار می‌دهیم.

توجه: طول نقطهٔ تماس = $-\frac{b}{2a}$ (معادلهٔ تقاطع)

مثال(۱۹): از نقطهٔ $P(0\,,\,4)$ دو مماس بر منحنی به معادلهٔ $x^2+y^2=4$ رسم می‌کنیم، مطلوب است معادله‌های مماس‌ها و مختصات نقاط تماس.

حل: شیب مماس‌ها را m فرض می‌کنیم.

$y-y_p=m(x-x_p)$

معادلهٔ فرضی مماس $y-4=m(x-0) \Rightarrow y=mx+4$

این خط را با معادلهٔ منحنی تقاطع می‌دهیم:

$$\begin{cases} y=mx+4 \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \Rightarrow x^2+(mx+4)^2=4 \Rightarrow$$

معادلهٔ تقاطع $(m^2+1)x^2+8mx+12=0$

شرط ریشهٔ مضاعف: $\Delta'=b'^2-ac=0 \Rightarrow$

$$16m^2-12(m^2+1)=0$$

شیب‌های مماس‌ها $4m^2=12 \Rightarrow m^2=3 \Rightarrow m=\pm\sqrt{3}$

$m=\sqrt{3}$;
- معادلهٔ یک خط مماس $y=mx+4 \Rightarrow y=\sqrt{3}x+4$
- طول نقطهٔ تماس $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{8m}{2(m^2+1)}=-\frac{8\sqrt{3}}{2(4)}=-\sqrt{3}$
- عرض نقطهٔ تماس $y=\sqrt{3}(-\sqrt{3})+4 \Rightarrow y=1$

$m=-\sqrt{3}$;
- معادلهٔ مماس دیگر $y=mx+4 \Rightarrow y=-\sqrt{3}x+4$
- طول نقطهٔ تماس $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{8m}{2(m^2+1)}=\frac{8\sqrt{3}}{2(4)}=\sqrt{3}$
- عرض نقطهٔ تماس $y=-\sqrt{3}(\sqrt{3})+4 \Rightarrow y=1$

مثال (۲۰): معادلهٔ مکان هندسی نقاطی از صفحه را بیابید که بتوان از آن نقاط، دو مماس عمود بر هم بر منحنی به معادلهٔ $y=\frac{x^2+1}{x}$ واقع در همان صفحه رسم کرد.

حل: فرض می‌کنیم $P(x_1\,,\,y_1)$ یک نقطه از مکان باشد؛ یعنی وقتی از نقطهٔ P دو مماس بر منحنی به معادلهٔ $y=\frac{x^2+1}{x}$ رسم می‌کنیم، دو مماس بر هم عمود باشند، مانند مثال قبل عمل می‌کنیم:

شیب مماس به فرض = m

$y-y_p=m(x-x_p)$

$y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow y=mx-mx_1+y_1$

این خط را با معادلهٔ منحنی تقاطع می‌دهیم:

$$\begin{cases} y=mx-mx_1+y_1 \\ y=\frac{x^2+1}{x} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2+1}{x}=\frac{mx-mx_1+y_1}{1} \Rightarrow$$

$mx^2-mx_1x+y_1x=x^2+1$

معادلهٔ تقاطع خط و منحنی $(m-1)x^2+(y_1-mx_1)x-1=0$

شرط ریشه مضاعف: $\Delta=b^2-4ac=0 \Rightarrow$

$(y_1-mx_1)^2+4(m-1)=0$

$y_1^2+m^2x_1^2-2x_1y_1m+4m-4=0$

$x_1^2m^2+2(2-x_1y_1)m+(y_1^2-4)=0$

ریشه‌های این معادلهٔ m' و m'' شیب‌های مماسند. چون دو مماس بر هم عمودند؛ پس:

$m'.m''=-1 \Rightarrow \frac{c}{a}=-1 \Rightarrow \frac{y_1^2-4}{x_1^2}=-1 \Rightarrow$

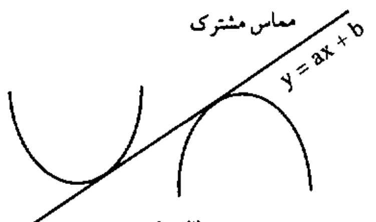
معادلهٔ مکان $y_1^2-4=-x_1^2 \Rightarrow x_1^2+y_2^2=4$

یعنی از هر نقطهٔ واقع بر دایره به معادلهٔ $x_1^2+y_1^2=4$، که دو مماس بر منحنی به معادلهٔ $y=\frac{x^2+1}{x}$ رسم کنیم، دو مماس بر هم عمودند.

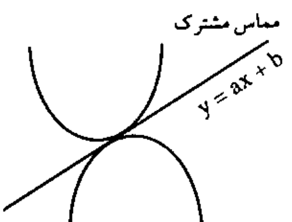
تمرین: معادلهٔ مکان هندسی نقاطی از صفحه را بیابید که اگر از آن نقاط دو مماس بر دایره به معادلهٔ $x^2+y^2=8$ واقع در همان صفحه رسم کنیم، دو مماس بر هم عمود باشند.

جواب $x_1^2+y_1^2=16$

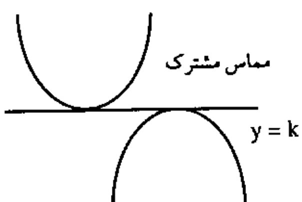
مماس مشترک: به شکل‌های زیر توجه کنید:



(الف)



(ج)



(ب)

الف) اگر خط $y=ax+b$ مماس مشترک دو منحنی y_1 و y_2 باشد، برای یافتن معادلهٔ مماس مشترک خط $y=ax+b$ را با هر یک از منحنی‌های y_1 و y_2 تقاطع می‌دهیم؛ سپس $\Delta=0$.

مثال (۲۱): معادلهٔ مماس مشترک دو منحنی به

معادله‌های $y_1 = -x^2 + 2x + 1$ و $y_2 = x^2 - 8x + 14$ را بیابید.

حل: فرض می‌کنیم $y = ax + b$ معادلهٔ مماس مشترک دو منحنی y_1 و y_2 باشد، این خط را با هر یک از معادله‌های منحنی‌ها تقاطع می‌دهیم؛ سپس $\Delta = 0$.

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 1 \\ y = ax + b \end{cases} \Rightarrow ax + b = -x^2 + 2x + 1 \Rightarrow$$

$$x^2 + (a-2)x + (b-1) = 0$$

$$\Delta = (a-2)^2 - 4(b-1) = 0 \Rightarrow a^2 - 4a - 4b = -8 \quad (1)$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 8x + 14 \\ y = ax + b \end{cases} \Rightarrow x^2 - 8x + 14 = ax + b \Rightarrow$$

$$x^2 - (a+8)x + (14-b) = 0$$

$$\Delta = (a+8)^2 - 4(14-b) = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + 16a + 4b = -8 \quad (2)$$

$$\begin{cases} (1);\ a^2 - 4a - 4b = -8 \\ (2);\ a^2 + 16a + 4b = -8 \end{cases} \Rightarrow 2a^2 + 12a + 16 = 0 \Rightarrow$$

$$a^2 + 6a + 8 = 0 \Rightarrow (a+2)(a+4) = 0 \Rightarrow a = -2 ,\ a = -4$$

$$a = -2 \ ;\ a^2 - 4a + 8 = 4b$$

$$4 + 8 + 8 = 4b \Rightarrow b = 5$$

$$a = -4 \ ;\ a^2 - 4a + 8 = 4b$$

$$16 + 16 + 8 = 4b \Rightarrow b = 10$$

ب) ممکن است معادلهٔ مماس مشترک به صورت $y = k$ باشد، که معمولاً در تست‌ها مطرح می‌شود.

مثال(۲۲): معادلهٔ مماس مشترک دو منحنی به معادله‌های $y_1 = x^2 - 2x$ و $y_2 = -x^2 + 4x - 5$ را بیابید.

حل: اگر چه این مسأله را می‌توان مانند قسمت الف حل کرد؛ ولی راه ساده‌تر آن چنین است:

$$y'_1 = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \xrightarrow{\text{در معادلهٔ تابع}} y = -1$$

$$y'_2 = -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{\text{در معادلهٔ تابع}} y = -1$$

پس $y = -1$ عرض‌های اکسترمم هر دو منحنی است؛ بنابراین برهرمنحنی دو مماس است. به شکل(ب) توجه کنید.

ج) ممکن است دو منحنی بر هم مماس باشند که در این صورت، باز هم یک مماس مشترک دارند.

مثال (۲۳): معادلهٔ مماس مشترک دو منحنی به معادله‌های $y_1 = 2x^2 - 4x + 1$ و $y_2 = x^2 + 2x - 8$ را بیابید؛ به شرطی که دو منحنی بر هم مماس باشند.

حل: بدون بیان شرط در مسأله هم می‌توان مانند قسمت الف مسأله را حل کرد؛ ولی با وجود شرط، مسأله ساده‌تر حل خواهد شد.

دو منحنی را با هم تقاطع می‌دهیم:

$$\begin{cases} y_1 = 2x^2 - 4x + 1 \\ y_2 = x^2 + 2x - 8 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = x^2 + 2x - 8$$

ریشه مضاعف $x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$

$x = 3$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ تقاطع دو منحنی y_1 و y_2 است، از این جا نتیجه می‌گیریم دو منحنی y_1 و y_2 در $x = 3$ بر هم مماسند؛ پس یک خط مماس مشترک دارند.

$$x = 3 \xrightarrow{\text{در معادلهٔ یکی از منحنی‌ها}} y = 7$$

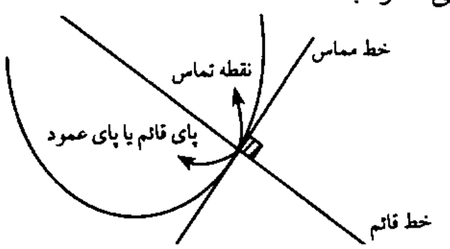
$$y_1' = 4x - 4 \xrightarrow{x=3} m_{\text{مماس}} = 12 - 4 = 8$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 7 = 8(x - 3) \Rightarrow$$

معادلهٔ مماس مشترک دو منحنی $\qquad y = 8x - 17$

قائم یا عمود بر منحنی

خطّ قائم، خطی است که در نقطهٔ تماس بر خط مماس بر منحنی عمود باشد.



حالت اوّل: طرز نوشتن معادلهٔ قائم بر منحنی، در نقطه‌ای واقع بر منحنی، عیناً مانند حالت اوّل مماس بر منحنی عمل می‌کنیم؛ با توجه به تغییر ضریب زاویه (شیب).

مثال (۱): در نقطهٔ A به طول صفر واقع بر منحنی به معادلهٔ $y = \frac{x-1}{x+1}$ قائمی بر این منحنی رسم می‌کنیم؛ مطلوب است معادله خط قائم؟

حل:

$$y'_x = \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$y_A = \frac{0-1}{0+1} = -1 \quad \text{و} \quad m_{\text{مماس}} = \frac{2}{(0+1)^2} = 2 \Rightarrow m_{\text{قائم}} = -\frac{1}{2}$$

$$y - y_A = m_{\text{قائم}}(x - x_A) \Rightarrow y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow$$

معادلهٔ خط قائم $\qquad y = -\frac{1}{2}x - 1$

مثال (۲): در نقطهٔ A به طول $\frac{\pi}{3}$ واقع بر منحنی به معادلهٔ $y=\frac{\sin x+\sqrt{3}}{\sin x}$ قائمی بر این منحنی رسم می‌کنیم؛ مطلوب است معادله خط قائم؟

$$y_A=\frac{\sin\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=3$$

$$y'_x=\frac{\cos x\sin x-\cos x(\sin x+\sqrt{3})}{\sin^2 x}=\frac{-\sqrt{3}\cos x}{\sin^2 x}$$

$$m_{\text{مماس}}=\frac{-\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{3}}{\sin^2\frac{\pi}{3}}=\frac{-\sqrt{3}(\frac{1}{2})}{\frac{3}{4}}=\frac{-2\sqrt{3}}{3}\Rightarrow$$

$$m_{\text{قائم}}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{3}{2\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y-y_A=m_{\text{قائم}}(x-x_A)\Rightarrow y-3=\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{\pi}{3})$$

معادلهٔ خط قائم $\quad y=\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{\pi}{3})+3$

حالت دوم: طرز نوشتن معادلهٔ خط قائم بر منحنی از نقطهٔ P(a , b) واقع در خارج منحنی مانند راه α مسألهٔ مماس حل می‌کنیم، با توجه به تغییر شیب خط.

مسأله: از نقطهٔ $P(1,\frac{1}{2})$ قائمی بر منحنی تابع به معادلهٔ $y=1-\frac{1}{(x-1)^2}$ رسم می‌کنیم؛ مطلوب است معادله قائم؟

حل: فرض می‌کنیم نقطهٔ N به طول α پای قائم باشد:

$$y_N=1-\frac{1}{(\alpha-1)^2}$$

$$y'_x=\frac{2}{(x-1)^3}\Rightarrow m_{\text{مماس}}=\frac{2}{(\alpha-1)^3}\Rightarrow m_{\text{قائم}}=\frac{-(\alpha-1)^3}{2}$$

$$y-y_N\Rightarrow m_{\text{قائم}}(x-x_N)\Rightarrow y-1+\frac{1}{(\alpha-1)^2}=\frac{-(\alpha-1)^3}{2}(x-\alpha)$$

معادلهٔ قائم بر منحنی در نقطهٔ N

$$P(1,\frac{1}{2})\xrightarrow{\text{در معادلهٔ قائم نقطهٔ N}}\frac{1}{2}-1+\frac{1}{(\alpha-1)^2}=\frac{-(\alpha-1)^3}{2}(1-\alpha)\Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{(\alpha-1)^2}=\frac{(\alpha-1)^4}{2}\Rightarrow$$

فرض می‌شود $(\alpha-1)^2=k$ $\quad \frac{-(\alpha-1)^2+2}{\cancel{2}(\alpha-1)^2}=\frac{(\alpha-1)^4}{\cancel{2}}$

$$\frac{-k+2}{k}=\frac{k^2}{1}\Rightarrow k^3=-k+2\Rightarrow k^3+k-2=0$$

در این معادله، مجموع ضرایب صفر است، پس یک جواب $k=1$، برای ادامهٔ حلّ معادله را بر $(k-1)$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} k^3+k-2 & k-1 \\ \hline 0 & k^2+k+2 \end{array}$$

$$k^3+k-2=(k-1)(\underbrace{k^2+k+2}_{\text{مثبت است}})=0\to\underbrace{k^2+k+2}_{\text{همواره مثبت است}}\begin{cases}\Delta<0\\ a>0\end{cases}$$

$$k-1=0\Rightarrow k=1\Rightarrow(\alpha-1)^2=1\Rightarrow\alpha-1=\pm1\Rightarrow\alpha=0,2$$

طول‌های پای قائم: آنها را در معادلهٔ قائم نقطهٔ N قرار می‌دهیم:

$$\alpha=0\ ;\ y-1+1=\frac{1}{2}x\Rightarrow y=\frac{1}{2}x$$

$$\alpha=2\ ;\ y-1+1=\frac{+1}{2}x\Rightarrow y=\frac{1}{2}x$$

خط قائم، یک خط است و در دو نقطه بر منحنی عمود است.

تمرین

۱. به ازای چه مقادیر، m معادلهٔ $x^{101}-101x+m-4=0$ ریشهٔ مضاعف دارد؟

۲. به ازای چه مقادیر، m منحنی به معادلهٔ $y=(x^2-4)(x^2+mx-5)$ بر محور xها مماس است؟

۳. اگر $x^7+7y+7x-4=0$ و نقطهٔ A به طول ۱ روی منحنی باشد، شیب خط مماس را بیابید.

۴. نقاطی از منحنی به معادلهٔ $y=\frac{2x}{4x-1}$ را بیابید که شیب خط مماس در آن نقاط برابر $\frac{-2}{49}$ باشد.

۵. نقاطی از منحنی به معادلهٔ $x^2+3y^2=4$ را بیابید که شیب خط مماس در آن نقاط برابر $-\frac{1}{3}$ باشد.

۶. معادلهٔ خط‌های مماس و قائم بر منحنی به معادلهٔ $y=\cos(x+\frac{\pi}{3}).\cos(x-\frac{\pi}{3})-\sin(x+\frac{\pi}{3}).\sin(x-\frac{\pi}{3})$ را در نقطه‌ای به طول $\frac{\pi}{6}$ بیابید.

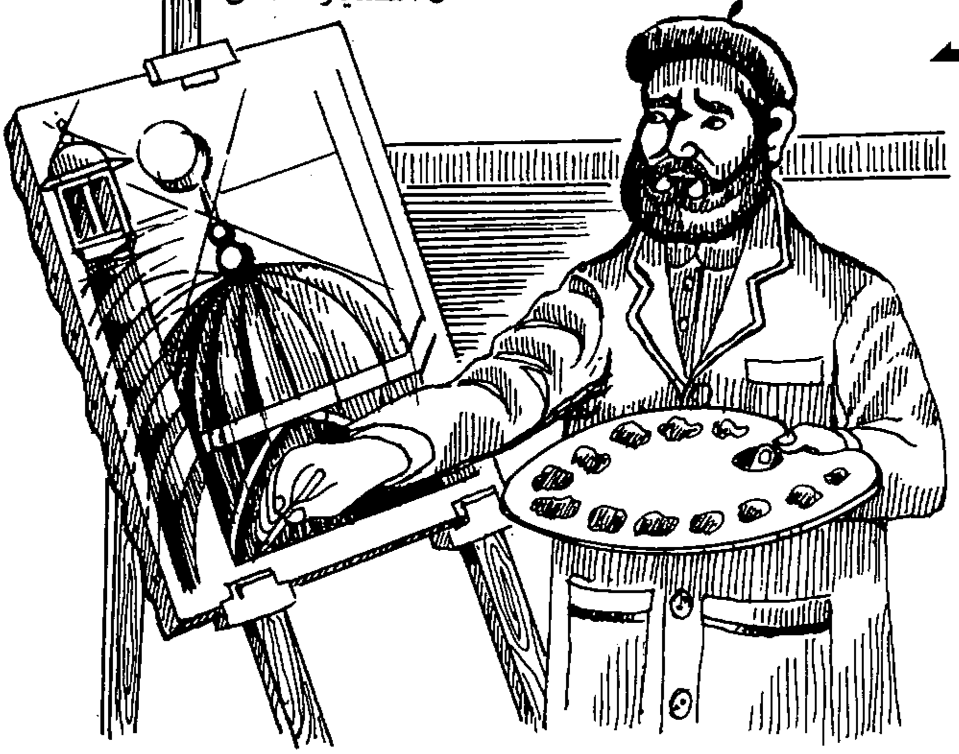
۷. از نقطهٔ $P(0,-1)$ دو مماس بر منحنی به معادلهٔ $y=x^2-x$ رسم کرده‌ایم، معادله‌های مماس‌ها را بیابید.

۸. از نقطهٔ $P(0,6)$ دو مماس بر منحنی به معادلهٔ $2x^2+y^2=4$ رسم کرده‌ایم، معادله‌های مماس‌ها و مختصات نقاط تماس را بیابید.

۹. از مبدأ مختصات، قائمی بر منحنی به معادلهٔ $y=\frac{x^2+4\sqrt{2}}{x}$ رسم کرده‌ایم، مطلوب است محاسبهٔ طول‌های پای قائم و معادلهٔ خط قائم؟

ریاضیات ایران در دورهٔ اسلامی

● اسفندیار معتمدی



محمدبن ایوب طبری و مفتاح المعاملات

«ابوجعفر محمدبن ایوب الحاسب الطبری» یکی از ریاضیدانان برجستهٔ ایرانی است که آثار خود را به زبان فارسی نوشته است، نام او را در یکی از تألیفاتش[1]، «شمس‌الدین محمدبن ایوب مازندرانی» آورده‌اند و زمان تولد او را از روی یکی دیگر از نوشته‌هایش که تاریخ کتابت آن جمعه ۲۵ ربیع الاول ۳۷۲ است، در قرن چهارم هجری حدس زده‌اند.

تحقیقات ایران‌شناس فرانسوی، آقای لازار نشان می‌دهد که محمدبن ایوب، معاصر الب‌ارسلان و ملکشاه سلجوقی بوده و زیج مفرد را در فاصلهٔ میان سال‌های ۴۷۹ تا ۵۰۲ هجری تألیف کرده است و چون در این تألیف، در پنج مورد، از آمل به‌عنوان «شهرما» یاد کرده، لازار نتیجه می‌گیرد که ستاره‌شناس طبرستان، در زادگاه خود زیسته و همان‌جا فعالیت کرده است.

آثار محمدبن ایوب

اکنون از آثار نوشته شدهٔ محمدبن ایوب، نُه کتاب و رساله در ریاضیات و نجوم به زبان فارسی در دست است و شاید تألیفات او بسیار بیشتر از این نوشته‌ها باشد. این تألیفات عبارتند از:

۱. مفتاح المعاملات: این کتاب برای استفاده عامهٔ مردم در حساب و هندسه عملی نوشته شده است.

۲. کتاب العمل و القاب فی معرفة (اسطرلاب): موضوع این کتاب، شناختن اسطرلاب و انواع و اجزا و کاربرد آن است.

۳. شش فصل در اسطرلاب

۴.شمارنامه: این کتاب که در علم حساب است، در سال ۱۳۴۵ در سلسله انتشارات بنیاد فرهنگ ایران به چاپ رسیده است.

۵. زیج مفرد

۶. رسالهٔ استخراج در شناختن عمر و بقای آن

۱ـ المونس فی نزهة اهل المجلس.

۷. المونس فی نزهة اهل المجلس

۸. رساله قواعدی چند در معرفت هر حرکت و قوسی و دایره‌ای و خطی و نقطه‌ای که منجّمی در آن اعمال کند.

۹. رسالهٔ مقدمات اختیارات در سیّارات سبعه

بسم‌ا...الرحمن‌الرحیم

مدار اندرین جز ز یزدان سپاس

تو برتر ازو، هم مر او را شناس

چنین گوید **ابوجعفر محمدبن ایوب الحاسب الطبری،** که چون ما بپرداختیم از رسالهٔ **شمارنامه** که او اصل شمار هندی است، خواستیم که تمامی و فایدهٔ او اندرین رسالهٔ مفتاح المعاملات پیدا کنیم، جز خداوندان صناعت نجوم را که در او تمام گفته‌ایم و همچنین در این رساله یاد کنیم، هر شماری که در آن جا یاد نکرده‌ایم؛ جز به تحت و میل از ضرب و قسمت و جذر، خاصه از بهر خداوندان معاملات گوناگون، از بهر آسانی شمار معامله‌ها از گرفتن و دادن و خریدن و فروختن و بخشیدن خاصه هر مواریث را که باشد میان ایشان وز شمار فرایض و زکوة و استخراج مسایل در وصایا و تقدیر ساعات روز و شب و اوقات نماز و روزه و حج و آنچه بود از کارهای دینی و دنیای که تعلق به حساب دارد. خاصه از تصرف‌های دیوانی از هر نوعی از سختن و پیمودن و بخشیدن میان مردم از مقدار روزگارشان و قیاس کردن و اندازه دانستن هر یک از هر یک و مساحت زمین‌ها و شمارهای نوادر و مضمر و مشکل که باشد در میانهٔ مردم.

پس ما این رساله را اندر این باب پیدا کردیم، هر چه آسان‌تر و نیکوتر به تمامی، تا دریابند او را به آسانی.

و این رساله را شش فصل نهادیم:

فصل نخستین ازو	در اعداد متناسبات
فصل دوم ازو	در ضرب و قسمت و جذر و کسورات
فصل سوّم ازو	در فرایض و معاملات
فصل چهارم ازو	در نوادر و مضمرات
فصل پنجم ازو	در خطاین و مشکلات
فصل ششم ازو	در مقادیر و مساحات

و از ایزد جلّ جلاله توفیق خواستیم بر تمام کردن این که گفتیم، که تواناست که توفیق دهد بر این، والله المعین و الموفق.

نمونه آثار. از کتاب **مفتاح المعاملات**، از هر فصل نمونه‌ای می‌آوریم:

درِ پنجم از فصل نخستین

در دانستن ضرب و قسمت و جذر

اما ضرب دو عدد در هم، برهم گرفتن عددی است به قدر آن عدد دیگر. چنان که‌گر ضرب کنیم پنج را در هفت، معنای آن خواهیم که پنج را هفت بار گیریم. اَو هفت را پنج بار، از هر دو نوع سی و پنج حاصل آید، و این حاصلضرب پنج باشد در هفت و جمله حال ضرب بر این کردار باشد.

و او از دو گونه بیرون نشود؛ گونه‌ای ازو ضرب عددی بود در عدد دیگر مانندهٔ او و آن را جذر خوانند؛ چون: ضرب شش در شش، او هفت در هفت، او بیست در بیست. هر چه مانندهٔ یکدیگر بود. پس این عدد را جذر خوانند و آنچه از ضربشان حاصل آید، مال مجذور اَو مُنطق خوانند.

وگونهٔ دوم آن است که ضرب دو عدد بود در هم که مخالف یکدیگر باشند؛ چون: ضرب پنج در هفت، اَو نه در شش، اَو ده در بیست، و این هر یک را عدد مطلق خوانند و آنچه را حاصل آید، از ضربشان مال اصم خوانند؛ یعنی که جذرش را پدید نتوان آوردن به تحقیق، مگر به‌تقریب.

اما قسمت بخشیدن عددی است بر عددی دیگر، و او عکس ضرب است؛ چنان که‌گر پانزده را بر پنج ببخشیم، بیفکنیم به قدر پنج هر عددی که یابیم از پانزده تا سه پنج افکنده شود و سه حاصل آید.

و عمل قسمت نیز بر دو گونه باشد: گونه‌ای ازو قسمت بیشتر بر کمتر است، دوم قسمت کمتر بر بیشتر. و عمل هر یک یاد کنیم اگر خدای خواهد عزّوجل.

درِ دهم از فصل دوم

در دانستن گرفتن میزان عمل ضرب

اما میزان ضرب درستی عمل ضرب است و عملش چنان

باشد که برهم گیریم عقدهای آن عدد که در عددی دیگر ضرب همی کنیم، و از جمله‌اش هر چه نه بود بیفکنیم، و آن عدد دیگر را همچنان عقدش برهم گیریم و نه نه از او بیفکنیم، و آنچه بماند در آن باقی دیگر ضرب کنیم و آنچه حاصل آید، بر هم گیریم و نه از وی بیفکنیم، آنچه بماند، میزان ضرب بود، نگاه داریم. پس آن هر دو عدد را در هم ضرب کنیم و مبلغش را بر هم گیریم و نه نه از وی فرونهیم آنچه بماند، اگر ماندهٔ میزان ضرب بود، عملش درست کرده باشیم وگر مانده نباشد، عمل خطا کرده باشیم.

مثالش: خواستیم که پنجاه و شش را در شصت و هفت ضرب کنیم، میزانش باز گرفتیم پنج را که عقد پنجاه است بر شش که عقد آحادش است، گرفتیم یازده بود، نه بیفکندیم دو بماند این باقی است. شش را که عقد شصت است، بر هفت که عقد آحادش است، فزودیم سیزده باشد، نه بیفکندیم چهار بماند. ضربش کردیم در آن دو که باقی بود هشت حاصل آمد، این میزان است نگاه داشتیم، پس پنجاه و شش را در شصت و هفت ضرب کردیم، حاصل شد سه هزار و هفتصد و پنجاه و دو، عقدهاش بر هم گرفتیم سه را بر هفت ده بود، نه بیفکندیم یکی بماند و پنج را که عقد پنجاه است، بر وی فزودیم، شش بود، و دو را نیز برفزودیم که عقد آحاد است هشت گشت مانند میزان ضرب، پس بدانستیم که این عمل درست است.

و این کفایت است.

امتحان درستی ضرب ۶۷×۵۶، طبق دستورالعمل فوق چنین است:

۱) ۵ + ۶ = ۱۱   ۱۱ − ۹ = ۲

۲) ۶ + ۷ = ۱۳   ۱۳ − ۹ = ۴

۳) ۴ × ۲ = ۸

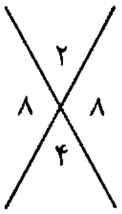
۴) ۵۶ × ۶۷ = ۳۷۵۲

۵) ۳ + ۷ = ۱۰   ۱۰ − ۹ = ۱

۶) ۵ + ۲ = ۷   ۷ + ۱ = ۸

از مساوی بودن حاصل عمل ۴ و ۶ نتیجه می‌شود که ضرب درست است.

دستورالعمل بالا را به شکل دیگری نشان می‌دهند.



ولیکن اگر در حاصل ضرب عدد نه یا صفر اشتباه وارد شده باشد این امتحان ضرب نمی‌تواند نادرست بودن جواب را مشخص کند.

درِ چهارم از فصل چهارم

در شمار یافتن بریدی کند رو مر تیز رو را

گر بپرسند ما را از بریدی که گفتند او را برو هر روزی شش فرسنگ و پنجمین روز را ازو بریدی، دیگر را گفتند برو از پسش هر روز نه فرسنگ، کدام روز بیابد این برید آخرین مر آن پیشین را؟

شمارش: ضرب کردیم میانه روزهاشان را که چهار روز است در رفتن فرسنگ برید نخستین که شش فرسنگ است، حاصل آمد بیست و چهار ببخشیدیم او را بر میانه فرسنگ هر دو، یعنی سه فرسنگ که میانه شش و نه است برفت هشت.

بیابد آخرین آن نخستین را به هشتم روز از روز شدن خویش یا به دوازدهم روز برشدن برید پیشین!

و این کفایت است.

مثال: اگر بخواهیم این مسأله را به صورت یک مسألهٔ مکانیک امروزی مطرح و حل کنیم، چنین خواهیم نوشت:

دو متحرّک با سرعت‌های ثابت ۹ واحد و ۶ واحد از یک مبدأ شروع به حرکت می‌کنند. اگر متحرّک تندتر ۴ روز پس از متحرّک کندتر شروع به حرکت کند، پس از چند روز به آن می‌رسد؟

حل:

$$x_1 = x_2 \qquad \begin{cases} 6t_1 = 9t_2 \\ t_1 - t_2 = 4 \rightarrow t_1 = 4 + t_2 \end{cases}$$

$$V_1t_1 = V_2t_2$$

$$6(4 + t_2) = 9t_2 \quad , \quad t_2 = 8 \text{ روز} \quad , \quad t_1 = 12 \text{ روز}$$

درِ چهاردهم از فصل پنجم

در دانستن آن عدد که چون شش بکاهیم، او پنج برفزاییم جذرش باز آید.

اگر پرسند ما را کدام است آن عدد که چون پنج بر او

فزاییم، جذرش باز آید و چون شش ازو بکاهیم، جذرش بازآید؟

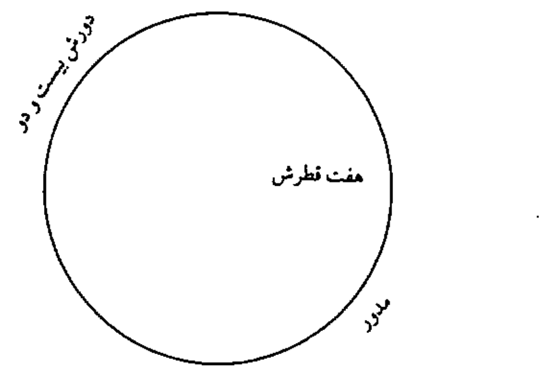
شمارش آن است که پنج و شش را گرد آوریم، یازده بود، یکی از او بکاهیم، مادام بماند ده، و به دو نیم کنیم، پنج بماند، در مثل خویش ضرب کنیم، برود بیست و پنج، پس شش را بر او بیفزاییم، سی و یک بود. این آن عدد است که چون پنج بر وی فزاییم، سی و شش گردد و جذرش باز آید، و چون شش از سی و یک بکاهیم، بیست و پنج بماند، و او آن عدد بود که جذرش باز آید.

و این کفایت است اندرین معنا.

درِ چهل و یکم از فصل ششم

در مساحت مدوّری اَو زمینی که بر آن کردار بود قطرش، اگر ما را مدوری باشد او زمینی مدوّر، و خواهیم که مساحت تکسیر سطحش کنیم، ضرب کنیم مساحت نصف قطر او را در مساحت نیمهٔ گردش او، آنچه حاصل آید از ضرب، مساحت جمله تکسیر سطحش بود.

مثالش: ما را زمینی بود مدوّر بر این کردار که قطرش هفت و گردش دورش بیست و دو بود. پس ضرب کردیم نیمهٔ قطر او را که سه و نیم است در یازده، که نیمهٔ گردش دور است، برفت سی و هشت و نیم. و این مساحت تکسیر سطح این مدوّر است.



وجهی دیگر: وگر به راهی دیگر خواهیم، ضرب کنیم قطرش را در مثل خویش، و از آن مبلغ که گرد آید سبع ونصف سبع او از او بیفکنیم، آنچه بماند، مساحت تکسیر آن مدوّر است.

مثالش: مرهمان مدوّر را که قطرش هفت بود و دورش بیست و دو، پس هفت را در مثل خویش ضرب کنیم برفت چهل و نه، سبع و نصف سبع او فراز گرفتیم ده و نیم بود. ازو فرو نهادیم، بماند سی و هشت و نیم، این مساحت تکسیر این مدوّر است.

وجهی دیگر: وگر به راهی دیگر خواهیم، ضرب کنیم ربع گردش دور او را در جمله قطرش، آنچه حاصل آید، مساحت تکسیر او بود.

مثالش: همان مدوّر را که قطرش هفت و دورش بیست و دو، ربع دورش فراز گرفتیم، پنج و نیم بود، ضرب کردیم در هفت که قطرش است برفت سی و هشت و نیم، این مساحت تکسیر این مدوّر است.

وجهی دیگر: وگر خواهیم، ضرب کنیم قطرش را در مثل خویش و آن مبلغ را ضرب کنیم در یازده، و جمله را ببخشیم بر چهارده، آنچه برود تکسیرش بود.

مثالش:مدوّر را که قطرش هفت بود، ضرب کردیم در مثل خویش برفت چهل و نه، پس در یازده ضرب کردیم برفت پانصد و سی و نه، ببخشیدیم بر چهارده، برفت سی و هشت و نیم، و این تکسیر این مدوّر است و این کفایت است.

وجهی دیگر: وگر خواهیم، ضرب کنیم قطر را در نیمه گردش دور، آنچه را برود، دو نیمه کنیم، آنچه بماند، تکسیر مدوّر بود.

وجهی دیگر: وگر خواهیم، ضرب کنیم قطرش را در دورش، و ببخشیم بر چهار، آنچه برود، تکسیرش بود، و این کفایت است اندرین معنا، والله المعین.[1]

۱ـ به جای شش روش بالا، امروزه از دستورالعمل زیر برای تعیین مساحت دایره استفاده می‌کنیم:

وجهی دیگر — قطر/۲ = شعاع — ۳/۱۴ × شعاع × شعاع = مساحت دایره

مثال: معین کنید مساحت دایره‌ای که قطرش ۷ متر باشد؟

۷/۲ = ۳/۵ متر = شعاع و ۳/۵ × ۳/۵ × ۳/۱۴ = ۳۸/۴۶۵ مترمربع = مساحت دایره

الگوریتمی برای گرافیکال بودن یک دنباله

● حمیدرضا امیری

نکات مهم در مورد دنبالهٔ درجهٔ رأسها

اگر دنبالهٔ نزولی $S : K_1 , K_2 , \ldots , K_n$ از اعداد صحیح نامنفی مفروضی باشد و بتوانیم متناظر با آنها گرافی چون G رسم کنیم که شامل n رأس $V_1 , \ldots , V_n$ باشد و اعداد K_1 تا K_n درجهٔ رأس‌های V_1 تا V_n باشند، به چنین دنباله‌ای یک **دنبالهٔ گرافیکال** می‌گوییم. ابتدا شرطهای لازم را برای گرافیکال بودن یک دنباله بیان کرده و سپس الگوریتمی را بیان می‌کنیم که می‌تواند به صورت یک شرط لازم و کافی به کار برده شود:

شرط ۱: اگر گراف G شامل n رأس باشد دنبالهٔ درجهٔ رأس‌های آن از n عدد صحیح نامنفی تشکیل خواهد یافت.

شرط ۲: با توجه به این که در یک گراف از مرتبهٔ P، حدّاکثر درجهٔ یک رأس $(P - 1)$ می‌تواند باشد، اگر دنبالهٔ درجهٔ رأس‌های گرافی از مرتبه P تشکیل شود، حداکثر عدد $(P - 1)$ در بین جمله‌های دنباله یافت خواهد شد.

شرط ۳: تعداد اعداد صحیح فرد در دنبالهٔ درجهٔ رأس‌های گراف G عددی زوج است.

شرط ۴: (قضیهٔ مهم)

«در هر گراف، از مرتبهٔ دلخواه $P \geq 2$ حدّاقل دو رأسِ هم‌درجه وجود دارد»؛ بنابراین در دنبالهٔ درجهٔ رأس‌های یک گراف، حدّاقل دو جمله از دنباله با هم برابر خواهند بود که البته این شرط و همهٔ شرط‌های فوق، شرط‌های لازم بوده و ممکن است یک دنباله از اعداد صحیح نامنفی، همهٔ شرایط مذکور را دارا باشد؛ ولی گرافیکال نباشد.

توسط الگوریتمی که در زیر بیان خواهد شد، شرطی لازم و کافی برای گرافیکال بودن یک دنباله بیان می‌کنیم.

قضیه: شرط لازم و کافی برای آن که دنبالهٔ نزولی از اعداد صحیح نامنفی $S : d_1 , d_2 , \ldots , d_p$ یک دنبالهٔ گرافیکال باشد، آن است که پس از طی مراحل الگوریتمی زیر، به دنبالهٔ صفر (همهٔ جمله‌ها صفر) برسیم:

۱. d_1 را حذف کرده و یک واحد از d_1 تا جملهٔ بعدی آن کم می‌کنیم.

۲. دنبالهٔ جدید را در صورت نیاز به شکل نزولی مرتّب کرده و طبق مرحلهٔ (۱) عمل می‌کنیم.

مثال: آیا دنبالهٔ $S : ۵ , ۵ , ۵ , ۳ , ۲ , ۲$ گرافیکال است؟

($d_1 = ۵$ را حذف کردیم) $S_1 : ۵ , ۵ , ۳ , ۲ , ۲$

(از ۵ جملهٔ بعدی ۱ واحد کم کردیم) S_2 : ۴ , ۴ , ۲ , ۱ , ۱

(d_1 = ۴ را حذف کردیم) S_3 : ۴ , ۲ , ۱ , ۱

(از ۴ جملهٔ بعدی ۱ واحد کم کردیم) S_4 : ۳ , ۱ , ۰ , ۰

(d_1 = ۳ را حذف کردیم) S_5 : ۱ , ۰ , ۰

(از ۳ جملهٔ بعدی ۱ واحد کم کردیم) S_6 : ۰ , −۱ , −۱

چون S_6 یک دنباله با جمله‌های منفی است، پس نمی‌تواند گرافیکال باشد؛ در نتیجه S گرافیکال نیست. (البته S_5 هم گرافیکال نبود؛ زیرا تعداد رأس‌های فرد در آن فرد بوده است. و در حالت کلّی در هر مرحله از مراحل الگوریتمی که یکی از شرط‌های لازم نقض شود، دنبالهٔ گرافیکال نیست.)

توجه دارید که دنبالهٔ S همهٔ شرط‌های لازم را دارا است؛ ولی گرافیکال نیست.

کدام دنباله گرافیکال است؟

۱) ۷ , ۶ , ۵ , ۴ , ۳ , ۲ , ۱ , ۰

۲) ۶ , ۵ , ۵ , ۳ , ۳ , ۲ , ۱

۳) ۵ , ۴ , ۴ , ۳ , ۲

۴) ۴ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱

حل: گزینهٔ «۴» صحیح است؛ زیرا:

در گزینهٔ «۱» هیچ دو رأس هم درجه وجود ندارد. در گزینهٔ «۲» تعداد رأس‌های فرد، فرد است و در گزینهٔ «۳»، ۵ رأس داریم که نمی‌توانیم درجهٔ از رأس ۵ نیز داشته باشیم.

S : ۴ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱

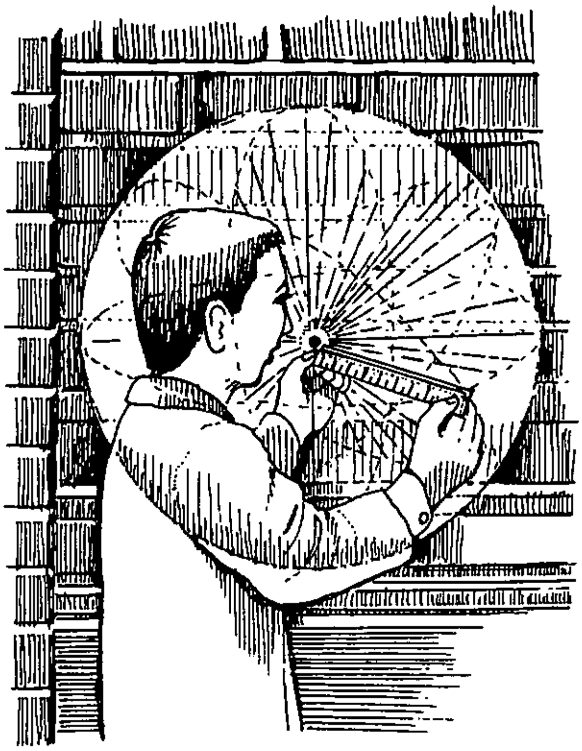
(d_1 = ۴ را حذف کردیم) S_1 : ۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱

(از ۴ جملهٔ بعدی ۱ واحد کم کردیم) S_2 : ۰ , ۰ , ۰ , ۰ , ۱ , ۱ , ۱

(نزولی مرتّب شد) S_3 : ۱ , ۱ , ۰ , ۰ , ۰ , ۰

(d_1 = ۱ را حذف کردیم) S_4 : ۱ , ۰ , ۰ , ۰ , ۰

(دنبالهٔ صفر است) S_5 : ۰ , ۰ , ۰ , ۰ , ۰



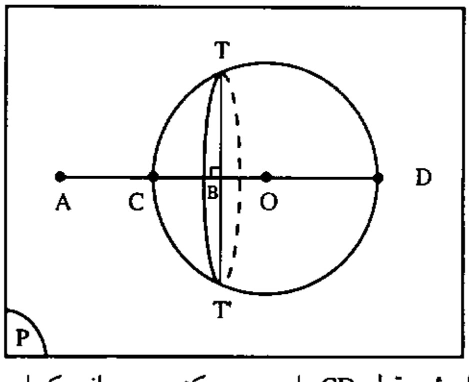
مکان هندسی (۲۵)

● محمدهاشم رستمی

کره آپولونیوس

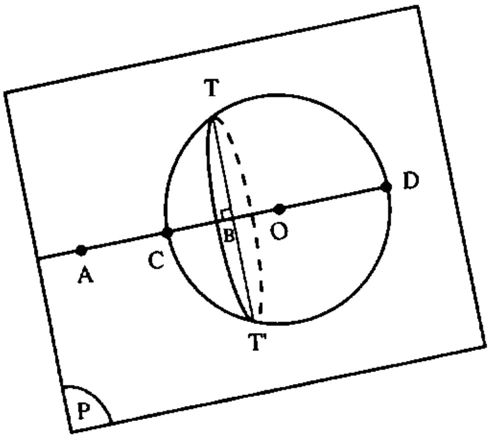
۱۲.۳. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت k است، کره‌ای است که قطرش، پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند.

اثبات به روش هندسی: صفحهٔ دلخواه P را که بر دو نقطهٔ ثابت A و B می‌گذرد، در نظر می‌گیریم و در این صفحه، روی پاره‌خط AB و در امتداد آن، دو نقطهٔ C و D را چنان اختیار می‌کنیم که پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم کنند.



سپس دایرهٔ به قطر CD را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که این دایره، مکان هندسی نقطه‌ای از صفحهٔ P است که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت k است. حال صفحهٔ P را حول خط AB دوران می‌دهیم. از دوران دایره به قطر CD واقع در این صفحه، که همواره و در هر وضعی از صفحهٔ P، مکان هندسی نقطه‌ای است که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر k است، کره‌ای به قطر CD پدید می‌آید که این کره، مکان هندسی نقطه‌ای از فضاست که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B، برابر مقدار ثابت k است.

اثبات به روش تحلیلی: دو نقطهٔ ثابت $A(x_1 , y_1 , z_1)$ و $B(x_2 , y_2 , z_2)$ را در دستگاه مختصات O ـ xyz در نظر می‌گیریم. اگر $M(x , y , z)$ یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر، یعنی نقطه‌ای باشد که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر k است، داریم:



$A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ و $M(x, y, z) \Rightarrow$

$$MA = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$$

$$MB = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2}$$

$$\frac{MA}{MB} = k \Rightarrow \frac{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}}{\sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2}} = k \Rightarrow$$

$$k^2(x-x_2)^2 + k^2(y-y_2)^2 + k^2(z-z_2)^2$$
$$= (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2$$

پس از ساده کردن معادلهٔ بالا، معادله‌ای به صورت:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2(x_1 - k^2x_2)}{k^2 - 1}x + \frac{2(y_1 - k^2y_2)}{k^2 - 1}y +$$
$$\frac{2(z_1 - k^2z_2)}{k^2 - 1}z + \frac{k^2(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1^2+y_1^2+z_1^2)}{k^2-1} = 0 \quad (1)$$

به دست می‌آید که معادلهٔ کره به مرکز نقطهٔ

$$O_1\left(\frac{k^2x_2 - x_1}{k^2 - 1}, \frac{k^2y_2 - y_1}{k^2 - 1}, \frac{k^2z_2 - z_1}{k^2 - 1}\right)$$

و به شعاع

$$R = \left|\frac{k}{k^2 - 1}\right| \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)}$$

است.

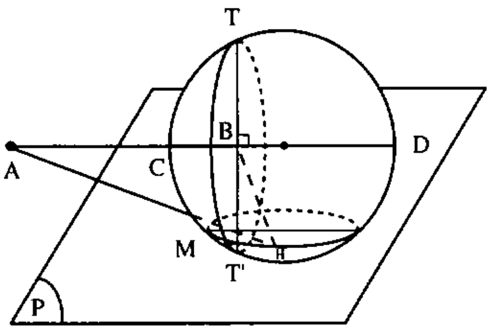
بدیهی است هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادله (۱) صدق کند، نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ برابر مقدار ثابت k است. در ضمن، به کمک یکی از رابطه‌های مربوط به تقسیم توافقی، به عنوان مثال به کمک رابطهٔ نیوتن، می‌توان ثابت کرد که قطر این کره، پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند. بنابراین، مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت k باشد، کره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند.

تبصره: اگر دستگاه مختصات دکارتی در فضا را چنان اختیار کنیم که نقطهٔ A منطبق بر مبدأ مختصات و $\overrightarrow{AB}$ بردار یکه محور xها باشد، در این صورت خواهیم داشت $A = (0, 0, 0)$ و $B = (1, 0, 0)$. حال اگر $M = (x, y, z)$ نقطه‌ای از مکان هندسی موردنظر باشد داریم:

$$\frac{MA}{MB} = k \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{(x - 1)^2 + y^2 + z^2}} = k \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2k}{k - 1}x + \frac{1}{k - 1} = 0$$

که معادلهٔ بالا یک کره به مرکز $\left(\frac{k}{k-1}, 0, 0\right)$ و به شعاع $R = \sqrt{\frac{k^2-k+1}{(k-1)^2}}$ را مشخص می‌کند.

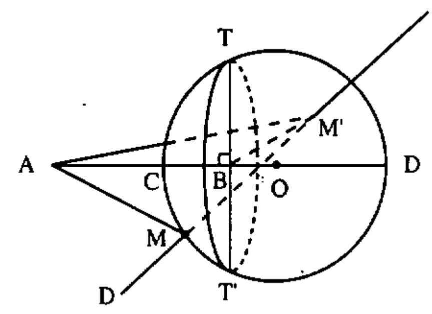


مثال ۱: صفحهٔ P و دو نقطهٔ A و B غیر واقع بر آن داده شده‌اند. مکان هندسی نقطه‌ای از صفحهٔ P را بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر مقدار ثابت k باشد.

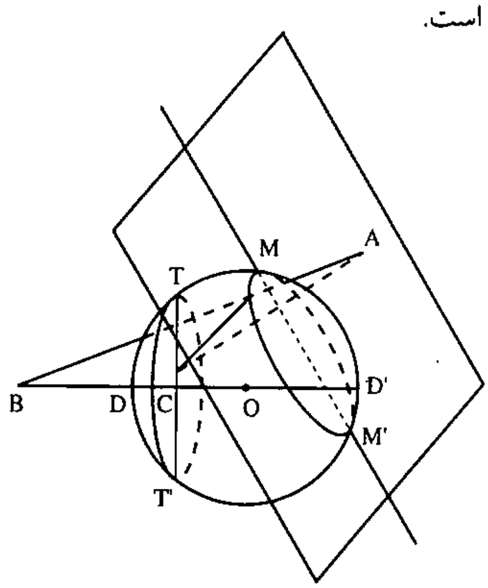
حل: می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B مقدار ثابت k باشد، کره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند. این کره را رسم می‌کنیم. فصل مشترک این کره با صفحهٔ P، جواب مسأله است. در صورتی که کره، صفحهٔ P را قطع کند، جواب مسأله یک دایره است و اگر کره بر صفحهٔ P مماس باشد، جواب مسأله یک نقطه (نقطهٔ تماس کره و صفحه) است، و اگر کره، صفحهٔ P را قطع نکند، مسأله دارای جواب نیست.

مثال ۲: خط D و دو نقطهٔ A و B غیر واقع در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط D بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر k باشد.

حل: مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر k است؛ یعنی کرهٔ به قطر CD را چنان که C و D پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم کنند، رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این کره با خط D، جواب مسأله است. مسأله حداکثر دو جواب دارد.



مثال ۳: سه نقطهٔ A ، B و C داده شده‌اند. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که از دو نقطهٔ A و C به یک فاصله است و نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت B و C برابر مقدار ثابت k است.



حل: مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو نقطهٔ A و C به یک فاصله است، صفحهٔ P عمودمنصف پاره‌خط AB است که این صفحه را رسم می‌کنیم. از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ B و C برابر k است؛ یعنی کرهٔ به قطر DD' (نقطه‌های D و D' پاره‌خط BC را به نسبت k تقسیم کرده‌اند) را نیز رسم می‌کنیم. فصل مشترک این کره، با صفحهٔ عمودمنصّف پاره‌خط AC ، جواب مسأله است.

مثال ۴: دو نقطهٔ $A(-1, 2, 0)$ و $B(3, -2, 1)$ داده شده است. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر $\sqrt{2}$ است.

حل. راه اوّل: با قرار دادن $(x_1 = -1 , y_1 = 2 , z_1 = 0)$، $(x_2 = 3 , y_2 = -2 , z_2 = 1)$ و $k = \sqrt{2}$ در معادلهٔ (۱) (معادلهٔ کرهٔ مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر k است)، معادلهٔ مکان هندسی موردنظر را به دست می‌آوریم. داریم:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2(-1-6)}{2-1}x + \frac{2(2+4)}{2-1}y + \frac{2(0-2)}{2-1}z + \frac{2(9+4+1)-(1+4+0)}{2-1} = 0$$

معادلهٔ مکان هندسی خواسته شده

$$\Rightarrow\ x^2 + y^2 + z^2 - 14x + 12y - 4z + 23 = 0$$

راه دوم: فرض می‌کنیم $M(x , y , z)$ یک نقطه از مکان هندسی موردنظر باشد. در این صورت داریم:

$$A(-1 , 2 , 0) \text{ و } B(3 , -2 , 1) \text{ و } M(x , y , z) \text{ و } k = \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$MA = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2} \quad \text{و}$$

$$MB = \sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{MA^2}{MB^2} = k^2 \Rightarrow \frac{(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2}{(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2} = 2 \Rightarrow$$

$$2(x-3)^2 + 2(y+2)^2 + 2(z-1)^2 = (x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2$$

معادلهٔ مکان هندسی خواسته شده

$$\Rightarrow\ x^2 + y^2 + z^2 - 14x + 12y - 4z + 23 = 0$$

مثال ۵: الف) معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ $A(2,0,-1)$ و $B(0,3,1)$ برابر $\sqrt{3}$ است.

ب) ثابت کنید که خط $D: \frac{x+1}{1} = \frac{y-\frac{9}{2}}{-2} = \frac{z-2}{2}$ از مرکز تقارن این مکان هندسی می‌گذرد.

پ) نقطه‌هایی از خط D را مشخص کنید که نسبت فاصله‌شان از دو نقطهٔ A و B برابر $\sqrt{2}$ باشد.

حل: الف) مکان هندسی خواسته شده، کره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند. معادلهٔ این کره به صورت زیر است:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2(x_1 - k^2x_2)}{k^2-1}x + \frac{2(y_1 - k^2y_2)}{k^2-1}y + \frac{2(z_1 - k^2z_2)}{k^2-1}z + \frac{k^2(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)}{k^2-1} = 0$$

$A(x_1 = 2 , y_1 = 0 , z_1 = -1)$ و $B(x_2 = 0 , y_2 = 3 , z_2 = 1)$

و $k = \sqrt{3} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2(2-0)}{3-1} x + \frac{2(0-9)}{3-1} y + \frac{2(-1-3)}{3-1} z + \frac{3(0+9+1)-(4+0+1)}{3-1} = 0$

معادلهٔ کرهٔ مکان‌هندسی موردنظر

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 9y - 4z + \frac{25}{2} = 0$$

ب) مرکز کرهٔ بالا نقطهٔ $O_1(-1 , \frac{9}{2} , 2)$ است که مختصاتش در معادلهٔ خط D صدق می‌کند. پس خط D از مرکز کره می‌گذرد.

پ) نقطهٔ برخورد خط D و کرهٔ مکان هندسی بالا را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 9y - 4z + \frac{25}{2} = 0 \\ \frac{x+1}{1} = \frac{y - \frac{9}{2}}{-2} = \frac{z-2}{2} = t \Rightarrow x = t-1 , y = -2t + \frac{9}{2} , z = 2t+2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (t-1)^2 + (-2t + \frac{9}{2})^2 + (2t+2)^2 + 2(t-1) - 9(-2t + \frac{9}{2}) - 4(2t+2) + \frac{25}{2} = 0$$

$$\Rightarrow 9t^2 = \frac{51}{4} \Rightarrow t^2 = \frac{51}{36} \Rightarrow t = \pm \frac{\sqrt{51}}{6}$$

$$\Rightarrow M_1 (\frac{\sqrt{51}}{6} - 1 , \frac{-\sqrt{51}}{3} + \frac{9}{2} , \frac{\sqrt{51}}{3} + 2)$$

$$M_2 (\frac{-\sqrt{51}}{6} - 1 , \frac{\sqrt{51}}{3} + \frac{9}{2} , \frac{-\sqrt{51}}{3} + 2)$$

مثال ۶: دو نقطهٔ $A(-1 , 2 , 1)$ و $B(3 , -1 , 1)$ در دستگاه مختصات O ـ xyz داده شده‌اند. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از صفحهٔ xOy را پیدا کنید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر ۲ است.

حل: معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر ۲ است، تعیین می‌کنیم و فصل مشترک آن، با صفحهٔ xOy به معادلهٔ $z = 0$ را به دست می‌آوریم:

$A(-1 , 2 , 1)$ و $B(3 , -1 , 1)$ و $M(x , y , z) , k = 2 \Rightarrow$

$$MA = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2}$$

$$MB = \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2}$$

$$\frac{MA}{MB} = 2 \Rightarrow \frac{MA^2}{MB^2} = 4 \Rightarrow MA^2 = 4MB^2 \Rightarrow$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4(x-3)^2 + 4(y+1)^2 + 4(z-1)^2$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 26x + 12y - 6z + 38 = 0$$

معادلهٔ کرهٔ مکان هندسی

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - \frac{26}{3} x + 4y - 2z + \frac{38}{3} = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - \frac{26}{3} x + 4y - 2z + \frac{38}{3} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

معادلهٔ مکان هندسی خواسته شده

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{26}{3} x + 4y + \frac{38}{3} = 0$$

تفریح اندیشه

همهٔ مقادیر x را چنان بیابید که به ازای آنها، عبارت زیر عددی حقیقی باشد:

$$z = [-x + 10 + (x+2)i] (x - i)$$

جواب: ۲ و ۵-

حل: اول، z را به صورت $a + bi$ می‌نویسیم. درثانی، برای حقیقی بودن z، باید b برابر صفر باشد؛ بنابراین جمیع مقادیر برقرار کنندهٔ این شرط را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} z &= [-x + 10 + (x+2)i] (x - i) \\ &= -x^2 + 10x + (x^2 + 2x)i + xi - 10i + (x+2) \\ &= (-x^2 + 10x + x + 2) + (x^2 + 2x + x - 10)i \\ &= (-x^2 + 11x + 2) + (x^2 + 3x - 10)i \end{aligned}$$

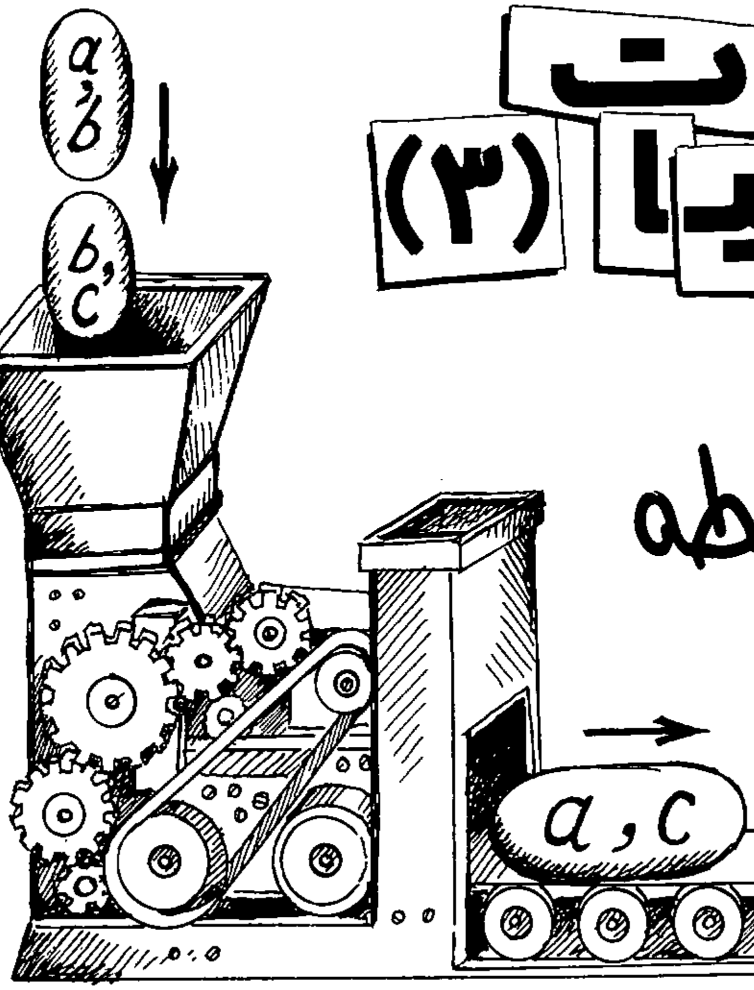
برای حقیقی بودن z، باید جزء موهومی آن برابر صفر باشد:

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

یا

$$(x-2)(x-5) = 0$$

$$x_1 = 2 \quad , \quad x_2 = -5$$



ترکیبات (۳)

ترکیب دو رابطه

● میرشهرام صدر

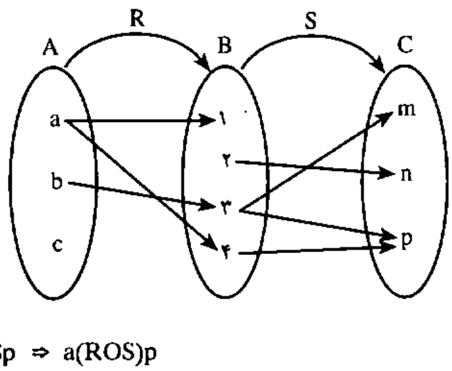
فرض کنیم R رابطه‌ای از A در B و S رابطه‌ای از B در C باشد؛ رابطهٔ مرکب ROS را از A به C، به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که اگر x(ROS)Z، آن گاه $y \in B$ موجود باشد؛ به طوری که xRy و ySz یعنی داریم:

$ROS = \{(x, z) \mid (x, y) \in R, (y, z) \in S$ به‌طوری که $y \in B$، وجود داشته باشد$\}$

تذکرمهم: برای نوشتن رابطهٔ ROS ابتدا زوج‌های مرتّب رابطهٔ R، سپس زوج‌های مرتّب رابطهٔ S را در نظر می‌گیریم، این درست بعکس عملی است که در حسابان (بخش توابع) روی ترکیب دو تابع انجام می‌دهیم.

مثال: مجموعه‌های $A = \{a, b, c\}$، $B = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و $C = \{m, n, p\}$ را در نظر بگیرید، فرض کنید $R = \{(a, ۱), (b, ۳), (a, ۴)\}$ رابطه‌ای از A در B و $S = \{(۴, p), (۳, m), (۲, n), (۳, p)\}$ رابطه‌ای از B در C باشد؛ رابطهٔ مرکب ROS را مشخص کنید.

حل: برای درک بهتر حلّ مسأله، ابتدا نمودار پیکانی رابطه‌ها را رسم می‌کنیم، سپس ROS را به کمک آن مشخص می‌کنیم.



$aR۴, ۴Sp \Rightarrow a(ROS)p$

$bR۳, ۳Sm \Rightarrow b(ROS)m$

$bR۳, ۳Sp \Rightarrow b(ROS)p$

در نتیجه داریم:

$ROS = \{(a, p), (b, m), (b, p)\}$

مثال: فرض کنید $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{a, b, c\}$ و $C = \{x, y, z\}$ رابطهٔ R را از A به B و رابطهٔ S را از B به C به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

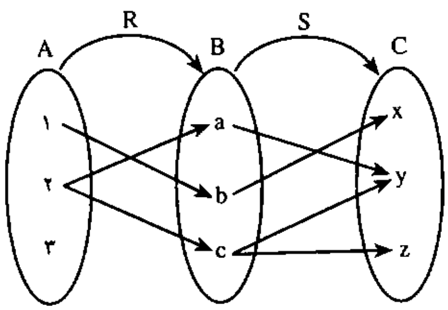
$R = \{(1, b), (2, a), (2, c)\}$

$S = \{(a, y), (b, x), (c, y), (c, z)\}$

الف) رابطهٔ مرکب ROS را بنویسید.

ب) ماتریس‌های متناظر با رابطه‌های R ، S و ROS یعنی M_R ، M_S و M_{ROS} را مشخص و سپس M_{ROS} را با $M_R \times M_S$ مقایسه کنید. ($M_R \times M_S$ ضرب دو ماتریس با استفاده از اعمال بولی است.)

حل: الف) ابتدا نمودار پیکانی رابطه‌ها را رسم می‌کنیم، سپس به کمک آن، رابطهٔ ROS را مشخص می‌کنیم.



$1Rb\ ,\ bSx \Rightarrow 1(ROS)x$

$2Ra\ ,\ aSy \Rightarrow 2(ROS)y$

$2Rc\ ,\ cSy \Rightarrow 2(ROS)y$

$2Rc\ ,\ cSz \Rightarrow 2(ROS)z$

در نتیجه داریم:

$ROS = \{(1, x), (2, y), (2, z)\}$

ب) با استفاده از رابطه‌های R ، S و ROS ، ماتریس‌های متناظر با آنها را تشکیل می‌دهیم:

$$M_R = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\ ;\ M_S = \begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline a & 0 & 1 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1 & 1 \end{array}\ ;\ M_{ROS} = \begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

اکنون به کمک اعمال بولی $M_R \times M_S$ را محاسبه می‌کنیم:

$$M_R \times M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

با مقایسهٔ M_{ROS} و $M_R \times M_S$ ملاحظه می‌کنیم که:

$M_{ROS} = M_R \times M_S$

قضیه (۱): اگر A ، B و C سه مجموعه به ترتیب دارای m ، n و k عضو باشند و R رابطه‌ای از A در B و S رابطه‌ای از B در C باشد و $M_R = [a_{ij}]_{n \times m}$ و $M_S = [b_{ij}]_{m \times k}$ به ترتیب ماتریس‌های متناظر با R و S باشند، ثابت کنید: $M_{ROS} = M_R \times M_S$

برهان: فرض کنیم درایه ijام ماتریس M_{ROS} برابر ۱ باشد؛ یعنی: $i(ROS)j$ در این صورت عضوی مانند $r \in B$ موجود است؛ به طوری که iRr و rSj ؛ یعنی: $a_{ir} = 1$ و $b_{rj} = 1$ ، پس $a_{ir} \odot b_{rj} = 1$ ؛ بنابراین یکی از جمع‌وندهای درایه ijام ماتریس $M_R \times M_S$ برابر با ۱ است، در نتیجه درایه ijام ماتریس $M_R \times M_S$ برابر با ۱ است. بعکس فرض کنیم درایه ijام ماتریس $M_R \times M_S$ برابر ۱ باشد، در این صورت داریم:

$$a_{i1} \odot b_{1j} \dotplus a_{i2} \odot b_{2j} \dotplus \dots \dotplus a_{im} \odot b_{mj} = 1$$

بنابراین حدّاقل یک $1 \le r \le m$ موجود است؛ به طوری که $a_{ir} \odot b_{rj} = 1$ ، پس $a_{ir} = 1$ و $b_{rj} = 1$ یعنی: iRr و rSj ، بنابراین $i(ROS)j$ ، در نتیجه درایه ijام ماتریس M_{ROS} برابر ۱ است.

ترکیب رابطهٔ R با خودش (ROR)

فرض کنیم R رابطه‌ای روی مجموعهٔ A باشد، ترکیب رابطهٔ R با خودش روی مجموعهٔ A همواره قابل تعریف است و آن را با نماد ROR نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$a(ROR)b$ هر گاه وجود داشته باشد $C \in A$ ؛ به طوری که aRc و cRb ، یعنی داریم:

ROR = {(a , b) | (a , c) ∈ R ، (c , b) ∈ R به طوری که c ∈ A وجود داشته باشد}

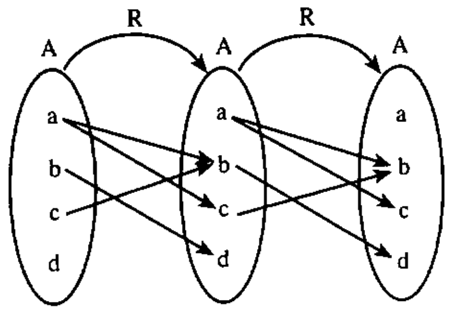
تذکر: رابطهٔ ROR را می‌توان با نماد R^2 نمایش داد.

تعمیم: فرض کنید R یک رابطه روی مجموعهٔ A باشد؛ در این صورت می‌توان رابطهٔ R^3 را روی A به صورت $R^3 = R^2OR = (ROR)OR$ محاسبه کرد. به همین ترتیب، برای هر $n \in \mathbb{N}$ رابطهٔ R^n روی A به صورت زیر به دست می‌آید:

$R^n = R^{n-1}OR$

مثال: فرض کنیم $A = \{a,b,c,d\}$ و $R = \{(a,b),(a,c),(b,d),(c,b)\}$ رابطه‌ای روی A باشد، رابطه‌های ROR و ROROR را مشخص کنید.

ابتدا نمودار پیکانی رابطه‌ها را مشخص می‌کنیم، سپس به کمک آن مسأله را حل می‌کنیم:



$aRb\ ,\ bRd \Rightarrow a(ROR)d$

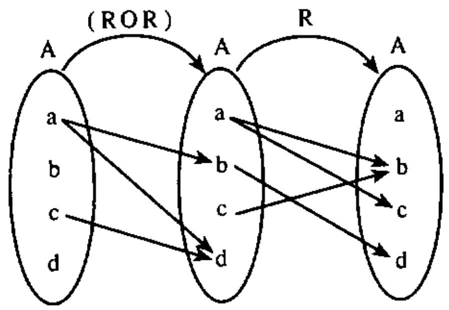
$aRc\ ,\ cRb \Rightarrow a(ROR)b$

$cRb\ ,\ bRd \Rightarrow c(ROR)d$

در نتیجه داریم:

$ROR = \{(a\ ,\ d)\ ,\ (a\ ,\ b)\ ,\ (c\ ,\ d)\}$

برای محاسبهٔ رابطه RORОR از برابری $ROROR=(ROR)OR$ استفاده می‌کنیم.



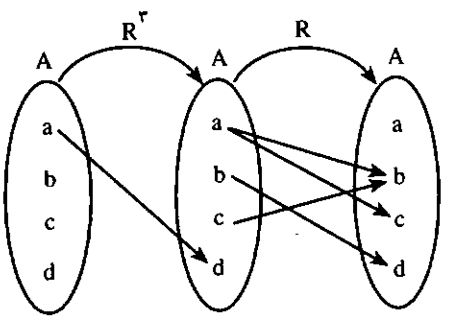
$a(ROR)b\ ,\ bRd \Rightarrow a((ROR)OR)d$

در نتیجه داریم:

$ROROR = (ROR)OR = R^3 = \{(a\ ,\ d)\}$

مثال: در مثال قبل، ملاحظه می‌کنیم که برای هر $n \geq 4$ ، رابطهٔ R^n برابر با مجموعه تهی است. برای مثال، برای $n = 4$ خواهیم داشت:

$R^4 = R^3OR$



با توجه به نمودار بالا ملاحظه می‌کنیم که $R^4 = \phi$.

مثال: فرض‌کنید $A=\{2,3,4\}$ و $R=\{(a,b)|a,b\in A\ ,(a,b)=1\}$ رابطه‌ای روی A باشد،

الف) رابطهٔ ROR را مشخص کنید.

ب) M_{ROR} و $(M_R)^2$ را مشخص کنید، سپس آنها را با یکدیگر مقایسه کنید.

حل: الف) ابتدا رابطهٔ R را مشخص می‌کنیم. منظور از $(a,b)=1$، یعنی این که بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد a و b برابر با ۱ است؛ در این حالت، می‌گوییم دو عدد a و b نسبت به هم اوّلند یا متباین هستند:

$R = \{(2\ ,\ 3)\ ,\ (3\ ,\ 2)\ ,\ (3\ ,\ 4)\ ,\ (4\ ,\ 3)\}$

با توجه به تعریف رابطهٔ ROR داریم:

$ROR = \{(2\ ,\ 2)\ ,\ (2\ ,\ 4)\ ,\ (3\ ,\ 3)\ ,\ (4\ ,\ 2)\ ,\ (4\ ,\ 4)\}$

ب)

$$M_{ROR} = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$(M_R)^2$ را با استفاده از اعمال بولی محاسبه می‌کنیم:

$$(M_R)^2 = M_R \times M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

با مقایسهٔ M_{ROR} و $(M_R)^2$ ملاحظه می‌کنیم که $M_{ROR}=(M_R)^2$.

قضیه (۲): هرگاه R یک رابطه روی مجموعه n عضوی A باشد و M_R ماتریس متناظر با این رابطه باشد، ثابت کنید:

الف) $M_R = [0]_{n\times n}$ اگر و تنها اگر $R = \phi$

ب) $M_R = [1]_{n\times n}$ اگر و تنها اگر $R = A\times A$

ج) $M_{ROR} = (M_R)^2$

برهان: الف) فرض کنیم $M_R = [0]_{n\times n}$، در نتیجه برای هر $a,b \in A$ داریم: $a\not Rb$ ؛ بنابراین $R = \phi$.

بعکس: فرض کنیم $R = \phi$، در نتیجه برای هر $a\ ,\ b\in A$ داریم: $a\not Rb$ ، پس همهٔ درایه‌های ماتریس M_R برابر صفر هستند؛ بنابراین $M_R = [0]_{n\times n}$.

ب) فرض کنیم $M_R = [1]_{n\times n}$، در نتیجه برای هر $a\ ,b\in A$ داریم: aRb ؛ پس $R = A\times A$.

بعکس: فرض کنیم $R = A\times A$، در نتیجه برای هر $a,b\in A$ داریم: aRb، پس همگی درایه‌های ماتریس M_R برابر ۱ است؛ بنابراین $M_R = [1]_{n\times n}$.

ج) با فرض $M_R = M_S$ در قضیهٔ (۱) ، برهان را به عهدهٔ خواننده واگذار می‌کنیم.

نتیجه: فرض کنیم A یک مجموعه‌ای n عضوی و R رابطه‌ای روی A باشد. M_R ماتریس متناظر با این رابطه باشد؛ در این صورت، برای هر $m \in \mathbb{N}$ داریم: $M_{R^m} = (M_R)^m$؛ یعنی:

$$M_{\underbrace{RORO\ldots OR}_{m\ \text{مرتبه}}} = (M_R)^m$$

برهان: با استفاده از اصل استقرای ریاضی روی m داریم:

$$m = 1 : M_{R^1} = (M_R)^1 \Rightarrow M_R = M_R$$

$$m = k : M_{R^k} = (M_R)^k$$

$$m = k + 1 : M_{R^{k+1}} = (M_R)^{k+1}$$

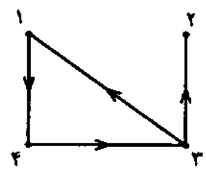
می‌دانیم $R^{k+1} = R^k OR$ و در قضیهٔ (۱) ملاحظه کردیم که $M_{ROS} = M_R \times M_S$؛ بنابراین:

$$M_{R^{k+1}} = M_{R^k OR} = M_{R^k} \times M$$
$$= (M_R)^k \times M_R \qquad \text{(طبق فرض استقرا)}$$
$$= (M_R)^{k+1}$$

در نتیجه، حکم برای هر $m \in \mathbb{N}$ برقرار است.

تذکر: فرض کنیم R یک رابطه روی مجموعهٔ n عضوی A باشد، برای محاسبهٔ رابطهٔ ROR(یا R^m، $m \in \mathbb{N}$) بهتر است ابتدا ماتریس $(M_R)^2$(یا $(M_R)^m$) را با استفاده از اعمال بولی محاسبه کنیم، سپس با استفاده از برابری $M_{ROR} = (M_R)^2$ (یا $M_{R^m} = (M_R)^m$) آن رابطه را بنویسیم.

مثال: گراف جهت‌دار زیر، متناظر با رابطهٔ R روی مجموعهٔ $A = \{1,2,3,4\}$ است. رابطه‌های ROR، R^3، R^4 و R^9 را مشخص کنید.



حل: ابتدا رابطهٔ متناظر با گراف جهتدار را می‌نویسیم:

$$R = \{(1,4),(3,1),(3,2),(4,3)\}$$

سپس متناظر با رابطهٔ R، ماتریس M_R را می‌نویسیم:

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

برای محاسبهٔ رابطهٔ ROR از رابطهٔ $M_{ROR} = (M_R)^2$ استفاده می‌کنیم:

$$(M_R)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= M_{ROR}$$

در نتیجه داریم:

$$ROR = \{(1,3),(3,4),(4,1),(4,2)\}$$

اکنون برای محاسبهٔ R^3 از رابطهٔ $M_{R^3} = (M_R)^3$ استفاده می‌کنیم:

$$M_{R^3} = M_{R^2} \times M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در نتیجه داریم:

$$R^3 = \{(1,1),(1,2),(3,3),(4,4)\}$$

برای محاسبهٔ R^4 از رابطهٔ $M_{R^4} = (M_R)^4$ استفاده می‌کنیم:

$$M_{R^4} = M_{R^3} \times M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = M_R$$

ملاحظه می‌کنیم که $M_{R^4} = M_R$، بنابراین داریم:

$$R^4 = R = \{(1,4),(3,1),(3,2),(4,3)\}$$

برای محاسبهٔ R^9 از رابطهٔ $R^4 = R$ استفاده می‌کنیم:

$$R^9 = R^8 OR = (R^4 OR^4)\ OR = (ROR)\ OR = R^3$$

در نتیجه داریم:

$$R^9 = R^3 = \{(1,1),(1,2),(3,3),(4,4)\}$$

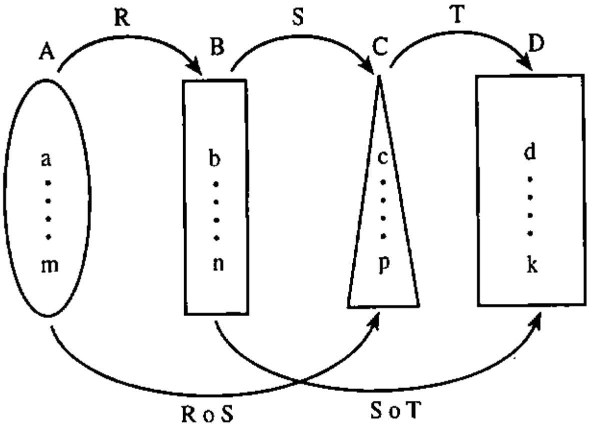
قضیه (۳): فرض کنیم A، B، C و D چهار مجموعه باشند، R رابطه‌ای از A در B، S رابطه‌ای از B در C و T رابطه‌ای از C در D باشد؛ ثابت کنید عمل ترکیب رابطه‌ها به صورت زیر خاصیت شرکت‌پذیری دارد:

$$(ROS)OT = RO(SOT)$$

برهان: برای اثبات برابری حکم، ثابت می‌کنیم که $(ROS)OT \subseteq RO(SOT)$ همچنین ثابت می‌کنیم که:

$$RO(SOT) \subseteq (ROS)OT$$

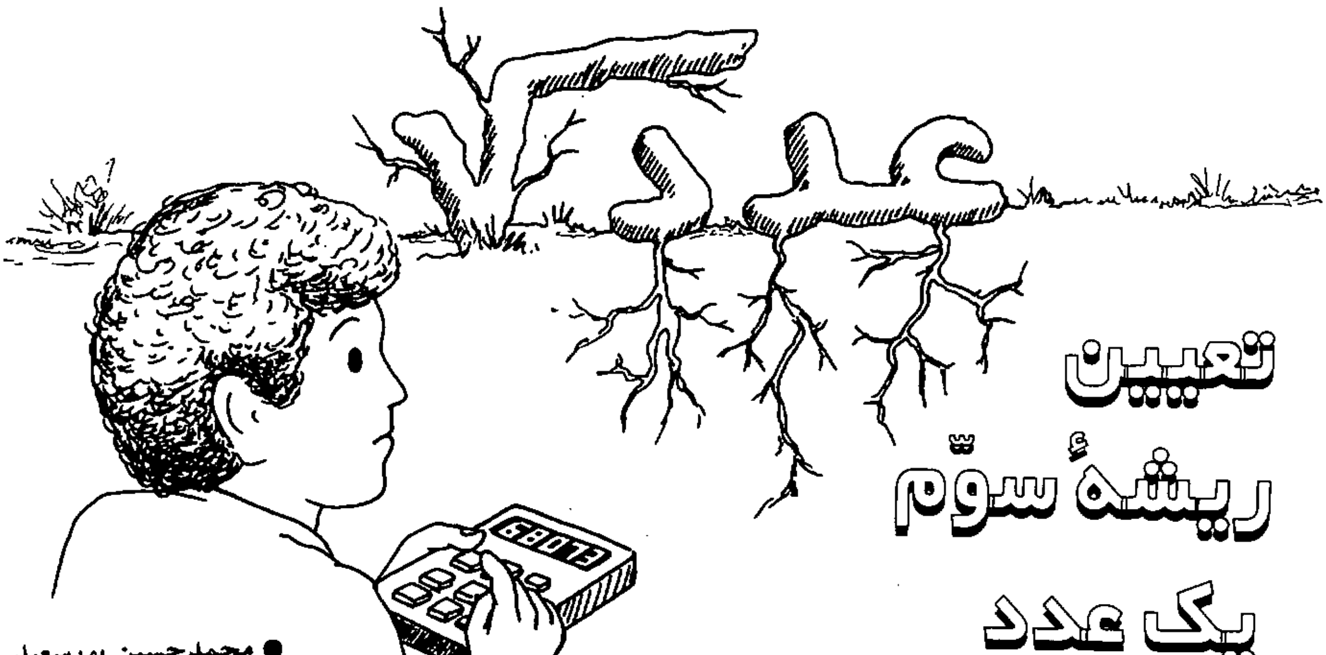
فرض کنیم $(a\ ,\ d) \in (ROS)OT$، بنابراین $c \in C$ ای



موجود است؛ به طوری که $(a , c) \in (ROS)$ و $(c, d) \in T$ چون $(a,c)\in(ROS)$، بنابراین $b\in B$ ای موجود است؛ به طوری که $(a , b) \in R$ و $(b , c) \in S$.

از این که $(b , c) \in S$ و $(c , d) \in T$ نتیجه می‌گیریم که $(b , d) \in (SOT)$ و چون $(a , b) \in R$ در نتیجه داریم: $(a , d) \in RO(SOT)$؛ بنابراین $(ROS)OT \subseteq RO(SOT)$ به همین ترتیب، به‌طور مشابه با عضوگیری می‌توان ثابت کرد که $RO(SOT) \subseteq (ROS)OT$. در نتیجه: $(ROS)OT = RO(SOT)$.

برای بررسی دقیق‌تر خواص رابطه‌ها به کمک ماتریس‌های ۰ و ۱؛ علاوه بر اعمال بولی، نیاز به معرفی چند تعریف داریم، تا به کمک این تعریف‌ها، قضیه‌هایی را مطرح کنیم.



تعیین ریشهٔ سوّم یک عدد

● محمدحسین پورسعید
گروه ریاضی دانشگاه لرستان

مقدمه: ریشهٔ سوّم یک عدد را می‌توان با استفاده از ماشین حساب تعیین کرد؛ با این حال، در راستای تعمیم و انتقال مفاهیم ریاضی، این مطلب ارائه می‌شود.

ابتدا الگوی تعیین دو رقم سمت چپ ریشهٔ سوّم یک عدد را توضیح داده تا با توجه به آن، بتوان روش محاسبهٔ ریشهٔ سوّم را در حالت کلی تشخیص داد. بنابراین فرض می‌کنیم با داشتن مکعب عددی دو رقمی، می‌خواهیم آن عدد را بیابیم. هر عدد دو رقمی را می‌توان به صورت $(10a+b)$ در نظر گرفت؛ به طوری که b رقم یکان و a رقم دهگان آن است. جهت تشخیص ارتباط بین یک عدد دو رقمی و مکعب آن داریم:

$$(10a+b)^3 = 1000a^3 + 300a^2b + 30ab^2 + b^3$$
$$= 1000a^3 + [3((10a)^2 + (10a)b) + b^2]b$$

حال با توجه به روند جذرگیری (ر.ک.[۱]) و عبارت بالا،

می‌توان روش محاسبهٔ ریشهٔ سوّم یک عدد را در حالت کلی تشخیص و توضیح داد:

شبیه عمل جذرگیری، از نماد ریشهٔ سوّم استفاده کرده و عدد موردنظر را در موقعیت مربوطه قرار می‌دهیم و سپس از سمت راست آن سه رقم، سه رقم دسته‌های سه رقمی را جدا می‌کنیم. آخرین دسته را که حدّاکثر دارای سه رقم است، در نظر گرفته، بزرگترین عدد طبیعی یک رقمی (مثلاً a) را به گونه‌ای می‌یابیم که توان سوّم آن (a^3) کمتر یا مساوی عدد واقع در آخرین دسته باشد که در این صورت a اوّلین رقم سمت چپ ریشهٔ سوّم آن عدد است. با قرار دادن عدد a در جای مربوطه، a^3 را از عدد واقع در آخرین دسته کسر می‌کنیم و سپس سه رقم دستهٔ بعدی را در سمت راست باقیمانده قرار داده و عدد حاصله را به عنوان عدد c در نظر می‌گیریم. حال اگر بزرگترین عدد حسابی یک رقمی (مثلاً b) را به گونه‌ای بیابیم که حاصل عبارت $[3((10a)^2 + (10a)b) + b^2]b$ کمتر یا مساوی c باشد، در این صورت b دومین رقم ریشه سوّم خواهد بود. به همین ترتیب و شبیه عمل جذرگیری، می‌توان ارقام بعدی ریشهٔ سوّم را تعیین کرد.

به عنوان مثال، طبق دستورالعمل فوق و مرحله به مرحله ریشهٔ سوّم ۶۸۰۷۳ را تا دو رقم اعشار می‌یابیم. ابتدا آن را به صورت ۶۸۰۷۳/۰۰۰۰۰۰ در نظر می‌گیریم:

(۱)

∛۶۸۰۷۳/۰۰۰۰۰۰ | ۴
۶۴
۴

(۲)

∛۶۸۰۷۳/۰۰۰۰۰۰ | ۴
$[3(10\times 4)^2 + (10\times 4)(0) + (0)^2](0) = 0$
۶۴
۴۰۷۳
۰
۴۰۷۳

(۳)

∛۶۸۰۷۳/۰۰۰۰۰۰ | ۴۰
$[3(10\times 40)^2 + (10\times 40)(8) + (8)^2](8) = 3917312$
۶۴
۴۰۷۳
۰
۴۰۷۳۰۰۰
۳۹۱۷۳۱۲
۱۵۵۶۸۸

(۴)

∛۶۸۰۷۳/۰۰۰۰۰۰ | ۴۰/۸
$[3(10\times 408)^2+(10\times 408)(3)+(3)^2](3) = 149927787$
۶۴
۴۰۷۳
۰
۴۰۷۳۰۰۰
۳۹۱۷۳۱۲
۱۵۵۶۸۸۰۰۰
۱۴۹۹۲۷۷۸۷
۵۷۶۰۲۱۳

(۵)

∛۶۸۰۷۳/۰۰۰۰۰۰ | ۴۰/۸۳
...
⋮
۵/۷۶۰۲۱۳

بنابراین مقدار ریشهٔ سوّم ۶۸۰۷۳ تا دو رقم اعشار، برابر است با ۴۰/۸۳ و برای امتحان درستی محاسباتی که انجام داده‌ایم داریم:

$(40/83)^3 + 5/760213 = 68073$

مراجع

[۱]. ریاضی سال سوّم دورهٔ راهنمایی تحصیلی چاپ ۱۳۷۷.

مسأله مسابقه‌ای

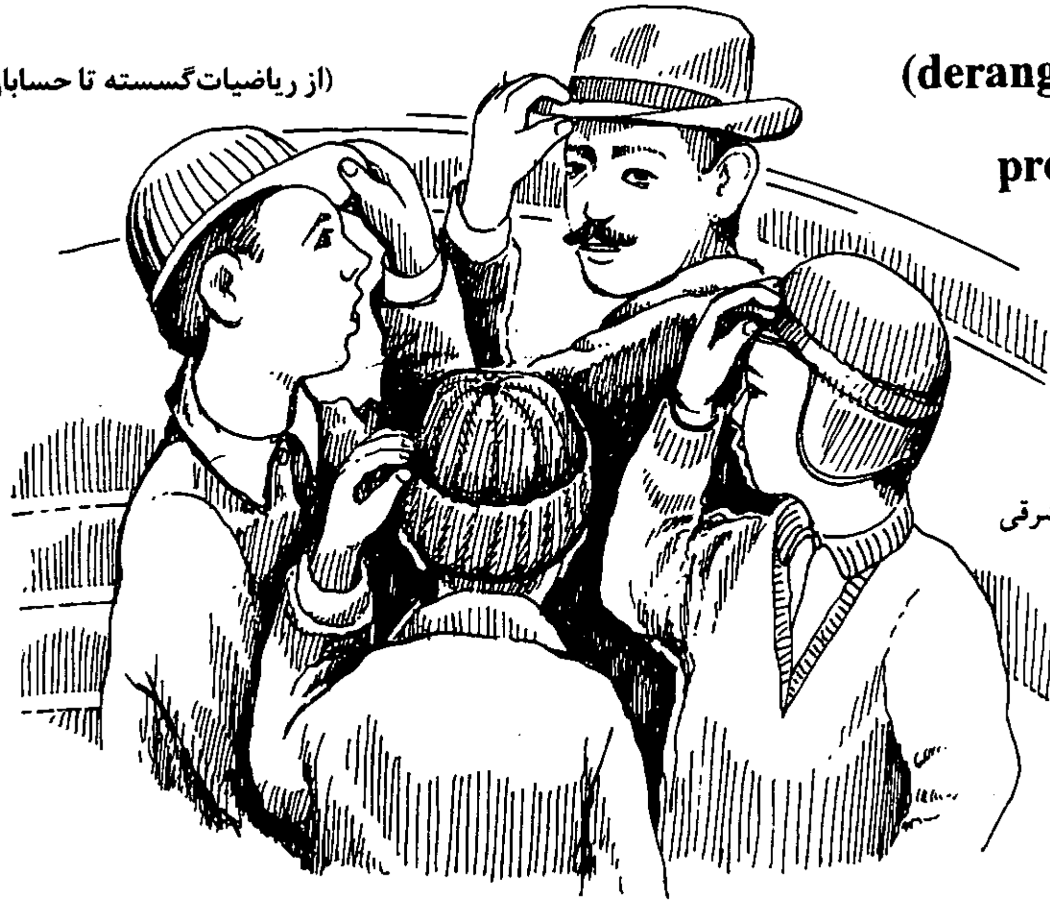
برهان ۳۶

در پاسخگویی به سؤال‌های یک مسابقه که پاسخ هر سؤال محدود به «بله» و «خیر» است، احتمال آن که پاسخ استاد صحیح باشد، بیشتر از ۵۰٪ و احتمال آن که دانشجوی پسر پاسخ صحیح بدهد، کمتر از ۵۰٪ و معادل است با احتمال آن که دانشجوی دختر پاسخ نادرست بدهد. همچنین احتمال آن که پاسخ دانشجویی که تصادفی انتخاب شده است، با پاسخ استاد یکسان باشد، برابر با $\frac{1}{2}$ است. ثابت کنید عدهٔ دانشجویان پسر و دختر برابر است.

مسأله پریش ها

(derangement problem)

(از ریاضیات گسسته تا حسابان)



● هوشنگ شرقی

چرا هیچ کس سرجای خودش نیست؟

آن صبح آفتابی در کودکستان، هیچ تفاوتی با روزهای قبل نداشت. اوّل صبح، طبق معمول، بچه‌ها به ترتیب قد از کوتاه تا بلند، با نظمی که ماه‌ها به آن عادت داشتند، به صف ایستادند و پس از خواندن سرود صبحگاهی، برای بازی و ورزش، در حیاط کودکستان و لابه‌لای درختان پراکنده شدند، اما هنگامی که خانم مربی در نیمهٔ صبح، سر ساعت مقرّر، زنگ دریافت خوراک صبح را به صدا درآورد تا بچه‌ها دوباره به صف بایستند، متوجه نکتهٔ عجیبی شد که نزدیک بود چشم‌هایش از حدقه دربیایند! به چهره‌های خندان و پرشیطنت بچه‌ها نگاه کرد؛ گویی همه با هم از قبل تبانی کرده بودند تا خانم مربی را اذیّت کنند و او را عصبانی کنند. آری هیچ کس، حتی یک نفر سرجای خودش نایستاده بود!

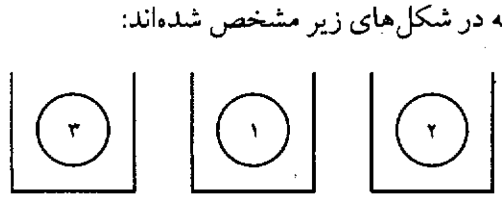
مربی برای یک لحظه، به شدت ناراحت شد و لجش گرفت؛ ولی ناگهان به فکر فرو رفت. چه قدر احتمال دارد که بچه‌ها همین جوری اتفاقی و بدون هماهنگی قبلی، این‌طور به صف ایستاده باشند؟

مسأله‌ای که می‌خواهیم به آن بپردازیم، همین است؛ اگر n کودک در یک صف بایستند یا به طور کلی n شیء که هر یک جای به خصوص دارند،تصادفی جایگذاری شوند، چه‌قدر احتمال دارد که هیچ کدام سر جای خود نباشند؟ برای محاسبهٔ احتمال یک پیشامد تصادفی، به خوبی می‌دانید که باید دو مقدار، یعنی تعداد اعضای فضای نمونه و تعداد

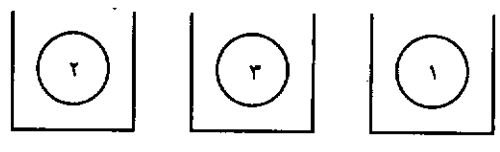
اعضای پیشامد تصادفی، مشخص شوند. در این گونه مسائل، تعداد اعضای فضای نمونه، به سادگی مشخص می‌شود، چرا که تعداد تمام جایگشت‌های n شیء در یک ردیف (به عنوان مثال، تعداد روش‌های مختلف ایستادن n کودک در یک صف) مساوی !n است. بنابراین اجازه دهید مسأله را اندکی محدودتر کنیم به این مسأله: به چند طریق می‌توان n شیء را در n مکان (هر یک از اشیای متعلق به یکی از مکان‌هاست) قرار داد؛ به قسمی که هیچ یک از اشیا سرجای خود نباشند؟

پاسخ به این سؤال را از حالت‌های خاص و ساده شروع کنیم. فرض کنیم دو توپ فوتبال با شماره‌های ۱ و ۲ داریم. به چند طریق می‌توان این دو توپ را در دو جعبه با شماره‌های ۱ و ۲ قرار داد؛ به قسمی که هیچ یک از دو توپ، سرجای خودشان (در جعبهٔ هم شماره با خودشان) قرار نگیرند؟ پاسخ بسیار ساده است! یک طریق؛ یعنی توپ ۱ را در جعبهٔ ۲ و توپ ۲ را در جعبهٔ ۱ قرار می‌دهیم. حال اگر سه توپ با شماره‌های ۱، ۲ و ۳ و سه جعبه با همین شماره‌ها داشته باشیم به چند طریق می‌توانیم توپ‌ها را درون جعبه‌ها بگذاریم؛ به طوری که هیچ یک از سه توپ در جعبهٔ هم‌شماره با آن قرار نگیرد؟ باز هم با کمی دقت و محاسبه، پاسخ به دست می‌آید. برای توپ شمارهٔ ۱ دو امکان وجود دارد، (زیرا می‌تواند در یکی از دو جعبهٔ شمارهٔ ۲ یا ۳ قرار گیرد) حال اگر توپ ۱ را در یکی از این دو جعبه قرار دهیم، برای توپ‌های شمارهٔ ۲ و ۳ تنها یک امکان باقی می‌ماند. (چرا؟)

بنابراین طبق اصل ضرب، $۲ \times ۱ = ۲$ طریق مختلف وجود دارد که در شکل‌های زیر مشخص شده‌اند:



(۳) (۲) (۱)



۳ ۲ ۱

حال فرض کنید که به صورت مشابه، چهار توپ و چهار جعبه داریم. جایگذاری به چند طریق مختلف امکان‌پذیر است؟ باز هم از اصل ضرب کمک می‌گیریم. برای توپ شمارهٔ ۱، سه امکان مختلف وجود دارد. حال برای توپ شمارهٔ ۲ چند امکان مختلف وجود دارد؟ پاسخ در حالت‌های مختلف فرق می‌کند؛ اگر توپ (۱) در جعبهٔ (۲) قرار گرفته باشد، برای توپ (۲) سه امکان مختلف وجود دارد؛ ولی اگر در یکی از جعبه‌های شمارهٔ ۳ یا ۴ قرار گرفته باشد، برای توپ (۲) دو امکان وجود خواهد داشت. البته با تفکیک این دو حالت، می‌توان پاسخ مسأله را به دست آورد؛ اما به نظر می‌رسد که به بیراهه می‌رویم؛ چرا که اگر تعداد توپ‌ها و جعبه‌ها بیشتر شود، کار از این هم سخت‌تر خواهد شد، باید روش دیگری را به کار ببریم. در بسیاری از مسائل آنالیز ترکیبی (شمارش) به جای شمارش مستقیم، از شمارش اعضای متمم مجموعهٔ مورد نظر کمک می‌گیریم. شاید در این جا هم این روش کارساز باشد. متمم مجموعه حالت‌هایی که هیچ یک از توپ‌ها سر جای خودشان نیستند، کدام مجموعهٔ حالت‌هاست؟ امیدوارم که مثل بسیاری از دانش‌آموزان عجول، فوری نگویید مجموعهٔ حالت‌هایی که همهٔ توپ‌ها سرجای خودشان هستند! زیرا نقیض هیچ یک، همه نیست. یک مثال می‌زنیم؛ فرض کنید معلم شما در کلاس درس می‌گوید هیچ یک از دانش‌آموزان این کلاس درسخوان نیستند. شما که به حرف او معترض هستید، در پاسخ او چه می‌گویید؟ آیا می‌گویید: نخیر، همهٔ دانش‌آموزان کلاس درسخوان هستند؟ روشن است که چنین نیست؛ بلکه در پاسخ می‌گویید: بعضی از دانش‌آموزان کلاس (حدّاقل یک نفر از آنها) درسخوان هستند؛ بنابراین متمم مجموعهٔ حالت‌هایی که هیچ یک از توپ‌ها در جعبهٔ هم شمارهٔ خودشان نیستند، می‌شود مجموعهٔ حالت‌هایی که حدّاقل یکی از توپ‌ها سرجای خودش باشد. به عنوان مثال، در حالتی که سه توپ و سه جعبه داریم، اگر A مجموعه حالت‌هایی باشد که توپ (۱) در جعبهٔ (۱) قرار دارد، و B و C مجموعهٔ حالت‌هایی باشند که توپ‌های ۲ و ۳ سرجای خودشان باشند، هدف ما تعیین تعداد اعضای مجموعهٔ

A U B U C یا n(AUBUC) است. سپس تعداد تمام حالت‌ها (!۳) را از این عدد کم می‌کنیم تا تعداد حالت‌هایی به دست آید که هیچ یک از توپ‌ها سرجای خودشان نیستند. برای محاسبهٔ تعداد اعضای اجتماع دو یا بیشتر مجموعه نیز از اصلی به نام اصل شمول و عدم شمول (اصل طرد ـ شمول) استفاده می‌کنیم. در این جا اشاره‌ای نیز به این اصل می‌کنیم.

اصل شمول و عدم شمول ـ ماجرای کارمندی که از آقای رئیس مرخصی می‌خواست!

آن روز، آقای احمدی خیلی عجله داشت؛ با نگرانی و دلهره خود را به دفتر رئیس اداره رساند، در زده و پس از کسب اجازه وارد اتاق شد.

آقای احمدی: سلام آقای رئیس، اگر اجازه بفرمایید، عرض کوچکی داشتم!

رئیس: سلام جانم، خواهش می‌کنم بفرمایید.

آقای احمدی: قربان می‌خواستم اگر اجازه بدهید و امکان داشته باشد، یک روز مرخصی استحقاقی بگیرم. برگهٔ درخواست آن را هم پرکرده‌ام.

رئیس: بله جانم! چی فرمودید؟! مرخصی! مگر شما کار هم می‌کنید که مرخصی می‌خواهید؟!

آقای احمدی (باتعجب): چرا قربان؟ مگر از من کوتاهی سرزده است؟

رئیس: نه جانم، ولی شما اصلاً کاری نمی‌کنید که مرخصی بخواهید! بگذارید با هم حساب کنیم، ببینیم شما چه قدر در این اداره کار می‌کنید. بگو ببینم تو در شبانه روز حدّاقل ۸ ساعت می‌خوابی، این طور نیست؟ (آقای احمدی: بله آقای رئیس) بسیار خوب، پس در هر سه شبانه روز، معادل ۲۴ ساعت یا یک شبانه روز می‌خوابی و در نتیجه اگر سال را ۳۶۰ روز به حساب آوریم، تو جمعاً ۱۲۰ روز آن را در خواب هستی! حالا می‌رسیم به ساعت‌هایی که صرف خوردن سه وعده غذای تو می‌شود؛ آن هم هیچ نباشد، ۳ ساعت وقت تو را در روز با حساب ساعت‌های قبل و بعد آن می‌گیرد، پس هر ۸ روز، دقیقاً معادل یک شبانه روز صرف خوردن غذا می‌شود؛ یعنی در یک سال ۴۵ روز نیز به این مهم اختصاص دارد. اما ۵۲ جمعه را نیز نباید فراموش کرد و نیز تعطیلات نوروزی و ایّام رسمی تعطیل که روی هم با نگاه به تقویم، ۴۳ روز است. اما ساعت‌های استراحت بعد از ظهر و ساعت‌هایی که با خانواده‌ات هستی هم باید حساب شود. تو دیگر ساعت ۵ بعدازظهر به خانه می‌رسی که تا ساعت ۹ شب، یعنی هر روز ۴ ساعت در اختیار خانواده‌ات هستی که هر ۶ روز آن ۲۴ ساعت و معادل یک روز کامل است و با این حساب، در سال ۶۰ روز تو نیز صرف این موضوع می‌شود. فراموش نکنیم که تو یک ساعت صبح و یک ساعت بعدازظهر هم در اتوبوس سرویس اداره می‌گذرانی که هر روز ۲ ساعت و هر ۱۲ روز، معادل یک روز کامل است، پس در ۳۶۰ روز، بگذار حساب کنم، ۳۶۰ تقسیم بر ۱۲ می‌شود... آها! ۳۰ روز! و یک چیز دیگر، تعطیلات تابستانی اداره را که صرف حسابرسی می‌شود، فراموش کرده بودم، آن هم ۹ روز است. دیگر چیزی نمانده است! جمع می‌کنیم:

۱۲۰ + ۴۵ + ۵۲ + ۴۳ + ۶۰ + ۳۰ + ۹ = ۳۵۹

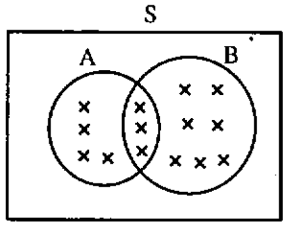
خوب تمام شد، اگر این ۳۵۹ روز را از ۳۶۰ روز کم کنیم، می‌ماند یک روز! تو یک روز در سال کار می‌کنی، آن وقت آن را هم می‌خواهی مرخصی بگیری و بروی! برو جانم! تا عصبانی‌تر نشده‌ام!...

از منطق بی‌بدیل(!) جناب رئیس که بگذریم، راستی مغالطهٔ این استدلال کجاست؟! به یاد دارم که وقتی از تعدادی شاگردانم در یک کلاس، همین سؤال را پرسیدم، بعضی از آنها گفتند: خب، رئیس با ساعت‌های خارج از ادارهٔ کارمند خود چه کار دارد!

امیدوارم که پاسخ شما هم این گونه عوامانه نباشد و مرا ناامید نکند! اما با کمی دقت، ایراد استدلال بدیهی است. بسیاری از ساعت‌ها در محاسبهٔ آقای رئیس، دوباره و سه باره (و گاهی چندباره) به حساب آمده‌اند. برای مثال، ساعت‌های خواب کارمند در ایّام تعطیل نیز به حساب آمده‌اند و یک بار هم جداگانه حساب شده‌اند و... در واقع اگر قرار است همهٔ ساعت‌ها با هم جمع شوند، باید ساعت‌های اضافه که چند بار حساب شده‌اند، حذف (طرد) شوند و این همان اصل

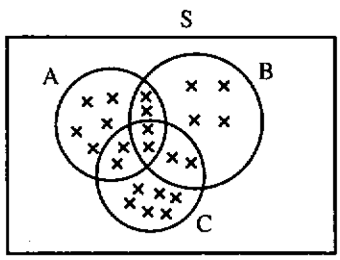
طرد و شمول است، فرض کنید بخواهیم تعداد اعضای مجموعهٔ AUB را به دست آوریم. به کمک یک نمودار ون (venn – diagram) این کار به سادگی انجام می‌شود. اگر تعداد اعضای مجموعهٔ A ((n(A)) را با تعداد اعضای مجموعهٔ B ((n(B)) جمع کنیم، تعداد اعضای اشتراک دو مجموعه، دو بار به حساب می‌آیند(شمول)، لذا باید یک بار کم شوند (عدم شمول)؛ بنابراین داریم:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$



اگر همین عمل را برای سه مجموعهٔ A، B و C انجام دهیم، مطابق شکل، اگر تعداد اعضای سه مجموعهٔ A، B و C را با هم جمع کنیم، تعداد اعضای مجموعه‌های A∩B، A∩C و B∩C هر کدام دوبار محسوب می‌شوند و باید یک بار کم شوند؛ ولی ضمن این اعمال، تعداد اعضای مجموعهٔ A∩B∩C سه بار به حساب آمده و سه بار کم می‌شود. بنابراین یک بار دیگر باید به حساب آید. با این روش، نتیجهٔ زیر به دست می‌آید:

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$



اجازه دهید چند مثال بیاوریم.

مثال(۱): در یک کلاس درس با ۴۰ نفر دانش‌آموز، ۲۴ نفر عینک می‌زنند و ۲۰ نفر هم چپ دست هستند، همچنین ۳ نفر نه عینک می‌زنند و نه چپ دست هستند. چند نفر هم عینک می‌زنند و هم چپ دست هستند؟

حل: اگر مجموعهٔ دانش‌آموزان عینکی را با A و مجموعهٔ دانش‌آموزان چپ دست را با B نمایش دهیم، با توجه به مفروضات مسأله داریم:

$n(A\cup B)=۴۰-۳=۳۷$ و $n(B)=۲۰$ و $n(A)=۲۴$

لازم به ذکر است که AUB مجموعهٔ دانش‌آموزانی است که عینک می‌زنند یا چپ دست هستند. اکنون هدف مسأله، تعیین تعداد اعضای مجموعه A∩B است. با توجه به دستور گفته شده داریم:

$$n(A\cup B)=n(A)-n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow$$

$$۳۷=۲۴+۲۰-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=۷$$

یعنی، ۷ نفر هم عینک می‌زنند و هم چپ دست هستند.

مثال(۲): تعداد عددهای طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰ که بر ۲ یا ۳ یا ۵ بخش‌پذیرند، به دست آورید.

حل: اگر مجموعهٔ عددهای طبیعی کوچکتر یا مساوی ۱۰۰ که مضرب ۲ هستند (عددهای زوج) A و مجموعهٔ عددهای طبیعی کوچکتر یا مساوی ۱۰۰ را که بر ۳ بخش‌پذیرند، B و آنها را که بر ۵ بخش‌پذیرند، C بنامیم، منظور مسأله تعیین $n(A\cup B\cup C)$ است و داریم:

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

برای تعیین مفروضات مسأله، از این قضیه در تئوری اعداد کمک می‌گیریم.

«تعداد عددهای طبیعی کوچک‌تر یا مساوی n که بر r ($r\neq ۰$) بخش‌پذیرند، برابر با $\left[\frac{n}{r}\right]$ است.»

در قضیهٔ فوق [ ] علامت جزء صحیح است. اکنون با توجه به این قضیه، می‌توان نوشت:

$n(A)=\left[\frac{۱۰۰}{۲}\right]=۵۰$ و $n(B)=\left[\frac{۱۰۰}{۳}\right]=۳۳$

ولی برای محاسبهٔ $n(A\cap B)$ باید به این موضوع توجه کنیم که عددهایی که بر ۲ و ۳ بخش‌پذیرند، بر ۶ بخش‌پذیرند (چرا؟) لذا می‌توان نوشت: $n(A\cap B)=\left[\frac{۱۰۰}{۶}\right]=۱۶$ حال با استفاده از همین الگو، می‌توان نوشت:

$$n(A\cup B\cup C)=\left[\frac{۱۰۰}{۲}\right]+\left[\frac{۱۰۰}{۳}\right]+\left[\frac{۱۰۰}{۵}\right]-\left[\frac{۱۰۰}{۶}\right]-\left[\frac{۱۰۰}{۱۰}\right]-\left[\frac{۱۰۰}{۱۵}\right]+\left[\frac{۱۰۰}{۳۰}\right]=۵۰+۳۳+۲۰-۱۶-۱۰-۶+۳=۷۴$$

یعنی ۷۴ عدد طبیعی کوچکتر یا مساوی ۱۰۰ وجود دارد که بر ۲ یا ۳ یا ۵ بخش‌پذیرند؛ متمم این مجموعه چند عضو دارد؟ پاسخ ساده است ۲۶ = ۷۴ - ۱۰۰ ، ولی این ۲۶ عدد چه ویژگی دارند؟ آری اینها عددهایی هستند که نه مضرب ۲، نه مضرب ۳ و نه مضرب ۵ هستند.

تمرین (۱): تعداد عددهای طبیعی کوچکتر یا مساوی ۱۰۰۰ را به دست آورید که نه بر ۱۱ و نه بر ۱۲ بخش‌پذیرند.

تمرین (۲): تعداد عددهای طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰۰ را به دست آورید که نه مربع کامل و نه مکعب کامل باشند.

حال سعی می‌کنیم اصل شمول و عدم شمول را به چهار مجموعه و بیشتر تعمیم دهیم. برای این منظور، از قوانین جبر مجموعه‌ها به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$n(A\cup B\cup C\cup D) = n(A) + n(B) + n(C\cup D) - n(A\cap B) - n[A\cap(C\cup D)] - n[B\cap(C\cup D)] + n[A\cap B\cap(C\cup D)] =$$
$$n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - n(C\cap D) - n(A\cap B) - n[(A\cap C)\cup(A\cap D)] - n[(B\cap C)\cup(B\cap D)] + n[(A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap D)] =$$
$$n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - n(C\cap D) - n(A\cap B) - [n(A\cap C) + n(A\cap D) - n(A\cap C\cap D)] - [n(B\cap C) + n(B\cap D) - n(B\cap C\cap D)] + [n(A\cap B\cap C) + n(A\cap B\cap D) - n(A\cap B\cap C\cap D)] =$$
$$n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - n(A\cap B) - n(A\cap C) - n(A\cap D) - n(B\cap C) - n(B\cap D) - n(C\cap D) + n(A\cap B\cap C) + n(A\cap B\cap D) + n(A\cap C\cap D) + n(B\cap C\cap D) - n(A\cap B\cap C\cap D)$$

و به این ترتیب، دستور محاسبهٔ $n(A\cup B\cup C\cup D)$ به دست می‌آید.

تمرین: تعداد عددهای طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۴۰۰ را به دست آورید که مضرب ۲ یا ۳ یا ۵ یا ۷ باشند، اکنون می‌توانیم دستور محاسبهٔ $n(A_1\cup A_2\cup ...\cup A_n)$ را حدس بزنیم:

$$n(A_1\cup A_2 ...\cup A_n) = \sum n(A_i) - \sum n(A_i\cap A_j) + \sum n(A_i\cap A_j\cap A_k) - ... + (-1)^{n+1}\, n(A_1\cap A_2 ... \cap A_n)$$

یعنی ابتدا مجموع تعداد اعضای همهٔ مجموعه‌ها (که تعداد آنها n تاست) را با هم جمع می‌کنیم، سپس این مجموع را از تعداد اعضای اشتراک دو به دوی مجموعه‌ها (که تعداد آنها $\binom{n}{2}$ است) کم می‌کنیم و با تعداد اعضای اشتراک سه به سه مجموعه‌ها (به تعداد $\binom{n}{3}$ است) جمع می‌کنیم و...

اکنون می‌توانیم به مسألهٔ خودمان برگردیم. به چند طریق می‌توانیم سه توپ ۱، ۲ و ۳ را در سه جعبه ۱، ۲ و ۳ قرار دهیم که حدّاقل یک توپ در جای خودش باشد؟

اگر A مجموعهٔ حالت‌هایی باشد که توپ (۱) در جای خودش (یعنی جعبهٔ ۱) باشد، چون برای هر توپ دیگر هر کدام ۲ امکان وجود دارد، لذا $n(A) = 2!$ و به همین ترتیب، اگر B و C مجموعهٔ حالت‌هایی باشد که توپ‌های (۲) و (۳) در جای خودشان باشند، $n(B) = n(C) = 2!$ و بدیهی است که $n(B\cap C) = n(A\cap C) = n(A\cap B) = 1!$ و $n(A\cap B\cap C) = 1!$ و از آن جا داریم:

$$n(A\cup B\cup C) = 2! + 2! + 2! - 1! - 1! - 1! + 1! = 4$$

و از آن جا تعداد حالت‌هایی که هیچ کدام از سه توپ سرجای خودشان نباشند، برابر است با:

$$n(A\cup B\cup C)' = n(S) - n(A\cup B\cup C) = 3! - 4 = 2$$

و این همان پاسخی است که قبلاً با شمارش مستقیم به دست آوردیم. اکنون دیگر کار تمام است و الگوی ما برای شمارش حالت‌های دیگر همین است. فرض کنید ۴ توپ ۱، ۲، ۳ و ۴ را در چهار جعبه ۱، ۲، ۳ و ۴ قرار داده‌ایم. به چند طریق ممکن است هیچ یک از توپ‌ها در جعبهٔ خودشان نباشند؟ ابتدا تعداد حالت‌هایی را می‌شماریم که حدّاقل یک توپ

سرجای خودش باشد:

$$n(AUBUCUD) = ۳! + ۳! + ۳! + ۳! - ۲! - ۲! - ۲! - ۲! - ۲! - ۲! + ۱! + ۱! + ۱! + ۱! - ۱! = ۱۵ \Rightarrow n(AUBUCUD)' = ۴! - ۱۵ = ۹$$

یعنی به ۹ طریق مختلف این کار ممکن است. دربارهٔ تعداد عددها و نحوهٔ محاسبهٔ آنها فکر کنید. اکنون مسألهٔ دیگری مشابه همین مسأله طرح می‌کنیم. پنج دوست با هم به یک میهمانی رفته و کلاه‌های خود را در یک جا گذاشته‌اند. ناگهان برق می‌رود! و در تاریکی هر کدام یکی از کلاه‌ها را تصادفی برداشته و بر سر می‌گذارند. به چند حالت ممکن است هیچ کدام کلاه خودش را بر سر نگذارند؟! چه قدر احتمال برای این پیشامد قائل هستید؟

در پاسخ باید گفت که اگر A ، B ، C ، D و E به ترتیب مجموعهٔ حالت‌هایی باشند که نفرات اوّل تا پنجم، کلاه خودشان را بر سر گذاشته باشند، هدف تعیین $n(AUBUCUDUE)'$ است، مانند مثال قبل می‌توان نوشت:

$$n(AUBUCUDUE) = \binom{۵}{۱} \times ۴! - \binom{۵}{۲} \times ۳! + \binom{۵}{۳} \times ۲! - \binom{۵}{۴} \times ۱! + \binom{۵}{۵} \times ۰! = ۱۲۰ - ۶۰ + ۲۰ - ۵ + ۱ = ۷۶ \Rightarrow$$

$$n(AUBUCUDUE)' = ۵! - ۷۶ = ۱۲۰ - ۷۶ = ۴۴$$

و احتمال بروز این پیشامد نیز به راحتی به دست می‌آید:

$$p(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{۴۴}{۱۲۰} = \frac{۱۱}{۳۰}$$

حال می‌توانیم دستور کلی مسأله را نیز استنتاج کنیم.

فرض کنیم n شیء در n مکان به طور تصادفی قرار گیرند. به چند طریق ممکن است هیچ یک از اشیا سرجای اصلی خود نباشند؟ ابتدا تعداد حالت‌هایی که حدّاقل یکی از اشیا سرجای خود هستند، به دست می‌آوریم:

$$n(A_1UA_2...UA_n) = \binom{n}{۱}(n-۱)! - \binom{n}{۲}(n-۲)! + \binom{n}{۳}(n-۳)! - \binom{n}{۴}(n-۴)! + ... = n! - \frac{n!}{۲!} + \frac{n!}{۳!} - \frac{n!}{۴!} + ... + (-۱)^{n+۱} \times \frac{۱}{n!}$$

و از آن جا تعداد حالت‌هایی که طی آنها هیچ شیء سرجای خودش نیست (یعنی تعداد پریش‌های n شیء) که آن را با نماد D(n) نمایش می‌دهیم، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$D(n) = n! - [n! - \frac{n!}{۲!} + \frac{n!}{۳!} - \frac{n!}{۴!} + ... + (-۱)^{n+۱} \times \frac{n!}{n!}] \Rightarrow$$

$$D(n) = n!\,[۱ - \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۴!} + ... + (-۱)^{n} \times \frac{۱}{n!}]$$

به عنوان مثال داریم:

$$D(۴) = ۴!\,(۱ - \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۴!}) = ۴!(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۶} - \frac{۱}{۲۴}) = ۹$$

$$D(۵) = ۵!\,(۱ - \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۴!} - \frac{۱}{۵!}) = ۱۲۰(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۲۴} - \frac{۱}{۱۲۰}) = ۴۴$$

اکنون به سؤال ابتدایی مقاله می‌توانیم پاسخ دهیم. به چند طریق ممکن است ۱۰ کودک که پس از پراکنده شدن دوباره به صف ایستاده‌اند، هیچ کدام سرجای خودشان نایستاده باشند؟

احتمال این اتفاق چه قدر است؟

$$D(۱۰) = ۱۰!\,[۱ - \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۴!} - \frac{۱}{۵!} + \frac{۱}{۶!} - \frac{۱}{۷!} + \frac{۱}{۸!} - \frac{۱}{۹!} + \frac{۱}{۱۰!}] = ۱۳۳۴۹۶۱$$

و احتمال این پیشامد برابر است با:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۳۳۴۹۶۱}{۱۰!} = \frac{۱۶۴۸۱}{۴۴۸۰۰} \approx ۰/۳۷$$

به طور کلی، هرگاه n شیء مختلف در n مکان مختلف قرار گیرند، احتمال بروز یک پریش برابر است با:

$$p = ۱ - \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + ... + (-۱)^{n} \times \frac{۱}{n!}$$

به عنوان مثال، اگر سه توپ را از سه جعبه برداشته و دوباره به طور تصادفی در جعبه‌ها قرار دهیم، احتمال آن که هیچ توپ در جعبهٔ خودش نباشد، برابر است با:

$$p = ۱ - \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} = \frac{۱}{۳}$$

اما آیا روش مستقیم دیگری برای تعیین این احتمال وجود ندارد؟ نمی‌شود گفت احتمال آن که توپ ۱ در جعبهٔ ۱ باشد، برابر $\frac{۱}{۳}$ و در نتیجه، احتمال متمم آن، یعنی احتمال آن که توپ (۱) در جعبهٔ (۱) نباشد، مساوی $\frac{۲}{۳}$ است. به همین ترتیب، احتمال آن که توپ (۲) در جعبهٔ خودش نباشد و همین احتمال برای توپ (۳) مساوی $\frac{۲}{۳}$ است. بنابراین احتمال آن که هیچ یک از توپ‌ها در جعبهٔ خودشان نباشند، طبق قاعدهٔ

ضرب احتمال‌ها برابر است با:

$$p = \frac{۲}{۳} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۲}{۳} = \frac{۸}{۲۷} \neq \frac{۱}{۳}$$

ولی چرا این طور شد و چرا این دو احتمال برابر نیستند؟ برای خواننده‌ای که تعریف روشنی از استقلال پیشامدها دارد، علت این امر چندان پوشیده نیست. به سادگی می‌توان دریافت که پیشامدهای فوق، یعنی پیشامد قرار نداشتن توپ (۱) در جای خودش و پیشامد قرار نداشتن توپ (۲) یا توپ (۳) در جعبه‌های مربوط به خودشان، از یکدیگر مستقل نیستند، زیرا قرار داشتن (یا نداشتن) توپ (۱) در جعبهٔ خودش، احتمال قرار داشتن (یا نداشتن) توپ (۲) در جعبهٔ خودش را تغییر می‌دهد و برآن مؤثر است (چرا؟). قانون ضرب احتمال‌ها فقط در مورد پیشامدهای مستقل برقرار است؛ یعنی اگر دو پیشامد A و B هیچ تأثیری بر یکدیگر نداشته باشند و وقوع یا عدم وقوع یکی بر وقوع یا عدم وقوع دیگری مؤثر نباشد، می‌توان نوشت:

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

در این جا به نظر می‌رسد که کار تمام شده باشد و به آخر خط رسیده باشیم؛ ولی ما هنوز هم حرف‌هایی برای گفتن داریم! فرض کنید تعداد توپ‌ها و جعبه‌ها بیشتر و بیشتر شوند؛ برای مثال، هزار توپ و هزار جعبه، اصلاً تعداد توپ‌ها وجعبه‌ها نامتناهی باشد (یعنی به بی‌نهایت میل کند) آیا در این صورت، نمی‌توان گفت که پیشامد قرار داشتن (یا نداشتن) توپ iام در جعبهٔ iام، تأثیری بر پیشامد قرار داشتن (یا نداشتن) توپ jام در جعبهٔ jام ندارد؟ به نظر می‌رسد که همین طور باشد؛ زیرا تعداد جعبه‌ها و توپ‌ها بی‌شمار است و قرار داشتن یا نداشتن یک توپ در جعبهٔ خودش، چندان تأثیری در افزایش یاکاهش شانس قرار داشتن یا نداشتن توپ دیگر در جعبهٔ خودش، ندارد؛ بنابراین اگر $n \to \infty$، می‌توان نوشت:

$$P = (۱ - \frac{۱}{n})(۱ - \frac{۱}{n}) \dots (۱ - \frac{۱}{n}) = (۱ - \frac{۱}{n})^n$$

ولی حدّ $(۱ - \frac{۱}{n})^n$ وقتی که n به بی‌نهایت میل کند، برای ما آشناست؛ زیرا می‌دانیم $\lim_{n\to\infty}(۱ - \frac{k}{n})^n = e^k$ که در این جا e عدد معروف اولر (پایهٔ لگاریتم‌های نپری معروف به عدد نپر) است؛ بنابراین $\lim_{n\to\infty}(۱ - \frac{۱}{n})^n = e^{-۱} = \frac{۱}{e}$. حال اگر این حد را از دستور احتمال پریش به دست آوریم، نتیجهٔ جالب توجهی به دست می‌آید:

$$\lim_{n\to\infty} p = \lim_{n\to\infty} ۱ - \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \dots + (-۱)^n(\frac{۱}{n!}) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-۱}{k!}\right)^k$$

و از آن جا درمی‌یابیم که سری $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-۱)^k}{k!}$ به عدد $\frac{۱}{e}$ همگراست.

آیا این نتیجه را پیش از این نمی‌دانستید؟

تمرین: احتمال آن که هیچ یک از ۱۰ دانش‌آموز را که سر صف می‌ایستند، سر جای خودشان نایستاده باشند، قبلاً به دست آوردیم. این عدد را با عدد $\frac{۱}{e}$ مقایسه کنید، چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟

تمرین: قرار است از طرف ادارهٔ آموزش و پرورش، تعداد صد عدد نامه به صد مدرسه فرستاده شود. نامه‌ها نوشته شده و نشانی مدارس روی یک صد پاکت نامه تایپ شده است، اگر نامه و پاکت‌ها به هم خورده شده و مستخدم بی‌سواد اداره، نامه‌ها را تصادفی درون پاکت‌ها قرار دهد و آنها را پست کند، چه قدر احتمال دارد که همهٔ نامه‌ها به مقصد خودشان بروند؟ تقریباً چه قدر احتمال دارد که هیچ نامه‌ای به نشانی خودش نرود؟ این دو عدد را با هم مقایسه کنید؛ آیا نتیجه جالب نیست؟

معادلهٔ خط

● رضا پیکر

(قسمت اوّل)

از آن جا که همگان ذهنیتی از خط دارند، خط را به عنوان یک مفهوم اوّلیه، بدون تعریف می‌پذیریم.

خط انواعی دارد که از آن جمله عبارتند از: خط راست، خط منحنی، خط شکسته و...

هر گاه صحبت از خط می‌شود، منظور خط راست است که از مجموعهٔ نقاطی که بر یک راستا قرار دارند، تشکیل می‌شود. در این مقاله سعی داریم تا مختصری به بررسی معادلهٔ خط روی صفحهٔ مختصات بپردازیم.

مجموعه‌های نامتناهی A و B را که اعضای هر کدام، مجموعهٔ نقاطی از صفحهٔ مختصات می‌باشند، در نظر بگیرید. آیا می‌توانید رابطه‌ای بین طول و عرض هر یک از نقاط این مجموعه‌ها حدس بزنید؟

$$A=\left\{\dots, \begin{bmatrix}۱\\-۱\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۲\\-۲\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۳\\-۳\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۴\\-۴\end{bmatrix}, \dots\right\}$$

$$B=\left\{\dots, \begin{bmatrix}-۲\\۵\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-۱\\۳\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۱\\-۱\end{bmatrix}, \dots\right\}$$

با صرف اندکی وقت و دقت، پی می‌برید که مجموع طول و عرض هر یک از نقاط مجموعهٔ A، برابر با صفر و همچنین مجموع دو برابر طول با عرض هر یک از نقاط مجموعهٔ B، برابر با یک است.

اگر به‌طور کلی x را نمایندهٔ طول و y را نمایندهٔ عرض هر نقطه در نظر بگیریم، برای اعضای مجموعه A می‌توانیم بنویسیم:

$$x+y=۰ \qquad (I)$$

و برای اعضای مجموعه B می‌توانیم بنویسیم:

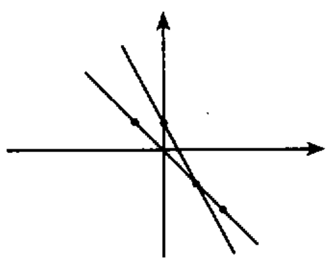
$$۲x+y=۱ \qquad (II)$$

و یا می‌توانیم مجموعه‌های A و B را به گونه زیر بنویسیم:

$$A=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R}, \quad x+y=۰\right\}$$

$$B=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R}, \quad ۲x+y=۱\right\}$$

مطابق شکل، تمامی نقاط مجموعه A روی یک خط و نیز



تمامی نقاط مجموعهٔ B هم روی یک خط راست قرار دارند. بنابراین هر یک از روابط I و II معادلهٔ خطوط راستی هستند که به ترتیب نقاط مجموعه‌های A و B برآن واقعند. بنابراین:

> معادلهٔ خط راست، رابطه‌ای است بین طول و عرض نقاطی که بر یک خط راست واقعند.

به‌طور کلی برای مجموعهٔ نقاطی که بر یک خط راست واقعند، می‌توان رابطهٔ $ax+by+c=0$ را در نظر گرفت که در آن a، b و c اعداد حقیقی هستند و a و b توأماً صفر نیستند.
$(a^2+b^2\neq 0$ *$)$

الف) اگر $a=0$ باشد، معادله به‌صورت $by+c=0$ یا $y=\frac{-c}{b}$ در می‌آید که معادلهٔ خطی موازی محور طولها می‌باشد.

ب) اگر $b=0$ باشد، معادله به صورت $ax+c=0$ یا $x=\frac{-c}{a}$ درمی‌آید که معادلهٔ خطی موازی محور عرضها می‌باشد.

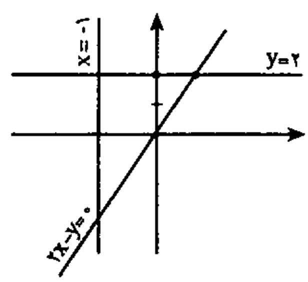
ج) اگر $a^2+c^2=0$ باشد، معادله به صورت $by=0$ یا $y=0$ درمی‌آید که معادلهٔ محور طولها می‌باشد.

د) اگر $b^2+c^2=0$ باشد، معادله به صورت $ax=0$ یا $x=0$ درمی‌آید که معادلهٔ محور عرض‌ها می‌باشد.

ه) اگر $c=0$ باشد، معادله به صورت $ax+by=0$ درمی‌آید که معادلهٔ اخیر، صورت کلی معادله خطی است که از مبدأمختصات می‌گذرد، چرا که همواره مختصات $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ در آن صادق است.

مثال: هر یک از خطوط $y=2$ ، $x=-1$ و $2x-y=0$ را روی یک صفحه مختصات نمایش دهید.

حل:



*. در ریاضیات، برای نشان دادن این‌که دوعدد a و b یا سه عدد a، b و c و یا... توأماً صفر نیستند، از روابطی نظیر $a^2+b^2\neq 0$ ، $a^2+b^2+c^2\neq 0$ و... استفاده می‌کنند و بعکس، برای نشان دادن اینکه دو عدد a و b یا سه عدد a، b، c و یا ... توأماً صفر هستند، از روابطی نظیر: $a^2+b^2=0$ و $a^2+b^2+c^2=0$ و ... استفاده می‌کنند.

نتیجهٔ مهم بحث اخیر را می‌توان این گونه بیان داشت که هر معادلهٔ درجهٔ اوّل دو مجهولی، به صورت $ax+by+c=0$ $(a^2+b^2\neq 0)$ را می‌توان روی صفحهٔ مختصات به صورت یک خط راست نشان داد و بعکس هر خط راستی که در دستگاه محورهای مختصات رسم شده باشد، معادله‌ای به صورت $ax+by+c=0$ $(a^2+b^2\neq 0)$ دارد.

مثال: اگر مختصات $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ با برابری زیر به هم، بستگی داشته باشند، نشان دهید مختصات $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ ، مختصات نقاط دو خط هستند و دو خط را روی صفحهٔ مختصات نمایش دهید.

$4x^2-y^2+4x+1=0$

حل: چنانچه برابری بالا را تجزیه کنیم، خواهیم دید که بستگی بین x و y در این رابطه از نوع معادلهٔ خط است.

$4x^2-y^2+4x+1=0$

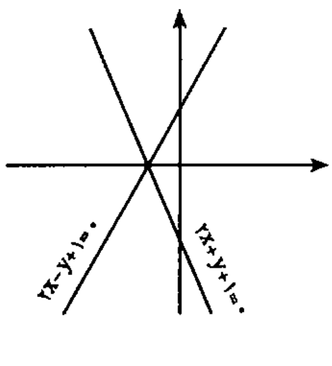
$(2x+1)^2-y^2=0$

$(2x+y+1)(2x-y+1)=0$

حاصلضرب دو پرانتز، وقتی صفر است که حداقل یکی از آن پرانتزها برابر با صفر باشد. بنابراین:

$2x-y+1=0$ یا $2x+y+1=0$

که نمودار هر یک از روابط بالا، یک معادلهٔ خط است.



نوشتن معادلهٔ خط با معلوم بودن دو نقطه از آن

با مشخص بودن یک نقطه از خطی در صفحهٔ مختصات، نمی‌توان خط مورد نظر را رسم کرد؛ چرا که از یک نقطه، بی‌شمار خط می‌گذرد؛ ولی با مشخص بودن حداقل دو نقطه از خط، می‌توان خط مورد نظر را رسم کرد. به‌همین ترتیب، برای نوشتن معادلهٔ یک خط راست، مشخص بودن دو نقطه از آن کافی است.

همان گونه که در بحث اخیر داشتیم، هر رابطه که به‌صورت:

$$ax+by+c=۰ \qquad (a^{۲}+b^{۲}\neq ۰)$$

باشد، معادله یک خط راست است. رابطهٔ اخیر را می‌توان به صورت $y=\frac{-a}{b}x-\frac{c}{b}$ نوشت که با فرض $m=\frac{-a}{b}$ و $n=-\frac{c}{b}$ خواهیم داشت:

$$y=mx+n \qquad (m\,,n\in \mathbb{R})$$

اکنون می‌خواهیم معادلهٔ خطی را بنویسیم که از دو نقطهٔ $A\begin{bmatrix}x_{۱}\\y_{۱}\end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix}x_{۲}\\y_{۲}\end{bmatrix}$ می‌گذرد.

فرض می‌کنیم معادلهٔ خطی که از دو نقطهٔ مذکور می‌گذرد، به شکل کلّی $y=mx+n$ باشد. از آن‌جا که نقاط A و B متعلق به خط مورد نظر می‌باشد، پس مختصات آنها در معادلهٔ خط صادق است و خواهیم داشت:

$$x=x_{۱}\quad,\quad y=y_{۱}\quad\Rightarrow\quad y_{۱}=mx_{۱}+n$$
$$x=x_{۲}\quad,\quad y=y_{۲}\quad\Rightarrow\quad y_{۲}=mx_{۲}+n$$

با حذف n از معادلهٔ بالا، m بر حسب مقادیر معلوم $x_{۱}$، $x_{۲}$، $y_{۱}$ و $y_{۲}$ به‌دست خواهد آمد، داریم:

$$y_{۱}-y_{۲}=mx_{۱}-mx_{۲}\quad\Rightarrow\quad m=\frac{y_{۱}-y_{۲}}{x_{۱}-x_{۲}}$$

از جایگذاری مقدار m در یکی از دو معادلهٔ اخیر، مقدار n نیز بر حسب مقادیر $x_{۱}, x_{۲}, y_{۱}, y_{۲}$ محاسبه می‌شود. داریم:

$$n=y_{۱}-\left(\frac{y_{۱}-y_{۲}}{x_{۱}-x_{۲}}\right)x_{۱}$$

یا

$$n=y_{۲}-\left(\frac{y_{۱}-y_{۲}}{x_{۱}-x_{۲}}\right)x_{۲}$$

از قرار دادن مقادیر m و n در معادلهٔ $y=mx+n$ داریم:

$$y=\left[\frac{y_{۱}-y_{۲}}{x_{۱}-x_{۲}}\right]x+y_{۱}-\left[\frac{y_{۱}-y_{۲}}{x_{۱}-x_{۲}}\right]x_{۱}$$

$$\Rightarrow \boxed{(y-y_{۱})=\left[\frac{y_{۱}-y_{۲}}{x_{۱}-x_{۲}}\right](x-x_{۱})} \qquad (I)'$$

یا

$$y=\left[\frac{y_{۱}-y_{۲}}{x_{۱}-x_{۲}}\right]x+y_{۲}-\left[\frac{y_{۱}-y_{۲}}{x_{۱}-x_{۲}}\right]x_{۲}$$

$$\Rightarrow \boxed{(y-y_{۲})=\left[\frac{y_{۱}-y_{۲}}{x_{۱}-x_{۲}}\right](x-x_{۲})} \qquad (II)'$$

هر یک از معادله‌های $(I)'$ و $(II)'$، معادلهٔ خطی است که از دو نقطهٔ $A\begin{bmatrix}x_{۱}\\y_{۱}\end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix}x_{۲}\\y_{۲}\end{bmatrix}$ می‌گذرد. لازم به ذکر است که هر دو رابطه، صورت یک معادله‌اند.

مثال: معادلهٔ خط راستی را بنویسید که از دو نقطهٔ $A\begin{bmatrix}۴\\۳\end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix}-۱\\-۱۲\end{bmatrix}$ می‌گذرد.

حل: مطابق بحث اخیر داریم:

$$(y-۳)=\left(\frac{۳-(-۱۲)}{۴-(-۱)}\right)(x-۴)$$

یا

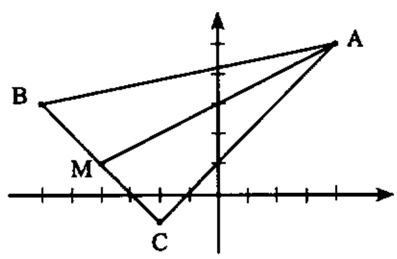
$$(y+۱۲)=\left(\frac{۳-(-۱۲)}{۴-(-۱)}\right)(x+۱)$$

پس از ساده کردن هر یک از روابط بالا، به معادلهٔ $y=۳x-۹$ خواهیم رسید.

مثال: نقاط $A\begin{bmatrix}۴\\۵\end{bmatrix}$، $B\begin{bmatrix}-۶\\۳\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}-۲\\-۱\end{bmatrix}$ مختصات سه رأس یک مثلثند. معادلهٔ خطی را بنویسید که میانهٔ ضلع BC برآن واقع است.

حل: میانهٔ ضلع BC از رأس A و از نقطهٔ M وسط ضلع BC می‌گذرد، مختصات نقطهٔ M برابر است با:

$$M=\begin{bmatrix}\dfrac{x_B+x_C}{۲}\\[2mm]\dfrac{y_B+y_C}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{-۶-۲}{۲}\\[2mm]\dfrac{۳-۱}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۴\\۱\end{bmatrix}$$



بنابراین باید معادلهٔ خطی را بنویسیم که از دو نقطهٔ $\begin{bmatrix}۴\\۵\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}-۴\\۱\end{bmatrix}$ می‌گذرد. داریم:

$$(y-۵)=\left(\frac{۵-(+۱)}{۴-(-۴)}\right)(x-۴)$$
$$\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x+۳$$

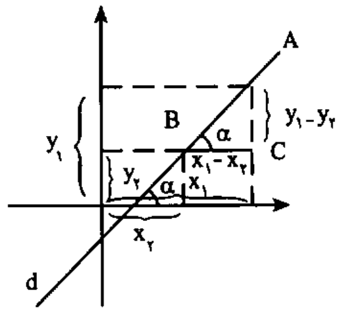
ضریب زاویه یا شیب خط

نشان دادیم رابطهٔ $(y-y_1)=\left[\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right](x-x_1)$ معادلهٔ خطی است که از دو نقطهٔ $A\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$ می‌گذرد.

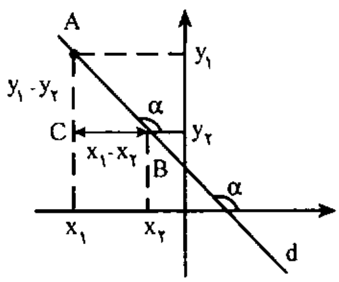
رابطهٔ اخیر از فرض معادلهٔ خط به صورت $y=mx+n$ و سپس محاسبهٔ مقادیر m و n بر حسب مقادیر معلوم x_1، x_2، y_1 و y_2 به دست آمد که در آن داشتیم:

$$m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

اکنون به شکلهای زیر توجه کنید. خط d، خطی است که از دو نقطهٔ $A\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$ می‌گذرد و ضمن قطع کردن محور طولها با جهت مثبت محور طولها زاویهٔ α را تشکیل می‌دهد.



الف)



ب)

از نقاط A و B، مطابق شکل، خطوطی به موازات دو محور رسم می‌کنیم. مثلث ABC را در هر یک از شکلها در نظر بگیرید. با توجه به شکل، واضح است که داریم:

$$\angle ABC=\alpha\ ,\ AC=y_1-y_2\ ,\ BC=x_1-x_2$$

بنابراین داریم:

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{AC}{BC}=\operatorname{tg}\alpha$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید، نسبت $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ برابر با تانژانت زاویه‌ای است که خط d با جهت مثبت محور طولها می‌سازد.

به اصطلاح، نسبت $m=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ را در معادلهٔ $(y-y_1)=\left[\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right](x-x_1)$ یا $y=mx+n$ ضریب زاویه یا شیب خط مورد نظر می‌نامند که مقدار آن برابر است با تانژانت زاویه‌ای که خط مورد نظر با جهت مثبت محور طولها می‌سازد.

مثال: ضریب‌زاویهٔ خطی که از دو نقطهٔ $A\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix}-3\\-2\end{bmatrix}$ می‌گذرد، چند است؟

حل: $m=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{5-(-2)}{4-(-3)}=\dfrac{7}{7}=1$

مثال: خطی که از نقاط $\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\2\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ می‌گذرد، با جهت مثبت محور طولها چه زاویه‌ای می‌سازد.

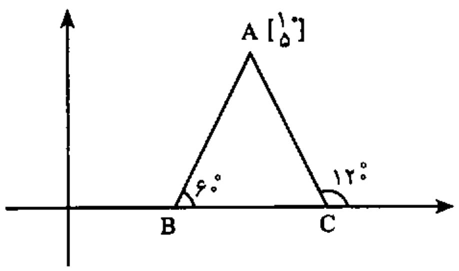
حل: اگر زاویه‌ای را که این خط با جهت مثبت محور طولها می‌سازد، α فرض کنیم، داریم:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{2-1}{\sqrt{3}-0}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\alpha=\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}^{*}=\frac{\pi}{6}$$

مثال: مثلث متساوی‌الاضلاعی را که یکی از اضلاع آن بر محور طولها واقع است، در نظر بگیرید. اگر نقطهٔ $A\begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix}$ یکی از رئوس این مثلث باشد، معادلهٔ دو ضلع غیرواقع بر محور طولها را بنویسید.

حل: با توجه به شکل، واضح است که دو ضلع مثلث با محور طولها زاویه‌های ۱۲۰° و ۶۰° می‌سازند.



بنابراین داریم:

$$\text{معادلهٔ AB}:(y-5)=\operatorname{tg}60^\circ(x-10)$$

$$\Rightarrow(y-5)=\sqrt{3}(x-10)$$

* . $\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$ (آرک تانژانت $\frac{\sqrt{3}}{3}$) برابر زاویه‌ای است که در فاصلهٔ $(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ باشد و مقدار تانژانت آن برابر با $\frac{\sqrt{3}}{3}$ باشد. که بدیهی است تانژانت $\frac{\pi}{6}$ یا ۳۰° برابر با $\frac{\sqrt{3}}{3}$ است.

معادلهٔ AC : $(y - ۵) = tg۱۲۰^\circ(x - ۱۰)$

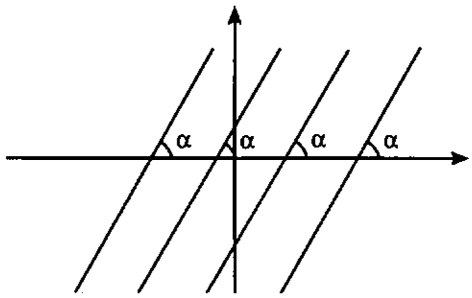
$$\Rightarrow (y - ۵) = -\sqrt{۳}(x - ۱۰)$$

$$(tg۱۲۰^\circ = -tg۶۰^\circ = -\sqrt{۳})$$

نتیجه بحث: مقدار m در خطی که معادلهٔ آن به یکی از دو صورت $y = mx + n$ یا $y - y_۱ = m(x - x_۱)$ است، ضریب زاویه یا شیب آن خط می‌باشد.

خطوط موازی

به شکل زیر توجه کنید. دو یا چند خط موازی، زاویه‌های برابر با جهت مثبت محور طولها می‌سازند.



بنابراین تانژانت زاویه‌هایی که این خطوط با محور طولها می‌سازند، مقداری برابر است. در نتیجه می‌توان گفت، ضریب زاویه یا شیب خطوط موازی با هم برابرند.

مثال: به ازای کدام مقدار a خط $L: ۲y - ax = ۳$ موازی نیمساز ربع اوّل و سوم است.

حل: از آن‌جا که معادلهٔ نیمساز ربع اول و سوم به صورت $y = x$ می‌باشد، پس ضریب زاویهٔ آن برابر با ۱ است. و چون خط L با نیمساز ربع اول و سوم موازی است، باید ضریب زاویه‌ای برابر داشته باشند.

$$L: ۲y - ax = ۳ \Rightarrow y = \frac{a}{۲}x + \frac{۳}{۲}$$

بنابراین :

$$\frac{a}{۲} = ۱ \Rightarrow a = ۲$$

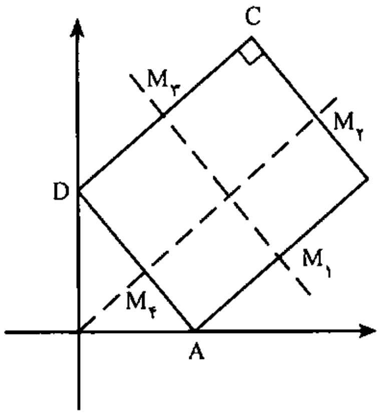
مثال: اگر یک ضلع متوازی الاضلاع بر خط $d: y + ۲x = ۴$ منطبق باشد، معادلهٔ ضلع روبه‌رو به آن را در صورتی که بدانیم از نقطهٔ $\begin{bmatrix}۱۰\\۱\end{bmatrix}$ می‌گذرد، بنویسید.

حل: از آن‌جا که ضلع روبه‌رو به ضلع یاد شده، موازی آن است، پس هر دو خط، ضریب زاویه‌ای برابر دارند. شیب خط d برابر با ۲- است. پس شیب خط مورد نظر نیز برابر با ۲- است، و داریم:

$$y - ۱ = -۲(x - ۱۰) \Rightarrow y = ۲x + ۲۱$$

مثال: چهارنقطهٔ $A\begin{bmatrix}۴\\۰\end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix}۱۰\\۶\end{bmatrix}$ و $C\begin{bmatrix}۶\\۱۰\end{bmatrix}$ و $D\begin{bmatrix}۰\\۴\end{bmatrix}$ چهار رأس مستطیل ABCD می‌باشند. ضمن نمایش مستطیل روی صفحهٔ مختصات، معادله‌های خطوطی را که محورهای تقارن این مستطیل بر آن واقعند، بنویسید.

حل:



مطابق شکل، محورهای تقارن مستطیل، خطوطی هستند که از اوساط دو ضلع مقابل به موازات دو ضلع مجاور رسم شوند. اگر اوساط اضلاع AB، BC، CD و DA را به ترتیب $M_۱$، $M_۲$، $M_۳$ و $M_۴$ بنامیم، مختصات این نقاط عبارتند از:

$$M_۱ = \begin{bmatrix}\frac{۴+۱۰}{۲}\\[4pt] \frac{۰+۶}{۲}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۷\\ ۳\end{bmatrix} \qquad M_۲ = \begin{bmatrix}\frac{۱۰+۶}{۲}\\[4pt] \frac{۶+۱۰}{۲}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۸\\ ۸\end{bmatrix}$$

$$M_۳ = \begin{bmatrix}\frac{۰+۶}{۲}\\[4pt] \frac{۴+۱۰}{۲}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۳\\ ۷\end{bmatrix} \qquad M_۴ = \begin{bmatrix}\frac{۰+۴}{۲}\\[4pt] \frac{۴+۰}{۲}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۲\\ ۲\end{bmatrix}$$

بنابراین معادله‌های محورهای تقارن این مستطیل عبارتند از:

الف) $(y - ۲) = (\frac{۸-۲}{۸-۲})(x - ۲)$ یا $y = x$

ب) $(y - ۳) = (\frac{۷-۳}{۳-۷})(x - ۷)$ یا $y = -x + ۱۰$

راه حل دیگر: با توجه به این‌که $M_۱M_۳$ موازی AD می‌باشد و با معلوم بودن مختصات نقطهٔ $M_۱$ داریم:

الف) $(y - ۳) = (\frac{۰-۴}{۴-۰})(x - ۷) \Rightarrow y = -x + ۱۰$

و با توجه به موازی بودن $M_۲M_۴$ با AB و معلوم بودن مختصات $M_۲$ داریم:

ب) $(y - ۸) = (\frac{۴-۱۰}{۰-۶})(x - ۸) \Rightarrow y = x$

محاسبه محیط بیضی

(به روش تحلیلی، با تقریب مناسب)

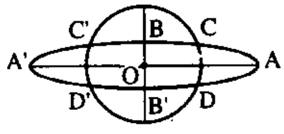
● سیّد محمد رضا هاشمی موسوی

برای محاسبهٔ محیط بیضی، ابتدا فرض می‌کنیم که محیط دایره‌ای دقیقاً برابر محیط بیضی است. سپس تلاش می‌کنیم محیط این دایره را حساب کنیم. به عبارت دیگر، می‌خواهیم دایره‌ای به دست آوریم که محیطش برابر محیط بیضی باشد. بدیهی است که شعاع چنین دایره‌ای باید تابعی از a و b باشد. (a و b به ترتیب نصف قطر بزرگ و نصف قطر کوچک بیضی هستند.)

حال برای این منظور، ابتدا معادلات بیضی و دایرهٔ مفروض (به شعاع R) را می‌نویسیم. سپس دایره را با بیضی قطع می‌دهیم؛ یعنی:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ x^2+y^2=R^2 \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \\ y=\pm\sqrt{R^2-x^2} \end{array} \right.$$

(R شعاع دایره مطلوب است.)



پس از قطع دایره با بیضی: $\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=\pm\sqrt{R^2-x^2}$

پس از محاسبهٔ x و y :
$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} x=\pm\frac{a}{c}\sqrt{R^2-b^2} \\ y=\pm\frac{b}{c}\sqrt{a^2-R^2} \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} C\left(\frac{a}{c}\sqrt{R^2-b^2} \;\text{و}\; \frac{b}{c}\sqrt{a^2-R^2}\right) \\ C'\left(-\frac{a}{c}\sqrt{R^2-b^2} \;\text{و}\; \frac{b}{c}\sqrt{a^2-R^2}\right) \\ D\left(\frac{a}{c}\sqrt{R^2-b^2} \;\text{و}\; -\frac{b}{c}\sqrt{a^2-R^2}\right) \\ D'\left(-\frac{a}{c}\sqrt{R^2-b^2} \;\text{و}\; -\frac{b}{c}\sqrt{a^2-R^2}\right) \end{array} \right.$$

از مختصات نقاط تقاطع نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} a^2-R^2\geq 0 \\ R^2-b^2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow b\leq R\leq a$$

از محاسبهٔ فاصلهٔ نقاط تقاطع نتیجه می‌شود که، نقاط تقاطع، مستطیلی به طول L و عرض l را مشخص می‌کنند:

طول مستطیل $L=\frac{2a}{c}\sqrt{R^2-b^2}$

عرض مستطیل $l = \frac{2b}{c}\sqrt{a^2 - R^2}$

از شرط $a \leq R \leq b$ نتیجه می‌شود که دایره مطلوب، بیضی را در چهار نقطه قطع می‌کند، بنابراین دایرهٔ مطلوب از دایرهٔ اصلی بیضی کوچک‌تر و از تصویر دایرهٔ اصلی بزرگتر است؛ یعنی میان دو دایرهٔ فوق محدود است.

از آن جا که شرط کردیم محیط دایرهٔ مطلوب، برابر محیط بیضی است، بنابر این شرط، باید شعاع دایرهٔ مطلوب، تابعی از a و b باشد؛ زیرا محیط بیضی، تابعی از a و b است.

می‌دانیم که قطر هر مستطیل، تابعی از طول و عرض آن مستطیل است؛ بنابراین چون قطر مستطیل برابر قطر دایره است، از یک طرف باید تابعی از L و l باشد و از طرف دیگر، باید تابعی از a و b. از این جا نتیجه می‌گیریم که این مستطیل، رابطه‌ای با مستطیل محیطی بیضی دارد. این رابطه به این قرار است که طول و عرض مستطیل فوق، تابعی از a و b هستند (زیرا قطر مستطیل فوق، تابعی از a و b است).

در این جا ثابت شد که L و l به ترتیب تابعی از a و b هستند. بدیهی است که توابع فوق، نمی‌توانند دارای عدد ثابت باشند (زیرا هرگاه a=۰ و b=۰، آن گاه L و l برابر صفرند). از طرفی داریم:

$$\begin{cases} L = \left(\frac{2\sqrt{R^2 - b^2}}{c}\right) a \\ l = \left(\frac{2\sqrt{a^2 - R^2}}{c}\right) b \end{cases} \qquad (1)$$

از رابطهٔ (۱) و آنچه که گفته شد، نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} L = 2\alpha a \\ l = 2\beta b \end{cases} \qquad (2)$$

(α و β اعداد ثابتی هستند.)

بدیهی است که مقدار α و β چنین هستند:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{R^2 - b^2}}{c} = \alpha \\ \frac{\sqrt{a^2 - R^2}}{c} = \beta \end{cases} \qquad (3)$$

از رابطهٔ (۳) روابط زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} \alpha c = \sqrt{R^2 - b^2} \\ \beta c = \sqrt{a^2 - R^2} \end{cases} \; ; \quad \begin{cases} \alpha^2 c^2 = R^2 - b^2 \\ \beta^2 c^2 = a^2 - R^2 \end{cases} \qquad (4)$$

(می‌دانیم: $a^2 = b^2 + c^2$)

از جمع روابط (۴) چنین نتیجه می‌شود:

$$(\alpha^2 + \beta^2)\, c^2 = a^2 - b^2 \; ; \; \alpha^2 + \beta^2 = 1 \qquad (5)$$

از تفاضل روابط (۴) نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$(\alpha^2 - \beta^2)\, c^2 = 2R^2 - (a^2 + b^2) \qquad (6)$$

با توجه به رابطهٔ (۵)، رابطهٔ (۶) چنین می‌شود:

$$(1 - 2\beta^2)\, c^2 = 2R^2 - (a^2 + b^2) \; ;$$
$$2R^2 = a^2 + b^2 + (1 - 2\beta^2)c^2$$

در این جا شعاع دایرهٔ مطلوب، بر حسب مقدار نامعلوم β معین می‌شود، یعنی:

$$R = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2) + \left(\frac{1}{2} - \beta^2\right) c^2} \qquad (7)$$

رابطهٔ (۷) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$R = a\sqrt{1 - k^2\beta^2} \; \left(k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right) \qquad (8)$$

حال از رابطهٔ (۸) محیط بیضی را بر حسب β می‌نویسیم:

$$p = 2\pi a\sqrt{1 - k^2\beta^2} \qquad (9)$$

حال از رابطهٔ (۹) ماکزیمم و می‌نیمم β را محاسبه می‌کنیم و از آن جا حدود β مشخص می‌شود. حال برای محاسبهٔ ماکزیمم β چنین عمل می‌کنیم:

$$(p = 4a \Leftrightarrow b = 0)$$
$$4a = 2\pi a\sqrt{1 - \beta_M^2} \; ; \; 2 = \pi\sqrt{1 - \beta_M^2}$$
$$\beta_M = \frac{\sqrt{\pi^2 - 4}}{\pi} \doteq 0/771 \qquad (9)'$$

حال مقدار می‌نیمم β را محاسبه می‌کنیم. برای این منظور، بین دستور (۹) و مساحت بیضی، b را حذف می‌کنیم. از حذف b، معادلهٔ درجهٔ دوم زیر که ریشه‌هایش a^2 و b^2 است، تشکیل خواهد شد:

$$\left| \begin{array}{l} p = 2\pi a\sqrt{1 - k^2\beta^2} = 2\pi\sqrt{(1 - \beta^2)a^2 + \beta^2 b^2} \\ S = \pi ab \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 = (1 - \beta^2)a^2 + \beta^2 b^2 \\ \left(\frac{S}{\pi}\right)^2 = a^2 b^2 \end{array} \right.$$

$$(1 - \beta^2)X^2 - \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 X + \left(\frac{S}{\pi}\right)^2 \beta^2 = 0 \qquad (10)$$

مبین معادلهٔ (۱۰) را تشکیل می‌دهیم:

$$\Delta = \left(\frac{p}{2\pi}\right)^4 - 4(1 - \beta^2)\left(\frac{S}{\pi}\right)^2 \beta^2$$

حال اگر مبین معادلهٔ فوق را برابر صفر قرار دهیم، معادله دارای ریشهٔ مضاعف a^2 یا b^2 می‌شود، بنابراین:

$$(p = 2\pi a \text{ و } S = \pi a^2) \Leftrightarrow \Delta = 0 \; ; \; 4\beta_m^2(1 - \beta_m^2) = 1 \; ;$$

$$\beta_m = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0/707 \qquad (11)$$

بنابراین، در این جا از روابط (۹)' و (۱۱) حدود β و از آن جا حدود بیضی به دست خواهد آمد.

حدود β: (۱۲)
$$\frac{\sqrt{2}}{2} \le \beta \le \frac{\sqrt{\pi^2 - 4}}{\pi}$$
$$(0/707 \le \beta \le 0/771)$$

حال با در دست داشتن حدود β حدود محیط بیضی را می‌توان محاسبه کرد. بنابراین، برای محاسبهٔ حدود محیط بیضی، کافی است مقدار β را بر حسب R در رابطهٔ (۱۲) قرار دهیم:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \le \frac{\sqrt{a^2 - R^2}}{c} \le \frac{\sqrt{\pi^2 - 4}}{\pi} \qquad (13)$$

از رابطهٔ (۱۳) حدود R را محاسبه می‌کنیم و از آن جا حدود محیط بیضی محاسبه می‌شود. بنابراین، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \le \frac{\sqrt{a^2 - R^2}}{c} \le \frac{\sqrt{\pi^2 - 4}}{\pi}$$

$$\frac{1}{2} \le \frac{a^2 - R^2}{c^2} \le \frac{\pi^2 - 4}{\pi^2} \Rightarrow$$

$$a^2 - \frac{\pi^2 - 4}{\pi^2} c^2 \le R^2 \le a^2 - \frac{c^2}{2}$$

$$\frac{4a^2 + (\pi^2 - 4)b^2}{\pi^2} \le R^2 \le \frac{a^2 + b^2}{2}$$

$$\frac{1}{\pi}\sqrt{4a^2 + (\pi^2 - 4)b^2} \le R \le \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)} \qquad (14)$$

حال با در دست داشتن شعاع دایرهٔ مطلوب، می‌توان حدود محیط بیضی را نوشت. در این جا دو دستور برای محیط بیضی به دست می‌آوریم که یکی از آنها محیط بیضی را با تقریب اضافی و دیگری محیط بیضی را با تقریب نقصانی می‌دهد. برای به دست آوردن دو دستور فوق، کافی است که مقدار 2π را در رابطهٔ (۱۴) ضرب کنیم و به جای $2\pi R$ مقدار مساوی آن p را جانشین کنیم؛ بنابراین:

$$\frac{2\pi}{\pi}\sqrt{4a^2 + (\pi^2 - 4)b^2} \le 2\pi R \le 2\pi\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}$$
$$p = 2\pi R$$
$$2\sqrt{4a^2 + (\pi^2 - 4)b^2} \le p \le 2\pi\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)} \qquad (15)$$

بنابراین فرمول‌های تقریبی (نقصانی و اضافی) چنین هستند.

دستور محیط بیضی با تقریب اضافی:
$$p = 2\pi\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)} \qquad (16)$$

دستور محیط بیضی با تقریب نقصانی:
$$p = 2\sqrt{4a^2 + (\pi^2 - 4)b^2} \qquad (17)$$

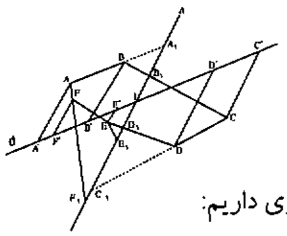
رابطهٔ (۱۵) حدود محیط بیضی را نشان می‌دهد، و روابط (۱۶) و (۱۷) دستورهای محیط بیضی هستند، که لازم به تذکر است هرگاه بیضی به دایره نزدیک باشد، بهتر است از رابطهٔ (۱۶) استفاده شود و هنگامی که بیضی به خط مستقیم 4a نزدیک می‌شود، از دستور (۱۷) استفاده شود، یعنی دستور (۱۶) برای حالتی از بیضی است که داریم: $c \to 0$ و دستور (۱۷) برای حالتی از بیضی است که داریم: $b \to 0$.

در حالت کلی می‌توان از دستور (۱۶) استفاده کرد که آن را می‌توان دستور محیط بیضی با تقریب اضافی نامید، بنابراین دستور محیط بیضی با تقریب اضافی، چنین است:

$$p = 2\pi\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}$$

پاسخ مسألهٔ مسابقه‌ای برهان ۲۴

حل: خط دلخواه d غیر موازی با خط Δ را در نظر می‌گیریم و نقطهٔ برخورد Δ، D را I می‌نامیم. از رأسهای A، B، C، D، E و F خطهایی موازی Δ رسم می‌کنیم تا خط d را به ترتیب در نقطه‌های A'، B'، C'، D'، E' و F' قطع کنند.



بنا به ویژگی خطهای موازی داریم:

$$\frac{\overline{A_1A}}{\overline{A_1B}} = \frac{\overline{IA'}}{\overline{IB'}}, \frac{\overline{B_1B}}{\overline{B_1C}} = \frac{\overline{IB'}}{\overline{IC'}}, \frac{\overline{C_1C}}{\overline{C_1D}} = \frac{\overline{IC'}}{\overline{ID'}}, \frac{\overline{D_1D}}{\overline{D_1E}} = \frac{\overline{ID'}}{\overline{IE'}}$$

$$\frac{\overline{E_1E}}{\overline{E_1F}} = \frac{\overline{IE'}}{\overline{IF'}}, \frac{\overline{F_1F}}{\overline{F_1A}} = \frac{\overline{IF'}}{\overline{IA'}}$$

از ضرب کردن طرفهای متناظر رابطه‌های بالا نتیجه می‌شود:

$$\frac{\overline{A_1A}}{\overline{A_1B}} \times \frac{\overline{B_1B}}{\overline{B_1C}} \times \frac{\overline{C_1C}}{\overline{C_1D}} \times \frac{\overline{D_1D}}{\overline{D_1E}} \times \frac{\overline{E_1E}}{\overline{E_1F}} \times \frac{\overline{F_1E}}{\overline{E_1A}} = 1$$

عکس این قضیه درست نیست. زیرا اگر رابطه بالا برقرار باشد، الزامی وجود ندارد که نقطه‌های A_1، B_1، C_1، D_1، E_1 و F_1 روی یک خط راست باشند.

ریاضیات تفریحی

● غلامرضا یاسی‌پور

کاشیکاری و خطا

حمید آقا و زنش، مریم بانو، و بچهٔ شیرخوارشان اصلان، تازه از دردسر و مکافات اسباب کشی به یکی از این آپارتمان‌های نقلی جدید و مدرن راحت شده‌اند و شروع به استفاده از مزایای خانهٔ جدیدشان کرده‌اند؛ به خصوص مریم خانم از این که دیگر لازم نیست از پله‌های باریک خانهٔ قبلی‌شان بالا و پایین برود، خیلی خوشحال بود. اما وضعیت حمّام خانه را که دید، حالش گرفته شد.

فریاد کشید: «حمید! حمید بیا این جا!»

حمید آقا با اکراه از اتاق مطالعه‌اش بیرون آمد ـ اتاق مطالعه‌ای که با یک مبل راحتی و یک قفسهٔ پر از کتاب‌های دلخواه حمید آقا مجهز شده بود ـ و از راهروی دراز منجر به حمّام گذشت و گفت:

ـ بله، عزیزم!

ـ حمید، آیا بنّا قول نداده بود که دیوار حمّام را کاملاً کاشیکاری کند؟

ـ البته که قول داده بود عزیزم!

ـ پس چرا انجام نداده! دیوارها با گچ ساده رها شده‌اند و یک جعبهٔ بزرگ پر از کاشی، گوشهٔ حمّام جا مانده!

حمید آقا با حالتی تسلیم‌آمیز گفت: «همین حالا بهش تلفن می‌کنم.»

به این ترتیب بود که حمید آقا تلفن کرد. جواب طرف چنین بود: «بله قربون، بله؛ حق به جانب شماس، قربون. خوب، با مشکل کوچکی برخورد کردیم. منظورم اینه که کاشی‌های سفارشی شما، کاشی‌های فانتزی‌ای با شکلای عجیب و غریبی بودن، خُب ... نمی‌تونیم اونا رو پهلوی هم قرار بدیم.»

ـ ببخشید، چی فرمودید؟

ـ کاشیکارمون می‌گه یه مقدار فاصله بین اونا ایجاد می‌شه.

حمید آقا با عصبانیت ریشش را خاراند و گفت: «مسخره‌اس! هیچ وقت چنین عذر احمقانه‌ای را در مدت عمرم نشنیده بودم!»

ـ ممکنه همین طور باشد قربون؛ اما این مشکل، مارو حسابی گیج و ویج کرده.

ـ چرا چند تا از آنها را برای ساختن مستطیل پهلوی هم قرار نمی‌دید تا بعد، از مستطیل‌های حاصل شده برای دیوار استفاده کنید؟

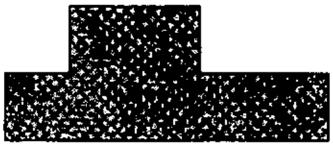
ـ خُب، عرض شود کاشیکارمون راجع به اینم فکر کرده. اتفاقاً روش کارمون همینه. اما، گیر کار این جاست که نمی‌شه با اونا مستطیل ساخت. گرچه باید این رو هم بدونین که تنها راه کاشیکاری کردنِ دیوار، ساختن مستطیل نیس.

حمید آقای ما که تمام فکر و ذکرش متوجه حلّ مسأله از طریق مستطیل‌بندی بود، بلافاصله جواب داد: «چرنده!»

استاد بنّا با عذرخواهی گفت: «از کاشیکار خواسـتم یه حملهٔ دیگه به مسأله بکنه. ایشالاّ تا سه هفته بعد از چهارشنبهٔ آینده، کار رو انجام می‌ده.»

حمید آقا پاسخ داد: «مزخرفه! خودم انجامش می‌دم!» و گوشی را محکم روی تلفن کوبید و به حمّام رفت، و در حالی که برای همسرش دربارهٔ بساز و بفروش‌ها داد سخن می‌داد، درِ جعبهٔ کاشی‌ها را باز کرد.

گفت: «هوم. بعله! شکل کاشی‌ها کمی غیرمعموله (شکل ۸). اما فکر نمی‌کنم سخت باشد. مسأله اینه که چطور اونارو پهلوی هم بذاریم تا مستطیل دُرُس بشه. په، باید آسون باشد ...!»



شکل (۸): کاشی حمّام آپارتمان حمیدآقا. آیا می توانید از پهلوی هم قرار دادن این کاشی‌ها مستطیلی بسازید؟

تعداد n ـ مربعی‌ها

n	P(n)	Q(n)
۱	۱	۱
۲	۱	۲
۳	۲	۶
۴	۵	۱۹
۵	۱۲	۶۳
۶	۳۵	۲۱۶
۷	۱۰۸	۷۶۰
۸	۳۶۹	۲,۷۲۵
۹	۱,۲۸۵	۹,۹۱۰
۱۰	۴,۶۵۵	۳۶,۴۴۶
۱۱	۱۷,۰۷۳	۱۳۵,۲۶۸
۱۲	۶۳,۶۰۰	۵۰۵,۸۶۱
۱۳	۲۳۸,۵۹۱	۱,۹۰۳,۸۹۰
۱۴	۹۰۱,۹۷۵	۷,۲۰۴,۸۷۴
۱۵	۳,۴۲۶,۵۷۶	۲۷,۳۹۴,۶۶۶
۱۶	۱۳,۰۷۹,۲۵۵	۱۰۴,۵۹۲,۹۳۷
۱۷	۵۰,۱۰۷,۹۱۱	۴۰۰,۷۹۵,۸۶۰
۱۸	۱۹۲,۶۲۲,۰۵۲	۱,۵۴۰,۸۲۰,۵۴۲

دو روز گذشت و حمید آقا مأیوس‌تر و مأیوس‌تر می‌شد. بالاخره مجبور شد با دوست قدیمی و ریاضیدانش احمدخان، که در مؤسسهٔ ریاضیات کار می‌کرد، مشورتی داشته باشد.

احمد خان، بعد از مقداری فکر، گفت: «جالبه. این طور که معلومه، کاشی شما به شکل چند مربعی "polyomino" است؛ یعنی یک شکل مسطّح تشکیل شده از به هم پیوستن لبه به لبهٔ مجموعه‌ای از مربع‌های هم اندازه، به طوری که گوشه‌هایشان روی هم قرار گیرند. اگر به n مربع از مربع‌هایی چنین نیاز داشته باشیم، آن را n مربعی می‌نامیم. تعداد n مربعی‌ها با n سریعاً افزایش می‌یابد.» (جدول بالا را ملاحظه کنید.)

احمد خان ادامه داد: «برای دقیق ساختن مسأله، اجازه بده از روشی پیروی کنم که **دیوید کلارنر** "David Klarner" در سال ۱۹۶۹ با توجه به آن، مرتبهٔ یک چند مربعی را این گونه تعریف کرد: کمترین تعداد کپی برای تشکیل یک مستطیل؛

البته با این فرض که این کار ممکن باشد؛ چه در غیر این صورت، ترتیب مذکور تعریف نمی‌شود.»

مسأله (۱): آیا می‌توانید یک چند مربعی را تصور کنید که دارای مرتبه نباشد؛ یعنی نتواند سطح یک مستطیل را بپوشاند؟ مستطیل مورد بحث می‌تواند (تا زمانی که مستطیل بماند) به هر شکل و هر اندازه باشد.

در شکل (۹)، چند مثال از چند مربعی‌هایی با مرتبه‌های گوناگون نشان داده‌ایم. توجه داشته باشید که برای اثبات این که یک چند مربعی دارای مرتبه‌ای مثلاً m، است، باید دو کار را انجام دهیم:

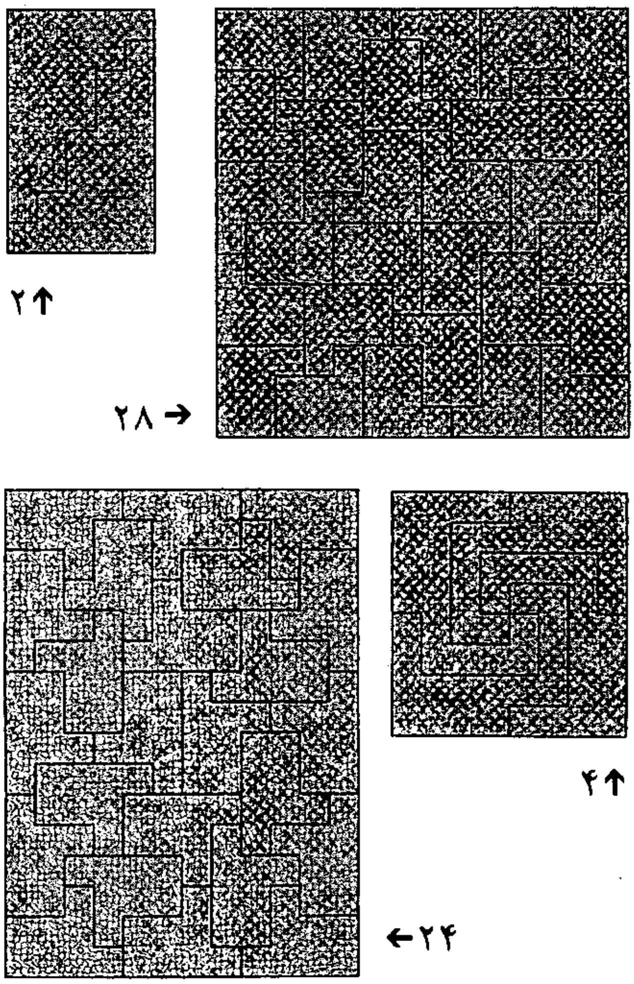
الف) راهی برای تشکیل یک مستطیل با m کپی یا مورد بیابیم.

ب) ثابت کنیم هیچ تعداد کپی کمتر از m، مستطیل نمی‌سازد.

ممکن است تصور کنیم قسمت (الف) مشکل‌تر است؛ اما اغلب این (ب) است که موجب زحمت می‌شود. در مورد هر اندازه و شکل معلوم مستطیل و هر چند مربعی مفروض، می‌توان در تئوری مشخص کرد که چند مربعی مزبور می‌تواند مستطیل معلوم را تشکیل دهد یا خیر. اما تنها روش سیستماتیک شناخته شده، روش هوشمندانهٔ آزمایش و خطا "trial-and-error" است و این روش، حتی برای مستطیل‌های با اندازهٔ متعادل نیز، به سرعت غیرعملی می‌شود.

در این مورد، هیچ روش عمومی *کارایی* شناخته شده نیست و در این زمینه، مسائل حل نشدهٔ بسیاری وجود دارد. حوزهٔ مورد بحث برای علاقه‌مندان ریاضیات تفریحی، کاملاً باز است.

احمد خان به حمید آقا گفت: «حالا، کاشیمان به گونه‌ای فریبنده، مثال ساده‌ای از هفت مربعی است؛ یعنی یک چند مربعی ساخته شده از هفت مربع. در واقع، آنچه را که به آن نیاز داریم، این است که مشخص کنیم مستطیل مورد بحث دارای مرتبه‌ای هست یا نه؟ و اگر هست، این مرتبه کدام است؟ اما من تصور می‌کنم مسألهٔ اصلی این است که شروع کار با هفت مربعی، کمی جاه‌طلبانه باشد. در این صورت، چرا کار را با یک مربعی، دو مربعی، سه مربعی، چهار مربعی یا پنج مربعی آغاز نکنیم؟»



شکل (۹): چند مربعی‌های از مرتبهٔ ۲، ۴، ۲۴ و ۲۸

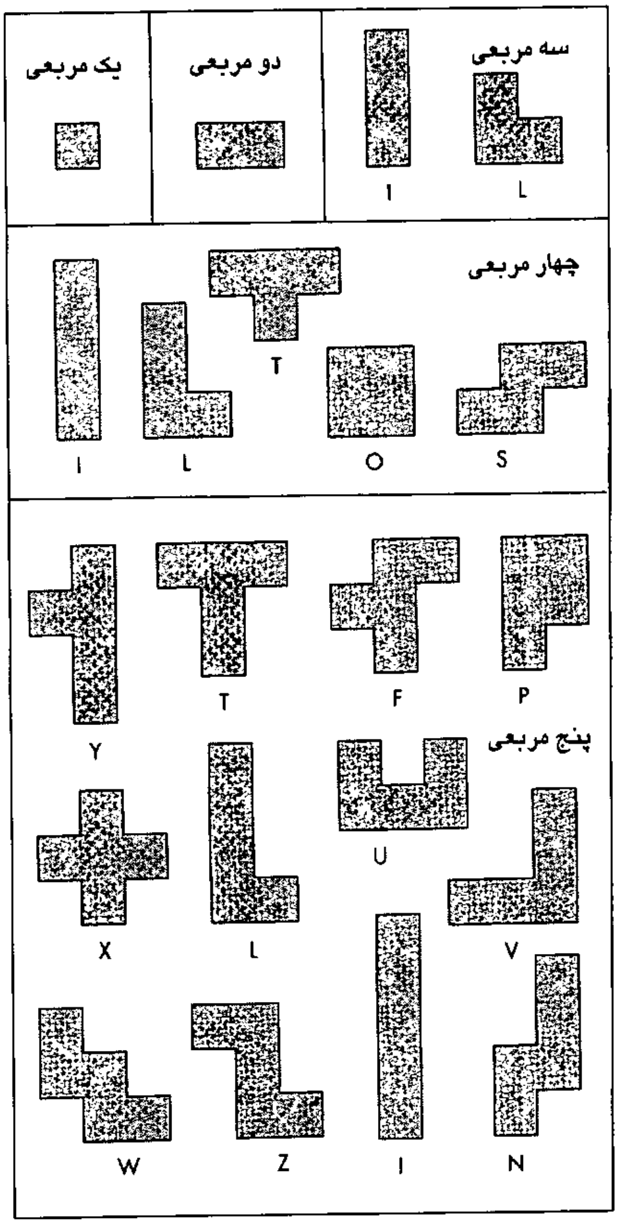
مسألهٔ (۲): در شکل (۱۰)، n ـ مربعی‌های ممکن را به ازای n = ۱,۲,۳,۴,۵ نشان داده‌ایم. آیا می‌توانید مرتبهٔ آنها را مشخص کنید؟

راهنمایی: ممکن است مورد Y ـ پنج ضلعی، موجب زحمت شود؛ اما می‌توان آن را انجام داد.

احمد خان گفت: «آها! حتی در این مرحلهٔ آغازی هم می‌توان بعضی از اصول کلی را ملاحظه کرد. واضح است که یک چند مربعی اگر و تنها اگر یک مستطیل باشد، دارای مرتبهٔ ۱ است.»

حمید آقا گفت: «احمد خان! اگر حرف مهمّت همینه، بهتره به خونه برم و کار هیجان‌انگیزتری مثل دیدن رشد و نمو کاکتوس‌ها را انجام بدم.»

احمد خان با کج‌خلقی گفت: «صرفاً ملاحظهٔ یک واقعیت؛ چرا که حتی بدیهی‌ترین واقعیت‌ها نیز می‌توانند



شکل (۱۰): جمیع n ـ مربعی‌ها به ازای $n \leq 5$

مفید باشند. اما حالا اجازه بده مواردِ کمی مشکل‌تر را مورد بررسی قرار دهیم. چند مربعی از مرتبهٔ ۲، بنا به تعریف، از بریدن یک مستطیل به دو تکهٔ برابر حاصل می‌شود. برای رسیدن به این منظور، خط برش باید تحت دوران °۱۸۰ متقارن باشد. این عمل مشخصه‌ای کارا از تمام چند مربعی‌های از مرتبهٔ ۲ به دست می‌دهد ، نیز سودمند است؛ زیرا معروف‌ترین مثال‌های چند مربعی‌هایی که *دارای* مرتبه‌اند، مرتبهٔ ۲ دارند.

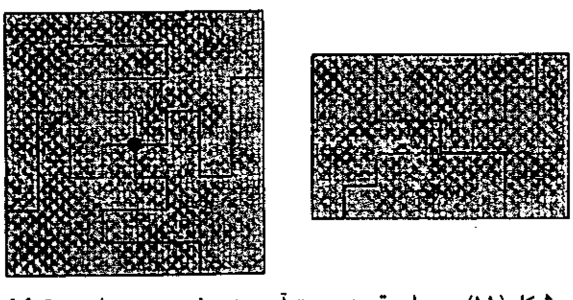
ـ مرتبهٔ ۳ مورد پیچیده‌تری است. کلارنر در سال ۱۹۶۹ حدس زده که چند مربعی‌های از مرتبهٔ ۳ وجود ندارند. وی این را نیز اضافه می‌کند که: «این ایده از لحاظ شهودی آشکار است؛ اما تنظیم اثباتی دقیق برای آن، مشکل به نظر می‌رسد. تا آن جا که من مطّلعم، در این مورد هنوز کسی اثباتی انتشار نداده است و مقاله‌ای که در سال ۱۹۸۹ نوشته شده، به طور ضمنی، به این مسائل به عنوان مسائل حل نشده اشاره می‌کند. اما در این مورد، حق به جانب کلارنر است؛ چرا که من، یعنی احمد خان، به تازگی اثباتی برای این قضیه به دست آورده‌ام.»

مسأله (۳): آیا می‌توانید حدس کلارنر را اثبات کنید؟

اثبات احمد خان، پیچیده‌تر از آن است که در این جا داده شود. جالب توجه است که اثبات مزبور، استفادهٔ وسیعی از استدلال‌های متقارن به عمل می‌آورد. (احمد خان به تازگی آن را در مقاله‌ای مشترک با من به چاپ رساند؛ چه احمد خان به علت کمرویی زیاد، به تنهایی مایل به چاپ آثارش نیست.)

حمید آقا، که حالت تحقیق به خود گرفته بود، پرسید: «دربارهٔ مرتبهٔ ۴ چه؟» آشکار بود که مدتی طول می‌کشد تا احمد خان سری به حمّام مریم خانم بزند؛ اما حمید آقا هم عجله‌ای در این مورد نداشت. به طور قطع و یقین هم نداشت؛ به خصوص اگر برای مسأله راه‌حلی وجود نداشته *باشد*، که به طور تهدیدکننده‌ای می‌رفت که چنین باشد.

احمد خان گفت: «حدس زده‌اند که چند مربعی‌های مرتبهٔ ۴، دقیقاً به دو طریق ایجاد می‌شوند (شکل ۱۱).»



شکل (۱۱): دو طریق به دست آوردن چند مربعی‌های مرتبهٔ ۴

به نظر می‌رسد که اثبات این مطلب احتمالاً پیچیده باشد. خوب، من خودم اثباتی به دست نیاورده‌ام؛ اما بعید نیست که پیدا شود.

ـ مرتبهٔ ۵ چی؟

ـ هیچ کس نمی‌داند. تا این اواخر، تنها مرتبه‌های شناخته شدهٔ بزرگتر از ۴ عبارتند از ۱۰، ۱۸، ۲۴، ۲۸، ۷۶ و ۹۲.

حمید آقا گفت: «این عددها، اعداد بسیار جالبی هستند.»

احمد خان با موافقت گفت: «قطعاً چنین‌اند و در صورتی که تنها موارد ممکن باشند، ۹۲ عددی بسیار نامتعارف است؛ بزرگترین مرتبهٔ چند مربعی ممکن.»

- هوم. آیا ۹۲ ویژگی‌های نامتعارف دیگری دارد؟

احمد خان نسخه‌ای از کتاب David Well به نام *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers* را از قفسهٔ کتابخانه‌اش بیرون کشید و گفت: «در این جا که مطلبی دربارهٔ آن وجود ندارد.»

حمید آقا گفت: «شاید این عدد جالب و شگفت‌انگیز نیست.»

احمد خان جواب داد: «دربارهٔ این موضوع، لطیفه‌ای از ریاضیدانان تعریف می‌کنند. دربارهٔ این قضیه که هر عدد جالب است. اثبات قضیه چنین است: اگر عددی جالب نباشد، در این صورت باید یک **کوچکترین** عدد ناجالب موجود باشد، و البته این عدد، در واقع، عددی بسیار جالب خواهد بود! بنابراین، تناقضی منطقی ایجاد می‌شود که مستلزم آن است که فرض وجود عدد ناجالب، باید نادرست باشد.»

حمید آقا گفت: «اوه، بله؛ اما این عدد غیرمتعارف هم است؟»

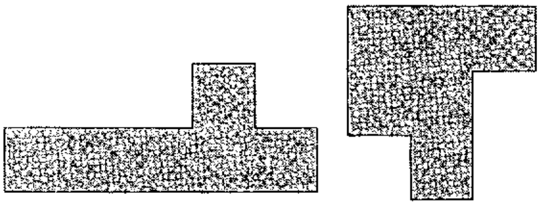
احمد خان جواب داد: «نمی‌دانم. سؤال بسیار دقیقی است، گرچه ممکن است خارج از موضوع باشد؛ زیرا در سال ۱۹۸۹ **سولومون گولوم** "Solomon Golomb" ثابت کرد هر مضرب ۴ ی می‌تواند یک مرتبه باشد.»

حمید آقا گفت: «در مورد کاشیکاری حمّام خانهٔ ما چی؟»

احمد خان پاسخ داد: «کاشی‌های شما **هفت مربعی‌اند**؛ در حالی که من هنوز مورد **شش مربعی‌ها** را تمام نکرده‌ام. بسیار خوب، در این مورد دقیقاً ۳۵ شش مربعی موجود است، و مشخص شده که درست ۱۰ مورد از آنها یک مستطیل تشکیل می‌دهد. در این جا چند سرنخ به دست می‌دهم و خودت می‌توانی سعی کنی آنها را بیابی. دو موردشان از مرتبهٔ ۱ هستند، پنج مورد از مرتبهٔ ۲، و یکی هم از مرتبهٔ ۴.»

احمد خان به سرعت کاغذ و مدادی برداشت و طرحی برای حمید آقا کشید.

- این یک چند مربعی (شکل ۱۲ الف) از مرتبهٔ ۱۸ است. ممکن است دوست داشته باشی ۱۸ کپی از آن تهیه کنی و آنها را برای تشکیل یک مستطیل ۹×۱۲، پهلوی هم بگذاری. تا این اواخر، یک حالت، یعنی Y - شش مربعی، وجود داشت که در آن پاسخ مسأله نامشخص بود (شکل ۱۲ ب)؛ اما در سال ۱۹۸۹ **کارل دالکه** "Karl Dahlke" اثبات کرد که Y - شش مربعی دارای مرتبهٔ ۹۲ است. قبلاً گفتم که دربارهٔ این موضوع بیشتر صحبت می‌کنم و می‌بینی که به قولم عمل کردم.



الف　　　ب

شکل (۱۲): الف. یک شش مربعی از مرتبهٔ ۱۸ ب. Y - شش مربعی، که مرتبه‌اش تا سال ۱۹۸۹ معلوم نبود.

مسأله (۴): آیا می‌توانید هشت شش مربعی از مرتبهٔ ۴ یا کمتر را پیدا کنید؟ آیا می‌توانید با استفاده از چند مربعیِ شکلِ ۱۲ الف، یک مستطیل بسازید؟ در صورت تمایل، می‌توانید سعی در یافتن این موضوع داشته باشید که چگونه می‌شود ۹۲ Y - شش مربعی را برای ساختن یک مستطیل ۲۳×۲۴ پهلوی هم قرار داد؛ امّا بدانید که دالکه این کار را با استفاده از زبان برنامه‌نویسی C و سه روز کار بر یک ریزکامپیوتر انجام داده است.

- بله احمد خان. تو این را هم قول دادی که مطالبی هم در مورد کاشیکاری حمّام مریم خانم بگویی.

- البته. این موضوع تا اندازه‌ای مسحورکننده است. توجه داشته باش، باز هم تا این اواخر، تنها یک هفت مربعی با مرتبه‌ای بیشتر از ۲ شناخته شده بود. بقیه، با یک استثنا، یا مستطیل ۱×۷ بودند، یا با استفاده از ساختارهایی که قبلاً برای مرتبهٔ ۲ داده‌ام، معلوم شده بودند و یا مشخص شده بود که مرتبه ندارند. تنها هفت مربعیِ مرتبه بالا توسط **جیمز استیوارت** "James Stuart"، از Endwell, New York کشف

شده بود این هفت مربعی دارای مرتبهٔ ۲۸ است (شکل ۹ را ملاحظه کنید).

- اوه! و هفت مربعی کاشی حمّام ما چی؟

- البته که نه! نه، اتفاقاً کاشی شما تنها موردی است که وضعیتش ....

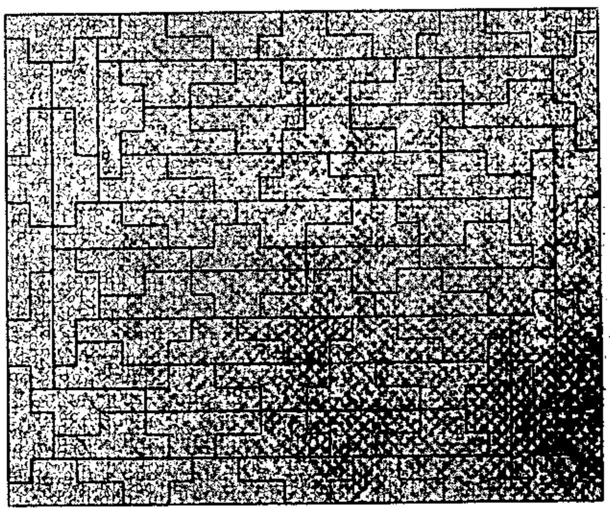
حمید آقا با شنیدن این حرف، کلمهٔ زشتی به زبان آورد.

احمد خان جمله‌اش را تمام کرد: «... تا این اواخر مشخص نشده بود، و در این مورد باز هم کارل دالکه به دادت رسیده است! وی در سال ۱۹۸۹ برنامهٔ Y - شش مربعی خود را بار دیگر اصلاح کرد و به اثبات رساند، که کاشی هفت مربعی شما دقیقاً دارای مرتبهٔ ۷۸ است.» (شکل ۱۳). (به خوانندهٔ هشیار مطلبی نسبتاً غریب را دربارهٔ مقالهٔ دالکه خاطرنشان می‌کنیم: عنوان مقاله بر این است که ترتیب مورد بحث ۷۶ است؛ اما تصویری که به عنوان اثبات به دست داده، از ۷۸ هفت مربعی استفاده کرده است.)

حمید آقا از دوستش تشکّر فراوان کرد و با عجله به خانه رفت تا ماجرا را برای مریم خانم شرح دهد، و در راه می‌اندیشید که **به شدت تحت تأثیر قرار خواهد گرفت!** هنگامی که وارد خانه شد، زنش را مشغول پختن غذا دید.

- مریم بانو، من مسألهٔ کاشی‌ها را شکست دادم!

مریم بانو پاسخ داد: «با این شرط که خود **کاشی‌ها** را شکست ندهی.»



شکل (۱۳): پاسخ مسألهٔ حمید آقا برای کاشیکاری حمامش، با مستطیلی تشکیل شده از ۷۸ هفت مربعی.

- شوخی نمی‌کنم! در این مورد تمام کاری که باید انجام بدهی، برداشتن ۷۸ کاشی و تشکیل یک مستطیل از آنهاست!

- حمید، بعضی وقت‌ها تو خیلی باهوش می‌شی. خبر خوبی آوردی! همین حالا شروع به کار می‌کنیم. تو ۷۸ کاشی بشمار و من دیوارها را تمیز می‌کنم.

این را گفت و با حالتی شکوهمندانه از آشپزخانه خارج شد و به طرف حمّام رفت. حمید آقا هم به دنبالش راه افتاد.

مریم خانم با دقت به تراشیدن دیوارها پرداخت و حمید آقا جعبهٔ کاشی‌ها را بلند کرد، و پیش خودش فکر کرد: «**شاید برچسب جعبه تعداد کاشی‌ها را مشخص کند، در این صورت معلوم می‌شود چند کاشی را باید بیرون بیاورم.**» و جعبه را گرداند. نوشته بود:

حمید آقا کلمهٔ زشت دیگری به زبان آورد؛ اما به قدری آهسته که مریم خانم نشنود. با حالتی عصبی به طرف همسرش برگشت و گفت: «بانو جان، فکر می‌کنم باز هم با مشکل کوچکی مواجه شده‌ایم ....»

پاسخها

۱. شاید ساده‌ترین مثال از یک چند مربعی که نمی‌تواند یک مستطیل را بپوشاند، هفت مربعی تشکیل شده از یک مربع ۳×۳ با یک سوراخ باشد. پر کردن سوراخ همان چیزی است که باعث مشکل می‌شود.

۲. یک مربعی و دو مربعی مستطیل‌اند و در نتیجه مرتبهٔ ۱ دارند. به همین ترتیب‌اند I- سه مربعی، I- چهار مربعی، O- چهار مربعی و I- پنج مربعی. L- سه مربعی، L- چهار مربعی، L- پنج مربعی و P- پنج مربعی دارای مرتبه ۲ اند. T - چهار مربعی مرتبهٔ ۴ دارد و Y- پنج مربعی مرتبهٔ ۱۰. (این حالت، تنها حالتی است که باید مدتی به آن وَر بروید؛ در مورد آن، از یک مستطیل ۱۰×۵ استفاده کنید.)

بقیهٔ حالتها ـ S ـ چهار مربعی و T ـ، F ـ، N ـ، X ـ، U ـ، V ـ، W ـ و Z ـ پنج مربعی ـ تشکیل مستطیل نمی‌دهند. اثبات در هر حالت، به سادگی با بررسی وضعیت رخ‌دهنده در گوشهٔ مستطیل متعارفی که تشکیل می‌دهند، به دست می‌آید: قرار دادن تکّه‌های دیگر اجباری است و از هر مورد قرار گیرند، در گوشهٔ مجاور جلوگیری می‌کند.

جدول زیر نتایج فوق را خلاصه کرده است.

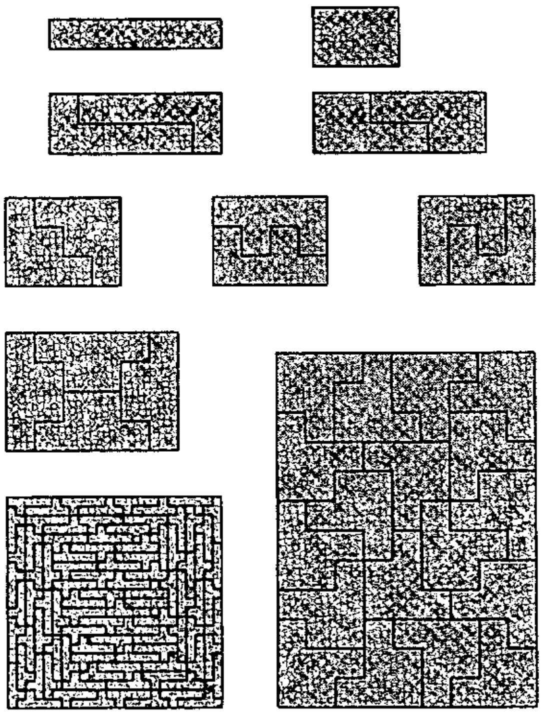
۳. اثبات احمد خان به زودی منتشر می‌شود؛ فهرست خواندنی‌های بیشترِ واقع در پایان این فصل را ملاحظه کنید.

۴. ده شش مربعی با مرتبهٔ متناهی را در شکل (۱۴) نشان داده‌ایم. مورد آخری راه‌حلّ دالکه برای Y ـ شش مربعی است.

جدول مرتبه‌های n ـ چند مربعی‌ها به ازای $n \leq 5$

مرتبه	اندازهٔ مربعی	
۱		یک مربعی
۱		دو مربعی
۱	I	سه مربعی
۲	L	
۱	I, O	چهار مربعی
۲	L	
۴	T	
*	S	
۱	I	پنج مربعی
۲	L, P	
۱۰	Y	
*	F,N,T,U,V,W,X,Z	

*مشخص این است که مرتبهٔ مربوطه تعریف نشده است.



شکل (۱۴): شش مربعی‌های از مرتبهٔ متناهی

خواندنی‌های بیشتر

Dahlke, Karl A. The Y-hexomino has order 92. *Journal of Combinatorial Theory* Series A 51 (1989): 125-26.

—. A heptomino of order 76. *Journal of Combinatorial Theory* Series A 51 (1989): 127-28.

Gardner, Martin. *Mathematical Magic Show*. New York: Alfred A. Knopf, 1977; Harmondsworth, England: Penguin Books, 1985.

Golomb, Solomon W. *Polyominoes*. New York: Scribner, 1965.

—. Tiling with polyominoes. *Journal of Combinatorial Theory* 1 (1966): 280-96.

—. Polyominoes which tile rectangles. *Journal of Combinatorial Theory* Series A 51 (1989): 117-24.

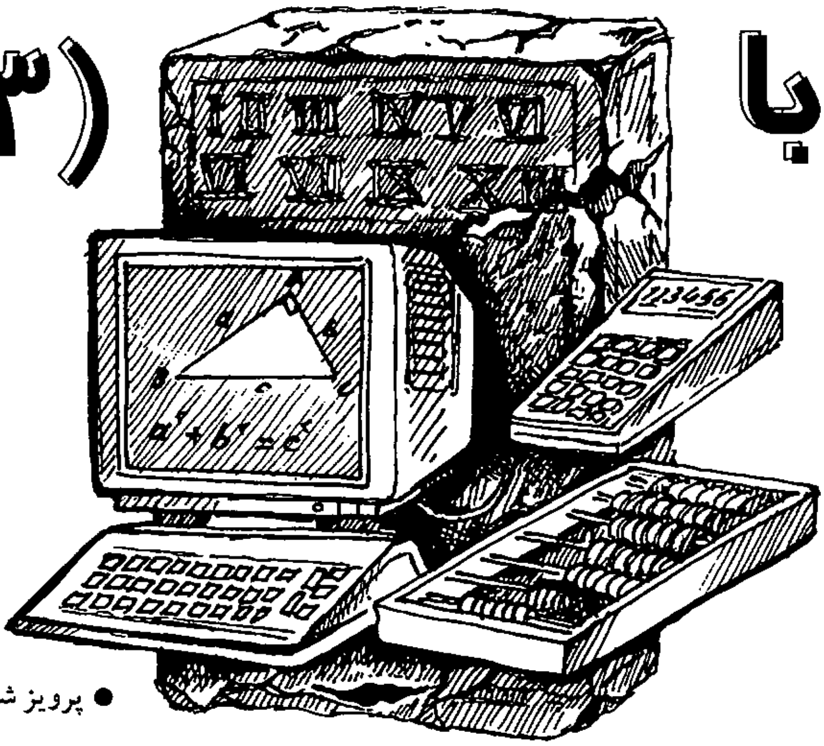
Grünbaum, Branko, and G.C. Shephard. *Tilings and patterns*. New York: W. H. Freeman, 1987.

Klarner, David A. Packing a rectangle with congruent *n*-ominoes. *Journal of Combinatorial Theory* 7 (1969): 107-15.

Stewart, Ian, and Albert Wormstein. Polyominoes of order 3 do not exist. *Journal of Combinatorial Theory* Series A. Forthcoming.

Wells, David. *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers*. Harmondsworth, England: Penguin Books, 1986; New York: Viking Penguin, 1986.

درسهای ریاضیات همراه با (۳)



● پرویز شهریاری

نامگذاری برای عددها، با پیدایش اقتصاد کشاورزی به وجود آمد. در این زمان بود که صاحبان کشتزارها و جانوران خانگی که سخت به آنها وابسته بودند، نه تنها لازم بود حساب اموال خود را داشته باشند؛ بلکه در ضمن بتوانند تعداد آنها را به خاطر آورند و این امر، انگیزه‌ای برای نامگذاری عددها شد. در آغاز این یاد آوردن چیزها، از روی نشانه‌های بیرونی آنها بود. کسی که گلّه‌ای گاو داشت، به این ترتیب به یاد می‌آورد که یکی سفید است، دیگری سیاه است و .... روشن است که وقتی تعداد جانوران زیاد می‌شد، این وسیله برای به یادآوردن همهٔ آنها، دشوار و حتی غیرممکن بود.

مرحلهٔ بعدی در تکامل نامگذاری عدد، مقایسهٔ تعداد چیزها با برخی اندام انسان یا حیوان بود. به جای این که بگویند دو چیز، از عبارت «من به اندازهٔ دست‌های خود دارم» یا «من آن قدر دارم که دست دارم» و برای نامگذاری چهار، می‌گفتند «من آن قدر دارم که حیوان پا دارد» و به این ترتیب، تعداد اندام‌های انسان یا حیوان برای شمردن به کمک می‌آمد.

بعدها این توضیح شفاهی، در بین بسیاری از قوم‌ها، جای نام عددها را گرفت. برای نمونه وقتی عدد دو موردنظرشان بود، می‌گفتند: «گوش‌ها»، «دست‌ها»، «بال‌های پرنده» و به جای چهار «پاهای جانور». آثار این نامگذاری هنوز در بسیاری زبان‌ها وجود دارد، کما این که در زبان فارسی نام عدد پنج از واژهٔ «پنجه» آمده است که به معنای پنج انگشت دست است.

به طور کلی در تکامل بعدی نامگذاری عددها، در رابطه با

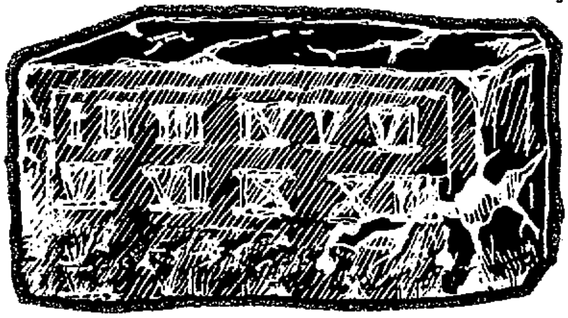
شمارش به وسیلهٔ انگشتان پدید آمد. ساکنان جزیرهٔ «میرالوک» (بین استرالیا و گینه نو) به عدد «پنج» می‌گویند «نابی تت» که «تت» به معنای «دست» است. در «گروئنلند» و «استرالیا» وقتی می‌خواهند عدد «شش» را بیان کنند، چیزی می‌گویند که معادل است با «یک انگشت از دست دیگر»؛ «ده» را با جملهٔ «دو دست» بیان می‌کنند؛ «یازده» با «جایی که دو دست و یک انگشت» است؛ «بیست» با «آدم» بیان می‌کنند، زیرا آدم ۲۰ انگشت دارد. بومیان رودخانهٔ «اُری نُوکُو» (از قبیله تاماناکی) برای بیان «بیست و یک» جملهٔ «یکی از دست و دیگری آدم» به کار می‌برند. برای عددهای بعدی باید با روش شمارش آنها آشنا باشیم: در کنار کسی که چیزی را می‌شمارد، چند نفر ایستاده‌اند؛ اوّلی با انگشتان دست و پا می‌شمارد تا به ۲۰ برسد، سپس نفر دوم کار را ادامه می‌دهد. در بین اسکیموهای امریکای شمالی، «آدم» به معنای ۲۰ و «پنج آدم» به معنای ۱۰۰ است.

از آنچه گفته شد، می‌بینیم چگونه انسان به تدریج توانست به شمار دست یابد و چگونه مجموعهٔ عددهای درست را تصور می‌کرده است. این عددها، که امروز به نام عددهای طبیعی می‌شناسیم، برای بیان مجموعه‌ای از چیزها مورد استفاده قرار می‌گرفت. از همین استفادهٔ از انگشتان بود که دستگاه عددشماری پدید آمد.

حتی در بین ملت‌هایی که زبان آنها به خوبی تکامل یافته بود، برای عددهای جداگانه نامی نداشتند؛ زیرا دنبالهٔ عددها بی‌نهایت است. به طور معمول، اساس شمار بر پایهٔ چند نامگذاری بود که از آنها برای بیان عددهای بزرگتر استفاده می‌کردند. برای خرده فرهنگ‌ها این امر لازم بود: عقب‌ماندگی تکامل زبان از تکامل شمار، این امر را ایجاب می‌کرد که برای بیان عددهای بزرگ، از همان نامگذاری‌های موجود استفاده کنند و این، گاهی به دشواری برمی‌خورد. از جمله «یان‌کوس‌ها» در کنار رود «آمازون» بیشتر از «سه» را نمی‌توانستند بشمارند؛ زیرا کلام ساده‌ای برای عدد «سه» در زبان آنها نبود و برای عدد «سه» از واژهٔ «پوئه تارا رو ری‌کوآ روآک» استفاده می‌کردند. البته، این نامگذاری، پیش از استفادهٔ از انگشتان بود.

حساب انگشتی به تدریج منجر به منظّم‌کردن عددها شد و انسان به خودی خود به سمت تنظیم عددها رفت: جملهٔ طولانی «ده انگشت در هر دو دست و یک انگشت از یک پا» که برای عدد ۱۱ به کار می‌رفت، به صورت «انگشتی از پا» خلاصه شد. برای عدد ۲۳، به جای «ده انگشت در هر دو دست، ده انگشت در هر دو پا، و سه انگشت در دست یک نفر دیگر» به سادگی گفته شد «سه انگشت نفر دیگر».

این ساده کردن در حالت پیش رفتهٔ خود، منجر به جدا کردن واحد مرتبهٔ بالاتر شد. در واقع، نامگذاری‌هایی مثل «دست» برای «پنج»، «دو دست» برای نامیدن «ده»، «پا» برای «پانزده»، «آدم» برای نامگذاری «بیست» و ...، کار مرتبه‌های بالاتر را نسبت به «انگشت» انجام می‌دادند و «انگشت» نقش واحد مرتبهٔ پایین را انجام می‌داد. به این مفهوم، جملهٔ «یکی در دست دیگری» به معنای «شش» بود. می‌توان متوجه شد که چگونه مبنای «پنج» شکل می‌گیرد: «یکی از پنج تای دوم» یا «پنج و یک» که در آن «یک» واحد مرتبهٔ پایین و «پنج» یعنی «دست» واحد مرتبهٔ بالاتر می‌شود. درست به همین ترتیب، نامگذاری «دو تا از پا» به معنای «دوازده»، به معنای این است که دو واحد از دهه دوم گرفته‌ایم؛ همین جمله را می‌توان این طور گفت «دو دست و ده انگشت» که در آن «دو دست» نقش واحد مرتبهٔ بالاتر را، نسبت به انگشت به عهده دارد. و به این ترتیب، به تدریج دستگاه عدد شماری مخصوص به خودی پدید آمد.



کهن‌ترین دستگاه عدد شماری، دو دویی (دستگاه به مبنای ۲) بود. این دستگاه وقتی به وجود آمد که هنوز برای شمردن از انگشتان استفاده نمی‌شد: یک دست را واحد مرتبهٔ پایین و دو دست را با هم واحد مرتبهٔ بالاتر به حساب می‌آوردند. آثار این دستگاه عدد شماری را در زمان ما هم،

حتی بین ملت‌هایی که تا اندازهٔ زیادی پیش‌رفته‌اند، مشاهده می‌کنیم. در واحدهایی که برای وزن پیش از قبول دستگاه متری در ایران وجود داشت، از نصف کردن هر وزن، وزن دیگری به دست می‌آوردند: یک من (نزدیک به ۳ کیلوگرم)، نیم من ($\frac{1}{2}$ من)، چارک (همان چهار یک = $\frac{1}{4}$ من)، سی سنگ (نصف چارک)، هفدرم (یا هفت درم = $\frac{1}{2}$ سی سنگ) و ... که یادآور دستگاه دو دویی است. بعضی از بومیان استرالیا و پولی‌نزی، تا همین چند دهه پیش، از دستگاه دو دویی عددشماری استفاده می‌کردند.

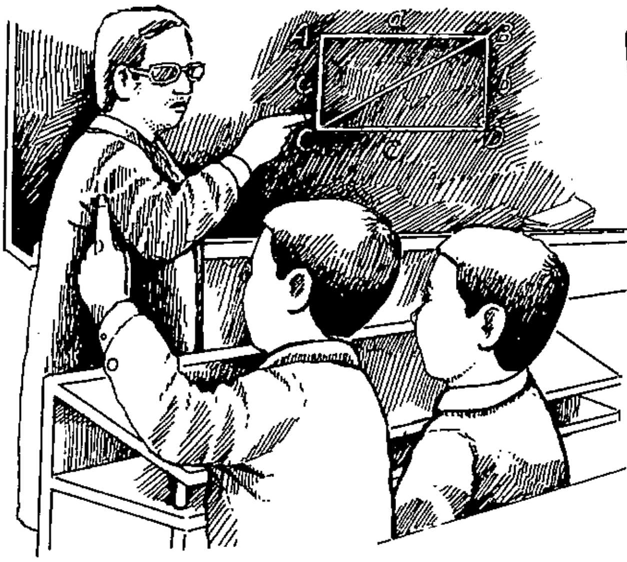
از جمله، در بین برخی قبیله‌های جزیره‌های تنگهٔ «کوره شو» تنها عددهای یک «اوراپون» و دو «اوکوزا» را می‌شناسند. براساس این دو عدد، جریان عدد شماری ادامه می‌یابد: عدد سه را «اُوکوزا اوراپون»، چهار را «اوکوزا اوکوزا»، پنج را «اوکوزا اوکوزا اوراپون»، شش را «اوکوزا اوکوزا اوکوزا» و ... می‌نامند.

قدیمی‌ترین دستگاهی که براساس شمردن با انگشتان دست پدید آمد، دستگاه به مبنای پنج بود. این دستگاه، بیش از همه در بین سرخپوستان امریکا معمول بوده است و زمانی به وجود آمده است که انسان تنها با انگشتان یک دست خود می‌شمرد. روشن است که در این حالت، برای عدد پنج، وقتی انگشتان یک دست تمام می‌شد، نشانه‌ای داشتند. دستگاه به مبنای پنج تا این اواخر هم در بعضی قبیله‌ها حفظ شده بود (از جمله، بین مردم ساکن پولینزی و ملانزی).

تکامل بعدی دستگاه شمار، دو مسیر را در پیش گرفت. قوم‌هایی که تنها یک دست را برای شمردن انتخاب نکردند و از دست دوم و حتی انگشتان پا هم برای شمردن استفاده کردند. در ضمن، قوم‌هایی که شمردن را با انگشتان دو دست انجام می‌دادند، پایه‌ای برای دستگاه در مبنای ده به وجود آمد و قوم‌های دیگری، که احتمالاً زیادتر بودند و به انگشتان دو دست بسنده نکردند و این، پایه‌ای برای مبنای ۲۰ شد. از مبنای ۲۰ بیشتر، بومیان امریکای شمالی و ساکنان امریکای جنوبی و مرکزی، و همچنین ساکنان شمال سیبری و افریقا معمول بوده است. هنوز هم آثار مبنای ۲۰ در زبان‌های رایج دنیا دیده می‌شود؛ از جمله در زبان فرانسوی بین عدد «دو» (که به فرانسوی هم «دو» می‌گویند) با «بیست» (به فرانسوی «وَن») هیچ ارتباطی ندارد، در حالی که میان «سه» با «سی» یا «چهار» با «چهل» نزدیکی وجود دارد. بجز آن، فرانسوی‌ها امروز هم به «هشتاد» می‌گویند «چهار بیست تا» و به «نود» «چهار بیست تا و ده تا». در زبان فارسی عدد «دو» با عدد «بیست» هیچ نزدیکی ندارد؛ در حالی که «سه» با «سی»، «چهار» با «چهل» و ... به هم نزدیکند.

در زمان ما دستگاه عدد شماری به مبنای ۱۰ را، کم و بیش، در همه جا پذیرفته‌اند؛ ولی این به معنای آن نیست که حتی اروپایی‌ها، همیشه از این دستگاه استفاده می‌کرده‌اند. خیلی از ملت‌ها، تا همین اواخر از دستگاه دیگری استفاده می‌کردند و خیلی وقت نیست که دستگاه به مبنای ۱۰ را به کار می‌برند.

در عدد شماری به مبنای ۲۰، به عدد ۲۰، «آدم» می‌گفتند؛ زیرا «آدم» دارای ۲۰ انگشت است. در این دستگاه، عدد ۴۰ با «دو بیست تا»، عدد ۶۰ با «سه بیست تا» و ... بیان می‌شده است. عدد شماری به مبنای بیست، نقص بزرگی داشت، زیرا برای بیان عددها، به ۲۰ واژهٔ جداگانه نیاز بود. به همین مناسبت، وقتی که در بین بعضی قوم‌ها، عدد شماری در مبنای ۱۰ رایج شد، دیگران هم به تدریج آن را به جای عدد شماری «بیست بیستی» خود انتخاب کردند. کفش‌ها هم، که به تدریج بسیاری از قوم‌ها از آن استفاده می‌کردند و موجب پوشیده شدن انگشتان پا بود، به استفاده از مبنای ده، به جای مبنای بیست کمک کرد. امروز تقریباً اثری از مبنای بیست، جز بعضی نشانه‌ها در زبان باقی نمانده است.



ریاضی را چگــونه یاد بگیریم؟

• احمد قندهاری

نوشتهٔ زیر ترجمه What shoud you do to learn **از کتاب** Calculus for engineers and scientists (1998) **نوشته:** Giardano, Weir, Finney **است.**

۱. نخست باید متن درس را مطالعه کنید. به خاطر داشته باشید که تقریباً هیچ‌کس نمی‌تواند همهٔ معانی و روابط یک مبحث را یکباره یاد بگیرد. این کار با کوشش و تمرین میسّر است.

لازم است بخشهای مربوط به یک مبحث را از کتاب بخوانید و مطالب را از طریق مثال‌ها، گام به گام دنبال کنید. سریع خواندن مطالب ریاضی بی‌فایده است. مطالعه و جست‌وجوی شما برای رسیدن به اجزایی است که با روش منطقی گام به گام انجام می‌شود. این نوع مطالعه که لازمهٔ هر متن با محتوای عمیق و فنی است، نیاز به توجه، پشتکار و تمرین دارد.

۲. تمرین‌ها را انجام دهید و اصول زیر را به خاطر بسپارید.

الف) در صورت امکان، برای مسأله، شکل‌ها را رسم کنید.

ب) راه‌حل‌هایتان را با یک روش منطقی گام به گام و مرتبط، به گونه‌ای که گویی می‌خواهید آنها را برای شخص دیگری توضیح دهید، بنویسید.

پ) در مورد علت طرح هر تمرین فکر کنید. چرا آنها را طرح کرده‌اند و رابطهٔ آنها با سایر تمرین‌های تعیین شده چیست؟

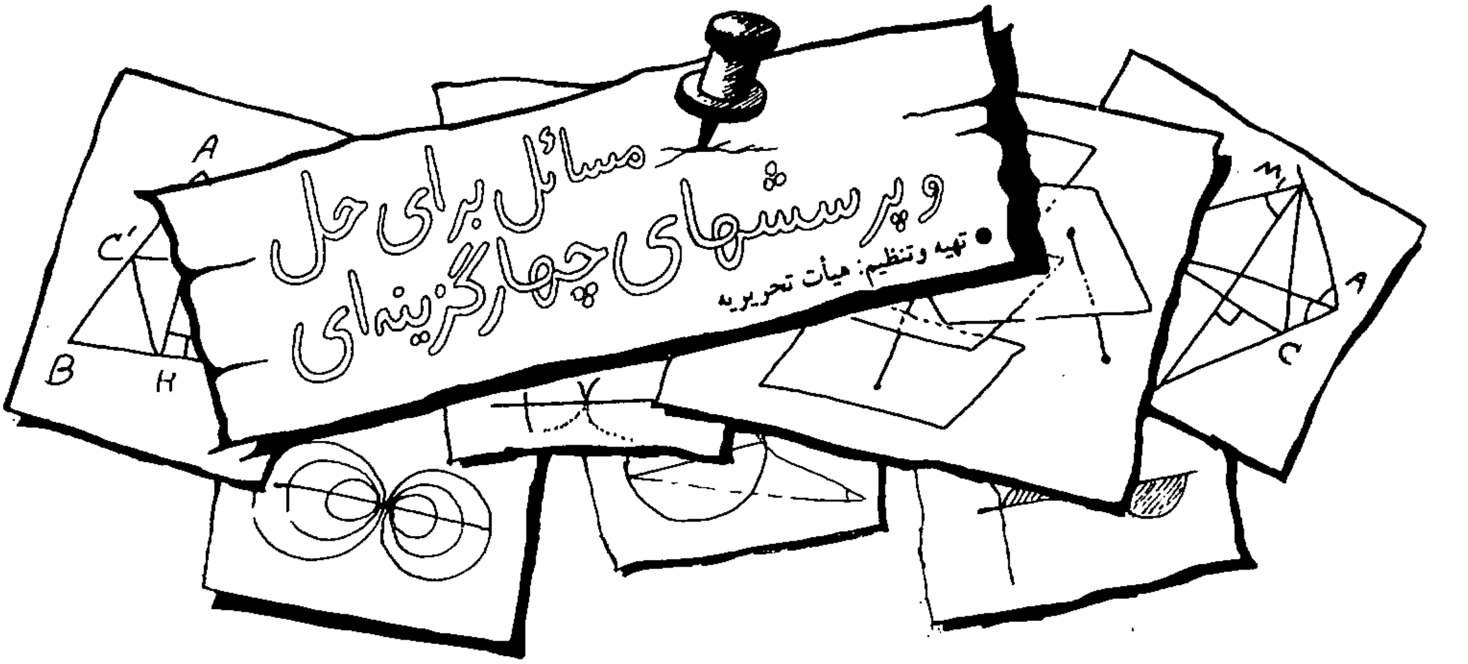
۳. تا آن جا که ممکن است، از ماشین حساب و رایانه استفاده کنید. از سیستم‌های جبری رایانه‌ای (G.A.S) استفاده کنید و نمودارها را تا آن جا که می‌توانید، تمرین کنید؛ حتی اگر به عنوان تمرین درسی، تعیین نشده باشند.

نمودارها از مفاهیم و روابط مهم ریاضی، نمایش دیداری ایجاد و بینش دیداری را تقویت می‌کنند و اعداد مقیاس‌های مهمی را نشان می‌دهند. یک سیستم جبری رایانه‌ای (G.A.S) در کشف مسائل واقعی به شما کمک می‌کند و مثال‌هایی که نیاز به محاسبه دارند و انجام آن‌ها با دست، مشکل و وقت‌گیر است، راحت می‌کند.

سعی کنید توضیحات را به طور خلاصه یادداشت کنید؛ اگر موفّق شدید، احتمالاً موضوع را فهمیده‌اید و اگر موفّق نشدید، تشخیص دهید کجای مطلب برایتان مشکل بوده و نفهمیده باقی مانده است.

یادگیری ریاضی، یک فرایند است، یکباره دست نمی‌دهد. صبور باشید و پشتکار داشته باشید. سؤال‌های خود را با همکلاسیها در میان بگذارید و با آنها کار کنید و تا جایی که لازم است، کمک بگیرید.

یادگیری ریاضی، چه از نظر ذهنی و فکری، و چه از نظر حرفه‌ای، ارضاکننده خواهد بود.



ریاضی سال اوّل

۱. اگر $M(4p-1\ ,\ 3)$ و $N(2\ ,\ 4p)$، به ازای چه مقادیری از P، طول پاره خط $MN=2\sqrt{2}$ است؟

۲. اگر دو خط به معادله‌های $y = nx + 2$ و $y = mx - 2$ در نقطه‌ای به طول ۱- بر هم عمود باشند، مقدار $(m + n)$ کدام است؟

۳. دستگاه معادله‌های خطی $\begin{cases}4x+by=12\\ bx+4y=10\end{cases}$ به ازای چه مقادیری از b جواب ندارد؟

۴. اگر $x = 3 - \sqrt{10}$، حاصل عبارت:
$P=\sqrt{(x-1)^2}-\sqrt{x^2}+x^2+6\sqrt{10}$
را بیابید؟

۵. اگر $x^2 = x - 1$، حاصل x^{78} را بیابید؟

۶. حاصل عبارت $\sqrt{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$، چیست؟

۷. معادلهٔ $\frac{2x}{4x-4}+\frac{4x}{8x+8}=\frac{x}{2}$، چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۸. عبارت $\frac{\sqrt{x}}{x^2-1}+\sqrt{x-1}$ به ازای چه مقادیری از x، عدد حقیقی است؟

۹. اگر $\sqrt[3]{x}=\sqrt[6]{2\sqrt[4]{4}}$، حاصل $\sqrt[5]{x^3}$ را بیابید؟

۱۰. اگر $x+\frac{1}{x}=1$، حاصل $A=\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1^2+x_2^2}$ را بیابید؟ (x_1 و x_2 ریشه‌های معادله می‌باشند.)

ریاضی سال دوم

۱. حاصل عبارت $\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$ را پیدا کنید؟

۲. مقدار عددی $\frac{1}{\sin 10}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10}$ را پیدا کنید؟

۳. زاویهٔ بین بردارهای $\vec{a}=\alpha i-\beta j$ و $\vec{b}=\beta i+\alpha j$ چند درجه است؟

۴. نقاط $A(2,3)$، $B(-2,-4)$ و $C(0,-2)$ مفروضند. حاصل $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ را بیابید؟

۵. از بین ۶ دانش‌آموز کلاس چهارم و ۵ دانش‌آموز کلاس سوم، می‌خواهیم انجمنی را با ۴ دانش‌آموز کلاس چهارم و ۳ دانش‌آموز کلاس سوم تشکیل دهیم. این عمل به چند طریق ممکن است؟

۶. اگر $\binom{n}{1}$، $\binom{n}{2}$ و $\binom{n}{3}$ جمله‌های متوالی یک تصاعد حسابی باشند، مقدار n را بیابید؟

۷. در پرتاب دو تاس با هم، احتمال آن را بیابید که قدر مطلق تفاضل اعداد روی دو تاس مساوی یک باشد؟

۸. شخصی یک تاس را می‌اندازد و اگر عدد رو شده، مضرب ۳ باشد، یک سکه را سه بار پرتاب می‌کند و در غیر این صورت، سکه را دو بار پرتاب می‌کند. احتمال آن که ضمن این اعمال، سکهٔ این شخص حدّاقل دوبار رو بیاید، چقدر است؟

۹. یک عدد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰ را انتخاب می‌کنیم، احتمال آن را بیابید که عدد انتخاب شده مضرب ۲ یا ۳ یا ۵ باشد؟

۱۰. جملهٔ چهارم یک تصاعد حسابی برابر ۵ است. اگر قدر نسبت این تصاعد، عددی صحیح باشد، جملهٔ هفتم آن چیست؟

۱۱. در یک تصاعد هندسی، مجموع سه جملهٔ اوّل، ۳/۵ برابر جمله دوم است. جملهٔ چهارم این تصاعد کدام است؛ اگر جملهٔ اوّل مساوی ۳ باشد؟

حسابان ۲

۱. مجموع عرضهای اکسترمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^3-3x^2+(m-1)x-4$ برابر ۱۲- است، m کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱

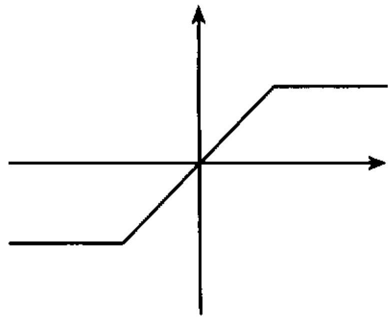
۳) ۱- ۴) ۳

۲. نمودار تابع درجه سوّم به معادلهٔ $f(x)=(x-1)(x^2-2mx+8)$ بر محور xها مماس است، m کدام است؟

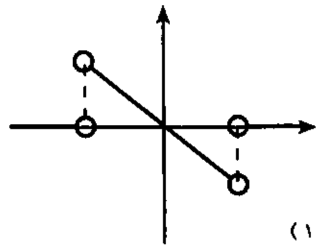
۱) $\{\pm\sqrt{2}\}$ ۲) $\{0\ ,\ \pm\sqrt{2}\}$

۳) $\{\pm2\sqrt{2}\}$ ۴) $\{\frac{9}{2}\ ,\ \pm2\sqrt{2}\}$

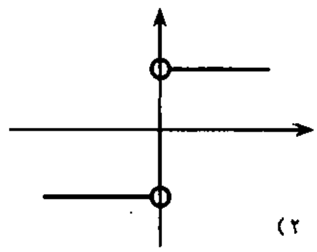
۳. اگر نمودار تابع f به صورت شکل زیر باشد،



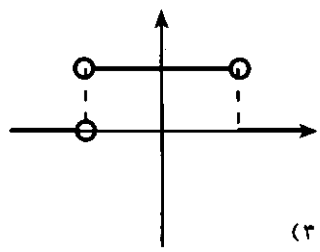
آن گاه نمودار f' کدام است؟



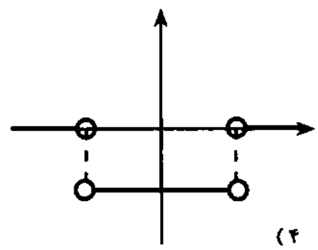
۱)



۲)



۳)



۴)

۴. تناوب اصلی تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\sin4x-\cos4x}{\sin4x+\cos4x}$ برابر است با:

۱) $\frac{3\pi}{2}$ ۲) π

۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

۵. حاصل $\text{Arctan}\frac{x^2+1}{x^2+4}+\text{Arctan}(1+\frac{3}{x^2+1})$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) $\frac{\pi}{4}$

۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{3\pi}{2}$

فرمول $a>0 \quad \text{Arctan}\,a+\text{Arctan}\frac{1}{a}=\frac{\pi}{2}$

۶. نزدیکترین فاصلهٔ مبدأ مختصات از نمودار تابع با ضابطهٔ $y^2=4x+5$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$

۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۲

۷. حاصلضرب دو عدد مثبت ۲۴۳ است، می‌نیمم، حاصل جمع عدد اوّل با ۳ برابر عدد دوّم می‌نیمم باشد، عدد کوچکتر کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸

۳) ۹ ۴) ۱۲

۸. مقدار $\lim_{x\to+\infty}(\frac{2x+5}{2x+4})^{3x}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{e}$ ۲) e

۳) $e\sqrt{e}$ ۴) e^2

۹. اگر $\text{Log}2=0/301$ باشد، $\text{Log}250$ کدام است؟

۱) ۲/۳۹۸ ۲) ۲/۳۹۹

۳) ۲/۴۰۰ ۴) ۲/۴۰۱

۱۰. مشتق تابع با ضابطهٔ $y=x^{2x}$ ، $x>0$ کدام است؟

۱) $x^{2x}(Lnx+1)$ ۲) $2x^{2x}(Lnx+1)$

۳) $4x^{2x}(Lnx+1)$ ۴) $x^{2x}(Lnx-1)$

۱۱. حاصل $\int_0^1\frac{1}{9+9x^2}dx$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{9}$ ۲) $\frac{\pi}{18}$

۳) $\frac{\pi}{32}$ ۴) $\frac{\pi}{36}$

۱۲. اندازهٔ مساحت سطح محصور بین منحنی به معادلهٔ $y=\sin x$ و محور x ها در یک دورهٔ تناوب کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{3}{2}$

۳) ۴ ۴) ۶

هندسهٔ ۲

۱. شکل حاصل از برخورد نیمسازهای زاویه‌های درونی یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، کدام شکل است؟

۱) چهارضلعی محاطی

۲) چهارضلعی محیطی

۳) چهارضلعی محاطی محیطی

۴) یک نقطه

۲. در مثلث PAK ، نقطهٔ M روی ضلع PK قرار دارد. اگر $PM=AK$ ، آن گاه:

۱) $AP>MK$ ۲) $Ap<MK$

۳) $AP=MK$ ۴) $AP=\frac{MK}{2}$

۳. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که در نقطهٔ ثابت A بر دایرهٔ C(O,R) مماسند، کدام شکل است؟

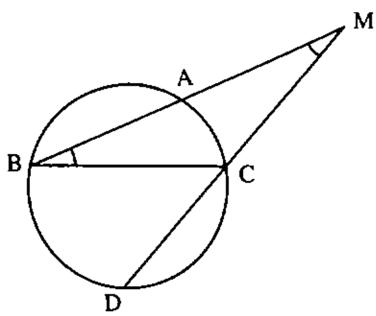
۱) خط مماس بر دایرهٔ (C) در نقطهٔ A

۲) نیمخط OA (به مبدأ O)

۳) دایره‌ای مماس بر دایرهٔ (C) در نقطهٔ A

۴) خط OA

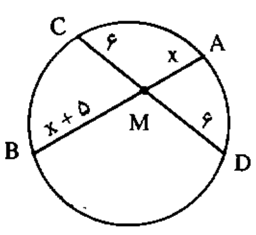
۴. در شکل، $\hat{M}=3\alpha$ ، $\widehat{AC}=\alpha+20°$ و $\widehat{BD}=5\alpha+40°$ است. اندازهٔ زاویهٔ ABC چند درجه است؟



۱) ۳۰ ۲) ۲۵

۳) ۲۰ ۴) ۱۵

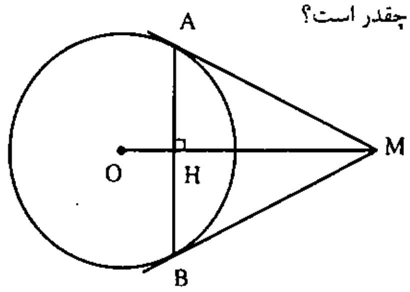
۵. در شکل داده شده، نسبت $\frac{CD}{AB}$ چند است؟



۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱۲}{۱۳}$

۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱۳}{۱۲}$

۶. در شکل MA و MB مماسهای بر دایرهٔ $C(O , ۴)$ در نقطه‌های A ، B و H محل برخورد AB و MO است. اگر $OH = ۲$ باشد، اندازهٔ MA چقدر است؟



۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۳}$

۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۷. دو دایرهٔ (C) و (C') به ترتیب، به شعاعهای ۱۲ سانتیمتر و ۸ سانتیمتر داده شده‌اند. در صورتی که اندازهٔ خط‌المرکزین این دو دایره برابر ۲۴ سانتیمتر باشد، طول مماس مشترک درونی این دو دایره چند است؟

۱) $۴\sqrt{۳۵}$ ۲) $۲\sqrt{۳۵}$

۳) $۴\sqrt{۱۱}$ ۴) $۲\sqrt{۱۱}$

۸. نقطهٔ $A' = (-۱ , ۰)$ تحت انتقال:

$T(x,y) = (x + ۲ , y - ۴)$

به تبدیل یافتهٔ کدام نقطه است؟

۱) $A = (-۳ , ۴)$ ۲) $A = (۰ , ۲)$

۳) $A = (۳ , ۴)$ ۴) $A = (-۱ , ۲)$

۹. اگر نقطه‌های A' و B' به ترتیب، تبدیل یافته‌های دو نقطهٔ $A = (۳ , ۴)$ و $B = (-۲ , ۱)$ تحت تجانس $h(x , y) = (۲x , ۲y)$ باشند، شیب خط A' B' چه‌قدر است؟

۱) $-\frac{۳}{۵}$ ۲) $-\frac{۵}{۳}$

۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۱۰. معادلهٔ تصویر خط $D: x + ۲y - ۳ = ۰$ تحت تبدیل $T(x,y) = (x + ۲ , ۲y - ۳)$ کدام است؟

۱) $x + y - ۴ = ۰$ ۲) $x + y - ۲ = ۰$

۳) $x + y - ۶ = ۰$ ۴) $-x + y - ۸ = ۰$

جبر و احتمال

۱. اگر ۴۰۰ نفر در یک سالن حضور داشته باشند، کدام گزینه نادرست است؟

۱) حدّاقل دو نفر دارای تاریخ تولد یکسان هستند (بدون در نظر گرفتن سال تولد).

۲) حدّاقل دو نفر در یک ماه به دنیا آمده‌اند.

۳) دست کم دو نفر در یک هفتهٔ معین از سال به دنیا آمده‌اند.

۴) حدّاقل ۵۷ نفر در روز شنبه به دنیا آمده‌اند.

۲. اگر $A \subset B$ کدام گزینه نادرست است؟

۱) $B' \cup C \subset A' \cup C$ ۲) $A \cap C = B \cap C$

۳) $B' \cap A' = A'$ ۴) $A \cap B' = \phi$

۳. مجموعهٔ A دارای ۶۳ زیر مجموعهٔ محض است، این مجموعه چند زیر مجموعهٔ ۵ عضوی دارد؟

۱) ۶۴ ۲) ۶

۳) ۱۶ ۴) ۵

۴. اگر $A = \{۲ , ۴ , ۶\}$ و $B = \{۱ , ۳\}$ تعداد رابطه‌های $A \times (A \cap B)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۸ ۴) ۳

۵. کدام مجموعه، هر رابطه‌اش خاصیت تقارنی دارد؟

۱) $\{x , y\}$ ۲) $\{x\}$

۳) $\{x , \phi\}$ ۴) $\{\phi , \{\phi\}\}$

۶. باقیماندهٔ تقسیم $۱ - ۲^{۵n+۳}$ بر ۳۱ برابر کدام عدد است؟

۱) ۳ ۲) ۸

۳) ۷ ۴) ۱۱

۷. دو عدد را تصادفی از بین اعداد $[۰ , ۲]$ انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که هر کدام بزرگتر از ۱ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$

۳) $\frac{۱}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۸. اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند، $P(A) = \frac{۱}{۴}$ و $P(B) = \frac{۲}{۳}$، در این صورت $P(A \cap B')$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$

۳) $\frac{۱۰}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۹. دو تاس را با هم می‌ریزیم. اگر دو عدد متمایز باشند، احتمال آن که مجموع آنها بزرگتر از ۹ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۱۵}$ ۲) $\frac{۳}{۱۵}$

۳) $\frac{۲}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱}{۱۵}$

۱۰. کیسه‌ای حاوی ۴ مهرهٔ قرمز، ۳ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ آبی است. از این کیسه سه مهره تصادفی خارج می‌کنیم، احتمال آن که از رنگ قرمز بر نداشته باشیم، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

حساب دیفرانسیل و انتگرال ۲

۱. منحنی تابع حقیقی با ضابطهٔ $f(x) = \sin x - x$ دربازهٔ $[-۲\pi , ۲\pi]$ چند اکسترمم نسبی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۰

۲. اگر ارتفاع یک موشک پرتاب شده از رابطهٔ $S = f(t) = -t^۳ + ۴۵t^۲ - ۲۴۳t + ۱$ متر در ثانیه مشخص شود، پس از چند ثانیه موشک به حدّاکثر ارتفاع خود می‌رسد؟

۱) ۳ ۲) ۹

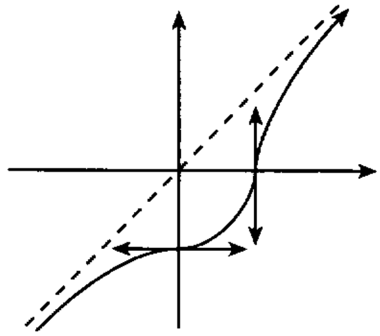
۳) ۲۷ ۴) ۵۴

۳. اگر تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} ۲ & x = ۰ \\ ۱ & x \neq ۰ \end{cases}$ در بازهٔ $[-۱ , ۱]$ مفروض باشد، چنانچه این بازه را به n زیر بازهٔ مساوی افراز کنیم، مجموع پایین ریمان تابع کدام است؟

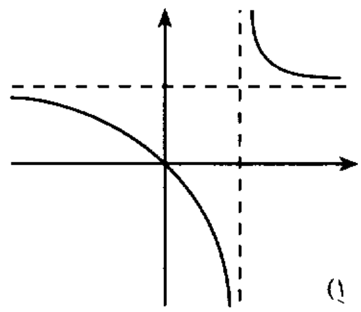
۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) ۲ ۴) ۳

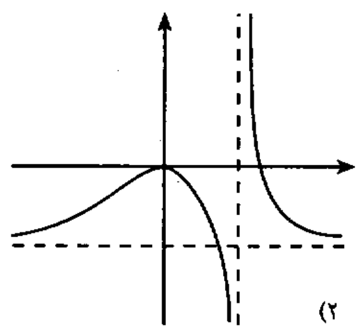
۴. اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد،



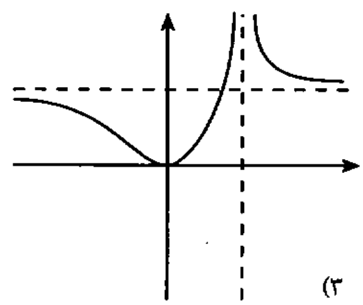
آنگاه نمودار f' کدام است؟



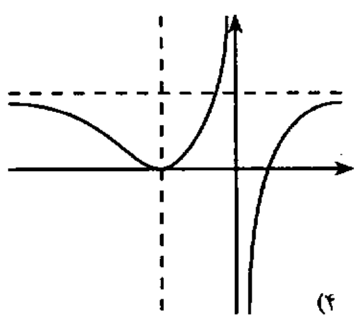
۱)



۲)



۳)



۴)

۵. حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\cos\frac{1}{n}+\cos\frac{2}{n}+\dots+\cos\frac{n}{n})$ برابر است با:

۱) $\cos 1$ ۲) $\sin 1$

۳) $-\sin 1$ ۴) $-\cos 1$

۶. اگر $f''(x)=6x+8$ ، $f'(1)=4$ و $f(0)=2$،

آنگاه $f(1)$ کدام است؟

۱) 0 ۲) 2

۳) -4 ۴) 4

۷. اگر $\int (x^2-2x)\,e^x\,dx=(mx+n)\,e^x$ ،

آنگاه $(4m+2n)$ برابر است با:

۱) -2 ۲) 2

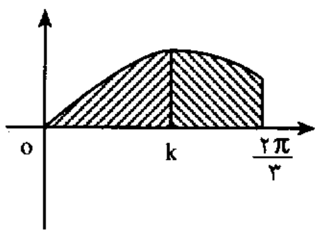
۳) -4 ۴) 4

۸. حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\,d\alpha$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $1-\frac{\pi}{4}$

۳) $2-\frac{\pi}{4}$ ۴) $1-\frac{\pi}{2}$

۹. اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\sin x$ شکل زیر باشد و با فرض $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{4}$ ، k چه عددی باشد تا مساحت دو قسمت شکل مساوی باشد؟



۱) $\frac{\pi}{12}$ ۲) $\frac{\pi}{6}$

۳) $\frac{5\pi}{12}$ ۴) $\frac{7\pi}{12}$

۱۰. تعداد رشد پروانه‌ها در محیطی پس از ۳ ساعت ۲ برابر شده است، پس از ۱۸ ساعت چند برابر می‌شود؟

۱) ۱۸ برابر ۲) ۳۶ برابر

۳) ۴۸ برابر ۴) ۶۴ برابر

ریاضی عمومی ۲

۱. به ازای چه مقدار m ، خط به معادلهٔ $y=x+m$ بر منحنی به معادلهٔ $y=x^2-x$ مماس است؟

۱) 2 ۲) 1

۳) -1 ۴) -2

۲. دو خط با شیب $-\frac{1}{4}$ بر منحنی به معادلهٔ $x^2+4y^2=4$ مماس کرده‌ایم. معادلهٔ خطی که نقاط تماس را به هم وصل می‌کند، کدام است؟

۱) $y=4x$ ۲) $y=2x$

۳) $y=x$ ۴) $y=\frac{1}{2}x$

۳. مشتق تابع $y=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(\tan\frac{x}{2})$ کدام است؟

۱) $\sin\frac{x}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}(1+\tan^2\frac{x}{2})$

۳) $\frac{1}{2\cos x}$ ۴) $\frac{1}{2\sin x}$

۴. نقطهٔ عطف تابع با ضابطهٔ $y=e^{(2x-2x^2)}$ کدام است؟

۱) $(0\,,1)$ ۲) $(e\,,e^{(2e-2e^2)})$

۳) $(-1\,,1)$ ۴) $(-e\,,e^{(-2e-2e^2)})$

۵. تابع با ضابطهٔ $y=\sin x-\cos 2x$ در کدام یک از فاصله‌های زیر صعودی است؟

۱) $(\frac{\pi}{4}\,,\frac{3\pi}{4})$ ۲) $(\frac{\pi}{2}\,,\pi)$

۳) $(\frac{3\pi}{2}\,,2\pi)$ ۴) $(0\,,\frac{\pi}{4})$

۶. اگر می‌نیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $y=(m-1)x^2+x$ برابر -2 باشد، مقدار m چه‌قدر است؟

۱) $\frac{9}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$

۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{9}{8}$

۷. مکان هندسی نقطهٔ $M\left|\begin{matrix}\sin^2\alpha\\ \cos\alpha-1\end{matrix}\right.$ وقتی α تغییر می‌کند، بر کدام مقطع مخروطی قرار دارد؟

۱) دایره ۲) سهمی

۳) بیضی ۴) هذلولی

۸. دو دایره به معادله‌های $(x-2)^2+(y-3)^2=16$ و $(x-5)^2+(y-7)^2=1$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۱) متخارج ۲) متداخل

۳) مماس داخل ۴) مماس خارج

۹. حاصل $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}\left(\sqrt{(x+1)^3}+\sqrt{(x-1)^3}\right)+C$

۲) $\frac{1}{3}\left(\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{(x-1)^3}\right)+C$

۳) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)+C$

۴) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)+C$

۱۰. سطح محصور به منحنی به معادلهٔ $x^2+4y^2+16y-20=0$ را حول محور yها دوران می‌دهیم، حجم جسم حادث کدام است؟

۱) 24π ۲) 36π

۳) 72π ۴) 144π

ریاضیات گسسته

۱. گراف G از مرتبهٔ P دارای r رأس از درجهٔ صفر است، در این صورت حداکثر مقدار برای Δ کدام است؟

۱) $P-2r$ ۲) $P-r-2$

۳) $P-r-1$ ۴) $P-r$

۲. در یک گراف با اندازهٔ ۱۰، همهٔ رأس‌ها از درجهٔ ۳ هستند ؛ به جز ۲ رأس که درجهٔ آنها ۴ است؛ در این صورت، این گراف چند رأس دارد؟

۱) ۸ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

۳. اگر G یک گراف همبند و دارای ۲۰ یال باشد و درجهٔ هر رأس حداقل ۴ باشد، در این صورت، حداکثر مرتبه برای G کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۰

۳) ۹ ۴) ۲۲

۴. اگر G گرافی P− منتظم باشد و P عددی اول فرض شود، کدام گزینه صحیح است؟

۱) مرتبهٔ گراف G همواره زوج است.

۲) مرتبهٔ گراف G همواره فرد است.

۳) در این گراف $(\delta-\Delta)$ عددی فرد است.

۴) گراف G نمی‌تواند درخت باشد.

۵. اگر G گرافی ۴− منتظم بوده و ۷ یال به آن اضافه کنیم، گرافی کامل به دست می‌آید، مرتبهٔ G کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷

۳) ۸ ۴) ۹

۶. مرتبهٔ گراف G، ۷ و اندازهٔ آن ۲۰ است؛ این گراف چند رأس از درجهٔ ۶ دارد؟

۱) ۶ ۲) ۵

۳) ۴ ۴) ۵ یا ۴

۷. اگر x جواب معادلهٔ هم‌نهشتی $11x \overset{8}{\equiv} \sum_{k=2}^{1422} k!$ باشد، در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱) $(8, x) = 1$ ۲) $[8, x] = |x|$

۳) $[8, x] = 8$ ۴) $(8, x) = |x|$

۸. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = (\sum_{k=1}^{1381} k!)$ بر عدد (۱۴) کدام است؟

۱) -1 ۲) ۶

۳) ۵ ۴) ۴

۹. اگر $a \overset{20}{\equiv} b$ و $a \overset{16}{\equiv} b$، کدام گزینه صحیح است؟

۱) $18 \mid a-b$ ۲) $10 \mid a-b$

۳) $12 \mid a-b$ ۴) $14 \mid a-b$

۱۰. اگر باقی‌مانده‌های تقسیم اعداد m، n و p بر عدد طبیعی k، به ترتیب a، b و c باشد، کدام عدد همواره بر k بخش‌پذیر است؟

۱) $mnp + abc$ ۲) $mnp+(a+b+c)$

۳) $mnp - (a+b+c)$ ۴) $mnp - abc$

۱۱. اگر کوچکترین عضو مثبت مجموعهٔ $A = \{ma + nb \mid m , n\in Z\}$ عدد ۱ باشد و a عددی زوج باشد، در این صورت، باقی‌ماندهٔ تقسیم $(b^2 + 7)$ بر ۸ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۴

۱۲. اگر $[a^n , b^n] = b^n$، در این صورت کدام گزینه صحیح است؟ $(a , b \in IN)$

۱) $(a , b) = 1$ ۲) $[a^2 , b^3] = a^2$

۳) $[a^3 , b^2] = a^3$ ۴) $(a^3 , b^2) = a^3$

۱۳. اگر $[a^2 , b^2] = [7a , 7b]$ و a و b دو عدد صحیح متمایز باشند، حاصل $(2a + b)$ کدام است؟

۱) ۵۰ ۲) ۲

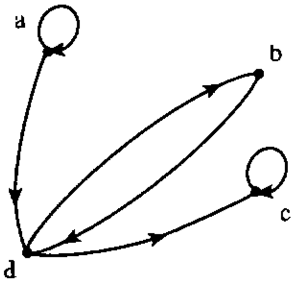
۳) ۱۵ ۴) ۸

۱۴. اگر $ra+sb = 11$ و برای هر $m,n\in Z$، $ma + nb \neq 1$، در این صورت $(a + b)$ بر کدام عدد همواره بخش‌پذیر است؟

۱) ۱۱ ۲) ۲۲

۳) ۳ ۴) ۲

۱۵. گراف متناظر با رابطهٔ R که روی مجموعهٔ $A = \{a , b , c , d\}$ تعریف شده، به صورت زیر است، این رابطه چه تعداد از خواص بازتابی، تقارنی، پادتقارنی و تعدی را ندارد؟



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۶. ماتریس متناظر با رابطهٔ R دارای ۳۰ درآیهٔ صفر است که تعداد صفرها(۵) برابر تعداد یک‌ها در این ماتریس است، اگر این رابطه، یک رابطهٔ هم ارزی باشد و R روی A تعریف شده باشد، کدام گزینه صحیح نیست؟

۱) $|A| = 6$ ۲) $\forall a \in A \Rightarrow [a]=\{a\}$

۳) $|R| = 12$ ۴) $\forall a \neq b \in A ; a \not R b$

۱۷. رابطهٔ R روی مجموعهٔ $A = \{1,2,3\}$ به صورت $R = \{(2 , 1) , (3 , 2) , (1 , 1)\}$ تعریف شده است. این رابطه کدام خاصیت را دارد؟

۱) پادتقارنی ۲) انعکاسی

۳) تعدی ۴) تقارنی

۱۸. به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل، یک دسته گل شامل ۹ شاخه گل انتخاب کرد؛ به شرطی که از گل نوع اوّل حدّاقل ۱ شاخه و از گل نوع چهارم حدّاقل ۳ شاخه حتماً انتخاب کنیم؟

۱) $\binom{8}{4}$ ۲) $\binom{9}{5}$

۳) $\binom{12}{3}$ ۴) $\binom{12}{4}$

۱۹. اگر $P(A|B)=\frac{1}{3}$ و $P(B|A)=\frac{1}{4}$ و $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$ باشند، حاصل $P(A-B)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{3}{8}$

۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{8}$

۲۰. جعبه‌ای حاوی ۵ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سیاه است و جعبهٔ دیگری که کاملاً شبیه آن است، شامل ۷ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه است. شخصی تصادفی دست در یکی از این دو جعبه کرده و مهره‌ای را بیرون می‌آورد؛ احتمال آن که این مهره سفید باشد، کدام است؟

۱) $\frac{3}{16}$ ۲) $\frac{5}{16}$

۳) $\frac{67}{84}$ ۴) $\frac{65}{84}$

پاسخ مسائل و پرسشهای چهارگزینه‌ای

ریاضیات سال اوّل

۱. $MN^2=(x_M-x_N)^2+(y_M-y_N)^2$

$=(4p-1-2)^2+(3-4p)^2$

$=(4p-3)^2+(4p-3)^2=(2\sqrt{2})^2$

$8=2(4p-3)^2\ ;\ (4p-3)^2=4\ ;$

$4p-3=\pm 2\ ;\ 4p=3\pm 2\ ;$

$p=\frac{5}{4}\ ;\ p=\frac{1}{4}$

۲. $mn=-1$ (شرط عمود بودن) , $x=-1$

$\begin{cases} y=mx-2 \\ y=nx+2 \end{cases} \Rightarrow mx-2=nx+2,$

$m(-1)-2=n(-1)+2\ ;\ m-n=-4$

با استفاده از اتحاد $(m+n)^2-(m-n)^2=4mn$؛ خواهیم داشت: $m+n=\pm 2\sqrt{3}$

۳. برای دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

(شرط عدم وجود جواب) اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$، $\left(\frac{4}{b}=\frac{b}{4}\right)$ آنگاه دستگاه نشدنی و در نتیجه جواب ندارد.

$b^2=16\ ;\ b=\pm 4$

۴. $p=\sqrt{(x-1)^2}-\sqrt{x^2}+x^2+6\sqrt{10}$

$=|x-1|-|x|+x^2+6\sqrt{10}$

$x=3-\sqrt{10}:\ p\underset{(x<0)}{=}-(x-1)+x+(3-\sqrt{10})^2+6\sqrt{10}=20$

۵. $x^2=x-1\ ,\ x^{78}=(x^3)^{26}$

$x^2-x+1=0\ ;\ (x+1)(x^2-x+1)=0\ ;$

$x^3+1=0\ ;\ x^3=-1$

$x^{78}=(x^3)^{26}=(-1)^{26}=1\ ,\ x^{78}=1$

۶. $\sqrt{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=$

$\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=$

$\sqrt{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}=\left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|$

۷. $\frac{2x}{4x-4}+\frac{4x}{8x+8}=\frac{x}{2}\ ;$

$\frac{x}{2x-2}+\frac{x}{2x+2}=\frac{x}{2}\ ;$

$\frac{2x^2+2x+2x^2-2x}{(2x-2)(2x+2)}=\frac{x}{2}\ ;$

$\frac{4x^2}{4x^2-4}=\frac{x}{2}\ ;\ \frac{4x^2-(2x^3-2x)}{4x^2-4}=0\ ;$

$\frac{-2x^3+4x^2+2x}{4x^2-4}=0\ ;\ \frac{-2x(x^2-2x-1)}{4(x^2-1)}=0$

$x\neq\pm 1\ :\ x^2-2x-1=0\ ;\ x=0$

(معادله سه ریشه حقیقی دارد)

۸. $\frac{\sqrt{x}}{x^2-1}+\sqrt{x-1}\ ;$

$x^2-1\neq 0\ ;\ x\neq\pm 1$ ، $x\geq 0$ ، $x-1\geq 0$

$\begin{cases} x\geq 1 \\ x\geq 0 \\ x\neq\pm 1 \end{cases}\ ;\ x>1$

۹. $\sqrt[3]{x}=\sqrt[1]{2\sqrt[3]{4}}\ ;\ x=\sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}}\ ;$

$x^3=2\sqrt[3]{4}\ ;\ x^{12}=2^6\ ;\ x=\sqrt{2}$

$x=\sqrt{2}:\ \sqrt[5]{x^3}=\sqrt[5]{2\sqrt{2}}=\sqrt[5]{\sqrt{8}}=\sqrt[10]{8}$

۱۰. $x+\frac{1}{x}=1\ ;\ x^2-x+1=0$

$s=x'+x''=x_1+x_2=1$

$p=x''x'=x_1x_2=1\ ,\ s=1\ ,\ p=1$

$A=\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1^2+x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)}{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}$

$=\frac{s^3-3ps}{s^2-2p}=\frac{-2}{-1}=2$

ریاضی سال دوم

۱. $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=$

$(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$

$=\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta$

$=\cos^2\alpha(1-\sin^2\beta)-(1-\cos^2\alpha)\sin^2\beta$

$=\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta$

$=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$

۲. $\frac{1}{\sin 10}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10}=\frac{\cos 10-\sqrt{3}\sin 10}{\sin 10\cos 10}$

$=\frac{\cos 10-\mathrm{tg}60\sin 10}{\frac{1}{2}\sin 20}=$

$\frac{\cos 10\cos 60-\sin 10\sin 60}{\frac{1}{2}\sin 20\cos 60}=\frac{\cos(10+60)}{\frac{1}{4}\sin 20}$

$=\frac{4\cos 70}{\sin 20}=\frac{4\sin 20}{\sin 20}=4$

۳. دو بردار بر هم عمودند؛ زیرا حاصلضرب نقطه‌ای آنها مساوی صفر است.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_a\cdot x_b+y_ay_b=\alpha\beta-\beta\alpha=0$

۴. $\left.\begin{aligned} \overrightarrow{AB}&=\begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\-7\end{bmatrix} \\ \overrightarrow{AC}&=\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-5\end{bmatrix} \end{aligned}\right\}\Rightarrow$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{bmatrix}-4\\-7\end{bmatrix}[-2\ \ -5]=8+35=43$

۵. دانش‌آموزان کلاس چهارم را به $\binom{6}{4}$ طریق و دانش‌آموزان کلاس سوّم را به $\binom{5}{3}$ طریق می‌توانیم انتخاب کنیم. بنابراین و با توجه به اصل ضرب، تعداد راه‌های انتخاب برابر است با:

$\binom{6}{4}\times\binom{5}{3}=\frac{6!}{4!2!}\times\frac{5!}{3!2!}=15\times 10=150$

۶. با توجه به ویژگی جمله‌های تصاعد حسابی داریم:

$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}=2\binom{n}{2}\ \Rightarrow\ n+\frac{n!}{3!(n-3)!}$

$=2\frac{n!}{2!(n-2)!}\ \Rightarrow\ n+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

$= n(n-1)\ ,\ n \neq 0 \Rightarrow 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{6}$

$= n - 1 \Rightarrow 6 + n^2 - 3n + 2 = 6n - 6$

$\Rightarrow n^2 - 9n + 14 = 0 \Rightarrow (n-7)(n-2) = 0$

$\Rightarrow n = 7\ ,\ n = 2$

پاسخ $n = 2$ غیر قابل قبول است. (چرا؟)

۷. فضای نمونه ۳۶ عضو دارد و پیشامد تصادفی مطلوب، عبارت است از مجموعهٔ A که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$A = \{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(4,3),(3,4),(4,5),(5,4),(6,5),(5,6)\}$

بنابراین داریم:

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

۸. احتمال آنکه تاس مضرب ۳ بیاید، مساوی $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ است و در این صورت مشخص، سکه خود را سه بار پرتاب می‌کند و احتمال آنکه حدّاقل دوبار سکه رو بیاید، در این صورت $\frac{1}{2}$ می‌باشد؛ زیرا:

S = {(پ، پ، پ)،(ر، پ، پ)،(پ، ر، پ)، (ر، پ، ر)،(پ، پ، ر)،(ر، ر، پ)، (ر، ر، ر)،(پ، ر، ر)}

A = {(پ، پ، پ)،(پ، ر، پ)،(ر، پ، پ)، (پ، پ، ر)} ⇒

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

اما اگر تاس مضرب سه نیاید که احتمال آن $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ است، سکه دوبار پرتاب می‌شود و احتمال آنکه حدّاقل دوبار پشت بیاید، مساوی $\frac{1}{4}$ است:

S = {(ر، ر)،(پ، پ)،(پ، ر)،(ر، پ)}

A = {(پ، پ)} ⇒

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{4}$

حال در پرتاب تاس، مضرب ۳ می‌آید و یا نمی‌آید؛ بنابراین:

براساس قانون جمع احتمال، پیشامدهای ناسازگار احتمال مورد نظر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$P = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

۹. تعداد عددهای مضرب ۲ کوچکتر از ۱۰۰، مساوی ۴۹ تاست. (از ۱×۲ تا ۴۹×۲) و تعداد عددهای مضرب ۳ کوچکتر از ۳ نیز ۳۳ تاست. (از ۱×۳ تا ۳۳×۳) و تعداد عددهای مضرب ۵ کوچکتر از ۱۰۰، ۱۹ تاست. (از ۱×۵ تا ۱۹×۵)، پس اگر A پیشامد آن باشد که عدد منتخب مضرب ۲ باشد و B پیشامد آن باشد که عدد منتخب مضرب ۳ باشد و C پیشامد آن که آن عدد مضرب ۵ باشد، داریم:

$P(A) = \frac{49}{99}\ ,P(B) = \frac{33}{99}\ ,\ P(C) = \frac{19}{99}$

همچنین $A \cap B$ ، $A \cap C$ و $B \cap C$ پیشامد آن هستند که عدد منتخب مضرب ۲ و ۳ (یعنی مضرب ۶) و مضرب ۲ و ۵ (یعنی مضرب ۱۰) و مضرب ۳ و ۵ (یعنی مضرب ۱۵) باشد و به همان ترتیب می‌توان نوشت:

$P(A \cap B) = \frac{16}{99}\ ,\ P(A \cap C) = \frac{9}{99}\ ,$

$P(B \cap C) = \frac{6}{99}$

و $A \cap B \cap C$ پیشامد آن است که آن عدد مضرب ۲، ۳ و ۵ (یعنی مضرب ۳۰) باشد، بنابراین:

$P(A \cap B \cap C) = \frac{3}{99}$

و از آن‌جا به کمک قانون احتمال اجتماع، سه پیشامد می‌نویسیم:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) = \frac{49}{99} + \frac{33}{99} + \frac{19}{99} - \frac{16}{99} - \frac{9}{99} - \frac{6}{99} + \frac{3}{99} = \frac{73}{99}$$

۱۰. $a_4 = a_1 + 3d = 5$

$a_7 = a_1 + 6d = (a_1 + 3d) + 3d =$

$5 + 3d = 2 + 3(d+1) = 3K + 2$

حال اگر قدرنسبت، یعنی d ، عددی صحیح باشد، باقیماندهٔ تقسیم a_7 بر ۳ مساوی ۲ است و از بین گزینه‌ها، تنها پاسخ، گزینهٔ (۲) (یعنی ۳۵) این ویژگی را دارد، و از آن‌جا $d = 10$ است.

۱۱. $S_3 = 3/5 a_2 \Rightarrow a_1 \frac{q^3 - 1}{q - 1} = 3/5 a_1 q$

$\Rightarrow q^2 + q + 1 = 3/5 q \Rightarrow 2q^2 + 2q + 2 = 7q$

$\Rightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Rightarrow q = 2$ یا $q = \frac{1}{2}$

$a_4 = a_1 q^3 \Rightarrow a_4 = 3 \times 2^3 = 24$ یا

$a_4 = 3(\frac{1}{2})^3 = \frac{3}{8}$

حسابان ۲

۱. گزینهٔ (۲)

در تابع درجه سوّم، نقطهٔ عطف مرکز تقارن منحنی تابع است، چنانچه منحنی تابع، ماکزیمم و می‌نیمم داشته باشد، نقطهٔ عطف وسط آنهاست.

طول عطف $= -\frac{b}{3a} = -\frac{-3}{3} = 1$

عرض عطف $= \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{-12}{2} = -6$

$f\Big|^{1}_{-6} \xrightarrow{\text{در معادله تابع}} -6 = 1 - 3 + m - 1 - 4$

$\Rightarrow m = 1$

۲. گزینهٔ (۴)

باید معادله $(x-1)(x^2 - 2mx + 8) = 0$ دو ریشه مساوی داشته باشد.

الف: $\Delta' = 0 \Rightarrow b'^2 - ac = 0 \Rightarrow m^2 - 8 = 0$

$\Rightarrow m = \pm 2\sqrt{2}$

ب: $x = 1 \xrightarrow{\text{در معادله دوم}} 1 - 2m + 8 = 0 \Rightarrow m = \frac{9}{2}$

۳. گزینهٔ (۳)

معادله‌های قسمت افقی تابع به صورت $y = k$ و $y = -k$ است که $y' = 0$ خواهد شد. در قسمت میانهٔ شکل، پاره‌خطی داریم که تابع در این قسمت صعودی اکید است؛ پس $y' > 0$، بنابراین نمودار (۳) درست است.

۴. گزینهٔ (۴)

$f(x) = \frac{\sin 4x - \cos 4x}{\sin 4x + \cos 4x}$

صورت و مخرج کسر را بر $\cos 4x \neq 0$ تقسیم می‌کنیم:

$f(x) = \frac{\tan 4x - 1}{\tan 4x + 1}$

$T_{\tan 4x} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow T_{f(x)} = \frac{\pi}{4}$

۵. گزینهٔ (۳)

اگر $x > 0$ داریم:

$\mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\, \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$

حال حلّ تست:

$\text{Arctan}\,\frac{x^2+1}{x^2+4}+\text{Arctan}\,\frac{x^2+4}{x^2+1}=\frac{\pi}{2}$

۶. گزینهٔ (۱)

فرض $A(x,y)$ یک نقطه از منحنی به معادله $y^2=4x+5$ باشد:

$OA=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+4x+5}=\sqrt{\underbrace{(x+2)^2}_{Min=0}+1}\Rightarrow Min\ \ OA=\sqrt{1}=1$

۷. گزینهٔ (۳)

دو عدد را x و $\frac{243}{x}$ در نظر می‌گیریم.

حال $x+3(\frac{243}{x})$ را مساوی y قرار می‌دهیم.

$y=x+\frac{729}{x}\Rightarrow y'_x=1-\frac{729}{x^2}=\frac{x^2-729}{x^2}=0$

$x^2=729\Rightarrow x=27$ عددکوچکتر: $\frac{243}{27}=9$

۸. گزینهٔ (۳) داریم:

$\lim_{n\to\infty,\ k\in\mathbb{R}-\{0\}}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{k}}=e$

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(2x+4)+1}{2x+4}\right)^{3x}=$

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x+4}\right)^{\frac{2x+4}{1}\times\frac{3x}{2x+4}}=$

$\lim_{x\to\infty}e^{\frac{3x}{2x+4}}=e^{\frac{3}{2}}=e\sqrt{e}$

۹. گزینهٔ (۱) $\log 2=0/301$

$\log 250=\log 5^2\times 10=2\log 5+\log 10=$

$2\left(\log\frac{10}{2}\right)+1=2(\log 10-\log 2)+1=$

$2(1-0/301)+1=2(0/699)+1=2/398$

۱۰. گزینهٔ (۲)

$y=x^{2x}\Rightarrow Lny=2xLnx$

$\frac{y'}{y}=2\left(Lnx+\frac{1}{x}\cdot x\right)=2(Lnx+1)\Rightarrow$

$y'=2y(Lnx+1)$

$y'=2x^{2x}(Lnx+1)$

۱۱. گزینهٔ (۴)

$\frac{1}{9}\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{1}{9}(\text{Arctan}x)_0^1$

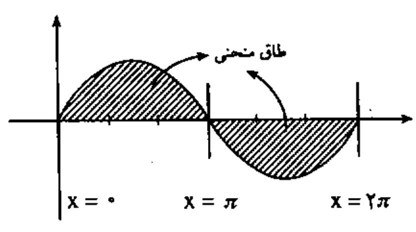
$=\frac{1}{9}(\text{Arctan}1-\text{Arctan}\,0)$

$=\frac{1}{9}\left(\frac{\pi}{4}+0\right)=\frac{\pi}{36}$

۱۲. گزینهٔ (۴)

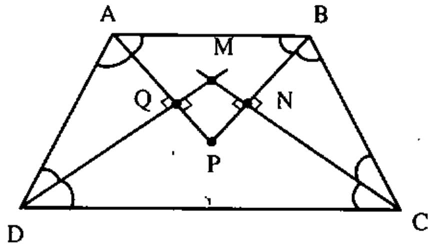
$S=2\int_0^{\pi}\sin x\,dx=2(-\cos x)_0^{\pi}$

$=2(-\cos\pi+\cos 0)=2(1+1)=4$



هندسهٔ ۲

۱. گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، زاویه‌های روبه‌رو با هم برابر و زاویه‌های مجاور، مکمّل یکدیگرند؛ پس داریم:



$\hat{N}=\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{C}}{2}=\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}=\frac{180^\circ}{2}=90^\circ$

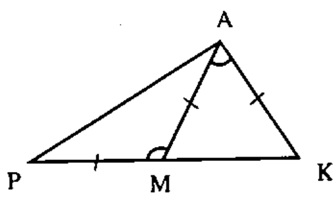
$\hat{Q}=\frac{\hat{A}+\hat{D}}{2}=\frac{180^\circ}{2}=90^\circ$

$MD=MC\ ,\ PA=PB\ ,\ \Delta AQD\cong\Delta BNC$

$\Rightarrow MN=MQ\ ,\ NP=PQ\Rightarrow MN+PQ$

$=NP+MQ$

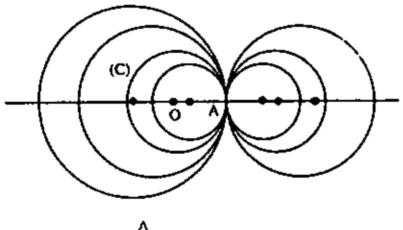
۲. گزینهٔ (۱) صحیح است؛ زیرا در دو مثلث MAP و MAK داریم:



$MP=AK\ ,\ AM=AM\ ,\ A\hat{M}P>M\hat{A}K$

$\Rightarrow AP>MK$

۳. گزینهٔ (۴) صحیح است. مرکز دایره‌های مماس بر دایرهٔ $C(O,R)$ در نقطهٔ A روی خط OA است.



۴. گزینهٔ (۴) صحیح است. $\hat{M}$ زاویه‌ای برونی است؛ پس داریم:

$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{BD}-\overset{\frown}{AC}}{2}\Rightarrow 3\alpha=\frac{5\alpha+40-\alpha-20}{2}\Rightarrow$

$3\alpha=2\alpha+10^\circ\Rightarrow\alpha=10^\circ\Rightarrow$

$A\hat{B}C=\frac{\overset{\frown}{AC}}{2}=\frac{10^\circ+20^\circ}{2}=15^\circ$

۵. گزینهٔ (۲) صحیح است. بنا به ویژگی رابطهٔ طولی در دایره، داریم:

$MA\cdot MB=MC\cdot MD\Rightarrow x(x+5)=6\times 6$

$\Rightarrow x^2+5x-36=0\Rightarrow x=4\ ,\ x=-9<0$

$\Rightarrow MA=4\ ,\ MB=9\Rightarrow AB=MA+MB=$

$4+9=13\ ,\ CD=6+6=12$

$\Rightarrow\frac{CD}{AB}=\frac{12}{13}$

۶. گزینهٔ (۱) صحیح است. از O به A وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAM، OH ارتفاع وارد بر وتر OM است؛ پس داریم:

$OA^2=OH\cdot OM\Rightarrow 4^2=2\times OM\Rightarrow$

$OM=8$ و $MA=\sqrt{OM^2-OA^2}=$

$\sqrt{64-16}=4\sqrt{3}$

۷. گزینهٔ (۳) صحیح است. دو دایره برون هم هستند؛ زیرا $OO'=24>R+R'=12+8=20$ است. پس اندازهٔ مماس مشترک درونی دو دایره، برابر است با:

$TT'=\sqrt{d^2-(R+R')^2}=\sqrt{24^2-(12+8)^2}$

$=\sqrt{176}=4\sqrt{11}$

۸. گزینهٔ (۱) صحیح است؛ داریم:

$\begin{cases}x+2=-1\\ y-4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-3\\ y=4\end{cases}\Rightarrow A=(-3,4)$

۹. گزینهٔ (۴) صحیح است. در تجانس، شیب خطها ثابت می‌ماند. پس:

$m_{A'B'}=m_{AB}\ ,\ A=(3,4)\ ,\ B=(-2,1)$

$\Rightarrow m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1-4}{-2-3}=\frac{3}{5}$

۱۰. گزینهٔ (۲) صحیح است. دو نقطهٔ A و B روی خط D اختیار کرده، مختصات دو نقطهٔ متناظر آنها A' و B' را در تبدیل داده شده به دست می‌آوریم و معادلهٔ خط $A'B'$ را می‌نویسیم:

$A=\left(0\ ,\ +\frac{3}{2}\right)\ ,\ B=(3\ ,\ 0)\Rightarrow$

$A'=(0+2\ ,\ 3-3)\Rightarrow A'=(2\ ,\ 0)$

$B'=(3+2\ ,\ 0-3)\Rightarrow B'=(5\ ,\ -3)$

$\Rightarrow A'B'/\ y-0=\frac{-3-0}{5-2}(x-2)$

$\Rightarrow y=-x+2\Rightarrow x+y-2=0$

جبر و احتمال

۱. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا اگر ۴۰۰ نفر را کبوترها و روزهای یک سال را (۳۶۵ روز) لانه‌ها فرض کنیم، طبق اصل لانه کبوتری، حدّاقل ۲ نفر دارای تاریخ تولد یکسان هستند و به همین دلیل، چون در سال، فقط ۱۲ ماه وجود دارد، دست کم دو نفر در یک ماه از سال متولد شده‌اند و نیز چون سال دارای ۵۲ هفته است، حدّاقل دو نفر در یک هفته معین از سال متولد شده‌اند.

۲. گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا:

$A \subset B \Rightarrow B' \subset A' \Rightarrow B' \cap A' = A'$

۳. گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا اگر A دارای K زیر مجموعهٔ محض باشد، آنگاه دارای K+۱ زیر مجموعه است، پس تعداد زیر مجموعه‌های A برابر با ۶۴ است، در نتیجه داریم:

$۲^n = ۶۴ \Rightarrow ۲^n = ۲^۶ \Rightarrow n = ۶$

یعنی مجموعهٔ A دارای ۶ عضو است و تعداد زیر مجموعه‌های k عضوی یک مجموعهٔ n عضوی $(k \leq n)$ برابر با ترکیب $\binom{n}{k}$ است؛ بنابراین:

$۶ = \binom{۶}{۵}$ = تعداد زیر مجموعه‌های ۵ عضوی A

۴. گزینهٔ (۱) صحیح است؛ زیرا اگر A یک مجموعهٔ n عضوی و B یک مجموعهٔ m عضوی باشد، تعداد رابطه‌های از A به B برابر با $۲^{m \times n}$ است. چون $A \cap B = \phi$، بنابراین $(A \cap B) \times A = \phi$ ؛ در نتیجه تعداد رابطه‌ها برابر با $۱ = ۲^۰$ است.

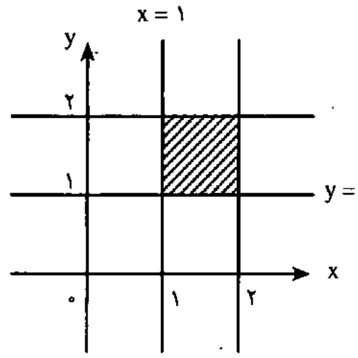
۵. گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا رابطه‌هایی که روی مجموعهٔ $\{x\}$ تعریف می‌شوند، عبارتند از: $R_۱ = \{(x, x)\}$ و $R_۲ = \phi$ ، واضح است که $R_۱$ خاصیت تقارنی دارد. $R_۲$ نیز خاصیت تقارنی دارد؛ زیرا اگر خاصیت تقارنی نداشته باشد، باید $R_۲$ شامل (a, b) باشد و $(b, a) \notin R_۲$ که چنین چیزی امکان ندارد.

۶. گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$۲^۵ \overset{۳۱}{\equiv} ۱ \Rightarrow (۲^۵)^n \overset{۳۱}{\equiv} ۱^n \Rightarrow ۲^{۵n} \overset{۳۱}{\equiv} ۱$$
$$\Rightarrow ۲^۳ \times ۲^{۵n} \overset{۳۱}{\equiv} ۲^۳$$
$$\Rightarrow ۲^{۵n+۳} \overset{۳۱}{\equiv} ۸$$

۷. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا:

$a_s = ۲ \times ۲ = ۴$



$$\begin{cases} x > ۱ \\ y > ۱ \end{cases} \Rightarrow a_A = ۱ \times ۱ = ۱$$

$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{۱}{۴}$$

۸. گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند، آنگاه دو پیشامد B′ و A نیز مستقل می‌باشند.

$$P(B') = ۱ - P(B) = ۱ - \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳}$$
$$P(A \cap B') = P(A) \times P(B') = \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۱۲}$$

۹. گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا اگر در مسأله، شرطی قرار داشته باشد، فضای نمونه محدودتر می‌شود. چون دو عدد باید متمایز باشند، پس $n(s) = ۳۰$ ، از طرفی داریم:

$A = \{(۴,۵),(۵,۴),(۳,۶),(۶,۳)\}\ ;\ n(A) = ۴$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۳۰} = \frac{۲}{۱۵}$$

۱۰. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا:

$$n(S) = \binom{۱۰}{۳} = \frac{۱۰!}{۳! \times ۷!}$$
$$= \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸}{۳ \times ۲ \times ۱} = ۱۲۰$$

اگر از رنگ قرمز برنداشته باشیم، آنگاه هر سه مهره سفید یا هر سه مهره آبی یا دو مهره سفید و یک مهره آبی یا یک مهره سفید و دو مهره آبی است؛ بنابراین داریم:

$$n(A) = \binom{۳}{۳} + \binom{۳}{۳} + \binom{۳}{۱}\binom{۳}{۲} + \binom{۳}{۲}\binom{۳}{۱}$$
$$= ۱ + ۱ + ۹ + ۹ = ۲۰$$
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲۰}{۱۲۰} = \frac{۱}{۶}$$

حساب دیفرانسیل و انتگرال ۲

۱. گزینهٔ (۴)

$f(x) = \sin x - x$

$f'(x) = \cos x - ۱ = ۰ \Rightarrow \cos x = ۱$

همهٔ جوابهای معادلهٔ $\cos x = ۱$ مضاعف است، پس کلیهٔ ریشه‌های معادلهٔ $f'(x) = ۰$ طولهای نقاط عطف است؛ بنابراین نمودار این تابع، نقاط اکسترمم نسبی ندارد.

۲. گزینهٔ (۳)

$f(t) = -t^۳ + ۴۵t^۲ - ۲۴۳t + ۱$

$f'(t) = -۳t^۲ + ۹۰t - ۲۴۳ = ۰$

$$-۳(t^۲ - ۳۰t + ۸۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۲۷ \\ t = ۳ \end{cases}$$

$۳ < t < ۲۷ \Rightarrow f'(t) > ۰$

$t > ۲۷ \Rightarrow f'(t) < ۰$

پس $t = ۲۷$ زمان رسیدن به نقطهٔ اوج (ماکزیمم) است.

۳. گزینهٔ (۳)

اگر بازهٔ $[-۱,۱]$ را به n زیر بازه مساوی افراز کنیم، در هر زیر بازه، می‌نیمم مطلق تابع ۱ است؛ پس:

$$\Delta x = \frac{۲}{n}$$
$$\sum_{i=۱}^{n} f(li) \cdot \Delta x = \sum_{i=۱}^{n} (۱)(\Delta x) = \Delta x \sum_{i=۱}^{n} ۱ =$$
$$\frac{۲}{n}(n) = ۲$$

۴. گزینهٔ (۳)

۱. اگر معادلهٔ مجانب مایل منحنی تابع f به صورت $y = ax + b$ باشد، آنگاه $y = a$ مجانب افقی تابع f' است.

۲. هرگاه خط مماس بر منحنی تابع f در $x=b$، موازی محور yها باشد، آنگاه $x=b$ مجانب قائم تابع f' است.

۳. چون تابع f صعودی اکید است، پس نمودار مشتق بالای محور xهاست.

۴. اگر خط مماس بر منحنی f در نقطهٔ عطف موازی محور xها باشد، این نقطه برای تابع f'، یک اکسترمم نسبی روی محور xها می‌سازد، پس نمودار گزینهٔ (۳) صحیح است.

۵. گزینهٔ (۲)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\cos\frac{1}{n}+\cos\frac{2}{n}+\dots+\cos\frac{n}{n}\right)=$$
$$\int_0^1\cos x\,dx=\sin x\,\Big|_0^1=\sin 1-\sin 0=\sin 1$$

۶. گزینهٔ (۱)

$$f''(x)=6x+8\Rightarrow f'(x)=3x^2+8x+C$$
$$f'(1)=4\Rightarrow 4=3+8+C\Rightarrow C=-7$$
$$f'(x)=3x^2+8x-7$$
$$\Rightarrow f(x)=x^3+4x^2-7x+C'$$
$$f(0)=2\Rightarrow 2=C'\Rightarrow f(x)=x^3+4x^2-7x+2$$
$$f(1)=1+4-7+2=0$$

۷. گزینهٔ (۱)

$$\int(x^2-2x)e^x=(mx+n)e^x$$
$$(x^2-2x)e^x=[(mx+n)e^x]'$$
$$(x^2-2x)e^x=me^x+(mx+n)e^x$$
$$(x^2-2x)e^x=\big(mx+(m+1)\big)e^x\Rightarrow$$
$$\begin{cases}m=1\\ m+n=-2\end{cases}\Rightarrow n=-3$$
$$4m+2n=4-6=-2$$

۸. گزینهٔ (۲)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos2\alpha}{1+\cos2\alpha}\,d\alpha=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha}\,d\alpha=$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\alpha\,d\alpha=\big(\tan\alpha-\alpha\big)_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\tan\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}$$

۹. گزینهٔ (۳)

$$\int_0^k\sin x\,dx=\int_k^{\frac{2\pi}{3}}\sin x\,dx\Rightarrow$$
$$(-\cos x)_0^K=(-\cos x)_k^{\frac{2\pi}{3}}$$
$$-\cos K+1=\frac{1}{2}+\cos K\Rightarrow$$
$$\cos K=\frac{1}{4}=\sin\frac{\pi}{12}$$
$$\cos K=\sin\frac{\pi}{12}\Rightarrow K+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow K=\frac{5\pi}{12}$$

۱۰. گزینهٔ (۴)

$$y(t)=c\,.\,e^{kt}\Rightarrow\begin{cases}y(0)=c\\ y(3)=2y(0)=2c\end{cases}$$
$$y(3)=2c\Rightarrow ce^{3k}=2c\Rightarrow e^{3k}=2$$
$$y(18)=c\,.\,e^{18k}=c(e^{3k})^6=c(2^6)=$$
$$64c=64(y(0))$$

ریاضی عمومی ۲

۱. گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا:

$$\begin{cases}y=x+m\\ y=x^2-x\end{cases}\Rightarrow$$
$$x^2-x=x+m\Rightarrow x^2-2x-m=0$$
$$\Delta=(-2)^2-4(1)(-m)=0\Rightarrow m=-1$$

۲. گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا:

$$x^2+4y^2-4=0\Rightarrow y'_x=-\frac{2x}{8y}=-\frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow x=y$$
$$\begin{cases}x=y\\ x^2+4y^2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{2}{\sqrt5}\\ y=\frac{2}{\sqrt5}\end{cases},\quad\begin{cases}x=-\frac{2}{\sqrt5}\\ y=-\frac{2}{\sqrt5}\end{cases}$$

شیب‌خط $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-\frac{2}{\sqrt5}-\frac{2}{\sqrt5}}{-\frac{2}{\sqrt5}-\frac{2}{\sqrt5}}=1$

۳. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا:

$$y'=\frac{1}{2}\times\frac{\frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{x}{2})}{\tan\frac{x}{2}}=$$
$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{\frac{2\tan\frac{x}{2}}{(1+\tan^2\frac{x}{2})}}=\frac{1}{2\sin x}$$

۴. گزینهٔ (۱) صحیح است؛ زیرا:

$$y'=(2-4x)e^{(2x-2x^2)};$$
$$y''=[-4+(2-4x)^2]e^{(2x-2x^2)}=0$$
$$\Rightarrow x=0\ ,\ x=1$$

مختصات نقاط عطف منحنی $B(1,1)$ و $A(0,1)$

۵. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا:

$$y'=\cos x+2\sin2x=\cos x+4\sin x\cos x=$$
$$\cos x(1+4\sin x)$$

برای این که تابع f روی فاصلهٔ I صعودی باشد، باید روی این فاصله $f'(x)>0$؛ بنابراین داریم:

$$\cos x\,(1+4\sin x)>0$$

برای این منظور باید $\cos x$ و $4\sin x+1$ هر دو هم علامت باشند و فقط در بازهٔ گزینه (۴) هر دو مثبت می‌باشند.

۶. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا با قرار دادن طول نقطهٔ اکسترمم، یعنی $x=\frac{-b}{2a}$ در ضابطهٔ تابع، اکسترمم نسبی تابع به‌دست می‌آید:

$$x=\frac{-1}{2(m-1)}\Rightarrow -2=(m-1)\times\frac{1}{4(m-1)^2}$$
$$-\frac{1}{2(m-1)}\Rightarrow m=\frac{9}{8}$$

۷. گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا:

$$\begin{cases}x=\sin^2\alpha\\ y=\cos\alpha-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\sin^2\alpha\\ (y-1)^2=\cos^2\alpha\end{cases}\Rightarrow$$

$x+(y-1)^2=1$ (معادلهٔ سهمی)

۸. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا:

$$S=(2,3)\ ,\ R=4\ ;\ S'=(5,7)\ ,\ R'=1$$
$$SS'=d=\sqrt{(2-5)^2+(3-7)^2}=5\Rightarrow$$

$d=R+R'=5$ مماس خارجند

۹. گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}}\times\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x-1}}=$$
$$\frac{1}{2}\int(\sqrt{1+x}-\sqrt{x-1})\,dx=$$
$$\frac{1}{2}\int(1+x)^{\frac{1}{2}}\,dx-\frac{1}{2}\int(x-1)^{\frac{1}{2}}\,dx=$$
$$\frac{1}{3}\left(\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(x-1)^3}\right)+C$$

۱۰. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا:

$$\begin{cases}x^2+4y^2+16y-20=0\\ x=0\end{cases}\Rightarrow$$
$$y=1\ ,\ y=5$$
$$S=\int_1^5\pi x^2dy=\int_1^5\pi(-4y^2-16y+20)dy$$
$$=\pi\left(-\frac{4}{3}y^3-8y^2+20y\right)\Big|_1^5=144\pi$$

حل تشریحی تستهای گراف

۱. گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا:

این گراف دارای $(p-r)$ رأس است که حدّاقل درجهٔ آنها ۱ است، و در چنین گرافی، حدّاکثر درجهٔ یک رأس، یعنی Δ می‌تواند $(p-r)-1$ باشد.

۲. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا:

اگر x را تعداد رأس‌های درجهٔ ۳ در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$3x+2\times4=20\Rightarrow 3x=20-8\Rightarrow$$
$$3x=12\Rightarrow x=4$$

پس ۴ رأس درجهٔ ۳ و دو رأس درجهٔ ۴ و در مجموع، ۶ رأس دارد.

۳. گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا:

همهٔ رأس‌ها را از درجهٔ حدّاقل در نظر می‌گیریم تا تعداد آنها حدّاکثر شود؛ بنابراین:

$۴x = ۲q = ۲ \times ۲۰ = ۴۰ \Rightarrow x = ۱۰$

۴. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا:

فقط گراف‌های T_1 و T_2 که به ترتیب ۰-منتظم و ۱-منتظم هستند، درخت هستند.

۵. گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا:

$۴p = ۲q \Rightarrow ۲p = q$

$q + ۷ = \frac{p(p - ۱)}{۲} \Rightarrow ۲q + ۱۴ = p(p - ۱)$

$\Rightarrow ۴p + ۱۴ = p^۲ - p \Rightarrow p^۲ - ۵p - ۱۴ = ۰$

$\Rightarrow (p - ۷)(p + ۲) = ۰ \Rightarrow p = ۷$

۶. گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا:

اگر ۷ رأس درجهٔ ۶ باشند $q = ۲۱$، که تناقض است و اگر ۶ رأس درجهٔ ۶ داشته باشیم، باید ۱ رأس درجهٔ ۴ باشد که ممکن نیست؛ ولی ۵ رأس درجهٔ ۶ و ۱ رأس درجهٔ ۱۰ امکان‌پذیر است.

۷. گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا:

$\sum_{k=۲}^{۱۴۲۲} k! = ۲! + ۳! + ۴! + ... + ۱۴۲۲! \overset{۸}{\equiv}$

$۲ + ۶ + ۰ + ۰ + ... + ۰ \overset{۸}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۱۱x \overset{۸}{\equiv} ۰$

$\Rightarrow ۸ | ۱۱x \xRightarrow{(۸,۱۱)=۱} ۸|x \Rightarrow [۸ , x] = |x|$

۸. گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا:

می‌دانیم عدد !۷ عامل ۷ و ۲ و در نتیجه عامل ۱۴ را دارد، پس بر ۱۴ بخش‌پذیر است و برای هر $k \geq ۷$، همواره !k نیز عامل !۷ داشته و بر ۱۴ بخش‌پذیر است، پس:

$A \overset{۱۴}{\equiv} ۱! + ۲! + ... + ۶! \Rightarrow$

$A \overset{۱۴}{\equiv} ۱ + ۲ + ۶ + ۲۴ + ۱۲۰ + ۷۲۰$

$\Rightarrow A \overset{۱۴}{\equiv} ۵$

۹. گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا:

$a \overset{m}{\equiv} b \; , a \overset{n}{\equiv} b \Rightarrow a \overset{[m,n]}{\equiv} b$

$a \overset{۲۰}{\equiv} b \quad a \overset{۱۶}{\equiv} b \Rightarrow a \overset{۸۰}{\equiv} b \; , ۱۰|۸۰ \Rightarrow a \overset{۱۰}{\equiv} b$

۱۰. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} m \overset{k}{\equiv} a \\ n \overset{k}{\equiv} b \\ p \overset{k}{\equiv} c \end{array}\right\} \Rightarrow mnp \overset{k}{\equiv} abc \Rightarrow k|mnp - abc$$

۱۱. گزینهٔ (۱) صحیح است؛ زیرا:

چون کوچکترین عضو مثبت A، عدد ۲ است، پس $(a , b) = ۱$ و چون a زوج است، لذا همواره باید b فرد باشد (اگر هر دو زوج باشند $((a , b) \neq ۱)$؛ پس:

$b^۲ = ۸K + ۱ \Rightarrow b^۲ + ۷ = ۸K + ۸ =$

$۸(K + ۱) = ۸K' \Rightarrow ۸|b^۲ + ۷$

۱۲. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا:

$[a^n , b^n] = b^n \Rightarrow [a , b] = b \Rightarrow a | b$

$a | b \Rightarrow a^۲ | b^۲ \Rightarrow a^۲ | b^۳ \Rightarrow [a^۲, b^۳] = b^۳$

$a | b \Rightarrow a^۲ | b^۲ \Rightarrow a^۳ \nmid b^۲$ ممکن است

$a | b \Rightarrow a^۳ | b^۳ \Rightarrow a^۳ | b^۴ \Rightarrow (a^۳, b^۴) = a^۳$

۱۳. گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا:

$$[a , b] = c \begin{cases} [a^n , b^n] = c^n \\ [na , nb] = nc \end{cases}$$

$[a^۲ , b^۲] = [۷a , ۷b] \Rightarrow c^۲ = ۷c \Rightarrow$

$c(c - ۷) = ۰ \Rightarrow c = ۰$ یا $c = ۷ \xRightarrow{c \neq ۰} c = ۷$

$\Rightarrow [a , b] = ۷ \Rightarrow a|۷ , b|۷ \Rightarrow a = ۱$ یا ۷،

$b = ۱$ یا ۷ $\xRightarrow{a \neq b} a = ۷ , b = ۱ \Rightarrow ۲a + b = ۱۵$

۱۴. گزینهٔ (۱) صحیح است؛ زیرا:

در حالت کلّی، اگر p عددی اوّل باشد و $ra + sb = p$، در این صورت $(a , b) = ۱$ یا $(a , b) = p$.

$ra + sb = ۱۱ \Rightarrow (a , b) = ۱$ یا $(a , b) = ۱۱$

$\forall m , n \in Z ; ma + nb \neq ۱ \Rightarrow (a , b) \neq ۱$

$\Rightarrow (a , b) = ۱۱ \Rightarrow ۱۱|a , ۱۱|b \Rightarrow ۱۱|a + b$

۱۵. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا:

$(b \not R b) \Rightarrow$ خاصیت انعکاسی ندارد

$(aRd , d \not R a) \Rightarrow$ خاصیت تقارنی ندارد

$(bRd , dRb) \Rightarrow$ خاصیت پادتقارنی ندارد

$(bRd , dRb) , b \not R b \Rightarrow$ خاصیت تعدی ندارد

۱۶. گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا:

$\Rightarrow$ (تعداد یک‌ها) $\times ۵ =$ تعداد صفرها

تعداد یک‌ها $= \frac{۳۰}{۵} = ۶ \Rightarrow |R| = ۶$

پس R، ۶ عضوی است و چون رابطهٔ هم ارزی است؛ پس به صورت زیر است:

$R = \{(a,a)(b,b)(c,c)(d,d)(e,e)(f,f)\}$

۱۷. گزینهٔ (۱) صحیح است؛ زیرا:

خاصیت تقارنی ندارد $\Rightarrow ۱R۲ , ۲ \not R ۱$

خاصیت انعکاسی ندارد $\Rightarrow ۳ \not R ۳$

خاصیت تعدی ندارد $\Rightarrow (۱R۲ , ۲R۳) , ۱R۳$

۱۸. گزینهٔ (۱) صحیح است؛ زیرا:

کافی است ابتدا ۱ شاخه از گل نوع اوّل و چهار شاخه از گل نوع چهارم برداریم، که در این صورت، حالا فقط ۴ شاخه از ۹ شاخه باقی‌مانده است که باید به صورت آزاد، از بین ۵ نوع گل انتخاب شوند، که این تعداد انتخاب، برابر است با $\binom{۴+۴}{۴}$ یا $\binom{۸}{۴}$

۱۹. گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۳}{۴} \quad (۱)$

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{۱}{۳}$

$\Rightarrow P(B) = ۳P(A \cap B) \quad (۲)$

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{۱}{۴}$

$\Rightarrow P(A) = ۴P(A \cap B) \quad (۳)$

$(۱), (۲), (۳) \Rightarrow ۴P(A \cap B) + ۳P(A \cap B)$

$- P(A \cap B) = \frac{۳}{۴} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{۱}{۸}$

$$\begin{cases} P(A \cap B) = \frac{۱}{۸} \\ \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{۱}{۴} \end{cases} \Rightarrow P(A) = \frac{۱}{۲}$$

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۸} = \frac{۳}{۸}$

۲۰. گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا:

در صورت انتخاب جعبهٔ اوّل، احتمال آن که مهرهٔ سفید بیرون آید، برابر $\frac{۵}{۷}$ است و در صورت انتخاب جعبهٔ دوم، همین احتمال برابر $\frac{۷}{۱۲}$ است؛ پس طبق قانون احتمال کل داریم:

$P(A) = \sum_{i=۱}^{n} P(Bi) \times P(A|B!)$

$= P(B_۱) \times P(A|B_۱) + P(B_۲) \times P(A|B_۲)$

$= \frac{۱}{۲} \times \frac{۵}{۷} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۷}{۱۲} = \frac{۶۷}{۸۴}$

هندسهٔ تحلیلی/

مؤلف: محمدهاشم رستمی

هندسه تحلیلی بیست و پنجمین کتاب از سری کتاب های کوچک ریاضی است که در آن مباحث بردارها، خط و صفحه در فضای IR^3 آمده است. در این کتاب مفهوم های مربوط به هر یک از این مبحث ها، با مثال ها و پرسش های چهارگزینه ای کلیدی که در سطحی بالاتر از کتاب درسی، ولی در ارتباط با آنها می باشد، ارائه گردیده است. همچنین پس از ارائه هر مفهوم، تمرین هایی برای حل و پرسش های چهارگزینه ای هماهنگ با آن مفهوم، آورده شده است. سعی بر این بوده است که کتاب، جنبهٔ خودآموز داشته باشد و بتواند نیاز دانش آموزان دورهٔ پیش دانشگاهی و داوطلبان کنکور را برآورده کند.

تثلیث زاویه، تربیع دایره/

مؤلفان: پرویز شهریاری/
سیامک جعفری

سه مسألهٔ «تربیع دایره»، «تثلیث زاویه» و «تضعیف مکعب»، که از همان دوران باستان و در بین ریاضیدانان یونانی مطرح شد، توانست بیش از دو هزار سال ریاضیدانان حرفه ای و هم علاقه مندان به ریاضی را به خود مشغول کند. هنوز هم هفته ای نمی گذرد که دست نوشته ای از جای جای سرزمین ایران به ما می رسد که نویسندهٔ آن، مدعی حل کامل یکی از این مسأله ها به یاری خط کش و پرگار شده است. بیشتر این نامه ها به «تربیع دایره» و «تثلیث زاویه» مربوط است. برخی از این راه حل ها درست، ولی به حالت های خاص و برخی دیگر به کلی نادرست است و در کل، می توان گفت که همهٔ آنها به بیراهه رفته اند.

برای این که این تلاش بیهوده و تا حدی «بیمارگونه» جوانان ما را به خود مشغول ندارد، وجود کتابی که بتواند آنها را به راه درست بکشاند، لازم می نمود و تهیه و چاپ کتاب حاضر، به همین هدف خدمت می کند.

تقویم ریاضی دانش آموزی/

مؤلفان: غلامرضا یاسی پور/
حمیدرضا امیری

در این تقویم که بر اساس نـه مـاه سـال تحصیلی تألیف شده، بـرای هـر روز، یـک مسأله انتخاب شده است کـه دانـش آمـوز و خوانندهٔ محترم و علاقه مند به مسائل ریاضی، می تواند در ساعت های فراغت، به تفکر روی یک مسأله و حل آن بپردازد. در این تقویـم، اطلاعات جامعی دربارهٔ مجله های ریاضی و تاریخچـهٔ آنهـا، و همچنیـن مصاحبه هـای با ارزشی با پیشکسوتان ریاضی انجام شده و در اختیار شما قرار گرفته است.

هر روز علاوه بر مسألـهٔ ریاضی مربوط به آن روز ـ که البته حل تمام مسائل در انتهای تقویم آورده شده ـ جمله های زیبا و آموزنده ای دربارهٔ اهمیت علم و دانش و علم انـدوزی از معصومین علیهم السلام، زینت بخش مطالب شده و نیز جمله هایی از ریاضیدانان بزرگ در این زمینه به چشم می خورد.

از آن جا که این تقویم بتواند در هر سـال تحصیلی قابل استفاده باشد، از ذکر روزهای هفته خودداری شده و فقط به قید تاریخ هر روز اکتفا شده است، که شما با توجه به روزی که مربوط به آن تاریخ است، جـدول روبـه روی تاریخ را علامت می گذارید.

ناشر برگزیده
سالهای ۷۵،۷۳
۷۹

انتشارات مدرسه منتشر کرده است
سری کتابهای «از مدرسه تا دانشگاه»

هدف از چاپ سری کتابهای «از مدرسه تا دانشگاه» پر کردن خلأ موجود بین کتابهای کمک درسی و کتابهای آمادگی برای کنکور است.

دانش آموزان با مطالعهٔ این سری کتابها، اطلاعات لازم، اعم از مفاهیم درسی، نکته های پنهان در لابه لای این مفاهیم و قضیه ها و مسائل مهم را کسب کرده و با پرسشهای چهارگزینه ای و حل تشریحی آنها و آزمونهای چهارگزینه ای آشنا می شوند، تا هم برای پاسخ گویی به پرسشهای تشریحی و هم برای شرکت در کنکورهای سراسری آمادگی پیدا کنند.

511670
کد ۱۰۴۶/۱
انتشارات مدرسه